

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

LUCAS RANGEL DE OLIVEIRA

**IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS EM SISTEMAS ROTATIVOS UTILIZANDO
FUNÇÕES DE OTIMIZAÇÃO E OBSERVADORES DE ESTADO**

Ilha Solteira

2015

LUCAS RANGEL DE OLIVEIRA

**IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS EM SISTEMAS ROTATIVOS UTILIZANDO
FUNÇÕES DE OTIMIZAÇÃO E OBSERVADORES DE ESTADO**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Ilha Solteira – UNESP como parte dos requisitos do título de mestre em engenharia mecânica.

Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos

**Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE
MELO**

Orientador

Ilha Solteira

2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Oliveira, Lucas Rangel de.

O49i Identificação de parâmetros em sistemas rotativos utilizando funções de otimização e observadores de estado / Lucas Rangel de Oliveira. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2015
79 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2015

Orientador: Gilberto Pechoto de Melo

Inclui bibliografia

1. Observadores de estado. 2. Algoritmo genético. 3. Função quase-Newton.
4. Funções ortogonais. 5. Método de elementos finitos.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Identificação de Parâmetros em Sistemas Rotativos Utilizando Funções de Otimização e Observadores de Estado

AUTOR: LUCAS RANGEL DE OLIVEIRA

ORIENTADOR: Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE MELO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica ,
Área: MECANICA DOS SÓLIDOS, pela Comissão Examinadora:

Gilberto Pechoto de Melo

Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE MELO
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Luiz de Paula do Nascimento
Prof. Dr. LUIZ DE PAULA DO NASCIMENTO
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Gregory Bregion Daniel
Prof. Dr. GREGORY BREGION DANIEL
Departamento de Sistemas Integrados / Universidade Estadual de Campinas

Data da realização: 27 de julho de 2015.

DEDICO

À minha mãe Leila Maria Machado de Oliveira, ao meu pai Valdir Rangel de Oliveira, à minha irmã Sayonara Rangel de Oliveira, à minha noiva Mariana Costa Falcão, pelo apoio, companhia e amor.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Leila Maria Machado de Oliveira, ao meu pai Valdir Rangel de Oliveira, que nos momentos de minha ausência dedicados ao curso, sempre compreenderam que o futuro se constrói a partir da constante dedicação do presente, não medindo esforços para oferecer educação de qualidade aos seus filhos.

À minha irmã Sayonara Rangel de Oliveira pela eterna companhia, inspiração, e que mesmo distante ainda compartilhamos de ótimos momentos e experiência de vida.

À minha noiva, quase esposa, Mariana Costa Falcão pelo afeto, carinho, diálogo, compreensão e amizade que temos em nossos dias, e, que juntos, possamos ser felizes em nossa vida acadêmica como somos em nossa vida amorosa.

Ao meu orientador, professor e amigo Gilberto Pechoto de Melo servindo como inspiração, sempre à disposição e ao meu lado me ensinando e direcionando neste caminho. Fez-me enxergar que existe mais que pesquisadores e resultados por trás de uma dissertação, mas crescimento em todos os aspectos. Você não foi somente orientador, mas, em muitos momentos, conselheiro, confidente, pai e amigo, sendo referência profissional e pessoal para meu crescimento.

Aos meus avós Sabino, Teresinha e Gabriel que mesmo distantes sempre demonstraram todo apoio, carinho e confiança, desejando sempre o sucesso de seu neto.

Aos meus amigos e amigas de graduação que mesmo à distância continuaram sendo muito especiais em minha vida. Aos amigos de mestrado que se tornaram parte da família e tornaram o trabalho de pesquisa muito mais prazeroso pelo ambiente, dividindo comigo as angústias e alegrias.

Finalmente à Deus, pela força durante toda minha vida, iluminando meu caminho e possibilitando a presença de pessoas tão especiais a meu lado.

RESUMO

Uma máquina rotativa é composta por muitos componentes interconectados que atuam em conjunto. Essa influência mútua pode ocasionar uma grande variedade de fenômenos durante seu funcionamento. Desbalanceamento, desalinhamento e falha em mancais de rolamento são os principais responsáveis pela vibração desses equipamentos. Uma das soluções para evitar tais problemas é o monitoramento constante de máquinas a fim de antever um dano mais grave. Nesse ambiente, há a preocupação no desenvolvimento de novas técnicas de detecção e localização de falhas. Uma das técnicas mais difundidas atualmente é a identificação de rigidez e amortecimento dos mancais e de forças de excitação do sistema. Para o desenvolvimento dessas metodologias há a necessidade de construção de modelos matemáticos capazes de representar o comportamento mecânico, sendo úteis na previsão da resposta do sistema. Neste âmbito, este projeto tem como proposta estimar a rigidez e o amortecimento dos mancais – a partir de dados experimentais – e identificar as forças de desbalanceamento utilizando três métodos diferentes: séries de Fourier, polinômios de Legendre e de Chebyshev.

Palavras-Chave: Observador de estado. Algoritmo genético. Função quase-Newton. Funções ortogonais. Método de elementos finitos.

ABSTRACT

A rotating machine is composed of many interconnected components working together. This mutual influence can cause a wide range of phenomena during operation. Unbalancing, misalignment and failure in ball bearings are mainly responsible for the vibration of such equipment. One solution to avoid such problems is the constant monitoring of machines in order to predict a more severe damage. In this environment, there is concern in the development of new techniques for detection and troubleshooting. One of the techniques is now widespread the identification of stiffness and damping of the bearing and the excitation forces of the system. For the development of these methods is the need to build mathematical models that represent the mechanical behavior and is useful in predicting system response. In this context, this project proposes the estimation of stiffness and damping of the bearings – from experimental data – and the identification of unbalance forces using three different methods: Fourier series, Legendre polynomials and Chebyshev.

Keywords: Observer state. Genetic algorithm. Quasi-Newton function. Orthogonal function. Finite element method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Primeiros termos da base vetorial de Fourier.....	20
Figura 2 – Primeiras funções do polinômio de Legendre.....	24
Figura 3 – Primeiras funções do polinômio de Chebyshev	26
Figura 4 – Graus de liberdade do modelo de elementos finitos	28
Figura 5 – Modelo da matriz global do eixo	31
Figura 6 – Massa desbalanceada	32
Figura 7 – Fluxograma de um algoritmo genético	36
Figura 8 – Organograma geral do Observador de Estado	42
Figura 9 – Organograma do observador de estado com entradas experimentais	42
Figura 10 – Esquema geral do programa.....	51
Figura 11 – Divisão do rotor em elementos finitos	52
Figura 12 – Bancada do rotor	54
Figura 13 – Instrumentação da bancada do rotor	55
Figura 14 – Massa de desbalanceamento adicionada ao disco.....	56
Figura 15 – (a) Sinal experimental original. (b) Sinal experimental filtrado. (c) Sinal experimental filtrado e janelado	56
Figura 16 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Fourier utilizando estados simulados para rotação de $1600rpm$	61
Figura 17 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Fourier utilizando estados simulados para rotação de $2000rpm$	62
Figura 18 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Fourier utilizando estados simulados para rotação de $2400rpm$	62
Figura 19 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Legendre utilizando estados simulados para rotação de $1600rpm$	63
Figura 20 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Legendre utilizando estados simulados para rotação de $2000rpm$	64
Figura 21 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Legendre utilizando estados simulados para rotação de $2400rpm$	64
Figura 22 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Chebyshev utilizando estados simulados para rotação de $1600rpm$	65
Figura 23 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Chebyshev utilizando estados simulados para rotação de $2000rpm$	66

Figura 24 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Chebyshev utilizando estados simulados para rotação de 2400rpm.....	66
Figura 25 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Fourier utilizando dados experimentais para rotação de 1600rpm	67
Figura 26 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Fourier utilizando dados experimentais para rotação de 2000rpm	68
Figura 27 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Fourier utilizando dados experimentais para rotação de 2400rpm	68
Figura 28 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Legendre utilizando dados experimentais para rotação de 1600rpm.....	69
Figura 29 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Legendre utilizando dados experimentais para rotação de 2000rpm	70
Figura 30 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Legendre utilizando dados experimentais para rotação de 2400rpm	70
Figura 31 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Chebyshev utilizando dados experimentais para rotação de 1600rpm	71
Figura 32 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Chebyshev utilizando dados experimentais para rotação de 2000rpm	72
Figura 33 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Chebyshev utilizando dados experimentais para rotação de 2400rpm	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dimensões de cada elemento.....	52
Tabela 2 – Propriedades dos componentes do rotor	53
Tabela 3 – Valores das vibrações antes e após o balanceamento do rotor	55
Tabela 4 – Valores <i>rms</i> das velocidades adquiridos nos mancais	57
Tabela 5 – Valores <i>rms</i> dos deslocamentos adquiridos nos nós cinco e nove.....	58
Tabela 6 – Condições dadas ao algoritmo genético.....	58
Tabela 7 – Tempo de processamento e valor da função objetiva dos métodos de otimização	59
Tabela 8 – Valores dos parâmetros estimados pelo algoritmo genético.....	59
Tabela 9 – Valores dos parâmetros estimados pela função quase-Newton	59

LISTA DE SÍMBOLOS

$[A]$	matriz dinâmica do sistema
A_t	área da seção transversal do respectivo elemento da viga
$[A_{cel}]$	matriz de expansão dos coeficientes de $\{\ddot{x}(t)\}$
a	efeito de cisalhamento
$[B]$	matriz de entradas do sistema
$[C]$	matriz de amortecimento do sistema
CH_n	termos dos polinômios de Chebyshev
$[D]$	função de dissipação de Rayleigh
$[D_{me}]$	matriz de medidas do observador de estado
$[D_s]$	matriz de saída do sistema
d	distância do centro geométrico do eixo até a massa desbalanceada
E	módulo de elasticidade do material
$[F]$	matriz de expansão dos coeficientes de $\{f(t)\}$
F_v, F_w	força de desbalanceamento na direção v e w , respectivamente
$[G]$	matriz de efeito giroscópio
$g(x)$	Jacobiana de $f(x)$
$H(x)$	inversa da Hessiana de $f(x)$
$H^*(x)$	aproximação da inversa da Hessiana de $f(x)$
I	momento de inércia em Z
$[I_d]$	matriz identidade
$[J]$	matriz de custo do observador de estado
$[K_c]$	matriz de energia potencial
L	comprimento do elemento de viga
$[L_{ob}]$	matriz de ganhos do observador de estado
L_n	termos dos polinômios de Legendre
$[M]$	matriz de massa
$[M_s]$	matriz de inércia de rotação
m_d	massa de desbalanceamento
$[O]$	matriz de observabilidade do sistema
$[P]$	matriz operacional de integração
Q_i	força generalizada
S	módulo de cisalhamento

T	energia cinética do sistema
V	energia potencial do sistema
V_{el}	matriz de expansão dos coeficientes de $\{ \dot{x}(t) \}$
$[X]$	matriz de expansão dos coeficientes de $\{ x(t) \}$
α	escalar para minimizar a função objetiva
δ	vetor de deslocamento nodal
$\varphi_n(t)$	termos das séries de Fourier
ν	coeficiente de Poisson
Ω	velocidade angular do eixo
ρ	densidade do material

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO E REVISÃO DA LITERATURA	14
1.1	INTRODUÇÃO	14
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2	FUNÇÕES ORTOGONAIS	18
2.1	SÉRIES DE FOURIER	19
2.2	POLINÔMIOS DE LEGENDRE	23
2.3	POLINÔMIOS DE CHEBYSHEV	25
3	MODELAGEM MATEMÁTICA POR ELEMENTOS FINITOS	28
3.1	ELEMENTO DE EIXO	28
3.2	ELEMENTO DE DISCO	31
3.3	ELEMENTO DE MANCAL	32
3.4	MASSA DESBALANCEADA	32
4	MÉTODOS COMPUTACIONAIS	34
4.1	ALGORITMO GENÉTICO	34
4.2	FUNÇÃO DE OTIMIZAÇÃO QUASE-NEWTON	38
4.3	OBSERVADORES DE ESTADOS	39
5	IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS EM SISTEMAS MECÂNICOS UTILIZANDO FUNÇÕES ORTOGONAIS	45
5.1	IDENTIFICAÇÃO DAS FORÇAS DE DESBALANCEAMENTO POR TERMOS DE DESLOCAMENTO	45
5.2	IDENTIFICAÇÃO DAS FORÇAS DE DESBALANCEAMENTO POR TERMOS DE VELOCIDADE	47
5.3	IDENTIFICAÇÃO DAS FORÇAS DE DESBALANCEAMENTO POR TERMOS DE ACELERAÇÃO	49
6	METODOLOGIA	51
6.1	ESQUEMA GERAL DO PROGRAMA	51
6.2	SISTEMA ROTATIVO	52

7 IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS MANCAIS.....	54
8 IDENTIFICAÇÃO DAS FORÇAS DE DESBALANCEAMENTO	60
8.1 IDENTIFICAÇÃO DAS FORÇAS ATRAVÉS DA RECONSTRUÇÃO DOS ESTADOS A PARTIR DE MEDIDAS SIMULADAS	60
8.1.1 Identificação utilizando séries de Fourier a partir de medidas simuladas	60
8.1.2 Identificação utilizando polinômios de Legendre a partir de medidas simuladas	63
8.1.3 Identificação utilizando polinômios de Chebyshev a partir de medidas simuladas..	65
8.2 IDENTIFICAÇÃO DAS FORÇAS ATRAVÉS DA RECONSTRUÇÃO DOS ESTADOS A PARTIR DE MEDIDAS EXPERIMENTAIS	67
8.2.1 Identificação utilizando séries de Fourier a partir de medidas experimentais.....	67
8.2.2 Identificação utilizando polinômios de Legendre a partir de medidas experimentais.....	69
8.2.3 Identificação utilizando polinômios de Chebyshev a partir de medidas experimentais..	71
8 CONCLUSÃO	73
<u>REFERÊNCIAS</u>	75

1 INTRODUÇÃO E REVISÃO DA LITERATURA

1.1 INTRODUÇÃO

A necessidade de investir em tecnologia tem sido a força motora mais importante dos países industrializados, tornando-se condição essencial para o desenvolvimento de processos e produtos inovadores capazes de disputar o mercado global. Tal fato é impulsionado pelo aumento do processo produtivo, no qual exige cada vez mais a disposição de máquinas e equipamentos capazes de executar um maior número de funções no menor tempo.

Esses mecanismos estão sujeitos à atuação de forças dinâmicas elevadas, despertando a preocupação da indústria em garantir o funcionamento sem que ocorram paradas repentinas. Os equipamentos rotativos possuem o maior destaque na área de análise de vibrações. Nos últimos anos na indústria, observa-se uma preocupação constante com o desenvolvimento de novas técnicas de monitoramento de parâmetros. Essas visam caracterizar a condição de operação da máquina, de modo que, se possa detectar e prever a época da provável ocorrência de uma falha, evitando a uma deterioração da performance do sistema ou até mesmo situações perigosas. (PINTO; XAVIER, 2001).

Um grande desafio é manter a disponibilidade e confiabilidade de tais equipamentos para que não perca posicionamento no mercado. Uma falha ou parada inesperada pode ocasionar um transtorno enorme, como perdas em produção e até mesmo - dependendo do equipamento - comprometer a segurança levando a situações perigosas.

Desbalanceamento, desalinhamento e falha em mancais de rolamentos são os principais responsáveis pela vibração desses equipamentos (ARCO-VERDE, 2008). Uma das soluções para evitar tais problemas é o monitoramento constante de máquinas a fim de intervir antes que ocorra um grave dano.

Atualmente, uma das técnicas bastante difundida é a identificação de parâmetros estruturais do sistema e de forças de excitação (GERTLER, 1988), (MELO, 1998), que tem como objetivo determinar tais parâmetros pela manipulação dos sinais de entrada e de saída do sistema, com a ajuda das variáveis de estado.

Foram desenvolvidos vários métodos para identificação de parâmetros utilizando funções ortogonais nos últimos anos (TRENDAFILOVA et al., 2000), embora nenhum deles possa ser considerado universalmente adequado a todas as situações (RICH; HEYDT, 2000).

A identificação de parâmetros estruturais de sistemas mecânicos (massa, rigidez e amortecimento) é apontada como sendo uma tarefa de alto índice de complexidade, razão pela

qual, tem-se dado importância aos métodos voltados para a identificação de parâmetros modais, seja no domínio do tempo, seja no domínio da frequência (PACHECO, 2001).

Conhecendo-se as forças de excitação do sistema, pode-se acompanhar - através de monitoramento e técnicas de identificação - a evolução de possíveis variações destes parâmetros. Para o desenvolvimento dessas metodologias, há a necessidade de construção de modelos matemáticos capazes de representar o comportamento mecânico dos mais variados tipos de sistemas (MORAIS, 2006). Equações de movimento são escritas com base em leis que regem os fenômenos envolvidos e, em seguida, a análise dinâmica depende da integração de tais equações, podendo ser feito tanto por métodos analíticos quanto numéricos.

O uso de funções ortogonais limita o problema de análise do vetor de estado à solução de um sistema de equações algébricas lineares. Este procedimento precisa da inversão de matrizes que podem ser de ordem elevada, ou apresentar mau condicionamento numérico (SANTOS, 2004). Diversas funções ortogonais são aplicadas para a identificação de parâmetros desconhecidos: Walsh, Block-Pulse, Fourier, polinomiais de Chebyshev, Jacobi e Legendre (CHEN; PATTON, 1996), (CHEN; HSIAO, 1975), (CHEN; TSAY; WU, 1977), (CHOW; WILLSKY, 1984).

Neste trabalho, foram utilizadas, em um sistema rotativo com n graus de liberdade, as técnicas de identificação de parâmetros através de um método híbrido de otimização e de forças de excitação através de três tipos de funções ortogonais: séries de Fourier, polinômios de Legendre e polinômios de Chebyshev.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Realizou-se uma revisão bibliográfica de trabalhos publicados sobre a temática da técnica dos observadores de estado, funções de otimização, funções ortogonais e de sistema rotativos pelo método de elementos finitos.

No trabalho de Paraskevopoulos, Sparis e Mouroutsos (1984) é apresentada uma expressão geral na qual se destina à resolução do problema de integração das séries de Fourier. Uma matriz, denominada matriz operacional de integração, é desenvolvida com o objetivo de ser utilizada na identificação de forças de excitação e estimativa de parâmetros. Devido as propriedades integrais das funções seno e cosseno, a metodologia usada apresenta melhores resultados para as séries de Fourier que para outros tipos de funções ortogonais, tais como Legendre e Chebyshev.

No mesmo ano, Chang e Wang (1984) desenvolvem uma equação linear, chamada de Método dos Polinômios de Legendre. O método é proposto para o problema de estimação dos parâmetros do sistema. A resposta do sistema é particionada em vários intervalos onde cada segmento é representado por uma série de polinômios de Legendre.

