

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
JÚLIO DE MESQUITA FILHO
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

LUIS ENRIQUE ARROYO MEZA

**EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR COM
COEFICIENTES MODULADOS**

Guaratinguetá
2015

UNESP

Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

Guaratinguetá

2015

LUIS ENRIQUE ARROYO MEZA

EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR COM COEFICIENTES
MODULADOS

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
do Campus de Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, para a obtenção do Título
de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Batista Hott
Co-orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

Guaratinguetá
2015

M617e Meza, Luis Enrique Arroyo
Equação de Schrödinger não linear com coeficientes modulados / Luis
Enrique Arroyo Meza - Guaratinguetá, 2015
125 f. : il.
Bibliografia: f. 87-97

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2015.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Batista Hott

Coorientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

1. Solitons 2. Ondas não-lineares 3. Schrödinger , Equação de
I. Título

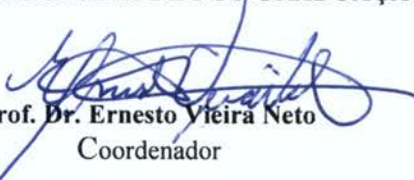
CDU 530.145(043)

LUIS ENRIQUE ARROYO MEZA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. MARCELO BATISTA HOTT
Orientador / UNESP/FEG


Prof. Dr. DENIS DALMAZI
UNESP/FEG


Prof. Dr. ROBERTO ANDRÉ KRAENKEL
IFT/UNESP


Prof. Dr. OTHON CABO WINTER
UNESP/FEG


Prof. Dr. WESLEY BUENO CARDOSO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOÍAS

DADOS CURRICULARES

LUIS ENRIQUE ARROYO MEZA

NASCIMENTO	26.06.1976 - LIMA, PERU
FILIAÇÃO	Julio Máximo Arroyo Gutierrez Juana Lucia Meza Yauli
1994 / 2003	Curso de Graduação - Bacharelado em Física Facultad de Ciencias Naturales y Matemática Universidad Nacional del Callao - UNAC Lima-Peru.
2009 / 2011	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá Universidade Estadual Paulista - UNESP São Paulo-Brasil.
2011 / 2015	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Doutorado Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá Universidade Estadual Paulista - UNESP São Paulo-Brasil.

DEDICATÓRIA

*Esta tese é dedicada aos meus pais **Julio e Juana**,
por me ensinarem que a vida é feita de fracassos e esforço
constante.*

AGRADECIMENTOS

Quero começar por agradecer aos meus pais **Julio** e **Juana**, por seus ensinamentos para enfrentar a vida. Aos meus irmãos, pelo apoio constante. Amigos, professores, que sempre confiaram em mim. Todos eles me ajudaram nesta parte da minha vida.

Agradeço de todo coração aos professores Marcelo Batista Hott e Alvaro de Souza Dutra, por terem me orientado neste trabalho de doutorado e pela formação que me deram.

Agradeço aos professores do Grupo de Partículas e Campos da Unesp - Campus de Guaratinguetá: Professores Drs.: Antonio S. de Castro, Alvaro de Souza Dutra, Denis Dalmazi, Julio Marny Hoff da Silva e Marcelo B. Hott, todos eles professores formadores e amigos, os quais me aconselharam e me orientaram nesta etapa do doutorado.

Aos funcionários do curso de pós-graduação, pela convivência durante o tempo de trabalho.

Agradeço a meus amigos da República Amoribunda arregaçando desde 1977, Quase, Cumpadi, Baby, Celino, Fifa, Termômetro, Junkeira, Salompas, Guaxupé, Resto, Proeza, Mangabeira, B1, B3, B4 e B5 com quem compartilho uma boa amizade; a meus conterrâneos peruanos, Elver, Benito, Augusto, Angel, Carlos, Alonso, Mariela, Omar e Daniel, pela confiança e amizade.

Este trabalho contou com o apoio financeiro do Programa de Estudantes-Convênio de Pós-Graduação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- (**PEC-PG-CAPES**).

Nossas virtudes e nossos defeitos são inseparáveis como a força e a matéria. Quando se separam, o homem não existe.

N. Tesla.

Meza, L. E. A. **Equação de Schrödinger não linear com coeficientes modulados**. 2015. 125 f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP 2015

RESUMO

Nesta tese lidamos com a equação de Schrödinger não linear com coeficientes modulados em diferentes contextos. Esta equação diferencial não linear é amplamente usada para descrever a propagação de pulsos de luz através de uma fibra óptica ou para modelar a dinâmica de um condensado de Bose-Einstein.

Primeiro, aplicamos as transformações canônicas de ponto para resolver algumas classes de equação de Schrödinger não linear com coeficientes modulados ou seja, aqueles que possuem não linearidades cúbica e quártica (dependentes do espaço e tempo) específicas. O método aplicado aqui nos permite encontrar soluções tipo sólitons localizados (no espaço) para a equação de Schrödinger não linear com coeficientes modulados, que não foram apresentados antes. No contexto de condensados de Bose-Einstein, nós generalizamos o potencial externo o qual armadilha o sistema, e os termos de não linearidade da equação diferencial.

Em seguida, aplicamos as transformações canônicas de ponto para resolver algumas classes de duas equações de Schrödinger não lineares acopladas com coeficientes modulados isto é, não linearidades cúbica e quártica - dependentes do espaço e tempo - específicas. O método aplicado aqui nos permite encontrar uma classe de soluções de sólitons tipo vetoriais localizados (no espaço) das duas equações de Schrödinger não linear acopladas. Os sólitons vetoriais encontrados aqui podem ser aplicados a estudos teóricos de condensados de Bose-Einstein de átomos com dois estados internos diferentes ou à propagação de pulsos de luz através de fibras ópticas focalizadoras ou desfocalizadoras.

Finalmente, usando transformações canônicas de ponto obtemos soluções exatas localizadas (no espaço) da equação de Schrödinger não linear com não linearidades cúbica e quártica moduladas no espaço e tempo, e na presença de potenciais externos não homogêneos dependente do tempo, e coeficiente de amplificação ou absorção (fonte ou dreno). Neste caso obtemos uma classe de soluções exatas localizadas largas da equação Schrödinger não linear na presença de um número de potenciais externos não-hermitianos os quais apresentam simultaneamente simetria de paridade e simetria de reversão temporal (simetria \mathcal{PT}), os quais são constituídos por uma mistura de potenciais externos e termos de fonte ou dreno. As soluções exatas encontradas aqui podem ser aplicadas a estudos teóricos de propagação de pulsos de luz através de fibras ópticas focalizadoras ou desfocalizadoras. Mostramos que, mesmo na presença de termos de ganho ou perda, soluções estáveis podem ser encontradas e que a simetria \mathcal{PT} é uma característica importante para assegurar a conservação da energia média do sistema.

PALAVRAS - CHAVE: Sólitons Ópticos, Ondas não lineares guiadas, Guias de ondas não lineares, Condensados de Bose-Einstein em potenciais periódicos, Paridade, Simetria de reversão temporal.

Meza, L. E. A. **Nonlinear Schrödinger equation with modulated coefficients** 2015. 125 f. Thesis (Doctorate in Physics) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP 2015

ABSTRACT

In this thesis we deal with the nonlinear Schrödinger equation with modulated coefficients in different contexts. This nonlinear differential equation is widely used to describe light pulses propagating through an optical fiber or to model the dynamics of a Bose-Einstein condensate.

First, we apply point canonical transformations to solve some classes of nonlinear Schrödinger equation with modulated coefficients namely, those which possess specific cubic and quintic (time- and space-dependent) nonlinearities. The method applied here allows us to find wide localized (in space) soliton solutions to the nonlinear Schrödinger equation, which were not presented before. In the context of Bose-Einstein condensates, we also generalize the external potential which traps the system and the nonlinearities terms.

Then, we apply point canonical transformations to solve some classes of two coupled nonlinear Schrödinger equations with modulated coefficients namely, specific cubic and quintic - time and space dependent - nonlinearities. The method applied here allows us to find a class of wide localized (in space) vector soliton solutions of two coupled nonlinear Schrödinger equations. The vector solitons found here can be applied to theoretical studies of Bose-condensed atoms in two different internal states and of ultrashort pulse propagation in optical fibers with focusing and defocusing nonlinearities.

Finally, we use point canonical transformations to obtain localized (in space) exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation with cubic and quintic space and time modulated nonlinearities and in the presence of time-dependent and inhomogeneous external potentials and amplification or absorption (source or drain) term. We obtain a class of wide localized exact solutions of nonlinear Schrödinger equation in the presence of a number of non-Hermitian external potentials which simultaneously exhibit parity and time reversal symmetries (\mathcal{PT} symmetry), and are constituted by a mixing of real external potentials and source or drain terms (imaginary part of the non-Hermitian potential). The exact solutions found here can be applied to theoretical studies of ultrashort pulse propagation in optical fibers with focusing and defocusing nonlinearities. We show that even in the presence of gain or loss terms, stable solutions can be found and that the \mathcal{PT} symmetry is an important feature to guarantee the conservation of the average energy of the system.

KEYWORDS: Optical solitons, Nonlinear guided waves, Nonlinear waveguides, Bose-Einstein condensates in periodic potentials, Parity and Time reversal symmetry.

Lista de Figuras

2.1	Perfis das intensidades dos sólitons para $x_0 = 0$, $\phi_0 = 0$, $A = 1$ e $g = 2$. (a) Sóliton brilhante estacionário, Eq.(2.4). Sóliton, Eq.(2.5), em $t = 0$; (b) Escuro, $\phi = 0$. (c) Cinza, $\phi = \pi/5$	12
3.1	Perfil da amplitude $ \Phi(z) ^2$, Eq. (3.27), tipo \tanh^2 deformado.	29
3.2	Perfil da amplitude do campo $\Phi(z)$, Eq. (3.28), tipo sech^2 deformada. Com $\mu = -1$ e $G_3 = -2$	30
3.3	Perfil periódico dos campos $\Phi_1(z)$ e $\Phi_2(z)$, Eq. (3.29). Perfil do campo $\Phi_3(z)$, tipo \tanh^2 sem deformação.	31
3.4	Comportamento atrativo e repulsivo do potencial de armadilhamento $v(x, t)$, Eq. (3.32). Com, $b = 3$, $\mu = -1$ e $G_3 = -1$	32
3.5	Amplitude da função de onda $ \Psi(x, t) ^2$. Com $a = 0.01$ e $b = 10$	34
3.6	Amplitude do parâmetro de ordem $ \Psi(x, t) ^2$. Com $\lambda = 0.001$, $b = 10$. . .	35
3.7	Potencial externo $v(x, t)$. (a) Armadilha em torno de $x = 0$. (b) <i>Density plot</i> do potencial. Com $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0.1$, $G_3 = 2$, $\mu = 0$, $A = 2$ e $\alpha = 1$. . .	36
3.8	Amplitude do sóliton brilhante $ \Psi(x, t) ^2$, Eq. (3.41), com $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0.1$, $G_3 = 2$, $\mu = 0$, $A = 2$ e $\alpha = 1$. O comportamento periódico espacial é devido à peridiocidade do potencial Scarf trigonométrico.	37
3.9	Estrutura periódica espacial (a) do potencial externo $v(x, t)$, Eq. (3.43). (b) da amplitude da função de onda $\Psi(x, t)$, Eq. (3.46). Com $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0.1$, $G_3 = 2$, $\mu = 0$, $A = 2$ e $\alpha = 1$	38
4.1	Perfis das amplitudes dos componentes da solução tipo sóliton escuro-brilhante, Eq. (4.33): (a) Perfil tipo sóliton escuro $\Phi_1^2(\zeta)$; (b) Perfil tipo sóliton brilhante $\Phi_2^2(\zeta)$. Para $\lambda = 2.5$	49
4.2	Perfis das amplitudes dos componentes da solução: (a) sóliton cinza Φ_1 tornando-se um sóliton escuro largo; (b) sóliton escuro Φ_2 tornando-se um sóliton escuro largo. Com $\kappa = -1$ e $\rho = 4$	51
4.3	Comportamento dos perfis das amplitudes dos componentes da solução: (a) sóliton brilhante em um pedestal Φ_1 tornando-se um sóliton brilhante largo em um pedestal; (b) sóliton escuro Φ_2 tornando-se um sóliton escuro largo. Com $\kappa = -1$ e $\rho = 4$	51

- 4.4 (direita) Potencial de armadilhamento para BECs, Eq. (4.41). (esquerda) Não linearidade cúbica, Eq. (4.42). Com $q = 0.5$, $E = 50$, $\nu = 0.5$, $\lambda = 2.5$ e $\gamma_0 = 3$ 53
- 4.5 Amplitudes dos componentes do sóliton vetorial escuro-brilhante para BECs: (a) $|\Psi_1(x, t)|^2$, sóliton escuro largo, Eq. (4.43); (b) $|\Psi_2(x, t)|^2$, sóliton brilhante largo, (4.44). Com $\lambda = 2.5$, $\nu = 0.5$, $c_0 = -2.0001$, $q = 0.5$, $E_1 = E_2 = 50$ e $\gamma_0 = 3$ 54
- 4.6 Comportamento: (a) do parâmetro de dispersão $m_k(t)$, Eq.(4.47); (b) da não linearidade Kerr $g_{kl}(x, t)$, Eq. (4.48); (c) das não linearidades Kerr e não-Kerr $f_{kl}(x, t)$ e $h_{kl}(x, t)$, Eq. (4.49); (d) do coeficiente de amplificação ou absorção $\Gamma_k(t)$, Eq. (4.50). 55
- 4.7 Propagação das intensidades dos componentes da solução analítica vetorial: (a) $|\Psi_1(x, t)|^2$ solução com perfil sóliton escuro, Eq. (4.51); (b) $|\Psi_2(x, t)|^2$ solução com perfil sóliton brilhante, Eq. (4.52). Com $\lambda = 2$, $c_0 = -2.0001$, $\gamma_0 = 3.1$, $\beta_0 = 1.6$, $\Omega = 1$ e $\sigma = -0.01$ 56
- 4.8 Propagação das intensidades do sóliton cinza-escuro: (a) $|\Psi_1(x, t)|^2$ sóliton cinza; (b) $|\Psi_2(x, t)|^2$ sóliton escuro. Com $\kappa = -1$, $\rho = 4$, $\Omega = 1$, $c_0 = -0.5$, $\gamma_0 = 3.1$, $\beta_0 = 1.6$ e $\sigma = 0$ 57
- 4.9 Propagação da intensidade das componentes do sóliton escuro-escuro largo: (a) $|\Psi_1(x, t)|^2$ sóliton escuro largo; (b) $|\Psi_2(x, t)|^2$ sóliton escuro largo. Com $\kappa = -1$, $\rho = 4$, $\Omega = 1$, $c_0 = -0.0001$, $\gamma_0 = 3.1$, $\beta_0 = 1.6$ e $\sigma = 0$ 58
- 4.10 Propagação das intensidades do sóliton brilhante-escuro largo: (a) $|\Psi_1(x, t)|^2$ sóliton brilhante largo sobre um pedestal; (b) $|\Psi_2(x, t)|^2$, sóliton escuro largo. Com $\kappa = -1$, $\rho = 4$, $c_0 = 8.0001$, $\gamma_0 = 3.1$, $\beta_0 = 1.6$, $\Omega = 1$ e $\sigma = 0$. 59
- 5.1 Deformação contínua: (a) da parte real do potencial com simetria \mathcal{PT} , Eq. (5.25); (b) da parte imaginária do potencial com simetria \mathcal{PT} , Eq. (5.25); (c) do perfil da intensidade $|\psi(x)|^2$, Eq. (5.26), para diferentes valores de λ . (d) Intensidade $|\psi(x)|^2$ semelhante a um sóliton brilhante largo, para $\lambda = 1/73$. Com $V_0 = 37$, $W_0 = 18$, $\mu = 1$ 66
- 5.2 (a) Perfil da parte real do potencial complexo, Eq. (5.27); (b) Perfil da parte imaginária do potencial complexo, Eq. (5.27); (c) Seção transversal da intensidade para diferentes valores de r . (d) Intensidade da solução exata semelhante à intensidade de um sóliton brilhante largo, Eq. (5.28), para $r = 0.01$. Com $V_0 = 25.5$, $W_0 = 0.5$, $s = 0.5$ 68
- 5.3 Evolução periódica do: (a) índice de refração $v(X, Z)$ e (b) o coeficiente de ganho ou perda $w(X, Z)$, Eq. (5.34). Com $\nu = 5$, $\epsilon_1 = 6$, $\epsilon_2 = -4$, $V_0 = 37$, $W_0 = 18$ e $\gamma_0 = 2$ 73

- 5.4 (a) Intensidade $|\Psi(X, Z)|^2$ tipo sólito brilhante. (b) Gráfico do contorno da intensidade $|\Psi(X, Z)|^2$, Eq. (5.36). Com $\nu = 5$, $\epsilon_1 = 6$, $\epsilon_2 = -4$, $V_0 = 37$, $W_0 = 18$, $\beta_0 = 1/\sqrt{2}$ e $\gamma_0 = 2$ 75
- 5.5 (a) Índice de refração deformado $v(X, Z)$. (b) Separação contínua de regiões de ganho e perda, $w(X, Z)$, Eq. (5.37). Para $\nu = 5$, $\gamma_0 = 2$, $\epsilon_1 = 0.6$, $\epsilon_2 = -0.4$, $V_0 = 37$, $W_0 = 18$, $\mu = 1$ e $\lambda = 1/73$ 76
- 5.6 (a) Intensidade $|\Psi|^2$ tipo sólito brilhante largo. (b) Gráfico do contorno da evolução periódica da intensidade $|\Psi|^2$ tipo um sólito brilhante largo, (5.38). Para $\nu = 5$, $\epsilon_1 = 0.6$, $\epsilon_2 = -0.4$, $\gamma_0 = 2$, $\beta_0 = 10\sqrt{5}$, $V_0 = 37$, $W_0 = 18$, $\mu = 1$ e $\lambda = 1/73$ 77
- 5.7 (a) Índice de refração deformado; (b) Separação contínua de regiões de perda e ganho, Eq. (5.37). Para $\nu = 5$, $\gamma_0 = 2$, $\epsilon_1 = 0.6$, $\epsilon_2 = 0.4$, $V_0 = 25.5$, $W_0 = 0.5$, $s = 0.5$ e $r = 0.01$ 79
- 5.8 (a) Propagação periódica da intensidade $|\Psi(X, Z)|^2$ tipo um sólito brilhante largo. (b) Gráfico do contorno da evolução periódica da intensidade $|\Psi(X, Z)|^2$, Eq. (5.40). Para $\nu = 5$, $\gamma_0 = 2$, $\epsilon_1 = 0.6$, $\epsilon_2 = 0.4$, $\beta_0 = 2$, $V_0 = 25.5$, $W_0 = 0.5$, $s = 0.5$ e $r = 0.01$ 80
- 5.9 Análise da estabilidade: (a) Amplitude máxima da solução Eq. (5.36); analítica (vermelho) e perturbada (azul). (b) Amplitude máxima da solução Eq. (5.38); analítica (vermelho) e perturbada (azul) para $\lambda = \frac{\mu}{2}(V_0 - W_0^2/9)$, $\mu = 1$, $V_0 = 1$ e $W_0 = 0.5$ 81
- 5.10 Análise da estabilidade (a) Amplitude máxima da solução Eq. (5.38); analítica (vermelho) e perturbada (azul) para $\lambda = 0.1$, $\mu = 1$, $V_0 = 1$ e $W_0 = 0.5$. (b) Amplitude máxima da solução Eq. (5.40); analítica (vermelho) e perturbada (azul) para $V_0 = 2$ e $W_0 = 0.4$ 82

Sumário

Lista de figuras	1
1 Introdução	6
2 O contexto físico da equação de Schrödinger não linear	10
2.1 A equação de Schrödinger não linear	10
2.1.1 Sólitons na equação de Schrödinger não linear	11
2.2 Equações de propagação de pulsos de luz em fibras ópticas	13
2.2.1 Sólitons ópticos	15
2.3 Equações da dinâmica de BECs	17
2.3.1 Ondas de matéria solitônicas	19
2.4 Modelos da equação de Schrödinger não linear com coeficientes modulados	20
3 Sólitons localizados largos na equação de Schrödinger não linear com coeficientes modulados	23
3.1 Transformações canônicas de ponto	23
3.2 O mapeamento sob a função elíptica de Weierstrass \wp	27
3.2.1 Função elíptica de Weierstrass \wp	27
3.2.2 Modelo de campo escalar com autointerações não lineares até sexta ordem	28
3.2.3 Exemplo 1. Solução tanh deformada	28
3.2.4 Exemplo 2. Solução sech deformada	29
3.2.5 Exemplo 3. Soluções periódicas	30
3.3 Soluções solitônicas largas	31
3.3.1 Exemplo 1: Sóliton escuro largo	33
3.3.2 Exemplo 2: Sóliton brilhante largo	33
3.4 Generalização do potencial externo	35
3.4.1 Potencial Scarf trigonométrico	35
3.4.2 Potencial Rosen-Morse trigonométrico	37
3.5 Generalização das não linearidades	38
3.6 Comentários	41

4	Sólitos vetoriais largos de um sistema de duas equações de Schrödinger não lineares acopladas com coeficientes modulados	42
4.1	Modelo teórico	43
4.2	Transformações canônicas de ponto	44
4.3	Soluções analíticas exatas	47
4.3.1	Sistema de equações diferenciais acopladas com não linearidade cúbica	48
4.3.2	Sistema de equações diferenciais acopladas com não linearidades cúbica e quártica	50
4.4	Sólitos vetoriais largos num BEC de uma espécie atômica com dois estados internos diferentes	52
4.5	Sólitos vetoriais largos na propagação do pulso de luz polarizada	54
4.6	Comentários	58
5	Soluções localizadas largas da equação de Schrödinger não linear \mathcal{PT}-simétrica com coeficientes modulados	60
5.1	Método de solução	61
5.2	Generalização do potencial Scarf II com simetria \mathcal{PT}	64
5.3	Generalização do potencial Rosen-Morse II com simetria \mathcal{PT}	67
5.4	Soluções localizadas largas	69
5.4.1	Exemplo 1	70
5.4.2	Exemplo 2	75
5.4.3	Exemplo 3	79
5.5	Análise de estabilidade	81
5.6	Comentários	82
6	Conclusões e comentários finais	84
A	A equação de propagação de pulsos de luz através de fibras ópticas	98
A.1	Equações de Maxwell	98
A.2	Equação de Onda	99
A.3	Forma adimensional da ESNL	110
B	Método Numérico	111
B.1	Método de decomposição do operador	111
B.2	Algoritmo de Crank-Nicolson	112

Capítulo 1

Introdução

Os fenômenos físicos não lineares surgem em quase todas as áreas da Física. Em particular, a propagação de pulsos de luz através de uma fibra óptica [1], assim como a evolução de um condensado de Bose-Einstein (BEC) [2], são apenas alguns exemplos de tais fenômenos que encontram aplicações potenciais em diferentes campos da ciência e da tecnologia. Essencialmente, as dinâmicas desses fenômenos físicos podem ser teoricamente descritas pela família de equações de Schrödinger não linear (ESNL), incluindo a ESNL com não linearidade cúbica (ESNLC) [3]-[5], a ESNL com não linearidades cúbica e quártica (ESNLCQ) [6]-[8], a ESNL de ordem superior [9], a ESNL com simetria \mathcal{PT} [10]-[13] e as ESNLs acopladas [14, 15], entre outras equações.

No caso, em que um fenômeno físico seja descrito pelas ESNLs com coeficientes constantes em cada um de seus termos constituintes, não há efeitos significativos sobre a manipulação da forma global (envoltório) de suas soluções [3]-[15]. Enquanto que uma situação mais realista é aquela em que o fenômeno físico é influenciado por uma força externa dependente do tempo e/ou espaço, nessa situação o fenômeno é descrito pelas ESNLs com coeficientes modulados, ou seja, com coeficientes dependentes da coordenada temporal e/ou das coordenadas espaciais [16]-[21]. Neste caso a modulação dos coeficientes nos permite controlar eficientemente a largura, a amplitude e a posição do centro de massa, mantendo invariável ao mesmo tempo a envoltório das soluções.

Especificamente, uma descrição mais completa da propagação de pulsos de luz em fibras ópticas leva em conta não linearidades de ordem superior, que surgem a partir da expansão do índice de refração n em potências da intensidade do pulso de luz I , ou seja $n = n_0 + n_2 I + n_4 I^2 + \dots$, onde n_0 é o índice de refração linear, $n_2 = 3\chi^{(3)}/8n_0$ e $n_4 = 5\chi^{(5)}/32n_0$ são os coeficientes das não linearidades cúbica (Kerr) e quártica (não-Kerr), respectivamente; $\chi^{(i)}$ é a suscetibilidade de i -ésima ordem. Se a expansão é truncada em termos de segunda ordem em relação a I , a equação diferencial correspondente que rege a evolução não linear do pulso de luz na fibra óptica é a ESNLCQ [6], onde n_0 é constituído por uma parte real e outra parte imaginária, que às vezes são designadas como termo de potencial e termo de ganho e/ou perda (amplificação e/ou absorção),

respectivamente. Quando a fibra óptica é desenhada adequadamente, n_0 pode depender da direção longitudinal e transversal da fibra.

Enquanto que em um BEC é possível modular a magnitude e o sinal do comprimento de espalhamento da interação de dois bósons (não linearidade cúbica), a_s , através da ressonância de Feshbach num campo magnético externo [22] ou numa luz laser [23]. Por meio deste método, e quando a intensidade média da interação de dois corpos (não linearidade cúbica) aproxima-se a zero, pode-se aproximar ao limite de Efimov [24], dominado pelas interações de três bósons (não linearidade quártica).

Atualmente, existe uma grande variedade de métodos poderosos para a obtenção de soluções analíticas exatas, incluindo as ondas solitárias e os sólitons, da ESNL em (1+1) dimensões do espaço-tempo ((1+1)D), tais como o método de espalhamento inverso [25], o método de Hirota [26], e a transformação de similaridade, para nomear alguns. Este último método foi aplicado pela primeira vez por Serkin *et al.* [16] e [27] para resolver a ESNLC com coeficientes modulados e a ESNLCQ com coeficientes constantes, respectivamente. No entanto, a pesquisa e a construção de novas soluções analíticas exatas da ESNL, principalmente os sólitons, continua sendo uma área importante e essencial da física e matemática contemporâneas. As soluções analíticas exatas da ESNL nos dão uma melhor compreensão dos fenômenos físicos acima expostos, especialmente quando o modelo teórico leva em conta as características principais do sistema real numa análise experimental.

Particularmente, os sólitons brilhantes e escuros (bright and dark solitons) têm sido observados em ambos os fenômenos físicos não lineares acima mencionados. A investigação de sólitons brilhantes e escuros é útil para entender as propriedades da propagação de pulsos de luz e dos BECs. Os sólitons brilhantes são caracterizados por um máximo localizado (no espaço) no perfil de densidade, com uma fase constante em toda a região do máximo localizado. Nas experiências com BECs de átomos de ^7Li [28] ou de ^{85}Rb [29], este tipo de sóliton é formado utilizando a ressonância Feshbach para alterar o sinal, de positivo para negativo, do comprimento de espalhamento. Por outro lado, sólitons escuros podem também ser considerados como paredes de domínio movendo-se, as quais separam as regiões de um condensado com diferentes valores do parâmetro de ordem. Um sóliton escuro é uma imersão localizada (no espaço) no perfil de densidade caracterizada por uma variação repentina na fase do campo, e pode ser gerado por meio de técnicas de impressão de fase (*phase-engineering*) [30, 31]. Assim, há muitas possibilidades para manipular estes sólitons, justificando fortemente a busca de novas soluções analíticas.

Além dos sólitons brilhantes e escuros, há também vários sólitons com vários componentes chamados sólitons vetoriais, que surgem como soluções de sistemas de ESNLs acoplados, que são usados para descrever a interação entre os componentes. Por exemplo, no contexto de fibras ópticas, dois componentes vetoriais correspondem aos dois eixos ortogonais de polarização, com duas frequências diferentes, de um pulso de luz quando se propaga numa fibra óptica. No âmbito de gases atômicos frios, dois componentes vetoriais

são as funções de onda macroscópicas dos átomos de um BEC com dois estados diferentes, cuja dinâmica é regida por um sistema de duas equações de Gross-Pitaevskii [15] ou duas ESNL acopladas.

Recentemente tem havido um crescente interesse em estudar sistemas físicos lineares e não lineares com potenciais não-hermitianos exibindo simultaneamente simetria de paridade e simetria de reversão temporal (simetria \mathcal{PT}). Esta classe de sistemas físicos foi introduzida por Bender e Boettcher em [32]. As definições de potenciais com simetria \mathcal{PT} e suas propriedades têm sido discutidas nos últimos anos [32]-[36]. Sistemas físicos exibindo simetria \mathcal{PT} motivou discussões em várias frentes da Física. Em particular, na óptica não linear tem sido sugerido a possibilidade de realizar estruturas que apresentam simetria \mathcal{PT} [10, 37, 38]. Isto pode ser conseguido através de uma distribuição adequada das regiões de ganho ou perda no meio óptico [37]. Além disso, BECs confinados em potenciais com simetria \mathcal{PT} , tanto em cenários realistas, bem como em modelos teóricos foram recentemente estudados [13, 39].

Neste contexto, o presente trabalho trata a equação de Schrödinger não linear com coeficientes modulados, focalizando a busca de novas soluções analíticas exatas, sólitons brilhantes e escuros, que possam esclarecer as diversas dinâmicas que surgem quando um pulso de luz propaga-se através de uma fibra óptica ou quando evolui a densidade de partículas em um BEC.

Para resolver a ESNL com coeficientes modulados estendemos o método de transformações canônicas de ponto, que foi utilizado com sucesso para a resolver a equação de Schrödinger linear. Verificamos que este método explica a origem de *ansatz* envolvidos no método da transformação de similaridade, como será explicado em detalhe no presente trabalho.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos um breve resumo da teoria do sóliton na ESNL. Além disso, mostramos as diferentes generalizações da ESNL que surgem no estudo da propagação de um pulso ultracurto através de uma fibra óptica ou no estudo da dinâmica de um BEC. Também, os sólitons ópticos e as ondas de matéria solitônicas são explicados brevemente.

No Capítulo 3, estendemos o método de transformações canônicas de ponto para resolver a ESNLCQ com coeficientes modulados. Em seguida, apresentamos novas soluções analíticas solitônicas, cujas amplitudes e larguras podem ser moduladas de maneira controlada por meio dos parâmetros do modelo. Mostramos também algumas generalizações que foram percebidas e deduzidas a partir da utilização do método de transformações canônicas de ponto.

No Capítulo 4, usamos o método de transformações canônicas de ponto para resolver alguns sistemas de duas ESNLCQ acopladas com coeficientes modulados. Novas soluções analíticas solitônicas são apresentadas, com as características que as suas amplitudes e larguras podem ser manipuladas por meio de um parâmetro externo ao modelo proposto.

No Capítulo 5, resolvemos uma ESNLCQ que apresenta simetria \mathcal{PT} , pelo método de transformações canônicas de ponto. Apresentamos algumas generalizações de dois modelos bastante utilizados em sistemas com simetria \mathcal{PT} . Além disso, mostramos novas soluções analíticas solitônicas, as quais apresentam amplitudes e larguras moduladas. Estudamos também a estabilidade das soluções analíticas solitônicas encontradas.

No capítulo 6 apresentamos as conclusões e comentários finais do trabalho.

No apêndice A apresentamos uma dedução detalhada da equação de movimento, que descreve a dinâmica da propagação de um pulso de luz através de uma fibra óptica, a partir das equações de Maxwell.

No apêndice B mostramos alguns detalhes do método numérico usado em nossas simulações.

Capítulo 2

O contexto físico da equação de Schrödinger não linear

Neste capítulo, apresentamos um breve resumo de fenômenos físicos não lineares os quais podem ser descritos pela equação ESNL e suas generalizações. Damos ênfase especial sobre o fenômeno da propagação de pulsos de luz através de uma fibra óptica e na dinâmica de um BEC. Esses fenômenos encontram aplicações potenciais em diferentes campos da ciência e da tecnologia [1, 2].

Na primeira parte abordamos as principais características da ESNL. Ato contínuo, discutiremos sobre as diferentes equações que modelam a dinâmica de propagação de pulsos de luz através de um meio óptico. Finalmente, expomos sobre a equação de Gross-Pitaevskii, a qual modela a dinâmica de um BEC na aproximação de campo médio.

2.1 A equação de Schrödinger não linear

Nós usamos as referências [40, 41], para fazer este breve resumo da teoria da ESNL.

A ESNL, juntamente com as suas variantes são algumas das equações diferenciais parciais não lineares mais importantes da Física Matemática. O nome ESNL origina-se de uma analogia formal com a equação de Schrödinger da mecânica quântica. Neste contexto, um potencial não linear (que é não local na aproximação de Hartree [42]) surge na descrição de campo médio de partículas que interagem. A ESNL descreve a evolução de diversos fenômenos físicos não lineares, tais como, a propagação de pulsos em fibras ópticas, a propagação de pulsos em cristais fotônicos, as ondas de Langmuir em plasmas, a dinâmica de um BEC, por exemplo.

A ESNL é uma equação diferencial parcial não linear, da forma

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\sigma}{2}\nabla^2\psi + g|\psi|^2\psi = 0, \quad (2.1)$$

onde a função ψ depende das coordenadas espaciais x , y , z e da coordenada temporal t ,

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, g e σ são constantes reais. O estudo dessa ESNL contribuiu para o desenvolvimento de conceitos matemáticos tais como singularidades em uma equação diferencial parcial não linear [40] e o conceito de sóliton.

O conceito de sóliton foi introduzido pela primeira vez por Zabusky e Kruskal [43]. O sóliton é uma solução de uma equação diferencial não linear (onda solitária) que não se dispersa e preserva sua identidade durante a propagação e mesmo depois de uma colisão. A teoria de sólitons na ESNL foi desenvolvida pela primeira vez por Zakharov e Shabat [25], para o caso da propagação de um feixe de luz estacionário num meio óptico com índice de refração não linear.

2.1.1 Sólitons na equação de Schrödinger não linear

A ESNL em (1+1) dimensões do espaço-tempo pode ser escrita na forma

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g |\psi|^2 \psi = 0. \quad (2.2)$$

Ao estudar a propagação de um pulso de luz através de um meio óptico, onde t é a direção de propagação do pulso e x é a coordenada temporal, Zakharov and Shabat [25, 44] mostraram que ela é uma equação diferencial parcial não linear completamente integrável.

Sempre que, $\sigma = -2$, $g > 0$ e para as condições de contorno $|\psi| \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, Zakharov e Shabat [25] empregaram o método de espalhamento inverso e obtiveram uma solução analítica exata estável do tipo sóliton, dada pela expressão

$$\psi(x, t) = \psi_0 \operatorname{sech} \left[A(x - x_0 - \sigma \frac{v}{2} t) \right] \exp \left[i \left(vx/2 + \sigma (v^2 - 4A^2) t/8 + \phi_0 \right) \right], \quad (2.3)$$

na qual $\psi_0 = \sqrt{-\sigma/g}A$ é a amplitude do sóliton, x_0 e ϕ_0 são constantes reais relacionadas com a invariância da ESNL ao deslocamento temporal e da fase, respectivamente, e v é a velocidade constante do sóliton, associada à invariância de Galileu. Quando $v = 0$, este sóliton tem a forma de uma solução estacionária

$$\psi_1(x, t) = \psi_0 \operatorname{sech} [A(x - x_0)] \exp [i(-\sigma A^2 t/2 + \phi_0)]. \quad (2.4)$$

Em 1973 Akira Hasegawa e Frederick Tappert mostraram [45], analiticamente e numericamente, a possibilidade de transmissão de pulsos ópticos sem distorção através de uma fibra óptica com $\sigma < 0$ (dispersão anômala) e $g > 0$. Os autores argumentaram que podem ser transmitidos sem distorção apenas sólitons brilhantes Eq. (2.3). O sóliton foi chamado de brilhante porque a sua intensidade exibe um máximo localizado (no espaço) num ambiente uniforme. Na Figura 2.1(a) é mostrado o perfil do módulo do sóliton brilhante estacionário, Eq. (2.4).

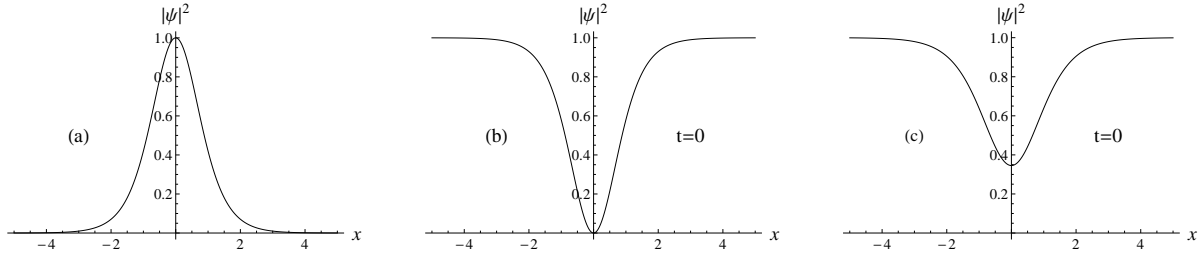


Figura 2.1: Perfis das intensidades dos sólitons para $x_0 = 0$, $\phi_0 = 0$, $A = 1$ e $g = 2$. (a) Sóliton brilhante estacionário, Eq.(2.4). Sóliton, Eq.(2.5), em $t = 0$; (b) Escuro, $\phi = 0$. (c) Cinza, $\phi = \pi/5$.

Para o caso, $\sigma = -2$, $g < 0$ e para as condições de contorno $|\psi| \rightarrow \psi_0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, Zakharov e Shabat [44] empregaram, novamente, o método de espalhamento inverso e obtiveram uma solução analítica exata estável do tipo sóliton, da forma

$$\psi(x, t) = \psi_0 (\cos \phi \tanh \Theta + i \sin \phi) \exp [i\Omega], \quad (2.5)$$

na qual $\psi_0 = \sqrt{\sigma/g}A$ é a amplitude do sóliton e ϕ é o ângulo eficaz correspondente ao deslocamento da fase total através do sóliton. Além disso,

$$\Theta = A \cos \phi (x - x_0) + vt,$$

$$\Omega = \frac{v - A^2\sigma \cos \phi \sin \phi}{A\sigma \cos \phi} (x - x_0) + \left(A^2\sigma + \frac{(v - A^2\sigma \cos \phi \sin \phi)^2}{2A^2\sigma \cos^2 \phi} \right) t - \phi_0.$$

Se $\phi = 0$, o sóliton adota a forma

$$\psi_2(x, t) = \psi_0 \tanh [A(x - x_0) + vt] \exp [i\Omega_0], \quad (2.6)$$

com $\Omega_0 = \frac{v}{A\sigma} (x - x_0) + \left(A^2\sigma + \frac{v^2}{2A^2\sigma} \right) t - \phi_0$.

Em 1973 Hasegawa e Tappert mostraram [46], analiticamente e numericamente, a possibilidade de transmissão de pulsos ópticos sem distorção através de uma fibra óptica com $\sigma > 0$ (dispersão normal) e $g > 0$. Os autores inferiram que somente é possível transmitir sólitons escuros (solução tipo tanh, Eq. (2.6)). A intensidade de um sóliton escuro exibe uma imersão localizada (no espaço) em um ambiente uniforme luminoso. Além disso, Tomlinson *et al.* [47] chamaram pela primeira vez às soluções analíticas com $\phi \neq 0$ de sólitons cinzas (*gray solitons*), onde ϕ é o parâmetro de escuridão.

O perfil do módulo do sóliton, Eq. (2.5), para diferentes valores de ϕ e em $t = 0$, é exibido na Figura 2.1(b)-(c). A partir desta figura, vê-se que a amplitude do sóliton, Eq. (2.5), depende do deslocamento da fase total através do sóliton, ϕ . Quando $\phi = 0$, Figura 2.1(b), representa o sóliton escuro, e para $\phi \neq 0$, Figura 2.1(c), tem-se o sóliton cinza.

Para concluir esta subseção, queremos mencionar que as soluções do tipo sólitons,

Eqs. (2.3) e (2.5), são as representações mais simples de uma extensa família de soluções analíticas exatas estáveis da Eq. (2.2), chamadas multi-sólitons. Aqui termina nosso breve resumo da teoria de sólitos, para uma descrição pormenorizada de dita teoria, sugerimos ao leitor recorrer à referência [48] para maiores detalhes.

2.2 Equações de propagação de pulsos de luz em fibras ópticas

Como já foi mencionado acima, a ESNL e suas generalizações têm muitas aplicações em vários campos da física, tais como na dinâmica dos fluidos, em física de plasma, em óptica não linear, em acústica não linear, em física do estado sólido, etc.. A ESNL tem despertado grande interesse, há muito tempo, no estudo da propagação de pulsos em fibras ópticas. Mostramos em seguida algumas equações, as quais são parte da família de ESNL, usadas para estudar as propriedades da propagação de um pulso num meio óptico. Uma derivação detalhada da ESNL que descreve a propagação de um pulso de luz através de um meio óptico é mostrado no Apêndice A. Nesta seção, nós não deduziremos cada uma das equações mostradas aqui, já que isso vai além do escopo desta tese.

A ESNL com não linearidade cúbica

$$i2k \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + k^2 \frac{\delta n_{nl}}{n_0} |E|^2 E = 0, \quad (2.7)$$

foi usado pela primeira vez, por Talanov [3] e Kelley [4], para examinar as características do efeito de auto-focalização devido ao índice de refração não linear, $n = n_0 + \delta n_{nl} |E|^2$, de um feixe de luz propagando-se através de um meio óptico. Na Eq. (2.7), E é a amplitude do campo elétrico, $k = \sqrt{\epsilon_0} \omega / c$ o número de onda, ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo, c é a velocidade da luz no vácuo, n_0 é o índice de refração linear, e δn_{nl} é a contribuição não linear no índice de refração ligada à suscetibilidade χ de terceira ordem ($\chi^{(3)}$) do meio óptico.

Quando um pulso de luz intenso propaga-se numa fibra óptica, a polarização no interior do meio é mais intensa. Portanto, para uma análise mais precisa das características da propagação de pulsos de luz intenso, Pushkarov *et al.* [6] sugeriram a necessidade de se ter em conta os efeitos não lineares de ordem superior do que a terceira ordem na suscetibilidade χ da fibra óptica. Desta maneira, a expansão, em potências de $|E|^2$, resultante do índice de refração é da forma: $n = n_0 + n_2 |E|^2 + n_4 |E|^4 + \dots$, onde n_2 (não linearidade Kerr) e n_4 (não linearidade não-Kerr) estão vinculadas às suscetibilidades de terceira ($\chi^{(3)}$) e quinta ($\chi^{(5)}$) ordem, respectivamente. Se a expansão é truncada em termos da segunda ordem em relação a $|E|^2$, a equação diferencial correspondente que rege a evolução não linear do pulso de luz intenso na fibra óptica é a ESNL com não

linearidades cúbica e quántica (ESNLCQ), dada pela expressão

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial A}{\partial t} \right) - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \kappa^2 |A|^2 A - \gamma |A|^4 A = 0, \quad (2.8)$$

onde z é coordenada longitudinal de propagação, t é a coordenada temporal. $A(z, t)$ está relacionada à amplitude do campo elétrico E pela igualdade $E(r, z, t) = A(z, t) F(r)$, onde r é a coordenada cilíndrica radial e $F(r)$ é a distribuição radial do modo da fibra óptica. $v_g^{-1} = (\partial\beta/\partial\omega)_{\omega=\omega_0}$ é o valor recíproco da velocidade de grupo. $\beta_2 = (\partial^2\beta/\partial\omega^2)_{\omega=\omega_0}$, $\kappa = k_0 n_2 \alpha_1$, $\gamma = -k_0 n_4 \alpha_2 > 0$, $k_0 = \omega_0/c$, ω_0 é a frequência da onda e β é o número de onda.

