UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Andresa Maria Justulin

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
RIO CLARO
2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

ANDRESA MARIA JUSTULIN

A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

Rio Claro - SP
2014

370.71 Justulin, Andresa Maria
J96f A formação de professores de matemática no contexto da resolução de problemas / Andresa Maria Justulin. - Rio Claro, 2014
254 f. : il., figs., tabs., quadros

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Professores – Formação. 2. Aprendizagens docentes. 3. Grupos de estudo. 4. Educação matemática. 5. Matemática - Estudo e ensino. 6. Formação no local de trabalho. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

ANDRESA MARIA JUSTULIN

A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic (orientadora)
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Norma Suely Gomes Allevato
UNICSUL/ São Paulo (SP)

Profa. Dra. Adair Mendes Nacarato
USF/ Itatiba (SP)

Prof. Dr. Dario Fiorentini
UNICAMP/ Campinas (SP)

Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Rio Claro, 03 de dezembro de 2014.

Aos meus pais Lourdes e João,
meus verdadeiros tesouros.

À minha querida avó Elvira.

AGRADECIMENTOS

Após anos de estudo, muita dedicação e trabalho chego ao fim. Gostaria de agradecer a cada uma das pessoas que me acompanharam e fizeram parte dessa minha história. Certamente, não conseguiria aqui nomear e agradecer a todos. Mesmo assim não posso deixar de agradecer...

A Deus... por ter me dado a vida e as forças para chegar até aqui...

Aos meus pais, Lourdes e João, por terem me ensinado as bases e o valor da educação...

À minha orientadora, Lourdes de la Rosa Onuchic, exemplo de uma professora dedicada, exigente e comprometida com a Educação Matemática. Gostaria de agradecer cada palavra, cada discussão e toda a acolhida em sua casa, que possibilitaram o meu crescimento pessoal e profissional, bem como a construção de mais uma tese do grupo.

À minha valiosa banca de qualificação, Prof. Dr. Dario Fiorentini, Profa Dra Adair Mendes Nacarato, Profa Dra Miriam Godoy Penteado e Profa Dr
Norma Suely Gomes Allevato.

Ao Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas (GTERP). Em especial às amigas “irmãs” de orientação, Elizabeth, Fabiane, Rosilda, Tatiane e Fernanda e também à Beatriz, ao Roger, ao Nilton, à Malu e à Raquel.

À Dona Odete Calabria Ribeiro pela acolhida em sua casa em Rio Claro e por todo carinho e amizade.

À minha família, em especial, aos meus irmãos Carlos e Andréa e aos meus sobrinhos Rafael, Bianca e Felipe. Peço desculpa pela ausência e pela impaciência, nos momentos difíceis...

Aos amigos e aos professores da Pós-Graduação pelas discussões e crescimento possibilitados durantes as disciplinas e nos diversos momentos de coletividade.

Aos meus amigos de fora do meio acadêmico, em especial à Regiane, por me apoiarem nesses quatro anos, por enxugarem minhas lágrimas e me darem forças quando tudo parecia “pesado demais” para mim...

Ao meu príncipe de olhos azuis...

À Escola Estadual Dr Tolentino Miraglia, da qual tive que me afastar para concluir meu trabalho de doutorado.

Aos professores e futuros professores de Matemática que participaram dos grupos de estudo.

Aos funcionários da Pós-Graduação, em especial à Inajara, pela amizade e carinho com que trata cada um dos alunos da pós.

Às funcionárias Ana e Elisa, do departamento de Matemática, pela ajuda e apoio na execução dos cursos de extensão.

À UNESP, por ter possibilitado toda minha formação acadêmica.

À CAPES pelo apoio financeiro parcial na realização deste trabalho de doutorado.

Muito obrigada!

O lucro do nosso estudo é tornarmo-nos melhores
e mais sábios.
O que vale na vida não é o ponto de partida e sim
a caminhada.
Caminhando e semeando, no fim terás o que
colher.
CORA CORALINA

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo investigar aprendizagens profissionais docentes que se manifestam em um grupo de estudo apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Para isso foram constituídos dois grupos de estudo: o primeiro deles, formado por sete professores de Matemática, em exercício, de uma escola estadual e o segundo, formado por seis futuros professores de uma universidade pública do interior do estado de São Paulo. A pesquisa, de caráter qualitativo, apoiou-se no Modelo Metodológico de Romberg (1992). Os instrumentos utilizados na pesquisa de campo foram questionários, entrevistas, observação participante, além dos problemas propostos nos grupos de estudo. A Resolução de problemas permeou as discussões e, em especial, foi trabalhada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nessa Metodologia, o problema é o ponto de partida para a construção do conhecimento matemático. Ele é o gerador de novos conceitos, procedimentos e conteúdos. Os próprios integrantes, professores e futuros professores, puderam escolher o que deveria ser trabalhado nos 15 encontros de cada grupo usando, como critério, aqueles conteúdos que os alunos mais sentem dificuldade em compreender durante sua escolaridade. Foram eles: Álgebra, Números Racionais, Medida, Logaritmos, Geometria Analítica e Trigonometria. Destaca-se que os mesmos conteúdos indicados pelos professores em exercício também foram considerados pelos futuros professores de Matemática. Para análise dos dados foram construídos quatro eixos temáticos: A Resolução de Problemas na aprendizagem e na ressignificação dos conhecimentos matemático e didático-pedagógico na formação do professor de Matemática; a Problematização da Resolução de Problemas nas práticas de aprender e ensinar Matemática na sala de aula; a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na formação do professor de Matemática; os grupos de estudo sobre Resolução de Problemas como espaços de aprendizagem de professores e de futuros professores. Os resultados indicaram que a referida Metodologia, trabalhada nos grupos de estudo, possibilitou a mobilização do conhecimento matemático dos participantes ao trabalhar os problemas, como os de variável dependente e independente e de Número Racional, bem como a mobilização de saberes didático-pedagógicos, ao refletir sobre suas experiências de sala de aula. Esses saberes explicitaram que as aprendizagens profissionais docentes relacionaram-se aos aspectos teóricos, didáticos e metodológicos referentes aos conteúdos matemáticos trabalhados e, também, à visão de escola, de mundo e de sujeito que se pretende formar. Os participantes experienciaram um novo caminho para trabalhar a Matemática através da Resolução de Problemas. Os grupos de estudo revelaram-se como importantes espaços formativos no interior da escola básica ou da universidade e, também, como potencializadores do desenvolvimento profissional desses professores.

Palavras-chave: Aprendizagens docentes. Formação de Professores. Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Grupos de estudo. Educação Matemática.

Este estudo recebeu apoio financeiro parcial da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior).

ABSTRACT

The purpose of the present study was to investigate teachers' professional learning that arises in a study group grounded on Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving. To this end, two study groups were formed: the first one, involved seven active Mathematics teachers from a state public school, and the second one involved six future teachers from a public university in São Paulo state countryside. The research has a qualitative approach and it is grounded on Romberg's Methodological Model (1992). The instruments used in the field research were questionnaires, interviews, participant observation and the proposed problems in the study groups. Problem Solving was the focus of the discussions, particularly the Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving. Such Methodology considers the problem as the starting point for building Mathematical knowledge. It is the generator of new concepts, procedures and contents. The participants themselves, teachers and future teachers, were allowed to choose what should be developed in the fifteen meetings of each group by using, as a criterion, the most difficult contents for the students to understand during their school years, namely Algebra, Rational Numbers, Measure, Logarithms, Analytical Geometry and Trigonometry. It is important to point out that the same contents chosen by the active teachers were also considered by the Mathematics future teachers. For data analysis, four thematic axes were built: Problem Solving in learning and in the resignification of mathematical and didactic-pedagogical knowledge in Mathematics teacher education; the problematization of Problem Solving in Mathematics learning and teaching practices in classrooms; the Methodology of Mathematics Teaching-learning-evaluation through Problem Solving in Mathematics teacher education; the study groups about Problem Solving as learning spaces for teachers and future teachers. The results show that such Methodology developed in the study groups favored the mobilization of the participants' mathematical knowledge when they worked on the problems, such as dependent and independent variables and Rational Numbers, as well as the mobilization of didactic-pedagogical knowledge when they thought over their experience in classroom. Such knowledge shows that the teachers' professional learning is related to theoretical, didactic and methodological aspects regarding the developed mathematical contents and also the view of the school, the world and the subject that they are intended to achieve. The participants experienced a new way to work on Mathematics through Problem Solving. The study groups turned out as important educational spaces in Elementary School or in the University, as also as promoters of those teachers' professional development.

Keywords: Teachers' learning. Teacher Education. Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving. Study groups. Mathematics Education.

The present study has received partial financial support from CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior).

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A resolução de problemas[1] sempre esteve no cerne da Matemática[2]. Historicamente, pode-se perceber que o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, como uma construção do homem, sempre esteve ligado a algum problema que deveria ser resolvido e cujo conhecimento até então dominado não seria suficiente.

O ensino de Matemática, nas escolas ainda hoje, parece distanciar-se de sua própria origem. Em geral, os professores trabalham a teoria matemática e, posteriormente, suas aplicações. Dessa forma, os alunos ficam submetidos à técnica operatória matemática em detrimento da construção de novos conhecimentos e ao desenvolvimento de um pensamento matemático crítico. Como consequência, os resultados das avaliações oficiais, como a Prova Brasil e o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) indicam que os alunos apresentam dificuldade em resolução de problemas.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode ser vista, nesse cenário, como um caminho para o professor mediar a construção de conhecimentos por parte de seus alunos. Por meio desta Metodologia, o aluno deve ser visto como um construtor ativo de seus conhecimentos. O professor deve selecionar um problema para sua turma, que possa fazê-los partir do que já conhecem e relacionar esse conhecimento para resolvê-lo. Esse trabalho, em sala de aula, deve ser promovido em grupos. A partir da discussão, das resoluções elaboradas pelos grupos durante a plenária, o professor deve instigar seus alunos à busca por um consenso e, em seguida, deve fazer a formalização do conteúdo matemático construído.

Com base nas ideias apresentadas, a presente pesquisa tem por objetivo geral investigar aprendizagens profissionais docentes que se manifestam em um grupo de estudo apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Os grupos de estudo ou grupos do tipo colaborativo têm sido explorados por pesquisas como uma importante possibilidade aos programas de formação de professores. Por meio de grupos colaborativos rompe-se com o modelo tradicional dos cursos oferecidos aos professores, sem considerar suas experiências e participação ativa. As propostas dos tradicionais cursos parecem não surtir o efeito desejado por quem as implementa, pelo fato de

[1] Será usado Resolução de Problemas, com RP maiúsculos, quando se referir à disciplina ou à Teoria e resolução de problemas, com rp minúsculos, quando se referir ao ato de resolver problemas.
[2] Esclarece-se ao leitor que será usada, neste texto, a palavra Matemática, em maiúsculo, quando se referir à disciplina ou área do conhecimento.

que não são problematizadas as dificuldades e as experiências do dia a dia desses professores. Ao contrário, no modelo conhecido como racionalidade técnica são transmitidas informações e teorias que os professores devem aplicar em sala de aula. Com isso, apesar dos docentes frequentarem cursos de formação continuada, pouca mudança ocorre no interior das salas de aulas.

Ao contrário desses cursos de capacitação, buscava-se a constituição de um grupo no interior da escola para estudo e reflexão. A escola envolvida localiza-se no interior do estado de São Paulo e atende alunos dos níveis Fundamental e Médio. Contou-se, para isso, com o apoio da Diretora e da Coordenadora que permitiram a constituição de um grupo de professores de Matemática, no horário da Aula de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPC). Assim, os professores, conhecendo a realidade escolar e suas necessidades profissionais e pessoais, indicaram conteúdos matemáticos julgados difíceis de trabalhar em sala de aula. A partir deles, os encontros foram estruturados, sendo apoiados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Os professores vivenciaram novas possibilidades para trabalhar os conteúdos por eles indicados e puderam fazer uso da referida Metodologia. Ressalta-se que o grupo possibilitou discussões, compartilhamento de experiências e aprendizado pessoal aos seis professores participantes e à professora-pesquisadora.

Pode-se notar, também na formação inicial de professores, que o modelo da racionalidade técnica é comum. Com isso, muitas vezes, os futuros professores saem da Licenciatura, sem repensar suas ideias prévias sobre sala de aula e sobre o que é ser professor de Matemática. O foco de muitos cursos desses cursos de Licenciatura é a transmissão de saberes disciplinares em detrimento dos demais saberes profissionais docentes. Na direção de um rompimento desse modelo, o grupo de estudo também se mostra apropriado como um momento de discussão e de reflexão não somente para a mobilização de saberes disciplinares, mas como potencializador de aprendizagens profissionais.

O grupo formado pelos alunos da Licenciatura em Matemática reuniu-se na própria universidade e refletiu sobre pontos considerados difíceis enquanto eram alunos da Educação Básica, visando ao seu futuro trabalho em sala de aula como professor. Os seis participantes estavam, em sua maioria, no 3º ano de graduação, e ainda não haviam participado de estágios.

Os futuros professores puderam vivenciar e fazer uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Esses participantes demonstraram entusiasmo, refletiram sobre como pretendem desenvolver suas futuras aulas de Matemática e sobre como foram suas aulas de Matemática, enquanto alunos da Educação Básica.

Para a condução da pesquisa, optou-se pelo uso do Modelo Metodológico de Romberg que orienta o pesquisador ao longo do desenvolvimento de seu trabalho. Assim, em um primeiro momento, identificou-se que o fenômeno de interesse desta pesquisa seria a formação de professores no que se refere tanto à formação inicial, quanto à formação continuada de professores em exercício. Após a criação de um modelo preliminar, contendo um esquema que relaciona o fenômeno de interesse às variáveis-chave da pesquisa, identificaram-se dois campos teóricos que fundamentariam esta pesquisa: a Formação de Professores e a Resolução de Problemas.

Com base nessa fundamentação teórica, houve a reelaboração do Modelo Preliminar que sofreu algumas alterações a partir desse aprofundamento teórico. Com isso, foi obtido um Modelo Modificado, que indicou a trajetória da pesquisa. Ao se examinar esse novo modelo, foi elaborada a pergunta da pesquisa:

Que aprendizagens profissionais docentes se manifestam em um grupo de estudo apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Pode-se considerar que a originalidade desta tese de doutorado encontra-se no trabalho da formação de professores em grupos de estudo fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Foi possível concluir que a referida Metodologia pode contribuir com a formação de professores não apenas através da construção de conhecimentos novos, mas por possibilitar a reflexão e a reconstrução de conhecimentos matemáticos, pedagógicos do conteúdo e experienciais.

Quanto à organização desta tese, ela se compõe de oito partes, além das referências e apêndices apresentados em CD-ROM:

INTRODUÇÃO

A primeira parte desta tese faz uma apresentação do objeto de estudo da pesquisa, destacando-se a formação de professores em grupos de estudo, apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Após essa explanação inicial é apresentada a pergunta da pesquisa e, posteriormente, é resgatado, em linhas gerais, o conteúdo de cada parte constituinte desta tese.

CAPÍTULO 1 - O PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Neste capítulo apresenta-se em detalhes o Modelo Metodológico de Romberg e como esta pesquisa insere-se nele. Destaca-se, ainda, a trajetória pessoal e profissional da pesquisadora e o percurso que a conduziu a esse objeto de estudo. São apresentados, ao final deste capítulo, os campos teóricos identificados a partir do fenômeno de interesse e das variáveis-chave relacionadas a ele.

CAPÍTULO 2 - FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Este capítulo aborda a formação de professores, destacando-se os saberes profissionais docentes. Além disso, são tratados aspectos da formação inicial e da formação continuada do professor, da perspectiva do desenvolvimento profissional e da escola como espaço de formação. Apresentam-se, ainda, os grupos de estudo como possibilidades na formação de professores. Por fim, são destacadas as diferentes formas de organização do trabalho do professor no interior da escola, bem como algumas sugestões de como organizar um grupo de estudo.

CAPÍTULO 3 - A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O capítulo 3 refere-se à Resolução de Problemas. Inicialmente, faz-se um recorte da Resolução de Problemas na Educação Matemática do século XX, as contribuições do Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos (NCTM)[3] e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), os diferentes modos que os professores trabalham com resolução de problemas, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o papel do grupo nas aulas de resolução de problemas e as pesquisas do Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas (GTERP).

---

[3] *National Council of Teachers of Mathematics.*

CAPÍTULO 4 - O MODELO MODIFICADO, A PERGUNTA DA PESQUISA, ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Com base na fundamentação teórica apresentada nos capítulos dois e três, houve a reelaboração do Modelo Preliminar que sofreu algumas alterações, dando origem ao Modelo Modificado. Ao se examinar esse novo modelo, foi elaborada a pergunta da pesquisa, apresentada previamente.

No conteúdo deste capítulo também foram idealizados a estratégia e o procedimento gerais. São utilizadas, nesse processo, estratégias auxiliares e seus respectivos procedimentos auxiliares, que ajudaram a pesquisadora com “o quê?” e “o como?” fazer. Em seguida, cada um dos procedimentos auxiliares foram postos em ação.

CAPÍTULO 5 - OS ENCONTROS DOS GRUPOS DE ESTUDO

Após a criação dos projetos, tendo como base os conteúdos indicados pelos professores e futuros professores de Matemática como sendo difíceis de entender pelos alunos da Educação Básica, cada um deles foi posto em ação. Neste capítulo, inicialmente foram apresentados os dados pessoais e/ou profissionais de cada um dos integrantes dos grupos e, depois, são descritos cada um dos 15 encontros promovidos.

CAPÍTULO 6 - ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Este capítulo está organizado em várias partes. Na primeira delas são elencados quatro eixos temáticos que auxiliaram no processo de análise dos dados. São eles: (1) a Resolução de Problemas na aprendizagem e na ressignificação dos conhecimentos matemático e didático-pedagógico na formação do professor de Matemática; (2) A problematização da Resolução de Problemas nas práticas de ensinar e aprender Matemática na sala de aula; (3) A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na formação do professor de Matemática; e (4) Os grupos de estudo sobre Resolução de Problemas como espaço de aprendizagem dos professores e de futuros professores. No entanto, sentiu-se necessidade de se estabelecer sub-eixos em cada um deles, com a finalidade de melhor analisar aspectos particulares do eixo-temático em questão. No final deste capítulo, as análises foram aprofundadas e ampliadas através de discussão em relação à literatura apreciada nos Capítulos 2 e 3, que tratam, respectivamente, da formação de professores e da Resolução de Problemas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na última parte desta tese, a pergunta da pesquisa é retomada. São apresentadas as principais compreensões e conclusões construídas ao longo do trabalho e que foram orientadas pela referida pergunta. Além disso são enunciados alguns limites notados durante a implementação dos projetos, bem como as contribuições desta tese para a área de Educação Matemática. Por fim, entendendo que este trabalho seja, talvez, "um retalho único e original costurado a outros", são indicados novos caminhos e possibilidades para futuras pesquisas a partir dele.

CAPÍTULO 1 - O PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

> A pesquisa científica exige criatividade, disciplina, organização e modéstia, baseando-se no confronto permanente entre o possível e o impossível, entre o conhecimento e a ignorância.
>
> MIRIAM GOLDENBERG

Durante a realização de uma pesquisa científica, todo pesquisador trilha um caminho árduo. Desde a descoberta de um tema que lhe desperta a curiosidade em saber mais até as conclusões de seu trabalho, faz-se necessário que o pesquisador caminhe por meios que lhe possibilitem a realização de sua pesquisa. Mas o que se entende neste trabalho por pesquisa? Considera-se que “A pesquisa científica é uma investigação metódica acerca de um determinado assunto com o objetivo de esclarecer aspectos do objeto em estudo.” (BASTOS; KELLER, 1995, p. 53).

A finalidade de uma pesquisa, então, é a busca de uma explicação sobre um problema ou situação na qual não se tem uma resposta imediata. Daí surge motivação do pesquisador em buscar explicações claras sobre suas questões. Esse processo não acontece de qualquer maneira, pesquisar consiste em uma busca metódica de saberes ou compreensões na qual “Os três elementos – dúvida/problema, método científico e resposta/solução – são imprescindíveis...” (CERVO et al., 2010, p. 57).

Buscando orientar as ações dos pesquisadores, Thomas A. Romberg, que é professor Emérito de Currículo e Ensino de Matemática na Faculdade de Educação da Universidade de Wisconsin-Madison e membro do NCTM desde a década de 1980, estruturou as principais atividades realizadas pelos pesquisadores.

Esse autor ficou conhecido no grupo GTERP, da UNESP de Rio Claro, através de seu artigo *Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa* [4], publicado no *Manual de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem de Matemática* (1992, p. 49-64)[5]. A partir de então, as ideias desse autor passaram a orientar o percurso metodológico das pesquisas de mestrado e doutorado no GTERP.

---

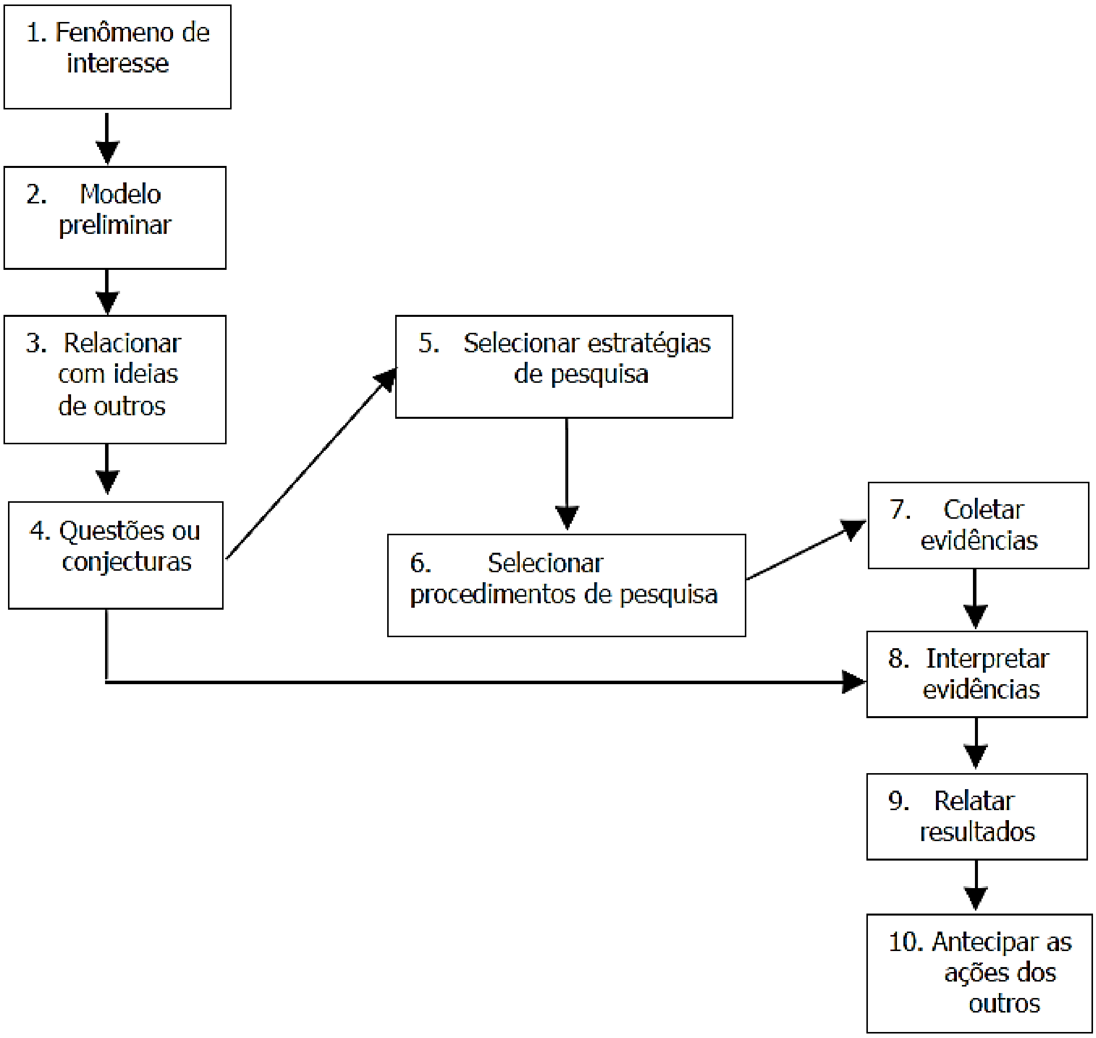
[4] *Perspectives on Scholarship and Research Methods*. Este artigo foi traduzido por Onuchic e Boero (2007) no Boletim de Educação Matemática (BOLEMA) de número 27, p. 93-139.

[5] *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.*

A estrutura apresentada por Romberg (1992) mostra-se extremamente vantajosa, já que indica ao pesquisador a localização em que ele está no trajeto de sua pesquisa. A figura 1 traz a sequência das dez atividades que devem ser realizadas por todo pesquisador. É importante destacar que o autor declara que não há nada de exclusivo na lista apresentada e que todo livro de Metodologia traz um conjunto de atividades semelhantes. Mas, ao esquematizar e apresentar essas ações, Romberg pretendia ressaltar alguns problemas comuns no processo de pesquisa por pessoas inexperientes e possibilitar a discussão sobre suas tendências.

1.1 Fluxograma que descreve as atividades de pesquisa e como elas estão relacionadas

Figura 1 - Atividades de pesquisa e como elas estão relacionadas



Fonte: Romberg (1992)

A sequência dessas dez atividades pode ser um valioso guia para o pesquisador. Entretanto, Romberg (1992) enfatiza que as atividades não necessariamente precisam ser seguidas na ordem apresentada. Abaixo, serão explicitadas cada uma das etapas:

<u>1º Bloco</u>

Este primeiro bloco envolve as atividades mais importantes:

1) *Identificar o Fenômeno de Interesse.* Corresponde a uma curiosidade inicial sobre um fenômeno particular que se quer estudar.

2) *Construir um Modelo preliminar.* O pesquisador faz suposições sobre as variáveis-chave do fenômeno de interesse e de possíveis relações entre os mesmos. A partir daí há um modelo que lhe serve como um ponto de partida.

3) *Relacionar o fenômeno e o modelo às ideias de outros.* Aqui, o pesquisador deve examinar, na literatura pertinente à área de seu fenômeno de interesse, o que outras pessoas pensam e determinar se essas ideias podem esclarecer, ampliar ou modificar o modelo proposto.

4) *Levantar questões específicas ou fazer conjecturas baseadas na razão.* Este é um passo-chave no processo de pesquisa para Romberg (1992). Ao examinar um fenômeno surgem perguntas ou conjecturas relacionadas ao fenômeno de interesse e ao modelo preliminar criado, e decidir quais perguntas devem ser investigadas não é fácil.

<u>2º Bloco</u>

5) *Selecionar estratégias de pesquisa para coletar evidências.* As questões selecionadas, a visão de mundo na qual as mesmas estão situadas e o modelo preliminar construído poderão levar à decisão de que métodos devem ser utilizados. Além disso, estratégias auxiliares poderão ser criadas.

6) *Selecionar procedimentos específicos.* Neste passo, as técnicas ensinadas, em cursos de Métodos de Pesquisa, assumem um importante papel: a seleção dos participantes, a coleta das informações (entrevista, pergunta, observação, teste), a organização da informação coletada, e assim por diante.

3º Bloco

7) *Coletar evidências.* No instante em que se tenha decidido coletar informações para construir um argumento considerando as perguntas feitas, este passo deve ser feito imediatamente à implementação do projeto.

8) *Interpretar evidências.* Nesse momento, o pesquisador analisa e interpreta as evidências que foram coletadas. Um número grande de informações são coletadas e cabe ao pesquisador interpretá-las frente ao seu problema de pesquisa.

9) *Relatar resultados.* Considerando-se que a Educação Matemática é um campo de pesquisa, o pesquisador tem a responsabilidade de informar a seus pares sobre a pesquisa realizada e ouvir seus comentários e críticas.

10) *Antecipar a ação de outros.* A partir dos resultados de uma pesquisa, cada investigador está interessado no que virá depois e deveria antecipar ações posteriores. É como se o pesquisador apontasse quais desdobramentos poderiam surgir após localizar sua pesquisa numa cadeia de investigações.

O conjunto dessas dez atividades é considerado, por nós, como Metodologia da Pesquisa, onde se entende que:

> Além de ser uma disciplina que estuda os métodos, a metodologia é também considerada como modo de conduzir a pesquisa. Neste sentido, a metodologia pode ser vista como conhecimento geral e habilidade que são necessários ao pesquisador para se orientar no processo de investigação, tomar decisões oportunas, selecionar conceitos, hipóteses, técnicas e dados adequados. (THIOLLENT, 2008[6], p.28, grifo nosso).

1.2 Das minhas experiências profissionais ao meu problema de pesquisa[7]

Ingressei precocemente no magistério. Em 1998, aos 15 anos, fui estudar no CEFAM[8] onde se iniciaram as discussões e reflexões sobre Educação e sobre o que significaria ser professor num país em que, cada vez mais, se desvaloriza esse ofício.

[6] A data apresentada refere-se à edição do livro consultado.
[7] Será utilizado o texto em primeira pessoal do singular, nesta seção, por apresentar as experiências da pesquisadora.
[8] Centro de Formação Especifica do Magistério.

Decidi continuar. Em 2001, já trabalhando na Educação Infantil, fui fazer Licenciatura em Matemática. Sempre me encantei com os números e percebia, cada vez mais, que as crianças gostavam dos conceitos e problemas matemáticos. Foi assim que comecei a me questionar "Quais as atitudes dos alunos em relação à Matemática?" "Existe essa tal Matemafobia?".

Em 2004 desenvolvi um projeto de Iniciação Científica na Educação Infantil e pude constatar que as atitudes dos alunos, da amostra analisada, nessa faixa etária, eram positivas. Mas, outras pesquisas como a de Brito (1996) indicavam que com o passar dos anos na escola, os alunos iam apresentando atitudes mais negativas em relação à Matemática.

Em 2005 comecei a ministrar aulas na rede estadual de São Paulo e, no dia a dia, sentia desmotivação por parte dos alunos, desinteresse e até certa "aversão" realmente. Um conteúdo chamava minha atenção: Números Racionais, Frações. Os alunos apresentavam muita dificuldade e pareciam achar esse conteúdo muito difícil.

Diante das minhas inquietações em 2007, meu trabalho de mestrado (JUSTULIN, 2009) tratou das atitudes em relação à Matemática no Ensino Médio e as relações entre gênero, série e desempenho na solução de exercícios e problemas envolvendo frações. Os resultados evidenciaram que os participantes se saíram melhor nos exercícios que deveriam ser solucionados utilizando-se a técnica do M.M.C. (Mínimo Múltiplo Comum). Na resolução de problemas, os alunos encontraram muitas dificuldades, desde a interpretação do enunciado até o tipo de operação que deveriam utilizar. Fiquei muito apreensiva sobre os motivos desses resultados tão insatisfatórios e comecei a me questionar sobre o papel do professor nesse processo.

"Será que os professores trabalham com resolução de problemas em sala de aula? Como?" foram meus questionamentos iniciais. A partir deles, tive contato com o grupo GTERP e com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

1.3 A minha pesquisa e o Modelo Metodológico de Romberg

Meu Fenômeno de Interesse

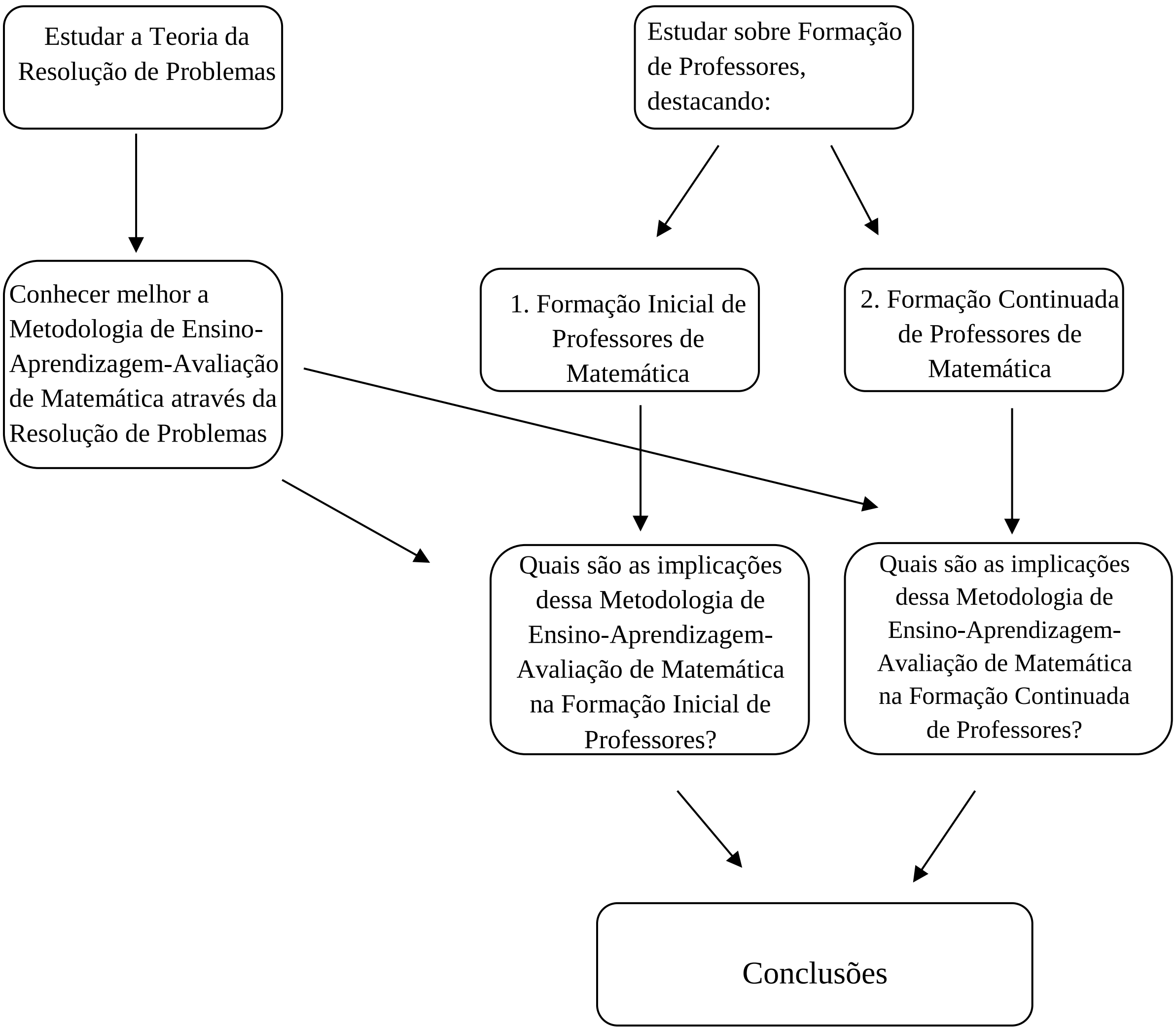
Minha trajetória profissional provocou inquietações sobre o papel do professor e a forma como ele trabalha com Resolução de Problemas em sala de aula. Para mim, não é possível esperar que o professor trabalhe de modo diferente, que utilize problemas em sala de aula como uma Metodologia de Ensino, se ele nunca vivenciou isso. No entanto, é preciso proporcionar aos professores a oportunidade de uma reflexão sobre a importância da Resolução de Problemas e o modo de utilizá-la em sala de aula.

O fenômeno de interesse desta pesquisa será o da *formação de professores* no que se refere tanto à formação inicial – a Licenciatura em Matemática, quanto à formação continuada de professores em exercício.

Modelo Preliminar

Após identificar a formação, inicial e continuada, de professores de Matemática como meu fenômeno de interesse, foram consideradas as variáveis-chave e o modo como elas se relacionam. A figura 2 ilustra esse processo.

Figura 2 - Modelo preliminar da pesquisa



Fonte: Elaborado pela autora

Relacionar com Ideias de Outros

Romberg (1992) considera que ao "relacionar o fenômeno e o modelo às ideias de outros", o pesquisador pode esclarecer, ampliar ou modificar o modelo proposto. Assim, este seria um momento em que se deve realizar uma pesquisa bibliográfica para, posteriormente, localizar a sua própria pesquisa no campo de estudo em que esta se insere.

De acordo com Fiorentini (1993):

> Apenas uma pequena parcela (de educadores matemáticos e pesquisadores) tem procurado verificar o que os colegas já investigaram a respeito de seu tema ou problema de pesquisa. Alguns justificam sua prática dizendo que os outros trabalhos não possuem o mesmo referencial teórico ou que não se inserem na mesma linha de pesquisa. Ora, não consultamos e citamos outros trabalhos apenas para lhes dar continuidade ou para buscar apoio às nossas idéias. Fazemos isso também para questionar ou até refutar seus pressupostos ou suas conclusões e encaminhamentos. (p.56).

Sendo o meu fenômeno de interesse a Formação de Professores (Inicial e Continuada), ter-se-ia, a partir desse modelo preliminar, que Resolução de Problemas e Formação de Professores seriam "possíveis outros" que se apresentam nesta pesquisa.

Com base no fenômeno de interesse desta pesquisa e nas variáveis-chave relacionadas a ele, nesta tese são identificados dois grandes campos teóricos:

1. A Formação de Professores – no contexto tanto da Formação Inicial como da Formação Continuada. Além disso, nesta pesquisa, parte-se de uma concepção de formação de professores pautada na ideia de desenvolvimento profissional e em contextos colaborativos.
2. A Resolução de Problemas – como Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, capaz de gerar situações em sala de aula ou em contextos de formação de professores que possibilitem a construção de novos conceitos e conteúdos matemáticos e aprendizagens profissionais.

A cada um desses campos teóricos será destinado um capítulo. Após essa revisão de literatura e de "ouvir outros" que já trabalharam sobre a temática de estudo, é que a pergunta desta pequisa será identificada.

CAPÍTULO 2 – FORMAÇÃO DE PROFESSORES

> Ninguém começa a ser educador numa terça-feira às quatro horas da tarde. Ninguém nasce educador ou marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma educador.
>
> PAULO FREIRE

De acordo com Tardif (2013), desde os anos de 1980, há um movimento internacional pela profissionalização da educação. O autor, buscando entender esse movimento e suas consequências para o ensino e para o trabalho do professor, identificou três idades do ensino: a da vocação, a do ofício e a da profissão. A idade da vocação, reportada às origens do ensino escolar tal como o conhecemos, surgiu em um contexto religioso, predominante dos séculos XVI ao XVIII. Ensinar era uma atividade essencialmente reservada às mulheres e a atividade de ensinar era considerada uma importante missão. A formação das novas professoras ocorria na prática, pela experiência e imitação das professoras mais experientes.

Quando a educação, no século XIX, tornou-se laica, as professoras passaram a ser contratadas pelo estado e ganharam a oportunidade de ter uma carreira e um salário adequados. Na idade do ofício, surgiram as escolas normais e "o aprendizado da profissão passa pela prática, pela imitação e pelo domínio das rotinas estabelecidas nas escolas pelas professoras experientes, bem como pelo respeito às regras escolares." (TARDIF, 2013, p. 557).

Já o ensino na idade da profissão estaria ligado intimamente à universitarização, já que as universidades seriam as instâncias responsáveis por fornecer conhecimentos científicos que justificassem e legitimassem os atos profissionais. Ao se referir a uma profissão, Tardif (2010) destaca algumas características como: conhecimentos especializados e formalizados, longa formação de alto nível concluída com a obtenção de um diploma, conhecimentos pragmáticos voltados para a solução de situações problemáticas, competência e direito de usar seus conhecimentos, capacidade de avaliar o trabalho de seus pares, autonomia e discernimento em situações novas, formação contínua e continuada, responsabilidade do profissional sobre o mau uso de seus conhecimentos. Apenas com o desenvolvimento e a implantação dessas características no ensino e na formação de professores "o ensino deixará, então, de ser um ofício para tornar-se uma verdadeira profissão, semelhante à profissão de médico ou às profissões de engenheiro e de advogado." (TARDIF, 2010, p. 250).

Ainda, de acordo com Tardif (2013), “ a profissionalização do ensino induz a uma visão reflexiva do ato de ensinar: o ensino não é mais uma atividade que se executa, mas uma prática na qual devemos pensar, que devemos problematizar, objetivar, criticar, melhorar.” (p. 561).

No Brasil, esse movimento de universitarização pode ser notado quando a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB 9394/96, em seu artigo 62, dispôs que a formação de docentes para atuar na educação básica deveria ocorrer em nível superior, em curso de Licenciatura, de graduação plena. Com isso, buscou-se solucionar o problema de um grande número de professores sem habilitação para o exercício profissional do Magistério e excluir essa formação que ocorria também em nível médio.

No entanto, a universitarização não garante que o ensino tenha atingido a idade da profissão. Ela é apenas uma condição necessária, mas não suficiente. O campo da formação de professores vem ganhando destaque, a partir de um movimento mundial de reformas educacionais e estudos, dos quais destacam-se os realizados nos Estados Unidos, por Schön (1983,1987), Shulman (1986,1987), Zeichner (1993, 2010), Ball, Thames e Phelps (2008); na Espanha, por Pérez Gómez (1992), Garcia (1995) e Imbernón (1994, 2009, 2010, 2011); na França, por Perrenoud (2002); em Portugal, por Nóvoa (1995) e no Canadá, por Tardif (2010, 2013).

No Brasil, a formação de professores tem se constituído um vasto campo de pesquisas como assinalam os trabalhos de André (2004) e Passos (2009). Destacam-se, ainda, os trabalhos de Fiorentini (1994), que situou a formação de professores no campo da Educação Matemática; Nacarato et al (2003), que analisou pesquisas sobre grupos colaborativos na formação de professores de Matemática e Passos et al (2006), que realizou uma meta-análise de estudos brasileiros sobre o desenvolvimento profissional do professor de Matemática.

Antes de se abordar aspectos da formação inicial e continuada de professores de Matemática, serão apresentados quais seriam os saberes profissionais do professor, ou seja, quais seriam os saberes mobilizados pelo docente ao exercer sua profissão. Antes, destacar-se-á a opção pelo termo “saberes” e não por “conhecimentos” profissionais do professor, apesar de serem tratados muitas vezes como sinônimos, em alguns textos e pesquisas em educação. A definição adotada neste trabalho será a de que:

> “conhecimento” aproximar-se-ia mais com a produção científica sistematizada e acumulada historicamente com regras mais rigorosas de validação tradicionalmente aceitas pela academia; o “saber”, por outro lado, representaria um modo de conhecer/saber mais dinâmico, menos sistematizado ou rigoroso e mais articulado a

> outras formas de saber e fazer relativos à prática não possuindo normas rígidas de validação. (FIORENTINI; SOUZA JR; MELO, 2007, p. 312).

Destaca-se, ainda, de acordo com Nacarato et al (2003), que o termo "saber docente", no Brasil, é relativamente novo na literatura sobre formação de professores. De acordo com os autores, podem-se destacar três dimensões ao abordar o saber docente: (1) uma dimensão subjetiva, que se relaciona ao "saber-ser"; (2) uma dimensão do conhecimento acadêmico (do conteúdo matemático e das ciências da educação), que corresponde ao "saber"; e (3) uma dimensão da prática, correspondente ao "saber-fazer".

2.1 Os saberes profissionais do professor

Os Trabalhos de Shulman (1986, 1987), Nóvoa (1992, 1995), Perez (1999), Perrenoud (2002), Fiorentini e Nacarato (2005) e Tardif (2010) indicam que o professor apresenta saberes específicos de sua profissão. No caso do professor de Matemática não é só a formação acadêmica, nem apenas o conhecimento do ambiente escolar e seu funcionamento, que irão garantir uma prática educativa de sucesso.

Shulman (1986)[9] apontou a existência de três categorias de Conhecimento do professor: de *conteúdo*, *pedagógico do conteúdo* e *curricular*.

O primeiro deles envolve o domínio do conteúdo específico da área de conhecimento em que o professor é especialista. A diferença entre um bacharel e um professor de Matemática, por exemplo, é que este último precisa transformar o conhecimento matemático em conhecimento compreensível ao aluno.

A maneira como o professor "facilitará" o conteúdo para que o estudante possa compreendê-lo envolve o *Conhecimento pedagógico do conteúdo*. Segundo Shulman, esse se refere ao conhecimento que é objeto de ensino/aprendizagem e aos procedimentos didáticos. Além disso, relaciona-se a tudo que o docente lança mão para possibilitar a aprendizagem de um conteúdo específico (analogias, demonstrações, exemplos, explicações, contra-exemplos...) e, inclusive, às relações possíveis de serem feitas entre os novos conteúdos e o conhecimento prévio do aluno.

[9] O autor usa o termo *knowledge* que poderia ser traduzido como conhecimento ou saber. Usaremos a mesma tradução de Fiorentini, Souza Jr e Melo (2007), considerando "conhecimento" quando Shulman divide o conhecimento do professor em categorias que enfatizam o conteúdo relativo às matérias a ensinar. Utiliza-se a tradução "saber" para as categorias que expressam o saber do professor, no contexto da prática.

O Conhecimento *curricular* se refere ao conhecimento do currículo específico e conexo da disciplina, ou seja, quais conteúdos devem ser ensinados nos diferentes níveis e séries. Os materiais didáticos utilizados para se atingir a aprendizagem ao longo da escolaridade também fazem parte do Conhecimento curricular do professor.

Esses conhecimentos, de acordo com Shulman, podem apresentar-se na ação, de três formas: **proposicional, estratégico e de caso.** O **saber proposicional** ocorre pela apresentação de *fatos, princípios e máximas*. *"*Muito do que é ensinado aos professores está na forma de proposições." (SHULMAN, 1986, p. 10). O **saber estratégico** manifesta-se em situações práticas da sala de aula, quando o professor deve tomar decisões. Já o **saber de caso** refere-se ao conhecimento de um evento bem documentado e descrito, ou seja, exemplificam a teoria e expressam princípios práticos.

Em um estudo posterior, Shulman (1987) incluiu outras categorias de conhecimento do professor às anteriores apresentadas. Assim, de acordo com o autor, se os conhecimentos do professor fossem organizados em categorias em um manual ou enciclopédia, eles seriam:

- Conhecimento do conteúdo;
- Conhecimento pedagógico geral – que envolveria aspectos ligados aos princípios e estratégias gerais de manejo e organização da classe;
- Conhecimento do currículo – que abarcaria um domínio dos programas e dos materiais que, de acordo com Shulman (1987), serviriam de ferramentas para o ofício do professor;
- Conhecimento pedagógico do conteúdo – que corresponderia ao amálgama entre matéria e pedagogia. O domínio dessa categoria constitui uma esfera exclusiva dos professores e permite distinguir a compreensão de um especialista (ou de alguém que faz uso da Matemática) da compreensão do professor;
- Conhecimento dos alunos e de suas características;
- Conhecimento dos contextos educativos – que envolveria desde o funcionamento do grupo e da classe, a gestão e financiamento dos recursos educacionais até as características das comunidades e culturas; e
- Conhecimento dos objetivos, das finalidades e dos valores educativos, e de seus fundamentos filosóficos e históricos.

A partir dos trabalhos de Shulman e de sua categoria de *Conhecimento pedagógico do conteúdo*, o grupo liderado por Deborah Ball, na Universidade de Michigan, desenvolveu, dentre outras, a noção de *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)* – Conhecimento Matemático para Ensinar. Ball, Thames e Phelps (2008) trazem resultados de pesquisas envolvendo essa exploração e consideraram que apesar dos trabalhos de Shulman (1986, 1987) serem amplamente divulgados, o conhecimento pedagógico do conteúdo deveria ser mais explorado e especificado.

A referida pesquisa apresenta dois projetos que enfocam o ensino de Matemática e a Matemática usada para ensinar. Os autores consideram que "o conhecimento matemático necessário para ensinar não é menor do que aquele necessário por outros adultos[10]" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 396). Para exemplificar, os autores apresentam uma simples conta de subtração:

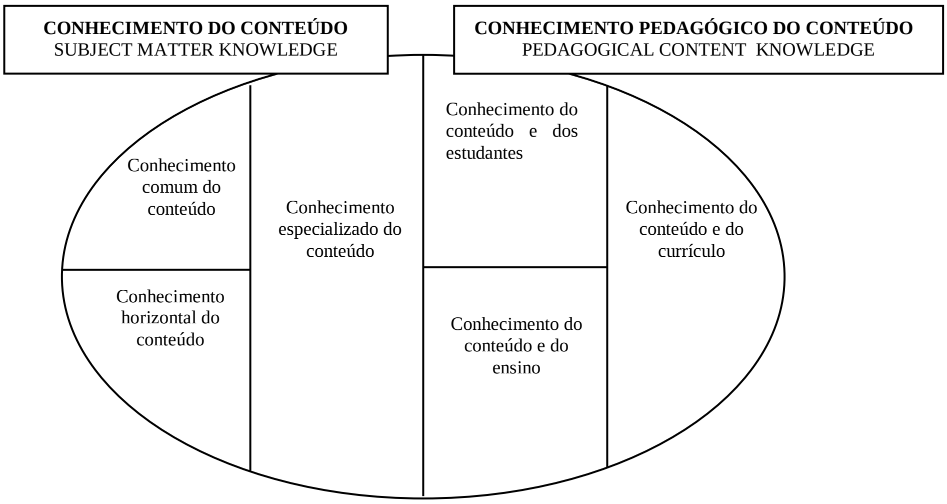
$$\begin{array}{r} 307 \\ \underline{-\ 168} \end{array}$$

Certamente, de acordo com os referidos autores, os leitores conhecem algum algoritmo para encontrar a resposta 139. O conhecimento matemático para essa tarefa é comumente conhecido e usado em contextos diversos. Entretanto, ser capaz de realizar esse procedimento é necessário, mas não suficiente para ensiná-lo. Para os autores supracitados, ensinar envolve mais do que identificar se uma resposta está correta ou não, requer a capacidade de identificar a fonte do erro matemático. Além disso, os professores deveriam ser capazes de identificar estratégias não padronizadas, utilizadas por seus alunos e de explicar o significado de conceitos e de procedimentos, selecionando exemplos adequados para isso. O professor deve ser capaz de levantar questionamentos como: *É legítimo fazer isso? Por quê? Isso funciona sempre? Isso é mais fácil para alguns números e mais difícil para outros? Como você descreve o método usado pelo aluno e como justificá-lo matematicamente?*

A pesquisa de Ball, Thames e Phelps (2008) propõe um diagrama que refina as categorias de Shulman:

[10] *The mathematical knowledge needed for teaching is not less than needed by other adults.*

Figura 3 – Domínios do conhecimento matemático para ensinar



Fonte: Adaptado da figura apresentada em Ball, Thames e Phelps (2008, p.403)

Ball, Thames e Phelps (2008) sugerem que a categoria *Conhecimento do conteúdo,* proposta por Shulman, seja subdividida em três categorias: Conhecimento comum do conteúdo[11], Conhecimento especializado do conteúdo[12] e Conhecimento horizontal do conteúdo[13]. Já a categoria *Conhecimento pedagógico do conteúdo*, de Shulman, também contemplaria outras três: Conhecimento do conteúdo e dos estudantes[14], Conhecimento do conteúdo e do ensino[15] e Conhecimento do conteúdo e currículo[16].

Em relação ao Conhecimento comum do conteúdo (CCK), o termo "comum" refere-se ao conhecimento matemático que também é utilizado em outras profissões. Esse subdomínio está presente quando o professor identifica uma resposta errada do aluno ou uma definição inadequada no livro didático, por exemplo. O Conhecimento especializado do conteúdo (SCK) é aquele conhecimento matemático utilizado no ensino. O professor de Matemática, ao dimensionar a natureza de um erro, ao responder os "porquês" dos alunos e ao encontrar exemplos para conceitos específicos, dentre outros, faz uso desse conhecimento. O subdomínio Conhecimento horizontal do conteúdo (HCK) envolve a consciência do professor, de como os tópicos ou temas matemáticos estão relacionados entre si ao longo do currículo.

---

[11] *Common content knowledge.*
[12] *Specialized content knowledge.*
[13] *Horizon content knowledge.*
[14] *Knowledge of content and students.*
[15] *Knowledge of content and teaching.*
[16] *Knowledge of content and curriculum.*

Em relação ao domínio do Conhecimento pedagógico do conteúdo, de Shulman, considera-se o Conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS) como o “conhecimento que combina saber sobre os alunos e saber sobre o conteúdo[17].”(BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 401). Os autores identificam esse domínio quando o professor: antecipa aquilo que ajudará no entendimento do aluno e aquilo que irá deixá-lo confuso, ou ainda, quando prevê o que os alunos acharão interessante e motivante, ao escolher um exemplo.

O Conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) é, segundo Ball e colegas (2008), o conhecimento que combina saber sobre o ensino e saber sobre o conteúdo. Ao escolher determinadas sequências de conteúdo, avaliar as vantagens ou desvantagens no uso de representações para ensinar um determinado tópico ou identificar as melhores metodologias e procedimentos, o professor faz uso desse conhecimento.

Os autores ainda chamam atenção para a *inclusão* provisória da categoria *Conhecimento curricular,* de Shulman (1986), dentro do domínio *Conhecimento pedagógico do conteúdo.*

> Nós temos provisoriamente alocado a terceira categoria de Shulman, conhecimento curricular, junto com conhecimento pedagógico do conteúdo. Isso é consistente com publicações posteriores de membros do grupo de pesquisa de Shulman (Grossman, 1990). Nós não estamos ainda certos de que essa pode ser uma parte de nossas categorias de conhecimento do conteúdo e do ensino ou se essa pode transpassar várias categorias ou ser uma categoria por si mesma[18]. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 403, tradução nossa).

De qualquer modo, essa categoria estaria ligada ao conhecimento dos objetivos educacionais, das avaliações ou dos níveis de ensino onde determinados temas são habitualmente ensinados.

Em uma outra linha, que contém aspectos teóricos e práticos da prática docente, são encontrados os trabalhos de Tardif et al (1998), Tardif e Lessard (2005) e Tardif (2010). Para este autor, o saber docente é “um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais.” (TARDIF, 2010, p. 36).

Tardif (2010) esclarece, ainda, que a noção de “saber”, para ele, “engloba os conhecimentos, as competências, as habilidades (ou aptidões) e as atitudes, isto é, aquilo que muitas vezes foi chamado de saber, saber-fazer e saber-ser.” (p. 255).

---

[17] *Knowledge that combines knowing about students and knowing about mathematics.*

[18] *We have provisionally placed Shulman´s third category, curricular knowledge, within pedagogical content knowledge. This is consistent with later publications from members of Shulman´s research team (Grossman, 1990). we are not yet sure whether this may be a part of our category of knowledge of content and teaching or whether it may run across the several categories or be a category in its own right.*

As diversas categorias dos saberes docentes e suas origens, de acordo com Tardif, são:

1) Saberes da formação profissional: relacionam-se ao conjunto de saberes transmitidos pelas instituições de ensino de formação de professores (Universidades). Também fazem parte desta categoria as doutrinas pedagógicas ou concepções sobre o ensino, que acabam orientando a prática pedagógica do professor;
2) Saberes disciplinares: referem-se à disciplina de ensino e são transmitidos pelas universidades através da formação (inicial e contínua) dos professores;
3) Saberes curriculares: referem-se aos saberes sociais definidos e selecionados pela escola como modelos e necessários para a formação da cultura erudita;
4) Saberes experienciais: são desenvolvidos por meio da experiência docente e validados por ela. “Eles incorporam-se à experiência individual e coletiva sob a forma de *habitus* e de habilidades, de saber-fazer e saber-ser.” (TARDIF, 2010, p.39).

Considerando-se os diferentes saberes profissionais do professor, faz-se necessário analisar como tem ocorrido a formação docente. A próxima seção investigará os conceitos de formação e desenvolvimento profissional e abordará aspectos específicos da formação inicial e continuada de professores de Matemática.

2.2 A Formação e o desenvolvimento profissional do professor

A palavra formação, em seu sentido comum, de acordo com Passos et al (2006), significa “dar forma”, utilizando para isso um modelo considerado ideal. Esse processo pressupõe a ação do formador e de uma instituição sobre um objeto de formação, em que este – o futuro professor ou professor em exercício - é passivo diante de sua própria formação.

Na década de 1980, o modelo conhecido como *racionalidade técnica* foi bastante experienciado pelos professores e suas ideias ainda encontram-se presentes no campo da formação de professores. Nesse modelo, compreende-se que, através dos cursos, os professores devem adquirir conhecimentos para aplicar em sala de aula. Na formação inicial ou na formação continuada tal ideário é frequentemente encontrado quando se parte do princípio de que são as instituições de formação que irão formar os professores e que eles pouco podem interferir neste processo. Não são ouvidas as vozes desses professores que são os que mais podem falar das situações problemáticas que vivenciam.

De acordo com Cochran-Smith e Lytle (1999) essa formação enfatizava a aprendizagem de conhecimentos *para* a prática e não de conhecimentos *na* ou *da* prática. Para as autoras, *conhecimento para a prática*, trata da base de conhecimento necessária para o ensino e envolve: conhecimento da matéria, pedagógico, de teorias de aprendizagem e de desenvolvimento humano, de currículo, de fins e metas educacionais, de estratégias de ensino, etc. O *conhecimento na prática* refere-se ao conhecimento construído pelo professor enquanto ensina, ou seja, é um conhecimento em ação, um conhecimento situado e adquirido por meio da reflexão e investigação da própria experiência. O *conhecimento da prática* parte do pressuposto que

> [...] o conhecimento que os professores necessitam para ensinar emana de investigação sistemática sobre o ensino, alunos e aprendizagem, conteúdo, currículo, escolas e escolarização. Esse conhecimento é construído coletivamente dentro de comunidades locais e mais amplas[19]. (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999, p. 274, tradução nossa).

Ressalta-se, ainda, que o professor deveria estar em constante formação e que esta "não se constrói por acumulação (de cursos, de conhecimentos ou de técnicas), mas sim através de um trabalho de reflexividade crítica sobre as práticas e de (re)construção permanente de uma identidade pessoal." (NÓVOA, 1992, p. 25).

A última das perspectivas apresentadas, neste trabalho, traz a ideia de **desenvolvimento profissional** do professor de Matemática:

> ... mais do que os termos aperfeiçoamento, reciclagem, formação em serviço, formação permanente, convém prestar atenção especial ao conceito de desenvolvimento profissional dos professores, por ser aquele que melhor se adapta à concepção atual do professor como profissional do ensino. A noção de desenvolvimento tem uma conotação de evolução e continuidade que nos parece superar a tradicional justaposição entre a formação inicial e aperfeiçoamento dos professores. (GARCIA, 1995, p. 55).

Pode-se afirmar, então, que o desenvolvimento profissional do professor é um "processo dinâmico e evolutivo da profissão docente que inclui tanto a formação inicial quanto a permanente, englobando os processos que melhoram o conhecimento profissional, as habilidades e as atitudes" (IMBERNÓN, 1994, p. 45).

Nessa direção,

> Desenvolver-se profissionalmente poderia ser entendido como aprender e caminhar para a mudança, ou seja, ampliar, aprofundar, e/ou reconstruir os próprios saberes e práticas e desenvolver formas de pensar e agir coerentes. Dessa forma, os conceitos

---

[19] *[...] the knowledge teachers need to teach well emanates from systematic inquiries about teaching, learners and learning, subject matter and curriculum, and schools and schooling. This knowledge is constructed collectively within local and broader communities.*

> de aprendizagem, mudança e desenvolvimento profissional se encontram entrelaçados. (FERREIRA, 2003, p. 36).

Ponte (1998) indica a existência de contrastes entre as lógicas da formação e do desenvolvimento profissional. Na formação pressupõe-se que o professor, ao frequentar cursos e palestras, receba teorias, em um movimento de fora para dentro, enquanto que, no desenvolvimento profissional o movimento é inverso, ou seja, de dentro para fora, considerando teoria e prática de forma interligada. No entanto, o autor destaca ainda que a formação pode ser utilizada de modo a favorecer o desenvolvimento profissional. Nesse sentido, "o professor que quer se desenvolver plenamente tem toda a vantagem em tirar partido das oportunidades de formação que correspondam às suas necessidades e objetivos." (PONTE, 1998, p. 2).

2.2.1 A Formação Inicial de professores de Matemática

A formação inicial, além de munir os futuros professores de ferramentas matemáticas necessárias para sua atuação profissional, deveria possibilitar reflexões a respeito de "como ensinar". Não se deve esquecer que a formação do professor não finda na graduação, mas continua num processo que se estende por toda a vida do educador. Segundo Imbernón, é necessária

> uma formação flexível, o desenvolvimento de uma atitude crítica que englobe formas de cooperação e trabalho em equipe, uma constante receptividade a tudo o que ocorre, já que a formação inicial deve preparar para uma profissão que exige que se continue a estudar durante toda a vida profissional, até mesmo em âmbitos que, nesta etapa de sua formação, nem sequer suspeitam. Não se trata, pois, de aprender um "ofício" no qual predominam estereótipos técnicos, e sim de aprender os fundamentos de uma profissão, o que significa saber por que se realizam determinadas ações ou se adotam algumas atitudes concretas, e quando e por que será necessário fazê-lo de outro modo. (IMBERNÓN, 2011, p. 68-69).

Além disso, não se pode desprezar que o estudante que ingressa em um curso de Licenciatura traga consigo, com base nos seus anos de escolaridade, ideias e práticas que julga serem adequadas ou não, além de referências do que julga ser um bom ou mau professor. Este aluno de Graduação que optou por um curso de Licenciatura não deve ser visto como alguém neutro, já que carrega consigo essas diversas concepções de prática, de professor e de educação. Neste sentido, a formação inicial ao ser um espaço de "reeducação", conforme aponta Gonçalves e Gonçalves (1998), deveria possibilitar reflexões e discussões sobre novas formas de trabalho em sala de aula e que, muitas vezes, não foram vivenciadas por esses alunos.

Mizukami (2013) considera que “Aprendizagem e desenvolvimento da docência constituem processos que se desenvolvem ao longo da vida.” (p. 27). Desse modo, a formação inicial seria um momento formal em que os processos de ensinar e aprender começam a ser construídos e deveria possibilitar a compreensão e o comprometimento com a aprendizagem ao longo da vida como aspectos fundamentais de seu desenvolvimento profissional.

Com relação aos programas de formação, D´Ambrosio (1993) apontou a necessidade de mudança nesses programas, de modo a permitir que o licenciando tenha experiências matemáticas por meio de metodologias alternativas (investigações, resolução de problemas, aplicações, análise do desenvolvimento da disciplina) e experiências com alunos.

Consultando-se as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em curso de Licenciatura, de graduação plena (BRASIL, 2002)[20] são encontradas algumas indicações em direção a uma formação inicial que promova o preparo para:

> I- o ensino visando à aprendizagem do aluno;
> II- o acolhimento e o trato da diversidade;
> III- o exercício de atividades de enriquecimento cultural;
> IV- o aprimoramento em práticas investigativas;
> V- a elaboração e a execução de projetos de desenvolvimento dos conteúdos curriculares;
> VI- o uso de tecnologias da informação e da comunicação e de metodologias, estratégias e materiais de apoio inovadores;
> VII- o desenvolvimento de hábitos de colaboração e de trabalho em equipe. (BRASIL, 2002, p. 1)

Além disso, o referido documento enfatiza que a prática não deve se restringir ao estágio, de maneira isolada, e sim, deve permear toda a formação do professor. Recomenda-se, nessa perspectiva, que a prática seja desenvolvida “com ênfase nos procedimentos de observações e reflexão, visando à atuação em situações contextualizadas, com o registro dessas observações realizadas e a resolução de situações-problema.” (Ibidem, p. 6)

Nesse sentido, Tardif (2010) também assinala que a formação geral e a formação científica dos alunos da Licenciatura devem vincular-se à formação prática. O autor considera que esse espaço se daria nos “estágios de longa duração, contatos repetidos e frequentes com os ambientes da prática, cursos dedicados à análise das práticas, análise de casos, etc.” (p. 289).

[20] Esse documento é constituído por princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados na organização institucional e curricular de cada estabelecimento de ensino e aplicam-se a todas as etapas e modalidades da Educação Básica.

Analisando cursos de Licenciatura em Matemática em várias regiões brasileiras, Gatti e Barreto (2009) detectaram aspectos que merecem maior atenção na análise da formação de professores. Dentre eles, as autoras consideram que, nas atividades e/ou disciplinas voltadas à prática, é que o futuro professor poderá desenvolver, discutir e elaborar propostas de ensino-aprendizagem da Matemática voltadas à sala de aula. Além disso, os cursos têm formado profissionais com perfis diferentes, alguns com profunda formação matemática e outros com formação pedagógica desconexa da formação específica em Matemática.

No caso da Resolução de Problemas, Silva (1989) apontou que os futuros professores devem ter oportunidades de trabalhar em situações análogas às que seus alunos enfrentarão. Desta forma, poderão sentir o prazer da busca e descoberta em atividades de resolução de problemas, principalmente porque muitos não passaram por essa experiência durante sua vida escolar.

Dadas essas fragilidades na formação inicial, cada vez mais é dada importância à formação continuada dos professores. Ela aparece como uma formação que se dá de diversas formas, seja através de Programas de Formação (cursos de capacitação, reciclagem, aperfeiçoamento), Projetos de Extensão ou Grupos de Pesquisa-Ação e tem como um de seus objetivos sanar dificuldades não contempladas na formação inicial.

2.2.2 A Formação Continuada de professores de Matemática

Imbernón (2010) aponta que na década de 1970 ocorreu o início da formação continuada de professores na maioria dos países latinos. O modelo adotado era o de formação individual, em que os professores liam os novos e velhos teóricos nas chamadas escolas de verão. Em 1980, as universidades começaram a criar programas de formação continuada, em sua maioria nas modalidades de treinamento. O paradigma predominante nessa década foi o da *racionalidade técnica*, em que a formação ocorria por meio de cursos ou oficinas cujos conhecimentos deveriam ser postos em prática na sala de aula.

Alguns termos como aperfeiçoamento, reciclagem, atualização, treinamento e capacitação passam a ser usados frequentemente no meio educacional. Cada um deles reflete uma concepção de educação. Por exemplo, a palavra “reciclagem” de acordo com Marin (1995) associa-se ao processo industrial de transformação de produtos e seria inaceitável importá-lo para a educação, desconsiderando os saberes que o professor traz consigo. Para

Nóvoa (1992) as denominações trazem consigo ideologias e em todas elas o modelo de professor considerado é o da racionalidade técnica ou de aplicador da ciência. Assim, o professor assistia cursos fora da sala de aula sobre assuntos distantes de suas necessidades e cujas teorias deveriam ser aplicadas em sua sala de aula.

Ponte e Santos (2004) consideram que o impacto desse tipo de formação tende a ser reduzido e levou os educadores matemáticos a interrogarem-se sobre a natureza dos processos de formação. Um dos conceitos que serviu de base a essa reflexão foi o de desenvolvimento profissional. Como já foi posto, nessa perspectiva o desenvolvimento do próprio professor e de sua identidade profissional tem papel primordial sobre o conteúdo do conhecimento a ser por ele apropriado.

Considerando-se as diferentes realidades escolares e as diversas necessidades formativas dos professores, o local de trabalho do professor, a escola,

> assume importância considerável na promoção do desenvolvimento profissional de seus participantes. Nesses termos, esse desenvolvimento, incorporado pelos próprios participantes, reverte em benefícios para a escola e para o processo de ensino-aprendizagem nele desenvolvido. (MIZUKAMI et al, 2002, p. 80).

Imbernón (2011) corrobora essa ideia e afirma que a escola, nessa perspectiva, passa a ser vista como “nicho ecológico para o desenvolvimento e a formação”. O autor considera, ainda, que não se trata apenas de uma mudança de lugar da formação, mas o desenvolvimento de um “paradigma colaborativo entre os professores.” (Ibidem, p. 80).

Para investigar como esse novo paradigma poderia ser desenvolvido nas escolas, será abordado como o trabalho dos professores, em seu local de trabalho, pode se constituir.

2.2.3 Diferentes formas de organização de trabalho do professor na escola

O educador anglo-canadense Andy Hargreaves (1998) faz uma discussão acerca do significado de colaboração. Para isso, apresenta e diferencia as quatro formas de cultura docente:

1. O individualismo
2. A colegialidade artificial
3. A balcanização
4. A colaboração

O individualismo tem sido sinônimo de algo ruim e que deveria ser banido de qualquer ambiente de trabalho. No entanto, Hargreaves (1998) atenta para o cuidado com esse tipo de julgamento. O autor ressalta que o individualismo pode ser uma fase temporária de trabalho em que o sujeito pretende refletir ou reorganizar seus pensamentos. Dessa forma, esse momento de isolamento é um tempo de preparação para posteriormente discutir determinados assuntos no coletivo.

Outra questão discutida por Hargreaves (1998) é que nem todo trabalho coletivo é colaborativo. Para diferenciá-los, desenvolve os conceitos de *colegialidade artificial* e de *balcanização.*

O significado da palavra colegialidade, de acordo com o dicionário Houaiss (2009), refere-se a indivíduos que sejam colegas de uma mesma profissão ou atividade. Já a palavra artificial envolve algo que não é natural. Para Hargreaves (1998), a *colegialidade artificial* é "constitutiva de sistemas sociopolíticos, administrativos que não são totalmente sinceros quanto ao seu empenho retórico no fortalecimento do professorado." (p. 234). Pode-se perceber esse tipo de colaboração docente quando são implantadas novas propostas educacionais. Os professores são os responsáveis pela implantação e prestação de contas da proposta, enquanto que outros (diretores, coordenadores, governantes) são responsáveis pelo desenvolvimento e imposição dos objetivos. Pode-se perceber que a execução técnica é separada do processo de concepção e produção da proposta.

A *balcanização*[21] refere-se à divisão do corpo docente em grupos ou subgrupos. O trabalho dos professores é realizado "não em isolamento, nem com a maior parte dos colegas (enquanto escola, como um todo), mas, antes, em subgrupos menores." (HARGREAVES, 1998, p. 240). Essa forma de interação pode ser rica e produtiva, mas pode ser prejudicial quando os grupos deixam de interagir e se isolam uns dos outros.

Em relação às formas de estruturação das relações humanas, Hargreaves (1998) destaca a coordenação, a colaboração ou a cooperação. Para o autor, "Um dos paradigmas mais prometedores que surgiram na idade pós-moderna é o da colaboração, enquanto princípio articulador e integrador da acção, da planificação, da cultura, do desenvolvimento, da organização e da investigação." (p. 277).

Ferreira (2003), investigando as formas de trabalho coletivo, observou que a coordenação é uma relação em que:

[21] De acordo com Fiorentini (2004), Hargreaves desenvolveu o conceito de balcanização tendo por base o processo de divisão do Leste Europeu, que envolveu a Sérvia, Croácia e a Eslovênia.

> [...] a maioria obedece a uns poucos e muitas vezes não possui o conhecimento da meta como um todo, apenas executa a tarefa que lhe é destinada. Na medida em que a meta é alcançada, todos são beneficiados em alguma proporção; porém, o envolvimento é pequeno. A função do coordenador aparece claramente, e a hierarquia é estabelecida de forma mais ou menos explícita. Na maioria das escolas, a coordenação é a forma de organização mais comum. Embora os professores possam participar de algumas decisões, existe uma estrutura da qual eles devem fazer parte, e a hierarquia é clara. (p. 81).

Boavida e Ponte (2002), corroborando com os autores Wagner e Day, analisam o significado de laborare (trabalhar) e operare (operar), constituintes das palavras colaborar e cooperar:

> Operar é realizar uma operação em muitos casos relativamente simples e bem definida; é produzir determinado efeito; funcionar ou fazer funcionar de acordo com um plano ou sistema. Trabalhar é desenvolver actividade para atingir determinados fins; é pensar, preparar, reflectir, formar, empenhar-se. (BOAVIDA; PONTE, 2002, p. 46).

Dessa forma, na cooperação nota-se uma hierarquia, uma definição de papéis em que o trabalho de cada um contribui para o todo. Já na colaboração, as decisões são tomadas no grupo, as ideias são compartilhadas e a aprendizagem é mútua.

Costa (2006), com base nas ideias de Hargreaves, afirma que a colaboração, quando presente no ambiente escolar, possibilita a aprendizagem mútua e potencializa as reflexões individuais promovendo o desenvolvimento profissional. Além disso, a autora aponta as características da colaboração: o diálogo, a negociação, o contrato de reciprocidade e a confiança. Esses seriam os pilares da colaboração, sendo que o diálogo permite a troca de ideias e a participação do colegiado de professores, principalmente se envolver a todos.

2.2.4 Como promover o desenvolvimento profissional do professor?

Fullan e Hargreaves (2000) consideram que, no propósito de provocar mudança no desenvolvimento do professor, deve-se considerar:

> 1. o *propósito* do professor;
> 2. o professor como uma *pessoa;*
> 3. o *contexto* do mundo real em que trabalham os professores;
> 4. a *cultura* do ensino; as relações de trabalho que os professores têm com os colegas. (p. 34).

Em relação ao primeiro item, os autores afirmam que, ao se ignorar os propósitos dos professores, podem surgir resistências e ressentimentos.

> Muitas iniciativas de desenvolvimento dos funcionários assumem a forma de algo feito *para* os professores, ao invés de *com* eles e, menos ainda, *por* eles. Quando novas iniciativas (como grupo de trabalho cooperativo, aprendizagem ativa ou mudança de rumos) são implementadas, diretores e administradores costumam referir-se a "treinamento no ambiente de trabalho" para seus professores, como se eles fossem subalternos em uma espécie de fábrica. Tais abordagens "de cima para baixo" ao aperfeiçoamento dos profissionais em educação incorporam uma visão passiva do professor, sendo ele, sob essa ótica, vazio, deficiente, carente de habilidades. Por isso, ele necessita ser injetado de novas técnicas e de novas estratégias e com elas preenchido. (FULLAN; HARGREAVES, 2000, p. 33).

A mudança do professor deve considerar também aquilo que ele é como pessoa, ou seja, um professor não é apenas um pacote de conhecimento. Assim, os autores Fullan e Hargreaves afirmam que as mudanças significativas ou duradouras sempre serão lentas, já que envolvem não apenas o conhecimento do professor, mas também sua biografia e sua experiência.

Outro fator a ser considerado em uma mudança é o contexto do ensino. Não basta apenas que a mudança esteja bem proposta no papel. É na sala de aula que ela deve ocorrer. "São características do contexto que estabelecem limites importantes ao que os professores podem fazer, às possibilidades reais de inovação." (FULLAN; HARGREAVES, 2000, p. 50). Outros fatores ligados ao contexto seriam: considerar alguns aspectos deste contexto (alunos do Ensino Fundamental, por exemplo, não podem ser tratados como alunos do Ensino Médio); realismo e praticidade (apesar de se preocuparem com uma aula de excelência, os professores buscam aulas menos extressantes em que os alunos desenvolvam um trabalho tranquilamente); o tempo e o currículo.

O último dos fatores apontados por Fullan e Hargreaves diz respeito à cultura do ensino, enfocando as relações pessoais presentes no ambiente escolar. Para os autores, é preciso saber como as pessoas se modificam.

> Nenhum de nós é uma ilha; não nos desenvolvemos em isolamento. Nosso desenvolvimento dá-se através de nossas relações, em especial aquelas que estabelecemos com pessoas importantes para nós. Essas pessoas agem como uma espécie de espelho para nossos "eus" em desenvolvimento. Se em nossos locais de trabalho há pessoas que são importantes para nós e estão entre aquelas por quem temos consideração, eles terão uma enorme capacidade para, positiva ou negativamente, influenciar a espécie de pessoas e, por conseguinte, a espécie de professores que nos tornamos. (FULLAN; HARGREAVES, 2000, p. 55).

Nesse sentido, Saraiva e Ponte (2003) reafirmam a importância que as instituições de ensino exercem sobre a mudança das práticas dos professores. Para eles, a opinião do grupo de professores pode ser um obstáculo à inovação, e a mudança dos professores relaciona-se com o contexto social e com o seu eu profissional, uma vez que a reflexão pode ser fundamental à mudança do professor.

Com relação à superação dos obstáculos enfrentados em uma mudança, Saraiva e Ponte (2003) consideram que "(...) passam, decerto, pelo fornecimento de oportunidades e de tempo aos professores, para que possam continuar o seu desenvolvimento e pela sua disposição de aprender a partir do seu local de trabalho." (p. 5).

Mas quais condições seriam mais adequadas para a reconstrução dos saberes dos professores? Como possibilitar, aos professores, situações que estimulem a reflexão sobre suas práticas?

Diversos autores apontam que o trabalho coletivo/colaborativo mostra-se um potencializador de aprendizagem e desenvolvimento profissional. (BOAVIDA; PONTE, 2002; FERREIRA, 2003; FIORENTINI, 2004; FIORENTINI; NACARATO, 2005, dentre outros). Para Ponte (1998):

> (...) o *desenvolvimento profissional é favorecido por contextos colaborativos (institucionais, associativos, formais ou informais)* onde o professor tem a oportunidade de interagir com outros e sentir-se apoiado, onde pode conferir as suas experiências e recolher informações importantes. (p. 10).

Ao considerar um grupo de trabalho colaborativo, Fiorentini (2004) entende que é aquele em que:

- a participação é voluntária e os envolvidos buscam crescimento profissional e autonomia;
- deseja-se compartilhar saberes e experiências;
- há momentos informais para bate-papo e comentários sobre episódios e práticas escolares;
- os participantes estão abertos a críticas e têm liberdade para se expressar;
- não existe orientação única para as atividades. São aceitas contribuições e as participações ocorrem em diferentes níveis;
- as tarefas são planejadas;
- existe confiança e respeito mútuo;

- há negociação de metas e objetivos comuns, bem como comprometimento para atingi-los;
- há compartilhamento do significado do que realizam e aprendem no grupo;
- os participantes podem produzir e sistematizar conhecimentos através de textos escritos;
- há reciprocidade de aprendizagem.

Considerando-se essas características como aquelas que deveriam estar presentes em um grupo de trabalho colaborativo, destaca-se que o trabalho coletivo pode vir a ser colaborativo, mas não nasce dessa forma. Outras pesquisas, que serão tratadas na próxima seção, abordam, ainda, a ideia de grupos de estudos como um espaço potencializador do desenvolvimento profissional dos professores.

2.3 Grupos de estudo

Outros autores que investigaram sobre trabalho coletivo foram Murphy e Lick (1998). Destaca-se que esses autores trabalharam a ideia de grupo de estudo no interior de escolas norte-americanas através do projeto *Whole-Faculty study groups*. Mas o que é um grupo de estudos de professores? Trata-se de "um pequeno número de indivíduos trabalhando juntos para aumentar suas capacidades através de nova aprendizagem para o benefício dos alunos." (MURPHY; LICK, p. 4)[22].

De acordo com Murphy e Lick (1998), trabalhar em grupo não é uma ideia nova, os psicólogos sociais apontam para a potencialidade do trabalho coletivo há décadas, mas as escolas pouco usam isso em seu favor. Apesar de simples, tal ideia para os autores é poderosa: trabalhar em pequenos grupos buscando melhorar o desempenho profissional.

Para a constituição de um grupo de estudo é importante que os professores tenham metas e objetivos comuns. Silva (2010) considera que o grupo de estudos pode ser formado por professores que já estão em exercício ou por futuros professores. Destaca, ainda, que o grupo pode trazer contribuições valiosas aos licenciandos, possibilitadas pelo contato com o ambiente escolar e com os problemas reais enfrentados pela escola, dentre outras.

Um grupo de estudos voltado ao desenvolvimento profissional dos professores deve contemplar as seguintes tarefas:

---

[22] *Small number of individuals joining together to increase their capacities through new learning for the benefit of students.*

> - Planejar e aprender juntos, testando ideias, compartilhando e refletindo juntos,
> - dar suporte um ao outro, [...]
> - engajar-se na persecução de questões genuínas, problemas e curiosidades por um período de tempo suficiente para deixar marcas sobre perspectivas, políticas e práticas,
> - construir conhecimento sobre o conteúdo, ao contrário de meramente consumi-lo,
> - imergir em um trabalho fundamentado em ideias, materiais e colegas,
> - experimentar a sensação de tratar com ‘o que é’, enquanto antecipa ‘o que poderia ser’, [...]
> - contribuir para o conhecimento e a prática,
> - tratar questões fundamentais sobre o que professores e alunos devem aprender e saber. (MURPHY; LICK, 1998, p. 2).