Em 1998, Melo apresenta um método para a identificação de parâmetros em sistemas mecânicos com vários graus de liberdade operando no domínio do tempo. O método baseia-se na expansão das funções de excitação e de resposta do sistema em termos de séries de Fourier. As equações diferenciais do movimento são transformadas em equações algébricas por meio de integrações sucessivas utilizando a matriz operacional de integração.

Pacheco (2001) desenvolveu uma metodologia unificada baseada na propriedade de integração de funções capazes de transformar equações diferenciais em um sistema de equações algébricas. A solução deste sistema permite identificar: parâmetros modais ou estruturais, forças de excitação e condições iniciais de deslocamento e velocidade.

No que diz respeito a sistema rotativos, Rocha (1996) desenvolveu um protótipo de sistema rotativo flexível em laboratório, com a construção de modelos matemáticos para a estrutura e para o rotor, sendo modelados em elementos finitos, desenvolvendo um programa computacional com uma interface amigável na análise de rotores.

Em seu livro, Lalanne e Ferraris (1997) caracteriza os elementos de um rotor (disco, eixo e mancais), bem como as suas equações de movimento, apresentando modelos de rotores discretizados pelo método de elementos finitos.

Simões e Steffen Jr. (2003) utiliza uma metodologia para a caracterização da presença de falhas em sistemas rotativos. As equações de movimento são utilizadas para obtenção das propriedades dinâmicas do rotor, sendo possível avaliar a alteração da rigidez no eixo causada pela presença das falhas. Utilizou-se algoritmo genético como método de identificação, no qual se mostrou eficiente, conseguindo uma boa estimativa na identificação dos parâmetros reais.

Em 2006, Hennin e Ingolstad verificam a viabilidade das técnicas de otimização para caracterizar trincas em sistemas rotativos. É utilizado o método de elementos finitos, bem como um algoritmo de otimização global para identificação das trincas.

Em 2010, Castro et al propôs um método de otimização híbrida no qual utiliza algoritmo genético em conjunto com simulação recozida para identificação da magnitude, fase e posição do desbalanceamento em um sistema rotativo suportado por mancais hidrodinâmicos. O modelo permite a simulação das órbitas do rotor. A função objetivo consiste basicamente na diferença entre órbitas medidas e simuladas.

Em 2014, Morais et al, desenvolveram um novo método de otimização na identificação de desbalanceamento em máquinas rotativas em condições lineares e não-lineares. Tais condições são introduzidas pelos parâmetros dos mancais dependentes da frequência. A metodologia é validada experimentalmente obtendo resultados que demonstram a eficácia do método desenvolvido.

Diante da revisão bibliográfica realizada, este trabalho visa reunir as teorias de: discretização de um rotor pelo método de elementos finitos utilizando o modelo descrito por Lalanne e Ferraris (1997); funções de busca e otimização por um método híbrido – algoritmo genético e função quase-Newton – de modo a estimar os valores de rigidez e amortecimento dos mancais; reconstrução de estados através do método de observadores de estado e identificação de forças via funções ortogonais como já estudado por Melo (1998) quando analisou experimentalmente uma mesa vibratória – no entanto, agora aplicado para um sistema rotativo.

2 FUNÇÕES ORTOGONAIS

Neste capítulo é realizada uma abordagem sobre as funções ortogonais, expondo o conceito sobre o assunto e explicando séries de Fourier, polinômios de Legendre e polinômios de Chebyshev.

Seja um conjunto de funções reais $\varphi_k = 1, 2, 3 \dots k$ definido no intervalo $[a, b] \in \mathcal{R}$. Tal conjunto é dito ortogonal neste intervalo se seguir a equação (SPIEGEL, 1976):

$$\int_a^b \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = K \quad (1)$$

na qual m, n e k são índices utilizados para diferenciar as funções e K é uma constante igual a zero se $m \neq n$ e diferente de zero se $m = n$.

O conjunto de funções $\varphi_k(t)$ é dito ortonormal se for válida a relação (SPIEGEL, 1976):

$$\int_a^b \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = \delta_{mn} \quad (2)$$

na qual, δ_{mn} , denominado delta de Kronecker, se define como "0" se $m \neq n$ ou "1" se $m = n$ e $\varphi_k(t)$ é o conjunto de funções ortonormais.

Se o conjunto $\varphi_k(t)$ é ortonormal em relação à função densidade ou função peso, $w(t)$, na qual $w(t) \geq 0$, então o conjunto de funções ortonormais é obtido através da equação abaixo.

$$\varphi_k(t) = \sqrt{w(t)} \varphi_k(t), \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (3)$$

$$\int_a^b \varphi_m(t) \varphi_n(t) w(t) dt = \delta_{mn} \quad (4)$$

Se uma função $f(t)$ é contínua ou seccionalmente contínua no intervalo $[a, b]$, então $f(t)$ pode ser expandida em séries de funções ortonormais:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t) \quad (5)$$

Tais séries, chamadas séries ortonormais, constituem generalizações das séries de Fourier. Admitindo que o somatório na equação (5) convirja para $f(t)$, podem-se multiplicar ambos os membros por $\varphi_m(t)$ e integrá-los no intervalo $[a, b]$:

$$c_m = \int_a^b f(t) \varphi_m(t) dt \quad (6)$$

sendo c_m os coeficientes generalizados de Fourier.

Calculam-se estes coeficientes resolvendo a integral dada pela equação (6) aplicando a Regra do Trapézio (HORNBECK, 1975).

Um conjunto finito de funções ortonormais possui a seguinte propriedade em relação à sua integração sucessiva no intervalo $[0, t]$:

$$\int_0^t \dots \int_0^t \{\varphi(\tau)\} (d\tau) \cong [P]^n \{\varphi(t)\} \quad (7)$$

na qual, n é o número de vezes que a função foi integrada, $\varphi_m(t) = \{ \varphi_0(t) \varphi_1(t) \dots \varphi_n(t) \}^T$ é o conjunto finito da série ortogonal e $[P]$ é uma matriz quadrada de ordem " r " com elementos constantes denominada matriz operacional de integração.

Na verdade, se for utilizada a base vetorial completa, ou seja, se a série não for truncada, a relação obtida na equação (7) é de igualdade. Porém, na prática, isto se torna inviável, devido à ordem elevada da matriz $[P]$.

2.1 SÉRIES DE FOURIER

A base vetorial $\{\varphi(t)\}$ das séries de Fourier, no intervalo $[0, T_p]$, é dada por (SPIEGEL, 1976):

$$\{\varphi(t)\} = \underbrace{\{\varphi_0(t) \varphi_1(t) \dots \varphi_s(t)\}}_{\varphi_n(t)} \underbrace{\{\varphi_1^*(t) \dots \varphi_s^*(t)\}}_{\varphi_n^*(t)} \quad (8)$$

na qual:

$$\varphi_n(t) = \cos \frac{2n\pi t}{T_p} \quad n = 0, 1, \dots, s$$

$$\varphi_n^*(t) = \text{sen} \frac{2n\pi t}{T_p} \quad n = 0, 1, \dots, s$$

sendo T_p definido como o período.

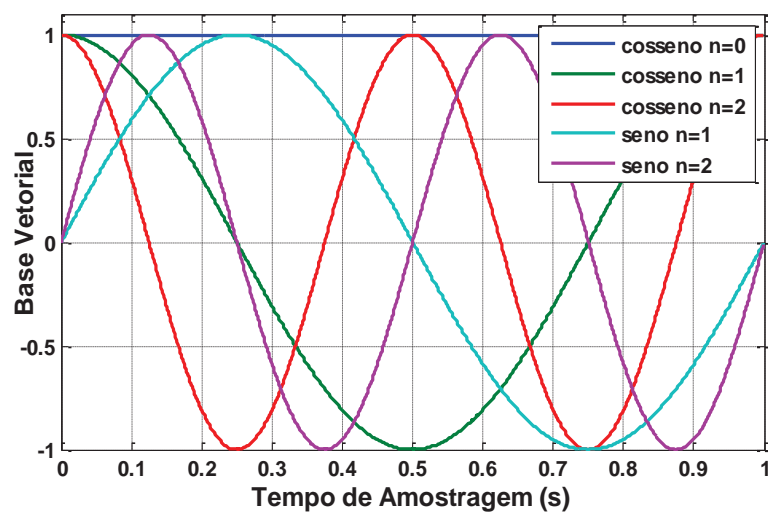
Utilizando as equações anteriores, pode-se obter as primeiras funções das séries de Fourier como pode ser visto na Figura 1 e nas equações abaixo:

$$\varphi_0(t) = 1$$

$$\varphi_1(t) = \cos \frac{2\pi t}{T_p} \quad \varphi_1^*(t) = \text{sen} \frac{2\pi t}{T_p} \quad (9)$$

$$\varphi_2(t) = \cos \frac{4\pi t}{T_p} \quad \varphi_2^*(t) = \text{sen} \frac{4\pi t}{T_p}$$

Figura 1 – Primeiros termos da base vetorial de Fourier



Fonte: Elaboração do próprio autor

Uma função $f(t)$ pode ser expandida em séries de Fourier:

$$f(t) = a_0\varphi_0(t) + \sum_1^{\infty} \{a_n\varphi_n(t) + b_n\varphi_n^*(t)\} \quad (10)$$

na qual os coeficientes de Fourier a_n e b_n são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T_p} dt \quad n = 1, 2, \dots, s \quad (11)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen} \frac{2n\pi t}{T_p} dt \quad n = 1, 2, \dots, s$$

Na prática, a expansão é feita truncando-se a série com " r " termos ($r = 2s+1$), sendo " s " o número de termos em senos e cossenos:

$$f(t) \cong a_0\varphi_0(t) + \sum_1^s \{a_n\varphi_n(t) + b_n\varphi_n^*(t)\} \quad (12)$$

Para a obtenção da matriz operacional de integração, cada função da base vetorial é integrada no intervalo $[0, t]$, conforme as três equações a seguir (PARASKEVOPOULOS; KEKKERIS, 1984):

$$\int_0^t \varphi_0(\sigma) d\sigma = \int_0^t d\sigma = t \quad (13)$$

$$\int_0^t \varphi_n(\sigma) d\sigma = \int_0^t \cos \frac{2n\pi\sigma}{T_p} d\sigma = \frac{T}{2n\pi} \int_0^t d(\text{sen} \frac{2n\pi\sigma}{T_p}) = \frac{T}{2n\pi} \varphi_n^*(t) \quad (14)$$

$$\int_0^t \varphi_n^*(\sigma) d\sigma = \int_0^t \text{sen} \frac{2n\pi\sigma}{T_p} d\sigma = \frac{-T}{2n\pi} \int_0^t d(\cos \frac{2n\pi\sigma}{T_p}) = \frac{T_p}{2n\pi} \varphi_0(t) - \frac{T_p}{2n\pi} \varphi_n(t) \quad (15)$$

A equação (13) pode ser aproximada por uma série truncada de Fourier:

$$\int_0^t \varphi_0(\sigma) d\sigma = \int_0^t d\sigma = t \cong c_0 \varphi_0(t) + \sum_{n=1}^s \{c_n \varphi_n(t) + d_n \varphi_n^*(t)\} \quad (16)$$

Através da equação (11) são calculados os coeficientes c_n e d_n :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{T}{2} \\ c_n &= 0 \quad n = 1, 2, \dots, s \\ d_n &= \frac{-T}{n\pi} \quad n = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (17)$$

Considerando as equações (14) à (17), tem-se:

$$\int_0^t \{\varphi(\tau)\} d\tau \cong [P] \{\varphi(t)\} \quad (18)$$

na qual, de uma forma compacta, tem-se:

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{T_p}{2} & \{0\}_{1 \times s} & -\frac{T_p}{\pi} \{\tilde{e}\}_s^T \\ \{0\}_{s \times 1} & [0]_{s \times s} & \frac{T_p}{2\pi} [\tilde{I}]_{s \times s} \\ \frac{T_p}{2\pi} \{\tilde{e}\}_s & -\frac{T_p}{2\pi} [\tilde{I}]_{s \times s} & [0]_{s \times s} \end{bmatrix}_{rxr} \quad (19)$$

sendo:

$$\{e\} = \left[1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \dots \quad \frac{1}{s} \right]^T_{s \times 1} \quad (20)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}_{s \times s} \quad (21)$$

2.2 POLINÔMIOS DE LEGENDRE

Os polinômios de Legendre $p_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, obtidos a partir da equação diferencial de Legendre são ortogonais no intervalo $z \in [-1, 1]$ e são gerados pela fórmula recursiva da equação (22) (CHOU.; HORNG, 1985):

$$(n+1)p_{n+1}(z) = (2n+1)zp_n(z) - np_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

sendo: $p_0(z) = 1$ e $p_1 = z$.

Para o uso prático dos polinômios de Legendre no intervalo de tempo de interesse, $t \in [0, t_f]$ é necessário fazer uma mudança no domínio de definição através da transformação de variáveis mostrada na equação (23) (CHOU.; HORNG, 1985).

$$z = \frac{2t}{t_f} - 1 \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (23)$$

Os polinômios transformados de Legendre $p\left(\frac{2t}{t_f} - 1\right)$, de agora em diante denominados

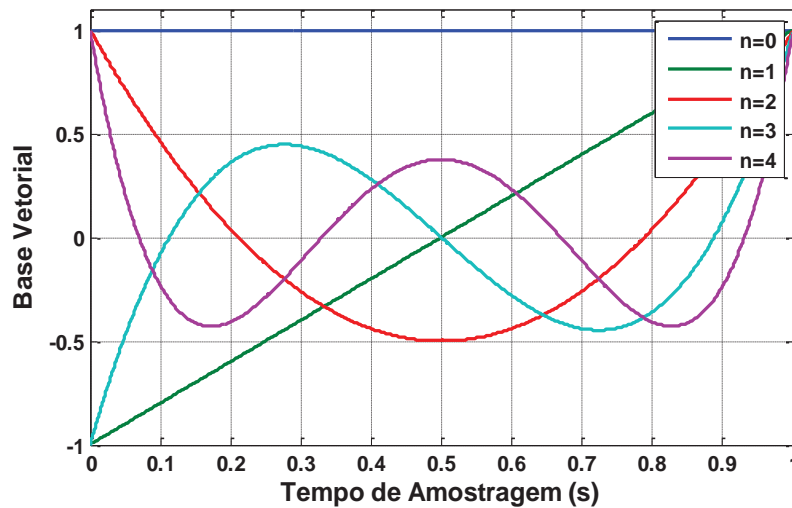
$L_n(t)$, são obtidos a partir da equação (23):

$$L_{n+1}(t) = \frac{(2n+1)}{(n+1)} \left(\frac{2t}{t_f} - 1 \right) L_n(t) - \frac{n}{(n+1)} L_{n-1}(t), \quad n \geq 1 \quad (24)$$

com: $L_0(t) = 1$ e $L_1(t) = \frac{2t}{t_f} - 1$.

Através da equação (24), podem-se obter as primeiras funções dos polinômios de Legendre, como pode ser visto na Figura 2.

Figura 2 – Primeiras funções do polinômio de Legendre



Fonte: Elaboração do próprio autor

Os polinômios transformados de Legendre satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade no intervalo $[0, t_f]$ (CHANG; WANG, 1984):

$$\int_0^{t_f} L_n(t) L_m(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq m \\ \frac{t_f}{(2n+1)} & \text{para } m = n \end{cases} \quad (25)$$

Uma função $f(t)$ pode ser aproximada por um número finito “ r ” de termos de polinômios transformados de Legendre:

$$f(t) \cong \sum_{n=0}^{r-1} f_n L_n(t) \quad (26)$$

na qual: $f_n = \frac{2n+1}{t_f} \int_0^{t_f} f(t) L_n dt$ são os coeficientes das séries de Legendre.

A fórmula derivativa recursiva dos polinômios transformados de Legendre é dada por:

$$L_n = \frac{t_f}{2(2n+1)} \left(\frac{d}{dt} L_{n+1}(t) - \frac{d}{dt} L_{n-1}(t) \right) \quad (27)$$

Considerando-se a base vetorial $\{L(t)\} = \{L_0(t) L_1(t) \dots L_{r-1}(t)\}$ e integrando-se a equação (24) de $[0, t]$, obtém-se a matriz operacional de integração dos polinômios transformados de Legendre, $[P]$:

$$\int_0^t \{L(\tau)\} d\tau = [P] \{L(t)\} \quad (28)$$

na qual:

$$[P] = \frac{t_f}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{2r-3} & 0 & \frac{1}{2r-3} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{2r-1} & 0 \end{bmatrix}_{r \times r} \quad (29)$$

2.3 POLINÔMIOS DE CHEBYSHEV

O polinômio de Chebyshev de primeira ordem, denominado de $P_i(z)$, é a solução da equação de Chebyshev definida pela equação (30) (MOHAN; DATTA, 1988):

$$(1-z^2) \frac{d^2 y}{dz^2} - z \frac{dy}{dz} + i^2 z = 0 \quad (30)$$

Os polinômios de Chebyshev são ortogonais no intervalo $z \in [-1,1]$, definidos por:

$$P_i(z) = \cos(i \cos^{-1} z) \quad (31)$$

Para o uso prático dos polinômios de Chebyshev no intervalo de tempo de interesse, $t \in [0, t_f]$, é necessário fazer uma mudança no domínio de definição através da transformação de variáveis (CHOU; HORNG, 1985):

$$z = \frac{2t}{t_f} - 1 \quad (32)$$

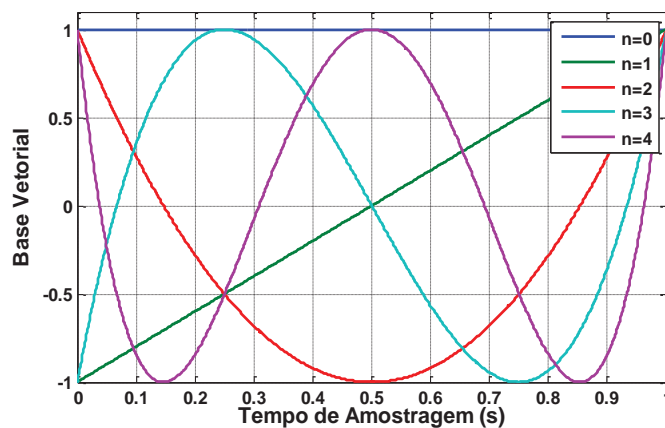
Os polinômios transformados de Chebyshev são obtidos pela fórmula de recorrência:

$$CH_{i+1}(t) = 2 \left(\frac{2t}{t_f} - 1 \right) CH_i(t) - CH_{i-1}(t) \quad i=1,2,\dots \quad (33)$$

com $CH_0(t) = 1$ e $CH_1(t) = \frac{2t}{t_f} - 1$.

Utilizando a equação (33), pode-se obter as primeiras funções dos polinômios de Chebyshev, como mostrado na Figura 3.

