

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

**Estudo do fenômeno de decaimento  
de energia média do Bilhar *Stadium*  
dependente do tempo**

Matheus Palmero Silva

Rio Claro (SP)

2015

Matheus Palmero Silva

# Estudo do fenômeno de decaimento de energia média do Bilhar *Stadium* dependente do tempo

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC - apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista - Campus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

UNESP - Rio Claro

---

Prof. Dr. Roberto E. Lagos Monaco

UNESP - Rio Claro

---

Prof. Dr. Ricardo Paupitz B. dos Santos

UNESP - Rio Claro

---

Rio Claro (SP)

23 de fevereiro de 2015

517.39 Silva, Matheus Palmero  
S586e       Estudo do fenômeno de decaimento de energia média do  
Bilhar Stadium dependente do tempo / Matheus Palmero  
Silva. - Rio Claro, 2015  
53 f. : il., figs., gráfs.

Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Física) -  
Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e  
Ciências Exatas

Orientador: Edson Denis Leonel

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Caos. 3. Aceleração  
de Fermi. 4. Bilhares. I. Título.

# RESUMO

Nesta monografia estudamos a dinâmica de uma partícula, ou de forma equivalente, um ensemble de partículas não interagentes confinadas no interior de um bilhar *stadium* com fronteiras oscilantes. Nosso principal objetivo é investigar propriedades caóticas e estatísticas que esta dinâmica oferece. É conhecido na literatura [**A. Loskutov, A. Ryabov, J. Stat. Phys. vol. 108, pp. 995. (2002)**] que, para determinadas combinações dos parâmetros de controle do sistema, a dinâmica da partícula apresenta o fenômeno de crescimento de energia, conhecido como aceleração de Fermi. Entretanto, devido a uma ressonância entre o período de rotação ao redor dos pontos fixos, presentes no espaço de fase, e o período de oscilação da fronteira do bilhar, a dinâmica da partícula apresenta um fenômeno oposto à aceleração de Fermi, ou seja um decaimento de energia. A caracterização deste decaimento de energia e o entendimento da influência da velocidade de ressonância para este sistema são os pontos principais deste estudo. Apresentamos uma série de resultados analíticos e numéricos, onde evidenciamos que o decaimento de energia está diretamente ligado à velocidade de ressonância juntamente com a influência de órbitas em regime de *stickiness*.

# ABSTRACT

In this monography we study the dynamics of a particle, or equivalently, an ensemble of non-interacting particles confined inside a stadium billiard with oscillating boundaries. Our main goal is to investigate chaotic and statistical properties of such dynamics. As is known in literature [**A. Loskutov, A. Ryabov, J. Stat. Phys. vol. 108, pp. 995. (2002)**], for a certain combination of control parameters the particle's dynamics shows the phenomenon of energy increase, known as Fermi acceleration. However, due to a resonance between a period of rotation around the fixed points in the phase space, and a period of external boundary perturbation, we can observe a opposite phenomenon of Fermi acceleration, in other words a decay of energy. The characterization for this decay of energy and an understanding the influence of the resonance velocity for this system are our goals in this study. We present several analytical and numerical results evidenciating that decay of energy is directly connected to the resonance velocity together with the sticky orbits influence.

# AGRADECIMENTOS

A gratidão é algo realmente interessante, pois nos faz meditar sobre algo tão puro, mas ao mesmo tempo sobre elementos completamente intrínsecos ao seu próprio eu.

Sou extremamente grato a infinidade de fatores que me trouxeram exatamente onde estou agora. Agradeço a Deus, ou qualquer que seja o Seu nome, pois acredito que foi Ele quem alinhou todos estes fatores para a minha vida.

Agradeço a meu pai e a minha mãe, pelo constante amor e paciência. E agradeço também a toda minha família pela confiança e força que sempre me passam. Sem vocês estaria perdido no mar de caos.

Agradeço muito a CREW, que para mim é muito mais que um grupo de amigos, é uma família incrível onde todos são irmãos que nunca tive. Gosto de pensar que somos um bando de filósofos inconsequentes, que amam a vida, mas estão em uma constante busca pela sabedoria, para vive-la da melhor maneira possível.

Agradeço a minhas amigas, minhas meninas, que sempre estão dispostas às minhas conversas e filosofias de vida de um jeito atencioso e carinhoso.

Agradeço ao meu orientador Edson Denis Leonel pela extrema confiança que tem em mim e por ser o entusiasta que é, sempre disposto a discutir dúvidas e ideias, nos presenteando com seus ensinamentos. Agradeço ao meu amigo e co-orientador André Luís Prando Livorati pela constante ajuda e contribuição aos meus estudos em geral. E agradeço também ao meu orientador do estágio de pesquisa no exterior Professor Carl Dettmann, por disponibilizar uma grande experiência em mais uma jornada que passei durante esta graduação.

Agradeço também, em um contexto um tanto quanto curioso, a Jeffrey Jacob Abrams e Yoshihiro Togashi, pois sei que a base do meu pensamento filosófico e científico foi construída a partir das obras destes e de outros gênios, que conseguem transformar entretenimento em puro ensinamento para a vida.

Agradeço a School of Mathematics, da University of Bristol, e o Departamento de Física, da UNESP de Rio Claro, pelo acesso e uso dos laboratórios e computadores. E agradeço também a FAPESP pelo apoio e suporte financeiro.

Minha gratidão é voltada à todos vocês.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
1.1	Os Bilhares . . . . .	8
1.1.1	O Bilhar <i>Stadium</i> . . . . .	10
1.2	Conceitos importantes . . . . .	11
1.2.1	Aceleração de Fermi . . . . .	11
1.2.2	<i>Stickiness</i> . . . . .	12
1.2.3	Expoente de Lyapunov . . . . .	14
1.3	Estrutura e informações sobre a monografia . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Descrição do Modelo</b>	<b>17</b>
2.1	O Bilhar <i>Stadium</i> Estático . . . . .	17
2.1.1	Descrição analítica de propriedades caóticas . . . . .	19
2.1.2	Linearização do Mapeamento . . . . .	20
2.1.3	Mecanismo Desfocalizador . . . . .	20
2.2	O Bilhar <i>Stadium</i> Dependente do Tempo . . . . .	21
2.2.1	Variáveis Adimensionais . . . . .	24
2.2.2	Velocidade de Ressonância . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Resultados Analíticos</b>	<b>29</b>
3.1	Matriz Jacobiana . . . . .	29
3.1.1	Colisões Sucessivas . . . . .	30
3.1.2	Colisões Indiretas . . . . .	31
3.2	Sistema Linearizado . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>36</b>
4.1	Influência do <i>Stickiness</i> . . . . .	36
4.2	Separação de Ensembles . . . . .	39
4.3	Expoente de Lyapunov . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>47</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos sempre foi uma área de interesse e relevância científica, pois permite modelar matematicamente sistemas presentes em toda natureza. Através do aperfeiçoamento das técnicas de estudo das equações diferenciais, foi possível fazer previsões cada vez mais apuradas sobre o comportamento de sistemas dinâmicos. Este estudo está em constante desenvolvimento, evidências disso são novos métodos e comparações numéricas para a descrição dos sistemas e também sua expansão nas mais diversas áreas da ciência, principalmente em sistemas físicos. A descrição completa da evolução temporal de um sistema físico acontece, em geral, pela resolução de equações diferenciais, geralmente não lineares, e pela análise de suas soluções em função de condições iniciais e parâmetros externos [1].

Os sistemas dinâmicos podem ser subdivididos em sistemas determinísticos e não determinísticos. Sistemas dinâmicos determinísticos são os que uma vez conhecidas as variáveis de estado em um dado instante, seu comportamento em qualquer instante posterior é determinado univocamente. Já sistemas não determinísticos, conhecidos também como estocásticos, são aqueles cuja modelagem, de um modo geral, envolve teorias probabilísticas.

Podemos ainda fazer uma outra subdivisão para os sistemas dinâmicos, considerando como se dá a evolução temporal dos mesmos. Existem, então, sistemas de tempo contínuo e sistemas de tempo discreto. Os sistemas de tempo contínuo são representados por equações diferenciais ordinárias ou parciais. A partir de condições iniciais e parâmetros de controle externos, pode ser determinado o comportamento destes sistemas ao longo do tempo. No caso de sistemas de tempo discreto, usualmente temos uma modelagem através de mapas, nos quais existe uma lei de recorrência relacionando os valores das variáveis dinâmicas no instante posterior com seus valores em instantes anteriores [2].



A abordagem por meio da teoria dos sistemas dinâmicos de tempo discreto e do estudo da evolução temporal dos sistemas físicos admite que esta evolução possa ser descrita por um mapeamento discreto envolvendo um conjunto de variáveis relevantes que caracterizem completamente o sistema, denominado estado. O espaço de fases é, então, o conjunto de todos os estados acessíveis. Ao evoluir, a partir de um estado inicial, o sistema passa por pontos do espaço de fases, o conjunto assim percorrido é denominado órbita. Portanto, o espaço de fases é também o conjunto de todas as órbitas possíveis [3].

A estrutura do espaço de fases caracteriza os comportamentos dinâmicos possíveis do sistema. Esta estrutura pode se apresentar de várias maneiras, em graus distintos de organização e contendo hierarquias de arranjos. Alguns destes sistemas também podem apresentar comportamentos descritos por leis de potência, uma prova de que os mesmos podem ser enquadrados em classes de universalidade.

Na próxima seção, introduziremos a noção de bilhar em um contexto histórico, levando também em consideração a discussão anterior sobre sistemas dinâmicos.

## 1.1 Os Bilhares

Na história contemporânea, a noção de bilhar é conhecida desde que Birkoff [4] propôs o problema do movimento de uma esfera em várias direções colidindo com fronteiras. Algum tempo depois, uma análise mais completa sobre as características deste tipo de dinâmica foi feita por Krylov [5]. Entretanto, graças aos trabalhos de Sinai [6, 7, 8], que desenvolveu teorias matemáticas sobre propriedades dos bilhares com fronteiras dispersivas, uma nova etapa sobre análises de propriedades de bilhares começou. Essas novas idéias levaram a um crescimento intenso de trabalhos físicos e matemáticos sobre propriedades e características de bilhares. Um dos avanços mais consideráveis foi encontrar a solução para a dinâmica de gases, considerando a teoria ergódica de Boltzmann [9].

Em uma definição física, bilhares são sistemas cuja dinâmica consiste de um domínio fechado, com fronteiras suaves, em que uma partícula puntual se move livremente em trajetórias retilíneas com velocidade constante. Ao colidir com a fronteira a partícula é refletida elasticamente, de modo que sua componente normal muda de sinal, enquanto que sua componente tangencial é preservada. Essa condição tem como consequência que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão (lei de reflexão) [10]. Já matematicamente, um bilhar é definido como uma região conectada  $Q \subset R^D$ , com fronteira  $\partial Q \subset R^{D-1}$  a

qual separa  $Q$  de suas componentes. Se o conjunto  $\partial Q$  não depende do tempo, então o sistema não troca energia e/ou velocidade com a partícula e é dito um sistema de fronteira fixa [11, 12]. Por outro lado, se  $\partial Q = \partial Q(t)$ , dizemos então que o sistema apresenta uma dependência temporal [13, 14, 15]. Bilhares com fronteiras oscilantes têm recebido atenção especial ultimamente, no objetivo de tentar compreender melhor o fenômeno introduzido por Enrico Fermi, chamado Aceleração de Fermi, o qual será discutido mais detalhadamente na próxima seção da presente monografia.

Dependendo da geometria da fronteira, podemos dividir os bilhares em dispersivos, convergentes e neutros. Bilhares dispersivos, algumas vezes conhecidos por bilhares de Sinai [6, 7], consistem de componentes dispersivas e neutras. Um dos exemplos mais populares desse tipo de bilhar é o Gás de Lorentz [8, 10, 16]. A análise desse modelo resultou na prova de que a dinâmica puramente determinística pode ser ergódica com propriedades mistas e similar ao movimento Browniano [9]. A fronteira de bilhares convergentes, consiste somente de componentes convergentes ou das mesmas conectadas por retas. Os bilhares propostos por Bunimovich [17, 18] são exemplos disso. Em especial, um deles é o bilhar *stadium*, que é constituído de dois arcos conectados por segmentos de reta paralelas. Para esse bilhar já foi provado que para uma combinação de parâmetros geométricos, ele possui propriedades caóticas e mistas [10]. Na próxima subseção discutiremos somente o bilhar *stadium* e no Capítulo 2, faremos a descrição detalhada do mesmo.

O mecanismo gerador de caos é diferente em bilhares convergentes e dispersivos. Para bilhares divergentes, a própria geometria da fronteira “diverge” a trajetória da partícula, mas no caso convergente, as trajetórias tendem a convergir para um ponto focal após interagirem com a fronteira convergente. Nesses bilhares, o caos aparece, quando o tempo de divergência, ou seja, o tempo gasto pela partícula, depois que ela passou pelo ponto focal até colidir novamente com a fronteira convergente, for maior que o tempo de convergência, que é o tempo gasto entre a colisão com a componente convergente até o ponto focal.

De uma maneira geral, a dinâmica de uma partícula de bilhar, pode ser descrita qualitativamente de três maneiras distintas: (i) completamente integrável, ou seja, regular; (ii) ergódica, e (iii) mista. Um exemplo típico do caso (i) é o bilhar circular [19], cuja integrabilidade vem da conservação do momento angular. O bilhar de Sinai e o bilhar *stadium* de Bunimovich, são exemplos do caso (ii); para esses sistemas a evolução temporal de uma única condição inicial, para combinações apropriadas de parâmetros de controle, é condição suficiente para preencher o espaço de fases ergodicamente [8, 9, 10, 18]. Finalmente, para o caso (iii), existe um número significativo de sistemas que apresentam

uma característica mista para o espaço de fases, cujos parâmetros de controle possuem diferentes significados físicos. Para esses sistemas observamos um conjunto de ilhas do tipo *Komolgorov-Arnold-Moser* (KAM), geralmente envoltas por um mar de caos e curvas invariantes do tipo *spanning*, separando diferentes regiões do espaço de fases [20, 21, 22]. Atualmente, o estudo de bilhares está presente em vários campos, como mecânica estatística não linear, sistemas hiperbólicos e em diversas áreas experimentais [23 - 29].

### 1.1.1 O Bilhar *Stadium*

O bilhar *stadium* original proposto por Bunimovich [17, 18], consiste basicamente de dois semi círculos, conectados por duas retas paralelas, como mostra a Fig.1.1. Existem ainda diversas maneiras de descrever a fronteira com qual as duas retas paralelas se conectam além da forma circular. Podemos descrever essa fronteira de forma elíptica [30, 31], parabólica [32] e ainda em uma forma cilíndrica avaliada em 3 dimensões [33].

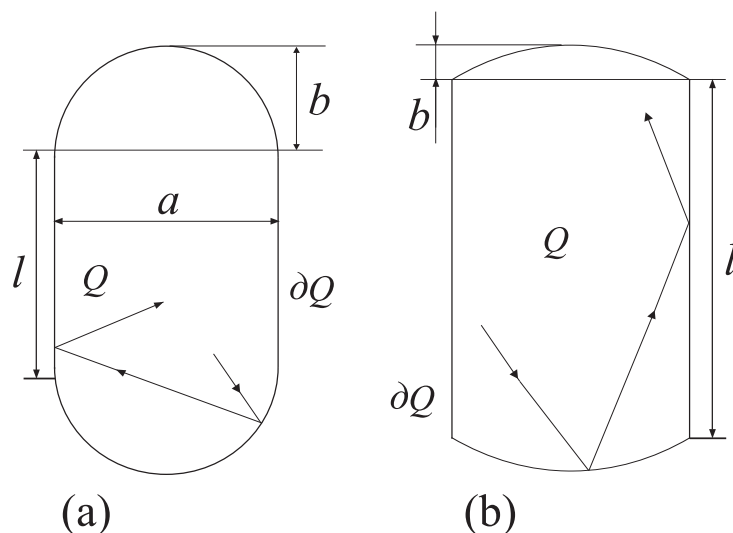


Figura 1.1: Esquema ilustrativo da geometria do bilhar stadium. Em (a) o bilhar original proposto por Bunimovich. Já em (b) um bilhar stadium-like, com fronteiras parabólicas.