Y. Kodama e A. Hasegawa [9], derivaram a equação de onda não linear para um envoltório de uma onda eletromagnética num guia de onda dielétrico, incluindo os efeitos de inhomogeneidade transversal, dispersão não linear e dissipação consistente a ordens superiores, dada pela expressão

$$i \left(\frac{\partial q_1}{\partial z} + k_1' \frac{\partial q_1}{\partial t} \right) - \frac{k_1''}{2} \frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} - \frac{i}{6} k_1''' \frac{\partial^3 q_1}{\partial t^3} + \\ + i k_i q_1 + \frac{\partial k_1}{\partial E_0^2} E_0^2 q_1 + i a_1 \frac{\partial}{\partial t} (q_1 E_0^2) + i a_2 q_1 \frac{\partial E_0^2}{\partial t} = 0, \quad (2.9)$$

onde q_1 é normalizada a E_0 tal que $E_0^2 = |q_1|^2$. Esta última equação é chamada de ESNL de ordem superior.

Recentemente, Musslimani *et al.* [10] investigaram os efeitos da não linearidade na dinâmica de um feixe de luz propagando-se através de um guia de onda focalizador que apresenta propriedades de simetria \mathcal{PT} . Dita simetria é obtida devido a uma adequada distribuição das regiões de ganhos e perdas, na construção do guia de onda. Este estudo foi realizado considerando-se uma ESNL com não linearidade cúbica e potencial complexo o qual apresenta simetria \mathcal{PT} :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + [V(x) + iW(x)] \psi + |\psi|^2 \psi = 0, \quad (2.10)$$

onde ψ é proporcional ao campo elétrico e o potencial complexo \mathcal{PT} simétrico satisfaz as relações: $V(-x) = V(x)$ e $W(-x) = -W(x)$.

Manakov estudou em [14], pela primeira vez, os efeitos devido à arbitrariedade da polarização das ondas propagando-se num meio óptico. Nesse artigo, o autor generalizou a Eq. (2.7), considerando uma onda polarizada através de um meio óptico com dois eixos ortogonais de polarização e deduziu que a evolução de tais ondas polarizadas é descrita

pelas ESNLs acopladas

$$\begin{aligned} i\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} + \kappa (|E_1|^2 + |E_2|^2) E_1 &= 0, \\ i\frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} + \kappa (|E_1|^2 + |E_2|^2) E_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Desta forma, há muitas situações no estudo da propagação de um pulso de luz através de um meio óptico, onde ESNL e suas generalizações são relevantes. Embora as equações de propagação, Eqs. (2.7)-(2.11), tenham sido bem sucedidas para explicar um grande número de efeitos não lineares, elas não incluem todos os efeitos não lineares, tais como, espalhamento inelástico, dispersão de terceira ordem, entre outros. A descrição desses efeitos não lineares ultrapassa o âmbito desta tese. Nas referências [1] e [49] o leitor pode encontrar uma descrição detalhada de outros efeitos não lineares.

Atualmente, devido aos avanços científicos e tecnológicos, podemos desenhar adequadamente a fibra óptica e adaptá-la as nossas necessidades. Deste modo, pode-se melhorar a capacidade para modular adequadamente a intensidade de cada um dos coeficientes da equação diferencial que modela a propagação dos pulsos pela fibra, isto é, tornando-os dependentes da direção longitudinal e transversal da fibra. Conseqüentemente, a equação diferencial que descreve a propagação de pulsos de luz num fibra óptica é a ESNL com coeficientes modulados [16, 50].

2.2.1 Sólitons ópticos

Para esta breve explicação das principais propriedades dos sólitons ópticos bem como também alguns definições normalmente usadas na teoria dos sólitons, nós usamos a referência [51].

Um pulso de luz (pulso eletromagnético), em geral, se dissemina durante sua propagação em meios ópticos que manifestam unicamente efeitos lineares. Pelo contrário, se o pulso de luz propaga-se através de um meio óptico, tal como uma fibra óptica, que manifesta efeitos lineares e não lineares, pode acontecer que o pulso de luz se propague e interaja dentro da fibra sem alterar sua forma. Isso pode acontecer devido a um balançamento entre os efeitos lineares e não lineares na fibra óptica. Neste último caso, nós chamamos o pulso eletromagnético de sóliton óptico.

O balanço entre os efeitos lineares e não lineares pode ocorrer de duas formas:

1. Quando o pulso eletromagnético (*short temporal pulse*), quase monocromático centrado na frequência ω_0 , propaga-se num meio espacialmente confinante, tal como uma fibra óptica. Neste caso, o pulso de luz se dissemina porque as diferentes frequências do pulso, em torno de ω_0 , têm diferentes velocidades e durante a propagação as fases relativas entre todas as frequências são diferente de zero. Este

processo é chamado de dispersão cromática, e é um pronunciamento dos efeitos lineares numa fibra, as quais estão associadas ao parâmetro de dispersão da velocidade do grupo $(d^2\beta/d\omega^2)_{\omega=\omega_0}$ (Eq.(A.52)).

Por outro lado, além da dispersão cromática, o pulso modifica as propriedades da fibra (polarização elétrica) e revela os efeitos não lineares. Estes efeitos não lineares estão relacionados à auto-modulação da fase (*self-phase modulation* SPM). A SPM refere-se à mudança auto-induzida da fase experimentada por um campo óptico durante sua propagação, cujo coeficiente é $n_{Kerr}(\omega_0)$ (Eq.(A.52)). Sempre que a SPM balança a dispersão cromática, ou seja quando a auto-modulação das fases elimina a diferença entre as fases relativas das frequências, o pulso eletromagnético se propaga sem alterar sua forma. Diante disso, o pulso eletromagnético é chamado de sóliton temporal.

2. A propagação de um feixe de luz de seção transversal espacial finita, quase monocromático e centrado na frequência ω_0 , em uma direção arbitrária z de um meio óptico pode ser visto como uma superposição de ondas planas, todas as ondas planas possuem um mesmo número de onda mas com diferentes ângulos α com respeito a z . Assim cada onda plana se propaga com uma velocidade de fase diferente com respeito a z . Conseqüentemente, durante a propagação as fases relativas entre todas as ondas planas são diferentes de zero. Portanto, o feixe de luz se dissemina, isto é, a seção transversal espacial do pulso aumenta rapidamente. Este processo de desvio das ondas planas em ângulos diferentes, é um efeito linear no meio óptico chamado difração.

Conjuntamente ao processo de difração, o feixe de luz modifica as propriedades do meio (polarização elétrica) e revela os efeitos não lineares pela alteração local do índice de refração, através do qual se pode gerar um meio óptico focalizador. Se o índice de refração alterado localmente é mais intenso no centro da seção transversal do pulso do que na borda da seção transversal, o meio óptico se assemelha a uma lente óptica que focaliza o pulso no centro da seção transversal. Este efeito não linear é chamado de auto-focalização. Se o efeito de auto-focalização balança a difração, o pulso torna-se auto-armadilhado com um diâmetro muito estreito, e é chamado de sóliton espacial.

O primeiro experimento, realizado numa célula cheia com vapor de sódio, em conseguir produzir sólitons espaciais brilhantes, foi relatado em 1974 por Bjorkholm e Ashkin [52]. Em 1980 os sólitons ópticos brilhantes foram observados pela primeira vez por Mollenauer, Stolen and Gordon [53]. O sóliton temporal escuro foi encontrado experimentalmente por Emplit *et al.* em 1987 [54]. Com respeito aos sólitons espaciais escuros, D. R. Andersen *et al.* [55], relataram sobre a medida experimental direta das velocidades de propagação de tais sólitons em 1990.

2.3 Equações da dinâmica de BECs

Nesta seção, nós seguimos a referência [2]. Como na seção anterior, nós não deduziremos cada uma das equações mostradas aqui, já que isso vai além do objetivo desta tese.

Um BEC é uma fase da matéria formada por bósons (partículas que possuem spin inteiro) a uma temperatura muito próxima do zero absoluto. Os bósons, quando condicionados a uma temperatura próxima do zero absoluto, atingem o mais baixo estado quântico, e nessas condições os efeitos quânticos podem ser visualizados em escala macroscópica. Desta maneira, chama-se de BEC ao agrupamento de bósons no estado quântico mais baixo, quando a temperatura do sistema é próxima do zero absoluto.

A idéia básica do BEC remonta a 1925, quando A. Einstein, com base em um documento encaminhado pelo físico indiano S. N. Bose (1924), dedicado à descrição estatística dos quanta de luz, previu a ocorrência de uma transição de fase em um gás de átomos não interagentes. Esta transição de fase está associada com a condensação de átomos no estado de menor energia e é consequência de efeitos estatísticos quânticos.

Em 1961, L. Pitaevskii [56] e, independentemente, E. Gross em 1963 [57], introduziram um parâmetro de ordem para o BEC. O conceito do parâmetro de ordem na teoria de transições de fase foi introduzido por L. Landau [58], o parâmetro de ordem é um parâmetro não nulo que está presente em uma fase do sistema mas desaparece na outra fase do sistema. No caso de um BEC, o parâmetro de ordem é o operador campo clássico $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$ vinculado ao número de bósons (N_0) no estado de menor energia do sistema pela expressão

$$\int |\Psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = N_0.$$

Além disso, Pitaevskii e Gross propuseram descrever a evolução desse parâmetro de ordem pela equação que hoje leva seus nomes, a equação de Gross-Pitaevskii (EGP)

$$i\frac{\partial\Psi_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_0 + V_{ext}\Psi_0 + g|\Psi_0|^2\Psi_0, \quad (2.12)$$

na qual $\Psi_0 = \Psi_0(\mathbf{r}, t)$ é o parâmetro de ordem macroscópico do BEC, $V_{ext} = V_{ext}(\mathbf{r}, t)$ é o potencial de armadilhamento, e $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ que é a constante de acoplamento da interação média entre dois átomos do condensado, a qual origina o termo não linear (a_s é o comprimento de espalhamento bóson-bóson). Quando $a_s > 0$ a interação entre as partículas do condensado é repulsivo e quando $a_s < 0$ tal interação é atrativa. Como pode ser visto, a EGP é semelhante à ESNL, Eq. (2.1).

Em 1995, Anderson *et al.* [59] produziram experimentalmente, pela primeira vez, um BEC a partir de um vapor de átomos de rubídio 87. Desde então, tem havido atividades teóricas e experimentais intensas na compreensão das propriedades das dinâmicas dos gases de Bose, em diferentes contextos.

A redução da EGP em (3+1) dimensões do espaço-tempo, Eq. (2.12), em uma

equação diferencial em (1+1) dimensões do espaço-tempo, foi feita por Salasnich *et al.* [60]. Os autores consideraram o BEC na forma de um charuto, o qual é obtido pelo potencial de armadilhamento com simetria cilíndrica, que confina fortemente duas direções espaciais (coordenadas transversales) e deixa livre a terceira direção espacial (coordenada axial). Usando uma abordagem variacional, obtém-se uma ESNL efetiva dependente do tempo, que descreve a dinâmica axial de um BEC confinado num potencial externo com simetria cilíndrica.

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + \frac{gN}{2\pi a_{\perp}^2} |f|^2 \right) f, \quad (2.13)$$

onde $\Psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \frac{\exp[-(x^2+y^2)/2\sigma^2(z,t)]}{\sqrt{\pi}\sigma(z,t)} f(x, t)$, $V_{ext}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2) + V(z)$, ω_{\perp} é a frequência de oscilação na direção transversal.

Busch e Anglin [15], estudaram o comportamento de um BEC, cujos átomos constituintes podem ser encontrados em dois estados internos diferentes $|D\rangle$ e $|B\rangle$. A dinâmica deste BEC é modelada pelas ESNLs acopladas

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi_D}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_D}{\partial x^2} + (V_D + |\psi_D|^2 + g_D|\psi_B|^2 - \mu)\psi_D, \\ i\frac{\partial\psi_B}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial x^2} + (V_B + |\psi_B|^2 + g_B|\psi_D|^2 - \mu - \Delta)\psi_B, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde ψ_D e ψ_B são os parâmetros de ordem dos átomos em cada estado interno, e $\mu_D = \mu$ e $\mu_B = \mu + \Delta$ são os potenciais químicos.

No contexto dos sistemas que apresentam simetria \mathcal{PT} , Klaiman *et al.* sugeriram em [13] um cenário quântico, em que tal simetria \mathcal{PT} pode ser construída. O referido cenário quântico consiste de um BEC confinado no interior de um potencial de poço duplo, onde um dos poços é usado como uma fonte, através da qual as partículas são injetadas no interior do BEC, enquanto o outro poço é usado como uma foz, desde onde as partículas são removidas do BEC.

Cartarius *et al.* [39], a partir da sugestão de Klaiman, desenvolveram uma investigação teórica sobre a influência dos efeitos da não linearidade na simetria \mathcal{PT} de um BEC aprisionado dentro de um potencial de poço duplo. Para estudar estes efeitos, os autores consideraram um modelo unidimensional simples em que o condensado é confinado num potencial com simetria \mathcal{PT} composto de duas funções delta de Dirac. Tal modelo é descrito pela ESNL com não linearidade cúbica e potencial complexo a qual apresenta simetria \mathcal{PT}

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - [(1+i\gamma)\delta(x+b) + (1-i\gamma)\delta(x-b)]\Psi - g|\Psi|^2\Psi = -\kappa^2\Psi, \quad (2.15)$$

onde $\Psi = \Psi(x)$ é o parâmetro de ordem, $\kappa \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\kappa) > 0$, e γ é real.

Akhmediev *et al.* investigaram pela primeira vez [7], os efeitos sobre o comporta-

mento dinâmico de um BEC aprisionado em um potencial parabólico, ao incluir, dentro da EGP, o termo associado com a interação de três bósons,

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V_{ext}\Psi + \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}|\Psi|^2\Psi + \beta|\Psi|^4\Psi. \quad (2.16)$$

Como pode ser visto a última equação é uma ESNL com não linearidades cúbica e quártica (ESNLCQ).

Estas equações diferenciais, mencionadas acima, e outras ESNL e suas generalizações são utilizados para investigar as diferentes dinâmicas dos BEC.

É importante ressaltar que, a intensidade e o sinal do comprimento de espalhamento a_s pode ser variado mediante a aplicação adequada de um campo magnético externo [61], uma luz laser [62], ou um campo de radio frequências [63]. Esta variação é bastante pronunciada na vizinhança da ressonância de Feshbach. A ressonância de Feshbach em um BEC ocorre quando a energia contínua de colisão entre dois bósons é igual ou próxima da energia discreta de um estado ligado de uma molécula composta pelos mesmos dois bósons.

Em 1998, Inouye *et al.* [64], variando a intensidade de um campo magnético externo perto da ressonância de Feshbach, lograram modular o comprimento de espalhamento a_s dos átomos de sódio de um BEC aprisionado numa armadilha óptica dipolar formada por um feixe de laser infravermelho, mudando sua intensidade e seu sinal de um modo contínuo.

Isso abriu o caminho para estudos de novos efeitos dinâmicos como novas formas de oscilações coletivas ou o colapso repentino de um condensado quando o valor de a_s é alterado de positivo para negativo. Também foi possível estudar os estados quânticos de Efimov [24]. Quando o valor do comprimento de espalhamento a_s é próximo de zero, pode-se criar um BEC em que a interação entre dois bósons (não linearidade cúbica) é próximo de zero, e dessa maneira aproximar-se ao limite de Efimov, onde a interação de três bósons (não linearidade quártica) é predominante. Neste contexto, em 2006 Kraemer *et al.* [8], reportaram a observação de estados quânticos de Efimov num gás ultrafrio de átomos de césio.

Conseqüentemente, a variação do comprimento de espalhamento a_s , como mencionado acima, tornou possível o estudo de novas dinâmicas no BEC, as quais podem ser modeladas pela ESNL com coeficientes modulados, ou seja, coeficientes dependentes das coordenadas espaciais e do tempo, [17, 18, 20, 21].

2.3.1 Ondas de matéria solitônicas

Em 1924, em sua tese de doutorado, Louis de Broglie postulou a natureza ondulatória dos elétrons e sugeriu que toda a matéria apresenta características tanto ondulatórias como corpusculares comportando-se de um ou outro modo dependendo do experimento

específico. Em 1927, Clinton Davisson e Lester Germer demonstram experimentalmente a difração de elétrons através de cristais.

No contexto de um gas de Bose, os bósons alcançam seu comportamento ondulatório (onda de matéria) quando a temperatura do gas é próxima do zero absoluto, formando um BEC. Como já foi mencionado acima, a dinâmica de um BEC pode ser descrita pela ESNL, conhecida como EGP. Vimos também que os sólitons são soluções das equações diferenciais não lineares, como a EGP. Assim, pode-se obter soluções tipo sólitons que resolvem da EGP, chamadas de ondas de matéria solitônicas.

As ondas de matéria solitônicas, que descrevem dinâmicas de BECs, estão intimamente relacionados com sólitons ópticos em óptica não linear, as quais descrevem a propagação de pulsos de luz em fibras ópticas.

Reinhardt *et al.* [65], previram a existência de sólitons escuros para um BEC quando a interação entre dois bósons é repulsiva, ou seja o comprimento de espalhamento é positivo, $a_s > 0$. Em 1999, Burger *et al.* [30] criaram experimentalmente, usando o método de impressão de fase, sólitons escuros em um BEC de átomos de rubídio 87 (conglomerado em forma de charuto). Independentemente, Denschlag *et al.* [31] criaram sólitons escuros em um BEC de átomos de sódio.

Por outro lado, Ruprecht *et al.* [66], sugeriram que sólitons brilhantes poderiam ser encontrados em um BEC com interação atrativa entre dois bósons, ou seja quando o comprimento de espalhamento é negativo, $a_s < 0$. Em 2002, o grupo da *Rice University* em Houston liderado por R. G. Hulet *et al.* [28] e, independentemente, o grupo da *Ecole Normale Supérieure* em Paris liderado por C. Salomon *et al.* em [67] reportaram a formação de sólitons brilhantes em BEC formado por átomos de Lítio 7, aprisionados numa armadilha óptica quase unidimensional. Ambos grupos modularam continuamente a intensidade de interação entre dois bósons passando de uma interação repulsiva para uma interação atrativa por meio de uma aplicação adequada de um campo magnético. Deste modo, a interação atrativa, a qual está vinculada ao coeficiente do termo não linear da equação Gross-Pitaevskii, contrabalançou a dispersão da onda de matéria.

2.4 Modelos da equação de Schrödinger não linear com coeficientes modulados

Até agora, relatamos como a família de ESNL é empregada para descrever teoricamente diferentes dinâmicas da propagação de pulsos de luz através de uma fibra óptica e a evolução de um BEC, em diferentes contextos. Além disso, nós temos a capacidade de manipular o valor da intensidade da interação entre o pulso de luz e a fibra óptica, fazendo um desenho adequado das fibras ópticas. Enquanto que em um BEC podemos modular a intensidade da interação entre dois bósons, o comprimento de espalhamento a_s . Tudo isso

envolve descrever os fenômenos físicos mencionados acima, através da família da ESNL com coeficientes dependentes das coordenadas espaciais e de tempo.

Tal como já foi mencionado há soluções tipo sólitons (brilantes e escuros) das equações diferenciais, as quais descrevem o fenômeno físico em estudo. Estes sólitons são muito importantes porque eles aparecem em diferentes áreas da ciência e tecnologia.

Vale ressaltar que, no caso em que um fenômeno físico seja descrito pela ESNL com coeficientes constantes em cada um de seus termos constituintes, não há efeitos significativos sobre a manipulação da forma global (envoltório) de suas soluções. Enquanto que se um fenômeno físico é descrito pela ESNL com coeficientes modulados, a modulação dos coeficientes nos permite controlar eficientemente a largura, a amplitude e a posição do centro de massa, mantendo invariável ao mesmo tempo o envoltório das soluções.

Na maior parte da literatura existente sobre os métodos para resolver a família de ESNL com coeficientes modulados, é amplamente usado o método de transformação de similaridade, o qual foi aplicado pela primeira vez para resolver a ESNLC com coeficientes modulados em [16], e depois em [17, 18, 21]. O método de transformação de similaridade mapeia a ESNL com coeficientes modulados em uma ESNL com coeficientes constantes cujas soluções são bastante conhecidas. Analisando o método de transformação de similaridade aplicado a um problema com potencial parabólico dependente do tempo, nós percebemos que este método é semelhante ao método de transformações canônicas de ponto, o qual foi utilizado com sucesso para resolver a equação de Schrödinger linear com potencial parabólico dependente do tempo [71]. Assim, nós observamos que o método de transformações canônicas de ponto explicam a origem dos *ansatz* envolvidos no método da transformação de similaridade.

Neste trabalho, nós ampliamos a utilização do método de transformações canônicas de ponto, aplicando-o à ESNL com coeficientes modulados. Além disso, estudamos o alcance de tal ampliação em diferentes equações diferenciais, Eqs. (2.17), (2.18), e (2.19), que pertencem à família das ESNLs, as quais descrevem as diferentes dinâmicas de fenômenos físicos mencionados acima.

Neste contexto, em primeiro lugar consideramos e resolvemos a ESNL com não linearidades cúbica e quártica, e coeficientes modulados em (1+1) dimensões do espaço-tempo, da forma

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + v(x, t) \Psi + g_3(x, t) |\Psi|^2 \Psi + g_5(x, t) |\Psi|^4 \Psi, \quad (2.17)$$

com $\Psi = \Psi(x, t)$ uma função de onda escalar complexa.

Em seguida, consideramos e resolvemos duas ESNLs acopladas com não linearidades

cúbica e quántica, e coeficientes modulados em (1+1) dimensões do espaço-tempo

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= -m_1(t) \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + v_1(x, t) \Psi_1 + \left(\sum_{k=1}^2 g_{1k}(x, t) |\Psi_k|^2 \right) \Psi_1 \\
&+ \left(\sum_{k=1}^2 f_{1k}(x, t) |\Psi_k|^4 \right) \Psi_1 + h_{12}(x, t) |\Psi_1|^2 |\Psi_2|^2 \Psi_1 + i \Gamma_1(t) \Psi_1 , \\
i \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} &= -m_2(t) \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + v_2(x, t) \Psi_2 + \left(\sum_{k=1}^2 g_{2k}(x, t) |\Psi_k|^2 \right) \Psi_2 \\
&+ \left(\sum_{k=1}^2 f_{2k}(x, t) |\Psi_k|^4 \right) \Psi_2 + h_{21}(x, t) |\Psi_1|^2 |\Psi_2|^2 \Psi_2 + i \Gamma_2(t) \Psi_2 , \quad (2.18)
\end{aligned}$$

onde os campos escalares complexos Ψ_1 e Ψ_2 cumprem $\Psi_1 = \Psi_1(x, t)$ e $\Psi_2 = \Psi_2(x, t)$.

Finalmente, nós consideramos e resolvemos a ESNL que apresenta simetria \mathcal{PT} , com não linearidades cúbica e quántica e coeficientes modulados em duas dimensões espaciais, dada pela expressão

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial \Psi}{\partial Z} + m(X, Z) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + v(X, Z) \Psi + \\
g_3(X, Z) |\Psi|^2 \Psi + g_5(X, Z) |\Psi|^4 \Psi + i w(X, Z) \Psi = 0 , \quad (2.19)
\end{aligned}$$

onde $\Psi = \Psi(X, Z)$.

Queremos salientar que as ESNL com coeficientes modulados estudadas a partir daqui são adimensionais, ver apêndice A.

Capítulo 3

Sólitons localizados largos na equação de Schrödinger não linear com coeficientes modulados

Este capítulo tem como objetivo mostrar como utilizar o método de transformações canônicas de ponto para resolver a ESNL com coeficientes modulados. Ademais, nós apresentamos novas soluções tipo sólitons para a ESNL com coeficientes modulados. Além disso, mostramos algumas generalizações do potencial externo e das não linearidades da equação diferencial não linear, deduzida a partir do emprego do método. Os resultados aqui mostrados foram publicados na revista *Physical Review E* [68].

3.1 Transformações canônicas de ponto

A finalidade da aplicação do método de transformações canônicas de ponto é mapear a ESNL com coeficientes modulados em uma ESNL com coeficientes constantes. Para isso, partimos de uma ESNL com coeficientes modulados, depois através de transformações de coordenadas, redefinições da função de onda, e reparametrização temporal, chegamos a uma ESNL com coeficientes constantes. Esta última equação é mais manejável para ser resolvida.

Nós começamos considerando os coeficientes da Eq. (2.17) da forma

$$v(x, t) = \omega(t) x^2 + f_1(t) x + f_2(t) + \gamma^2(t) V[\gamma(t) x + \delta(t)] , \quad (3.1)$$

$$g_3(x, t) = G_3 \gamma(t) f[\gamma(t) x + \delta(t)] , \quad (3.2)$$

$$g_5(x, t) = G_5 h[\gamma(t) x + \delta(t)] , \quad (3.3)$$

onde G_3 e G_5 são parâmetros reais. As funções $\gamma(t)$ e $\delta(t)$ são funções reais. As funções $\omega(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $V[\gamma(t) x + \delta(t)]$, $f[\gamma(t) x + \delta(t)]$, e $h[\gamma(t) x + \delta(t)]$ serão encontra-

das durante o processo.

Empregando estes coeficientes, Eqs. (3.1), (3.2) e (3.3), a ESNL, Eq. (2.17) pode ser utilizada para modelar a propagação de pulsos de luz através de uma guia de onda com índice de refração variável (*graded-index waveguide*), onde t é a longitude de propagação, x é a longitude transversal, $\Psi(x, t)$ é proporcional ao campo elétrico, $v(x, t)$ esta vinculado ao índice de refração linear [69, 70], $g_3(x, t)$ e $g_5(x, t)$ são as intensidades da não linearidade Ker e não-Kerr, respectivamente. A Eq. (2.17) também pode descrever a evolução de um BEC, onde x e t são as coordenadas espacial e temporal, respectivamente, $\Psi(x, t)$ é o parâmetro de ordem macroscópico, $v(x, t)$ o potencial de armadilhamento, $g_3(x, t)$ e $g_5(x, t)$ são as intensidades de interação entre dois bósons e três bósons, respectivamente [75, 76].

Agora, vamos implementar uma primeira transformação de coordenadas e reparametrização [71]

$$x = \frac{\xi}{\bar{\gamma}(\tau)} - \frac{\bar{\delta}(\tau)}{\bar{\gamma}(\tau)} \quad , \quad t - t_0 = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\bar{\gamma}^2(\tau')} \quad , \quad (3.4)$$

com $\bar{\gamma}[\tau(t)] = \gamma(t)$ e $\bar{\delta}[\tau(t)] = \delta(t)$. Assim, podemos reescrever a Eq. (2.17) da seguinte forma

$$\begin{aligned} & i\bar{\gamma}(\bar{\gamma}_\tau \xi - \bar{\gamma}_\tau \bar{\delta} + \bar{\gamma} \bar{\delta}_\tau) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} + i\bar{\gamma}^2 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \tau} = \\ & = -\bar{\gamma}^2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \xi^2} + \bar{v}(\xi, \tau) \bar{\Psi} + G_3 \bar{\gamma} \bar{f}(\xi) |\bar{\Psi}|^2 \bar{\Psi} + G_5 \bar{h}(\xi) |\bar{\Psi}|^4 \bar{\Psi} \quad , \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $\bar{\gamma}_\tau = d\bar{\gamma}/d\tau$, $\bar{\delta}_\tau = d\bar{\delta}/d\tau$, $\bar{\Psi}(\xi, \tau) = \Psi(x(\xi, \tau), t(\tau))$ e

$$\bar{v}(\xi, \tau) = \bar{\omega}(\tau) \frac{(\xi - \bar{\delta})^2}{\bar{\gamma}^2} + \bar{f}_1(\tau) \frac{(\xi - \bar{\delta})}{\bar{\gamma}} + \bar{f}_2(\tau) + \bar{\gamma}^2(\tau) V(\xi) \quad . \quad (3.6)$$

Das Eqs. (3.5) e (3.6) pode ser visto claramente porque nós escolhemos a dependência específica das funções V , f e h com a função $\xi = \gamma(t) x + \delta(t)$.

A Eq. (3.5) ainda é uma equação diferencial não linear com coeficientes modulados, mas agora com respeito às variáveis ξ e τ . Com a finalidade de eliminar a derivada de primeira ordem da função $\bar{\Psi}$ com respeito à variável ξ na Eq. (3.5), nós redefinimos o campo escalar complexo $\bar{\Psi}(\xi, \tau)$ como

$$\bar{\Psi} = \sqrt{\bar{\gamma}(\tau)} e^{-i\bar{\alpha}(\xi, \tau)} \psi(\xi, \tau) \quad , \quad (3.7)$$

onde $\bar{\alpha}(\xi, \tau) = \frac{\bar{\gamma}_\tau}{4\bar{\gamma}} \xi^2 + \left(\bar{\delta}_\tau - \frac{\bar{\gamma}_\tau \bar{\delta}}{\bar{\gamma}} \right) \frac{\xi}{2} - \bar{a}(\tau)$. $\bar{a}(\tau)$ é uma função real arbitrária. Substituindo a Eq. (3.7) na Eq. (3.5) obtemos

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + U(\xi, \tau) \psi + G_3 f(\xi) |\psi|^2 \psi + G_5 h(\xi) |\psi|^4 \psi \quad , \quad (3.8)$$

onde

$$U(\xi, \tau) = \left(\bar{\omega}(\tau) - \frac{\bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}_{\tau\tau}}{4} \right) \frac{(\xi - \bar{\delta})^2}{\bar{\gamma}^4} + \left(\bar{f}_1(\tau) - \frac{\bar{\gamma}^3 \bar{\delta}_{\tau\tau}}{2} \right) \frac{(\xi - \bar{\delta})}{\bar{\gamma}^3} + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \left(\bar{f}_2(\tau) + \frac{\bar{\delta}_{\tau}^2 \bar{\gamma}^2}{4} + \bar{\gamma}^2 \frac{d\bar{a}}{d\tau} \right) + V(\xi) .$$

Neste ponto, queremos salientar que a redução da Eq. (3.5) para a Eq. (3.8) foi possível, não só devido à redefinição do campo escalar complexo Eq. (3.7), senão também como consequência da colocação adequada da função $\gamma(t)$ dentro das expressões de $v(x, t)$ e $g_3(x, t)$. Além disso, pode-se apreciar a contribuição da fase $\bar{\alpha}(\xi, \tau)$, Eq. (3.7), na expressão da função $U(\xi, \tau)$.

Aqui, nós escolhemos as funções reais $\bar{\gamma}(\tau)$ e $\bar{\delta}(\tau)$, de modo a satisfazer as expressões

$$\bar{\omega}(\tau) = \frac{\bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}_{\tau\tau}}{4}, \quad \bar{f}_1(\tau) = \frac{\bar{\gamma}^3 \bar{\delta}_{\tau\tau}}{2}, \quad \bar{f}_2(\tau) = -\bar{\gamma}^2 \left(\frac{\bar{\delta}_{\tau}^2}{4} + \frac{d\bar{a}}{d\tau} \right). \quad (3.9)$$

Desta maneira, podemos remover a dependência explícita a variável τ da Eq. (3.8), ou seja

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + V(\xi) \psi + G_3 f(\xi) |\psi|^2 \psi + G_5 h(\xi) |\psi|^4 \psi. \quad (3.10)$$

Agora, para resolver a Eq. (3.10), nós procuramos soluções estacionárias na variável τ , isto é

$$\psi(\xi, \tau) = \phi(\xi) \exp(-iE\tau), \quad (3.11)$$

sendo ϕ uma função de ξ . Assim, obtemos

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = (V(\xi) - E) \phi + G_3 f(\xi) |\phi|^2 \phi + G_5 h(\xi) |\phi|^4 \phi. \quad (3.12)$$

Já que ainda temos uma equação diferencial não linear com coeficientes não homogêneos, nós vamos fazer uma segunda transformação de coordenadas, a fim de chegar a uma equação diferencial de segunda ordem não linear com coeficientes constantes. Para isso, redefinimos a variável ξ como uma função de outra variável ζ , ou seja

$$\xi = \bar{F}(\zeta), \quad \zeta = F(\xi), \quad (3.13)$$

que nos conduz à equação diferencial não linear

$$\frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} - \frac{\bar{F}_{\zeta\zeta}}{\bar{F}_{\zeta}} \frac{d\phi}{d\zeta} = \bar{F}_{\zeta}^2 (V[\xi(\zeta)] - E) \phi + G_3 \bar{F}_{\zeta}^2 f[\xi(\zeta)] |\phi|^2 \phi + G_5 \bar{F}_{\zeta}^2 h[\xi(\zeta)] |\phi|^4 \phi, \quad (3.14)$$

onde $\bar{F}_\zeta = d\bar{F}/d\zeta$ e $\phi = \phi(\xi(\zeta))$. Redefinindo o campo escalar

$$\phi(\zeta) = \sqrt{\bar{F}_\zeta} \Phi(\zeta), \quad (3.15)$$

e usando as Eqs. (3.2) e (3.3), a Eq. (3.14) reduz-se à expressão

$$\frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} = -\mu\Phi + G_3|\Phi|^2\Phi + G_5|\Phi|^4\Phi, \quad (3.16)$$

onde nós consideramos as seguintes identificações

$$\mu = -\bar{F}_\zeta^2 (V[\xi(\zeta)] - E) + \frac{\bar{F}_{\zeta\zeta\zeta}}{2\bar{F}_\zeta} - \frac{3\bar{F}_{\zeta\zeta}^2}{4\bar{F}_\zeta^2}, \quad f[\xi(\zeta)] = \frac{1}{\bar{F}_\zeta^3}, \quad h[\xi(\zeta)] = \frac{1}{\bar{F}_\zeta^4}. \quad (3.17)$$

Como se pode ver, ainda não definimos a função $V[\xi(\zeta)]$. De fato, como nós vamos trabalhar com um potencial químico constante μ , definimos $V(\xi)$ em termos de μ e $F(\xi)$. Assim, em termos das variáveis ξ e τ temos

$$V(\xi) = \left(\frac{F''}{2F'}\right)^2 - \left(\frac{F'''}{2F'}\right)' - \mu F'^2 + E, \quad f(\xi) = F'^3, \quad h(\xi) = F'^4, \quad (3.18)$$

onde $F' = dF/d\xi$ e o campo complexo (3.15) torna-se

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{F'(\xi)}} \Phi(\zeta(\xi)). \quad (3.19)$$

Finalmente, retornando às coordenadas originais (x, t) , o campo escalar complexo pode ser obtido a partir das Eqs. (3.19), (3.11) e (3.7), isto é

$$\Psi(x, t) = \frac{\sqrt{\gamma(t)}}{\sqrt{F'[\xi(x, t)]}} \exp[-i\eta(x, t)] \Phi[F(\xi(x, t))], \quad (3.20)$$

onde $\eta(x, t) = \frac{\gamma_t}{4\gamma}x^2 + \frac{\delta_t}{2\gamma}x - a(t) + E \int_0^t dt' \gamma^2(t')$. Aqui, $a(t)$ é uma função real arbitrária. Ademais, as funções ω , f_1 e f_2 aparecem como

$$\omega(t) = \frac{\gamma_{tt}\gamma - 2\gamma_t^2}{4\gamma^2}, \quad f_1(t) = \frac{\delta_{tt}\gamma - 2\gamma_t\delta_t}{2\gamma^2}, \quad f_2(t) = -\frac{\delta_t^2}{4\gamma^2} - \frac{da}{dt}, \quad (3.21)$$

revelando a conexão intrínseca entre a frequência $\omega(t)$, as forças de $f_1(t)$ e $f_2(t)$ com as funções reais $\gamma(t)$ e $\delta(t)$, as quais aparecem na primeira transformação de coordenadas e na reparametrização temporal, Eq. (3.4). Note que a função real arbitrária $a(t)$ poderia ser escolhido como $da/dt = (\delta_t/2\gamma)^2$ se $f_2(t)$ não está presente na Eq. (3.1). Enquanto que a função $V(\xi)$, e as não linearidades $f(\xi)$ and $h(\xi)$ estão vinculadas à segunda transformação de coordenadas $F(\xi)$ através da Eq. (3.18). Portanto, todos as compo-

mentos dos coeficientes modulados, Eqs. (3.1), (3.2) e (3.3), da ESNLCQ, Eq. (2.17), são determinados pelas funções $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $F(\xi)$ e a função real arbitrária $a(t)$.

Desta maneira, nós temos mostrado, por meio de transformações canônicas de ponto e redifinições do campo escalar complexo, Eqs. (3.4), (3.7), (3.11), (3.13), e (3.19), como a ESNLCQ com coeficientes modulados, Eq. (2.17), pode ser mapeada em uma equação diferencial não linear de segunda ordem unidimensional com não linearidades cúbica e quártica homogêneas e constantes Eq. (3.16).

A equação diferencial de segunda ordem, Eq. (3.16), é muito mais simples de resolver, como mostramos em seguida.

3.2 O mapeamento sob a função elíptica de Weierstrass \wp

Nesta seção, encontramos algumas soluções analíticas exatas da Eq. (3.16) em termos da função elíptica de Weierstrass \wp . Para isso, consideramos o campo escalar Φ como uma função real dependente da variável ζ . Logo, pode-se verificar que as soluções da Eq. (3.16) são também soluções da equação

$$\left(\frac{d\Phi}{d\zeta}\right)^2 = \epsilon - \mu\Phi^2 + \frac{G_3}{2}\Phi^4 + \frac{G_5}{3}\Phi^6. \quad (3.22)$$

onde ϵ é uma constante real arbitrária. Para resolver a Eq. (3.22) usamos o método de mapeamento usado por Souza Dutra *et al.* [72]. No método de mapeamento começamos a partir da Eq. (3.22) e através de uma sequência apropriada de transformações do campo a reduzimos à equação diferencial elíptica de Weierstrass \wp , cujas soluções são bastante conhecidas.

Primeiro, mostramos um breve resumo das propriedades da função elíptica de Weierstrass \wp . Depois, mostramos as transformações do campo em termos da função elíptica de Weierstrass \wp , que nós usamos neste trabalho.

3.2.1 Função elíptica de Weierstrass \wp

A função \wp , é aquela função elíptica que satisfaz a equação diferencial

$$\left(\frac{d\wp}{dz}\right)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \quad (3.23)$$

onde g_2 e g_3 são as invariantes de Weierstrass.

O discriminante modular define-se como $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. Os valores dos invariantes e do discriminante modular determinam como a função \wp é escrita em termos das funções elípticas de Jacobi quando Δ toma valores não nulos.

Nós consideramos, neste trabalho, unicamente valores reais para os invariantes de Weierstrass. Para uma descrição mais detalhada das propriedades da Função Elíptica de Weierstrass \wp , recomendamos que o leitor consulte a referência [73].

3.2.2 Modelo de campo escalar com autointerações não lineares até sexta ordem

No que segue, mostramos três transformações do campo, as quais reduzem a Eq. (3.22) à equação diferencial elíptica de Weierstrass, Eq. (3.23).

(1) Para $\epsilon \neq 0$, a transformação é da forma

$$\Phi(z) = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{\wp(z, g_2, g_3) + \mu/3}}, \quad (3.24)$$

onde $g_2 = \frac{4}{3}\mu^2 - 2G_3\epsilon$ e $g_3 = \frac{8}{27}\mu^3 - \frac{2}{3}G_3\mu\epsilon - \frac{4}{3}G_5\epsilon^2$, os quais conduzem ao seguinte discriminante modular $\Delta = -\frac{4\epsilon^2}{3}(6\epsilon G_3^3 + 36\epsilon^2 G_5^2 + 36G_3G_5\epsilon\mu - 3\mu^2 G_3^2 - 16\mu^3 G_5)$.

(2) Para $\epsilon = 0$ e $\mu \neq 0$, e quando $g_2 = \frac{4}{3}\mu^2$, $g_3 = \frac{8}{27}\mu^3$ e $\Delta = 0$, então a transformação é da forma

$$\Phi(z) = \pm \left(\frac{G_3 - 2\beta}{4\mu} + \frac{\beta}{\wp(z, g_2, g_3) + \mu/3} \right)^{-1/2}, \quad (3.25)$$

onde $\beta = \pm \sqrt{\frac{G_3^2}{4} + \frac{4}{3}\mu G_5}$.

(3) Para $\epsilon = 0$ e $\mu = 0$, obtem-se $g_2 = g_3 = \Delta = 0$, em este caso $\wp(z) = z^{-2}$ e

$$\Phi(z) = \pm \left(-\frac{2G_5}{3G_3} + \frac{G_3 z^2}{2} \right)^{-1/2}. \quad (3.26)$$

Portanto, para uma escolha dos valores das constantes ϵ , μ , G_3 e G_5 , obtemos os valores das invariantes g_2 e g_3 , e o valor do discriminante modular Δ . Consequentemente, encontramos a função elíptica de Weierstrass \wp correspondente aos valores de g_2 , g_2 e Δ . Desta forma, nós conseguimos as soluções analíticas exatas da equação do modelo de campo escalar com autointerações não lineares, Eq. (3.16).

Em seguida, mediante alguns exemplos, vamos obter algumas soluções da Eq. (3.16) e consequentemente da Eq. (2.17).

3.2.3 Exemplo 1. Solução tanh deformada

Como um primeiro exemplo, nós escolhemos as constantes ϵ , μ , G_3 e G_5 , da seguinte forma

$$\epsilon = a^2 \quad , \quad \mu = 2a^2 - 1 \quad , \quad G_3 = 2(a^2 - 2) \quad e \quad G_5 = 3,$$

onde o valor do parâmetro a é diferente de zero. Como pode ser visto por uma simples inspeção, para encontrar a solução da Eq. (3.16) nós empregamos a primeira categoria das transformações, Eq. (3.24).

Os invariantes e o discriminante são, $g_2 = \frac{4}{3}(1+a^2)^2$, $g_3 = -\frac{8}{27}(1+a^2)^3$ e $\Delta = 0$. Para encontrar a forma da função elíptica \wp , para os g_2 , g_3 e Δ dados, usamos a Ref. [73], e obtemos que, $\wp(\zeta, g_2, g_3) = \frac{1}{3}(1+a^2) + (1+a^2)\operatorname{csch}^2(\sqrt{1+a^2}\zeta)$. Assim, as soluções analíticas do campo Φ , são dadas por

$$\Phi(z) = \pm \frac{a \tanh(\sqrt{1+a^2}z)}{\sqrt{\operatorname{sech}^2(\sqrt{1+a^2}z) + a^2}}. \quad (3.27)$$

Pode-se mostrar que, quando $z \rightarrow \pm\infty$ o campo $\Phi \rightarrow \pm a$. O perfil da amplitude campo Φ , para diferentes valores do parâmetro a , é mostrado na Figura 3.1. A partir da Figura, vemos que a amplitude do campo Φ apresenta um perfil tipo \tanh^2 . Além disso, quando μ se aproxima ao valor -1 a amplitude do campo Φ sofre uma deformação de alargamento.