Figura 3 – Primeiras funções do polinômio de Chebyshev



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A fórmula derivativa recursiva dos polinômios de Chebyshev é dada por:

$$2t(t_f - t) \frac{dCH_i(t)}{dt} = it_f [CH_{i-1}(t) - CH_1(t) - CH_i(t)] \quad (34)$$

Utilizando a relação da equação (33) na equação (34) e integrando no intervalo de $[0, t]$, obtém-se a matriz operacional de integração dos polinômios transformados de Chebyshev, $[CH]$:

$$\int_0^t \{CH(\tau)\} d\tau = [P]\{CH(t)\} \quad (35)$$

na qual:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & \dots & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{2(r-1)} \\ \frac{(-1)^r}{r(r-2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2(r-2)} & 0 \end{bmatrix}_{r \times r} \quad (36)$$

3 MODELAGEM MATEMÁTICA POR ELEMENTOS FINITOS

O modelo físico de um sistema rotativo pode ser modelado pela combinação de elementos de disco, eixo e mancais, sendo que as massas de desbalanceamento também devem ser consideradas, cujas equações são obtidas aplicando as equações de Lagrange, com as parcelas de energias cinética, potencial e dissipativa:

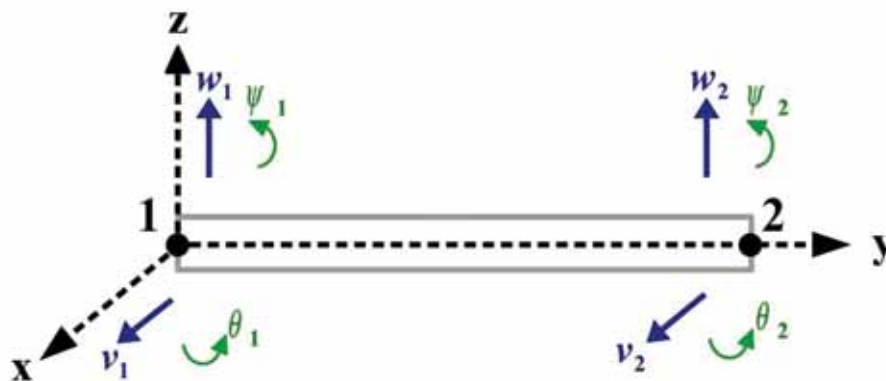
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = Q_i \quad (37)$$

sendo q_i e \dot{q}_i os deslocamentos e velocidades generalizadas de um sistema com n graus de liberdade, T a energia cinética do sistema, V a energia potencial do sistema, D a função de dissipação de Rayleigh e Q_i a força generalizada (BALACHANDRAN, 2011).

3.1 ELEMENTO DE EIXO

Nesta metodologia, cada elemento possui 4 graus de liberdade por extremidade. O eixo é modelado com elementos de viga com seção circular constante. O elemento finito usado possui dois nós com quatro graus de liberdade cada, sendo dois deslocamentos (v e w) e duas rotações (θ , em torno de x e ψ , em torno de z) (Figura 4).

Figura 4 – Graus de liberdade do modelo de elementos finitos



Fonte: Adaptado de Koroishi (2009)

Utilizando a formulação padrão de elementos finitos, o vetor de deslocamento nodal, para um elemento é definido por:

$$\delta = [v_1, w_1, \theta_1, \psi_1, v_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^T \quad (38)$$

A aplicação da equação de Lagrange devido à energia cinética do eixo é dada pela influência da massa - resultado do somatório da matriz de inércia de translação, $[M]$, e da matriz de inércia de rotação, $[M_s]$ - e do efeito giroscópio, $[G]$ (LALANNE; FERRARIS, 1997):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \delta_i} \right) = ([M] + [M_s]) \ddot{\delta} + [G] \dot{\delta} \quad (39)$$

$$[M] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$[M_s] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$[G] = \frac{\Omega\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

A aplicação da equação de Lagrange devido à energia potencial do eixo é dada por (LALANNE; FERRARIS, 1997):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \delta_i} \right) = K_c \delta \quad (43)$$

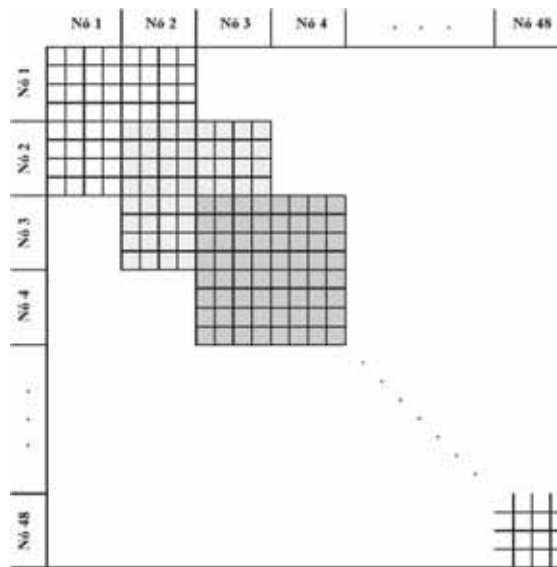
$$K_c = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L^2 & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

na qual:

$$a = \frac{12EI}{G_{sm}A_tL^2}; \quad G_{sm} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

sendo a o efeito de cisalhamento, G_{sm} o módulo de cisalhamento, L o comprimento do elemento de viga, E o módulo de elasticidade do material, ρ a densidade do material, A_t a área da seção transversal do respectivo elemento, I o momento de inércia em z (supondo o elemento no plano XZ) e ν o coeficiente de Poisson.

Para cada elemento construiu-se quatro matrizes conforme as equações (40), (41), (42) e (44). Essas matrizes foram agrupadas em três matrizes globais: massa, rigidez e amortecimento. Tal agrupamento foi realizado através da superposição das matrizes elementares conforme o grau de liberdade de conexão, ilustrada pela Figura 5.

Figura 5 – Modelo da matriz global do eixo

Fonte: Adaptado Castro (2007)

3.2 ELEMENTO DE DISCO

O vetor de deslocamento nodal do disco possui os mesmos quatro graus de liberdade, dado por:

$$\delta = [v, w, \theta, \psi]^T \quad (45)$$

Desse modo, a matriz acoplada à matriz do rotor, devido a energia cinética do disco, é dada pela equação (46).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \delta_i} \right) = \begin{bmatrix} M_{disc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{disc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{x_disc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{x_disc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{y_disc} \\ 0 & 0 & I_{y_disc} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (46)$$

3.3 ELEMENTO DE MANCAL

Os vetores de deslocamento nodal dos mancais têm a forma da equação (45). A matriz acoplada à matriz do rotor devido à energia potencial elástica e energia de dissipação de Rayleigh dos mancais, é dada pela equação (47).

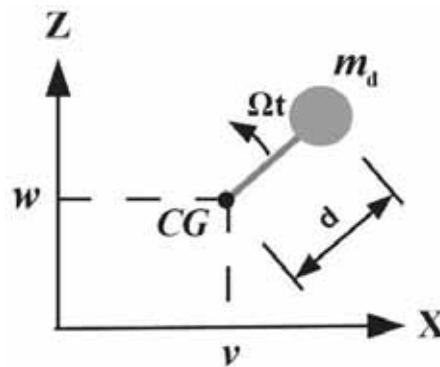
$$\left(\frac{\partial V}{\partial \delta_i}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_i}\right) = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & c_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Para simplificação, o sistema foi considerado desacoplado, ou seja, desconsiderou-se as rigidezes e amortecimentos cruzados.

3.4 MASSA DESBALANCEADA

O desbalanceamento pode ser definido como uma massa, m_d , situada a uma distância, d , do centro geométrico do eixo, CG , rotacionando com uma velocidade angular Ωt , como pode ser visualizado na Figura 6.

Figura 6 – Massa desbalanceada



Fonte: Adaptado de Lalanne (1997)

As coordenadas da massa são dadas pelo vetor posição OD (decomposto nas direções x e z), conforme equação (48):

$$OD = \begin{Bmatrix} v + d \sin(\Omega t) \\ w + d \cos(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (48)$$

Derivando a equação (48) em relação ao tempo, a velocidade da massa é dada pela equação (49):

$$V_{\text{velocidade}} = \frac{d(OD)}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{v} + d\Omega \cos(\Omega t) \\ \dot{w} - d\Omega \sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (49)$$

Desse modo, a equação de Lagrange associada a massa de desbalanceamento pode ser escrita pela equação (50):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = -m_d d\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (50)$$

Enfim, a força de desbalanceamento agindo no sistema pode ser escrita como (LALANNE, 1997):

$$\begin{bmatrix} F_v \\ F_w \end{bmatrix} = m_d d\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (51)$$

4 MÉTODOS COMPUTACIONAIS

Nesse capítulo será explorado o uso de três importantes métodos utilizados neste presente trabalho. Primeiramente será explorada o método de busca baseado em população: algoritmo genético. Em seguida, o método de busca direta: função quase-Newton. Por último, o método de observador de estado responsável por reconstruir os demais estados do sistema.

4.1 ALGORITMO GENÉTICO

No final da década de 50, alguns pesquisadores procuraram na natureza a inspiração necessária para desenvolver novas técnicas de busca de soluções para determinados problemas. Na natureza o processo de seleção natural, proposta por Charles Darwin, demonstra que seres mais aptos tendo em mãos recursos naturais impostos, apresentam uma maior probabilidade de sobreviver, conseqüentemente, disseminar o seu código genético. Com o passar das gerações, através de sucessivos cruzamentos e mutações que ocorrem com as espécies, estes tendem a estar cada vez mais adaptados ao meio ambiente em que vivem (SRINIVAS, PATNAIK, 1994).

De acordo com a aptidão e a combinação de operadores genéticos são produzidos métodos de grande robustez e aplicabilidade. Isto é feito através de processos iterativos, onde cada iteração é chamada de geração (CASTRO, 2010).

Durante cada iteração, os princípios de seleção e reprodução são aplicados a uma população de candidatos que pode variar, dependendo da complexidade do problema e dos recursos computacionais disponíveis. Através da seleção, se determina quais indivíduos conseguirão se reproduzir, gerando um número de descendentes para a próxima geração. Em outras palavras, os indivíduos com maior adaptação relativa têm maiores chances de se reproduzir (CASTRO, 2010).

Os algoritmos genéticos são heurísticas que não têm a garantia de encontrar a solução ótima de um determinado problema, porém, são capazes de encontrar boas soluções. A utilização de algoritmo genético é mais apropriada em problemas intratáveis, que possuem o espaço de solução tão amplo que precisariam de um tempo extraordinariamente longo para percorrê-lo, sendo, portanto, considerados sem solução para métodos de busca exaustiva (LINDEN, 2006).

Muitos de seus termos são provenientes da biologia, os quais podem ser resumidos abaixo:

Gene: variável de otimização, ou seja, uma codificação dos parâmetros de otimização.

Cromossomo: conjunto de genes, chamado de indivíduo, candidato a solução de otimização.

População inicial: conjunto de todos os cromossomos (indivíduos) criados aleatoriamente, onde será feita a busca pela solução. A cada geração, novos vetores populacionais são recombinados e evoluídos a partir da população atual.

Gerações: populações criadas a partir da população inicial através da aplicação dos operadores genéticos.

Operadores genéticos: transformam a população através de sucessivas gerações, para obter um resultado satisfatório no final do processo. São principalmente a mutação e o crossover.

Mutação: altera, de maneira aleatória, o valor de alguma parte dos genes. Esse operador aumenta a exploração do espaço amostral, por outro lado, expõe o risco de eliminação de soluções potenciais antes que as mesmas sejam identificadas em combinação promissoras.

Crossover: cruzamento de um cromossomo sobre o outro para troca de genes. Equivale a uma busca no espaço amostral representado pela população inicial, de forma a testar as diferentes combinações possíveis.

Seleção: comparação entre o vetor da iteração passada, x_i , com o vetor da iteração atual, x_{i+1} . Aquele que produzir o menor valor da função objetivo será levado para a população seguinte. Se $F(x_{i+1}) < F(x_i)$, o vetor x_i será substituído pelo x_{i+1} , caso contrário, x_i será mantido na geração seguinte.

Elitismo: número de indivíduos que são garantidos para sobreviver à próxima geração.

Migração: indivíduos que se movem para a próxima geração sem serem afetados pelos operadores genéticos.

Pai: indivíduo selecionado para o cruzamento.

Filho: indivíduo criado no cruzamento entre dois pais.

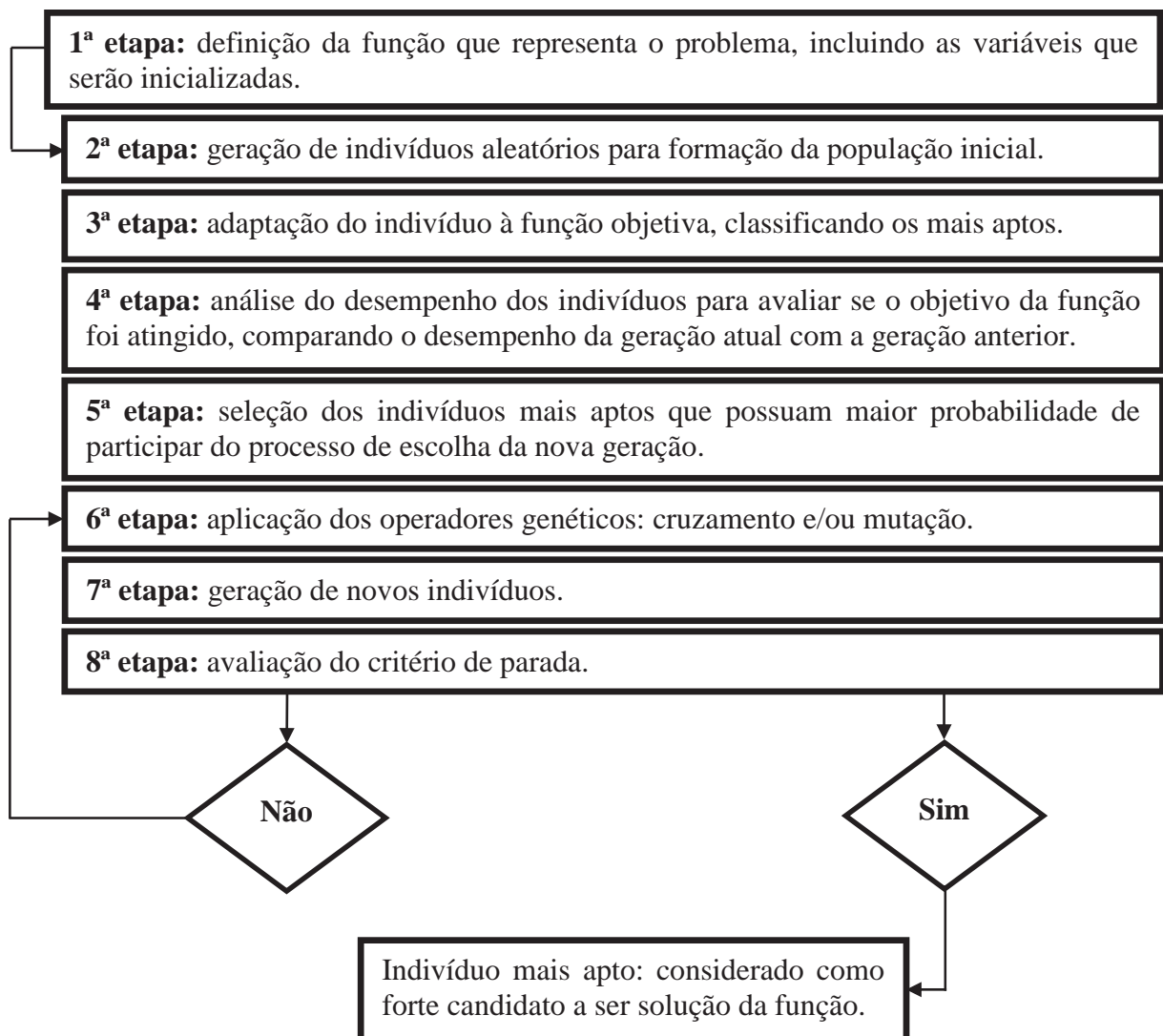
Além desses conceitos, existem outros que são relevantes para o algoritmo genético (LINDEN, 2006).

Função objetiva: função que avalia cada indivíduo da população atribuindo um valor que mostra o quão distante aquele indivíduo está da solução. É também chamada de função de aptidão ou função fitness.

Critério de Parada: exigência para que o algoritmo encerre. O número máximo de iterações, ou gerações, tem sido o principal critério de parada utilizado nos métodos evolutivos, definido previamente pelo usuário. No entanto, outros critérios podem ser utilizados para finalizar o processo evolutivo, tais como o tempo de execução do algoritmo, o número de avaliações da função objetivo, valor final da função objetivo e o próprio monitoramento do usuário.

O algoritmo genético básico pode ser esquematizado conforme o fluxograma mostrado na Figura 7.

Figura 7 – Fluxograma de um algoritmo genético



A primeira etapa é a definição de qual será a função para representar o problema, incluindo as variáveis que serão inicializadas, tais como: tamanho da população inicial, quantidade de gerações, taxa de cruzamento, taxa de mutação entre outros.

O segundo passo é a geração de um número de indivíduos aleatório da população inicial. Pode-se dizer que quanto maior o número da população inicial maior é a probabilidade de convergência, já que aumenta a probabilidade de que a solução desejada esteja entre os elementos da população.

O terceiro passo é a adaptação do indivíduo à função objetiva, classificando os indivíduos mais aptos.

O quarto passo analisa o desempenho da população para avaliar se o objetivo da função foi atingido. Esse teste de convergência é realizado adotando alguns parâmetros: valor máximo, mínimo ou médio, desvio padrão da população. Há uma comparação do desempenho da geração atual com a geração anterior. Nesse caso, entra em cena o critério de parada. Se a solução encontrada for igual ou menor ao que informado pelo usuário, o processo de busca é finalizado.

O quinto passo tem por objetivo selecionar os indivíduos mais aptos da geração anterior que tenham maior probabilidade de participar do processo de escolha da nova geração.

O sexto passo consiste na aplicação dos operadores genéticos, cruzamento e/ou mutação. Primeiramente, o cruzamento divide a população em pares e a cada novo indivíduo aplica-se o processo de mutação.

O sétimo passo é a geração de uma nova população substituindo a população anterior.

No oitavo passo os indivíduos da nova geração são novamente avaliados a fim de verificar se o critério de parada foi satisfeito. Em caso positivo, o indivíduo mais apto é considerado como um forte candidato para ser a solução da função. Em caso negativo, são aplicados novamente os operadores genéticos até que o critério de parada seja satisfeito.

Os métodos de busca baseados em população, em específico os algoritmos genéticos, são apropriados para problemas de otimização complexos, que envolvem muitas variáveis e um espaço de soluções de dimensão elevada. A desvantagem destes algoritmos é a introdução de um *overhead* computacional, ou seja, um processamento ou armazenamento em excesso causando um custo computacional elevado devido ao grande número de variáveis, à grandes populações e ao alto número de gerações – a fim de garantir a cobertura do espaço de soluções.