Uma propriedade básica do bilhar *stadium* está associada com a sua fronteira de curvatura negativa  $\partial Q^-$ . Assim, como na ótica geométrica, um feixe de trajetórias tem de passar pelo foco de curvatura, logo após uma colisão com a fronteira. Bunimovich mostrou [17], que se houver espaço suficiente no interior do bilhar (região  $Q$ ), o feixe de trajetórias, que antes estava centrado no foco, pode se espalhar antes de colidir novamente com a fronteira. Este processo de espalhamento das trajetórias é chamado de mecanismo de *defocusing* e a ele estão associadas várias propriedades caóticas, como por exemplo, hiperbolicidade e ergodicidade [11].

A dinâmica caótica no bilhar *stadium* pode ser descrita de várias maneiras distintas [30 - 34]. Em particular, nesta monografia, adotamos como padrão a dinâmica proposta por Loskutov et. al [35], a qual consiste em avaliar o bilhar através de mapeamentos não lineares discretos.

## 1.2 Conceitos importantes

Nesta seção introduziremos alguns conceitos importantes no estudo de sistemas caóticos, como aceleração de Fermi, *stickiness* e expoente de Lyapunov. Tanto os resultados analíticos, quanto os numéricos, que serão exibidos nos Capítulos 3 e 4 respectivamente, partem destes conceitos apresentados nas próximas subseções.

### 1.2.1 Aceleração de Fermi

Em 1949 Enrico Fermi [36] forneceu um argumento físico na tentativa de explicar as altas energias dos raios cósmicos que viajam no meio interestelar. Fermi observou, que partículas carregadas interagem com campos magnéticos oscilantes de grandes estruturas presentes em todo espaço, como as próprias galáxias. Desde então a ideia foi estudada em vários contextos e com várias generalizações. Em suas análises, Fermi verificou que, na média, a energia das partículas crescia. Este fenômeno de crescimento de energia foi denominado aceleração de Fermi. O mecanismo citado, que consiste basicamente na repulsão de partícula por intensos campos magnéticos oscilantes, pode ser análogo à colisão física de uma partícula com uma fronteira rígida oscilante.

Descrevemos então a aceleração de Fermi (FA) como um fenômeno em que uma partícula clássica de massa  $m$  adquire energia ilimitada ao colidir com uma fronteira rígida que move-se periodicamente no tempo. Aplicações de FA têm surgido em vários campos de estudos da Física, como Física de plasma [37], astrofísica [38, 39], Física atômica [40], ótica [41, 42] e finalmente em problemas de bilhares com fronteiras dependentes do tempo [35, 43].

Em bilhares, existe uma conjectura sobre o fenômeno de aceleração de Fermi. A conjectura LRA (Loskutov-Ryabov-Akinshin) [31] diz que para bilhares que possuem alguma componente caótica em seu espaço de fases na sua versão estática, a introdução de uma perturbação temporal externa na fronteira é condição suficiente para que o fenômeno de aceleração de Fermi seja observado. Recentemente Leonel e Bunimovich [45] complementaram esta conjectura, confirmando que a presença de órbitas heteroclínicas no espaço de fases da versão estática do bilhar, é suficiente para que aceleração de Fermi seja observada,

quando a dependência temporal na fronteira é introduzida.

Uma vez que sabemos como o fenômeno de aceleração de Fermi ocorre, é natural o surgimento de uma pergunta. “Qual a condição necessária para suprimir esse fenômeno de crescimento ilimitado de energia?”. De fato, a introdução de dissipação na dinâmica dos bilhares tem sido um mecanismo útil para suprimir tal fenômeno. Esta dissipação pode ser introduzida de várias maneiras: *(i)* Colisões inelásticas, [44]; *(ii)* Arrasto viscoso, [45]; *(iii)* Fricção cinética [46]. No presente modelo observamos que a existência de uma velocidade de ressonância separa o regime de crescimento e decrescimento de energia [47], trabalho no qual apresentamos alguns resultados obtidos neste nosso estudo.

### 1.2.2 *Stickiness*

Na literatura científica existem diversos exemplos numéricos que confirmam a existência de um comportamento anômalo de algumas órbitas caóticas, quando elas se aproximam das bordas de ilhas de estabilidade, onde são gastos longos intervalos de tempo nas vizinhanças dessas regiões. As órbitas inicializadas no mar de caos, podem ser aprisionadas por diferentes estruturas de estabilidade, e em determinado momento, escapam desse aprisionamento temporário e continuam visitando diferentes regiões imersas no mar de caos. Tal comportamento “intermitente”, não pode ser atribuído a um toro KAM, uma vez que o mesmo representa uma barreira para órbitas caóticas independentemente do tempo de evolução do sistema. Nesse contexto, definimos toros como sendo curvas invariantes no espaço de fases, onde condições iniciais evoluídas no tempo dadas em cima do toro, permanecem sobre o mesmo, preenchendo uma curva fechada toroidal [48, 49, 50].

As primeiras verificações numéricas da existência deste aprisionamento de órbitas caóticas nas vizinhanças de ilhas de estabilidade, foram realizadas na década de 70 por George Contopoulos [51]. Na década de 80, foi proposto por Mackay, Meiss e Percival [52] a existência de objetos chamados de *cantori*. Esses *cantori*, diferentes dos toros KAM, formariam barreiras parciais presentes no espaço de fases. A existência destes *cantori* tem grande influência sobre o entendimento do transporte de órbitas caóticas no espaço de fases, e teve como consequência principal, uma reformulação topológica dos estudos sobre espaços de fases. Quando a dinâmica é evoluída, a passagem através das ilhas de estabilidade se torna complicada, pois o *cantori* mais próximo bloqueia o escape da órbita da fronteira na vizinhança da ilha de estabilidade. Essa órbita bloqueada é aprisionada dentro da área entre o mais próximo *cantori* e a fronteira da ilha de estabilidade. Desta maneira, observamos uma maior densidade de pontos ao redor da ilhas de estabilidade, como mostra a Fig.1.2.

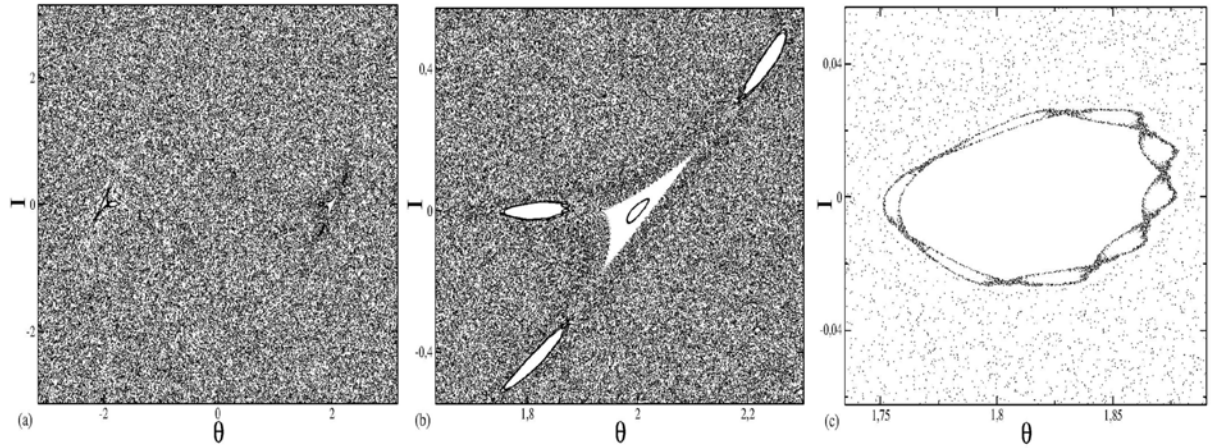


Figura 1.2: *Sucessivas ampliações do espaço de fases para o mapa padrão nas proximidades das ilhas de estabilidade, caracterizando o fenômeno de stickiness. O parâmetro de controle utilizado foi  $K = 6,908743$ .*

No decorrer deste processo, tais órbitas são aprisionadas ou ainda “coladas” nas bordas (*sticky motion*) [53] por verdadeiras quase-armadilhas dinâmicas (*quasi-dynamical traps*) [54] em um intervalo finito de tempo. De acordo com Zaslavsky [55], um dos pioneiros na investigação do fenômeno de *stickiness*, como o aprisionamento das órbitas caóticas ocorre por um instante de tempo finito, não é correto dizer que existe aprisionamento de órbitas em armadilhas dinâmicas absolutas (como um *sink*), como é observado para sistemas dissipativos, mas sim em quase-armadilhas dinâmicas. Na Fig.1.2 temos várias ampliações em torno das ilhas de estabilidade de um espaço de fases para o mapa padrão<sup>1</sup> [49, 50] com o parâmetro de controle  $K = 6,908743$ , onde encontramos os *cantori* e suas cadeias de ilhas correlacionadas. Podemos observar especialmente na Fig.1.2 (b), uma maior densidade de pontos em torno das três ilhas, caracterizando o aprisionamento de órbitas pelo fenômeno de *stickiness*.

De forma simplificada, o aprisionamento de órbitas caóticas pode ser definido como longos e sucessivos intervalos de tempo em que a dinâmica do sistema, torna-se “menos

<sup>1</sup>O mapa padrão é escrito como

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \text{ mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (1.1)$$

onde  $K$  é o parâmetro de controle. Para  $K \geq 0,9716\dots$ , as curvas invariantes *spanning* são destruídas e o caos difunde no espaço de fases. Para  $K < 0,9716\dots$ , as curvas invariantes *spanning* existem no espaço de fases e impedem a difusão ilimitada da ação.

caótica”. Ainda, durante o aprisionamento, as órbitas tendem a apresentar um movimento “quase regular”, ou em determinados casos, até regular [54, 55], fazendo contraste com sua dinâmica caótica quando elas estão longe das ilhas de estabilidade. Tal comportamento pode ser equivalente com o que conhecemos por processo intermitente [48], onde existe uma alternância entre períodos de movimento regular e caótico. Algumas aplicações destes fenômenos de aprisionamento de órbitas por estruturas regulares podem ser encontradas em astronomia [56], em mecânica dos fluidos [57] e até mesmo em biologia [58].

### 1.2.3 Expoente de Lyapunov

Variando parâmetros de controle, encontramos regiões do espaço de fases em que trajetórias apresentam comportamento caótico. O princípio básico de obtenção dos expoentes de Lyapunov consiste em verificar se duas trajetórias vizinhas divergem exponencialmente uma da outra no decorrer do tempo. Se as trajetórias permanecem próximas durante todo o tempo, então elas não são sensíveis as condições iniciais e o expoente de Lyapunov  $\lambda < 0$ , conseqüentemente a órbita é considerada regular. Mas, se as trajetórias divergem exponencialmente com o tempo, então  $\lambda > 0$ , e quando isso ocorre as trajetórias são classificadas como caóticas. Se um sistema é caótico, então pelo menos um expoente de Lyapunov é positivo. Para sistemas conservativos bidimensionais, os dois expoentes são iguais em módulo, porém com sinais invertidos, fazendo com que a soma seja igual a zero. Já para sistemas dissipativos os expoentes são diferentes, de modo que a soma seja maior que zero [59].

Os expoentes são definidos [60] como:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |\Lambda_j^i| \quad j = 1, 2 \quad , \quad (1.2)$$

onde  $\Lambda_j^i$ , são os autovalores da matriz  $M = \prod_{i=1}^n J_i$ . Aqui  $J_i$  é a matriz Jacobiana do mapeamento em questão avaliada ao longo da órbita.

É interessante ressaltar que esta é a definição original do expoente de Lyapunov. Um algoritmo utilizado para calcular o expoente de Lyapunov para mapeamentos bidimensionais é o método proposto por Eckmann e Ruelle [60], o qual é baseado em um processo de triangularização. Entretanto, para mapeamentos com mais dimensões, como o de nosso interesse, a implementação do algoritmo de triangularização é pouco viável. Na literatura existe um método proposto por Alan Wolf [61], em que permite uma estimativa do expoente de Lyapunov utilizando séries matemáticas. Esse algoritmo pode ser implementado em mapeamentos e EDO's n-dimensionais.

### 1.3 Estrutura e informações sobre a monografia

Nesta seção apresentaremos uma discussão sobre a metodologia de trabalho e pesquisa realizada para a conclusão desta monografia e também uma breve introdução dos próximos capítulos.

A presente monografia tem como objetivo investigar propriedades caóticas e estatísticas da dinâmica de uma partícula, ou de forma equivalente, um ensemble de partículas não interagentes, confinadas no interior de um bilhar *stadium* com fronteiras oscilantes. Nossa principal meta é caracterizar o decaimento de velocidade média, conseqüentemente da energia média, e a influência da velocidade de ressonância para este sistema. Nossos estudos partem de uma descrição estática do bilhar *stadium*, passando propriamente pela descrição do bilhar com fronteiras dependentes do tempo e assim, uma análise da velocidade de ressonância presente neste sistema. Uma vez feitas estas descrições, apresentaremos resultados analíticos e numéricos, seguidos de uma conclusão para os nossos estudos.

O desenvolvimento deste trabalho teve início em Abril de 2012 e conclusão em Junho de 2014. Durante este período, nossos estudos foram financiados pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) em uma bolsa de Iniciação Científica. Houve também um estágio internacional com duração de dois meses na School of Mathematics - University of Bristol no Reino Unido, financiado por uma Bolsa de Estágio e Pesquisa no Exterior (BEPE) concedida também pela FAPESP, onde estudamos o escape de partículas do bilhar *stadium* com fronteiras oscilantes, entretanto, estes resultados não foram incluídos na presente monografia.

A metodologia de trabalho e pesquisa foi constituída na leitura e entendimento aprimorado de artigos científicos obtidos de periódicos on-line no site da CAPES, revistas eletrônicas e leitura de livros didáticos que abordam o assunto em geral. Como método de trabalho, foram elaboradas rotinas numéricas em linguagem de programação FORTRAN. Para obtenção de gráficos foram utilizados os programas XMGRACE e GNUPLOT, para a montagem das figuras o programa GIMP e para auxiliar nas expressões analíticas o programa MAPLE, todos pertencentes a plataforma Linux. Todas as simulações e discussões da dinâmica foram realizados no laboratório do *Grupo de Investigação de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear* no Departamento de Física da Unesp de Rio Claro.

Esta monografia foi dividida em cinco capítulos com objetivo de organizar e apresentar o conteúdo de uma forma coerente. O Capítulo 1 é a presente introdução aos assuntos



gerais discutidos. No Capítulo 2, faremos a descrição completa do bilhar *stadium*, tanto na sua versão estática, quanto na versão dependente do tempo. Lá também será apresentada uma descrição da velocidade de ressonância encontrada na versão dependente do tempo do bilhar *stadium*.

No Capítulo 3 apresentaremos os resultados analíticos obtidos para a dinâmica do bilhar *stadium* com fronteiras oscilantes, entre eles o cálculo da matriz Jacobiana considerando os dois tipos de colisões que o sistema pode apresentar. Mostraremos também a construção dos sistemas linearizados associados a esta dinâmica, os quais são necessários para o cálculo do expoente de Lyapunov utilizando o método de Wolf.

No Capítulo 4 apresentaremos os resultados obtidos das simulações numéricas da dinâmica em questão, considerando diferentes casos para a construção dos espaços de fase e para comportamentos de variáveis de interesse. Mostraremos também análises estatísticas via histogramas e argumentos de escala. Finalmente, no Capítulo 5, nossas conclusões e perspectivas fecham a presente monografia.