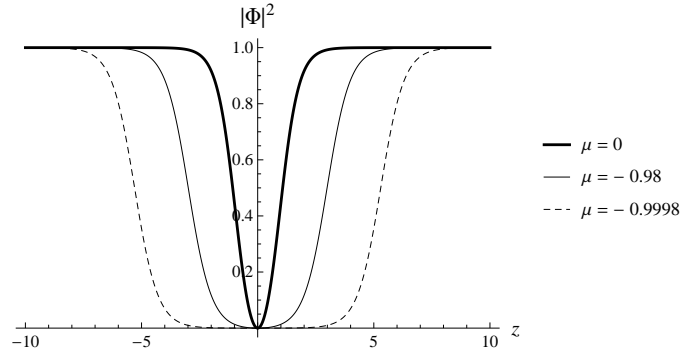


Figura 3.1: Perfil da amplitude $|\Phi(z)|^2$, Eq. (3.27), tipo \tanh^2 deformado.

3.2.4 Exemplo 2. Solução sech deformada

Outras soluções da Eq. (3.16) é quando nós tomamos o valor de $\epsilon = 0$ e $\mu < 0$. Neste caso, usamos a segunda categoria das transformações, Eq. (3.25). Usando a Ref. [73], pode-se ver que a função elíptica \wp é dada pela expressão, $\wp(\zeta, 4\mu^2/3, 8\mu^3/27) = -(\mu/3)(1 + 3 \operatorname{csch}^2 \sqrt{-\mu}z)$.

Desta forma, nós encontramos que as soluções analíticas da Eq. (3.16), são da forma

$$\Phi(z) = \pm \frac{2\sqrt{\mu/G_3}}{\sqrt{1 + \lambda^2 \cosh(2\sqrt{-\mu}z)}}, \quad (3.28)$$

onde $\lambda^2 = -\frac{\sqrt{G_3^2 + 16\mu G_5/3}}{G_3}$ e $G_3 < 0$. Note que quando $z \rightarrow \pm\infty$ o campo $\Phi \rightarrow 0$.

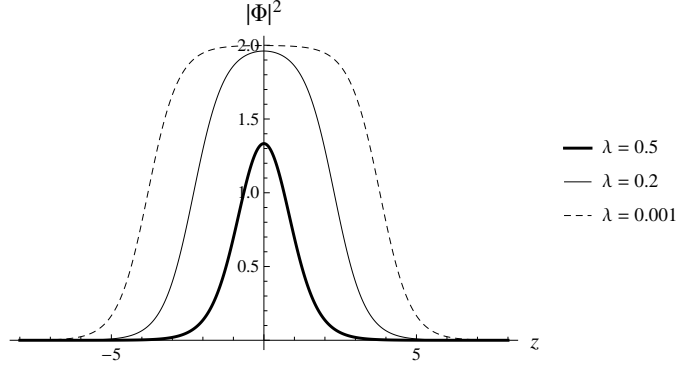


Figura 3.2: Perfil da amplitude do campo $\Phi(z)$, Eq. (3.28), tipo sech^2 deformada. Com $\mu = -1$ e $G_3 = -2$

Na Figura (3.2) mostra-se o perfil da amplitude do campo Φ , para diferentes valores do parâmetro λ . Desta Figura nós podemos ver que, quando λ está se aproximando ao valor 0 a amplitude do campo Φ aumenta e alonga-se.

3.2.5 Exemplo 3. Soluções periódicas

Pelo lado da Física Matemática, este terceiro e final exemplo é muito interessante, porque nós encontramos seis diferentes soluções analíticas com o mesmo conjunto de valores das constantes, a saber: $\mu = 5$, $G_3 = 10$ e $G_5 = -3$.

Primeiro, quando $\epsilon = 0$ usamos a segunda categoria das transformações, Eq. (3.25). Os invariantes e o discriminante são $g_2 = 100/3$, $g_3 = 1000/27$ e $\Delta = 0$. Novamente, usando a Ref. [73], encontramos a função elíptica $\wp = -\frac{5}{3} + 5 \csc^2(\sqrt{5}z)$. Além disso, o parâmetro β pode tomar dois valores $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$. Neste caso, nós encontramos quatro soluções analíticas periódicas, dois para cada valor de β , da forma

$$\Phi_1(z) = \pm \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{(5 - \sqrt{5}) + 2\sqrt{5} \sin^2(\sqrt{5}z)}}, \Phi_2(z) = \pm \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{(5 + \sqrt{5}) - 2\sqrt{5} \sin^2(\sqrt{5}z)}}. \quad (3.29)$$

O perfil das amplitudes dos campos Φ_1 e Φ_2 são mostrados na Figura (3.3). Nesta Figura, pode-se notar que os campos Φ_1 e Φ_2 apresentam um comportamento periódico com defasagem de $\pi/2$.

Segundo, quando $\epsilon = \frac{5(4\sqrt{10}-5)}{27}$ usamos a primeira categoria das transformações, Eq. (3.24), onde $g_2 = 100/3$, $g_3 = 1000/27$ e $\Delta = 0$. A partir da Ref. [73] achamos a forma da função elíptica $\wp = \frac{5}{9}(\sqrt{10} - 2) + \frac{5}{3}(\sqrt{10} - 2) / \sinh^2\left(\sqrt{\frac{5}{3}}(\sqrt{10} - 2)z\right)$.

As soluções analíticas obtidas são

$$\Phi_3(z) = \pm \sqrt{\frac{4\sqrt{10}-5}{3}} \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{5(\sqrt{10}-2)}{3}}z\right)}{\sqrt{3(\sqrt{10}-2) + (\sqrt{10}+1)\sinh^2\left(\sqrt{\frac{5(\sqrt{10}-2)}{3}}z\right)}}, \quad (3.30)$$

Na Figura (3.3) mostra-se que a amplitude do campo Φ_3 apresenta um perfil tipo \tanh^2 . Ao contrário da solução do primeiro exemplo, esta solução não pode ser deformada.

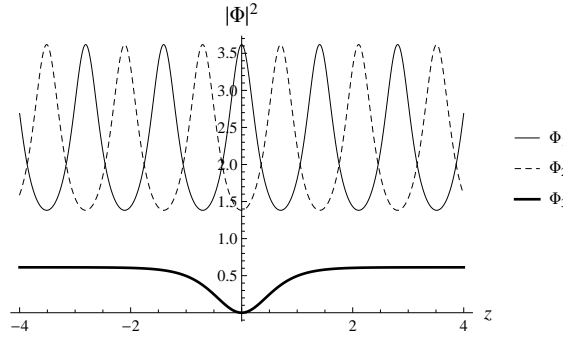


Figura 3.3: Perfil periódico dos campos $\Phi_1(z)$ e $\Phi_2(z)$, Eq. (3.29). Perfil do campo $\Phi_3(z)$, tipo \tanh^2 sem deformação.

Queremos sublinhar que o processo de deformação das amplitudes do campo Φ apresentados nos Exemplos 1 e 2 não é um processo dinâmico, senão é devido à escolha apropriada dos valores das constantes ϵ , μ , G_3 e G_5 do modelo estudado.

Queremos enfatizar que, através da utilização do método de transformações canônicas de ponto e as soluções obtidas nesta seção, nós reproduzimos os exemplos apresentados por Belmonte-García *et al.* [17] e por Avelar *et al.* [18]. Em seguida, através de alguns exemplos apresentamos novas soluções solitônicas, obtidas a partir do método desenvolvido acima, da ESNLCQ com coeficientes modulados Eq. (2.17). Nós acreditamos que essas soluções solitônicas podem ser empregadas para explicar a dinâmica de um BEC.

3.3 Soluções solitônicas largas

Começamos por definir as funções reais $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $a(t)$ e $F(\xi)$ como segue

$$\gamma(t) = \sqrt{\frac{2}{1+3\cos^2(2t)}} \quad , \quad \delta(t) = a(t) = 0 \quad \text{e} \quad F(\xi) = \frac{\sqrt{3}\pi b}{2G_3^{1/3}} \text{Erfi}\left(\frac{\xi}{\sqrt{3}b}\right), \quad (3.31)$$

onde b e G_3 são parâmetros reais, e Erfi é a função erro imaginária [73]. Estas funções foram consideradas por Avelar *et al.* [18] para estudar a evolução de um BEC. Substituindo

a Eq. (3.31) nas Eqs. (3.1), (3.2),(3.2), (3.18), (3.21), e $E = 1/3b^2$, obtemos

$$v(x, t) = \frac{81b^4 \cos(8t) + 12(2 + 45b^4) \cos(4t) + 243b^4 + 40}{18b^4(5 + 3 \cos(4t))^2} x^2 - \frac{\mu}{G_3^{2/3}} \exp\left[\frac{8x^2}{3b^2(5 + 3 \cos(4t))}\right], \quad (3.32)$$

$$g_3(x, t) = \frac{2}{\sqrt{5 + 3 \cos(4t)}} \exp\left[\frac{4x^2}{b^2(5 + 3 \cos(4t))}\right], \quad (3.33)$$

$$g_5(x, t) = \frac{G_5}{G_3^{4/3}} \exp\left[\frac{16x^2}{3b^2(5 + 3 \cos(4t))}\right], \quad (3.34)$$

onde $v(x, t)$ é o potencial de armadilhamento, $g_3(x, t)$ é a intensidade de interação entre dois bósons, e $g_5(x, t)$ é a intensidade de interação entre três bósons. Na Figura 3.4, nós mostramos o comportamento periódico (mudando de atrativo para repulsivo no tempo) do potencial de armadilhamento $v(x, t)$, empregado para aprisionar o BEC. Recentemente, esta característica do potencial de armadilhamento foi explorado para estudar teoricamente a possibilidade de modular soluções *breathers* (respirantes) por Cardoso *et al.* [74] em BEC com forma de charuto.

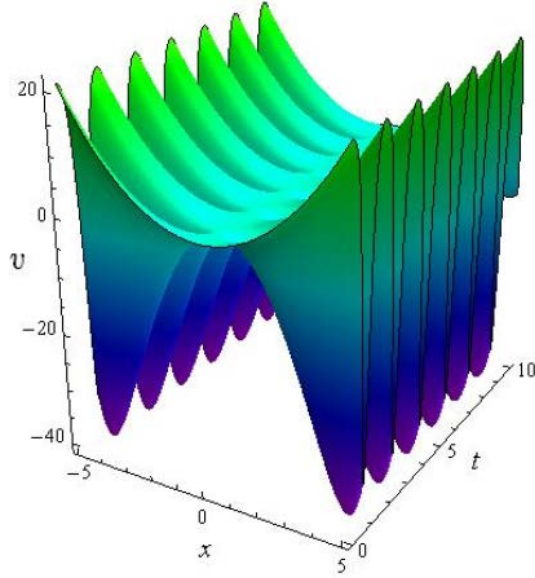


Figura 3.4: Comportamento atrativo e repulsivo do potencial de armadilhamento $v(x, t)$, Eq. (3.32). Com, $b = 3$, $\mu = -1$ e $G_3 = -1$.

Como observamos, a intensidade de interação entre dois e três bósons de um BEC pode ser modulada por meio de uma aplicação correta de um campo magnético sobre o BEC. Isto permite-nos controlar e manipular as características dos sólitons brilhantes e escuros, tais como sua amplitude, sua largura, a posição de seu centro de massa, entre outras.

Em seguida, nós mostramos como manipular teoricamente a amplitude e a largura dos sólitons brilhantes e escuras, as quais poderiam descrever a evolução de um BEC, onde predominam as interações entre dois e três bósons. Isso pode ser conseguido pela variação apropriada dos parâmetros G_3 , G_5 , e μ aos quais estão relacionadas com as intensidades da interação entre dois e três bósons, e com o potencial químico, respectivamente.

3.3.1 Exemplo 1: Sóliton escuro largo

A observação de sólitons escuros em um BEC em forma de charuto por Burger *et al.* [30], estimulou diversos estudos teóricos dedicados ao controle e manipulação de tais estruturas localizadas em BECs. Nesta subseção mostramos como manipular a amplitude e a largura do sóliton escuro variando a intensidade de interação entre dois e três bósons, e o potencial químico do BEC aprisionado num potencial de armadilhamento dado pela Eq. (3.32).

Para obter a solução analítica exata, nós utilizamos a solução, Eq. (3.27), da equação diferencial não linear, Eq. (3.16), onde os parâmetros são $G_3 = 2(a^2 - 2)$, $G_5 = 3$ e $\mu = 2a^2 - 1$. Não confundir o parâmetro a com o comprimento de espalhamento a_s entre bósons de um BEC nem com a função real arbitrária $a(t)$, Eq. (3.31). Assim, substituindo as Eqs. (3.27) e (3.31) na Eq. (3.20), nós obtemos explicitamente a função de onda, dada pela expressão

$$\Psi(x, t) = G_3^{1/6} \sqrt{\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma^2 x^2}{6 b^2}\right) \exp[-i \eta(x, t)] \times \frac{a \sinh\left(\sqrt{1+a^2} \frac{\sqrt{3}\pi b}{2 G_3^{1/3}} \operatorname{Erfi}\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{3} b}\right)\right)}{\sqrt{1+a^2} \cosh^2\left(\sqrt{1+a^2} \frac{\sqrt{3}\pi b}{2 G_3^{1/3}} \operatorname{Erfi}\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{3} b}\right)\right)}. \quad (3.35)$$

Ao variar o parâmetro a , que está ligado à intensidade de interação entre dois e três bósons, o potencial químico, e o potencial de armadilhamento, nós podemos controlar adequadamente a largura da solução solitônica escura. O perfil da amplitude do sóliton escuro, com diferentes larguras, é mostrado na Figura 3.1. Assim, no caso em que o potencial químico está próximo ao valor -1 , isto é, quando o valor do parâmetro a é próximo de zero, a largura do sóliton escuro é bastante pronunciada. Nós chamamos essa classe de soluções analíticas de sólitons escuros largos. A Figura 3.5 mostra o comportamento, periódico no tempo, da amplitude do sóliton escuro largo.

3.3.2 Exemplo 2: Sóliton brilhante largo

Nós também temos sólitons brilhantes, para os quais podemos modular adequadamente sua largura e sua amplitude, alterando a interação entre dois e três bósons, o potencial

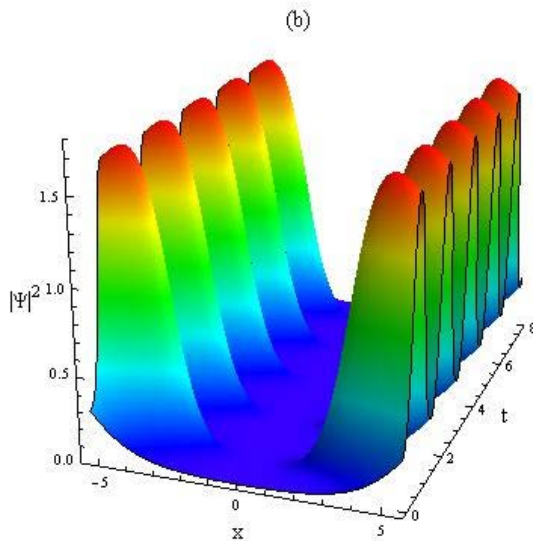


Figura 3.5: Amplitude da função de onda $|\Psi(x,t)|^2$. Com $a = 0.01$ e $b = 10$.

químico, e o potencial de armadilhamento.

Nesta parte, nós usamos a solução, Eq. (3.28), que resolve a equação diferencial não linear, Eq. (3.16). Portanto, substituindo as Eqs. (3.28) e (3.31) no interior da Eq. (3.20), nós encontramos explicitamente o parâmetro de ordem macroscópico

$$\Psi(x,t) = G_3^{1/6} \sqrt{\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma^2 x^2}{6b^2}\right) \exp[-i\eta(x,t)] \times \frac{2\sqrt{\mu/G_3}}{\sqrt{1 + \lambda^2 \cosh\left(2\sqrt{-\mu} \frac{\sqrt{3}\pi b}{2G_3^{1/3}} \operatorname{Erfi}\left(\frac{\gamma x}{\sqrt{3}b}\right)\right)}}, \quad (3.36)$$

onde $\lambda^2 = -\frac{\sqrt{G_3^2 + 16\mu G_5/3}}{G_3}$. Neste caso, variando os parâmetros G_3 , G_5 , e μ podemos modular de maneira controlável a amplitude e a largura da solução solitônica brilhante. O perfil da modulação da amplitude do sóliton brilhante, com diferentes larguras, é mostrado na Figura 3.6. Na Figura 3.6, mostramos o comportamento periódico da amplitude da solução analítica, quando λ está se aproximando ao valor 0. Nós chamamos essa classe de soluções analíticas exatas de sólitons brilhantes largos. Esta figura, por sua estética, foi escolhida para ser exibida na seção *on-line Kaleidoscope* do *Physical Review E* (Agosto 2012).

Até agora, nós mostramos como resolver a ESNL com não linearidades cúbica e quártica e coeficientes modulados, utilizando o método de transformações canônicas de ponto. Mostramos também, através de alguns exemplos, como este método é útil para encontrar novas soluções solitônicas, que podem descrever a dinâmica de um BEC.

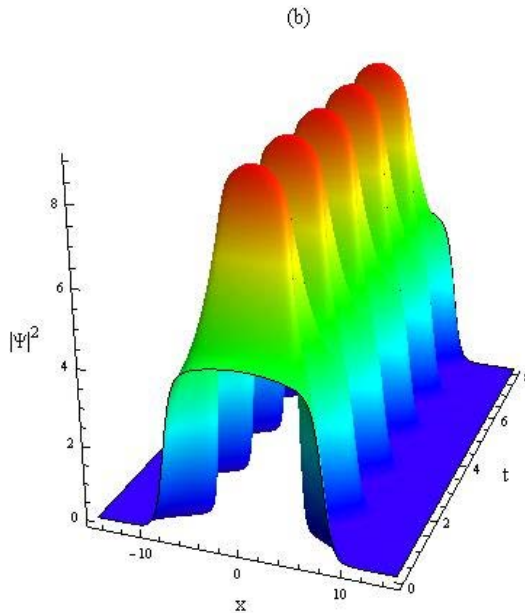


Figura 3.6: Amplitude do parâmetro de ordem $|\Psi(x,t)|^2$. Com $\lambda = 0.001, b = 10$

3.4 Generalização do potencial externo

Recentemente, atenção considerável é dedicada ao estudo de diferentes potenciais externos, os quais podem ser úteis para aprisionar um BEC, [74, 75, 76]. Em nosso caso, alguns potenciais de armadilhamento, interessantes e úteis, podem ser obtidos por uma escolha apropriada de $\gamma(t)$, $\delta(t)$ e $F(\xi)$.

Ao empregar o método de transformações canônicas de ponto para resolver a ESNLCQ com coeficientes modulados, percebe-se que parte do potencial de armadilhamento, $v(x,t)$, é determinada pela escolha apropriada da função da segunda transformação de coordenadas segundo, $F(\xi)$, de maneira que a derivada de primeira ordem com respeito a ξ sobre a função F não tenha zeros. Além disso, a partir da Eq. (3.18) pode-se ver que se o valor dos parâmetros μ e E são iguais a zero, a função $V(\xi)$ tem uma estrutura semelhante ao do potencial supersimétrico unidimensional, onde $F''/2F'$ representa o superpotencial supersimétrico. Nós sabemos que, os potenciais supersimétricos apresentam apenas estados ligados, no âmbito da teoria da mecânica quântica supersimétrica [77].

Neste contexto, nós construímos potenciais externos, cujas componentes são potenciais supersimétricos e analisamos sua influência sobre a evolução de um BEC.

3.4.1 Potencial Scarf trigonométrico

Vamos considerar, $E = A^2$ e as funções reais $\gamma(t)$, $\delta(t)$ e $F(\xi)$ da forma

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= 1 + \left[1 + \gamma_1 \sin(t) + \gamma_2 \sin(\sqrt{2}t) \right]^2, \\ \delta(t) = a(t) &= 0, \quad F'(\xi) = G_3^{-1/3} \sec^{2A/\alpha}(\alpha\xi), \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde γ_1 e γ_2 são parâmetros reais, $A, \alpha > 0$ e $-\pi/2 \leq \alpha\xi \leq \pi/2$. Indicamos o leitor consultar a referência [78] para mais detalhes sobre a função $\gamma(t)$.

Substituindo a Eq. (3.37) nas Eqs. (3.1), (3.2), (3.2), (3.18) e (3.21), obtemos

$$v(x, t) = \omega(t) x^2 + A(A - \alpha) \sec^2(\alpha\xi) - \mu G_3^{-2/3} \sec^{4A/\alpha}(\alpha\xi) , \quad (3.38)$$

$$g_3(x, t) = \left(1 + \left[1 + \gamma_1 \sin(t) + \gamma_2 \sin(\sqrt{2}t) \right]^2 \right) \sec^{6A/\alpha}(\alpha\xi) , \quad (3.39)$$

$$g_5(x, t) = G_5 G_3^{-4/3} \sec^{8A/\alpha}(\alpha\xi) , \quad (3.40)$$

onde $\omega(t)$ é a frequência do potencial harmônico.

Como pode ser visto a partir da Eq. (3.38), o potencial externo é formado por dois potenciais supersimétricos, o potencial harmônico e o potencial Scarf trigonométrico. Assim, o potencial externo é composto de uma rede periódica espacial de potenciais de armadilhamento. Na Figura 3.7(a)-(b), mostramos a forma de um potencial de armadilhamento em torno de $x = 0$, pertencente ao potencial externo.

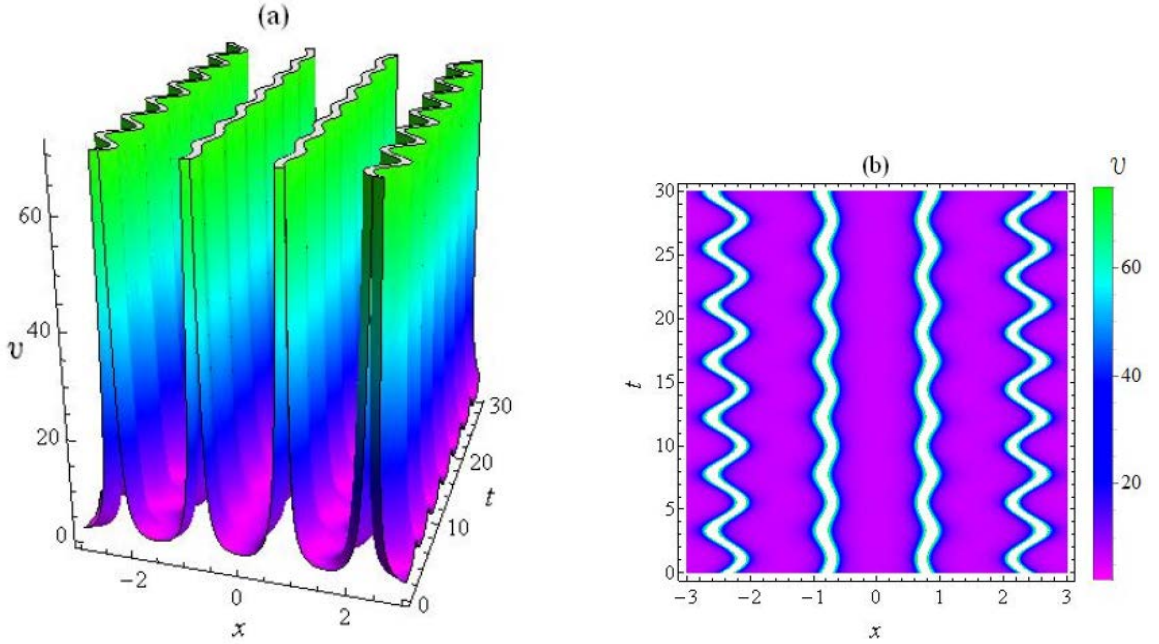


Figura 3.7: Potencial externo $v(x, t)$. (a) Armadilha em torno de $x = 0$. (b) *Density plot* do potencial. Com $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0.1, G_3 = 2, \mu = 0, A = 2$ e $\alpha = 1$.

Para visualizar a ação do potencial externo sobre a dinâmica do BEC, vamos considerar a solução analítica, Eq. (3.26), da equação diferencial não linear, Eq. (3.16). Assim, substituindo as Eqs. (3.26) e (3.37) na Eq. (3.20), nós obtemos explicitamente a função de onda, dada pela expressão

$$\Psi(x, t) = \frac{G_3^{1/6} \gamma^{1/2} \exp[-i\eta(x, t)] \cos^{A/\alpha}(\alpha\xi)}{\sqrt{1 + F(\xi)^2}} . \quad (3.41)$$

Esta última solução analítica foi encontrada e estudada pela primeira vez por Avelar *et al.* [18]. Nesse artigo, os autores mostraram que a solução analítica exata, Eq. (3.41), apresenta uma forma de sech, e pertence à classe de sólitons brilhantes.

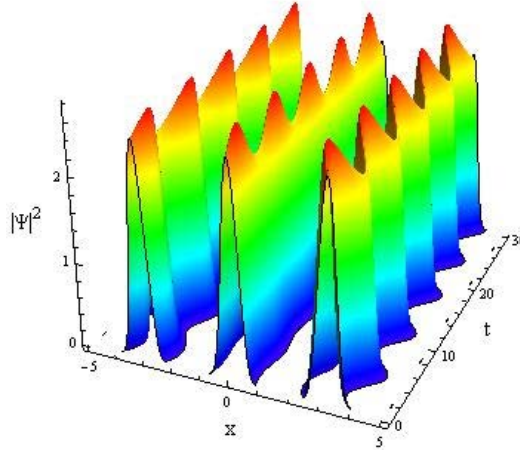


Figura 3.8: Amplitude do sóliton brilhante $|\Psi(x, t)|^2$, Eq. (3.41), com $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0.1, G_3 = 2, \mu = 0, A = 2$ e $\alpha = 1$. O comportamento periódico espacial é devido à periodicidade do potencial Scarf trigonométrico.

A evolução da amplitude desta solução sóliton brilhante é mostrada na Figura 3.8. Podemos observar o comportamento periódico no espaço e no tempo, da amplitude do sóliton brilhante.

3.4.2 Potencial Rosen-Morse trigonométrico

Nesta parte, como na subseção anterior $E = A^2$ e as funções reais $\gamma(t), \delta(t), a(t)$ são as mesmas definidas na Eq. (3.37). Não obstante, agora vamos considerar $F(\xi)$ da forma

$$F'(\xi) = G_3^{-1/3} \csc^{2A/\alpha}(\alpha\xi) . \quad (3.42)$$

O potencial externo $v(x, t)$, as não linearidades $g_3(x, t)$ e $g_5(x, t)$ e a função de onda $\Psi(x, t)$, são dadas pelas expressões

$$v(x, t) = \omega(t) x^2 + A(A - \alpha) \csc^2(\alpha\xi) - \mu G_3^{-2/3} \csc^{4A/\alpha}(\alpha\xi) , \quad (3.43)$$

$$g_3(x, t) = \left(1 + \left[1 + \gamma_1 \sin(t) + \gamma_2 \sin(\sqrt{2}t) \right]^2 \right) \csc^{6A/\alpha}(\alpha\xi) , \quad (3.44)$$

$$g_5(x, t) = G_5 G_3^{-4/3} \csc^{8A/\alpha}(\alpha\xi) , \quad (3.45)$$

$$\Psi(x, t) = \frac{G_3^{1/6} \gamma^{1/2} \exp[-i\eta(x, t)] \cos^{A/\alpha}(\alpha\xi)}{\sqrt{1 + F(\xi)^2}} , \quad (3.46)$$

onde $\omega(t)$ é a frequência do potencial harmônico.

Neste caso, o comportamento do potencial externo e o comportamento da função de onda é o mesmo, tal como no caso de potencial Scarf trigonométrico. A diferença entre estes dois modelos é unicamente no deslocamento espacial de π , tanto na periodicidade do potencial externo, como na amplitude da função de onda. O comportamento e o deslocamento do potencial externo e da função de onda pode ser observados na Figura 3.9.

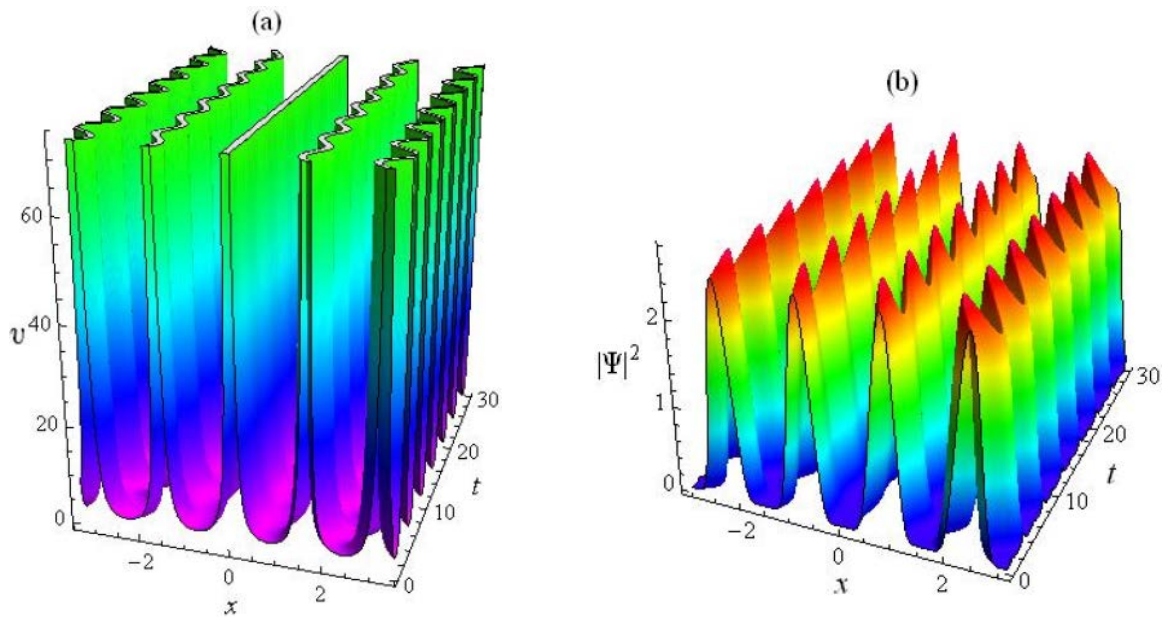


Figura 3.9: Estrutura periódica espacial (a) do potencial externo $v(x, t)$, Eq. (3.43). (b) da amplitude da função de onda $\Psi(x, t)$, Eq. (3.46). Com $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0.1, G_3 = 2, \mu = 0, A = 2$ e $\alpha = 1$.

3.5 Generalização das não linearidades

Nós fomos capazes de resolver a ESNLCQ com coeficientes modulados, empregando o método de transformações canônicas de ponto. Pelo lado matemático, surge uma questão óbvia, é possível aplicar o método de transformações canônicas de ponto a uma ESNL com não linearidades de ordem superior?

Para responder a essa pergunta, nós fazemos uma análise do método explicado na seção 3.1, e observamos que o lado direito da Eq. (3.16), são os três primeiros termos da série da função seno, quando o campo Φ é uma função real. Levando isso em conta, podemos deduzir que a Eq. (3.16) está intimamente ligada com a equação de movimento estática do modelo não linear seno-Gordon.

Queremos ressaltar que Cardoso *et.al.* [78] resolveram a ESNL com não linearidades polinomiais do campo Ψ , até a ordem N , e com coeficientes modulados, utilizando o método de transformação de similaridade. Ou seja, os autores de [78] mapearam a ESNL

com não linearidades polinomiais até a ordem N , e com coeficientes modulados, via o método de transformação de similaridade, em uma ESNL estacionária com coeficientes constantes.

Em seguida, pela razão que nós já entendemos como lidar com o método de transformações canônicas de ponto, nós iniciamos, a partir de uma ESNL com não linearidade e não polinomial com coeficientes constantes, a qual está ligada à equação de movimento estático do modelo seno-Gordon e, através de transformações canônicas inversas, chegamos a ESNL com não linearidade e não polinomial com coeficientes modulados.

A equação de movimento estático do modelo seno-Gordon e sua solução, são dadas pelas expressões

$$\frac{d^2\Phi(\zeta)}{d\zeta^2} = \frac{1}{b^2} \sin[b\Phi(\zeta)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} b^{2n-1} \Phi^{2n+1}, \quad (3.47)$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{2}{b^2} \arccos\left(\pm\nu \operatorname{sn}\left(\sqrt{b}\zeta|\nu^2\right)\right), \quad (3.48)$$

onde $\operatorname{sn}(|\nu^2|)$ é a integral elíptica de Jacobi senoidal [73], ν é o parâmetro elíptico, $0 \leq \nu \leq 1$, e b é uma constante real. Agora, fazemos uma primeira transformação de coordenadas e uma redefinição do campo Φ para eliminar a derivada de primeira ordem do campo com respeito à variável ξ , a qual aparece devido à transformação de coordenadas

$$\zeta = F(\xi) \quad , \quad \Phi(F(\xi)) = \sqrt{F'(\xi)} \phi(\xi). \quad (3.49)$$

Assim, podemos reescrever a Eq. (3.47) da seguinte forma

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = \left(\left(\frac{F''}{2F'} \right)^2 - \left(\frac{F''}{2F'} \right)' \right) \phi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (F')^{n+2} b^{2n-1} \phi^{2n+1}. \quad (3.50)$$

Buscamos soluções estacionárias do tipo

$$\phi(\xi) = \psi(\xi, \tau) e^{iE\tau}, \quad (3.51)$$

onde E é uma constante real. Desta maneira, a Eq. (3.50) toma a seguinte forma

$$i \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + V(\xi)\psi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (F')^{n+2} b^{2n-1} |\psi|^{2n}\psi, \quad (3.52)$$

onde a função $V(\xi)$ é dada pela expressão

$$V(\xi) = \left(\frac{F''}{2F'} \right)^2 - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{F''}{2F'} \right) + E. \quad (3.53)$$

Neste ponto, fazemos uma segunda transformação de coordenadas e uma reparametri-

zação temporal, as quais são as transformações inversas da Eq. (3.4). Além disso fazemos uma redefinição do campo ψ para eliminar a derivada de primeira ordem do campo com respeito à variável x que aparece devido à transformação de coordenadas

$$\xi = \gamma(t)x + \delta(t) \quad \text{and} \quad \tau - \tau_0 = \int_0^t dt' \gamma^2(t'), \quad (3.54)$$

$$\psi(x, t) = e^{i\alpha(x,t)} \Psi(x, t) / \sqrt{\gamma(t)}, \quad (3.55)$$

onde $\alpha(x, t) = \frac{\gamma_t}{4\gamma}x^2 + \frac{\delta_t}{2\gamma}x - a(t)$. Substituindo as Eqs. (3.54) e (3.55) na Eq. (3.52) obtemos a ESNL com não linearidades generalizadas

$$\begin{aligned} \frac{i}{\gamma^2} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= \frac{i}{\gamma^3} (\gamma_t x + \delta_t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V[\xi(x, t)] \psi + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} b^{2n-1} (F')^{n+2} |\psi|^{2n} \psi, \end{aligned} \quad (3.56)$$

e finalmente

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + v(x, t) \Psi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} b^{2n-1} \left(\frac{F'}{\gamma} \right)^{n+2} |\Psi|^{2n} \Psi = \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta \Psi^*(x, t)} \quad (3.57)$$

onde o potencial externo $v(x, t)$ é da forma

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{\gamma_{tt}\gamma - 2\gamma_t^2}{4\gamma^2} x^2 + \frac{\delta_{tt}\gamma - 2\gamma_t\delta_t}{2\gamma^2} x - \\ &- \frac{\delta_t^2}{4\gamma^2} - \frac{da}{dt} + \gamma^2 V[\xi(x, t)] \end{aligned} \quad (3.58)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int dz \left\{ \Psi^*(z, t) \left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + v(z, t) \right] \Psi(z, t) \right. \\ &\left. + \frac{2}{b^3} \gamma^3 F'[\xi(z, t)] \cos \left(b \sqrt{\frac{F'[\xi(z, t)]}{\gamma}} |\Psi| \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

A solução analítica exata da ESNL com não linearidades generalizadas, Eq. (3.57), é obtida a partir de Eqs. (3.48), (3.49), (3.51), e (3.55). Especificamente, a amplitude da solução analítica exata da Eq. (3.57) é dada por

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{4\gamma(t) \left[\arccos \left(\nu \operatorname{sn} \left(F(\xi) / \sqrt{b} |\nu \right) \right) \right]^2}{b^2 F'(\xi)}. \quad (3.60)$$

Essa amplitude em geral apresenta um comportamento periódico. Quando $\nu = 1$, a

solução analítica pertence à classe de solução sóliton escuro, cuja amplitude é da forma

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{4\gamma(t) \left[\arccos \left(\nu \tanh \left(F(\xi) / \sqrt{b} \right) \right) \right]^2}{b^2 F'(\xi)}. \quad (3.61)$$

3.6 Comentários

Até aqui, mostramos que o método de transformações canônicas de ponto, o qual é utilizado para resolver a equação de Schrödinger linear com coeficientes dependentes explicitamente do tempo, pode estender-se ao caso de NLSE com coeficientes modulados.

Como consequência do emprego do método, fomos capazes de reproduzir os resultados originalmente obtidos por Belmonte-Bietia *et al.* em [17] e por Avelar *et al.* em [18], através da utilização de um *ansatz* junto com a transformação de similaridade.

Uma extensão da aplicação do método de transformações canônicas de ponto, é a possibilidade de resolver um sistema de ESNLs acopladas com coeficientes modulados. Este estudo será apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 4

Sólitons vetoriais largos de um sistema de duas equações de Schrödinger não lineares acopladas com coeficientes modulados

Além dos sólitons brilhantes e escuros, estudados no Capítulo 4, há também sólitons com vários componentes (sólitons vetoriais), que surgem ao resolver um sistema de ESNL acoplados, que são usados para descrever a interação entre os componentes do sóliton.

Especificamente, no contexto dos gases atômicos frios, dois componentes solitônicos podem corresponder a duas funções de onda macroscópicas de uma espécie de átomo, com dois estados atômicos hiperfinos $|1\rangle$ e $|2\rangle$, uma função de onda para cada estado atômico hiperfino. Também, dois componentes solitônicos podem corresponder a duas funções de onda macroscópicas de duas espécies de átomos, um para cada átomo, no interior de um BEC com duas espécies atômica.

No contexto de fibras ópticas, os dois componentes solitônicos correspondem aos dois eixos ortogonais de polarização, com duas frequências diferentes, de um pulso de luz que se propaga numa fibra óptica. Isto pode ser explicado da seguinte maneira. Quando ambos modos de polarização são excitados numa fibra óptica, os componentes solitônicos de polarização propagam-se com velocidades diferentes, devido à birrefringência. Ao mesmo tempo, se a birrefringência é moderada, a modulação de fase cruzada (*cross-phase modulation*, XPM), que se refere à mudança de fase de um campo óptico induzida por outros campos copropagantes, impedem a divisão do sóliton. Formalmente, o problema pode ser relacionado com a formação do sóliton numa fibra sem birrefringência quando os componentes de polarização do pulso inicial têm diferentes frequências.

Esses fatos explicam o interesse nas principais características dos sólitons vetoriais investigados no âmbito de modelos de sistemas de ESNL acoplados com coeficientes

constantes ou modulados.

Sólitons vetoriais com componentes nas formas periódico-periódico, escuro-escuro, brilhante-brilhante e escuro-brilhantes obtidos a partir de um sistema de duas ESNLC acopladas foram extensivamente estudados [15, 79, 80, 81], em diferentes contextos.

Neste capítulo, vamos usar o método de transformações canônicas de ponto para resolver um sistema de duas ESNLCQ acopladas com coeficientes modulados na forma dada pelas Eqs. (2.18). Os resultados aqui apresentados foram publicados na revista *Physical Review E* [82].

4.1 Modelo teórico

As Eqs. (2.18) podem descrever a dinâmica da propagação de pulsos de luz que se propagam ao longo de eixos ortogonais de polarização numa fibra óptica com não linearidades Kerr e não-Kerr e termos de amplificação ou absorção. Nas Eqs. (2.18) teríamos t representando à longitude de propagação, x é a longitude transversal, $\Psi_k = \Psi_k(x, t)$ é o envoltório do campo elétrico em um sistema de referência em movimento juntamente com o pulso de luz, $v_k(x, t)$ está ligada ao índice de refração linear enquanto que $g_{kl}(x, t)$ e $f_{kl}(x, t)$, $h_{kl}(x, t)$ (a partir de agora consideramos que $k, l = 1, 2$) descrevem as intensidades das não linearidades Kerr e não-Kerr, respectivamente, $m_k(t)$ é o parâmetro de dispersão, e $\Gamma_k(t)$ é o coeficiente de amplificação ($\Gamma > 0$) ou absorção ($\Gamma < 0$).

Também, a partir da Eq. (2.18), podemos encontrar a equação da continuidade do sistema, cuja forma é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_k(t) |\Psi_k|^2 \quad (4.1)$$

onde $\rho = \sum_{k=1}^2 |\Psi_k|^2$ e $J = \sum_{k=1}^2 -im_k(t) \left(\Psi_k^* \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} - \Psi_k \frac{\partial \Psi_k^*}{\partial x} \right)$. Com base na Eq. (4.1), podemos ver que o sistema é conservativo somente quando $\Gamma_k(t) = 0$.

Queremos ressaltar que, no caso em que $m_1(t) = m_2(t) = \pm \frac{1}{2}$, $g_{11}(x, t) = g_{22}(x, t) = -1$, $g_{12}(x, t) = g_{21}(x, t) = -\kappa$ e o valor dos outros coeficientes são iguais a zero, as Eqs. (2.18) são reduzidas ao sistema de Manakov [14], o qual é um sistema integrável. Lá onde κ é o coeficiente XPM, cujo valor é 1 no modelo de Manakov e o valor de 2/3 em uma fibra óptica com birrefringência. Assim temos

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + (|\Psi_1|^2 + \kappa |\Psi_2|^2) \Psi_1 &= 0, \\ i \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + (\kappa |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2) \Psi_2 &= 0. \end{aligned}$$

4.2 Transformações canônicas de ponto

Vamos considerar que $m_k(t)$, $v_k(x, t)$, $g_{kl}(x, t)$, $f_{kl}(x, t)$, $h_{kl}(x, t)$ e $\Gamma_k(t)$ têm as formas

$$v_k(x, t) = \omega(t) x^2 + f_1(t) x + f_2(t) + T(t) V_k[\gamma(t) x + \delta(t)] , \quad (4.2)$$

$$g_{kl}(x, t) = G_{kl} T(t) \beta_l(t) g[\gamma(t) x + \delta(t)] , \quad (4.3)$$

$$f_{kl}(x, t) = F_{kl} T(t) \beta_l^2(t) f[\gamma(t) x + \delta(t)] , \quad (4.4)$$

$$h_{kl}(x, t) = H_{kl} T(t) \beta_k(t) \beta_l(t) h[\gamma(t) x + \delta(t)] \quad \text{only for } k \neq l, \quad (4.5)$$

$$\Gamma_k(t) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\ln [\beta_k(t) \gamma(t)]) \quad , \quad m_k(t) = \frac{T(t)}{\gamma^2(t)}. \quad (4.6)$$

Observe que, se nós elegermos $T(t) = \gamma^2(t)$, $\beta_k(t) = \gamma^{-1}(t)$, i.e. $m_k(t) = 1$ (massa constante) e $\Gamma_k(t) = 0$ (sistema conservativo), e $F_{kl} = H_{kl} = 0$ o sistema de ESNL acopladas com coeficientes modulados poderia modelar um sistema BEC uma espécie atômica com dois estados atômicos hiperfinos diferentes ou um BEC de duas espécies atômicas diferentes.