2.3.1 Formas de organização de grupos de estudo

Murphy e Lick (1998) apresentam duas formas de organização de grupos de estudo formados por professores:

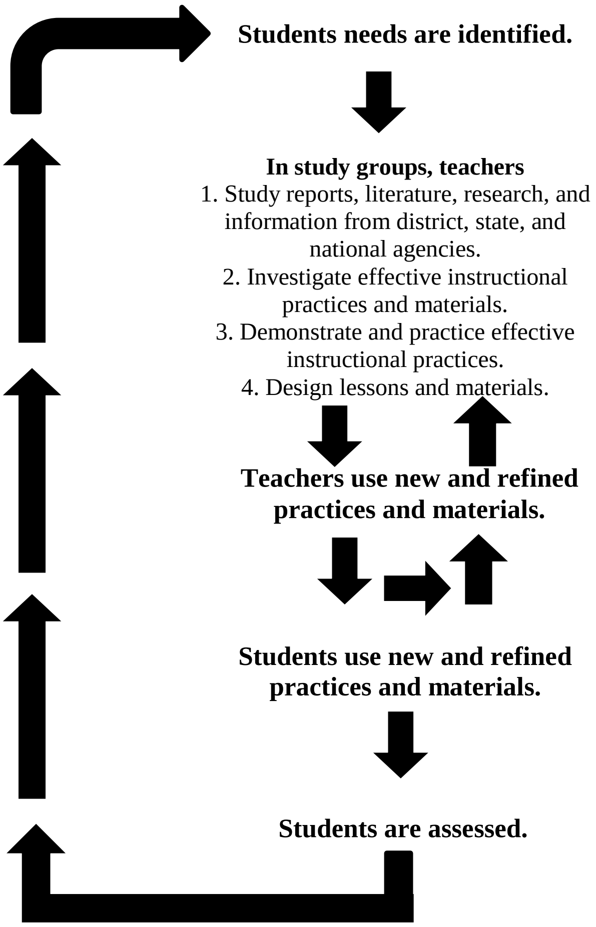
1. *Whole-faculty study groups* (Grupos que envolvem todo o corpo docente), e
2. *Independent or stand-alone stydy groups* (Grupos de estudo independentes ou que operam independentemente).

A primeira dessas formas, segundo os autores, tem foco na organização. Os grupos são formados pela direção da escola e cada professor se encaixa em um deles. Buscam-se melhorias por meio de dados sobre dificuldades de aprendizagem dos alunos. O objetivo é “focar o corpo docente na implantação e na integração de práticas efetivas de ensino e aprendizagem dentro de programas escolares que resultarão em aumento na aprendizagem dos estudantes e uma queda em seus comportamentos negativos[23].” (MURPHY; LICK, 1998, p. 5, tradução nossa).

A figura 4 apresenta o impacto dos grupos de estudo que envolvem o corpo docente:

[23] *To focus the entire school faculty on implementing and integrating effective teaching and learning practices into school programs that will result in increase in student learning and a decrease in negative behaviors of the students.*

Figura 4 – Whole-Faculty Study Groups' Impact on Student Performance



Fonte: Murphy e Lick, 1998, p. 32.

Essa forma de organização de grupos de estudo na escola apresenta algumas vantagens como a frequência e regularidade dos encontros e a facilidade de comunicação entre os membros do grupo. Uma desvantagem é que os professores podem se sentir "sem escolha" ao participar do grupo. No entanto, se a escola tem como foco a melhoria da aprendizagem dos alunos, de acordo com Murphy e Lick (1998) esse ponto fraco pode ser minimizado.

Os grupos de estudo independentes ou que operam independentemente podem se formar dentro ou fora da escola e não dependem de apoio organizacional. São definidos como professores "que têm interesse comum e se consideram um grupo até que, como indivíduos, satisfazem suas necessidades[24]." (p. 10).

[24] *That have a common interest and will consider themselves a study group until, as individuals, they satisfy their need for the group.*

Algumas vantagens desse tipo de organização de grupos de estudo são: maior autonomia na escolha de assuntos para discussão, horários flexíveis, inclusão de outros participantes que não sejam da escola e locais de encontros variados. Algumas dificuldades são o aumento das faltas dos professores nas reuniões e menor aplicação dos estudos em sala de aula. Murphy e Lick (1998) também apontam que, ao satisfazer suas necessidades ou sanar suas dificuldades, o grupo tende a se desmanchar. Além disso, o indivíduo que reuniu o grupo fica no papel de "líder" e os demais participantes acabam esperando dele a organização e os materiais necessários.

2.3.2 Orientações para estruturar um grupo de estudo

Independente do tipo de organização que o grupo apresente, quer seja envolvendo todo o corpo docente ou um grupo independente, a título de exemplo, Murphy e Lick (1998) apresentam algumas orientações para a estruturação de um grupo:

1. O Grupo de estudo deve ter no máximo seis participantes. Os autores justificam esse número de pessoas considerando: a dificuldade de tempo comum a todos os membros do grupo e as relações pessoais possíveis de serem estabelecidas. Cinco pessoas provocam menos pressão do que se fossem dez, além do que, um pequeno grupo permite a alternância de liderança. "um observador do grupo de estudo frequentemente não consegue dizer quem é o líder[25]." (p. 512). Não se preocupar com a composição do grupo, ou seja, a heterogeneidade ou homogeneidade em relação às atividades de cada membro do grupo de estudo não deve ser visto como um problema. Além disso, o grupo deve ser constituído levando-se em conta os interesses e objetivos comuns.

2. Deve haver uma agenda de reuniões.

3. As normas de trabalho do grupo devem ser definidas na primeira reunião do grupo.

4. Deve-se, no consenso, desenvolver um plano de trabalho para o grupo.

5. Os membros do grupo devem fazer registros pessoais para a própria reflexão.

6. Não deve haver hierarquia no grupo.

7. Planejar com antecedência momentos de interrupção como feriados e recessos.

8. Avaliar a eficiência do grupo de estudo.

Além das orientações acima, ressalta-se que a importância do conteúdo a ser estudado no grupo deve ser condizente com os interesses dos professores envolvidos. Assim, questões

[25] *(...) an observer of the study group often can´t tell who the leader is.*

referentes às dificuldades de aprendizagem dos alunos, o quê e como ensinar são pertinentes em um grupo de estudo formado por professores. Destaca-se também que as orientações acima não são rígidas, mas variam de acordo com as características de cada grupo.

2.4 A minha pesquisa no cenário de pesquisas já realizadas

Após apreciar a literatura referente à formação de professores, serão destacados alguns aspectos que contribuíram para a presente pesquisa. O modelo preliminar (p. 25) desta pesquisa apresentou apenas um esquema simples para seu desenvolvimento. O estudo e a revisão do campo teórico *Formação de Professores* possibilitou a compreensão de que só faz sentido falar-se ou trazer-se à luz os saberes profissionais dos professores se o ensino estiver na idade da profissão (TARDIF, 2013), uma vez que, como profissional do ensino, o professor deve apresentá-los, conforme o referenciado no início deste capítulo.

Considerando-se que ser professor é uma profissão e, portanto, a docência pode ser aprendida, Shulman (1986, 1987) identicou as categorias de conhecimento do professor. Ball, Thames e Phelps (2008), trabalhando com professores de Matemática, reorganizaram essas categorias. Tardif (2010) considerou uma epistemologia da prática, destacando que só faz sentido falar em saberes profissionais relacionando-os com a prática. Além disso, os saberes docentes constituem um amálgama de saberes oriundos de diferentes fontes.

Ao falar em formação de professores, o modelo mais usual foi o da racionalidade técnica, onde os especialistas ministravam cursos ou palestras e os professores deveriam atuar como aplicadores dessas teorias, em sala de aula. Tal modelo, distante da realidade, apresentou pouco impacto nas salas de aula (PONTE; SANTOS, 2004). O conceito de desenvolvimento profissional, em que o professor passa a ser visto como pessoa, como (re)construtor e produtor de conhecimentos, ocorre de modo contínuo, ao longo da vida do professor.

Na presente pesquisa busca-se a superação do modelo da racionalidade técnica, através de um trabalho situado a partir das dificuldades apresentadas por professores e futuros professores. Desse modo, entende-se que, por meio de grupos de estudo, pode-se alicerçar um trabalho com base nas experiências dos sujeitos, no diálogo, no compartilhamento de experiências e na construção de conhecimentos profissionais.

A formação inicial é uma primeira etapa do desenvolvimento profissional do professor. A Licenciatura em Matemática deveria possibilitar que o futuro professor problematizasse suas ideias prévias sobre prática, professor e educação. Ainda, não se pode desprezar o fato de que esse futuro professor foi aluno da Educação Básica por, no mínimo, 12 anos, e que ele traz preconcepções construídas em seus processos de “aprendizagem por observação.” (MIZUKAMI, 2013, p. 29).

O futuro professor deveria vivenciar novas práticas no Curso de Licenciatura, principalmente se não tivesse passado por elas enquanto aluno da Educação Básica. Atualmente, esses espaços estão lentamente sendo possibilitados, como é o caso do projeto PIBID[26] (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência).

Considerando que o saber é temporal, a formação do professor não termina no Curso de Licenciatura, mas deve continuar por toda a vida. A formação não se constrói por acumulação (num paradigma em que bastariam cursos de reciclagem ou de capacitação dados por especialistas), mas por meio da reflexão, investigação e da construção da identidade do professor. Essas últimas ações contribuem para o desenvolvimento profissional do professor, que é favorecido por contextos colaborativos, onde há compartilhamento e problematização de conhecimentos e experiências entre os professores.

Os grupos de estudo mostram-se como um outro espaço propício para discussão, reflexão e vivência de novas práticas. A presente pesquisa utilizou-se dessa ideia para a constituição de um grupo de estudo na Licenciatura e de outro na formação continuada de professores. Esses espaços colaborativos mostraram-se potencializadores do desenvolvimento profissional dos professores ao possibilitar a investigação e a reflexão sobre a atividade matemática, a resolução de problemas e sobre as práticas de ensinar e de aprender Matemática.

Ao finalizar o capítulo, pode-se destacar que, nele, foi esboçado um panorama de trabalhos a respeito da formação de professores que, ouvidos, mostraram-se de interesse para esta pesquisa. Para a análise dos dados, que será feita no capítulo 6, serão utilizadas ideias desses trabalhos como referência teórica.

---

[26] O programa é gerenciado pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e concede bolsas a alunos de licenciatura participantes. Os projetos devem promover a inserção dos estudantes nas escolas públicas para que desenvolvam atividades didático-pedagógicas sob a supervisão de um docente da universidade e de um professor da escola.

CAPÍTULO 3 - A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

> A resolução de problemas está no âmago de toda a Matemática.
>
> LESTER JR.

Diversas definições podem ser encontradas para dizer o que é um problema. Hiebert et al (1997 apud VAN DE WALLE, 2009) definem problema como “qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método “correto” específico de solução.” (p. 57).

Além da dificuldade encontrada, do não saber realizar a tarefa, nem ter um caminho claro para isso, Onuchic (1999) acrescenta o fator motivacional à resolução de um problema. Para a autora, problema é “(...) aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer.” (p. 215). Essa será a definição adotada neste trabalho.

3.1 Resolução de Problemas na Educação Matemática do século XX

Félix Klein foi um dos pioneiros a defender, ainda no final do século XIX, a atualização da Matemática na escola secundária, “de maneira a ficar mais próxima do desenvolvimento moderno dessa área e, também dos últimos avanços científicos e tecnológicos.” (MIORIM, 1998, p.69) e a destacar que a universidade deveria levar em consideração as necessidades do futuro professor. O livro *Matemática elementar sob um ponto de vista avançado*[27], escrito por ele em 1908, foi uma importante contribuição na direção a uma renovação do ensino de Matemática na escola secundária.

É importante frisar que, nesse período, a Educação Matemática brasileira encontrava-se em sua fase de gestação, enquanto campo profissional e científico (FIORENTINI; LORENZATO, 2012). Nessa fase, que vai do início do século XX ao final dos anos de 1960, “Não era usual olhar para o ensino da matemática com perspectivas diferentes daquelas

[27] *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint.*

voltadas diretamente às tarefas e aos procedimentos da prática de sala de aula e à produção de manuais ou subsídios didáticos.” (Ibidem, p. 17).

O ensino de Matemática no início do século XX, de acordo com Allevato e Onuchic (2009), foi caracterizado pela repetição e valorização da memorização de conceitos. Anos depois, começou-se a falar na compreensão da Matemática, na necessidade de que os alunos entendessem o que estavam fazendo. Nessa época, surge a proposta da resolução de problemas por George Polya.

A resolução de problemas sempre esteve presente na história da humanidade. No entanto, Resolução de Problemas, como teoria, faz parte de uma história recente que reporta ao século XX. Polya passou a ser a mais importante referência em Resolução de Problemas e em seu livro *A Arte de Resolver Problemas* (1944) estabeleceu quatro passos necessários para um bom resolvedor de problemas. Para esse autor, “uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema.” (POLYA, 1944, p. v).

As décadas de 60 e 70, do século XX, foram fortemente influenciadas pela Matemática Moderna. Esse movimento valorizava uma Matemática apoiada na teoria dos conjuntos, destacando as propriedades e as abstrações matemáticas, por meio de uma linguagem precisa e concisa. O ensino de Matemática se distanciava das questões práticas.

No entanto, segundo Onuchic e Allevato (2005), todas essas reformas não tiveram o sucesso esperado. No fim dos anos 70, a Resolução de Problemas ganha espaço, sendo um dos temas do 3º Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em Karlsruhe, Alemanha, em 1976.

O Quadro 1 indica os estágios observados no desenvolvimento da Educação Matemática e seus enfoques, em sala de aula, no ensino de Matemática.

Quadro 1 – Estágios da Educação Matemática e seus enfoques no ensino de Matemática

Estágios	Focos	Como atingir
Exercício e prática (aproximadamente décadas de 20-30 do século XX)	Facilidade com cálculo.	- Rotina, memorização de fatos e algoritmos. - Quebrar todo o trabalho em séries de pequenos passos.
Aritmética significativa (aproximadamente décadas de 30 – 50 do século XX)	Compreensão de ideias e habilidades aritméticas. Aplicações da Matemática em problemas do mundo real.	- Ênfase nas relações matemáticas. - Aprendizagem incidental. - Abordagem de atividade orientada.

Matemática Moderna (aproximadamente décadas de 60 – 70 do século XX)	Compreensão da estrutura da disciplina.	- Estudo das estruturas matemáticas. - Currículo em espiral. - Aprendizagem por descoberta.
Volta às Bases (aproximadamente década de 70 do século XX)	(Retorno à) preocupação com o desenvolvimento do conhecimento e das habilidades.	- (Retorno à) aprendizagem de fatos por exercício e prática.
Resolução de Problemas (aproximadamente década de 80 do século XX)	Resolução de problemas e processos de pensamento matemático.	- Retorno à aprendizagem por descoberta. - Aprendizagem através da Resolução de Problemas.
Padrões, avaliação, responsabilidade (aproximadamente década de 90 do século XX até o presente)	Guerras matemáticas: preocupação com a alfabetização matemática dos indivíduos vs preocupação com a gestão dos sistemas educacionais.	- Desenvolvimento de currículos baseados em padrões e orientados ao estudante vs foco na preparação para os testes com expectativas específicas.

Fonte: Adaptado de Lambdin e Walcott (2007, p.5).

Nos Estados Unidos, em 1980, foi elaborado pelo NCTM o documento *Uma Agenda para a Ação.* Esse documento, construído, em conjunto, por professores e demais interessados na melhoria do ensino de Matemática, propôs uma série de recomendações, destacando que a "resolução de problemas devia ser o foco da Matemática escolar nos anos 80." (p. 1). O livro *Resolução de Problemas na Matemática Escolar,* organizado por Krulik e Reys, no ano de 1980, trouxe artigos escritos por pesquisadores e educadores cujos trabalhos eram voltados à Resolução de Problemas.

Nas seções seguintes será apresentado como a Resolução de Problemas evoluiu a partir das contribuições do NCTM em direção a uma metodologia de ensino. Além disso, também serão destacadas as orientações fornecidas aos professores de Matemática, nos PCN e OCN, sobre o trabalho com resolução de problemas em sala de aula.

3.1.1 As contribuições do NCTM

De acordo com Van de Walle (2009), a reforma em Educação Matemática teve impulso no início da década de 1980. Nesse período, os educadores haviam passado por um movimento de "retorno aos fundamentos" e a Resolução de Problemas surgiu como uma importante tendência no currículo da Matemática.

Em 1989, o NCTM publicou *Padrões curriculares e de avaliação em Matemática escolar*[28]e deu início ao movimento dos Padrões. Em 1991, o NCTM publicou *Padrões profissionais para o ensino de Matemática*[29]. Os *padrões profissionais* apresentaram uma visão do ensino da Matemática e propuseram cinco mudanças no ambiente da sala de aula:

> - Para salas de aula como comunidades matemáticas – afastar-se de salas de aula como simplesmente uma coleção de indivíduos;
> - Para evidência lógica e matemática como modo de verificação – afastar-se de ver o professor como a autoridade única para respostas corretas;
> - Para o raciocínio matemático – afastar-se de meramente memorizar procedimentos;
> - Para conjecturar, inventar e resolver problemas – afastar-se de uma ênfase na descoberta mecânica de respostas;
> - Para conectar matemática, suas ideias e suas aplicações – afastar-se de tratar a Matemática como um corpo de conceitos e procedimentos isolados. (NCTM, 1991, p. 3).

Em 1995, o NCTM publicou *Padrões de avaliação para a Matemática escolar*[30], integrando a avaliação ao ensino e destacando sua importância para a implantação das mudanças. Em 2000, após novas discussões com base nos documentos referidos anteriormente, o NCTM publicou *Princípios e padrões para a Matemática escolar*[31]. Esse documento buscou fornecer orientação e direção na Educação Matemática, da Educação Infantil ao Ensino Médio.

Os *Princípios e Padrões* estabeleceram seis Princípios Fundamentais para a Educação Matemática:

- Equidade
- Currículo
- Ensino
- Aprendizagem
- Avaliação
- Tecnologia

Esses princípios devem estar "profundamente entrelaçados aos programas curriculares de Matemática." (NCTM, 2000, p. 12). Além disso, Van de Valle (2009) esclarece que a excelência em Educação Matemática envolve mais do que a listagem dos objetivos de conteúdos.

---

[28] *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.*
[29] *Professional standards for teaching mathematics.*
[30] *Assessment standards for school mathematics.*
[31] *Principles and standards for school matematics.*

Em relação aos padrões ou blocos de conteúdo matemáticos, o documento apresenta cinco padrões de conteúdo:

1. Números e Operações
2. Álgebra
3. Geometria
4. Medida
5. Análise de Dados e Probabilidade

Cada um dos padrões de conteúdo é acompanhado por padrões de processos, que se referem aos processos matemáticos pelos quais os estudantes devem desenvolver e usar o conhecimento matemático. Os cinco padrões de processos ou de procedimento estão listados abaixo:

1. Resolução de problemas
2. Raciocínio e Prova
3. Comunicação
4. Conexões
5. Representação

Em relação à Resolução de Problemas, os *Princípios e Padrões* consideram que:

> Resolver problemas não é apenas uma meta da aprendizagem matemática, mas também um modo importante de fazê-la. A resolução de problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, portanto, não deve ser apenas uma parte do programa de Matemática. A Resolução de Problemas em Matemática deve envolver todas as cinco áreas de conteúdo descritas nos Padrões do NCTM. Os bons problemas integrarão múltiplos tópicos e envolverão a Matemática significativa. (NCTM, 2000, p.52).

Uma característica presente nos padrões é a valorização de um ensino de Matemática com compreensão. “Aprender Matemática com compreensão é essencial.” (NCTM, 2000, p. 21). Além disso, o documento afirma que “A Matemática pode e deve ser aprendida por todos os alunos.” (NCTM, 2000, p. 13).

A resolução de problemas é vista pelos Padrões como a principal estratégia de ensino. “A maioria, senão todos, dos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados melhor através da Resolução de Problemas.” (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

Nos Estados Unidos, o NCTM é responsável por uma série de publicações como *Pontos Focais Curriculares*[32], que trazem orientações para o professor, apoiando os padrões. Mais recentemente, em 2009, governadores e comissários de educação através de organizações representativas lideraram o desenvolvimento e a implantação dos *Padrões Estaduais de Núcleo Comum*[33].

Esse documento traz indicações sobre as habilidades e conhecimentos necessários para que seus estudantes tenham sucesso. Em relação à Matemática, o *Núcleo Comum*[34] solicita que os professores deixem de cobrir muitos tópicos com pouca profundidade, mas que trabalhem os conteúdos matemáticos de forma significativa e aprofundada. No correspondente ao Ensino Fundamental brasileiro o trabalho, por série, ficaria da seguinte maneira:

- Nos graus[35] K-2: Conceitos, habilidades e resolução de problemas relacionados com a adição e subtração;
- Nos graus 3-5: Conceitos, habilidades e resolução de problemas relacionados com a multiplicação e divisão de números inteiros e frações;
- Grau 6: Razões e relações proporcionais e expressões algébricas e equações iniciais;
- Grau 7: Razões e relações proporcionais e aritmética dos números racionais;
- Grau 8: Álgebra linear e função linear.

Com base nos padrões de procedimento do NCTM e no relatório *Adicionando-se*[36] do Conselho Nacional de Pesquisa, o *Núcleo Comum* propõe oito práticas matemáticas que os professores devem desenvolver em seus estudantes:

1- Fazer sentido de problemas e perseverar em resolvê-los.

2- Raciocinar abstrata e quantitativamente.

3- Construir argumentos viáveis e analisar criticamente o raciocínio dos outros.

4 – Modelar com a Matemática.

5- Usar ferramentas apropriadas de forma estratégica.

6- Cuidar da precisão.

7- Procurar e fazer uso da estrutura.

8- Procurar expressar regularidade em raciocínio repetitivo.

---

[32] *Curriculum Focal Points* .
[33] *Common Core State Standards*. Ainda não adotado no Alaska e nos estados americanos de Indiana, Minnesota, Nebraska, Texas e Virgínia.
[34] *Common Core.*
[35] Nos Estados Unidos, os graus k-2 correspondem ao período das crianças de seis a 8 anos.
[36] *Adding It Up.*

Após consultar e apresentar os diversos documentos publicados pelo NCTM, serão analisados os documentos nacionais, os Parâmetros e as Orientações Curriculares Nacionais. Através deles, serão investigados que encaminhamentos são dados pelos referidos documentos para o professor trabalhar, em sala de aula, a resolução de problemas.

3.1.2 As contribuições dos Parâmetros e Orientações Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) consideram que os problemas não têm desempenhado o seu verdadeiro papel, não sendo utilizados como ponto de partida da atividade matemática mas, na melhor das hipóteses, aparecem como forma de aplicação de conhecimentos. Assim,

> A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações. (BRASIL, 1998, p. 40).

O documento ainda destaca que a Resolução de Problemas deve ser desenvolvida como uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas podem ser desenvolvidos.

As Orientações Curriculares Nacionais – OCN (BRASIL, 2006) retomam essas ideias e as aprofundam em termos de correntes metodológicas e de concepções de ensino e aprendizagem. De acordo com esse documento:

- A primeira concepção dá origem ao padrão de ensino: “definição → exemplo → exercícios”. O ensino identifica-se com a transmissão de conteúdos por parte do professor e a aprendizagem é vista como acúmulo de conhecimentos;
- A segunda concepção tem o caminho inverso, ou seja, parte de uma situação-problema e a formalização do conceito matemático seria a última etapa do processo de aprendizagem. O aluno seria também responsável por sua aprendizagem; e a ele caberia a construção do conhecimento matemático necessário à resolução do problema. O professor seria o mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, além de ser o responsável pela sistematização do novo conhecimento.

Uma das justificativas para a segunda abordagem seria a própria história da construção do conhecimento matemático que se deu a partir de problemas a serem resolvidos. Essa seria uma corrente, no entanto, pouco explorada nos sistemas de ensino, de acordo com Brasil (2006).

Na literatura internacional também pode-se encontrar autores, como Schroeder e Lester (1989), que destacam diversas formas de se trabalhar a Resolução de Problemas. Esse tema será abordado, mais detalhadamente, na próxima seção.

3.2 Alguns modos de abordar a Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas passou a ser fortemente discutida pelo NCTM, no início da década de 1980, sendo uma das recomendações para o ensino de Matemática nos Estados Unidos, naquela década. Os modos de realizar um trabalho, em sala de aula de Matemática, fundamentado na resolução de Problemas, apresentavam variações. Hatfield (1978) já apregoava três diferentes formas de trabalho com resolução de problemas, que puderam ser ainda percebidas no final da década de 1980, por Schroeder e Lester (1989), no livro do ano, *Novas Direções para a Matemática Escolar Elementar*[37]. Esses últimos autores descrevem três modos de abordar a resolução de problemas:

- Teorizar <u>sobre</u> resolução de problemas: baseia-se no modelo de Polya (1978), ou alguma variação dele, em que são ensinados os passos que um bom resolvedor de problemas deve seguir. A Resolução de Problemas deve, nessa forma de trabalho, ser tratada como uma nova disciplina.
- Ensinar Matemática <u>para</u> resolver problemas: centra-se na importância de como a Matemática pode ser aplicada. Esse paradigma é denominado por Van de Walle (2009) por “ensinar-então-praticar”. Nele, a aprendizagem matemática fica separada do fazer Matemática e a resolução de problemas está separada do processo de aprendizagem matemática.
- Ensinar Matemática <u>através</u> da resolução de problemas: O ponto de partida desse processo é a situação-problema e novo conhecimento matemático é construído durante a resolução do problema. Esse modo é visto, no início da década de 1990, como uma metodologia de ensino.

[37] *New Directions for Elementary School Mathematics.*

A abordagem do ensino de Matemática através da Resolução de Problemas foi inicialmente considerada como *Ensinar Matemática via resolução de problemas*. A principal diferença entre o "via" e o "através", de acordo com Nunes (2010), é que a expressão "via" significa "por meio de" e "através de" refere-se do começo ao fim da resolução de problemas. Assim, ensinar Matemática via resolução de problemas implica em usar um problema como um recurso. Já ensinar Matemática através da resolução de problemas é uma forma de fazer Matemática em que o aluno é um coconstrutor de seu conhecimento. Nessa abordagem, os problemas apresentados gerarão novos conceitos, procedimentos ou conteúdos matemáticos.

Stanic e Kilpatrick (1990) apresentaram três usos para o trabalho com resolução de problemas:

- A resolução de problemas como contexto, que se subdivide em cinco subtemas: justificativa para o ensino, motivação, recreação, veículo para adquirir novas habilidades e prática (com objetivo de praticar a técnica).
- A resolução de problemas como uma habilidade: os alunos serão capazes de resolver de modo eficaz um problema depois que foram desenvolvidas outras habilidades indicadas no currículo.
- A resolução de problemas como arte: refere-se à ideia de fazer com que os estudantes compreendam como a Matemática foi descoberta e que levantem suas próprias conjecturas.

Gazire (1988) apresentou três perspectivas da Resolução de Problemas em Educação Matemática: um novo conteúdo, uma forma de aplicar o conteúdo e um meio de ensinar Matemática.

Outras concepções diferentes sobre resolução de problemas foram apresentadas por Mendonça (1999):

1) como um **objetivo**, em que se ensina Matemática para resolver problemas;

2) como um **processo**, em que a ênfase está no desempenho e nas estratégias utilizadas pelos alunos;

3) como **ponto de partida**, em que o problema é considerado o elemento que desencadeia um processo de construção do conhecimento.

O estudo de Branca (2003) aponta que a resolução de problemas pode apresentar diferentes usos nas diversas ocasiões. Para esse autor, as três interpretações mais comuns seriam:

1. Como uma meta. Nesta visão a resolução de problemas é a razão para se estudar Matemática.
2. Como um processo. Destacam-se nessa interpretação: os métodos, os procedimentos, as heurísticas e as estratégias utilizadas na resolução de problemas pelos alunos.
3. Como uma habilidade básica. Nesta interpretação, a resolução de problemas deveria ser considerada como um conteúdo específico, valorizando-se os vários tipos de problemas e métodos de resolução.

Após a apresentação dos modos de trabalhar a resolução de problemas, proposta por Schoeder e Lester (1989) e dos usos, perspectivas e concepções sobre resolução de problemas elencadas pelos autores Stanick e Kilpatrick (1990), Gazire (1999) e Mendonça (1999), respectivamente, serão retomadas as etapas percorridas pelos estudantes ao resolverem um problema.

3.3 Etapas percorridas durante a resolução de problemas

Polya, em 1944, na 1ª edição do livro *How to Solve it* , traduzido como *A arte de resolver problemas*, estabeleceu que o processo de resolução de um problema envolve quatro passos necessários. Primeiramente, deve ocorrer a compreensão do problema, o entendimento das palavras, da linguagem e da situação para que ocorra a concepção de um plano. Em seguida, o indivíduo executa o plano, ou seja, verifica se aquilo que pretendia resolve o problema ou não. O último passo constitui-se de uma visão retrospectiva do problema, em que se verifica o resultado obtido e sua compatibilidade com o enunciado e seus elementos.

Já Sternberg (2000), baseando-se na psicologia cognitiva, destaca que as pessoas só se interessam em resolver problemas quando é preciso superar obstáculos para se atingir um determinado objetivo. Além disso, descreve um ciclo de resolução de problemas, ou seja, esquematiza alguns recursos utilizados para resolver um problema. São eles:

1. Identificação do problema – Buscar a que se refere o problema a ser resolvido.

2. Definição e representação do problema - Definir suficientemente bem o problema. Esta etapa é crucial, pois qualquer erro ou imprecisão pode dificultar sua resolução.
3. Formulação da estratégia – Inúmeras estratégias podem ser utilizadas para resolver problemas, tais como: a análise, que consiste na decomposição do problema em elementos manuseáveis e a síntese, que trata da organização de elementos em algo útil ou o pensamento convergente ou divergente.
4. Organização da informação – Refere-se a preparar a informação para que seja executada da melhor forma a estratégia.
5. Alocação de recursos – Envolve tempo, equipamento, espaço e outras variáveis. Nessa etapa reside a principal diferença entre os especialistas e os iniciantes na resolução de problemas.
6. Monitorização – Nesta etapa, os solucionadores de problemas fazem uma verificação se estão no caminho certo ou não.
7. Avaliação – Analisar se a resposta realmente serve para o problema proposto. Os erros ou equívocos são comuns nesta etapa, pois os alunos geralmente não conferem a coerência entre a resposta e o problema e encontram, muitas vezes, respostas inconvenientes ou até absurdas para o mesmo.

Destaca-se aqui a importância das etapas necessárias para a resolução de um problema elencadas por Polya (1944) ou por Sternberg (2000), com base em teorias da psicologia cognitiva. No entanto, em uma linha considerada como pós-Polya entende-se que a Resolução de Problemas pode ser utilizada não apenas para a resolução de problemas, em sala de aula, mas também para a construção de novos conceitos, procedimentos e conteúdos matemáticos. Nesse sentido, a Resolução de Problemas passa a ser entendida como uma Metodologia, como será abordada na seção seguinte.

3.4 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Em uma orientação para o ensino de Matemática considerando-se a compreensão das ideias matemática, pode-se localizar a Resolução de Problemas. Essa afirmação não é, por si só, suficiente, visto que, Schroeder e Lester (1989), apresentaram três diferentes formas de os professores trabalharem a resolução de problemas. Nesta seção, será apresentada a Resolução de Problemas como uma Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Em relação à aprendizagem da ideias Matemáticas, Van de Walle (2009) considera que:

> Toda ideia introduzida na aula de Matemática pode e deve ser compreendida completamente por *todas* as crianças. *Sem nenhuma exceção!* Não há absolutamente nenhuma desculpa para que as crianças aprendam qualquer aspecto da Matemática sem compreendê-lo completamente. Todas as crianças são capazes de aprender toda a Matemática que queremos que elas aprendam, e elas podem aprendê-la de uma maneira significativa e de um modo que lhes faça sentido. (p.33).

Para isso, o professor deve escolher cuidadosamente o problema que proporá aos seus alunos. De acordo com Van de Walle (2009), um problema voltado para a aprendizagem da Matemática deve ter três características: a primeira é que ele deve considerar os conhecimentos que os alunos têm e deve partir deste ponto; a segunda característica relaciona-se ao conteúdo que se quer que os alunos aprendam, tendo cuidado para que questões secundárias não desviem o foco da Matemática que se quer trabalhar em determinado problema; por fim, o problema deve exigir justificativas e explicações para as respostas e métodos apresentados.

A proposta da publicação *Padrões* é a de que os alunos possam "contruir novo conhecimento matemático através da resolução de problemas." (NCTM, 2000, p.52). Tal tarefa, conforme sugere Van de Walle, não é fácil. Ela requer que o professor planeje suas aulas considerando as necessidades curriculares de seus alunos. Para ajudá-los nessa tarefa, Van de Walle propõe um formato de aula baseada em resolução de problemas em três fases: *antes, durante* e *depois.* O autor propõe, como estrutura básica, que o professor forneça um problema para uma turma e os alunos deverão investigar e trabalhar em sua resolução e terminar com uma discussão.

A fase <u>antes</u> – PREPARANDO

Nessa fase, o professor querendo preparar os alunos para trabalhar o problema dado, deverá, então:

- Ativar conhecimentos prévios. Isso significa iniciar "puxando" o que os alunos aprenderam previamente, bem como relacionar suas experiências pessoais.
- Verificar se o problema foi compreendido. Isso não significa explicar *como* resolvê-lo, só esteja certo de que a tarefa está clara.

- Estabelecer expectativas claras. Isso inclui tanto a forma como eles irão trabalhar (individualmente, em pares ou pequenos grupos) e que produto você espera para demonstrar o entendimento deles sobre o problema.

A fase <u>durante</u> – ALUNOS TRABALHANDO

Com os alunos trabalhando no problema, o professor deve acompanhá-los, procurando:

- Dar uma chance aos alunos de trabalharem sozinhos, evitando antecipar possíveis posicionamentos.
- Descobrir o pensamento matemático dos alunos. Esse é um momento de observação e avaliação.
- Fornecer suportes apropriados. Considere maneiras de apoiar o pensamento dos alunos (conforme necessário) sem prejudicá-lo.
- Fornecer extensões vantajosas. Tenha algo preparado para alunos que terminarem mais rápido para ampliar o pensamento deles.

A fase <u>depois</u> – DISCUSSÃO EM CLASSE

Nessa última fase, "os alunos trabalharão como uma *comunidade de aprendizes*, discutindo, justificando e desafiando as várias soluções para o problema no qual todos acabaram de trabalhar." (VAN DE WALLE, 2001, p. 54). As ações do professor incluem:

- Promover uma comunidade matemática de aprendizes.
- Escutar as respostas encontradas pelos alunos sem julgá-las. Aproveite essa segunda oportunidade para descobrir como os alunos estão pensando. Avaliar os métodos e as soluções é dever dos alunos.
- Sintetizar as ideias principais e identificar futuros problemas a serem explorados. Você pode relacionar estratégias e diferentes ideias matemáticas e/ou preparar o terreno para futuras tarefas e atividades.

O ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tem sido colocado em prática em diversos trabalhos, de acordo com Allevato e Onuchic (2009). No entanto, não há uma forma rígida ou única para isso.

Para auxiliar o professor de Matemática, Onuchic, durante o projeto "Ensinando Matemática através da Resolução de Problemas", em 1998, propôs algumas questões que devem ser feitas pelo professor durante a escolha de um problema:

- Isso é um problema? Por quê?
- Que tópicos de Matemática podem ser iniciados com esse problema?
- Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- Para quais séries acredita ser este problema adequado?
- Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?
- Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
- Como professor, você teria dificuldade em trabalhar esse problema?
- Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?
- Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

Nesse projeto, "visando a um ensino-aprendizagem acompanhado de compreensão e significado através da Resolução de Problema" (ONUCHIC, 1999, p.216), foi elaborado um roteiro para aula e posteriormente ampliado (ZUFFI e ONUCHIC, 2007; ALLEVATO e ONUCHIC, 2009; ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, 2014). A proposta atual consiste na organização das atividades por meio das etapas a seguir:

1- *Preparação do problema*

O professor deve selecionar um *problema gerador* visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. O conteúdo matemático requerido para a resolução do problema não deve ter sido trabalhado em sala de aula.

2- *Leitura individual*

O aluno deve receber uma cópia do problema, preferivelmente impressa para que não se distraia ou perca tempo em copiá-lo da lousa. O professor deve solicitar que ele faça uma leitura individual.

3- *Leitura em conjunto*

Neste momento, os alunos se reúnem em grupo e realizam a leitura do problema novamente. Se houver dificuldade no entendimento de palavras do enunciado (o que seria um problema secundário), os alunos poderão consultar o dicionário. Caso haja dificuldade em ler o problema, o professor pode auxiliar.

4- *Resolução do problema*

Após percorrer as etapas anteriores, em seus grupos, os alunos buscam resolver o problema. Este é um trabalho cooperativo e colaborativo em que os estudantes irão aprender uns com os outros.

5- *Observar e Incentivar*

O professor tem o papel de observador, mediador, incentivador da aprendizagem. Cabe ao docente possibilitar que os alunos pensem, dando-lhes um tempo adequado para suas reflexões e incentivando a troca de ideias entre os estudantes nos grupos. A postura do professor não é a daquele que passa uma atividade na lousa e permanece sentado em sua mesa, mas daquele que circula entre os grupos, e neles observa e avalia as atividades que estão ocorrendo.

O professor deve incentivar a autonomia dos alunos durante a resolução dos problemas, permitindo soluções criativas. Além disso, como interventor e questionador, o docente deve auxiliar os alunos a resolver problemas secundários. São exemplos de problemas secundários: interpretação do enunciado, notação, passagem da linguagem materna para a linguagem matemática, dificuldades nas técnicas operatórias, dentre outras.

6- *Registro das resoluções na lousa*

Diversas resoluções devem ser colocadas pelos grupos na lousa. Não importa se as resoluções estão certas ou erradas, mas devem constar nelas os diferentes processos realizados. É um momento muito rico, pois os alunos sentem-se envolvidos e curiosos para a resposta.

7- *Plenária*

Neste momento, os alunos são convidados a defender seus pontos de vista e a esclarecer suas dúvidas. Os estudantes devem discutir suas resoluções e analisar a validade de suas respostas com os colegas. O professor, nesse processo, é o mediador nas discussões e deve possibilitar a participação ativa e efetiva de todos os alunos, pois a avaliação é um processo contínuo.

8- *Busca do consenso*

Com o esclarecimento das dúvidas e a análise das diversas resoluções, todos buscam um consenso sobre o resultado correto.

9- *Formalização do conteúdo*

Após esse trabalho conjunto, cabe ao professor fazer a sistematização dos conceitos e conteúdos construídos. É importante o uso da terminologia matemática, além das definições, demonstrações e uso das propriedades adequadas ao assunto.

10- *Proposição e resolução de novos problemas*

Os novos problemas propostos possibilitam que o professor analise se os alunos compreenderam os elementos essenciais do conteúdo matemático aprendido, introduzido naquela aula. Além disso, o professor, por meio dessa décima etapa, pode consolidar aprendizagens construídas nas etapas anteriores, aprofundar e ampliar as compreensões sobre determinado assunto ou tópico matemático.

Pode-se notar que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas ocorre em um processo “em espiral”, possibilitando que o professor resgate conhecimentos prévios dos alunos, com participação ativa dos mesmos, e que possa aprofundar e ampliar suas compreensões sobre um conceito, procedimento ou conteúdo matemático.

3.5 Por que Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática?

A palavra composta Ensino-Aprendizagem-Avaliação, foi criada para expressar a ideia de que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente e a avaliação deve estar integrada ao ensino para promover a aprendizagem.

Diversos autores trabalharam com a distinção dessas palavras, isoladamente ou em composição. Huanca (2006, p. 44) apresentou um quadro que foi ampliado por Nunes (2010, p. 93):

Quadro 2 - Distinções entre os termos: ensino, aprendizagem, avaliação, ensino-aprendizagem e ensino-aprendizagem-avaliação

	Ensino	**Aprendizagem**	**Avaliação**
Três processos distintos, individuais, na primeira metade do século XX.	A responsabilidade do ensino é do professor que visa à aprendizagem do aluno.	Se o professor tivesse o domínio do conhecimento então, o aluno aprenderia. Os alunos deveriam aprender a partir do que o professor ensinava, mas a responsabilidade da aprendizagem seria do aluno. Como? Sabendo relacionar suas ideias com o que o professor ensinava e isso nem sempre ocorria.	A avaliação era feita através de provas. Mudanças ao longo do tempo promoveram discussões sobre diferentes formas de como se poderia avaliar.
Um processo duplo ligando ensino à aprendizagem ocorrido entre as décadas de 60 a 80 do século XX.	**Ensino-Aprendizagem** Este é um ser maior. É maior do que o ensino. É maior do que a aprendizagem. Deve acontecer simultaneamente durante a construção do conhecimento. Os professores são guias e os alunos aprendem sabendo relacionar suas ideias com o conhecimento que ambos querem construir. A avaliação ainda se dava por meio de provas, mudando-se, às vezes, os enfoques assumidos.		
Um processo único de ensinar, aprender e avaliar, a partir da década de 90 do século XX.	**Ensino-Aprendizagem-Avaliação** Este é um ser ainda maior. É maior do que ensino, do que aprendizagem e do que avaliação. A avaliação constitui-se, então, como parte integrante do processo ensino-aprendizagem, que passa a ser vista como um processo bem mais amplo chamado ensino-aprendizagem-avaliação. Nesse processo nem só o aluno é avaliado, mas também, o professor.		

Fonte: Nunes (2010).

3.6 O papel do grupo nas aulas de Resolução de Problemas

Em uma sala de aula em que o trabalho cooperativo está presente, as interações entre as pessoas ocorrem de diferentes formas. As relações deixam de ser unicamente entre professor-aluno, como indicado na figura 5A, e ocorrem também entre aluno-aluno no grupo a que pertencem (figura 5B).

Figura 5 - As diferentes interações em sala de aula

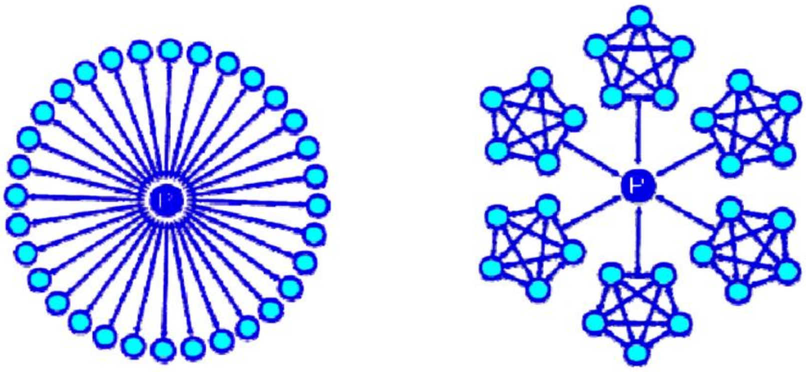


Fig. A
Sala de aula em ensino centrado
no professor

Fig. B
Sala de aula em ensino
cooperativo

Fonte: ARTZT e NEWMAN, 1991.

Destaca-se, ainda, de acordo com Artzt e Newman (1991) que o trabalho cooperativo, em sala de aula, não se caracteriza apenas pela disposição das mesas, já que

> Não é aprendizagem cooperativa se os estudantes se sentam juntos em grupos e trabalham individualmente sobre o problema. Não é aprendizagem cooperativa se estudantes se sentam juntos em grupos e uma só pessoa faz todo o trabalho. Verdadeiramente aprendizagem cooperativa requer a orientação de um professor que é quem pode ajudar os estudantes a entender a dinâmica de grupo, a desenvolver as habilidades que eles precisam para a aprendizagem cooperativa e a aprender Matemática trabalhando juntos em grupos. (p.3).

Numa sala de aula em ensino cooperativo e colaborativo, o professor não é a única de interação, mas apenas uma delas. Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, trabalhada pelo grupo GTERP desde 1992, a interação entre grupos, durante a plenária, por exemplo também poderia ser acrescentada. Nessa forma, as interações em sala de aula, utilizando a referida Metodologia, não se dão sob nenhuma das formas apresentadas por Artzt e Newman (1991).

Em seu contexto, é preciso chamar atenção para a figura 5 desta pesquisa. Nela, a figura do professor, mesmo em uma sala de aula em ensino cooperativo, aparece no centro e as interações ocorrem entre os alunos, nos grupos, e entre esses e o professor, a figura 5B. No entanto, na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tal figura mostrar-se-ia de modo diferente. Primeiramente, os grupos também dialogam entre si durante a plenária. Em segundo lugar, o professor não é mais a figura central, e sim o aluno, o qual deve construir seus conhecimentos de maneira ativa. Outro ponto a ser destacado é que os alunos podem também interagir com as novas tecnologias ou outros recursos pedagógicos, o que possibilita novas interações. Uma representação possível para as interações, em sala de aula, quando o professor faz uso da Metodologia seria a de uma rede, onde o professor seria o responsável por possibilitar novas situações problematizadoras.

O ambiente social é importante para a aprendizagem dos alunos e atenção deve ser dada à comunicação e aos meios pelos quais os estudantes constroem Matemática juntos. Van de Walle (2009) referindo-se ao livro "Dando sentido: ensinar e aprender Matemática com compreensão[38]", de Hiebert et al, de 1997, descreve quatro características de uma cultura produtiva em Matemática em sala de aula:

1. Todas as ideias são importantes, não importa de quem sejam.
2. As ideias devem ser compartilhadas.
3. Deve-se entender que se pode cometer erros.
4. Os estudantes devem compreender que a Matemática faz sentido.

Esse autor propõe que a sala de aula seja transformada em uma "comunidade matemática de aprendizes", em que as interações, aluno-aluno ou professor-aluno, sejam valorizadas. Além disso, o autor ressalta que a aprendizagem pode ser enriquecida quando os estudantes interagem uns com os outros.

É importante destacar que a diversidade de estudantes pode ser contemplada em uma aula de matemática através da Resolução de Problemas. Dessa maneira, grupos cooperativos heterogêneos podem ser formados.

> É muito mais proveitoso apostar na diversidade em sua sala de aula usando duplas ou grupos cooperativos que sejam heterogêneos. Alguns professores gostam de usar grupos fortuitos ou permitir que os estudantes escolham aqueles com os quais querem trabalhar. Essas técnicas podem ser ocasionalmente divertidas, mas é aconselhável refletir sobre como você vai agrupar seus alunos. Tente agrupar os que têm dificuldade com os mais capazes, mas que também sejam compatíveis e estejam dispostos a colaborar. O que todos os estudantes vão descobrir é que todos têm ideias para contribuir. (VAN DE WALLE, 2009, p.86).

Corroborando com Hiebert et al (1997), Van de Walle (2009) diz que as características citadas não são naturais à sala de aula e destaca o papel do professor como aquele responsável

[38] *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding.*

por ensinar os alunos a desenvolvê-las e a trabalhar em grupos. Outros aspectos como compartilhamento de ideias, o erro como parte da aprendizagem e a heterogeneidade dos integrantes do grupo devem ser aspectos contemplados pelo professor, ao utilizar o trabalho cooperativo em sala de aula.

3.7 Pesquisas sobre Resolução de Problemas no grupo GTERP

O grupo GTERP, vinculado ao Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da UNESP–Rio Claro, coordenado, desde 1992, pela Prof. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, tem avançado nas investigações e nas pesquisas científicas sobre Resolução de Problemas.

O grupo é formado por alunos do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e por professores que buscam aprimorar sua prática docente. Os trabalhos do GTERP têm como filosofia atingir a sala de aula, ou seja, as produções do grupo relacionam-se com questões de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, investigando tanto o aluno quanto o professor.

De modo breve, será apresentada a produção do grupo GTERP:

A primeira dissertação desenvolvida por um integrante do grupo foi em 1992. O trabalho intitulado *Resolução de Problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática*, desenvolvido por Valdir Rodrigues, buscou caminhos alternativos para que a criatividade emergisse e se desenvolvesse através da resolução de problemas que exigiam o pensamento produtivo do aluno.

A dissertação de Carlos Roberto dos Santos, defendida em 1995, cujo título é *As Influências da linguagem e da comunicação no ensino-aprendizagem da Matemática* defende que a linguagem seja valorizada pelo professor como estratégia para a criação de uma ambiente vigoroso de comunicação do conhecimento matemático.

A dissertação de mestrado de Luciene Souto Botta (1997) *Números racionais e raciocínio proporcional: Considerações sobre ensino-aprendizagem* abordou a importância de se trabalhar os conceitos de número racional e de proporcionalidade através da Resolução de Problemas. A autora considera que há uma melhor compreensão pelos estudantes, dos conceitos referidos acima, quando se trabalha a Matemática através da resolução de problemas.

Considerando a sala de aula em seus múltiplos aspectos e utilizando a Resolução de Problemas, inclusive em nível de questões de natureza sócio-político-cultural, a dissertação de Silvanio de Andrade (1998) apresenta uma proposta de ensino-aprendizagem de Matemática. O título de seu trabalho é *Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas.*

Preocupada com a formação inicial de professores, Lívia Lopes Azevedo (1998), em sua dissertação de mestrado *Uma proposta de mudança, na Licenciatura em Matemática do ICLMA, apoiada na Metodologia de Ensino de Matemática via Resolução de Problemas,* elaborou um projeto de trabalho sobre logaritmos, apoiado no ensino de Matemática via Resolução de Problemas. Desenvolveu esse projeto com uma turma de alunos do Instituto de Ciências e Letras do Médio Araguaia (ICLMA). Em seguida, criou uma proposta buscando melhorar a qualidade dos profissionais formados pela instituição.

A primeira tese de doutorado defendida por um dos integrantes do GTERP foi a de Leonardo Paulovich (1998). A tese *Conceitos algébricos iniciais: um estudo sobre sua formação nos anos de escolaridade* buscou investigar a formação dos conceitos algébricos iniciais e sua evolução nos anos de escolaridade. A pesquisa foi realizada com alunos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, alunos de 1ª, 2ª e 3ª série do Ensino Médio, alunos da Licenciatura em Matemática e por professores de Matemática em exercício. Os resultados indicaram que o ensino de álgebra valoriza os procedimentos e técnicas de cálculo com os objetos algébricos e não a aquisição dos conceitos. Além disso, a formação deficiente dos conceitos algébricos iniciais, na 7ª série, se estende ao longo da escolaridade, podendo se constituir em obstáculos conceituais à formação de outros conceitos a eles relacionados.

A dissertação de mestrado de Flávia Sueli Fabiani (1998) abordou os *Números Complexos via Resolução de Problemas*. O principal objetivo dessa pesquisa foi apresentar uma proposta de trabalho para o ensino dos números complexos com compreensão e significado. A autora utilizou a Metodologia de ensino da Matemática via Resolução de Problemas, usando também a História da Matemática e a Calculadora Gráfica.

Outra pesquisa preocupada com o Ensino Superior foi a de Maria Lúcia Boero (1999). O título de sua pesquisa foi *A Introdução da Disciplina "Ensino-Aprendizagem da Matemática através da Resolução de Problemas" no curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Biológicas, Exatas e Experimentais da Universidade Presbiteriana Mackenzie: Uma proposta de Mudança*. A preocupação da autora, nesse trabalho, foi com a formação matemática dos futuros professores. Para melhorar essa formação, propôs uma mudança na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática e a inclusão da disciplina “Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas”.

Preocupado com a questão da avaliação nas aulas de matemática, Márcio Pironel (2002) procurou agregar a avaliação ao processo de ensino-aprendizagem na sala de aula de Matemática, tornando-a parte integrante deste processo. O título de sua pesquisa é *A Avaliação integrada no processo ensino-aprendizagem da Matemática.* O autor apresentou instrumentos alternativos de avaliação, sempre buscando a transformação do aluno em sujeito crítico, reflexivo, criativo e participativo.

A dissertação de mestrado de Elizabeth Quirino de Azevedo (2002), *Ensino-aprendizagem das Equações Algébricas através da Resolução de Problemas,* analisou a questão do ensino dessas equações no 3º ano do Ensino Médio. Os instrumentos utilizados pela autora foram entrevistas, questionário, análise de documentos legais e análise de livros didáticos e não didáticos. Foi construído um projeto abordando o ensino das Equações Algébricas, último conteúdo do programa de Matemática da Educação Básica, para ser testado por professores em salas de aula do Ensino Médio.

Preocupado com a formação profissionalizante de alunos do Curso de Mecânica de Usinagem, do SENAI, Wagner José Bolzan (2003), buscou uma proposta de trabalho apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Em sua dissertação de mestrado, *A Matemática nos cursos profissionalizantes de Mecânica,* o autor buscou fazer com que o aluno relacionasse a Matemática aprendida academicamente com a Matemática da prática de oficina.

A tese de doutorado de Walter Paulette (2003), *Novo enfoque da disciplina Matemática e suas Aplicações, no Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista – UNIP,* propôs mudanças na ementa e no conteúdo programático desse curso. Fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem via Resolução de Problemas, os conceitos foram construídos a partir de situações-problema oriundos do cotidiano do Curso de Administração de Empresas. As evidências mostraram que, com o trabalho em grupo, os alunos aprendem a interpretar textos, a discutir ideias, a propor soluções e tornam-se mais críticos, participantes e reflexivos.

Mariângela Pereira (2004), em seu trabalho intitulado *O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas no 3º ciclo do Ensino Fundamental,* buscou verificar quais contribuições a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas pode trazer, partindo de problemas geradores de novas ideias matemáticas. As evidências coletadas, ao trabalhar com alunos a Divisibilidade e os Números

Racionais, mostraram um aumento na motivação, tanto da professora em ensinar quanto dos alunos em aprender.

A tese de doutorado *Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência*, de Norma Suely Gomes Allevato (2005), foi desenvolvida com alunos de um curso superior de Administração de Empresas. O conteúdo estudado era funções e a metodologia de ensino adotada pelo professor foi a de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução de problemas, utilizando problemas fechados e relacionados a temas da área de Negócios. A proposta didática foi trabalhar esses problemas com o auxílio do software *Winplot.* Os resultados indicaram que a mediação do *software* trouxe novas possibilidades em relação aos processos de resolução dos problemas.

A dissertação de mestrado, de Roger Ruben Huaman Huanca (2006), *A Resolução de problemas no processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da sala de aula,* verificou se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num bom caminho alternativo para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos pelos alunos do Ensino Médio. O autor constatou que essa metodologia de ensino provocou o aumento da motivação dos alunos em aprender. Além disso, em muitas oportunidades, os alunos relacionaram as atividades realizadas com tópicos trabalhados anteriormente.

Paulo Henrique Hermínio (2008), em sua dissertação *Matemática financeira – um enfoque da Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino e Aprendizagem,* investigou se os alunos gostariam de adquirir conhecimentos de Matemática Financeira, como os professores abordam esse tema e qual a relevância deste para os alunos, na visão dos docentes. Para isso, foi criado um Projeto de Ensino sobre Matemática Financeira fazendo-se uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

A dissertação de Marcos Vinícius Ribeiro (2010), *O ensino do conceito de Integral, em sala de aula, com recursos da História da Matemática e a Resolução de Problemas,* buscou transformar os alunos em coconstrutores de seu próprio conhecimento. Primeiramente, analisou-se como ocorria o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, em uma sala de aula de um curso de engenharia. Em seguida, foi criado um projeto e aplicado em doze encontros. As evidências coletadas indicaram que os alunos ficaram interessados e entusiasmados ao trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas e que tal abordagem, através de problemas e de recursos da História da Matemática, foi muito significativa ao futuro engenheiro.

Preocupada com um conteúdo do Ensino Médio, Analucia Castro Pimenta de Souza (2010) abordou em sua dissertação *Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas* como tal metodologia pode possibilitar uma aprendizagem com compreensão e significado. Os resultados da pesquisa mostraram que houve envolvimento ativo dos participantes na construção de novos conceitos e conteúdos, através da resolução dos problemas propostos, por meio de um trabalho investigativo.

Outra dissertação voltada ao trabalho do Ensino Médio foi a de Eliane Saliba Botta (2010). O título de seu trabalho foi *O Ensino do Conceito de Função e Conceitos Relacionados a partir da Resolução de Problemas.* As questões de pesquisa foram: "(1) É possível antecipar a introdução do conceito de função para as diversas séries do Ensino Fundamental II, com o uso da metodologia acima mencionada? (2) Como o estudo dos erros cometidos pelos alunos pode ajudar no processo de ensino-aprendizagem?" As evidências coletadas indicaram que o ensino do conceito de função pode ser antecipado, de forma intuitiva, para alunos de 6º ano do Ensino Fundamental. Em relação ao estudo dos erros, esse procedimento pode possibilitar ao professor identificar, classificar e agrupar os erros dos alunos e buscar estratégias para rever os conteúdos insatisfatórios, de acordo com os erros cometidos. Além disso, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas mostrou-se uma ferramenta bastante eficiente para realizar esse trabalho.

A terceira tese de doutorado, defendida por um dos integrantes do GTERP, foi a de Célia Barros Nunes (2010). O título de seu trabalho foi *O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de Matemática.* A autora trabalhou com alunos da Licenciatura em Matemática nas disciplinas *Didática da Matemática* e *Laboratório de Ensino de Matemática.* O objetivo dessa pesquisa é o de investigar, compreender e evidenciar as potencialidades didático-matemáticas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, nos processos de ensinar e aprender Geometria. Uma das implicações deste trabalho é a importância do futuro professor vivenciar essa Metodologia de ensino ainda na Licenciatura.

A dissertação de Tatiane da Cunha Puti (2011), *A Produção de Significados durante o Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Equações Polinomiais,* investigou os significados produzidos pelos alunos, no processo de ensino-aprendizagem de equações polinomiais do 2º grau. A pesquisadora analisou a produção de significado a partir de atividades trabalhadas em sala de aula. Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram: observação participante, notas de campo, registros de trabalhos de alunos e vídeos das aulas. A análise possibilitou múltiplas interpretações dos dados coletados.

A quarta tese, defendida em 2013, com o título *Resolução de Problemas no cenário da Matemática discreta* foi a de Fernanda dos Santos Menino. A pesquisa tratou matematicamente um problema gerado pelo uso das peças do Dominó e buscou oferecer recomendações aos professores do Ensino Básico para desenvolver um trabalho, usando as peças do referido jogo, nos diferentes anos escolares. A pesquisadora discutiu, ainda, questões relacionadas à Matemática Discreta e o seu trabalho em sala de aula.

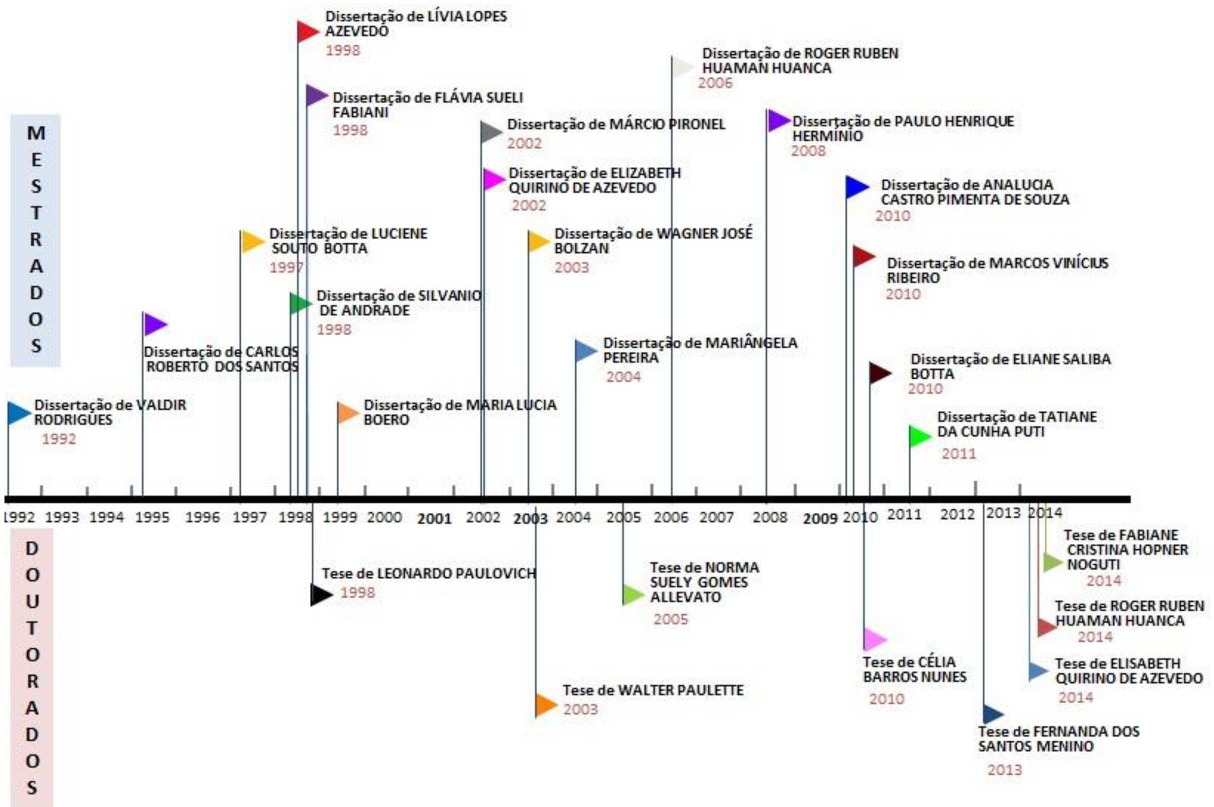
Em 2014 foi defendida a quinta tese do grupo GTERP por Elizabeth Quirino de Azevedo. A tese *O Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no contexto da formação inicial do Professor de Matemática* trabalhou a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com futuros professores de Matemática. A autora fez uso de duas disciplinas da graduação, Tendências em Educação Matemática II e Seminário de Práticas Educativas VI, da Universidade Federal do Mato Grosso, *campus* Sinop, para tratar aspectos teóricos e práticos da Resolução de Problemas com seus alunos, futuros professores. As análises evidenciaram que a Resolução de Problemas se mostrou um importante caminho para preparar o futuro professor de Matemática.

A tese *A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação: uma contribuição para a formação continuada do professor de Matemática*, de Roger Ruben Huaman Huanca, também defendida em 2014, trabalhou a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática com um grupo de professores do Cariri Paraibano. Após um evento organizado em Monteiro- PB, sobre Resolução de Problemas, pela 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação de Paraíba, foram convidados professores de Matemática da região, selecionados e entrevistados pelo pesquisador 35. Desses foram selecionados seis participantes para constituírem um grupo de estudo. Nele, após estudarem teoricamente, colocaram em prática a Metodologia. Esses professores tornaram-se multiplicadores, levando aos demais professores da região, o material trabalhado nesse processo investigativo a ser conduzido em suas próprias salas de aula.

Fabiane Cristina Höpner Noguti defendeu, em 2014, a tese intitulada *Um curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas para alunos ingressantes da Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete*. A autora, preocupada com o conhecimento de Matemática na transição da Educação Básica para o Ensino Superior, trabalhou com alunos ingressantes em sua instituição, a UNIPAMPA – Universidade Federal do Pampa, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. As principais contribuições deste trabalho para os alunos foram o uso de uma nova metodologia que se refletiu no interesse dos alunos em participar das aulas e na baixa evasão do Curso e da disciplina de Cálculo I.

Em uma linha do tempo, as teses e dissertações do grupo ficaram distribuídas conforme figura a seguir:

Figura 6 – Linha do tempo das produções do Grupo GTERP



Fonte: Elaborado pela autora.

Além desses trabalhos acadêmicos concluídos, existem outras teses em andamento.

3.8 Resolução de Problemas e formação de professores

O objetivo desta seção é buscar relações entre a Resolução de Problemas e o fenômeno de interesse da pesquisa – a formação de professores. Serão apresentados, desse modo, trabalhos que abarcam essa questão. Na análise dos dados, Capítulo 6, as ideias de teóricos, ouvidos neste Capítulo 3, serão resgatadas e possíveis relações serão tecidas entre elas e o objeto de estudo considerado neste trabalho.

O primeiro deles, de Fernandes et al (1997), apresenta um conjunto de trabalhos de Portugal e de outros países sobre a Resolução de Problemas na Formação Inicial de professores de Matemática. Dentre eles, dois deles se destacam:

(1) o de Vale (1997) que trabalhou, com professores do 4º ano do curso de Matemática e Ciências da Natureza de uma Escola Superior de Educação, por cinco meses. A pesquisa teve por objetivo investigar o desempenho e as concepções de futuros professores em relação à resolução de problemas. Os futuros professores deram pouca importância às fases do modelo de Polya e julgaram que as tarefas propostas eram interessantes e apropriadas para apresentar aos seus alunos.

Para Vale (1997)

> A formação inicial pode contribuir favoravelmente, entre outros aspectos, para aprofundar os conhecimentos e as competências dos futuros professores sobre a resolução de problemas, pois estes estão em melhores condições que os professores em serviço, uma vez que poderão estar mais receptivos para a aprendizagem e para a alteração de suas concepções. (p. 8).

(2) o de Leitão e Fernandes (1997), que estudou os processos usados pelos futuros professores de Matemática ao resolverem problemas em grupo. Os participantes foram quatro alunos que resolveram, em grupo, seis problemas. O grupo foi acompanhado por um professor que realizou uma observação direta participativa e gravou em áudio suas discussões. Os resultados indicaram que os alunos tiveram sucesso na resolução dos problemas e que o grupo mostrou-se comunicativo e reflexivo, buscando sempre um consenso e procurando outras formas de resolução do problema.

No Brasil, em relação aos trabalhos envolvendo Resolução de Problemas e o contexto da formação inicial de professores, foram apresentados, na seção anterior, os de Nunes (2010) e de Azevedo (2014). Além desses, destaca-se o de Costa (2012) que investigou como (futuros[39]) professores de Matemática exploram o conceito de proporcionalidade através da

---

[39] Esse autor expressa (futuro) professor àquele que, embora ainda não tenha completado sua graduação, já está dando aulas.

resolução de problemas. Os participantes dessa pesquisa foram estudantes de uma universidade pública do Estado do Maranhão. A pesquisa investigou também algumas crenças dos (futuros) professores antes, durante e depois de vivenciarem a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Os resultados indicaram que a Metodologia ajudou os (futuros) professores a saírem do estado de ouvintes e a se tornarem questionadores, investigativos e participativos, sendo coconstrutores de seus próprios conhecimentos. Além disso, mobilizaram diversas estratégias de resolução para os problemas propostos e puderam refletir sobre “quando” e “como” ensinar proporcionalidade aos seus futuros alunos.

Em relação à Resolução de Problemas no contexto da formação continuada de professores de Matemática, afora o trabalho de Huanca (2014) apresentado na seção anterior, destaca-se o de Oliveira (2012) que envolveu um grupo de 16 professores dos anos iniciais, participantes de uma atividade de extensão, durante o primeiro semestre de 2011. A análise dos dados indica que as atividades criadas e desenvolvidas na formação continuada contribuíram para que os professores desenvolvessem um ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. Esse processo de formação, mostrou-se importante, pois valorizou saberes e aprendizagens docentes, possibilitando a construção e reconstrução dos mesmos. Além disso, os professores puderam contar suas experiências, seus desejos e sentimentos em relação ao desenvolvimento da metodologia de resolução de problemas no ensino e na aprendizagem de Matemática nos anos iniciais.

3.9 A minha pesquisa no cenário de pesquisas já realizadas

A literatura sobre Resolução de problemas aqui apresentada trouxe contribuições acerca do trabalho, em sala de aula, e os diferentes modos de se trabalhar resolução de problemas. O ensino de Matemática pode ser para, sobre ou via/ através de Resolução de Problemas. Cada uma dessas perspectivas implica em uma forma de trabalho diferente. Apresentar essas várias formas e discutir sobre as vantagens do uso de uma Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas nas aulas de Matemática pode colaborar para o aprimoramento das práticas pedagógicas realizadas e, com isso, promover a melhoria da aprendizagem dos alunos.

Outra importante contribuição promovida pelo contato e reflexão a partir de outras pesquisas é a de que os futuros professores, ainda alunos do curso de Licenciatura em

Matemática, passaram por aproximadamente 12 anos de escolaridade e apresentam uma concepção sobre o trabalho com resolução de problemas. Discutir suas experiências e apresentar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas mostra-se importante ao futuro professor.

Considerando-se as pesquisas que abordaram resolução de problemas e formação de professores, serão destacadas algumas diferenças e aproximações com a presente pesquisa. Um primeiro grupo de trabalhos, Vale (1997) e Leitão e Fernandes (1997) preocuparam-se em analisar o desempenho, as concepções e os processos durante e nas atividades de resolução de problemas. Os futuros professores foram sujeitos da pesquisa e a atividade mostrou-se mais como um “diagnóstico” do que uma contribuição para a formação inicial dos professores. A presente pesquisa, distancia-se dessa posição de “diagnóstico, pretendendo uma intervenção junto a um grupo de futuros professores.

Os trabalhos de Nunes (2010) e Azevedo (2014) utilizaram disciplinas do curso de Licenciatura para estudar a teoria e a prática da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Sem dúvida, os alunos puderam refletir e trabalhar por meio dessa nova metodologia que lhes era apresentada. Costa (2012) utilizou o que denominou de “encontros de formação” para trabalhar a referida metodologia com (futuros) professores.

Nesse sentido, a presente pesquisa constituirá um grupo de estudos na graduação para estudar e vivenciar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Além disso, o foco será o de analisar que aprendizagens profissionais docentes esse trabalho estaria possibilitando.

Quanto à formação continuada, o trabalho de Huanca (2014) constituiu um grupo com professores convidados para, trabalhando com essa Metodologia, formarem-se multiplicadores capazes de a divulgarem a todos os demais professores de Matemática da região do Cariri Paraibano. Os professores envolvidos pertenciam a escolas distintas e com realidades, muitas vezes, diferentes, havendo um distanciamento da presente pesquisa, em que se pretende uma formação no próprio local de trabalho. Desse modo, nesta pesquisa trabalhar-se-á com o conjunto de professores de Matemática de uma única escola, buscando-se o desenvolvimento profissional do grupo como um todo e analisando-se as aprendizagens profissionais docentes que esse trabalho possibilitaria.

Os resultados das pesquisas de Costa (2012), Azevedo (2014) e Huanca (2014) mostram que professores ou futuros professores envolvidos em suas pesquisas podem se tornar coconstrutores de seus próprios conhecimentos, participando ativamente do processo de resolução de problemas.

Dando prosseguimento, o próximo capítulo deverá apresentar um modelo modificado levando à construção da Pergunta da pesquisa. Após realizar esse levantamento bibliográfico, foi possível adquirir novas ideias e construir um arcabouço teórico para a presente pesquisa. Com isso, o Modelo Preliminar daria origem a um novo modelo. Ao analisá-lo será possível elaborar a Pergunta da pesquisa.

CAPÍTULO 4 – MODELO MODIFICADO, PERGUNTA DA PESQUISA, ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA.

> ... ter uma interrogação e andar em torno dela, em todos os sentidos, sempre buscando suas múltiplas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões, e outra vez mais..
>
> MARIA APARECIDA VIGGIANI BICUDO

4.1 O Modelo Modificado

Considerando o Fenômeno de Interesse e apoiando-se no Modelo Metodológico de Romberg, construiu-se um Modelo Preliminar para esta pesquisa. Segundo Romberg (1992), o referido modelo envolve a escolha de variáveis que propiciam a compreensão do fenômeno de interesse, servindo como um ponto de partida para o pesquisador. A partir do Modelo Preliminar foram identificados outros trabalhos que exploraram o mesmo assunto, Formação de Professores e Resolução de Problemas, e foi realizada uma revisão de literatura e a construção de um referencial teórico.

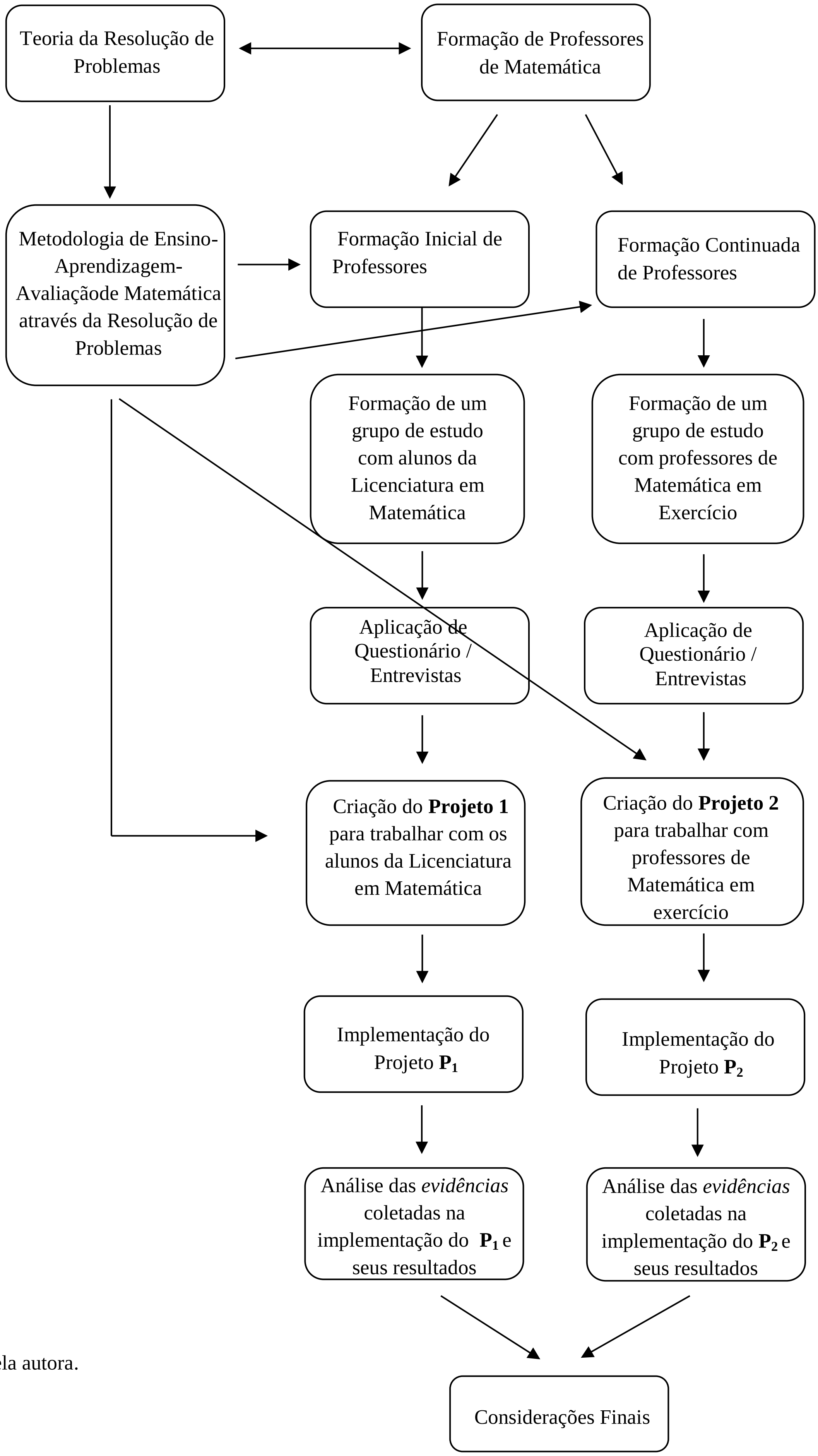
Após algumas etapas da pesquisa, em especial a revisão de literatura e a construção de um referencial teórico, sentiu-se a necessidade de realizar modificações no Modelo Preliminar. Após um reexame do fenômeno de interesse, à luz do que se havia estudado, incluíram-se novas relações que dariam origem a um Modelo Modificado.

Para a constituição desse Modelo Modificado, inicialmente a presente pesquisa foi localizada dentro do cenário de outras já realizadas. Com isso, foi possível aproximá-la ou distanciá-la de trabalhos que apresentam o mesmo tema mas com outros enfoques. As principais variáveis-chave inseridas no Modelo Modificado foram:

- A formação de professores em grupos de estudo;
- A formação continuada no local de trabalho;
- A formação inicial possibilitando um contexto colaborativo entre os futuros professores;
- A construção de projetos de trabalho com base em conteúdos considerados difíceis por cada um dos grupos e apoiados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Desse modo, o Modelo Preliminar (Figura 1), a partir das considerações realizadas, foi reestruturado dando origem ao Modelo Modificado (Figura 7) desta tese:

Figura 7 – Modelo Modificado



Fonte: Elaborado pela autora.

Após a elaboração do Modelo Modificado e considerando-se que os saberes docentes podem revelar aprendizagens, transformações e desenvolvimento profissional, foi possível enunciar a pergunta da pesquisa, que será apresentada a seguir:

4.2 A Pergunta da Pesquisa – O problema da Pesquisa

- Que aprendizagens[40] profissionais docentes se manifestam em um grupo de estudo apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Após a formulação da pergunta da pesquisa, conclui-se o primeiro bloco do Modelo Metodológico de Romberg. O próximo passo é a busca de estratégias e procedimentos idealizados, para resolução do problema de pesquisa.

Compreende-se que, após a construção dos projetos de intervenção, conforme o Modelo Modificado, com a implementação e a análise dos mesmos, serão encontrados elementos responsáveis pela resposta à pergunta da pesquisa.

4.3 Estratégias e Procedimentos para a resolução do Problema da Pesquisa

A formação de professores pode apresentar singularidades dependendo da experiência e da motivação e receptividade dos participantes para aprender algo novo. Se por um lado, os professores em exercício, que já trabalham há alguns anos, possuem conhecimentos pedagógico, curricular e de conteúdo; por outro, os futuros professores de Matemática têm um conhecimento de conteúdo matemático e didático trabalhado na graduação. Por esse motivo, escolheu-se trabalhar com cada um desses grupos, respeitando-se suas especificidades e analisando quais aprendizagens profissionais docentes a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode trazer a cada um deles.

[40] Neste trabalho, entende-se que: "A aprendizagem está associada à compreensão do mundo material e simbólico, que pressupõem geração, apropriação, transformação e reorganização de significações. Por isso, postulamos que aprender é um processo de significação, isto é, um processo que mobiliza significações, criando e recriando-as." (COLINVAUX, 2007, p. 32).

Nesse momento da pesquisa, após a criação do Modelo Modificado e da formulação da pergunta de pesquisa, buscar-se-á respondê-la. Mas, nesse momento, ainda não se tem elementos para isso. Iniciamos, então, o 2º Bloco de Romberg, uma fase de idealização, de planejamento, da busca de "o quê fazer" e de "como fazer", tendo a pergunta de pesquisa como referência.

Ao se idealizar "o quê fazer", está-se na atividade 5 do esquema proposto por Romberg e descrito na página 22 desta tese. Trata-se de selecionar uma estratégia geral de pesquisa para coletar dados. Entende-se por estratégias as táticas, os caminhos que se pretende seguir, aquilo que se vai fazer para criar condições de responder a pergunta da pesquisa.

Nessa direção será necessária a criação de dois projetos de trabalho distintos, um deles a ser desenvolvido com os professores de Matemática em exercício e outro com os alunos da Licenciatura em Matemática. Desse modo, a estratégia geral (E_G) para essa pesquisa será: *Criar dois projetos P1 e P2 para trabalhar, em cada um dos grupos (um formado por futuros professores de Matemática e outro por professores de Matemática em exercício), visando a discutir Resolução de Problemas e, em especial, conhecer e fazer uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.*

Durante esse processo, pensou-se em constituir um grupo único, mas diante da dificuldade em reunir professores da Escola Básica e futuros professores em um mesmo horário e considerando-se que esses grupos apresentam problemas e dificuldades diferentes um do outro, optou-se pela constituição de dois grupos.

4.3.1 O Planejamento dos projetos

4.3.1.1 O Projeto P1

Os futuros professores de Matemática, envolvidos no projeto, ainda não haviam realizado estágios. Apresentavam ligação com a universidade, onde eram vistos ainda como alunos em formação. O Projeto P1, voltado ao trabalho com os futuros professores de Matemática, terá sua própria estratégia geral: E_{G1} - que é a criação deste projeto.