# Capítulo 2

## Descrição do Modelo

Neste capítulo apresentaremos uma descrição detalhada do modelo utilizado em nossos estudos. O bilhar *stadium* em sua versão estática será descrito mais sucintamente, entretanto discutiremos algumas propriedades caóticas importantes para esta versão, com o intuito de utilizá-las na explicação de alguns fenômenos presentes na versão dependente do tempo. Assim, em seguida, uma descrição mais detalhada do bilhar *stadium* com fronteiras oscilantes será feita, juntamente com uma apresentação de variáveis adimensionais de interesse para este sistema. Será feita também uma explicação sobre a velocidade de ressonância presente no caso dependente do tempo, uma característica fundamental para o entendimento do fenômeno de decaimento de energia.

### 2.1 O Bilhar *Stadium* Estático

Nesta versão do bilhar *stadium*, consideramos o movimento de uma partícula dentro de uma região fechada  $Q$ , que colide elasticamente com fronteiras de curvatura negativa  $\partial Q$ , onde  $\partial Q \neq \partial Q(t)$ . Os parâmetros de controle geométricos  $a$ ,  $b$  e  $l$  também estão ilustrados Fig.1.1, uma vez que a geometria do bilhar continua a mesma.

Para descrever a dinâmica da partícula escolhemos as variáveis  $\psi$  e  $x$ , onde  $\psi$  indica o ângulo que a trajetória da partícula faz com o eixo das ordenadas e  $x$  indica a posição no eixo das abscissas e é modulado em  $a$ . Utilizamos o método *unfolding*, conhecido também como método do desdobramento ou espelhamento para obter as variáveis dinâmicas principais e auxiliares [10, 43]. O método consiste em continuar a trajetória da partícula em um bilhar secundário anexado ao bilhar original. Assim como observado na Fig.2.1, podemos perceber que na primeira colisão com o segmento de reta, se a partícula conseguisse passar direto pela fronteira, ela atingiria o ponto da fronteira parabólica simétrico

em relação ao eixo axial do bilhar, caso sofresse reflexão ao colidir com a fronteira reta.

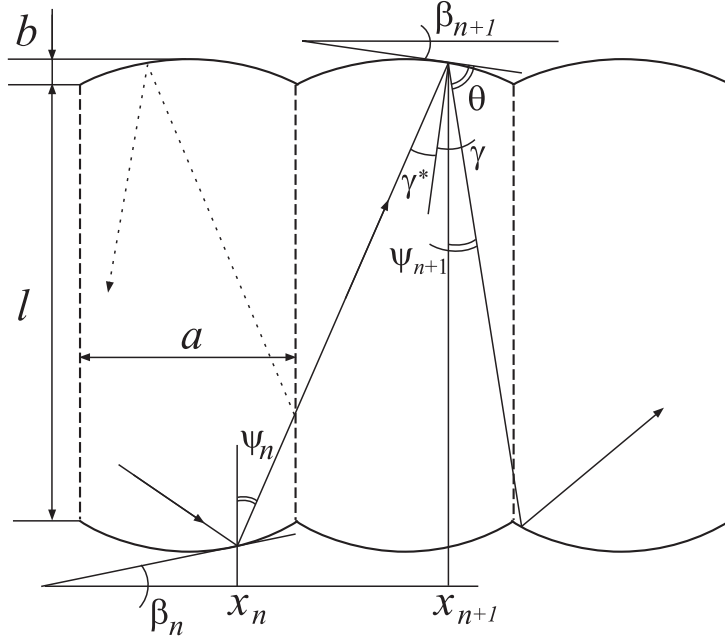


Figura 2.1: Esquema ilustrativo de uma trajetória com o método unfolding, ressaltando as variáveis principais e auxiliares, envolvidas na obtenção do mapeamento.

O movimento da partícula dentro do bilhar é descrito por um mapeamento bidimensional que transforma  $(\psi_n, x_n) \rightarrow (\psi_{n+1}, x_{n+1})$ . Fazendo uma análise de propriedades geométricas, o mapeamento pode ser descrito pelas equações:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + l \tan(\psi_n) \quad \text{mod}(a) \\ \psi_{n+1} = \psi_n - 2\beta(x_{n+1}) \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde  $\beta(x) = \arctan\left(\frac{4bx}{a^2}(x-a)\right)$ , expandindo em série de Taylor e tomando o termo de primeira ordem, temos que  $\beta(x) \approx \frac{4b}{a^2}(2x-a)$ .

Assim, podemos definir uma nova variável adimensional  $\xi = \frac{x}{a}$ , onde  $\xi \in [0, 1)$ , e obtemos o mapeamento para o bilhar *stadium* estático com fronteiras parabólicas [35]

$$T : \begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n + \frac{l}{a} \tan(\psi_n) \quad \text{mod}(1) \\ \psi_{n+1} = \psi_n - \frac{8b}{a}(2\xi_{n+1} - 1) \end{cases}. \quad (2.2)$$

Como o bilhar *stadium* possui um simetria axial, a transformação  $T(\xi_n, \psi_n) = (\xi_{n+1}, \psi_{n+1})$  em relação a essa simetria devem ser  $\xi \rightarrow 1 - \xi$  e  $\psi \rightarrow -\psi$ . Portanto, os resultados obtidos para valores positivos de  $\psi$  descrevem bem toda a dinâmica [62].

### 2.1.1 Descrição analítica de propriedades caóticas

Como já é conhecido na literatura [?, 59], a transição de caos global ocorre quando todos os pontos fixos estáveis se bifurcam e perdem a sua estabilidade, assim somente órbitas instáveis estão presentes no espaço de fases. Portanto para descrever este critério de estabilidade, primeiramente precisamos obter os pontos fixos para o mapeamento dado pela Eq.(2.2). Para mapeamentos discretos, o critério de obtenção de pontos fixos, consiste em analisar as variáveis a cada iteração, essas variáveis devem assumir os mesmos valores a cada iteração. Para mapas que possuem variáveis moduladas, como é o nosso caso, basta adicionarmos um fator  $m$  (número inteiro), que identifica a periodicidade da órbita na variável modulada. Deste modo, obtemos as equações:

$$\begin{cases} \xi_n^* = \xi_{n+1} = \xi_n + m \\ \psi_n^* = \psi_{n+1} = \psi_n \end{cases} . \quad (2.3)$$

Substituindo as expressões de  $\xi_{n+1}$  e de  $\psi_{n+1}$ , de acordo com o mapeamento dado pela Eq.(2.2), obtemos as relações dos pontos fixos

$$\psi_n^* = \tan^{-1} \left( \frac{ma}{l} \right) , \quad (2.4)$$

$$\xi_n^* = \frac{1}{2} + m , \quad (2.5)$$

onde  $m \in Z$  e também representa a quantidade de bilhares espelhados numa trajetória. Por exemplo, na Fig.2.1,  $m = 1$ .

A estabilidade dos pontos fixos de período 1 é obtida através dos auto-valores da matriz Jacobiana, avaliada nos pontos fixos

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \xi_n} & \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \psi_n} \\ \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial \xi_n} & \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial \psi_n} \end{pmatrix} , \quad (2.6)$$

onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \xi_n} &= 1 , & \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \psi_n} &= \frac{l}{a \cos^2(\psi_n^*)} , \\ \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial \xi_n} &= -\frac{16b}{a} , & \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial \psi_n} &= 1 - \frac{16bl}{a^2 \cos^2(\psi_n^*)} . \end{aligned}$$

Como  $Det(J) = 1$ , o mapa preserva área no espaço de fases.

O critério de estabilidade é definido [59] por  $|TrJ| \leq 2$  e ao resolvermos a desigualdade encontramos a seguinte expressão:

$$\frac{4bl}{a^2} > 1 . \quad (2.7)$$

Os auto-valores da matriz Jacobiana são

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\sigma} , \quad (2.8)$$

onde  $\cos(\sigma) = \frac{1}{2}TrJ$ .

Ao variarmos os parâmetros de controle, também há variação dos auto-valores de  $J$ , e conseqüentemente da estabilidade dos pontos fixos. Se a combinação de parâmetros de controle obedecer a inequação dada em (2.7) os pontos fixos são classificados como pontos de sela ou hiperbólicos instáveis e observamos somente caos no espaço de fases. Já se a inequação não for obedecida, os pontos fixos são classificados como elípticos estáveis, e neste caso, aparecem ilhas de estabilidade no espaço de fases.

### 2.1.2 Linearização do Mapeamento

Uma vez obtida a matriz Jacobiana e seus autovalores, é possível fazer a linearização do mapeamento em questão. Esta linearização é importante pois através dela obtemos o número de rotação ao redor do ponto fixo, o qual é extremamente relevante no modelo principal estudado neste trabalho, ou seja, quando é introduzida a perturbação temporal nas fronteiras do bilhar *stadium*. Todo processo de linearização para o modelo estático pode ser encontrado na Ref.[62], iremos apresentar somente as variáveis ação-ângulo e a equação para o número de rotação ao redor do ponto fixo que são dadas por:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \sigma \end{cases} , \quad (2.9)$$

onde  $\sigma$  é o número de rotação ao redor do ponto fixo, dado por:

$$\sigma = \arccos \left( 1 - \frac{8bl}{a^2 \cos^2(\psi_n^*)} \right) , \quad (2.10)$$

onde  $\psi_n^*$  é dado pela equação (2.4).

### 2.1.3 Mecanismo Desfocalizador

Em bilhares que possuem componentes de curvatura negativa, a dinâmica da partícula é caótica se todas essas componentes se aproximarem de um círculo, dentro de

$Q$ . A desigualdade dada pela Eq.(2.7), é aproximadamente a mesma expressão para que o mecanismo desfocalizador funcione no bilhar *stadium* original de Bunimovich, como o da Fig.1.1(a), onde o bilhar *stadium* possui dois semi-círculos como fronteiras convergentes. Para este caso, a expressão para que o mecanismo desfocalizador funcione é:

$$\frac{l}{2R} = \frac{4bl}{a^2} > 1 , \quad (2.11)$$

onde  $R$  é o raio do semi-círculo.

Este mecanismo funciona basicamente quando o tempo de divergência, ou seja, o tempo gasto pela partícula, depois que ela passou pelo ponto focal até colidir novamente com a fronteira convergente, for maior que o tempo de convergência, que é o tempo gasto entre a colisão com a componente convergente até o ponto focal [39, 42]. Neste caso, analisando a média, as trajetórias divergentes prevalecem sobre as convergentes, gerando assim caos. Caso a inequação (2.7), não for obedecida, o mecanismo desfocalizador para de funcionar.

## 2.2 O Bilhar *Stadium* Dependente do Tempo

O bilhar *stadium* com fronteiras oscilantes, modelo principal de nossos estudos, consiste em uma generalização do bilhar original proposto por Bunimovich, sendo assim um bilhar *stadium-like*, ilustrado na Fig.1.1(b). Nele podemos ter, dependendo dos parâmetros de controle  $a, b$  e  $l$ , fronteiras convergentes no formato de semi-círculos inteiros ou somente segmentos de semi-círculos.

A introdução da dependência temporal,  $\partial Q = \partial Q(t)$ , é feita na forma de uma perturbação periódica nas fronteiras convergentes. Assim, a equação da fronteira pode ser escrita como

$$R(t) = R_0 + rf(t) , \quad (2.12)$$

onde  $r \ll R_0$  e  $f(t)$  é uma perturbação do tipo harmônica  $\sin(\omega t)$ . Ao derivarmos, a Eq.(2.12), obtemos a equação da velocidade da fronteira móvel, como sendo

$$\dot{R}(t) = B(t) = B_0 f'(\omega t) , \quad (2.13)$$

onde  $B_0 = r\omega$  é a amplitude e  $\omega$  é a frequência de oscilação.

Consideraremos a aproximação da fronteira circular convergente como sendo fixa, mas no momento da colisão a partícula troca momentum com a fronteira como se a mesma

estivesse se movendo. Esse tipo de simplificação da dinâmica já foi utilizada para outros bilhares e não afeta a não-linearidade do sistema [35, 30, 31]. Para facilitar futuros cálculos, fixaremos  $\omega = 1$ .

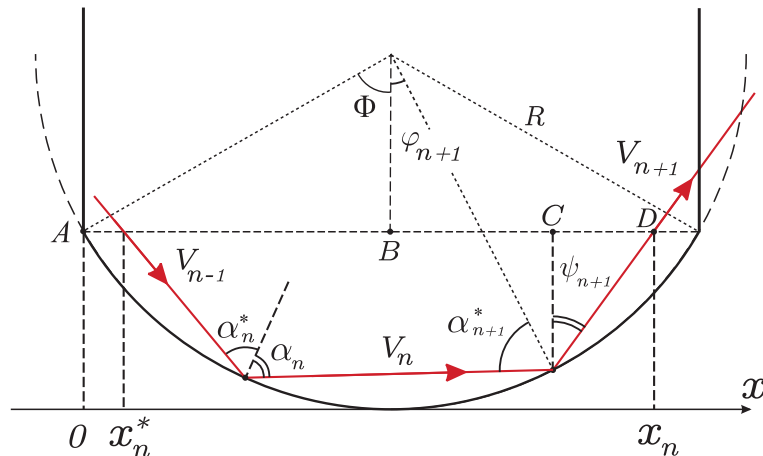


Figura 2.2: Esquema ilustrativo de uma trajetória sofrendo colisões sucessivas com a mesma componente convergente explicitando algumas de suas variáveis dinâmicas.

A Fig.2.2 é um esquema ilustrativo da parte inferior do bilhar *stadium*, onde é possível visualizar o raio de curvatura  $R$  e o ângulo  $\Phi$ , dois parâmetros de controle do sistema que são dados pelas seguintes equações:

$$R = \frac{a^2 + 4b^2}{8b} \quad , \quad \Phi = \arcsin\left(\frac{2a}{R}\right) . \quad (2.14)$$

Se  $a = 2b$ , recuperamos o bilhar *stadium* original proposto por Bunimovich.

Uma vez já descrita a equação da fronteira oscilante e conhecido as constantes provenientes da geometria do bilhar, podemos começar a nos preocupar com a dinâmica da partícula em seu interior. Essa dinâmica é descrita por um mapeamento discreto quadridimensional não-linear, com quatro variáveis principais, sendo duas delas angulares ( $\alpha, \varphi$ ), além do tempo ( $t$ ) e da velocidade ( $V$ ). As condições iniciais angulares são  $\alpha$ , que é o ângulo medido entre a trajetória e a reta normal ao ponto de colisão com a componente convergente e  $\varphi$  que é o ângulo medido entre a vertical ao eixo de simetria do bilhar e a reta normal ao ponto de colisão com a componente convergente. Para facilitar questões de notação, as variáveis indexadas por  $*$  são medidas antes da colisão. Assumimos então, que  $V_n$  e  $t_n$ , são respectivamente a velocidade e o tempo da partícula no instante da  $n$ -ésima colisão, e que no instante inicial  $t = 0$ , a partícula esteja na fronteira convergente do bilhar e o vetor velocidade aponte para dentro do mesmo.

É preciso considerar dois casos distintos de colisões para mapear a dinâmica da partícula: (i) colisões sucessivas e (ii) colisões indiretas. Em (i) consideramos que a partícula, após sofrer uma colisão com a componente convergente, sofre uma próxima colisão com a mesma componente, como pode ser observado na Fig.2.2; já em (ii) consideramos que após uma colisão com a componente convergente, a próxima colisão se dá com a componente oposta. Para este segundo caso, utilizamos o método do desdobramento (*unfolding*) [17, 30], no qual é mais nítido as componentes desse tipo de colisão. A Fig.2.3 é um esquema ilustrativo desse tipo e colisão.