Agora, vamos implementar a seguinte transformação de coordenadas e reparametrização temporal

$$x = \frac{\xi}{\bar{\gamma}(\tau)} - \frac{\bar{\delta}(\tau)}{\bar{\gamma}(\tau)} \quad , \quad t - t_0 = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\bar{T}(\tau')} \quad (4.7)$$

com $\bar{\gamma}[\tau(t)] = \gamma(t)$, $\bar{\delta}[\tau(t)] = \delta(t)$ e $\bar{T}[\tau(t)] = T(t)$. Desta forma, as Eqs. (2.18), usando as Eqs. (4.2), (4.3),(4.4), (4.5) e (4.6), podem ser reescritas de forma compacta como

$$\begin{aligned} & i \frac{\bar{T}}{\bar{\gamma}} (\bar{\gamma}_\tau \xi - \bar{\gamma}_\tau \bar{\delta} + \bar{\gamma} \bar{\delta}_\tau) \frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial \xi} + i \bar{T} \frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial \tau} = -\bar{m}_i \bar{\gamma}^2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_i}{\partial \xi^2} + \bar{v}_i(\xi, \tau) \bar{\Psi}_i + \\ & + \left(\sum_{k=1}^2 G_{ik} \bar{T} \bar{\beta}_k \bar{g}(\xi) |\bar{\Psi}_k|^2 \right) \bar{\Psi}_i + \left(\sum_{k=1}^2 F_{ik} \bar{T} \bar{\beta}_k^2 \bar{f}(\xi) |\bar{\Psi}_k|^4 \right) \bar{\Psi}_i + \\ & + \left(\sum_{k=1}^2 G_{ik} \bar{T} \bar{\beta}_k \bar{g}(\xi) |\bar{\Psi}_k|^2 \right) \bar{\Psi}_i + \left(\sum_{k=1}^2 F_{ik} \bar{T} \bar{\beta}_k^2 \bar{f}(\xi) |\bar{\Psi}_k|^4 \right) \bar{\Psi}_i + \\ & + H_{ik} \bar{T} \bar{\beta}_i \bar{\beta}_k \bar{h}(\xi) |\bar{\Psi}_i|^2 |\bar{\Psi}_k|^2 \bar{\Psi}_i + i \bar{\Gamma}_i \bar{\Psi}_i , \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde o índice $i = 1, 2$ é sinônimo de cada uma das equações diferenciais que compreendem as Eqs. (2.18), e $H_{ik} \bar{\beta}_i \bar{\beta}_k \neq 0$ apenas para $i \neq k$. Ademais, $\bar{\gamma}_\tau = d\bar{\gamma}/d\tau$, $\bar{\delta}_\tau = d\bar{\delta}/d\tau$, $\bar{\Psi}_i = \Psi_i(x(\xi, \tau), t(\tau))$, $\bar{\Gamma}_i[\tau(t)] = \Gamma_i(t)$ e

$$\bar{v}_i(\xi, \tau) = \bar{\omega}(\tau) \frac{(\xi - \bar{\delta})^2}{\bar{\gamma}^2} + \bar{f}_1(\tau) \frac{(\xi - \bar{\delta})}{\bar{\gamma}} + \bar{f}_2(\tau) + \bar{T}(\tau) \bar{V}_i(\xi) . \quad (4.9)$$

O termo com uma primeira derivada na variável ξ na Eq. (4.8) pode ser eliminado

por meio da redefinição do campo

$$\bar{\Psi}_i(\xi, \tau) = \frac{e^{-i\bar{\alpha}(\xi, \tau)}}{\sqrt{\beta_i(\tau)}} \psi_i(\xi, \tau), \quad (4.10)$$

onde $\bar{\alpha}(\xi, \tau) = \frac{\bar{\gamma}_\tau}{4\bar{\gamma}}(\xi - \bar{\delta})^2 + \frac{\bar{\delta}_\tau}{2}(\xi - \bar{\delta}) - \bar{a}(\tau)$. A função $\bar{a}(\tau)$ é uma função real arbitrária. Desta maneira, as duas funções de campo $\psi_i(\xi, \tau)$ satisfazem o conjunto de duas ESNL dependentes do tempo, compactamente escritas como

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau} &= -\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} + U_i(\xi, \tau) \psi_i + \left(\sum_{k=1}^2 G_{ik} \bar{g}(\xi) |\psi_k|^2 \right) \psi_i + \left(\sum_{k=1}^2 F_{ik} \bar{f}(\xi) |\psi_k|^4 \right) \psi_i \\ &+ H_{ik} \bar{h}(\xi) |\psi_i|^2 |\psi_k|^2 \psi_i + i \left(\frac{\bar{\Gamma}_i}{\bar{T}} + \frac{\partial^2 \bar{\alpha}}{\partial \xi^2} + \frac{d}{d\tau} \ln \bar{\beta}_i^{1/2} \right) \psi_i, \end{aligned} \quad (4.11)$$

na qual

$$\begin{aligned} U_i(\xi, \tau) &= \left(\frac{\bar{\omega}(\tau)}{\bar{T}} - \frac{\bar{\gamma}_{\tau\tau} \bar{\gamma}}{4} \right) \frac{(\xi - \bar{\delta})^2}{\bar{\gamma}^2} + \left(\frac{\bar{f}_1(\tau)}{\bar{T}} - \frac{\bar{\delta}_{\tau\tau} \bar{\gamma}}{2} \right) \frac{(\xi - \bar{\delta})}{\bar{\gamma}} \\ &+ \left(\frac{\bar{f}_2(\tau)}{\bar{T}} + \frac{\bar{\delta}_\tau^2}{4} + \frac{d\bar{a}}{d\tau} \right) + V_i(\xi). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para simplificar as equações diferenciais, nós escolhemos as funções $\bar{\omega}(\tau)$, $\bar{f}_1(\tau)$ e $\bar{f}_2(\tau)$ nas formas

$$\bar{\omega}(\tau) = \frac{\bar{T} \bar{\gamma}_{\tau\tau} \bar{\gamma}}{4}, \quad \bar{f}_1(\tau) = \frac{\bar{T} \bar{\delta}_{\tau\tau} \bar{\gamma}}{2}, \quad \bar{f}_2(\tau) = -\bar{T} \left(\frac{\bar{\delta}_\tau^2}{4} + \frac{d\bar{a}}{d\tau} \right). \quad (4.13)$$

Assim, nós eliminamos a dependência explícita da Eq. (4.11) sobre τ , isto é

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau} &= -\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} + V_i(\xi) \psi_i + \left(\sum_{k=1}^2 G_{ik} \bar{g}(\xi) |\psi_k|^2 \right) \psi_i + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^2 F_{ik} \bar{f}(\xi) |\psi_k|^4 \right) \psi_i + H_{ik} \bar{h}(\xi) |\psi_i|^2 |\psi_k|^2 \psi_i. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nós buscamos soluções estacionárias na variável τ da forma

$$\psi_i(\xi, \tau) = \phi_i(\xi) \exp(-iE_i \tau) \quad (4.15)$$

de modo que $\phi_i(\xi)$ satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi_i}{d\xi^2} = & (V_i(\xi) - E_i)\phi_i + \left(\sum_{k=1}^2 G_{ik} \bar{g}(\xi) |\phi_k|^2 \right) \phi_i \\ & + \left(\sum_{k=1}^2 F_{ik} \bar{f}(\xi) |\phi_k|^4 \right) \phi_i + H_{ik} \bar{h}(\xi) |\phi_i|^2 |\phi_k|^2 \phi_i. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Desde que ainda temos duas equações diferenciais não lineares acopladas com não linearidades não homogêneas, vamos fazer outras transformações a fim de chegar a duas equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Para isso, nós impomos o requisito de que ξ seja uma função de outra variável ζ

$$\zeta = \Theta(\xi) \quad , \quad \xi = \bar{\Theta}(\zeta) \quad , \quad (4.17)$$

e fazemos uma redefinição em ϕ_i da forma

$$\bar{\phi}_i(\zeta) = \sqrt{\bar{\Theta}_\zeta} \Phi_i(\zeta) \quad . \quad (4.18)$$

Assim obtemos

$$\frac{d^2\Phi_i}{d\zeta^2} = -\mu_i \Phi_i + \left(\sum_{k=1}^2 G_{ik} |\Phi_k|^2 \right) \Phi_i + \left(\sum_{k=1}^2 F_{ik} |\Phi_k|^4 \right) \Phi_i + H_{ik} |\Phi_i|^2 |\Phi_k|^2 \Phi_i, \quad (4.19)$$

na qual

$$\begin{aligned} \mu_i = & -\bar{\Theta}_\zeta^2 (V_i[\xi(\zeta)] - E_i) + \frac{\bar{\Theta}_{\zeta\zeta\zeta}}{2\bar{\Theta}_\zeta} - \frac{3\bar{\Theta}_{\zeta\zeta}^2}{4\bar{\Theta}_\zeta^2} \quad , \quad \bar{g}[\xi(\zeta)] = \frac{1}{\bar{\Theta}_\zeta^3}, \\ \bar{f}[\xi(\zeta)] = & \bar{h}[\xi(\zeta)] = \frac{1}{\bar{\Theta}_\zeta^4}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Em termos da variável ξ temos

$$\begin{aligned} V_i(\xi) = & \left(\frac{\Theta''}{2\Theta'} \right)^2 - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\Theta''}{2\Theta'} \right) - \mu_i \Theta'^2 + E_i \quad , \quad \bar{g}(\xi) = \Theta'^3, \\ \bar{f}(\xi) = & \bar{h}(\xi) = \Theta'^4, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde $\Theta' = d\Theta/d\xi$. Observa-se que quando $\mu_i = E_i = 0$ então os potenciais $V_1 = V_2$, se manifestam como um potencial da mecânica quântica supersimétrico na variável ξ , e as funções de campo tornam-se em

$$\phi_i(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\Theta'(\xi)}} \Phi_i[\zeta(\xi)] \quad (i = 1, 2) \quad (4.22)$$

Finalmente, retornando às coordenadas espaço-tempo originais (x, t) , as funções de onda são dadas por

$$\Psi_i(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\beta_i(t)\Theta'[\xi(x, t)]}} \exp[-i\eta_i(x, t)] \Phi_i[\zeta(\xi(x, t))] \quad (i = 1, 2). \quad (4.23)$$

com $\eta_i(x, t) = \frac{\gamma t \gamma}{4T} x^2 + \frac{\delta t \gamma}{2T} x - a(t) + E_i \int_0^t dt' T(t')$. Aqui, $a(t)$ é uma função arbitrária. Ademais, as funções ω , f_1 e f_2 aparecem como

$$\omega(t) = \frac{\gamma}{4} \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma t}{T} \right) \quad , \quad f_1(t) = \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta t}{T} \right) \quad , \quad f_2(t) = -\frac{\delta t^2}{4T} - \frac{da}{dt}, \quad (4.24)$$

revelando a conexão intrínseca entre a frequência $\omega(t)$, as forças $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e as funções reais $\gamma(t)$, $\delta(t)$ e $T(t)$, as quais aparecem na primeira transformação de coordenadas e na reparametrização temporal, Eq. (4.7). Note que a função real arbitrária $a(t)$ poderia ser escolhida tal que $da/dt = T(\delta_t/2T)^2$ se $f_2(t)$ não está presente na Eq. (4.24).

Portanto, nós temos mostrado como um sistema específico de ESNLCQ com coeficientes modulados, Eq. (2.18), pode ser mapeado em um sistema de equações diferenciais não lineares de segunda ordem unidimensional acopladas, Eq. (4.19), lançando mão de transformações canônicas de ponto e redefinições do campo escalar complexo, Eqs. (4.7), (4.10), (4.15), (4.16), e (4.22).

4.3 Soluções analíticas exatas

Para resolver o sistema de ESNLCQs acopladas com coeficientes constantes, Eqs. (4.19), nós vamos supor que esse sistema de equações são equações de movimento estáticas (com ζ como a coordenada espacial) do setor bosônico de um modelo supersimétrico relativístico de dois campos escalares reais interagentes em (1+1) dimensões do espaço-tempo. No modelo supersimétrico, Φ_1 e Φ_2 são os dois campos escalares reais interagindo. Então Φ_1 e Φ_2 são configurações estáticas clássicas sobre ζ e as Eqs.(4.19) são escritas como

$$\frac{d^2\Phi_1}{d\zeta^2} = \frac{\partial U(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial\Phi_1} \quad , \quad \frac{d^2\Phi_2}{d\zeta^2} = \frac{\partial U(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial\Phi_2}, \quad (4.25)$$

onde $U(\Phi_1, \Phi_2)$ é o potencial de interação entre os campos do modelo considerado.

Assim, devido à igualdade

$$\frac{\partial^2 U(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial\Phi_2\partial\Phi_1} = \frac{\partial^2 U(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial\Phi_1\partial\Phi_2}, \quad (4.26)$$

descobrimos que os coeficientes dos termos não lineares em (4.19) devem ser relacionados uns aos outros sob a forma $G_{12} = G_{21}$, $H_{12} = 2F_{21}$ and $H_{21} = 2F_{12}$.

O potencial de interação entre os campos de um modelo supersimétrico pode ser

escrito como

$$U(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \Phi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi_2} \right)^2 \right] \quad (4.27)$$

onde $W(\Phi_1, \Phi_2)$ é chamado de superpotencial.

Como é bem conhecido [83, 84], as soluções de energia mínima encontradas para o setor bosônico de um modelo supersimétrico, são sólitons topológicos do tipo Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) e tipo não-BPS. Nós apenas trabalhamos com os sólitons BPS, porque eles são soluções estáveis classicamente, pelo menos ao nível da Teoria Clássica de Campos em (1+1) dimensões do espaço-tempo [85]. Neste caso, pode ser demonstrado que as soluções das equações BPS

$$\frac{d\Phi_1}{d\zeta} = \frac{\partial W(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial \Phi_1}, \quad \frac{d\Phi_2}{d\zeta} = \frac{\partial W(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial \Phi_2}, \quad (4.28)$$

são também soluções das equações de movimento estáticas (4.25) e são aqueles que saturam a energia do sistema ao menor valor, também conhecido como energia BPS. É importante notar que a estabilidade das sólitons BPS não garante a estabilidade dos soluções em (4.23) para o sistema de ESNLCQ acopladas (2.18).

A fim de encontrar soluções de (4.28), usamos o método desenvolvido em [86, 87]. As equações diferenciais da Eq. (4.28) podem ser relacionadas como segue

$$\frac{d\Phi_1}{W_{\Phi_1}} = d\zeta = \frac{d\Phi_2}{W_{\Phi_2}}, \quad (4.29)$$

onde o elemento diferencial espacial é invariante. Assim, obtemos

$$\frac{d\Phi_1}{W_{\Phi_1}} = \frac{d\Phi_2}{W_{\Phi_2}}, \quad (4.30)$$

esta equação é conhecida como equação diferencial de órbita. Em geral, esta equação é uma equação diferencial não linear que relaciona os campos $\Phi_1(\zeta)$ e $\Phi_2(\zeta)$. Ora, se nós podemos achar as soluções completas das equações diferenciais da Eq. (4.30), a função $\Phi_1(\Phi_2)$ pode ser usada para eliminar um dos campos, desacoplando as equações diferenciais da Eq. (4.28). Finalmente, essas equações não lineares de primeira ordem desacopladas podem ser resolvidas analítica ou numericamente.

4.3.1 Sistema de equações diferenciais acopladas com não linearidade cúbica

Para realizar esta técnica, escolhemos

$$\mu_k = 2\lambda^2, \quad G_{11} = G_{22} = 2\lambda^2, \quad G_{12} = G_{21} = 6\lambda^2, \quad H_{kl} = F_{kl} = 0. \quad (4.31)$$

Com esta escolha de parâmetros, as equações diferenciais de segunda ordem (4.19) são reduzidas a equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d\Phi_1}{d\zeta} = \lambda\Phi_1^2 + \lambda\Phi_2^2 - \lambda \quad , \quad \frac{d\Phi_2}{d\zeta} = 2\lambda\Phi_1\Phi_2. \quad (4.32)$$

A equação de órbita é da forma

$$\Phi_1^2 = 1 + c_0\Phi_2 + \Phi_2^2,$$

onde c_0 é uma constante de integração cujo valor crítico é -2 . Sugerimos ao leitor a referência [91] para maiores detalhes do valor crítico da constante de integração em modelos supersimétricos relativísticos de dois campos escalares reais interagentes.

As soluções de (4.32) são [86, 92]

$$\begin{aligned} \Phi_1(\zeta) &= -\frac{\sqrt{c_0^2 - 4} \sinh(2\lambda\zeta)}{\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2\lambda\zeta) - c_0}, \\ \Phi_2(\zeta) &= \pm \frac{2}{\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2\lambda\zeta) - c_0} \quad \text{para } c_0 < -2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\Phi_1(\zeta) = -\frac{\tanh(\lambda\zeta) \mp 1}{2} \quad , \quad \Phi_2(\zeta) = \frac{1 \pm \tanh(\lambda\zeta)}{2} \quad \text{para } c_0 = -2, \quad (4.34)$$

Estas soluções $\Phi_1(\zeta)$ e $\Phi_2(\zeta)$, para $c_0 < -2$, exibem perfis do tipo sólitons escuro e brilhante, respectivamente, como é mostrado na Figura 4.1. Quando c_0 está se aproximando de seu valor crítico, a solução do tipo sólton escuro se alonga, enquanto que a amplitude e a largura da solução do tipo sólton brilhante incrementa.

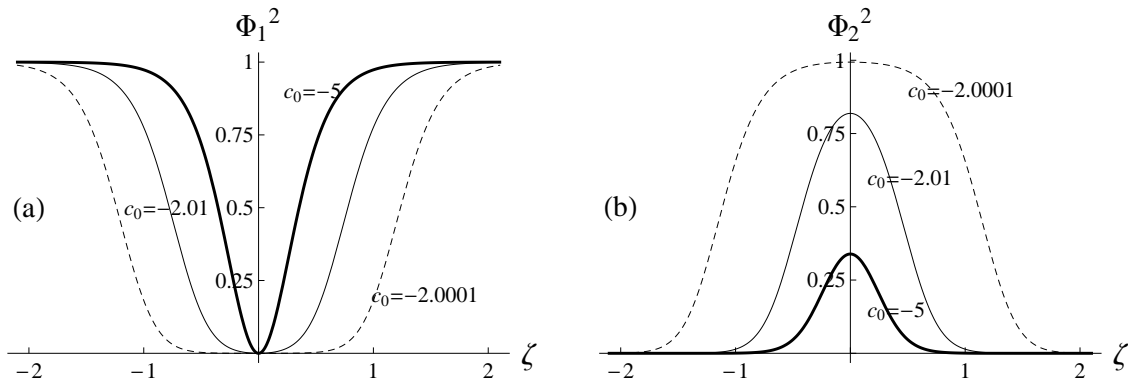


Figura 4.1: Perfis das amplitudes dos componentes da solução tipo sólton escuro-brilhante, Eq. (4.33): (a) Perfil tipo sólton escuro $\Phi_1^2(\zeta)$; (b) Perfil tipo sólton brilhante $\Phi_2^2(\zeta)$. Para $\lambda = 2.5$.

4.3.2 Sistema de equações diferenciais acopladas com não linearidades cúbica e quártica

Neste caso, para utilizar a técnica de equação de órbita, escolhemos

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mu_2 = -\rho^2 \quad , \quad G_{11} = 4\kappa\rho, G_{22} = 4\rho\lambda, \\ G_{12} &= G_{21} = 6\rho(\lambda + \kappa) \quad , \quad H_{12} = 2F_{21} = 6\kappa(2\lambda + 3\kappa) \quad , \\ H_{21} &= 2F_{12} = 6\lambda(3\lambda + 2\kappa) \quad , \quad F_{11} = 3\kappa^2 \quad \text{e} \quad F_{22} = 3\lambda^2.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Com esta escolha de parâmetros pode-se lidar com as equações diferenciais não lineares de segunda ordem, Eq. (4.28), que agora são as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d\Phi_1}{d\zeta} = \Phi_2(\lambda\Phi_2^2 + 3\kappa\Phi_1^2 + \rho) \quad , \quad \frac{d\Phi_2}{d\zeta} = \Phi_1(3\lambda\Phi_2^2 + \kappa\Phi_1^2 + \rho).\quad (4.36)$$

Em seguida, a equação é órbita

$$\begin{aligned}& \left(\Phi_2^2 + \frac{\rho}{4\lambda}\right)^{2\sqrt{9b^2-14b+9}} \left(2\varphi - \sqrt{9b^2-14b+9}\right)^{3(b+1)+\sqrt{9b^2-14b+9}} \\ &= c_0 \left(2\varphi + \sqrt{9b^2-14b+9}\right)^{3(b+1)-\sqrt{9b^2-14b+9}},\end{aligned}$$

onde c_0 é uma constante real arbitrária, $b = \frac{\lambda}{\kappa}$ e $\varphi = \frac{\Phi_1^2 + \frac{\rho}{4\kappa}}{\Phi_2^2 + \frac{\rho}{4\lambda}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\kappa} - 1\right)$. Esta equação se reduz a uma forma mais manejável algebricamente, quando $\lambda = \kappa$. Para este caso, a equação da órbita, com a qual iremos trabalhar daqui para frente, é

$$\Phi_1^2(\Phi_1^2 - c_0) + \Phi_2^2(\Phi_2^2 - c_0) - 2\Phi_1^2\Phi_2^2 - c_0\frac{\rho}{2\kappa} = 0.\quad (4.37)$$

Nesta situação, c_0 têm dois valores críticos, 0 e $-\frac{2\rho}{\kappa}$, ver referência [91]. A partir da Eq. (4.37) encontramos que

$$\Phi_1^2 = \frac{1}{2} \left(2\Phi_2^2 + c_0 + \sqrt{c_0 \left(8\Phi_2^2 + c_0 + \frac{2\rho}{\kappa} \right)} \right).\quad (4.38)$$

Substituindo a Eq. (4.38) nas equações diferenciais de primeira ordem da Eq. (4.36) e integrando obtemos $\Phi_1(\zeta)$ e $\Phi_2(\zeta)$.

Os perfis dos campos $\Phi_1(\zeta)$ e $\Phi_2(\zeta)$ são mostrados na Figura 4.2. Os perfis mostram como a solução Φ_1 do tipo sóliton cinza torna-se uma do tipo sóliton escuro largo e a solução Φ_2 de tipo sóliton escuro torna-se uma do tipo sóliton escuro largo, quando c_0 se aproxima do seu valor crítico 0.

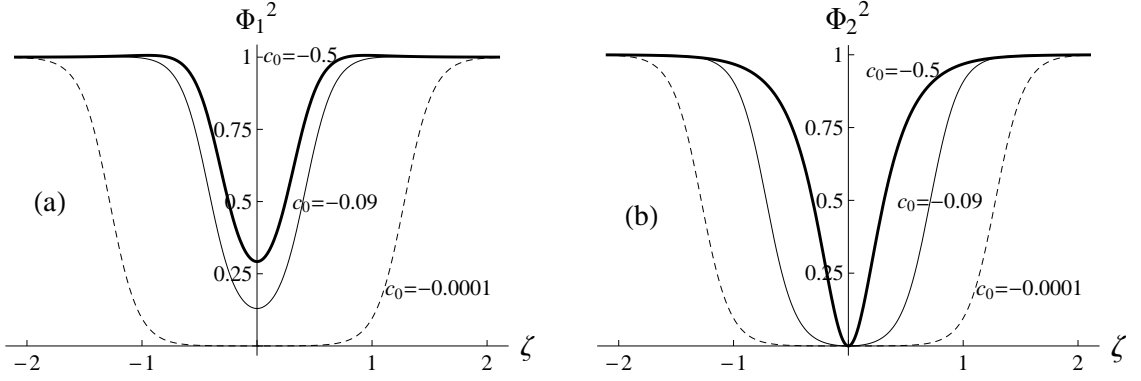


Figura 4.2: Perfis das amplitudes dos componentes da solução: (a) sóliton cinza Φ_1 tornando-se um sóliton escuro largo; (b) sóliton escuro Φ_2 tornando-se um sóliton escuro largo. Com $\kappa = -1$ e $\rho = 4$.

Agora, consideramos a segunda solução da Eq. (4.37), isto é

$$\Phi_1^2 = \frac{1}{2} \left(2\Phi_2^2 + c_0 - \sqrt{c_0 \left(8\Phi_2^2 + c_0 + \frac{2\rho}{\kappa} \right)} \right). \quad (4.39)$$

Novamente, substituindo a Eq. (4.39) nas equações diferenciais de primeira ordem da Eq. (4.36) e integrando obtemos $\Phi_1(\zeta)$ e $\Phi_2(\zeta)$. A Figura 4.3 mostra os perfis das amplitudes dos campos $\Phi_1(\zeta)$ e $\Phi_2(\zeta)$. Daí pode-se ver que uma solução do tipo sóliton brilhante em um pedestal (também chamadas sóliton anti-escuro por Crosta *et al.* nas referências [88]-[90]) torna-se uma a solução do tipo sóliton brilhante largo em um pedestal, e solução do tipo sóliton escuro torna-se uma solução tipo do sóliton escuro larga, quando c_0 se aproxima do seu valor crítico $-\frac{2\rho}{\kappa}$.

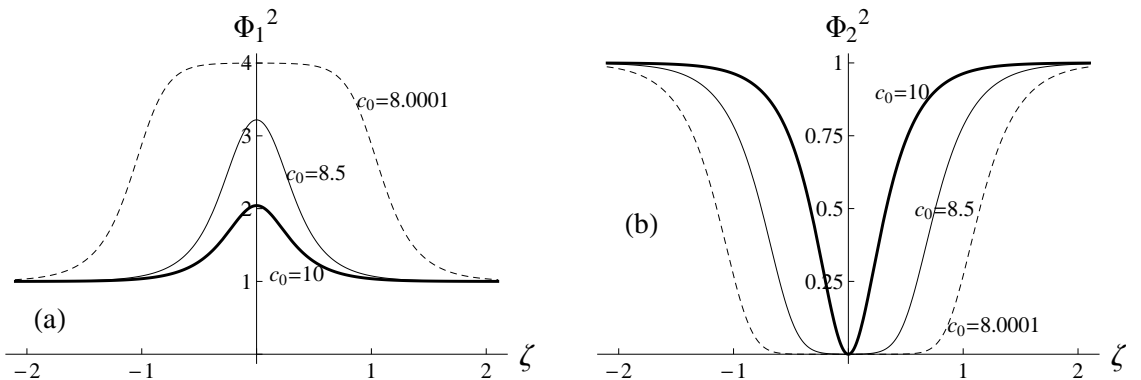


Figura 4.3: Comportamento dos perfis das amplitudes dos componentes da solução: (a) sóliton brilhante em um pedestal Φ_1 tornando-se um sóliton brilhante largo em um pedestal; (b) sóliton escuro Φ_2 tornando-se um sóliton escuro largo. Com $\kappa = -1$ e $\rho = 4$.

Nós recomendamos ao leitor as referências [86], [91] e [92], para apreciar os detalhes sobre o papel desempenhado pela constante c_0 na variedade de soluções e as consequências de tais soluções em modelos específicos.

4.4 Sólitos vetoriais largos num BEC de uma espécie atômica com dois estados internos diferentes

Como mencionamos acima, o sistema de duas ESNCQ acopladas com coeficientes modulados, Eq. (2.18), pode descrever a dinâmica de um BEC de átomos da mesma espécie com dois estados atômicos internos diferentes. Para modelar a evolução do BEC, vamos considerar os parâmetros dados na Eq. (4.31).

Além disso, nós consideramos que: $T(t) = \gamma^2(t)$ and $\beta_i(t) = \gamma^{-1}(t)$. Com esta escolha, temos $m_i(t) = 1$ (massa constante) e $\Gamma_i(t) = 0$ (sistema conservativo). Nós também escolhemos $E_1 = E_2 = E > 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ e

$$\begin{aligned} \Theta(\xi) &= \int \sqrt{\frac{(E-1-q)(E-q)(E-1)}{\mu(E-1-q+q\text{sn}^2(\xi|q))^2}} d\xi, \\ \gamma(t) &= \frac{2\gamma_0}{5-2\sin(2\nu t)}, \quad \delta(t) = 0 \quad \text{e} \quad a(t) = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde $\text{sn}(|q)$ é a integral elíptica de Jacobi senoidal, q é o parâmetro elíptico, $0 \leq q \leq 1$.

Substituindo a Eq. (4.40) nas Eqs. (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.21), e (4.24) obtém-se o potencial de armadilhamento e as intensidades da interação entre dois bósons, para ambos componentes, da forma

$$v_i(x, t) = \omega(t) x^2 + 2q\gamma^2(t) \text{sn}^2(\xi|q), \quad (4.41)$$

$$g_{kl}(x, t) = G_{kl} \left(\frac{(E-1-q)(E-q)(E-1)}{\mu} \right)^{3/2} \frac{\gamma(t)}{(E-1-q+q\text{sn}^2(\xi|q))^3} \quad (4.42)$$

onde $\omega(t) = -\frac{2\nu^2 \sin(2\nu t)}{5-2\sin(2\nu t)}$ e $\xi = \gamma(t) x$.

Como pode ser visto a partir da Eq. (4.41), o potencial de armadilhamento compõe-se de um potencial harmônico e um potencial periódico, ou seja, uma armadilha magnética e uma rede óptica, que são ingredientes importantes de montagens experimentais BEC [93, 94].

A Figura 4.4 mostra o potencial de armadilhamento $v_i(x, t)$ e a intensidade da interação entre dois bósons $g_{11}(x, t)$. Da Figura 4.4 pode-se observar, o comportamento periódico e a simetria espacial do potencial de armadilhamento, e o comportamento periódico da da interação entre dois bósons $g_{11}(x, t)$. O comportamento das intensidades $g_{22}(x, t)$, $g_{12}(x, t)$, e $g_{21}(x, t)$ é similar ao de $g_{11}(x, t)$. Queremos mencionar que a figura do potencial de armadilhamento, por sua estética, foi escolhida para ser exibida na seção *on-line Kaleidoscope* da revista *Physical Review E* (Novembro 2013).

É importante ressaltar que estamos considerando um BEC de átomos da mesma espécie com dois estados atômicos diferentes cujas interações entre dois átomos, em qualquer estado interno, são repulsivas. Isto pode ser deduzido a partir da Figura 4.4, $g_{11}(x, t) > 0$.

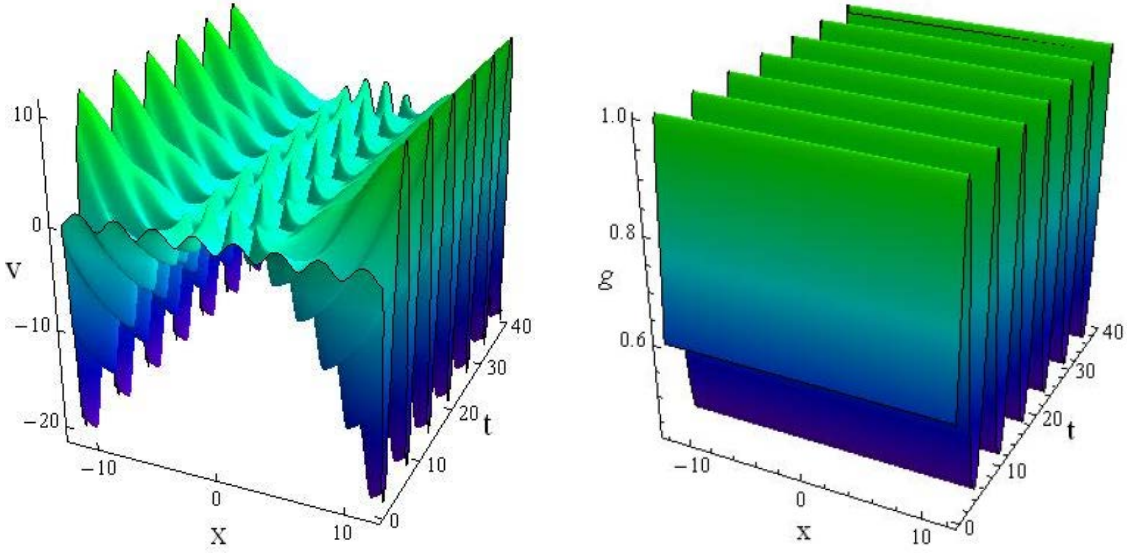


Figura 4.4: (direita) Potencial de armadilhamento para BECs, Eq. (4.41). (esquerda) Não linearidade cúbica, Eq. (4.42). Com $q = 0.5$, $E = 50$, $\nu = 0.5$, $\lambda = 2.5$ e $\gamma_0 = 3$.

Para encontrar os componentes do sóliton vetorial, usamos as Eqs. (4.33) e (4.40) e as substituímos na Eq. (4.23), assim obtemos as expressões

$$\Psi_1(x, t) = -\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\gamma_0\lambda(E-1-q+q\operatorname{sn}^2(\xi, q))}{(5-2\sin(2\nu t))\sqrt{(E-1-q)(E-q)(E-1)}}} \times \frac{\sinh(2\lambda\Theta(\xi))}{\cosh(2\lambda\Theta(\xi)) - \frac{c_0}{\sqrt{c_0^2-4}}} \times \exp\left\{-i\left[\frac{\nu\cos(2\nu t)}{5-2\sin(2\nu t)}x^2 + E\int_0^t dt' \left(\frac{\gamma_0}{5-2\sin(2\nu t')}\right)^2\right]\right\}, \quad (4.43)$$

$$\Psi_2(x, t) = \pm\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\gamma_0\lambda(E-1-q+q\operatorname{sn}^2(\xi, q))}{(5-2\sin(2\nu t))\sqrt{(E-1-q)(E-q)(E-1)}}} \times \frac{2}{\sqrt{c_0^2-4}\cosh(2\lambda\Theta(\xi)) - c_0} \times \exp - i\left[\frac{\nu\cos(2\nu t)}{5-2\sin(2\nu t)}x^2 + E\int_0^t dt' \left(\frac{\gamma_0}{5-2\sin(2\nu t')}\right)^2\right], \quad (4.44)$$

onde $\Theta(\xi) = \sqrt{\frac{(E_1-q)(E_1-1)}{2\lambda^2(E_1-1-q)}} \frac{\Pi\left(-\frac{q}{E_1-1-q}; \operatorname{am}(\xi, q) \backslash q\right) \operatorname{dn}(\xi, q)}{\sqrt{1+q\operatorname{sn}^2(\xi, q)}}$, com Π a integral elíptica completa de terceiro tipo e $\operatorname{am}(\xi, \nu)$ a amplitude elíptica, ver referência [73]. Pode-se ver, a partir das Eqs. (4.43) e (4.44) que o parâmetro de ordem macroscópico $\Psi_1(x, t)$ é um sóliton escuro e o parâmetro de ordem $\Psi_2(x, t)$ é um sóliton brilhante. É importante dizer que, o

sóliton brilhante só pode ser encontrado em BEC de átomos com um único estado atômico interno, se eles têm comprimento de espalhamento negativo, ou seja, se os átomos têm uma interação atraente $g_{kl}(x, t) < 0$. Os perfis das componentes do sóliton vetorial, Eqs. (4.43) e (4.44), são mostrados na Figura (4.5)

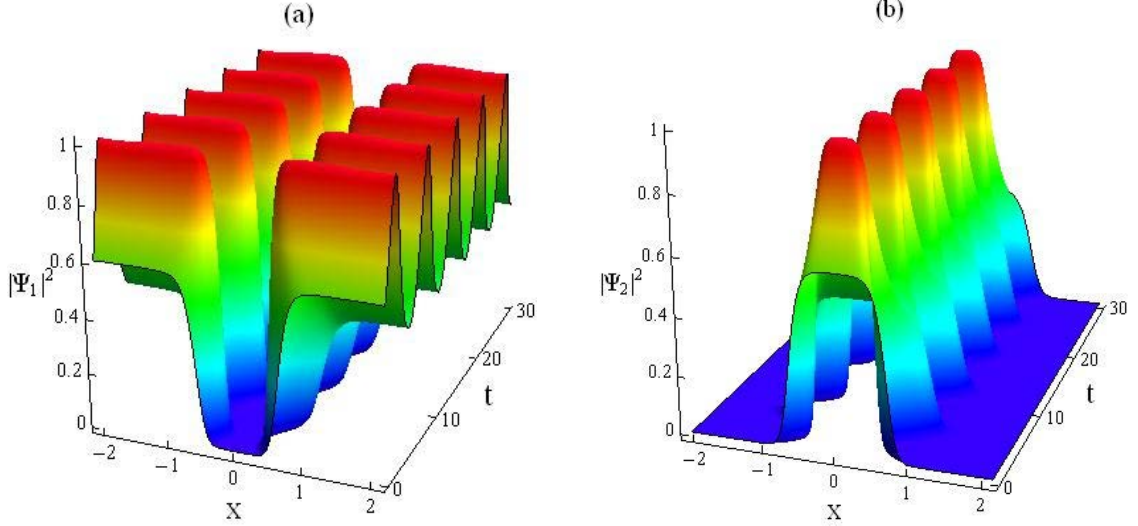


Figura 4.5: Amplitudes dos componentes do sóliton vetorial escuro-brilhante para BECs: (a) $|\Psi_1(x, t)|^2$, sóliton escuro largo, Eq. (4.43); (b) $|\Psi_2(x, t)|^2$, sóliton brilhante largo, (4.44). Com $\lambda = 2.5$, $\nu = 0.5$, $c_0 = -2.0001$, $q = 0.5$, $E_1 = E_2 = 50$ e $\gamma_0 = 3$.

4.5 Sólitons vetoriais largos na propagação do pulso de luz polarizada

Para o caso em que as duas ESNLCQ acopladas com coeficientes modulados, Eq. (2.18), descreve a propagação de pulsos de luz polarizada através de uma fibra óptica, nós consideramos o seguinte vínculo entre as funções

$$\begin{aligned} T(t) &= \gamma_t(t) \quad , \quad \delta(t) = 0 \quad , \quad a(t) = 0, \\ E_k &= \mu_k \quad \text{e} \quad \Theta(\xi) = \xi. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Com a relação adequada entre as funções, vemos que $v_k(x, t) = 0$. A forma explícita das funções $\gamma(t)$ e $\beta_k(t)$, são

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \frac{\beta_0 \gamma_0^2 (\Omega^2 + \sigma^2)}{\sigma - e^{\sigma t} (\sigma \cos(\Omega t) + \Omega \sin(\Omega t)) + \beta_0 \gamma_0 (\Omega^2 + \sigma^2)}, \\ \beta_k(t) &= \frac{e^{-\sigma t} (\sigma - e^{\sigma t} (\sigma \cos(\Omega t) + \Omega \sin(\Omega t)) + \beta_0 \gamma_0 (\Omega^2 + \sigma^2))^2}{\beta_0 \gamma_0^2 (\Omega^2 + \sigma^2)^2}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde $\gamma_0 = \gamma(0)$, $\beta_0 = \beta_k(0)$ e $|\beta_0\gamma_0\omega| > 1$.

Substituindo as Eqs. (4.45) e (4.46) nas Eqs. (4.3), (4.4), (4.5), e (4.6), podemos obter o parâmetro de dispersão $m_k(t)$, as não linearidades Kerr e não-Kerr $g_{kl}(t)$, $f_{kl}(t)$, $h_{kl}(t)$, e o coeficiente de amplificação ou absorção $\Gamma(t)$

$$m_k(t) = e^{\sigma t} \cos(\Omega t) / \beta_0 \gamma_0^2, \quad (4.47)$$

$$g_{kl}(x, t) = G_{kl} \cos(\Omega t), \quad (4.48)$$

$$\frac{f_{kl}(x, t)}{F_{kl}} = \frac{h_{kl}(x, t)}{H_{kl}} = \frac{e^{-\sigma t} \cos(\Omega t) (\sigma - e^{\sigma t} (\sigma \cos(\Omega t) + \Omega \sin(\Omega t)) + \beta_0 \gamma_0 (\Omega^2 + \sigma^2))^2}{\beta_0 \gamma_0^2 (\Omega^2 + \sigma^2)^2}, \quad (4.49)$$

$$\Gamma_k(t) = \frac{\sigma^2 + e^{\sigma t} \Omega (\Omega \cos(\Omega t) - \sigma \sin(\Omega t)) + \beta_0 \gamma_0 \sigma (\Omega^2 + \sigma^2)}{2(\sigma - e^{\sigma t} (\sigma \cos(\Omega t) + \Omega \sin(\Omega t)) + \beta_0 \gamma_0 (\Omega^2 + \sigma^2))}. \quad (4.50)$$

Queremos indicar que o parâmetro de dispersão $m_k(t)$, bem como a não linearidade Kerr $g_{kl}(x, t)$, têm exatamente as mesmas expressões que foram usadas por Serkin *et al.* [16, 27] e por Hao *et. al* [50].

As evoluções das funções $m_k(t)$, $g_{kl}(x, t)$, $f_{kl}(x, t)$, $h_{kl}(x, t)$, e $\Gamma_k(t)$ são mostradas na Figura 4.6. A partir delas, pode-se observar que, quando $\sigma = 0$ existe um balanço entre os efeitos produzidos pelo parâmetro de dispersão $m_k(t)$, pelas não-linearidades Kerr e não Kerr $g_{kl}(x, t)$, $f_{kl}(x, t)$, $h_{kl}(x, t)$, e os efeitos produzidos pelo coeficiente de amplificação ou de absorção $\Gamma_k(t)$. Conforme explicado no Capítulo 3, estes efeitos são importantes na criação de um sóliton.

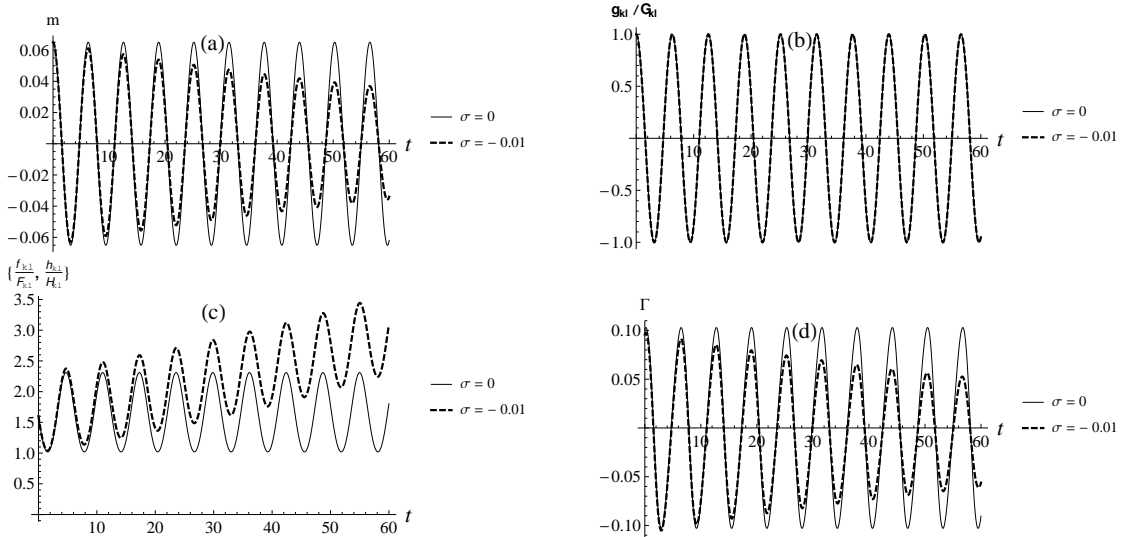


Figura 4.6: Comportamento: (a) do parâmetro de dispersão $m_k(t)$, Eq.(4.47); (b) da não linearidade Kerr $g_{kl}(x, t)$, Eq. (4.48); (c) das não linearidades Kerr e não-Kerr $f_{kl}(x, t)$ e $h_{kl}(x, t)$, Eq. (4.49); (d) do coeficiente de amplificação ou absorção $\Gamma_k(t)$, Eq. (4.50).