A partir das variáveis-chave oriundas do Modelo Modificado será necessária a utilização de estratégias auxiliares, que conduzirão o pesquisador nas próximas etapas da pesquisa.

A atividade 6, do Modelo de Romberg, sugere a seleção de um procedimento geral de pesquisa. Esse procedimento idealizado busca "como resolver" tudo o que foi levantado nas estratégias consideradas. Para auxiliar no procedimento geral 1 (P_{G1}) da pesquisa – que seria *a criação do Projeto P1*, serão selecionados procedimentos auxiliares P_1, P_2, P_3,..., P_9 correspondentes às estratégias auxiliares E_1, E_2, E_3,..., E_9, de acordo com o quadro a seguir:

Quadro 3 - Estratégias e procedimentos auxiliares do Projeto P1

Estratégias (O quê fazer?)	**Procedimentos (Como fazer?)**
E_1: Identificar a Universidade em que será implementado o Projeto P1.	P_1: Identificação da Universidade em que será implementado o Projeto P1.
E_2: Convidar alunos da Licenciatura em Matemática dessa instituição para participarem de um grupo de estudo.	P_2: Convite aos alunos da Licenciatura em Matemática dessa instituição para participarem de um grupo de estudo.
E_3: Definir objetivos, justificativas, recursos necessários e forma de avaliação da implementação do projeto.	P_3: Definição de objetivos, justificativas, recursos necessários e forma de avaliação da implementação do projeto.
E_4: Apresentar o projeto aos alunos interessados e definir, com eles, o horário das reuniões do grupo.	P_4: Apresentação do projeto aos alunos interessados e definição do horário das reuniões do grupo.
E_5: Aplicar um questionário para conhecer o perfil dos participantes do grupo e para a identificação das principais dificuldades, em conteúdos matemáticos, encontradas por eles enquanto alunos ao longo da escolaridade básica.	P_5: Aplicação de um questionário para conhecer-se o perfil dos participantes do grupo e para a identificação das principais dificuldades, em conteúdos matemáticos, encontradas por eles enquanto alunos ao longo da escolaridade básica.
E_6: Criar atividades para o Projeto P1, a partir das dificuldades apontadas pelos licenciandos, a serem desenvolvidas pelo pesquisador junto ao grupo de alunos da Licenciatura em Matemática.	P_6: Criação de atividades para o Projeto P1, a partir das dificuldades apontadas pelos licenciandos, a serem desenvolvidas pelo pesquisador junto ao grupo de alunos da Licenciatura em Matemática.
E_7: Aplicar as atividades criadas para o projeto P1.	P_7: Aplicação das atividades criadas para o Projeto P1.
E_8: Analisar as *evidências* coletadas nesse trabalho.	P_8: Análise das *evidências* coletadas nesse trabalho.
E_9: Tirar conclusões sobre as *evidências* identificadas.	P_9: Conclusões sobre as *evidências* coletadas.

Fonte: Elaborado pela autora.

4.3.1.2 O Projeto P2

Os professores em exercício já possuem experiência de trabalho em sala de aula e, dessa forma, as estratégias levantadas devem levar esse fator em consideração. A estratégia geral 2 (E_{G2}) será: *Criar um Projeto P2 para trabalhar no grupo formado por professores de Matemática em exercício visando a discutir Resolução de Problemas e, em especial, conhecer e fazer uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.*

Para sua criação serão necessárias estratégias auxiliares, que se constituirão no planejamento das atividades que o pesquisador deverá desenvolver.

De modo análogo ao trabalhado no Projeto P1, para auxiliar no procedimento geral (P_{G2}) da pesquisa – que seria *a criação do Projeto P2*, serão selecionados procedimentos auxiliares P_1, P_2, P_3,..., P_8 correspondentes às estratégias auxiliares E_1, E_2, E_3,..., E_8. O quadro a seguir apresenta as estratégias e procedimentos auxiliares do Projeto P2:

Quadro 4 - Estratégias e procedimentos auxiliares do Projeto P2

Estratégias (O quê fazer?)	**Procedimentos (Como fazer?)**
E_1: Identificar a escola estadual em que será implementado o Projeto P2.	P_1: Identificação da escola estadual em que será implementado o Projeto P2.
E_2: Definir objetivos, justificativas, recursos necessários e forma de avaliação da implementação do projeto, para ser entregue à direção e à supervisora de ensino da escola.	P_2: Definição de objetivos, justificativas, recursos necessários e forma de avaliação da implementação do projeto e a entrega à direção e à supervisora de ensino da escola.
E_3: Apresentar o projeto aos professores e aplicar um questionário buscando-se conhecer o perfil pessoal/profissional desses docentes e levantar quais conteúdos matemáticos mais sentem dificuldade ao trabalhar com seus alunos.	P_3: Apresentação do projeto aos professores e aplicação de um questionário buscando conhecer o perfil pessoal/profissional desses docentes e o levantamento de conteúdos matemáticos que os professores mais sentem dificuldade ao trabalhar com seus alunos.
E_4: Realizar uma entrevista coletiva para que os professores possam esclarecer as dificuldades indicadas por eles, ao ensinar determinados conteúdos matemáticos aos seus alunos. Além disso, nesse momento, pretende-se verificar se as dificuldades encontradas são compartilhadas pelos demais professores do grupo.	P_4: Realização de uma entrevista coletiva para que os professores possam esclarecer as dificuldades indicadas por eles, ao ensinar determinados conteúdos matemáticos aos seus alunos. Verificação de que as dificuldades encontradas são ou não compartilhadas pelos demais professores do grupo.
E_5: Criar atividades para o Projeto P2, a partir das dificuldades apontadas pelos professores, visando ao trabalho do pesquisador junto ao grupo de professores de Matemática em exercício.	P_5: Criação de atividades para o Projeto P2, a partir das dificuldades apontadas pelos professores, visando ao trabalho do pesquisador junto ao grupo de professores de Matemática em exercício.
E_6: Aplicar as atividades criadas para o Projeto P2.	P_6: Aplicação das atividades criadas para o Projeto P2.
E_7: Analisar as *evidências* coletadas nesse trabalho.	P_7: Análise das *evidências* coletadas nesse trabalho.
E_8: Tirar conclusões sobre as *evidências* coletadas.	P_8: Conclusões sobre as *evidências* coletadas.

Fonte: Elaborado pela autora.

4.3.2 Colocando os procedimentos gerais em ação

Após selecionar, para P1 e P2, as estratégias de pesquisa e os procedimentos a serem realizados, deve-se colocar os procedimentos gerais em ação. Para isso, cada um dos procedimentos auxiliares precisam ser postos em prática. Trata-se de uma etapa da pesquisa caracterizada pela ação do pesquisador.

4.3.2.1 O P_{G1} em ação

PROJETO 1: Pensando a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática: O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Os procedimentos auxiliares em ação

- **P_1:** Identificação da Universidade em que será implementado o Projeto P1.

Após contato inicial com a Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual Paulista – *Campus* Universitário de Rio Claro, ofereceu-se aos alunos desse curso a possibilidade da constituição de um grupo de estudos. Inicialmente, foram propostos 15 encontros ou quatro meses de duração. Para que os alunos se interessassem em participar, transformou-se o grupo de estudos em um curso de extensão, o que possibilitou a emissão de um certificado de participação. A ideia de colaboração foi o cerne deste trabalho e os alunos foram avisados de que se tratava de um grupo de estudos e não de um curso convencional em que, geralmente, o professor ministra aulas. Apesar da pesquisadora propor os problemas e os textos, esta escolha se deu com base nos conteúdos indicados pelos alunos como sendo difíceis ao longo da Educação Básica.

- **P_2:** Convite aos alunos da Licenciatura em Matemática dessa instituição para participarem do grupo de estudo.

Após o contato com alguns professores que ministravam aulas no curso de Licenciatura em Matemática, promoveu-se a divulgação do curso de extensão “Pensando a

Resolução de Problemas nas aulas de Matemática: O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas".

- **P_3:** Definição de objetivos, justificativas, recursos necessários e forma de avaliação da implementação do projeto.

Objetivo Geral do Projeto: Trabalhar, de maneira diferenciada, com futuros professores de Matemática, alunos da Licenciatura, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Objetivos Específicos do Projeto:

1) Identificar conteúdos em que os alunos sentem dificuldade em trabalhar ou saber justificar;
2) Refletir sobre a forma do desenvolvimento das aulas de Matemática que tiveram na escolaridade básica;
3) Refletir sobre como seus professores trabalharam resolução de problemas em suas aulas, ou seja, como o futuro professor vivenciou a Resolução de Problemas;
4) Apresentar a História da Resolução de Problemas no ensino de Matemática;
5) Discutir os diversos modos de abordar a Resolução de Problemas;
6) Apresentar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas;
7) Apresentar situações-problema envolvendo conteúdos em que os alunos da Licenciatura apontaram dificuldades;
8) Investigar, com os futuros professores, as contribuições que essa Metodologia de Ensino pode trazer às suas futuras aulas.

Justificativas para a implementação do Projeto:

Este Projeto pretende trabalhar, com alunos da Licenciatura em Matemática, o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Possivelmente muitos deles nunca passaram por uma experiência de trabalhar com uma metodologia desse tipo. Este projeto apresenta grande relevância, já na Formação Inicial, ao possibilitar que o futuro professor possa (re)significar suas vivências matemáticas pessoais de maneira ativa. Além disso, pretende-se que o aluno possa conhecer a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-

Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e que o mesmo sinta-se seguro e consciente do trabalho com seus futuros alunos.

> (...) é necessário que o mesmo tenha oportunidades de participar de atividades onde possa trabalhar com problemas em uma situação análoga àquela a que seus alunos devem ser submetidos, para que possam sentir o prazer da busca e descoberta, uma vez que a maioria deles em toda a sua vida escolar jamais teve oportunidade disso. (SILVA, 1989, p. 97).

O projeto aqui apresentado também busca contribuir para a Formação Inicial de alunos da Licenciatura em Matemática, ao possibilitar-lhes a reflexão, num grupo de estudos, sobre conteúdos matemáticos e experiências pedagógicas.

Conteúdos a serem trabalhados com os futuros professores: Serão definidos a partir da constatação das dificuldades apresentadas pelos futuros professores.

Desenvolvimento:

O grupo de alunos se reunirá na própria universidade, uma vez por semana, durante duas horas, para discutir e aprender sobre Resolução de Problemas.

Recursos a serem utilizados pelo grupo da Licenciatura em Matemática:

- leitura de artigos relacionados ao assunto, para que os futuros professores ampliem seus conhecimentos;
- entrevistas coletivas ou individuais, em que os alunos possam apresentar as maiores dificuldades vivenciadas por eles, enquanto alunos da Escola Básica;
- questionários pessoais, para que seja traçado o perfil dos participantes (idade, gênero, tipo de formação, ...);
- recursos audiovisuais, no caso em que seja apresentado material em powerpoint;
- gravação dos encontros (com finalidade de análise da pesquisa).

Avaliação dos resultados do Projeto:

Será dado todo o apoio necessário aos futuros professores de Matemática, pois se pretende que:

- Leiam sobre Resolução de Problemas,
- Reflitam sobre Resolução de Problemas e sobre como poderão utilizar essa teoria em suas aulas, trabalhando de maneira distinta daquela em que seus antigos professores (ou de seus próprios professores universitários) trabalharam,

- Resolvam problemas em que percebam a construção de novos conceitos e que seja possibilitada uma (re)significação de conteúdos matemáticos já trabalhados,
- Conheçam e possam utilizar com segurança, credibilidade e desembaraço a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Através das atividades desenvolvidas, será possível avaliar como o projeto foi acolhido e, se desejarem, abordar novos conteúdos no grupo.

- **P_4:** Apresentação do projeto aos alunos interessados e definição do horário das reuniões do grupo.

Foram encontradas muitas dificuldades para determinar um horário comum a todos os anos do curso de Licenciatura em Matemática, já que a grade curricular do referido curso apresenta uma grande quantidade de disciplinas. Um horário que se mostrou possível foi às quartas-feiras, no período da manhã. Havía-se feito uma tentativa anterior às terças-feiras, no período da tarde, mas houve apenas dois interessados, o que inviabilizou que o grupo de estudos se constituísse nesse horário.

- **P_5:** Aplicação de um questionário para conhecer-se o perfil dos participantes do grupo e para a identificação das principais dificuldades, em conteúdos matemáticos, encontradas por eles enquanto alunos ao longo da escolaridade básica.

Optou-se, nesse momento, por uma entrevista coletiva em virtude do tempo disponível. Os futuros professores de Matemática indicaram como sendo conteúdos que podem ser difíceis de ensinar e de aprender: Logaritmos, Frações, Trigonometria, Funções e Matrizes.

- **P_6:** Criação de atividades para o Projeto P1, a partir das dificuldades apontadas pelos licenciandos, a serem desenvolvidas pelo pesquisador junto ao grupo de alunos da Licenciatura em Matemática.

Como os futuros professores de Matemática e os professores de Matemática em exercício apresentaram dificuldade nos mesmos conteúdos matemáticos, o roteiro de atividades trabalhado (Apêndice B) foi o mesmo nos dois grupos, com adequações nas perguntas referentes à experiência profissional .

- **P_7:** Aplicação das atividades criadas para o Projeto P1.

Os encontros desse grupo ocorreram no período de 03/04 a 03/07/13, de acordo com a tabela a seguir:

Tabela 1 – Datas dos encontros do grupo formado pelos futuros professores de Matemática

Encontro	**Dia**	**Total de horas**	**Tema**
1º	03/04	2	Resolução de Problemas e práticas investigativas
2º	10/04	2	A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas
3º	17/04	2	A Resolução de Problemas e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática
4º	24/04	2	Reconceitualizando as quatro operações fundamentais
5º	08/05	2	Álgebra
6º	15/05	2	Álgebra
7º	29/05	2	Números Racionais
8º	05/06	2	Logaritmos
9º	12/06	2	Medidas
10º	19/06	2	Medidas
11º	19/06	2	Geometria Analítica
12º	26/06	2	Trigonometria
13º	01/07	2	Análise Combinatória
14º	01/07	2	Probabilidade
15º	03/07	2	Aplicação da Metodologia
TOTAL	**-**	**30**	

Fonte: Elaborado pela autora.

Durante os encontros, os futuros professores de Matemática puderam vivenciar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e discutir alguns conteúdos matemáticos, indicados por eles, considerados difíceis de aprender ao longo de sua escolaridade enquanto alunos da Educação Básica.

Os alunos participantes, licenciandos em Matemática, realizaram as leituras propostas e puderam refletir sobre como seus antigos professores trabalhavam a Matemática, em sala de aula, e como esperam trabalhar futuramente. Esse "repensar" de práticas é fundamental para a formação do professor de Matemática e contribui para o seu desenvolvimento profissional.

No encontro final, os futuros professores foram convidados a escolher um problema e trabalhar com o grupo de participantes do curso. Dessa forma, puderam sentir como um problema, cujo objetivo o professor previamente havia pensado, pode ser resolvido de diversas formas que conduzem a uma mesma sistematização matemática.

- **P_8:** Análise das *evidências* coletadas nesse trabalho.

No capítulo 6 será apresentada uma breve descrição dos encontros realizados pelo grupo e no capítulo 7, à luz dos referenciais teóricos adotados neste trabalho, será realizada a análise das *evidências*.

- **P_9:** Conclusões sobre as *evidências* coletadas.

As conclusões sobre as *evidências* coletadas serão apresentadas nas considerações finais deste trabalho.

4.3.2.2 O P_{G2} em ação

PROJETO 2: (Re) pensando a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática: O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Os procedimentos auxiliares em ação

- **P_1:** Identificação da escola estadual em que será implementado o P2.

A escolha da escola, para formar o grupo de estudos dos professores em exercício, deu-se por conveniência. Considerando-se que a pesquisadora já ministrava aulas nessa Unidade Escolar, foi mais fácil ter acesso à coordenação e à direção da escola e, assim, apresentar seu projeto de trabalho. Os alunos dessa escola apresentavam índices baixos de aprendizagem, o que incomodava a pesquisadora que, como integrante da equipe escolar, pretendia colaborar, através de sua pesquisa de doutorado, com os demais professores de Matemática para a melhora da aprendizagem dos alunos. Inicialmente, foram propostos 15 encontros ou quatro meses de duração.

- **P_2**: Definição de objetivos, justificativas, recursos necessários e forma de avaliação da implementação do projeto e a entrega à direção e à supervisora de ensino da escola.

Objetivo Geral do Projeto: Trabalhar com professores de Matemática em exercício, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, visando ao aprimoramento de suas práticas pedagógicas e, consequentemente, contribuindo para a melhora na aprendizagem de seus alunos.

Objetivos Específicos do Projeto:

1) Identificar características pessoais dos professores como: idade, gênero, tempo de serviço no Magistério, Formação Inicial e nível de ensino em que trabalha;
2) Identificar conteúdos em que os professores sentem dificuldade em trabalhar ou justificar sua importância, em sala de aula;
3) Refletir sobre a forma do desenvolvimento de sua aula de Matemática atual;
4) Refletir sobre como o professor trabalha a resolução de problemas em suas aulas;
5) Apresentar a História da Resolução de Problemas no ensino de Matemática;
6) Discutir os diversos modos de se ensinar utilizando a Resolução de Problemas;
7) Apresentar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas;
8) Apresentar situações-problema envolvendo conteúdos em que os professores apresentam dificuldades em lecionar;
9) Investigar com os professores as contribuições que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode trazer às suas aulas;
10) Investigar, com os professores, se possível, resultados da implementação dessa Metodologia em sala de aula.

Justificativas para a implementação do Projeto:

Este projeto apresenta relevância já que está em acordo com as orientações da Secretaria Estadual de Educação:

- ao buscar a construção do significado da Matemática.

> (...) O significado é mais importante que a utilidade prática, que nem sempre pode ser associada ao que se ensina – afinal, para que serve um poema? (SÃO PAULO, 2012, p. 45).

- ao trabalhar situações-problema

> (...) Muito além dos problemas estereotipados em que a solução consiste em construir procedimentos para usar os dados e com eles chegar aos pedidos, os problemas constituem, em cada situação concreta, um poderoso exercício da capacidade de inquirir, de perguntar. (SÃO PAULO, 2012, p. 46).

Além disso, o projeto, ao ser aplicado em uma escola estadual "Prioritária"[41], pode colaborar para a reflexão do grupo de professores de Matemática da unidade escolar na busca da melhora no ensino de Matemática. Pretende-se também que o grupo de professores dessa escola possa compartilhar suas reflexões em direção à formação de um grupo colaborativo.

Conteúdos a serem trabalhados com os professores: Serão definidos a partir da constatação das dificuldades apresentadas pelos professores participantes.

Desenvolvimento:

O grupo de professores se reunirá nas ATPCs (Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo), realizado na unidade escolar, uma vez por semana, durante duas horas, para discutir e aprender sobre Resolução de Problemas visando à melhora no ensino de Matemática.

Recursos a serem utilizados pelo grupo de professores:

- leituras de artigos relacionados ao assunto, para que os professores ampliem seus conhecimentos;
- entrevistas coletivas ou individuais, em que os professores possam apresentar as maiores dificuldades vivenciadas em suas práticas;
- questionários pessoais, para que seja traçado o perfil dos participantes (idade, sexo, tempo de serviço, tipo de formação...);
- recursos audiovisuais, no caso em que seja apresentado material em powerpoint;
- gravação dos encontros (com finalidade de análise da pesquisa).

Avaliação dos resultados do Projeto:

Será dado todo o apoio necessário aos professores dessa Unidade Escolar, pois se pretende que os docentes:

[41] Uma escola "prioritária" é aquela que há mais de três anos não atinge a meta proposta pelo IDESP. É o caso desta escola, no Ensino Fundamental.

- Leiam sobre Resolução de Problemas,
- Reflitam sobre a Resolução de Problemas em suas aulas,
- Resolvam problemas em que percebam a construção de novos conceitos e (re)significação de conteúdos matemáticos já trabalhados,
- Apliquem com credibilidade, desembaraço e confiança a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em suas aulas.

Através das atividades desenvolvidas, será possível avaliar como o projeto foi acolhido e, se desejarem, abordar novos conteúdos no grupo.

- **P_3:** Apresentação do projeto aos professores e aplicação de um questionário buscando conhecer o perfil pessoal/profissional desses docentes e o levantamento de conteúdos matemáticos que os professores mais sentem dificuldade ao trabalhar com seus alunos.

Após o contato com a Dirigente Regional de Ensino da Região, com a Supervisora de Ensino responsável pela escola e com a Diretora, os professores de Matemática foram reunidos e houve a apresentação dos objetivos do grupo de estudo. Os docentes ficaram muito interessados e demonstraram curiosidade e disponibilidade em colaborar para a constituição do grupo.

Após esse primeiro contato, solicitou-se que os professores respondessem a um questionário inicial (Apêndice A), para que fosse traçado o perfil dos participantes e houvesse o levantamento dos conteúdos considerados mais difíceis de trabalhar com os alunos da Escola Básica.

Ao se analisar as respostas fornecidas através do questionário, constatou-se que, dos sete professores de Matemática, apenas três deles fizeram o Curso de Licenciatura em Matemática. Os demais formaram-se, um em cada curso, em Engenharia Civil, Ciências Contábeis, Administração de Empresas e Navegação Fluvial, e recorreram, para que pudessem ministrar aulas, à Complementação em Matemática. Além disso, três dos sete professores de Matemática também fizeram Pedagogia. Em relação à Pós-Graduação, um professor possui mestrado concluído, dois mestrados estavam em andamento e dois professores haviam feito especialização.

Quanto à experiência profissional dos professores participantes dessa pesquisa, apenas dois deles declararam que a docência sempre havia sido sua única profissão. Os demais haviam trabalhado em diversos setores de atividades como banco, academia de ginástica, indústria de calçados, programador de produção, vendedor e engenharia.

O tempo de serviço no magistério desses professores mostrou-se diversificado: um deles ministra aulas de Matemática há 23 anos, outro há 17 anos, dois deles têm 14 anos de profissão, um professor tem 13 anos de magistério, outro tem 9 e o mais jovem de profissão tem 8 anos.

Em relação ao número de escolas em que já trabalharam até o momento, um professor declarou que havia trabalhado de (1-5) escolas, quatro afirmaram que já ministraram aulas em um número de (6-10) escolas e dois professores responderam que já lecionaram em um intervalo de (11-15) escolas durante a vida profissional. No ano em que responderam a esse questionário, cinco professores trabalhavam em apenas uma escola, um deles lecionava em duas escolas e outro em três escolas.

Ao questionar os professores sobre qual bloco de conteúdo ele mais sente dificuldade em trabalhar com os alunos, quatro deles responderam “Números e Operações”, três indicaram “Grandezas e Medidas” e um dos professores assinalou o item “Tratamento da Informação”. Destaca-se que nenhum deles se referiu ao bloco “Espaço e Forma”, o que se leva a conjecturar que eles não trabalham ou trabalham pouco os conteúdos desse bloco ou, de fato, não encontram dificuldade.

Ao solicitar que os professores justificassem que conteúdo e para qual série ele mais sente dificuldade em trabalhar com os alunos e por quê, pode-se destacar:

1. A importância de uma formação inicial que possibilite ao futuro professor a vivência e reflexão sobre Resolução de Problemas. O Professor 1 indicou dificuldade para trabalhar no Ensino Médio:

> **Professor 1:** “(...) porque não fomos preparados durante o Curso de graduação a desenvolver situações-problema”.

2. A busca, por parte do professor, em desenvolver um trabalho contextualizado. Poder-se-ia questionar, no entanto, o que esses professores entendem por contextualizar, visto que uma grande parte do professorado entende que é utilizar aspectos do cotidiano do aluno. Ressalta-se que o professor, através da própria história do conteúdo trabalhado, pode encontrar meios de contextualizar a Matemática.

> **Professor 3:** “Logaritmos e Funções Trigonométricas no 2º ano do Ensino Médio. A dificuldade consiste em contextualizar, principalmente logaritmo”.

> **Professor 7:** “No Ensino Médio, logaritmo e, no Fundamental, produtos notáveis, pois seu uso no cotidiano é restrito, dificultando a exploração prática do conteúdo”.

3. A dificuldade em trabalhar a Álgebra e a própria concepção de Álgebra pelo professor:

> **Professor 4:** “Na mudança de 2º membro para o 1º membro nas operações fundamentais com variáveis (...) ”.

Esse professor apresenta um concepção de Álgebra equivocada. Pode-se notar que ele sugere que os alunos encontram dificuldade em uma técnica operatória, bastante utilizada pelos professores de Matemática. Além disso, usa a palavra “variáveis” quando o correto seria “incógnitas”, já que está se referindo a uma equação.

4. A dificuldade em trabalhar Medidas e explorar o conceito de medida, que significa *comparar grandezas de mesma natureza*. Esse trabalho deveria relacionar-se com o cotidiano do aluno, dentro e fora da escola. No entanto, o Professor 5 indicou que:

> **Professor 5:** “Grandezas e Medidas, 6º ano. Sinto dificuldade em concretizar as unidades de medidas que muitas vezes são abstratas para os alunos; não consigo perceber em meus alunos que eles são capazes de relacionar diferentes unidades de medidas e identificar quando usar unidade de área, volume, etc...”.

Após a análise dos dados pessoais e das respostas obtidas sobre as preferências pessoais/profissionais apresentadas no questionário, sentiu-se a necessidade de uma entrevista coletiva com os professores. O objetivo seria buscar maiores detalhes sobre as dificuldades apontadas no trabalho em sala de aula pelos professores, bem como verificar se elas eram comuns a todos eles.

- **P_4:** Realização de uma entrevista coletiva para que os professores possam esclarecer as dificuldades indicadas por eles, ao ensinar determinados conteúdos matemáticos aos seus alunos. Verificação de que as dificuldades encontradas são ou não compartilhadas pelos demais professores do grupo.

A realização da entrevista coletiva corroborou com as informações apresentadas pelos professores nos questionários. Dessa forma, ficou acertado com o grupo de professores que seriam trabalhados os seguintes conteúdos: Álgebra, Logaritmos, Geometria Analítica, Trigonometria, Análise Combinatória e Probabilidade.

- **P_5:** Criação de atividades para o Projeto P2, a partir das dificuldades apontadas pelos professores, visando ao trabalho do pesquisador junto ao grupo de professores de Matemática em exercício.

A partir da indicação dos blocos de conteúdo em que os professores encontravam mais dificuldade em trabalhar com os alunos, criou-se o roteiro de atividades (Apêndice B). Esse roteiro, que seria trabalhado tanto por futuros professores como por professores de Matemática em exercício apoiou-se nas orientações dos PCN (BRASIL, 1998) e no Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012).

- **P_6:** Aplicação das atividades criadas para o Projeto P2.

Os encontros realizados por este grupo de estudo ocorreram no período de 18/03 a 24/06/13, conforme tabela a seguir:

Tabela 2 – Datas dos encontros do grupo formado por professores em exercício

Encontro	Dia	Total de horas	Tema
1º	18/03	2	Resolução de Problemas e práticas investigativas
2º	25/03	2	Resolução de Problemas e George Polya
3º	01/04	2	Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas
4º	08/04	2	Reconceitualizando as quatro operações fundamentais
5º	15/04	2	Álgebra
6º	22/04	2	Álgebra
7º	29/04	2	Álgebra
8º	06/05	2	Números Racionais
9º	13/05	2	Números Racionais
10º	20/05	2	Logaritmos
11º	03/06	2	Medidas
12º	03/06	2	Medidas
13º	10/06	2	Geometria Analítica
14º	17/06	2	Trigonometria
15º	24/06	2	Aplicação da Metodologia
TOTAL	**-**	**30**	

Fonte: Elaborado pela autora.

Durante os 15 encontros realizados, os professores de Matemática puderam vivenciar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e discutir, por meio da resolução de problemas, alguns conteúdos matemáticos como: Álgebra, Números Racionais, Logaritmos, Geometria Analítica e Trigonometria. Não houve tempo hábil para trabalhar os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade com eles.

Os professores realizaram as leituras propostas, bem como compartilharam experiências e práticas desenvolvidas em sala de aula. No capítulo seguinte serão brevemente descritos todos os encontros realizados.

Durante cada um deles, foi solicitado que os professores fizessem o registro, das atividades realizadas, por escrito. Assim, a cada encontro, um professor ficou responsável por registrar as suas impressões a respeito do tema tratado. No entanto, nos últimos cinco encontros não houve tempo hábil para os registros.

Para finalizar, foi pedido aos professores que fizessem uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em uma aula, para uma das turmas em que estivesse lecionando. No último encontro, alguns professores relataram como foi sua aplicação, como desenvolveram as atividades e quais resultados obtiveram.

- **P_7:** Análise das *evidências* coletadas nesse trabalho.

No capítulo 6 será apresentada uma breve descrição dos encontros realizados pelo grupo e no capítulo 7 será realizada a análise das *evidências*, considerando os referenciais teóricos adotados nesta pesquisa.

- **P_8:** Conclusões sobre as *evidências* coletadas.

Nas considerações finais serão apresentadas as conclusões deste trabalho de pesquisa.

CAPÍTULO 5 – OS ENCONTROS DOS GRUPOS DE ESTUDO

> [...] o desenvolvimento do professor poderá ser promovido pela sua participação em processos formativos que proporcionem oportunidades de reflexão, participando em práticas sociais, com um forte envolvimento pessoal e um suporte dados pelos grupos sociais em que participa. Nestes contextos de formação, é essencial uma forte presença da prática, mas também um significativo contributo por parte da teoria.
>
> JOÃO PEDRO DA PONTE

Neste capítulo serão apresentados cada um dos participantes dos grupos de estudo e será realizada uma breve descrição de cada um dos encontros realizados. Como já foi afirmado, no capítulo anterior, os dois grupos tiveram 15 encontros, sendo que os futuros professores de Matemática reuniram-se na própria universidade e os professores em exercício na escola em que ministravam aulas.

Para preservar a identidade dos participantes da pesquisa, optou-se por utilizar nomes fictícios respeitando-se os gêneros.

- Futuros professores de Matemática que participaram do Projeto P1: Felipe, Juliana, Fernanda, Aline, Camila e Vítor.
- Professores de Matemática em exercício que participaram do Projeto P2: Carlos, Ana, Maria, Cecília, Paulo, Maíra e Otávio.
- *PP* será utilizado para a Professora-Pesquisadora.
- [...] supressão de parte do diálogo por não ser relevante ou conveniente.

5.1 Projeto P1 e o grupo de estudo formado por futuros professores de Matemática

5.1.1 O grupo 1 e seus integrantes

Felipe escolheu cursar Matemática e depois optou pela Licenciatura. Desde o Ensino Médio se sentiu curioso em aprender mais Matemática e esse foi um dos motivos de sua escolha pelo curso. Acredita que o curso que faz é muito bom, mas os alunos que optam pela Licenciatura têm pouco contato com a sala de aula. Está cursando o 3º ano. Após participar do grupo de estudo sente-se mais preparado para trabalhar a Resolução de Problemas. Considera também que na Licenciatura deveriam existir outros grupos de estudo que tivessem como foco a sala de aula. Ministrou algumas aulas no cursinho gratuito da universidade.

Juliana começou seu curso de Matemática e também não sabia se iria optar pela Licenciatura ou pelo Bacharelado. Nunca ministrou aulas. Está cursando o 3º ano. Acha que fazer Licenciatura foi uma escolha melhor do que o do Bacharelado. No início do grupo mostrava uma forte influência do seu professor do Ensino Médio, revelando inclusive que pensava em trabalhar como ele (usando aulas expositivas, livro didático e exercícios). Ao final do grupo afirmou que mudara inclusive seu projeto de iniciação científica em direção ao uso de atividades investigativas. Para ela, ao trabalhar dessa forma, o professor consegue mais sucesso.

Fernanda disse que sempre gostou de exatas e, em 2006-2007, optou por fazer o curso de Matemática. Também se decidiu pela Licenciatura na graduação, pois não se via fazendo Bacharelado. Já ministrou algumas aulas no estágio e também dá aulas particulares de Matemática. Concluiu o curso de Licenciatura e, atualmente, faz algumas disciplinas optativas no Bacharelado e na Pós Graduação em Educação Matemática. Acredita que seu curso de formação inicial não lhe deu base para lidar com os alunos em sala de aula. Gostou do grupo e julga que algum professor já tenha trabalhado com ela, enquanto aluna, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. No entanto, percebe que o grupo de estudo lhe deu fundamentação teórica, tanto na posição de aluna que vivenciou a metodologia, quanto como professora que aplicará a metodologia com seus futuros alunos.

Aline está no 3º ano, mas não pretende dar aulas. De acordo com ela, esse não é o seu primeiro plano. Ela quer fazer uma especialização em Estatística e trabalhar em banco. Para sua escolha entre Licenciatura e Bacharelado, julgou que não seria necessário saber toda a Matemática do Bacharelado para trabalhar no banco. Assim, ao optar pela Licenciatura, se não derem certo seus planos também poderá dar aula no futuro. Mas, segundo ela, sente-se insegura e sem paciência para enfrentar uma sala de aula. Para ela "querer dar aula é algo que já nasce com a pessoa!". Gostou de participar do grupo de estudo, reviu alguns conteúdos do Ensino Médio, a forma como poderia trabalhá-los com alunos da Educação Básica e como escolher um problema adequado "que possa ajudar o aluno a aprender".

Camila sempre gostou de Matemática, mas escolheu inicialmente fazer Pedagogia. Concluiu esse curso e já trabalhou na Educação Infantil e no Ensino Fundamental I. Fez também um curso de Psicopedagogia, mas não o concluiu. Atualmente, cursa o 3º ano de Licenciatura em Matemática e ministra aulas para o cursinho gratuito da própria universidade. Acredita que o curso que faz atualmente lhe dá uma boa base, mas que a pessoa deve correr atrás de coisas novas se quiser ser um bom professor. Gostaria que a universidade pudesse oferecer outros grupos de estudo que fossem voltados para a sala de aula. Quanto ao grupo de estudo que participou, considera uma novidade poder trabalhar o problema abrangendo mais do que apenas um conceito, resgatando aquilo que o aluno sabe e provocando que o aluno investigue o problema. Para ela, foi uma novidade o professor deixar de colocar as fórmulas na lousa e fazer o aluno pensar.

Vítor sempre gostou de Matemática, mas se encantou com o modo como os seus professores de Matemática do cursinho trabalhavam. A partir daí decidiu que faria Licenciatura em Matemática. Atualmente cursa o 3º ano e ministra aulas no cursinho gratuito da própria universidade. Considera que a Licenciatura, por si só, não prepara o aluno para ser um bom professor. Para ele, é preciso muita pesquisa por parte do licenciando. Sente falta, em seu curso, de uma disciplina que trabalhasse com as metodologias que o futuro professor de Matemática pudesse fazer uso. A única metodologia que julga ter vivido enquanto aluno, em uma disciplina na graduação, e enquanto professor, no grupo de estudo, foi a Resolução de Problemas.

Andresa, Professora-Pesquisadora, faz doutorado em Educação Matemática pela UNESP-Rio Claro. Fez o Curso de Licenciatura em Matemática pela mesma instituição, no *Campus* de Bauru. Já atuou como professora de Educação Infantil, enquanto fazia o referido curso de graduação. Há sete anos ministra aulas na mesma unidade escolar, da rede estadual de São Paulo, como professora efetiva. Em 2009 concluiu seu mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, pela UNESP-Bauru.

Para a presente pesquisa conhecer o perfil dos participantes permitiu um trabalho mais situado dentro das necessidades dos participantes. Como já foi afirmado, foram eles quem indicaram os conteúdos a serem trabalhados nos encontros do grupo e conhecer o perfil deles possibilitou a problematização e resgate de suas experiências matemáticas construídas anteriormente.

5.1.2 Os encontros[42] do grupo 1

PRIMEIRO ENCONTRO:

Neste encontro estavam presentes Fernanda, Juliana e Vítor. Tratamos, no início, de questões administrativas e referentes à ética em relação às gravações e filmagens que aconteceriam durante os encontros. Em seguida, foi proposto que indicassem, verbalmente, os conteúdos que eles julgavam terem sido mais difíceis ao longo de sua escolaridade, enquanto alunos da Educação Básica. Foram eles: Logaritmos, Frações, Funções, Trigonometria e Matrizes.

Informei a eles que esses e outros conteúdos seriam abordados nos encontros seguintes. Inicialmente, eles iriam estudar um pouco da Teoria da Resolução de Problemas e, em seguida, seria feita uma parte prática utilizando os conteúdos sugeridos neste encontro.

Levantei, também, questões sobre a forma como seus antigos professores trabalhavam a Matemática e, em especial, a resolução de problemas. Os futuros professores também foram questionados sobre a forma como pretendem dar suas futuras aulas de Matemática e se pretendem fazer uso da resolução de problemas.

Na sequência, foi feita a leitura do texto de Gazire (2012).

Para concluir o primeiro encontro, solicitei que fizessem a leitura extra-grupo do texto de Allevato e Onuchic (2009). Também os incentivei a trazer novos colegas da Licenciatura para o grupo de estudo.

SEGUNDO ENCONTRO:

O encontro desse dia marcou a constituição desse grupo de estudo, com três novos integrantes. Foi apresentada, aos novos participantes, a proposta de trabalho, bem como foram assinados os termos de autorização de gravação/filmagem e a ficha de inscrição. Estavam presentes: Aline, Camila, Felipe, Fernanda, Juliana e Vítor.

O grupo retomou algumas ideias do texto de Gazire (2012) para que os novos integrantes fossem se inteirando do que havia sido trabalhado. Eles também foram questionados sobre como suas aulas de Matemática da Educação Básica eram desenvolvidas.

---

[42] Para a descrição dos encontros a escrita será em primeira pessoa, já que a autora também foi participante de cada um dos grupos de estudo.

Nesse dia, após os novos participantes terem se integrado ao grupo, foi trabalhado o texto de Allevato e Onuchic (2009). Como as ideias de Polya eram desconhecidas pelos futuros professores, foram trabalhados, em paralelo, os quatro passos sugeridos por ele para a resolução de um problema. Além disso, olhou-se para as fases pelas quais o ensino de Matemática passou durante o século XX até se falar em Resolução de Problemas. Em seguida, o grupo abordou as diferenças nas formas de se trabalhar resolução de problemas apresentadas por Schroeder e Lester (1989).

Ao ensinar Matemática através da resolução de problemas, ou seja, como uma metodologia de ensino, foi introduzido o roteiro das atividades a serem desenvolvidas pelos professores em sala de aula. Os futuros professores demonstraram entusiasmo e ressaltaram a necessidade de "fazer o aluno pensar" matematicamente.

O grupo também conheceu os *Standards* (NCTM, 2000) e o livro de Van de Walle (2009). A definição de problema adotada foi "aquilo que ainda não sabemos, mas que estamos interessados em fazer." (ONUCHIC, 1999). O grupo percebeu também a dificuldade de o professor, ao selecionar um problema adequado, considerar que o que é problema para um aluno pode não ser para outro.

TERCEIRO ENCONTRO:

Nesse dia, estavam presentes Aline, Camila, Felipe, Fernanda e Vítor. Foram trabalhados os PCNs do 1º e 2º ciclos (BRASIL, 1997) e do 3º e 4º ciclos (BRASIL, 1998) do Ensino Fundamental, enfocando os blocos de conteúdo e as recomendações para trabalhar cada um deles.

O objetivo desse encontro foi o de possibilitar, para muitos, o contato inicial com os PCNs e promover uma reflexão sobre como o conhecimento matemático escolar está distribuído ao longo dos anos. O grupo percebeu a importância do Ensino Fundamental, como um período de construção do conhecimento matemático dos alunos, cuja ampliação e aplicação deve ocorrer no Ensino Médio.

Para analisar os quatro blocos de conteúdo dos PCNs (Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação), o grupo se dividiu em uma dupla e um trio.

De início, o trio, formado por Aline, Camila e Vítor, ficou responsável por analisar as recomendações e os conteúdos presentes nos blocos Números e Operações e Espaço e Forma.

A dupla, Felipe e Fernanda, trabalhou com os blocos Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

Cada grupo foi fazendo uma síntese, para os demais, de quais conteúdos os alunos do 1º e 2º ciclos deveriam dominar. Os futuros professores perceberam a necessidade do professor dos ciclos iniciais conhecer quais conteúdos deve trabalhar com seus alunos e, também, do professor de Matemática dos ciclos finais conhecer o que seus alunos já sabem, isto é, quais são seus conhecimentos prévios a fim de que novos conhecimentos possam ser construídos.

O mesmo trabalho foi desenvolvido em relação aos conteúdos matemáticos referentes às séries finais do Ensino Fundamental.

Ao finalizar esse encontro, entreguei-lhes o texto “Reconceitualizando as quatro operações fundamentais”, de Onuchic e Botta (1998), para que fizessem sua leitura prévia para o próximo encontro.

QUARTO ENCONTRO:

No encontro desse dia, os presentes foram Aline, Felipe e Juliana. Trabalhamos com o texto “Reconceitualizando as quatro operações fundamentais” de Onuchic e Botta (1998).

Inicialmente, resgatou-se o que o grupo se lembrava de como foram trabalhadas as quatro operações fundamentais, enquanto alunos. Eles disseram que eram trabalhadas as “continhas”, o algoritmo de cada uma das operações na sequência adição-subtração-multiplicação-divisão e, provavelmente, também probleminhas.

Uma das dificuldades em trabalhar com problemas, de acordo com Felipe, está na interpretação do enunciado e na identificação da operação a ser realizada pelo aluno. Na maior parte das vezes, o professor não leva os alunos a vivenciarem a situação e a pensarem sobre o problema, procurando apenas fazer uso dos números apresentados no enunciado.

Tendo em vista essas considerações, iniciamos a discussão do texto a partir do que as autoras consideravam por “reconceitualizar”. Entende-se que (re)conceitualizar significa reconstruir o conceito ou ideia, agregando-lhe qualidades recentes que anteriormente não eram trabalhadas. Como apresentado no texto, pode-se adicionar coisas, não necessariamente de mesma natureza, considerando suas qualidades físicas ou conceituais. Desse modo, chamei a atenção dos alunos para o fato de que é necessária uma nova postura, um repensar a forma com que sempre foram ensinadas as quatro operações.

Foi destacada também a diversidade de situações-problema aditivas (7), as situações-problema subtrativas (15), as situações-problema multiplicativas (21) e as situações-problema divisivas (6). Além disso, o texto recomenda que sejam trabalhadas, ao mesmo tempo, as operações envolvendo uma mesma família.

Quando as crianças, nos primeiros anos, trabalham a divisão, o professor diz que só é possível dividir quando o dividendo é maior que o divisor e isso ocorre no conjunto dos inteiros positivos. Muitas ideias são transmitidas equivocadamente para as crianças como, por exemplo, a de que a divisão sempre gera um resultado menor. Ao trabalhar com o Conjunto dos Racionais, os alunos deveriam passar por uma nova reconceitualização visto que, nesse conjunto, a divisão sempre é possível gerando um número racional.

Realizei também algumas intervenções para que eles percebessem que o texto foi escrito diretamente para o conhecimento do professor e não para ser usado, em sala de aula, para leitura direta pelos alunos. Alguns futuros professores levantaram a possibilidade de primeiramente ensinar o algoritmo e depois trabalhar os problemas. Nesse momento, retomei a proposta do texto que é a de o professor apresentar um problema gerador de um conteúdo novo, possibilitar que os alunos trabalhem sobre o problema e depois que o docente faça a formalização do conteúdo. Desse modo, não se deveria montar o algoritmo para depois inserir-se problemas, sendo que o conceito da adição, por exemplo, pode resolver problemas por desenhos, materiais manipulativos e inclusive algoritmos.

O grupo também apresentou as possíveis dificuldades que eles acreditavam que os alunos, nos primeiros anos de escolaridade, pudessem apresentar em relação ao trabalho desenvolvido nos diferentes conjuntos numéricos. A partir de suas experiências, eles conjecturaram que, nos conjuntos dos Números Naturais e dos Números Inteiros, a subtração e a divisão seriam mais difíceis para os alunos.

QUINTO ENCONTRO:

No encontro desse dia, estavam presentes Aline, Fernanda e Juliana. Foram trabalhadas algumas faces da álgebra fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Questionei inicialmente o grupo sobre quais seriam as dificuldades dos alunos da Educação Básica em Álgebra. As futuras professoras de Matemática julgaram que a ideia de incógnita e as operações envolvendo a álgebra são difíceis de serem compreendidas pelos alunos.

Foi entregue uma folha com três problemas: o Problema do Festival, O Problema da Dona Solange e o Problema da Balança (Apêndice B). Como estavam presentes apenas três pessoas, solicitei-lhes que tentassem resolver cada problema individualmente. Em seguida, realizou-se uma discussão geral onde cada uma delas expôs sua resolução e sua maneira de pensar em cada um dos três problemas.

Para finalizar esse encontro, o grupo realizou a leitura de Tinoco (2011, p. 7-8) sobre as concepções de Álgebra como generalizadora da aritmética e de Álgebra funcional. A partir da leitura, os problemas 1 e 2 foram relacionados à Álgebra como generalizadora da aritmética e o problema 3 à Álgebra funcional.

As três participantes do encontro afirmaram terem gostado do assunto, principalmente porque o aluno da Educação Básica deve entender essas diferentes “faces” da álgebra ao longo de sua escolaridade. Destacaram ainda que, na Licenciatura, não haviam feito nada parecido com o que foi abordado no encontro desse dia.

SEXTO ENCONTRO:

No início desse encontro foram retomadas as concepções da Álgebra discutidas na reunião anterior: Álgebra como aritmética generalizada e Álgebra Funcional. Os participantes presentes foram: Aline, Camila, Felipe, Fernanda e Juliana.

Prosseguindo o 6º encontro e fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, entreguei ao grupo uma folha contendo problemas. Solicitei que resolvessem apenas os dois primeiros: o do triângulo mágico e o da balança (Apêndice B).

Para resolver mais dois problemas, dividi os presentes em dois grupos: G1 – Aline, Camila e Juliana, G2 – Felipe e Fernanda. Os subgrupos deveriam ler e resolver os dois últimos problemas da folha, os problemas 3 e 4.

O encontro foi finalizado com o resgate das quatro concepções da Álgebra que, muitas vezes, se misturam num mesmo problema. O grupo também percebeu que os PCN trazem essas várias concepções da Álgebra, mas que não trazem, exclusivamente, um bloco de conteúdo referindo-se a ela. Realizamos também a leitura das orientações trazidas por esse documento oficial.

Nesse encontro, as atividades e discussões possibilitaram que o futuro professor não apenas resolvesse problemas, mas que pudesse justificar os procedimentos realizados como se estivesse diante de uma sala de aula. Além disso, o grupo discutiu conceitos matemáticos como os de equação, expressões algébricas e equivalentes.

SÉTIMO ENCONTRO:

Para que o tema desse encontro (Números Racionais) fosse desenvolvido, enviei ao grupo, através de endereço eletrônico, uma lista de problemas extraída do texto “As diferentes ‘personalidades’ do Número Racional trabalhadas através da Resolução de Problemas”, de Onuchic e Allevato (2008). Solicitei, aos futuros professores, que resolvessem previamente cada problema e que, se possível, buscassem diferentes formas de resolvê-los.

Infelizmente, devido ao calendário de provas, apenas dois integrantes (Fernanda e Vítor) compareceram à reunião. Fernanda havia feito os problemas, mas Vítor alegou que não tivera tempo durante a última semana. Disponibilizei um tempo para que ele resolvesse os problemas e para que Fernanda encontrasse novas estratégias para resolvê-los.

Antes da discussão sobre os problemas, o grupo leu o resumo do texto de Onuchic e Allevato (2008). Em seguida, os problemas foram trabalhados por eles. Os futuros professores afirmaram ter gostado do tema abordado nesse encontro. Eles puderam perceber que a notação a/b assume diferentes personalidades, que deveriam ser trabalhadas através de problemas.

Apesar de parecerem conceitos simples, é importante que o futuro professor reflita sobre cada um deles (ponto na reta, quociente, fração, medida, operador multiplicativo, razão) para que sejam capazes de trabalhar com seus alunos situações que promovam o aprendizado de cada uma dessas personalidades.

Os futuros professores mostraram-se abertos a essa abordagem nova para eles e julgaram importante esse olhar diferenciado para cada uma das personalidades do Número Racional.

Quanto ao grupo de estudo, uma evidência a ser destacada é que o excesso de atividades na graduação parece dificultar a participação e o envolvimento dos futuros professores. Alguns indícios do baixo envolvimento mostraram-se pela falta de leitura prévia dos textos e pela baixa assiduidade de alguns integrantes do grupo.

OITAVO ENCONTRO:

No início do 8º encontro, resgatei com o grupo como foi o primeiro contato que tiveram com logaritmos. Estavam presentes: Aline, Felipe, Fernanda, Juliana e Vítor.

Vítor afirmou que achou estranho e que poderia ser algo difícil. Juliana disse que achou estranho e que a professora não explicou para que servia. Os demais não se manifestaram sobre o assunto.

Como futuros professores, os questionei sobre a maneira como dariam uma aula sobre logaritmos e quais relações poderiam ser feitas ao se trabalhar esse conteúdo:

Juliana: Eu explicaria o que eu sei... falaria que tem a ver com potência... tem alguma coisa a ver com mexer com juros também...
Felipe: Tem a ver com potenciação... é a função inversa!
[...]
Vítor: Em Biologia você usa [...] o crescimento de células é explicado por exponencial e você tem algumas relações com logaritmos...
[...]
Pesquisadora: Mas geralmente o professor fala “Aplica log dos dois lados!”
Felipe: Acaba falando de aplicação, de jeito de fazer... não explica como chegou naquilo...

De início, os futuros professores receberam uma folha contendo dois problemas: um tratando da potenciação com expoente natural e outro abarcando os expoentes racionais. Em cada atividade, os participantes deveriam justificar o procedimento realizado. Foi proposto ao grupo que procurasse fazer a atividade sem utilizar o conceito de logaritmo.

Com essa atividade, ainda no conjunto dos Números Naturais, pretendia-se que os futuros professores respondessem as questões e justificassem o caminho por eles seguido. Seriam aceitas justificativas que utilizassem as propriedades das potências ou a construção de uma “sequência lógica” como sugerem os PCN de Matemática (BRASIL, 1998).

Também foi possível destacar, nessa atividade, que a potenciação tem duas inversas: a radiciação, que determina a base tendo conhecidos o expoente e a potência, e a logaritmação, que determina o valor do expoente conhecidas a base e a potência. Isto é:

$$a^n = b \rightarrow \begin{cases} radiciação \\ logaritmação \end{cases} \qquad a^n = b \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{b} \rightarrow a = \sqrt[n]{b}$$

$$a = base$$

$$n = expoente \qquad a^n = b \rightarrow log\ a^n = log\ b \rightarrow n\ log\ a = log\ b \rightarrow n = \frac{log\ b}{log\ a}$$

$$b = potência$$

No caso $10^w = 20$ utilizando a ideia de sequências de intervalos encaixantes e convergência dessas sequências, o logaritmo mostra-se uma ferramenta eficaz para determinar o valor do expoente, chegando a $w = log\ \ 2 + 1$. A partir dessa discussão, poder-se-ia definir o logaritmo como: $log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b,\ a > 0\ \ e\ \ a \neq 0.$

Após a resolução da atividade proposta sem recorrer ao uso de logaritmos, houve a formalização do conteúdo. Em seguida, o grupo fez a leitura do texto "Logaritmos – Uma breve abordagem histórica." (Apêndice C).

O grupo refletiu sobre o fato de que os matemáticos, historicamente, utilizaram o processo de intervalos encaixantes por muitos séculos. As tábuas de logaritmos foram construídas por meio de um trabalho árduo, mas cuja precisão é um fato impressionante.

Atualmente, os logaritmos apresentam inúmeras aplicações como as escalas de terremoto (em especial, a escala Richter) e o cálculo do pH[43] da água, sendo que esses recursos podem ser usados pelo professor, em sala de aula, ao trabalhar esse conteúdo.

NONO ENCONTRO:

Neste encontro sobre o tema *medidas* todos os futuros professores estavam presentes (Aline, Camila, Felipe, Fernanda, Juliana e Vítor). Para promover uma reflexão sobre o tema, questionei o grupo sobre o significado de medir e sobre o que eles entendiam por medir:

Camila: Ver o tamanho de alguma coisa...
Vítor: Mensurar...

Ao trabalhar com o tema Medidas foi possível resgatar, com os futuros professores, a necessidade, destacada nos PCN (BRASIL, 1997), de um trabalho com o tema desde as primeiras séries do Ensino Fundamental. O currículo de Matemática permite que o aluno perceba que as medições fizeram parte da história humana e que, apenas em 1875, foi adotado internacionalmente o Sistema Francês de Medidas.

O encontro promoveu, ainda, a reflexão do grupo sobre definições que eles não haviam parado para repensar. É o caso do significado do ato de medir e do conceito de metro. Conceito esse que evoluiu ao longo do século XX em direção a uma maior precisão da medida.

Apresentei ao grupo dois problemas para que os resolvessem individualmente: o do cilindro e o dos quadradinhos.

Após a plenária, o grupo realizou a atividade na prática, como se o trabalho estivesse sendo desenvolvido na Educação Básica. Enfatizei o cuidado do professor e do aluno com as unidades de medida ao longo da resolução de um problema.

[43] potencial Hidrogeniônico, que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa.

Em seguida, o grupo realizou e discutiu o problema dos quadradinhos. (Apêndice B). Deixei uma lista de problemas para que os desenvolvessem como atividade extra-grupo e que seria discutida no próximo encontro.

Na segunda parte do encontro, o grupo trabalhou usando o sistema métrico decimal as unidades de medida, seus múltiplos e submúltiplos.

Outros pontos discutidos no encontro foram:

- A existência de unidades de medida para líquidos, cuja unidade-padrão é o litro;
- A definição do metro e em como essa unidade foi constituída; e
- A relação que o volume de 1 dm^3 comporta 1l de capacidade.

10º e 11º ENCONTROS

Nesse encontro duplo, em decorrência da proximidade do término do semestre, fizemos uma espécie de “reposição de aula”. Os temas abordados foram Medidas e Geometria Analítica. Estavam presentes Aline, Juliana e Vítor.

Nesse encontro, inicialmente tratando do tema Medidas, abordou-se o Sistema Inglês de unidades e o uso do pé e da polegada. Outro ponto tratado foi o uso de medidas como o alqueire para medir regiões ou áreas muito grandes. O grupo ainda debateu sobre a necessidade de os alunos conhecerem as unidades de medida para diferentes grandezas e perceberem qual seria a mais adequada para aquilo que se deseja medir.

Entreguei ao grupo um texto (Apêndice F) mostrando a correspondência entre as diferentes unidades de medida. Para a conclusão do assunto já tratado no encontro anterior – Medidas – foram trabalhados os problemas que eu havia deixado como atividade extra-grupo.

Na segunda parte do encontro, o grupo trabalhou o tema *Geometria Analítica*. Os futuros professores relataram como foram suas experiências com Geometria Analítica no Ensino Médio e no Ensino Superior.

Em seguida, o grupo fez a leitura de partes do texto *Sobre o ensino de Geometria Analítica*, de Wagner (1999). Lembrei-lhes que a Geometria Analítica é um campo da Matemática que articula a Geometria e a Álgebra. Nesse sentido, Lima (2010) afirmou que:

> A Geometria Analítica baseia-se na ideia de representar os pontos da reta por números reais, os pontos do plano por pares ordenados de números reais. [...] Isto permite tratar algebricamente muitas questões geométricas e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica certas situações algébricas. (p. 1).

Dando sequência ao encontro, entreguei-lhes o problema do resgate e solicitei que o resolvessem e buscassem outras possíveis estratégias. O grupo chegou à conclusão de que esse problema poderia ser aplicado para alunos que conhecessem o Teorema de Pitágoras ou, no Ensino Médio, para explorar a distância entre dois pontos do plano cartesiano.

O grupo trabalhou também o problema das avenidas (Apêndice B) e concluiu que outros possíveis conceitos a serem explorados por meio dele seriam o de perpendicularidade e de reta mediatriz.

Em decorrência do pouco tempo e considerando-se a importância do ensino das cônicas no Ensino Médio, mostrei-lhes a construção das cônicas com dobraduras. Eles afirmaram que não conheciam esse recurso e mostraram-se interessados. Receberam o texto de Galvão e Melo (2008), que explica a construção de cada uma das cônicas e tiveram contato com as figuras previamente construídas por mim. Ressaltou-se que um trabalho exclusivamente analítico, no Ensino Médio, poderia ser demasiadamente abstrato e o aluno poderia não perceber as propriedades que caracterizam cada uma das cônicas estudadas. Outra sugestão, dada por mim, foi o uso do vídeo “Na cauda do cometa”, com duração de 10 minutos, da coleção Matemática Multimídia. Esse vídeo, que foi assistido por eles, relaciona a Geometria Analítica com a Astronomia e mostra o uso das cônicas, por exemplo, na órbita dos planetas.

12º ENCONTRO:

No encontro desse dia, estavam presentes: Aline, Fernanda, Juliana e Vítor. Trabalhamos o conteúdo de Trigonometria. O grupo foi questionado sobre como eram as suas aulas de trigonometria no Ensino Médio.

Retomei um pouco das experiências pessoais de cada integrante do grupo e foi realizada a leitura do texto “Um pouco da história da Trigonometria” (Apêndice D). Os futuros professores enfatizaram que, para eles, a trigonometria era mais um conteúdo que lhes estava sendo ensinado. Algumas questões trabalhadas foram: o fato de que a trigonometria, assim como a Matemática, não foi obra de um único homem ou nação; a ideia de ângulo foi construída após o estudo das medidas dos lados do triângulo; as identidades trigonométricas apareceram por volta do século XVI em todas as partes da Europa e que o nome *trigonometria* foi usado pela primeira vez em 1595.

Houve um cuidado em destacar que nem todos os conteúdos matemáticos precisam relacionar-se a uma aplicação, já que a Matemática tem uma beleza e uma estrutura lógica. No entanto, esses conteúdos poderiam ser trabalhados através de problemas ou situações que gerassem sua própria necessidade.

Essa atividade, trabalhada com futuros professores, pretendia motivá-los a mostrarem a seus futuros alunos que a Trigonometria é útil em situações envolvendo triângulos, em que são conhecidas uma das medidas e um ângulo.

O grupo assistiu ao vídeo “A dança do sol”, da coleção Matemática Multimídia (UNICAMP, 2013b). Os futuros professores ficaram surpresos com a situação apresentada e disseram nunca terem visto essa aplicação. Alguns conceitos de outras disciplinas poderiam ser explorados: latitude, solstício, equinócio e o movimento periódico do sol. O grupo sugeriu que o professor poderia tentar reproduzir com seus alunos, na própria escola, como determinar a direção leste-oeste/ norte-sul a partir da sombra de uma estaca, com base no movimento periódico do sol.

Seguindo o roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de problemas, os futuros professores foram divididos em duplas e deveriam descobrir a altura de uma das paredes ou o tamanho da lousa. Eles não poderiam medi-los usando a trena. Para essa atividade, cada dupla recebeu um teodolito (o de indicação direta ou do ângulo congruente) que deveria auxiliá-los na descoberta da medida desconhecida.

Fazendo uso do teodolito de indicação direta, a dupla Fernanda e Vítor pretendia descobrir a altura de uma das paredes da sala. Fernanda questionou se poderia colocar o teodolito diretamente sobre o chão. Sugeri que a dupla usasse uma carteira para apoiar o teodolito, caso contrário, eles precisariam deitar no chão para visualizar o ângulo de inclinação. Vítor destacou que o apoio da carteira tem um ângulo de inclinação que poderia atrapalhar a medição e sugeriu que o teodolito fosse apoiado nas costas da cadeira.

As duas duplas enfrentaram dificuldade com a precisão do instrumento pois como o canudo do teodolito era muito grosso, gerou uma dificuldade na medição. Após calcularem a altura usando trigonometria, fizeram a medição usando a trena e compararam os valores. As duplas refizeram as medições buscando o que tinham errado. Ao usar o teodolito, as duplas refizeram as medições considerando a parte de baixo do canudo alinhado com o ponto mais alto daquilo que queriam medir e perceberam que isso aumentou a precisão de suas medidas.

Os alunos indicaram que o problema pode explorar muitos conceitos como os de tangente, seno, cosseno e suas inversas. Além disso, propuseram a construção do teodolito pelos alunos da Educação Básica, em grupo ou individualmente. Fernanda acrescentou, ainda, que seria possível chamar um geógrafo na escola e mostrar aos alunos o equipamento profissional e sua precisão.

Proposta de aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas:

Propus que os futuros professores trabalhassem, em duplas ou individualmente, um problema fazendo uso desta metodologia, no encontro final. Pedi para que tomassem cuidado na escolha do problema a fim de que ele possibilitasse a exploração de novos conceitos, procedimentos e conteúdos.

13º e 14º ENCONTROS:

Nesse encontro duplo tratou-se dos conteúdos *Análise Combinatória e Probabilidade*. Apenas Felipe e Vítor estavam presentes. A baixa frequência dos integrantes do grupo deu-se em decorrência do tempo chuvoso e por estarem em uma semana de provas, no final do semestre.

Iniciei o encontro questionando a forma como aprenderam Análise Combinatória. Felipe afirmou que, apenas no 3º ano da graduação, na disciplina *Fundamentos da Matemática Elementar*, o conteúdo foi trabalhado por meio de problemas e que o professor fazia um apelo à compreensão do conceito, em detrimento de um ensino mecanizado. Desse modo, no 3º ano da graduação, os alunos puderam construir toda a ideia de princípio multiplicativo, fazendo uso da árvore de possibilidades, enfatizando-se a compreensão e não as fórmulas. Vítor lembrou que esse é um dos poucos conteúdos, em sua opinião, que pode ser trabalhado, exclusivamente, através da Resolução de Problemas. Afirmou, ainda, que esse foi um dos motivos que o levou a buscar o curso de extensão, conhecer como poderia trabalhar outros conteúdos através da Resolução de Problemas.

<u>Felipe</u>: É que esse conteúdo (Análise Combinatória)... parece que não precisa de fórmula pra você entender, pra você aplicar ele. O enunciado é simples, você consegue entender o que ele quer, mesmo sem conhecer a fórmula... aí a gente foi montando aquele jeito de árvore, depois ela (a professora) falou do princípio multiplicativo... como funcionava e aí fez mais sentido ainda a parte da multiplicação...
<u>Vítor</u>: Parece que Análise Combinatória é um ramo da Matemática que é aplicável e vai sempre existir problemas que você consegue resolver por raciocínio lógico. Você não precisa de fórmula!
<u>Felipe</u>: É mais didática essa matéria!
<u>Vítor</u>: É como se fosse intuitiva...

O grupo conversou sobre o fato de que a Análise Combinatória trabalha com conjuntos finitos de pontos separados, ou seja, trata-se de Matemática Discreta. Nesse sentido, essa “facilidade” ao trabalhar com esse conteúdo também se justifica porque envolve conjuntos finitos, sendo que a Matemática contínua é mais difícil de ser entendida pelo aluno, que tem dificuldade inclusive com o conceito de infinito.

Dando continuidade às atividades, entreguei a cada um deles uma folha contendo dois problemas e solicitei que os resolvessem. Em seguida, foram realizadas uma plenária e a formalização do conteúdo trabalhado.

Para encerrar esse primeiro momento, foram feitas a leitura e a discussão do texto “O que é Combinatória” de Morgado et al (2004). Nele é aborda a construção histórica dos conceitos de Análise Combinatória e de Probabilidade.

Ao questionar os futuros professores sobre a ligação entre Análise Combinatória e probabilidade, Vítor argumentou que a primeira fornece as possibilidades (o espaço amostral) e a segunda, nos dá as chances de um determinado evento ocorrer. Daí a ligação entre esses dois conteúdos.

Forneci aos dois futuros professores três problemas. A cada problema resolvido, foi realizada uma plenária e a formalização do conteúdo trabalhado.

Para finalizar esse encontro, assistimos ao vídeo “A Cartomante” (UNICAMP, 2013a), da coleção Matemática Multimídia, que envolve Análise Combinatória. Foi retomada a proposta de aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas a ser realizada no próximo encontro.

15º ENCONTRO

No encontro final, em duplas ou individualmente, os alunos deveriam trabalhar um problema no grupo fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Em decorrência do excesso de atividades ao final do semestre, infelizmente, o grupo não estava completo. Estavam presentes: Aline, Fernanda, Juliana e Vítor. Além disso, como Fernanda já havia apresentado um problema no 6º encontro, foram trabalhados, neste encontro, apenas dois problemas pelos futuros professores.

Durante a condução da atividade final pelos futuros professores foi possível perceber que eles buscaram, inicialmente, que o grupo pensasse sobre o problema. Em seguida, provocaram uma discussão em direção à construção do conceito abordado. Ao final, após cada integrante do grupo apresentar como havia pensado, o futuro professor, que estava propondo o problema, fez a formalização dos conceitos matemáticos envolvidos. Desse modo, foi possível perceber que o grupo compreendeu e aplicou a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Vítor apresentou um problema que foi motivador para o grupo e possibilitou o uso de estratégias diversas. Além disso, o problema proposto abordou conteúdos geométricos como critérios de semelhança e de congruência, razão entre segmentos, Teorema de Pitágoras, ângulo de incidência e de reflexão, diagonais, losango, retângulo, quadrado, dentre outros.

A dupla Aline e Juliana procurou analisar os coeficientes de uma equação do 2º grau e suas implicações na representação gráfica. Essa análise, que permite ao aluno compreender o comportamento de uma função e o significado dos coeficientes em uma representação gráfica é, em geral, deixada de lado pelos professores.

Outra evidência revelada é a de que os futuros professores conhecem as regras e sabem operar com elas, mas parecem não buscar os conceitos. Ao trabalhar o problema 2, por exemplo, os futuros professores ficaram mais preocupados em buscar as técnicas do que explorá-las a partir de seus conhecimentos oriundos do Cálculo.

5.2 Projeto P2 e o grupo de estudo formado por professores de Matemática em exercício

5.2.1 O grupo 2 e seus integrantes

O professor **Carlos** ministra aulas de Matemática há 15 anos. Ele é formado em Administração de Empresas e fez complementação em Matemática. Para ele, a experiência em sala de aula o fez melhorar como professor. Gostou de participar do grupo, se sentiu beneficiado pois as experiências partilhadas e os conteúdos abordados permitiram-lhe "abrir a visão". Julga que a falta de interesse do aluno nas aulas pode comprometer as atividades. A grande novidade apresentada pelo grupo é que o problema deve gerar o pensar e o professor deixar de dar algo pronto.

A professora **Ana** fez Licenciatura em Matemática e dá aulas desde 1998, quando estava no 3º ano da faculdade. Acredita que sua formação inicial lhe deu condições para ser uma boa professora. No entanto, queria estudar mais e fez complementação em Pedagogia e Mestrado Profissional em Educação Matemática. Atualmente também é Diretora de Escola

Infantil. Julga que a experiência facilita o trabalho em sala de aula, mas gera um desânimo ao ver que as coisas não mudam. Aponta como dificuldades em sala de aula: o desinteresse do aluno e a tecnologia do celular que o professor ainda não faz uso para suas aulas. Gostou de participar do grupo. Para ela, é preciso mais espaços desse tipo para partilhar experiências, para se enriquecer com os conteúdos e teorias de fora da escola.

A professora **Maria** é formada em Química (Licenciatura e Bacharelado), mas tem habilitação para dar aulas de Matemática e Física. Ministra aulas de Matemática há um ano. Gostou de participar do grupo, principalmente por ser no ATPC – um horário de tempo perdido, segundo ela. Além disso, o grupo possibilitou o compartilhamento de ideias e experiências. Uma coisa que diz ter gostado muito foi a discussão de como iniciar um assunto. Hoje, considera que explorar o conceito antes de dar matéria é fundamental.

A professora **Cecília** é formada em Administração de Empresas e fez Complementação em Matemática. Inicialmente foi convidada por uma escola para ministrar aulas de contabilidade e “despertou-se” para lecionar. Depois disso, foi coordenadora e passou a admirar o trabalho dos professores de Matemática. Quando começou a dar aula de Matemática, em 2003, pensou em desistir, mas contou com o apoio de diretores e coordenadores. Julga que a experiência lhe permitiu melhorar, mas ainda sente dificuldades em alguns conteúdos, principalmente os do Ensino Médio. Gostou de participar do grupo. Ficou surpresa com a variedade de resoluções para um mesmo problema. Indicou a troca de experiências como algo positivo no grupo.

O professor **Paulo** formou-se como técnico de Navegação Fluvial e fez Complementação em Matemática. Afirma que correu atrás para superar suas dificuldades e defasagens, cursando inclusive três cursos de especialização em Matemática. Ministra aulas há 15 anos. Apontou como pontos positivos da formação do grupo: rever conteúdos, trocar experiências e estudar novas coisas. Além disso, também julga ter sido o tempo dos ATPCs melhor aproveitado. Sempre gostou de trabalhar com problemas em sala de aula e acredita que o grupo complementou sua forma de trabalho.

A professora **Maíra** fez Licenciatura em Matemática e acredita que sua formação inicial foi fundamental. No entanto, fez Complementação em Pedagogia e está cursando o Mestrado Profissional da SBM, em Matemática. Em 2003 começou a ministrar aulas de Matemática, mesmo estando no 3º ano da faculdade. Julga que a experiência ensina muito, mas a estrutura da escola vai desanimando o professor e deixando seu trabalho não tão bom quanto poderia ser. “Me sinto desgastada também pela experiência negativa que a gente vive em sala de aula às vezes”. Gostou de participar do grupo. Para ela, “foi uma troca de experiências e de coisas práticas de quem conhece a realidade da escola". Acredita que, muitas vezes, o ATPC é o único momento do professor para corrigir provas e preparar atividades, por isso sugeriu que o grupo não fosse semanal.

O professor **Otávio**, primeiramente cursou o antigo Magistério e ministrou, por dois anos, aulas para a 4ª série. Ao continuar seus estudos, tinha dúvida em saber se deveria cursar Física ou Engenharia Civil. Optou por Física na UFSCar. Enquanto cursava Física tornou-se monitor por três semestres. Sentiu que não era o que queria e ingressou em Engenharia Civil na UNESP. Enquanto cursava Engenharia, dava aulas de Matemática e Física como professor não habilitado. Ministra aulas de Matemática, desde 1992 (com exceção de 1998 e 1999). Concluiu o curso de Engenharia em 1997 e voltou, enquanto trabalhava como engenheiro, a cursar Física. Fez complementação em Matemática. No entanto, ao assumir cargo de professor de Matemática na prefeitura e no estado, teve que trancar o Curso de Física e não conseguiu concluí-lo, mesmo faltando apenas o 4º ano. Optou em fazer complementação em Pedagogia. Em seguida, deixou o cargo de professor de Matemática na prefeitura e assumiu o cargo de Diretor de Escola Infantil. Fez especialização em Administração Escolar e, em 2011, ingressou no Mestrado Profissional da SBM e está concluindo seu curso. "Eu, particularmente, tenho uma necessidade de ficar estudando... eu acho que a gente precisa fazer isso. Inclusive, até pra gente se manter vivo...". Julga que sua prática melhorou com o passar dos anos e que é difícil se desvincular do modo como aprendeu a Matemática. Gostou do trabalho do grupo, das "trocas de experiências" e de aprender novas coisas. Além disso, destaca também o aproveitamento do espaço do ATPC para estudar.

A professora pesquisadora **Andresa** faz doutorado em Educação Matemática pela UNESP-Rio Claro. Fez o Curso de Licenciatura em Matemática pela mesma instituição, no *Campus* de Bauru. Já atuou como professora de Educação Infantil, enquanto fazia o referido curso de graduação. Há sete anos ministra aulas na mesma unidade escolar, da rede estadual de São Paulo, como professora efetiva. Em 2009 concluiu seu mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, pela UNESP-Bauru.

Após conhecer o perfil dos participantes da pesquisa, foram indicados por eles conteúdos a serem trabalhados nos encontros do grupo. O critério para a escolha dos referidos conteúdos matemáticos foi aqueles que os participantes julgavam difíceis de aprender na Educação Básica. Destaca-se que conhecer o perfil desses futuros professores possibilitou a problematização e o resgate de suas experiências matemáticas e de sala de aula construídas anteriormente.

5.2.2 Os encontros do grupo 2

PRIMEIRO ENCONTRO:

Neste encontro, estavam presentes os professores Ana, Carlos, Cecília, Maíra, Otávio e Paulo. Inicialmente, foram tratadas algumas questões referentes à parte ética e administrativa do curso. Entreguei, aos participantes da pesquisa, o requerimento de inscrição no curso de extensão e os termos de autorização para gravação e filmagem. Na sequência, foi feita a leitura do texto de Gazire (2012).

Os professores deram diversos exemplos, a partir de suas experiências, de dificuldades apresentadas pelos alunos como, por exemplo, ao se trabalhar álgebra.

A professora Cecília ressaltou a importância de se trabalhar de modo diferenciado desde o 6º ano e de se resgatar a auto-estima do aluno. Para ela, muitas vezes, o aluno chega no Ensino Fundamental II com "medo de Matemática" e se acha incapaz de resolver um problema.

Em seguida, o grupo realizou a leitura do texto de Allevato e Onuchic (2009), mas propus que os professores terminassem de realizar a leitura em casa. A discussão desse texto ocorreria no próximo encontro.

O grupo chegou a um consenso de que seria importante o registro das atividades realizadas diariamente, em cada encontro. Propus que a cada reunião um professor registrasse as considerações. O objetivo seria que o professor fizesse um resumo do que foi tratado e que fosse se acostumando com a atividade de fazer registros por escrito.

SEGUNDO ENCONTRO:

A reunião começou atrasada, pois as coordenadoras precisaram comentar com os professores as dificuldades encontradas nas provas diagnósticas. Essas provas foram enviadas pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo para serem aplicadas a todos os alunos e, nesse momento, as coordenadoras estavam resgatando, com os professores, quais haviam sido os principais erros e dificuldades sentidas pelos alunos ao realizarem a prova.

Estavam presentes os professores Carlos, Cecília, Maíra, Otávio e Paulo. Utilizando a justificativa da falta de tempo, a maioria dos professores não havia realizado a leitura prévia dos textos deixados para este encontro. Começou-se o encontro, então, com a leitura do texto de Allevato e Onuchic (2009).

Foram tratadas, ainda, as concepções sobre Resolução de Problemas apresentadas por Schroeder e Lester (1989). Os professores, com exceção do professor Paulo, que afirmou já ter feito um curso sobre resolução de problemas, desconheciam ou não sabiam falar sobre o método de Polya. A professora Cecília disse que gostaria de saber mais sobre esse método e sugeriu que o grupo voltasse a falar sobre isso.

Entreguei aos professores o texto de Onuchic e Allevato (2011), para que fizessem a leitura prévia.

TERCEIRO ENCONTRO:

O encontro novamente iniciou-se com atraso. Os índices do IDESP (Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo) estavam mais uma vez na pauta das discussões. Dessa vez, as coordenadoras falaram sobre o trabalho diferenciado e contínuo que deve ser feito tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Recomendou-se ainda que, em todas as semanas, fosse trabalhado com os alunos algum conteúdo buscando a recuperação de conceitos já trabalhados.

Estavam presentes no encontro desse dia: Ana, Carlos, Cecília, Maíra, Paulo e Otávio. Como os professores, no encontro anterior, diziam desconhecer os passos de Polya, então foi decidido apresentar e trabalhar sobre cada um deles.

Em seguida, o grupo abordou novamente as concepções sobre Resolução de Problemas apresentadas no texto de Schroeder e Lester (1989). Depois, foi tratada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e os professores fizeram a leitura do roteiro de atividades a serem conduzidas pelo professor ao trabalhá-la.

Algumas experiências profissionais dos professores foram compartilhadas. O professor Carlos lembrou o grupo sobre a importância da motivação por parte dos alunos e apoiou-se em algumas experiências pelas quais passou. A professora Ana concordou com o professor Carlos, mas ponderou afirmando que é preciso buscar novas alternativas e não apenas se lamentar.

A professora Cecília afirmou ter se identificado com a Metodologia citada e questionou Otávio e Ana sobre a visão deles enquanto gestores de escola. Para Ana é mais fácil olhar para sua prática enquanto professora do que pensar o que poderia ser feito enquanto diretora de escola. O professor Otávio também considerou que é mais difícil trabalhar com os seus professores do que olhar e refletir a partir de suas experiências pessoais.

Não foi possível trabalhar os PCNs e os blocos de conteúdo neste encontro. Por uma questão de tempo e de escolha, optou-se por abordar esse assunto em outro momento, fora do curso, para que fosse possível seguir o planejamento das atividades.

QUARTO ENCONTRO:

No encontro desse dia, estavam presentes os professores Ana, Carlos, Cecília, Maíra, Maria (uma professora nova na escola), Otávio, Paulo e a Coordenadora Pedagógica, Sueli. Trabalhamos o texto “Reconceitualizando as quatro operações fundamentais”. De início, questionei os professores sobre o significado de conceitualizar e de reconceitualizar algo. Perguntei também aos professores sobre como achavam que deveria ser o ensino das quatro operações fundamentais. A ideia apresentada por eles, inicialmente, foi a de que primeiro se ensina adição e depois sua inversa, a subtração. Na sequência trabalha-se a multiplicação e, em seguida, a divisão.

Alguns pontos que foram destacados durante a leitura e a discussão do texto foram:

- O conceito do zero, considerando a dificuldade dos alunos tomarem o zero como ponto inicial para medir;
- A questão do trabalho com o discreto e o contínuo;
- A exploração das diversas situações modeladas por adição/subtração e o levantamento do porquê de algumas dificuldades encontradas pelos alunos. A necessidade do trabalho com resolução de problemas exige romper com a “tradição” do uso quase exclusivo do algoritmo ou de trabalhar com os alunos apenas uma operação de cada vez.

Apesar da novidade apresentada pelo texto, rompendo com aquilo que os professores estavam acostumados a trabalhar, ao reconceitualizar as quatro operações fundamentais, os professores puderam perceber que as operações adição e subtração são de uma mesma família, isto é, ocorrem na reta. Entretanto, as operações multiplicação e divisão são de uma outra, isto é, ocorrem no plano.

A participação da Coordenadora Pedagógica, neste encontro, foi importante pois ela já conhecia e gostava do trabalho através da Resolução de Problemas. Desse modo, a Coordenadora Sueli participou ativamente das discussões e contribuiu com a realização do trabalho. Ao falar das quatro operações e a partir da leitura do texto, ela destacou a necessidade de trabalhar, muitas vezes, um mesmo problema desfazendo as operações para que o aluno percebesse a operação inversa utilizada.

Outros pontos discutidos no encontro desse dia foram:

- A importância do trabalho em grupo em sala de aula.
- O cuidado que o professor deve ter no processo de adição, com o sentido das parcelas na reta e, com o processo de multiplicação, com a questão da ordem dos fatores.

QUINTO ENCONTRO:

Neste encontro estavam presentes Carlos, Cecília, Maíra, Maria, Paulo e Otávio e foram trabalhados problemas envolvendo Álgebra. A dinâmica do encontro foi diferente: Aplicou-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Os professores se envolveram e, aparentemente, gostaram bastante.

Como estavam presentes seis professores, entreguei a cada um deles uma folha contendo dois problemas: o do festival e a troca de flores entre os participantes e o dos cubos e adesivos. Pedi a eles que se subdividissem em dois grupos e que tentassem resolver os problemas. Por uma questão de tempo, pedi que resolvessem os dois problemas, para que fossem discutidos ao final do encontro. Uma vez que outra possibilidade para a condução dessa atividade seria a resolução do primeiro problema seguida pela sua discussão e a resolução do segundo problema seguida também pela discussão e formalização dos conceitos matemáticos envolvidos.

A partir da leitura do texto de Tinoco (2011) foi abordada a concepção da álgebra como aritmética generalizada. Não houve tempo para trabalhar a álgebra funcional nesse encontro como havia sido previsto no roteiro de atividades.

Os professores vivenciaram a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e as fases de uma aula desenvolvida através da resolução de problemas: desde a interpretação do enunciado, passando pela resolução nos grupos, pela plenária e chegando na formalização e discussão das diversas soluções encontradas e caminhos percorridos pelos grupos.