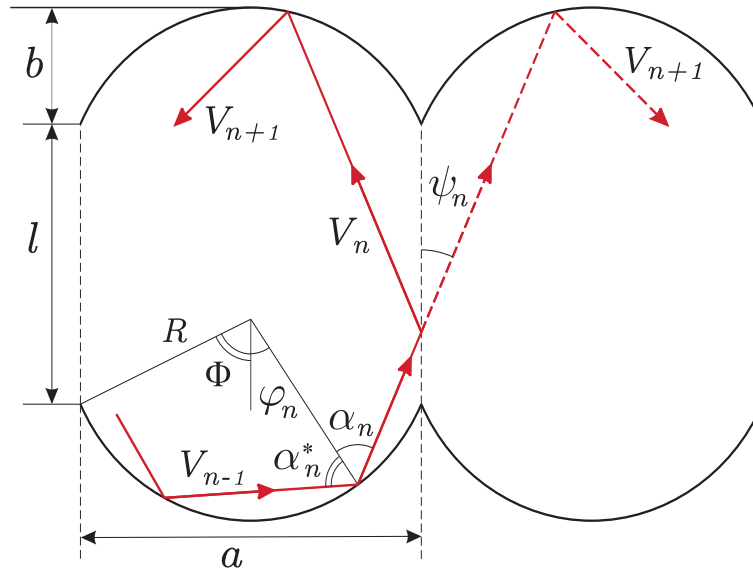


Figura 2.3: Esquema ilustrativo de uma trajetória sofrendo colisões indiretas com as duas componentes convergentes, explicitando algumas variáveis da sua dinâmica. Este é o método *unfolding*.

A obtenção detalhada de todo o mapeamento, a partir da geometria do bilhar *stadium*, pode ser encontrada na Ref.[62].

Primeiramente, consideramos a expressão de recorrência da velocidade, do ângulo  $\alpha$  e também a equação de recorrência da fronteira oscilante,

$$\begin{cases} V_{n+1} = \sqrt{V_n^2 + 4B_n^2 + 4V_n B_n \cos(\alpha_n^*)} \\ \alpha_n = \arcsin\left(\frac{|V_n|}{|V_{n+1}|} \sin(\alpha_n^*)\right) \\ B_n = B_0 \cos(\omega t_n) \end{cases} \quad (2.15)$$

Se  $|\varphi_{n+1}| \leq \Phi$ , temos o caso de colisões sucessivas, e as equações dinâmicas são dadas por:



$$\begin{cases} \alpha_{n+1}^* = \alpha_n \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi} \\ t_{n+1} = t_n + \frac{2R \cos(\alpha_n)}{V_n} \end{cases} . \quad (2.16)$$

Por outro lado, se  $|\varphi_{n+1}| > \Phi$ , temos o caso em que ocorrem colisões indiretas, e as equações da dinâmica serão:

$$\begin{cases} \psi_n = \alpha_n - \varphi_n \\ x_n = \frac{R}{\cos(\psi_n)} [\sin(\alpha_n) + \sin(\Phi - \psi_n)] \\ x_{n+1} = x_n + l \tan(\psi_n) \pmod{a} \\ \alpha_{n+1}^* = \arcsin[\sin(\psi_n + \Phi) - \frac{x_{n+1}}{R} \cos(\psi_n)] \\ \varphi_{n+1} = \psi_n - \alpha_{n+1}^* \\ t_{n+1} = t_n + \frac{l + R[\cos(\varphi_n) + \cos(\varphi_{n+1}) - 2 \cos(\Phi)]}{V_n \cos(\psi_n)} \end{cases} . \quad (2.17)$$

## 2.2.1 Variáveis Adimensionais

Na intenção de facilitar a apresentação dos resultados analíticos que serão exibidos no próximo capítulo, definimos algumas variáveis adimensionais de interesse para o mapeamento do bilhar *stadium* com dependência temporal. A primeira variável adimensional, associada ao tempo, é definida como:

$$\theta_n = \omega t_n . \quad (2.18)$$

Assim, as equações envolvendo a variável tempo  $t$ , tanto para as colisões sucessivas, quanto para as indiretas, devem ser reescritas respectivamente como

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2R\omega \cos(\alpha_n)}{V_n} , \quad (2.19)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{l\omega + R\omega[\cos(\varphi_n) + \cos(\varphi_{n+1}) - 2 \cos(\Phi)]}{V_n \cos(\psi_n)} . \quad (2.20)$$

E também a equação de recorrência da fronteira pode ser reescrita como

$$B_n = B_0 \cos(\theta_n) . \quad (2.21)$$

A outra variável adimensional de interesse, associada a velocidade, é definida por:

$$v_n = \frac{V_n}{\omega r} . \quad (2.22)$$

Assim, a equação da velocidade descrita na primeira linha da Eq.(3.8) pode ser reorganizada de tal maneira que

$$V_{n+1} = \sqrt{V_n^2 + 4B_n^2 + 4V_n B_n \cos(\alpha_n^*)} \Rightarrow \frac{V_{n+1}}{\omega r} = \sqrt{\frac{V_n^2}{(\omega r)^2} + 4\frac{B_n^2}{(\omega r)^2} + 4\frac{V_n B_n}{(\omega r)^2} \cos(\alpha_n^*)} .$$

Utilizando as Eqs. (2.18) e (2.21), temos que a expressão final da velocidade adimensional é dada por:

$$v_{n+1} = \sqrt{v_n^2 + 4 \cos^2(\theta_n) + 4v_n \cos(\theta_n) \cos(\alpha_n^*)} . \quad (2.23)$$

A utilização dessas variáveis adimensionais depende do processo analítico que queremos descrever. No capítulo 3, onde são apresentados os resultados analíticos deste estudo, a variável adimensional  $\theta_n$  mostrou-se útil para a realização dos cálculos dos elementos das matrizes Jacobianas associadas a esta dinâmica.

É interessante ressaltar também que a coordenada angular  $\varphi$  varia entre  $[-\Phi, +\Phi]$  e  $\alpha$  tem valor livre em  $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ , se considerarmos a dinâmica no sentido anti-horário. Então, considerando isso e a simetria axial do bilhar, podemos descrever o domínio de  $\alpha$  no espaço de fases somente de  $[0, +\frac{\pi}{2}]$ , sendo que a outra metade negativa seria espelhada. Ainda, podemos representar suas coordenadas, de acordo com a conveniência, utilizando tanto as coordenadas angulares  $\alpha$  e  $\varphi$ , ou variáveis auxiliares  $\psi$  e  $\xi$ , onde  $\xi$  é a projeção ao longo do eixo horizontal dado por

$$\xi = \frac{1}{2} + \frac{R_0 \sin(\varphi_{n+1})}{a} \pmod{1} \quad (2.24)$$

O mesmo procedimento aplicado a simetria de  $\alpha$  se estende para  $\psi$ . Assim, se considerarmos estas variáveis auxiliares do bilhar, muitas das propriedades caóticas são derivadas da dinâmica com fronteira estática, descrita na seção anterior.

## 2.2.2 Velocidade de Ressonância

Esta subseção é reservada para uma discussão sobre a obtenção da velocidade de ressonância, uma característica muito importante da dinâmica deste bilhar com dependência

temporal das fronteiras. Para descrever a existência desta velocidade de ressonância devemos analisar inicialmente o modelo estático do bilhar *stadium*, o qual discutimos na seção anterior. Tendo em vista esta discussão, ao linearizamos o mapa não perturbado é possível encontrar, de acordo com a variáveis ação-ângulo, o número de rotação que é dado por:

$$\sigma = \arccos \left( 1 - \frac{8bl}{a^2 \cos^2(\psi_n^*)} \right) , \quad (2.25)$$

onde o ponto fixo  $\psi_n^*$  é dado pela equação  $\psi_n^* = \tan^{-1}(\frac{ma}{l})$ , e neste caso  $m$  é o número de *stadiums* espelhados (vide método *unfolding*) que a partícula percorre em uma trajetória, portanto  $m \geq 1$ .

Considerando uma órbita em que a partícula se move ao redor de algum ponto fixo no modelo estático, o tempo entre duas colisões sucessivas é:

$$\tau \approx \frac{l}{\cos(\psi_n^*)V_n} . \quad (2.26)$$

Deste modo, podemos encontrar um período de rotação dessa órbita ao redor do ponto fixo como:

$$T_{rot} = \frac{2\pi\tau}{\sigma} . \quad (2.27)$$

Entretanto, como no modelo de nosso interesse existe a dependência temporal das fronteiras, introduzimos a perturbação externa. Assim encontramos que o período dessa perturbação é dado por:

$$T_{ext} = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (2.28)$$

No regime onde o período de rotação externa é igual ao período de rotação de uma órbita ao redor do ponto fixo, encontramos uma ressonância entre as oscilações da fronteira móvel e a rotação ao redor de um ponto fixo. Sendo assim, igualando as Eqs.(2.27) e (2.28) e substituindo as expressões de  $\sigma$  e  $\tau$  podemos obter a expressão da velocidade de ressonância:

$$V_r = \frac{l}{\cos(\psi_n^*) \arccos \left( 1 - \frac{8bl}{a^2 \cos^2(\psi_n^*)} \right)} . \quad (2.29)$$

É interessante ressaltar que tal ressonância só é observada no bilhar quando este não está sobre a ação do mecanismo desfocalizador, o qual também foi descrito na seção anterior.

O fenômeno de ressonância é típico de sistemas dinâmicos que possuem espaço de fases do tipo misto. Quando uma órbita encontra-se na velocidade igual ou menor do que a velocidade de ressonância, a partícula pode penetrar nas vizinhanças dos pontos fixos permanecendo por algum intervalo de tempo dentro da ilha de estabilidade [?, 55]. Esse tipo de evento acontece pois as curvas invariantes que antes delimitavam a estrutura regular, com a introdução da perturbação, tornaram-se “porosas”, e se comportam de maneira semelhante a uma *stochastic layer* [45]. Como consequência disso, todo o espaço de fases se torna acessível para a partícula.

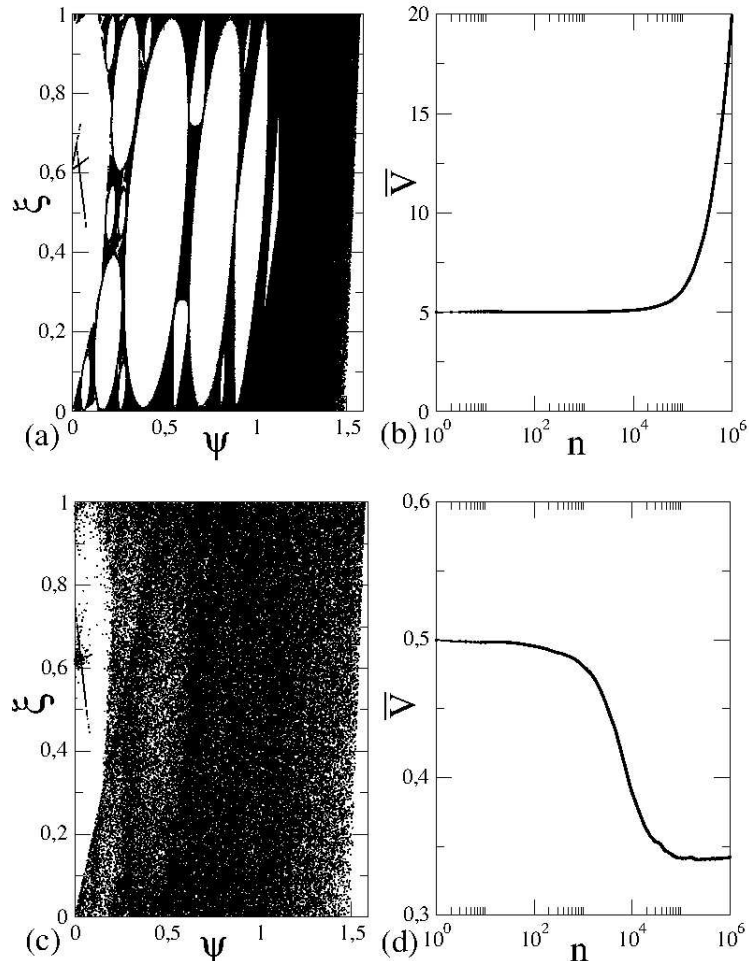


Figura 2.4: Em (a) e (b) temos o espaço de fase e o comportamento da velocidade média, com velocidade inicial  $V_0 = 5,0$ , observamos assim um regime de FA. Temos o mesmo em (c) e (d) mas com  $V_0 = 0,5$  e assim observamos o decaimento da velocidade. Para estas simulações o valor da velocidade de ressonância é  $V_r = 1,2$ .

Para uma combinação específica dos parâmetros geométricos do bilhar, podemos obter um valor numérico para esta velocidade de ressonância. Assim, para os parâmetros  $l = 1$ ,  $a = 0,5$ ,  $b = 0,01$  e  $m = 1$ , temos que  $V_r = 1,2$ . A interpretação da velocidade crítica de ressonância mais interessante para o nosso estudo, é que ela atua como um divisor entre ensembles de partículas rápidas e lentas. Essa separação pode ser evidenciada analisando a Fig.2.4, onde tanto o comportamento de aceleração de Fermi, quanto o decaimento de velocidade é observado.

Portanto, podemos concluir que o comportamento da dinâmica deste sistema é definido pelo valor da velocidade inicial da partícula. Assim, se a velocidade inicial for maior do que a velocidade de ressonância ( $V_0 > V_r$ ), teremos o comportamento predominante da aceleração de Fermi. Já, se a velocidade inicial for menor do que a velocidade de ressonância ( $V_0 < V_r$ ), temos o fenômeno em questão de decaimento de velocidade média e conseqüentemente decaimento de energia do sistema.

# Capítulo 3

## Resultados Analíticos

Este capítulo é dedicado à apresentação dos resultados analíticos obtidos em nosso estudo da dinâmica do bilhar *stadium* com fronteiras oscilantes. O estudo analítico é necessário para a implementação dos métodos numéricos, os quais são utilizados para cálculos estatísticos que nos fornecem dados para o entendimento do comportamento da dinâmica em questão. A obtenção das matrizes Jacobianas associadas a este sistema torna-se extremamente necessária, pois a partir dos elementos destas matrizes, podemos compor o sistema linearizado também associado a dinâmica do bilhar dependente do tempo. Conseqüentemente, a composição do sistema linearizado é necessária na implementação do algoritmo de Wolf para o cálculo dos expoentes de Lyapunov, resultados que serão discutidos no próximo capítulo. Começaremos descrevendo como foram obtidas as matrizes Jacobianas desta dinâmica.

### 3.1 Matriz Jacobiana

A Matriz Jacobiana é uma matriz formada pelas derivadas parciais de primeira ordem das funções em relação as suas coordenadas, de um sistema em questão. No nosso caso, a dinâmica do bilhar *stadium* dependente do tempo é descrita por um mapeamento discreto quadri-dimensional não-linear, com quatro variáveis principais,  $\alpha_n$ ,  $\varphi_n$ ,  $V_n$  e  $t_n$ , dado pelas equações Eqs.(2.16) e (2.17). Sabemos então que a matriz Jacobiana associada a esta dinâmica será uma matriz  $4 \times 4$  escrita como

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \varphi_n} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial t_n} \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \alpha_n} & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_n} & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial t_n} \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \alpha_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \varphi_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial t_n} \\ \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \alpha_n} & \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \varphi_n} & \frac{\partial t_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Entretando, a dinâmica de nosso interesse é descrita por um mapeamento dividido em dois tipos de colisões possíveis dentro do bilhar *stadium*, as colisões sucessivas e as indiretas, conforme discutido no Capítulo 2. Sendo assim, serão construídas duas matrizes Jacobianas, cada uma associada a uma dada colisão. Nas próximas subseções apresentaremos a obtenção destas matizes.