4.2 FUNÇÃO DE OTIMIZAÇÃO QUASE-NEWTON

O método de otimização de Newton minimiza uma dada função de otimização, $f(x)$, sendo x um vetor de dimensão n a ser otimizado:

$$\min f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (52)$$

Essa função de otimização visa calcular a norma quadrática entre as respostas do modelo analítico obtidos pelo observador de estado, $y(t)$, e as respostas obtidas experimentalmente através de sensores, $y_m(t)$, em n posições do rotor. O modelo analítico contém os parâmetros dos mancais que serão ajustados para minimizar a função $f(x)$.

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n (y_{m(i)}(t) - y_{(i)}(t))^2 \right)^{1/2} \quad (53)$$

O método de Newton consiste em encontrar um novo vetor de soluções a cada iteração da seguinte forma:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)} H^{(k)} g^{(k)} \quad (54)$$

sendo $\alpha^{(k)}$ um escalar escolhido de forma a minimizar a função, $g(x)$ a Jacobiana, $H(x)$ a inversa da Hessiana da função $f(x)$ (SHANNO, 1970):

$$\nabla f(x) = g(x) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}^T \quad (55)$$

$$\nabla^2 f(x) = H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (56)$$

Ao invés de calcular a matriz Hessiana, $H^{(k)}$ – que pode ser de grande dificuldade – o método quase-Newton utiliza processos iterativos para calcular uma aproximação da matriz Hessiana, $H^{*(k)}$, sendo atualizada a cada iteração utilizando a informação do gradiente da iteração anterior. Desse modo, o vetor solução gerado pelo método pode ser generalizado pela equação (57):

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)} H^{*(k)} g^{(k)} \quad (57)$$

Os métodos de buscas direcionadas, como o método quase-Newton, também são utilizados para otimização de um vetor que minimize ou maximize uma dada função. Porém, para o início da busca é necessário adotar um vetor solução inicial. Se o vetor escolhido como ponto de partida for próximo do real, o algoritmo encontra um escalonamento ótimo, efetuando pequenas modificações nesta solução de forma a buscar melhorias no resultado da função objetivo, não necessitando de um grande tempo para isso.

O algoritmo termina quando não encontra nenhuma melhoria possível em uma iteração ou quando se atende um dos critérios de parada fornecidos previamente ao algoritmo. A solução, ao término do algoritmo, é idealmente ótima, mas não há qualquer garantia de que seja única.

4.3 OBSERVADORES DE ESTADOS

É indiscutível a importância de se conhecer completamente o comportamento de um sistema dinâmico. Muitas técnicas de controle e de monitoramento de sistemas são baseadas no conhecimento do vetor de estados completo do modelo numérico. No entanto, muitas variáveis do sistema podem não estar disponíveis para medição ou, quando disponíveis, requerem um grande número de sensores. Desta forma, a obtenção das respostas destas variáveis deve ser feita de forma estimada.

Em 1964, Luenberger demonstrou que os estados de um sistema dinâmico determinístico podem ser estimados a partir do conhecimento das suas entradas e das suas saídas, desde que este sistema seja observável, ou pelo menos detectável. Este dispositivo, baseado em um sistema de controle em malha fechada, é conhecido como Observador de Luenberger.

Considere o sistema linear representado pela equação (58):

$$\begin{aligned}\{\dot{x}(t)\} &= [A]\{x(t)\} + [B]\{u(t)\} \\ \{y(t)\} &= [D_s]\{x(t)\}\end{aligned}\quad (58)$$

sendo:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} & [I_d]_{n \times n} \\ -[K]_{n \times n} [M]_{n \times n}^{-1} & -([C] + [G])_{n \times n} [M]_{n \times n}^{-1} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (59)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} \\ [M]_{n \times n}^{-1} \end{bmatrix}_{2n \times n} \quad (60)$$

$$[D_s]_{n \times n} = [I_d]_{n \times n} \quad (61)$$

na qual $\{x(t)\}$ é um vetor coluna $n \times 1$, $\{u(t)\}$ é um vetor coluna de ordem $m \times 1$, $[A]$ é uma matriz quadrada $n \times n$ e $[B]$ é uma matriz retangular $n \times m$. A matriz $[A]$, chamada de matriz dinâmica, tem a função de acoplar as variáveis de estado; a matriz $[B]$, chamada de matriz de entradas, tem a função de direcionamento e peso das entradas do sistema; a matriz $[D_s]$, chamada de matriz de saídas, tem a função de direcionamento e peso das variáveis de estado. A equação (58) é chamada de equação matricial de estados.

Um observador de estado para um sistema dinâmico original com estado $\{x(t)\}$, saída $\{y(t)\}$ e entrada $\{u(t)\}$ é um sistema dinâmico auxiliar, ou seja, uma cópia do sistema original que possui a mesma entrada deste sistema e que tem a capacidade de estimar os estados desconhecidos a partir de estados conhecidos.

Conhecendo-se as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[C]$, e a medição de $\{y(t)\}$ e $\{u(t)\}$ é possível construir um observador para tal sistema, como mostrado pela equação (62).

$$\begin{aligned}\{\dot{\hat{x}}(t)\} &= [A]\{\hat{x}(t)\} + [B]\{u(t)\} + [L_{ob}](\{y(t)\} - \{\hat{y}(t)\}) \\ \{\hat{y}(t)\} &= [D_{me}]\{\hat{x}(t)\}\end{aligned}\quad (62)$$

sendo $\{\hat{x}(t)\}$ o vetor de estados, $\{\hat{y}(t)\}$ o vetor de sinais de saída, ambos estimados pelo observador de estado, $[D_{me}]$ a matriz de medidas que irá indicar o parâmetro que vai ser medido para a reconstrução dos demais e $[L_{ob}]$ a matriz de ganhos do observador.

Desse modo, é possível simular o sistema original juntamente com o sistema do observador, como mostrado pela equação (63) (LUENBERGER, 1964).

$$\begin{bmatrix} \{\dot{\hat{x}}(t)\} \\ \{\dot{\hat{x}}(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [0] \\ [L_{ob}][D_{me}] & [A] - [L_{ob}][D_{me}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\hat{x}(t)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] \\ [B] \end{bmatrix} \{u(t)\} \quad (63)$$

$$\{y(t)\} = \begin{bmatrix} [D_{me}] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\hat{x}(t)\} \end{bmatrix} \quad (64)$$

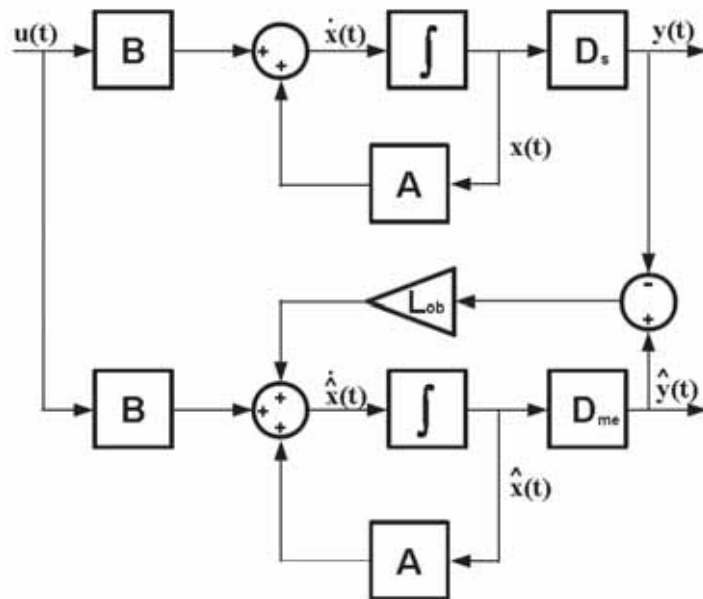
Para um sistema de três graus de liberdade, por exemplo, a matriz de medidas ficaria conforme a equação (65), sendo que apenas se mede $x_1(t)$ (deslocamento da primeira massa) e o próprio observador reconstruirá os outros estados, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$ e $\dot{x}_3(t)$.

$$[D_{me}] = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (65)$$

Estabelecida a matriz de medidas, verifica-se se o sistema é observável com as medidas estipuladas. Se isto não ocorrer, as medidas devem ser tomadas em outros pontos, e desta forma a nova matriz de medidas.

A Figura 8 mostra o diagrama de blocos do sistema e do observador de estado.

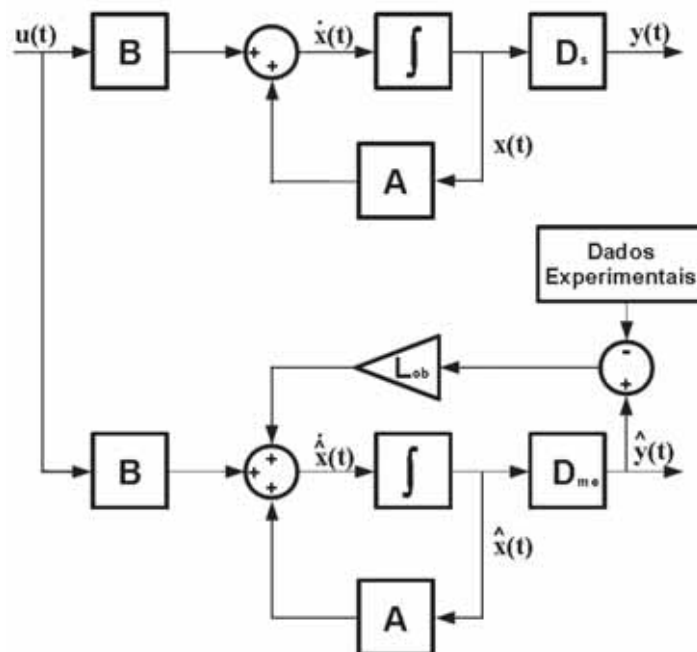
Figura 8 – Organograma geral do Observador de Estado



Fonte: Adaptado de Lemos (2004)

O diferencial desse trabalho é que ao invés de utilizar dados simulados para minimizar o erro são utilizados dados experimentais obtidos através dos sensores (Figura 9).

Figura 9 – Organograma do observador de estado com entradas experimentais



Fonte: Elaboração do próprio autor

A matriz de ganhos do observador, $[L_{ob}]$, tenta minimizar de forma iterativa o erro entre a saída do sistema estimado pelo observador e os dados experimentais, aproximando o estado estimado pelo estado obtido analiticamente da modelagem do sistema:

$$\hat{x}(t) \rightarrow x(t), \quad t \rightarrow \infty \quad (66)$$

O cálculo da matriz $[L_{ob}]$ para sistemas lineares representáveis por equações diferenciais lineares é realizado a partir de uma função de custo quadrática, $[J]$, que deve ser minimizada para se obter o melhor controlador que poderá proporcionar ao sistema o desempenho desejado, conforme equação (67) (SILVA, 2010).

$$[J] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left([X]^T [Q] [X] + [U]^T [R] [U] \right) dt \quad (67)$$

onde $[Q]$ e $[R]$ são matrizes hermitianas positivas, ou seja, a transposta de sua conjugada é igual a própria matriz, que determinam a importância relativa do erro e do dispêndio de energia dos sinais de controle (OGATA, 2002).

A equação (67) pode ser escrita na forma matricial, conforme a equação (68):

$$[J] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cccc} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cccc} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{array} \right] \end{array} \right\} dt \quad (68)$$

Ressalta-se que antes de se calcular o observador de estado, seja ele de ordem mínima ou plena, deve-se testar a observabilidade do sistema, ou seja, testar se cada transição do estado pode afetar cada elemento do vetor de saída. `

O sistema é dito completamente observável se todo estado de $x(t_0)$ puder ser determinado pela observação de $y(t)$ durante um intervalo de tempo finito, $t_0 < t < t_1$. Como se trata de sistemas lineares e invariantes no tempo pode-se supor $t_0 = 0$. Logo, pode-se definir a

condição de observabilidade para um sistema descrito pela equação (69) se, e somente se, o posto da matriz de observabilidade $n \times n.m$ for n ou tiver n vetores-coluna linearmente independentes.

$$O = \left[D_{me} \mid D_{me}A \mid D_{me}A^2 \mid \cdots \mid D_{me}A^{n-1} \right]^T \quad (69)$$

Garantida a condição da equação (69), pode-se projetar um observador de forma que, utilizando somente um estado ou todos n estados do sistema se obtenha a estimativa de qualquer combinação de estados para o sistema em questão (OLIVEIRA, 2014).

5 IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS EM SISTEMAS MECÂNICOS UTILIZANDO FUNÇÕES ORTOGONAIS

Os métodos de identificação de forças propostos neste trabalho operam no domínio do tempo. A principal característica desta técnica de identificação está no cálculo de integrais das funções ortogonais normalizadas, possibilitando a transformação da equação diferencial de movimento do sistema em uma equação algébrica, cuja resolução é muito mais rápida e simples.

Na seqüência serão apresentadas as formulações para os diversos casos possíveis no que se refere ao tipo de sinal de resposta utilizado (SANTOS, 2004).

5.1 IDENTIFICAÇÃO DAS FORÇAS DE DESBALANCEAMENTO POR TERMOS DE DESLOCAMENTO

Independentemente da forma de Lagrange utilizada, alcança-se a equação de movimento descrita por (SANTOS, 2004):

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + ([C] + [G])\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (70)$$

Calculando-se a integral dupla da equação (70), obtém-se a equação (71).

$$[M]\left(\{x(t)\} - \{x(0)\} - \{\dot{x}(0)\}t\right) + ([C] + [G])\left(\int_0^t \{x(\tau)\} d\tau - \{x(0)\}\right) + [K]\int_0^t \int_0^t \{x(\tau)\} d\tau^2 = \int_0^t \int_0^t \{f(\tau)\} d\tau^2 \quad (71)$$

sendo τ empregado como variável na integração de $[0, t]$.

Os sinais $\{x(t)\}$ e $\{f(t)\}$ são expandidos em séries de funções ortogonais truncadas com r termos:

$$\{x(t)\} = [X]\{\varphi(t)\} \quad (72)$$

$$\{f(t)\} = [F]\{\varphi(t)\} \quad (73)$$

na qual:

$[X]$ é a matriz $(n \times r)$ dos coeficientes da expansão de $\{x(t)\}$.

$[F]$ é a matriz $(n \times r)$ dos coeficientes da expansão de $\{f(t)\}$.

Substituindo as equações (72) e (73) na equação (71) e utilizando o conceito da matriz de integração operacional $[P]$ na integração específica para cada uma destas funções obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & [M]([\mathcal{X}]\{\varphi(t)\} - \{x(0)\} - \{\dot{x}(0)\}t) + ([C] + [G]) \left(\int_0^t [\mathcal{X}]\{\varphi(\tau)\} d\tau - \{x(0)\}t \right) + \\
 & [K] \left(\int_0^t \int_0^t [\mathcal{X}]\{\varphi(\tau)\} d\tau^2 \right) = \int_0^t \int_0^t [F]\{\varphi(\tau)\} d\tau^2
 \end{aligned} \tag{74}$$

Para as funções ortogonais de Fourier e Legendre pode-se observar que a primeira função da série ortogonal é igual à unidade para qualquer instante “ t ”. Portanto, pode-se escrever a consideração descrita pela equação (75).

$$\{e\}^T \{\varphi(t)\} = 1 \tag{75}$$

na qual $\{e\}$ é um vetor constante de dimensões $(r \times 1)$ cuja forma depende da série ortogonal utilizada. No caso das séries de Fourier, polinômios de Legendre e Chebyshev é dada pela equação (76).

$$\{e\}^T = \{1 \quad 0 \quad \dots \quad 0\} \tag{76}$$

Aplicando a propriedade de integração da base ortogonal, equação (7), na equação (76) integrada em uma única vez no intervalo de $[0, t]$ obtém-se a equação (77),

$$t = \{e\}^T [P]\{\varphi(t)\} \tag{77}$$

na qual $[P]$ é a matriz operacional de integração específica para cada uma das funções ortogonais, equações (19), (29) e (36).

Substituindo as equações (75) e (77) na equação (74), aplicando a propriedade de integração da base ortogonal, equação (7), e igualando os coeficientes de $\{\varphi(t)\}$ obtém-se a equação (78).

$$\begin{bmatrix} [M] \\ -[M]\{x(0)\} \\ -[M]\{\dot{x}(0)\} - ([C] + [G])\{x(0)\} \\ [C + G] \\ [K] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [X] \\ \{e\}^T \\ \{e\}^T [P] \\ [X][P] \\ [X][P]^2 \end{bmatrix} = [F][P]^2 \quad (78)$$

Isolando os coeficientes da força, a equação (78) pode ser reescrita pela equação (79).

$$[F] = [P]^{-2} \begin{bmatrix} [M] \\ -[M]\{x(0)\} \\ -[M]\{\dot{x}(0)\} - ([C] + [G])\{x(0)\} \\ ([C] + [G]) \\ [K] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [X] \\ \{e\}^T \\ \{e\}^T [P] \\ [X][P] \\ [X][P]^2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

5.2 IDENTIFICAÇÃO DAS FORÇAS DE DESBALANCEAMENTO POR TERMOS DE VELOCIDADE

Calculando-se a integral da equação (70), tem-se a equação (71).

$$\begin{aligned} & [M](\{\dot{x}(t)\} - \{\dot{x}(0)\}) + ([C] + [G]) \left(\int_0^t \{\dot{x}(\tau)\} d\tau \right) + \\ & [K] \left(\int_0^t \int_0^t \{\dot{x}(\tau)\} d\tau^2 + \{x(0)\} t \right) = \int_0^t \{f(\tau)\} d\tau \end{aligned} \quad (80)$$

Os sinais $\{\dot{x}(t)\}$ e $\{f(t)\}$ são expandidos em séries de funções ortogonais truncadas com r termos:

$$\{\dot{x}(t)\} = [V_{el}]\{\varphi(t)\} \quad (81)$$

$$\{f(t)\} = [F]\{\varphi(t)\} \quad (82)$$

na qual:

$[V_{el}]$ é a matriz ($n \times r$) dos coeficientes da expansão de $\{\dot{x}(t)\}$.