Neste ponto, vamos mostrar os componentes dos sólitons vetoriais que resolvem as equações diferenciais da Eq. (2.18).

O primeiro conjunto de soluções é obtido por substituição das Eqs. (4.33), (4.45), e (4.46) na Eq. (4.23). Assim, as amplitudes das soluções analíticas são indicadas pelas expressões

$$|\Psi_1(x, t)| = \frac{\sqrt{\beta_0} \gamma_0 (\Omega^2 + \sigma^2) e^{\sigma t/2}}{(\sigma - e^{\sigma t} (\sigma \cos(\Omega t) + \Omega \sin(\Omega t)) + \beta_0 \gamma_0 (\Omega^2 + \sigma^2))} \times \frac{\sinh(2\lambda \xi)}{\cosh(2\lambda \xi) - \frac{c_0}{\sqrt{c_0^2 - 4}}}, \quad (4.51)$$

$$|\Psi_2(x, t)| = \frac{\sqrt{\beta_0} \gamma_0 (\Omega^2 + \sigma^2) e^{\sigma t/2}}{(\sigma - e^{\sigma t} (\sigma \cos(\Omega t) + \Omega \sin(\Omega t)) + \beta_0 \gamma_0 (\Omega^2 + \sigma^2))} \times \frac{2}{\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2\lambda \xi) - c_0}, \quad (4.52)$$

onde $\xi = \frac{\beta_0 \gamma_0^2 (\Omega^2 + \sigma^2)}{\sigma - e^{\sigma t} (\sigma \cos(\Omega t) + \Omega \sin(\Omega t)) + \beta_0 \gamma_0 (\Omega^2 + \sigma^2)} x$. Estas soluções analíticas, Eqs. (4.51) e (4.52), descrevem a propagação de um pulso de luz polarizado através de uma fibra óptica com apenas não linearidade Kerr.

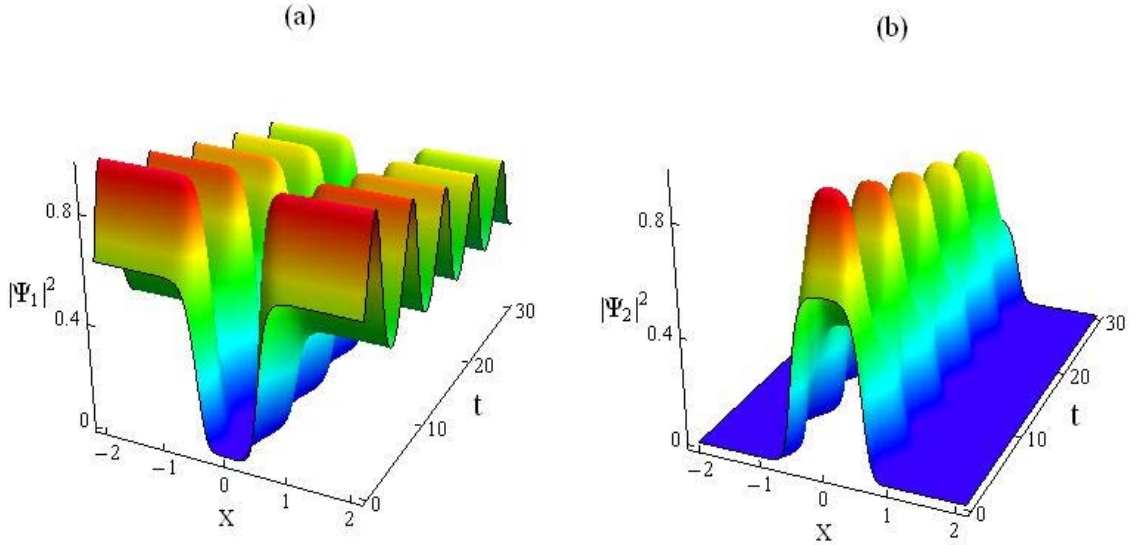


Figura 4.7: Propagação das intensidades dos componentes da solução analítica vetorial: (a) $|\Psi_1(x, t)|^2$ solução com perfil sóliton escuro, Eq. (4.51); (b) $|\Psi_2(x, t)|^2$ solução com perfil sóliton brilhante, Eq. (4.52). Com $\lambda = 2$, $c_0 = -2.0001$, $\gamma_0 = 3.1$, $\beta_0 = 1.6$, $\Omega = 1$ e $\sigma = -0.01$.

Quando $\sigma = 0$, as soluções analíticas, Eqs. (4.51) e (4.52), são as componentes vetoriais de um sóliton escuro-brilhante. O comportamento das intensidades dos componentes tipo sóliton escuro-brilhante, Eqs. (4.51) e (4.52), durante a propagação é análogo ao comportamento mostrado na Figura 4.5.

A Figura 4.7 mostra o propagação da intensidade das soluções analíticas exatas, Eqs.

(4.51) e (4.52), para $\sigma < 0$, que corresponde ao processo de absorção. Como pode ser visto claramente as amplitudes de $|\Psi_1(x, t)|$ e $|\Psi_2(x, t)|$ diminuem durante a propagação. Neste situação ($\sigma \neq 0$), o balanceamento entre os efeitos do parâmetro de dispersão, das não linearidades e da amplificação ou absorção é quebrado.

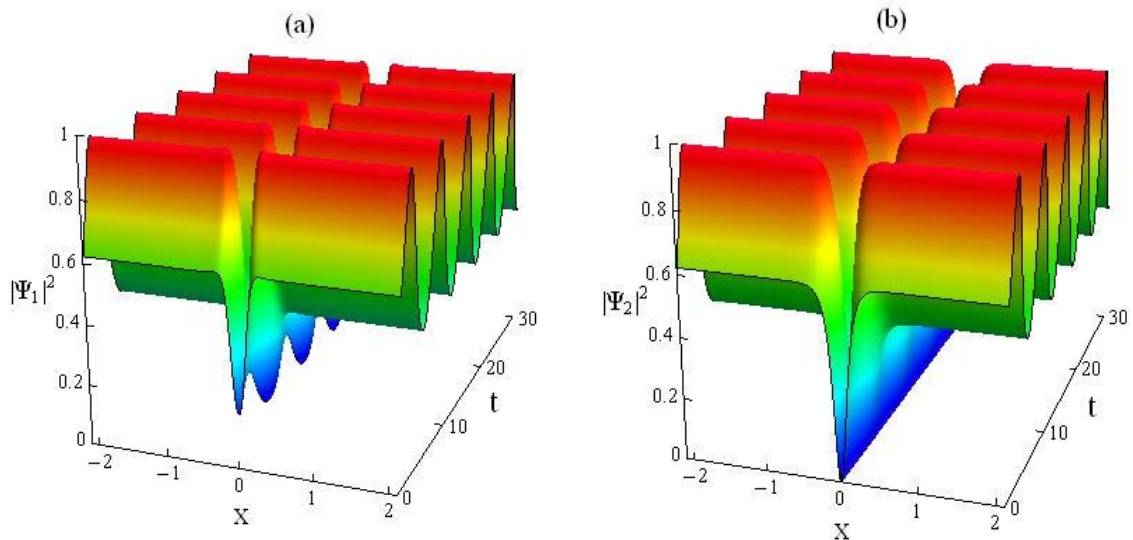


Figura 4.8: Propagação das intensidades do sóliton cinza-escuro: (a) $|\Psi_1(x, t)|^2$ sóliton cinza; (b) $|\Psi_2(x, t)|^2$ sóliton escuro. Com $\kappa = -1$, $\rho = 4$, $\Omega = 1$, $c_0 = -0.5$, $\gamma_0 = 3.1$, $\beta_0 = 1.6$ e $\sigma = 0$.

O segundo conjunto de soluções é obtido por substituição das Eqs. (4.36), (4.38), (4.45), e (4.46) na Eq. (4.23). Quando $\sigma = 0$, as soluções numéricas, $\Psi_1(x, t)$ e $\Psi_2(x, t)$, obtidas aqui são as componentes de um sóliton cinza-escuro. O comportamento das amplitudes do sóliton cinza-escuro é mostrado na Figura 4.8. Quando c_0 se aproxima de seu valor crítico zero, o sóliton cinza-escuro muda para um sóliton escuro-escuro largo. As intensidades das componentes do sóliton escuro-escuro largo são mostradas na Figura 4.9. Neste caso, quando $\sigma < 0$ a intensidade das componentes das soluções tipo cinza-escuro, obtidas aqui, apresentam o mesmo comportamento mostrada na Figura 4.7.

Finalmente, o terceiro e último conjunto de soluções é obtido por substituição das Eqs. (4.36), (4.39), (4.45), e (4.46) na Eq. (4.23). Neste caso, quando $\sigma = 0$ as soluções numéricas, $\Psi_1(x, t)$ e $\Psi_2(x, t)$, obtidas compreendem um sóliton vetorial, cujas componentes são um sóliton brilhante em um pedestal (também chamadas sóliton anti-escuro, [88, 89, 90]) e um sóliton escuro. Quando c_0 se aproxima a seu valor crítico $-2\rho/\kappa$, a intensidade das componetes sóliton brilhante-escuro torna-se em um sóliton brilhante-escuro largo. As intensidades do sóliton brilhante-escuro largo são mostradas na Figura 4.10.

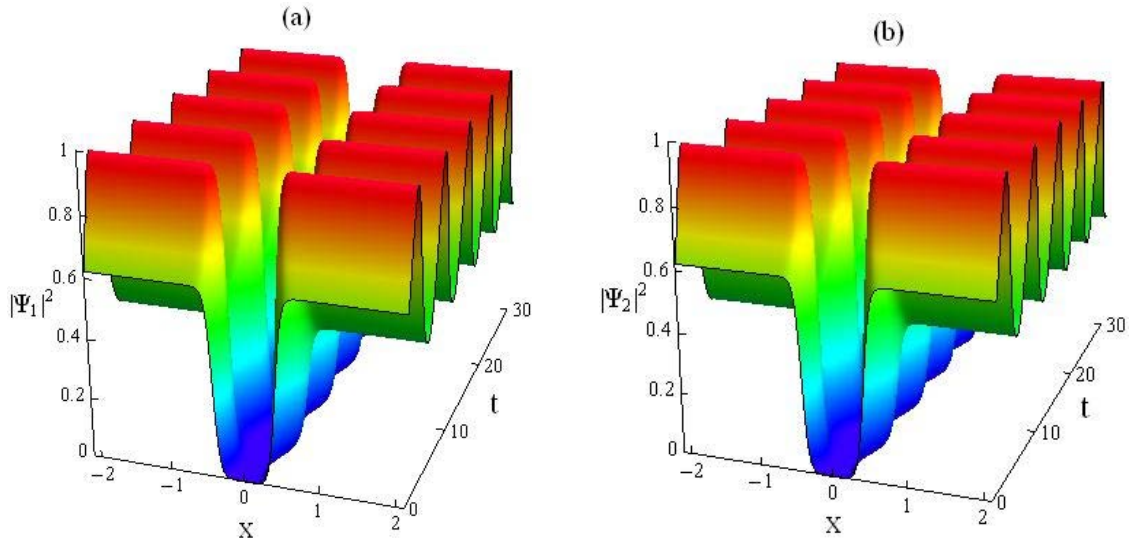


Figura 4.9: Propagação da intensidade das componentes do sóliton escuro-escuro largo: (a) $|\Psi_1(x, t)|^2$ sóliton escuro largo; (b) $|\Psi_2(x, t)|^2$ sóliton escuro largo. Com $\kappa = -1$, $\rho = 4, \Omega = 1$, $c_0 = -0.0001$, $\gamma_0 = 3.1$, $\beta_0 = 1.6$ e $\sigma = 0$.

4.6 Comentários

É importante mencionar que a possibilidade de emparelhamento de sólitons ópticos brilhantes e escuros em condições de XPM de ondas em um meio não linear com dispersão foi mostrado analiticamente por Afanas'ev *et al.* [95]. Nessa referência, foi predito que em determinadas circunstâncias, novas quase partículas podem ser produzidas como resultado do emparelhamento de sólitons ópticos. Diferentes cenários físicos de propagação e interação de sólitons brilhantes e escuros emparelhados foram considerados por Trillo *et al.* [96] e por Afanasjev *et al.* [97, 98]. O principal mecanismo físico de soliton brilhante-escuro (sóliton molecular) foi considerado em detalhe nesses artigos pioneiros. É interessante notar que a energia de ligação do sóliton desempenha um papel importante no sóliton emparelhado, como foi mostrado recentemente por Belyaeva *et al.* [99].

Além disso, estudos detalhados sobre ESNLCQ em óptica e em BECs foram realizados por Crosta *et al.* em [88, 89, 90]. Nessas referências, soluções analíticas (sólitons) são obtidas e sua estabilidade bem como a relação com choques dispersivos são analisadas. Nesses trabalhos os autores tratam com uma ESNLCQ com coeficientes constantes e reportam o aparecimento da coexistência de sólitons escuro e anti-escuro (sóliton brilhante em um pedestal). Embora aqui estamos tratando com duas ESNLCQ com coeficientes modulados, nós também encontramos tais estruturas, ou seja, sólitons escuro e anti-escuro largos (sóliton brilhante largo em um pedestal), como mostrado nas Figura 4.10.

Finalmente, gostaríamos de mencionar o trabalho interessante desenvolvido por Kanna e Sakkaravarthi [100]. Nesse trabalho os autores lidam com sólitons multicomponentes acoplados descritos por ESNLs acopladas coerentemente com coeficientes constantes. Num caso específico foi encontrada uma solução vectorial de tipo sóliton brilhante-

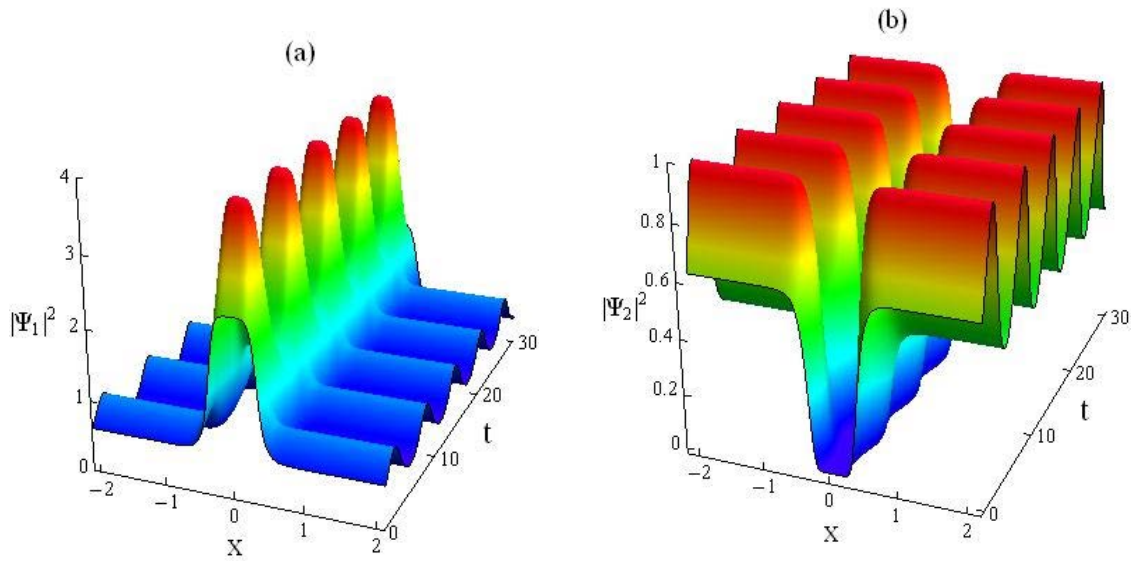


Figura 4.10: Propagação das intensidades do sóliton brilhante-escuro largo: (a) $|\Psi_1(x,t)|^2$ sóliton brilhante largo sobre um pedestal; (b) $|\Psi_2(x,t)|^2$, sóliton escuro largo. Com $\kappa = -1$, $\rho = 4$, $c_0 = 8.0001$, $\gamma_0 = 3.1$, $\beta_0 = 1.6$, $\Omega = 1$ e $\sigma = 0$.

brilhante, com um de seus componentes exibindo um perfil plano alto muito semelhantes a Φ_2^2 mostrados na Figura (4.5). Esses tipos de sólitons plano alto brilhante também foram relatados em equações complexas não integráveis de Ginzburg-Landau [101]. Nós pensamos que uma generalização do modelo estudado por Kanna e Sakkaravarthi [100] em ESNLs acopladas coerentemente com coeficientes modulados pode ser possível e será considerada num futuro próximo.

Capítulo 5

Soluções localizadas largas da equação de Schrödinger não linear \mathcal{PT} -simétrica com coeficientes modulados

Neste capítulo vamos lidar com a ESNLCQ com coeficientes modulados e termo de ganho ou perda, Eq. (2.19). Desde o ponto de vista da Óptica não linear, a Eq. (2.19) pode ser associada com a equação que descreve a propagação de pulsos de luz através de uma fibra óptica, onde, X e Z são as direções transversal e longitudinal de propagação, respectivamente. $\Psi(X, Z)$ é o envoltório do campo elétrico, $m(X, Z)$ é o parâmetro de dispersão, $v(X, Z)$ é o índice de refração linear, $g_3(X, Z)$ e $g_5(X, Z)$ são as intensidades das não linearidades Kerr e não-Kerr ao longo da fibra óptica, respectivamente, e $w(X, Z)$ é o coeficiente de ganho ou perda.

Desde o ponto de vista da Física da Matéria Condensada, a Eq. (2.19) pode governar a dinâmica dos BECs, onde $\Psi(X, Z)$ desempenha o papel do parâmetro de ordem macroscópico que evolui no tempo Z e localizado no espaço X ; $m(X, Z)$ é a massa efetiva do condensado, $v(X, Z)$ é o coeficiente associado com o potencial de armadilhamento, $g_3(X, Z)$ e $g_5(X, Z)$ são as intensidades das interações entre dois bósons (não linearidade cúbica) e três bósons (não linearidade quártica) [7], respectivamente, e $w(X, Z)$ é o potencial de ganho ou perda incorporado fenomenologicamente, por exemplo, para ter em conta que a interação de uma partícula com o potencial de armadilhamento não é absolutamente elástica [102, 103]. No caso de BECs também se pode interpretar o termo $w(X, Z)|\Psi(X, Z)|^2$, que aparece na equação da continuidade deduzida a partir da Eq. (2.19), como uma fonte ou dreno de partículas no sistema.

Neste capítulo, nós consideramos que o termo de ganho ou perda $w(X, Z)$ em conjunto com o índice de refração linear ou potencial de armadilhamento $v(X, Z)$, compre-

ende um potencial não-hermitiano na ESNL, Eq. (2.19). Neste contexto, nós nos concentramos em obter soluções analíticas localizadas quando o potencial complexo, $v(X, Z) + iw(X, Z)$, é invariante sob a transformação de paridade e reversão do tempo, simultaneamente (simetria \mathcal{PT}).

Para alcançar nosso objetivo, foi realizada uma pequena modificação para o método empregado por He *et al.* em [76], para mapear a Eq. (2.19) em uma ESNLCQ com potencial não-hermitiano que possui simetria \mathcal{PT} . Neste capítulo estamos apenas interessados em soluções exatas localizadas que obedecem às condições de contorno, $|\Psi|^2 \rightarrow 0$ quando $X \rightarrow \pm\infty$. Recentemente, os resultados neste capítulo foram publicados na revista *Physical Review E* [104].

5.1 Método de solução

A forma específica dos coeficientes $m(X, Z)$, $v(X, Z)$, $g_3(X, Z)$, $g_5(X, Z)$ e $w(X, Z)$ na Eq. (2.19) são dado pelas expressões

$$m(X, Z) = \frac{\zeta(Z)}{(\gamma(Z)h)^2}, \quad (5.1)$$

$$v(X, Z) = \omega_1(X, Z)X^2 + f_1(X, Z)X + f_2(X, Z) + \zeta(Z)V[F(h)] - \frac{\zeta(Z)}{h^2} \left(\left(\frac{h_\xi}{2h} \right)^2 - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{h_\xi}{2h} \right) \right), \quad (5.2)$$

$$g_3(X, Z) = G_3 \frac{\zeta(Z)}{\beta(Z)} h, \quad g_5(X, Z) = G_5 \frac{\zeta(Z)}{\beta^2(Z)} h^2, \quad (5.3)$$

$$w(X, Z) = f_3(X, Z)X + f_4(X, Z) + \zeta(Z)W[F(h)], \quad (5.4)$$

em que h é uma função inversível, diferenciável e positiva: $h = h[\gamma(Z)X + \delta(Z)]$, $h_\xi = \frac{dh(\xi)}{d\xi}|_{\xi=\gamma(Z)X+\delta(Z)}$ e $F(h)$ é uma função dependente de $h[\xi]$.

Vamos agora fazer a seguinte transformação de coordenadas e reparametrização temporal [68, 71], as quais também foram empregadas para estudar sistemas com hamiltonianos não-hermitianos dependentes do tempo [105], assim temos

$$X = \frac{\xi}{\bar{\gamma}(z)} - \frac{\bar{\delta}(z)}{\bar{\gamma}(z)}, \quad Z - Z_0 = \int_0^z \frac{dz'}{\bar{\zeta}(z')}, \quad (5.5)$$

com $\bar{\gamma}[z(Z)] = \gamma(Z)$, $\bar{\delta}[z(Z)] = \delta(Z)$, $\bar{\zeta}[z(Z)] = \zeta(Z)$ e, a fim de remover a primeira derivada de Ψ em relação a variável ξ que surge a partir da transformação (5.5), redefi-

timos a o campo escalar complexo $\Psi(X, Z)$

$$\Psi [X(\xi, z), Z(z)] = \sqrt{\beta(z)} e^{-i\alpha(\xi, z)} \Phi(\xi, z), \quad (5.6)$$

onde $\alpha(\xi, z) = -a(z) + \frac{1}{2} \int_0^\xi h^2(\xi') \left(\frac{\bar{\gamma}_z}{\bar{\gamma}} (\xi' - \bar{\delta}) + \bar{\delta}_z \right) d\xi'$, com $a(z)$ é uma função real arbitrária. Substituindo as Eqs. (5.1)-(5.6) na Eq. (2.19) obtemos

$$\begin{aligned} & i \bar{\zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\bar{\zeta}}{h^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \left\{ \left(\omega_1 + \frac{\bar{\zeta}(h)^2}{4} \bar{\gamma}_z^2 \right) \left(\frac{\xi - \bar{\delta}}{\bar{\gamma}} \right)^2 + \left(f_1 + \frac{\bar{\zeta}(h)^2}{2} \bar{\gamma}_z \bar{\delta}_z \right) \left(\frac{\xi - \bar{\delta}}{\bar{\gamma}} \right) \right. \\ & + f_2 + \frac{\bar{\zeta}(h)^2}{4} \bar{\delta}_z^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(-a + \frac{1}{2} \int_0^\xi h^2(\xi') \left(\frac{\bar{\gamma}_z}{\bar{\gamma}} (\xi' - \bar{\delta}) + \bar{\delta}_z \right) d\xi' \right) + \bar{\zeta} V [F(h)] \\ & \left. - \frac{\bar{\zeta}}{h^2} \left(\left(\frac{h_\xi}{2h} \right)^2 - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{h_\xi}{2h} \right) \right) \right\} \Phi + G_3 \bar{\zeta} h |\Phi|^2 \Phi + G_5 \bar{\zeta} h^2 |\Phi|^2 \Phi + i \left\{ f_4 - \frac{h_\xi \bar{\zeta}}{h} \bar{\delta}_z \right. \\ & \left. + \left(f_3 - \frac{h_\xi \bar{\zeta}}{h} \bar{\gamma}_z \right) \left(\frac{\xi - \bar{\delta}}{\bar{\gamma}} \right) + \frac{\bar{\zeta}}{2} \frac{d}{dz} \ln \left(\frac{\beta}{\bar{\gamma}} \right) + \bar{\zeta} W [F(h)] \right\} \Phi = 0, \quad (5.7) \end{aligned}$$

onde $f_k = f_k(\xi, z)$ ($k = 1, 2, 3, 4$). A partir da última equação pode-se ver por que os fatores que envolvem $\gamma(Z)$, $\zeta(Z)$, $\beta(Z)$ e $h[\gamma(Z)X + \delta(Z)]$ estão presentes nas expressões $v(X, Z)$, $m(X, Z)$, $g_3(X, Z)$, $g_5(X, Z)$ e por isso que escolhemos a dependência específica de h , V e W sobre a variável $\xi = \gamma(Z)X + \delta(Z)$. Neste ponto, pode-se escolher $\bar{\gamma}(z)$, $\bar{\delta}(z)$, $\bar{\zeta}(z)$, $\bar{\beta}(z)$ e $h(\xi)$ tal que

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{\bar{\zeta} h^2}{4} \bar{\gamma}_z^2, \quad f_1 = -\frac{\bar{\zeta} h^2}{2} \bar{\gamma}_z \bar{\delta}_z, \\ f_2 &= -\frac{\bar{\zeta} h^2}{4} \bar{\delta}_z^2 - \bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \left(-a + \frac{1}{2} \int_0^\xi h^2(\xi') \left(\frac{\bar{\gamma}_z}{\bar{\gamma}} (\xi' - \bar{\delta}) + \bar{\delta}_z \right) d\xi' \right), \\ f_3 &= \frac{h_\xi \bar{\zeta}}{h} \bar{\gamma}_z \quad \text{and} \quad f_4 = \frac{h_\xi \bar{\zeta}}{h} \bar{\delta}_z - \frac{\bar{\zeta}}{2} \frac{d}{dz} \ln \left(\frac{\beta}{\bar{\gamma}} \right). \quad (5.8) \end{aligned}$$

Em termos das variáveis originais (X, Z) , as funções ω_1, f_i , $i = 1, 2, 3, 4$ são dadas pelas expressões

$$\begin{aligned} \omega_1(X, Z) &= \frac{h^2 \gamma_Z^2}{4\zeta(Z)}, \quad f_1(X, Z) = \frac{h^2}{2\zeta(Z)} \gamma_Z \delta_Z, \\ f_2(X, Z) &= \frac{h^2}{4\zeta(Z)} \delta_Z^2 - \frac{\partial}{\partial Z} \left(-a + \frac{\gamma}{2\zeta} \int_0^X h^2(\xi') (\gamma_Z X' + \delta_Z) dX' \right), \\ f_3(X, Z) &= \frac{h_\xi}{h} \gamma_Z \quad \text{and} \quad f_4 = \frac{h_\xi}{h} \delta_Z - \frac{1}{2} \frac{d}{dZ} \ln \left(\frac{\beta}{\gamma} \right), \quad (5.9) \end{aligned}$$

onde $\gamma_Z = \frac{d\gamma}{dZ}$, $\delta_Z = \frac{d\delta}{dZ}$, revelando a conexão intrínseca entre $\omega_1(X, Z)$, $f_k(X, Z)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) com as funções $\gamma(Z)$, $\delta(Z)$, $\zeta(Z)$, $\beta(Z)$ e $h[\xi = \gamma(Z)X + \delta(Z)]$. Assim, a Eq.

(5.7) assume a forma

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + G_3 h |\Phi|^2 \Phi + G_5 h^2 |\Phi|^4 \Phi + i W [F(h)] \Phi + \left\{ V [F(h)] - \frac{1}{h^2} \left(\left(\frac{h_\xi}{2h [\xi]} \right)^2 - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{h_\xi}{2h} \right) \right) \right\} \Phi = 0, \quad (5.10)$$

e a função de onda (5.6) é escrita como

$$\Psi (X, Z) = \sqrt{\beta (Z)} e^{-i\alpha(X,Z)} \Phi [\xi (X, Z), z (Z)], \quad (5.11)$$

onde $\alpha (X, Z) = -a (Z) + \frac{\gamma(Z)}{2\zeta(Z)} \int_0^X h^2(\xi') (\gamma_Z X' + \delta_Z) dX'$.

Desde que ainda temos uma ESNLCQ com não linearidades, coeficiente de ganho ou perda e potenciais não homogêneos, vamos fazer mais uma transformação, a fim de chegar a uma ESNLCQ com não linearidades constantes e coeficiente de ganho ou perda e potencial não homogêneo. Para isso, redefinimos ξ como uma função de outra variável x

$$\xi - \xi_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\bar{h}(x')}, \quad (5.12)$$

onde $\bar{h}(x) = h [\xi (x)]$ e $x - x_0 = F(h) = \int_{\xi_0}^{\xi} h(\xi') d\xi'$. A fim de eliminar a primeira derivada de Φ com relação a variável x , que surge da transformação (5.12), nós redefinimos o campo escalar complexo Φ como

$$\Phi (\xi (x), z) = \frac{\psi (x, z)}{\sqrt{\bar{h}(x)}}. \quad (5.13)$$

Ao substituir Eqs. (5.12) e (5.13) na Eq. (5.10) pode-se verificar que $\psi \equiv \psi (x, z)$ satisfaz

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + [V (x) + iW (x)] \psi + G_3 |\psi|^2 \psi + G_5 |\psi|^4 \psi = 0, \quad (5.14)$$

onde $V (x) = V [F(h)]$ e $W (x) = W [F(h)]$. Note que a variável z pode ser formalmente identificada com a variável temporal e a Eq (5.14) pode ser interpretada como uma ESNLCQ com potencial não-hermitiano $V(x) + iW(x)$. Vamos considerar os casos em que o potencial complexo $V(x) + iW(x)$ é invariante sob a transformação \mathcal{PT} , isto é, $x \rightarrow -x$, $z \rightarrow -z$ e $i \rightarrow -i$. Indicamos ao leitor consultar a referência [106] para maiores detalhes sobre a transformação de paridade e reversão temporal.

Ao retornar para as coordenadas espaço-temporais originais (X, Z) , a função de onda pode ser obtida a partir das Eqs. (5.13) e (5.11), e é dada pela expressão

$$\Psi (X, Z) = \sqrt{\frac{\beta (Z)}{h [\xi (X, Z)]}} e^{-i\alpha(X,Z)} \psi (x, Z), \quad (5.15)$$

onde $\alpha(X, Z) = -a(Z) + \frac{\gamma(Z)}{2\zeta(Z)} \int_0^X h^2(\xi') (\gamma_Z X' + \delta_Z) dX'$.

Assim, temos demonstrado, por meio de transformações canônicas de ponto, como a Eq (2.19), pode ser mapeada em uma ESNLCQ com não linearidades constantes e potencial não-hermitiano, Eq . (5.14).

Caso Particular $h[\xi] = 1$:

Neste caso, a Eq. (2.19) é escrita como

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial Z} + m(Z) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + v(X, Z) \Psi + g_3(Z) |\Psi|^2 \Psi + g_5(Z) |\Psi|^4 \Psi + i w(X, Z) \Psi = 0. \quad (5.16)$$

Os coeficientes são reduzidos a

$$m(Z) = \frac{\zeta(Z)}{\gamma^2(Z)}, \quad (5.17)$$

$$v(X, Z) = -\gamma \frac{d}{dZ} \left(\frac{\gamma_Z}{\zeta} \right) \frac{X^2}{4} - \gamma \frac{d}{dZ} \left(\frac{\delta_Z}{\zeta} \right) \frac{X}{2} + \frac{da}{dZ} + \frac{\delta_Z^2}{4\zeta} + \zeta(Z) V(\xi), \quad (5.18)$$

$$g_3(Z) = G_3 \frac{\zeta(Z)}{\beta(Z)}, \quad g_5(Z) = G_5 \frac{\zeta(Z)}{\beta^2(Z)}, \quad (5.19)$$

$$w(X, Z) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dZ} \ln \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) + \zeta(Z) W(\xi), \quad (5.20)$$

onde $\xi = \gamma(Z) X + \delta(Z)$. A partir da Eq. (5.12) deduzimos que $\xi = x$. Assim, por meio da Eq. (5.5) e da função de onda (5.15), a qual pode ser reescrita como

$$\Psi(X, Z) = \sqrt{\beta(Z)} \psi(x, Z) \exp \left\{ -i \left(\frac{\gamma \gamma_Z}{4\zeta} X^2 + \frac{\gamma \delta_Z}{2\zeta} X - a(Z) \right) \right\}, \quad (5.21)$$

podemos mapear a Eq. (5.16) numa ESNLCQ com não linearidades constantes e potencial complexo, Eq. (5.14).

Em seguida, nós mostramos algumas soluções analíticas que resolvem a Eq. (5.14), obtidas ao generalizar dois modelos ligados à propagação de um pulso de luz em um meio não linear, envolvendo apenas não linearidade cúbica.

5.2 Generalização do potencial Scarf II com simetria \mathcal{PT}

Nesta seção, nós generalizamos um modelo introduzido por Musslimani *et al.* em [10]. Nesse artigo, os autores investigam, pela primeira vez, os efeitos da não linearidade cúbica, na dinâmica de um feixe de luz em potenciais com simetria \mathcal{PT} .

Musslimani *et al.* começam a sua análise considerando que a evolução do feixe de

luz é regulada pela ESNLC, Eq. (5.14) com $G_5 = 0$,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + [V(x) + iW(x)]\psi + G_3 |\psi|^2 \psi = 0, \quad (5.22)$$

e para compreender a dinâmica, assumem um potencial complexo Scarf II

$$V(x) = V_0 \operatorname{sech}(x) \quad , \quad W(x) = W_0 \tanh(x) \operatorname{sech}(x) \quad , \quad (5.23)$$

onde V_0 e W_0 são as amplitudes da parte real e imaginária do potencial, respectivamente. Queremos salientar que, uma análise do modelo linear associado ao potencial dado pela Eq. (5.23) foi estudado por Ahmed em [33]. Foi demonstrado por Ahmed que quando $W_0 \leq V_0 + 1/4$ o modelo linear apresenta um espectro de energia completamente real. Ademais, a característica mais interessante correspondente ao modelo linear é a existência de um valor crítico para amplitude da parte imaginária do potencial $W_0 = V_0 + 1/4$. Acima deste valor crítico, uma transição de fase abrupta tem lugar, a simetria \mathcal{PT} é espontaneamente quebrada e o espectro de valores próprios real torna-se parcialmente ou completamente um espectro complexo. No modelo não linear, tal restrição não é aplicada. Não obstante, pode-se verificar que o envoltório do campo escalar complexo $\psi(x, z)$ é dada pela função própria com menor energia do problema correspondente na equação de Schrödinger linear [10, 38, 107].

Quando $G_3 = 1$, a Eq. (5.22) admite um modo não linear da forma

$$\psi(x, z) = \sqrt{2 - V_0 + \left(\frac{W_0}{3}\right)^2} \operatorname{sech}(x) e^{i\left(z + \frac{W_0}{3} \arctan[\sinh(x)]\right)}, \quad (5.24)$$

correspondente à condição de contorno $\psi(x \rightarrow \pm\infty, z) = 0$. A densidade de fluxo de energia transversal para a solução analítica mencionada, Eq. (5.24), é igual a: $S = \frac{i}{2} (\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}) = \frac{W_0(2 - V_0 + W_0^2/9)}{3} \operatorname{sech}^3(x)$. Este fluxo de energia surge devido à variação contínua da fase do modo não linear com respeito a x e z , Eq. (5.24), e está vinculado à parte imaginária do potencial Scarf II (termo de ganho ou perda).

Para generalizar o modelo apresentado por Musslimani *et al.* [10], brevemente descrito acima, vamos considerar a não linearidade quártica diferente de zero, $G_5 \neq 0$, e potencial Scarf II com simetria \mathcal{PT} , dado pela expressão

$$V(x) = \frac{2V_0\lambda}{\mu + \lambda \cosh(2x)} \quad , \quad W(x) = \frac{(2\lambda)^{3/2} W_0 \sinh(2x)}{2(\mu + \lambda \cosh(2x))^{3/2}}, \quad (5.25)$$

onde $\mu \geq \lambda > 0$ são os parâmetros do modelo. Uma característica interessante do potencial, Eq. (5.25) é a sua deformação contínua quando λ varia. A partir das Figura 5.1(a) e 5.1(b), pode-se observar que as amplitudes da parte real e imaginária diminui enquanto o espaçamento entre as regiões de ganho e perda da parte imaginária aumenta à medida

que λ se aproxima de zero. Assim, a Eq. (5.14), com $V(x)$ e $W(x)$ dados pela Eq. (5.25), modela a propagação de ondas ópticas em um meio não linear que manifesta simetria \mathcal{PT} , e admite, com $G_5 = -\frac{3G_3^2(\mu+\lambda)(\mu\lambda)}{4\lambda^2(2\mu/\lambda V_0 + W_0^2/9)^2}$, uma solução analítica exata localizada da forma

$$\psi(x, z) = \sqrt{\frac{2\lambda}{G_3} \left(2\frac{\mu}{\lambda} - V_0 + \left(\frac{W_0}{3}\right)^2 \right)} \frac{\exp \left[i \left(z + \frac{W_0}{3} \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda+\mu}} F(\varphi|m) \right) \right]}{\sqrt{\mu + \lambda \cosh(2x)}}, \quad (5.26)$$

onde $F(\varphi|m)$ é a integral elíptica incompleta do primeiro tipo [73], com amplitude $\varphi = \arctan(\sinh(x))$ e parâmetro elíptico $m = (\mu - \lambda)/(\mu + \lambda)$.

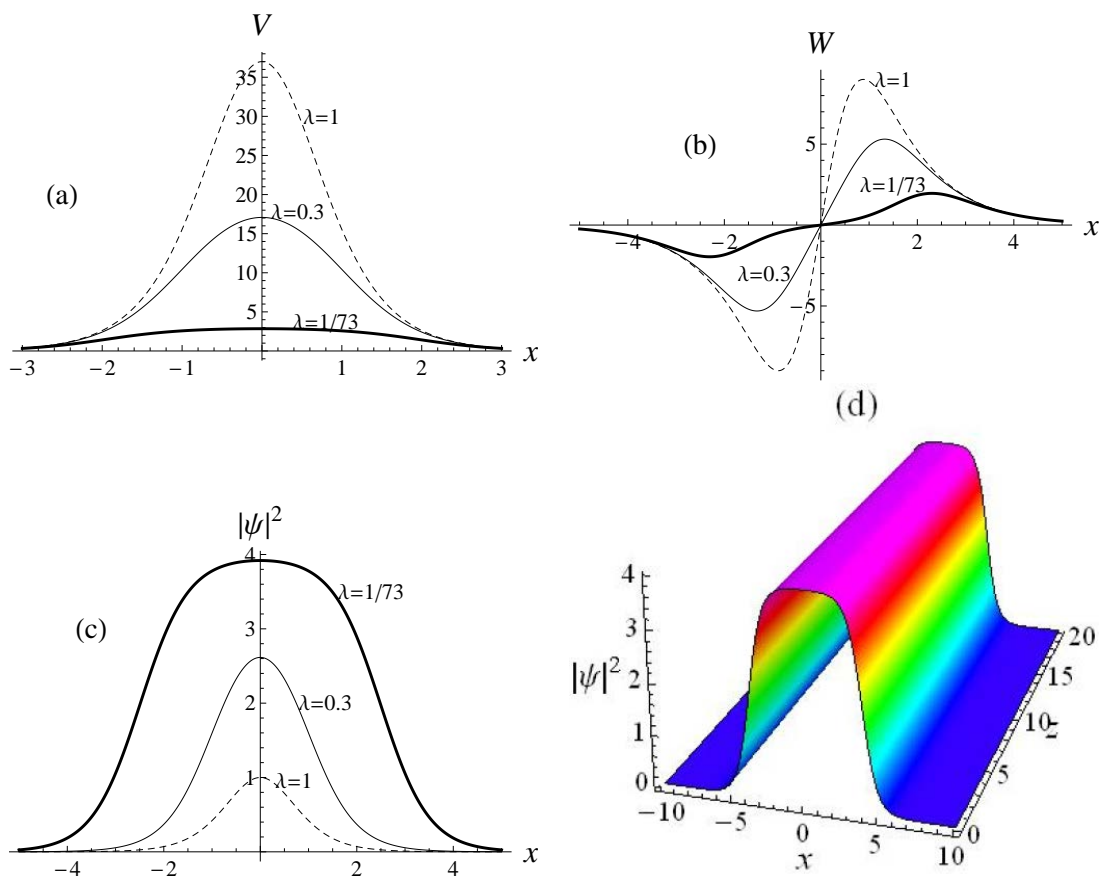


Figura 5.1: Deformação contínua: (a) da parte real do potencial com simetria \mathcal{PT} , Eq. (5.25); (b) da parte imaginária do potencial com simetria \mathcal{PT} , Eq. (5.25); (c) do perfil da intensidade $|\psi(x)|^2$, Eq. (5.26), para diferentes valores de λ . (d) Intensidade $|\psi(x)|^2$ semelhante a um sólon brilhante largo, para $\lambda = 1/73$. Com $V_0 = 37$, $W_0 = 18$, $\mu = 1$.

Um aspecto relevante do comportamento da intensidade da solução exata localizada é que a sua largura, bem como a sua amplitude aumentam quando λ aproxima-se de zero, indo de um solução do tipo sólon brilhante para uma solução do tipo sólon brilhante largo [68], tal como é mostrado na Figura 5.1(c) e 5.1(d). Por outro lado, se o valor de λ cresce, então a intensidade da não linearidade não-Kerr G_5 diminui para o seu valor

mínimo $\frac{-3G_3^2}{4(4-(W_0^2/9-V_0)^2)}$ quando $\lambda = \frac{(V_0-W_0^2/9)\mu}{2}$, além desse ponto G_5 aumenta para zero. A intensidade da densidade de fluxo de energia transversal $S = \frac{i}{2}(\psi\partial_x\psi^* - \psi^*\partial_x\psi) = \frac{W_0(2\mu/\lambda - V_0 + W_0^2/9)}{3G_3} \left(\frac{2\lambda}{\mu + \lambda \cosh(2x)}\right)^{3/2}$ associada à fase da solução exata localizadas aumenta quando λ diminui.

Vale ressaltar que, quando $\lambda = \mu$, a não linearidade não-Kerr desaparece ($G_5 = 0$), o potencial com simetria \mathcal{PT} , Eq. (5.25), a solução exata localizada, Eq. (5.26), e a densidade de fluxo de energia transversal são reduzidos precisamente àqueles apresentados por Musslimani *et al.* [10, 38, 107]. É nesse sentido que dizemos generalizar o modelo apresentado por Musslimani. Quando $G_3 = 1$ (caso autofocalização) ou $G_3 = -1$ (caso desfocalização) nosso modelo é uma generalização, no mesmo sentido explicado acima, dos modelos apresentados nas referências [10, 38, 107] e na referência [108], respectivamente.

5.3 Generalização do potencial Rosen-Morse II com simetria \mathcal{PT}

Nesta seção, nós generalizamos um modelo introduzido por Midya e Roychoudhury em [109]. Naquele artigo, os autores relatam a existência e as propriedades dos modos localizados descritos pela ESNLC com potenciais complexo que exibem simetria \mathcal{PT} . Para nosso propósito, consideramos um potencial Rosen-Morse II generalizado com simetria \mathcal{PT}

$$V(x) = -\frac{2V_0r}{s+r \cosh(2x)} \quad , \quad W(x) = \frac{2W_0r \sinh(2x)}{s+r \cosh(2x)} \quad , \quad (5.27)$$

onde $s \geq r > 0$ são os parâmetros generalizados do modelo.