Houve compartilhamento de conhecimentos e a experiência pemitiu que os professores olhassem para o problema e buscassem conteúdos que pudessem ser iniciados por ele. Destaca-se que a série que o professor trabalha influenciou nesse “olhar”. Por exemplo, a Profa. Maíra olhou para o 6º ano, o Prof. Paulo para o 8º ano e o Prof. Otávio para as séries do Ensino Médio.

SEXTO ENCONTRO

Neste 6º encontro, estavam presentes Carlos, Cecília, Maíra, Maria, Otávio e Paulo. Foram abordadas as concepções da Álgebra não contempladas no encontro anterior: Álgebra das equações; Álgebra Funcional e a Estrutural. De início, foram formados os mesmos dois grupos do encontro anterior e solicitei que eles resolvessem o problema da Dona Solange.

Para finalizar e concluir o tema Álgebra, tratado nos 5º e 6º encontros, foi apresentado o texto de Tinoco (2011, p. 7-11) sobre as concepções da álgebra. Mostrei a eles, por meio dos problemas trabalhados nos encontros, que se faz necessário trabalhar as diferentes "faces" da álgebra ao longo dos Ensinos Fundamental e Médio.

Neste mesmo encontro, os professores iniciaram a leitura das orientações trazidas pelos PCNs sobre o trabalho com a Álgebra, como proposto no roteiro de atividades.

Quanto às diversas concepções da Álgebra, os professores revelaram que nunca haviam visto ou pensado sobre isso. Um dos possíveis motivos para a dificuldade dos alunos em álgebra pode ser o de os professores trabalharem mais com uma dessas facetas em detrimento de outras. Outro problema seria o de julgar que a generalização, por exemplo, seja trivial para o aluno – o que não é verdade. Os professores perceberam que o uso de problemas permite o trabalho com essas diversas faces da Álgebra, contribuindo para um melhor aprendizado dos alunos.

SÉTIMO ENCONTRO:

No encontro desse dia, estavam presentes os professores Carlos, Maíra, Maria, Otávio e Paulo. Devido à importância do tema Álgebra, decidiu-se resgatar algumas das ideias que os professores ainda não haviam chegado visando a uma reflexão que os levasse a entender como essas diferentes visões da Álgebra podem ajudar no trabalho de sala de aula.

- Sobre a Álgebra como aritmética generalizada:

Os professores terminaram a leitura sobre as orientações trazidas pelos PCNs a respeito da Álgebra. Em seguida, propus que os professores discutissem o que entendiam por generalizar.

- Sobre a Álgebra Funcional:

Apresentei o problema da Dona Solange para ressaltar a Álgebra funcional. Nesse problema, os professores indicaram corretamente que a quantidade de caixas seria a variável independente e que a quantidade de bombons seria a variável dependente.

Questionei o grupo sobre o que mais poderia ser explorado com esse problema. Concluiu-se que um problema pode ser debatido durante várias aulas, podendo ser expandido. No caso, uma sugestão dada pelos professores foi a de que os alunos poderiam fazer a representação gráfica, usando inclusive softwares apropriados.

- Sobre a Álgebra das Equações:

Essa concepção da Álgebra foi trabalhada através de dois problemas: o do triângulo mágico e o das balanças (Apêndice B). Os professores consideraram que o problema das balanças seria mais adequado para dar início ao assunto com os alunos. No problema do triângulo, os alunos deveriam conhecer o significado de igualdade, sendo esse problema mais complementar do que inicial. Para o grupo, a ideia de igualdade por meio de uma balança é importante para a compreensão de como se resolve uma equação.

Houve o resgate, pelos professores, de como aprenderam a resolver equações.

- Sobre a Álgebra Estrutural:

Os professores perceberam e ficaram convencidos de que o uso de letras diferentes seria irrelevante se as regras que as envolvem fossem as mesmas. Além disso, refletiram, a partir de suas experiências enquanto alunos da Educação Básica, sobre como aprenderam Álgebra, como ensinam e fizeram uma avaliação desse processo.

OITAVO ENCONTRO

No encontro anterior, entreguei aos professores uma lista de problemas extraída do texto “As diferentes “Personalidades” do Número Racional trabalhadas através da Resolução de Problemas”, de Onuchic e Allevato (2008), para que resolvessem previamente. Como apenas uma professora havia feito os problemas, destinei um tempo (aproximadamente 30 minutos) para que os demais pudessem pensar sobre eles. Estavam presentes os professores Cecília, Maíra, Maria, Otávio e Paulo.

Após os professores terem terminado de resolver os problemas, eles iniciaram a leitura do texto. Um ponto destacado, logo de início, foi o significado da barra fracionária. Em seguida, o grupo discutiu as soluções encontradas para cada problema resolvido e como os Números Racionais apresentavam-se em cada situação (ponto racional, quociente, fração, operador multiplicativo ou razão).

Houve participação ativa de todos os professores na resolução dos problemas. No entanto, pôde-se notar a falta de atenção com a leitura cuidadosa e interpretação dos dados de alguns problemas. Por exemplo, no problema dos sanduíches questionei-lhes se a resposta obtida faria sentido e se era justa, matematicamente, essa solução. O problema foi lido novamente e interpretado pelo grupo. Os dados foram analisados e os professores dicutiram o que seria uma divisão dos sanduíches em partes iguais.

Por uma questão de tempo, não foram discutidos, nesse momento, os problemas 4 e 5. O grupo trabalhou com os problemas 6, 7 e 8.

Antes de discutir a personalidade de número racional envolvida no problema 7, questionei os professores sobre a diferença entre os conceitos de razão e de fração. Uma fração é uma relação da parte com o todo. A partir da leitura do texto, destaquei que a razão é uma comparação multiplicativa entre duas grandezas e grandeza é tudo aquilo que pode ser medido. Já uma proporção é uma igualdade entre duas razões.

Os números racionais constituem-se em um importante ponto crítico nas avaliações externas. Elas indicam que os alunos apresentam um baixo desempenho ao resolverem problemas relacionados com números racionais. Os professores, em seus grupos, revelaram que nunca haviam pensado sobre as diferentes “personalidades” dos números racionais e na diferença conceitual entre elas. Para eles, essas personalidades eram geralmente trabalhadas como sendo uma mesma coisa. Os professores apontaram, inclusive, que os livros didáticos trazem em um mesmo capítulo diferentes personalidades sem mostrar essa diferença.

NONO ENCONTRO

Os professores presentes foram Ana, Maíra, Maria, Otávio e Paulo. Neste encontro, o grupo retomou as ideias sobre as diferentes personalidades do Número Racional. De início, foram trabalhados os dois problemas que não haviam sido tratados no encontro anterior.

Uma das dificuldades sentidas nesse encontro foi a falta de leitura dos professores. Como o texto oferecido é denso e apresenta ideias novas para o leitor, os professores apresentaram dificuldade para diferenciar algumas dessas personalidades.

A reflexão prévia dessas ideias novas poderia ter permitido uma discussão mais dirigida ao como trabalhar tais conceitos com os alunos. A falta de leitura foi notável:

Ana: A ideia de quociente é quando tá ligado a uma resposta do quanto você vai comer [...] pelo que eu tô entendendo batendo o olho só aqui...

Em seguida, enfatizou-se que seria mais fácil para o aluno reconhecer essas diversas personalidades dos números racionais através de problemas. Essa abordagem mostrou-se tão nova para os professores que eles, imediatamente, julgaram que o aluno não precisaria saber tudo isso.

Ao final do encontro, os professores pediram que a pesquisadora trouxesse outros problemas que indicassem e esclarecessem as diferenças entre as personalidades abordadas. Sugeri, então, que cada um ficasse responsável por pesquisar e trazer problemas sobre uma das personalidades. A reação foi unânime:

Ana: Ah Andresa, não dá uma de professora de lá não... dá mastigadinho....(rs)
Otávio: Dá mastigadinho...
Maíra: Isso faz parte da sua pesquisa...
Ana: Não dá tarefa não... não dá tempo!

A professora Ana destacou ainda que, assim como na Álgebra, o livro didático de Matemática trata das diferentes personalidades do Número Racional como sendo a mesma coisa. Para ela, esse fato pode causar confusão para o aluno, por exemplo, ao operar com uma fração ou com uma razão.

DÉCIMO ENCONTRO:

Neste encontro estavam presentes os professores Ana, Cecília, Maria, Maíra, Otávio e Paulo. Logo de início retomaram-se as questões pendentes do encontro anterior: os professores haviam solicitado outros problemas que os ajudassem a diferenciar as diferentes personalidades do Número Racional. A partir de questões de livros didáticos apresentei novos problemas que poderiam ser utilizados pelo professor ao trabalhar cada personalidade.

Para este encontro, o tema central projetado foi o trabalho com logaritmos. Como a logaritmação é uma das operações inversas da potenciação, iniciou-se a construção do conceito de logaritmos por meio dela. De início, os professores foram divididos em trios e receberam uma folha contendo duas atividades: uma tratando da potenciação com expoente natural e outra abarcando os expoentes racionais. Em cada atividade, os professores deveriam justificar o procedimento realizado.

No caso de $10^w = 20$ utilizando a ideia de sequências de intervalos encaixantes e convergência dessas sequências, o logaritmo mostrou-se como uma ferramenta eficaz para determinar o valor do expoente. A partir dessa discussão, poder-se-ia definir o logaritmo como: $log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b,\ a > 0\ e\ a \neq 0.$

Posteriormente a essa discussão, relembraram-se quais eram as operações inversas da potenciação e, após o trabalho com os expoentes reais e sua construção, o logaritmo poderia ser utilizado. Além disso, destacou-se que logaritmo, por ter um símbolo matemático expresso exclusivamente por letras: *log*, pode levar os alunos da Educação Básica a não reconhecê-lo como uma operação matemática.

Outros pontos relevantes que foram discutidos nesse encontro:

- Nas orientações propostas para o professor pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo consta que, no 9º ano, são trabalhadas as potências com expoentes racionais e reais. Questionei os professores sobre qual seria o momento em que são trabalhadas as potências com expoentes irracionais. Eles afirmaram que em nenhum momento se trabalha isso na Educação Básica.
- Em uma abordagem histórica, a necessidade dos logaritmos reporta às grandes navegações. A grande vantagem no uso dos logaritmos estava em facilitar os cálculos com números grandes.

Os professores Otávio e Paulo afirmaram que essa justificativa não convence mais os alunos, já que as calculadoras resolvem logaritmos com facilidade. A professora Ana diz que o contexto histórico serve mais para mostrar porque ele foi introduzido do que para justificar seu uso. Apresentei-lhes, então, questões que poderiam exemplificar o uso dos logaritmos no Ensino Médio, como é o caso da Escala Richter que mede a intensidade de um terremoto.

11º e 12º ENCONTROS:

Neste encontro duplo, em decorrência de um imprevisto na semana anterior, tratou-se do tema medidas. Os professores presentes foram: Carlos, Maíra, Maria e Otávio. O encontro iniciou-se com dois problemas: o do cilindro e o dos quadradinhos. (Apêndice B)

A título de ilustração, abordarei parte de como foi trabalhado o problema do cilindro. Inicialmente, solicitei que resolvessem o problema. Em seguida, questionei como descobriram quem estava certo. Alguns professores conjecturaram como o aluno faria. No entanto, não deram a sua resposta ao problema. Em seguida, propus que os professores fizessem a atividade na prática e, depois, que explorassem o que poderia ser trabalhado com esse problema.

Na segunda parte do encontro, referente ao que foi programado para a 12ª reunião, tratou-se da questão do sistema métrico decimal, as diferentes unidades de medida e seus múltiplos e submúltiplos.

Para explorar esse assunto, apresentei um pouco da história do sistema métrico decimal e a definição do padrão metro ao longo do tempo. A primeira definição de metro, proposta em 1670 por Gabriel Mouton (1618-1694), foi "a décima milionésima parte do arco de um quarto de um círculo máximo do globo terrestre como unidade de medida linear e com submúltiplos decimais". Anos depois, um grupo de matemáticos encontrou, por meio de medições, a referida medida tomada como unidade padrão. De acordo com a professora Maíra essa definição ainda é apresentada no caderno do professor do 6º ano:

> O metro foi criado no final do século XVIII por uma comissão de cientistas, da qual faziam parte os matemáticos Pierre Simon Laplace e Joseph-Louis Lagrange. Tomando-se a Terra como referência, o metro foi definido como sendo a décima milionésima parte $\left(\frac{1}{10\,000\,000}\right)$ da distância entre o polo Norte e o equador, ao longo do meridiano que passava por Paris. Porém, devido à pouca praticidade em se determinar tal distância, o comprimento do metro foi registrado em uma barra metálica de platina e irídio que está guardada na cidade de Sèvres, na França. Construído o padrão, cópias exatas foram distribuídas para diversos países, que passaram a adotar o metro como unidade-padrão de medida. (SÃO PAULO, 2013, p. 41).

O professor Otávio afirmou que se lembrava do metro como um protótipo que se encontra em um museu. A partir da leitura do texto "Algumas curiosidades e informações sobre a História dos pesos e medidas" (Apêndice F), os professores notaram que a unidade-padrão metro, construída de platina e irídio, manteve-se inalterada de 1889 a 1960. A unidade padrão era guardada no museu e eram feitas cópias a partir daquele protótipo. Destacou-se também a importância política de um sistema de unidades e a não adoção pela Inglaterra de um sistema francês.

Os professores aprenderam a definição atual de metro: "Distância percorrida pela luz no vácuo, durante um intervalo de tempo de (1/299 792 458) segundo".

Conforme planejado no roteiro de atividades, o grupo discutiu também a questão da transformação das unidades de medida. A partir das atividades desenvolvidas, foram abordadas questões como: "Por que para converter m^2 em cm^2 é preciso dividir por 10000?" ou, ainda, "Por que 1m^3 equivale a 1000000 cm^3?". Destaquei que muitos professores ensinam as regras de conversão, mas não explicam o porquê delas. Alguns professores revelaram que, enquanto eram alunos, sentiram dificuldades em entendê-las.

O grupo conversou, ainda, sobre a existência de unidades distintas para medir sólidos e líquidos. Como o líquido assume o formato do recipiente que o contém, é mais fácil utilizar as medidas de capacidade do que as medidas de volume. Assim, à capacidade de um litro corresponde o volume de 1 dm^3 .

13º ENCONTRO:

A escola estava totalmente turbulenta nesse dia. Com o fim do bimestre se aproximando, muitos projetos estavam sendo concluídos e o ATPC tinha muitos recados para os professores. A professora Cecília, que também é responsável pela sala de leitura, não participou do 13º encontro pois estava envolvida em outras atividades. Estavam presentes os professores: Ana, Carlos, Maíra, Maria e Otávio.

De início, resgatei com os professores quais seriam as dificuldades para se trabalhar Geometria Analítica. Como alguns desses professores nunca ministraram aula para o 3º ano do Ensino Médio, não tinham experiência para apontar quais seriam essas dificuldades.

O professor Otávio mostrou-se o mais experiente em trabalhar G.A., então ele destacou que os alunos apresentam falta de conhecimentos prévios como: o domínio do Teorema de Pitágoras, o conceito de tangente e a localização de pontos no plano cartesiano. Com isso, frequentemente, o professor tem que fazer revisões e não consegue passar da equação da reta, deixando de trabalhar as cônicas.

Propus dois problemas: o problema do resgate e o problema das avenidas (Apêndice B). A título de ilustração, em relação ao problema do resgate, a professora Ana disse que não se lembrava da fórmula da distância entre dois pontos. Maíra e Otávio sugeriram que fosse montado um triângulo e que ela "aplicasse Pitágoras". Os professores não tiveram dificuldade em obter o resultado. Destaca-se apenas que alguns professores calcularam a raiz quadrada aproximada de 313, obtendo 17,7, chegando ao resultado final que é 30,7 *km*.

O grupo discutiu também quais seriam possíveis estratégias/dificuldades dos alunos ao resolver esse problema. Na sequência, foi trabalhado o problema das avenidas.

Ao final deste encontro apresentei aos professores como poderiam usar, em sala de aula, a confecção de dobraduras para que os alunos construíssem as diferentes cônicas. Os professores lembraram-se dos recursos do *geogebra* e assistiram ao vídeo "Na cauda do cometa". Esse vídeo, programado para este encontro, com duração de aproximamente 10 minutos, tratou das cônicas na trajetória de cometas e nas órbitas dos planetas, fazendo a ligação Matemática-Astronomia. O grupo concordou que as aplicações envolvendo cônicas e o uso de atividades com dobraduras podem estimular os alunos, mostrando-lhes como a Matemática está envolvida em todas as ciências.

Proposta de aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas:

Propus aos professores que fizessem uso dessa Metodologia em uma de suas aulas. Pedi que tomassem cuidado na escolha do problema para que ele estivesse adequado à série a ser trabalhado e que estivesse alinhado com os conhecimentos prévios dos alunos. Ressaltei ainda que, no último encontro, eles relatariam ao grupo como havia sido feita a aplicação da Metodologia em suas salas de aula.

Ao contrário do que pensei, em decorrência do excesso de atividades do final do 2º bimestre, os professores mostraram-se receptivos e abertos a essa experiência. Lembrei a eles também que a ênfase não deveria estar na resposta do problema e sim nos processos de construção de conhecimento novo e na compreensão do mesmo.

14º ENCONTRO:

No encontro desse dia tratou-se de trigonometria. Estavam presentes Ana, Maíra, Maria e Otávio. O encontro iniciou-se com o vídeo “A dança do sol” (UNICAMP, 2013b). Os professores afirmaram que esse recurso pode ser útil para ser trabalhado no 2º ano do Ensino Médio, pois o caderno do aluno, volume 1, traz essa questão e estuda os movimentos periódicos a partir do movimento do sol.

Questionei os professores sobre qual seria a maior dificuldade para se ensinar trigonometria. A professora Maria disse que os alunos têm muita dificuldade com conceitos elementares como, por exemplo, o de ângulo. Ela acha que se dá muito mais atenção às construções concretas do que ao próprio conceito. Maíra concordou com isso. Acrescentou que, no material do estado, a ideia de unidade é construída para depois definir que 1º é a divisão da circunferência em 360 partes iguais. O aluno não percebe que entre duas semirretas aquela abertura representa o ângulo.

O professor Otávio disse que os alunos no Ensino Médio apresentam dificuldade para lembrar conceitos anteriores, como o do Teorema de Pitágoras. Para ele, o material do estado simplesmente apresenta as ideias de seno e cosseno, mas ele considera que isso não é tão natural para o aluno.

A professora Ana destacou que o material do estado não trata das identidades trigonométricas, o que ela julga ser uma deficiência.

Maíra lembrou-se que, no Ensino Médio, uma professora construiu a ideia de seno e cosseno usando teodolitos. Nesse momento, introduzi a atividade proposta para este encontro.

Os professores mostraram-se animados e curiosos com a atividade. Mostrei a eles os dois teodolitos já prontos, pois em virtude do tempo não solicitei que os professores construíssem os instrumentos. Dividi o grupo em duas duplas e cada uma delas realizou algumas medições.

Otávio e Maíra pegaram o teodolito de indicação direta e mediram o ângulo correspondente à altura da janela. Para isso, apoiaram o teodolito na mesa, e em seguida usando uma trena mediram sua altura e a distância da mesa à janela.

Ana e Maria utilizaram o teodolito do ângulo congruente e mediram a altura do chão ao teto da sala. Para isso, apoiaram o teodolito em uma mesa. Mediram, com a trena, a altura da mesa e a distância da mesa à parede.

Com as medidas do ângulo de inclinação encontrado pelo teodolito, a distância entre o teodolito e a altura a ser calculada e a altura em que o teodolito foi apoiado, os professores foram calcular a altura do chão ao teto da sala e a altura da janela. Após feitos os cálculos, os professores realizaram as medições para compará-las com as medidas encontradas. A dupla Ana e Maria encontrou uma diferença de $30cm$, pois a medida real seria $2,97m$ e a medida encontrada foi $2,67m$. Ao refazer os procedimentos, elas perceberam que o teodolito havia gerado uma medida imprecisa. O ângulo medido, 30º, na verdade seria 34º. Já a medição de Maíra e Otávio apresentou uma imprecisão de apenas $3cm$.

Para concluir, propus a leitura do texto “Um pouco da história da Trigonometria”. A atividade revelou-se interessante, pois os professores puderam perceber que, ao longo da história, o conceito de ângulo também demorou a ser construído. As relações trigonométricas datam do século XVI.

Questionei os professores sobre como poderíamos motivar e justificar a importância do estudo da trigonometria hoje. Os professores afirmaram que trigonometria é um assunto difícil de ser trabalhado. Sugeri o trabalho com os teodolitos, a construção do círculo trigonométrico e o uso do vídeo “A dança do sol” (UNICAMP, 2013b) como recursos para esse trabalho. O professor Otávio lembrou que um trabalho interdisciplinar com a Física, por exemplo, facilitaria o entendimento de conceitos como amplitude nas funções periódicas ou do movimento uniformemente variado como uma função de 2º grau. No entanto, ponderou que como os alunos têm dificuldade nas duas disciplinas, torna-se difícil uma apoiar-se na outra.

15º ENCONTRO:

Neste encontro final, os professores ficaram responsáveis por fazer o relato de como se desenvolveu a aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em uma de suas salas de aula. Alegando excesso de atividades ao final do bimestre, alguns professores não realizaram a atividade combinada. Os professores que estavam presentes foram: Ana, Carlos, Cecília, Maíra e Otávio.

Ana, Carlos e Maíra relataram como foi a aula através da Resolução de problemas e apresentaram os problemas feitos por seus alunos.

A professora Ana trabalhou alguns problemas envolvendo álgebra e os conceitos de área e perímetro. A classe se agrupou, de acordo com Ana, de maneira que ficassem à vontade. Desse modo, alguns trabalharam individualmente e outros em duplas ou trios. Os problemas foram passados na lousa e os alunos copiaram em uma folha.

O professor Carlos escolheu um grupo de cinco alunos e realizou uma atividade envolvendo o cálculo de perímetro e da área de uma sala de aula. A atividade foi realizada por esses alunos enquanto o restante da sala realizava uma prova de recuperação. O professor disse que no 2º semestre tentaria envolver a sala toda, mas que desenvolveu a atividade dessa forma porque o término do semestre estava próximo.

A professora Maíra trabalhou com alunos do 6º ano dois problemas envolvendo Números Racionais. Para o trabalho em grupos, Maíra escolheu representantes para os grupos e cada um deles selecionou mais três integrantes para o grupo. Em alguns casos, a professora sugeriu novos agrupamentos. Em seguida, a professora entregou os dois problemas impressos e orientou os grupos a resolvê-los como conseguissem. Após os grupos discutirem, cada um dos representantes colocou a resolução do grupo na lousa e a professora Maíra encaminhou a discussão e formalização dos conteúdos matemáticos.

Os professores envolveram-se no relato dos colegas e compartilharam experiências de sala de aula. O grupo conversou bastante sobre os resultados obtidos em suas aulas e sobre a “nova Metodologia” que lhes foi apresentada. Quanto ao uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pode-se perceber que os professores fizeram algumas adaptações às suas salas de aula.

Esse encontro do grupo foi finalizado com uma pequena confraternização na escola.

A partir dos dados obtidos nos encontros e com base nas reflexões desenvolvidas nos capítulos 2 (sobre formação de professores) e 3 (sobre Resolução de Problemas), construiu-se um campo teórico que servirá de apoio a essa pesquisa. No capítulo seguinte, serão apresentados os eixos temáticos que conduzirão o processo de análise dos dados, bem como será realizada sua análise e discussão.

CAPÍTULO 6 – ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

> Analisar os dados qualitativos significa “trabalhar” todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos de observação, as transcrições de entrevista, as análises de documentos e as demais informações disponíveis. A tarefa de análise implica, num primeiro momento, a organização de todo o material, dividindo-o em partes, relacionando essas partes e procurando identificar nele tendências e padrões relevantes. Num segundo momento essas tendências e padrões são reavaliados, buscando-se relações e inferências num nível de abstração mais elevado.
>
> MENGA LÜDKE e MARLI E. D. A. ANDRÉ.

Neste capítulo serão realizadas a análise e a discussão dos dados da pesquisa, a partir de eixos temáticos que emergiram de um trabalho de leituras, e na busca por padrões, regularidades e relações entre os dados e a literatura apreciada. Nesse processo, a pergunta da pesquisa foi retomada e guiou a busca dessa organização:

Que aprendizagens profissionais docentes se manifestam em um grupo de estudo apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Tendo como base a pergunta da pesquisa e o trabalho de “outros” que lhe deram suporte teórico, foi iniciada uma intensa reflexão sobre os dados obtidos a partir de instrumentos diversos: gravação dos encontros em áudio e vídeo, notas de campo, entrevistas individuais e coletivas, questionários, análise das resoluções dos problemas produzidas pelos sujeitos por escrito, análise das produções orais e discussões dos problemas propostos.

Em relação ao processo de análise dos dados, Bogdan e Biklen (1994) afirmam que:

> (...) é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevista, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros. (p. 205).

A partir das dados coletados e cruzando essas informações com o que diz a literatura sobre os saberes docentes, será utilizado um processo de categorização emergente-misto

(FIORENTINI e LORENZATO, 2012). Desse modo, os eixos temáticos elencados a partir dessa análise foram:

- Eixo 1: A Resolução de Problemas na aprendizagem e na ressignificação dos conhecimentos matemático e didático-pedagógico na formação do professor de Matemática.
- Eixo 2: A Problematização da Resolução de Problemas nas práticas de ensinar e aprender Matemática na sala de aula.
- Eixo 3: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na formação do professor de Matemática.
- Eixo 4: Os grupos de estudo sobre Resolução de Problemas como espaços de aprendizagem dos professores e de futuros professores de Matemática.

No interior de cada um dos eixos temáticos, foram criados sub-eixos que apresentam um conjuntos de dados relacionados a aspectos particulares do eixo em destaque. Em cada um deles, são evidenciadas as manifestações de aprendizagens docentes, possibilitadas por discussões e reflexões nos grupos de estudo. A partir dessas manifestações é realizada uma tentativa de transcender aos dados, destacando-se o importante papel da Resolução de Problemas na formação de professores.

O quadro a seguir apresenta os eixos e sub-eixos temáticos construídos para a análise e discussão dos dados:

Quadro 5 – Eixos e sub-eixos temáticos (continua)

EIXOS	SUB-EIXOS
Eixo 1: A Resolução de Problemas na aprendizagem e na ressignificação dos conhecimentos matemático e didático-pedagógico na formação do professor de Matemática.	1.1 As várias faces da Álgebra;
	1.2 As diferentes “personalidades” dos Números Racionais;
	1.3 Medidas.
Eixo 2: A Problematização da Resolução de Problemas nas práticas de ensinar e aprender Matemática na sala de aula.	2.1 As concepções sobre a aprendizagem da Matemática;
	2.2 O trabalho com Resolução de Problemas em sala de aula;
	2.3 O trabalho em grupo na sala de aula.

Quadro 5 (continuação) – Eixos e sub-eixos temáticos

Eixo 3: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na formação do professor de Matemática.	3.1 Na formação inicial;
	3.2 Na formação continuada.
Eixo 4: Os grupos de estudo sobre Resolução de Problemas como espaços de aprendizagem de professores e de futuros professores de Matemática.	4.1 Na escola;
	4.2 Na universidade.

6.1 Eixo 1: A Resolução de Problemas na aprendizagem e na ressignificação dos conhecimentos matemático e didático-pedagógico na formação do professor de Matemática.

Para compor este primeiro eixo temático, foram selecionados encontros dos grupos que apresentavam discussões e a construção ou ressignificação do conhecimento matemático na formação de professores. Desse modo, a partir da Resolução de Problemas, os professores e futuros professores de Matemática trabalharam sobre conteúdos e conceitos matemáticos necessários à sua formação profissional.

6.1.1 As várias faces da Álgebra

Conforme apresentado no roteiro de atividades (Apêndice B), ao se trabalhar Álgebra na formação de professores pretendia-se discutir, apoiando-se em Tinoco (2011), as várias faces assumidas pela álgebra ao longo dos Ensinos Fundamental e Médio. A saber:

- Álgebra como generalizadora da Aritmética: usada para traduzir e generalizar. As variáveis e expressões algébricas generalizam números, operações e modelos aritméticos.
- Álgebra funcional: é considerada como estudo de relações entre grandezas. As letras aparecem como argumentos ou parâmetros.
- Álgebra das equações: tem como destaque os processos de resolução de equações. As letras aparecem como incógnitas cujo valor deve-se determinar para tornar a equação verdadeira.

- Álgebra estrutural: é utilizada em exercícios de puro cálculo algébrico, que exigem apenas a manipulação algébrica.

O tema foi trabalhado durante dois ou três encontros de duas horas cada, conforme apresentado no capítulo 6, através de cinco problemas propostos[44]. Cada um deles foi trabalhado separadamente e ao final dos encontros sobre o tema, foram apresentadas as quatro faces da Álgebra e os problemas que abordaram cada uma delas.

O Problema[45] 1

Os participantes de um festival de música decidiram que ao final do festival fariam uma festa de encerramento. Nessa festa, cada um dos participantes daria uma flor de presente a cada colega que participou do evento. Quantas flores serão distribuídas se o total de participantes for igual a 5? E se for igual a 6? E igual a 7?

Complete a tabela a seguir:

Número de participantes	Número de flores que cada um vai receber	Total de flores
3	2	$3.2 = 6$
4		
5		
6		
7		
...	...	...
11		
x		
$y + 1$		

Este problema explorou a Álgebra como generalizadora da Aritmética, no sentido apontado por Tinoco (2011, p. 7):

> [...] ao traduzir um problema para linguagem algébrica, monta-se uma equação (modelo matemático) que representa a estrutura matemática do mesmo. Neste sentido, cada equação é generalizadora, pois, pode modelar muitos problemas distintos, desde que tenham a mesma estrutura matemática.

Ao trabalhar esse problema, os professores em exercício dividiram-se em dois pequenos grupos: G1(Cecília, Otávio e Paulo) e G2 (Carlos, Maíra e Maria). Nenhum dos

---

[44] A numeração dos problemas aqui apresentada não será a mesma do roteiro de atividades.

[45] Este problema foi adaptado de São Paulo (2009). Por esta razão decidiu-se manter a tabela, como proposto na fonte original. Entretanto, destaca-se que o problema poderia ser mais explorado pelos alunos, se a tabela fosse excluída e eles apresentassem seus próprios encaminhamentos ao problema.

dois grupos apresentou dificuldade em resolver o problema, apesar de os integrantes do G2 interagirem menos do que os do G1.

Os integrantes do G1 foram discutindo entre si e completando a tabela:

Otávio: [...] Se tivesse 2 pessoas... você daria uma flor pra mim e eu daria uma pra você...
Cecília: Vai receber uma só...
Paulo: É uma flor a menos da quantidade de participante que tem...
Otávio: É uma flor a menos, daí você multiplica pelo total...
Paulo: Pelo total de participantes!
Cecília: Nós não estamos em 3?
Paulo: Você recebe 2, porque você não recebe a sua (você não se dá uma flor!)!
Cecília: Se estivéssemos em 4, seria 3...
Otávio: O x é... $(x-1)$?
Cecília e Paulo: É! Isso mesmo!
Cecília: 11 seria 10? É isso?
Otávio: 11 seria 10! É isso aí...
Cecília: E o x? $x-1$?
Otávio: $x-1$ então...
Cecília: E $y+1$?
Otávio: Seria y.
Cecília: Porque tira, né?

Durante a plenária, a *PP* questionou se o primeiro problema era uma combinação. Maíra achou que sim, mas Paulo discordou e mostrou que ela estava tendo um raciocínio errado (pois no problema quem dá uma flor também recebe e na combinação essa ação seria a mesma, como nos apertos de mão).

Foi discutido também para que série esse problema seria adequado. Os professores perceberam e acharam interessante que o mesmo problema poderia ser adequado para várias séries, de acordo com os objetivos do professor.

Otávio: Depende daquilo que o professor espera...
Paulo: Do propósito!
Maíra: Eu acho que no 6º ano...
[...]
Otávio: Eu acho que a contagem seria possível...
Cecília: No nosso 6º ano eu não aplicaria!
Paulo: A contagem sim...
[...]
Cecília: Eu acho que nos oitavos anos, aí eles já...
[...]
Maíra: Eu não usaria x, eu usaria f (de flores)... (referindo-se à variável)
Paulo: Tudo depende da série com que você trabalha, né?....
[...]
Otávio: No 1º ano se poderia trabalhar funções...

Pode se notar que os professores estavam relacionando o problema trabalhado às suas salas de aula. Quando a Profa. Maíra pensou em usar *f* (de flores) ao invés de *x*, ela estava tomando um cuidado com a representação algébrica, ao construir a ideia de variável, que ocorre no 6º ano do Ensino Fundamental. O Prof. Otávio, mais acostumado a trabalhar com os alunos do Ensino Médio já pensou em trabalhar no 1º ano, estendendo o problema e trabalhando também a Álgebra Funcional.

Ao propor o mesmo problema para os futuros professores de Matemática, antes de resolvê-lo eles discutiram para que série seria adequado. Houve um consenso de que ele poderia ser trabalhado em diferentes anos, desde o 6º e 7º anos, caso utilizada apenas uma abordagem aritmética.

Para resolver o problema, como eram apenas três participantes (Aline, Fernanda e Juliana), os futuros professores formaram um único grupo. Eles resolveram o problema sem dificuldades. Inicialmente, cuidou-se dos dados do problema e de sua interpretação. Em seguida, os futuros professores completaram a tabela.

Durante a plenária, as três participantes foram questionadas se o problema poderia ser trabalhado no Ensino Médio e de que forma. Seria essa uma situação envolvendo combinação?

Juliana: Dá! Eu tinha pensando como combinação!
Pesquisadora: Isso é uma combinação? O que é uma combinação?
[...]

Elas foram questionadas, então, pela *PP* se o uso da fórmula da combinação conhecida por elas chegaria aos mesmos valores obtidos na tabela. Fernanda disse que não se lembrava direito do assunto. Aline afirmou que não. Juliana disse que elas, como estudantes de um curso superior de Matemática, deveriam saber, mas que não haviam revisto na faculdade esse conteúdo. O grupo lembrou que a fórmula da combinação é:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Aline lembrou-se que as comissões são exemplos de combinação, em que a ordem não importa:

Juliana: A combinação é diferente do arranjo porque você exclui a repetição...
Fernanda: É... aqui você tem a repetição, eu vou ganhar dela e vou ganhar sua!
[...]
Aline: A combinação não leva em conta a ordem!...
Juliana: A combinação não...
Aline: Então eu acho que seria um arranjo! [...]

Aline tinha certeza de que se tratava de um arranjo, mas não defendeu sua ideia. No encontro seguinte, retomou-se essa discussão e formalizou-se o problema como sendo uma situação de arranjo.

No arranjo, a natureza e a ordem dos elementos importam. O número de arranjos simples de *n* elementos tomados p a p é dado por $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

As futuras professoras destacaram que discussões como essa seriam necessárias no Ensino Médio para que os alunos percebessem a diferença conceitual entre arranjo e combinação. Elas concluíram, assim, que esse problema seria adequado também para esse nível de escolaridade.

O Problema 2

(Tinoco, 2011, p. 56) Dona Solange fabrica bombons caseiros e os vende em caixas decoradas. Em cada caixa ela coloca 6 bombons e as vende por R$ 4,00. Complete as tabelas a seguir.

Número de caixas	**Número total de bombons**
1	
7	
12	
30	

Número de caixas vendidas	**Quantia recebida com a venda**
1	
6	
20	
50	

a) Qual a relação que existe entre o número de caixas e o de bombons nelas contidos?

b) Escreva uma igualdade que represente essa relação.

c) Qual a expressão que representa a quantia recebida por D. Solange pela venda de um número qualquer de caixas de bombons?

Ao trabalhar esse problema na formação de professores pretendia-se explorar a Álgebra Funcional e discutir a ideia de variável dependente e independente.

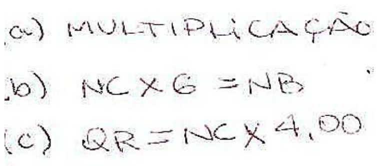
Os professores em exercício, ao trabalharem este problema, estavam nos mesmos grupos formados para discutir o problema 1, G1 (Cecília, Otávio e Paulo) e G2 (Carlos, Maíra e Maria). Do mesmo modo, G1, que era bastante comunicativo, leu o problema, discutiu e foi completando a tabela proposta:

Otávio: Vendeu uma caixa...
Paulo: Vezes 6 [...]

Otávio: Número de caixas vendidas e valor recebido... aqui é por 4 (a multiplicação), né?
Cecília e Paulo: É...
Otávio: Qual a relação entre o número de caixas e o número de bombons nelas contidos?... É multiplicação, né?...
Paulo: É... princípio multiplicativo...
[...]
Otávio: Ele (o problema) tá falando a relação entre o número de caixas e o número de bombons... é vezes 6, né... não é isso aí?...[...] A relação que existe entre o número de caixas... se a gente quiser falar do número de caixas vezes 6... é igual ao número de bombons.
Paulo: É o número de caixas multiplicado por 6!
Cecília: É!
[...]
Otávio: A relação é a seguinte: que o número de caixas é o total de bombons dividido por 6...
Cecília: Por que dividido por 6?
Otávio: Porque é o seguinte: os bombons, na verdade, sempre (de grupos) de 6 e o número de caixas depende da quantidade total de bombons que você tem.

Ao observar a resolução do problema, na figura 10 pode-se notar que G1 não se preocupou em definir as variáveis que utilizaram. Nesse caso, N_c representa o número de caixas, N_b é o número de bombons nelas contidos e Q_R é a quantia recebida pela venda. Além disso, o grupo pensou na operação realizada e não na relação de que uma caixa contem 6 bombons ou ainda na razão representada.

Figura 8 - Resolução do problema da D. Solange pelo Grupo 1



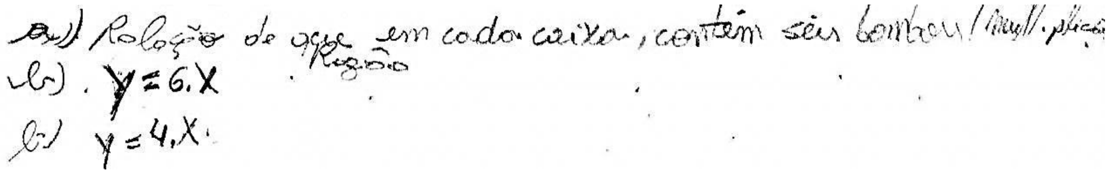
Fonte: Dados da pesquisa

G2 apresentou menos interações entre os participantes do grupo. Os integrantes iam resolvendo e apenas tiravam algumas dúvidas entre si.

Maria: O número de bombons vai ser 6 vezes o número de...
Maíra: De caixas....
[...]
Maíra: A palavra relação tem vários significados... Você pode pensar numa relação matemática ou relação só o que tem a ver uma coisa com a outra...

Diante dessa dúvida, Maíra se dirigiu à *PP* e questionou a que relação o problema se referia. A *PP* perguntou se já haviam discutido essa questão entre eles e como a resposta foi negativa, pediu para que o fizessem. G2 percebeu que se tratava de uma relação matemática e apresentou a seguinte resolução para o problema:

Figura 9 - Resolução do problema da D. Solange pelo Grupo2.


a) Relação de que em cada caixa, contém seis bombons / Multiplicação
Razão
b) . $y = 6.X$
c) $y = 4.X$

Fonte: Dados da pesquisa

Pode-se destacar que, novamente, os professores não se preocuparam em definir as variáveis, principalmente, nesse caso, em que usaram as mesmas variáveis para representar grandezas diferentes. No item *b*, *y* é o número total de bombons e *x* é o número de caixas; no item *c*, *x* é o número de caixas vendidas e *y* representa a quantia recebida com a venda.

Durante a plenária, os professores formaram um grupão. Concluiu-se que esse problema seria possível de ser trabalhado desde o 6º ano, enfatizando a contagem. No Ensino Médio, o problema poderia abordar funções ou, ainda, explorar progressões aritméticas.

Discutiu-se, também, o que seria uma relação. Os professores demonstraram insegurança em relação a essa palavra ao resolverem esse problema. A *PP* ressaltou que essa relação é uma razão, uma comparação multiplicativa entre duas grandezas e, nesse caso, comparar o número de caixas com o número de bombons.

$$\frac{Número\ de\ caixas}{Número\ de\ bombons} = \frac{1}{6}$$

Destacou-se com esse problema, a necessidade de os professores discutirem com os alunos a ideia de variável dependente e de variável independente:

<u>Otávio</u>: Achei interessante... Porque aqui a questão da variável, dependente e independente, dá pra deixar bem claro. Você tá trabalhando bombons só com valores inteiros, ela não vai vender meio bombom, né? Então, por exemplo, você não vai ter aqui... desse número total de bombons, você não vai ter 25. Então eu acho legal a gente colocar a questão da dependência! Porque o total de bombons está de fato em função das caixas e da quantidade em cada uma né?... Então você sempre vai ter um múltiplo de 6, nesse caso. Então fica claro que a quantidade de bombons é o dependente... Agora, caixas você vai tratar de números inteiros, você pode ter 1, 2, 3, 4 caixas... você pode escolher qualquer um deles. Já não acontece com o número total de bombons. Ele depende da primeira escolha, né?... [...]

O grupo dos futuros professores de Matemática, formado por Aline, Fernanda e Juliana, não apresentou dificuldades para resolver o problema e a discussão decorrente dele foi muito interessante. No problema em questão, Juliana esclareceu que o número de bombons estava em função do número de caixas e o grupo percebeu também que, se fosse ao contrário, só faria sentido se o número de bombons produzidos fosse sempre um múltiplo de seis.

Quanto ao item a, nenhuma das alunas escreveu a razão $\frac{1}{6} = \frac{número\ de\ caixas}{número\ de\ bombons}$. Discutiu-se o significado de comparar duas grandezas:

Pesquisadora: O que é uma grandeza?
[...]
Fernanda: É a incógnita que você tá mexendo...
Aline: Um exemplo é uma medida...
Juliana: Uma grandeza é uma incógnita?
Pesquisadora: Pode até ser... mas grandeza é tudo aquilo que pode ser medido.
Aline: Então as grandezas são o número de caixas e o número de bombons?
Pesquisadora: Isso [...] e quando eu comparo essas duas grandezas o que eu tenho?... Estou fazendo uma comparação multiplicativa entre duas grandezas. Isso é o conceito de quê?
Juliana: Isso é o conceito de equação?
Pesquisadora: Não!
Juliana: É de função? Não...
Pesquisadora: Nós estamos falando assim: $\frac{Nº\ de\ caixas}{Nº\ de\ bombons} = \frac{1}{6}$ e isso aqui é o quê?
Fernanda: Uma razão?
Pesquisadora: Isso! A razão nada mais é do que uma comparação multiplicativa entre duas grandezas [...]

Quanto ao item b, o grupo não teve dificuldade para responder que $N_b = 6.N_c$, onde N_c (Número de Caixas) é a variável independente e N_b (Número de Bombons) é a variável dependente.

O item c também foi respondido corretamente pelo grupo: $Q = R\$4{,}00.c$, onde Q é o valor recebido pela venda de c caixas.

Nesse sentido, destacou-se o conceito de variável. Para Caraça (2003), ao introduzir o conceito de variável, foi possível criar-se uma representação simbólica para conjuntos, deixando-se de tomar apenas resultados particulares.

> Quando dizemos, por exemplo: Seja *E* o conjunto dos números reais do intervalo (0,1), e seja *x* a sua variável, que queremos significar? Que o símbolo *x*, sem coincidir individualmente com nenhum dos números reais desse intervalo, é susceptível de os representar a todos; é, afinal, o símbolo da vida colectiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela. (CARAÇA, 2003, p. 120).

Assim, é possível perceber a importância da Álgebra para elaborar modelos matemáticos. Destaca-se também que o conceito de variável deve ser construído, com os alunos, sendo esse um conceito fundamental:

> Variáveis são essenciais em álgebra. Elas fornecem a ferramenta algébrica para expressar generalizações. Mas, o conceito de variável é mais sofisticado do que nós frequentemente reconhecemos e frequentemente acaba por ser o conceito que bloqueia o sucesso dos alunos em álgebra. Os alunos precisam sentir-se confortáveis com variáveis em contextos numéricos antes de eles começarem um estudo formal da álgebra. (LEITZEL, 1989, p. 29).

Foi possível perceber a variedade de encaminhamentos dados aos problemas pelos participantes e como os problemas podem ser estendidos ao longo das diferentes séries. Foi necessário apelar sempre para os PCNs ao referir-se ao currículo da Educação Básica, visto que os integrantes do grupo apresentavam um saber disciplinar desvinculado da experiência de sala de aula.

O Problema 3

(Livro Bianchini, 7º ano, 2006, p. 124). Observe esta balança:

Sabendo que cada manga tem 300g, calcule quantos gramas tem uma laranja.

O problema das balanças foi resolvido por G1 e G2, dos professores em exercício, utilizando a Álgebra. A partir dos dados do problema, eles usaram uma equação e obtiveram a massa da laranja.

Figura 10 – Resolução do problema 3 pelo grupo 1

$$4\ell+2m+200=2\ell+m+1000$$
$$4\ell+2\cdot 300+200=2\ell+300+1000$$
$$4\ell+600+200=2\ell+300+1000$$
$$4\ell+800=2\ell+1300$$
$$4\ell-2\ell=1300-800$$
$$2\ell=500 \Rightarrow \ell=250g$$

Fonte: Dados da pesquisa

Pode-se notar que, novamente, não identificaram a que grandezas correspondiam as incógnitas utilizadas e não utilizaram as unidades de medida enquanto resolviam o problema. Ao se solicitar que buscassem outras maneiras de resolver o mesmo problema, o professor Paulo, do G1, usou a seguinte estratégia:

Paulo: Eu já fui eliminando aí... cortando uma laranjinha (de cada lado)...
Otávio: Na verdade, vamos simplificar o pensamento então: tira uma manga daqui e uma daqui (dos dois lados da equação), duas laranjas...
Paulo: Eu tirei os 200 (gramas) também...
Otávio: A manga já pesa 300 gramas... então aqui 300*g* tira daqui [...] Isso dá pra resolver sem Álgebra...
Paulo: Dá... raciocínio puro! Isso que eles não fazem!

A resolução apresentada por Paulo e Otávio explora a noção de igualdade em uma equação, sendo que as operações realizadas em um dos termos da equação também devem ser feitas no outro. O Prof. Paulo apoiou-se em sua prática de sala de aula e conjecturou que os alunos não usam o raciocínio para resolver problemas como esse. O Prof. Otávio defendeu o uso da ideia de balança para trabalhar equação:

Otávio: Eu vejo que, ao trabalhar com equilíbrio, o aluno acaba evitando um erro seríssimo... por que quando você fala assim para o aluno: “Você vai trabalhar com os opostos... se você está adicionando, então você trabalha com a subtração e se você está multiplicando, a operação inversa é a divisão...” Agora, se você está dividindo tem que multiplicar sempre pelo mesmo valor!(diferente de zero). Por que é comum acontecer o seguinte: Se está negativo, então na hora de passar prá cá (se referindo a subtrair o mesmo valor dos dois membros da equação) tem que mudar de sinal. .. então na hora de multiplicar e dividir a pessoa cai na tentação de colocar o sinal (de menos).

Ao ser questionado pela PP, o Prof. Otávio referia-se ao erro de alunos que, ao resolverem uma equação como, por exemplo, $10x-1=29$, não utilizam a noção de igualdade entre dois termos e fazem:

$$10x - 1 = 29$$
$$10x = 29 + 1$$
$$10x = 30$$
$$x = \frac{30}{-10} = -3$$

Sendo que a resolução correta, ao utilizarem a ideia de igualdade de uma balança, seria:

$$10x - 1 = 29$$
$$10x - 1 + 1 = 29 + 1$$
$$10x = 30$$
$$\frac{10}{10}x = \frac{30}{10}$$
$$x = 3$$

Ao trabalhar esse problema com os futuros professores, eles estavam divididos em dois grupos: G3 (Aline, Camila e Vítor) e G4 (Felipe e Fernanda). Durante a discussão desse problema, Felipe foi à lousa e explicou como havia pensado:

$$4l + 2m + 200 = 2l + m + 1000$$
$$4l + 2.300 + 200 = 2l + 300 + 1000$$
$$2l + 800 = 1300$$
$$l = 250$$

A *PP* questionou os futuros professores sobre como explicariam aos alunos o que foi feito na passagem da 2ª para a 3ª linha. Foi argumentado que muitos professores falam para o aluno deixar letra de um lado e número de outro, para "passar pra lá...".

<u>Felipe</u>: Então... para deixar as incógnitas de um lado e os números de outro... se ele tinha $4l$ de um lado + $800g$, vai ser igual a $2l$+$1300g$. Então a gente vai achar o peso de uma laranja só... teria aqui, no caso, que isolar a laranja do peso [...]
<u>Fernanda</u>: Eu explicaria isso que ele falou... mas eu complementaria assim: a gente precisa tirar a incógnita laranja de um lado para que ela seja apenas visível do outro lado... o que zeraria duas laranjas de um lado para que isso sumisse? Tentaria induzi-lo a pensar que se ele tirar 2 laranjas de um lugar que tem $2l$, ele perde o que ele tá fazendo... então aqui ele subtrairia 2 laranjas e como é uma igualdade, se ele faz de um lado, ele faz do outro. Então, por isso, é que sairia $2l$ de um lado e subtrairia o $2l$ do outro...
<u>Felipe</u>: E do mesmo jeito o $800g$!

<u>Fernanda</u>: E do mesmo jeito o $800g$…

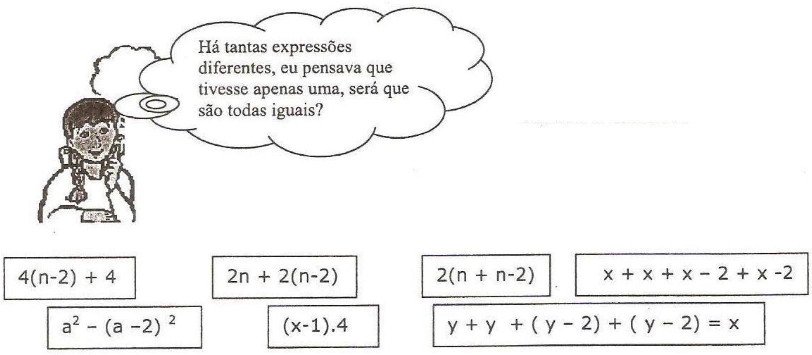
Na formalização foi chamada a atenção para as unidades de medida, que deveriam ser inseridas ao longo da equação. Outro caso discutido foi o de investigar o que aconteceria se a equação não apresentasse o valor de cada manga, o que geraria um <u>parâmetro livre</u>.

Um parâmetro é uma variável para a qual se atribui um valor e por seu intermédio se definem outros valores ou funções.

Nesse caso, o valor da massa da laranja ficaria em função desse parâmetro livre que representaria a massa da manga.

O Problema 4

(Adaptado de Tinoco, 2011, p. 62)

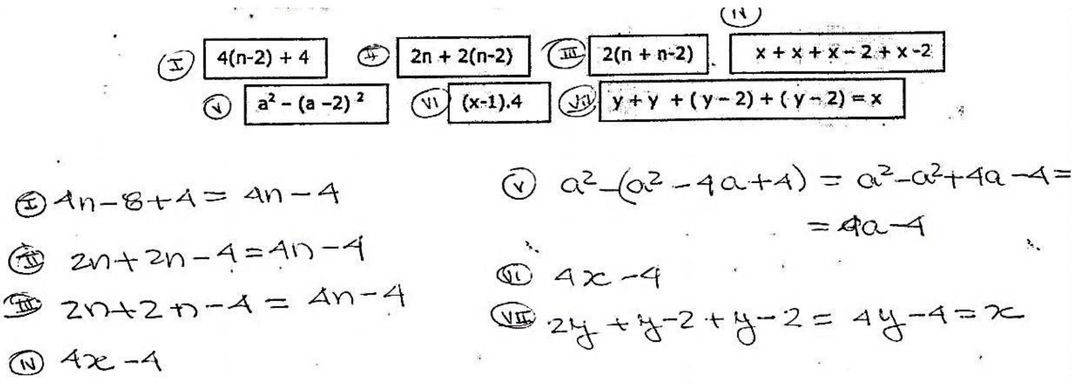


O problema dessas expressões algébricas gerou dúvidas quando foram levantadas as seguintes questões:

- A variável nas diversas expressões precisaria ser, necessariamente, representada pela mesma letra?
- Uma equação algébrica pode ser considerada equivalente a uma expressão algébrica?

No tocante a esse problema, o G1, dos professores em exercício, apresentou a seguinte resolução:

Figura 11 – Resolução do problema 4 pelo grupo 1



Depois dessa exposição, o grupo foi questionado pela *PP* se todas as expressões apresentadas poderiam ser consideradas equivalentes. Antes dessa discussão, o Professor Paulo considerou que usar letras diferentes para representar as mesmas expressões poderia confundir o aluno:

Paulo: Mas aí você pode confundir o aluno... Porque quando ele fala assim "O valor de n..." Tem valor? Tem! Se for uma variável... e, se for na equação tem um único valor. Na (como) variável ele pode ter inúmeros valores. Aí, como eu posso falar que esse *x* e esse *n* têm o mesmo valor se são letras diferentes (que podem se referir a coisas diferentes)? Então, na cabeça dele (do aluno) isso aí pode não ficar bem definido...
Pesquisadora: Na verdade, a gente deveria trabalhar, ao introduzir essas ideias, que não importa que nome seja dado à variável, pois ela vai seguir a mesma estrutura. Aqui, não importa se é $4n + 2$ ou se é $4x + 2$. Nesse caso, o x ou o n só está representando aquela variável, representando coisas de mesma natureza.

Em relação à problematização da questão, se todas as expressões são iguais no problema 4, o professor Otávio questionou:

Otávio: Então... eu não sei... aqui tem um errinho de conceito ou não? Porque ele tá chamando uma equação de expressão...

Após essa intervenção de Otávio, os professores em exercício retomaram a definição de equação e de expressão algébrica. Eles concluíram que uma expressão algébrica é composta por letras e números que representam um modelo matemático, enquanto que uma equação é uma igualdade entre dois termos. Dessa forma, afirmaram que de (I) a (VI) as expressões são equivalentes e que em (VII) tem-se uma equação. Uma equação algébrica não pode ser considerada equivalente a uma expressão algébrica.

Ao apresentar e discutir esse mesmo problema com os futuros professores de Matemática, eles questionaram a diferença entre a equação $y + y + (y - 2) + (y - 2) = x$ e as demais expressões:

Pesquisadora: Neste problema, a que vocês chegaram?
Juliana: $4n - 4$.
Pesquisadora: $4n - 4$? Todo mundo chegou nisso? (Afirmam positivamente com a cabeça) Qual seria a principal dúvida do aluno nesse problema?
Fernanda: Na verdade, na última $(y + y + (y - 2) + (y - 2) = x)$ não é uma expressão... é uma equação!
Pesquisadora: Qual a diferença entre equação e expressão?
Fernanda: A expressão eu não enxergo como igualdade [...] está apenas expressando uma generalização de alguma coisa, sei lá! Então, todas as expressões são equivalentes, mas a última como eu não considero expressão e, por ter uma igualdade, então, ela é uma equação. Ela não é igual a nenhuma outra, nenhuma das anteriores! Tanto é que $4y - 4 = x$... nenhuma das outras tem o igual ou tem duas variáveis...

Ao final da discussão, retomaram-se as ideias trabalhadas e diferenciaram-se as definições de equação e de expressão, de modo análogo ao que ocorreu com os professores de Matemática em exercício. Muitos questionamentos ocorreram durante a resolução do problema mas não houve tempo hábil para discuti-los de modo mais aprofundado.

O problema 5

Simplifique a expressão $\frac{2x+14}{x^2-49}$

A expressão $\frac{2x+14}{x^2-49}$ gerou dúvidas quanto à necessidade de se colocar uma condição de existência para a fração algébrica. Os professores em exercício foram buscar nos livros didáticos como essa questão é tratada. Todos procuraram entender, inicialmente, o significado de “condição de existência”, entendo-se por isso não haver, no conjunto dos Números Reais, divisão por zero, nem radical de índice par de radicando negativo.

Maíra: Mas na simplificação é importante o $x \neq \pm 7$ aqui...se não, não iria poder cancelar, se o x não fosse...
Otávio: É! Senão você iria estar dividindo por zero, né?

Resolvendo o problema, o grupo concluiu que:

Como $x^2 - 49 \neq 0$, já que está no denominador, então $x \neq 7 \; ou \; x \neq -7$. A expressão $2x + 14$ pode ser escrita como $2(x + 7)$. Desse modo:

$$\frac{2x+14}{x^2-49} = \frac{2\cancel{(x+7)}}{\cancel{(x+7)}.(x-7)} = \frac{2}{x-7}$$

(I) ***(II)*** ***(III)***

(I) será chamada de expressão algébrica original. Depois de fatorada, ela se apresentou na forma **(II)**, onde o fator *(x+7)* se apresenta no numerador e no denominador. Para simplificar essa expressão, é preciso que $x + 7 \neq 0$, ou seja, $x \neq -7$, resultando na forma **(III)**. Nessa forma simplificada a condição de existência seria $x \neq 7$.

Duas expressões racionais são *equivalentes* se elas apresentam o mesmo domínio. Assim, apesar do domínio da equação reduzida ser o conjunto dos reais com exceção de $x = 7$, acrescenta-se também a restrição para $x = -7$.

Os futuros professores não se preocuparam com a restrição do denominador. A *PP* ressaltou que a simplificação só seria possível, nesse caso, se o denominador fosse diferente de zero. Assim, a condição de existência para essa fração algébrica original é que $x \neq \pm 7$.

Em seguida, o grupo foi questionado sobre quais dificuldades poderiam ser encontradas pelos alunos ao resolver esse problema e por que se ensina fatoração:

Fernanda: Eu acho que esse (problema) chega a ser mais difícil que o de cima, porque aplicar a distributiva pro aluno não é tão difícil [...]. Agora, enxergar isso aqui como produto (notável) é difícil... daí você tem que destacar que o 14 e o 49 têm alguma coisa envolvendo o 7. Então, você tem que olhar o de cima (numerador) com alguma coisa envolvendo o 7 e embaixo (denominador) com alguma coisa envolvendo o 7 pra você cancelar...
[...]
Juliana: Acho que é muito mais difícil... colocar em evidência...
Pesquisadora: E qual a grande vantagem da fatoração? Por que a gente usa uma fatoração?
Juliana: Pra resolver limite... (rs)
Pesquisadora: Mas, na Educação Básica... por que se ensina fatoração?
Juliana: Eu não lembro...
Pesquisadora: Pensa no limite... qual a grande vantagem em fatorar?
Camila: Ela vai simplificar!
Felipe: [...] de certa forma fica mais fácil...
Juliana: Porque, às vezes, você não pode trocar o valor direto (no limite) e daí você fala "E agora? Tenho que ajeitar isso aí!..."
Pesquisadora: A grande "sacada" da fatoração é transformar uma soma em um produto e no produto vale a "lei do cancelamento"... eu posso cancelar e encontrar uma expressão... termo... mais simplificada para que eu possa aplicar o limite ou encontrar uma solução...

Os futuros professores de Matemática recordaram-se, visto que já se havia trabalhado os quatro blocos de conteúdo desse documento oficial, que os PCN não trazem, exclusivamente, um bloco de conteúdo referindo-se a Álgebra, apesar de sua complexidade.

Sobre o trabalho com Álgebra se pode evidenciar, principalmente nos problemas 4 e 5, algumas dúvidas conceituais dos professores e futuros professores (relação, expressões equivalentes, o uso de letras diferentes para a mesma incógnita, simplificação e condição de existência de uma expressão algébrica).

Os professores, apesar de trabalharem a álgebra por anos, não haviam refletido sobre as diversas "faces" da Álgebra. Não estavam seguros, no problema 4, que relações é o que importa na álgebra e não a letra que está sendo usada. Do mesmo modo aconteceu com o problema 5: é necessária uma condição de existência? As discussões promovidas pela resolução de problemas possibilitou que os professores aprendessem ou sanassem possíveis dúvidas em relação a esse conteúdo matemático. Eles também puderam aprender que o uso de problemas permite o trabalho com essas diversas faces da álgebra, contribuindo para um melhor aprendizado de seus alunos.

Ao tratar dos erros dos alunos da Educação Básica em Álgebra, indicados pelos professores e futuros professores, os grupos conheceram a pesquisa de Booth (1995). Realizada no Reino Unido. Essa pesquisa indicou que as dificuldades ou erros dos estudantes podem ter origem nas ideias dos alunos sobre aspectos como:

- O foco da atividade algébrica e a natureza das "respostas";

Para Booth (1995), "Em Aritmética, o foco da atividade é encontrar respostas numéricas particulares. (...) Na Álgebra, o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral". (p. 24). No entanto, muitos alunos continuam achando que devem fornecer uma resposta numérica.

Alguns obstáculos cognitivos identificados em pesquisas anteriores referem-se: à falta de "referencial numérico" no uso das letras pelo aluno (Davis, 1975; Wagner, 1981 *apud* Chalouh e Herscovics, 1995); à dificuldade dos alunos em "aceitar a ausência de fechamento" (Collins, 1975 *apud* Booth, 1995) ou ao "dilema nome-processo" (Davis, 1975 *ibidem*). No primeiro caso, se o aluno não vê as letras como representações de números, operá-las torna-se uma operação sem sentido. No segundo caso, as expressões algébricas parecem afirmações incompletas para o aluno. Em aritmética, $3 + 4$ pode ser substituído por 7; o mesmo não vale na Álgebra, $3x + 4y$ não corresponde a $7xy$. O último obstáculo identificado, o "dilema nome-processo", também se refere a uma diferença entre a Aritmética e Álgebra. Na primeira, $3 + 4$ é o problema e 7 é a resposta. Na Álgebra "$x + 3$" tanto descreve um processo (somar 3 com x) como dá nome à resposta.

- O uso da notação e da convenção em Álgebra;

Para Booth (1995), parte da dificuldade dos alunos em simplificar expressões como $2x + 5y$ refere-se à interpretação do símbolo operatório. A autora ressalta que, em Aritmética, os símbolos $+$ e $=$ indicam ações diferentes a serem efetuadas. O $+$ significa realizar a operação de juntar e o $=$ significa escrever a resposta. Em Álgebra, o $+$ pode indicar tanto uma adição como uma ação e o $=$ pode ser visto tanto como um indicador de equivalência quanto como um símbolo para resposta.

Outra dificuldade enfrentada pelos alunos é que, em Aritmética, a *justaposição* de dois números é aditiva ($43 = 40 + 3$), enquanto que na Álgebra ela é multiplicativa ($4b = 4.b$).

- O significado das letras e das variáveis;

Em Aritmética, as letras são usadas para indicar unidades de medida (Como por exemplo, 3 metros indicam-se por $3m$) e as quantidades sempre significam valores únicos. Em Álgebra, $3m$ pode representar um número qualquer. Surge a ideia de variável.

- Os tipos de relações e métodos usados em aritmética.

A autora destaca que os alunos usam de modo inadequado os parênteses em Aritmética e isso também ocorre na Álgebra.

Os métodos informais usados em Aritmética também podem ter implicações em Álgebra. Se o aluno, por exemplo, não utiliza a noção de adição para fazer $22 + 34$ e realiza um processo de contagem, provavelmente não representará o número total de elementos de dois conjuntos x e y por $x + y$.

Após a apresentação do trabalho de Booth (1995), a *PP* resgatou as quatro "faces" da Álgebra trabalhadas e que, muitas vezes, se misturam em um mesmo problema.

6.1.2 As diferentes "personalidades" dos Números Racionais

Ao trabalhar esse conteúdo matemático na formação de professores, pretendia-se que eles percebessem que a mesma barra fracionária pode representar diferentes situações assumidas pelos Números Racionais. Dependendo do problema, o Número Racional pode se apresentar como ponto racional, quociente, fração, operador multiplicativo ou razão, assumindo, desse modo, diferentes personalidades.

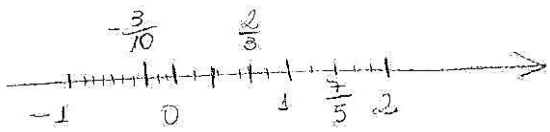
Cada um dos problemas trababalhados sobre esse conteúdo buscou abordar uma das personalidades referidas acima.

O Problema 1

Localizar os números $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{5}$ e $\frac{-3}{10}$ na reta.

Ao trabalhar o problema 1, com os professores em exercício, a maioria deles dividiu a unidade na reta pela quantidade indicada no denominador, tomando o que era indicado pelo numerador:

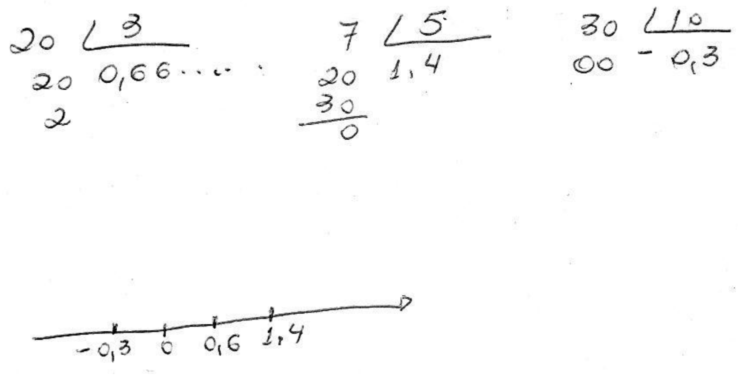
Figura 12 - Resolução do problema 1, do 8º encontro, pela Profa. Maíra



Fonte: Dados da pesquisa

Uma das professoras transformou o Número Racional em um Número Decimal e colocou esse valor aproximado na reta:

Figura 13- Resolução do problema 1, do 8º encontro, pela Profa. Cecília



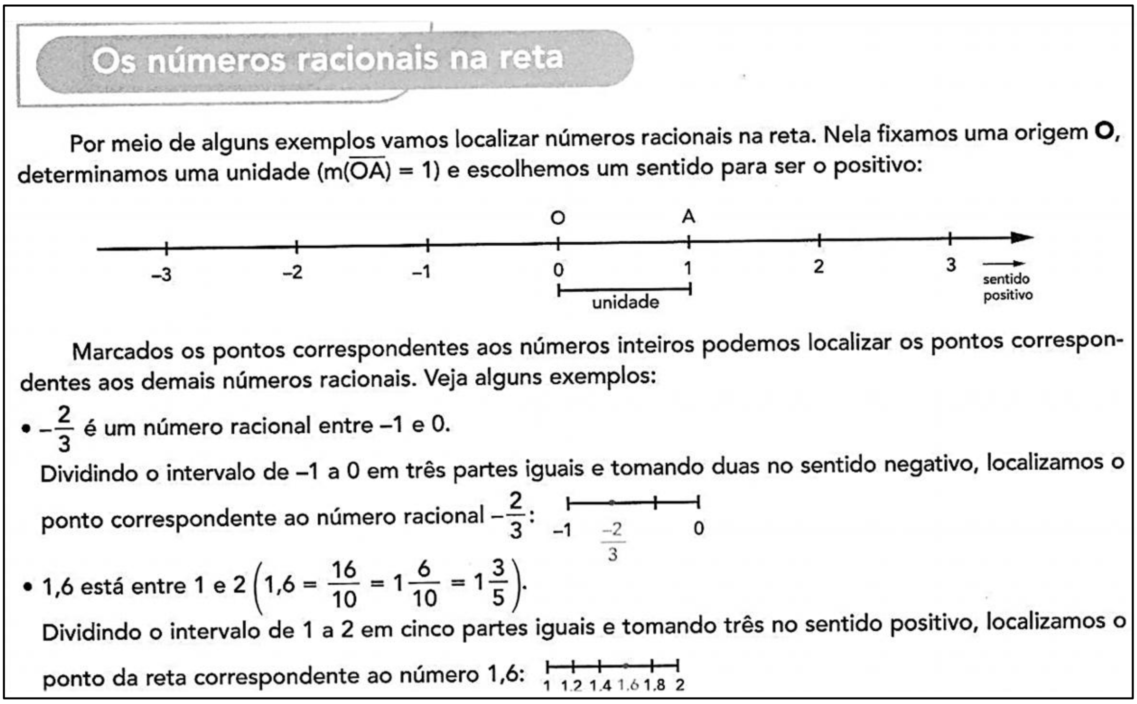
Fonte: Dados da pesquisa

A leitura do texto possibilitou que a professora se questionasse se estava ensinando errado pois, de acordo com ela, muitos livros didáticos fazem isso.

Cecília: Mas então volta... por que senão eu tô ensinando errado!!! Porque eu tenho a paciência... de quando pego uma classe para ensinar Número Racional eu faço isso! “Vamos transformar em decimal para colocar na reta...” Por que os exercícios nos livros didáticos vêm assim... nenhum livro... eu, pelo menos, não peguei nenhum livro que fala “Você pega aqui... nós vamos dividir em tantas partes e pegar tantas”...
Pesquisadora: [...] Na localização de pontos na reta deveria ficar claro que 0,666 é uma aproximação (de 0,666...), ele não é o mesmo ponto!
[...]
Cecília: Mas eu concordo que a ideia é essa, mas eu fiz pensando no aluno [...] e eu não tô entendendo o que você tá falando aí... por que como que eu vou passar isso pro aluno então? Ele não vai fazer...
Maíra: Se você passar pro aluno que ele tem que fazer 2 dividido por 3, aí ele vai pegar o ponto 0,6 pra localizar na reta e esse é um conceito errado!
Paulo: Errado...!
Maíra: É errado isso. O que tem que fazer é pegar uma unidade dividir em 3 partes iguais e tomar 2 pedaços. A ideia é essa... [...] cada unidade, cada pedacinho da reta é (pode ser?) uma unidade [...]

Quando o grupo consultou alguns livros didáticos sobre como eles recomendam a localização de um Número Racional na reta, encontrou-se que:

Figura 14 – Orientação sobre como localizar um Número Racional na reta numérica, do livro *Tudo é Matemática*



Os números racionais na reta

Por meio de alguns exemplos vamos localizar números racionais na reta. Nela fixamos uma origem **O**, determinamos uma unidade ($m(\overline{OA}) = 1$) e escolhemos um sentido para ser o positivo:

Marcados os pontos correspondentes aos números inteiros podemos localizar os pontos correspondentes aos demais números racionais. Veja alguns exemplos:

- $-\frac{2}{3}$ é um número racional entre –1 e 0.

  Dividindo o intervalo de –1 a 0 em três partes iguais e tomando duas no sentido negativo, localizamos o ponto correspondente ao número racional $-\frac{2}{3}$:

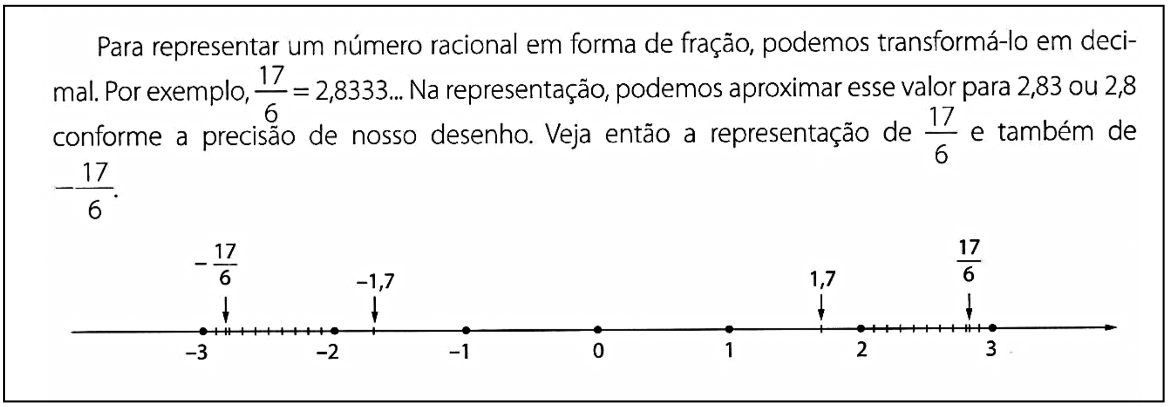
- 1,6 está entre 1 e 2 $\left(1{,}6 = \frac{16}{10} = 1\frac{6}{10} = 1\frac{3}{5}\right)$.

  Dividindo o intervalo de 1 a 2 em cinco partes iguais e tomando três no sentido positivo, localizamos o ponto da reta correspondente ao número 1,6:

Fonte: Dante (2007, p. 58).

No livro *Tudo é Matemática*, de Luiz Roberto Dante, a orientação para a localização de pontos racionais na reta concidia com o que afirmavam os professores Maíra e Paulo. Porém, ao se consultar outros livros didáticos as orientações podem conduzir a erros conceituais por parte do professor, como na figura a seguir:

Figura 15 – Orientação sobre como localizar um Número Racional na reta numérica, do livro *Matemática na Medida Certa*



Para representar um número racional em forma de fração, podemos transformá-lo em decimal. Por exemplo, $\frac{17}{6} = 2{,}8333...$ Na representação, podemos aproximar esse valor para 2,83 ou 2,8 conforme a precisão de nosso desenho. Veja então a representação de $\frac{17}{6}$ e também de $-\frac{17}{6}$.

Fonte: Centurión e Jakubovic (2009, p. 76).

Pode-se notar que as orientações, apresentadas por este livro aos professores, não se preocuparam com o rigor matemático, já que 2,8333... não é o mesmo ponto que 2,83 ou 2,8. Apesar de isso ser aceitável no 7º ano, em anos posteriores tal orientação pode levar os alunos ao erro em anos escolares posteriores, com a introdução dos Números Irracionais.

Já no grupo de estudo dos futuros professores de Matemática, os dois participantes que estavam presentes no encontro sobre Números Racionais, ao resolverem esse problema fizeram:

Fernanda: Bom... eu desenhei a reta e marquei o zero. Daí [...] o que eu faria? [...] eu ia dividir 2 por 3, fazer a divisão 7 por 5 e -3 por 10 pra ver no decimal aonde ia estar na reta. Só que aí, eu tentei não pensar assim, eu tentei pensar só em fração [...] Então eu marquei o 1, peguei esse pedaço e dividi em 3 (partes) e peguei 2, então aqui seria o $\frac{2}{3}$. Aí, a mesma coisa aconteceu com o $-\frac{3}{10}$ ... é menos... então eu sei que vai estar do lado de cá (à esquerda do zero), é menor que 1. Aí, eu dividi em 10 (a unidade) e peguei 3 [...] Daí o $\frac{7}{5}$ ... eu pensei assim... $\frac{7}{5}$ eu posso ver como $\frac{5}{5}+\frac{2}{5}$. Então é maior que 1 e aí para esses $\frac{2}{5}$ ... eu dividi em 5 (a unidade) e peguei 2 [...]

Vítor pensou em deixar todos os números com um denominador comum e colocá-los na reta. Isso facilitaria, segundo ele, pois como os denominadores eram iguais bastaria observar o numerador. Possivelmente ele tenha pensado que, ao trabalhar com a mesma reta, bastaria encontrar o denominador comum (30), dividir a unidade em 30 partes e marcar quantos $\frac{1}{30}$ ele tomaria considerando-se os numeradores.

A primeira resolução proposta por Fernanda, a transformação da fração em um número decimal aproximado, não seria correta. O número $\frac{2}{3} \cong 0{,}66$ não é o mesmo ponto. No conjunto dos racionais, entre esses dois números existem infinitos outros.

Concluiu-se, assim, que a segunda estratégia apresentada por Fernanda seria a mais adequada: dividir a unidade pela quantidade de partes indicada pelo denominador e tomar a quantidade do numerador. Essa é uma situação em que a forma $\frac{a}{b}$ é vista como ponto na reta.

O Problema 2

Três pizzas devem ser divididas igualmente entre cinco pessoas. Quanto de pizza cada pessoa comerá?

A professora Cecília realizou o mesmo procedimento: dividiu 3 pizzas por 5 pessoas e assim cada uma recebeu 0,6 pizza. Os demais responderam $\frac{3}{5}$, mas não se preocuparam em escrever $\frac{3}{5}\ \frac{pizza}{pessoa}$.

A futura professora Fernanda respondeu*: $\frac{1}{5}$ de pizza para cada um de cada pizza. Como são 3 pizzas, seria $\frac{3}{5}$ (do total) isto é, $\frac{3}{5}$ de 3 pizzas.*

Vítor chegou ao mesmo resultado, mas pensou diferente: $\frac{3}{5}\ \frac{\rightarrow\ pizza}{\rightarrow\ pessoa}$

Cada pessoa irá comer 3 pedaços de pizzas, que serão divididas em 5 partes.

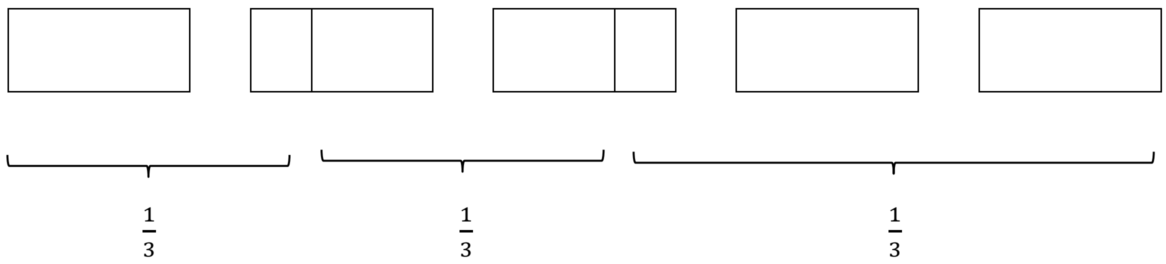
Nesse problema foi trabalhada outra personalidade do Número Racional, <u>o quociente</u>. Destacou-se que toda divisão no conjunto dos Racionais tem resto zero.

O Problema 3

Jô, Pat e Cris resolveram fazer um piquenique e combinaram levar sanduíches para o almoço. Jô levou 3 sanduíches, Pat levou 2 e Cris se esqueceu do combinado e não levou nenhum. Assim, resolveram repartir os sanduíches que tinham levado igualmente entre as três, mas cobraram de Cris R$5,00 por sua parte. Que parte dos R$5,00 recebeu Jô? E Pat?

Ao resolver esse problema, o futuro professor Vítor lembrou-se do livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan. Os conceitos abordados com o problema *As três divisões de Beremiz: a divisão simples, a divisão certa e a divisão perfeita* são as mesmas do problema 3.

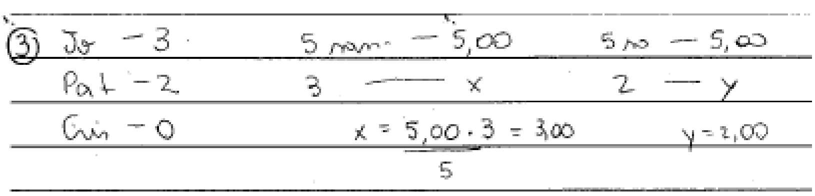
Vítor tentou resolver o problema de duas maneiras: Inicialmente, disse que cada uma deveria receber $\frac{1}{3}$ do total (dos 5 lanches). Afirmou que a cada $\frac{1}{3}$ corresponderia R$1,00 e fez, equivocadamente, a representação a seguir:



Percebeu que sua representação estava errada e não continuou a ideia de associar a cada $\frac{1}{3}$ do total dos sanduíches R$1,00. Considerou, então, que como Jô levou 3 sanduíches, contribuiu com $\frac{3}{5}$ do total e Pat com $\frac{2}{5}$. Como Cris levou R$5,00, Vítor calculou que $\frac{3}{5}\ de\ R\$5{,}00 = R\$3{,}00$, que seria a parte da Jô. Pat deveria receber R$2,00.