### 3.1.1 Colisões Sucessivas

Considerando primeiramente as colisões sucessivas, teremos as seguintes equações para derivar

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}^* = \arcsin\left(\frac{|\vec{V}_n|}{|\vec{V}_{n+1}|} \sin(\alpha_n^*)\right) \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi} \\ V_{n+1} = \sqrt{V_n^2 + 4B_n^2 + 4V_n B_n \cos(\alpha_n^*)} \\ t_{n+1} = t_n + \frac{2R \cos(\alpha_n)}{V_n} \end{cases} . \quad (3.2)$$

Fazendo todas as respectivas derivadas, os elementos da primeira linha da matriz J são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n} &= \frac{V_n \cos(\alpha_n)}{V_{n+1} \cos(\alpha_{n+1})} + \frac{2V_n^2 B_n \sin^2(\alpha_n)}{V_{n+1}^3 \cos(\alpha_{n+1})} , \\ \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \varphi_n} &= 0 , \\ \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{\sin(\alpha_n)}{V_{n+1} \cos(\alpha_{n+1})} - \frac{V_n \sin(\alpha_n)(V_n + 2B_n \cos(\alpha_n))}{V_{n+1}^3 \cos(\alpha_{n+1})} , \\ \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial t_n} &= \frac{V_n \sin(\alpha_n) 2\omega B_0 \sin(\omega t_n)(2B_n + V_n \cos(\alpha_n))}{V_{n+1}^3 \cos(\alpha_{n+1})} . \end{aligned}$$

Os elementos da segunda são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \alpha_n} &= -2 , \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_n} &= 1 , \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial V_n} &= 0 , \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial t_n} &= 0 . \end{aligned}$$

Os elementos da terceira linha são

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \alpha_n} &= \frac{-2V_n B_n \sin(\alpha_n)}{V_{n+1}}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \varphi_n} &= 0, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{V_n + 2B_n \cos(\alpha_n)}{V_{n+1}}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial t_n} &= \frac{-2\omega B_0 \sin(\omega t_n) \cdot [2B_n + V_n \cos(\alpha_n)]}{V_{n+1}}.\end{aligned}$$

E por fim, os elementos da quarta e última linha da matriz Jacobiana associada as colisões sucessivas dessa dinâmica são

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_{n+1}}{\partial \alpha_n} &= (t_n - t_{n+1}) \tan(\alpha_n), \\ \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \varphi_n} &= 0, \\ \frac{\partial t_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{t_n - t_{n+1}}{V_n}, \\ \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} &= 1.\end{aligned}$$

### 3.1.2 Colisões Indiretas

Como já analisado, a matriz Jacobiana associada as colisões indiretas será como apresentada na Eq.(3.1), mas agora as equações que devemos considerar serão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_n = \alpha_n - \varphi_n \\ x_{n+1} = \frac{R}{\cos(\psi_n)} [\sin(\alpha_n) + \sin(\Phi - \psi_n)] + l \tan(\psi_n) \quad (\text{mod } a) \\ \alpha_{n+1}^* = \arcsin[\sin(\psi_n + \Phi) - \frac{x_{n+1}}{R} \cos(\psi_n)] \\ \varphi_{n+1} = \psi_n - \alpha_{n+1}^* \\ V_{n+1} = \sqrt{V_n^2 + 4B_n^2 + 4V_n B_n \cos(\alpha_n^*)} \\ t_{n+1} = t_n + \frac{l + R[\cos(\varphi_n) + \cos(\varphi_{n+1}) - 2\cos(\Phi)]}{V_n \cos(\psi_n)} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Lembrando que  $\psi_n$  e  $x_{n+1}$  são variáveis auxiliares, por isso não contam como dimensões para o cálculo da matriz Jacobiana. Assim derivando essas novas expressões, os elementos



da primeira linha da matriz associada as colisões indiretas são

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n} &= \frac{2 \cos(\psi_n) \cos(\Phi) - \cos(\alpha_n)}{\cos(\alpha_{n+1})} - \frac{l \cos(\psi_n)}{R \cos(\alpha_{n+1})}, \\ \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \varphi_n} &= \frac{-2 \cos(\psi_n) \cos(\Phi)}{\cos(\alpha_{n+1})} + \frac{l \cos(\psi_n)}{R \cos(\alpha_{n+1})}, \\ \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial V_n} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial t_n} &= 0.\end{aligned}$$

Os elementos da segunda linha são

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \alpha_n} &= 1 - \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n}, \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_n} &= -1 - \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \varphi_n}, \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial v_n} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \theta_n} &= 0.\end{aligned}$$

Analisando as Eqs.(3.3) e (3.2), podemos perceber que a velocidade tem a mesma expressão tanto nas colisões sucessivas, quanto nas indiretas, uma consequência disso é que a terceira linha da matriz Jacobiana será igual para os dois tipos de colisões.

Por fim os elementos da quarta linha são

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_{n+1}}{\partial \alpha_n} &= (t_{n+1} - t_n) \tan(\psi_n) - \frac{R \sin(\varphi_{n+1})}{V_n \cos(\psi_n)} \cdot \left( \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \alpha_n} \right), \\ \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \varphi_n} &= (t_n - t_{n+1}) \tan(\psi_n) + \frac{R}{V_n \cos(\psi_n)} \left[ \sin(\varphi_n) + \sin(\varphi_{n+1}) \cdot \left( \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_n} \right) \right], \\ \frac{\partial t_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{t_n - t_{n+1}}{V_n}, \\ \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} &= 1.\end{aligned}$$

É interessante lembrar que foi definido na subseção 2.2.1, do capítulo anterior, uma variável  $\theta$  adimensional para o tempo. Mesmo que esta variável não apareça explicitamente nas expressões anteriores, sua utilização facilitou os cálculos para obtenção dos elementos de matriz.

## 3.2 Sistema Linearizado

Uma vez obtidos todos os elementos das matrizes Jacobianas associadas a dinâmica do bilhar *stadium* com fronteiras oscilantes, podemos iniciar a construção do sistema linearizado. A construção do sistema linearizado associado às variáveis do mapeamento e a integração do mesmo, são as bases para o cálculo do expoente de Lyapunov segundo o algoritmo de Wolf [61]. Considerando os dois tipos de colisão no interior do bilhar, da mesma forma que temos duas matrizes Jacobianas, teremos dois sistemas linearizados, uma vez que a construção dos mesmos é dada segundo as equações matriciais

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\varphi} \\ \tilde{V} \\ \tilde{t} \end{pmatrix} = J_S \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \\ V \\ t \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\varphi} \\ \tilde{V} \\ \tilde{t} \end{pmatrix} = J_I \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \\ V \\ t \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde  $J_S$  e  $J_I$  são respectivamente as matrizes Jacobianas para colisões sucessivas e indiretas, constituídas na seção anterior.

Considerando inicialmente a matriz Jacobiana para as colisões sucessivas, dada por

$$J_S = \begin{pmatrix} \alpha_{S1} & 0 & \alpha_{S3} & \alpha_{S4} \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ V_{S1} & 0 & V_{S3} & V_{S4} \\ \theta_{S1} & 0 & t_{S3} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Compomos o sistema linearizado associado a este tipo de colisão segundo a Eq.(3.4), de tal forma que

$$\begin{cases} \tilde{\alpha} = \alpha_{S1}\alpha + \alpha_{S3}V + \alpha_{S4}t \\ \tilde{\varphi} = -2\alpha + \varphi \\ \tilde{V} = V_{S1}\alpha + V_{S3}V + V_{S4}t \\ \tilde{t} = t_{S1}\alpha + t_{S3}V + t \end{cases}. \quad (3.7)$$

Onde definimos  $\alpha_{S1} \equiv \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n}$ ,  $\alpha_{S3} \equiv \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial V_n}$ ,  $\alpha_{S4} \equiv \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial t_n}$  e suas expressões calculadas na seção anterior, são dadas por

$$\begin{aligned}
\alpha_{S1} &= \frac{V_n \cos(\alpha_n)}{V_{n+1} \cos(\alpha_{n+1})} + \frac{2V_n^2 B_n \sin^2(\alpha_n)}{V_{n+1}^3 \cos(\alpha_{n+1})}, \\
\alpha_{S3} &= \frac{\sin(\alpha_n)}{V_{n+1} \cos(\alpha_{n+1})} - \frac{V_n \sin(\alpha_n)(V_n + 2B_n \cos(\alpha_n))}{V_{n+1}^3 \cos(\alpha_{n+1})}, \\
\alpha_{S4} &= \frac{V_n \sin(\alpha_n) 2\omega B_0 \sin(\omega t_n)(2B_n + V_n \cos(\alpha_n))}{V_{n+1}^3 \cos(\alpha_{n+1})}.
\end{aligned}$$

Já  $V_{S1} \equiv \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \alpha_n}$ ,  $V_{S3} \equiv \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n}$  e  $V_{S4} \equiv \frac{\partial V_{n+1}}{\partial t_n}$  são dados por

$$\begin{aligned}
V_{S1} &= \frac{-2V_n B_n \sin(\alpha_n)}{V_{n+1}}, \\
V_{S3} &= \frac{V_n + 2B_n \cos(\alpha_n)}{V_{n+1}}, \\
V_{S4} &= \frac{-2\omega B_0 \sin(\omega t_n) \cdot [2B_n + V_n \cos(\alpha_n)]}{V_{n+1}}.
\end{aligned}$$

E por fim,  $t_{S1} \equiv \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \alpha_n}$  e  $t_{S3} \equiv \frac{\partial t_{n+1}}{\partial V_n}$  são

$$\begin{aligned}
t_{S1} &= (t_n - t_{n+1}) \tan(\alpha_n), \\
t_{S3} &= \frac{t_n - t_{n+1}}{V_n}.
\end{aligned}$$

Obtivemos então um dos sistemas linearizados associados a dinâmica do bilhar *stadium* com fronteiras oscilantes. Precisamos agora montar o sistema linearizado levando em consideração as colisões indiretas. Para isso devemos achar a matriz  $J_I$  que satisfaça a equação Eq.(3.5) para o mapeamento descrito na Eq.(3.3). Então, utilizando os resultados previamente obtidos, temos

$$J_I = \begin{pmatrix} \alpha_{I1} & \alpha_{I2} & 0 & 0 \\ \varphi_{I1} & \varphi_{I2} & 0 & 0 \\ V_{I1} & 0 & V_{I3} & V_{I4} \\ t_{I1} & t_{I2} & t_{I3} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Com isso, podemos completar o sistema linearizado, de modo que

$$\begin{cases} \tilde{\alpha} = \alpha_{I1}\alpha + \alpha_{I2}\varphi \\ \tilde{\varphi} = \varphi_{I1}\alpha + \varphi_{I2}\varphi \\ \tilde{V} = V_{I1}\alpha + V_{I3}V + V_{I4}t \\ \tilde{t} = t_{I1}\alpha + t_{I2}\varphi + t_{I3}V + t \end{cases}, \quad (3.9)$$

onde  $\alpha_{I1} \equiv \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n}$  e  $\alpha_{I2} \equiv \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \varphi_n}$  são dados por

$$\begin{aligned}\alpha_{I1} &= \frac{2 \cos(\psi_n) \cos(\Phi) - \cos(\alpha_n)}{\cos(\alpha_{n+1})} - \frac{l \cos(\psi_n)}{R \cos(\alpha_{n+1})}, \\ \alpha_{I2} &= \frac{-2 \cos(\psi_n) \cos(\Phi)}{\cos(\alpha_{n+1})} + \frac{l \cos(\psi_n)}{R \cos(\alpha_{n+1})}.\end{aligned}$$

Já  $\varphi_{I1} \equiv \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \alpha_n}$  e  $\varphi_{I2} \equiv \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_n}$  são

$$\begin{aligned}\varphi_{I1} &= 1 - \alpha_{I1}, \\ \varphi_{I2} &= -1 - \alpha_{I2}.\end{aligned}$$

Como a expressão da velocidade é a mesma tanto nas colisões sucessivas, quanto nas indiretas, temos que  $V_{S1} = V_{I1}$ ,  $V_{S3} = V_{I3}$  e  $V_{S4} = V_{I4}$ .

Por fim, temos que  $t_{I1} \equiv \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \alpha_n}$ ,  $t_{I2} \equiv \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \varphi_n}$  e  $t_{I3} \equiv \frac{\partial t_{n+1}}{\partial V_n}$ , são dados por

$$\begin{aligned}t_{I1} &= (t_{n+1} - t_n) \tan(\psi_n) - \frac{R \sin(\varphi_{n+1})}{V_n \cos(\psi_n)} \cdot \left( \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \alpha_n} \right), \\ t_{I2} &= (t_n - t_{n+1}) \tan(\psi_n) + \frac{R}{V_n \cos(\psi_n)} \left[ \sin(\varphi_n) + \sin(\varphi_{n+1}) \cdot \left( \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_n} \right) \right], \\ t_{I3} &= \frac{t_n - t_{n+1}}{V_n}.\end{aligned}$$

Assim, obtivemos os dois sistemas linearizados associados ao mapeamento da dinâmica do bilhar *stadium* dependente do tempo. Com estes resultados, podemos seguir com a implementação do algoritmo de Wolf para o cálculo dos expoentes de Lyapunov e assim obter o espectro destes expoentes para esta dinâmica. Este e outros resultados numéricos serão apresentados no próximo capítulo.

# Capítulo 4

## Resultados Numéricos

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos por simulações numéricas da dinâmica do bilhar *stadium* com fronteiras oscilantes. Nestes resultados, investigaremos a influência do *stickiness* presente no espaço de fases. Analisaremos esteticamente o comportamento do sistema para valores de velocidade inicial acima e abaixo do valor da velocidade de ressonância. E também mostraremos um estudo preliminar do espectro dos expoentes de Lyapunov para este bilhar utilizando o algoritmo de Wolf. Estes resultados foram divididos nas seguintes seções.

### 4.1 Influência do *Stickiness*

Com o intuito de investigar o fenômeno de decaimento de energia do bilhar *stadium* dependente do tempo, fizemos algumas análises baseadas nos espaços de fases gerados por esta dinâmica. A construção do espaço de fase é feita utilizando as coordenadas angulares  $\varphi$  e  $\alpha$ , ou as variáveis auxiliares  $\psi$  e  $\xi$ , tanto uma quanto a outra descrevem bem a dinâmica deste sistema, conforme a discussão feita no Capítulo 2. Considerando, por questão de notação,  $\varphi = \phi$ , temos que  $\phi$  pertence ao intervalo de  $-\Phi$  a  $+\Phi$ , onde  $\Phi$  é dado por  $\Phi = \arcsin\left(\frac{2a}{R}\right)$  e é da ordem de 0,08, assim o eixo das ordenadas obedecerá estes limites. Já o eixo das abscissas, composto pela coordenada  $\alpha$ , é delimitado pelo intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . A Fig.4.1 é composta por quatro espaços de fases contruídos pelas coordenadas  $\phi$  e  $\alpha$ .

Para os parâmetros de controle utilizados na Fig.4.1, temos que a velocidade de ressonância é  $V_r = 1,2$ . Assim, na Fig.4.1, temos em (a) e em (b), espaços de fases gerados com  $V_0 > V_r$ , em (c), a velocidade inicial é igual a de ressonância e em (d),  $V_0 < V_r$ .