É importante mencionar que o problema linear para o potencial Rosen-Morse II com simetria \mathcal{PT} , foi estudado por G. Lévai e E. Magyari em [110]. Lá, os autores demonstraram que o espectro da energia para o problema linear é sempre real e os valores próprios da energia podem ser positivos ou negativos, dependendo de uma escolha apropriada dos valores das amplitudes da parte real e da parte imaginária do potencial complexo. Esta característica podem ser devida à parte imaginária do potencial complexo que, em contraste com a parte real é assintoticamente não nula. Por esta razão, não há quebra da simetria \mathcal{PT} e, conseqüentemente, não há transição de fase em tais sistemas. O potencial, Eq. (5.27), é continuamente deformado quando r é próximo de zero. As Figuras 5.2(a) e 5.2(b) apresentam os perfis da parte real e da parte imaginária do potencial $V(x) + iW(x)$ para diferentes valores de r .

Neste caso, a Eq. (5.14), com $V(x)$ e $W(x)$ dados por (5.27) e com $G_5 = -\frac{3G_3^2(s-r)(s+r)}{4(V_0r+2s)^2}$, poderia descrever a propagação de uma onda óptica num meio não linear que manifesta

simetria \mathcal{PT} e que admite uma solução exata localizada na forma

$$\psi(x, z) = \sqrt{\frac{2(V_0 r + 2s)}{G_3}} \frac{e^{i[(1-W_0^2)z + W_0 x]}}{\sqrt{s + r \cosh(2x)}}. \quad (5.28)$$

A partir da Eq. (5.28), pode-se observar que $|\psi(x, z)|$ não depende de W_0 , amplitude da parte imaginária do potencial. Além disso, a largura e a amplitude da intensidade da solução exata localizada aumenta e diminui, respectivamente, enquanto r aproxima-se de zero, de modo que a intensidade vai desde um solução tipo sóliton brilhante a uma solução tipo sóliton brilhante largo, tal como apresentado na Figura 5.2(c) e 5.2(d).

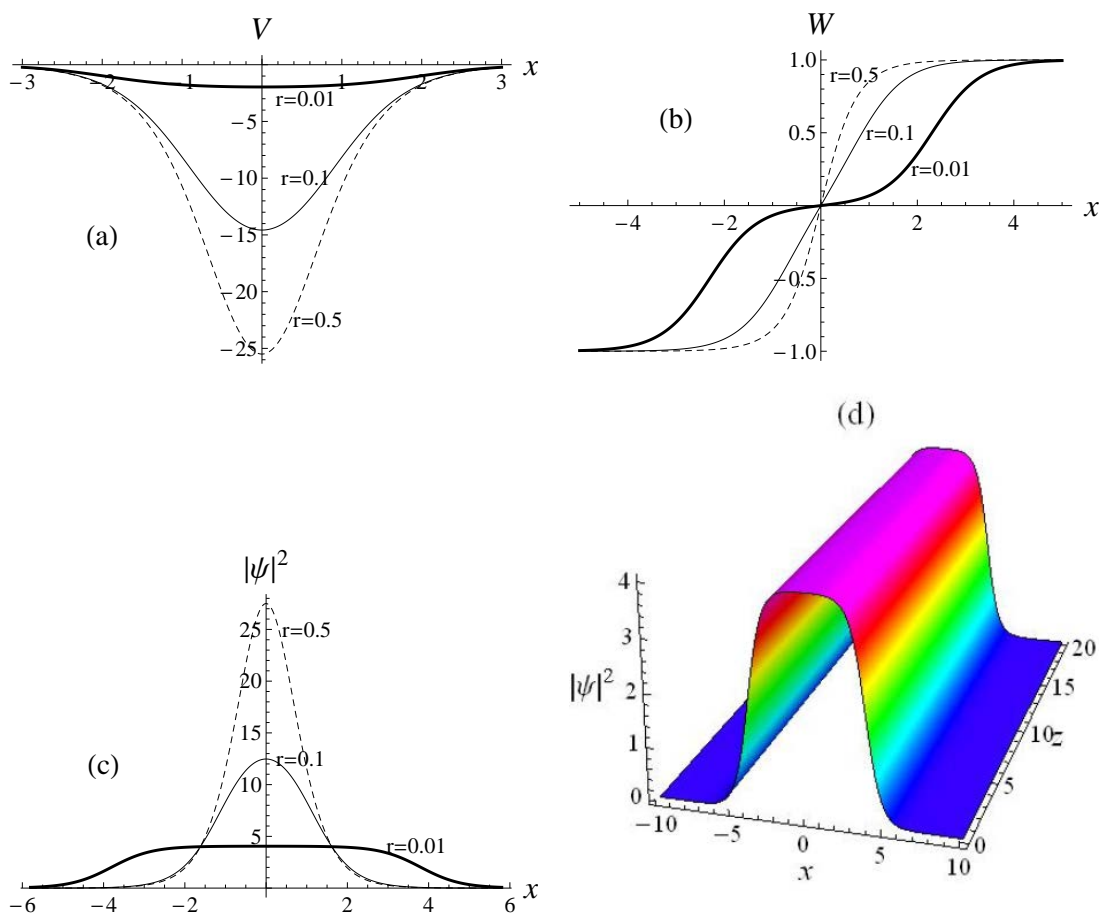


Figura 5.2: (a) Perfil da parte real do potencial complexo, Eq. (5.27); (b) Perfil da parte imaginária do potencial complexo, Eq. (5.27); (c) Seção transversal da intensidade para diferentes valores de r . (d) Intensidade da solução exata semelhante à intensidade de um sóliton brilhante largo, Eq. (5.28), para $r = 0.01$. Com $V_0 = 25.5$, $W_0 = 0.5$, $s = 0.5$.

Por outro lado, a intensidade da não linearidade não-Kerr G_5 diminui quando r aproxima de zero, e atinge o seu valor mínimo, $-\frac{3G_3^2}{16}$, quando $r = 0$. Ademais, a energia associada à solução exata localizada, $\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, z)|^2 dx = \frac{4(2s+V_0r)\text{arccoth}\left[\frac{\sqrt{(s+r)/(s-r)}}{1}\right]}{G_3\sqrt{(s+r)/(s-r)}}$, aumenta quando r tende a zero.

Note que quando r é igual a s , a intensidade da não linearidade não-Kerr desaparece

($G_5 = 0$), o potencial complexo com simetria \mathcal{PT} , Eq. (5.27), a solução exata localizada Eq. (5.28), e a energia ε são reduzidos exatamente àqueles apresentados por Midya e Roychoudhury [109]. Em vista disso, podemos dizer que o nosso modelo é uma generalização do modelo estudado por Midya e Roychoudhury.

Estes foram os dois modelos que nós conseguimos generalizar. Antes de concluir esta seção, queremos mencionar que o estudo da estabilidade das soluções analíticas exatas, Eqs. (5.26) e (5.28), não foi realizado pois nosso objetivo é encontrar soluções estáveis da ESNLCQ com simetria \mathcal{PT} e coeficientes modulados, Eq. (2.19), que é uma equação mais geral que a ESNLCQ simétrica com simetria \mathcal{PT} e coeficientes constantes.

5.4 Soluções localizadas largas

Nesta seção, apresentamos alguns modelos teóricos para os quais nós obtemos soluções localizadas exatas. Para isso, alguns potenciais externos complexos com simetria \mathcal{PT} e coeficientes modulados, interessantes e úteis, são dados através das escolhas adequadas das funções $\gamma(Z)$, $\delta(Z)$, $h[\xi]$ e $\beta(Z)$.

Explicitamente, tomamos $h[\xi] = e^{\xi^2/b^2}$, $\gamma(Z) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z)}}$, $\zeta(Z) = \frac{\gamma^2}{2}$, $\beta(Z) = \frac{\beta_0 \gamma_0}{\gamma}$ e $\delta(Z) = a(Z) = 0$ com $|\varepsilon_1| > |\varepsilon_2|$. Sugerimos ao leitor revisar as referências [18, 68, 82] para obter mais detalhes sobre as funções $h[\xi]$ e $\gamma(Z)$. Como vimos na seção 5.1, essas funções estão relacionadas com os coeficientes modulados $m(X, Z)$, $g_3(X, Z)$ e $g_5(X, Z)$ pelas Eqs. (5.1) e (5.3), isto é

$$m(X, Z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{2\gamma_0^2}{b^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z))} X^2}, \quad g_3(X, Z) = \frac{\gamma_0^2 G_3 \exp\left[\frac{\gamma_0^2}{b^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z))} X^2\right]}{2\beta_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z))^{3/2}},$$

$$g_5(X, Z) = \frac{\gamma_0^2 G_5 \exp\left[\frac{2\gamma_0^2}{b^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z))} X^2\right]}{2\beta_0^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z))^2}. \quad (5.29)$$

É importante ressaltar que com esta escolha e a partir da Eq. (5.5) e (5.12) obtêm-se as seguintes relações entre as variáveis originais (X, Z) e as variáveis (x, z) ,

$$x = \frac{b\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Erfi}\left[\frac{\gamma_0}{b\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z)}} X\right],$$

$$z = \frac{\gamma_0^2}{\nu\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}} \arctan\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \tan\left(\frac{\nu}{2} Z\right)\right],$$

onde Erfi é a função erro imaginária [73]. Então, percebemos que $(X, Z) \rightarrow (-X, -Z)$ implica $(x, z) \rightarrow (-x, -z)$, de tal forma que podemos estabelecer a simetria \mathcal{PT} nos exemplos que vamos tratar abaixo.

No caso particular $h[\xi] = 1$, e com as mesmas funções $\gamma(Z)$, $\zeta(Z)$ e $\beta(Z)$ escolhidas acima, a relação entre as variáveis originais (X, Z) e as variáveis (x, z) são

$$x = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z)}} X,$$

$$z = \frac{\gamma_0^2}{\nu \sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}} \arctan \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \tan \left(\frac{\nu}{2} Z \right) \right].$$

Assim, quando $(X, Z) \rightarrow (-X, -Z)$ um também tem $(x, z) \rightarrow (-x, -z)$. Ademais, a partir das Eqs. (5.17) e (5.19) obtemos

$$m(Z) = \frac{1}{2}, \quad g_3(Z) = \frac{G_3 \gamma_0^2}{2\beta_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z))^{3/2}}, \quad g_5(Z) = \frac{G_5 \gamma_0^2}{2\beta_0^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z))^2}, \quad (5.30)$$

de tal modo que, a partir das Eqs. (5.29) e (5.30), obtemos : $m(X, Z) = m(-X, -Z)$, $g_3(X, Z) = g_3(-X, -Z)$ and $g_5(X, Z) = g_5(-X, -Z)$.

A seguir, nós apresentamos três exemplos e encontramos as soluções exatas localizadas (na coordenada X) correspondentes às ESNLCQ com coeficientes modulados, Eq. (2.19), com potenciais externos com simetria \mathcal{PT} . Especificamente, no primeiro exemplo, trabalhamos com a ESNLC que rege a propagação de ondas ópticas em um meio não linear [10]. Nos dois últimos exemplos, consideramos a ESNLCQ e encontramos soluções exatas localizadas cujas amplitudes e largura podem ser moduladas. Em todos os exemplos nós encontramos soluções do tipo sólitons brilhantes como uma consequência das condições de fronteira e, no caso da ESNLCQ, nós somos capazes de modular a amplitude e a largura, de tal maneira que um sóliton brilhante estreito torna-se um sóliton brilhante largo.

5.4.1 Exemplo 1

Como um primeiro exemplo, vamos considerar o modelo introduzido por Musslimani *et al.* [10], Eq. (5.14) com $G_5 = 0$, que descreve a propagação de um feixe de luz através de um meio óptico focalizador.

A fim de encontrar o potencial externo complexo e a função de onda que resolve Eq. (2.19), substituímos a Eq. (5.23) nas Eqs. (5.2) and (5.4), obtendo o índice de refração

$v(X, Z)$

$$\begin{aligned}
v(X, Z) = & - \frac{\left[4\gamma_0^4 + e^{\frac{4\gamma_0^2}{b^2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} X^2} b^4 \epsilon_2^2 \nu^2 \sin^2(\nu Z) \right]}{8b^4 (\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))^2} e^{-\frac{2\gamma_0^2}{b^2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} X^2} X^2 \\
& - \frac{b^2 e^{\frac{2\gamma_0^2}{b^2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} X^2} \epsilon_2 \nu^2 \cos(\nu Z)}{8\gamma_0^2} + \frac{\gamma_0^2 e^{-\frac{2\gamma_0^2}{b^2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} X^2}}{2b^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} \\
& + \frac{V_0 \gamma_0^2}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{\pi} b}{2} \operatorname{Erfi} \left[\frac{\gamma_0}{b\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} X \right] \right], \quad (5.31)
\end{aligned}$$

e o coeficiente de ganho e perda $w(X, Z)$

$$\begin{aligned}
w(X, Z) = & \frac{\gamma_0^2 \epsilon_2 \nu \sin(\nu Z)}{b^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))^2} X^2 + \frac{\epsilon_2 \nu \sin(\nu Z)}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} \\
& + \frac{W_0 \gamma_0^2}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} \operatorname{sech} \left[\frac{\sqrt{\pi} b}{2} \operatorname{Erfi} \left[\frac{\gamma_0}{b\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} X \right] \right] \\
& \times \tanh \left[\frac{\sqrt{\pi} b}{2} \operatorname{Erfi} \left[\frac{\gamma_0}{b\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} X \right] \right]. \quad (5.32)
\end{aligned}$$

As últimas expressões satisfazem às seguintes propriedades de simetria na reversão das coordenadas $v(X, Z) = v(-X, -Z)$ e $w(X, Z) = -w(-X, -Z)$, isto é, o índice de refração e o coeficiente de ganho ou perda são par e ímpar, respectivamente, em relação às variáveis X e Z . Portanto, podemos dizer que $v(X, Z) + iw(X, Z)$ funciona como um potencial complexo com simetria \mathcal{PT} e, devido às escolhas específicas de $h[\xi]$, $\gamma(Z)$, $\delta(Z)$, $\zeta(Z)$ e $\beta(Z)$, a ESNL com coeficientes modulados dada pela Eq. (2.19) é invariante sob a reversão “temporal” ($Z \rightarrow -Z$, $i \rightarrow -i$) e reversão “espacial” ($X \rightarrow -X$). A função de onda $\Psi(X, Z)$, que é a solução da Eq. (2.19), é obtida substituindo a Eq. (5.24) na Eq. (5.15)

$$\begin{aligned}
\Psi(X, Z) = & \sqrt{\beta_0 \left(2 - V_0 + \left(\frac{W_0}{3} \right)^2 \right)} \operatorname{sech} \left[\frac{\sqrt{\pi} b}{2} \operatorname{Erfi} \left[\frac{\gamma_0}{b\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} X \right] \right] \\
& \times (\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))^{1/4} e^{-\frac{\gamma_0^2}{2b^2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} X^2} e^{i\varphi(X, Z)}, \quad (5.33)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi(X, Z) = & -\frac{b^2 \epsilon_2 \nu \sin(\nu Z)}{8\gamma_0^2} \exp\left(\frac{2\gamma_0^2 X^2}{b^2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))}\right) \\ & + \frac{W_0}{3} \tan^{-1} \left[\sinh \left[\frac{\sqrt{\pi} b}{2} \operatorname{Erfi} \left[\frac{\gamma_0 X}{b\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} \right] \right] \right] \\ & + \frac{\gamma_0^2}{\nu \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \tan\left(\frac{\nu Z}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Desde a Eq. (5.33), notamos que $\Psi^*(-X, -Z) = \Psi(X, Z)$, ou seja $\Psi(X, Z)$ é invariante sob a reversão nas variáveis X e Z .

A situação fisicamente interessante surge no caso particular $h[\xi] = 1$. Neste caso, o índice de refração $v(X, Z)$ e o coeficiente de ganho ou perda $w(X, Z)$ são

$$\begin{aligned} v(X, Z) = & -\frac{\epsilon_2 \nu^2 (4\epsilon_1 \cos(\nu Z) + \epsilon_2 (3 + \cos(2\nu Z)))}{16(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))^2} X^2 + \frac{V_0 \gamma_0^2}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} \\ & \times \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\gamma_0 X}{\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} \right], \\ w(X, Z) = & \frac{\epsilon_2 \nu \sin(\nu Z)}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} + \frac{W_0 \gamma_0^2}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} \operatorname{sech} \left[\frac{\gamma_0 X}{\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} \right] \\ & \times \tanh \left[\frac{\gamma_0 X}{\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} \right]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Mesmo neste caso específico, o índice de refração e o coeficiente de ganho ou perda são par e ímpar, respectivamente, em relação à reversão nas variáveis X e Z . Assim, o potencial complexo $v(X, Z) + i w(X, Z)$ apresenta simetria \mathcal{PT} .

Ademais, a Eq. (5.16) reduz-se à forma

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + g_3(Z) |\Psi|^2 \Psi + v(X, Z) \Psi + i w(X, Z) \Psi = 0, \quad (5.35)$$

onde $g_3(Z)$, $v(X, Z)$ e $w(X, Z)$ satisfazem às Eqs. (5.30) e (5.34).

Queremos salientar que a Eq. (5.35) pode ser associada com a propagação de ondas ópticas através de um meio óptico focalizador com índice de refração modulado ao longo dos eixos transversal e longitudinal estudada por Kartashov *et. al.* [111] e Yang *et. al.* [112]. Kartashov *et. al.* descobriram que, em condições adequadas, redes periódicas longitudinalmente podem exibir amplificação do sóliton espacial, mas eles não levaram em conta as perdas por radiação que ocorrem quando uma porção de alta frequência do espectro do sóliton espacial é transmitida através da barreira de potencial e deixa o canal do guia [111]. Por meio deste exemplo, considera-se um índice de refração modulado ao longo de ambos eixos, semelhante ao que é considerado por Kartashov *et. al.* [111]. Além

disso, levamos em conta, as perdas e os ganhos do sistema e exploramos os efeitos da não linearidade Kerr, o índice de refração linear e o coeficiente de ganho ou perda na propagação de ondas ópticas.

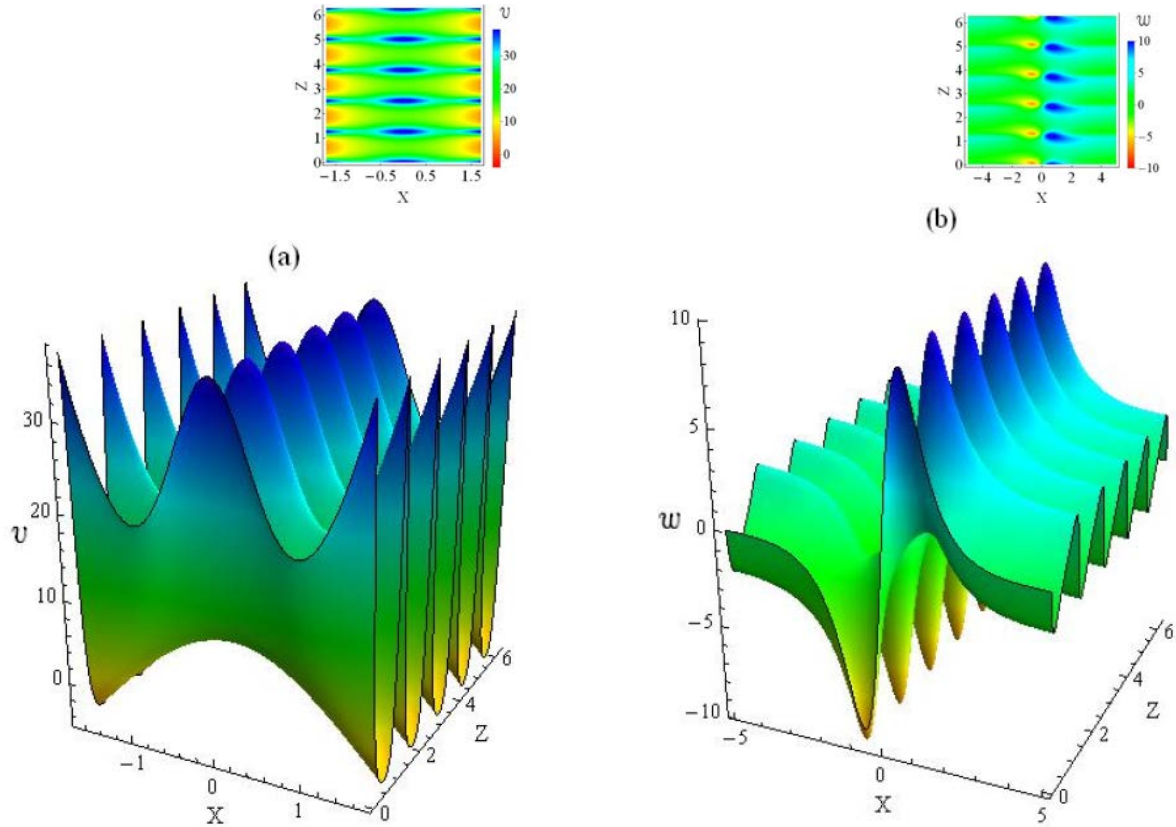


Figura 5.3: Evolução periódica do: (a) índice de refração $v(X, Z)$ e (b) o coeficiente de ganho ou perda $w(X, Z)$, Eq. (5.34). Com $\nu = 5$, $\epsilon_1 = 6$, $\epsilon_2 = -4$, $V_0 = 37$, $W_0 = 18$ e $\gamma_0 = 2$.

A Figura 5.3 apresenta o comportamento do índice de refração $v(X, Z)$ e do coeficiente de ganho ou perda $w(X, Z)$. A partir de Figura 5.3, pode-se ver que $v(X, Z)$ forma uma distribuição periódica de barreiras de potencial ao longo do eixo longitudinal Z (Fig.5.3(a)), e cada barreira de potencial está correlacionada com uma mudança súbita de $w(X, Z)$ na direção transversal X (Fig.5.3(b)). Além disso, a intensidade da não linearidade Kerr, $g_3(Z)$, é máxima em todos os lugares onde a barreira de potencial aparece. As mudanças do $w(X, Z)$ são interpretadas como um fluxo de energia de saída em um lado da fibra, enquanto um fluxo de energia é fornecido por uma fonte externa de energia, do outro lado da fibra, que pode ser apreciado por meio da equação de continuidade (teorema de Poynting) $\partial_Z |\Psi|^2 + \partial_X [i/2 (\Psi \partial_X \Psi^* - \Psi^* \partial_X \Psi)] = -2 w(X, Z) |\Psi|^2$, com $\Psi = \Psi(X, Z)$ dado abaixo.

Ao utilizar as Eqs. (5.21) e (5.24), obtemos a função de onda $\Psi(X, Z)$, que é a

solução da Eq. (5.35),

$$\Psi(X, Z) = \sqrt{\beta_0 \left(2 - V_0 + \left(\frac{W_0}{3} \right)^2 \right)} \operatorname{sech} \left[\frac{\gamma_0}{\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} X \right] \times (\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))^{1/4} e^{i\phi(X, Z)}, \quad (5.36)$$

onde

$$\phi(X, Z) = \frac{W_0}{3} \varphi(X, Z) + \frac{\gamma_0^2}{\nu \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}} \arctan \left[\sqrt{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \tan \left(\frac{\nu}{2} Z \right) \right] - \frac{\epsilon_2 \nu \sin(\nu Z)}{4(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} X^2,$$

com $\varphi(X, Z) = \arctan(\sinh \gamma_0 X / \sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)})$. Notamos que novamente $\Psi^*(-X, -Z) = \Psi(X, Z)$.

A evolução e comportamento da intensidade da solução exata localizada $|\Psi(X, Z)|^2$ é mostrado na Figura 5.4. A partir desse Figura, pode-se ver que a intensidade da solução exata localizada diminui devido aos efeitos produzidos sobre ele pela barreira de potencial e a intensidade máxima de $g_3(Z)$. A mudança repentina de $w(X, Z)$ não afeta $|\Psi(X, Z)|^2$, ela afeta apenas a fase de $\Psi(X, Z)$. O papel desempenhado pela fonte externa ou dreno externo de energia pode ser apreciado por meio do termo de fonte ou dreno no lado direito da equação de continuidade (teorema de Poynting), como discutido acima. Recordamos que a simetria \mathcal{PT} impõe que $w(X, Z)$ deve ser ímpar sob as reversões de X e Z , e isso leva à conservação da energia média em um período ν^{-1} , como se pode verificar explicitamente através da integração em X e tomando a média da equação da continuidade. Assim, pode-se dizer que a simetria \mathcal{PT} deve estar presente, a fim de ter soluções estáveis nesse tipo de sistemas. A Figura 5.4(b), por sua estética, foi escolhida para ser exibida na seção *on-line Keleidoscope* do *Physical Review E* (Janeiro 2015).

Um exemplo mais simples acontece quando apenas o índice de refração linear e o coeficiente de ganho ou perda são dependentes das variáveis X e Z , e as não linearidades são homogêneas e independentes de Z . Ao considerar este caso e tomando $h[\xi] = 1$, $\gamma(Z) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos[\nu Z]}}$, $\zeta(Z) = \beta(Z) = \frac{\gamma^2}{2}$ e $\delta(Z) = a(Z) = G_5 = 0$ com $|\epsilon_1| > |\epsilon_2|$, a Eq. (2.19) reduz-se à forma

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + G_3 |\Psi|^2 \Psi + v(X, Z) \Psi + i w(X, Z) \Psi = 0,$$

onde $v(X, Z)$ e $w(X, Z)$ são as mesmas dadas por (5.34). A solução analítica exata da

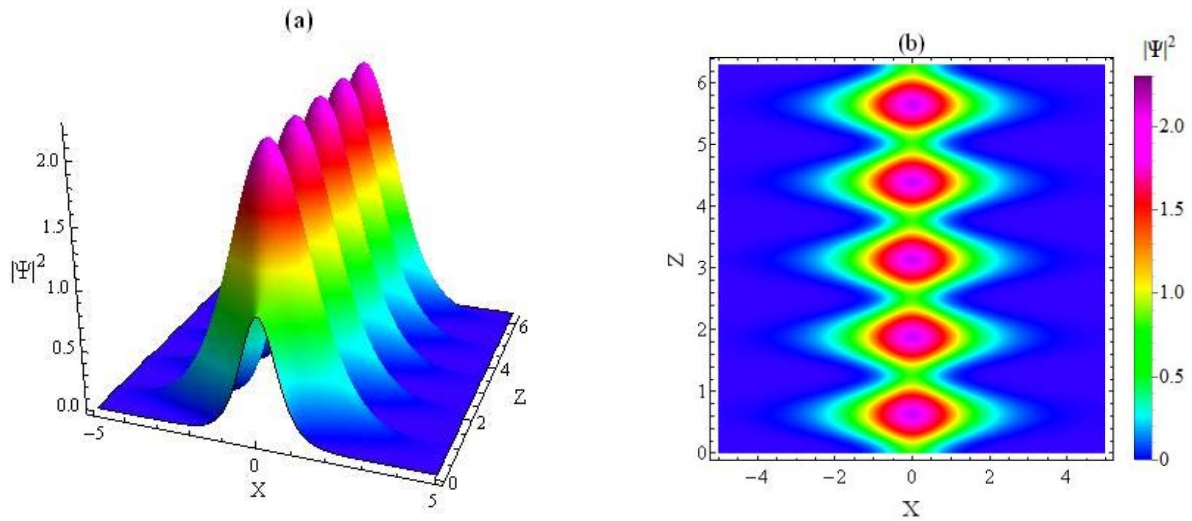


Figura 5.4: (a) Intensidade $|\Psi(X, Z)|^2$ tipo sóliton brilhante. (b) Gráfico do contorno da intensidade $|\Psi(X, Z)|^2$, Eq. (5.36). Com $\nu = 5$, $\epsilon_1 = 6$, $\epsilon_2 = -4$, $V_0 = 37$, $W_0 = 18$, $\beta_0 = 1/\sqrt{2}$ e $\gamma_0 = 2$.

última equação diferencial é dada pela expressão

$$\Psi(X, Z) = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2} \left(2 - V_0 + \left(\frac{W_0}{3} \right)^2 \right)} \operatorname{sech} \left[\frac{\gamma_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)} X \right] \\ \times (\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))^{-1/2} e^{i\phi(X, Z)}.$$

5.4.2 Exemplo 2

Vamos agora estudar a evolução da Eq. (5.16) usando o potencial Scarf II generalizado com simetria \mathcal{PT} . Neste caso, a Eq. (5.16) poderia descrever a propagação de ondas ópticas num meio que apresenta não linearidades Kerr e não-Kerr com índice de refração linear e coeficiente de ganho ou perda modulados ao longo do eixo transversal e do eixo longitudinal. A partir das Eqs. (5.18), (5.20) e (5.25), encontramos que o índice de refração $v(X, Z)$ e o coeficiente de ganho ou perda $w(X, Z)$ são

$$v(X, Z) = -\frac{\epsilon_2 \nu^2 (4\epsilon_1 \cos(\nu Z) + \epsilon_2 (3 + \cos(2\nu Z)))}{16 (\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))^2} X^2 + \frac{V_0 \gamma_0^2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} \\ \times \frac{\lambda}{\mu + \lambda \cosh \left(\frac{2 \gamma_0 X}{\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} \right)},$$

$$w(X, Z) = \frac{\epsilon_2 \nu \sin(\nu Z)}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} + \frac{W_0 \gamma_0^2}{4(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} \sinh \left[\frac{2\gamma_0 X}{\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} \right] \times \frac{(2\lambda)^{3/2}}{\left(\mu + \lambda \cosh \left(\frac{2\gamma_0 X}{\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} \right) \right)^{3/2}}. \quad (5.37)$$

Pode-se verificar que $v(X, Z) = v(-X, -Z)$ e $w(X, Z) = -w(-X, -Z)$. Então o potencial complexo $v(X, Z) + iw(X, Z)$ possui simetria \mathcal{PT} . Neste caso, o índice de refração linear e o coeficiente de ganho ou perda têm um desenvolvimento tal como o mostrado na Fig.(5.3), mas com um comportamento peculiar, isto é, quando λ aproxima-se de zero a largura e a altura das barreiras de potencial formadas por $v(X, Z)$ são continuamente deformadas, o que leva às regiões de ganho e de perda serem apartados continuamente uma da outra. Esse comportamento peculiar é mostrado na Figura(5.5).

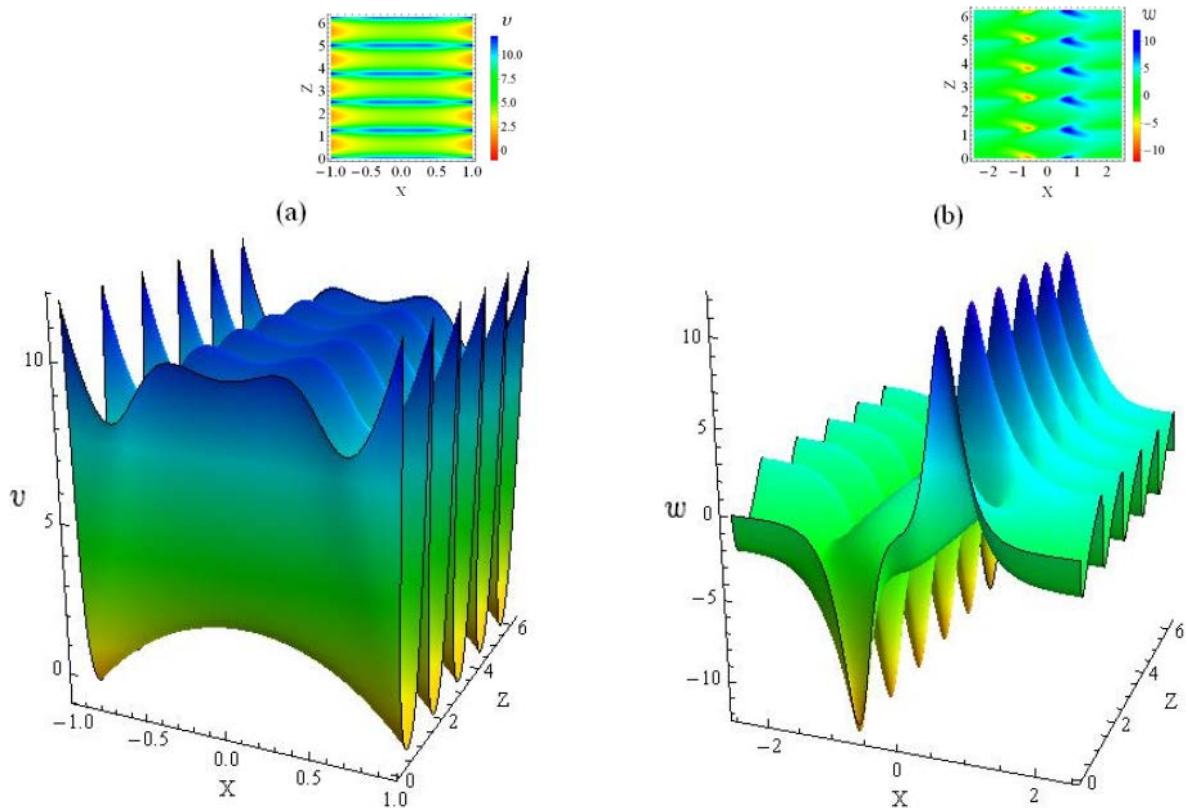


Figura 5.5: (a) Índice de refração deformado $v(X, Z)$. (b) Separação contínua de regiões de ganho e perda, $w(X, Z)$, Eq. (5.37). Para $\nu = 5$, $\gamma_0 = 2$, $\epsilon_1 = 0.6$, $\epsilon_2 = -0.4$, $V_0 = 37$, $W_0 = 18$, $\mu = 1$ e $\lambda = 1/73$.

Além disso, a intensidade máxima da não linearidade Kerr e intensidade mínima da não linearidade não-Kerr, $g_3(Z)$ e $g_5(Z)$, estão em fase com as barreiras potenciais.

Agora, vamos examinar as repercussões das não linearidades Kerr e não-Kerr e de $v(X, Z)$ e $w(X, Z)$ deformados sob a propagação da onda óptica.

A função de onda $\Psi(X, Z)$, que é a solução da Eq. (5.16), é obtida a partir da Eq.

(5.21), usando a Eq. (5.26), é dada por

$$\Psi(X, Z) = \sqrt{\frac{2\beta_0\lambda}{G_3} \left(2\frac{\mu}{\lambda} - V_0 + \left(\frac{W_0}{3}\right)^2 \right)} e^{i\phi(X, Z)} \times \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))^{1/4}}{\sqrt{\mu + \lambda \cosh\left(\frac{2\gamma_0 X}{\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}}\right)}}, \quad (5.38)$$

onde

$$\phi(X, Z) = -\frac{\epsilon_2\nu \sin(\nu Z)}{4(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} X^2 + \frac{W_0}{3} \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda + \mu}} F\left(\varphi(X, Z) \middle| \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda}\right) + \frac{\gamma_0^2}{\nu\sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}} \arctan\left[\sqrt{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \tan\left(\frac{\nu Z}{2}\right)\right],$$

com $\varphi(X, Z) = \arctan(\sinh(\gamma_0 X / \sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}))$. Baseado na Eq. (5.38) podemos deduzir que $\Psi^*(-X, -Z) = \Psi(X, Z)$.

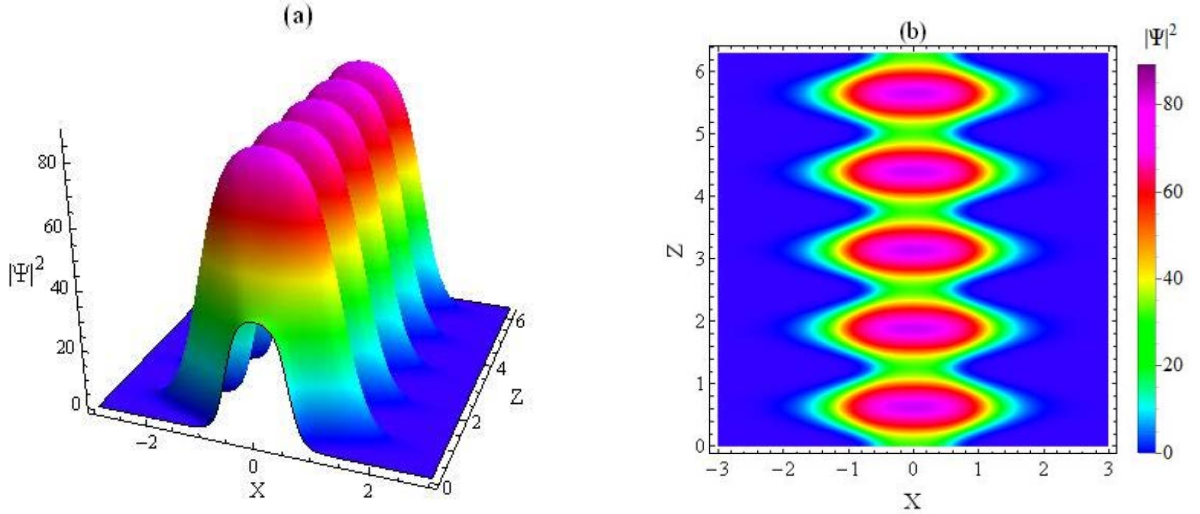


Figura 5.6: (a) Intensidade $|\Psi|^2$ tipo sóliton brilhante largo. (b) Gráfico do contorno da evolução periódica da intensidade $|\Psi|^2$ tipo um sóliton brilhante largo, (5.38). Para $\nu = 5$, $\epsilon_1 = 0.6$, $\epsilon_2 = -0.4$, $\gamma_0 = 2$, $\beta_0 = 10\sqrt{5}$, $V_0 = 37$, $W_0 = 18$, $\mu = 1$ e $\lambda = 1/73$.

O comportamento da intensidade do feixe luminoso é semelhante ao mostrado na Figura 5.4. No entanto, neste caso também somos capazes de modular a largura e amplitude da intensidade $|\Psi|^2$ variando o parâmetro λ . Isto é, quando λ aproxima-se de zero, a largura e a amplitude aumentam devido à diminuição das amplitudes das barreiras potenciais, e devido à separação entre as regiões de perda e ganho e os efeitos produzidos pelas intensidades máxima e mínima de $g_3(Z)$ e $g_5(Z)$, respectivamente. Assim, quando λ tende a zero, a intensidade do feixe luminoso é semelhante a um sóliton brilhante largo

[68], como é mostrado na Figura (5.6).

É importante ressaltar que, quando $\lambda = \mu$ ($G_5 = 0$) as Eqs. (5.37) e (5.38) são reduzidas exactamente às Eqs. (5.34) e (5.36) como é esperado.

Também queremos mencionar que, para o caso em que os coeficientes não lineares são constantes, isto é, $g_3(Z) = G_3$ e $g_5(Z) = G_5$, o sistema também apresenta soluções analíticas. Por exemplo, se consideramos $h[\xi] = 1$, $\gamma(Z) = \sqrt{2}$, $\zeta(Z) = \beta(Z) = 1$ e $a(Z) = -\int \frac{\delta Z^2}{4} dZ$ a Eq. (2.19) toma a forma

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + G_3 |\Psi|^2 \Psi + G_5 |\Psi|^4 \Psi + v(X, Z) \Psi + i w(X, Z) \Psi = 0,$$

onde $v(X, Z) = -\frac{\delta Z Z}{\sqrt{2}} X + V_0 \operatorname{sech}^2[X + \delta(Z)]$ e $w(X, Z) = (2\lambda)^{3/2} W_0 \frac{\sinh[2(X + \delta(Z))]}{(\mu + \lambda \cosh[2(X + \delta(Z))])^{3/2}}$ e a solução analítica da equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema é

$$|\Psi(X, Z)| = \sqrt{\frac{2\lambda}{G_3} \left(\frac{2\mu}{\lambda} - V_0 + \frac{W_0^2}{9} \right) (\mu + \lambda \cosh[2(X + \delta(Z))])^{-1/2}}.$$

A evolução da intensidade da solução analítica, neste caso, tem um comportamento de ondulação lateral como a locomoção das cobras, que foi estudada pela primeira vez He *et. al.* em [76].

Por outro lado, quando tomamos $h[\xi] = 1$, $\gamma(Z) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z)}}$, $\zeta(Z) = \beta(Z) = 1$ e $\delta(Z) = a(Z) = 0$ com $|\varepsilon_1| > |\varepsilon_2|$ a Eq. (2.19) reduz-se a seguinte expressão

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial Z} + m(Z) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + G_3 |\Psi|^2 \Psi + G_5 |\Psi|^4 \Psi + v(X, Z) \Psi + i w(X, Z) \Psi = 0,$$

em que $m(Z) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z)) / \gamma_0^2$,

$$v(X, Z) = \frac{\nu^2 \gamma_0^2 \varepsilon_2 ((\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1) \cos(\nu Z) - 5\varepsilon_2)}{32 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z))^3} X^2 + V_0 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\gamma_0 X}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z)}} \right],$$

$$w(X, Z) = \frac{\varepsilon_2 \nu \sin(\nu Z)}{4 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z))} + W_0 \sinh \left[\frac{2\gamma_0 X}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z)}} \right] \\ \times \frac{(2\lambda)^{3/2}}{\left(\mu + \lambda \cosh \left(\frac{2\gamma_0 X}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z)}} \right) \right)^{3/2}}.$$

A solução analítica para a última equação diferencial é tal que

$$|\Psi(X, Z)| = \sqrt{\frac{2\lambda}{G_3} \left(\frac{2\mu}{\lambda} - V_0 + \frac{W_0^2}{9} \right) \left(\mu + \lambda \cosh \left[\frac{2\gamma_0 X}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(\nu Z)}} \right] \right)^{-1/2}}.$$

5.4.3 Exemplo 3

Neste último exemplo, analisamos a evolução da função de onda $\Psi(X, Z)$ governada pela Eq. (5.16) usando o potencial Rosen-Morse II generalizado com simetria \mathcal{PT} , Eq. (5.27), e $\beta(Z) = \frac{\beta_0}{\gamma_0} \gamma(Z)$.