Fernanda fez uma regra de três e também chegou a esses valores:

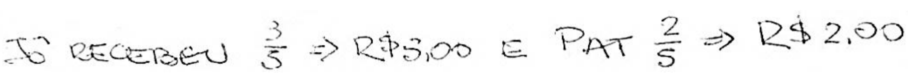
Figura 16 – Resolução do problema 3 por Fernanda



Fonte: Dados da pesquisa

Ao trabalhar esse problema com os professores em exercício, nenhum deles respondeu corretamente. Uma das professoras sugeriu que os R$5,00 fossem divididos em duas partes iguais. Os demais responderam que Jô recebeu R$3,00 e Pat recebeu R$2,00, como na figura a seguir:

Figura 17 - Resolução do problema 3 pelo Prof. Otávio



Fonte: Dados da pesquisa

Houve participação ativa de todos os professores para resolver o problema. No entanto, pôde-se notar a falta de atenção com a leitura cuidadosa e interpretação dos dados do problema. Eles foram questionados pela *PP* se a resposta que obtiveram faria sentido, se era justa matematicamente, essa solução. Em seguida, o problema foi lido e interpretado pelo grupo. Os dados foram analisados e discutiu-se o que seria uma divisão dos sanduíches em partes iguais.

A discussão do problema foi iniciada, interpretando a situação: Como Jô levou 3 sanduíches e Pat levou 2 sanduíches, o total obtido foi de 5 sanduíches. Em seguida, as meninas dividiram cada sanduíche em três partes iguais.

Depois de dividir os sanduíches em partes iguais, as meninas obtiveram 15 partes para serem divididas entre elas. O grupo foi questionado sobre quantas partes cada menina receberia e chegou-se à conclusão de que seria $\frac{5}{15}$. Em seguida, o grupo foi novamente questionado sobre o total de partes que Jô e Pat levaram. Jô levou 3 sanduíches, 9 pedaços e Pat levou 2 sanduíches, 6 pedaços. Eles concluíram, então, que se Jô levou 9 pedaços e comeu 5, então deu à Cris 4 pedaços. Pat que levou 2 sanduíches, no total de 6 pedaços, deu à Cris apenas 1 pedaço de sanduíche. Logo, Jô deveria receber R$4,00 e Pat apenas R$1,00.

Parte das discussões foi transcrita a seguir:

Pesquisadora: Vamos pensar na quantidade de sanduíches que cada uma levou. Então se a gente pegasse os 5 sanduíches, os colocasse na mesa e dividisse cada um em 3 partes iguais, a gente teria 15 partes. Se comeram igualmente, então quantas partes cada uma comeu?
Otávio: 5 partes!
Pesquisadora: Mas quantas partes de sanduíche cada uma levou? Se a Jô levou 3 sanduíches...
Maíra e Otávio: 9 pedaços...
Pesquisadora: 9 pedaços... e a outra 6 pedaços. Bom, mas se cada uma comeu 5 pedaços, quantos foram cedidos?
Maíra: Um só!
Maria: E a outra deu 4!
Pesquisadora: Então, matematicamente, o que seria justo?
Maíra: Uma teria que receber R$4,00 e a outra R$1,00!

Para formalizar o problema, o grupo sugeriu que fosse montada uma tabela para ilustrar o problema discutido:

Tabela 3 – Resolução do problema 3 durante sua formalização.

	Jô	Pat	Cris
Sanduíches que cada uma levou	3	2	0
Ao dividir cada sanduíche igualmente em 3 partes, com quantos pedaços do total cada uma contribuiu	$\frac{9}{15}$	$\frac{6}{15}$	0
Quantos pedaços do total cada uma comeu	$\frac{5}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{5}{15}$
Quantos pedaços sobraram para Cris	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	____

Fonte: Dados da pesquisa

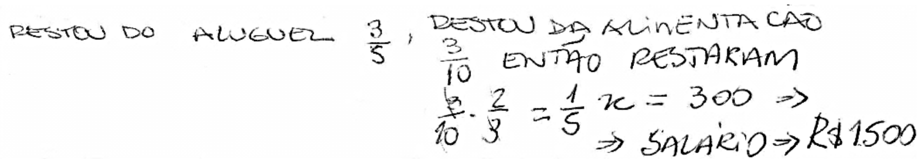
O Problema 4

> Do meu salário gastei $\frac{2}{5}$ com aluguel. Do que sobrou gastei metade com alimentação. Da segunda sobra coloquei $\frac{1}{3}$ na poupança. Restaram–me R$300,00. Qual é o valor do meu salário?

O grupo dos professores em exercício resolveu esse problema por meio da álgebra. Nenhum participante utilizou representação geométrica.

O professor Otávio utilizou o conceito de fração para facilitar seus cálculos, mas também desenvolveu um pensamento algébrico:

Figura 18 - Resolução do problema 4 pelo professor Otávio

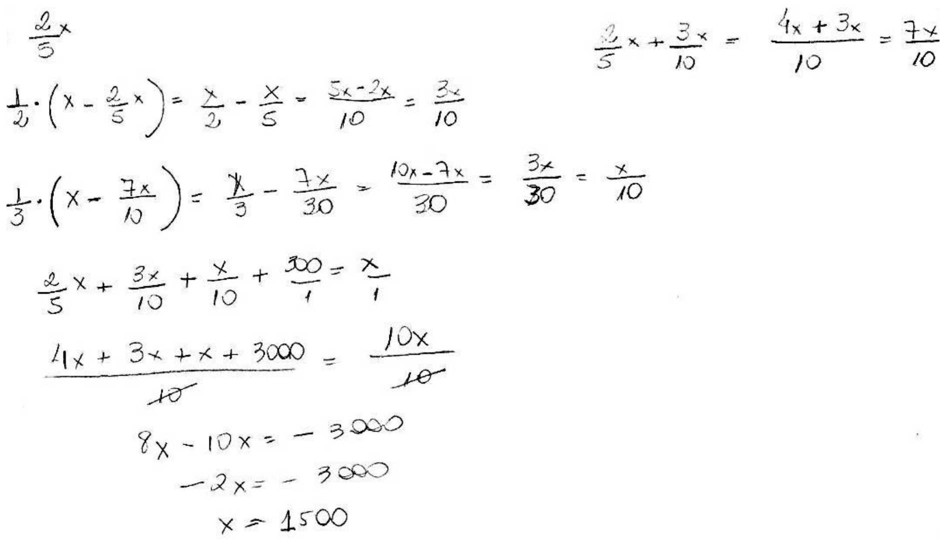


Fonte: Dados da pesquisa

O problema foi resolvido corretamente, embora o professor não tenha descrito suas formas de pensar ao exibir os procedimentos numéricos. A unidade de medida também foi acrescentada apenas no resultado do problema.

A professora Maíra desenvolveu todo o processo por meio da álgebra:

Figura 19 - Resolução do problema 4 pela profa. Maíra

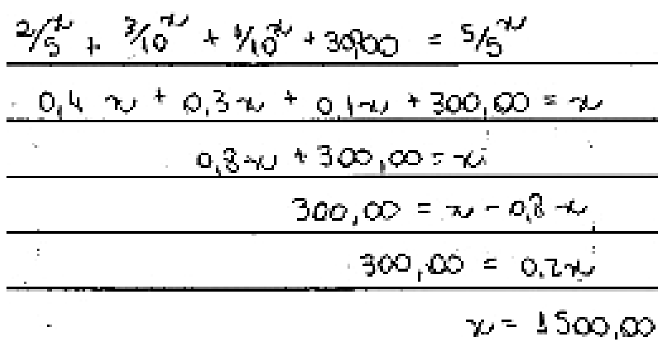


Fonte: Dados da pesquisa

Nessa resolução, a professora Maíra desenvolveu passo a passo os procedimentos cumprindo as “ordens do problema” e chegou à solução, embora dissesse que o salário era igual a 1500, um número puro. Além disso, ao encontrar o Mínimo Múltiplo Comum, na terceira linha, completou os denominadores com o número 1 ao invés de transformar em frações equivalentes.

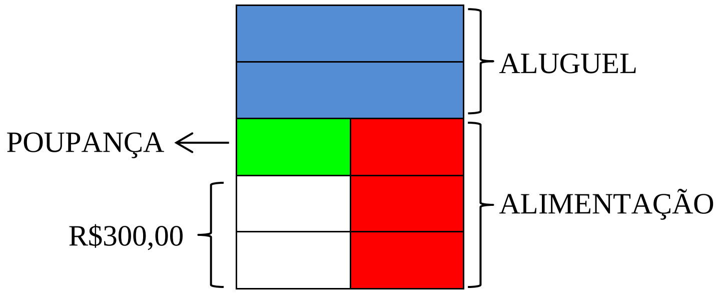
Os futuros professores resolveram o problema por meio da álgebra, de acordo com a figura a seguir:

Figura 20 – Resolução do problema 4 por Fernanda



Fonte: Dados da pesquisa

Como nenhum dos grupos procurou resolver esse problema com recursos da geometria, a *PP* desenvolveu essa forma de resolução, com eles. Para alunos de 6º ano, por exemplo, que não dominam a Álgebra, essa maneira de resolver o problema poderia ser apresentada.



Se $\frac{2}{10} = R\$300{,}00$, então $\frac{1}{10} = R\$150{,}00$ e o todo $\frac{10}{10}$, o salário, é R$1500,00.

É interessante destacar que as resoluções da Profa. Maíra e de Fernanda utilizaram a álgebra, mas a última pensou geometricamente para montar a equação algébrica, enquanto que a primeira trabalhou algebricamente desde o início.

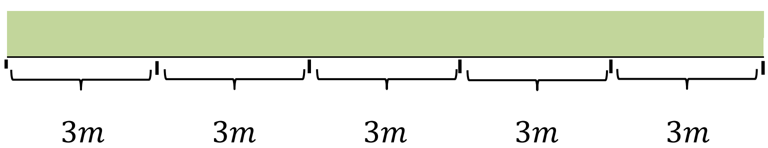
O Problema 5

Tenho 15m de tecido.

a. Quero cortá-lo em pedaços de 3 metros.
b. Quero cortá-lo em 5 partes iguais.

Qual é o resultado dessas ações? Qual é o significado de cada uma delas?

Ao trabalhar o problema 5, com os professores de Matemática em exercício, houve dificuldade por parte deles para resolver este problema. Apenas uma professora percebeu que as ações eram diferentes: ao cortar o tecido em pedaços de $3m$, ela pode contar 5 partes, 5 - um número puro; ao cortar em 5 partes iguais, obter-se-ia o tamanho da parte, isto é, $3m$. A professora Cecília fez a representação geométrica do problema:



A partir do item *a* desse problema, o grupo dos professores concluiu que o resultado de uma divisão quotitiva é o número de partes, a quota.

$$\begin{array}{r|l} 15\ m & 3m \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

$\frac{15\ m}{3m} = 5$, um número inteiro resultante de uma contagem.

A ação expressa no item *b* gera uma divisão partitiva, que tem como resultado o tamanho da parte.

$$\begin{array}{r|l} 15\ m & 3 \\ \hline 0 & 5m \end{array}$$

$\frac{15m}{5} = 3m$. Essa ação resulta numa situação de medida, um número real seguido da unidade de medida.

O grupo dos futuros professores também encontrou dificuldade para perceber a diferença entre as duas ações e, assim como no grupo dos professores, foram conduzidas pela *PP* por meio da discussão do problema:

<u>Fernanda</u>: Eu coloquei que o resultado é igual nas duas, mas o significado de cada uma é diferente. Quando eu quero cortar em pedaços de 3 metros, eu não me importo se vai sobrar tecido ou não... eu simplesmente vou cortar em pedaços de 3 metros...
<u>Pesquisadora</u>: E vai sobrar tecido?
<u>Fernanda</u>: Não! Não vai! Só que quando ele fala "Eu quero cortar em 5 partes iguais", ele exige que não sobre tecido [...]
[...]
<u>Vítor</u>: Na *a* ele quer saber quantas partes foram obtidas... e vai dar 5 **partes** iguais, não tem resto! E na *b* eu já sei quantos metros cada parte vai ter... 5 **pedaços** com 3 metros...

A partir da consideração feita por Vítor foi possível concluir que, na primeira situação, 5 partes seria um número puro, enquanto que "5 pedaços com 3 metros" representaria uma medida. A primeira situação estaria se tratando de uma divisão quotitiva e a segunda situação envolveria uma divisão partitiva. Se o problema apresentasse o comprimento de 15,20*m* para ser divido em pedaços de 3*m*, ter-se-ia uma divisão com resto e o resto, nesse caso, seria de 0,20*m* ou 20*cm*.

O Problema 6

Represente geometricamente $\frac{2}{3}$ de quatro maneiras diferentes.

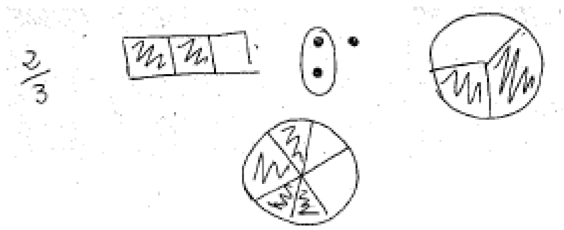
A personalidade do Número Racional envolvida neste problema é a de <u>operador multiplicativo.</u> Os professores indicaram que uma possível estratégia de seus alunos seria a utilização de diferentes desenhos, como na resolução a seguir:

Figura 21 - Resolução do problema 6 pelo professor Paulo

Fonte: Dados da pesquisa

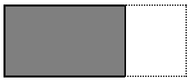
Os futuros professores Fernanda e Vítor, ao resolverem este problema, encontraram dificuldade em compreender o que seria representar geometricamente um número de maneiras diferentes. Utilizaram também, formas diferentes como círculos ou barrinhas para fazer a representação geométrica, mas perceberam que isso não seria uma representação diferente:

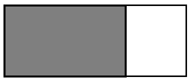
Figura 22 – Resolução do problema 6 por Fernanda

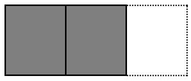


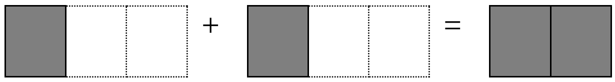
Fonte: Dados da pesquisa

A *PP* realizou intervenções, tanto no grupo dos professores em exercício quanto no grupo dos futuros professores de Matemática, apresentando-lhes os diversos modos de escrever, geometricamente, $\frac{2}{3}$. Essas representações se justificam pelo reconhecimento, em cada caso, de quem é o multiplicador e o multiplicando.

Assim, $\frac{2}{3} = 1.\frac{2}{3}$ 

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.1$ 

$\frac{2}{3} = 2.\frac{1}{3}$ 

$\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.2$ 

Antes de discutir a personalidade de Número Racional envolvida no problema 7, os professores foram questionados sobre a diferença entre os conceitos de razão e de fração. A professora Maria mostrou os símbolos : , / e — . Ela afirmou que a diferença estaria no jeito de escrever. Os dois pontos indicariam uma proporção, a barra inclinada significaria uma razão e a última barra representaria uma fração.

Pesquisadora: O que é uma proporção?
Otávio: Ah... uma proporção é uma relação entre dois elementos...
Maria: É uma razão....(rs)
Maíra: É uma relação parte-todo! Não, não é parte-todo...
Maria: Não, não é!
Pesquisadora: Vamos voltar... o que é uma razão?
Otávio: A razão, por definição, é o resultado da divisão... é o quociente....
Maíra: Ai... isso é muito difícil!
Maria: Eu tenho isso aí lá no meu carro...
Pesquisadora: São conceitos fundamentais que a gente tá voltando! É fácil usar a técnica, mas e o porquê?
Maria: Isso aqui é uma regrinha de curso técnico, eu tenho lá no meu carro... (impaciente)

Com os futuros professores também foi promovida uma discussão sobre os conceitos de razão e proporção:

Vítor: Eu nunca defini razão...
Fernanda: Uma comparação entre duas grandezas...
Pesquisadora: Uma comparação qualquer?
Fernanda: Humm... não sei!
Pesquisadora: E a proporção? O que é uma proporção?
Fernanda: É quando uma coisa cresce ou decresce linearmente... ela segue um padrão [...] existe um número que cada vez que eu aplicá-lo vai dar o mesmo resultado...
Pesquisadora: Uma constante?
Fernanda: É!

Pesquisadora: E pensando em termos de razão? Como você explicaria proporção em termos de razão? Porque a proporção vem da ideia de razão...

A partir da leitura do texto, em cada um dos grupos, a *PP* destacou que a razão é uma comparação multiplicativa entre duas grandezas. Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido. Já uma proporção é uma igualdade entre duas razões. Ficou combinado que esses conceitos seriam retomados através de problemas.

O Problema 7

Duas jarras iguais contêm misturas de álcool e água nas razões de $\frac{3}{5}$ (três para cinco), na primeira jarra e $\frac{3}{7}$ (três para sete) na segunda. Juntando-se os conteúdos das duas jarras qual será a razão entre álcool e água na mistura resultante?

Os professores de Matemática em exercício afirmaram que não conseguiram resolver o problema 7. Eles haviam tentado resolvê-lo através de desenhos e por meio do cálculo do Mínimo Múltiplo Comum, mas como não obtiveram sucesso desistiram.

Algo semelhante aconteceu com os futuros professores:

Vítor: Eu não pensei nesse...
Fernanda: [...] Eu entendi que ele tem uma razão de 3 para 5... então, a cada 3 gotas (partes) de álcool eu tenho 5 de água [...] só que pra resolver eu somei $\frac{3}{5}$ com $\frac{3}{7}$, deixei os denominadores iguais e deu $\frac{36}{35}$, mas aí eu até escrevi que está estranho porque nos dois a quantidade de álcool é menor que a quantidade de água... e por que quando eu somo os dois, a quantidade de álcool é maior? Pra mim, tá errado!...
Pesquisadora: Quando eu estou trabalhando com razão vale soma de fração? [...] Vale fazer m.m.c com razões?
Fernanda: Eu acho que não...
Vítor: Não!

A partir da discussão do problema 7, a *PP* mostrou aos dois grupos que a adição de razões não ocorre da mesma maneira que uma soma de frações. A adição de razões pode ser transformada em uma soma de vetores, a partir da soma de dois pares ordenados. Os participantes ficaram pensativos sobre o que estava sendo apresentado e afirmaram que nunca haviam trabalhado ou visto essa teoria.

Depois dessa discussão inicial, o problema foi trabalhado nos dois grupos. Foram propostos questionamentos que os foram conduzindo:

- O que o enunciado diz sobre o volume das jarras?

As jarras comportam quantidades iguais, ou seja, $V_1 = V_2$, onde V_1 é o volume da jarra 1 e V_2 é o volume da jarra 2.

Como na primeira jarra a razão é $\frac{3}{5}$, esse volume será considerado 8 litros.

- Como seria formada a mistura de álcool e água nas jarras, considerando que cada uma delas apresenta um volume de 8 litros?

Se $\frac{3}{7}$ é a razão da mistura na jarra 2, estes 8 litros são formados por 10 partes de 0,8*l* cada, das quais 3 partes = 2,4*l* são de álcool e 7 partes = 5,6*l* são de água.

- Como seria formada a mistura final de álcool e água, juntando-se os conteúdos das duas jarras?

Se $V_1 + V_2 = 16l$, dos quais 5,4*l* são de álcool (3*l* da jarra 1 + 2,4*l* da jarra 2) e 10,6*l* são de água (5*l* da jarra 1 + 5,6*l* da jarra 2), a razão entre álcool e água na mistura final será $\frac{5,4\cancel{l}}{10,6\cancel{l}} = \frac{54}{106} = \frac{27}{53}$ ou 27:53.

Por sua vez, considerando razões como vetores binários, elas podem ser adicionadas como pares ordenados. Assim,

$$(3;5) + (2,4;5,6) = (5,4;10,6)$$

e, utilizando a notação "barra fracionária", essa expressão seria escrita:

$$\frac{3}{5} + \frac{2,4}{5,6} = \frac{5,4}{10,6} = \frac{54}{106} = \frac{27}{53}$$

É possível notar, nessa visão, que esta forma de adicionar razões como Números Racionais é diferente da realizada como se fosse uma adição de frações.

O Problema 8

a. Teresa e Júlia correm numa pista à mesma velocidade. Teresa começa primeiro. Quando ela tinha acabado a nona volta, Júlia acabara a terceira. Quando Júlia completou 15 voltas, quantas voltas havia dado Teresa?

b. Se com 3 dólares podiam-se comprar duas libras esterlinas, quantas libras se poderiam adquirir com 21 dólares?

Ao trabalhar o problema 8, os professores de Matemática em exercício subdividiram-se nos dois subgrupos, G1 e G2. No item *a* os dois grupos responderam que Teresa havia dado 21 voltas. Entretanto, houve professores nos dois grupos que se manifestaram de outra forma. Cecília chegou à resposta correta, possivelmente motivada pela resposta do grupo e apresentou a seguinte resolução:

Figura 23 - Resolução do problema 8a pela profa. Cecília

Teresa → 9 volta → 3 em 3
Júlia → 3 voltas

3 - 6 - 9 - 12 - 15
0   3   6 voltas

então   15 voltas
\+ 6 voltas
21 voltas

Fonte: Dados da pesquisa

Como o problema envolvia uma comparação aditiva, eles perceberam que Teresa estava 6 voltas à frente de Júlia e que, como elas estavam à mesma velocidade, essa diferença se mantinha. Desse modo, como Júlia estava na 15ª volta, então Teresa estava na 21ª volta. De um modo bem simples, a profa. Maíra escreveu:

$15 + 6 = 21$

Os professores também foram questionados sobre qual estratégia seria mais comumente utilizada por seus alunos:

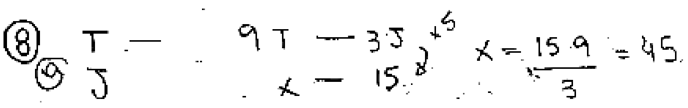
Maria: Eu fiz aqui, na minha folha... do aluno (como ele pensaria)... pensei assim: 9 para 3, 15 para x...
Pesquisadora: E fez o produto cruzado!
Maria: É... eu fiz!
Pesquisadora: Mas é uma proporcionalidade?... ou melhor: é uma comparação multiplicativa... voltas e ...
Todos: Não....
Pesquisadora: Na verdade, é uma comparação aditiva! [...]
Paulo: Uma porque elas não partiram do mesmo instante e outra porque elas estão com a mesma velocidade! Então, não tem proporcionalidade aí...

Nos dois grupos, os demais professores perceberam a ocorrência de uma comparação aditiva que não leva ao conceito de proporcionalidade.

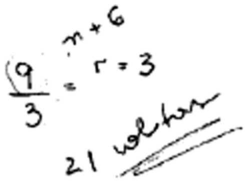
Ao ser trabalhado com os futuros professores, Vítor percebeu que se tratava de uma comparação aditiva e Fernanda resolveu o problema de duas formas: por meio de uma regra de 3 e respeitando a ideia aditiva.

Figura 24 – Resolução do problema 8a por Fernanda

Por meio da regra de 3:



Fazendo uma comparação aditiva:



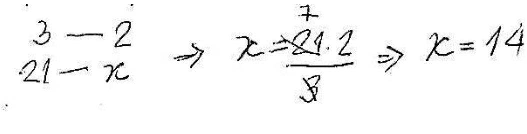
Fonte: Dados da pesquisa

Vítor apresentou ao grupo como havia pensado:

Vítor: [...] Não sei se li errado, mas aqui tá falando que elas correm à mesma velocidade... então, se uma saiu e a outra saiu depois, elas sempre vão caminhar juntas.
[...]
Vítor: Eu pensei... se uma tá na 9ª volta e a outra na 3ª (volta)... então 9 -3 dá 6... então elas sempre vão ter uma distância de 6. Logo, se uma está na 15ª volta, a outra estará na 21ª volta.

Quanto à letra **b**, os professores e futuros professores de Matemática não encontraram dificuldades. Eles resolveram por meio de uma regra de 3 pois os dados envolvidos eram proporcionais.

Figura 25 - Resolução do problema 8b pelo professor Otávio



Fonte: Dados da pesquisa

No entanto, destaca-se que, para resolver essa regra de 3, o professor Otávio deveria partir da proporção $\frac{3}{21} = \frac{2}{x}$ e usar sua propriedade do produto cruzado.

Com os futuros professores, no item *b,* tanto Vítor quanto Fernanda responderam corretamente que poderiam se adquirir 14 libras esterlinas com 21 dólares.

Fernanda: Na última é uma regra de 3! Você poderia ter pensado quanto custa cada libra e multiplicar por 21 também...
Vítor: Eu fiz mais ou menos assim... se U$3,00 é (compra) 2 libras, então eu pensei... 21... 3 vezes quanto dá 21? 7, né? Então [...] vou multiplicar 7 por 2 e dá 14 (libras)...

Pode-se perceber que Fernanda classificou o problema como sendo uma regra de três. No entanto, o problema relaciona-se ao conceito de proporção e a regra de três é o procedimento indicado como propriedade.

Para concluir esse tema, a *PP* relacionou a cada um dos oito problemas discutidos a personalidade correspondente assumida pelo Número Racional. Destacou-se, ainda, que ao analisar essas ideias no campo conceitual multiplicativo estabelecido por Vergnaud (1983), não era mais suficiente considerá-las isoladamente. Havia um reconhecimento de que essas ideias estavam interligadas em um campo de conceitos relacionados, cuja aquisição não seria linear ou feita pedaço por pedaço. Como numa teia de aranha, o contato com um de seus ramos reverberaria através do espaço inteiro.

Outra questão enfatizada referia-se à preocupação do professor e futuro professor de Matemática com o ensino das técnicas operatórias em detrimento da compreensão da atividade matemática. Nesse sentido, Booth (1984, p. 9), citado por Cramer, Post e Currier (1993) afirma que:

> Quando conceitos e procedimentos não são conectados, os estudantes podem ter um bom sentimento intuitivo da Matemática mas não resolvem os problemas, ou eles podem gerar respostas sem entender o que eles estão fazendo[46].

Apesar de parecerem conceitos simples, mostrou-se necessário que a formação de professores possibilite um trabalho sobre cada uma das "personalidades" do Número Racional (ponto na reta, quociente, fração, medida, operador multiplicativo, razão) para que os professores possam trabalhar com seus alunos situações que promovam o aprendizado de cada uma delas.

---

[46] *When concepts and procedures are not connected, students may have a good intuitive feel for mathematics but not solve the problems, or they may generate answers but not understand what they are doing.*

6.1.3 Medidas

Ao se trabalhar o tema *Medidas* na formação de professores, pretendia-se que os grupos refletissem sobre sua importância, sobre a necessidade do uso de unidades de medida e sobre como poderiam desenvolver esse tema apoiando-se na resolução de problemas.

Os PCN (1998, p. 52), ao recomendarem o trabalho com o tema medidas, afirmam que:

> Neste bloco serão tratadas diferentes grandezas, (comprimento, massa, tempo, capacidade, temperatura, etc.) incluindo as que são determinadas pela razão ou produto de duas outras (velocidade, energia elétrica, densidade demográfica, etc.). Será explorada a utilização de instrumentos adequados para medi-las, iniciando também uma discussão a respeito de algarismo duvidoso, algarismo significativo e arredondamento. Outro conteúdo destacado neste bloco é a obtenção de algumas medidas não diretamente acessíveis, que envolvem, por exemplo, conceitos e procedimentos da Geometria e da Física.

No grupo dos professores de Matemática em exercício, ao introduzir o tema, o professor Carlos questionou os demais professores sobre o porquê de ensinar outros sistemas métricos, como o inglês por exemplo:

Carlos: Por que se estuda isso aqui... se nós estamos dentro do Brasil? É coisa que não é usada [...] o que é usado? O km, o m, o cm, o mm! Por que se perde todo esse tempo pra estudar uma coisa que...?
Pesquisadora: Porque é de interesse que os alunos conheçam outros sistemas de medida que não são decimais [...]
Carlos: Mas ele (o aluno) não visualiza! Por que eu preciso aprender isso aqui se eu nunca vou usar! [...]

Os professores não concordaram com esse aspecto utilitarista da Matemática e destacaram que no comércio, em viagens e como conhecimento geral esse conteúdo se mostraria necessário. Essa discussão ilustrou uma negociação de significado entre os professores, apoiada em seus saberes profissionais.

Sobre as dificuldades encontradas no trabalho em sala de aula com o tema medidas, o grupo ressaltou que:

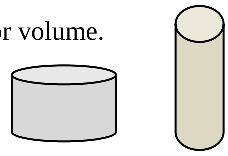
Maíra: Eu sinto dificuldade no conceito de metro. De fazer entender o que é o metro! Eu acho que o problema tá em entender o que é medir! Porque, muitas vezes, eles não sabem o que é medir, o que significa medir. Aí, se não sabe o que é medir, então não tem sentido a unidade!
Pesquisadora: E o que significa medir?
Maíra: Comparar.
Pesquisadora: Comparar o quê?
Otávio: Alguma coisa com uma unidade padrão de mesma natureza.

A *PP* concluiu, juntamente com os grupos, que para se medir sempre é feita uma comparação entre uma grandeza e a unidade padronizada de mesma natureza da grandeza considerada. Essa unidade pode ser o mm, o cm, o m ou o km, para comprimentos, ou o $grama$, o kg ou outros para medida de massa. Dependendo do que se quer medir, tem-se uma unidade apropriada para realizar essa comparação.

Foram apresentados aos grupos dois problemas para que os resolvessem: o do cilindro e o dos quadradinhos.

O Problema 1

A professora Norma entregou a cada um de seus alunos uma folha de papel, de $20cm$ por $30cm$, e fita adesiva. Ela lhes pediu para enrolar o papel e fazer um cilindro. Os alunos seguiram as instruções, mas seus cilindros se mostraram de dois tamanhos diferentes. A professora pediu, então, que determinassem qual desses dois cilindros tinha o maior volume.



Jorge disse: - No meu cabe mais, porque é mais alto.

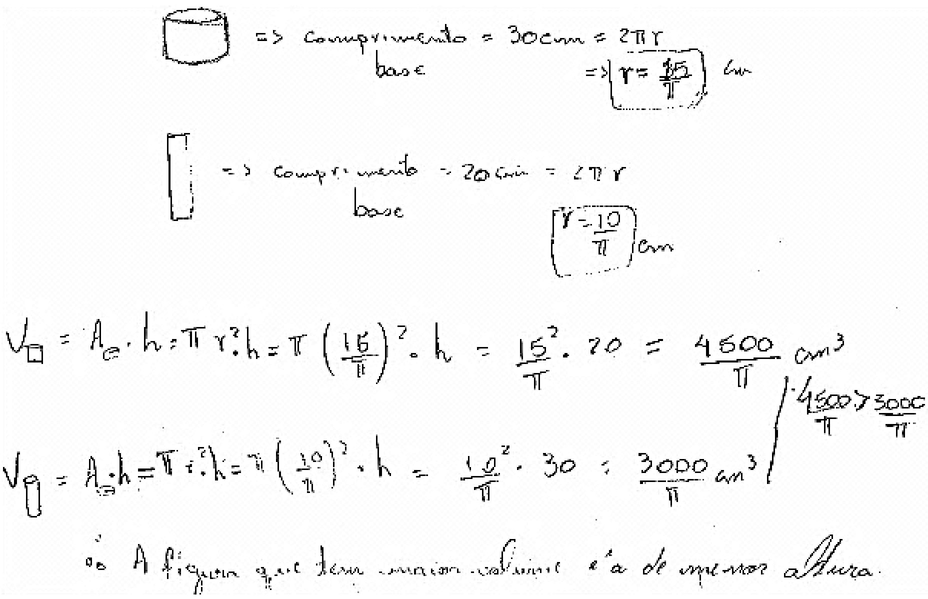
Ema disse: - No meu cabe mais, porque é mais largo.

Laura disse: - Eles devem conter a mesma quantidade, porque foram feitos a partir de folhas de papel de mesmo tamanho.

Quem está certo? Como você sabe?

No grupo dos futuros professores, a reação de todos, imediatamente, foi a de realizar os cálculos. Rapidamente eles afirmaram que Ema estava correta. A figura a seguir mostra a resolução apresentada por Felipe:

Figura 26 - Problema do cilindro resolvido por Felipe



Fonte: Dados da pesquisa

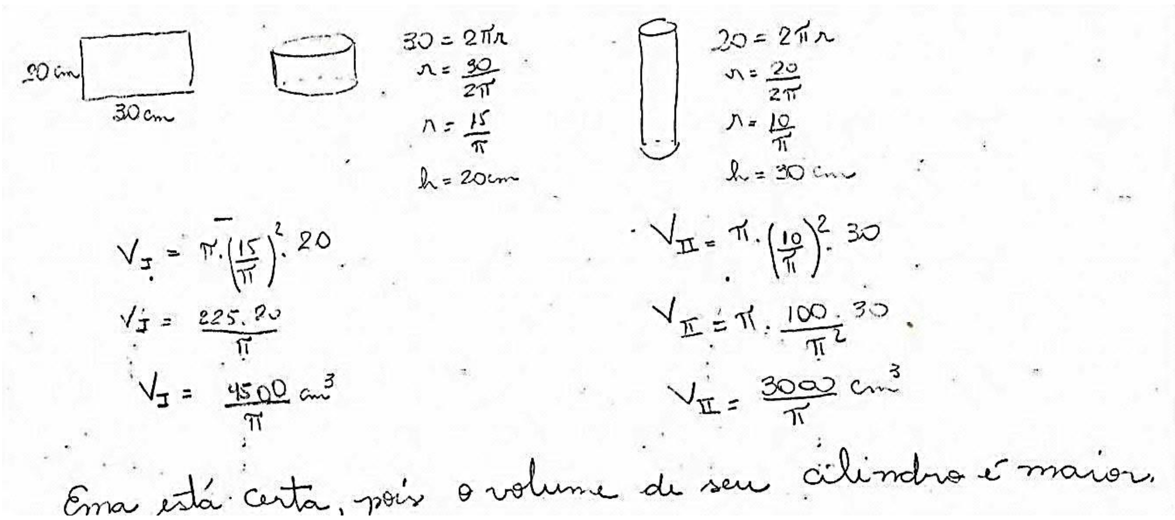
Felipe resolveu corretamente o problema e afirmou que a figura que tem maior volume é a de menor altura. Entretanto, é importante considerar que apesar de menor altura, a figura apresenta o raio da base maior e ele está elevado ao quadrado e a potenciação faz crescer mais rapidamente que a multiplicação. Para explorar essa ideia com o grupo, a *PP* questionou os futuros professores por que o cilindro mais largo fazia com que o volume fosse maior:

[...]
<u>Felipe</u>: Pensando nas medidas, a área da base é o que mais influencia no volume...
<u>Fernanda</u>: Sim... mas pode acontecer de, mesmo sendo mais largo, porventura as medidas sendo menores... mas eu acho que considerando 30(*cm*) e 20(*cm*), então o dela é mais largo...
[...]
<u>Pesquisadora</u>: Então, o que está influenciando mais aí pra determinar qual volume é maior?
<u>Fernanda</u>: A área da base!
<u>Pesquisadora</u>: Por quê?
<u>Fernanda</u>: Porque ela vai ter um termo quadrático...
<u>Vítor</u>: É!
<u>Pesquisadora</u>: E a altura? É linear! Então o fator maior é... como o raio está ao quadrado, quando ela fala que o dela é mais largo, significa que o raio é maior nesse caso e está ao quadrado! Então isso fez a diferença! Vocês, então, nem precisariam ter feito a conta, né? Se vocês tivessem usado esse raciocínio [...]

No grupo dos professores em exercício, realizar os cálculos também foi a estratégia mais utilizada por eles. Na figura 27 é apresentada a resolução da professora Maíra:

<u>Maíra</u>: Eu consegui descobrir fazendo os cálculos...

Figura 27 - Resolução do problema pela professora Maíra



Fonte: Dados da pesquisa

No início da plenária, o professor Otávio fez uma observação importante que conduziu as discussões:

Otávio: [...] Agora o que dá pra notar é o seguinte... a contribuição do perímetro (da base)... quando você trabalha... daí você tem o raio... a partir do perímetro (da base) você determina o raio da base e a contribuição dele em relação ao volume é ao quadrado [...]. O único detalhe é que o volume é diretamente proporcional ao quadrado do raio , sendo que, com relação à altura, ele é linear... Na situação a gente consegue provar que o que possui a maior base tem o maior volume...

A partir dessa constatação, a professora Maíra completou:

Maíra: Pensando aqui... eu acho que não precisaria fazer esse monte de cálculo porque a diferença na altura e no comprimento da circunferência é 10(*cm*) do mesmo jeito e se você aumenta 10(*cm*) no comprimento da circunferência da base faz muito mais diferença do que você aumentar 10(*cm*) na altura do cilindro, né?... aí dá pra pensar assim e saber que no mais largo ia caber mais, né?... sem calcular...

Alguns professores conjecturaram qual seria a resposta de seus alunos ao problema. No entanto, não deram a sua própria resposta:

Maria: Eu acho... eu tenho certeza que se eu desse esse problema para meus alunos do 7º ano, eles iriam falar que a Laura estava correta. Primeiramente, eles não iam saber calcular porque, com certeza, eles não iam saber a fórmula e eu teria que ter dado a fórmula para eles resolverem... mas o aluno vai pensar dessa forma sim: que como então é o mesmo papel para fazer o cilindro... o que ele pensou olhando aqui... de pezinho ficou maior e se eu virar é o mesmo ... tem a mesma quantidade de papel... foi o que eu coloquei aqui. Eu tenho certeza absoluta!
Pesquisadora: E o Carlos?
Carlos: Eu pus a mesma coisa: A Laura está certa, pois utilizaram a mesma quantidade de papel, apenas os formatos eram diferentes.

Em seguida, nos dois grupos foi realizada a atividade na prática e, depois, cada um deles explorou aquilo que poderia ser trabalhado a partir desse problema.

Figura 28 - Professores de Matemática realizando a atividade prática

Fonte: Dados da pesquisa

Durante essa atividade, foi enfatizado o cuidado do professor e do aluno com as unidades de medida. Muitos professores não se preocupam com a unidade, mas essa importância é evidenciada em disciplinas como a Física, a Química e a própria Matemática.

Ao explorar o problema, os dois grupos destacaram conteúdos que poderiam ser trabalhados a partir dele, bem como a que ano ele seria adequado:

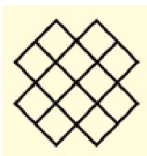
Pesquisadora: Que tópicos de Matemática poderiam ser iniciados com este problema?
Maíra: Eu acho que seria pra trabalhar no Ensino Médio quando fosse para calcular volume de cilindro.
O máximo que eu vejo de possibilidade é introduzir a ideia de volume no Ensino Fundamental, porque o aluno tem que saber diferenciar o que é área, do que é volume, do que é comprimento, né?... então, talvez para ele entender o que é volume... só para entender que é o que cabe ali, né? Mas para desenvolver realmente o problema (matematicamente), só no Ensino Médio.

O grupo dos futuros professores destacou que poderiam ser trabalhados, a partir desse problema, tópicos como volume, área, comprimento e formas geométricas. Julgaram que o problema seria adequado ao 6º ou 7º ano, se abordado mais superficialmente para introduzir a ideia de volume de um cilindro e, no 2º ou 3º ano do Ensino Médio, explorando-se a atividade de uma forma mais analítica. Destacaram também que, possivelmente, deveriam ser considerados problemas secundários se os alunos não dominassem o conceito de raio e diâmetro da área da base e volume do cilindro.

O Problema 2

O lado de cada quadradinho da figura abaixo mede 7*mm*.

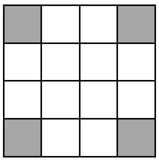
a) Qual é o perímetro da figura? E sua área quanto mede?



b) E se a medida do lado fosse dobrada, qual seria a medida da área?

No grupo dos professores de Matemática em exercício, o professor Otávio percebeu que o perímetro seria 16 vezes $7mm$ e a área seria $12 \times 49mm^2$. A professora Maria perguntou se não havia um jeito mais fácil. Otávio sugeriu que se poderia pensar em “completar o quadrado”, o que ficaria $4l \times 4l$ e depois “descontar” os cantos.

Aproveitando a ideia do Prof. Otávio, esse problema poderia ser resolvido acrescentando-se quatro cantos à figura original. Assim, o lado do novo quadrado formado seria igual $4.7mm = 28mm$.



Ao calcular o perímetro, que é a soma dos lados da figura, ficaria:

$$P_1 = 28mm + 28mm + 28mm + 28mm = 112mm$$

Pode-se notar que não é preciso descontar os cantos, visto que foram adicionados $2l$ e nos cantos quebrados também se considerava essa medida.

Para se calcular a área da figura, como cada quadradinho de lado $7mm$ tem uma área de 49 mm^2, a área desse quadrado criado seria de $16.49mm^2 = 784mm^2$. Para obter a área total da figura inicial, torna-se necessário descontar a área de cada um dos quadradinhos acrescentado, ou seja, deve-se fazer $784\ mm^2 - 196mm^2 = 588mm^2$.

Ao duplicar a medida do lado, o novo quadrado "com os cantos completados" passaria a ter lado igual $56mm$ e sua área total seria:

$$A_2 = (56mm)^2 - 4.(196mm^2)$$
$$A_2 = 3136mm^2 - 784mm^2$$
$$A_2 = 2352mm^2$$

Durante a discussão do problema, o professor Carlos percebeu que para calcular o perímetro sempre tinha $2u$ em cada lado, mas se confundiu ao contar os "cantos quebrados". Em cada um desses cantos, ao invés de acrescentar $2u$, ele estava considerando apenas $1u$ e chegou que o perímetro da figura seria $12 \times 7mm = 84\ mm$, o que não é correto.

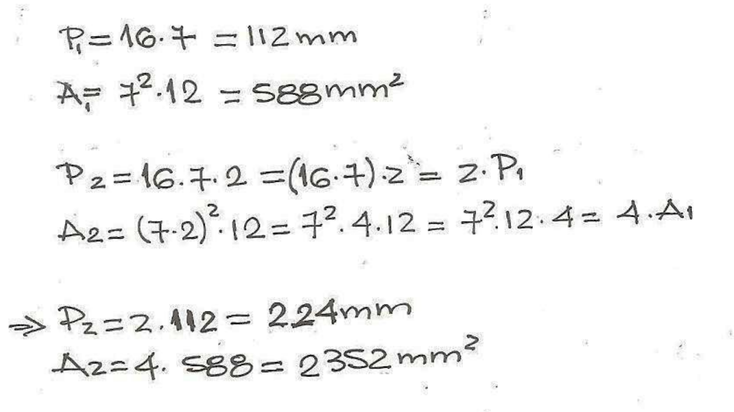
Quanto ao que acontece quando se duplica a medida do lado da figura, os professores responderam:

<u>Maíra</u>: O perímetro dobra...
<u>Otávio</u>: É! O perímetro dobra [...] Se você simplesmente pensar que tem 16 faces e essa face dobra, então você vai continuar com 16 vezes a face vezes 2.
<u>Pesquisadora</u>: A medida, a unidade...
<u>Otávio</u>: Isso... o ladinho. Se fosse um *l* qualquer o perímetro seria $16l$. A partir do momento que você dobra... seria $16l \times 2$ [...] Agora, é interessante que quando você coloca... se você pensar que a área... você tem 12 quadradinhos e a área é o lado ao quadrado, a hora que você dobra ... ela fica $(\text{lado} \times 2)^2$ então $l^2 \times 2^2$. Então, independente do lado, você vai multiplicar aí por 4... que é o dobro ao quadrado.

Pesquisadora: Então o que a gente conclui? Se dobrar o lado...
Maíra: O perímetro dobra e a área quadruplica!

Apesar de toda a discussão e cuidado com as unidades de medida, o professor Otávio apresentou ao grupo uma resolução do problema em que as unidades de medida foram postas apenas nas respostas. Tal fato parece indicar que os professores estão habituados a usar as unidades de medida apenas nas resposta dos problemas, o que pode prejudicar o entendimento de seus alunos em relação ao uso de medidas.

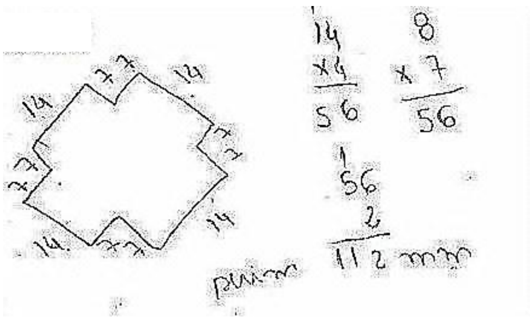
Figura 29 - Resolução do problema pelo Prof. Otávio.



Fonte: Dados da pesquisa

Ao resolver o mesmo problema, uma das estratégias de resolução apresentada pelo grupo dos futuros professores de Matemática foi contar a quantidade de "ladinhos"(16) e multiplicar pelo valor de cada lado ($7mm$). A medida do perímetro, encontrada por eles, foi de $112mm$. A seguir, na figura 32 é apresentada a resolução de Fernanda:

Figura 30 - Problema dos quadradinhos resolvido por Fernanda



Fonte: Dados da pesquisa

A *PP* perguntou ao grupo se alguém havia pensado de modo diferente:

Vítor: Eu não fiz, mas dá! Você completa o quadrado, aí vê a área dele, né? que vai ser 24, não...28...
Pesquisadora: Mas estamos pensando no perímetro só...
Vítor: Sim... 28! aí você multiplica por 4 porque vai ser o perímetro (todo) e tira o (pedaço do) perímetro que tá a mais. Então sempre isso aí até pra área. Preencher pra facilitar e depois você tira a parte que você não considerou.
Fernanda: Caraca! Nunca um aluno vai pensar isso!
Juliana: Acho que isso não ia facilitar não... só contar os ladinhos...
Vítor: Ah... é porque esse é um exemplo mais simples...mas se pegar um caso difícil você resolve assim...mas é uma introdução esse tipo de exercício...
[...]
Fernanda: Porque eu acho que o que geralmente acontece é a gente olhar a figura e ver ela como várias figuras... a ideia de olhar os quadradinhos. Eu acho difícil a ideia de você completar a figura.
Vítor: Você pode pensar até de outra forma: de tirar dois quadradinhos de um lado e colocar no lado oposto, aí dá um retângulo! Pode facilitar também...

Em um segundo momento, passou-se para a discussão acerca do que aconteceria com a medida da área se a medida do lado fosse dobrada.

Pesquisadora: Qual foi a medida da área?
Coro: 588 mm^2.
Pesquisadora: E como vocês fizeram?
Felipe: A área de um quadradinho vezes a quantidade de quadrados...
Camila: Eu também.

Fernanda ressaltou a ideia de olhar a figura como partes menores:

Fernanda: (...) é porque assim... eu sempre fui acostumada a olhar a figura e subdividir ela em várias. Eu olhei que aqui dentro é um quadrado e fiz 14(mm) vezes 14(mm), vai dar a área do quadrado grande. Aí eu fiz a área do retângulo pequeno que dá 14(mm) vezes 7(mm) e depois eu multipliquei por 4. Então o que eu fiz: $14(mm) \times 7(mm^2)$ = $98(mm^2)$... $98(mm^2) \times 4$ = $392(mm^2)$. Aí eu fiz $14(mm) \times 14(mm)$ deu $196(mm^2)$. Aí eu somei $392(mm^2) + 196(mm^2)$. Aí depois eu olhei e pensei: Era só fazer de um e multiplicar pela quantidade.

Vítor reforçou que sua estratégia anterior também seria eficiente para o cálculo da área:

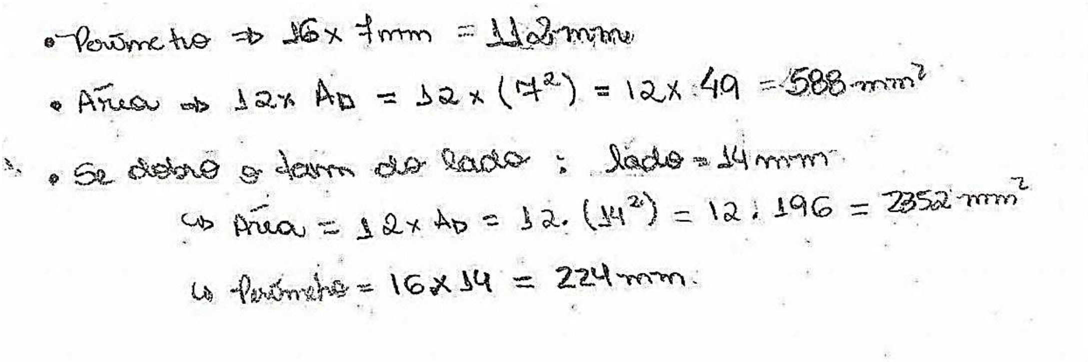
Vítor: Dá pra fazer pela mesma forma do perímetro. Você pode completar e calcular a área ou você completa com quadrado normal e tira depois...

Em seguida, a discussão foi direcionada para que os futuros professores percebessem que dobrando o valor da medida do lado, o mesmo não acontece com a área.

Camila: O perímetro vai dobrar, né?
Felipe: A área vai ficar vezes 4.

Ao apresentar a resolução do problema, assim como ocorreu com o professor Otávio, Camila fez uso das unidades de medida, com exceção da primeira linha, apenas na resposta do problema.

Figura 31 - Problema dos quadradinhos resolvido por Camila


• Perímetro ⇒ 16 x 7mm = 112mm
• Área ⇒ 12x A□ = 12 x (7²) = 12x 49 = 588 mm²
• Se dobro o tam do lado : lado = 14mm
⇒ Área = 12x A□ = 12. (14²) = 12 . 196 = 2352 mm²
⇒ Perímetro = 16x14 = 224mm.

Fonte: Dados da pesquisa

Juliana e Aline pensaram que “dobrado” referia-se à transformação do desenho em uma figura espacial, em uma “caixinha sem tampa”. Vê-se que houve uma pequena confusão quanto ao significado da palavra dobrado, fazer dobras ou duplicar o valor da medida do lado.

Felipe ponderou e questionou o que fazer em sala de aula em uma situação dessas. Camila ressaltou a necessidade de retomar, com os alunos, nesse momento, o que é o dobro e o que é dobra.

O problema, para eles, seria adequado para o 6º ou 7º ano ao se trabalhar área e perímetro. Os questionamentos conduziriam o aluno a analisar o que acontece com a área e o perímetro ao se dobrar, triplicar ou quadriplicar as medidas dos lados da figura.

Ao trabalhar o tema medidas pode-se constatar que os professores e futuros professores não estão acostumados a utilizar, no decorrer da resolução do problema, as unidades de medida, colocando-as somente na resposta final.

Nos grupos também foram tratados aspectos da história dos pesos e medidas, o porquê das “regras de transformação” de unidades de medida, e a conversão para outros sistemas, como o Inglês por exemplo. Não se pretendia esgotar o assunto, visto que *Medidas* envolve diferentes grandezas, como as já apresentadas pelos PCN. (BRASIL, 1998).

Como anteriormente destacado no capítulo 6, descrição dos encontros, o tema foi trabalhado em dois encontros e se pretendia promover a reflexão dos professores e futuros professores principalmente sobre o significado de medir e o uso das unidades de medida e, também, trabalhar a transformação de comprimento, massa, capacidade, área e volume.

Conforme planejado no projeto, nos grupos foram explorados alguns aspectos do tema como as unidades de medida, seus múltiplos e submúltiplos, através da resolução de problemas. Eles discutiram o significado de cada um dos submúltiplos do metro: o decímetro é a décima parte do metro ou 10 *cm*; o centímetro corresponde à centésima parte do metro. O mesmo fizeram em relação aos múltiplos do metro: o decâmetro é um múltiplo do metro, 10 vezes o valor do metro ou 10*m;* o hectômetro corresponde a 100 vezes o valor do metro e o quilômetro a 1000 vezes a medida de 1 metro. Em seguida, completaram a tabela proposta:

Múltiplos	Quilômetro	*km*	*1000 m*
	Hectômetro	*hm*	*100 m*
	Decâmetro	*dam*	*10 m*
Unidade	METRO	*m*	*1m*
Submúltiplos	Decímetro	*dm*	*0,1m*
	Centímetro	*cm*	*0,01m*
	Milímetro	*mm*	*0,001m*

O mesmo fizeram com as unidades de massa e de capacidade:

Múltiplos	Quilograma	*kg*	*1000g*
	Hectograma	*hg*	*100g*
	Decagrama	*dag*	*10g*
Unidade	Grama	*g*	*1g*
Submúltiplos	Decigrama	*dg*	*0,1g*
	Centigrama	*cg*	*0,01g*
	Miligrama	*mg*	*0,001g*

Múltiplos	Quilolitro	*kl*	*1000l*
	Hectolitro	*hl*	*100l*
	Decalitro	*dal*	*10l*
Unidade	Litro	*l*	*1l*
Submúltiplos	Decilitro	*dl*	*0,1l*
	Centilitro	*cg*	*0,01l*
	Mililitro	*ml*	0,001*l*

Destacou-se que as unidades de comprimento, de massa e de capacidade constituem sistemas decimais e, por isso, para descobrir os múltiplos e submúltiplos basta multiplicar ou dividir por 10 de uma unidade para a seguinte.

Já no caso da unidade de área, passa-se para o plano e toma-se, como unidade padrão, um quadrado de 1 metro de lado. Ao buscar-se um seu submúltiplo, subdividimos cada lado desse quadrado em 10 partes iguais, obtendo 100 partes de área, e por isso para se obter o decímetro quadrado divide-se $1m^2$ por 100. Assim sucessivamente para determinar novos submúltiplos. Para determinar-se um múltiplo, como o decâmetro quadrado, multiplica-se cada lado do quadrado por 10, obtendo-se 100 partes de área, e por essa razão multiplica-se $1m^2$ por 100. Assim sucessivamente para obter novos múltiplos.

Múltiplos	Quilômetro quadrado	km^2	*1000 000 m^2*	Área de um quadrado com $1km$ ou $1000m$ de lado
	Hectômetro quadrado	hm^2	*10 000 m^2*	Área de um quadrado com $1hm$ ou $100m$ de lado
	Decâmetro Quadrado	dam^2	*100 m^2*	Área de um quadrado com $1dam$ ou $10m$ de lado
Unidade	METRO quadrado	m^2	*1 m^2*	Área de um quadrado com $1m$ de lado
Submúltiplos	Decímetro quadrado	dm^2	*0,01 m^2*	Área de um quadrado com $1dm$ ou $0{,}1m$ ou $10cm$ de lado
	Centímetro quadrado	cm^2	*0, 0001 m^2*	Área de um quadrado com $1cm$ ou $0{,}01m$ ou $10mm$ de lado
	Milímetro quadrado	mm^2	*0,000001m^2*	Área de um quadrado com $1mm$ ou $0{,}001m$ ou $0{,}1cm$ de lado

Para a unidade de volume, passa-se para o espaço e toma-se, como unidade padrão, um cubo de 1 metro de lado. Ao buscar-se um submúltiplo subdividimos cada lado desse cubo em 10 partes, obtendo 1000 partes de volume, e por isso para se obter o decímetro cúbico divide-se $1m^3$ por 1000. Assim sucessivamente para determinar novos submúltiplos. Para determinar-se um múltiplo, como o decâmetro cúbico, multiplica-se cada lado do cubo por 10 obtendo-se 1000 partes de volume, e por essa razão multiplica-se $1m^3$ por 1000. Assim sucessivamente para se obter novos múltiplos.

Múltiplos	Quilômetro cúbico	km^3	*1 000 000 000 m^3*	Volume de um cubo com $1km$ ou $1000\ m$ de aresta
	Hectômetro cúbico	hm^3	*1 000 000 m^3*	Volume de um cubo com $1hm$ ou $100\ m$ de aresta
	Decâmetro Cúbico	dam^3	*1 000 m^3*	Volume de um cubo com $1dam$ ou $10\ m$ de aresta
Unidade	METRO cúbico	m^3	*1 m^3*	Volume de um cubo com $1m$ de aresta
Submúltiplos	Decímetro cúbico	dm^3	*0, 001 m^3*	Volume de um cubo com $1dm$ ou $0{,}1m$ ou $10cm$ de aresta
	Centímetro cúbico	cm^3	*0, 000001 m^3*	Volume de um cubo com $1cm$ ou $0,01m$ ou $10\ mm$ de aresta
	Milímetro cúbico	mm^3	*0, 000000001 m^3*	Volume de um cubo com $1mm$ ou $0,001m$ ou $0{,}1cm$ de aresta

Nos dois grupos, os professores e futuros professores não souberam justificar por que os líquidos não eram medidos em m^3. Após a leitura do texto (apêndice F) e da discussão do assunto, eles ficaram surpresos e aprenderam sobre a questão da facilidade em medir os líquidos, que tomam a forma do recipiente que os contêm, usando como unidade de medida o litro. Caso contrário, seria necessário calcular-se o volume de cada recipiente, inclusive dos irregulares.

A definição de litro também foi trabalhada. Os professores em exercício não encontraram dificuldade em dizer que um cubo de lado $10cm$ ou $1dm$ comportaria 1 litro. Os futuros professores foram deduzindo essa relação: Vítor disse que 1000 litros correspondem a $1m^3$ e que $1l$ seria $0{,}001m^3$. Felipe completou a ideia dizendo que a capacidade de $1l$ corresponde ao volume de $1dm^3$. Nesse momento, a PP questionou os futuros professores de Matemática sobre como explicariam para os alunos da Educação Básica a relação entre litro e cm^3. Eles concluíram que $1dm^3 = 1000cm^3$. Logo, um cubo cujas dimensões fossem $10cm \times 10cm \times 10cm = 1000cm^3$ ou $1dm \times 1dm \times 1dm = 1dm^3$ comportaria 1 litro.

Ao final da discussão, a PP forneceu um cubo acrílico (figura 32) e professores e futuros professores puderam enchê-lo de água. O cubo também poderia ter sido construído de papel e enchido de areia. Concluiu-se que essa atividade deve ser feita em sala de aula e mostra-se potencializadora para a construção de conteúdo matemático.

Figura 32 – Cubo acrílico com volume de $1dm^3$

Além dessas atividades apresentadas, foi trabalhada, com os professores e futuros professores a questão da conversão das medidas de comprimento do Sistema Inglês para o Sistema Decimal de unidades, bem como a conversão de medidas de área em m^2, como é o caso da medida alqueire que corresponde a $48\,400m^2$.

Os Padrões de Currículo e Avaliação (NCTM, 1989) consideram que as atividades de medida podem e devem requerer uma interação entre os estudantes e o mundo real. As ideias de medida estão dentro e fora da escola, em áreas como arquitetura, design comercial, arte, esportes, culinária, vendas e leituras de mapas. Desse modo, os alunos devem saber falar sobre medidas, sobre a importância da unidade e sobre os sistemas de medida.

A discussão sobre algumas regras usadas pelos professores ao ensinar e a falta de entendimento dos alunos sobre o tema mostra a necessidade de um ensino com mais compreensão. No entanto, é preciso cuidado para não buscar um discurso utilitarista da Matemática. De acordo com Van de Walle (2013), os estudantes precisam se envolver em integrações do tema com os demais blocos de conteúdo matemático. O autor indica algumas relações com:

> - Números e valor posicional: Medir objetos familiares relaciona ideias de número ao mundo real, melhorando o sentido numérico. O sistema métrico de medida é construído sobre o sistema de numeração decimal.
> - Geometria: O desenvolvimento de fórmulas de perímetro, área e volume requer compreender formas e suas relações. Medidas ajudam a descrever formas e medidas angulares desempenham um papel significativo nas propriedades das formas.
> - Dados: Estatísticas e gráficos ajudam a responder questões e a descrever o nosso mundo. Muitas vezes, essa descrição é feita em termos de medidas. (p. 375, tradução nossa).

O tema Medidas foi bastante motivador para a formação de professores. Novamente, conceitos simples, como o que significa medir, foram trabalhados e provocaram reflexões e ressignificações sobre o conteúdo matemático abordado. Além disso, destacou-se a necessidade de o professor de Matemática ter cuidado, durante a resolução de um problema, com o uso correto das unidades de medida. De acordo com os PCN de Matemática (BRASIL, 1998), esse cuidado auxiliaria no trabalho não só da própria Matemática, mas de outras disciplinas como a Geografia e as Ciências Naturais.

6.2 Eixo 2: A problematização da Resolução de Problemas nas práticas de ensinar e aprender Matemática na sala de aula.

Neste segundo eixo temático, foram reunidas situações, vivenciadas nos encontros dos grupos, que apresentassem a problematização promovida pela resolução de problemas nas práticas de ensinar e aprender Matemática. Esse trabalho levou os professores e futuros professores de Matemática a refletirem e apresentarem a forma como concebem que a aprendizagem da Matemática ocorre, a discutirem como a resolução de problemas e o trabalho em grupos podem ser utilizados, por eles ou por seus antigos professores da Educação Básica, em sala de aula. Assim, através da Resolução de Problemas foi possível explorar na formação de professores, seus saberes pedagógico e pedagógico do conteúdo.

6.2.1 As concepções sobre a aprendizagem da Matemática

A partir das leituras promovidas nos dois primeiros encontros, o grupo dos professores em exercício explicitou que a aprendizagem da Matemática ocorre de maneira ativa:

Otávio: [...] a aprendizagem efetiva da Matemática é quando a pessoa consegue chegar num ponto de ter construído a... no caso a resolução ou ter construído o seu conhecimento. Eu comento sempre com eles ... gente é simples. Eles estão naquela fase de tirar carta (de motorista), né?... aí eu brinco com eles assim... falo: gente é simples... paga 20 aulas e você fica sentado lá as 20 aulas do lado do cara e o cara dirigindo pra você e ele falando pra você "Agora nós vamos chegar na esquina, você vai parar, você vai dar seta ou então... pra mudar a marcha eu vou diminuir, tirar o pé do acelerador, pisar na embreagem, trocar a marcha..." e ele te explica as 20 aulas e vai explicando... no dia do exame você vai e pega o carro e tenta fazer... não vai conseguir reproduzir... não construiu nada... ficou espectador e na Matemática não funciona. Às vezes... é claro, sem preconceito com as outras disciplinas, mas às vezes acontece o seguinte... o aluno chega nas vésperas de uma avaliação, ele pega um texto, ele dá uma decorada e ele chega e consegue "enganar"... dá para enganar. Matemática é difícil... você não consegue dar essa enganada. Não é possível... a prática mostra que não é possível fazer isso daí. E aí aproveitando o que a Maíra falou, uma das brincadeiras que eu aproveito é "Vocês têm que tentar fazer" ... "Ah, mas eu não sei fazer!". É claro que você não sabe fazer, né?...
Pesquisadora: (pois) Você nunca tentou!...
Otávio: Você não sabe fazer... se você soubesse fazer, nós já estávamos adiantados. Nós estávamos fazendo outra coisa, se você já soubesse fazer isso daqui. Então, você não sabe... se a pessoa soubesse dirigir o carro, não precisaria estar escrito "Cuidado - Escola". Então quer dizer... o que significa aquilo quando você vê CUIDADO ESCOLA? Toma cuidado porque o cara não sabe... ele está fazendo, mas ele não sabe... então toma cuidado porque o cara uma hora ou outra vai fazer uma bobagem. Ele pode fazer uma bobagem. E a mesma coisa é a questão da Matemática... o exercício está aqui, a atividade é essa, o problema é esse... vamos resolver. Agora... você vai fazer muitas bobagens, pode fazer, faz parte da aprendizagem... o erro aqui faz parte, né?... e a questão de depois discutir essa questão do erro, discutir aquilo que você achou que fosse uma solução ou que você tentou partir... isso, na hora que estiver discutindo com o professor... aquilo que a gente pode chamar de correção do problema... você vai ter compreensão do caminho que você tomou errado, ou de onde que você errou... esse é o discurso como professor, a gente sabe que esse é o caminho, mas para conseguir isso na sala de aula... eu acho que daí já são outros quinhentos...

Essa discussão foi promovida pela leitura do texto de Gazire (2012) que se refere às ideias de Polya. Este último autor priorizava um ensino ativo para a Matemática e afirmava que:

> A Matemática não é um esporte para espectadores; não se pode desfrutar dela nem aprendê-la sem a participação ativa; por isso, o princípio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, professores de Matemática, especialmente se considerarmos como nosso principal objetivo, o primeiro de nossos objetivos, o de ensinar o estudante a pensar. (POLYA, 1966, p. 138).

O professor Otávio considerou, ainda, o papel do erro durante o processo de construção do conhecimento pelo aluno e julgou ser difícil colocar em prática essas ideias. Continuando a discussão, a professora Ana chamou a atenção dos professores para a questão do imediatismo, típico da sociedade atual:

Ana: Por que aí já recebe interferência de outras coisas né, principalmente da nossa era, que tem aí a coisa pronta e acabada.
Pesquisadora: Eles não querem pensar... por tempo...
Ana: Exatamente!
Pesquisadora: Eles querem imediatismo...
Ana: Muitas vezes... eu sinto isso agora. Não sei o que é pior: se é uma classe agitada em que você faz perguntas e eles te respondem, ou aquela classe morta em que você mesmo pergunta, você mesmo responde...
Otávio: A morta é pior...
Ana: É o que tá acontecendo... aí você deixa, você põe lá ... e aí gente, vamos tentar? "Ah dona...faz aí..."
Otávio: A preguiça intelectual...
Ana: Ah, isso é a pior coisa...

Os professores percebem que os alunos esperam que o professor "transmita o conhecimento" , ao invés de construí-lo, demonstrando uma atitude passiva em sala de aula. Os professores encontram dificuldade em mudar esse comportamento já adquirido pelos alunos ao longo de sua escolaridade. Somado a isso, a professora Cecília relatou que muitos alunos sentem medo da Matemática e que, ao longo dos anos, demonstram uma baixa auto-estima em relação a serem capazes de entender e construir a Matemática:

Cecília: Sabe o que eu percebi... eles vêm com um medo enorme e quando você mostra pra eles... você passa um exercício, você mostra pra eles como que é feito e eles conseguem entender e resolver depois sozinhos... é uma alegria que não tem tamanho... eles ficam assim, admirados "Como que eu consegui resolver isso aqui!" e, ao mesmo tempo, acho que passa pela cabecinha deles "Como que eu não consegui enxergar isso aqui..." e aí eles se apegam à gente de uma tal maneira que eles acham que você assim, só você que ensinou...
[...]
Cecilia: Mas eu penso assim... se você pega uma classe de 35, 40 alunos do 6º ano... eu pelo menos percebo assim... a maioria tem medo, a maioria não imagina o potencial que tem... Mas vocês vão falar "Ah, mas você vai olhar por isso..." ... mas é verdade... não têm família, não têm quem acompanhe, não têm quem estimule, não têm quem resgate a auto-estima, não têm nada. Então, quando você consegue puxar alguma coisinha dele... é aquilo que eu tô falando, é uma alegria tamanha... que dá pra fazer isso daí... você ganha o aluno e aí o colega vê, o outro também vê. Aí você coloca esse pra ensinar aquele. Aí esse aqui ensina aquele... aí vocês vão falar: "Você tá sonhando?"... Não tô sonhando, eu tava com uma classe até agora de 6º ano e eu tava trabalhando assim... e aí você começa ouvir... parece bombinha que vai falando assim "Ohhh, eu nunca imaginei que eu fosse fazer isso aqui", o outro vira e fala "Meu Deus, eu morria de medo Professora!". Daí quando você vê, você tá rodeada, tem 20 em cima de você... querendo mais e mais exercícios e fazer coisas, que você fale, que você demonstre... por quê? Porque ele não teve. A verdade é essa! Agora, ganhamos pouco?

Ganhamos... Tá difícil? Tá... Tá complicado? Tá... Só que eu ainda bato naquela tecla... tem que começar dos pequinininhos e é através deles... é um trabalho de formiga, é... como o Prof. Paulo falou "Não vai dar tempo de fazer... de cumprir tudo aquilo. Vai passar pro 7º ano..." .... mas eu acho que o básico... a gente tem que chegar na coordenação e falar "Eu quero fazer um trabalho diferenciado com os pequenos. O que é mais importante aqui... para os sextos anos?"

A professora Cecília evidenciou, em sua fala, a dificuldade do trabalho a ser realizado. Por meio desse excerto pode-se perceber que outros professores, como Paulo, justificam que uma mudança na maneira com que trabalham em sala seria inviável para o cumprimento dos conteúdos programáticos. Na verdade, a mudança metodológica implicaria em uma nova forma de trabalho por parte do professor, que deveria selecionar temas fundamentais da Matemática para explorá-los.

Os futuros professores discutiram e argumentaram sobre a necessidade de um rompimento da ideia utilitarista da Matemática e da valorização do conhecimento matemático para a formação de cidadãos críticos. Fernanda acrescentou, ainda, que os alunos carregam aquilo que ela chama de “fala social”, valorizando a escola, dizendo que precisam frequentar a escola para ser alguém na vida. No entanto, não aproveitam o espaço, fazem da escola um espaço de encontro, de diversão, de bate papo, se comportando como espectadores. Acrescenta, ainda, que o mundo acelerado de hoje exige uma nova postura do professor, diferente da de colocar os alunos em fila durante duas horas, explicar a matéria e solicitar-lhes que reproduzam exercícios.

<u>Vítor</u>: [...] da mesma forma que depois você sai da autoescola e vai praticar, vai melhorar suas habilidades e será um ótimo piloto, você tem que fazer com a Matemática... Você não tem que parar na escola, você tem que começar a praticá-la fora da escola para ser um melhor aluno!
<u>Fernanda</u>: Eles não têm a prática, não existem conexões! [...] Esse pensamento não é feito. Ele não continua e, por isso, quando ele sai... numa sala como a minha com 40... 42 alunos... só eu e mais 2 fomos para a universidade... e o resto tá assim... trabalhando por aí, em vários lugares, tá cada vez mais enforcado.... Quer cada vez mais independência, comprar um carro...! É esse o tipo de objetivo que os alunos querem [...] os valores estão distorcidos em relação aos estudos, ao conhecimento e ao que você quer ser na vida [...]

Outra posição defendida por professores e futuros professores de Matemática refere-se à importância da memorização e do treino das técnicas operatórias nas aulas. Em diversas ocasiões, que serão apresentadas a seguir, integrantes dos dois grupos manifestaram suas opiniões nessa direção.

No grupo dos professores em exercício, ao falar sobre o ensino tradicional, no 2º encontro, os professores Paulo e Otávio defenderam a memorização:

Otávio: Só tem uma coisa que eu tenho um pouco de receio às vezes, que é o seguinte: por exemplo aqui inclusive, ele (o autor do texto, GAZIRE (2012)) cita aqui que "... configurava enfatizando a memorização de um conjunto de fatos, o domínio de procedimentos algorítmicos ou o conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental". Não sei, assim... é claro que tem que ter compreensão sim, mas eu acho que não se pode "demonizar" aqui... nem sei se existe esse termo... a questão do exercício mental. Por que acho que, a exemplo com o que aconteceu com essas pedagogias, que "Ah, porque não se pode mais falar de erro pro aluno", daí ninguém mais falava nada. Você não pode corrigir o aluno, o aluno está escrevendo errado... "Ah, não pode mais falar da letra do aluno". Então você fica numa situação... assim... parece que em extremos, né?... então, até fazer o caderno de caligrafia pro aluno você não podia mais fazer... então, quer dizer né... não se busca um meio termo. Eu acho que também na Matemática tem alguma coisa que fugiu do controle (....) Por exemplo, muitas questões aí da tabuada... seria um mecanismo, mas tem que se tornar uma habilidade, a de você usar para resolver um determinado problema. De repente a pessoa não tem mais essa habilidade porque falou que não era mais para decorar a tabuada. Conclusão: Você passa um problema e o cara enrosca aonde? Na questão da tabuada! Aí eu começo a fazer uma comparação com a questão do carro. Você vai começar a dirigir, você entende todo o mecanismo (...) só que na hora que você tá dirigindo você não para pra ficar observando como você faz para mudar de marcha, porque se você ficar olhando para o seu pé para pisar na embreagem para trocar de marcha, você vai bater o carro. Então, você tem que, de certa forma, incorporar isso, decorar esse negócio para que você na hora... você executando outra atividade isso não ser um empecilho.
Paulo: E outra coisa: um treinamento também! Você tem que sentar lá e fazer. Na Matemática Moderna tinha repetição, mas se tinha resultado. Hoje nós estamos aí nessa Matemática... "Deixa ele pensar..."

Nesse excerto, o professor Otávio criticou algumas práticas como a de "não corrigir" os erros dos alunos e defendeu a memorização. O professor Paulo defendeu a repetição, o treinamento da Matemática por parte dos alunos. Além disso, esse professor afirmou que "Na Matemática Moderna tinha repetição, mas se tinha resultado", desconsiderando fatores sociais e históricos da educação. Quando ele destacou que "Hoje nós estamos aí nessa Matemática... 'Deixa ele pensar...' ", o professor Paulo desconsiderou o papel do professor. O que se propõe não é deixar o aluno pensar sem orientação, mas que o professor seja o observador, mediador, organizador, interventor e incentivador desse processo de aprendizagem.

Nessa discussão, a professora Maíra destacou que a memorização, no entanto, não antecede o conceito matemático:

Maíra: Eu não entendo por esse lado... que o aluno não tenha que ter! Mas é que pulavam-se fases. Não se trabalhava a compreensão de que a tabuada são somas de parcelas iguais. Já ia-se direto assim que 2×3 é 6 sem entender que aquilo... você tem o $3 + 3$, que você tá aumentando. Eu acho que seria mais nesse sentido, você ter a compreensão do que seria a tabuada e, a partir do momento em que o aluno entende como a tabuada é formada, ele acaba fazendo a memorização da tabuada. Porque se ele quer saber quanto é, sei lá, 9×7... ele compreende que 10×7 é 70, ele consegue diminuir uma parcela e chegar no resultado.

A afirmação da professora Maíra mostrando a necessidade da compreensão do conceito matemático, provocou uma negociação e problematização daquilo que os professores

Otávio e Paulo estavam destacando. Essas formas de compreender a aprendizagem da Matemática precisam ser pensadas, já que os professores podem carregá-las sem nenhum questionamento, reproduzindo inclusive as práticas de seus antigos professores de Matemática. Um exemplo disso pode ser percebido na discussão entre os professores, durante o 10º encontro, reproduzida a seguir:

Ana: Nada me tira da cabeça e que meus professores da faculdade não escutem! Que isso é falta de treino, é condicionamento! Porque você pode entender [...] mas é falta de treino!
Otávio: Sim... é falta de treino!
Ana: Se pegar uma lista de a-z....
Pesquisadora: Mas quantas vezes nós não fizemos isso com eles?
Ana: Não fez, Andresa...
Maria: Não fez não! Eles não fazem...
Maíra: Mas não é... a gente faz, mas eles (os alunos) não fazem! Às vezes você passa... mas eles...
Pesquisadora: Mas o que falta é também uma reflexão em casa...
[...]
Ana: Potência mesmo... eu lembro do meu professor..., ele deu uma lista de a-z, depois ele deu de 1 a não sei quanto...
Maria: Era assim... 200 exercícios por tarde... tem que fazer!
[...]
Ana: Se fosse 20 desse aqui... igualzinho [...] e vai fazendo... falta esse treino! Na base, falta o treino!
[...]
Pesquisadora: O princípio inicial é entender o que ele está fazendo... porque se ele não entender, ele vai fazer aquilo e não vai guardar, não adianta...
Paulo: A partir do momento que ele saiba fazer isso aí... depois você dá o conceito pra ele!...
Pesquisadora: Não... é o inverso!
Maíra: É o conceito, mas tem que ter a repetição também!
Pesquisadora: A automatização vai facilitar...
[...]
Maíra: A tabuada é, pra mim, um exemplo bem real de que o conceito tem que vir antes da repetição... mas a repetição tem que existir...

Nessa discussão, novamente, os professores manifestaram a valorização do treino das técnicas operatórias na Educação Básica. As professoras Ana e Maria relembraram as práticas de seus antigos professores, as listas de exercícios e as tarefas de casa. A não dedicação dos alunos nas atividades escolares também é evidenciada na fala da Profa. Maria. O professor Paulo afirmou que depois que os alunos soubessem resolver os exercícios, caberia ao professor “dar o conceito pra ele”. Apesar de toda discussão promovida nos encontros, essa concepção foi bastante enraizada em suas experiências e práticas durante anos a fio. A professora Maíra, novamente, fez contrapontos e apresentou o exemplo da tabuada que, para ela, o aluno deve compreender e depois memorizar.

Em relação aos futuros professores de Matemática, como não ministravam aulas, a percepção da forma como concebem a aprendizagem ficou evidenciada através do resgate de suas experiências enquanto alunos da Educação Básica e a problematização dessas práticas.

Durante o 4º encontro, enquanto o grupo trabalhava com o texto “Reconceitualizando as quatro operações fundamentais", de Onuchic e Botta (1998), Juliana defendeu o “treino”:

Juliana: Ah, eu acho que quando eu fiz (O Ensino Fundamental)... tinha todos esses tipos de problemas [...] Não tô dizendo que usava conta de menos pra ajudar no mais... mas já tinha uma ideia... não era tão diferente assim também!
Felipe: Na sala de aula [...] acho que é muito difícil explicar essas ideias para as crianças [...] implícito tá [...] mas nada garante que eles vão tá sabendo... Aí você mostra os probleminhas e eles vão ficar perdidos...
Juliana: Ah, você tem que treinar antes!
[...]
Felipe: Mas eu acho que não é só treinar...
[...]
Juliana: Mas a ideia é você ensinar mesmo o que é adição, né? Você vai ensinar tudo certinho o que é adição, a ideia de juntar...

Por meio da fala de Juliana pode-se perceber que a ideia de que o professor deve treinar seus alunos é bastante forte. Além disso, ela julga que o professor “vai ensinar tudo certinho...”. Mesmo após a apresentação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e da discussão sobre a importância dos alunos construírem seu conhecimento, Juliana, resgatando suas experiências, explicitou que o papel do professor é o de quem ensina e o aluno, passivamente, deve aprender. Dando continuidade à discussão, a futura professora novamente reforça sua posição:

Aline: Conta de dividir mesmo... tem muito aluno que ainda não sabe!
Pesquisadora: Em que série?
Aline: No Ensino Médio mesmo! Na minha sala tinha uns alunos que...
Juliana: É porque não passa muito também... o professor “passa” só um pouquinho e depois não mexe mais!

Nesse momento a *PP* propôs que, nos encontros, o grupo buscasse um “novo olhar”, que o professor seria o mediador de um processo em que o aluno construiria o seu conhecimento. Em todos os encontros, a *PP* buscou resgatar as experiências desses futuros professores e problematizá-las diante dos problemas propostos e da Metodologia trabalhada.

Ao se resgatar a Educação Matemática e as fases pelas quais passou o ensino de Matemática, de acordo com Lambdin e Walcott (2007), a ênfase no cálculo foi enfatizada na década de 1920 e muito aplicada em décadas posteriores. No entanto, a opinião revelada pelos professores e futuros professores sobre o treino no ensino de Matemática mostra que tal ideário ainda pode ser fortemente encontrado em sala de aula hoje.

Ao resgatar as experiências, enquanto alunos da Educação Básica, dos professores e futuros professores de Matemática sobre como aprenderam e como ensinam, eles fizeram uma avaliação desse processo. Novamente, percebe-se que o professor traz crenças anteriores à sua formação inicial, ou seja, como apontam as DCNs para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura: "O aluno chega ao ensino superior com uma vivência e um conjunto de representações construídas" (BRASIL, 2001, p. 4). Esse conjunto de representações e vivências é tão forte que, muitas vezes, o professor de Matemática em exercício ainda resgata as antigas práticas de seus professores e consideram-nas, muitas vezes, adequadas.

No 7º encontro dos professores em exercício, eles se recordaram de como aprenderam a resolver equações:

Maíra: Eu aprendi desse jeito quando eu tava na 6ª série... com a ideia de balança. Então, a professora falava assim: "Tudo que tem num prato da balança, para ficar equilibrada, tudo que você faz de um lado, você tem que fazer do outro". E quando a gente começou a resolver, [...] aí a professora fazia a gente somar... Então, se eu tinha lá $2x + 2 = 3$, eu tinha que escrever -2 do lado de lá e -2 do lado de cá, porque a professora exigia. Eu aprendi assim... então eu tinha que subtrair de um lado e do outro. Somar de um lado e somar do outro... até um momento que a gente começou por conta própria a perceber "Ah mas a gente tá somando aqui, eu não posso só escrever o número negativo do lado de cá?" E aí você começa a pular etapas. Mas eu aprendi assim e isso, pra mim, sempre ficou muito claro. Equação pra mim sempre foi uma coisa muito clara!
Maria: Eu já aprendi equação de um jeito diferente [...] Eu lembro que na primeira parte (primeiro membro da equação) fica o número com letra e na segunda parte, o número sozinho. Só que passar para lá e pra cá você já... (estala o dedo) você já tava muito avançado, então você já sabia. Agora, pro 7º ano eu comecei equações com eles, então eu ensinei dos dois métodos: do meu método e da balança... metade da classe posso dizer... metade não, uns seis alunos já que estão mais rápidos conseguiram "pegar" o meu método, o resto só a balança....