Substituindo as equações (81) e (82) na equação (80) e utilizando o conceito da matriz de integração operacional $[P]$ na integração específica para cada uma destas funções obtém-se a equação (83).

$$\begin{aligned}
 & [M]([V]\{\varphi(t)\} - \{\dot{x}(0)\}) + ([C] + [G]) \left(\int_0^t [V_{el}]\{\varphi(\tau)\} d\tau \right) + \\
 & [K] \left(\int_0^t \int_0^t [V_{el}]\{\varphi(\tau)\} d\tau^2 + \{x(0)\}t \right) = \int_0^t [F]\{\varphi(\tau)\} d\tau
 \end{aligned} \tag{83}$$

Substituindo as equações (75) e (77) na equação (83) e aplicando a propriedade de integração da base ortogonal, equação (7), e igualando os coeficientes de $\{\varphi(t)\}$ obtém-se a equação (84).

$$\begin{bmatrix} [M] \\ -[M]\{\dot{x}(0)\} \\ ([C] + [G]) \\ [K] \\ [K]\{x(0)\} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [V_{el}] \\ \{e\}^T \\ [V_{el}][P] \\ [V_{el}][P]^2 \\ \{e\}^T [P] \end{bmatrix} = [F][P] \tag{84}$$

Isolando os coeficientes da força, a equação (84) pode ser reescrita pela equação (85).

$$[F] = [P]^{-1} \begin{bmatrix} [M] \\ -[M]\{\dot{x}(0)\} \\ ([C] + [G]) \\ [K] \\ [K]\{x(0)\} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [V_{el}] \\ \{e\}^T \\ [V_{el}][P] \\ [V_{el}][P]^2 \\ \{e\}^T [P] \end{bmatrix} \tag{85}$$

5.3 IDENTIFICAÇÃO DAS FORÇAS DE DESBALANCEAMENTO POR TERMOS DE ACELERAÇÃO

Quando o sinal utilizado para identificação das forças é o de aceleração, tem-se a equação (86).

$$\begin{aligned}
 [M]\{\ddot{x}(t)\} + ([C] + [G])\left(\int_0^t \{\ddot{x}(\tau)\}d\tau + \{\dot{x}(0)\}\right) + \\
 [K]\left(\int_0^t \int_0^t \{\ddot{x}(\tau)\}d\tau^2 + \{\dot{x}(0)\}t + \{x(0)\}\right) = \{f(t)\}
 \end{aligned} \tag{86}$$

Os sinais $\{\ddot{x}(t)\}$ e $\{f(t)\}$ são expandidos em séries de funções ortogonais truncadas com r termos:

$$\{\ddot{x}(t)\} = [A_{cel}]\{\varphi(t)\} \tag{87}$$

$$\{f(t)\} = [F]\{\varphi(t)\} \tag{88}$$

na qual:

$[A_{cel}]$ é a matriz ($n \times r$) dos coeficientes da expansão de $\{\ddot{x}(t)\}$.

Substituindo as equações (87) e (88) na equação (86) e utilizando o conceito da matriz de integração operacional $[P]$ na integração específica para cada uma destas funções obtém-se a equação (89).

$$\begin{aligned}
 [M]([A_{cel}]\{\varphi(t)\}) + ([C] + [G])\left(\int_0^t [A_{cel}]\{\varphi(\tau)\}d\tau + \{\dot{x}(0)\}\right) + \\
 [K]\left(\int_0^t \int_0^t [A_{cel}]\{\varphi(\tau)\}d\tau^2 + \{\dot{x}(0)\}t + \{x(0)\}\right) = [F]\{\varphi(t)\}
 \end{aligned} \tag{89}$$

Substituindo as equações (75) e (77) na equação (89), aplicando a propriedade de integração da base ortogonal, equação (7), e igualando os coeficientes de $\{\varphi(t)\}$ obtém-se a equação (90).

$$[F] = \begin{bmatrix} [M] \\ ([C]+[G]) \\ ([C]+[G])\{\dot{x}(0)\} + [K]\{x(0)\} \\ [K] \\ [K]\{\dot{x}(0)\} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [A_{cel}] \\ [A_{cel}][P] \\ \{e\}^T \\ [A_{cel}][P]^2 \\ \{e\}^T [P] \end{bmatrix} \quad (90)$$

6 METODOLOGIA

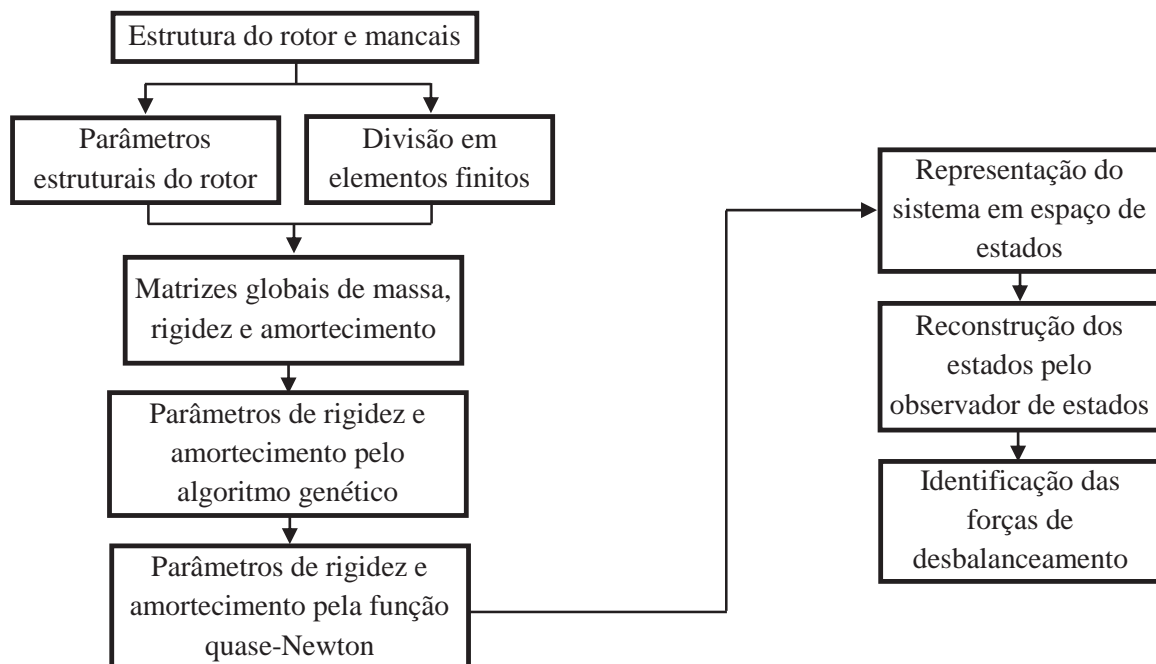
Neste t3pico ser3 apresentada um esquema geral das etapas deste trabalho. Em seguida, ser3 apresentada a metodologia utilizada para discretizar o rotor em elementos finitos, juntamente com suas dimens3es e disposi33o de suas matrizes.

6.1 ESQUEMA GERAL DO PROGRAMA

O programa se inicia com a medi33o das dimens3es do rotor e a divis3o em elementos finitos, conforme a Tabela 1. Os dados estruturais de massa e momentos de in3rcia s3o calculados atrav3s da constru33o do rotor em um *software* CAD.

As matrizes de cada elemento s3o constru3das e posicionadas em uma matriz global de massa, rigidez e amortecimento juntamente com efeito girosc3pico. Os valores das rigidezes e amortecimentos dos mancais estimados pelo algoritmo gen3tico s3o utilizados como solu33o inicial da fun33o de otimiza33o pelo m3todo quase-Newton. As equa33es din3micas do sistema s3o representadas em espa3o de estado e utilizando um observador de estado global 3 poss3vel reconstruir os demais estados do sistema. Finalmente, com todos os estados do rotor 3 poss3vel identificar a for3a de desbalanceamento, atrav3s das s3ries de Fourier, dos polin3mios de Legendre e Chebyshev.

Figura 10 – Esquema geral do programa

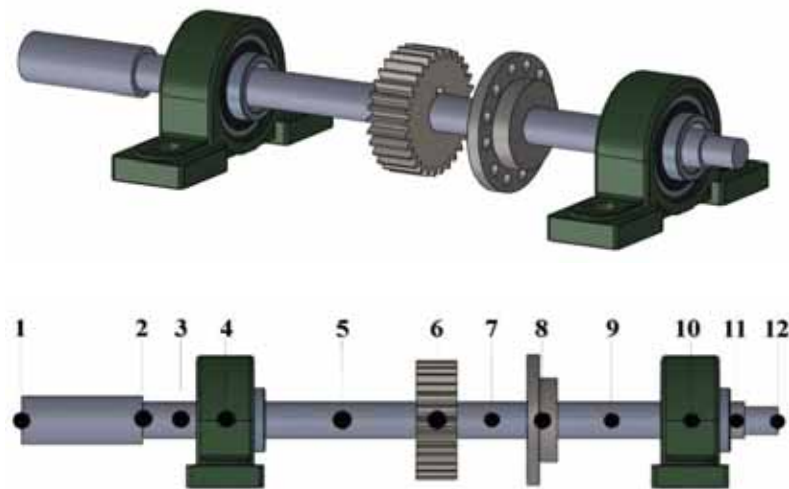


Fonte: Elaborado pelo pr3prio autor

6.2 SISTEMA ROTATIVO

O rotor estudado para pesquisa apresenta dois mancais de rolamento, uma engrenagem e um disco perfurado. A análise foi realizada em apenas um plano perpendicular ao rotor (xz). O eixo foi discretizado em doze nós ou onze elementos, representado na Figura 11, onde o comprimento e diâmetro de cada elemento está representado na Tabela 1.

Figura 11 – Divisão do rotor em elementos finitos



Fonte: Elaboração do próprio autor

Tabela 1 – Dimensões de cada elemento

Número do elemento	Comprimento (mm)	Diâmetro (mm)
1	$60,00 \pm 0,05$	$25,56 \pm 0,05$
2 – 3	$20,00 \pm 0,05$	$19,00 \pm 0,05$
4 – 5	$52,50 \pm 0,05$	$19,00 \pm 0,05$
6 – 7	$24,00 \pm 0,05$	$19,00 \pm 0,05$
8 – 9	$39,00 \pm 0,05$	$19,00 \pm 0,05$
10	$27,00 \pm 0,05$	$19,00 \pm 0,05$
11	$16,00 \pm 0,05$	$15,00 \pm 0,05$

Fonte: Elaboração do próprio autor

Os valores de massa do disco, da engrenagem e dos mancais (do mancal montado com o rolamento) foram obtidos através dos dados do fabricante e os momentos de inércia do disco

e da engrenagem foram calculados a partir do *software* CAD, onde estes foram desenhados com as reais dimensões e o mesmo material dos mesmos, dispostos na Tabela 2.

Tabela 2 – Propriedades dos componentes do rotor

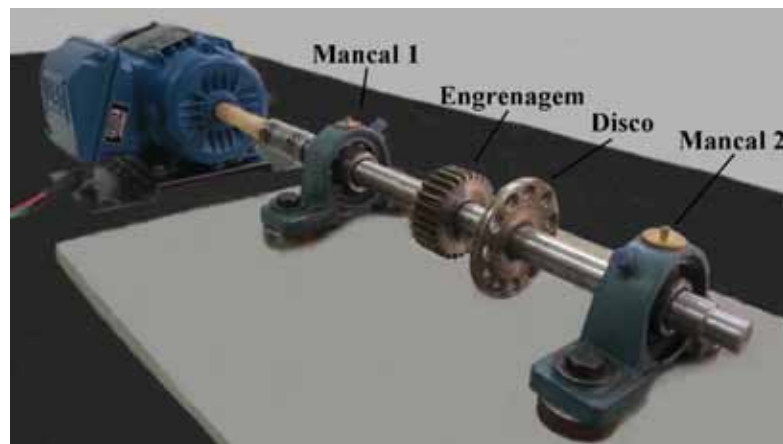
	Disco	Engrenagem	Mancais
Massa (<i>kg</i>)	0,2394	0,2544	0,7
Momento de inércia na direção x (<i>kg m²</i>)	64,576 10 ⁻⁶	54,105 10 ⁻⁶	—
Momento de inércia na direção z (<i>kg m²</i>)	64,629 10 ⁻⁶	54,430 10 ⁻⁶	—
Momento de inércia na direção y (<i>kg m²</i>)	120,757 10 ⁻⁶	91,572 10 ⁻⁶	—

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

7 IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS MANCAIS

Parte fundamental se constituiu do projeto, construção, montagem e caracterização de uma bancada destinada à identificação dos parâmetros de rigidez e amortecimento e das forças de desbalanceamento presentes em um conjunto eixo-rotor, Figura 12.

Figura 12 – Bancada do rotor

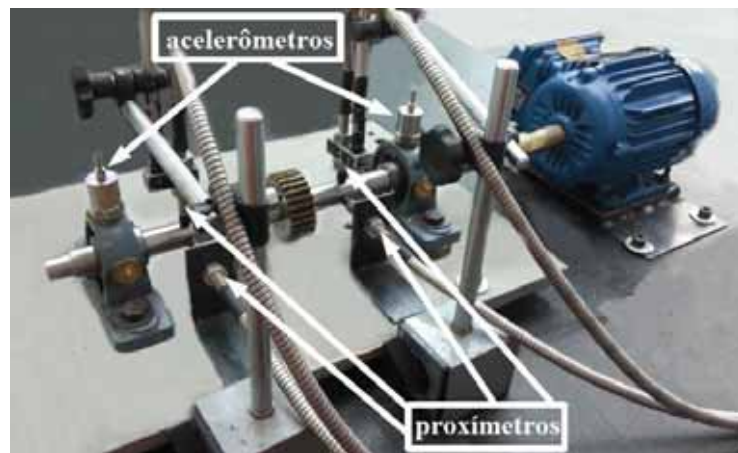


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

O rotor é acoplado a um motor elétrico trifásico WEG de 0,12cv e rotação nominal de 3360rpm de 220V, juntamente com um inversor de frequência WEG modelo CFW 08, como mostrado na Figura 13.

Para medições dos dados experimentais foram utilizados:

- ✓ dois acelerômetros MMF KS50. Primeiramente foram posicionados nos mancais na direção z e depois na direção x ;
- ✓ quatro proxímetros indutivos GS 5001 Vibrocontrol. Posicionados nas direções x e z ;
- ✓ um sensor óptico Balluf B05 15K S-C50, utilizado para o balanceamento;
- ✓ uma placa de aquisição PCMCIA SuperLogics com 16 canais;
- ✓ um notebook com o software DASyLab.

Figura 13 – Instrumentação da bancada do rotor

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

O balanceamento do rotor foi realizado no plano do disco. As vibrações antes e após o balanceamento são mostradas na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores das vibrações antes e após o balanceamento do rotor

	Vibração antes do balanceamento (<i>mm/s</i>)	Vibração após o balanceamento (<i>mm/s</i>)
Mancal 1	0,08469	0,02328
Mancal 2	0,06792	0,02295

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Após realizado o balanceamento foi adicionada ao disco uma massa de aproximadamente 0,08688kg a uma distância do centro de 0,020m (distância do centro até o furo do disco), como mostrado na Figura 14.

Figura 14 – Massa de desbalanceamento adicionada ao disco

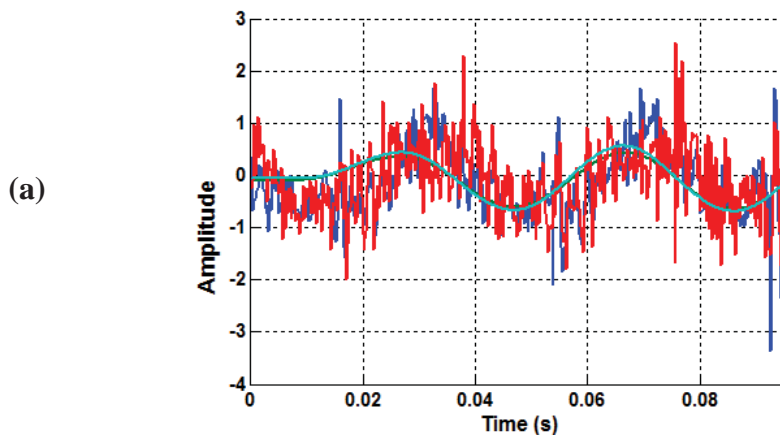


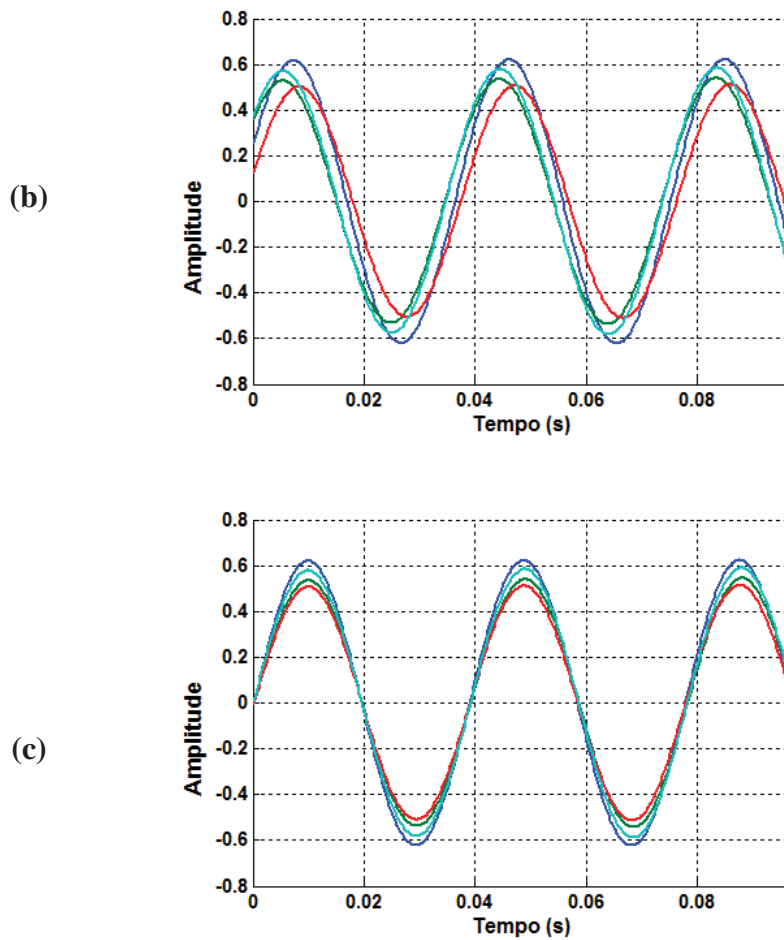
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os sinais de vibrações nos mancais, nas direções x e z , foram medidos durante dez segundos para três rotações diferentes: $1600rpm$, $2000rpm$ e $2400rpm$. Foram realizadas dez medidas para cada rotação e direção, totalizando sessenta medidas.

Os dados experimentais foram filtrados por um filtro passa banda de quarta ordem. As frequências de corte utilizadas foram de $\pm 10\%$ do valor da rotação. Não foram utilizados sensores de fases durante a aquisição dos sinais, por essa razão os sinais foram janelados para que se iniciassem no tempo zero com amplitude zero e terminassem após um determinado número inteiro de ciclos. Na Figura 15 são mostrados os sinais adquiridos na direção z através dos acelerômetros e dos proxímetros.

Figura 15 – (a) Sinal experimental original. (b) Sinal experimental filtrado. (c) Sinal experimental filtrado e janelado





Os sinais de aceleração adquiridos com os acelerômetros foram integrados para velocidade no próprio sistema de condicionamento de sinais. Os valores *rms* da média das dez medições – para cada direção e rotação – são mostrados na Tabela 4.