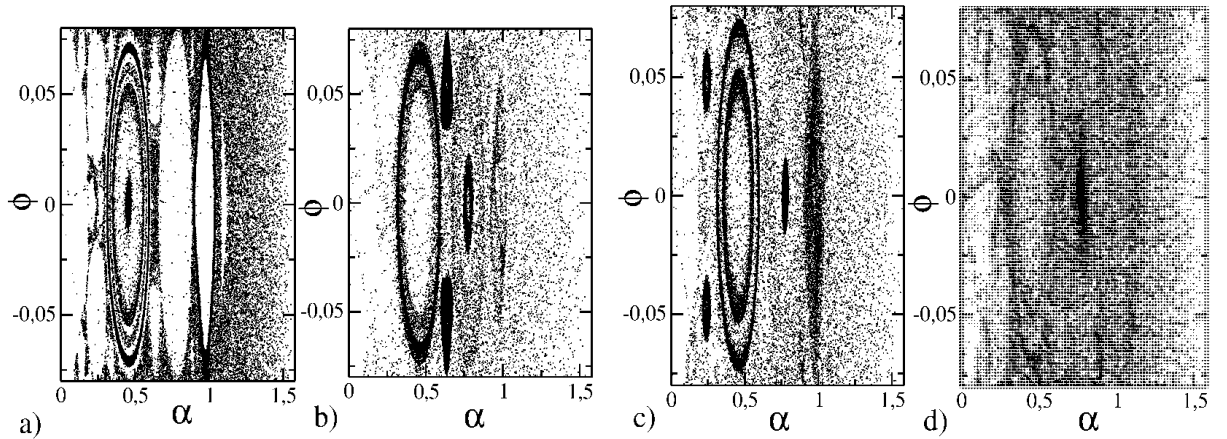


Figura 4.1: *Espaços de fases para o bilhar stadium com fronteiras oscilantes para 50 condições iniciais diferentes. Os parâmetros de controle utilizados foram  $l = 1, 0$ ,  $a = 0, 5$ ,  $b = 0, 01$  e  $B_0 = 0, 01$  e se mantiveram constantes nos 4 itens da figura. As velocidades iniciais foram: (a)  $V_0 = 5$ , (b)  $V_0 = 1, 5$ , (c)  $V_0 = 1, 2$  e (d)  $V_0 = 0, 5$ .*

Fazendo uma análise aprofundada da Fig.4.1, vemos que quando  $V_0 > V_r$ , as ilhas de estabilidade não se tornam acessíveis à partícula como é mostrado em (a), em que  $V_0 = 5$ . Já em (b), onde  $V_0 = 1, 5$ , podemos observar que algumas órbitas penetram um pouco nas ilhas de estabilidade. Agora, ao analisarmos a Fig.4.1(c), onde  $V_0 = V_r$ , notamos que a maioria do espaço de fases se torna acessível, o mesmo comportamento acontece quando  $V_0 < V_r$ , como é o caso mostrado em (d), onde  $V_0 = 0, 5$ . Podemos perceber ainda, em ambas as Fig.4.1(c,d), uma densidade maior de pontos ao redor de algumas ilhas de estabilidade, sugerindo que a ressonância entre a rotação ao redor de um ponto fixo e a perturbação externa, levou a partícula a ter um comportamento de uma órbita em um regime de *stickiness*.

Acreditamos que o comportamento de órbitas em regime de *stickiness*, aliado com a ressonância que o sistema apresenta, seja o mecanismo responsável pelo decaimento de velocidade da partícula e conseqüentemente o decaimento da energia do sistema. Ao evoluirmos a dinâmica em função do número de colisões com a fronteira móvel, para um ensemble de baixas energias ( $V_0 < V_r$ ), muitas órbitas decrescem de velocidade e ficam estacionárias em uma espécie de platô. Nesta evolução dinâmica, como uma parte significativa do espaço de fases é acessível, quando as órbitas ficam presas em regime de *stickiness*, existe uma grande possibilidade de que ela mude de comportamento, ou seja, passe para dentro da ilha de estabilidade. Assim, as órbitas se movem em sucessivos aprisionamentos de uma ilha para outra, impedindo o crescimento da velocidade da partí-

cula. De acordo com a condição inicial, depois de algum tempo, a órbita escolhe uma ilha de estabilidade e sua dinâmica fica concentrada nessa região para tempos extremamente longos (estudamos casos até  $10^9$  colisões), como se essa órbita fosse atraída para o ponto fixo, em uma órbita assintoticamente estável. A Fig.4.2 mostra uma única condição inicial sendo evoluída até  $10^5$  colisões.

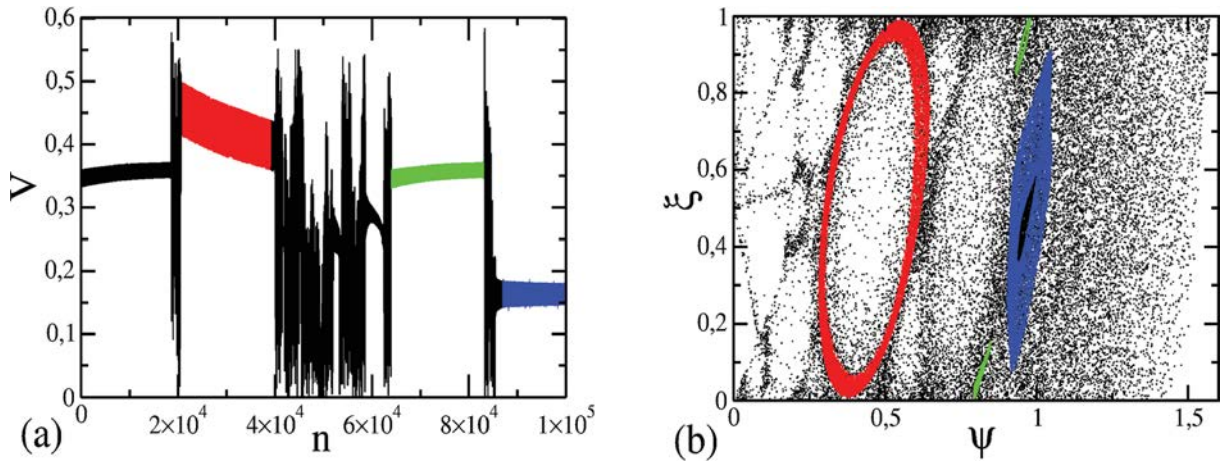


Figura 4.2: *Influência das órbitas de stickiness na dinâmica. Em (a) mostramos a evolução da velocidade em função do número de colisões, e em (b) observamos a mesma órbita no espaço de fases  $\psi$  e  $\xi$ . A velocidade inicial considerada foi  $V_0 = 0,35$ .*

Analisando a Fig.4.2(a), destacamos nas cores azul, vermelho e verde, como o comportamento de *stickiness* influencia a velocidade em função do número de colisões. Percebemos ainda, que após uma dinâmica inicial em regime de *stickiness*, a curva de velocidade sofre um decréscimo, e fica aprisionada até o final das  $10^5$  colisões consideradas. Agora, na Fig.4.2(b), podemos observar, ressaltado nas mesmas cores azul, vermelho e verde, o comportamento da órbita aprisionada em regime de *stickiness* no espaço de fases.

Em tempo, para o ensemble de altas energias ( $V_0 > V_r$ ), o fenômeno de *stickiness* também ocorre, pois a estrutura de ilhas não muda com a variação de velocidade. No entanto, como a velocidade é maior do que a da ressonância, a “porosidade” das curvas invariantes que delimitam a região dos pontos fixos, não é mais observada, como foi mostrado na Fig.4.1(a). Assim, as órbitas em regime de *stickiness* não são mais eficientes nesta mudança de comportamento, entre caos e estabilidade. Portanto, como esperado, a velocidade cresce, e observamos uma difusão ilimitada caracterizando aceleração de Fermi.

## 4.2 Separação de Ensembles

Nesta seção discutiremos, utilizando análises estatísticas, o comportamento da dinâmica do bilhar *stadium* dependente do tempo para ensembles de condições iniciais em altas energias ( $V_0 > V_r$ ) e em baixas energias ( $V_0 < V_r$ ). Para altas energias, observamos aceleração de Fermi, e para baixas energias, decréscimo de velocidade. Primeiramente, para caracterizar os ensembles, mostramos na Fig.4.3 as curvas de  $V_{RMS}$  para uma extensa faixa de velocidades iniciais.

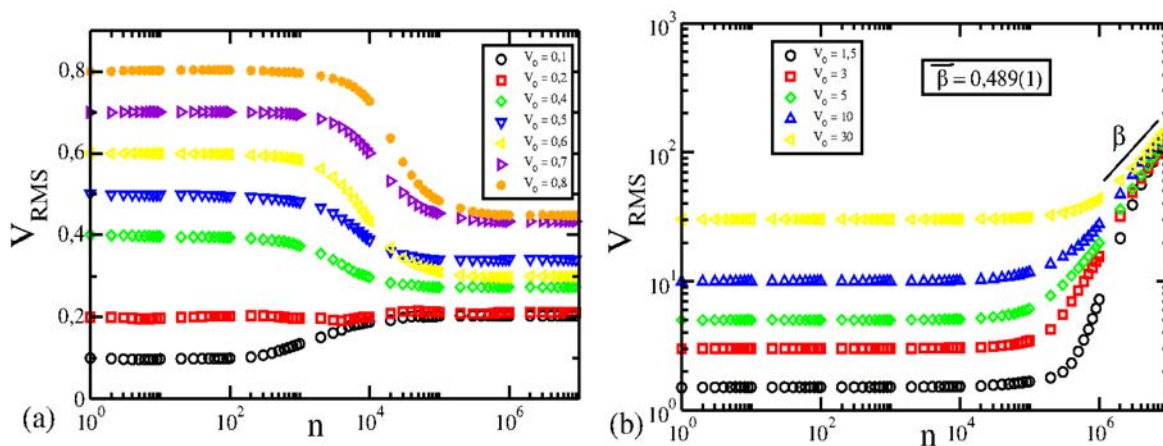


Figura 4.3: Comportamento das curvas de  $V_{RMS}$  em função do número de iterações. Em (a) podemos ver o decréscimo de velocidade para o ensemble de baixas energias, e em (b) temos um comportamento característico de aceleração de Fermi.

Para a construção das curvas de  $V_{RMS}$  foram utilizadas 5.000 condições iniciais distintas, escolhidas na região do mar de caos, para diferentes valores de velocidade inicial e diferentes ensembles. Percebemos na Fig.4.3(a), que mostra a evolução de  $V_{RMS}$  para o ensemble de baixa energia, o decaimento de velocidade da partícula em função de  $n$  é nítido. As curvas de  $V_{RMS}$  começam com um regime constante para as colisões iniciais próximas ao valor de sua velocidade inicial. Aqui, as órbitas sofrem sucessivos aprisionamentos ao redor das ilhas de estabilidade, e a mudança de comportamento, de caos para estabilidade pode ocorrer com maior probabilidade, como foi mostrado também nas Fig.4.1 e 4.2. Logo depois do regime de *stickiness* no platô inicial da dinâmica, as curvas de  $V_{RMS}$  experimentam um repentino decaimento, ou crescimento, como em particular para  $V_0 = 0, 1$ , com a evolução em  $n$ , e depois se estabilizam em um regime de velocidade constante (até  $10^7$  colisões). Ainda, podemos perceber que para diferentes valores de  $V_0$ , todas as curvas convergem para a mesma faixa de velocidade final. Uma análise mais detalhada deste comportamento pode ser encontrada na Ref.[47].



Tendo em vista que o nosso objetivo é caracterizar o decaimento de energia do bilhar *stadium* dependente do tempo, focamos nossas atenções no estudo para ensembles de baixas energias ( $V_0 < V_r$ ) e sua relação com o fenômeno de órbitas em regime de *stickiness*. Como visto na Fig.4.3, a separação dos ensembles de energias é visualizada quando consideramos propriedades médias de algum observável, no caso  $V_{RMS}$ . Tal observável é responsável por caracterizar a difusão na energia, e é útil para quantificar fenômenos dinâmicos. Ainda, podemos considerar distribuições médias da velocidade ao longo do tempo, fazendo histogramas para analisar qual região no espaço de fases seria responsável pela presença de *stickiness* no ensemble de baixas energias, como pode ser observado na Fig.4.4.

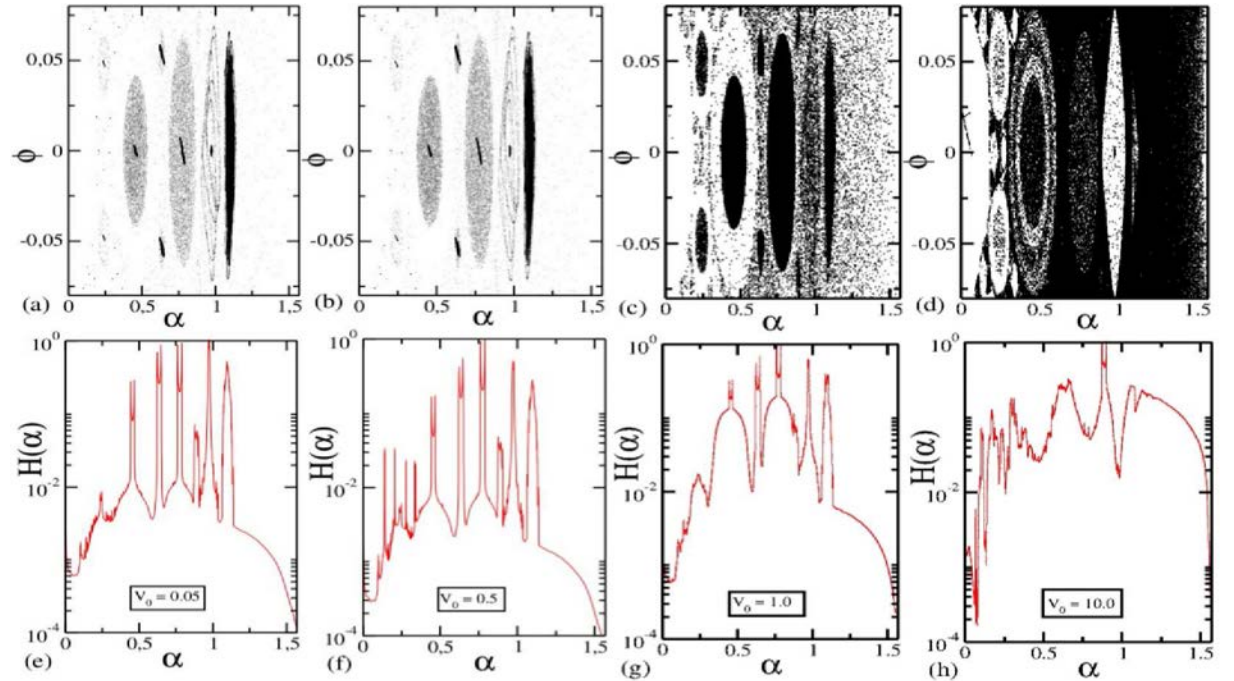


Figura 4.4: Comparação para o par final das variáveis angulares  $(\alpha, \varphi)$  para ambos os ensembles de energia, com o histograma para a variável  $\alpha$  ao longo da evolução dinâmica. Em (a) e em (e)  $V_0 = 0,05$ ; em (b) e em (f)  $V_0 = 0,5$ ; em (c) e em (g)  $V_0 = 1$ ; e finalmente em (d) e em (h)  $V_0 = 10$ . O eixo do histograma  $H(\alpha)$  em (e), (f), (g) e (h) é mostrado em escala logarítmica.

Começamos considerando as variáveis angulares  $(\alpha, \varphi)$ , como mostrado no espaço de fases da Fig.4.1. Escolhendo um conjunto de  $10^6$  condições iniciais ao longo do mar de caos, onde cada condição inicial foi iterada por até  $10^6$  colisões. Coletamos então o par final  $(\alpha, \varphi)$ , de cada condição inicial ao final das  $10^6$  iterações. Podemos observar nas Figs.4.4(a,b,c) que para  $V_0 < V_r$  a grande maioria dos pontos está localizada dentro das

regiões onde estariam as ilhas de estabilidade. Este comportamento final, indica que a grande maioria das condições iniciais mudaram de comportamento durante a dinâmica, isto é, saíram do caos, e foram para regiões de estabilidade, uma vez que na ressonância, a maioria do espaço de fases fica acessível.

Para fazer uma comparação, nas Figs.4.4(e,f,g) mostramos os histogramas do ângulo  $\alpha$ , para um ensemble de  $10^5$  condições iniciais também escolhidas no mar de caos, durante toda a sua evolução dinâmica até  $10^6$  colisões. Podemos observar regiões preferenciais para a variável  $\alpha$ . Ainda, tais regiões coincidem com as posições das ilhas e dos pontos fixos das Figs.4.4(a,b,c). Particularmente, o formato das fronteiras das ilhas de estabilidade, estão bem definidas no histograma da Fig.4.4(g).