Apesar de serem professores formados há anos, eles ainda se lembram do modo como seus antigos professores ensinaram a resolver equações. A professora Maria optou por ensinar seus alunos através de diferentes métodos. Além disso, os professores lembraram-se de dificuldades sentidas ainda no início do Ensino Fundamental, como apontou a professora Maíra no trecho a seguir:

Maíra: [...] Eu lembro de ter uma regrinha, na 4ª série, que a professora mandou recortar de uma cartolina e a gente tinha escrito metro no meio... aí tinha lá o decímetro, centímetro e o milímetro e ela falava alguma coisa de ir com a vírgula [...] e eu lembro perfeitamente que eu não entendi nada do que era aquilo [...]
[...]
Maíra: E é engraçado que eu tinha a ideia que em um metro cabiam $100cm$, $1000mm$. Mas eu não conseguia fazer a vírgula andar pra lá e pra cá... transformar de um no outro...

Os futuros professores também recordaram como foram suas experiências com Geometria Analítica no Ensino Médio e no Ensino Superior:

Juliana: Eu nem vi como Geometria Analítica...
Aline: Eu também não.
Vítor: Pra mim era Álgebra...
Aline: A professora só passava a matéria... (não tinha aplicações). Não com esse nome...
Pesquisadora: E no Ensino Superior, o que tem de diferente?
Vítor: O vetor, a cônica... a gente, na Geometria Analítica do Ensino Médio... você aprende a calcular a distância... cônica eu nunca vi no Ensino Médio!
Juliana: Eu cheguei a ver... elipse, hipérbole...
Aline: Ah... eu vi pouco!
Juliana: Eu vi pouco, mas vi!
[...]
Vítor: Pra falar a verdade, o que eu vi de Geometria Analítica (no Ensino Superior) não era nada da Geometria Analítica do Ensino Médio [...]
Juliana: Por exemplo: plano, vetor... eu nunca tinha ouvido falar...
Vítor: Estudo do plano, estudo da reta, equação vetorial, cônica, superfície... nada, nada! Pra mim, era outro mundo!
Pesquisadora: Pra você era como se fosse álgebra?
Vítor: [...] O que eu lembro de G.A. do Ensino Médio... a gente calculava distância de ponto a ponto, mas o que eu tinha visto no Ensino Médio e até no cursinho, pra mim, era álgebra... fazer conta... só que de uma forma mais aplicável na Matemática [...] aplicável na Geometria! [...]

Em relação à Geometria Analítica trabalhada nas escolas, de acordo com o que foi pontuado pelos futuros professores, em geral ela aborda apenas os conteúdos relativos a ponto e reta. Não se dá importância ou não há tempo hábil para se trabalhar satisfatoriamente a circunferência e as cônicas. Além disso, os professores parecem não mostrar aos alunos o ganho que a geometria plana teve ao relacionar-se com a Álgebra, criando a Geometria Analítica. Para Teukolsky (1994)

> Tradicionalmente, dá-se pouca importância às secções cônicas nos currículos escolares. É especialmente lamentável não se oferecer esse tópico a alunos talentosos que têm habilidade e argúcia para apreciar sua magia geométrica. Minha proposta é que as secções cônicas sejam focalizadas como um *grand finale* de um rico curso de geometria. Belo e fascinante em seus muitos aspectos, esse assunto oferece uma rara oportunidade para mesclar geometria analítica com geometria sólida, lugares geométricos, triângulos semelhantes, círculos e esferas e assim por diante – uma coletânea de resultados pouco comuns e inesperados. Mostra-se através das cônicas que a geometria é parte de um todo consistente, e não uma disciplina isolada e esotérica. (p. 191).

Sobre as aulas de trigonometria no Ensino Médio, os futuros professores indicaram que o cálculo foi mais enfatizado do que os conceitos trabalhados:

Juliana: Ah... na escola usava esse ciclo trigonométrico [...] seno, cosseno e tangente...

Pesquisadora: E os arcos? As relações?...
Juliana: Eu não lembro! Talvez tenha até demonstrado...
Aline: O meu... foi bem rápida essa parte... acho que arcos (o professor) não passou, foi mais... seno, cosseno e tangente.
Fernanda: Eu estudei no 2º ano e aqui na faculdade, em Aritmética (na disciplina Aritmética e Álgebra elementares).
Pesquisadora: As relações... cos $(a + b)$, essas coisas... a primeira vez que vocês viram foi aqui?
Fernanda: Não! Eu vi na escola! A gente ficou quase o 2º ano inteiro vendo trigonometria. Pelo menos o 1º semestre, eu lembro que ficou inteiro [...] mas viu tudo isso aí: arco duplo, soma de arcos...
Pesquisadora: E vocês lembram se o professor trabalhou o que é a trigonometria? Ou foi simplesmente o cálculo?
Aline: Ah... era mais o cálculo...

Diante do resgate das experiências com professores e futuros professores de Matemática, a *PP* apresentou problemas e os grupos puderam vivenciar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

Pode-se destacar que as aprendizagens iniciadas pela exploração dos problemas não se restringiram ao conteúdo matemático. Elas possibilitaram, como nesta seção apresentada, um processo de recordação e reflexão sobre práticas de ensinar e aprender matemática.

6.2.2 O trabalho com Resolução de Problemas em sala de aula

No 1º encontro do grupo dos futuros professores, a *PP* os questionou sobre a forma como seus antigos professores trabalhavam a Matemática e, em especial, a resolução de problemas.

Juliana: Ele (o professor) usava o livro didático... ele passava a matéria, aí a gente fazia os exercícios que tinha no livro e ele discutia na lousa. Eu acho que funcionava bem!...
Vítor: O meu Ensino Fundamental foi muito superficial, muito mecânico e tradicional. O 1º e 2º ano do Ensino Médio foram um pouquinho melhor, só que continuou com a mesma metodologia. No 3º ano já mudou... a gente começou a trabalhar não mais da forma mecânica[...] não chegava e colocava a fórmula... fazia projetos. Não tenho certeza se trabalhava bem resolução de problemas, mas eu acho que o meu 3º ano não foi totalmente mecânico.
Fernanda: Bom... até o meu 2º ano foi um aluno sentado atrás do outro e o professor na frente ensinando. [...] No fundamental, a maior dificuldade foi com equação, embora eu tivesse uma professora muito boa [...]. Já no Ensino Médio, o meu 1º ano foi muito bom... foi o melhor ano de matemática que eu tive. O 2º ano foi péssimo embora eu tivesse uma professora. No 3º ano, não tive uma professora que se mostrasse como professora [...] eu fazia cursinho na época e [...] eu acabava auxiliando na resolução de exercícios... era aquela coisa assim... meio jogada.

A partir dos relatos dos futuros professores pode-se notar que eles tiveram um ensino de Matemática apoiado no livro didático e bastante tradicional. Com exceção do 3º ano de

Vítor, que trabalhou por meio de projetos, os demais vivenciaram um ensino de Matemática em que o professor passava a teoria e depois, propunha exercícios ou problemas de aplicação.

No 2º encontro desse grupo, que contou com novos integrantes, novamente, foi identificado o modelo teoria – exercícios:

Felipe: (O professor) não trabalhava muito essa parte do descobrir... como resolver problemas. Ele colocava o problema, ele mencionava o que você tinha, o que você poderia fazer e desenvolvia a resolução. Não ficava deixando mais por conta do aluno para buscar como resolver o problema.
Pesquisadora: E você Camila? Como eram as suas aulas de Matemática?
Camila: Conteúdo e (o professor) passava exercícios.
Pesquisadora: E você Aline?
Aline: O professor passava conteúdo, dava uma lista para fazer exercícios e, na aula seguinte, discutia soluções... (com) quem fez.

O professor de Felipe parece ser o único, nesse grupo de futuros professores, que trabalhava resolução de problemas. No entanto, a perspectiva adotada por ele é a do ensino de Matemática *via* Resolução de Problemas. Nela, o problema era apresentado mas os alunos não o utilizavam para a construção do conhecimento matemático novo, mas como motivação e em seguida, mostrava ao aluno os dados, as estratégias possíveis e fornecia-lhes a resposta.

Os futuros professores também foram questionados sobre a forma como pretendem dar suas (futuras) aulas de matemática e se pretendem fazer uso da resolução de problemas:

Vítor: Eu já pensei... eu penso não em fazer licenciatura para trabalhar no ensino público (Educação Básica)... eu penso mais em cursinhos populares, cursinho pré-vestibular... e lá é muito difícil você trabalhar com outra metodologia de ensino porque você tem a correria e é muito mecânico, é muito chato! Você fica com uma vontade de fazer alguma coisa diferente, trabalhar até mesmo com resolução de problemas, só que é difícil... você tem que passar o conteúdo inteiro do Ensino Médio [...]
Fernanda: [...] Eu acho que numa escola já estruturada com o conteúdo que tem que ser dado assim, tem que usar o livro didático, tem que usar o caderno do professor, com todo um sistema já estabelecido [...] eu acho que fica difícil, mesmo se eu quero dar todo o conteúdo de maneira diferenciada, né? [...] mas eu acho que, em determinados assuntos, a gente tem que fazer isso... os assuntos que são mais difíceis pro aluno enxergar e que você tenha a possibilidade de proporcionar um ambiente diferente [...]
Juliana: Eu quero dar (aula) que nem meu professor fazia mesmo... eu acho que funcionava! Ele não era... com pressa! Dava a teoria... só que ele ia explicando, ia falando, mostrando como que chegava. [...] (Então, penso em dar) exercício resolvido pra explicar melhor e tacar exercício neles!

Por meio desses excertos pode-se perceber que os futuros professores parecem encontrar dificuldade em desenvolver um trabalho apoiado em uma Metodologia diferenciada, como a proposta neste trabalho. Além disso, carregam fortemente concepções sobre ensino e aprendizagem pautadas em suas experiências prévias, enquanto alunos da Educação Básica. Desse modo, corroborando com Gonçalves e Gonçalves (1998) e com Brasil (2001), a licenciatura mostra-se como um espaço de "reeducação", no sentido de que esses futuros professores já têm uma forte experiência anterior sobre sala de aula e trazem concepções sobre ensino, aprendizagem e docência que precisam ser (re)construídas.

Os futuros professores evidenciaram, com base em suas experiências, que os alunos da Educação Básica precisam de novas experiências e destacaram que o modelo de aula em que um fica sentado atrás do outro, de modo passivo, não agrada o aluno. Daí a importância de possibilitar que os licenciandos tenham experiências matemáticas por meio de metodologias alternativas, como propôs D'Ambrósio (1993).

No grupo dos professores de Matemática em exercício, buscando resgatar como a Resolução de Problemas é trabalhada em suas salas de aula, foi solicitado que eles respondessem a um questionário sobre o assunto[47]. As respostas obtidas indicam diferentes formas de trabalho com resolução de problemas:

1- Ensinar para resolver problemas

> **Professor 3:** "As situações- problemas restringem-se a aplicação do conteúdo estudado à situações práticas (direcionado unicamente ao conteúdo). Evito problemas abertos"

Para esse professor, a resolução de problemas aparece como aplicação da teoria. Ao evitar problemas abertos, ele espera a resposta certa por parte do aluno que dificilmente poderá buscar novas estratégias e encaminhamentos ao problema.

2- Ensinar via resolução de problemas

> **Professor 4:** "Começo usando um exemplo do dia a dia, através de uma história ou acontecimento".

Essa forma de trabalhar a resolução de problemas caracteriza um ensino em que apesar do professor apresentar um problema como ponto de partida, ele serve apenas como motivação. A teoria matemática não é construída pelos alunos, mas apresentada, na sequência, pelo professor.

[47] Os questionários (Apêndice A) não foram identificados.

3 – Construindo novas possibilidades

> **Professor 2:** "Procuro organizar a sala de maneira coerente onde todos os alunos possam interagir e conseguir partindo disso elaborar e concluir a situação apresentada".

> **Professor 5:** "Através de leitura coletiva e discutindo possíveis soluções coletivamente".

> **Professor 7:** "Priorizando a leitura e interpretação do enunciado junto aos alunos".

Esses professores parecem buscar novas possibilidades de trabalhar resolução de problemas em sala de aula. O enfoque é a construção coletiva, a interação e compreensão do problema. No entanto, é preciso destacar que o professor é o mediador desse processo e deve possibilitar que os grupos discutam e construam suas estratégias, antes da formalização do conteúdo.

Um dos professores indicou, ainda, dúvidas em relação ao trabalho com resolução de problemas dentro da proposta do estado de São Paulo:

> **Professor 6:** "Com os caderninhos do ensino médio, a resolução de problemas está mais enfatizada, pois sempre utilizamos problemas para ensinar, mas sem a certeza de estarmos trabalhando a resolução de problemas".

O questionário abordou, ainda, como os alunos da Educação Básica reagem diante de um problema proposto durante a aula e qual seria a maior dificuldade apresentada por eles. Os professores afirmaram que:

> **Professor 1:** "Os alunos não gostam pois têm que pensar, requer conhecimentos passados e motivação para o desenvolvimento. A maior dificuldade deles é lembrar dos conhecimentos passados e isso os leva a perda de interesse durante a resolução".

> **Professor 5:** "A minoria gosta e a maioria reclama e espera respostas prontas. A maior dificuldade é identificar os dados já fornecidos nos problemas e articulá-los para encontrar a solução".

Esses dois professores acreditam que os alunos não gostam de resolver problemas pois eles têm que pensar. A atitude de "esperar respostas prontas" foi novamente destacada pelos professores. No entanto, é comum essa reação se os alunos não estão acostumados a resolver problemas. O professor deve insistir nesse trabalho, mediando e estimulando os grupos.

Apenas dar tempo e deixar os alunos trabalharem sozinhos, se eles não são acostumados ou nunca foram ensinados a trabalhar em grupos, realmente, parece não gerar resultados satisfatórios. É o que indicam as respostas a seguir:

> **Professor 2:** "A maior dificuldade é raciocinar e interpretar o problema. São raros os alunos que conseguem trabalhar os problemas propostos sem a minha intervenção".
>
> **Professor 3:** "Em geral sinto dificuldade em estimular o interesse pela situação-problema, isto significa que o tempo dado para resolução acaba por "dispersar" a atenção do aluno.
> Alguns alunos julgam que o tempo dado à resolução de alguma situação-problema é perdido.
> A compreensão é a maior dificuldade e, posteriormente, a associação a algum conceito matemático".

Além da dificuldade em trabalhar resolução de problemas com seus alunos, o professor 3 afirmou que "a compreensão é a maior dificuldade e, posteriormente, a associação a algum conceito matemático", reforçando que não promove a construção dos conceitos por parte dos alunos. Outros obstáculos à resolução de problemas, apresentados pelos professores, refere-se à leitura e à interpretação do problema:

> **Professor 6:** "A maior dificuldade é a leitura e interpretação do problema".
>
> **Professor 7:** "Muitas vezes há uma rejeição por parte dos alunos, pois percebo que os alunos apresentam dificuldade em realizar a interpretação matemática do problema, ou seja, a dificuldade encontra-se na leitura e interpretação do enunciado, diferente de uma interpretação de texto em língua portuguesa".

Durante o 3º encontro, o grupo aprofundou essa discussão. A professora Cecília disse que, para ela, os alunos não tinham dificuldade em resolver o problema e sim em interpretar seu enunciado. A dificuldade do aluno estaria ligada à Língua Portuguesa, já que alguns não sabiam ler corretamente. Os professores discutiram se a interpretação do problema já não faria parte de sua resolução:

Cecília: Mas o que tá faltando pra eles (os alunos) é ler e interpretar pra poder resolver um problema.
Pesquisadora: E ler e interpretar não faz parte da resolução?
Todos: Faz!
Pesquisadora: Faz parte da resolução... Entendendo que a resolução não é só o cálculo...

(...)
<u>Cecília</u>: Agora, a gente é da Matemática... vocês concordam comigo que se tem que fazer um trabalho diferenciado em português com esses alunos? [...] Eu acredito que sim...
<u>Otávio</u>: Eu particularmente vejo o seguinte: A questão da compreensão do problema, na minha opinião... a gente fala assim “Ah, tem que interpretar...” [...] Eu vejo que tem a ver com a ideia mesmo [...] mas o problema mesmo, da compreensão do problema, é a pessoa não saber matemática! Porque a compreensão (se existir) você consegue montar estratégias, a partir daquilo que você sabe sobre matemática e a maneira como você enxerga o problema... eu acho que é de acordo com as experiências matemáticas que você tem [...] A interpretação de como você lê o problema, como você recebe essa questão, como você vai interpretando o problema enquanto você o lê... você já vai criando esquemas matemáticos, né?... eu acho que essa interpretação já vem carregada de uma certa simbologia pra quem tem conhecimento, pra quem tem esquemas estabelecidos. Acho que a compreensão do problema tem a ver com sua experiência matemática.

Os professores puderam concluir que a dificuldade não é só com a leitura das palavras mas, também, com a interpretação matemática do problema, pois a Língua Portuguesa e a Matemática têm formas diferentes de se expressar. Cabe, no entanto, que o professor de Matemática auxilie seus alunos na interpretação da linguagem e do enunciado de um problema.

Diante dessa discussão, o professor Carlos desabafou e lembrou o grupo da importância da motivação e do comprometimento por parte dos alunos na construção de seus próprios conhecimentos:

<u>Carlos</u>: Olha, tudo isso aí parte de um princípio fundamental... é que o aluno tenha vontade! [...] Eu tenho uma classe aí de 30 e tantos alunos e tem dois que se interessam a copiar o que eu coloco na lousa. O restante, quando formam grupos, ... formam pra brincadeiras, pra pegar celular. E você vai tentar motivar. Você senta com eles e fala “O que vocês querem? No dia a dia vocês vão precisar disso! Se vocês não querem a Matemática que é a tradicional, a gente faz o que vocês precisam!” Eles cruzam o braço e começam a tirar um sarro da tua cara. Então, quer dizer, eu, não discutindo, eu acho que é importante pra gente colocar esses parâmetros, mas pra nossa realidade... eu acho complicado...
<u>Pesquisadora</u>: Eu não tô trazendo aqui nada pronto e acabado... eu quero justamente essa discussão: o que vocês pensam sobre isso? O que dá pra fazer?

A professora Ana concordou com o professor Carlos, mas ponderou afirmando que é preciso buscar novas alternativas e não apenas se lamentar:

<u>Ana</u>: Mas aí eu faço outra pergunta... eu concordo plenamente com o que você falou... e o que fazer? Porque se eu continuar pensando que eu também, que sou mais nova que o senhor, que estudava porque meu pai falava “Ah, se você estudar, você não vai ser que nem o pai... você vai ter um futuro melhor!” tá... hoje, a gente percebe que não necessariamente eu preciso disso... ou porque o mercado tá saturado ou porque eu consigo por outros meios... ou sendo um melhor balconista eu consiga me manter... porque a sociedade mudou: o que eu tive que comprar há 20 anos pra estudar, hoje é dado pela escola... mas aí, eu enquanto professora na sala de aula... você trabalha como antigamente, como meu professor de Matemática fazia ou não? Eu acho que essa é a intenção da Andresa, da gente parar e pensar “Bom, então como é que eu tenho que fazer?” [...]

Durante o decorrer dos encontros, os professores demonstraram certa resistência em mudar a forma de trabalhar com resolução de problemas e de abordar o conteúdo matemático. No 9º encontro, ao trabalhar as diferentes "personalidades" dos Números Racionais, a professora Maíra afirmou que:

Maíra: Sinceramente, a não ser que a pessoa vá ser um acadêmico... vá estudar e se aprofundar na Matemática... (senão) eu não vejo necessidade de um aluno diferenciar esses conceitos. Pra gente sim! (Deve-se) estudar isso aqui e se aprofundar... mas não acho que o aluno... eu acho que se ele souber trabalhar com os números, se ele souber usar esses números, essas frações, os quocientes para resolver situações-problema... ele não tem que ter essa filosofia de saber a diferença entre uma razão, uma fração... essa conceitualização toda que a gente discute...
Pesquisadora: Mas nós, como professores, precisamos trabalhar problemas que abordem cada uma dessas personalidades!
Maíra: Ah sim! Ele tem que saber usufruir disso, eu acho...

A professora Maíra considerou, por exemplo, que só os acadêmicos precisariam saber essa diferenciação dos conceitos. Para ela, os demais precisariam saber resolver os problemas. Implicitamente, a professora revelou que não percebe o problema como um gerador do conceito, mas apenas como uma ferramenta de aplicação. Mas como o aluno poderia resolver o problema sem buscar o conceito? A prática antecederia o conceito? Em contrapartida a essa posição Behr et al (1992) indicam que:

> Da perspectiva da pesquisa e desenvolvimento curricular, o problema é descrever essas personalidades com clareza e profundidade suficientes para que a organização de experiências de aprendizagem com crianças tenha uma firme fundamentação teórica. (p. 296).

Ao concluir essa seção pode-se considerar que as aprendizagens docentes em relação a um processo de mudança na forma de trabalhar e de pensar a resolução de problemas foram possibilitadas. Entretanto, tais mudanças ocorrem lentamente, sendo potencializadas pelos grupos de estudo, em um processo de discussão e negociação de significados. Durante esse tempo, também devem ser consideradas questões relacionadas à visão de mundo, de escola e do homem que está sendo formado, por parte dos professores e futuros professores de Matemática.

6.2.3. O trabalho em grupo na sala de aula

Sobre o trabalho em grupo, no interior da sala de aula da Educação Básica, os licenciandos relataram que essa forma de trabalho é mais comum na graduação. Disseram que, na Educação Básica, poucas vezes trabalharam realmente em grupos, discutindo resultados ou tirando dúvidas com os colegas, principalmente nas aulas de Matemática. Geralmente, para eles, na Educação Básica, trabalho em grupo é sinônimo de bagunça e barulho.

Felipe: No colégio (Ensino Médio) poucas vezes eu trabalhei em grupo, principalmente nas aulas de Matemática.
Camila: Na verdade trabalhar em grupo na escola é quando um vai tirar dúvida com o outro...
Fernanda: E muitas vezes o professor lá no Ensino Fundamental acha que formar grupos é bagunça...

Os professores em exercício também demonstraram dificuldade em conduzir e ensinar os alunos a trabalharem em grupo:

Otávio: Essa história de grupo é complicada porque a primeira ideia que a pessoa pensa do grupo é assim: “Você faz e eu copio!” Isso é o que a gente vê na prática...[...] eu não sei se é uma característica pessoal mas os alunos que têm mais facilidade com Matemática, geralmente, eles gostam de resolver sozinhos...
[...]
Ana: Só na hora que ele termina é que tenta ajudar o colega...

Por meio dos excertos de professores e futuros professores de Matemática pode-se perceber a dificuldade em conduzir um trabalho em grupo durante as aulas. Além disso, os alunos parecem ter se acostumado a trabalhar individualmente porque não foram orientados a compartilhar saberes e explicar suas formas de pensar aos demais colegas. Nesse sentido, Burns e Silbey (2000) afirmam que possibilitar aos alunos um trabalho cooperativo é muito importante. Para as autoras, a Matemática faz sentido quando os alunos aprendem e precisam de muitas oportunidades para falar sobre o que estão pensando ou como estão raciocinando, o que em grupos com frequência, ocorre. Dessa forma, quando trabalham em grupos, os alunos falam sobre suas ideias e aprendem com as ideias dos outros.

É necessário que o professor ensine os alunos a trabalhar em grupos:

> De fato, apenas colocar os alunos em grupos não garante a aprendizagem. Em primeiro lugar, você vai precisar trabalhar com os alunos para que eles tenham orientações claras para serem um membro produtivo de um grupo cooperativo, seja uma dupla de crianças ou um grupo de três, quatro ou cinco alunos. Uma expectativa importante é que todos os alunos num grupo participem e entendam o que o grupo está fazendo. Além disso, você deveria ser capaz de questionar qualquer membro do

> grupo a qualquer momento e obter um relato sobre o progresso do grupo[48]. (BURNS; SILBEY, 2000, p. 25).

Quando os grupos estão trabalhando, o professor deve circular entre eles e ouvi-los. Para Burns e Silbey (2000) e na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, essa é uma maneira de compreender como os alunos estão pensando. Isso permite que o professor perceba quando os grupos estão com dificuldades e possa ajudá-los. Além disso, ter uma discussão posterior (plenária) é fundamental para que os alunos ouçam sobre como os outros grupos trabalharam e o que descobriram.

A partir da discussão da Metodologia e do apelo ao trabalho em grupos nas aulas de Matemática, alguns professores como é o caso de Maria, deram indícios de uma tentativa de mudança em suas formas de trabalhar:

Pesquisadora: Daí a importância da Metodologia (discutida no encontro anterior) ... por que se o aluno está em um grupo e conta para o colega, ele vai ter que explicar... e, às vezes, o colega tem mais facilidade em te explicar do que o próprio aluno.
Maria: Foi o que eu fiz essa semana! Eu fiz isso e funcionou... Eu dei várias divisões e disse "Olha, vocês estão no grupo porque um vai ajudar o outro a resolver e eu quero que vocês me deem o resultado de todas essas divisões. [...] Um foi ajudando o outro e um ainda falou assim "Ai Dona, o fulano de tal, o Henrique, eu acho que ele aprende melhor comigo do que com o Vinícius". Então, eles estavam até um discutindo com o outro... [...] dá sim pra trabalhar!

Nesse sentido, Araújo e Borba (2004) corroboram com as ideias sobre trabalho em grupos aqui apresentadas ao afirmarem que "Um trabalho em grupo permite que diversos focos sejam escolhidos, diversos procedimentos sobre o mesmo foco sejam utilizados, proporcionando uma perspectiva mais global de um fenômeno estudado" (p.38).

Apesar da dificuldade sentida pelos professores e futuros professores de Matemática em conduzir um trabalho em grupo, todos concordaram com sua necessidade:

Felipe: Trabalho em grupo... eu acho que tem que ser bem preparado para você conseguir manter o controle da sala, para ser eficiente a atividade. Senão, é muito fácil perder-se na atividade, principalmente quando se está trabalhando em grupo... é muito arriscado! Mas tem que ter!

Juliana: Tem coisa, na sala de aula, que é muito mais fácil trabalhar em grupos!

---

[48] *Of course, merely putting students in groups doesn´t guarantee learning. First of all, you´ll need to work with students so that they have clear guidelines for being a productive member of a cooperative group, whether it be a pair of children or a group of three, four, or five students. An important expectation is that all of the students in a group participate and understand what the group is doing. Also, you should be able to question any group member at any time and get a report on the group´s progress.*

Ana: A gente não consegue passar e trabalhar com o aluno o que é “trabalho em grupo”... mas hoje e daqui pra frente essa é a ideia! Uma tendência... mas que hoje nossa escola não prepara!

A partir dos trechos acima apresentados, é possível perceber a responsabilidade do professor ao propor trabalho em grupos. É ele quem deve ensinar a seus alunos os objetivos do trabalho que está sendo desenvolvido. Além disso, apesar de “arriscado”, como se refere Felipe, se bem conduzido pode promover cooperação e colaboração entre os alunos, produzindo conhecimento para todos e esses são aspectos fundamentais em um trabalho em grupo.

Neste segundo eixo temático, os professores e futuros professores de Matemática puderam refletir sobre a forma como a Matemática é ensinada e sobre a Resolução de Problemas e o trabalho em grupo. O conhecimento pedagógico do conteúdo foi mobilizado durante as reflexões e as aprendizagens profissionais mostraram que os docentes, lentamente, apresentaram novas ressignificações sobre suas práticas. Dentre as aprendizagens destacam-se: puderam aprender que Resolução de Problemas, através da proposta que lhes foi apresentada, envolve uma Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática; e que o trabalho em grupo pode ser um recurso para a construção de conhecimentos em sala de aula, em direção a uma comunidade de aprendizes de Matemática (VAN DE WALLE, 2009).

O terceiro eixo temático dessa pesquisa irá analisar, mais profundamente, as vivências promovidas pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na formação de professores.

6.3 Eixo 3: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na formação do professor de Matemática.

Este terceiro eixo temático contempla a aplicação da Metodologia pelos professores em exercício e futuros professores de Matemática. Serão apresentados os problemas trabalhados pelos professores em sala de aula e pelos futuros professores no último encontro do grupo de estudo.

Destaca-se, ainda, que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas permeou os encontros dos grupos de estudo, possibilitando reflexões, discussões e ressignificações do conhecimento matemático e didático-pedagógico entre os professores e futuros professores. Eles puderam vivenciar a Metodologia como um novo caminho não apenas para a construção de conhecimento novo mas, também, para a formação de professores.

6.3.1 A Metodologia implementada pelos professores em formação inicial.

Nos 6º e 15º encontros, em duplas ou individualmente, os futuros professores trabalharam problemas fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Serão apresentados, a seguir, cada um dos problemas trabalhados pelos futuros professores, bem como os encaminhamentos dados por eles.

A experiência de Fernanda

Antes do 6º encontro, Fernanda pediu autorização para a *PP* para aplicar, no grupo, uma atividade que ela pretende desenvolver no mestrado. Considerando-se que uma das ações apoiadas num grupo de estudo colaborativo é suprir as necessidades de seus integrantes e apoiar iniciativas, foram disponibilizados os trinta minutos finais para que ela realizasse seu trabalho, recomendando-lhe que fizesse uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

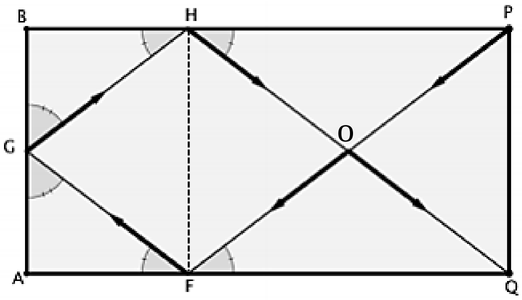
Fernanda dividiu a turma em grupos: G1 – Aline e Juliana, G2- Andresa, Camila e Felipe. A futura professora comentou sobre a história da criptografia e apresentou aos grupos um problema. A situação apresentada envolvia o sequestro de crianças, Sherlock Holmes e uma carta criptografada deixada por ele. O grupo deveria, a partir de um alfabeto fixo "descriptografar" a carta, interpretar o que se pedia no problema e buscar um padrão ou lei matemática que relacionasse os dois alfabetos (fixo e criptografado).

O problema trabalhado por Fernanda recaiu em uma função. Foi possível explorar a ideia de variável dependente (letra no alfabeto criptografado) e de variável independente (letra no alfabeto fixo) a partir desse problema, bem como a ideia de Álgebra Funcional.

Outros dois problemas foram trabalhados no 10º encontro por Vítor e pela dupla Aline e Juliana:

O Problema 1 – Vítor

(UNICAMP, 2013, 1ª fase) Em um aparelho experimental, um feixe laser emitido no ponto P reflete internamente três vezes e chega ao ponto Q, percorrendo o trajeto PFGHQ. Na figura abaixo, considere que o comprimento do segmento PB é de $6cm$, o do lado AB é de $3cm$, o polígono ABPQ é um retângulo e os ângulos de incidência e reflexão são congruentes, como se indica em cada ponto da reflexão interna. Qual é a distância total percorrida pelo feixe luminoso no trajeto PFGHQ?



Como Vítor trabalhava em um cursinho pré vestibular, apresentou ao grupo um problema que, para ele, poderia explorar muitos conceitos. Esse futuro professor também deu suporte a alguns problemas secundários surgidos:

Juliana: Eu não sei o que eu posso fazer nisso aqui...
Aline: É um quadrado?
Fernanda: É um quadrado porque esses ângulos são iguais...
Juliana: Não! Os ângulos não são iguais!
Fernanda: [...] Não... tá tudo errado!
Vítor: Se é quadrado a gente tem que ver se as medidas dos lados são iguais, né?
[...]
Andresa: $\overline{BH}$ é igual a $\overline{BG}$?
Juliana: Então... não sei ainda!
Vítor: Se for... aí você tem que provar! Que é igual...
Fernanda: Mas você pode ter que G é o ponto médio de $\overline{AB}$?
Andresa: G é o ponto médio!
Fernanda: O que garante?
[...]
Vítor: Pensa aí um pouquinho...

Como o grupo naquele dia contava com cinco integrantes, Vítor trabalhou com duas duplas: Fernanda e Andresa e Aline e Juliana. As duplas foram trabalhando o problema e, algumas vezes, discutindo entre elas, e Vítor acompanhava e, se necessário, fazia pequenas intervenções:

Fernanda: O que você pensou em fazer? (Pergunta para Juliana)
Juliana: Eu não sei fazer esse...
Andresa: O que falta?
Juliana: Encontrar mais duas medidas aqui...
Vítor: O que você encontrou?
Juliana: [...] o ideal seria usar Pitágoras aqui... se eu tivesse o $\overline{AF}$ aqui... se eu tivesse ele, já sai...
Vítor: E não dá para você encontrar o $\overline{AF}$ aí?
Fernanda: Se isso aqui é x ($\overline{FQ}$), ($\overline{AF}$) seria $6 - x$...
Juliana: Então... isso eu sei!
Andresa: Então vai...
Juliana: Mas eu já fiz e não saiu...

Vítor, enquanto as duplas resolviam o problema, se dizia surpreso, pois Fernanda e Andresa estavam pensando de um jeito que ele nunca havia pensado. Andresa auxiliou a dupla Aline e Juliana:

Andresa: Qual a relação entre o ΔGAF e o ΔPQF, por exemplo? Eles são semelhantes? Eles são congruentes? ... Porque se forem você pode usar uma relação e descobrir o valor que está faltando...
Juliana: Eu não lembro as relações! Se eu lembrasse...
Aline: É aquele caso ALA?
Andresa: ALA é isso aqui...
Aline: Então... são dois ângulos congruentes e um lado comum... mas de semelhança... é um lado que é proporcional... aí vai dar...
Juliana: Então faz aí...
[...]
Aline: A gente achou que essa medida ($\overline{GA}$) é duas vezes essa ($\overline{BA}$)...
Andresa: Beleza!
Vítor: Beleza!
Andresa: O que você estava fazendo? $\frac{3}{1,5}$ ... só que aqui, ao invés de você chamar de y, usa a relação usando x... senão você não sai... você terá uma coisa (incógnita) a mais. Então, é $6 - x$ aqui, né?
Aline: Só que essa parte ($\overline{FQ}$) seria $6 - x$?
Andresa: ou x...

Durante a plenária, Vítor solicitou que as “alunas” fossem até a lousa e explicassem como haviam pensado.

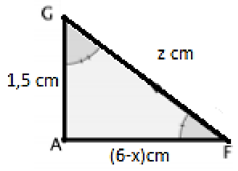
Fernanda partiu da definição de losango, que é uma figura formada por segmentos congruentes e paralelos dois a dois. Então, $\overline{GF} = \overline{HO}$ e $\overline{OF} = \overline{GH}$. Considerando-se que as diagonais do retângulo interceptam-se no ponto médio O, então, no retângulo $HFQP$ tem-se que $\overline{FO} = \overline{OP}$ e $\overline{OQ} = \overline{OH}$. Sabe-se, assim, que $\overline{FO} = \overline{OP} = \overline{GH}$ e $\overline{OQ} = \overline{OH} = \overline{GF}$. Pelo caso de congruência LAL, tem-se que $\overline{OH} = \overline{FO}$ e, então, que $\overline{FO} = \overline{OP} = \overline{GH} = \overline{OQ} = \overline{OH} = \overline{GF}$.

Para descobrir uma dessas medidas, Fernanda considerou o ΔAGF, que é um triângulo retângulo. Logo, por Pitágoras:

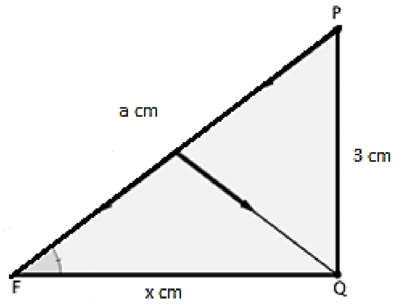
$$z^2 = 1{,}5^2 + (6 - x)^2$$

$$z^2 = 2{,}25 + 36 - 12x + x^2$$

$$z^2 = x^2 - 12x + 38{,}25$$



Tomando-se o ΔPQF, tem-se que:



Por Pitágoras, $a^2 = 3^2 + x^2$

Como $a = 2z$

$$(2z)^2 = 3^2 + x^2$$

$$4z^2 = 3^2 + x^2$$

Mas , $z^2 = x^2 - 12x + 38{,}25$

Então $4(x^2 - 12x + 38{,}25) = 3^2 + x^2$

$$4x^2 - 48x + 153 = 9 + x^2$$

$$4x^2 - x^2 - 48x + 153 - 9 = 0$$

$$3x^2 - 48x + 144 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, tem-se que $x = 4\ cm\ ou\ x = 12\ cm.$

Para $x = 4cm$, z assume o valor de $2{,}5cm$. Para $x = 12\ cm$, z assume o valor $\sqrt{38{,}25}cm$, o que não é possível já que é maior que o valor do lado que $\overline{AQ} = 6cm.$

Assim, Fernanda concluiu que a trajetória total percorrida pelo feixe luminoso foi de $6.\,2{,}5\ cm = 15cm.$

Apesar da discussão sobre a importância das unidades de medida, Fernanda as utilizou apenas na resposta do problema.

Aline e Juliana utilizaram as relações entre os triângulos semelhantes PQF e GAF. Aline explicou como pensaram:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{FQ}}{\overline{AF}}$$

$$\frac{3\ cm}{1{,}5cm} = \frac{x\ cm}{(6-x)cm}$$

$$3.(6-x) = 1{,}5\ x$$

$$18 - 3x = 1{,}5x$$

$$4{,}5x = 18$$

$$x = \frac{18}{4{,}5} = 4 \text{ cm}$$

Concluiu-se, assim, que $\overline{FQ} = 4cm$ e que $\overline{AF} = (6-x)cm = 6\ cm - 4cm = 2cm$.

Considerando-se o triângulo retângulo PQF, por Pitágoras, tem-se:

$$(\overline{FP})^2 = (\overline{PQ})^2 + (\overline{FQ})^2$$

$$h^2 = 4^2 + 3^2$$

$$h^2 = 16 + 9$$

$$h^2 = 25 \rightarrow h = 5$$

Desse modo, a trajetória $\overline{PF}$ e a trajetória $\overline{HQ}$ medem $5cm$ cada. Resta saber ainda quanto medem $\overline{HG}$ e $\overline{GF}$. Considerando-se o triângulo retângulo GAF, por Pitágoras, tem-se:

$$(\overline{FG})^2 = (\overline{GA})^2 + (\overline{FA})^2$$

$$y^2 = 1{,}5^2 + 2^2$$

$$y^2 = 2{,}25 + 4$$

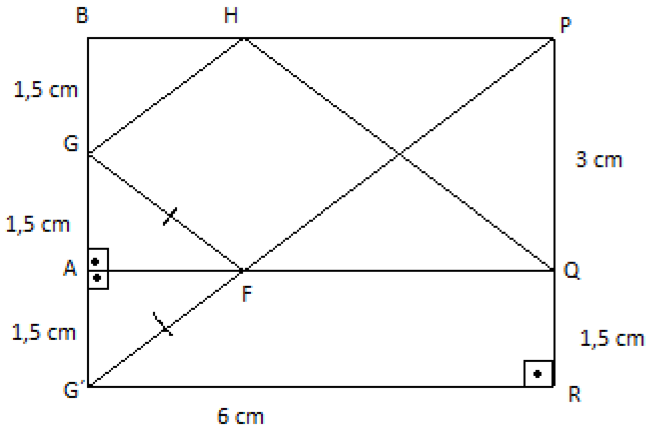
$$y^2 = 6{,}25 \rightarrow y = 2{,}5$$

Obtiveram-se assim as medidas $\overline{GF}$ e $\overline{GH}$ que, pelo caso ALA da congruência dos ΔHGB E ΔFGA, são iguais e medem $2{,}5cm$ cada.

Concluiu-se, assim, que a distância total percorrida pelo feixe luminoso foi que $\overline{PF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HQ} = 5cm + 2{,}5cm + 2{,}5cm + 5cm = 15cm$.

Vítor, ao formalizar o problema, apresentou ao grupo duas maneiras diferentes de resolver o mesmo problema:

Inicialmente, Vítor considerou um prolongamento do segmento $\overline{PF}$ e desenhou o $\Delta AG'F$, congruente por ALA ao ΔAGF. Desse modo, $\overline{PG'}$ representa metade da distância percorrida pelo feixe luminoso:



Por Pitágoras: $\overline{PG'}^2 = 6^2 + (3 + 1{,}5)^2 \rightarrow \overline{PG'}^2 = 36 + 20{,}25 \rightarrow \overline{PG'}^2 = 56{,}25$

$$\therefore \ \overline{PG'} = 7{,}5\ cm$$

Concluiu-se, desse modo, que a distância total percorrida pelo laser é :

$$2.\,7{,}5cm = 15cm$$

A segunda maneira indicada por Vítor é parecida com a feita por Aline e Juliana.

Usando a relação $\frac{\overline{PQ}}{\overline{GA}}$, tem se que 2 é a razão de semelhança. Assim:

$\frac{\overline{PH}}{\overline{BH}} = 2 \rightarrow \overline{PH} = 2.\overline{BH}$ e como $\overline{PH} + \overline{BH} = 6cm$, pode-se concluir que $3\overline{BH} = 6$ e, portanto, $\overline{BH} = 2cm$ e $\overline{PH} = 4cm$.

Do triângulo retângulo PHQ, tem-se: $\overline{HQ}^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow \overline{HQ} = 5cm$. Analogamente, do triângulo PQF, tem-se: $\overline{PF}^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow \overline{PF} = 5cm$.

E, ainda, como os triângulos BHG e GAF são retângulos:

$$\overline{HG}^2 = 2^2 + 1{,}5^2 \rightarrow \overline{HG} = 2{,}5cm \text{ e}$$

$$\overline{GF}^2 = 2^2 + 1{,}5^2 \rightarrow \overline{HG} = 2{,}5cm$$

Portanto, a distância percorrida pelo feixe luminoso é dada por:

$$\overline{PF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HQ} = 5\ cm + 5cm + 2{,}5cm + 2{,}5cm = 15cm$$

Todo o grupo percebeu a quantidade de conceitos possíveis a serem trabalhados por meio desse problema: Critérios de semelhança e congruência, razão entre segmentos, Teorema de Pitágoras, ângulo de incidência e reflexão, diagonais, losango, retângulo, quadrado, dentre outros. Ficou evidente que, dependendo da turma e dos objetivos do professor, é possível trabalhar um ou mais desses conceitos destacados.

Vítor apresentou um problema que foi motivador para o grupo e possibilitou o uso de estratégias diversas. Além disso, o problema envolveu muitos conceitos geométricos. Essa abordagem apresentada por Vítor trabalha a Geometria através de um problema, diferente de como esse conteúdo tem sido desenvolvido:

> Com muita frequência a geometria é considerada pelos professores da escola elementar simplesmente como o estudo de *retângulos, segmentos de reta*, *ângulos, congruência* e coisas do gênero. Os professores do jardim-de-infância ensinam a reconhecer figuras (círculos, quadrados e triângulos) do mesmo modo como ensinam a reconhecer letras e números. Mesmo nas séries intermediárias, a geometria muitas vezes é negligenciada até o fim do ano, quando então, às pressas, introduzem-se algumas figuras e termos e fazem-se alguns exercícios. (DANA, 1994, p. 141).

O Problema 2 - Aline e Juliana

Quais são as raízes da equação $x^2 - 14x + 48 = 0$? Esboce o gráfico, considerando o que significam os coeficientes $a = 1,\ \ b = -14\ \ e\ \ c = 48$.

Após a proposição desse problema por Aline e Juliana, o grupo questionou as futuras professoras sobre o enunciado apresentado:

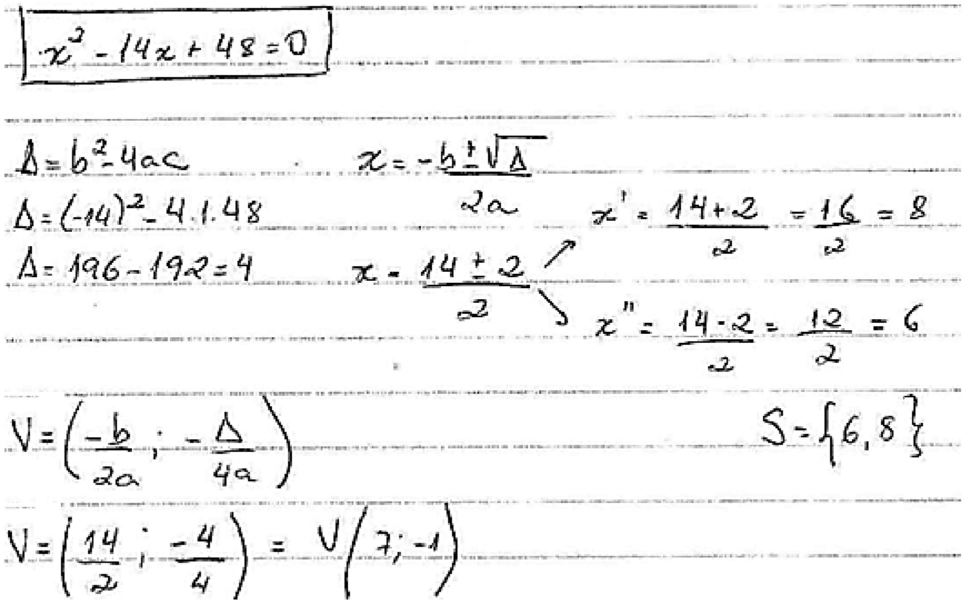
<u>Vítor</u>: Não seria certo, ao invés de colocar equação colocar função? Eu achei estranho vocês falarem de equação e de esboço do gráfico.

A dupla afirmou que o problema havia sido retirado da internet e que estava proposto dessa maneira. O grupo quis deixar mais claro o enunciado e o apresentou da seguinte maneira:

“Quais são as raízes da equação $x^2 - 14x + 48 = 0$? Esboce o gráfico da função relacionada, considerando o que significam os coeficientes $a = 1,\;\; b = -14\;\; e\;\; c = 48$.”

Em seguida, o trio Andresa, Fernanda e Vítor resolveu o problema utilizando diferentes estratégias. Andresa determinou as raízes da equação $x^2 - 14x + 48 = 0$ por meio da Fórmula de Bháskara e o vértice da parábola através da fórmula: $V = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Nesse momento, a *PP* estava no papel de integrante do grupo.

Figura 33 – Parte da resolução do problema de Aline e Juliana, por Andresa.



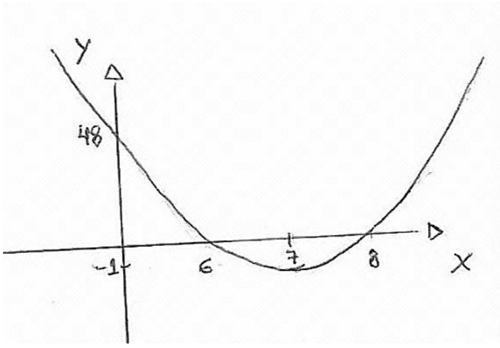
Fonte: Dados da pesquisa.

Fernanda e Vítor, que estavam sentados um ao lado do outro, começaram uma discussão entre si:

<u>Fernanda</u>: Como você acha o mínimo ou o máximo de uma função?
<u>Vítor</u>: $\frac{-b}{2a}$ ...
<u>Fernanda</u>: Não... você tá na faculdade! Deriva e iguala a zero!...
<u>Vítor</u>: Mas eu achei $\frac{-b}{2a}$ porque eu derivei e igualei a zero! (risos)
<u>Fernanda</u>: Achei que você tava pensando na regrinha...

Após essa discussão, Fernanda e Vítor determinaram as raízes da equação, obtendo os valores 6 e 8. Em seguida, apresentaram o esboço do gráfico da função.:

Figura 34 - Esboço do gráfico solicitado no problema de Aline e Juliana por Fernanda.



Fonte: Dados da pesquisa

Pode-se notar que Fernanda não se preocupou, durante a construção do esboço, com a escala do gráfico. É necessário, mesmo durante o esboço de um gráfico, o cuidado com as unidades de medida. Nesse caso, pode-se observar que Fernanda marcou de 0 a 6 um ponto e utilizou a mesma medida para marcar de 6 a 7 e de 7 a 8, o que não seria correto.

Durante a plenária, Aline e Juliana foram questionando o grupo e destacando alguns pontos importantes:

Juliana: O que é importante no esboço? Onde vai cortar o *y*?; Quais são as raízes?; e onde está o vértice?...
Andresa: O que vocês pretendiam com esse problema?
Juliana: Que vocês (o grupo) explicassem o que entendiam sobre o que cada um dos coeficientes da equação dada representam no gráfico da função...
Fernanda: Eu só sei que se o a é positivo, a concavidade do gráfico é para cima. Do b e o c, eu não lembro de nada...
Aline: Existe algum jeito de resolver essa equação sem usar Bháskara?
Andresa: Sim... por soma e produto! Sim... o que queremos?

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x.y = 48 \end{cases}$$

Procurando todos os divisores de 48 teríamos:

		1
48	2	2
24	2	4
12	2	8
6	2	16
3	3	3 - 6 - 12 – 24 – 48
1		

Assim,

48	=	1×48	$\rightarrow$	$1 + 48$	=	49
48	=	2×24	$\rightarrow$	$2 + 24$	=	26
48	=	4×12	$\rightarrow$	$4 + 12$	=	16
48	=	8×6	$\rightarrow$	$8 + 6$	=	14
48	=	16×3	$\rightarrow$	$16 + 3$	=	19

E, portanto, $S = \{6; 8\}$.

Fernanda buscou relacionar essas ideias com o que aprendeu em cálculo. A derivada primeira indicando os pontos críticos da função e a derivada segunda mostrando a concavidade da parábola, assim, dada $f(x) = x^2 - 14x + 48$ e usando o teorema "Teste da Derivada Primeira", que diz:

> Seja *c* um número crítico de uma função *f* que é contínua e aberta no intervalo *I* contendo *c*. Se *f* é diferenciável no intervalo, exceto possivelmente em *c*, então *f(c)* pode ser classificada como segue:
>
> 1. Se *f´(x)* muda do negativo para o positivo em *c*, então *f(c)* é um **mínimo relativo** de *f*.
>
> *2.* Se *f´(x)* muda do positivo para o negativo em *c*, então *f(c)* é um **máximo relativo** de *f*.
>
> (LARSON; HOSTETLER; EDWARDS, 1998, p. 171)

No problema, tem-se que $f'(x) = 2x - 14$. Fazendo-se $2x - 14 = 0$, obtem-se que $x = 7$ é um número crítico da função. Como $f'(x)<0$, se $x<7$ e $f'(x)>0$, se $x>7$, então tem-se um ponto de mínimo relativo de *f*.

Usando o teorema "Teste da concavidade", que diz:

> Seja *f* uma função cuja a derivada segunda existe no intervalo aberto *I*:
>
> 1. Se $f''(x)>0$ para todo *x* em *I*, então o gráfico de *f* é côncavo para cima em *I*.
>
> *2.* Se $f''(x)<0$ para todo *x* em *I*, então o gráfico de *f* é côncavo para baixo em *I*.
>
> (LARSON; HOSTETLER; EDWARDS, 1998, p. 180)

Como $f''(x) = 2$, tem-se que a concavidade da parábola no problema dado está voltada para cima.

Continuando a trabalhar com o problema, Juliana conduz a aula questionando o que os coeficientes da equação significam no gráfico:

Juliana: [...] se (o coeficiente) b for zero, o que acontece?
Fernanda: Ele não corta o eixo *x*?
Juliana: Ele intercepta o eixo *x* e o gráfico é simétrico (em relação ao eixo *y*).
[...]
Aline: Aqui... por exemplo, a parábola corta no ponto 48 o eixo *y*... daí você vai ver... do lado direito desse ponto... o que acontece com a parábola? Ela desce! (decresce). Isso aqui é quando $b < 0$ e $b = -14$ [...] igual à parábola que vocês desenharam...
[...]
Juliana: E o que o c determina?
Vítor: Onde a parábola corta o eixo *y*! É o ponto $y = 48$.

Nesse momento, Andresa questionou o grupo sobre como se poderia relacionar essas conclusões com os conceitos do cálculo. Desse modo, o grupo concluiu, no momento da formalização do problema, que na função $y = ax^2 + bx + c$:

- O coeficiente a indica o comportamento da concavidade da parábola que, neste problema, seria voltada para cima, pois $a > 0$. Esse resultado se relaciona com o teste da derivada segunda que, nesse caso, depende do sinal do coeficiente a.
- O coeficiente b indica se a parábola cruza o eixo *y* em seu ramo crescente ou decrescente. (se $b > 0$, a parábola cruza o eixo *y* no ramo crescente; se $b < 0$, a parábola cruza o eixo *y* no ramo decrescente ou, se $b = 0$, a parábola cruza o eixo *y* no vértice). Essa conclusão pode ser obtida a partir do teste da derivada primeira que indica os pontos críticos. Como para $x > 7$, $f'(x) = 2x - 14 > 0$ e para $x < 7$, $f'(x) = 2x - 14 < 0$, então tem-se um ponto de mínimo. No problema trabalhado, $b = -14$ e a parábola intercepta o eixo *y* em seu ramo decrescente.
- O coeficiente c indica onde o gráfico intercepta o eixo *y*, quando se faz $x = 0$ na equação $x^2 - 14x + 48 = 0$ e, portanto, $c = 48$.
- As raízes x_1 e x_2 indicam onde o gráfico intercepta o eixo *x*. Nesse caso, como $\Delta = 4 > 0$, ele intercepta o eixo *x* em dois pontos distintos. Se $\Delta < 0$, o gráfico não intercepta o eixo *x* e as raízes seriam complexas. Se $\Delta = 0$, o gráfico intercepta o eixo *x* em um único ponto, uma raiz dupla.

Durante a condução da atividade final pelos futuros professores foi possível perceber que eles buscaram, inicialmente, que o grupo pensasse sobre o problema. Em seguida, provocaram uma discussão em direção à construção do conceito. Ao final, após cada integrante do grupo apresentar como havia pensado, o futuro professor, que estava propondo o problema, fez a formalização dos conceitos matemáticos envolvidos. Desse modo, foi possível perceber que o grupo compreendeu e aplicou a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, evidência de uma aprendizagem profissional docente.

A dupla afirmou que esse é um conteúdo recomendado para ser trabalhado no 9º ano. Fernanda considerou que esse não deveria ser um problema inicial, mas seria adequado para o aluno investigar: o que significa, graficamente, ser raiz e o que os coeficientes significam no gráfico. Para isso, no entanto, o aluno já deveria saber como calcular as raízes de uma equação e como esboçar uma parábola.

Na formação de professores esse problema permitiu resgatar conceitos do cálculo durante sua formalização. Faz-se necessário que os futuros professores compreendam essa relação ao invés de somente apoiar-se nas "fórmulas ou regras matemáticas", sem atribuir-lhes significado.

Outro ponto evidenciado durante o trabalho da dupla foi o uso predominante da fórmula de Bháskara. O grupo questionou-se sobre por que essa resolução ganhou força e, no Brasil, recebeu o nome de Fórmula de Bháskara, o que é questionável e está presente em praticamente todos os livros didáticos. Poder-se-ia ter-se usado outros recursos como completar quadrados ou resolver a equação por meio de soma e produto.

Uma evidência de mudança na forma de pensar dos futuros professores pode ser percebida na fala de Juliana sobre a referida Metodologia:

> Juliana: Ah, eu acho que funciona! A questão de aprender, eu acho que aprende mais mesmo do que o modelo teoria-exercícios. Só que dá muito mais trabalho, né? Tanto para o aluno, que tem dia que ele não tá com vontade... tem dia que o professor não tá com vontade de ficar questionando a toda hora [...] tem que ter disposição dos dois lados [...]

Essa constatação feita por Juliana sobre a disposição e comprometimento do professor e dos alunos foi bastante pertinente. O grupo, a partir disso, discutiu sobre a responsabilidade docente e discente no processo de ensino. Ficou claro que o professor, dentro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas deve ser o mediador desse processo e, de fato, deve sair de sua zona de conforto.

6.3.2 A Metodologia implementada pelos professores em formação continuada

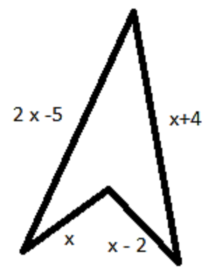
No encontro final, os professores ficaram responsáveis por fazer o relato de como se desenvolveu a aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em uma de suas salas de aula. No entanto, alegando excesso de atividades ao final do bimestre, alguns professores não realizaram a atividade combinada. Serão apresentados, a seguir, cada um dos problemas trabalhados pelos professores, bem como os encaminhamentos dados por eles.

A professora Ana

A professora Ana trabalhou com alunos do 9º ano alguns problemas, fazendo uso da Metodologia apresentada, envolvendo Álgebra e os conceitos geométricos de área e perímetro. A classe se agrupou, de acordo com Ana, escolhendo seus companheiros de grupo, sendo que alguns trabalharam individualmente e outros preferiram ficar em duplas ou trios. Os problemas foram passados na lousa e os alunos os copiaram em uma folha de papel.

O problema 1

Observe a figura:



Qual é a expressão que representa o perímetro da figura?

Ana: [...] A primeira coisa que eu observei na sala toda: falta de leitura! “Dona copiei! O que é pra fazer?”... Lê!... “Ah, não entendi!”... mas você leu? ... Aí fizemos uma leitura em voz alta... “O que é pra fazer?...”

A professora relatou que os alunos acharam que a figura era um triângulo, mas que ela esclareceu que a figura trabalhada, um quadrilátero, tinha quatro lados e que o triângulo tem apenas três. Em seguida, a professora questionou a sala sobre o que seria o perímetro da figura:

Ana: [...] O que é perímetro?...(os alunos responderam) “Soma dos lados!”... Então, o que vocês têm que fazer aqui? ... (alunos)“Somar os lados!”... Eles chegaram nessa conclusão... (mas) nenhum somou os lados! Eles escreveram assim: Somar os lados... É só somar os lados... Para resolver essa questão eu peguei o x juntei com outros x e ficou x^3, depois eu peguei os números... Para achar o perímetro tem que somar todos os lados $2x - 5 + x + x - 2 + x + 4$ ...
Otávio: E aí?
Ana: Não deu o resultado! (risos) [...] tem o conceito de perímetro, mas eles não sabem operar (com Álgebra)...

Destaca-se aqui que a Profa. Ana considerou que, se o aluno sabe realizar a operação de adicionar o valor da medida dos lados da figura, ele tem o domínio conceitual. No entanto, tal episódio revela que os alunos estão acostumados a trabalhar, em sala de aula, a técnica operatória ou uma fórmula, em detrimento de um entendimento conceitual.

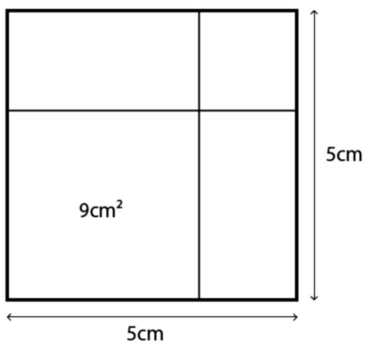
Ao ser questionada pela *PP* sobre como havia sido a plenária, e se ela havia chamado alunos à lousa para exporem suas resoluções, a Profa. Ana disse:

Ana: Não! Primeiro eu queria que eles tentassem. Como a gente teve só uma aula (50 minutos), deixei os comentários para a aula seguinte...
Pesquisadora: Qual será seu próximo passo, então?
Ana: Fazer a correção com eles! Quando é assim... a gente faz junto!

Por meio desse excerto pode-se notar que a professora ainda não conseguia deixar os alunos resolverem os problemas, sem lhes fornecer informações ou fazer a correção. Ela, apesar de ter proposto um problema, não consegue mediar e incentivar a construção do conhecimento por parte dos alunos. O próximo passo, para a Profa. Ana, seria a de ela mesma fazer a correção, não dando oportunidade de os alunos participarem de uma plenária. Essa posição mostra a dificuldade de se sair da zona de conforto e romper com antigas práticas de ensinar e de aprender Matemática.

O problema 2

(Adaptado da prova de Matemática – 1º semestre de 2013/SEE (Avaliação da aprendizagem em processo). A figura a seguir é um quadrado de dimensões $5cm$ por $5cm$. Ele foi dividido de maneira a formar dois quadrados e dois retângulos. O quadrado interno maior tem área de 9 cm^2.



Qual é a área do quadrado menor? Escreva como você pensou.

Sobre o problema 2, a professora Ana afirmou que apenas um aluno conseguiu perceber que se a área do quadrado interno maior da figura media $9cm^2$, então seus lados seriam iguais a $3cm$. Logo, sobrariam dois retângulos de medida $2cm$ por $5cm$ e cuja interseção formava um outro quadrado menor de medida $2cm$ por $2cm$, cuja área seria igual a $4cm^2$. Outros, não souberam calcular a área.

Pesquisadora: Seus alunos tinham ideia de área?
Ana: Área... eles sabem que é multiplicação, que no quadrado é lado vezes lado. Mas eu dei um exercício assim [...] para calcular... para achar a equação do segundo grau e o x vezes x não sai o x^2!
Pesquisadora: A dificuldade na Álgebra outra vez...
Ana: Dificuldade na Álgebra! Aí eu pergunto... se o conceito eles têm, o que está faltando? O treino?
Otávio: Pode ser!
Ana: Não sei se é o treino...
Pesquisadora: Não será o caso da apresentação de problemas significativos que levem à construção do conceito?
Otávio: Sim!
[...]
Pesquisadora: No começo do ano eu me lembro que você falou que tinha uma revisão, né?
Ana: Isso... Equação do 1º grau!
Pesquisadora: O que você acha que faltou?
Ana: Não sei Andresa... porque eu acabei dando uma prova de novo que constava a resolução de Equação do 1º grau e foi um fiasco...

Nesse momento, novamente a Profa. Ana considerou que os alunos têm o conceito de área, uma vez que sabem operar e fazer uso da fórmula. A *PP* perguntou a Ana sobre o que ela havia percebido de diferente ao tentar trabalhar com eles utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em sua aula:

Ana: Deu para perceber alguns alunos mais empenhados em querer fazer e tirar dúvida. Isso deu para perceber!!
Pesquisadora: De repente, os que estão mais empenhados podem até, de uma certa forma, motivar os demais, não é?
Ana: Exatamente! [...] A gente só não pode correr o risco de pôr aquele que vai se acomodar e ficar esperando o outro fazer para copiar...
Pesquisadora: Por isso que é importante na hora da plenária chamar aquele que tem dificuldade também! Porque (trabalhar) em grupo é assim: todos são responsáveis por aquilo que estão fazendo. É difícil o trabalho em grupo! Pra eles aprenderem a trabalhar em grupo é difícil... mesmo pra gente!
Ana: Até (a forma de) se organizar pra sentar, né?[...] “Pode juntar em quatro?”... Pode!... (sentam) um do lado do outro... Não! Assim não é juntar! Quero dois então aqui e dois virados... mas eles não têm essa noção.

Pode-se perceber que esses alunos realmente não estão acostumados a trabalhar em grupos. Nesse momento, cabe ao professor orientá-los e conduzi-los durante a aula de resolução de problemas.

Ao solicitar a Ana que permitisse que as folhas dos alunos fossem analisadas, a professora revelou um indício de mudança na sua forma de pensar:

Ana: Você quer dar uma olhada? Não tá muito interessante... eu achei que eles iam tirar de letra...
Pesquisadora: Mas eu achei muito interessante! Mostra a dificuldade em álgebra...
Ana: Achei que eles iam tirar de letra... dei, fiz igual ao que meu professor fazia... *de a-j, de a-l* pra fazer... Fazem tudo, depois você pede de novo... É! Aí que é furado que treino não é solução! [...]

Esse excerto mostra que a professora apoiou sua prática atual de sala de aula em exemplos de práticas de seu professor da Educação Básica. Pode-se perceber a necessidade de se problematizar essas práticas, como foi possibilitado nesse grupo de estudo. Além disso, a professora Ana percebeu e revelou ao grupo que apenas treinar os alunos não apresentou um resultado satisfatório.

Apesar da tentativa da Profa. Ana em trabalhar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pode-se notar a dificuldade em romper com suas antigas práticas. O aluno, nesse cenário, também oferece resistência em trabalhar de uma forma diferenciada, em sair de sua zona de conforto. A profa. Ana, apesar da tentativa, não montou os grupos como sugere a Metodologia, não tentou incentivar os alunos a que tentassem realizar esse trabalho colaborativo. Além disso, revelou que ela mesma iria resolver o problema ou corrigi-lo na próxima aula.

Outro fato a ser destacado, a partir da experiência da Profa. Ana, é que muitos professores julgam que o aluno tem domínio de um conceito quando ele aplica uma fórmula, o que não é verdade. A referida professora julga que a dificuldade é em operar com a Álgebra, o que reforça a ideia de que se o aluno domina a técnica operatória, então ele tem o domínio do conceito.

Devido ao tempo disponibilizado para o último encontro, não foi possível avançar nessa discussão. No entanto, ela se mostra como um importante ponto de partida para novas reflexões que necessitam ser problematizadas.

O professor Carlos

O professor Carlos escolheu um grupo de cinco alunos, realizou medições com a fita métrica e pediu para que eles calculassem o perímetro e a área da sala de aula. Os alunos escolhidos, segundo ele, eram os melhores. A atividade foi realizada durante uma aula e os outros alunos estavam fazendo uma prova de recuperação. A *PP* o questionou sobre a possibilidade de a atividade ser desenvolvida com a classe toda. O professor disse que, no 2º semestre, tentaria envolver a sala toda, mas que desenvolveu a atividade com esses cinco alunos porque havia pouco tempo, era a última aula que ele daria, pois entraria em licença e a turma, duas semanas depois, estaria no período de férias.

O professor Carlos mostrou a dificuldade dos professores em abandonar práticas antigas, em repensar o trabalho em grupo e em envolver a sala toda. A Metodologia proposta deveria envolver a sala toda, estimulando aqueles alunos que apresentam dificuldades em um processo de construção de conhecimentos.

A professora Maíra

A professora Maíra trabalhou, com suas duas classes do 6º ano, dois problemas. O objetivo da professora, motivada pelo grupo de estudo, foi o de trabalhar com os Números Racionais.

Buscando desenvolver o roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, primeiramente, falou para os alunos que iriam trabalhar em grupos e que ela iria entregar dois problemas para serem discutidos. Orientou-os que eles poderiam resolver fazendo desenhos, contas ou como conseguissem, mas que deveriam chegar a um consenso no grupo, de qual seria a resposta correta. Ela dividiu, então, a turma em grupos formados por quatro alunos. Maíra disse que escolheu alguns representantes para os grupos, escreveu os nomes na lousa e eles foram selecionando com quem gostariam de trabalhar. Em alguns casos a professora, não concordando, sugeriu novos agrupamentos.

Uma das observações feitas pela professora foi que “Até as crianças, que não são exemplos de alunos, na sala de aula, ficaram curiosos e tentaram resolver os problemas”

O problema 1

Três pizzas devem ser divididas igualmente entre cinco pessoas. Quanto de pizza cada pessoa comerá?

Um problema secundário identificado pela professora foi o de que os alunos acharam, de início, que toda pizza viria dividida em 8 partes. Desse modo, sobrariam pedaços, já que, se fossem 24 pedaços ao todo, cada um comeria 4 pedaços e sobrariam 4. Um aluno sugeriu que a divisão da pizza fosse em 16 partes, mas que essa ação não adiantaria pois também sobrariam pedaços. A professora, então, esclareceu que não estava escrito que a pizza veio cortada em 8 partes e que eles poderiam cortá-las em quantas partes quisessem. Alguns grupos cortaram em 10 partes, obtendo 30 pedaços no total e distribuindo 6 pedaços por pessoa. Outro grupo dividiu cada pizza em partes diferentes. Um dos grupos dividiu cada pizza em 5 partes. Em seguida, a professora Maíra solicitou que os grupos entregassem a atividade e explicassem o que haviam feito. Para formalizar, Maíra desenhou as pizzas na lousa e questionou os alunos assim:

Maíra: [...] Se cada um vai ganhar um pedaço de pizza, esse pedaço aqui... de uma pizza quanto representa? Daí eles falaram: "Ah, isso é $\frac{1}{5}$!". Aí eu falei: Então quantos pedaços ele ganhou? "$\frac{3}{5}$!" (Eles responderam). Aí eu chamei atenção... porque a pergunta é assim... que parte de pizza ele vai ganhar? Então ele quer saber a parte de 1 pizza, que é o que ele vai ganhar...

O problema 2

Jô, Pat e Cris resolveram fazer um piquenique e combinaram levar sanduíches para o almoço. Jô levou 3 sanduíches, Pat levou 2 e Cris se esqueceu do combinado e não levou nenhum. Assim, resolveram repartir os sanduíches que tinham levado igualmente entre as três, mas cobraram de Cris R$5,00 por sua parte. Que parte dos R$5,00 recebeu Jô? E Pat?

De acordo com Maíra os alunos sentiram dificuldade para compreender este problema. Então, a professora realizou uma leitura juntamente com a sala e disse que eles deveriam decidir como os R$5,00 deveriam ser divididos entre as meninas que levaram os lanches.

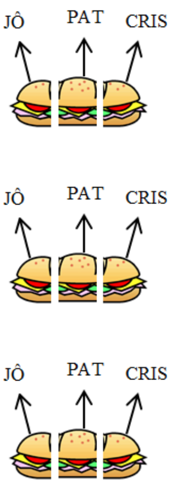
Na plenária, a professora Maíra relatou que as respostas foram:

Maíra: [...] "R$2,50!" ... Na hora! É imediato. R$2,50 para cada uma. Aí eu falei: Mas vocês acham justo dar R$2,50 para cada uma? Elas contribuíram com partes iguais? Elas levaram a mesma quantidade de lanches? "Ah, não!" (eles responderam). Aí foi R$3,00 para uma e R$2,00 para a outra. Isso foi a sala inteira...

Querendo resolver o problema proposto, após o trabalho em grupo de seus alunos, Maíra desenhou os lanches na lousa, dividiu-os em três partes iguais, 15 partes no total. A representação do problema então, seria:

Sanduíches

trazidos pela Jô

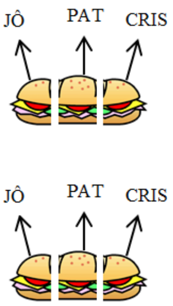


Jô levou 9 partes e comeu 5 delas.

Jô contribuiu com $\frac{4}{15}$ do total de partes.

Sanduíches

trazidos pela Pat



Pat levou 6 partes e comeu 5 delas.

Pat contribuiu com $\frac{1}{15}$ do total de partes.

Lançando mão da representação, a Profa. Maíra levou os alunos a perceberem que Cris deveria dar R$4,00 para Jô e R$1,00 para Pat.

Da mesma maneira que no problema 1, a professora Maíra nessa resolução conduziu os alunos no processo de resolução do problema. Essa forma de trabalho não atende a Metodologia proposta neste trabalho. A experiência da Profa Maíra mostrou que o professor pode se arriscar e que é ele quem conhece seus alunos e como pode conduzi-los. Ela criou, junto com os alunos, a ideia de equipe e, com isso, envolveu seus alunos na atividade. Possivelmente nas folhas entregues pelos grupos à professora aparecessem tentativas dos alunos buscando alternativas para a resolução do problema.

Os relatos mostraram também que cabe ao professor trabalhar, caso haja necessidade, com a leitura e a interpretação do problema. Uma das dificuldades dos alunos ao trabalhar com problemas, estando acostumados a usar a técnica na resolução de exercícios, está na fase inicial – na leitura e na interpretação da linguagem vernácula e passagem para a linguagem matemática.

Neste terceiro eixo temático, as aprendizagens docentes ocorreram desde aspectos relacionados ao conteúdo matemático, que se refletiram nos problemas propostos, até aspectos relacionados à prática de sala de aula. A proposta possibilitou que os professores refletissem sobre a própria prática, como é o caso da profa. Ana, em direção a novas ressignificações. No caso dos futuros professores de Matemática, eles puderam aprender e vivenciar diferentes caminhos para a resolução de um mesmo problema. Eles também perceberam como seus conhecimentos construídos no Ensino Superior podem se relacionar com os conteúdos da Educação Básica.

Percebe-se que os professores de Matemática em exercício encontraram mais dificuldade em mudar suas práticas em sala de aula. No caso dos futuros professores de Matemática, como desenvolveram a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no próprio grupo, a aula foi mais problematizada e possibilitou a discussão e o resgate de diversos conteúdos matemáticos como os de função, equação e derivada. Independentemente do grupo analisado, esse trabalho mostrou que se leva tempo para que uma intervenção formativa, junto aos professores e futuros professores, possa produzir mudanças nas práticas de ensinar e de aprender Matemática.

6.4 Eixo 4: Os grupos de estudo sobre Resolução de Problemas como espaços de aprendizagem de professores e de futuros professores

Neste quarto eixo temático, foram reunidos depoimentos sobre o trabalho promovido pelos grupos de estudo, na formação inicial e na formação continuada. No contexto da formação de professores, esse trabalho, cooperativo e colaborativo de discussão e compartilhamento de experiências e saberes, revelou-se necessário para a problematização de práticas e ressignificação dos conhecimentos matemático e didático-pedagógico.

6.4.1 Na escola

Ao final dos encontros, solicitou-se que os professores destacassem o que acharam do trabalho promovido pelo grupo de estudo e quais contribuições foram percebidas por eles:

- Aproveitamento do espaço ATPC

Otávio: Eu acho assim... primeiro, você reunir por área e discutir coisas pertinentes à área, é, às vezes, muito mais produtivo do que você fazer uma reunião de ATPC só com burocracia [...] não que não seja importante, mas você pode resolver essas questões burocráticas simplesmente pregando um comunicado na sala dos professores. [...] A ideia de aproveitar o ATPC para desenvolver um grupo de estudo... eu achei excelente em primeiro lugar por conta disso...

A ATPC (Aula de Trabalho Pedagógico Coletivo) tem como uma de suas funções, de acordo com o comunicado Cenp, de 29 de janeiro de 2008, a “formação continuada dos educadores, propulsor de momentos privilegiados de estudos, discussão e reflexão das propostas curriculares e melhoria da prática docente”. Nesse sentido, o grupo de estudo formado atendeu totalmente a essas finalidades.

A professora Maria também concordou com o uso desse espaço para um grupo de estudo:

Maria: E outra coisa que eu achei legal... às vezes a gente fica no ATPC lá, sem fazer nada, não fica? Acontece!... e eu acho que aqui dá pra gente trocar uma ideia, se unir... eu achei super legal essa ideia!
Otávio: Aproveitar esse horário é ótimo!

- Estudo da Matemática e compartilhamento de ideias e experiências

Os professores indicaram o estudo da Matemática, a leitura conjunta de textos de Educação Matemática e o compartilhamento de experiências e práticas de sala de aula como sendo algo positivo na formação de professores possibilitada pelo grupo de estudo:

Ana: Mesmo para discutir conceitos, trocar experiências...
Otávio: [...] A gente se reunindo em grupos, querendo ou não, você acaba compartilhando determinadas experiências e isso é bom! Porque a gente precisa ter um contraponto pra saber se aquilo que você tá falando... como você faria [...] a gente começa a fazer uma avaliação também daquilo que a gente faz.. [...] com relação àquilo que a gente viu especificamente no grupo de estudo, eu achei muito interessante... principalmente a abordagem lá da álgebra [...] eu questionei bastante coisa... principalmente porque, às vezes, a maneira como você vai dar um tipo de exercício ou uma atividade e às vezes você tá cobrando outra coisa...
Ana: E o próprio estudo da disciplina, né? Na ATPC normal a gente não estuda Matemática, a gente não faz leitura da área [...]
Otávio: Na verdade, é a primeira vez que na ATPC a gente faz um grupo de estudo... vou ser sincero, desde que eu comecei a dar aula...
[...]
Cecília: Pra mim... como eu não fiz Matemática... isso daqui seria o melhor projeto dentro de uma escola. Então [...] começar a ver conteúdos e conceitos que eu não vi... pra mim é interessante!
Ana: Mesmo eu... fazendo Matemática... tem coisa que eu falo “Gente, eu não sei isso daqui! Eu precisava voltar a estudar...” [...]

A análise dessa discussão entre os professores, no grupo de estudo, mostrou que é novidade para eles um trabalho desse tipo. Mesmo para o professor Otávio, que dá aulas há mais de 15 anos, esse grupo de estudo foi pioneiro. Além disso, todos consideraram que o estudo do conteúdo matemático e os aspectos didático-pedagógicos foram necessários. Também foi ressaltada pela professora Cecília, durante o 5º encontro, ao fazer uma avaliação do grupo, a falta de trabalhos cooperativos no interior da escola:

Cecília: Eu, particularmente, tô gostando da teoria... porque a maioria das coisas eu nunca vi [...] Acho que isso é o que falta numa escola, a troca!
Otávio: Está bem interessante...

Por outro lado, uma dificuldade sentida pela professora Maíra é que a ATPC é um dos momentos em que ela prepara atividades e corrige provas, e sugeriu, então, que as próximas reuniões do grupo, depois dos 15 encontros iniciais, fossem quinzenais. No entanto, também ressaltou que o grupo de estudo formado foi válido, interessante e que possibilitou o compartilhamento de experiências entre os professores:

Maíra: [...] Mas é o único horário que aí eu pego pra acertar todas as minhas coisas aqui na escola. E aí é muito válido... mas uma coisa que eu acabo aproveitando é pra corrigir prova. Então, infelizmente, o ATPC é recado... e é um horário que eu aproveito, eu corrijo provas, eu preparo prova, eu preparo atividades. É o horário que eu uso pra isso...

Ao fazer uma avaliação do trabalho do grupo, a professora Cecília ressaltou que os professores deveriam tentar levar para a sala de aula o que foi discutido, buscando transformar sua prática:

Cecília: Eu acho assim... isso aqui é válido! É importante! Mas eu acho que vai da consciência de cada um... porque não adianta a gente fazer a reunião aqui e sair todo mundo super feliz daqui [...] vai da consciência de cada um... se você vai entrar na sala de aula e vai tentar pelo menos dar uma aula (diferente)...

Ao analisar a fala da professora Cecília pode-se notar que sua afirmação é desafiadora. Ela acredita que os professores precisam sair de suas zonas de conforto e arriscarem-se. Certamente, a mudança passa pela reflexão e isso o grupo possibilitou em todos os seus encontros. Os professores, participantes da pesquisa, foram unânimes em reconhecer a importância desses espaços de formação, desde que haja planejamento e foco nas atividades próprias da prática de ensinar e aprender Matemática. A continuidade desse trabalho e o apoio entre os pares mostra-se fundamental nesse processo dos professores de “caminhar para uma zona de risco”.

6.4.2 Na universidade

Durante uma entrevista final, os futuros professores opinaram a respeito do grupo de estudo sobre Resolução de Problemas formado na universidade, bem como indicaram pontos que consideraram importantes:

- A abordagem didático-pedagógica do conteúdo matemático;

Felipe: [...] eu achei interessante principalmente por haver uma parte didática... a gente não mexe muito com essas questões mais didáticas, de sala de aula [...] e a gente falou bastante aqui sobre o que acontece em sala, tentando olhar bastante pro aluno...

Uma preocupação notada por Felipe refere-se ao trabalho, na Licenciatura, de questões ligadas à sala de aula. Apenas no 2º semestre do 3º ano do curso é que os alunos iniciam a disciplina de Estágio Supervisionado.

- Uma nova possibilidade na formação de professores;

Felipe: Eu acho que, pelo menos aqui no departamento, foi algo novo... eu não tinha visto nos outros anos... é um diferencial que está aparecendo para a Licenciatura...

Por meio da fala de Felipe, pode-se notar a ausência de trabalhos envolvendo o professor e a sala de aula na formação inicial de professores. Apesar da grade curricular composta por muitas disciplinas, esse grupo de professores se envolveu e demonstrou ter gostado da experiência.