Tabela 4 – Valores *rms* das velocidades adquiridos nos mancais

Rotação (<i>rpm</i>)	Valores <i>rms</i> na direção z (<i>mm/s</i>)		Valores <i>rms</i> na direção x (<i>mm/s</i>)	
	Mancal 1	Mancal 2	Mancal 1	Mancal 2
1600	0,3998	0,4271	0,4449	0,3432
2000	1,3542	1,4062	0,5133	0,3108
2400	3,5619	3,7129	0,5867	0,2741

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os valores *rms* da média das dez medições – para cada direção e rotação – dos sinais de deslocamento adquiridos com os proxímetros são mostrados na Tabela 5.

Tabela 5 – Valores *rms* dos deslocamentos adquiridos nos nós cinco e nove

Rotação (<i>rpm</i>)	Valores <i>rms</i> na direção z (<i>mm</i>)		Valores <i>rms</i> na direção x (<i>mm</i>)	
	Nó 5	Nó 9	Nó 5	Nó 9
1600	18,6389	11,8721	12,6119	5,4085
2000	20,6747	14,2149	15,2234	3,6270
2400	23,1195	16,8697	17,2732	5,8482

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os valores *rms* da Tabela 4 e Tabela 5 foram utilizados na função objetiva, equação (53). Os locais medidos foram as direções radiais dos dois mancais e as direções radiais dos nós cinco e nove.

As condições iniciais inseridas no algoritmo genético são dadas na Tabela 6.

Tabela 6 – Condições dadas ao algoritmo genético

Parâmetro	Valor
Tamanho da população	80
Intervalo inicial	-100 à 1000
Método de seleção	Amostragem Universal Estocástica (<i>SUS</i>)
Operador de mutação	Gaussiano
Número de gerações	800
Método de crossover	Aritmético
Taxa de crossover	0,8
Fração de migração	0,2
Intervalo de migração	20
Elitismo	2
Critério de parada (valor da função objetiva)	10^{-6}

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

O critério de parada, mostrado na Tabela 6, não foi atendido em razão que o número de gerações foi limitado em 800. A partir da geração 680 não foi notado melhora significativa do valor da função objetiva. O tempo de processamento dos métodos de otimização e os valores da função objetiva são mostrados na Tabela 7.

Tabela 7 – Tempo de processamento e valor da função objetiva dos métodos de otimização

	Algoritmo genético	Quase-Newton
Tempo de processamento	42h47min	1h12min
Valor da função objetiva	2,64	0,7685
Número de iterações	680	44

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os valores dos parâmetros dos mancais obtidos pelo algoritmo genético, Tabela 8, foram utilizados como estimativa inicial para a função de otimização pelo método quase-Newton, convergindo para os valores mostrados na Tabela 9.

Tabela 8 – Valores dos parâmetros estimados pelo algoritmo genético

	Direção z	Direção x
Rigidez do mancal 1	243kN/m	339kN/m
Rigidez do mancal 2	454kN/m	315kN/m
Amortecimento do mancal 1	395Ns/m	398Ns/m
Amortecimento do mancal 2	486Ns/m	444Ns/m

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Tabela 9 – Valores dos parâmetros estimados pela função quase-Newton

	Direção z	Direção x
Rigidez do mancal 1	646kN/m	637kN/m
Rigidez do mancal 2	839kN/m	864kN/m
Amortecimento do mancal 1	449Ns/m	658Ns/m
Amortecimento do mancal 2	469Ns/m	577Ns/m

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Com as matrizes completas de massa, rigidez, amortecimento e efeito giroscópio foi possível reconstruir todos os dados de deslocamento e velocidades através do método de observador global, descrito no item 4.3

Para o caso do sistema modelado, a matriz de medidas, $[D_{me}]$, é dada por uma matriz de dimensão 8×96 . Nas posições dos nós acompanhados pelo observador – posição dos sensores – têm-se a unidade e o restante da matriz é nula.

8 IDENTIFICAÇÃO DAS FORÇAS DE DESBALANCEAMENTO

Com todos os estados identificados foi possível aplicar os métodos de identificação de força, encontrando seus coeficientes, de acordo com as equações (79), (85) e (90). Para o caso em questão, a identificação a partir dos termos de deslocamento foi a que apresentou melhor resultado.

Como pode ser visualizado na Figura 8, os estados podem ser simulados através da modelagem matemática do rotor, apresentando o vetor de saídas $\{y(t)\}$, ou através da diferença entre os dados estimados pelo observador e os valores medidos experimentalmente nos sensores, apresentando o vetor de saídas $\{\hat{y}(t)\}$.

A amplitude da força de desbalanceamento foi calculada de acordo com a equação (51). A fim de tornar a força de desbalanceamento independente da rotação do eixo, decidiu-se calcular a quantidade de desbalanceamento, sendo essa, idealmente, a mesma para todas as rotações e direções, como mostrado na equação (91).

$$m_d d \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_v / \Omega^2 \\ F_w / \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (91)$$

Com os valores de massa de 0,08688kg e distância da massa até o centro de 0,02m, o valor calculado para quantidade de desbalanceamento foi próximo de $1,74 \cdot 10^{-3} \text{kg}\cdot\text{m}$.

Os métodos de identificação de força foram aplicados para as três rotações – 1600rpm, 200rpm e 2400rpm – e para as duas direções – direção x e z . Pode-se perceber nas simulações que ambas direções apresentaram resultados muito semelhantes, por isso optou-se por mostrar os resultados apenas na direção z , como segue nos itens 8.1 e 8.2.

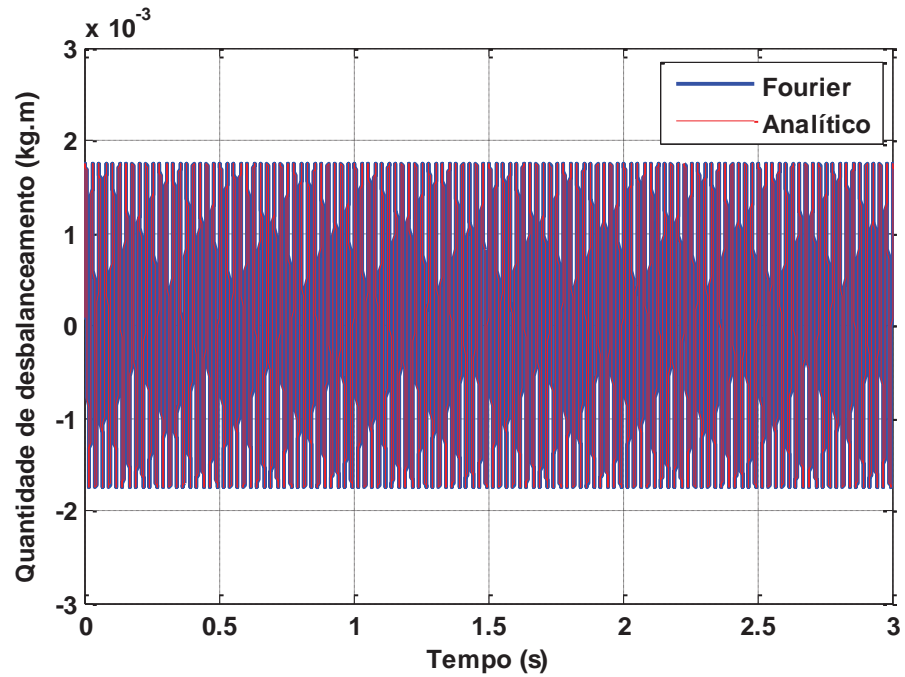
8.1 IDENTIFICAÇÃO DAS FORÇAS ATRAVÉS DA RECONSTRUÇÃO DOS ESTADOS A PARTIR DE MEDIDAS SIMULADAS

8.1.1 Identificação utilizando séries de Fourier a partir de medidas simuladas

Para a identificação da quantidade de desbalanceamento através das séries de Fourier foram necessários 601 termos da série para as três rotações. Pode-se observar grande qualidade

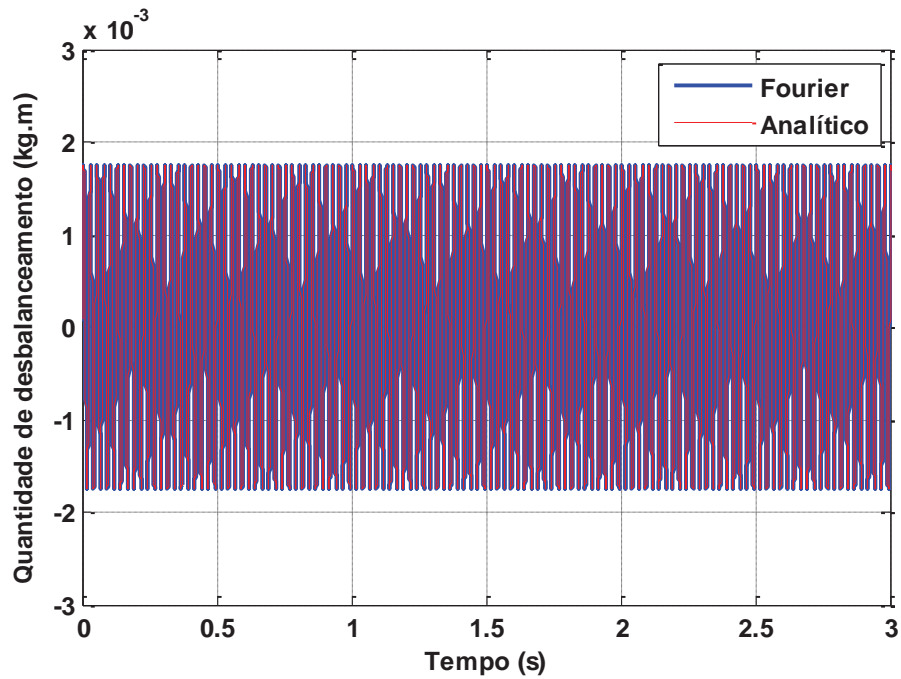
na aproximação da do sinal analítico com o identificado, como mostrado nas Figuras 16, 17 e 18.

Figura 16 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Fourier utilizando estados simulados para rotação de $1600rpm$



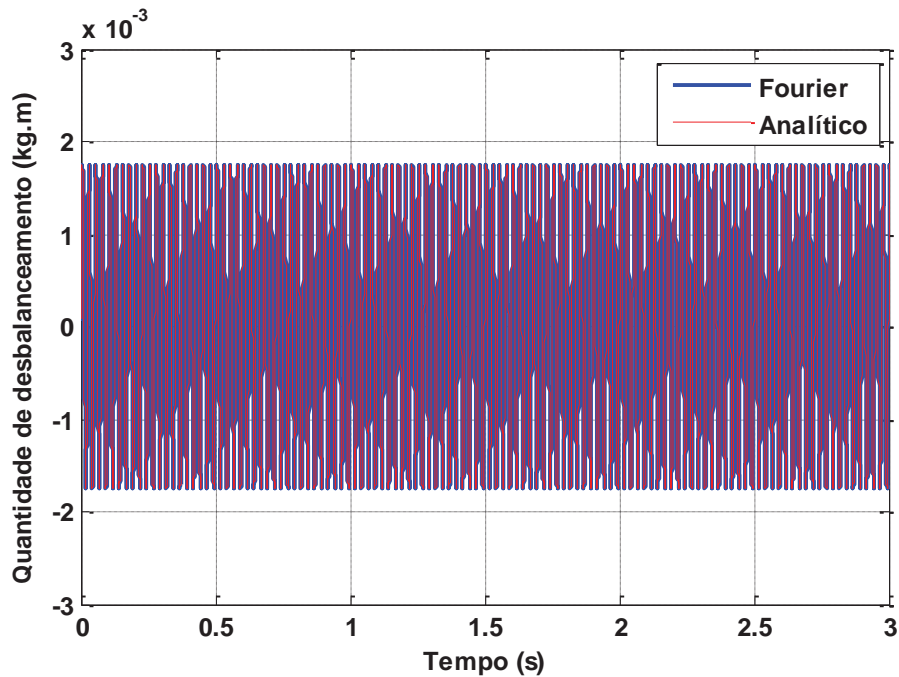
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 17 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Fourier utilizando estados simulados para rotação de $2000rpm$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 18 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Fourier utilizando estados simulados para rotação de $2400rpm$

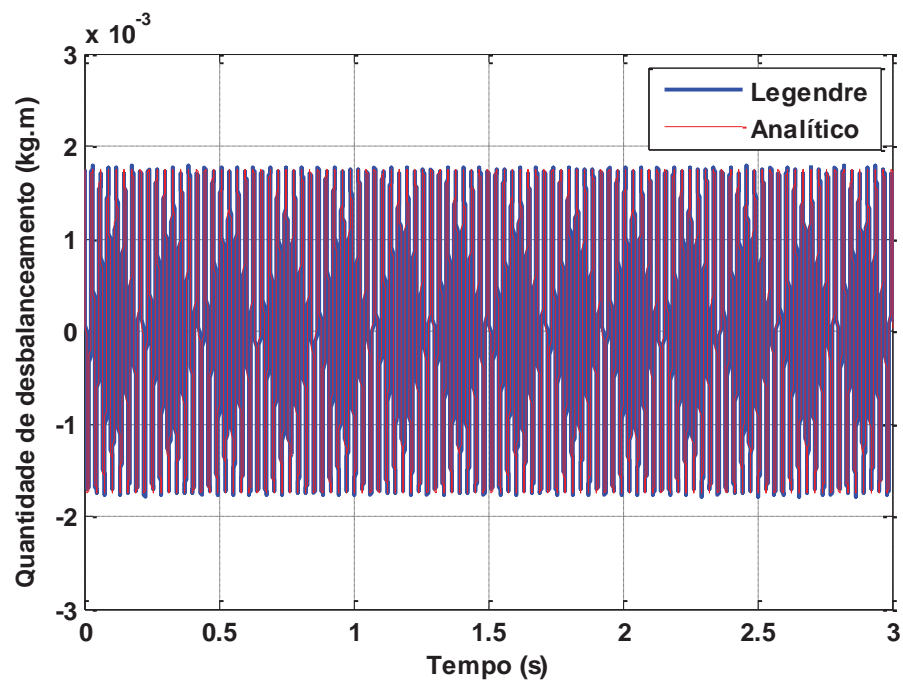


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

8.1.2 Identificação utilizando polinômios de Legendre a partir de medidas simuladas

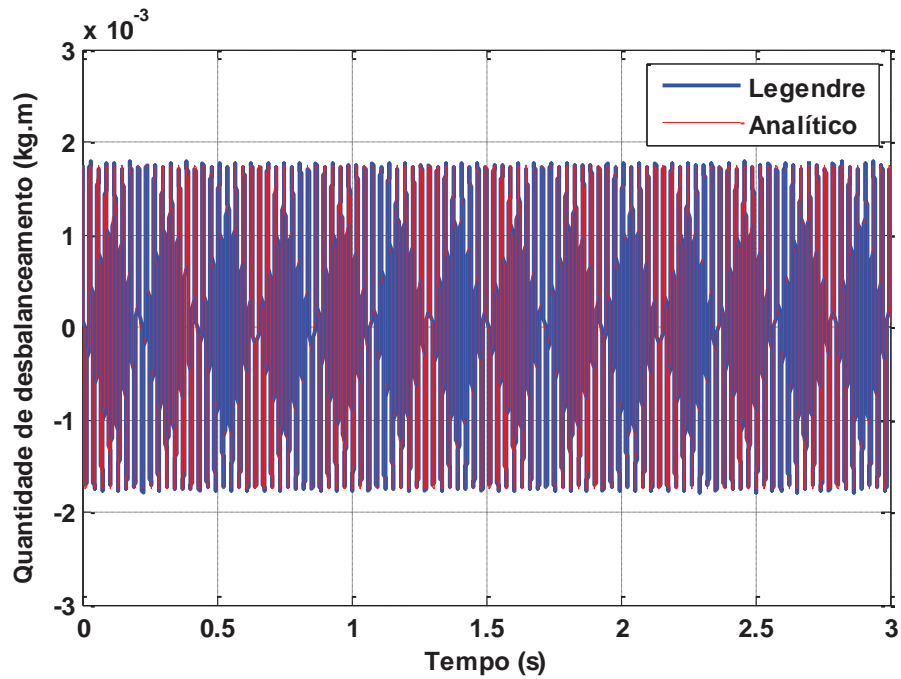
Para a identificação da quantidade de desbalanceamento através dos polinômios de Legendre foram necessários 800 termos do polinômio para as três rotações. Pode-se observar grande qualidade na aproximação da do sinal analítico com o identificado, como mostrado nas Figuras 19, 20 e 21.