É interessante ressaltar que a influência das órbitas de *stickiness* na ressonância, faz com que essa troca de comportamento, ocorra com maior facilidade. Desse modo, órbitas em regime de *stickiness* agem como facilitadoras do processo de troca de comportamento entre caos e estabilidade, o que conseqüentemente faz com que ocorra decaimento de energia no sistema para tempos longos.

Podemos fazer um outro tipo de análise comparativa, considerando o ensemble de altas energias mostrado na Fig.4.4(d), onde os pares finais de  $(\alpha, \varphi)$  são os mesmos de (a,b,c). Podemos perceber, que não há mais uma convergência do par final de variáveis angulares para as regiões onde as ilhas de estabilidade estão localizadas, como visto nos casos de ensembles de baixas energias. O par final  $(\alpha, \varphi)$  fica errante no mar de caos, devido a não influência da ressonância. Na Fig.4.4(h), onde novamente o mesmo procedimento do histograma da variável  $\alpha$  é feito, e em uma comparação com a distribuição da variável ao longo da dinâmica, vemos que não existem mais tantas regiões preferenciais. De fato, a região onde o mar de caos está localizado, aumenta sua distribuição, indicando um aumento do comportamento caótico, corroborando assim, para o aparecimento de aceleração de Fermi para altas energias.

Ainda sobre a Fig.4.4, observamos que algumas ilhas são mais preferenciais do que outras. Isso explica, o porque de na Fig.4.4(a), observarmos tantos platôs diferentes de convergência para o ensemble de baixas energias, que evidentemente dependem da velocidade inicial. Cada um desses platôs está relacionado com a mudança de comportamento entre caos e estabilidade ao longo da dinâmica, presente na ressonância dos ensembles de baixas energias. Assim, para tempos longos cada ilha de estabilidade representa um platô distinto na velocidade.

Em uma tentativa de quantificar os diferentes platôs, fizemos um histograma ao longo da distribuição da velocidade para toda a dinâmica para o mesmo conjunto de condições iniciais utilizadas nas Figs.4.4(e,f,g,h), e evoluindo até  $10^6$  iterações. Na Fig.4.5(a) mostramos estas distribuições para três valores de velocidade inicial.

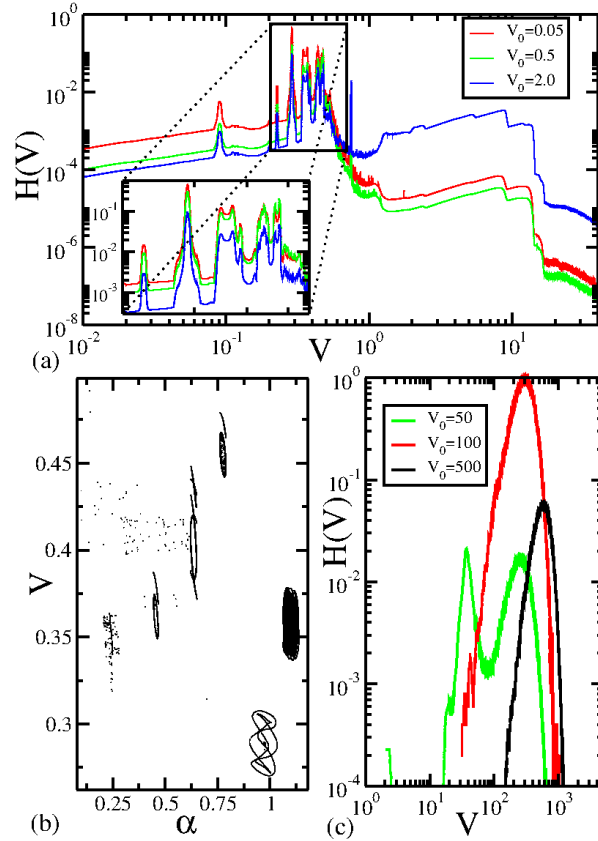


Figura 4.5: Em (a) temos o histograma do ensemble de baixa energia para a velocidade, para  $V_0 = 0,05$ ,  $V_0 = 0,5$  e  $V_0 = 2$ . Em particular, a janela de ampliação mostra os picos de maior intensidade. Em (b) temos a região de convergência da velocidade em função  $\alpha$ , onde podemos identificar em qual respectiva ilha a órbita convergiu. E em (c), temos o histograma para o ensemble de alta energia, onde não aparecem mais diversos picos de intensidade, mas sim uma distribuição mais definida. Os histogramas de (a) e (c) estão em escala logarítmica para melhor visualização.

Analisando Fig.4.5, podemos notar uma maior concentração no regime de baixa energia com  $V \in [0, 1; 1, 0]$ . Diversos picos são fáceis de serem vistos nesta região, mas vão desaparecendo a medida que aumentamos o valor da velocidade inicial, como mostrado na janela de ampliação em (a), mesmo para  $V_0 = 2$ , já sendo considerado ensemble de alta energia ( $V_0 > V_r$ ). Ainda, para o ensemble de baixa energia, existe uma faixa da distribuição de velocidades, acima do valor  $V_r$ . Esta distribuição não é tão intensa para  $V_0 = 0,05$  e  $V_0 = 0,5$ , mas bem significativa para  $V_0 = 2$ . Com isso, acreditamos que tais distribui-

ções confirmem o que já era suposto, que nem todas as condições iniciais com ensemble de baixa energia, experimentam decaimento de energia, por confinamento em ilhas de estabilidade, o qual é facilitado por órbitas em regime de *stickiness*. Da mesma maneira, nem todas as condições iniciais do ensemble de alta energia experimentam aceleração de Fermi.

A Fig.4.5(b) mostra a distribuição de velocidades para o ensemble de baixas energias, em comparação com suas posições considerando a coordenada polar  $\alpha$ . Essa comparação permite distinguir, para tempos longos, em qual ilha de estabilidade, as órbitas convergirão, para cada platô de velocidade. Por exemplo, a comparação entre a Fig.4.5(a) e (b), mostra picos acentuados para velocidade  $V \approx 0,29$  e  $V \approx 0,35$ . Eles indicam que as órbitas preferem ficar confinadas nas duas últimas ilhas de período-1 no espaço de fases, as quais estão localizadas em  $\alpha \approx 0,97$  e  $\alpha \approx 1,10$  respectivamente. Ainda, acreditamos que as ilhas de período-1, sejam as preferidas para a convergência das órbitas.

Finalmente, na Fig.4.5(c) mostramos o histograma das velocidades para o ensemble de altas energias. Percebemos que os diversos picos não são mais observados, mas temos uma distribuição mais bem definida, significando que para altas energias a difusão ilimitada de energia está presente no sistema (FA). Apenas algumas órbitas isoladas levam a um decaimento, como mostra a curva verde para  $V_0 = 50$ .

Estes resultados são baseados na velocidade de ressonância e na separação dos ensembles de energia, que acabam apontando uma transição de difusão ilimitada de energia, para órbitas estacionárias no espaço de fases. Acreditamos que nesta transição, o fenômeno de *stickiness* faz um papel de “facilitador” da troca de comportamento para baixas energias. Quando a ressonância está presente na dinâmica, ela influencia e a maior parte do espaço de fases se torna acessível para uma órbita, uma vez que as curvas invariantes que delimitam os pontos fixos elípticos (no caso estático), se comportam como *stochastic layers*. Assim, órbitas iniciadas no mar de caos, podem acabar aprisionadas nas ilhas de estabilidade considerando longos tempos.

A expressão analítica da velocidade de ressonância, discutida na subseção 2.2.2, foi obtida considerando a análise em torno das ilhas de estabilidade dos pontos fixos de período-1, que são os maiores em área no espaço de fases, e mais influentes no *stickiness*, uma vez que os platôs de convergência para tempos longos coincidem com as ilhas de período-1. Ainda, poderíamos encontrar diferentes velocidades de ressonância, para diferentes pontos fixos, de diferentes períodos, mas acreditamos que as ilhas de período-1 continuariam sendo as mais influentes.

### 4.3 Expoente de Lyapunov

Esta seção é dedicada à apresentação dos resultados preliminares na obtenção do espectro dos expoentes de Lyapunov associados à dinâmica do bilhar *stadium* dependente do tempo. A partir da obtenção analítica dos sistemas linearizados para os dois tipos de colisões no bilhar, podemos seguir com a implementação do algoritmo proposto por Alan Wolf [61]. De fato, o algoritmo fornece um espectro de quatro expoentes de Lyapunov para o bilhar *stadium* com fronteiras oscilantes.

De acordo com nossos estudos, sabemos que a velocidade de ressonância é um divisor para ensembles rápidos e lentos [47], então, analisamos o espectro dos expoentes de Lyapunov tanto para altas energias, isto é  $V_0 > V_R$ , quanto para baixas energias, com  $V_0 < V_R$ .

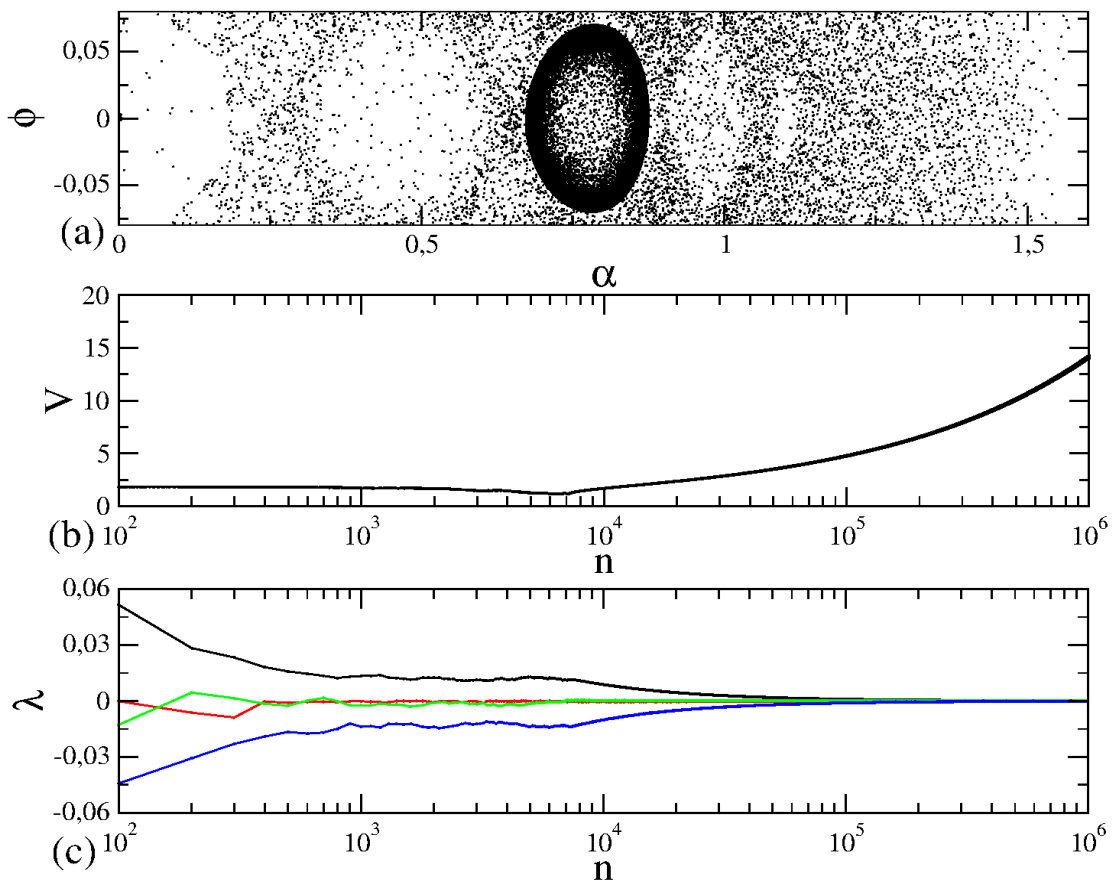


Figura 4.6: Em (a) temos o plano de fases construído a partir das variáveis  $(\alpha, \phi)$ , em (b) um gráfico da velocidade  $V$  em função do número de colisões  $n$  e em (c) o espectro dos expoentes de Lyapunov, dado pelo valor de  $\lambda$  em função do número de colisões  $n$ . Para esta simulação a velocidade inicial considerada foi  $V_0 = 1,8$ .

A Fig.4.6 foi construída com os parâmetros de controle  $l = 1,0$ ,  $a = 0,5$ ,  $b = 0,01$  e  $B_0 = 0,01$ . As condições iniciais utilizadas foram  $\alpha = 1,45$ ,  $\phi = -0,02$ ,  $V_0 = 1,8$  e  $t = 0$ . Sabemos também, que para esta combinação dos parâmetros de controle, a velocidade de ressonância é da ordem de  $V_r = 1,2$ . Assim, a Fig.4.6 é uma análise para ensembles de altas energias.

Fazendo uma análise da Fig.4.6, observamos que em (a) temos um plano de fases exibindo uma região caótica e ao centro uma região com uma grande densidade de pontos, indicando um aprisionamento por *stickiness*. Em (b) observamos o comportamento da velocidade da partícula em função do número de colisões  $n$ . Pode-se notar que a velocidade da partícula permanece constante até aproximadamente  $10^4$  colisões. Em seguida, a velocidade exibe um crescimento em lei de potência característico do fenômeno de aceleração de Fermi. Na Fig.4.6(b), percebemos também que o início do crescimento da velocidade coincide com a entrada da partícula na região influenciada pelo *stickiness*, conforme mostrado em (a).

Por fim, na Fig.4.6(c), apresentamos o espectro dos expoentes de Lyapunov em função de  $n$  para a órbita mostrada em (a). Percebemos que antes do aprisionamento, temos quatro valores distintos para os expoentes, sendo um deles maior do que zero, o que caracteriza caos. Ainda em (c), notamos também que após o aprisionamento, os expoentes de Lyapunov convergem rapidamente para zero, confirmando a regularidade imposta pelo *stickiness*. Ressaltamos também que o início da convergência dos expoentes de Lyapunov coincide com o início do crescimento da velocidade observado em (b). Vale ressaltar ainda que a soma dos expoentes de Lyapunov é nula, a menos de uma margem de incerteza numérica, conforme previsto para sistemas não dissipativos [61].

A Fig.4.7 foi construída com os mesmos parâmetros de controle da Fig.4.6. As condições iniciais para  $\alpha$ ,  $\phi$  e  $t$  também foram as mesmas, mas a velocidade inicial considerada foi  $V_0 = 0,6$ , portanto menor que  $V_r$ . Assim, a Fig.4.7 é uma análise para ensembles de baixas energias.

Fazendo agora uma análise da Fig.4.7(a), o plano de fases  $\alpha$  vs.  $\phi$  mostra também uma dinâmica caótica e uma região densa de pontos ao centro, sugerindo um aprisionamento por *stickiness*. Por outro lado, em (b), observamos que o gráfico de  $V$  em função de  $n$  exibe um comportamento caótico até a ordem de  $5 \times 10^4$  colisões, mas logo em seguida um platô constante pode ser observado. Este platô é uma evidência do fenômeno de *stickiness*.