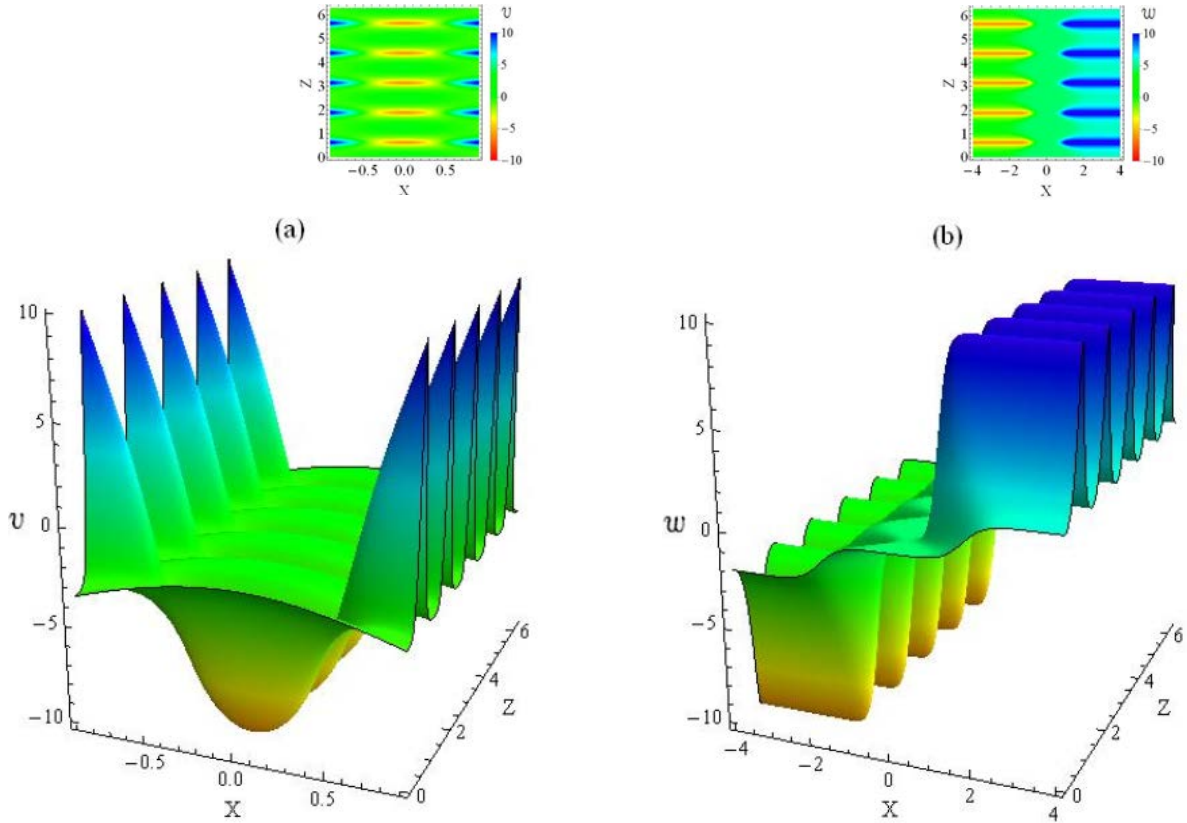


Figura 5.7: (a) Índice de refração deformado; (b) Separação contínua de regiões de perda e ganho, Eq. (5.37). Para $\nu = 5$, $\gamma_0 = 2$, $\epsilon_1 = 0.6$, $\epsilon_2 = 0.4$, $V_0 = 25.5$, $W_0 = 0.5$, $s = 0.5$ e $r = 0.01$.

Neste caso, a partir das Eqs. (5.18) e (5.20) obtemos o índice de refração $v(X, Z)$ e o coeficiente de ganho ou perda $w(X, Z)$ dados por

$$v(X, Z) = -\frac{\epsilon_2 \nu^2 (4\epsilon_1 \cos(\nu Z) + \epsilon_2 (3 + \cos(2\nu Z)))}{16(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))^2} X^2 - \frac{\gamma_0^2 V_0 r}{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z) s + r \cosh\left(\frac{2\gamma_0 X}{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}\right)},$$

$$w(X, Z) = \frac{\gamma_0^2 W_0 r}{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z) s + r \cosh\left(\frac{2\gamma_0 X}{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}\right)} \sinh\left(\frac{2\gamma_0 X}{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}\right). \quad (5.39)$$

A partir destas últimas expressões, é fácil verificar que $v(X, Z) = v(-X, -Z)$ e $w(X, Z) = -w(-X, -Z)$. Neste caso o potencial complexo $v(X, Z) + iw(X, Z)$ possui simetria \mathcal{PT} . Neste contexto, o índice de refração forma uma distribuição regular de poços potenciais

ao longo do eixo longitudinal Z (Figura 5.7(a)), e cada poço potencial está associado com uma alteração do coeficiente de ganho ou perda no eixo transversal X (Figura 5.7(b)). Além disso, a largura e a profundidade dos poços potenciais formados por $v(X, Z)$ são continuamente deformadas enquanto que as regiões de ganho e perda são apartadas continuamente uma da outra quando r tende a zero, como é mostrado na Figura 5.7. Além disso, a intensidade da não linearidade Kerr $g_3(Z)$ é máxima sempre que os potenciais tipo poço aparecem, e a não linearidade não-Kerr $g_5(Z)$ é constante.

A solução exata localizada $\Psi(X, Z)$, que é a solução da Eq. (2.19), é obtida a partir da Eq. (5.21) usando a Eq. (5.28):

$$\Psi(X, Z) = \sqrt{\frac{2(V_0 r + 2s)\beta_0}{G_3}} e^{i\varphi(X, Z)} \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))^{-1/4}}{\sqrt{s + r \cosh\left(\frac{2\gamma_0 X}{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}\right)}}, \quad (5.40)$$

com

$$\begin{aligned} \varphi(X, Z) = & -\frac{\epsilon_2 \nu \sin(\nu Z)}{4(\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z))} X^2 + \frac{W_0 \gamma_0}{\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos(\nu Z)}} X \\ & + \frac{\gamma_0^2 (1 - W_0^2)}{\nu \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \tan\left(\frac{\nu Z}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

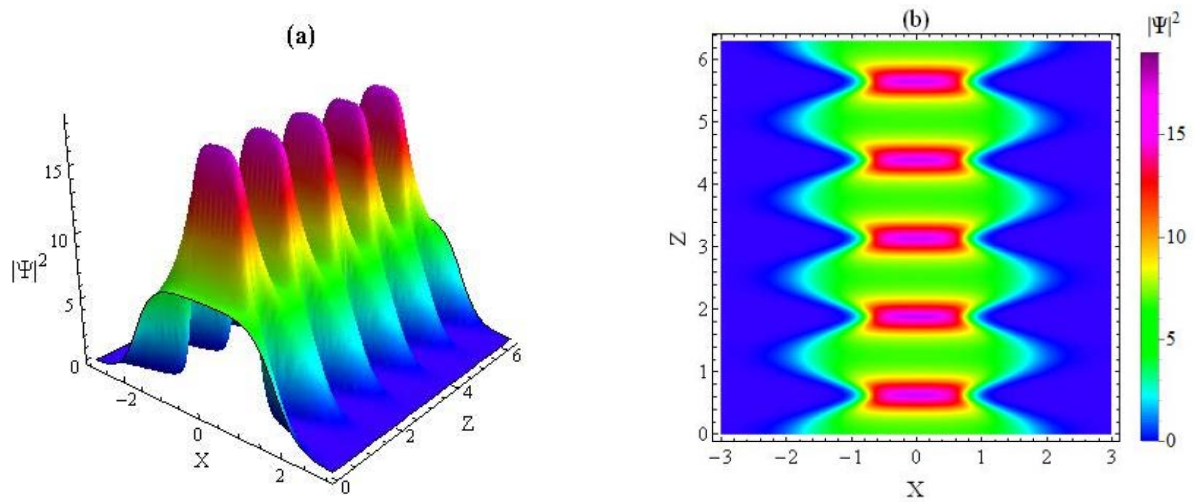


Figura 5.8: (a) Propagação periódica da intensidade $|\Psi(X, Z)|^2$ tipo um sóliton brilhante largo. (b) Gráfico do contorno da evolução periódica da intensidade $|\Psi(X, Z)|^2$, Eq. (5.40). Para $\nu = 5$, $\gamma_0 = 2$, $\epsilon_1 = 0.6$, $\epsilon_2 = 0.4$, $\beta_0 = 2$, $V_0 = 25.5$, $W_0 = 0.5$, $s = 0.5$ e $r = 0.01$.

A partir da Eq. (5.40) vemos que $\Psi^*(-X, -Z) = \Psi(X, Z)$. A evolução da amplitude da solução exata localizada é mostrada na Figura 5.8. Por meio desta figura pode-se ver que a amplitude da solução localizada é máxima na parte inferior do poço potencial ($X = 0$), que coincide com a intensidade máxima do não linearidade Kerr e a mudança sú-

bita do $w(X, Z)$. Além disso, a intensidade da onda tem a forma de um sóliton brilhante largo, quando r tende a zero, Figura 5.8.

5.5 Análise de estabilidade

Até agora, nós apresentamos novas soluções exatas localizadas da ESNLCQ simétrica \mathcal{PT} com coeficientes modulados, Eq. (2.19). Vale ressaltar que, em aplicações do mundo real como no caso de sistemas de comunicação óptica, a fim de aumentar a capacidade de transporte de informação do pulso de luz numa fibra óptica é desejável que as soluções, da equação diferencial que descreve a propagação de um pulso de luz através de uma fibra óptica, sejam estáveis.

Nós vamos analisar, por meio de simulações numéricas e recorrendo a critérios de Lyapunov, a estabilidade das soluções exatas localizadas obtidas na seção anterior, Eqs. (5.36), (5.38) e (5.40). Para isso, nós empregamos o método de decomposição do operador (*operator splitting method*) com diferenças finitas baseado no algoritmo de Crank-Nicolson (ver apêndice B). Este método já foi utilizado com sucesso por Cardoso *et al.* em [21] para analisar a estabilidade dos sóliton vectoriais com dois componentes. Nós indicamos as referências [113, 114] para obter mais detalhes sobre a descrição deste algoritmo na plataforma de software MATHEMATICA.

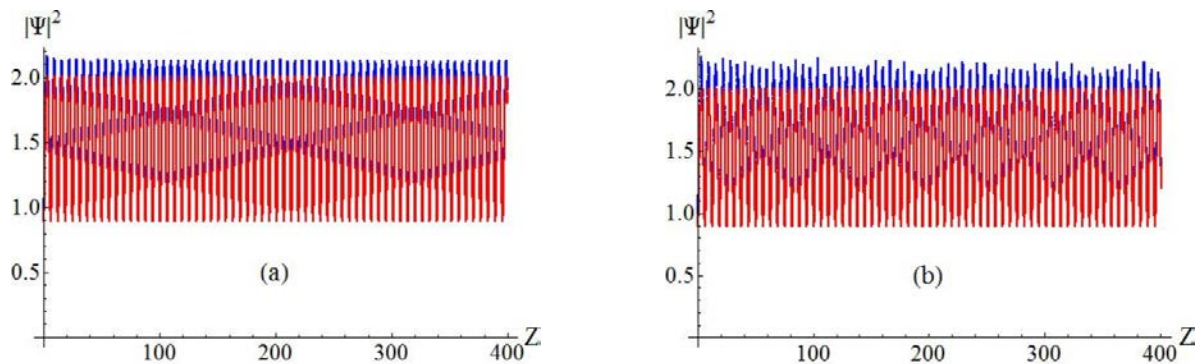


Figura 5.9: Análise da estabilidade: (a) Amplitude máxima da solução Eq. (5.36); analítica (vermelho) e perturbada (azul). (b) Amplitude máxima da solução Eq. (5.38); analítica (vermelho) e perturbada (azul) para $\lambda = \frac{\mu}{2}(V_0 - W_0^2/9)$, $\mu = 1$, $V_0 = 1$ e $W_0 = 0.5$.

Aqui usamos os passos $\Delta X = 0.02$ e $\Delta Z = 0.01$, na direção transversal e longitudinal da propagação, respectivamente, para a obtenção dos resultados numéricos sobre as direção longitudinal de propagação na faixa $[0, 400]$. Queremos mencionar que, os tamanhos do passo ΔX e ΔZ foram escolhidos tal que o menor tempo de processamento computacional é utilizado para alcançar os resultados numéricos. Ademais, nós adicionamos um ruído branco no pulso inicial $\Psi(X, 0)$, de tal forma que o pulso perturbado é da

forma

$$\Psi_{pert} = \Psi(X, 0) [1 + 0.01 R(X)] .$$

onde $R(X)$ é um número aleatório entre $[-0.5, 0.5]$, com essa escolha os valores do ruído branco são pequenos, centrados e com média zero.

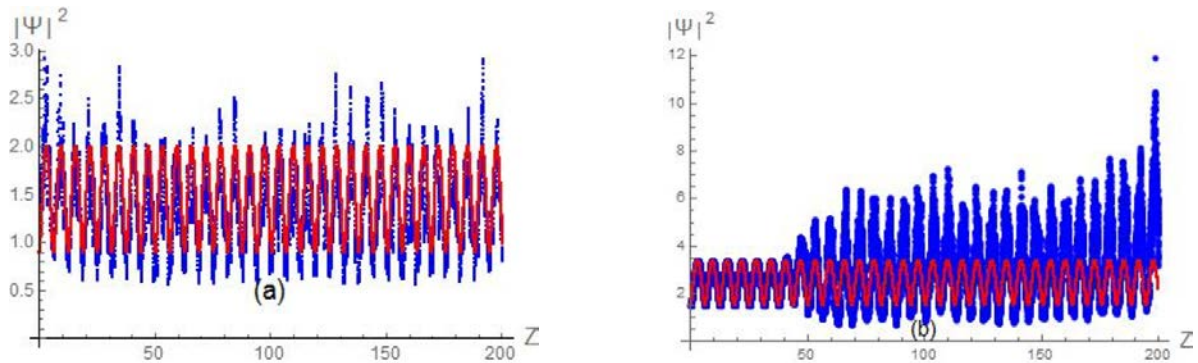


Figura 5.10: Análise da estabilidade (a) Amplitude máxima da solução Eq. (5.38); analítica (vermelho) e perturbada (azul) para $\lambda = 0.1$, $\mu = 1$, $V_0 = 1$ e $W_0 = 0.5$. (b) Amplitude máxima da solução Eq. (5.40); analítica (vermelho) e perturbada (azul) para $V_0 = 2$ e $W_0 = 0.4$.

A comparação entre os resultados numéricos e analíticos são mostrados na Figura 5.9, onde as soluções são mostradas apenas para $X = 0$. Pode-se notar que as amplitudes máximas das soluções numéricas perturbadas como funções da variável Z não coincidem com as amplitudes máximas analíticas correspondentes. De fato, de acordo com os critérios de Lyapunov [115, 116], quando a solução perturbada evolui em torno da solução analítica ela é dita ser estável. Isto pode ser aplicado a ambas as soluções dadas pelas Eqs. (5.36) e (5.38). No último caso, solução dada pela Eq. (5.38), a estabilidade é realizada apenas para $\lambda \leq \mu$, desde que a solução torna-se mais susceptível à perturbação inicial, isto é, tende a ser instável quando λ aproxima-se de zero (quando o coeficiente de não linearidade quártica torna-se predominante) ver Figura 5.10(a).

Além disso, foi encontrada que a solução exata localizada, Eq. (5.40) é instável sob a perturbação inicial considerada de acordo com os critérios de Lyapunov, uma vez que a solução perturbada evolui para longe da solução exata (ver Figura 5.10(b)). Uma vez que a solução exata Eq. (5.40) é instável, o aparecimento dela aqui deve ser entendida apenas como uma ilustração do método.

5.6 Comentários

Observamos que o exemplo 2, subseção 5.4.2, pode ser aplicado ao caso de BEC. Nesse caso, a equação $\partial_Z |\Psi|^2 + \partial_X [i/2 (\Psi \partial_X \Psi^* - \Psi^* \partial_X \Psi)] = -2 w(X, Z) |\Psi|^2$ é interpretada como a equação que rege a continuidade do número de partículas no sistema. Mais uma vez, a paridade ímpar de $w(X, Z)$ sob as reversões nas variáveis X e Z implica

na conservação do número médio de partículas. O termo no lado direito da equação de continuidade pode ser interpretado como fonte ou dreno de partículas, onde as fontes ou drenos de partículas ocorrem simultaneamente e em lados opostos dos poços do potencial, muito semelhantes ao efeito descrito por Klaiman *et al.* [13].

O método empregado aqui é bastante geral e pode ser aplicado para obter soluções exatas de outros potenciais se a solução associada à ESNL com intensidades das não linearidades cúbica e quártica são conhecidas. Gostaríamos de mencionar que se a ESNLCQ original Eq. (2.19) possui simetria \mathcal{PT} ou não depende de vários fatores, o fator fundamental é a escolha da função $\gamma(Z)$. Aqui nós escolhemos uma forma particular de $\gamma(Z)$ embora existam muitas outras opções que garantam a simetria \mathcal{PT} , ou seja, a simetria sob a inversão de X e Z . Notavelmente, tal simetria juntamente com a falta de autonomia dos coeficientes da Eq. (2.19), é importante para garantir a propagação, sem amplificação ou atenuação de sólitons estáveis.

Pode-se perguntar sobre a possibilidade de observar experimentalmente sistemas como os relatados neste capítulo. Por exemplo, se é necessário implementar, ou não, os coeficientes que aparecem na equação diferencial com uma alta precisão. Quanto aos parâmetros não lineares, pode-se dizer que é possível realizar uma mudança de escala arbitrária na amplitude da solução, de tal modo que o valor do parâmetro pode ser continuamente alterado para qualquer valor não nulo. No entanto, a relação entre estes parâmetros devem ser mantida a fim de manter as soluções analíticas. O mesmo pode ser dito sobre os outros parâmetros constantes dos termos lineares da equação diferencial, mas agora o dimensionamento deve ser feito nas variáveis de coordenadas. Assim, numa situação experimental verdadeira, pode-se ajustar alguns dos parâmetros e, mesmo que não seja possível fazer isto com todos eles, a solução analítica exata poderia ser utilizada a fim de implementar um processo de aproximação. Além disso, uma vez que temos verificado a estabilidade de algumas das soluções analíticas encontradas aqui, pode-se esperar que, mesmo no caso em que os parâmetros não são rigorosamente iguais às das soluções exactas, os sólitons poderão ser observados no sistema.

Capítulo 6

Conclusões e comentários finais

Nesta tese obtivemos novas soluções analíticas exatas de tipo sólitons brilhantes e escuros, da ESNL com coeficientes modulados, as quais podem ajudar a explicar diferentes dinâmicas da propagação de pulsos de luz através de uma fibra óptica ou podem descrever a evolução de um BEC. Estas novas soluções tipo sólitons foram obtidas em três situações diferentes.

No capítulo 3, para resolver a ESNLCQ com coeficientes modulados estendemos o método de transformações canônicas de ponto, o qual é utilizado para resolver equação de Schrödinger linear com parâmetros potenciais dependentes do tempo explicitamente. A utilização do método de transformações canônicas de ponto, levou a ESNLCQ com coeficientes modulados em uma ESNLCQ estacionária com coeficientes constantes. As soluções da ESNLCQ estacionária com coeficientes constantes foi encontrada em termos da função elíptica de Weierstrass \wp . Através destas últimas soluções, em termos de \wp , encontramos as novas soluções analíticas exatas que resolvem a ESNLCQ com coeficientes modulados. Em particular, obtivemos algumas configurações de soluções analíticas exatas tipo sólitons brilhante e escuro. No contexto de um BEC, a amplitude e a largura das soluções podem ser manipuladas controladamente variando a intensidade das interações de dois (G_3) e três (G_5) bósons e o potencial químico (μ), quais nós chamamos de sólitons largos.

Além disso, a utilização do método de transformações canônicas de ponto para resolver ESNLCQ com coeficientes modulados nos mostra claramente a relação intrínseca entre os coeficientes modulados da ESNLCQ e as funções reais $\gamma(t)$, $\delta(t)$ e $F(\xi)$. No contexto de um BEC, esta relação explícita nos permitiu encontrar novos potenciais externos de armadilhamento que são uma mistura de potenciais supersimétricos. Pelo lado da Física Matemática, o emprego do método de transformações canônicas de ponto nos permitiu resolver a ESNLCQ com uma série de não linearidades polinomiais com coeficientes modulados.

No capítulo 4, estendemos as classes de soluções vetoriais exatas de um sistema de duas ESNLCQ acopladas com coeficientes dependentes do tempo e espaço. Esta nova

classe de soluções analíticas vetoriais foram obtidas empregando o método de transformações canônicas de ponto e o método de equação de órbita. Ao considerar um BEC de uma espécie atômica com dois estados atômicos hiperfinos diferentes, mostramos que através de uma escolha adequada das funções reais $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $T(t)$, $\beta(t)$ e $\Theta(\xi)$ construímos um potencial externo de aprisionamento composto de um potencial harmônico (armadilha magnética) e um potencial periódico (rede óptica) que são ingredientes importantes em montagens experimentais para aprisionar um BEC. Encontramos também, uma solução analítica soliton brilhante-escuro, cuja amplitude e largura dos componentes do sóliton podem ser manipulados de maneira controlável por um parâmetro externo, c_0 , ao modelo.

No contexto da propagação de um pulso de luz através de uma fibra óptica, mostramos que para uma escolha apropriada das funções reais $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $T(t)$, $\beta(t)$ e $\Theta(\xi)$, pode-se equilibrar os efeitos do parâmetro de dispersão $m_k(t)$, os efeitos gerados pelas não linearidades cúbica e quártica $g_{kl}(x, t)$, $f_{kl}(x, t)$, $h_{kl}(x, t)$, e aqueles efeitos produzidos pelo coeficiente de absorção ou amplificação $\Gamma_k(t)$ sobre a propagação de um pulso óptico. Isto leva a obter soluções analíticas solitônicas brilhante-escuro, cinza-escuro, e brilhantes (sobre um pedestal)-escuras. As amplitudes e as larguras dos componentes dos sólitons podem ser moduladas por meio de um parâmetro externo, c_0 , ao modelo proposto. Em ambos os casos, fibras ópticas e BECs, quando o parâmetro externo se aproxima de seu valor crítico, a amplitude e a largura dos componentes dos sólitons vetoriais aumentam de maneira considerável. Neste caso nós chamamos essas soluções de sólitons vetoriais largos. Acreditamos que o parâmetro externo está relacionado com as condições iniciais ou de contorno dos componentes dos sólitons vetoriais e suas primeiras derivadas em relação ao tempo e espaço. Desta forma, a largura dos sólitons não é controlada pelo parâmetro externo, mas ele pode explicar o possível aparecimento de sólitons vetoriais largos em sistemas físicos cuja dinâmica é governada por um sistema de duas ESNLCQ acoplados com coeficientes modulados sob certas condições iniciais.

Finalmente, no capítulo 5 aplicamos o método de transformações canônicas de ponto para mapear uma ESNLCQ com coeficientes modulados em uma equação ESNLCQ com coeficientes não lineares constantes e um potencial não-hermitiano. Apenas consideramos potenciais não-hermitianos que apresentam em simultâneo paridade e reversão temporal (simetria \mathcal{PT}). Nosso interesse radicou em estudar a dinâmica de propagação de um pulso através de um meio óptico que possui simetria \mathcal{PT} . Neste contexto, o índice de refração linear $V(X, Z)$ e o coeficiente de ganho ou perda $W(X, Z)$ compõem o potencial não-hermitiano, $V(X, Z) + iW(X, Z)$, onde cumpre-se $V(X, Z) = V(-X, -Z)$ e $W(X, Z) = -W(-X, -Z)$.

A maior parte dos modelos discutidos na literatura não levam em conta a não linearidade quártica, que no contexto da propagação de um feixe de luz através de um meio óptico correspondem à não linearidade não-Kerr. Com a inclusão desta não linearidade

quântica, generalizamos dois modelos teóricos amplamente utilizados para investigar sistemas que possuem simetria \mathcal{PT} , a saber o modelo com potencial não-hermitiano Scarf II, subseção 5.2, e o modelo com potencial não-hermitiano Rosen-Morse II, subseção 5.3.

Obtivemos também soluções analíticas localizadas (na coordenada X) que resolvem a ESNLCQ com coeficientes modulados. As amplitudes e larguras destas soluções analíticas localizadas podem ser manipulados controladamente variando os parâmetros dos potenciais não-hermitianos.

As soluções analíticas exatas, as quais resolvem a ESNLCQ com coeficientes modulados em (1+1)D obtidos nesta tese pertencem à classe de soluções do tipo de sóliton (*one-soliton*), e esta classe pertence à família de soluções de tipo multi-sólitons. Neste sentido e como trabalho futuro, a construção de soluções de tipo *two-solitons*, que resolvem a ESNLCQ com coeficientes modulados em (1+1)D, bem como o estudo de diferentes aspectos da dinâmica dos sistemas físicos descritos pelas soluções de tipo *two-solitons*, tais como suas intrigantes propriedades de colisão e sua robustez contra perturbações externas estão sendo elaborados. Uma extensão natural do estudo feito nesta tese é tentar encontrar soluções analíticas para a ESNLCQ com coeficientes modulados em (2+1)D, tipo sóliton bidimensionais e vórtice, e analisar suas condições de estabilidade. Em anos recentes, uma busca vigorosa de sólitons bidimensionais e vórtices estáveis da ESNL em (2+1)D com coeficientes modulados foi realizada [117]-[121]. Contudo, o estudo das propriedades e dinâmica dos sólitons bidimensionais e vórtices continua aberto e em constante progresso. Portanto, nós acreditamos firmemente que este tema ainda deva ser mais explorado.

Referências Bibliográficas

- [1] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics*, Academic Press, San Diego, 2007.
- [2] L. P. Pitaevskii e S. Stringari, *Bose-Einstein condensation*, Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [3] V. I. Talanov. **Self focusing of wave beams in nonlinear media**. Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, v. 2, p. 138-141, 1965.
- [4] P. L. Kelley. **Self-focusing of optical beams**. Physical Review Letters, v. 15, p. 1005-1008, 1965.
- [5] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, e S. Stringari. **Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases**. Reviews of Modern Physics, v. 71, p. 463-512, 1999.
- [6] Kh. I. Pushkarov e D. I. Pushkarov. **Self-action of light beams in nonlinear media: soliton solutions**. Optical and Quantum Electronics, v. 11, p. 471-478, 1979.
- [7] N. Akhmediev, M. P. Das, e A. V. Vagov. **Bose-Einstein condensation of atoms with attractive interaction**. International Journal of Modern Physics B, v. 13, p. 625-631, 1999.
- [8] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. G. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A. D. Lange, K. Pilch, A. Jaakkola, H. -C. Nägerl, e R. Grimm. **Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms**. Nature, v. 440, p. 315-318, 2006.
- [9] K. Kodama e A. Hasegawa. **Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide**. IEEE Journal of Quantum Electronics, v. 23, p. 510-524, 1987.
- [10] Z. H. Musslimani, K. G. Makris, R. El-Ganainy, e D. N. Christodoulides. **Optical solitons in \mathcal{PT} periodic potentials**. Physical Review Letters, v. 100, 030402, 2008.

- [11] V. Dmitriev, A. A. Sukhorukov, e Yu. S. Kivshar. **Binary parity-time-symmetric nonlinear lattices with balanced gain and loss.** Optics Letters, v. 35, p. 2976-2978, 2010.
- [12] F. K. Abdullaev, Y. V. Kartashov, V. Konotop, e D. A. Zezyulin. **Solitons in \mathcal{PT} -symmetric nonlinear lattices.** Physical Review A, v. 83, 041805(R), 2011.
- [13] S. Klaiman, U. Günther, e N. Moiseyev. **Visualization of branch points in \mathcal{PT} -symmetric waveguides.** Physical Review Letters, v. 101, 080402, 2008.
- [14] S. V. Manakov. **On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves.** Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, v. 38, p. 248-253, 1974.
- [15] Th. Busch e J. R. Anglin. **Dark-bright solitons in inhomogeneous Bose-Einstein condensates.** Physical Review Letters, v. 87, 010401, 2001.
- [16] V. N. Serkin e A. Hasegawa. **Novel soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation model.** Physical Review Letters, v. 85, p. 4502-4505, 2000.
- [17] J. Belmonte-Garcia, V. M. Pérez-García, V. Vekslerchik, e V. V. Konotop. **Localized nonlinear waves in systems with time- and space-modulated nonlinearities.** Physical Review Letters, v. 100, 164102, 2008.
- [18] A. T. Avelar, D. Bazeia, e W. B. Cardoso. **Solitons with cubic and quintic nonlinearities modulated in space and time.** Physical Review E, v. 79, 025602(R), 2009.
- [19] X. -B. Liu, X. -F. Zhang, e B. Li. **Exact self-similar wave solutions for the generalized (3+1)-dimensional cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients.** Optics Communications, v. 285, p. 779-783, 2012.
- [20] V. N. Serkin, A. Hasegawa, e T. L. Belyaeva. **Nonautonomous solitons in external potentials.** Physical Review Letters, v. 98, 074102, 2007.
- [21] W. B. Cardoso, A. T. Avelar, e D. Bazeia. **Modulation of localized solutions in a system of two coupled nonlinear Schrödinger equations.** Physical Review E, v. 86, 027601, 2012.
- [22] J. L. Roberts, N. R. Claussen, James P. Burke, Jr. Chris H. Greene, E. A. Cornell, e C. E. Wieman. **Resonant magnetic field control of elastic scattering in cold ^{85}Rb .** Physical Review Letters, v. 81, p. 5109-5112, 1998.

- [23] M. Theis, G. Thalhammer, K. Winkler, M. Hellwig, G. Ruff, R. Grimm, e J. Hecker Denschlag. **Tuning the scattering length with an optically induced Feshbach resonance**. Physical Review Letters, v. 93, 123001, 2004.
- [24] V. Efimov. **Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system**. Physics Letters B, v. 33, p. 563-564, 1970.
- [25] V. E. Zakharov e A. B. Shabat. **Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media**. Journal of Experimental and Theoretical Physics, v. 34, p. 62-69, 1972.
- [26] R. Hirota. **Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation**. Journal of Mathematical Physics, v. 14, p. 805-809, 1973.
- [27] V. N. Serkin, T. L. Belyaeva, I. V. Alexandrov, e G. M. Melchor. **Novel topological quasi-soliton solutions for the nonlinear cubic-quintic Schrödinger equation model**. Proceeding SPIE, v. 4271, p. 292-302, 2001.
- [28] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, e R. G. Hulet. **Formation and propagation of matter-wave soliton trains**. Nature, v. 417, p. 150-153, 2002.
- [29] S. L. Cornish, S. T. Thompson, e C. E. Wieman. **Formation of bright matter-wave solitons during the collapse of attractive Bose-Einstein condensates**. Physical Review Letters, v. 96, 170401, 2006.
- [30] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, and K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, e M. Lewenstein. **Dark solitons in Bose-Einstein condensates**. Physical Review Letters, v. 83, p. 5198-5201, 1999.
- [31] J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, Charles W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider, W. D. Phillips. **Generating solitons by phase engineering of a Bose-Einstein condensate**. Science, v. 287, p. 97-101, 2000.
- [32] C. M. Bender and S. Boettcher. **Real spectra in non-hermitian hamiltonians having \mathcal{PT} symmetry**. Physical Review Letters, v. 80, p. 5243-5246, 1998.
- [33] Z. Ahmed. **Real and complex discrete eigenvalues in an exactly solvable one-dimensional complex \mathcal{PT} -invariant potential**. Physics Letters A, v. 282, p. 343-348, 2001.
- [34] C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones. **Complex extension of quantum mechanics**. Physical Review Letters, v. 89, 270401, 2002.

- [35] C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones. **Must a hamiltonian be hermitian?**. American Journal of Physics, v. 71, p. 1095-1102, 2003.
- [36] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones and B. K. Meister. **Faster than hermitian quantum mechanics**. Physical Review Letters, v. 98, 040403, 2007.
- [37] A. E. Siegman, *Laser*. University Science Books, Sausalito, CA, 1986.
- [38] Z. H. Musslimani, K. G. Markis, R. El-Ganainy and D. N. Christodoulides. **Analytical solutions to a class of nonlinear Schrödinger equations with \mathcal{PT} -like potentials**. Journal of Physics A: Mathematical and theoretical, v. 41, 244019, 2008.
- [39] H. Cartarius e G. Wunner. **Model of a \mathcal{PT} -symmetric Bose-Einstein condensate in a d-function double-well potential**. Physical Review A, v. 86, 013612, 2012.
- [40] C. Sulem, P-L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation: Self-focusing and wave collapse*. Springer, New York, 1999.
- [41] Y. S. Kivshar e B. Luther-Davies. **Dark optical solitons: physics and applications**. Physics reports, v. 298, p. 81-197, 1998.
- [42] P. Xiao-Feng e F. Yuan-Ping, *Quantum mechanics in nonlinear systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2005.
- [43] N. J. Zabusky e M. D. Kruskal. **Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states**. Physical Review Letters, v. 15, p. 240-243, 1965.
- [44] V. E. Zakharov e A. B. Shabat. **Interaction between solitons in a stable medium**. Journal of Experimental and Theoretical Physics, v. 37, p. 823-828, 1973.
- [45] A. Hasegawa e F. Tappert. **Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion**. Applied Physics Letters, v. 23, p. 142-144, 1973.
- [46] A. Hasegawa e F. Tappert. **Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion**. Applied Physics Letters, v. 23, p. 171-172, 1973.
- [47] W. J. Tomlinson, R. J. Hawkins, A. M. Weiner, J. P. Heritage, e R. N. Thurston. **Dark optical solitons with finite-width background pulses**. Journal of the Optical Society of America B, v. 6, p. 329-334, 1989.

- [48] A. C. Newell, *Solitons in mathematics and physics*. CBMS-NFS Regional Conferences Series in Applied Mathematics, v. 48. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1985.
- [49] Y. S. Krivshar e G. P. Agrawal, *Optical solitons: From fibers to photonic crystals*. Academic Express, San Diego, 2003.
- [50] R. Hao, L. Li, Z. Li, R. Yang, e G. Zhou. **A new way to exact quasi-soliton solutions and soliton interaction for the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients**. Optics Communications, v. 245, p. 383-390, 2005.
- [51] M. Segev e G. Stegeman. **Self-trapping of optical beams: Spatial solitons**. Physics Today, v. 51, p. 42-48, 1998.
- [52] J. E. Bjorkholm e A. Ashkin. **Cw self-focusing and self-trapping of light in sodium vapor**. Physical Review Letters, v.32, p. 129-132, 1974.
- [53] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, e J. P. Gordon. **Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers**. Physical Review Letter, v. 45, p. 1095-1098, 1980.
- [54] P. Emplit, J. P. Hamaide, F. Reynaud, C. Froehly, e A. Barthelemy. **Picosecond steps and dark pulses through nonlinear single mode fibers**. Optics Communications, v. 62, p. 374-379, 1987.
- [55] D. R. Andersen, D. E. Hooton, G. A. Swartzlander, e A. E. Kaplan. **Direct measurement of the transverse velocity of dark spatial solitons**. Optics Letters, v. 15, p. 783-785, 1990.
- [56] L. Pitaevskii. **Vortex lines in an imperfect Bose gas**. Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, v. 13, p. 451-454, 1961.
- [57] E. P. Gross. **Hydrodynamics of a superfluid condensate**. Journal of Mathematical Physics, v. 4, p. 195-207, 1963.
- [58] D. T. Haar, Collected papers of L. D. Landau. Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [59] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, e E. A. Cornell. **Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor**. Science, v. 269, p. 198-201, 1995.
- [60] L. Salasnich, A. Parola, e L. Reatto. **Effective wave equations for the dynamics of cigar-shaped and disk-shaped Bose condensates**. Physical Review A, v. 65, 043614, 2002.

- [61] J. M. Vogels, C. C. Tsai, R. S. Freeland, S. J. J. M. F. Kokkelmans, B. J. Verhaar, e D. J. Heinzen. **Prediction of Feshbach resonances in collisions of ultracold rubidium atoms**. *Physical Review A*, v. 56, p. R1067-R1070, 1997.
- [62] P. O. Fedichev, Yu. Kagan, G. V. Shlyapnikov, e J. T. M. Walraven. **Influence of nearly resonant light on the scattering length in low-temperature atomic gases**. *Physical Review Letters*, v. 77, p. 2913-2916, 1996.
- [63] A. J. Moerdijk, B. J. Verhaar, e T. M. Nagtegaal. **Collisions of dressed ground-state atoms**. *Physical Review A*, v. 53, p. 4343-4351, 1996.
- [64] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H. -J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, e W. Ketterle. **Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate**. *Nature*, v. 392, p. 151-154, 1998.
- [65] W. P. Reinhardt e C. W. Clark. **Soliton dynamics in the collisions of Bose-Einstein condensates: An analogue of the Josephson effect**. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 30, L785, 1997.
- [66] P. A. Ruprecht, M. J. Holland, K. Burnett, e M. Edwards. **Time-dependent solution of the nonlinear Schrödinger equation for Bose-condensed trapped neutral atoms**. *Physical Review A*, v. 51, p. 4704-4711, 1995.
- [67] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, e C. Salomon. **Formation of a matter-wave bright soliton**. *Science*, v. 296, p. 1290-1293, 2002.
- [68] L. E. Arroyo Meza, A. de Souza Dutra, e M. B. Hott. **Wide localized solitons in system eith time- and space-modulated nonlinearities**. *Physical Review E*, v. 86, 026605, 2012.
- [69] J. Wang, L. Li, e S. Jia. **Nonlinear tunneling of optical similaritons in nonlinear waveguides**. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 25, p. 1254-1260, 2008.
- [70] T. S. Raju e P. K. Panigrahi. **Self-similar propagation in a graded-index nonlinear-fiber amplifier with an external source**. *Physical Review A*, v. 81, p. 043820, 2010.
- [71] C. Farina de Souza e A. de Souza Dutra. **The propagator for a time-dependent mass subject to a harmonic potential with a time-dependent frequency**. *Physics Letters A*, v. 123, p. 297-301, 1987.

- [72] A. de Souza Dutra, Marcelo Hott, e Filipe F. Bellotti. **A mapping function approach applied to some classes of nonlinear equations**. arXiv:1002.4609v1, 2010.
- [73] M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbook of mathematical functions*. Dover, Toronto, 1965.
- [74] W. B. Cardoso, A.T. Avelara, e D. Bazeia. **Modulation of breathers in cigar-shaped Bose–Einstein condensates**. *Physcis Letters A*, v. 374, p. 2640–2645, 2010.
- [75] X. -Y. Tang e P. K. Shukla. **Solution of the one-dimensional spatially inhomogeneous cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with an external potential**. *Physical Review A*, v. 76, 013612, 2007.
- [76] J. -R. He e H. -M. Li. **Analytical solitary-wave solutions of the generalized nonautonomous cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with different external potentials**. *Physical review E*, v. 83, 066607, 2011.
- [77] F. Cooper, A. Khare, e U. Sukhatme. **Supersymmetry and quantum mechanics**. *Physics Reports*, v. 251, p. 267-385, 1995.
- [78] W. B. Cardoso, A. T. Avelar, e D. Bazeia. **Bright and dark solitons in a periodically attractive and repulsive potential with nonlinearities modulated in space and time**. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 11, p. 4269-4274, 2011.
- [79] D. J. Kaup e B. A. Malomed. **Soliton trapping and daughter waves in the Manakov model**. *Physical Review A*, v. 48, p. 599-604, 1993.
- [80] A. P. Sheppard e Y. S. Kivshar. **Polarized dark solitons in isotropic Kerr media**. *Physical Review E*, v. 55, p. 4773-4782, 1997.
- [81] W. B. Cardoso, A. T. Avelar, D. Bazeia e M. S. Hussein. **Solitons of two-component Bose–Einstein condensates modulated in space and time**. *Physics Letters A*, v. 374, p. 2356-2360, 2010.
- [82] L. E. Arroyo Meza, A. de Souza Dutra, e M. B. Hott. **Wide vector solitons in systems with time- and space-modulated nonlinearities**. *Physical Review E*, v. 88, 053202, 2013.
- [83] D. Bazeia, M. J. dos Santos, R. F. Ribeiro. **Solitons in systems of coupled scalar fields**. *Physics Letters A*, v. 208, p. 84-88, 1995.

- [84] D. Bazeia, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro, e D. Toledo. **Soliton stability in systems of two real scalar fields**. Journal of Physics A: Mathematical and General, v. 30, p. 8157-8166, 1997.
- [85] D. Bazeia e F. A. Brito. **Bags, junctions, and networks of BPS and non-BPS defects**. Physical Review D, v. 61, 105019, 2000.
- [86] A. de Souza Dutra. **General solutions for some classes of interacting two field kinks**. Physics Letters B, v. 626, p. 249–255, 2005.
- [87] A. de Souza Dutra, A. C. Amaro de Faria Jr.. **Expanding the class of general exact solutions for interacting two field kinks**. Physics Letters B, v. 642, p. 274–278, 2006.
- [88] M. Crosta, A. Fratalocchi, e S. Trillo. **Bistability and instability of dark-antidark solitons in the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation**. Physical Review A, v. 84, 063809, 2011.
- [89] M. Crosta, A. Fratalocchi, e S. Trillo. **Double shock dynamics induced by the saturation of defocusing nonlinearities**. Optics Letters, v. 37, p. 1634-1636, 2012.
- [90] M. Crosta, S. Trillo, e A. Fratalocchi. **Crossover dynamics of dispersive shocks in Bose-Einstein condensates characterized by two- and three-body interactions**. Physical Review A, v. 85, 043607, 2012.
- [91] L. E. Arroyo Meza, A. de Souza Dutra, J. R. L. dos Santos, M. B. Hott, e O. C. Winter. **Disclosing the generic behavior of topological solutions: An orbit-based approach**. Europhysics Letters, v. 98, 10011, 2012.
- [92] A. de Souza Dutra, A. C. Amaro de Faria Jr., e M. Hott. **Degenerate and critical Bloch branes**. Physical Review D, v. 78, 043526, 2008.
- [93] F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, e M. Inguscio. **Josephson junction arrays with Bose-Einstein condensates**. Science, v. 293, p. 843-846, 2001.
- [94] Y. V. Kartashov, B. A. Malomed, e L. Torner. **Solitons in nonlinear lattices**. Review of Modern Physics, v. 83, p. 247-305, 2011.
- [95] V. V. Afanas'ev, E. M. Dianov, A. M. Prokhorov, e V. N. Serkin. **Nonlinear pairing of light and dark optical solitons**. Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, v. 48, p. 638-642, 1988.

- [96] S. Trillo, S. Wabnitz, E. M. Wright, e G. I. Stegeman. **Optical solitary waves induced by cross-phase modulation.** Optics Letters, v. 13, p. 871-873, 1988.
- [97] V. V. Afanasjev, E. M. Dianov, e V. N. Serkin. **Nonlinear pairing of short bright and dark soliton pulses by phase cross modulation.** IEEE Journal of Quantum Electronics, v. 25, p. 2656-2664, 1989.
- [98] V. V. Afanasjev, Y. S. Kivshar, V. V. Konotop, e V. N. Serkin. **Dynamics of coupled dark and bright optical solitons.** Optics Letters, v. 1, p. 805-807, 1989.
- [99] T.L. Belyaeva, V.N. Serkin C. Hernandez-Tenorio, e F. Garcia-Santibañez. **Enigmas of optical and matter-wave soliton nonlinear tunneling.** Journal of Modern Optics, v. 57, p. 1087-1099, 2010.
- [100] T. Kanna and K. Sakkaravarthi. **Multicomponent coherently coupled and incoherently coupled solitons and their collisions.** Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, v. 44, 285211, 2011.
- [101] N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Solitons: Nonlinear pulses and beams.* London, Chapman and Hall, 1997.
- [102] D. A. Zezyulin, G. L. Alfimov, e V. V. Konotop. **Nonlinear modes in a complex parabolic potential.** Physical Review A, v. 81, 013606, 2010.
- [103] D. A. Zezyulin e V. V. Konotop. **Nonlinear modes in the harmonic \mathcal{PT} -symmetric potential.** Physical Review A, v. 85, 043804, 2012.
- [104] L. E. Arroyo Meza, A. de Souza Dutra, M. B. Hott, e P. Roy. **Wide localized solutions of the parity-time-symmetric nonautonomous nonlinear Schrödinger equation.** Physical Review E, v. 91, 013205, 2015.
- [105] A. de Souza Dutra, M. B. Hott, e V. G. C. S. dos Santos. **Time-dependent non-hermitian mamiltonians with real energies.** Europhysics Letters, v. 71, p. 166-171, 2005.
- [106] E. Merzbacher. *Quantum Mechanics.* John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [107] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, e Z. H. Musslimani. **\mathcal{PT} -symmetric periodic optical potentials.** International Journal of Theoretical Physics, v. 50, p. 1019–1041, 2011.
- [108] Z. Shi, X. Jiang, X. Zhu, e H. Li. **Bright spatial solitons in defocusing Kerr media with \mathcal{PT} -symmetric potentials.** Physical review A, v. 84, 053855, 2011.