Figura 19 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Legendre utilizando estados simulados para rotação de 1600rpm



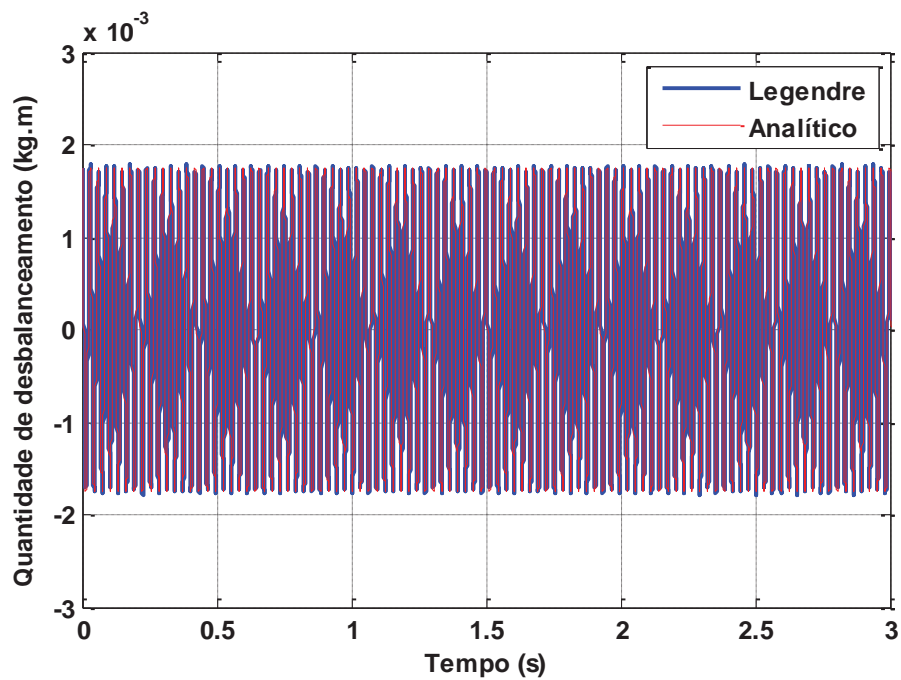
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 20 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Legendre utilizando estados simulados para rotação de 2000rpm



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 21 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Legendre utilizando estados simulados para rotação de 2400rpm

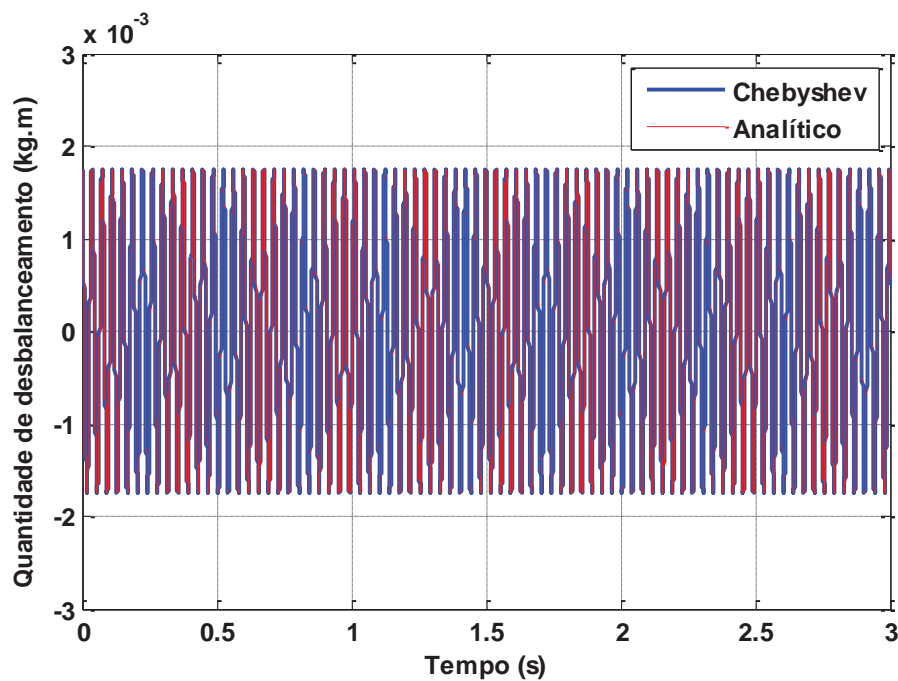


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

8.1.3 Identificação utilizando polinômios de Chebyshev a partir de medidas simuladas

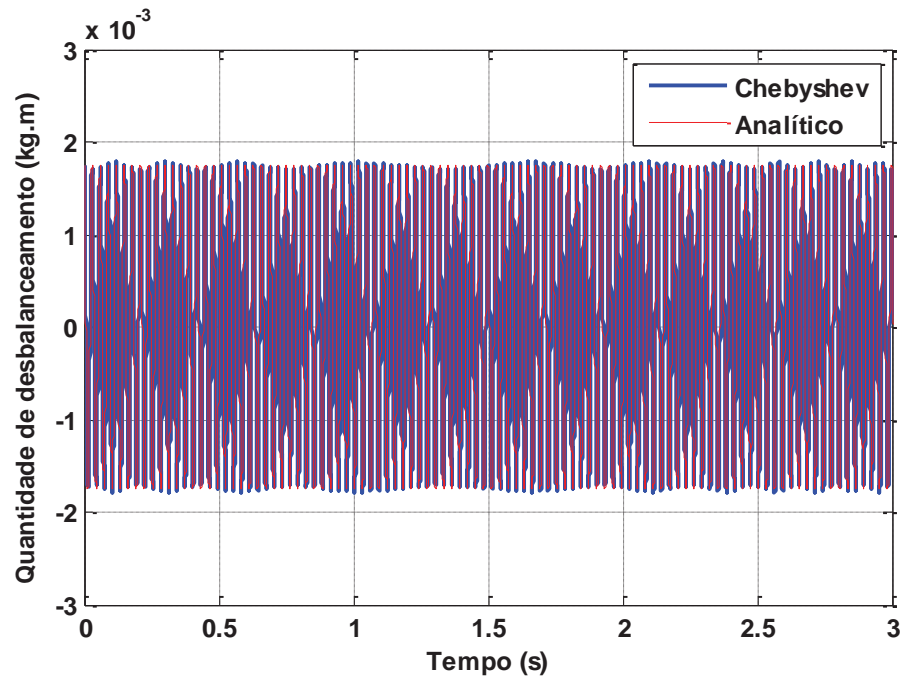
Para a identificação da quantidade de desbalanceamento através dos polinômios de Chebyshev foram necessários 580 termos do polinômio para as três rotações. Pode-se observar grande qualidade na aproximação da do sinal analítico com o identificado, como mostrado nas Figuras 22, 23 e 24.

Figura 22 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Chebyshev utilizando estados simulados para rotação de 1600rpm



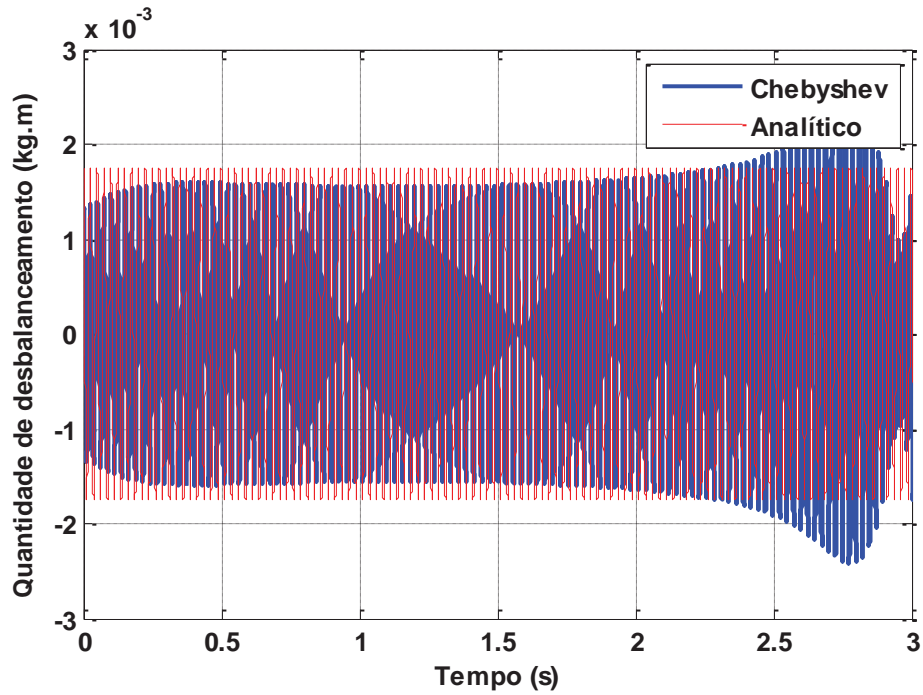
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 23 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Chebyshev utilizando estados simulados para rotação de 2000rpm



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 24 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Chebyshev utilizando estados simulados para rotação de 2400rpm



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Em relação aos resultados obtidos na identificação através dos estados simulados, pode-se observar que os três métodos proporcionaram uma identificação com qualidade. Apenas o método de Chebyshev para a rotação de 2400rpm apresentou certa dispersão.

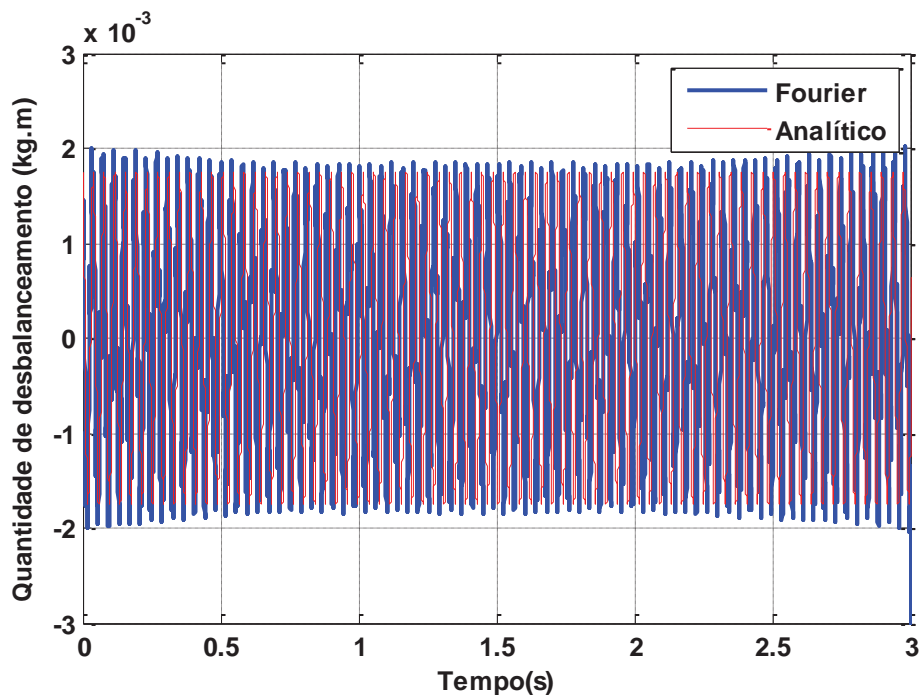
8.2 IDENTIFICAÇÃO DAS FORÇAS ATRAVÉS DA RECONSTRUÇÃO DOS ESTADOS A PARTIR DE MEDIDAS EXPERIMENTAIS

8.2.1 Identificação utilizando séries de Fourier a partir de medidas experimentais

Para a identificação da quantidade de desbalanceamento, através das séries de Fourier, foram necessários 1200 termos da série para as três rotações.

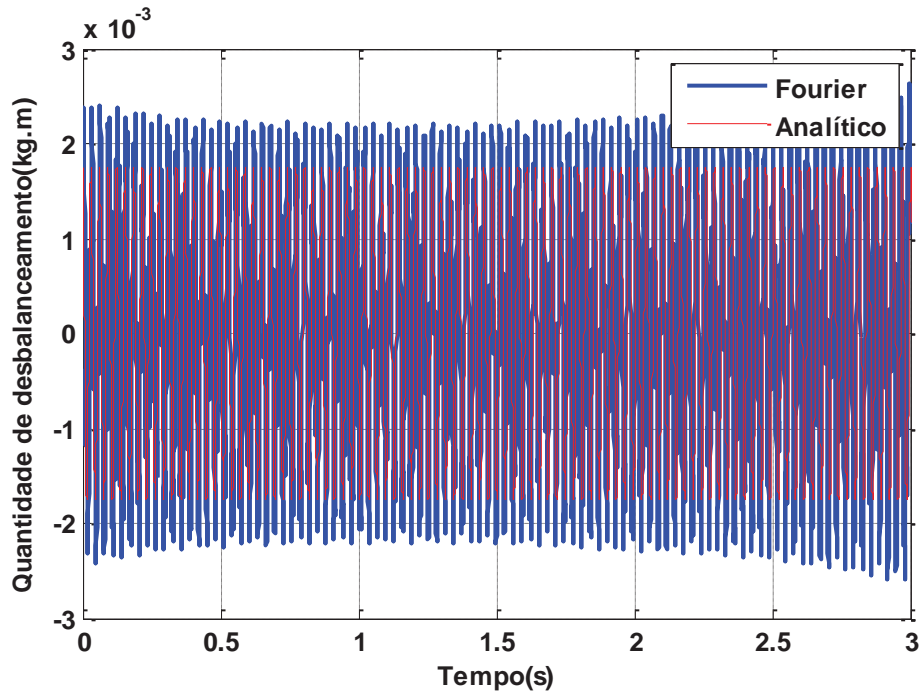
Pode-se observar grande qualidade na aproximação da do sinal analítico com o identificado, como mostrado nas Figuras 25, 26 e 27.

Figura 25 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Fourier utilizando dados experimentais para rotação de 1600rpm



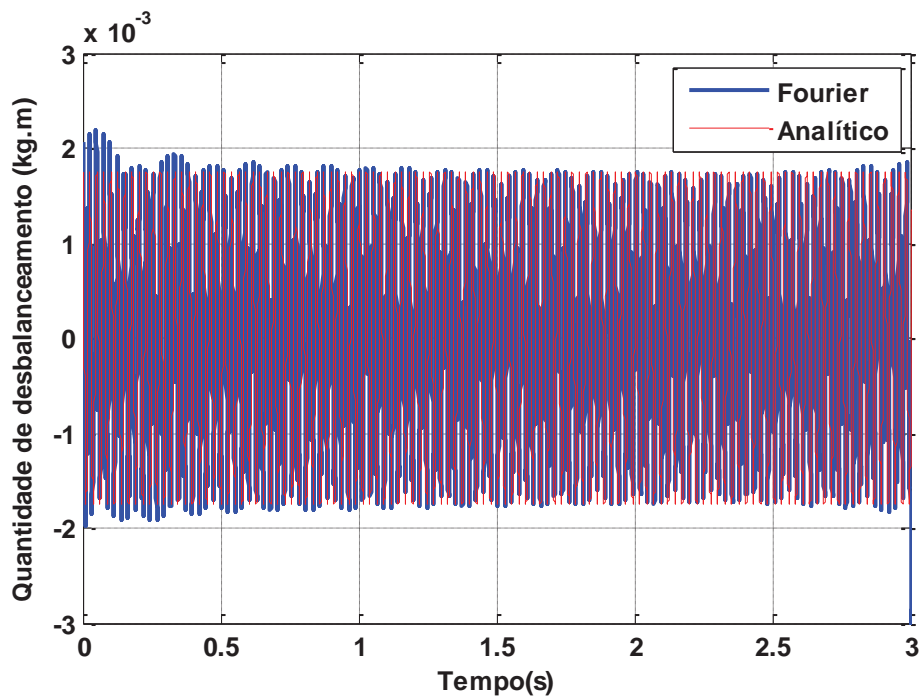
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 26 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Fourier utilizando dados experimentais para rotação de 2000rpm



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 27 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Fourier utilizando dados experimentais para rotação de 2400rpm



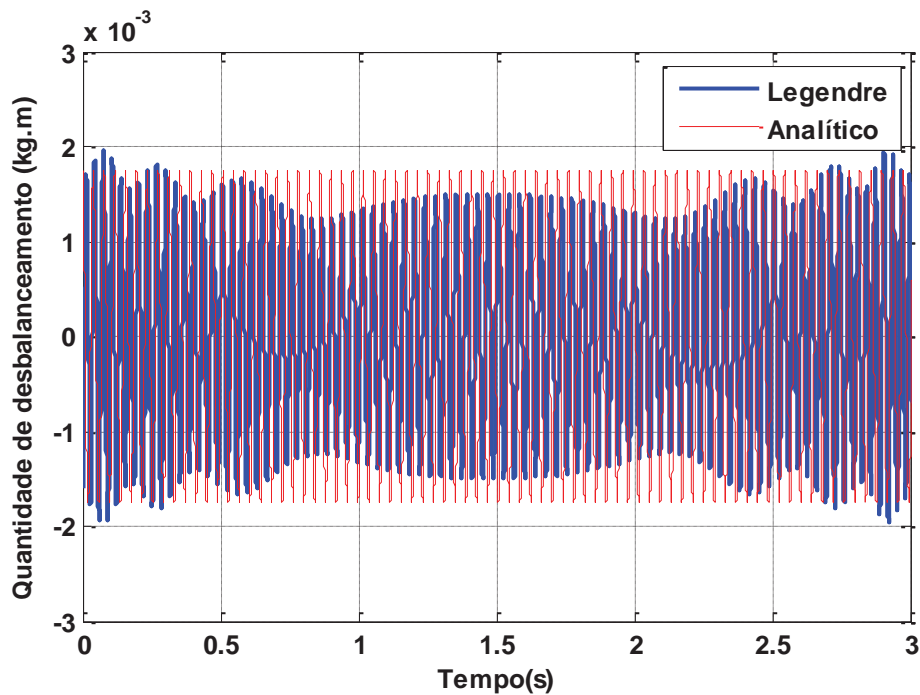
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

8.2.2 Identificação utilizando polinômios de Legendre a partir de medidas experimentais

Para a identificação da quantidade de desbalanceamento, através dos polinômios de Legendre, foram necessários a seguinte quantidade de termos: 1200 termos para 1600rpm; 450 termos para 2000rpm; 550 termos para 2400rpm.

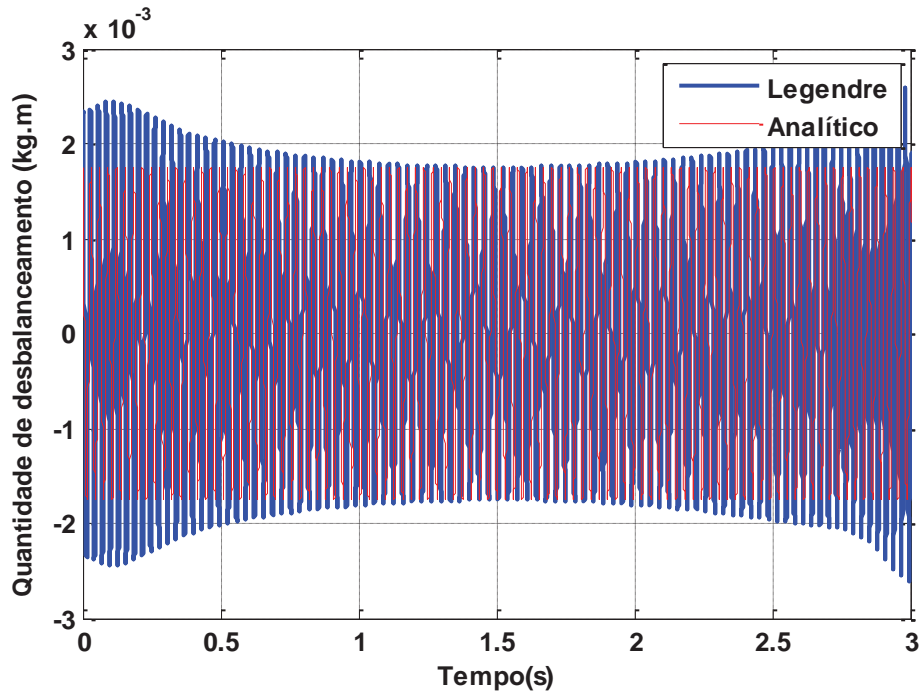
Pode-se observar uma maior dificuldade de identificação para a rotação de 1600rpm. Nas rotações de 2000rpm e 2400rpm observou-se considerável qualidade na aproximação da do sinal analítico com o identificado, embora tenha grande dispersão nas regiões de descontinuidade do sinal, como mostrado nas Figuras 28, 29 e 30.