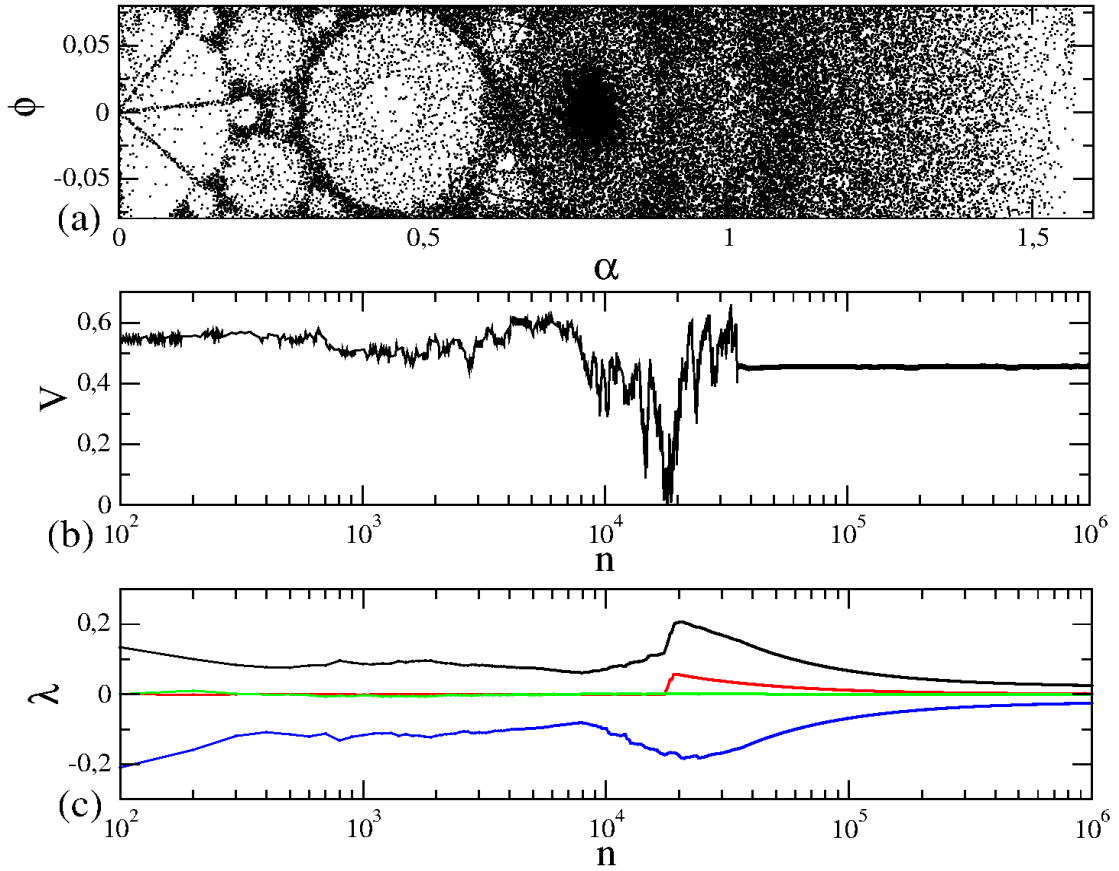


Figura 4.7: Em (a) temos o plano de fases construído a partir das variáveis  $(\alpha, \phi)$ , em (b) um gráfico da velocidade  $V$  em função do número de colisões  $n$  e em (c) o espectro dos expoentes de Lyapunov, dado pelo valor de  $\lambda$  em função do número de colisões  $n$ . Para esta simulação a velocidade inicial considerada foi  $V_0 = 0,6$ .

Finalmente, na Fig.4.7(c), apresentamos o espectro dos expoentes de Lyapunov em função de  $n$ . Conforme discutido na Fig.4.6(c), após o início da influência do *stickiness*, os expoentes convergem para zero, reforçando a regularidade da dinâmica nestas condições. Ressaltamos também que, como esperado, a soma dos expoentes é nula, a menos de uma incerteza numérica presente nas simulações.

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Nesta monografia apresentamos uma descrição detalhada do bilhar *stadium* com fronteiras dependentes do tempo, seguido de resultados analíticos e numéricos obtidos no estudo da dinâmica de uma partícula, ou de um ensemble de partículas não interagentes, confinadas ao interior deste bilhar.

A dinâmica de um ensemble de partículas não interagentes dentro de um bilhar *stadium* é obtida via um mapeamento quadri-dimensional. Para este sistema, existe uma velocidade de ressonância, obtida quando igualamos o período de rotação ao redor dos pontos fixos com o período de perturbação externa. Essa ressonância é responsável por separar o ensemble de energias (velocidade). Quando tal ressonância é influente na dinâmica, curvas invariantes que delimitam a fronteira dos pontos fixos se comportam como *stochastic layers*, tornando a grande maioria do espaço de fases acessível. Este comportamento, faz com que órbitas inicialmente no mar de caos, possam mudar sua dinâmica e atingir platôs estacionários considerando tempos longos.

Para o ensemble de alta energia, isto é, quando a velocidade inicial da partícula é maior do que a velocidade de ressonância, existe uma difusão ilimitada de energia e observamos o fenômeno de aceleração de Fermi. Quando o ensemble de baixa energia é considerado e a ressonância está presente, o *stickiness* faz o papel de facilitador da troca de comportamento das órbitas, onde para tempos longos, encontramos que  $V_{RMS}$  satura em diferentes platôs. Discutimos a estatística dos platôs estacionários, via histogramas e suas relações com as ilhas de estabilidade de período-1.

Consideramos ainda uma análise do espectro dos expoentes de Lyapunov associados a esta dinâmica e obtivemos resultados que reforçam as ideias discutidas anteriormente para



o sistema. No decorrer da evolução da dinâmica, o comportamento do espectro dos expoentes muda de acordo com os fenômenos observados. Particularmente, para ensembles de baixas energias, onde a velocidade inicial é menor do que a velocidade de ressonância, com o início da influência do fenômeno de *stickiness*, os expoentes de Lyapunov convergem para zero, reforçando a regularidade da dinâmica nestas condições.

A maioria dos resultados apresentados nesta monografia foram publicados na *Journal of Physics A*, segundo a referência:

A. L. P. Livorati, M. S. Palmero, C. P. Dettmann, I. L. Caldas e E. D. Leonel, *Separation of particles leading either to decay or unlimited growth of energy in a driven stadium-like billiard*, J. Phys. A, vol. 47, pp. 365101, (2014).

Temos como perspectiva continuar o estudo do fenômeno de ressonância para os outros pontos fixos do bilhar, considerando por exemplo, para os períodos 2 e 3. Além disso, podemos variar a frequência de oscilação da fronteira  $\omega$  e tentar encontrar fenômenos relacionados com sincronização de ressonâncias e rotações. Ainda, podemos tentar expandir o conhecimento adquirido na análise da dinâmica do bilhar *stadium*, e na influência da ressonância e *stickiness*, para outros tipos de bilhares com espaço de fases do tipo misto, onde ocorre esta mesma troca de comportamento, como no bilhar elíptico-ovóide [63].

# Bibliografia

- [1] A. J. Lichtenberg e M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Appl. Math. Sci., Springer Verlag, New York (1992).
- [2] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, New York. (1994).
- [3] G. M. Zaslavsky, *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*. Imperial College Press, New York. (2007).
- [4] Birkhoff G. D. *Dynamical Systems* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 9. Providence: American Mathematical Society. (1927).
- [5] N. Krylov, *Works on the Foundations of Statistical Physics* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. (1979).
- [6] Y. G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections*. Russ. Math. Surveys., vol. 25, pp. 137. (1970).
- [7] Y. G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersive billiards*. Russ. Math. Surv., vol. 25, pp. 141. (1970).
- [8] Y. G. Sinai, *On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics*. Math. Dokl. vol. 4, pp. 1818. (1963).
- [9] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, *Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers*. Commun. Math. Phys., vol. 78, pp. 479. (1981).
- [10] N. Chernov and R. Markarian, *Chaotic Billiards*. American Mathematical Society, vol. 127. (2006).
- [11] R. Markarian, *Ergodic properties of plane billiards with symmetric potentials*. Nonlinearity, vol. 6, pp. 819. (1993).
- [12] L. A. Bunimovich, *Conditions of stochasticity of two-dimensional billiard*. Chaos, vol. 1, pp. 187. (1991).

- [13] J. Koiller, R. Markarian, S. P. Carvalho, S. O. Kamphorst, *Static and Timedependent perturbations of the classical elliptical billiard*. Journal of Statistical Physics, vol. 83, pp. 127. (1996).
- [14] L. G. Akinshin, A. Loskutov, *Dynamical properties of some two-dimensional billiards with perturbed boundaries*. Physical Ideas of Russia, vol. 2, pp. 67. (1997).
- [15] S. O. Kamphorst, E. D. Leonel, J. K. L. da Silva, *Presence and lack of Fermi acceleration in non integrable billiards*, Journal of Physics. A, Mathematical and General, vol. 40, pp. 887. (2007).
- [16] D. F. M. Oliveira, J. Vollmer e E. D. Leonel, *Fermi acceleration and suppression of Fermi acceleration in a time-dependent Lorentz Gas*, Physica D, vol. 240, pp. 389. (2011).
- [17] L. A. Bunimovich, *On Ergodic Properties of Certain Billiards*. Funct. Anal. Appl., vol. 8, pp. 254. (1974).
- [18] L. A. Bunimovich, *On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards*. Commun. Math. Phys., vol. 65, pp. 295. (1979).
- [19] D. G. Ladeira e J. K. L. da Silva, *Scaling features of a breathing circular billiard*. J. Phys. A, vol. 41, pp. 365101. (2008).
- [20] M. V. Berry, *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard*. Eur. J. Phys. vol. 2, pp. 91. (1981).
- [21] D. F. M. Oliveira e E. D. Leonel, *On the dynamical properties of an elliptical oval billiard with static boundary*. Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simulat. vol. 15, pp. 1009. (2010).
- [22] J. Koiller, R. Markarian, S. P. Carvalho e S. O. Kamphorst, *Static and Timedependent perturbations of the classical elliptical billiard*. J. Stat. Phys vol. 83, pp. 127. (1996).
- [23] J. Stein e H. J. Stokmann, *Experimental determination of billiard wave functions*. Phys. Rev. Lett. vol. 68, pp. 2867. (1992).
- [24] H. J. Stokmann, *Quantum Chaos: An Introduction*. Cambridge University Press. (1999).
- [25] V. Milner *et al.*, *Optical Billiards for Atoms*. Phys. Rev. Lett., vol. 86, pp.1514. (2001).

- [26] N. Friedman *et al.*, *Observation of Chaotic and Regular Dynamics in Atom-Optics Billiards*. Phys. Rev. Lett., vol. 86, pp. 1518. (2001).
- [27] M. F. Andersen *et al.*, *Revivals of coherence in chaotic atom-optics billiards*. Phys. Rev. A, vol. 69, pp. 63413. (2004).
- [28] M. F. Andersen *et al.*, *Decay of Quantum Correlations in Atom Optics Billiards with Chaotic and Mixed Dynamics*. Phys. Rev. Lett., vol. 97, pp. 104102. (2006).
- [29] C. M. Marcus *et al.*, *Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures*. Phys. Rev. Lett., vol. 69, pp.506. (1992).
- [30] A. Loskutov, L. G. Akinshin, A. N. Sobolevsky, *Dynamics of billiards with periodically time-dependent boundaries*. Applied Nonlin. Dynamics, vol. 9, No 4-5, pp. 50. (2001).
- [31] A. Loskutov, A. B. Ryabov, L. G. Akinshin, *Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries*. J. Phys. A, vol. 33, No 44, pp. 7973. (2000).
- [32] T. Takami, *Curvature distribution of stadium billiard*. J. Phys. Soc. Japan, vol. 60, No 8, pp. 2489, (1991).
- [33] J. Lei, X. Li, *Some dynamical properties of the stadium billiard*. Physica D, vol. 189, pp. 49. (2004).
- [34] D. Cohen, D. A. Wisniacki, *Stadium billiard with moving walls*. Phys. Rev. E, vol. 67, pp. 026206. (2003).
- [35] A. Loskutov, A. Ryabov, *Particle dynamics in time-dependent stadium-like billiards*. J. Stat. Phys., vol. 108, No 5-6, pp. 995. (2002).
- [36] E. Fermi, *On the Origin of the Cosmic Radiation*. Phys. Rev., vol. 75, No 8, pp. 1169. (1949).
- [37] A. V. Milovanov, L. M. Zelenyi, *“Strange”Fermi processes and power-law nonthermal tails from a self-consistent fractional kinetic equation*. Phys. Rev. E, vol. 64, pp. 052101. (2001).
- [38] A. Veltri, V Carbone, *Radiative intermittent events during Fermi’s stochastic acceleration*. Phys. Rev. Lett., vol. 92, 143901. (2004).
- [39] K. Kobayakawa, Y. S. Honda, T. Samura, *Acceleration by oblique shocks at supernova remnants and cosmic ray spectra around the knee region*. Phys. Rev. D, vol. 66, pp. 083004 (2002).

- [40] G. Lanzano *et al.*, *Fast electron production at intermediate energies: evidence for Fermi shuttle acceleration and for deviations from simple relativistic kinematics*. Phys. Rev. Lett., vol. 83, pp. 4518. (1999).
- [41] F. Saif, I. Bialynicki-Birula, M. Fortunato, W. P. Schleich, *Fermi accelerator in atom optics*. Phys. Rev. A, vol. 58, pp. 4779. (1998).
- [42] A. Steane, P. Szriftgiser, P. Desbiolles, J. Dalibard, *Phase modulation of atomic de Broglie waves*. Phys. Rev. Lett., vol. 74, pp. 4972. (1995).
- [43] A. L. P. Livorati, A. Loskutov e E. D. Leonel, *A family of stadium-like billiards with parabolic boundaries under scaling analysis*. J. Phys. A, vol. 44, pp. 175102 (2011).
- [44] A. L. P. Livorati, D. G. Ladeira e E. D. Leonel, *Scaling investigation of Fermi acceleration on a dissipative bouncer model*. Phys. Rev. E, vol. 78, pp. 056205. (2008).
- [45] E. D. Leonel e L. Bunimovich, *Suppressing Fermi acceleration in two-dimensional driven billiards*. Phys. Rev. E., vol. 82, pp. 016202. (2010).
- [46] D. G. Ladeira e E. D. Leonel, *Competition between suppression and production of Fermi acceleration*. Phys. Rev. Phys. Rev. E, vol. 81, pp. 036216. (2010).
- [47] A. L. P. Livorati, M. S. Palmero, C. P. Dettmann, I. L. Caldas, E. D. Leonel, *Separation of particles leading either to decay or unlimited growth of energy in a driven stadium-like billiard*. J. Phys. A, vol. 47, pp. 365101. (2014).
- [48] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, New York, Cambridge University Press. (1993).
- [49] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, United States of America, Addison-Wesley. (1969).
- [50] K. T. Alligood, T. D. Sauer e J. A. Yorke, *Chaos: An introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag, New York. (1996).
- [51] G. Contopoulos, *The equilibrium of rapidly rotating galaxies*, The Astrophys. Journal, vol. 17, pp. 147. (1971).
- [52] R. S. Mackay, J. D. Meiss e I. C. Percival, *Transport in hamiltonian-systems*, Physica D, vol. 13, pp. 55. (1984)
- [53] G. M. Zaslavsky, *Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport*, Phys. Rep, vol. 371, pp. 461. (2002).

- [54] G. M. Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, Oxford University Press, New York. (2008).
- [55] G. M. Zaslavsky, *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*, Imperial College Press, New York. (2007).
- [56] G. Contopoulos e M. Harsoula, *Stickiness Effects in Chaos*, *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, vol. 107, pp. 77. (2010).
- [57] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky e J. Klafter, *Strange Kinects*, *Nature*, vol. 63, pp. 31. (1993).
- [58] T. Tél, A. de Moura, C. Grebogi e G. Károlyi, *Chemical and Biological Activity in Open Flows: A Dynamical System Approach*, *Phys. Rep.*, vol. 413, pp. 91. (2005).
- [59] N. F. Ferrara, C. P. C. do Prado, *Caos: Uma Introdução*, Editora Edgard Blücher LTDA. (1994).
- [60] J. P. Eckmann, D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*. *Rev. Mod. Physics*, vol. 57, pp. 617. (1985).
- [61] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, *Determining Lyapunov exponents from a time series*. *Physica D*, vol. 285, pp. 16. (1985).
- [62] A. L. P. Livorati, *O bilhar Stadium dependente do tempo: aceleração de Fermi e o fenômeno de retardo de velocidade*, Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual Paulista - Rio Claro. (2011).
- [63] F. Lenz, F. K. Diakonov e P. Schmelcher, *Tunable Fermi Acceleration in the Driven Elliptical Billiard*, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, pp. 014103. (2008).