- O estudo e vivência da Resolução de Problemas;

Fernanda: Achei muito bom pelo fato de dar oportunidade pra gente conhecer um pouco mais o que é a resolução de problemas. Porque, embora a gente já tenha ouvido falar nisso na graduação, eu não me lembro de ter lido um texto com referência, ter discutido ou mesmo vivenciado alguma coisa desse tipo...

Vítor: Acho que é muito proveitoso! [...] É essencial os alunos da Licenciatura aprenderem essa Metodologia, assim como outras... inclusive eu sinto falta de aprender metodologias de ensino no curso e faz muita falta!

Os futuros professores Fernanda e Vítor demonstraram que, durante a graduação, sentiram falta de conhecer e vivenciar metodologias de que pudessem fazer uso em suas futuras salas de aula. Nesse sentido, apesar de terem passado por aulas em que os professores propunham problemas, os futuros professores desejavam conhecer aspectos teóricos e práticos da Resolução de Problemas.

- A Resolução de Problemas e as futuras práticas como professores de Matemática.

Aline: Eu gostei, achei interessante... mostrou uma nova forma de abordar os problemas e seria bom numa sala de aula trabalhar assim com aluno, mesmo não tendo tanto tempo.[...] Quando eu vim participar do grupo era essa a minha expectativa: como ajudar o aluno, como explicar, como dar um problema coerente com aquilo que ele está aprendendo...

Camila: Eu achei super interessante... eu tive assim uma outra visão de algumas coisas, de resolução de problemas... eu gostei bastante do grupo, das atividades, dos textos [...] achei muito interessante o modo de trabalho. [...] Quando procurei o grupo eu buscava novas formas de trabalhar em sala de aula...

Juliana: Eu gostei... primeiro, porque eram só os meus amigos, né? Então, desde o primeiro dia não fiquei com vergonha... e era um tema que a gente tem pouco contato e foi bom para pensar em problemas e na forma de abordar os conteúdos, né?

Os três depoimentos das futuras professoras mostraram sua preocupação em relação ao futuro trabalho em sala de aula. Aline destacou que o grupo mostrou para ela uma nova forma de abordar os problemas. Ela também motivou-se a participar do grupo buscando como ajudar seu aluno a construir o conhecimento e como escolher um problema que fosse adequado nesse processo. Camila indicou que o grupo lhe possibilitou uma nova visão de Resolução de Problemas por meio dos textos, dos problemas e das discussões. Juliana considerou que o grupo, ao ser formado por poucos integrantes que tinham bastante afinidade, foi acolhedor e permitiu que os integrantes se sentissem à vontade para questionar e expor suas ideias. Além disso, assim como Aline e Camila, Juliana também ressaltou que a forma de abordar os conteúdos foi nova e interessante para ela.

À guisa de conclusão desta seção, pode-se afirmar que os grupos de estudo constituíram-se espaços formativos que possibilitaram aprendizagens profissionais diversas. Dentre elas destacam-se as relacionadas ao conteúdo matemático, que permeou as discussões dos grupos e, também, as relacionadas ao estudo da teoria e prática da Resolução de Problemas. As últimas possibilitaram a problematização das práticas de ensinar e aprender Matemática em sala de aula.

6.5 Discutindo as análises em relação à literatura

Nesta seção, pretende-se aprofundar as análises dos dados apresentados nas seções anteriores, relacionando os resultados obtidos à literatura apreciada nos capítulos 2 e 3 desta tese. Os referidos capítulos tratam da formação de professores e da resolução de problemas, contemplando a importância do trabalho em grupos nos dois contextos. Dessa maneira, as evidências serão analisadas sob outro olhar, o que possibilita novas compreensões sobre elas.

O referencial teórico adotado nesta pesquisa foi sendo constituído antes e durante a coleta de dados, sendo eles: Shulman (1986, 1987); Ponte (1998); Fiorentini e Nacarato (2005); Imbernón (1994, 2010, 2011) e Tardif (2010), sobre Formação de Professores; e Van de Walle (2001, 2013), Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2005, 2011), sobre Resolução de Problemas. Durante o processo de análise dos dados, os trabalhos de Cochran-Smith e Lytle (1999), e Ball, Thames e Phelps (2008), respectivamente, sobre os conhecimentos docentes para/na/da prática e sobre os domínios do conhecimento matemático para ensinar, foram acrescentados com o intuito de permitir um aprofundamento e uma fundamentação para este trabalho.

Nesta seção, a título de organização, optou-se por analisar cada um dos eixos temáticos respeitando-se a ordem em que foram apresentados no início deste capítulo. Com base nessas análises, fundamentadas nos referenciais teóricos assumidos, a pergunta de pesquisa será retomada nas considerações finais.

Com relação ao eixo temático "*A Resolução de Problemas na aprendizagem e na ressignificação dos conhecimentos matemático e didático-pedagógico na formação do professor de Matemática*" foram apresentados e analisados, durante os encontros, três temas matemáticos que serviram de base para a mobilização de saberes disciplinares, saberes curriculares e de saberes pedagógico de conteúdo.

Um ponto evidenciado ao analisar esses encontros refere-se ao saber manifestado pelos professores em exercício que se relaciona às suas salas de aula. É um conhecimento situado e construído na prática, chamado por Cochran-Smith e Lytle (1999) de *conhecimento na prática.* Além disso, o grupo problematizou alguns conteúdos matemáticos e algumas práticas de sala de aula, por meio da resolução de problemas, em direção à construção do que as referidas autoras chamam de *conhecimento da prática.* Já os futuros professores, por ainda não terem realizado estágios, construíram o *conhecimento para a prática*, ou seja, uma base de conhecimento necessária para suas futuras práticas pedagógicas.

De acordo com Borges (2004), “os ‘saberes da experiência’ têm um papel fundamental, pois [...] a partir dos saberes da experiência, os outros conhecimentos são avaliados, julgados e utilizados no trabalho.” (p. 69). Assim, pode-se afirmar que é pelo e no trabalho que os demais saberes profissionais serão transformados e adaptados de acordo com a realidade das situações de ensino. Por isso, a formação no local de trabalho mostrou-se positiva e vista pelos professores participantes, de acordo com a Professora Maíra, como “uma troca de experiências e de coisas práticas de quem conhece a realidade da escola”.

Nesse sentido, Nóvoa (1995) afirma que:

> A troca de experiências e a partilha de saberes consolidam espaços de formação mútua nos quais cada professor é chamado a desempenhar, simultaneamente, o papel de formador e formando. O diálogo entre os professores é fundamental para consolidar os saberes emergentes da prática profissional. Mas a criação de redes coletivas de trabalho constitui, também, um fator decisivo de socialização profissional e de afirmação de valores próprios da profissão docente. O desenvolvimento de uma nova cultura profissional dos professores passa pela produção de saberes e de que deem corpo a um exercício autônomo da profissão docente. A organização das escolas parece desencorajar um conhecimento partilhado dos professores. (p. 26).

Com base nessa citação e considerando-se os grupos de estudo, pode-se afirmar que nesses espaços houve a discussão e o compartilhamento de saberes e experiências, colaborando com o desenvolvimento profissional desses professores e futuros professores de Matemática.

Em relação aos conteúdos matemáticos Álgebra, Números Racionais e Medidas, houve a problematização de cada um deles através da resolução de problemas. Dessa forma, os professores e futuros professores puderam ressignificar esses conteúdos por meio de um novo caminho – a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Ao se trabalhar com Álgebra, os grupos de professores em formação perceberam as diversas faces assumidas por ela: álgebra como generalizadora da aritmética, álgebra funcional, álgebra das equações e álgebra estrutural. Além disso, no caso dos professores de Matemática em exercício, houve discussão por meio dos problemas sobre como costumam trabalhar a álgebra com seus alunos. Foi possível perceber como a experiência dos professores participantes permeou suas reflexões. Em diversos momentos os professores deram exemplos a partir do que vivenciam em sala de aula. Para Tardif (2010), esse é o saber experiencial dos professores que também está ligado ao saber pedagógico e ao saber disciplinar.

Os futuros professores, apesar de afirmarem nunca ter pensado ou visto essas diversas faces da Álgebra, demonstraram facilidade em resolver os problemas e em discutir conteúdos matemáticos sem dificuldade, o que Tardif (2010) chama de saber disciplinar. No entanto, esse saber disciplinar transmitido pelas instituições de formação deveria possibilitar um novo olhar para "velhos conteúdos", como foi proposto no grupo de estudo.

Nesse sentido, o problema da Dona Solange (p. 138) possibilitou que os grupos explorassem os conceitos de variável dependente e independente, de função, de razão e de grandeza, no próprio contexto da resolução de problemas. Esse problema evidenciou aprendizagens docentes ao longo do desenvolvimento do problema. Pode-se destacar que o conhecimento profissional dos professores envolve um saber especializado do conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) que exige, mais do que saber resolver o problema, a análise e compreensão dos conceitos, procedimentos e conteúdos matemáticos.

Ao abordar os Números Racionais, os professores e futuros professores de Matemática revelaram que nunca haviam pensado ou que nem lhes haviam chamado a atenção sobre as diferentes "personalidades" dos Números Racionais e na diferença conceitual entre elas. Para eles, essas "personalidades" foram, geralmente, trabalhadas como sendo a mesma coisa, uma vez que todas elas apresentam a mesma forma de representação: $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0$. Os professores apontaram, inclusive, que os livros didáticos trazem, em um mesmo capítulo, diferentes "personalidades" sem se preocuparem com essas diferenças.

Algumas discussões como, por exemplo, a localização de pontos na reta e a discussão sobre a diferença conceitual entre equação e expressão algébrica foram possibilitadas, mostrando o que Ball, Thames e Phelps (2008) chamam de conhecimento especializado do conteúdo. Dessa maneira, não basta apenas o professor saber resolver os problemas, mas devem ser capazes de explicar o significado de conceitos e de procedimentos, além de fornecerem exemplos adequados aos seus alunos para possibilitar sua compreensão.

Durante as discussões, possibilitadas nos grupos de estudo, destaca-se o compartilhamento de experiências e o apoio entre os professores que corroboram para seu desenvolvimento profissional. Nesse sentido, como já citado, Ponte (1998, p. 10) afirma que:

> (...) *o desenvolvimento profissional é favorecido por contextos colaborativos (institucionais, associativos, formais ou informais)* onde o professor tem a oportunidade de interagir com outros e sentir-se apoiado, onde pode conferir as suas experiências e recolher informações importantes.

Com base nessa citação, pode-se afirmar que os grupos de estudo foram contextos colaborativos de compartilhamento e discussão de aspectos do conteúdo matemático e de aspectos didático-pedagógicos. Buscou-se, nesta pesquisa, a perspectiva da formação de professores pautada nesse processo de desenvolvimento profissional, que já se inicia na formação inicial. Desse modo, a possibilidade de os futuros professores participarem de um grupo de estudo mostrou-se importante para eles, que pediram por outros espaços de aprendizagem como este.

No eixo temático *"A problematização da resolução de problemas nas práticas de ensinar e aprender Matemática na sala de aula"* também foram apresentados e analisados três sub-eixos que se referiam às concepções sobre aprendizagem da Matemática e aos trabalhos, com resolução de problemas e em grupos, em sala de aula. Ressalta-se que, neste eixo, a Resolução de Problemas possibilitou a problematização das práticas de ensinar e aprender Matemática.

Com relação às concepções sobre a aprendizagem da Matemática, os professores evidenciaram que trabalham mais com a questão operatória em suas aulas. Eles ressaltaram, inclusive, o valor da prática e dos exercícios de fixação a partir de "listas de exercícios".

No encontro em que foi trabalhado o tema Medidas, a discussão sobre as regras usadas, pelos professores, ao ensinar a transformação de unidades de medida e a falta de compreensão dos alunos, mostra a necessidade de um ensino com mais compreensão. No entanto, é preciso cuidado para não buscar um discurso utilitarista, imediatista, da Matemática. O Ensino Fundamental tem um currículo mínimo de Matemática que possibilita ao aluno compreender as estruturas matemáticas, o sistema de numeração e de medida, conhecer alguns sistemas de numeração e medida não utilizados no Brasil, trabalhar com a álgebra, a geometria e com o tratamento de informação. O aluno, nesse momento de sua escolaridade, pode não ter condições, ainda, de decidir o que é e o que não é importante. Essa decisão cabe, nesse caso, ao professor.

O trabalho com resolução de problemas em sala de aula também é influenciado pelas concepções prévias de professores e futuros professores de Matemática. Serrazina e Oliveira (2002), em um trabalho de revisão de literatura portuguesa afirmaram que o módulo destinado à Resolução de Problemas não tem sido suficiente para que os futuros professores mudem suas concepções sobre a natureza da Matemática e seu ensino. Na presente pesquisa, os futuros professores, falaram sobre seus dilemas, expectativas e temores diante da profissão e, apesar da falta de experiência, têm vontade e estão abertos ao novo. Será que "o choque de realidade" os impedirá de se arriscarem em direção a uma nova prática de sala de aula? Será que professores, convencidos de que sua forma de trabalho em sala de aula é boa, sentindo-se em sua zona de conforto, recomendariam a seus colegas uma mudança em sua prática de ensinar? Não haveria condições, nesta pesquisa, de prever ou de acompanhar resultados advindos das respostas a essas perguntas. No entanto, o trabalho de Gama (2007) deixa evidente que a participação em grupos colaborativos pode contribuir para o desenvolvimento profissional dos professores em início de carreira.

Ao discutirem sobre a forma de trabalhar a resolução de problemas em sala de aula, os professores em exercício evidenciaram, em questionários anteriores ao início do grupo de estudo, o que Schroeder e Lester (1989) destacaram como ensinar **para** e ensinar **via** resolução de problemas. A maioria, entretanto, buscava novas possibilidades de trabalho, tendo acrescentado a leitura coletiva e a interação entre os alunos. Já os futuros professores revelaram que o ensino de Matemática para eles havia sido tradicional, baseado no modelo teoria-exercícios. Pode-se perceber que a resolução de problemas era utilizada na perspectiva do ensinar **para** resolver problemas. Apenas um dos futuros professores afirmou que um de seus antigos professores da Educação Básica trabalhava o ensinar **sobre** resolver problemas, mas ele mesmo apresentava e resolvia o problema na lousa.

Os PCN (BRASIL, 1998), nesse sentido, indicam que os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel e que os professores tendem a trabalhar os problemas como aplicação ou fazendo cálculos com os números do enunciado. Desse modo, a atividade matemática não é explorada, os conteúdos matemáticos não são construídos, mas apenas seus resultados e técnicas. Por meio da fala dos professores e futuros professores de Matemática pode-se perceber que essa realidade ainda se verifica na Educação Básica.

Em relação ao trabalho em grupo nas aulas de Matemática, professores e futuros professores demonstraram como ele é negligenciado na Educação Básica. Pode-se notar a falta ou dificuldade dos professores em ensinar os alunos a trabalharem em grupos. Para Hiebert et al (1997) e Van de Walle (2009), o professor é o responsável por isso, ou seja, por ensiná-los a compartilharem suas ideias, desenvolverem a cooperação entre os colegas e a perceberem o erro como parte da aprendizagem.

No eixo temático *"A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na formação do professor de Matemática"* foram apresentadas e discutidas as experiências dos professores e futuros professores ao fazerem uso da referida metodologia.

Os professores e futuros professores participantes dos grupos de estudo puderam vivenciar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Os encontros possibilitaram aos participantes uma ressignificação do trabalho com problemas em sala de aula. Resolver um problema não se reduz ao domínio de estratégias e conceitos matemáticos mas, de acordo com Onuchic (1999), também requer o entendimento de como se relacionam. Além disso, no ensino através da Resolução de

Problemas o professor torna-se um mediador, possibilitando caminhos para que o aluno seja o construtor de seus próprios conhecimentos.

O relato da aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas feita, pelos professores, corroborou para que fossem evidenciadas algumas reflexões promovidas em direção a uma mudança na prática profissional desses docentes. Nesse sentido, Fullan e Hargreaves (2000) destacam que as pessoas não se desenvolvem em isolamento, mas nas relações com pessoas que consideradas importantes para elas. A escola torna-se, assim, um lócus de formação, podendo contribuir para a formação de seus professores.

Neste trabalho, o grupo de professores enunciou quais eram as dificuldades ao se trabalhar a Matemática e buscaram-se novas possibilidades para a sala de aula. Apoiando-se ainda em Fullan e Hargreaves (2000) destaca-se que as mudanças e inovações ocorrem de maneira lenta e apoiam-se não apenas no conhecimento do professor, mas também em suas experiências, biografias e nas características do contexto em que trabalham.

Ao aplicar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em sala de aula, os professores refletiram sobre o que havia sido proposto pelo grupo. A professora Ana percebeu vantagens ao usar a metodologia como o envolvimento dos alunos e percebeu que, apesar de ter trabalhado equação de primeiro grau de modo técnico, seus alunos, ao contrário do que supunha, não compreenderam (ou não totalmente) esse conteúdo. Após discutirmos em vários encontros a questão da prática e da construção conceitual, essa professora relatou que a técnica não conduziu a bons resultados. A professora realizou o que Schön (1987) chamou de reflexão sobre a ação, ou seja, executou uma ação (a aplicação de inúmeras listas de exercícios sobre equação do 1º grau), refletiu que não alcançou o que esperava e essa reflexão sobre a ação ajudará a determinar suas ações futuras.

Os relatos mostraram também que cabe ao professor trabalhar, caso haja necessidade, com a leitura e a interpretação do problema. Uma das dificuldades dos alunos ao trabalhar com problemas, estando acostumados a usar a técnica na resolução de exercícios, é na fase inicial – na leitura e interpretação da linguagem matemática e, às vezes, da própria linguagem vernácula.

Em relação aos futuros professores de Matemática, no primeiro contato com a Metodologia, eles mostraram-se curiosos, mas receosos em relação ao novo: “Essa Metodologia cobre todos os conteúdos?”, “Daria tempo de ‘passar’ todos os conteúdos de um ano letivo trabalhando dessa maneira?”, “ Há relatos de aplicação?”. De imediato, foram lhes apresentadas algumas experiências do grupo GTERP, que possui uma vasta aplicação e exploração da referida metodologia, em sala de aula, em dissertações e teses.

Durante a condução da atividade final pelos futuros professores foi possível perceber que eles buscaram, inicialmente, que o grupo pensasse sobre o problema. Em seguida, provocaram uma discussão em direção à construção do conceito. Ao final, após cada integrante do grupo apresentar como havia pensado, o futuro professor, que estava propondo o problema, fez a formalização dos conceitos matemáticos envolvidos. Desse modo, foi possível perceber que o grupo compreendera e aplicara a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Os saberes profissionais, mobilizados durante a fase de aplicação da Metodologia, envolveram o que Tardif (2010) chama de saberes disciplinares, pedagógicos, curriculares e experienciais. Os saberes disciplinares referem-se aos saberes matemáticos mobilizados durante o trabalho com os problemas na aplicação da Metodologia. Os saberes pedagógicos foram percebidos ao longo dos encontros, nos momentos em que os professores e futuros professores revelaram as concepções sobre a aprendizagem da Matemática e sobre os trabalhos com resolução de problemas e em grupos, em sala de aula. Os saberes curriculares referem-se ao encaminhamento, dado por professores e futuros professores, ao sugerirem diferentes estratégias de trabalhar um mesmo problema ao longo dos anos escolares. Os saberes experienciais foram mais realçados com os professores de Matemática em exercício, apesar de os futuros professores terem demonstrado "marcas" de suas experiências enquanto alunos da Educação Básica.

No quarto eixo temático, *"Os grupos de estudo sobre Resolução de Problemas como espaços de aprendizagem dos professores e de futuros professores",* por meio de depoimentos, foi apresentada a forma como os participantes da pesquisa perceberam os grupos de estudo como espaço de formação.

No decorrer deste trabalho puderam ser percebidos alguns limites e possiblidades:

A formação inicial em grupos de estudo mostrou sua fragilidade em relação à frequência dos seus integrantes. A não obrigatoriedade do curso e o caráter voluntário, diferentemente de uma disciplina de graduação, com obrigações e avaliações mais rígidas, mostrou-se um fator importante a ser analisado. A carga excessiva de atividades na graduação, em um curso integral, certamente dificultou um envolvimento maior dos futuros professores nas atividades do grupo. No entanto, apesar das dificuldades, os integrantes mostraram vontade em participar e aprender mais no grupo. Além disso, revelaram que deveriam ser formados outros grupos de estudo sobre assuntos voltados à sala de aula e que fossem de interesse dos futuros professores. Para eles, a iniciativa de um grupo de estudo sobre Resolução de Problemas foi algo inovador.

Nesse sentido, destaca-se a necessidade de atividades e/ou disciplinas voltadas à prática, conforme destacam Gatti e Barreto (2009) ao analisarem cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil. Tardif (2010) ressalta, ainda, a indissociação da formação geral e da formação científica da formação prática. Na presente pesquisa, como os alunos não realizavam estágios não foi possível trabalhar a Metodologia com alunos da Educação Básica. No entanto, essa possibilidade mostra-se importante para a discussão e problematização das práticas de ensinar e aprender Matemática na formação inicial de professores, como sugere Brasil (2001).

Já em relação ao grupo de estudo formado na escola pelos professores de Matemática em exercício, destaca-se que:

- Os professores relataram que nunca haviam passado por essa experiência, de compartilhar experiências, discutir práticas, fazer leituras referentes à área ou estudar Matemática no horário do ATPC. Consideraram que esse espaço formativo é essencial para que o trabalho entre os professores de Matemática conduza à melhoria na sala de aula.
- Devido ao excesso de aulas e de atividades dos professores, alguns deles, antes de participar do grupo, usavam indevidamente esse espaço para corrigir provas e elaborar atividades. Tal espaço, a ATPC, também foi caracterizado pelos professores como burocrático, ou seja, como reuniões apenas informativas sobre os problemas escolares.

De acordo com Imbernón (2011) e Mizukami et al (2002), a escola deve ser vista como um lócus de formação, não se tratando apenas de uma mudança do local de formação, mas de um paradigma colaborativo entre os professores. Desse modo, a escola pode contribuir para o desenvolvimento profissional de seus professores, e o resultado desse processo reverte-se em benefícios para a unidade escolar e, especialmente, para os alunos.

A formação continuada promovida no grupo de estudo possibilitou que os professores repensassem sobre seus saberes docentes, por meio de um outro olhar sobre eles, como apontam Fiorentini, Nacarato e Pinto (1999, p.40):

> [...] não se trata de retirar o professor de seu contexto de trabalho e transmitir-lhe uma série de teorias e modelos para serem aplicados em sala de aula mas, ao contrário, de promover momentos de reflexão, explicitação e problematização de seus saberes, crenças/concepções sobre a prática pedagógica de Matemática.

No caso dos professores de Matemática que participaram desta pesquisa, a Resolução de Problemas permeou essas discussões, possibilitando a problematização de seus saberes profissionais.

Curi (2012) considera que os docentes que ensinam Matemática esforçam-se na busca de alternativas para a melhoria da aprendizagem de seus alunos. No entanto, de acordo com a autora, “faltam-lhes oportunidades de contatos com a pesquisa, com experiências de sucesso, com outros professores” (p. 13). Nesse sentido, para Perez (1999), é necessário que o trabalho colaborativo seja interiorizado pelo professor como forma de atuar no cotidiano.

Os grupos de estudo constituídos com professores e futuros professores de Matemática possibilitaram o contato com as pesquisas sobre Resolução de Problemas e com seus pares. Pode-se perceber, entretanto, pelo depoimento dos participantes que os grupos de estudo foram novidade, o que corrobora com as ideias de Curi (2012) no que se refere à falta de oportunidades de espaços de aprendizagem como este na formação de professores.

Considerações finais

Quem pode, faz. Quem compreende, ensina.
LEE SHULMAN

Após o procedimento geral ter sido posto em ação no Capítulo 5, as descrições terem sido apresentadas no Capítulo 6 e as análises acrescentadas no Capítulo 7, foram finalizadas as atividades 7 e 8 do 3º Bloco de Romberg – levantar e coletar evidências (atividade 7) e analisar e interpretar evidências frente ao problema de pesquisa colocado (atividade 8). No entanto, resta ainda discutir os resultados deste trabalho (atividade 9) e antecipar a ação de outros (atividade 10).

O objetivo deste trabalho, conforme apresentado na Introdução desta tese é o de auxiliar professores e futuros professores de Matemática no trabalho através da Resolução de Problemas. Além disso, ao trabalhar com grupos de professores, mobilizando saberes profissionais docentes, pretende-se contribuir com o processo de desenvolvimento profissional desses professores e futuros professores de Matemática.

A princípio, explorar a Formação de Professores no cenário da Resolução de Problemas mostrou-se uma árdua tarefa, até mesmo para a identificação do foco deste estudo. Muitos aspectos foram deixados de lado para se conseguir aprofundamento teórico nos eixos temáticos levantados. Após um processo de confrontação dos dados com a literatura apreciada e da literatura com os dados, foi possível tornar claro que o foco desta tese seria o de investigar as aprendizagens profissionais docentes possibilitadas pela constituição de grupos de estudo apoiados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Nesse momento, após as reflexões possibilitadas pelos dados recolhidos no trabalho de campo e suas discussões à luz do referencial teórico adotado, será retomada a questão da pesquisa, que foi norteadora para esse processo de descrição e análise dos dados:

Que aprendizagens profissionais docentes se manifestam em um grupo de estudo apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Para responder a pergunta da pesquisa, foram utilizados vários instrumentos (questionários, entrevistas individuais e coletivas, observação participante, protocolos de atividades desenvolvidas, gravações em áudio e vídeo de encontros e transcrições) e recorreu-se à metodologia qualitativa para a pesquisa, principalmente por esta ser mais participativa, flexível e adaptável a múltiplas realidades, de acordo com Lincoln e Guba (1985).

O referencial teórico adotado, explorado nos capítulos 2 e 3 sobre formação de professores e Resolução de Problemas respectivamente, serviu de sustentação a esse estudo. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas foi um instrumento valioso e que possibilitou a exploração dos encontros, por parte da professora pesquisadora e a construção ou ressignificação dos conhecimentos de professores e de futuros professores participantes dos grupos de estudo.

Os encontros de formação dos grupos de estudo tiveram seus temas previamente determinados de acordo com as “necessidades” apresentadas pelos participantes. Os textos selecionados, bem como os problemas, visavam possibilitar a problematização de conteúdos matemáticos e didático-pedagógicos ou a desnaturalização de práticas de ensinar e aprender Matemática. (FIORENTINI, 2013). Como já apresentado, muitos professores e futuros professores recorriam a práticas da época em que eram alunos da Educação Básica como sendo válidas e adequadas à realidade atual.

Com base nessas ideias, serão apresentadas, em linhas gerais, as compreensões construídas para a pergunta de pesquisa ao longo desta investigação:

Para a formação inicial pode-se notar a presença de: uma reflexão sobre o que seria uma boa aula e um bom trabalho do professor de Matemática; a experiência, de um futuro trabalho em sala de aula com uma nova proposta metodológica, exigindo um trabalho diferenciado por parte do professor; o compartilhamento de saberes e experiências; e a reflexão sobre o currículo de Matemática na Educação Básica.

O trabalho com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, nesse contexto de formação, mostrou-se produtivo porque os alunos da Licenciatura em Matemática, apesar de não contarem com a experiência em sala de aula, têm esperanças, expectativas e sonhos diante de um trabalho a ser desenvolvido. Apresentar-lhes uma mudança, uma inovação, não foi difícil, não houve resistência ou descrença diante do novo.

Na formação continuada houve: compartilhamento de experiências; reflexão sobre suas práticas; busca de soluções para um melhor trabalho com os alunos; discussão e reflexão sobre conteúdos matemáticos; apoio entre os professores de uma mesma área; rompimento da ênfase na técnica operatória matemática em direção a uma forma de ensino que busca a compreensão das ideias matemáticas.

Quanto ao estudo e uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas, em sala de aula, pode-se destacar que o crivo da experiência foi importante. Ao conhecerem a realidade da escola e de seus alunos, os professores demonstraram ter gostado das discussões, mas revelaram algumas concepções em relação ao ensino de Matemática, sendo que uma delas seria a de que o aluno aprende Matemática por meio do treino das técnicas operatórias. Problematizar essas concepções prévias mostrou-se um processo desafiador. O caso da professora Ana, que trabalhou listas de exercícios sobre equações do 1º grau com seus alunos do 9º ano e quando, no bimestre seguinte, percebeu que eles não haviam compreendido o conteúdo, foi um exemplo que possibilitou essa problematização no grupo de estudo. Dessa forma, foi possível desequilibrar esses professores, fazendo-os refletir sobre suas práticas e sobre o próprio conhecimento matemático de cada um, contribuindo com o desenvolvimento profissional dos mesmos.

Em relação à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, os professores e futuros professores puderam notar algumas condições para o seu desenvolvimento, como a preparação da aula com a seleção de um problema adequado e o envolvimento e comprometimento dos alunos para com a construção de seu próprio conhecimento. Além disso, esse processo pode exigir um tempo maior do que simplesmente apresentar um determinado conteúdo e aplicá-lo, como ocorre em aulas tradicionais. Assim, sugere-se que o professor trabalhe ideias fundamentais da Matemática e que, ao menos, introduza a construção de novos conceitos, novos conteúdos e novos procedimentos, fazendo uso dessa Metodologia. É claro que o professor não precisa, necessariamente, usar o roteiro constante na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de problemas em todas as suas aulas. Ele pode fazer uso de outros recursos como jogos, tecnologia e história da Matemática, por exemplo, junto à resolução do problema. No entanto, ressalta-se a importância de problemas geradores que possibilitem aos alunos a construção de novos conceitos, novos procedimentos e novos conteúdos matemáticos.

Retomando-se a pergunta da pesquisa e considerando-se que os saberes revelados explicitam as aprendizagens docentes, pode-se afirmar que: Nos grupos de estudo, essas aprendizagens extrapolaram aspectos teóricos, didáticos e metodológicos referentes aos conteúdos matemáticos trabalhados. Identificou-se, também, aprendizagens relacionadas à visão de mundo, de escola e de sujeito que se pretende formar; e dos grupos de estudo como espaços importantes e necessários de formação. Houve, inclusive, estranhamentos, críticas, indagações e surpresas, por parte dos professores e de futuros professores de Matemática, quando suas práticas de ensinar e aprender matemática foram problematizadas pela Resolução de Problemas.

Por fim, considera-se que a referida metodologia, trabalhada em grupos de estudo, mostrou-se um recurso poderoso não apenas para a sala de aula mas, também, para a formação de professores. A própria essência desta Metodologia exige reflexão e construção coletiva de conhecimentos.

Considerações e limitações deste estudo

Quanto à formação inicial de professores, a universidade deveria constituir-se em um espaço de "reeducação" como já foi assinalado por Gonçalves e Gonçalves (1998). Além disso, seria fundamental que o futuro professor tivesse oportunidades de experienciar metodologias e práticas pelas quais muitos deles não passaram.

O grupo, constituído por futuros professores de Matemática, buscou promover esse espaço, possibilitando a reflexão a partir de experiências que apresentavam enquanto alunos da Educação Básica e que, de modo nenhum, foram desprezadas. A partir delas, os encontros foram estruturados. Percebeu-se que os alunos, ao partilharem experiências prévias e saberes próprios, puderam sentir o gosto de um trabalho apoiado na resolução de problemas. A perspectiva desse trabalho está na construção de novos conceitos, novos procedimentos e novos conteúdos por parte dos alunos e o problema, nesse contexto, é o gerador desse processo, o ponto de partida.

Quanto à formação continuada de professores, a escola, o local de trabalho, mostra-se como um espaço de aprendizagem capaz de possibilitar o desenvolvimento profissional de seus docentes. Para isso, os coordenadores e os diretores de escola deveriam possibilitar um tempo específico para que os professores, em conjunto, dentro de suas disciplinas, refletissem sobre seus problemas na busca por soluções, bem como pudessem aprender uns com os outros.

A formação de professores na escola, concordando com Imbernón (2011), não deve ser apenas uma mudança física do local de formação, mas refere-se ao desenvolvimento de um paradigma colaborativo entre os professores. Assim, as escolas constituir-se-iam em espaços específicos de formação, locais em que os próprios professores, mediados pelas suas necessidades e saberes, poderiam desenvolver-se profissionalmente. Além disso, esse espaço, preenchido por suas experiências e saberes, mostra-se como potencializador de reflexão e mudança de práticas em direção a um ensino de melhor qualidade.

Nesse grupo, formado por professores de Matemática em exercício, de uma escola pública do interior do estado de São Paulo, os professores puderam compartilhar experiências, expor suas dificuldades e, apoiando-se mutuamente, buscaram através da proposta da professora-pesquisadora novas aprendizagens e possibilidades para melhorar o ensino dessa disciplina nessa unidade escolar.

Apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de problemas o grupo resgatou, por meio de problemas, conhecimentos matemáticos e refletiu sobre como desenvolver a referida Metodologia em suas aulas. As discussões no grupo e a busca por uma nova forma de aprender e aprender a ensinar, mostraram que o trabalho realizado no grupo contribuiu para o desenvolvimento profissional desses professores de Matemática.

Em relação às limitações deste estudo, sentidas principalmente durante a implementação dos projetos, destacam-se:

- Na formação continuada: a dificuldade institucional de tornar a ATPC um espaço de estudo. Esse momento é importante na escola, pois é um dos poucos momentos em que todos os professores estão reunidos. No entanto, nas escolas em geral, torna-se um espaço burocrático ou de preparação de aulas, provas e trabalhos – o que não seria produtivo para o coletivo escolar.
- Na formação inicial: o excesso de atividades da graduação sobrecarregou os alunos que, em alguns encontros, ausentaram-se. Não foi possível que os alunos aplicassem a referida Metodologia em sala de aula, visto que ainda não haviam feito estágios.

Contribuições para a Educação Matemática

O presente trabalho deixa, como colaboração, algumas sugestões e questionamentos que merecem ser mais bem explorados. Uma delas, na formação inicial, é que todos os alunos da Licenciatura em Matemática possam refletir e trabalhar através da resolução de problemas. Para isso, apesar do excesso de atividades da graduação, é mister que a Resolução de

Problemas seja uma disciplina obrigatória e que seja uma “abordagem” conhecida e considerada por todos os docentes que atuam nos cursos de Licenciatura em Matemática, formando novos professores.

Como trabalhar com um maior número de professores, em mais escolas em um trabalho como foi aqui apresentado? Sem dúvida, a parceria escola-universidade é fundamental para que um maior número de professores possa conhecer e levar para as suas salas de aula a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. No entanto, ressalta-se que quando o grupo formado na escola torna-se colaborativo e autônomo, a presença do pesquisador se torna auxiliar. Outro fator que merece ser aqui destacado é a necessidade de um maior apoio público em iniciativas que envolvam a formação dos professores situada em seu próprio ambiente de trabalho. Afinal, a educação não é uma atividade técnica e os professores, como profissionais, devem ser valorizados e incentivados a buscarem iniciativas de formação coletiva para a melhoria de suas práticas e da escola em que estão inseridos.

Destaca-se também a possibilidade de se abordar outros temas de interesse dos professores e futuros professores a partir de suas dificuldades e inquietações. Sem dúvida, essa possibilidade de formação, apesar de suas limitações, revela-se capaz de envolver os participantes e provocar mudanças em seu processo de desenvolvimento profissional.

Outro ponto que merece destaque é que esta investigação possibilitou que os professores mobilizassem seus saberes disciplinares e didático-pedagógicos em direção ao que Ball, Thames e Phelps (2008) denomina de conhecimento especializado do conteúdo. Assim, pode-se perceber a necessidade da formação de professores abordar a natureza do conhecimento matemático do professor, que não é a mesma de um profissional que faz uso da Matemática. O professor necessita compreender as estruturas, os conceitos e procedimentos matemáticos para auxiliar os estudantes em suas dúvidas e conduzi-los em um processo de construção matemática.

Além disso, os saberes profissionais docentes ao formarem o que Tardif (2010) denomina de amálgama, mostram o quanto o professor deve investir em seu desenvolvimento profissional. Para isso, os contextos colaborativos, a escola e seus colegas de profissão assumem papéis de interlocutores capazes de auxiliar nesse processo. Parece necessário que o professor assuma uma perspectiva colaborativa de trabalho e aprendizagem e que possa promovê-la também no interior de suas salas de aula.

Uma última contribuição deixada por este trabalho de pesquisa refere-se ao desenvolvimento profissional do próprio professor-formador. Também se aprende a ser um formador, a possibilitar reflexões e a aproveitar oportunidades de problematização dos conteúdos matemáticos e das práticas de ensinar e de aprender Matemática. A professora-pesquisadora-formadora, nesse sentido, apesar de contar com pouca experiência no campo da formação de professores, pôde se constituir educadora, juntamente com os grupos de estudo dos quais participou.

Desse modo, corroborando com o que foi aqui apresentado e finalizando esta seção, Freire (1997, p. 25) afirma que "Quem forma se forma e re-forma ao formar e quem é formado forma-se e forma ao ser formado". Essa foi uma aprendizagem revelada neste trabalho e que merece ser destacada.

O trabalho a ser feito...

A partir do trabalho, realizado até o momento, foi possível perceber que muitas questões e caminhos precisam ser ampliados. A seguir serão apresentadas algumas sugestões e possíveis desenvolvimentos para futuras pesquisas:

Uma possibilidade interessante seria a de trabalhar com futuros professores em uma interlocução com estágio supervisionado, de modo a possibilitar reflexões e compartilhamento de experiências entre eles. Talvez, nesse caso, seja melhor um trabalho envolvendo um grupo maior de alunos ou até mesmo a sala toda.

No caso dos professores de Matemática em exercício, faz-se necessário buscar apoio do governo do estado para trabalhos que abarquem a escola pública. Apesar da política de formação proposta pelo estado, ela, em geral, ainda ocorre por meio de cursos em que os professores aprendem e devem aplicar esses conhecimentos em sala de aula, no modelo da racionalidade técnica. Cabe aos pesquisadores, e em especial à Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), incentivarem a ampliação e a oficialização dos grupos de estudo frente aos governos estadual e municipal. Uma sugestão, desconhecida pela *PP* até na momento da proposta dos grupos de estudos, é a oficialização desses grupos como parte das ações de formação continuada, nas modalidades Curso e Orientação Técnica, nos termos da Resolução SE 62/2005.

Sugere-se também que novas pesquisas possam prolongar o contato com os professores e futuros professores de Matemática de modo a analisar as estratégias utilizadas, bem como trabalhar a partir dos resultados da aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em sala de aula.

A discussão e reflexão sobre os erros e respostas dos alunos da Educação Básica podem promover encontros importantes com os professores de Matemática, além de colaborar com seu desenvolvimento profissional.

A partir das possibilidades para novas pesquisas, aqui indicadas, no contexto da formação de professores faz-se necessário investigar os saberes profissionais mobilizados durante as análises sugeridas. Sem dúvida, esses resultados poderão contribuir, ainda, com novas ações em formação de professores.

Apesar dos limites assinalados, na seção anterior, em pesquisas envolvendo grupos de professores quanto à amplitude deste trabalho, é fundamental que seja dada "voz" aos professores da Educação Básica, através de parcerias e da valorização de seus saberes profissionais. No entanto, é preciso ir além, não basta ouvi-los, é necessário problematizar suas práticas, desnaturalizá-las em direção a novas construções teóricas e práticas.

Diante da complexidade deste trabalho, conclui-se a última seção deste relatório de pesquisa com a sensação, a disposição e a vontade de continuar. Esse é um caminho!

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim Gepem**, Rio de janeiro, n. 55, p. 122-154, jul./ dez. 2009.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados:** Análise de uma Experiência. 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas**. 1998. 325f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1998.

ANDRÉ, M. A formação de professores nas pesquisas dos anos 1990. In: MACIEL, L. S. B.; NETO, A. S. (Org.). **FORMAÇÃO DE PROFESSORES**: passado, presente e futuro. São Paulo: Cortez, 2004, p. 77-96.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 25-45. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

ARTZT, A. F.; NEWMAN, C. M. **How to use cooperative learning of in the mathematics class.** New York: NCTM, 1991. 73p.

AZEVEDO, E. Q. **Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas.** 2002. 176f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

______. **O processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no contexto da formação inicial do professor de Matemática**. 2014. 268 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2014.

AZEVEDO, L. L**. Uma Proposta de Mudança na Licenciatura em Matemática do ICLMA, apoiada na Metodologia de Ensino de Matemática via Resolução de Problemas**. 1998. 220f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1998.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. C. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education,** v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BASTOS, C. L.; KELLER, V. **Aprendendo a aprender**. 6. ed. Petrópolis: Vozes, 1995. 104p.

BEHR, M. et al. Rational number, ratio and proportion. In: GROWS, D. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** Nova York: Macmillan Publishing, 1992. p. 296-333.

BOAVIDA, A. M.; PONTE, J. P. Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In: GTI (Ed.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, 2002. p.43-55.

BOERO, M. L. **A introdução da disciplina 'Ensino-aprendizagem da Matemática através da Resolução de Problemas' no curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Biológicas, Exatas e Experimentais da Universidade Presbiteriana Mackenzie**: uma proposta de mudança. 1999. 254f. Dissertação (Mestrado em Educação, Arte e História da Cultura) - Universidade Presbiteriana Makenzie, São Paulo, 1999.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Investigação qualitativa em Educação: fundamentos, métodos e técnicas. In: ______. (Org.). **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto Editora, 1994. p. 15-80.

BOLZAN, W. J. **A Matemática nos Cursos Profissionalizantes de Mecânica.** 2003. 222f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2003.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.(Org.). **As ideias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

BORGES, C. M. F. **O professor da educação básica e seus saberes profissionais**. Araraquara: JM Editora, 2004. 320p.

BOTTA, E. S. **O ensino do conceito de função e conceitos relacionados a partir da resolução de problemas.** 2010. 438p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2010.

BOTTA, L. S. **Números Racionais e Raciocínio Proporcional**: considerações sobre o ensino e a aprendizagem. 1997. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1997.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRANCA, N. A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.). **A resolução de problemas na Matemática escolar.** Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. 3. ed. São Paulo: Atual, 2003.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, 05 dez. 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf.> Acesso em: 09 abril. 2011.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CP 09/2001**. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica, em cursos de nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Brasília: MEC, 2002.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (1ª a 4ª séries)**.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (5ª a 8ª séries)**.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Referenciais para a Formação de Professores**. Brasília: MEC/SEF, 2001.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. vol 2. Brasília: MEC/ SEB, 2006.

BRITO, M. R.F. **Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus**. Tese Livre Docência. Campinas: FE-UNICAMP, 1996.

BURNS, M.; SILBEY, R. **So you have to teach math?** Sound advice for K-6 teachers. Sausalito, CA: Math Solutions Publications, 2000.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 2003.

CENTÚRION, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática na medida certa:** 9º ano. São Paulo: Editora Scipione, 2009.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.; SILVA, R. **Metodologia científica.** 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 162 p.

CHALOUH, L. e HERSCOVICS, N. Ensinando expressões algébricas de maneira significativa. In: COXFORD, A. e SHULTE, A. (Org.). O. **As ideias da Álgebra**. Trad. DOMINGUES, H. H. São Paulo: Atual, 1995.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. L. Relationships of Knowledge and Practice: Teacher Learning in Communities. **Review of Research in Education**, vol. 24, p. 249-305, jan 1999.

COLINVAUX, D. Aprendizagem e construção/constituição de conhecimento: reflexões teórico-metodológicas. **Pro-Posições**, Campinas, SP, v. 18, n. 3 (54), p. 29-51, set./dez.

COSTA, M. S. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de proporcionalidade através da resolução de problemas**: uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de Matemática. 2012. 292p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, SP, 2012.

COSTA, N. M. L. da. Formação continuada de professores: uma experiência de trabalho colaborativo com Matemática e tecnologia. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V.(Org.).

A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 167-196.

CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. Learning ans Teaching Ratio and Proportion: Research Implications. In: OWENS, D. (Ed.). **Research Ideas for the Classroom**: Middle Grades Mathematics. New York: Macmillan, p. 159-178. 1993.

CURI, E. Contribuições de um grupo colaborativo no desenvolvimento profissional de seus participantes. In: ________; NASCIMENTO, J. C. P. **Educação Matemática**: grupos colaborativos, mitos e práticas. São Paulo: Terracota, 2012. p. 13-53.

D`AMBROSIO, B. Formação de professores de Matemática para o século XXI: o grande desafio. **Pró-Posições**, Campinas, SP, v. 4, n. 1, p. 35-41, mar. 1993.

DANA, M. E. Geometria – um enriquecimento para a escola elementar. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A.P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria.** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 141-155.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**: livro do professor, 6ª série. 2.ed. São Paulo: Ática, 2007.

FABIANI, F. S. **Números Complexos via Resolução de Problemas**. 1998. 210f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1998.

FERNANDES, D. et al. (Org.). **Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática**: Múltiplos contextos e perspectivas. Aveiro: GIRP, 1997. p. 1-38.

FERREIRA, A. C. **Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de Matemática**: uma experiência de trabalho colaborativo. 2003. 360 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

FIORENTINI, D. Memória e análise da pesquisa acadêmica em Educação Matemática no Brasil: o banco de teses do CEMPEM/FE- Unicamp. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, p. 55-76, mar. 1993.

______ . **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática**. 1994. 414f. Tese (Doutorado em Metodologia de Ensino) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1994.

______ . Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L.(Org.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 47-76.

______. Aprendizagem profissional e participação em comunidades investigativas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba, PR: SBEM, jul. 2013. p. 1-15.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed rev. Campinas: Autores Associados, 2012.

FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática**: investigando e teorizando a partir da prática. São Paulo: Musa Editora, 2005.

FIORENTINI, D; NACARATO, A. M.; PINTO, R. A. Saberes da experiência docente em Matemática e Educação Continuada. **Quadrante**: Revista teórica e de investigação. Lisboa, Portugal, vol. 8, p.33-60, 1999.

FIORENTINI, D.; SOUZA JR., A. J. de; MELO, G. F. A. de. Saberes docentes: Um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. A. (Org.). **Cartografias do trabalho docente**: professor(a)-pesquisador(a). Campinas: Mercado de Letras, 1998. p. 307-335. (Coleção leituras no Brasil).

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**. São Paulo: Paz e Terra, 1997.

FULLAN, M.; HARGREAVES, A. **A escola como organização aprendente**: buscando uma educação de qualidade. 2. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

GALVÃO, M. E. E. L.; MELO, F. S. Obtendo as Cônicas com Dobraduras. **Revista do Professor de Matemática**, v. 66, p. 29-32, 2008.

GAMA, R. P. **Desenvolvimento profissional com apoio de grupos colaborativos**: o caso de professores de Matemática em início de carreira. 2007. 240 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 2007.

GARCIA, C. M. A formação de professores: centro de atenção e pedra de toque. In: NÓVOA, A. **Os professores e sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1995.

GATTI, B. A.; BARRETO, E. S. S. (Coord.). **Professores do Brasil**: impasses e desafios. Brasília: UNESCO, 2009.

GAZIRE, E. S. **Resolução de Problemas**: Perspectivas em Educação Matemática. 1988. 193 f .Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1988.

______. Resolução de problemas e práticas investigativas. In: RELME, 26., 2012, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: UFOP, 2012.

GONÇALVES, T. V. O.; GONÇALVES, T. O. Reflexões sobre uma prática docente situada: buscando novas perspectivas para a formação de professores. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. de A. (Org.). **CARTOGRAFIAS DO TRABALHO DOCENTE:** professor(a) pesquisador(a). 1. ed. Campinas: Mercado de Letras e Associação de Leitura do Brasil, 1998. p. 105-134.

HARGREAVES, A. **Os professores em tempo de mudança**: O trabalho e a cultura dos professores na idade Pós-Moderna. Lisboa: MacGraw-Hill, 1998.

HENNINGSEN, M.; STEIN, M. K. Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning.

Journal for Research in Mathematics Education, Reston, vol.28, n.5, p.524-549, nov. 1997.

HERMÍNIO, P. H. **Matemática Financeira – um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem**. 2008. 234 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2008.

HIEBERT, J. et al. **Making Sense**: Teaching and Learning Mathematics with understanding. Potsmouth, NH: Heinemann, 1997.

HOUAISS. **Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa**. 1. ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática na e além da sala de aula**. 2006. 247f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2006.

______. **A resolução de problemas e a modelização matemática no processo de ensino-aprendizagem-avaliação**: uma contribuição para a formação continuada do professor de Matemática. 2014. 315 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2014.

IMBERNÓN, F. **La formación del professorado**. Buenos Aires: Paidós, 1994.

______. **Formação permanente do professorado**: novas tendências. 1. ed. 2. reimp. Trad. Sandra Trabucco Valenzuela. São Paulo: Cortez, 2009.

______. **Formação continuada de professores.** Trad. Juliana dos Santos Padilha. Porto Alegre: Artmed, 2010.

______ . **Formação docente e profissional:** formar-se para a mudança e a incerteza. 9. ed. 1. reimp. Trad. Silvana Cobucci Leite. São Paulo: Cortez, 2011. (Coleção questões da nossa época, volume 14).

JUSTULIN, A. M. **Um estudo sobre relações entre atitudes, gênero e desempenho de alunos do ensino médio em atividades envolvendo frações**. 2009. 250f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2009.

LAMBDIN, D. V.; WALCOTT, C. Changes through the years: Connections between psychological learning theories and the school mathematics curriculum. In: MARTIN, W. G. et al. (Ed.). **The Learning of Mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2007. p. 3 - 25.

LARSON, R.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. **Calculus**. Boston, MA: Houghton Mifflin Company, 1998. 1316 p.

LEITÃO, A.; FERNANDES, H. Trabalho de grupo e aprendizagem cooperativa na resolução de problemas por futuros professores de Matemática. In: FERNANDES, D.; LESTER, F.; BORRALHO, A.; VALE, I. (Org.). **Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática**: Múltiplos contextos e perspectivas. Aveiro: GIRP, 1997. p. 1-38.

LEITZEL, J. R. Critical Considerations for the Future of Algebra Instruction. In: WAGNER, S.; KIERAN, C.(Org.). **Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.** Reston: Lawrence Erlbaum Associates, NCTM, 1989, v. 4, 287p.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBEM, 1996. (Coleção do Professor de Matemática)

______. Geometria Analítica e Álgebra Linear. Rio de Janeiro: Impa, 2010.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. **Naturalistic inquiry**. Newbury Park, CA: Sage, 1985.

MARIN, A. J. Educação Continuada: Introdução a uma análise de termos e concepções. **Cadernos Cedes**. Campinas: Papirus, n. 36, 1995.

MENDONÇA, M. C. D. Resolução de problema pede (re)formulação. In: ABRANTES, P., PONTE, J. P., FONSECA, H., BRUNHEIRA, L. (Org.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Grafis, Coop. de Artes Gráficas, CRL, 1999.

MENINO, F. S. **Resolução de Problemas no Cenário da Matemática Discreta**. 2013. 289 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2013.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MIZUKAMI, M. G. N. Escola e desenvolvimento profissional da docência. In: GATTI, B. A. et al (Org.). **Por uma política nacional de formação de professores**. 1. Ed. São Paulo: Editora Unesp, 2013.

MIZUKAMI, M. G. N. et al. **Escola e aprendizagem da docência**: processos de investigação e formação. São Carlos: EdUFSCar, 2002.

MORGADO, A. C. O et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004. (Coleção do Professor de Matemática).

MURPHY, C. U.; LICK, D. W. **Whole-faculty Study Groups**: A Powerful Way to Change Schools and Enhance Learning. Corwin: Thousand Oaks, 1998.

NACARATO, A. M et al. Um estudo sobre pesquisas de grupos colaborativos na formação de professores de Matemática. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2., Santos, **Anais...** Santos, SP: SBEM, 2003. p. 1-20.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. **An Agenda for Action.** Reston: NCTM, 1980.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics.** Reston: NCTM, 1989.

______. **Professional standards for teaching mathematics.** Reston: NCTM, 1991.

______ . **Assessment standards for school mathematics.** Reston: NCTM, 1995.

______ . **Principles ans standards for school mathematics.** Reston: NCTM, 2000.

______ . **Curriculum Focal Points.** Reston: NCTM, 2006.

______ . **Navigating through Discrete Mathematics/Grades 6-12**. Reston: NCTM, 2007.

______ . **Common Core State Standards for Mathematics.** Reston: NCTM, 2009.

NOGUTI, F. C. H. **Um curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas para alunos ingressantes da Universidade Federal do Pampa – *Campus* Alegrete.** 2014. 370 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2014.

NÓVOA, A. (Coord.). **Os professores e sua formação**. Lisboa: Publicação Dom Quixote, 1992.

NÓVOA, A. Os professores e as histórias da sua vida. In: ______. (Org.). **Vidas de professores**. Lisboa: Porto Editora, 1995. p.11-30.

NUNES, C. B. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas:** perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2010.

OLIVEIRA, S. A. de. **Resolução de problemas na formação continuada e em aulas de Matemática nos anos iniciais.** 2012. 171f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, 2012.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 199-218. (Seminários e Debates).

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática** - pesquisa em movimento. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213-231.

______. As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Bolema** – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v. 21, n. 31, p. 79 - 102.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema** - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

ONUCHIC, L. R.; BOTTA, L. S. Reconceitualizando as quatro operações. **Revista de Educação Matemática**, São José do Rio Preto, SP, ano 6, n. 4, p.19-26, 1998.

PASSOS, L. B. P. et al. Desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática: Uma meta-análise de estudos brasileiros. **Quadrante**. vol. xv, n. 1 e 2, p. 193-219, 2006.

PASSOS, M. M. **O professor de Matemática e sua formação**: Análise de três décadas da produção bibliográfica em periódicos na área de Educação Matemática no Brasil. 2009. 328 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2009.

PAULETTE, W. **Novo enfoque da disciplina Matemática e suas Aplicações, no Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista- Unip.** 2003. 398f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2003.

PAULOVICH, L. **Conceitos algébricos iniciais: Um estudo sobre sua formação nos anos de escolaridade**. 1998. 377f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1998.

PEREIRA, M. **O ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas no 3º ciclo do ensino fundamental.** 2004. 262f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2004.

PEREZ. G. Formação de professores de Matemática sob a perspectiva do desenvolvimento profissional. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 263-282.

PEREZ GOMEZ, A. O pensamento prático do professor - a formação do professor como profissional reflexivo. In: NOVÓA, A. (Org.). **Os professores e a sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1992.

PERRENOUD, P. **A prática reflexiva no ofício de professor**: profissionalização e razão pedagógica. Porto Alegre: Artmed, 2002.

PIRONEL, M. A **Avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática**. 2002. 193f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Ed. Interciência, 1978. Do original em inglês: *How to solve it*, 1944.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Ed. Interciência, 1966. Do original em inglês: *How to solve it*, 1944.

______. **A arte de resolver problemas**. 1. reimp. Trad. e adapt. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciências, 1986. 179 p.

PONTE, J. P. Da formação ao desenvolvimento profissional. In: **Actas do ProfMat 98.** Lisboa: APM, 1998. p.27-44.

PONTE, J. P.; SANTOS, L. Reflectir sobre as práticas de formação. **Educação e Matemática** (Associação de Professores de Matemática), v. 79, p. 2-4, 2004.

PUTI, T. C. **A produção de significados durante o processo de ensino-aprendizagem**: avaliação de equações polinomiais. 2011. 244 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2011.

RIBEIRO, M. V. **O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da Matemática e da resolução de problemas**. 324 f. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2010.

RODRIGUES, V**. Resolução de Problemas como estratégia para incentivar e desenvolver criatividade dos alunos na prática educativa matemática**. 1992. 183f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1992.

ROMBERG, T. A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 49-64.

SANTOS, C. R. **Influências da linguagem e da comunicação no ensino-aprendizagem da Matemática**. 1995. 114f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1995.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática. Coordenação de Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008.

______. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor**: Matemática, Ensino Fundamental. 5ª a 8ª séries. v. 1 a 4. Coordenação geral de Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2009a.

_______. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor**: Matemática, Ensino Médio. 1ª a 3ª séries. v. 1 a 3. Coordenação geral de Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2009b.

_______. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas Tecnologias. Coordenação geral de Maria Inês Fini. Coordenação de área de Nilson José Machado. 1. ed. Atual. São Paulo: SEE, 2012. 72p.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do Professor**: Matemática, Ensino Fundamental. 6º ao 9º anos. Ed rev. v. 1 a 4. Coordenação geral de Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2013.

SARAIVA, M.; PONTE, J. P. O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. **Quadrante**. Lisboa: APM, vol. 2, n. 13, p. 25-52, 2003.

SCHÖN, D. **The Reflective Practioner**: how professional think in action. New York: Basic Books, 1983.

_______. **Educating the reflective practitioner**: toward a new design for teaching and learning in the professions. San Francisco: Jossey Bass, 1987.

SCHROEDER, T.L., LESTER Jr., F.K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCTM, 1989. (Year Book).

SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. Novos professores: primeiros anos de profissão. **Quadrante**, Portugal, v. 11, n. 2, p. 53-73, 2002.

SHULMAN, L.S. Those who understands: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v.15, n. 2, p. 4-14, 1986.

______. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform, **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

SILVA, G. H. G. da. **Grupos de estudo como possibilidade de formação de professores de Matemática no contexto da geometria dinâmica**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2010.

SILVA, I. da. **História dos pesos e medidas.** São Carlos: EdUFSCAR, 2004.

SILVA, M. G. P. **Resolução de problemas**: Uma perspectiva de trabalho em sala de aula. 1989. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1989.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.** 2010. 343 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2010.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston: NCTM, 1990. p. 1-22.

STERNBERG, R. J. **Psicologia cognitiva**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

TARDIF, M. A profissionalização do ensino passados trinta anos: dois passos para a frente, três para trás. **Educação & Sociedade**, Campinas, SP, vol.34, n. 123, p. 551-571, abr./ jun. 2013.

TARDIF, M; LESSARD, C; GAUTHIER, C**. Formação dos professores e contexto sociais**: perspectivas internacionais. Porto: Rés, 1998.

TARDIF, M.; LESSARD, C. **O trabalho docente**: elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas. 2. ed. Trad. João Batista Kreuch. Petrópolis, RJ: Vozes, 2005. 317 p.

TARDIF, M. **Saberes Docentes e formação profissional**. 10. ed. Trad. Francisco Pereira. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

TEUKOLSKY, R. Secções cônicas: um tópico interessante e enriquecedor. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria.** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2008.

TINOCO, L. de A. (Cood.). **Álgebra**: pensar, calcular, comunicar. 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2011.

UNICAMP – UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. **A cartomante** [vídeo]. 2013a. (Coleção M³ Matemática Multimídia). Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1065>. Acesso em: 3 abr. 2013.

______. **A dança do sol** [vídeo]. 2013b. (Coleção M³ Matemática Multimídia). Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1080>. Acesso em: 3 abr. 2013.

VALE, I. Desempenhos e concepções de futuros professores de Matemática na resolução de problemas. In: FERNANDES, D.; LESTER, F.; BORRALHO, A.; VALE, I. (Org.). **Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática**: Múltiplos contextos e perspectivas. Aveiro: GIRP, 1997. p. 1-38.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally**. 4. ed. Massachusetts: Addison Wesley Longman, 2001.

______. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre, RS: Artmed, 2009.

_____; KARP, K. S.; BAY-WILLIAMS, J. M. **Elementary and middle school mathematics**: teaching developmentally. 8. ed. New Jersey: Pearson, 2013.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. **Acquisition of mathematics concepts and processes.** New York: Academic Press, 1983, p. 127-173.

WAGNER, E. Sobre o ensino de Geometria Analítica. **Revista do professor de Matemática**, Rio de Janeiro, SBM, n. 41, p. 17-22, 1999.

ZEICHNER, K. **A formação reflexiva de professores**: ideias e práticas. Lisboa: Educa, 1993.

______. Repensando as conexões entre a formação na universidade e as experiências de campo na formação de professores em faculdades e universidades. **Educação**, Santa Maria, v. 35, n. 3, p. 479-504, set. - dez. 2010.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. **Revista Iberoamericana de Educación Matematica**, n. 11, p. 79-97, set. 2007. Disponível em: em: <http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=232>. Acesso em 05 abril 2008.

APÊNDICES

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO INICIAL APLICADO AOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM EXERCÍCIO

unesp

Questionário aplicado aos professores de Matemática

Prezado colega,

Gostaria de pedir a gentileza no preenchimento deste questionário. Ele busca conhecer algumas de suas características pessoais que podem interferir no que você pensa sobre o que é ensinar e como trabalha a Matemática em sala de aula. Comunico que as identidades dos informantes serão mantidas sob sigilo, a menos que queira o contrário. Desde já agradeço a disponibilidade e colaboração!

PARTE I – Dados pessoais

1. Identificação

Nome:	Idade:
Endereço:	
Cidade:	Telefone:
Email:	

2. Formação Universitária

Graduação:	
Ano de início:	Ano de conclusão:
Diurno ou Noturno?	
Você fez algum outro curso de graduação? Qual?	
Você fez pós-graduação? Qual?	

3. Experiência Profissional

Trabalha ou trabalhou em outra profissão? Qual?
Tempo de serviço como professor. (em anos)
Número de escolas em que já lecionou
Número de escolas em que leciona atualmente
Escola (s) onde trabalha atualmente (e número de aulas semanais)
Já trabalhou ou trabalha em escola particular? Por quanto tempo?
Já lecionou ou leciona como eventual? Por quanto tempo?
Quais disciplinas que lecionava ou leciona como eventual?
Para quais séries você ministra aulas neste ano?

PARTE II – Sobre as suas preferências profissionais/ pessoais

Responda aos seguintes itens de forma dissertativa:

1. Qual bloco de conteúdo você mais sente dificuldade em trabalhar com seus alunos? Assinale com um x:

a) Números e operações (Aritmética e Álgebra)
b) Espaço e forma (Geometria)
c) Grandezas e medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria)
d) Tratamento da informação (Estatística, Combinatória e Probabilidade)

2. Do bloco de conteúdo escolhido por você, que conteúdo e para qual série você acha mais difícil trabalhar? Por quê?

3. Como você trabalha a Resolução de Problemas em suas aulas?

4. Como os alunos reagem quando você propõe problemas em suas aulas? Qual é a maior dificuldade apresentada por eles?

APÊNDICE B – ROTEIRO DE TAREFAS

Para a elaboração deste roteiro de tarefas foram selecionados problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos, extraídos de livros didáticos e de revistas especializadas. As situações-problema deveriam ser adequadas à construção de novos conceitos, novos procedimentos e de novos conteúdos, indicados pelos professores de matemática em exercício como sendo difíceis para eles trabalharem.

<u>1º Encontro</u>

Objetivo geral:

Apresentar os objetivos do projeto aos professores em exercício e discutir com eles, com base na leitura de dois textos propostos, sobre a Resolução de Problemas na História da Matemática e sobre a Resolução de Problemas no Ensino de Matemática.

Atividade 1:

Apresentação pela professora-pesquisadora dos objetivos do projeto 2 "(Re) pensando a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática: O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas", que constam na página 92.

O objetivo desta atividade é que os professores conheçam o projeto e que possam se comprometer com ele.

Atividade 2:

Leitura conjunta do texto *Resolução de problemas e práticas investigativas,* de Gazire (2012, p. 1-4).

Pretende-se com essa atividade que os professores reconheçam que a Resolução de Problemas foi imprescindível na História da Matemática para a geração de novos conhecimentos.

Atividade 3:

Leitura conjunta do texto *Ensinando matemática na sala de aula através da Resolução de problemas,* de Allevato e Onuchic (2009, p. 1-6)

Espera-se que, com a leitura desse texto, os professores compreendam que o ensino de Matemática passou por várias fases (repetição, compreensão) até se falar em Resolução de Problemas.

Questões para o debate:

1. O que vocês acharam dos textos?
2. Já haviam estudado as fases por quais passou o ensino de Matemática até se chegar à Resolução de Problemas?
3. Já ouviram falar do NCTM ?
4. Como você procura desenvolver, em sala de aula, o ensino de Matemática? É por meio da repetição de exercícios ou buscando a compreensão de conceitos?
5. Faz uso da Resolução de problemas? Como?

<u>2º Encontro</u>

Objetivo geral:

Retomar as três concepções sobre Resolução de Problemas apresentadas por Schroeder e Lester (1989) e discutir mais profundamente o *Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas.* Apresentar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e o roteiro de atividades sugerido na aplicação dessa metodologia.

Atividade 1:

Retomar a leitura do texto de Allevato e Onuchic (2009, p. 5) e discutir as três concepções apresentadas por Schroeder e Lester (1989).

Atividade 2:

Leitura das páginas (80-85), do texto de Onuchic e Allevato (2011), que apresenta a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Atividade 3:

Apresentar o roteiro de atividades elaborado por Onuchic (1999) e posteriormente ampliado (Zuffi e Onuchic, 2007; Allevato e Onuchic, 2009; Onuchic e Allevato, 2011, 2014).

Questões para o debate:

1. Dentre as concepções apresentadas por Schroeder e Lester, qual delas é a mais comum entre os professores de Matemática?

2. Qual delas é a mais comum nos livros didáticos de Matemática?
3. Vocês acreditam ser possível trabalhar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em suas aulas?
4. Qual(ais) dificuldade(s) você acredita que encontraria ao trabalhar com essa metodologia?

3º Encontro

Objetivo Geral:

Resgatar, com os professores, as orientações curriculares propostas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, nas Orientações Curriculares Nacionais e no Currículo do Estado de São Paulo sobre os conteúdos a serem trabalhados em cada série/ano e sobre Resolução de Problemas.

Atividade 1:

Cada grupo ficará responsável por analisar desde os PCN de Matemática: 1ª a 4ª série até as OCNs do Ensino Médio, um determinado bloco de conteúdo: Números e operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Assim, pretende-se que os docentes investiguem o bloco de conteúdo escolhido, ao longo do currículo, e as orientações sugeridas para o trabalho com ele.

Após essa investigação, cada grupo deverá comentar e indicar os conteúdos analisados e a forma sugerida do trabalho com cada um deles.

Questões para o debate:

1. Quando se iniciam as aulas em uma sala, de que maneira são resgatados os conteúdos anteriormente trabalhados?
2. Você identifica os conteúdos que seu aluno deveria conhecer ao iniciar seu trabalho com ele?
3. O que o aluno deve saber após concluir a 4ª série ou 5º ano?
4. Se o aluno chega a uma série e se detecta a falta de conhecimentos prévios sobre certo conteúdo, como você age?
5. A retomada de conteúdo é feita como? De maneira idêntica a que o professor trabalha em sala de aula ou de modo diferenciado?
6. Por que você acha que o aluno “esquece” com tanta facilidade conceitos abordados no ano anterior?

Atividade extra-grupo: Leitura do texto *Reconceitualizando as quatro operações fundamentais,* de Onuchic e Botta (1998).

4º Encontro

Objetivo Geral:

Possibilitar que os professores reflitam sobre o ensino das quatro operações fundamentais da aritmética. Além disso, pretende-se que os docentes reconheçam a diversidade de situações que envolvem adição/ subtração e as situações modeladas por multiplicação/divisão.

Atividade 1:

Discussão sobre o texto *Reconceitualizando as quatro operações fundamentais,* de Onuchic e Botta (1998).

Questões para o debate:

1. Você já conhecia ou já havia refletido sobre as várias situações que envolvem as quatro operações fundamentais?
2. Quais dificuldades os alunos apresentam com relação às operações fundamentais quando chegam ao 6º ano?
3. Na página 20, as autoras apontam que pesquisas realizadas indicam que "as operações de adição e subtração nas séries iniciais deveriam ser trabalhadas a partir de 'problemas aditivos e subtrativos' que permitissem desenvolver, simultaneamente, os conceitos de adição e subtração. Esse trabalho deveria ser feito, concomitantemente, com o trabalho da construção do significado dos números naturais. Só depois, é que se cuidaria de conectar os símbolos aos conceitos de adição e subtração; e os problemas aditivos e subtrativos, como membros de uma mesma família, não poderiam ser classificados separadamente". O que vocês acham dessa afirmação?
4. Quais dificuldades envolvendo operações fundamentais, no conjunto dos números naturais, apresentam os alunos do Ensino Fundamental (6º a 9º ano) com que trabalham? Por quê?

5. Quais dificuldades envolvendo operações fundamentais, no conjunto dos números inteiros, apresentam os alunos do Ensino Fundamental (6º a 9º ano) com que trabalham? Por quê?
6. Quais dificuldades envolvendo operações fundamentais, no conjunto dos números racionais, apresentam os alunos do Ensino Fundamental (6º a 9º ano) com que trabalham? Por quê?

5º Encontro

Objetivo Geral:

Os PCN de Matemática (1998) apresentam quatro interpretações para a álgebra escolar (Aritmética Generalizada, Funcional, Equações e Estrutural) e as diferentes funções das letras em cada uma delas (Letras como generalizações, Letras como variáveis para expressar relações e funções, Letras como incógnitas e Letras como símbolo abstrato).

Neste encontro, pretende-se explorar a Álgebra como Aritmética Generalizada e Álgebra Funcional através da leitura de trechos do livro *Álgebra*, de Tinoco (2011, p. 7-8).

ÁLGEBRA COMO GENERALIZADORA DA ARITMÉTICA

Nessa concepção, a Álgebra é utilizada para traduzir e generalizar. As variáveis (letras) e expressões algébricas são generalizadoras de números, operações e modelos aritméticos.

Por exemplo, generaliza-se a propriedade comutativa da adição: $2 + 6 = 6 + 2$; por meio da igualdade $a + b = b + a$ e a regularidade nas multiplicações: $(-1) \times 2 = -2$, $(-2) \times 2 = -4$, ... pode ser generalizada como $(-a) \times b = -(a \times b)$.

Ao representar um número par qualquer por *2k*, ou o triplo de um número por *3m*, estamos também usando a Álgebra na concepção **Generalizadora da Aritmética.**

Ao resolver problemas, encontramos relações entre números que desejamos "traduzir" matematicamente, e as variáveis são úteis para essa tradução. Por exemplo, ao traduzir um problema para linguagem algébrica, monta-se uma equação (modelo matemático) que representa a estrutura matemática do mesmo. Neste sentido, cada equação é generalizadora, pois, pode modelar muitos problemas distintos, desde que tenham a mesma estrutura matemática.

Exemplo:

(I) *"Seis pessoas da família Silva foram ao cinema e gastaram R$81,00 com os ingressos. Sabendo que nesse grupo há 3 estudantes, e que estudante para a metade do preço de um ingresso, qual era o preço de cada ingresso nesse cinema?"*

Podemos escrever a equação $3b + 3\frac{b}{2} = 81$, em que b representa o preço de cada ingresso.

Nesse caso, para chegar à equação foi necessário traduzir as operações envolvidas no problema.

Fonte: Tinoco (2011, p. 7).

A ÁLGEBRA FUNCIONAL

Nessa concepção, a Álgebra é considerada como estudo de relações entre grandezas. Nela se encontra, principalmente, o estudo das funções. Uma vez estabelecida a relação entre as grandezas envolvidas, seja por meio de uma igualdade, ou graficamente, utiliza-se a **Álgebra Funcional** ao analisar o comportamento de uma grandeza à medida que a outra varia, ao fazer previsões, ao observar propriedades como crescimento e decrescimento, etc.

As variáveis, no contexto das funções, assumem os papéis de:

- Variável independente – que pode variar livremente no domínio da função;
- Variável dependente – que assume valores determinados pelos das variáveis independentes;
- Parâmetro – variável que determina a "lei" segundo a qual a variável dependente é determinada a partir das variáveis independentes.

Variáveis dependentes e independentes são também chamadas de argumentos.

Na concepção da **Álgebra Funcional**, o objetivo de explorar e manipular a igualdade não é o de determinar o valor das letras, que, nesse caso, não são incógnitas e sim **argumentos ou parâmetros.**

Fonte: Tinoco (2011, p. 8).

Atividade 1:

Resolver problemas envolvendo a concepção da álgebra como generalizadora da aritmética.

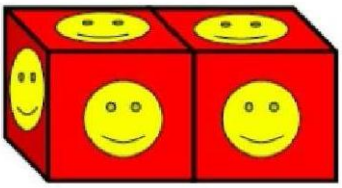
1. Os participantes de um festival de música decidiram que ao final do festival fariam uma festa de encerramento. Nessa festa, cada um dos participantes daria uma flor de presente a cada colega que participou do evento. Quantas flores serão distribuídas se o total de participantes for igual a 5? E se for igual a 6? E igual a 7?

Complete a tabela a seguir:

Número de participantes	Número de flores que cada um vai receber	Total de flores
3	2	3.2=6
4		
5		
6		
7		
...	...	...
11		
x		
y+1		

(Adaptado de: São Paulo, 2009a)

2. Joana está construindo um jogo com cubos e adesivos. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um adesivo em cada uma das faces. A figura a seguir mostra a construção que Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 adesivos.



(Adaptado de: Cubos com autocolantes. Disponível em: http://p3m.ie.ul.pt/materiais-para-a-aula).

I. Quantos adesivos Joana usa em uma construção com:

a) Três cubos.

b) Quatro cubos.

c) Dez cubos.

d) Cinquenta e dois cubos.

II. Você consegue descobrir qual é a regra que permite saber quantos adesivos Joana usa em uma construção com um número qualquer de cubos? Explique como pensou.

3. **Fazendo Caminhadas** [1]

Ricardo quer fazer mais exercícios. Na semana passada, ele andou por cinco dias seguidos. A cada dia, ele andou duas quadras a mais do que tinha andado no dia anterior. Ele andou um total de 35 quadras.

Quantas quadras Ricardo andou em cada dia?

Atividade 2:

Resolver problemas envolvendo a concepção da álgebra funcional.

[1] Traduzido de Krulik e Rudnik, 2005, p. 20, problem 35 – Problem-Driven Math.

4. **(Tinoco, 2011, p. 56)** Dona Solange fabrica bombons caseiros e os vende em caixas decoradas. Em cada caixa ela coloca 6 bombons e as vende por R$ 4,00. Complete as tabelas a seguir.

Número de caixas	**Número total de bombons**
1	
7	
12	
30	

Número de caixas vendidas	**Quantia recebida com a venda**
1	
6	
20	
50	

a) Qual a relação que existe entre o número de caixas e o de bombons nelas contidos?

b) Escreva uma igualdade que represente essa relação.

c) Qual a expressão que representa a quantia recebida por D. Solange pela venda de um número qualquer de caixas de bombons?

5. **Programa de Bônus** [2]

Chan treina em uma academia várias vezes na semana. A academia premia seus clientes mais frequentes com bônus que podem ser usados em serviços da academia. A tabela mostra o sistema que a academia usa para conceder os bônus.

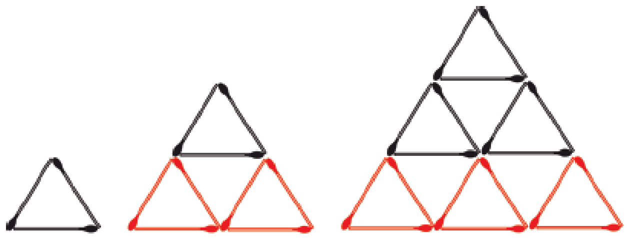
Número de bônus	0	4	8	12	16	...
Número de Treinos (por mês)	1-10	11	12	13	14	...

No último mês, Chan recebeu 40 bônus. Quantas vezes Chan treinou no mês?

6.[3] Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura.

[2] Traduzido de Krulik e Rudnik, 2005, p. 32, problem 60 – Problem-Driven Math.

[3] Adaptado de OBMEP (2012).



Pergunta-se:

a. Se um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo, quantos palitos formam o lado desse triângulo?

b. Quantos palitos terá o lado do 5º triângulo?

c. Quantos palitos terá o 5º triângulo?

d. Quantos palitos terá o nº lado?

e. Quantos palitos terá o lado do 100º triângulo?

f. Quantos palitos terá o 100º triângulo?

g. Quantos palitos terá o nº triângulo?

h. Descubra uma função que relaciona a quantidade de palitos do triângulo *n* e o número de palitos que compõe o lado *l* desse triângulo.

6º Encontro

Objetivo Geral:

Explorar os dois últimos sentidos da Álgebra: Álgebra das Equações e Álgebra Estrutural através da leitura de trechos do livro *Álgebra,* de Tinoco (2011, p. 9- 11).

ÁLGEBRA DAS EQUAÇÕES

Nessa concepção, destacam-se os processos de resolução de equações. Há um ou mais valores que as variáveis (incógnitas) devem assumir e queremos determina-los para tornar a equação verdadeira (uma identidade). Essa é a dimensão que mais se trabalha, em geral, do sétimo ao nono ano.

Muitos autores afirmam que, nessa concepção, a Álgebra é ferramenta para resolução de problemas. Em geral, esse é o primeiro contato dos alunos com a Álgebra, o que talvez não seja o melhor caminho para a construção do conceito de variável. É mais natural construir esse conceito integrando as concepções da **Álgebra Funcional** e da **Álgebra das Equações.**

Fonte: Tinoco (2011, p. 9).

ÁLGEBRA ESTRUTURAL

Nos exercícios de **puro** cálculo algébrico, estamos usando a **Álgebra Estrutural.** Nesse tipo de tarefa, **as letras são símbolos abstratos** a serem manipulados seguindo certas regras. Não são incógnitas cujos valores devem ser determinados e, como não se está relacionando a variação de grandezas, as letras também não são variáveis dependentes, nem independentes, nem parâmetros.

As atividades características dessa concepção da Álgebra exigem apenas a manipulação algébrica, comumente chamada de "conta com letras", ou "cálculo algébrico". Essas contas obedecem à regras que regem as operações aritméticas ou de qualquer outra estrutura algébrica, como a dos polinômios. Nessa concepção, se incluem classificação, expressões, reduzir termos semelhantes, adicionar, etc.

(...)

Durante todo o Ensino Básico, essa é a concepção mais utilizada em salas de aula, sendo mesmo supervalorizada. Essa postura é grande parte das vezes prejudicial aos alunos que, geralmente, não conseguem ver sentido no arsenal de técnicas ensinadas, nem sabem como utilizá-las para abordar situações novas ou mesmo já vivenciadas por eles.

Não estamos com a observação acima considerando a dimensão estrutural da Álgebra de menos importância. Ao contrário, ela permeia todas as outras dimensões que, sem ela, não existem. No entanto, o seu significado e a sua importância, neste nível, estão em ser uma ferramenta essencial para que a Álgebra "funcione" como é necessário.

Salientamos, no entanto, que, mesmo tendo caráter abstrato, as manipulações podem e devem adquirir significado, transmitir ideias e permitir conclusões. Neste sentido, há uma estreita ligação entre a concepção da álgebra como **Generalizadora da Aritmética** e da **Álgebra Estrutural.**

As observações feitas mostram que essas concepções não têm delimitação muito precisa. (...)

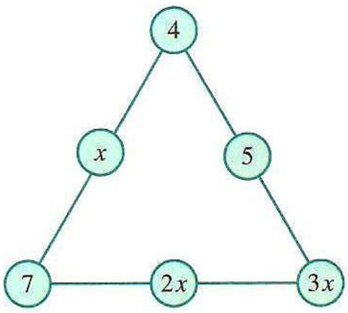
Também há casos em que, ao longo de uma mesma atividade, podemos usar mais de uma concepção da Álgebra.

Fonte: Tinoco (2011, p. 10-11).

Atividade 1:

Apresentar uma situação-problema para explorar a Álgebra das Equações.

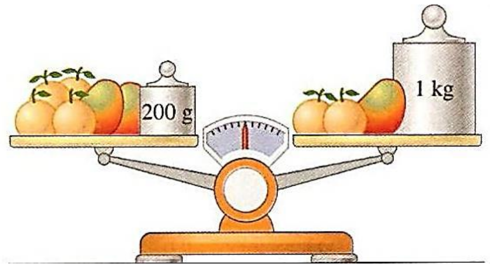
(Livro Bianchini, 7º ano, 2006, p. 124) Determine o valor de x de modo que a soma em cada lado do triângulo seja a mesma.



Atividade 2:

Explorar a Álgebra das Equações e a transformação de medidas de massa.