Figura 28 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Legendre utilizando dados experimentais para rotação de 1600rpm



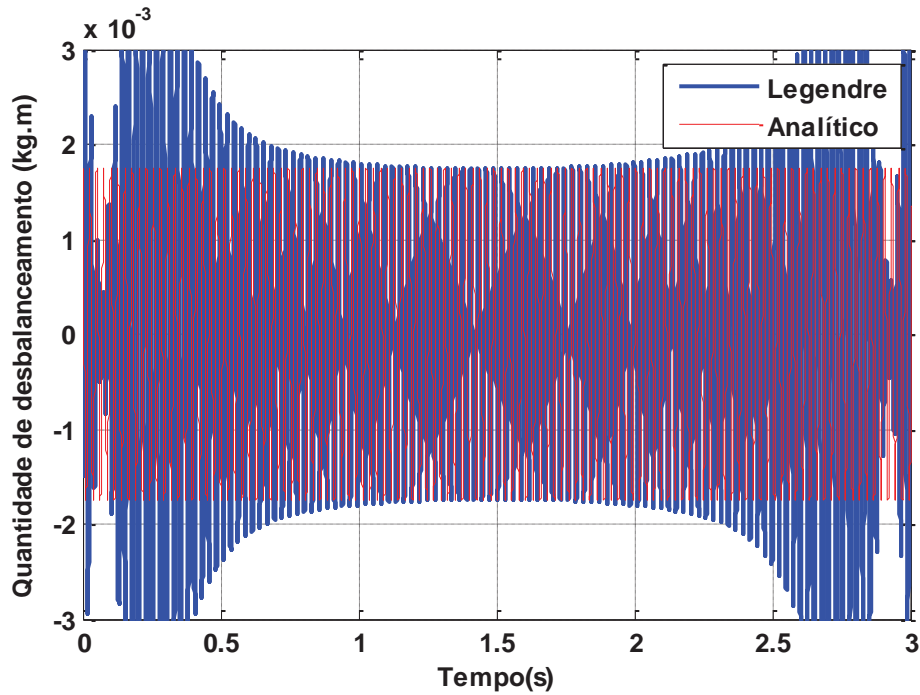
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 29 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Legendre utilizando dados experimentais para rotação de 2000rpm



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 30 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Legendre utilizando dados experimentais para rotação de 2400rpm



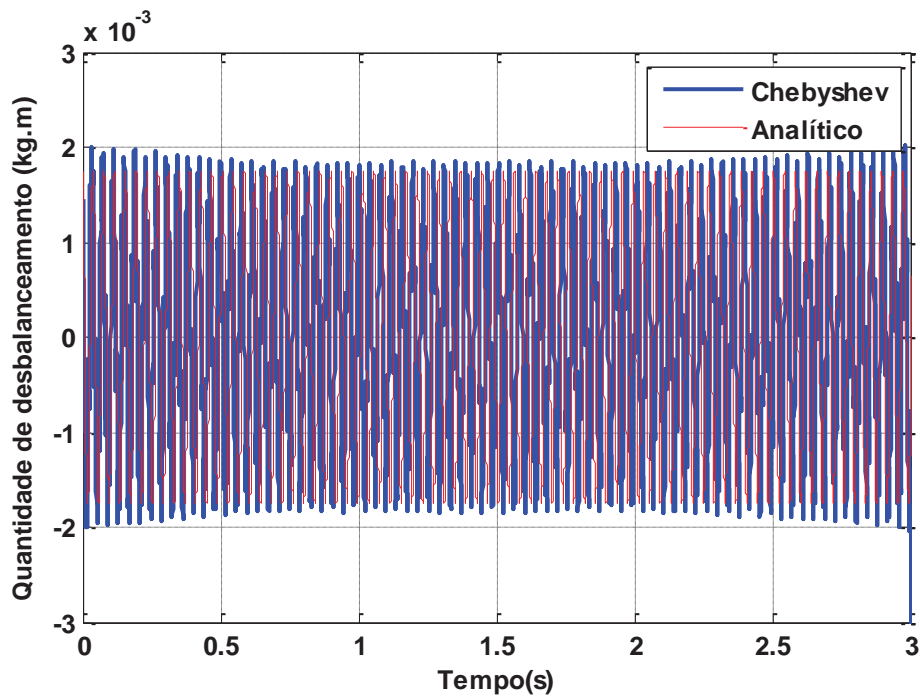
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

8.2.3 Identificação utilizando polinômios de Chebyshev a partir de medidas experimentais

Para a identificação da quantidade de desbalanceamento, através dos polinômios de Chebyshev, foram necessários a seguinte quantidade de termos: 1220 termos para 1600rpm; 480 termos para 2000rpm; 580 termos para 2400rpm.

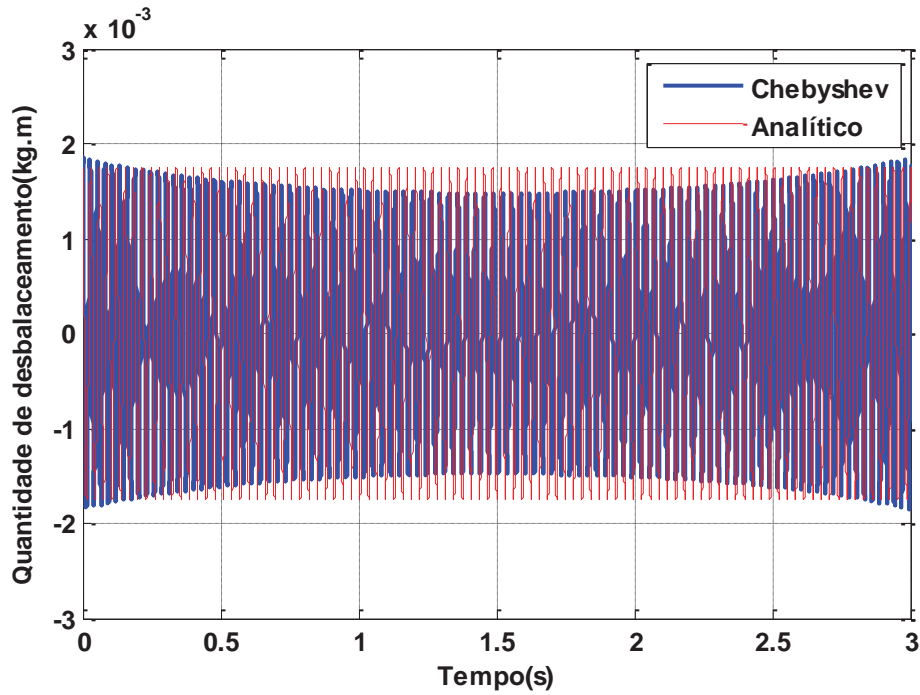
Pode-se observar considerável qualidade na aproximação da do sinal analítico com o identificado, mesmo com certa dispersão nas regiões de descontinuidade do sinal, como mostrado nas Figuras 31, 32 e 33.

Figura 31 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Chebyshev utilizando dados experimentais para rotação de 1600rpm



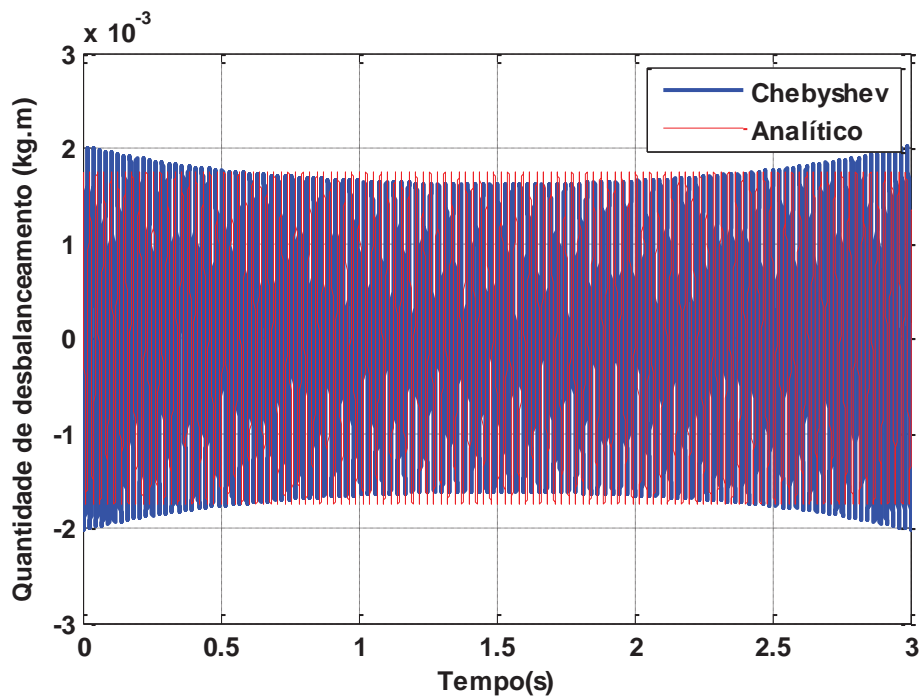
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 32 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Chebyshev utilizando dados experimentais para rotação de 2000rpm



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 33 – Comparação da quantidade de desbalanceamento analítica e identificada através de Chebyshev utilizando dados experimentais para rotação de 2400rpm



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

8 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma metodologia de estimativa de rigidez e amortecimento de mancais e identificação de forças de desbalanceamento para um sistema rotativo.

A estimativa de rigidez e amortecimento dos mancais utilizou dois métodos de otimização: algoritmo genético e quase-Newton. O uso híbrido dos métodos de otimização conciliou a dispensabilidade de estimativa inicial e amplo espaço de busca do algoritmo genético com a melhor convergência e menor tempo de processamento do método quase-Newton.

Embora os valores de rigidez e amortecimento possam não ser iguais ao do sistema, a combinação entre eles resultou na boa qualidade de reconstrução dos estados e identificação das forças de desbalanceamento, mesmo quando submetido a diferentes entradas – devido às diferentes rotações – indicando robustez dos valores encontrados.

As forças de excitação do sistema são identificadas através de diferentes tipos de funções ortogonais: séries de Fourier, polinômios de Legendre e polinômios de Chebyshev. Para aplicação desse método é necessário o conhecimento de todos os estados do sistema, ou seja, o número de graus de liberdade deve ser igual ao número de sensores. Para essa questão, foi utilizada a técnica de observadores de estado.

A minimização do erro na estimativa dos estados foi calculada de duas maneiras: comparação das respostas analíticas com as respostas estimadas pelo observador, Figura 8, e comparação das medidas experimentais dos sensores com as respostas estimadas pelo observador, Figura 9.

A identificação das forças através de dados simulados apresentou erros relativamente pequenos quando comparados com o sinal da força analítica. Apenas a identificação utilizando polinômios de Chebyshev para rotação de 2400rpm apresentou erros consideráveis próximos a região de descontinuidade do sinal.

Embora a identificação das forças através de dados experimentais tenha apresentado erros maiores em relação aos dados simulados, os erros foram relativamente pequenos quando comparados com o sinal da força analítica. A identificação através de ambos polinômios apresentou grandes erros próximos na região de descontinuidade – podendo ser devido ao fenômeno de Gibbs ou da maior dificuldade da reconstrução dos estados por meio do observador de estado – no entanto, não invalidando a eficácia do método.

Com relação a trabalhos futuros, propõe-se otimizar os números de termos da expansão

por funções ortogonais, na identificação das forças, realizados até então pelo método de tentativa e erro e verificar a eficácia dos métodos de observador de estado e identificação de forças para sistemas não-lineares.

REFERÊNCIAS

- ARCO-VERDE, M. M. **Identificação de falhas em sistemas rotativos empregando técnicas não-lineares**. Rio de Janeiro, 2008. 135 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós Graduação e Pesquisa de Engenharia, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. Sistemas de um grau de liberdade: equações governantes. In: _____. **Vibrações mecânicas**. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Cap. 3, p. 81-83.
- BROL, K. A. **Modelagem de estrutura de suporte**. 2011. 119 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.
- CASTRO, H. F. **Análise de mancais hidrodinâmicos em rotores sob instabilidade fluido-induzida**. 2007. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.
- CASTRO, H. F.; CAVALCA, K. L.; CAMARGO, L. W. F.; BACHSCHMID, N. Identification of unbalance forces by metaheuristic search algorithms. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 24, n. 6, p 1785-1798, 2010.
- CHANG, R. Y.; WANG, M. L. The application of shifted Legendre polynomials to time-delay systems and parameter identification. **International Journal of Control**, London, v. 41, p. 403-415, 1984.
- CHEN, C. F.; HSIAO, C. H. Time domain synthesis via Walsh functions. **Proceeding IEE**, New York, v. 122, n. 5, p. 565-570, 1975.
- CHEN, J.; PATTON, R. J. Optimal filtering and robust fault diagnosis of stochastic systems with unknown disturbances. **International Journal of Control**, London, v. 143, p. 31- 36, 1996.
- CHEN, C. F.; TSAY, Y. T.; WU, T. T. Walsh operational matrices for fractional calculus and their application to distributed systems. **Journal of the Franklin Institute**, Elmsford, v. 303, n. 3, p. 267-284, 1977.
- CHOU, J. H.; HORNG, I. R. Shifted Chebyshev series analysis of linear optimal control systems incorporating observers. **International Journal of Control**, London, v. 41, n. 1, p. 129-134, 1985.
- CHOW, E. Y.; WILLSKY, A. S. Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 29, p. 603-614, 1984.
- DIAS, J. S.; BARRETO, J. M. Secretaria de Ciência, Tecnologia e Inovação da Marinha. Algoritmo genético: inspiração biológica na solução de problemas - uma Introdução. **Pesquisa Naval**, Rio de Janeiro, v. 11, n. 1, p. 105-128, 1998.

GERTLER, J. J. Survey of model-based failure detection and isolation in complex plants. **IEEE Control Systems Magazine**, Piscataway, v. 8, p. 3-11, 1988.

HENNING, R.; INGOLSTAD, A. G. A practical investigation to solve the inverse problem of crack identification through vibration measurements. **International Journal for Computer-Aided Engineering and Software**, Bingley, v. 23, n. 1, p. 32-56, 2006.

HORNBECK, R. W. **Numerical methods**. New York: Prentice-Hall, 1975.

KOROISHI, E. H. **Diagnose de falhas em sistemas rotativos com excitações desconhecidas, através da metodologia dos observadores de estado**. 2009. 156 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

KRÄMER, E. **Dynamics of rotors and foundations**. New York: Springer-Verlag, 1993. 383 p.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics prediction in engineering**. 2. ed. New York: John Wiley and Sons, 1997. 254 p.

LEMOS, G. F. **Detecção de falhas via observadores de estado em sistemas rotativos, considerando-se suas fundações**. 2004. 126 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004.

LINDEN, R. **Algoritmos genéticos: uma importante ferramenta da inteligência computacional**. Rio de Janeiro: Brasport, 2006. 348 p.

LUENBERGER, D. G. Observing the state of a linear system. **IEEE Transactions on Military Electronics**, Piscataway, v. 8, p. 74-80, 1964.

MELO, G. P. **Detecção e localização de falhas via observadores de estado de ordem reduzida**. 1998. 125 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

MOHAMED G.; ASHRAF O.; GAMAL E. B. Optimal vibration control for structural-acoustic coupling system. **Journal of Vibration and Control**, 19:14–29, 2007.

MOHAN, B. M.; DATTA, K. B. Analysis of time-delay systems via shifted Chebyshev polynomials of the first and second kinds. **International Journal of Systems Science**, Hants, v. 19, n. 9, p. 1843-1851, 1988.

MORAIS, T. S. **Diagnóstico de falhas via observadores de estado com excitações desconhecidas, identificadas via funções ortogonais**. 2006. 115 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

MORAIS, T. S.; HAGOPIAN, J.; DER, S. V. Jr.; MAHFOUD, J. Optimization of unbalance

distribution in rotating machinery with localized non linearity. **Mechanism and Machine Theory**, Elmsford, v. 72, p. 60-70, 2014.

NELSON, H. D.; MCVAUGH, J. M. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. **ASME Journal of Engineering for Industry**, Elmsford, v. 98, n. 2, p. 593-600, 1976.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 2002. 809 p.

OLIVEIRA, C. A. M. **Projeto de observadores de estado utilizando algoritmos genéticos**. 2014. 92 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Moçoró, 2014.

PACHECO, M. A. C. **Algoritmos genéticos: princípios e aplicações**. Faculdade de Engenharia Elétrica. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1999. Disponível em: <<http://www2.ica.ele.puc-rio.br/Downloads/38/CE-Apostila-Comp-Evol.pdf>>. Acesso em: 27 jun. 2014.

PACHECO, R. P. **Identificação de sistemas mecânicos através de métodos no domínio do tempo**. 2001. 127 f. Tese (Doutorado em Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2001.

PARASKEVOPOULOS, P. N.; KEKKERIS, G. T. Output sensitivity analysis using orthogonal functions. **International Journal of Control**, London, v. 40, n. 4, p. 763-772. 1984.

PINTO, A. K.; XAVIER, J. A. N. **Manutenção: função estratégica**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2001. 287 p.

RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. **Otimização contínua: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 271 p.

RICH, J.; HEYDT, G. T. Parameter estimation using an orthogonal series expansion. **Electric Machines & Power Systems**, Washington, v. 28, n. 8, p. 761 – 777, 2000.

ROCHA, R. O. **Modelagem e simulação computacional em dinâmica de rotores via métodos de elementos finitos**. 1992. 165 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós Graduação e Pesquisa de Engenharia, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1992.

SANTOS, K. A. C. **Técnica de identificação de parâmetros no domínio do tempo utilizando funções ortogonais**. 2004. 119 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004.

SILVA, C. P. **Otimização de controlador lqr para conversor Buck usando algoritmos genéticos**. Departamento de Engenharia Elétrica. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: <http://rica.ele.puc-rio.br/media/Revista_rica_n10_a2.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2015.

SIMÕES, R. C.; STEFFEN JR., V. Optimization techniques for fault identification in rotor dynamics. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, COBEM, 17, 2003, São Paulo. **Anais...** São Paulo: [s.n.], 2003.

SHANNO, D. F. Conditioning of quase-Newton methods for function minimization. **Mathematics Computation**, Providence, v. 24, p. 647–564, 1970. Disponível em: < http://www.ipgp.fr/~tarantola/exercices/chapter_04/SquareRoot/PDFS/Shanno.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2015.

SPIEGEL, M. R. **Análise de Fourier**. São Paulo: McGraw-Hill, Coleção Schaum, 1976. 249 p.

SRINIVAS, M.; PATNAIK, L.M. Genetic algorithm: a survey. **Computer**, Long Beach, v. 27, n. 6, p. 17-26, 1994. Disponível em: < <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=294849> >. Acesso em: 29 jun. 2015.

TRENDAFILOVA, I.; LENAERTS, V.; KERSCHEN, G.; GOLINVAL, J.C.; BRUSSEL, H. V.; HEYLEN, W. **Detection, localization and identification of nonlinearities in structural dynamics**. Disponível em: < http://www-isma-saacbe.mech.kuleuven.be/publications/PMA_MOD_publications/ISMA25/p431p438.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2015.

ZHANG, J.; MA W.; LIN, J.; MA, L.; JIA, X. Fault diagnosis approach for rotating machinery based on dynamic model and computational intelligence. **Measurement**, Amsterdam, v. 59, p. 73-87, 2015.