- [109] B. Midya e R. Roychoudhury. **Nonlinear localized modes in \mathcal{PT} -symmetric Rosen-Morse potential wells.** Physical Review A, v. 87, 045803, 2013.
- [110] G. Lévai e E Magyari. **The \mathcal{PT} -symmetric Rosen–Morse II potential: Effects of the asymptotically non-vanishing imaginary potential component.** Journal of Physics A: Mathematical and theoretical, v. 42, 195302, 2009.
- [111] Y. V. Kartashov, L. Torner, e V. A. Vysloukh. **Parametric amplification of soliton steering in optical lattices.** Optics Letters, v. 29, p. 1102-1104, 2004.
- [112] R. Yang e X. Wu. **Spatial soliton tunneling, compression and splitting.** Optics Express, v. 16, p. 17759-17767, 2008.
- [113] D. Dubin. *Numerical and analytical methods for scientists and engineers using mathematica.* John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2003.
- [114] Q. Chang, E. Jia, e W. Sun. **Difference schemes for solving the generalized nonlinear Schrödinger equation.** Journal of Computational Physics, v. 148, p. 397–415, 1999.
- [115] A. M. Lyapunov. *General problem of the stability of motion.* Taylor & Francis, London, 1992.
- [116] L. Elsgoltz. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.* Editorial Mir, Moscú, 1969.
- [117] W.-P. Zhong, R.-H. Xie, M. Belić, N. Petrović, G. Chen, e L. Yin. **Exact spatial soliton solutions of the two-dimensional generalized nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients.** Physical Review A, v. 78, 023821, 2008.
- [118] W.-P. Zhong, M. R. Belić, e Y. Xia. **Special soliton structures in the (2+1)-dimensional nonlinear Schrödinger equation with radially variable diffraction and nonlinearity coefficients.** Physical Review E, v. 83, 036603, 2011.
- [119] J. Xie, Z. Su, W. Chen, G. Chen, J. Lv, D. Mihalache, e Y. He. **Defect solitons in two-dimensional photonic lattices with parity-time symmetry.** Optics Communications, v. 313, p. 139-145, 2014.
- [120] L. Wu, L. Li, J.-F. Zhang, D. Mihalache, B. Malomed, e W. M. Liu. **Exact solutions of the Gross-Pitaevskii equation for stable vortex modes in two-dimensional Bose-Einstein condensates.** Physical Review A, v. 81, 061805(R), 2010.

- [121] D.-S. Wang, X. Zeng, e Y.-Q. Ma. **Exact vortex solitons in a quasi-two-dimensional Bose–Einstein condensate with spatially inhomogeneous cubic–quintic nonlinearity.** *Physics Letters A*, v. 376, p. 3067-3070, 2012.
- [122] P. M. Morse e H. Feshbach. *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill, New York, 1953, Chap. 9.
- [123] T. R. Taha e M. J. Ablowitz. **Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation.** *Journal of Computational Physics*, v. 55, p. 203-230, 1984.
- [124] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, e W. T. Vetterling. *Numerical recipes: The art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [125] J. Crank e P. Nicolson. **A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type.** *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 43, p. 50-67, 1947.

Apêndice A

A equação de propagação de pulsos de luz através de fibras ópticas

Neste apêndice, nós seguimos a Ref. [1] para derivar a equação diferencial que modela a propagação de pulsos de luz através de uma fibra óptica.

A.1 Equações de Maxwell

A propagação de pulsos de luz em fibras ópticas, como todo fenômeno eletromagnético, cumpre as equações de Maxwell. Sendo assim, iniciamos incluindo as equações de Maxwell na matéria em termos de cargas e correntes livres, da forma

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.4})$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{H} são os campos elétrico e magnético, respectivamente, e \mathbf{D} e \mathbf{B} são correspondentemente a densidade de fluxo elétrico e magnético. A densidade de corrente \mathbf{J}_f e a densidade de carga ρ_f representam as fontes do campo eletromagnético. Na ausência de cargas e correntes livres em um meio, tal como uma fibra óptica, se cumpre $\mathbf{J}_f = 0$ e $\rho_f = 0$.

A densidade de fluxo \mathbf{D} e \mathbf{B} surgem em resposta aos campos \mathbf{E} e \mathbf{H} propagando-se dentro do meio, e estão relacionados da forma

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (\text{A.5})$$

e

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad (\text{A.6})$$

onde ε_0 é a permissividade elétrica do espaço livre, μ_0 é a permeabilidade do espaço livre, e \mathbf{P} e \mathbf{M} são a polarização elétrica e magnética, respectivamente. Para um meio não magnético, tais como as fibras ópticas, $\mathbf{M} = 0$.

A.2 Equação de Onda

A partir das equações apresentadas acima, iremos deduzir a equação de onda da propagação de pulsos de luz em fibras ópticas. Substituindo as Eqs. (A.5) e (A.6) em (A.2), obtemos

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Agora, derivando com respeito ao tempo desta última equação, usando (A.1), e empregando a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$, alcança-se finalmente

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (\text{A.7})$$

Deste modo, para resolver a Eq. (A.7) é necessário expressar a polarização \mathbf{P} em termos do campo elétrico \mathbf{E} .

Quando um dielétrico, tal como uma fibra óptica, é colocado num campo elétrico externo, as suas moléculas adquirem um momento de dipolo elétrico e o dielétrico é dito estar polarizado. A relação mais geral entre \mathbf{P} e \mathbf{E} , num meio não linear, é dada pela expressão entre seus componentes

$$\begin{aligned} P_i(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \sum_j \int_{-\infty}^t \chi_{ij}^{(1)}(t - t_1) E_j(\mathbf{r}, t_1) dt_1 \\ &+ \varepsilon_0 \sum_{jk} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \chi_{ijk}^{(2)}(t - t_1, t - t_2) E_j(\mathbf{r}, t_1) E_k(\mathbf{r}, t_2) dt_1 dt_2 \\ &+ \varepsilon_0 \sum_{jkl} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \chi_{ijkl}^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) E_j(\mathbf{r}, t_1) \\ &\quad \times E_k(\mathbf{r}, t_2) E_l(\mathbf{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

ou em forma vetorial

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = & \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi^{(1)}(t-t_1) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) dt_1 \\
& + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \chi^{(2)}(t-t_1, t-t_2) : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) dt_1 dt_2 \\
& + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \\
& \quad \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3) dt_1 dt_2 + \dots, \tag{A.9}
\end{aligned}$$

onde

$$(\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E})_i = \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j, \quad (\chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E})_i = \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k, \quad (\chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E})_i = \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l,$$

e $\chi^{(j)}$ é a j -ésima ordem da suscetibilidade elétrica. A suscetibilidade $\chi^{(1)}$ representa a contribuição dominante para \mathbf{P} , seus efeitos lineares são incluídos através do índice de refração n e o coeficiente de atenuação α . A suscetibilidade $\chi^{(2)}$ é responsável pelos efeitos não lineares como a geração de segundo harmônico. No entanto, $\chi^{(2)}$ é nula em meios que possuem uma simetria de inversão no nível molecular, como no caso de algumas fibras ópticas. Desta forma, os efeitos não lineares de ordem mais baixa em fibras ópticas considerados aqui são originados por $\chi^{(3)}$. $\chi^{(3)}$ é responsável pelo efeito Kerr óptico, isto é pela variação instantânea do índice de refração n do meio óptico em função à intensidade do pulso de luz.

Na presença de um campo elétrico forte externo a polarização no interior da fibra óptica é mais intenso. Por conseguinte, para uma descrição mais exata da propagação de pulsos de luz em fibras ópticas devemos considerar os efeitos não lineares de ordem superior à terceira ordem na suscetibilidade χ . Desta maneira, a polarização \mathbf{P} numa fibra óptica, considerando os efeitos não lineares das suscetibilidades $\chi^{(3)}$ e $\chi^{(5)}$, consiste em três partes [6]

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{Kerr}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{n\tilde{a}o-Kerr}(\mathbf{r}, t), \tag{A.10}$$

onde \mathbf{P}_L , \mathbf{P}_{Kerr} e $\mathbf{P}_{n\tilde{a}o-Kerr}$ estão relacionados com os efeitos lineares e não lineares, $\chi^{(1)}$, $\chi^{(3)}$ e $\chi^{(5)}$ respectivamente, na fibra óptica. Assim, as Eqs. (A.7)-(A.10) fornecem um formalismo geral para estudar os efeitos não lineares em fibras ópticas.

Antes de resolver a Eq. (A.7), é necessário fazer várias hipóteses simplificadoras: Primeira hipótese, \mathbf{P}_{Kerr} e $\mathbf{P}_{n\tilde{a}o-Kerr}$ são tratadas como pequenas perturbações em comparação com \mathbf{P}_L . Segunda hipótese, o pulso de luz mantém sua polarização linear ao

longo do comprimento da fibra, de modo que uma abordagem escalar seja válida. Terceira hipótese, o pulso de luz é quase monocromático, isto é, o espectro do pulso, centrado na frequência ω_0 , tem uma largura espectral $\Delta\omega$, de modo que $\Delta\omega$ é muito pequeno comparado com ω_0 ($\Delta\omega/\omega_0 \lll 1$).

Conseqüentemente, pelas segunda e terceira hipóteses podemos escrever o campo elétrico da forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [E(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + E^*(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t)], \quad (\text{A.11})$$

onde \hat{x} é o vetor unitário de polarização, $E(\mathbf{r}, t)$ é uma função variando lentamente no tempo, e $E^*(\mathbf{r}, t)$ seu complexo conjugado. Da mesma maneira, \mathbf{P}_L , \mathbf{P}_{Kerr} e $\mathbf{P}_{n\tilde{a}o-Kerr}$ podem apresentar as formas

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [P_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + P_L^*(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t)], \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{P}_{Kerr}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [P_{Kerr}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + P_{Kerr}^*(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t)], \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{P}_{n\tilde{a}o-Kerr}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [P_{n\tilde{a}o-Kerr}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + P_{n\tilde{a}o-Kerr}^*(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t)]. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo as Eqs. (A.11) e (A.12) no primeiro termo da Eq. (A.8), obtemos

$$P_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t - t_1) E(\mathbf{r}, t_1) \exp[-i\omega_0 t_1] dt_1,$$

$$P_L^*(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t - t_1) E^*(\mathbf{r}, t_1) \exp[i\omega_0 t_1] dt_1.$$

Agora, usando as transformadas de Fourier, $E(\mathbf{r}, t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t_1) d\omega$ e $\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t') \exp[i\omega' t'] dt'$, obtemos

$$P_L(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] d\omega, \quad (\text{A.15})$$

$$P_L^*(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) \tilde{E}^*(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp[i(\omega - \omega_0)t] d\omega. \quad (\text{A.16})$$

Para encontrar a componente P_{Kerr} , consideramos que a resposta não linear da fibra óptica é instantânea, de modo que $\chi_{ijkl}^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) = \chi_{ijkl}^{(3)} \delta(t - t_1) \delta(t - t_2) \delta(t - t_3)$.

Então, substituindo as Eqs. (A.11) e (A.13) no terceiro termo da Eq. (A.8), obtemos

$$P_{Kerr}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + P_{Kerr}^*(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t) = \frac{\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} (E(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + E^*(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t))^3. \quad (\text{A.17})$$

O termo do lado direito da última igualdade tem dois termos oscilantes, um com frequência ω_0 e outro com frequência $3\omega_0$. O termo oscilante de frequência $3\omega_0$ é geralmente desprezível em fibras ópticas. Assim, a partir da Eq. (A.17) segue-se que

$$P_{Kerr}(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{Kerr} E(\mathbf{r}, t) \quad , \quad P_{Kerr}^*(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{Kerr} E^*(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.18})$$

onde $\varepsilon_{Kerr} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2$.

Para encontrar a componente $P_{\text{não-Kerr}}$, consideramos que a resposta não linear da fibra óptica é instantânea, de modo que

$$\chi_{ijklmq}^{(5)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3, t - t_4, t - t_5) = \chi_{ijklmq}^{(5)} \delta(t - t_1) \delta(t - t_2) \delta(t - t_3) \delta(t - t_4) \delta(t - t_5). \quad (\text{A.19})$$

Assim, substituindo as Eqs. (A.11), (A.14) e (A.19) no quinto termo da Eq. (A.8), obtemos

$$P_{\text{não-Kerr}}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + P_{\text{não-Kerr}}^*(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t) = \frac{\varepsilon_0}{16} \chi_{xxxxxx}^{(5)} (E(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + E^*(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t))^5. \quad (\text{A.20})$$

O termo do lado direito da Eq. (A.20) tem três termos oscilantes, com frequências ω_0 , $3\omega_0$ e $5\omega_0$. Os termos oscilantes de frequências $3\omega_0$ e $5\omega_0$ são geralmente desprezíveis em fibras ópticas. Desta maneira, a partir da última igualdade, deduzimos que

$$P_{\text{não-Kerr}}(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{não-Kerr}} E(\mathbf{r}, t) \quad , \quad P_{NLQ}^*(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{não-Kerr}} E^*(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.21})$$

onde $\varepsilon_{\text{não-Kerr}} = \frac{5}{8} \chi_{xxxxxx}^{(5)} |E(\mathbf{r}, t)|^4$.

Para obter a equação de onda da função que varia lentamente no tempo, $E(\mathbf{r}, t)$, é mais conveniente trabalhar no domínio da frequência usando a transformada de Fourier. Para este fim, durante a derivação de propagação da onda, consideramos que ε_{Kerr} e $\varepsilon_{\text{não-Kerr}}$ são constantes. Esta consideração se justifica tendo em vista a aproximação de que a função escalar $E(\mathbf{r}, t)$ varia lentamente no tempo e pela natureza perturbativa dos \mathbf{P}_{Kerr} e $\mathbf{P}_{\text{não-Kerr}}$, isto é tendo em conta a primeira hipótese.

Por conseguinte, a partir das Eqs. (A.11) - (A.21) e usando a transformada de Fourier $E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] d\omega$, obtemos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t)$, \mathbf{P}_{Kerr} e

$\mathbf{P}_{n\tilde{a}o-Kerr}$ no dominio da frequência

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \hat{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \hat{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}^*(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp(i\omega t) d\omega,\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) &= \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \hat{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &\quad + \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \hat{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\chi}_{xx}^{(1)*}(\omega) \tilde{E}^*(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp(i\omega t) d\omega,\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{Kerr}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{Kerr}}{4\pi} \hat{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &\quad + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{Kerr}}{4\pi} \hat{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}^*(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp(i\omega t) d\omega.\end{aligned}\quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{n\tilde{a}o-Kerr}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{n\tilde{a}o-Kerr}}{2\pi} \hat{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &\quad + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{n\tilde{a}o-Kerr}}{2\pi} \hat{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}^*(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \exp(i\omega t) d\omega.\end{aligned}\quad (\text{A.25})$$

Agora, a partir da Eq. (A.3) e usando as Eqs. (A.22) - (A.25), segue-se que para fibras ópticas ($\rho_f = 0$) as seguintes condições são satisfeitas

$$\vec{\nabla} \cdot [\hat{x} \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0)] = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot [\hat{x} \tilde{E}^*(\mathbf{r}, \omega - \omega_0)] = 0. \quad (\text{A.26})$$

Neste ponto, voltamos para a equação diferencial que descreve a evolução do pulso de luz, Eq. (A.7). Como resultado da substituição das Eqs. (A.10) e (A.22) - (A.26) na Eq. (A.7), obtemos

$$\nabla^2 \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) + \varepsilon(\omega) \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = 0, \quad (\text{A.27})$$

$$\nabla^2 \tilde{E}^*(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) + \varepsilon(\omega) \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \tilde{E}^*(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = 0, \quad (\text{A.28})$$

onde $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ e

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{Kerr} + \varepsilon_{n\tilde{a}o-Kerr}, \quad (\text{A.29})$$

$\varepsilon(\omega)$ é a constante dielétrica da fibra ótica. A partir de agora, nós só trabalhamos com a parte real do campo elétrico no domínio da frequência, $\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0)$.

Para resolver a Eq. (A.27) usamos o método de separação de variáveis, assim supomos a solução da forma

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(i\beta_0 z), \quad (\text{A.30})$$

onde $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$ é uma função de que varia lentamente em z , e $\beta_0 = \beta(\omega_0)$ é o número de onda dentro da fibra ótica que será determinado depois. Substituindo a Eq. (A.30) na Eq. (A.27), temos

$$\frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{\tilde{A}} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} + \frac{i2\beta_0}{\tilde{A}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - \beta_0^2 + \varepsilon(\omega) \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0,$$

como \tilde{A} é uma função de que varia lentamente em z , então podemos considerar que $\partial^2 \tilde{A} / \partial z^2 = 0$, e agrupando convenientemente obtemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \varepsilon(\omega) \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 F = \tilde{\beta}^2 F, \quad (\text{A.31})$$

$$i2\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \left(\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 \right) \tilde{A} = 0. \quad (\text{A.32})$$

Nós precisamos obter $\tilde{\beta}^2$ a partir da Eq. (A.31) (equação de autovalores), e substituir tal resultado na Eq. (A.32) para encontrar a função $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$.

Para alcançar nosso objetivo, primeiro encontremos a relação entre o índice de refração linear $n(\omega)$ e o coeficiente de absorção $\alpha(\omega)$ com os efeitos lineares da constante dielétrica $\varepsilon(\omega)$, dada pela definição

$$\varepsilon(\omega) = \left(n(\omega) + i \frac{\alpha(\omega)}{2\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega}} \right)^2 = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega). \quad (\text{A.33})$$

Considerando, $\left| \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) \right| \ll 1$ encontramos as relações

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \text{Re} [\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)] \quad , \quad \alpha(\omega) = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega}}{n(\omega)} \text{Im} [\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)] \quad (\text{A.34})$$

Segundo, encontremos a relação entre o índice de refração $\tilde{n}(\omega)$ e o coeficiente de absorção

$\tilde{\alpha}(\omega)$ com os efeitos não lineares da constante dielétrica $\varepsilon(\omega)$, dada pela definição

$$\varepsilon(\omega) = \left(\tilde{n}(\omega) + i \frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega}} \right)^2 = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{Kerr} + \varepsilon_{n\tilde{a}o-Kerr}. \quad (\text{A.35})$$

Considerando $\left| \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{Kerr} + \varepsilon_{n\tilde{a}o-Kerr} \right| \ll 1$ encontramos

$$\begin{aligned} \tilde{n}(\omega) &= 1 + \frac{1}{2} \text{Re} [\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)] + \frac{3}{8} \text{Re} [\chi_{xxxx}^{(3)}(\omega)] |E(\mathbf{r}, t)|^2 \\ &\quad + \frac{5}{16} \text{Re} [\chi_{xxxxxx}^{(5)}(\omega)] |E(\mathbf{r}, t)|^4, \\ &= n(\omega) + n_{Kerr}(\omega) |E(\mathbf{r}, t)|^2 + n_{n\tilde{a}o-Kerr}(\omega) |E(\mathbf{r}, t)|^4, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\omega) &= \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega}}{n} \text{Im} [\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)] + \frac{3\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega}}{4n(\omega)} \text{Im} [\chi_{xxxx}^{(3)}(\omega)] |E(\mathbf{r}, t)|^2 \\ &\quad + \frac{5\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega}}{8n(\omega)} \text{Im} [\chi_{xxxxxx}^{(5)}(\omega)] |E(\mathbf{r}, t)|^4, \\ &= \alpha(\omega) + \alpha_2(\omega) |E(\mathbf{r}, t)|^2 + \alpha_4(\omega) |E(\mathbf{r}, t)|^4, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

onde n_{Kerr} e $n_{n\tilde{a}o-Kerr}$ são os coeficientes do índice de refração não linear Kerr e não-Kerr, respectivamente. $\alpha_2(\omega)$ e $\alpha_4(\omega)$ são os coeficientes de absorção de dois fótons e quatro fótons. A idéia fundamental do processo de absorção de fótons é a seguinte: No régimen de altas intensidades do pulso de luz, com valores próximos à energia de excitação atômica, um átomo do meio óptico realiza uma transição de seu estado fundamental até um estado excitado através da absorção de fótons, cuja soma de energias seja suficiente para permitir a transição entre dois estados eletrônicos. Nesse caso, tem-se um coeficiente de absorção dependente da intensidade do pulso de luz. Os coeficientes $\alpha_2(\omega)$ e $\alpha_4(\omega)$ são relativamente pequenos para fibras ópticas, assim são muitas vezes ignorados.

Desta forma, a constante dielétrica $\varepsilon(\omega)$ da Eq. (A.31) pode ser aproximada como

$$\varepsilon(\omega) = (n + \Delta n)^2 = (n_0 + n_L + \Delta n)^2 \approx n_0^2 + 2n_0(n_L + \Delta n), \quad (\text{A.38})$$

onde $n_0(\omega)$ é uma função conhecida que ao substituí-la ($\varepsilon(\omega) = n_0(\omega)$) na Eq. (A.31) dita equação diferencial parcial tem solução, $n_L(\omega)$ uma função real pertencente ao índice de refração linear, que sem perda de generalidade nós consideramos pequena, e Δn é uma pequena perturbação dada por

$$\Delta n = i \frac{\alpha(\omega)}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega}} + n_{Kerr}(\omega) |E(\mathbf{r}, t)|^2 + n_{n\tilde{a}o-Kerr}(\omega) |E(\mathbf{r}, t)|^4. \quad (\text{A.39})$$

A Eq. (A.31) pode ser resolvida usando teoria de perturbação [122]. Portanto, na teoria

de perturbações a aproximação de ordem zero da Eq. (A.31) é da forma

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} + n_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 F_0 = \beta^2 F_0, \quad (\text{A.40})$$

onde $F_0(x, y)$ e $\beta(\omega)$ são a solução e o número de onda conhecidos do problema conhecido (não perturbado) com n_0 definida pela Eq. (A.38). A correção de primeira ordem do número de onda $\Delta\beta(\omega)$, cumpre a relação

$$\tilde{\beta}^2(\omega) = (\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega))^2 \approx \beta^2 + 2\beta(\Delta\beta), \quad (\text{A.41})$$

logo, a correção $\Delta\beta(\omega)$ dentro da teoria de perturbaço, é dada pela equação

$$\Delta\beta = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_0^*(x, y) [2n_0(n_L + \Delta n) \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2] F_0(x, y) dx dy}{2\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^2 dx dy}. \quad (\text{A.42})$$

Após a obtenção de $\tilde{\beta}$, Eq. (A.41), vamos resolver a Eq. (A.32). Para isso, consideramos $\tilde{\beta} \approx \beta_0$, então $\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 \approx 2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0) = 2\beta_0(\beta + \Delta\beta - \beta_0)$. Desta maneira, reescrevemos a Eq. (A.32) da forma

$$i \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) + (\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) - \beta_0) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) = 0. \quad (\text{A.43})$$

É útil expandir $\beta(\omega)$ e $\Delta\beta(\omega)$ numa série de Taylor em torno da frequência ω_0 , isto é,

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} + \dots, \quad (\text{A.44})$$

$$\Delta\beta(\omega) = \Delta\beta(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left(\frac{d\Delta\beta}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \left(\frac{d^2\Delta\beta}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} + \dots \quad (\text{A.45})$$

Pela terceira hipótese ($\Delta\omega/\omega_0 \lll 1$), nós podemos considerar a seguinte aproximação

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + (\omega - \omega_0) \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0}$$

$$\Delta\beta(\omega) \approx \Delta\beta(\omega_0)$$

desta forma, a Eq. (A.43) será dado por

$$i \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) + (\omega - \omega_0) \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) + \Delta\beta(\omega_0) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) = 0. \quad (\text{A.46})$$

Neste ponto, usamos a Eq. (A.42) para encontrar $\Delta\beta(\omega_0)$. Para isso, consideramos que $\beta(\omega) \approx n_0(\omega) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega}$ e assumimos que $F_0(x, y)$ não varia muito ao longo da largura de banda do pulso de luz. Então por meio das Eqs. (A.30), (A.39) e (A.42), teremos a seguinte expressão para $\Delta\beta(\omega_0)$

$$\begin{aligned}
\Delta\beta(\omega_0) &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_0^*(x, y) \left(i \frac{\alpha(\omega_0)}{2\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0}} + n_L(\omega_0) \right) F_0(x, y) dx dy}{(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^2 dx dy} \\
&+ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_0^*(x, y) (n_{Kerr}(\omega_0) |E(z, t)|^2) F_0(x, y) dx dy}{(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^2 dx dy} \\
&+ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_0^*(x, y) (n_{n\tilde{a}o-Kerr}(\omega) |E(z, t)|^4) F_0(x, y) dx dy}{(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^2 dx dy} \\
&= i \frac{\alpha(\omega_0)}{2} + \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0} n_L(\omega_0) \\
&+ n_{Kerr}(\omega_0) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0} |A(z, t)|^2 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^4 dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^2 dx dy} \\
&+ n_{n\tilde{a}o-Kerr}(\omega_0) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0} |A(z, t)|^4 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^6 dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^2 dx dy} \\
&= i \frac{\alpha(\omega_0)}{2} + \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0} n_L(\omega_0) + \frac{n_{Kerr}(\omega_0) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0}}{A_{ef}} |A(z, t)|^2 \\
&+ \frac{n_{n\tilde{a}o-Kerr}(\omega_0) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0}}{B_{ef}} |A(z, t)|^4, \tag{A.47}
\end{aligned}$$

onde

$$A_{ef} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^2 dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^4 dx dy}, \quad B_{ef} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^2 dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_0(x, y)|^6 dx dy}.$$

Substituindo a Eq. (A.47) na Eq. (A.46) obtemos

$$\begin{aligned}
& i \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) + (\omega - \omega_0) \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \\
& + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) + i \frac{\alpha(\omega_0)}{2} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \\
& + n_L(\omega_0) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega_0 \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) + \frac{n_{Kerr}(\omega_0) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega_0}{A_{ef}} |A(z, t)|^2 \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \\
& + \frac{n_{\tilde{n}\tilde{a}o-Kerr}(\omega_0) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega_0}{B_{ef}} |A(z, t)|^4 \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) = 0.
\end{aligned}$$

Nesta última expressão, empregamos a transformada de Fourier

$$A(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] d\omega,$$

a partir do qual é simples deduzir que

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial t} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_0) \left(\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \right) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] d\omega$$

e

$$\frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_0)^2 \left(\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \right) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] d\omega.$$

Assim, chegamos finalmente à equação de onda

$$\begin{aligned}
& i \frac{\partial}{\partial z} A(z, t) + i \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} A(z, t) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(z, t) \\
& + i \frac{\alpha(\omega_0)}{2} A(z, t) + n_L(\omega_0) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega_0 A(z, t) \\
& + \frac{n_{Kerr}(\omega_0) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega_0}{A_{ef}} |A(z, t)|^2 A(z, t) \\
& + \frac{n_{\tilde{n}\tilde{a}o-Kerr}(\omega_0) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega_0}{B_{ef}} |A(z, t)|^4 A(z, t) = 0.
\end{aligned} \tag{A.48}$$

A Eq. (A.48) é a equação diferencial que descreve a propagação de um pulso de luz numa fibra óptica. Ela inclui, a amplitude do pulso $A(z, t)$, tal que $|A(z, t)|^2$ representa a potência óptica (Watt). A Eq. (A.48) também compreende os efeitos de dispersão cromática através de $(d\beta/d\omega)_{\omega=\omega_0}$, a qual está ligada à velocidade de grupo $(d\beta/d\omega)_{\omega=\omega_0} = 1/v_g$ (m^{-1}s), os efeitos de perdas relacionados pelo coeficiente de absorção $\alpha(\omega_0)$ (m^{-1}), e os efeitos da disseminação do pulso durante a propagação associado ao parâmetro de dispersão da velocidade do grupo $(d^2\beta/d\omega^2)_{\omega=\omega_0}$ (m^{-1}s^2). Ademais, na Eq. (A.48) pode

ser visto o termo $n_L(\omega_0)$ (adimensional), que leva em conta os efeitos lineares produzidos pelo índice de refração. Além disso, os efeitos não lineares na fibra aparecem na Eq. (A.48) pelos termos dos coeficientes do índice de refração não linear Kerr e não-Kerr, $n_{Kerr}(\omega_0)$ (m^2W^{-1}) e $n_{n\tilde{a}o-Kerr}(\omega_0)$ (m^4W^{-2}), respectivamente. O parâmetro A_{ef} é chamado de área do modo efetivo (m^2) e, finalmente B_{ef} é uma grandeza de dimensões de m^4 .

Os efeitos não lineares, dentro das fibras ópticas, pode manifestar comportamentos qualitativamente diferentes, dependendo do sinal do parâmetro $(d^2\beta/d\omega^2)_{\omega=\omega_0}$. Quando $(d^2\beta/d\omega^2)_{\omega=\omega_0} > 0$, diz-se que a fibra apresenta uma dispersão normal, enquanto que, para $(d^2\beta/d\omega^2)_{\omega=\omega_0} < 0$, diz-se que a fibra apresenta uma dispersão anômala. Devemos também mencionar que, o penúltimo termo (não linearidade Kerr) da Eq. (A.48) regula os efeitos não lineares de auto-modulação da fase (SPM, *siglas em inglês*). A SPM refere-se à mudança auto-inducida da fase experimentado pelo campo óptico durante a sua propagação.

A equação diferencial que descreve a propagação de um pulso de luz através de uma fibra óptica, Eq. (A.48), está relacionada com a ESNL e ela pode ser reduzida a essa forma, sob certas condições. Por exemplo, passando um sistema de referência que se move com o pulso de luz através das transformações

$$Z = z \quad , \quad T = t - z/v_g, \quad (\text{A.49})$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial Z} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial T} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \quad (\text{A.50})$$

Substituindo a Eq. (A.50) na Eq. (A.48), obtemos a equação diferencial

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A}{\partial Z} - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i \frac{\alpha(\omega_0)}{2} A + n_L(\omega_0) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega_0 A + \\ + n_{Kerr}(\omega_0) \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega_0}{A_{ef}} |A|^2 A + n_{n\tilde{a}o-Kerr}(\omega_0) \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega_0}{B_{ef}} |A|^4 A = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

onde $A = A(Z, T + Z/v_g)$.

No caso em que a fibra óptica esteja submetido a um campo elétrico pouco intenso, tem-se que: $n_{n\tilde{a}o-Kerr}(\omega_0) = 0$. Além disso, se não há efeitos de perdas, ou seja $\alpha(\omega_0) = 0$, e seus efeitos lineares estejam completamente incluídos em $F_0(x, y)$, isto é $n_L(\omega_0) = 0$, a Eq. (A.51) reduz-se à forma exata da ESNL, onde as variáveis Z e T fazem o papel das variáveis temporal e espacial, respectivamente.

$$i \frac{\partial A}{\partial Z} - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + n_{Kerr}(\omega_0) \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega_0}{A_{eff}} |A|^2 A = 0. \quad (\text{A.52})$$

Como mencionado ao longo desta tese, a ESNL é uma equação fundamental da ciência não linear e tem sido extensivamente estudada no contexto de sólitons.

Embora a equação de propagação, Eq. (A.48), tem sido bem sucedida para explicar um grande número de efeitos não lineares, ela não inclui todos os efeitos não lineares, tais como, espalhamento inelástico, efeito Ramman, dispersão de terceira ordem, entre outros. A descrição destes efeitos não lineares ultrapassa o âmbito desta tese. Na Ref. [1] o leitor pode encontrar uma descrição detalhada de outros efeitos não lineares.

A.3 Forma adimensional da ESNL

Consideramos a Eq. (A.51) dada por

$$i \frac{\partial A}{\partial Z} - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \beta}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i \frac{\alpha(\omega_0)}{2} A + n_L(\omega_0) \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0} A + n_{Kerr}(\omega_0) \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0}}{A_{ef}} |A|^2 A + n_{n\tilde{a}o-Kerr}(\omega_0) \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0}}{B_{ef}} |A|^4 A = 0,$$

A forma adimensional para a ESNL acima é obtida fazendo as seguintes transformações de variáveis

$$\xi \rightarrow \frac{1}{l_0} Z, \quad (\text{A.53})$$

$$\tau \rightarrow \frac{1}{t_0} T, \quad (\text{A.54})$$

$$\Psi \rightarrow A/P_0, \quad (\text{A.55})$$

$$m \rightarrow -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \beta}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} \frac{l_0}{t_0^2}, \quad (\text{A.56})$$

$$v \rightarrow n_L \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0} l_0, \quad (\text{A.57})$$

$$G_3 \rightarrow n_{Kerr} \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0}}{A_{ef}} l_0 P_0^2, \quad (\text{A.58})$$

$$G_5 \rightarrow n_{n\tilde{a}o-Kerr} \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0}}{B_{ef}} l_0 P_0^4, \quad (\text{A.59})$$

$$\Gamma \rightarrow \alpha l_0, \quad (\text{A.60})$$

onde l_0 é uma magnitude longitudinal (m), t_0 é uma magnitude temporal (seg), P_0^2 é uma magnitude com dimensão de potência (Watt). Substituindo as Eqs. (A.53)-(A.60) na Eq. (A.51) obtemos

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + m \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + v \Psi + G_3 |\Psi|^2 \Psi + G_5 |\Psi|^4 \Psi + i \Gamma \Psi = 0, \quad (\text{A.61})$$

onde $\Psi = \Psi(\xi, \tau)$. Assim, a Eq. (A.61) é a forma adimensional da ESNL.

Apêndice B

Método Numérico

A ESNL é um exemplo de um modelo não linear universal que descreve muitos sistemas físicos não lineares. Ademais, a ESNL é uma das equações diferenciais parciais não lineares que pode ser resolvida analiticamente unicamente para um conjunto limitado de condições iniciais. Uma vez que as soluções analíticas para a ESNL são limitadas, métodos numéricos tornaram-se importantes para compreender o comportamento físico das soluções da ESNL. O estudo das soluções analíticas e numéricas da ESNL tem sido um grande interesse de muitos pesquisadores, por exemplo, Tahan e Ablowitz [123] compararam oito métodos numéricos para resolver a ESNL. Neste apêndice, usamos as referências [113], [114] e [124] para expor o método numérico utilizado em nossas simulações.

B.1 Método de decomposição do operador

Nós usamos a referência [124], para fazer este breve resumo do método de decomposição do operador (*operator splitting method*).

Dado o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u, \quad \text{onde } t \in [0, T] \quad \text{e com } u(0) = u^0, \quad (\text{B.1})$$

onde \mathcal{L} é algum operador. O método de decomposição do operador fornece esquemas de discretização da coordenada t . Isto é obtido pela divisão do intervalo $[0, T]$ em s subintervalos de igual comprimento Δt , onde $t^n = n(\Delta t)$ para $n = 0, 1, \dots, s$.

Como o operador \mathcal{L} não é necessariamente um operador linear, suponhamos que ele pode pelo menos ser escrito como uma soma finita de m operadores mais simples \mathcal{L}_i , que agem de forma aditiva sobre a função u da seguinte maneira

$$\mathcal{L}u = \mathcal{L}_1u + \mathcal{L}_2u + \dots + \mathcal{L}_mu. \quad (\text{B.2})$$

Finalmente, suponhamos que para cada operador \mathcal{L}_i , nós conhecemos a aproximação para

avançar a solução u do tempo t^n para o tempo t^{n+1} , válido se cada operador \mathcal{L}_i fosse o único à direita da Eq. (B.2). Vamos escrever estas aproximações da solução u , simbolicamente como

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= \mathcal{U}_1(u^n, \Delta t), \\ u^{n+1} &= \mathcal{U}_2(u^n, \Delta t), \\ &\dots \\ u^{n+1} &= \mathcal{U}_m(u^n, \Delta t). \end{aligned} \tag{B.3}$$

Uma forma de decomposição do operador seria a de obter a solução u , a partir de t^n , no tempo t^{n+1} pela seguinte sequência de aproximações

$$\begin{aligned} u^{n+1/m} &= \mathcal{U}_1(u^n, \Delta t), \\ u^{n+2/m} &= \mathcal{U}_2(u^{n+1/m}, \Delta t), \\ &\dots \\ u^{n+1} &= \mathcal{U}_m(u^{n+(m-1)/m}, \Delta t). \end{aligned} \tag{B.4}$$

Desta maneira nós obtemos a solução u em t^{n+1} . Aqui termina nosso breve resumo do método de decomposição do operador. Sugerimos ao leitor recorrer às referências [113] e [124] para maiores detalhes. Agora passamos a expor o algoritmo de Crank-Nicolson que nós utilizamos.

B.2 Algoritmo de Crank-Nicolson

Nesta seção nós seguimos as referências [113] e [114]. O algoritmo de Crank-Nicolson [125] é um algoritmo em diferenças finitas usado para resolver equações diferenças parciais. Ele é um algoritmo que tem uma precisão de segunda ordem com respeito ao tempo e ao espaço e é incondicionalmente estável. Devido a sua eficiência e robustez para resolver numericamente a ESNL, nós usamos o esquema Crank-Nicolson linearizado, apresentado por Chang *et al.* [114], em que a fórmula de extrapolação é aplicada unicamente ao coeficiente do termo não linear da ESNL, como mostramos em seguida.

A ESNL, a se resolver numericamente, é dada pela Eq. (2.19)

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi}{\partial Z} &= -m(X, Z) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - v(X, Z) \Psi - g_3(X, Z) |\Psi|^2 \Psi \\ &\quad - g_5(X, Z) |\Psi|^4 \Psi - i w(X, Z) \Psi \end{aligned} \tag{B.5}$$

onde $\Psi = \Psi(X, Z)$. Resolvemos a equação diferencial sob condições de contorno periódicas $\Psi(-X_E, Z) = \Psi(X_E, Z)$ em $X \in [-X_E, X_E]$ e com valor inicial $\Psi(X, 0) = \Psi(X)$

em $Z \in [0, Z_F]$. Também tomamos $X = j(\Delta X)$, $j = 0, 1, 2, \dots, M - 1$, $\Delta X = 2X_E/M$, e $Z = n(\Delta Z)$.

Começando por discretizar a Eq. (B.5) da forma

$$\begin{aligned}
i \frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^n}{\Delta Z} &= -m_j^{n+1/2} \left(\frac{\Psi_{j+1}^{n+1} - 2\Psi_j^{n+1} + \Psi_{j-1}^{n+1}}{2\Delta X} + \frac{\Psi_{j+1}^{n-1} - 2\Psi_j^{n-1} + \Psi_{j-1}^{n-1}}{2\Delta X} \right) \\
&\quad - v_j^{n+1/2} \frac{\Psi_j^{n+1} + \Psi_j^n}{2} - g_{3j}^{n+1/2} \left(\frac{3}{2} |\Psi_j^n|^2 - \frac{1}{2} |\Psi_j^{n-1}|^2 \right) \frac{\Psi_j^{n+1} + \Psi_j^n}{2} \\
&\quad - g_{5j}^{n+1/2} \left(\frac{3}{2} |\Psi_j^n|^2 - \frac{1}{2} |\Psi_j^{n-1}|^2 \right)^2 \frac{\Psi_j^{n+1} + \Psi_j^n}{2} \\
&\quad - i w_j^{n+1/2} \frac{\Psi_j^{n+1} + \Psi_j^n}{2}.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Neste ponto descomponos os operadores da forma

$$\begin{aligned}
F_j^{n+1} &= \Psi_j^n + \frac{i\Delta Z}{2} m_j^{n+1/2} \frac{\Psi_{j+1}^{n-1} - 2\Psi_j^{n-1} + \Psi_{j-1}^{n-1}}{\Delta X} + \frac{i\Delta Z}{2} g_{3j}^{n+1/2} \left(\frac{3}{2} |\Psi_j^n|^2 - \frac{1}{2} |\Psi_j^{n-1}|^2 \right) \Psi_j^n \\
&\quad + \frac{i\Delta Z}{2} g_{5j}^{n+1/2} \left(\frac{3}{2} |\Psi_j^n|^2 - \frac{1}{2} |\Psi_j^{n-1}|^2 \right)^2 \Psi_j^n + \frac{i\Delta Z}{2} v_j^{n+1/2} \Psi_j^n - \frac{\Delta Z}{2} w_j^{n+1/2} \Psi_j^n,
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_j^{n+1} &= F_j^{n+1} + \frac{i\Delta Z}{2} m_j^{n+1/2} \frac{\Psi_{j+1}^{n+1} - 2\Psi_j^{n+1} + \Psi_{j-1}^{n+1}}{\Delta X} + \frac{i\Delta Z}{2} g_{3j}^{n+1/2} \left(\frac{3}{2} |\Psi_j^n|^2 - \frac{1}{2} |\Psi_j^{n-1}|^2 \right) \Psi_j^{n+1} \\
&\quad + \frac{i\Delta Z}{2} g_{5j}^{n+1/2} \left(\frac{3}{2} |\Psi_j^n|^2 - \frac{1}{2} |\Psi_j^{n-1}|^2 \right)^2 \Psi_j^{n+1} + \frac{i\Delta Z}{2} v_j^{n+1/2} \Psi_j^{n+1} - \frac{\Delta Z}{2} w_j^{n+1/2} \Psi_j^{n+1}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Note-se que F_j^{n+1} é uma relação de recorrência que deve ser avaliada no tempo menor ou igual a t^n ao invés de t^{n+1} . Além disso, as Eqs. (B.7) e (B.8) são equivalentes à Eq. (B.6).

Para resolver a Eq. (B.8) introduzimos as variáveis ρ_j^{n+1} em lugar de Ψ_j^{n+1} . Desse modo, temos que resolver a cada tempo um sistema de equações, da forma

$$\begin{aligned}
\rho_j^{n+1} &= F_j^{n+1} + \frac{i\Delta Z}{2} i m_j^{n+1/2} \frac{\rho_{j+1}^{n+1} - 2\rho_j^{n+1} + \rho_{j-1}^{n+1}}{\Delta X} + \frac{i\Delta Z}{2} g_{3j}^{n+1/2} \left(\frac{3}{2} |\Psi_j^n|^2 - \frac{1}{2} |\Psi_j^{n-1}|^2 \right) \rho_j^{n+1} \\
&\quad + \frac{i\Delta Z}{2} g_{5j}^{n+1/2} \left(\frac{3}{2} |\Psi_j^n|^2 - \frac{1}{2} |\Psi_j^{n-1}|^2 \right)^2 \rho_j^{n+1} + \frac{i\Delta Z}{2} v_j^{n+1/2} \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta Z}{2} w_j^{n+1/2} \rho_j^{n+1}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Após as Eqs. (B.9) serem resolvidas para ρ_j^{n+1} , usamos estes valores para atualizar os valores de Ψ_j^{n+1} : $\Psi_j^{n+1} = \rho_j^{n+1}$.

Finalmente, uma vez que resolvemos as Eqs. (B.7), (B.8) e (B.9) para pontos a partir de $j = 0$ até $M - 1$, as equações acima requererão valores para os pontos $j = -1$ e $j = M$. De acordo com as condições periódicas, estes pontos são equivalentes a $j = M - 1$ e $j = 0$, respectivamente. Assim, as condições de contorno para Ψ_j^n e ρ_j^n , que nós usamos são dadas pelas expressões

$$\rho_{-1}^n = \rho_{M-1}^n \quad , \quad \rho_M^n = \rho_0^n \quad , \quad \Psi_{-1}^n = \Psi_{M-1}^n \quad , \quad \Psi_M^n = \Psi_0^n.$$