(Livro Bianchini, 7º ano, 2006, p. 124) Observe esta balança:

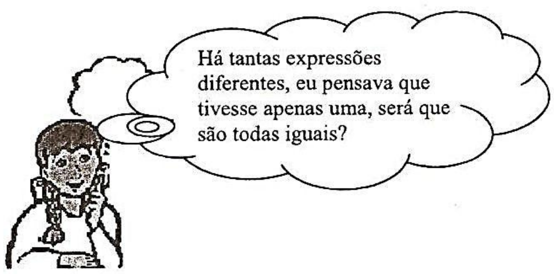


Sabendo que cada manga tem 300g, calcule quantos gramas tem uma laranja.

Atividade 3:

Explorar a Álgebra Estrutural através da Situação-problema proposta.

(Adaptado de Tinoco, 2011, p. 62).



$\boxed{4(n-2) + 4}$ $\boxed{2n + 2(n-2)}$ $\boxed{2(n + n-2)}$ $\boxed{x + x + x - 2 + x -2}$

$\boxed{a^2 - (a -2)^2}$ $\boxed{(x-1).4}$ $\boxed{y + y + (y - 2) + (y - 2) = x}$

Atividade 4:

Explorar a álgebra estrutural através da simplificação de expressões.

Simplifique a expressão $\frac{2x+14}{x^2-49}$

<u>**7º Encontro**</u>

Objetivo Geral:

Trabalhar as diferentes "personalidades" do Número Racional.

Neste encontro, pretende-se trabalhar com as 'personalidades' do Número Racional tomando como referência as situações-problema apresentadas no artigo *As Diferentes "Personalidades" do Número Racional trabalhadas através da Resolução de Problemas*, de Onuchic e Allevato (2008).

A leitura do artigo não será proposta de início, pois se pretende discutir, com os professores, através da apresentação de diversos problemas, cada uma das personalidades do Número Racional. As situações a serem trabalhadas serão as mesmas apresentadas no artigo.

1. **Ponto Racional**

Problema 1: Localizar os números $\frac{2}{3}, \frac{7}{5}$ e $\frac{-3}{10}$ na reta

Este problema oferece aos estudantes a oportunidade de trabalhar com a "personalidade" do número racional chamada <u>**ponto racional**</u>: todo número racional $\frac{a}{b}$ ocupa **um ponto bem definido na reta** e, reciprocamente, a todo ponto racional da reta corresponde um número racional.

Fonte: ONUCHIC e ALLEVATO (2008, p. 87).

2. **Quociente**

Problema 2: Três pizzas devem ser divididas igualmente entre cinco pessoas. Quanto de pizza cada pessoa comerá?

Esta "personalidade" é chamada <u>**quociente**</u> e seu significado é percebido quando **um número de objetos precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos.** Ela aparece mais frequentemente nas aplicações do que as outras e se refere ao uso dos números racionais como solução para uma situação de divisão.

Fonte: ONUCHIC e ALLEVATO (2008, p. 88)

3. **Fração**

Problema 3: Jô, Pat e Cris resolveram fazer um piquenique e combinaram levar sanduíches para o almoço. Jô levou 3 sanduíches, Pat levou 2 e Cris se esqueceu do combinado e não levou nenhum. Assim, resolveram repartir os sanduíches que tinham levado igualmente entre as três, mas cobraram de Cris R$5,00 por sua parte. Que parte dos R$5,00 recebeu Jô? E Pat?

Olhando o todo, 1 sanduíche, repartido em 3 partes, surge outra "personalidade" do número racional, a **fração**, que é uma **relação da parte com o todo.**

Fonte: ONUCHIC e ALLEVATO (2008, p. 90).

Problema 4: Tenho 15 m de tecido.

a) Quero cortá-lo em pedaços de 3 metros.
b) Quero cortá-lo em 5 partes iguais.

Qual é o resultado dessas ações? Qual é o significado de cada uma delas?

$$\begin{array}{r|l} 15\text{m} & 3\text{ m} \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

Neste caso a divisão é **quotitiva**, isto é, o todo foi dividido em cortes de 3 metros cada um e, como resultado, obtemos o número de partes, a **quota.** Isso reflete uma situação de fração,

$$\frac{15\cancel{m}}{3\cancel{m}} = 5,$$

Uma relação parte todo.

$$\begin{array}{r|l} 15\text{m} & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 3\text{ m} \end{array}$$

Neste caso a divisão é **partitiva**, isto é, o todo foi dividido em 5 partes iguais e, como resultado, foi obtido o tamanho da parte:

$$\frac{15\text{m}}{5} = 3\text{m}.$$

Isso reflete uma situação de **medida.**

Fonte: ONUCHIC e ALLEVATO (2008, p. 93).

4. Operador

Problema 5: Represente geometricamente $\frac{2}{3}$ de quatro maneiras diferentes.

A "personalidade" **operador** tem significado semelhante ao de "encolher" ou "esticar", de "reduzir" ou "ampliar". (...) O **operador define uma estrutura multiplicativa** de números racionais.

Fonte: ONUCHIC e ALLEVATO (2008, p. 94).

5. Razão

Problema 6: Duas jarras iguais contêm misturas de álcool e água nas razões de $\frac{3}{5}$ (três para cinco), na primeira jarra e $\frac{3}{7}$ (três para sete) na segunda. Juntando-se os conteúdos das duas jarras qual será a razão entre álcool e água na mistura resultante?

Razão é uma **comparação multiplicativa entre duas grandezas,** denotada por $\frac{a}{b}$ = a:b (*a está para b)*, em que a é denominado **antecedente** e b é denominado **consequente**. As propriedades da razão são fundamentalmente diferentes daquelas da fração.

O conceito de razão é relevante porque fundamenta o conceito de proporcionalidade, que é uma ideia unificadora na Matemática. (EUA; 1992), pois é um conceito que "liga" diversos ramos da matemática escolar, como medida, estatística, aritmética, funções, álgebra e geometria. Da proporcionalidade derivam outros importantes conceitos e conteúdos: regras de três, divisão em partes proporcionais, quantidades intensivas, misturas, porcentagem, taxas, juros, descontos, escalas, estimativas populacionais, variação direta, variação inversa, razões trigonométricas, semelhança de triângulos, probabilidades, etc. O conceito de proporcionalidade está presente não apenas na Matemática, mas, também, em outras áreas do conhecimento. Em física, no estudo da densidade, da ótica, da velocidade; em Química, no estudo de equivalências químicas; em Artes, na ampliação e redução de figuras; em Geografia, na interpretação das escalas de mapas;...

Fonte: ONUCHIC e ALLEVATO (2008, p. 97).

6. Proporcionalidade

Problema 7: Teresa e Júlia correm numa pista à mesma velocidade. Teresa começa primeiro. Quando ela tinha acabado a nona volta, Júlia acabara a terceira. Quando Júlia completou 15 voltas, quantas voltas havia dado Teresa?

Problema 8: Se com 3 dólares podiam-se comprar duas libras esterlinas, quantas libras se poderiam adquirir com 21 dólares?

O fato de que muitos aspectos de nosso mundo operam de acordo com regras proporcionais torna as habilidades de raciocínio proporcional extremamente úteis na interpretação dos fenômenos (POST; BEHR; LESH; 1994). Entretanto, a aquisição de tais habilidades na população em massa, não somente tem sido insatisfatória, mas há evidências de que um grande segmento da sociedade nunca as adquire.

Fazer operações mecânicas com proporções não significa necessariamente compreender as ideias subjacentes ao raciocínio proporcional. A compreensão de proporcionalidade é um ponto crítico no desenvolvimento mental. O raciocínio proporcional tem sido considerado como ponto crucial do ensino elementar e a pedra angular da álgebra e do que vem depois (LESH, POST, BEHR, 1991). A habilidade em raciocinar proporcionalmente foi uma marca da distinção de Piaget entre os níveis de pensamento concreto e operatório formal. (VAN DE WALLE, 2006).

Fonte: ONUCHIC e ALLEVATO (2008, p. 99).

Encaminhamentos:

1. Fornecer uma folha com essas 8 situações-problema aos professores.
2. Explorar cada problema, verificando se os professores reconhecem as "personalidades" do Número racional em cada um dos problemas.
3. Apresentar o artigo e destacar os pontos principais.
4. Resgatar os significados da "barra fracionária".

BARRA FRACIONÁRIA:

1. **Quociente:** $\frac{Dividendo}{divisor}$ (divisão)

   Um número de objetos precisa ser dividido igualmente num certo número de grupos

2. **Fração:** $\frac{Numerador}{denominador}$ (multiplicação como soma de parcelas iguais)

$$\begin{cases} divisão\ quotitiva => (número\ puro): Relação\ \ Parte - todo \\ divisão\ partitiva => (Medida) \end{cases}$$

   Relação da parte com o todo.

3. **Razão:** $\frac{Antecedente}{consequente}$ (comparação multiplicativa entre duas grandezas)

   ➔ Fundamenta o conceito de proporção $\begin{cases} Taxa \\ Porcentagem \\ Grandezas\ Intensivas \end{cases}$

4. **Operador:** $-$ (a barra fracionária é um símbolo para a operação de composição de funções).

   ➔ O operador define uma estrutura multiplicativa de números racionais.

<u>8º Encontro:</u>

Objetivos:

Explorar a potenciação nos conjuntos: Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais. Abordar a necessidade da logaritmação como operação inversa. Apresentar uma breve abordagem histórica dos Logaritmos. Resgatar as orientações sobre esse assunto que constam no caderno do professor de Matemática.

Atividade 1[4]:

Resolver problemas envolvendo a potenciação nos diversos conjuntos numéricos, justificando os passos utilizados. Ressalta-se que não é permitido utilizar, de saída, a logaritmação.

Problema 1: Resolva as questões, justificando:

a) 2^3 =

b) 5^4 =

c) 1^{20} =

d) 1^{100} =

e) 10^0 =

Problema 2: Resolva as questões abaixo, justificando:

a) $2^{1/2}$ =

b) $5^{3/7}$ =

[4] As atividades 1, 2 e 3 foram retiradas da dissertação de Lívia Lopes Azevedo (1998). **Uma proposta de mudança na licenciatura em matemática do ICLMA, apoiada na metodologia de "Ensino de Matemática via Resolução de Problemas".**

Problema 3: Resolva, justificando:

a) $2^x = 8$ x = ______

b) $5^y = 25$ y = ______

c) $7^y = \sqrt{7}$ y = ______

d) $10^w = 20$ w = ______

Problema 4: (Caderno do aluno 1EM, v. 3, p. 11)

A população **N** de determinado município cresce exponencialmente desde sua fundação, há 20 anos, de acordo com a expressão $N = 3000.10^{0,1t}$, sendo **t** em anos. Calcule:

a) O valor de **N** quando o município foi fundado (t=0).
b) O valor de **N** dez anos após a fundação.
c) O valor de **N** nos dias atuais.
d) Depois de quanto tempo, após a fundação, a população atingirá a marca de 3 000 000 de habitantes se o ritmo de crescimento permanecer.
e) Depois de quanto tempo, após a fundação, o valor de **N** atingirá 600 000.

Atividade 2:

Leitura do texto *Logaritmos*: *Breve abordagem histórica* – Apêndice C.

Atividade 3:

Resgatar, com os professores, algumas orientações para o trabalho com logaritmos que constam no caderno do professor. (SÃO PAULO, 2009, v. 3, 1ª série EM, p. 9).

9º Encontro

Objetivo Geral:

Trabalhar com diferentes unidades de medida (comprimento, massa, capacidade, área e volume), seus múltiplos e submúltiplos.

> *Medir* e *contar* são as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior frequência.
> A dona de casa ao fazer as suas provisões de roupa, o engenheiro ao fazer o projecto duma ponte, o operário ao ajustar um instrumento de precisão, o agricultor ao calcular a quantidade de semente a lançar à terra de que dispõe, toda gente, nas mais variadas circunstâncias, qualquer que seja a sua profissão, tem necessidade de *medir.* Mas o que é – *medir*? Todos sabem em que consiste o *comparar* duas grandezas da mesma espécie - dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc... (CARAÇA, 2003, p. 29)

Problema 1: Uma tira de papel de um metro precisa ser dividida em centímetros. Quantos pedaços de papel serão obtidos?

a) E se dividíssemos a tira de papel de um metro em milímetros, quantos pedaços seriam obtidos?

Outras implicações podem ser feitas a partir dessa situação-problema:

- O que é 1 decímetro?
- Quantos milímetros há em 1 decímetro?
- Quantos decímetros há em 1 metro?

A ideia de múltiplo pode ser construída da mesma maneira:

- Quantos metros há em 1 quilômetro?
- Quantos decâmetros cabem em 1 hectômetro?
- Quantos hectômetros cabem em 1 quilômetro?

A partir dessas relações pode ser construída a ideia do metro (m) como unidade de comprimento e de seus múltiplos e submúltiplos.

Múltiplos	Quilômetro	*Km*	
	Hectômetro	*hm*	
	Decâmetro	*dam*	
Unidade	METRO	*m*	
Submúltiplos	Decímetro	*dm*	
	Centímetro	*cm*	
	Milímetro	*mm*	

O mesmo acontece com as unidades de massa, em que o quilograma é a unidade de medida:

Poderia também ser construída a tabela para as diferentes unidades de medida como:

(a) unidades de capacidade

Múltiplos	Quilolitro	*kl*	
	Hectolitro	*hl*	
	Decalitro	*dal*	
Unidade	Litro	*l*	
Submúltiplos	Decilitro	*dl*	
	Centilitro	*cg*	
	Mililitro	*ml*	

(b) unidades de área

Múltiplos	Quilômetro quadrado	km^2		Área de um quadrado com 1 *km* de lado
	Hectômetro quadrado	hm^2		Área de um quadrado com 1 *hm* ou 100*m* de lado
	Decâmetro quadrado	dam^2		Área de um quadrado com 1 *dam* ou 10*m* de lado
Unidade	METRO quadrado	m^2		Área de um quadrado com 1 *m* de lado
Submúltiplos	Decímetro quadrado	dm^2		Área de um quadrado com 1 *dm* ou 0,1 *m* ou 10 *cm* de lado
	Centímetro quadrado	cm^2		Área de um quadrado com 1 *cm* ou 0, 01*m* ou 10 *mm* de lado
	Milímetro quadrado	mm^2		Área de um quadrado com 1 *mm* ou 0, 001*m* ou 0,1 *cm* de lado

(c) unidades de volume

Múltiplos	Quilômetro cúbico	km^3		Volume de um cubo com 1 *km* de aresta
	Hectômetro cúbico	hm^3		Volume de um cubo com 1 *hm* ou 100*m* de aresta
	Decâmetro cúbico	dam^3		Volume de um cubo com 1 *dam* ou 10*m* de aresta
Unidade	METRO cúbico	m^3		Volume de um cubo com 1 *m* de aresta
Submúltiplos	Decímetro cúbico	dm^3		Volume de um cubo com 1 *dm* ou 0,1 *m* ou 10 *cm* de aresta
	Centímetro cúbico	cm^3		Volume de um cubo com 1 *cm* ou 0, 01*m* ou 10 *mm* de aresta
	Milímetro cúbico	mm^3		Volume de um cubo com 1 *mm* ou 0, 001*m* ou 0,1 *cm* de aresta

Para a unidade de comprimento:

REGRA PRÁTICA[5]:

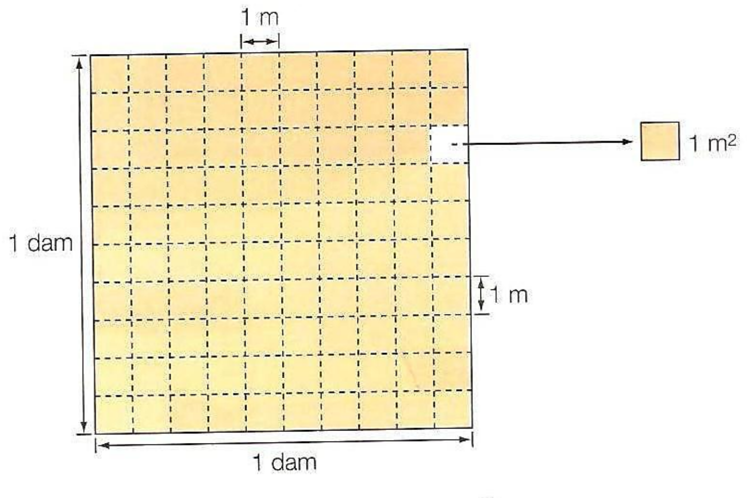
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1000 m	100 m	10 m	**1**	0,1 m	0,01 m	0,001 m

× 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10

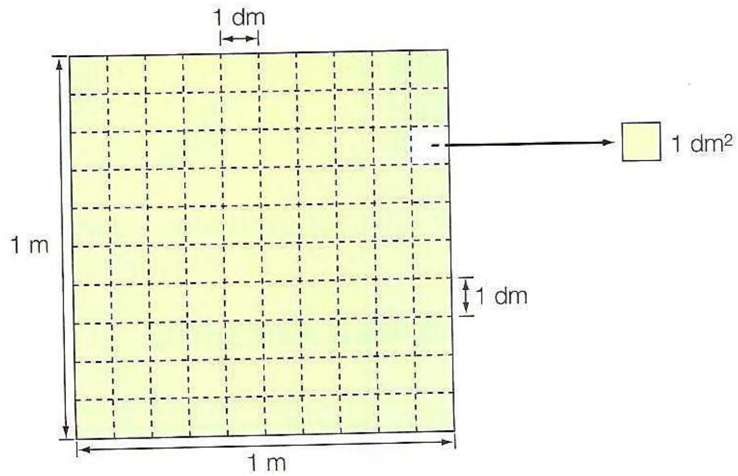
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1000 m	100 m	10 m	**1**	0,1 m	0,01 m	0,001 m

: 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10

Para a unidade de área:

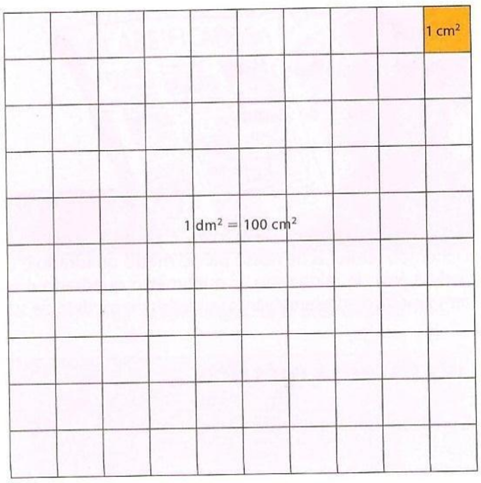


$1\ dam^2 = 10m \text{ X } 10m = 100\ m^2$



$1\ m^2 = 10\ dm \text{ X } 10\ dm = 100\ dm^2 \Rightarrow 1\ dm^2 = 0,01\ m^2$

[5] As imagens apresentadas nas regras práticas foram extraídas do livro: Matemática na Medida Certa, de Marília Centurión e José Jakubovic (2010), editora Scipione.



1 dm^2 = 10 cm X 10 cm = 100 cm^2

REGRA PRÁTICA :

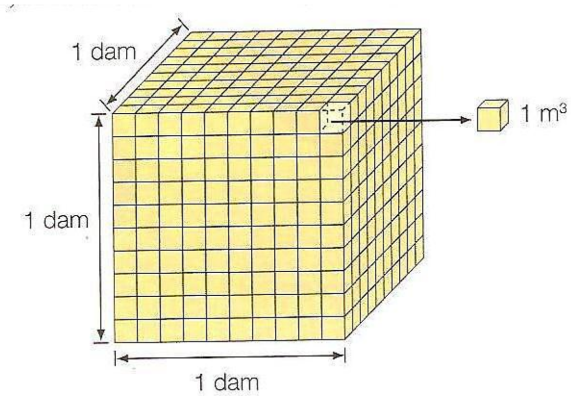
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2	**1 m^2**	0,01 m^2	0,0001 m^2	0,000001 m^2

× 100 × 100 × 100 × 100 × 100 × 100

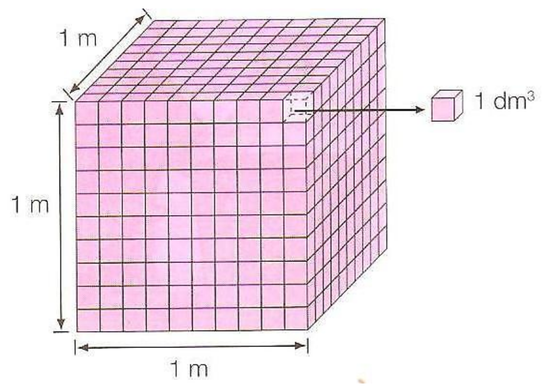
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2	**1 m^2**	0,01 m^2	0,0001 m^2	0,000001 m^2

: 100 : 100 : 100 : 100 : 100 : 100

Para a unidade de volume:



Cubo com 1 *dam* de aresta, volume igual a 1 dam^3



Cubo com 1 metro de aresta, volume igual a 1 m^3

REGRA PRÁTICA:

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1000000000 m^3	1000000 m^3	1000 m^3	**1 m^3**	0,001 m^3	0,000001 m^3	0,000000001 m^3

× 1000 × 1000 × 1000 × 1000 × 1000 × 1000

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1000000000 m^3	1000000 m^3	1000 m^3	**1 m^3**	0,001 m^3	0,000001 m^3	0,000000001 m^3

: 1000 : 1000 : 1000 : 1000 : 1000 : 1000

Questões para o debate:

1) Como você iniciaria uma aula visando a explorar o metro como unidade de medida de comprimento, seus múltiplos e submúltiplos? Que problema você faria?

2) Como você iniciaria uma aula visando a explorar o grama como unidade de medida de massa, seus múltiplos e submúltiplos? Que problema você proporia?

3) Como você exploraria o m^2 como unidade de medida de área em uma aula? Que problema você poderia fazer?

4) Como você iniciaria uma aula sobre o m^3 como unidade de medida de volume? Que problema inicial poderia ser trabalhado?

5) Como você iniciaria uma aula trabalhando o litro como unidade de medida de capacidade, seus múltiplos e submúltiplos? Que problema poderia ser trabalhado inicialmente?

<u>10º Encontro</u>

Objetivo Geral:

Trabalhar problemas envolvendo diferentes unidades de medida (comprimento, massa, capacidade, área e volume).

Problema 1: **(Centurión, Jakubo e Lellis, 5ª série, 2007, p. 221)**

Nos Estados Unidos são muito usadas as seguintes medidas de comprimento: o pé e a polegada. Uma polegada tem 2,5 centímetros, aproximadamente e um pé mede 12 polegadas. Um norte-americano lhe diz:

*(Tenho 5 pés e 5 polegadas de altura.)

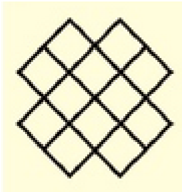
Traduza essa altura para o nosso sistema, apresentando-a em metros.

Problema 2: **(Adaptado do livro: Matemática e realidade, 6º ano, 2009, p. 250)**

Calcule o perímetro e a área do campo de futebol de Alegria.

Problema 3: O lado de cada quadradinho da figura abaixo mede 7 *mm*.

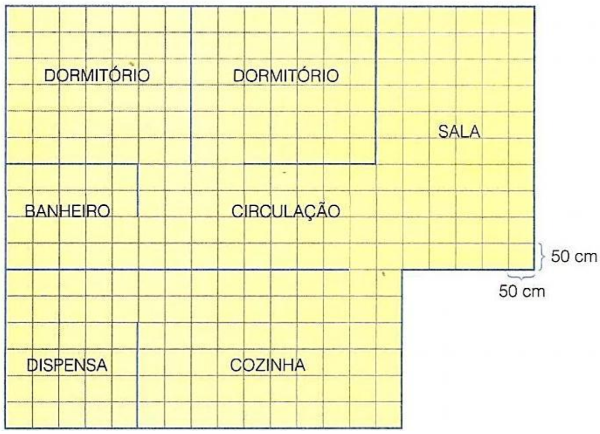
a) Qual é o perímetro da figura? E sua área quanto mede?



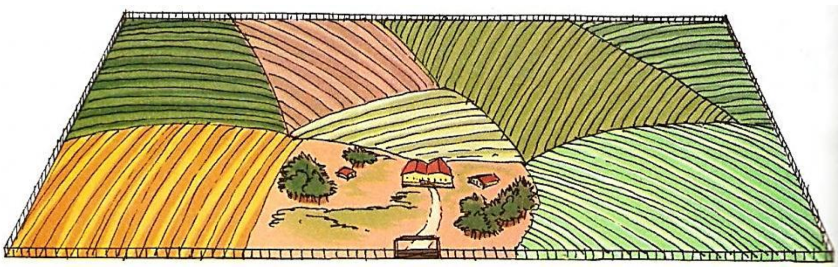
b) E se a medida do lado fosse dobrada, qual seria a medida da área?

Problema 4: **(Bonjorno, 2006, 5ª série, p. 257)**

Para anunciar a venda de sua casa no jornal, Hélio desenhou uma planta mostrando a área interna da casa. Na planta, cada quadradinho representa um quadrado de 50 *cm* por 50 *cm*. Se Hélio está pedindo R$650,00 por metro quadrado construído, quanto custará a casa?



Problema 5: **(Bonjorno, 2006, 5ª série, p. 260)** Uma propriedade rural, de forma retangular, mede 2 420*m* por 540*m*.

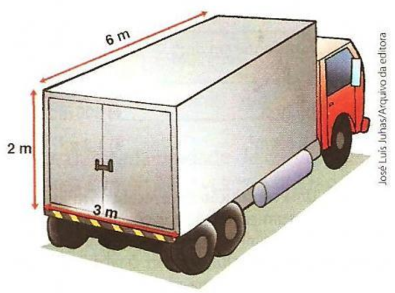


a) Quantos alqueires tem essa propriedade? (Considere 1 alqueire = 48 400 m^2).

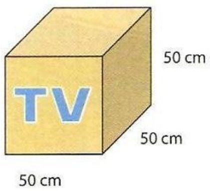
b) Qual é o valor da propriedade se o alqueire custa R$ 7 200,00?

Problema 6: **(Centurión e Jakubovic, 7º ano, 2010, p. 244)**

Uma loja de eletrodomésticos recebe os televisores da fábrica em um caminhão do tipo "baú".



As televisões vêm em caixas de forma cúbica com 50 *cm* de aresta:

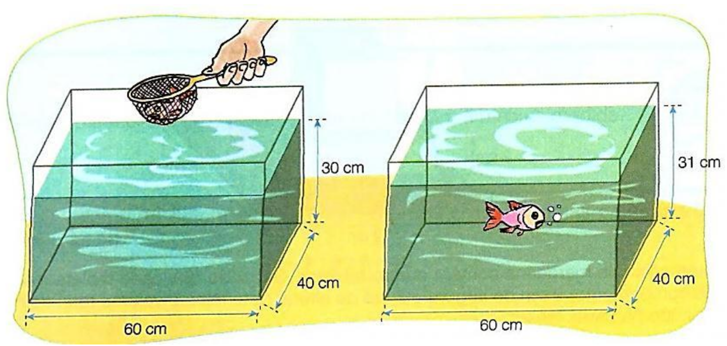


a) Qual é o volume do baú do caminhão?

b) Qual é o volume de cada caixa de televisão?

c) Quantas caixas, no máximo, o caminhão pode transportar por viagem?

Problema 7: Pedro comprou um aquário e colocou um peixinho dentro dele.



O menino ficou se perguntando:

a) Qual é o volume desse aquário?

b) Quantos litros de água esse aquário comporta?

c) Quanta água esse peixe deslocou?

d) Qual é o volume do peixinho?

Atividades extra-grupo:

- Leitura do texto *Sobre o ensino de Geometria Analítica,* de WAGNER (1999).
- Estudo da teoria da Geometria Analítica.

11º Encontro

Objetivo Geral:

Trabalhar problemas sobre Geometria Analítica, enfatizando a construção dos conceitos e não o uso de fórmulas prontas.

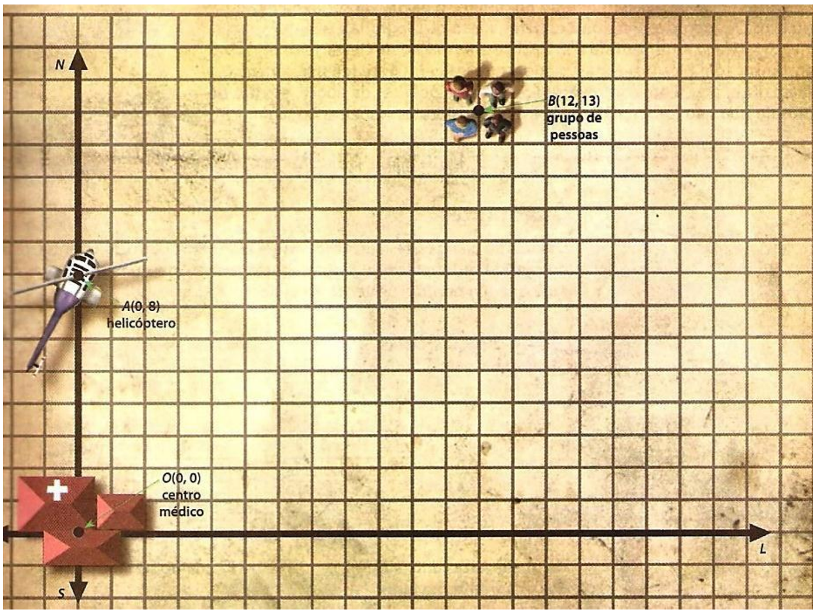
Atividade 1:

Resolução de problemas que possibilitem a mobilização de conhecimentos prévios pelos alunos e a construção de novos conceitos da Geometria Analítica, como distância entre dois pontos e ponto médio.

Problema 1[6]:

O corpo de bombeiros de certa região florestal recebeu o chamado de um grupo de pessoas que se perdeu em uma caminhada na mata. Para o resgate há um helicóptero, que está posicionado a 8 *km* ao norte do centro médico local, conforme o esquema abaixo.

[6] Adaptado da Obra Coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna, 2010, v.3, p.82.



a) Qual a menor distância que o helicóptero deve percorrer até encontrar as pessoas perdidas?

b) Qual seria a distância percorrida pelo helicóptero da sua localização inicial ao centro médico local, passando pelo ponto de resgate das pessoas?

Problema 2[7]:

Para estudar o movimento de um astro que se desloca com velocidade constante em trajetória retilínea, um astrônomo fixou um plano cartesiano, contendo essa trajetória, e adotou nos eixos coordenados uma unidade conveniente para grandes distâncias. Em certo momento, o cientista observou que o astro estava no ponto A(3,6) e quatro minutos depois estava no ponto B(5,8).

a) Qual era a posição do astro, dois minutos após a passagem pelo ponto A?

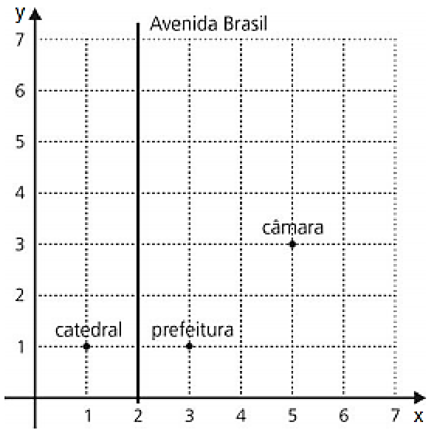
b) Qual era a posição do astro, um minuto após a passagem pelo ponto A?

[7] Fonte: PAIVA, 2009, v. 3, atividade 11, p. 33.

Problema 3[8]:

A figura abaixo apresenta parte de um mapa de uma cidade, no qual estão identificadas a catedral, a prefeitura e a câmara de vereadores. Observe que o quadriculado não representa os quarteirões da cidade, servindo apenas para a localização dos pontos e retas no plano cartesiano.

Nessa cidade, a Avenida Brasil é formada pelos pontos equidistantes da catedral e da prefeitura, enquanto a Avenida Juscelino Kubitschek (não mostrada no mapa) é formada pelos pontos equidistantes da prefeitura e da câmara de vereadores.



a) Trace, no plano cartesiano, uma linha que represente a Avenida Juscelino Kubitschek.

b) Qual é o par ordenado que indica o ponto de interseção entre as avenidas Brasil e Juscelino Kubitschek?

c) Sabendo que a distância real entre a catedral e a prefeitura é de 500*m*, qual é a distância real, em linha reta, entre a catedral e a câmara de vereadores?

Atividade 2:

Obter, com os professores, algumas cônicas a partir de dobraduras no papel vegetal. Entregar um roteiro para construção das cônicas que está disponível em Melo (2008).

[8] Adaptado de um problema do vestibular da UNICAMP, 2011.

Atividade 3:

Assistir o vídeo "Na cauda do Cometa[9]" que trata de conceitos da Geometria Analítica na Astronomia. A duração do vídeo é de aproximadamente 10 minutos.

Uma sugestão interessante para o professor trabalhar, em sala de aula, é com os cortes no cone circular reto. Quando o plano é paralelo ao eixo do cone, forma-se um dos ramos da hipérbole. Quando o plano é a uma das geratrizes, tem-se uma parábola. E quando o plano não é paralelo ao eixo, nem à base ou a qualquer geratriz, forma-se uma elipse.

Outra sugestão de trabalho é com o software *Geogebra*, que pode auxiliar o trabalho de construção e análise dos problemas tratados anteriormente.

Atividade extra-grupo: Estudar a teoria da Trigonometria.

<u>12º Encontro</u>

Objetivo Geral:

Explorar as razões trigonométricas para determinar a altura de algumas dependências.

Atividade 1:

Assistir o vídeo "A dança do sol[10]", (UNICAMP, 2013b) que trata de conceitos da Trigonometria nas construções. A duração do vídeo é de aproximadamente 10 minutos.

Atividade 2:

Construir teodolitos artesanais de Indicação Direta e do Ângulo Congruente.

<u>Teodolito de Indicação Direta e o Teodolito do Ângulo Congruente</u>

Material necessário: 1 folha de papel-cartão; 0,5 m^2 de plástico adesivo; dois canudos de plástico rígido com cerca de 0,5 cm de diâmetro e 12 cm de comprimento, um alfinete, uma moeda pequena ou um chumbinho do tipo usado em pescaria, tesoura e fita adesiva.

---

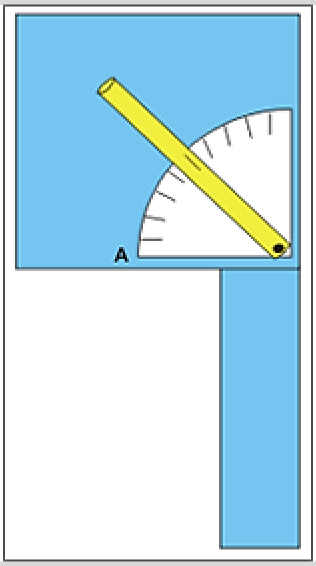
[9] Vídeo da coleção *Matemática Multimídia*. Disponível em: http://www.m3.ime.unicamp.br.

[10] Vídeo da coleção *Matemática Multimídia*. Disponível em: <http://www.m3.ime.unicamp.br>

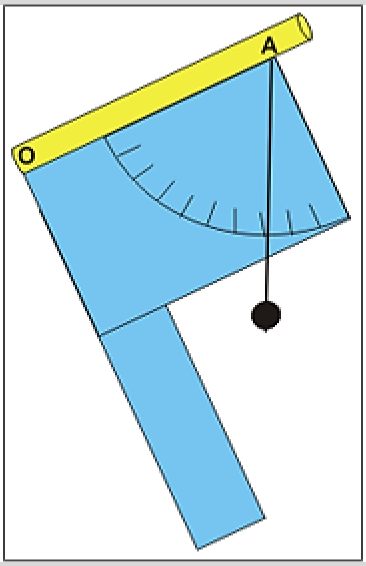
Procedimento: no papel-cartão recorte um retângulo com cerca de 12 cm X 10 cm, ou se preferir, recorte uma bandeirinha com essas medidas e uma haste de 3 cm X 10 cm.

Desenhe uma quarta parte de uma circunferência, com a indicação de um transferidor com a graduação de medida até 90^0, como indicado em cada esquema. Recubra com plástico adesivo.
Para o Teodolito de Indicação Direta, prenda o canudo por meio de um único alfinete, como indicado no esquema, de modo que ele possa mover-se ao longo da escala graduada.
Para o teodolito do Ângulo Congruente, prenda o canudo ao longo de toda a extensão da placa, por meio de fita adesiva. Pendure uma linha resistente no ponto A, como representado no esquema e ponha um peso na extremidade da linha (chumbinho ou moeda).

Teodolitos Artesanais



Teodolito de Indicação Direta



Teodolito do Ângulo Congruente

Fotos do acervo do LEG.

Fonte: http://www.uff.br/cdme/trigonometria/index.html

Atividade 3:

Resolver problemas com o auxílio do teodolito artesanal.

Problema 1:

Com o auxílio do teodolito artesanal, medir o ângulo de inclinação formado pelo observador e:

a) Altura da parede (Chão ao teto da sala)

b) Altura da janela

Problema 2:

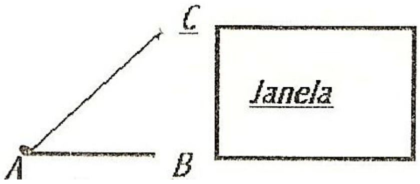
Com uma trena, medir a distância entre o ponto de apoio do teodolito artesanal e o objeto do qual se quer descobrir a altura:

a) Distância entre o teodolito e a parede

b) Distância entre o teodolito e a janela

Problema 3:

A partir dos dados obtidos, explorar as razões trigonométricas, como por exemplo no desenho abaixo:



$$sen\ \hat{A} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

$$\cos\ \hat{A} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$tg\ \hat{A} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

Para concluir a atividade, solicitar aos professores que utilizem essa relação para encontrar:

a) Altura da parede

b) Altura da janela

Atividade 4:

Leitura do texto *Um pouco da história da Trigonometria*[11]- Apêndice D.

Proposta de trabalho: Escolher um problema e trabalhar, com uma de suas turmas, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Para ajudar os professores nesta tarefa, foram dadas a eles algumas orientações para a atividade proposta. (Apêndice E). Em especial, destaca-se o texto de Henningsen e Stein (1997) que apresenta as dificuldades associadas à execução de tarefas de alto nível[12]; mostra, ainda, como o professor pode apoiar a execução das tarefas de alto nível e indica para quais atividades uma tarefa de alto nível pode declinar.

13º Encontro

Objetivo Geral:

Explorar conceitos de análise combinatória através da resolução de problemas.

Atividade 1:

Leitura do texto[13] de Morgado et. al (2004) sobre o que é Combinatória e um pouco de sua história.

Atividade 2:

Resolução de Problemas envolvendo os conceitos de permutação, arranjo e combinação.

---

[11] Adaptado do livro História da Matemática, de Carl B. Boyer, 1996.

[12] A Resolução de problemas é considerada uma tarefa de alto nível.

[13] Extraído do livro *Análise Combinatória e Probabilidade*, da SBM, Coleção do Professor de Matemática, 6ª ed, 2004.

Problema 1: **Planos de Viagem** [14]

A senhorita Lau quer visitar Londres, Roma, e Barcelona. Ela quer visitar as cidades em qualquer ordem.

Quais são as diferentes formas que a senhorita Lau pode planejar sua viagem? Quantas formas diferentes existem?

Problema 2: **Placa Estadual** [15]

Um certo estado está considerando planos para o arranjo de letras e números em suas licenças de placas.

Plano A: Duas letras seguidas por números de três dígitos; a repetição de letras e dígitos é permitida.

Plano B: Três letras seguidas por números de dois dígitos *sem* repetição de letras ou dígitos.

Em ambos, a primeira letra pode ser O e o primeiro dígito pode ser 0.

Qual plano permitirá que o Estado emita mais licenças de placas? Quantas mais?

É importante que o aluno, após estudar Análise Combinatória, seja capaz de diferenciar o que é permutação, arranjo e combinação. Na permutação, apenas a ordem importa visto que a natureza dos elementos é sempre a mesma. No arranjo, a ordem e a natureza dos elementos importam. Já as combinações são caracterizadas pela natureza de seus elementos, a ordem não importa. É através de situações problema que o aluno deve perceber essa diferença e a necessidade de estratégias distintas.

Atividade 3:

Assistir o vídeo "A Cartomante[16]" (UNICAMP, 2013b), que trata de conceitos de Análise Combinatória no tarô. A duração do vídeo é de aproximadamente 10 minutos.

14º Encontro

Objetivo Geral:

Trabalhar conceitos de probabilidade.

---

[14] Problema traduzido do livro Problem-Driven Math, p. 4.
[15] Problema traduzido do livro Problem-Driven Math, p. 28.
[16] Vídeo da coleção *Matemática Multimídia*. Disponível em: http://www.m3.ime.unicamp.br.

A análise combinatória, trabalhada no encontro anterior, fornece o espaço amostral, ou seja, todas as possibilidades de um evento ocorrer; mas é o cálculo da probabilidade que apresenta as chances que certo evento tem de acontecer.

É importante e necessário que o aluno perceba essa diferença.

Atividade 1:

Trabalhar uma situação-problema envolvendo a determinação do espaço amostral e as chances que um determinado evento tem de ocorrer.

Problema 1: O jogo da mega sena[17]

Administradas desde 1962 pela Caixa Econômica Federal, as Loterias – Sena, Quina, Lotofácil, entre outras – são popularmente conhecidas por distribuir prêmios milionários.

Em julho de 2009, por exemplo, o prêmio distribuído pela Mega-Sena para o apostador que acertou os números sorteados – 09, 10, 21, 36, 41 e 48 – foi de R$55 863 193, 02, o segundo maior prêmio distribuído por esta Loteria até então. O maior prêmio, no valor de R$64 905 517, 65, havia sido distribuído em outubro de 1999 para o sortudo que apostou nos números 17, 27, 34, 42, 43 e 46.

No entanto, vale destacar que, além de distribuir prêmios milionários entre seus apostadores, as Loterias permitem que sejam realizados investimentos visando ao desenvolvimento social de nosso país. Parte do dinheiro arrecadado nessas Loterias é destinada ao esporte, à cultura, à educação, entre outros. Em 2008, por exemplo, mais de 2 bilhões de reais foram distribuídos entre o Ministério do Esporte, os comitês Olímpico e Paraolímpico brasileiros, a Seguridade Social, O Programa de Financiamento Estudantil (FIES), o Fundo Nacional de Cultura e o Fundo Penitenciário Nacional (FPN).

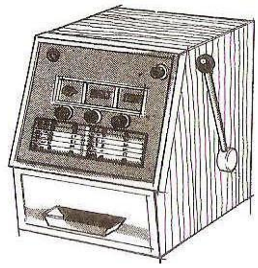
a) Para apostar na Mega-Sena, é possível escolher de 6 a 15 números entre 60 disponíveis no bilhete de aposta. O vencedor do prêmio é aquele que acerta os 6 números sorteados. A aposta mínima nesta Loteria consiste na escolha de 6 números. Deste modo, quantas possibilidades diferentes de aposta mínima existem ao todo?
b) Considerando a possibilidade de uma pessoa realizar todas as apostas mínimas diferentes possíveis na Mega-Sena, cada uma delas custando R$2,00, quantos

[17] Adaptado do livro Novo olhar Matemática, v. 2, de Joamir Souza, 2010, p. 234.

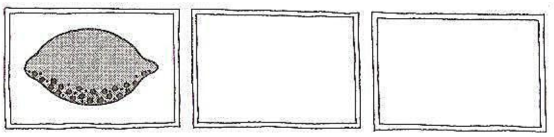
reais ela gastaria fazendo todas essas apostas? Em sua opinião seria vantajoso financeiramente a alguém realizar este procedimento? Justifique.

c) Qual a probabilidade de alguém que fez uma única aposta mínima ganhar na Mega-Sena?

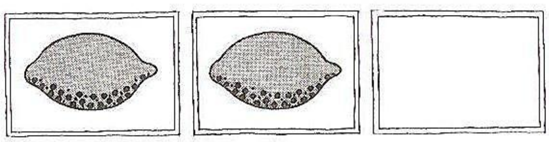
Problema 2: Uma máquina de fruta tem três tambores que giram de forma justa. Cada tambor tem 20 símbolos, mas apenas um como este 



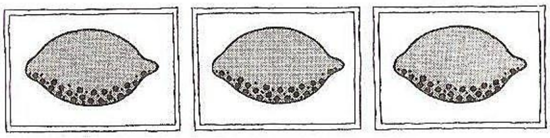
i. Quais são as chances de aparecer um limão no primeiro tambor?



ii. Quais são as chances de aparecer um limão no primeiro e no segundo tambor ao mesmo tempo?



iii. Quais são as chances de aparecer simultaneamente três limões?



Problema 3: Quatro pessoas depositam suas blusas em um guarda-volumes. Se apenas quatro blusas permanecem no guarda-volumes e o atendente as entrega de forma aleatória, quais são as chances de que cada pessoa receba sua própria blusa?

15º Encontro

Objetivo Geral:

- Discutir com os professores as contribuições promovidas pelo grupo de estudos.
- Possibilitar que os professores relatem como foi a aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em sala de aula.

APÊNDICE C - LOGARITMOS

Breve abordagem histórica[1]

No fim do século XVI, o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos. Um auxílio precioso já fora obtido com a recente invenção das frações decimais, embora ainda não suficientemente difundida. Mesmo assim, achar um método que permitisse efetuar com presteza multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes era, nos anos próximos de 1600, um problema fundamental.

Segundo o grau de dificuldade, as operações aritméticas podem ser classificadas em 3 grupos: adição e subtração formam as *operações de 1ª espécie;* multiplicação e divisão são de *2ª espécie*, enquanto que potenciação e radiciação constituem as *operações de 3ª espécie*. Procurava-se então um processo que permitisse reduzir cada operação de 2ª ou 3ª espécie a uma de espécie inferior e, portanto, mais simples.

Acontece, com frequência, que uma grande descoberta científica é feita simultaneamente por duas ou mais pessoas trabalhando independentemente. Não se trata de simples coincidência: tal descoberta corresponde à solução de um problema importante, do qual muitos se vinham ocupando.

Assim aconteceu com os logaritmos. Jost Bürgi (1552-1632), suíço, fabricante de instrumentos astronômicos, matemático e inventor, e John Napier (1550-1617), um nobre escocês, teólogo e matemático, cada um deles desconhecendo inteiramente o outro, publicaram as primeiras tábuas de logaritmos. As tábuas de Napier foram publicadas em 1614 e as de Bürgi em 1620. A influência de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi muito maior do que a de Bürgi, devido a suas publicações e seu relacionamento com professores universitários.

Uma tábua de logaritmos consiste essencialmente de duas colunas de números. A cada número da coluna esquerda corresponde um número à sua direita, chamado o seu *logaritmo*. Para multiplicar dois números, basta somar seus logaritmos; o resultado é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler na tábua, da direita para a esquerda, qual o número que tem aquele logaritmo. Semelhantemente, para dividir dois números basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a uma potência basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente. Finalmente, para extrair a raiz *n*-ésima de um número, basta dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz. Na terminologia matemática de hoje, uma correspondência como essa estabelecida por meio de uma tábua de logaritmos é o que se chama de *função*. Convém notar, porém, que a invenção dos logaritmos foi anterior à introdução do conceito de função na Matemática. A utilidade original dos logaritmos resulta, portanto, da seguinte observação: o trabalho de elaborar uma tábua de logaritmos, por mais longo e cansativo

[1] Texto extraído do livro Logaritmos. Autor: Elon Lages Lima, 1996, 2ª edição.
Foram realizadas algumas inclusões no texto original com as devidas referências.

que seja, é um só. Depois dele executado, ninguém precisa mais, digamos, efetuar multiplicações; adições bastam. (LIMA, p. 1 e 2 – Livro: Logaritmos)

Revisão

Sem dúvida, a primeira constatação de que, em certos casos, é possível reduzir uma multiplicação a uma adição, ocorreu ao se compararem os termos de uma progressão geométrica com os de uma progressão aritmética, como por exemplo:

2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Para multiplicar dois termos da progressão geométrica (por exemplo, 16X64) basta *somar* os seus correspondentes na progressão aritmética (no caso, 4+6 = 10) e ver qual o termo da progressão geométrica que corresponde a essa soma. (Neste exemplo, ele é 1024).

Evidentemente, a regra acima enumerada nada mais é do que a conhecida regra para multiplicar potências de mesma base: $a^m . a^n = a^{m+n}$. Basta somar os expoentes. É importante, entretanto, observar que essa redução da multiplicação à adição foi constatada muito antes que existisse a notação de expoente para indicar as potências de um número. Na realidade, os logaritmos foram inventados *antes* da notação exponencial!

(...)

Acontece que, uma vez difundida a notação exponencial a^n, não tardou muito a ideia de se considerarem potências com expoentes negativos e fracionários, e a constatação de que, se *a* é um número positivo diferente de 1 então todo número real positivo pode ser arbitrariamente aproximado por potências de *a* com expoentes racionais. Esta observação conduz à possibilidade de elaborar uma tábua de logaritmos (de base a) que contenha, em sua coluna à esquerda, números bastante próximos daqueles que pretendemos multiplicar.

As considerações acima justificam a necessidade de uma revisão do conceito de potência de um número real, com expoente racional qualquer.

O estudo que se segue restringe-se a potências de um número *positivo a.* É claro que se *a* fosse negativo não haveria problema para definir a^n para $n \in \mathbb{N}$ e mesmo a^{-n}. Entretanto, como veremos aqui, $a^{\frac{1}{n}}$ significa $\sqrt[n]{a}$. Dado que números reais positivos não possuem raízes reais do tipo $\sqrt[n]{a}$ (índice *n* par), o estudo de potências reais de expoente racional com base negativa seria confuso, cheio de exceções e impraticável.

Seja *a* um número real positivo. Dado um inteiro *n>0,* a potência a^nn é definida como o produto de *n* fatores iguais ao número *a*. Ou seja:

$a^n = a.a \ldots a \; (n \; fatores)$

Vale a propriedade fundamental:
$a^m . a^n = a^{m+n}$ $(m, n\ inteiros\ positivos)$

Se quisermos definir $a^0 = 1$, a fim de termos $a^0 . a^n = a^{0+n} = a^n$.

Orientações que constam nos PCNs sobre potência de expoente 1 e expoente zero:

Pela observação das regularidades das seqüências numéricas construídas numa tabela o aluno poderá identificar propriedades da potenciação e, dessa forma, compreender a potência de expoente 1 e expoente zero.

4^6	4^5	4^4	4^3	$4^{...}$
4.096	1.024	....	....	....

÷4 ÷4 ÷4 ÷4

Acrescentando mais duas colunas a essa tabela os alunos poderão indicar que $4^1 = 4$ e $4^0 = 1$, considerando a regularidade observada.

4^6	4^5	4^4	4^3	4^2	?	?
4.096	1.024	256	64	16	....	....

÷4 ÷4 ÷4 ÷4 ÷4 ÷4

O trabalho com a potenciação envolvendo números naturais pode ser ampliado para o estudo da potência cujo expoente é um número inteiro negativo, partindo da análise de uma tabela como a anterior. Estendendo para as potências de expoente negativo as regularidades observadas nesta tabela, podem-se obter os valores para 4^{-1}, 4^{-2}, 4^{-3}...

4^4	4^3	4^2	4^1	4^0	4^{-1}	4^{-2}	4^{-3}	4^{-4}
256	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	

÷4 ÷4 ÷4 ÷4 ÷4 ÷4 ÷4 ÷4

Procurando ainda estender a noção de potência de modo a abranger expoentes negativos e fazê-lo de forma a manter a validez da propriedade fundamental, devemos ter:

$a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1, donde\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Assim, a única maneira possível de definir potência a^n (Com *n* inteiro) de tal maneira que a relação $a^m.a^n = a^{m+n}$ continue verdadeira, mesmo quando *m* e *n* são inteiros positivos ou negativos, consiste em pôr:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Evidentemente, a relação fundamental vale para o produto de várias potências, como por exemplo

$$a^m.a^n.a^p.a^q = a^{m+n+p+q}$$

Em particular, tomando um produto de *p* fatores iguais a a^m, obtemos $a^m.a^m \ldots a^m = a^{mp}$, ou seja, $(a^m)^p = a^{mp}$.

Antes de prosseguirmos, lembremos que, dados um número real a>0 e um número positivo q>0, o símbolo $\sqrt[q]{a}$ representa o número real *positivo* cuja q-ésima potência é igual a *a*, ou seja, a única raiz positiva da equação $x^q - a = 0$. Portanto, as afirmações $\sqrt[q]{a} > 0\ e\ (\sqrt[n]{a})^q = a$ constituem a *definição* do número real $\sqrt[q]{a}$, chamado a raiz q-ésima do número positivo *a*.

Procuremos agora estender a noção de potência de um número real a>0, de modo a incluir expoentes fracionários, da forma $r = \frac{p}{q}$, onde p, q são inteiros e q > 0. Queremos dar essa definição de modo a não destruir as propriedades anteriormente válidas. Assim sendo, devemos definir a potência $a^{\frac{p}{q}}$ de modo a termos um número real positivo cumprindo:

$$(a^{\frac{p}{q}})^q = a^{(\frac{p}{q}).q} = a^p$$

Logo, $a^{\frac{p}{q}}$ deve ser o número real positivo cuja q-ésima potência é igual a a^p. Por definição de raiz, isso significa afirmar que

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Em particular, $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$.

Agora, dado um número real a>0, sabemos definir a potência a^r, quer *r* seja inteiro positivo nulo, negativo ou fracionário. Em suma, a^r está definido, para todo número racional *r*.

Observemos que, mesmo para $r = \frac{p}{q}\ e\ s = \frac{u}{v}$ fracionários (q>0 e v>0), vale ainda a propriedade $a^r.a^s = a^{r+s}$.

(...)

De posse da definição e da propriedade fundamental das potências de expoente racional de um número real a>0, os livros tradicionais definem o logaritmo do seguinte modo:

Dado um número real *a>0*, o *logaritmo* de um número x > 0 na *base a* é o expoente *y* a que se deve elevar *a* de tal modo que $a^y = x$. Escreve-se $y = \log_a x$ e lê-se *y* é o *logaritmo de x na base a.*

Vamos usar o sinal ⇔ para exprimir que duas afirmações são equivalentes (isto é, têm o mesmo significado). Podemos escrever então:

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

Ou seja, dizer que $y = \log_a x$ é o mesmo que afirmar que $a^y = x$.

Desta definição decorre imediatamente a propriedade fundamental dos logaritmos, que é a seguinte:

$\log_a(ux) = \log_a u + \log_a x$

Vejamos agora um exemplo concreto. Tomemos, como fez Briggs, o número 10, base de nosso sistema de numeração, para *base* dos logaritmos.

Qual seria o logaritmo de 3 na base 10?

Por definição, $\log_{10} 3$ é o número *y* tal que $10^y = 3$.

Suponhamos que $y = \frac{p}{q}$ fosse um número racional. Então teríamos:

$10^{\frac{p}{q}} = 3$ e portanto $10^p = 3^q$.

A última igualdade é um absurdo pois 10^p é 1 seguido de *p* zeros e, evidentemente, $3^q = 3.3 \dots 3$ não tem essa forma.

Assim $\log_{10} 3$ não pode ser um número racional.

(...)

Se $y = \log_{10} 3$ não pode ser um número racional, que número irracional y é este, tal que $10^y = 3$?

E que significa, afinal de contas, uma potência com expoente irracional? Que significa, por exemplo, $10^{\sqrt{2}}$, a $\sqrt{2}$-ésima potência de 10?

Estas são perguntas cruciais, que devem ocorrer imediatamente quando se define o logaritmo como expoente.

É possível explicar satisfatoriamente o significado de uma potência com expoente irracional. Por exemplo $10^{\sqrt{2}}$ é definido assim: tomando-se os valores 1,4; 1,41; 1,414 etc., aproximações racionais do número irracional $\sqrt{2}$. Os números $10^{1,4}, 10^{1,41}, 10^{1,414}$ etc. são valores aproximados de $10^{\sqrt{2}}$. Tanto mais próximo esteja o número racional r de $\sqrt{2}$, mais próximo estará 10^r de $10^{\sqrt{2}}$.

Complementando:

V. POTÊNCIA DE EXPOENTE IRRACIONAL

16. Dados um número real $a > 0$ e um número irracional α, podemos construir, com base nas potências de expoente racional, um único número real positivo a^{α} que é a potência de base a e expoente irracional α.

Seja por exemplo a potência $3^{\sqrt{2}}$. Sabendo quais são os valores racionais aproximados por falta ou por excesso de $\sqrt{2}$, obtemos em correspondência os valores aproximados por falta ou por excesso de $3^{\sqrt{2}}$ (potências de base 3 e expoente racional, já definidas):

A_1	A_2	B_1	B_2
1	2	3^1	3^2
1,4	1,5	$3^{1,4}$	$3^{1,5}$
1,41	1,42	$3^{1,41}$	$3^{1,42}$
1,414	1,415	$3^{1,414}$	$3^{1,415}$
1,4142	1,4143	$3^{1,4142}$	$3^{1,4143}$

$\sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $3^{\sqrt{2}}$

(Livro: Fundamentos de Matemática Elementar, volume 2, 4ª ed, p. 18-B).

ORIENTAÇÕES QUE CONSTAM NO CADERNO DO PROFESSOR:

As potências já foram apresentadas aos alunos no Ensino Fundamental (na 5ª série, as primeiras noções; na 7ª série, as potências com expoentes inteiros; na 8ª série, expoentes racionais e reais). Trata-se, agora, de consolidar seu significado, sintetizando os fatos conhecidos na apresentação da função exponencial, com destaque para sua forma peculiar de crescimento ou decrescimento.

Já os logaritmos, uma invenção genial do início do século XVII, cuja motivação dos cálculos em uma época de limitados instrumentos para tal, a despeito da abundância de recursos atuais, permanecem como um tema especialmente relevante, não em razão de tais simplificações, mas pela sua adequação para a descrição de fenômenos em que as variáveis aparecem no expoente. Apresentar seu significado mais profundo, o que contribuiu para que sua importância se conservasse, juntamente com as propriedades mais relevantes para seu uso em diferentes contextos, é um dos objetivos do bimestre. De modo análogo ao utilizado com a função exponencial, a apresentação da função logarítmica significará o coroamento das informações amealhadas sobre logaritmos.

Naturalmente, buscaremos uma articulação entre as funções exponencial e logarítmica, uma vez que o que as distingue é apenas uma troca de posição entre as variáveis.

- Se $y = a^x$, considerando **x** a variável independente, escrevemos $y = f(x) = a^x$, e temos uma função exponencial;
- Quando **y** é a variável independente, escrevemos $y = g(y) = log_a^y$, e temos uma função logarítmica.

Ou seja, as funções exponencial e logarítmica são inversas uma da outra.

Ao longo de todo o bimestre, serão apresentadas diversas situações concretas envolvendo exponenciais e logaritmos, incluindo escalas logarítmicas (papéis logarítmicos) para a construção de gráficos, o que possibilita a linearização de gráficos de funções não lineares. É muito importante que o professor conheça as diversas contextualizações dos logaritmos (graus de terremotos, acidez de líquidos, intensidade sonora, magnitude de estrelas, cálculo de juros, etc.) como possibilidade de enriquecimento de seu curso, e não como uma obrigação de tratar todas elas em suas aulas, o que provavelmente não será possível, em razão do tempo disponível.

Caderno do professor, v. 3, 1ª série EM, p. 9.

APÊNDICE D: UM POUCO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

(trechos extraídos do livro *História da Matemática*, de Carl B. Boyer – 1996)

A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem- ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado “trilaterometria” ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que “trigonometria”, a medida de partes de um triângulo. Com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, e é provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua. Nas obras de Euclides não há trigonometria no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas. As proposições II. 12 e II. 13 de *Os elementos*, por exemplo, são as leis de co-senos para ângulos obtuso e agudo respectivamente, enunciadas em linguagem geométrica em vez de trigonométrica, e são provadas por método semelhante ao usado por Euclides para o teorema de Pitágoras. Os teoremas sobre comprimentos de cordas são essencialmente aplicações da lei dos senos. Vimos que o teorema de Arquimedes sobre a corda quebrada pode facilmente ser traduzido em linguagem trigonométrica a fórmulas para senos de somas e diferenças de ângulos. Cada vez mais os astrônomos da Idade Alexandrina – notadamente Eratóstenes de Cirene (por volta de 276-194 a. C.) e Aristarco de Samos (por volta de 310-230 a. C.) tratavam problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas. (p. 108)

A TRIGONOMETRIA HINDU

O desenvolvimento de nosso sistema de notação para os inteiros foi uma das duas contribuições da Índia de maior influência na história da matemática. A outra foi a introdução de um equivalente da função seno na trigonometria para substituir a tabela grega de cordas. As mais antigas tabelas da função seno que se preservaram são as do *Siddhantas* e do *Aryabhatiya.* Aqui são dados os senos dos ângulos até 90°, para vinte e quatro intervalos iguais de 3 ¾° cada um. Para exprimir o comprimento do arco e o comprimento do seno em termos da mesma unidade, o raio era tomado como 3438 e a circunferência como 360X60 = 21600. Isso significa um valor para π concordando com o de Ptolomeu até o quarto algarismo significativo. Em outra situação Aryabhata usou o valor $\sqrt{10}$ para π, valor que apareceu tão frequentemente na Índia que às vezes é chamado o valor hindu. (p. 147)

TRIGONOMETRIA E A PROSTAFÉRESE

A trigonometria de Viète[1] (1540-1603), como sua álgebra, era caracterizada por uma ênfase maior sobre generalidade e largueza de visão. Assim como Viète foi o verdadeiro fundador da álgebra literal, também com alguma justificação pode ser chamado o pai de uma abordagem analítica generalizada para a trigonometria, que às vezes é chamada de goniometria. Aqui também, é claro, Viète partiu da obra de seus predecessores, notadamente Regiomontanus e Rheticus. Como o primeiro, ele considerava a trigonometria um ramo independente da matemática; como o segundo, ele em geral trabalhava em referência direta a meias cordas num círculo. Viète no *Canon mathematicus* (1579) preparou extensas tabelas de todas as seis funções de ângulos aproximados até minutos. Vimos que ele tinha recomendado o uso de frações decimais, em vez de sexagesimais; mas para evitar todas as frações tanto quanto possível, Viète escolheu um "sinus totus" ou hipotenusa de 100000 partes para as tabelas de seno e co-seno e uma "base" ou *perpendiculum* de 100000 partes para as tabelas de tangentes, co-tangentes, secantes e co-secantes. (Não usava, porém, esses nomes, exceto quanto à função seno).

(Por volta do século XVI) estavam aparecendo identidades trigonométricas de vários tipos em todas as partes da Europa, o que teve como resultado uma redução da ênfase na computação na resolução de triângulos e aumento da preocupação com relações funcionais analíticas. Entre essas havia um grupo de fórmulas de prostaférese-isto é, fórmulas que transformavam um produto de funções numa soma ou diferença (daí o nome *prosthaphaeresis*, palavra grega que significa adição e subtração). (p. 211)

(O nome "trigonometria") foi usado como título de uma exposição por Bartholomeus Pitiscus (1561-1613), que foi publicada pela primeira vez em 1595 como suplemento a um livro sobre esféricas e novamente, em separado, em 1600, 1606 e 1612). (p. 213)

E hoje? Como podemos motivar nosso aluno? Como podemos justificar a importância da trigonometria?

[11] Viète não era matemático por vocação. Na juventude ele estudou e praticou direito, tornando-se membro do parlamento de Bretanha; mais tarde tornou-se membro do conselho do rei, servindo primeiro sob Henrique II, depois Henrique IV. Foi quando servia a esse último, Henrique de Navarra, que teve tanto sucesso ao decifrar mensagens em códigos do inimigo que os espanhóis o acusaram de ter um pacto com o demônio. Só o tempo de lazer de Viète era dedicado à matemática.

APÊNDICE E - PROPOSTA DE IMPLEMENTAÇÃO DA METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1. Escolher um problema e trabalhar, com uma de suas turmas, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

ALGUMAS ORIENTAÇÕES[1]

Uma visão da matemática que ganhou grande aceitação nos últimos anos é baseada em uma posição dinâmica e exploratória em relação à disciplina (ROMBERG, 1994). <u>Esta atitude dinâmica em relação à matemática requer que o foco esteja no trabalho ativo, em processos geradores engajados por praticantes e usuários de matemática (SCHOENFELD, 1992), ao invés de uma visão de matemática como estática, estruturada em um sistema de fatos, procedimentos e conceitos.</u> Tais processos matemáticos envolvem o uso de ferramentas matemáticas sistematicamente para explorar padrões, problemas estruturais, e justificar processos de raciocínio (BURTON, 1984; NCTM, 1989; ROMBERG, 1992; SCHOENFELD, 1992, 1994).

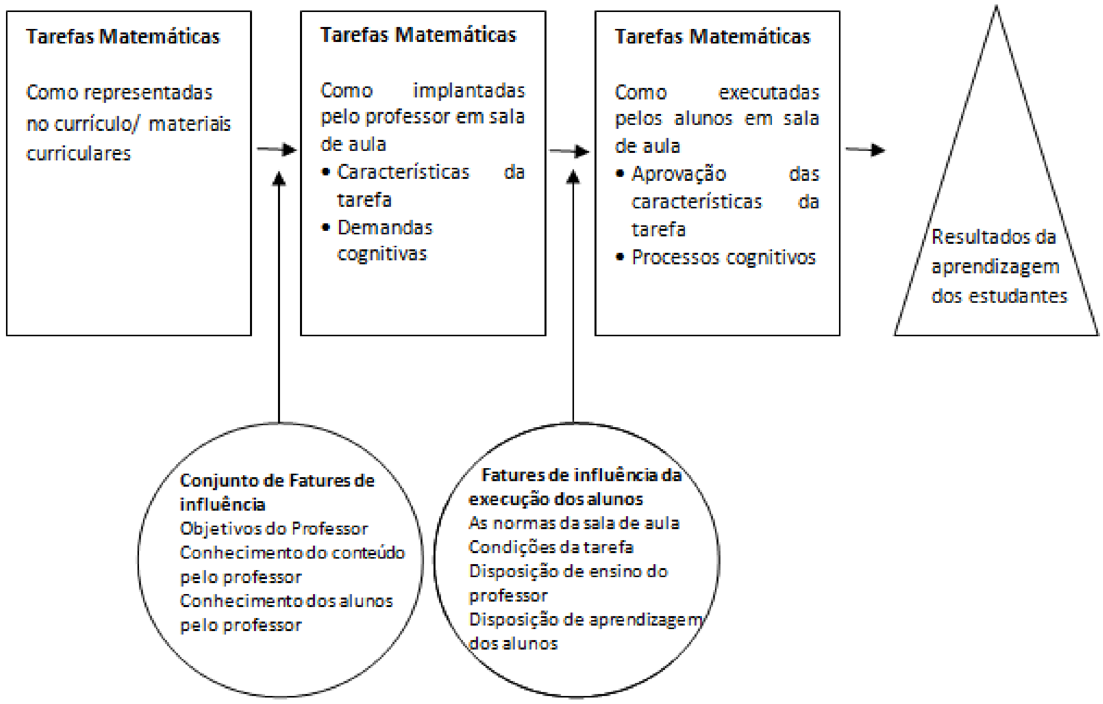
(...). Ter uma disposição matemática é caracterizado por atividades como procurar e explorar padrões para entender as estruturas matemáticas e as relações subjacentes, usando recursos disponíveis de forma eficaz e apropriada para formular e resolver problemas; ter sentido as ideias matemáticas, pensar e raciocinar de forma flexível: conjecturar, generalizar, justificar e comunicar ideias matemáticas de alguém; e decidir se os resultados matemáticos são razoáveis (SCHOENFELD, 1992).
(...)

Os alunos desenvolvem seu senso do que significa "fazer matemática" a partir de suas experiências reais com a matemática e suas principais oportunidades, de experimentar matemática como disciplina, estão assentadas nas atividades de sala de aula em que se envolvem (SCHOENFELD, 1992, 1994).
(...)

---

[1] Com base no texto "Tarefas matemáticas e cognição: Fatores de sala de aula que dão suporte e inibem o pensamento e raciocínio matemáticos de alto nível", de Marjorie Henningsen e Mary Kay Stein.

A estrutura, mostrada na Figura abaixo, define uma tarefa matemática como uma atividade de sala de aula, cujo objetivo é concentrar a atenção dos alunos sobre um determinado conceito matemático, ideia ou habilidade.



Dificuldades associadas à execução das tarefas de alto nível[2].

- Os alunos, muitas vezes, pressionam o professor para obter mais facilmente ou para que ele facilite a resposta;

- As tarefas podem se afastar da ênfase na compreensão e significado para uma ênfase na precisão e velocidade;

- Falta de alinhamento da tarefa com os conhecimentos prévios dos alunos, interesses e motivação;

- Gestão da sala de aula: organização física do ambiente, quantidade de tempo disponível para as atividades, o modo pela qual os períodos de transição entre as tarefas são tratados, as estruturas de avaliação, e as formas em que as intervenções são tratadas.

Como o professor pode apoiar a execução das tarefas de alto nível

- Fazendo conexões com o que os alunos já sabem;

- Disponibilizando quantidades apropriadas de tempo para a tarefa;

- Construindo andaimes: quando o aluno não pode completar a tarefa sozinho, o professor ou colega mais experiente pode auxiliar o aluno sem diminuir a complexidade da tarefa;

- Incentivando a auto-monitoração e auto-questionamento.

---

[2] A Resolução de problemas é considerada uma tarefa de alto nível.

Uma tarefa de alto nível cognitivo pode declinar para:

1. A utilização de procedimentos sem conexão com conceitos, significados e compreensão;
2. Formas insatisfatórias de exploração matemática;
3. Atividades sem matemática.

APÊNDICE F – SOBRE A HISTÓRIA DOS PESOS E MEDIDAS

Algumas curiosidades e informações sobre a História dos pesos e medidas[1]

Grandeza (mensurável): atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado (INMETRO, 2000a).

Medir: ação de avaliar uma grandeza comparando-a com outra de mesma espécie, adotada como referência.

Medida: valor numérico do resultado da comparação entre uma grandeza a ser avaliada e uma grandeza de referência.

Medição: conjunto de operações que tem por objetivo determinar um valor de uma grandeza.

Unidade de medida: é um conceito abstrato usado para expressar o valor unitário da medida de determinada grandeza, com a qual outras grandezas de mesma natureza são comparadas para expressar suas magnitudes em relação àquela grandeza específica.

Sistemas de medidas ou sistemas de unidades de medida: nome dado ao conjunto de medidas de unidades ou unidades de medida de diferentes espécies agrupadas de maneira coerente e que são utilizadas em diferentes ramos da atividade humana.

Padrão de medida: nome dado ao objeto ou fenômeno natural (incluindo constantes físicas e propriedades específicas de substâncias) usado como referência para definir, realizar, conservar ou reproduzir uma unidade de medida.

Volume ou capacidade: medida cúbica (base x altura) utilizada para medir líquidos e matérias secas que podem ser cubicadas.

Calibração ou aferição: conjunto de operações que estabelece, sob condições específicas, a relação entre os valores indicados por um instrumento de medição e os valores correspondentes das grandezas estabelecidas como padrão.

Metrologia: nome dado à ciência que agrupa os conhecimentos sobre a arte de medir e interpretar as medições realizadas.

[1] Referência: SILVA, Irineu da. **História dos pesos e medidas.** São Carlos: EdUFSCAR, 2004. 190p.

O Sistema Métrico Decimal

"Sistema Métrico de unidades é o nome geral dado ao Sistema Decimal Internacional de Pesos e Medidas cujas unidades básicas são o metro e o quilograma" (COLLIERS ENCYCLOPEDIA, 1972)

O Sistema Métrico Decimal foi instituído na França em 1840, e, em 1875, foi adotado como um sistema de medidas internacional. A partir dessa data, em 1927, 1937, 1960, 1971 e 1983, várias definições foram incorporadas e outras, modificadas. (p. 27)

A maioria dos países adotou rapidamente o Sistema Métrico Decimal como um sistema nacional, exceto os países anglo-saxões. Os motivos da não aceitação invocado na época foram, naturalmente de ordem técnica e econômica, mas é fácil concluir que o principal motivo foi de ordem política, pois como os outros países que adotaram o Sistema Métrico Decimal, os países anglo-saxões também não possuíam, naquela época, um sistema coeso e unificado. (p. 31)

Tendo sido um dos frutos da Revolução Francesa, ele pode ser considerado, também, como um dos marcos que estabeleceu o fim do feudalismo europeu. (p. 80)

Os historiadores consideram Gabriel Mouton (1618-1694), vigário da paróquia de São Paulo, em Lion, França, matemático e astrônomo, como o criador do Sistema Métrico Decimal de Medidas. Segundo os registros, foi ele quem primeiro propôs, em 1670, a adoção da décima milionésima parte do arco de um quarto de um círculo máximo do globo terrestre como unidade de medida linear e com submúltiplos decimais. (p. 81)

- *problemas para realizar as medições por causa da Revolução Francesa. Qual meridiano escolher?*

De 1889 a 1960, a unidade- padrão de comprimento manteve-se inalterada. Em 1960 uma nova definição foi adotada. Decidiu-se que ela deveria ser substituída por outra mais precisa e definitiva independente de um protótipo material. Estabeleceu-se, assim, que a nova unidade-padrão de comprimento teria por base o comprimento de onda de uma radiação luminosa. Escolheu-se a radiação laranja do nucleóide Criptônio-86, que é um dos seis isótopos do gás raro Criptônio, encontrado no ar atmosférico. Essa nova definição permitiu aumentar a precisão da unidade-padrão de comprimento em cerca de 100 vezes, além, é claro, da vantagem da indestrutibilidade e da confiabilidade da reprodução e internacionalidade do padrão. (p. 97).

A unidade de comprimento sofreu uma nova alteração em 1980. A partir dessa data, a ideia básica de referenciá-la ao comprimento de uma onda foi substituída pela de referenciá-la a uma fração da distância percorrida pela luz no vácuo, em um determinado espaço de tempo. (p.97)

A unidade de massa manteve-se inalterada. *(Ainda se utiliza um protótipo material, mas a precisão nas cópias é muito maior que há 100 anos).*

Estima-se que 95% da população mundial usa o sistema métrico. (p. 32)

- o homem tomado como referência: Vitrúvio.

Principais sistemas de medidas

O Sistema Métrico foi o primeiro sistema de medidas coerentes, mas apenas permitia a medição das grandezas lineares e de massa. Em 1960 é criado o Sistema Internacional (SI) que engloba todas as unidades conhecidas e é recomendado internacionalmente.

Unidades de base do Sistema Internacional

Grandeza	Nome	Símbolo	Definição
Comprimento	metro	m	Distância percorrida pela luz no vácuo, durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 segundo.
Massa	quilograma	Kg	A massa de um cilindro de liga platina-irídio conservado no BIPM, em Sèvres, na França.
Tempo	segundo	s	Duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondentes à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de Césio 133.
Corrente elétrica	amperè	A	Corrente elétrica invariável que, mantida em dois condutores retilíneos, paralelos, de comprimento infinito e de área de seção transversal desprezível e situados no vácuo a 1m de distância um do outro, produz entre esses condutores uma força igual a $2x10^{-7}$ newton, por metro de comprimento desses condutores. Obs: amperè é também unidade de força magnetomotriz.
Temperatura Termodinâomica	Kelvin	K	Fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto tríplice da água.
Intensidade luminosa	candela	cd	Intensidade luminosa em uma dada direção, de uma fonte que não emite uma radiação monocromática de frequência 540x1012 hertz e cuja intensidade energética naquela direção é de 1/683 watt por esterradiano.
Quantidade de matéria	mol	mol	Quantidade de matéria de um sistema que contém tantas entidades elementares quantos são os átomos contidos em 0, 012 quilogramas de carbono 12.

Sistema CGS: Proposto, em 1873, pela Associação Britânica para o Desenvolvimento das Ciências com base no centímetro, no grama e no segundo. Foi usado até 1954 quase que exclusivamente nos meios científicos.

Sistema MTS: Criado pelos franceses e tinha por unidades de base o metro, a tonelada e o segundo. Foi usado, sobretudo, no meio técnico industrial.

Sistema MKS: Foi uma variante do MTS e utilizava o quilograma em vez de tonelada.

Sistema MKfS: Tinha por base o metro, o quilograma-força (ou peso) e o segundo. Também é chamado de Sistema Industrial ou Mecânico.

Sistema MKSA: Foi proposto, em 1901, pelo italiano G. Giorgi. O sistema utilizava o metro, o quilograma, o segundo e uma outra unidade a escolher. Em 1935 foi adotado como sistema internacional e, em 1950, adotou-se o Ampère (A) como a quarta unidade.

	Unidades de Comprimento	
Sistema Internacional de Unidades-SI	***Sistema Inglês***	***Fator de conversão/equivalência***
milímetro – mm	polegada - inch (in)	1 polegada = 25,4mm 1 milímetro = 0,039in
milímetro – mm	pé - foot (ft)	1 pé = 304,8mm
centímetro – cm	polegada - inch (in)	1 polegada = 2,54cm
centímetro – cm	pé - foot (ft)	1 pé = 30,48cm
metro – m	pé - foot (ft)	1 pé = 0,3048 m
metro – m	jarda - yard (yd)	1 jarda = 0,9144m = 914,4mm
quilômetro – km	milha - mile (mi)	1 milha = 1,609 km
	Unidades de Área	
Sistema Internacional de Unidades-SI	***Sistema Inglês***	***Fator de conversão/equivalência***
centímetro quadrado - cm²	polegada quadrada - 1 inch² (sq.in)	1 polegada quadrada = 6.452cm² = 645,2mm²
centímetro quadrado - cm²	pé quadrado - 1 foot² (sq.ft)	1 pé quadrado = 929,03cm²
metro quadrado - m²	pé quadrado - 1 foot² (sq.ft)	1 pé quadrado = 0,092m²
metro quadrado - m²	milha quadrada - 1 yard² (sq.yd)	1 jarda quadrada = 0,8361m²
metro quadrado - m²	acre - acre (ac)	1 acre = 4.046,9m²
hectare – há	acre - acre (ac)	1 acre = 0,4047ha
hectare – há	milha quadrada - 1 mile² (sq.mi)	1 milha quadrada = 259,0 ha (1ha=10.000m²)
quilômetro quadrado - km²	milha quadrada - 1 mile² (sq.mi)	1 milha quadrada = 2.590 km²

	Unidades de Volume	
Sistema Internacional de Unidades-SI	***Sistema Inglês***	***Fator de conversão/equivalência***
litro - l	polegada cúbica - 1 $inch^3$ (cu.in)	1 polegada cúbica = 0,01639 litro
mililitro - ml	polegada cúbica - 1 $inch^3$ (cu.in)	1 polegada cúbica = 16,39 ml
centímetro cúbico - cm^3	polegada cúbica - 1 $inch^3$ (cu.in)	1 polegada cúbica = 16,39 cm^3
milimetro cúbico - mm^3	polegada cúbica - 1 $inch^3$ (cu.in)	1 polegada cúbica = 16.390mm^3
decímetro cúbico - dm^3	pé cúbico - 1 $foot^3$ (cu.ft)	1 pé cúbico = 28,32 dm^3(1l=1dm^3)
litro - l	pé cúbico - 1 $foot^3$ (cu.ft)	1 pé cúbico = 28,32 litros(1.000l=1m^3)
metro cúbico - m^3	pé cúbico - 1 $foot^3$ (cu.ft)	1 pé cúbico = 0,02832 m^3
metro cúbico - m^3	jarda cúbica - 1 $yard^3$ (cu.yd)	1 jarda cúbica = 0,7646m^3
	Unidades de Massa	
Sistema Internacional de Unidades-SI	***Sistema Inglês***	***Fator de conversão/equivalência***
grama - g	onça - 1 ounce (oz)	1 onça = 28,35g
quilograma - kg	libra - 1 pound (lb)	1 libra = 0,4536kg
quilograma - kg	kip(1000libras) - 1 kip	1 kip = 453,59kg
quilograma - kg	tonelada - 1 ton	1 tonelada = 1.016,05kg
	Unidades de Capacidade	
Sistema Internacional de Unidades-SI	***Sistema Inglês***	***Fator de conversão/equivalência***
centímetro cúbico - cm^3	onça fluida - 1 fl.oz	1 onça fluida = 28.413cm^3
litro - l	pinto - 1 pt	1 pinto = 0,568 l
litro - l	quarto - 1 qt	1 quarto = 1,137 l