



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus
Fundamentos Filosófico-Científicos

**A GEOMETRIA EUCLIDIANA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO PONTO
DE VISTA DE PROFESSORES FORMADORES**

LUIZ CARLOS RAMASSOTTI

RIO CLARO – SP

2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

LUIZ CARLOS RAMASSOTTI

**A GEOMETRIA EUCLIDIANA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO PONTO
DE VISTA DE PROFESSORES FORMADORES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Lazari

RIO CLARO – SP

2015

370.71 Ramassotti, Luiz Carlos
R165g A geometria euclidiana na licenciatura em matemática do
ponto de vista de professores formadores / Luiz Carlos
Ramassotti. - Rio Claro, 2015
179 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Henrique Lazari

1. Professores - Formação. 2. Ensino de geometria. 3.
Ensino de matemática. I. Título.

LUIZ CARLOS RAMASSOTTI

**A GEOMETRIA EUCLIDIANA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO PONTO
DE VISTA DE PROFESSORES FORMADORES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Carlos Roberto de Moraes

Heloisa da Silva

Henrique Lazari

Rio Claro, SP 24 de abril de 2015

Resultado: Aprovado

Aos meus pais, Aldo e Rosa, que me deram a vida e tudo
que lhes foi possível, com humildade e dignidade.

À Odete, Maria e Lisete, irmãs que me deram
condições para estudar.

À Simone, minha esposa, pela paciência
e controle da minha ansiedade.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Henrique Lazari, por acreditar que seria possível, pela amizade e por auxiliar na superação dos obstáculos durante a pesquisa.

Aos professores entrevistados, pela gentileza com que nos atenderam. Seus depoimentos deram vida à nossa pesquisa. A eles devemos gratidão.

Aos professores componentes da banca, Anizio Perissinotto Junior, Heloisa da Silva e Carlos Roberto de Moraes, pelas importantes observações e valiosos conselhos.

À Rosa Lúcia Sverzut Baroni e Marcos Vieira Teixeira, pela confiança, ao escreverem uma carta de recomendação destinada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Jamais esquecidos.

À Maria Aparecida Viggiani Bicudo, que me aceitou como aluno ouvinte, em Metodologia de Pesquisa Qualitativa. Extremamente competente, uma unanimidade.

À Rosana Giaretta Sguerra Miskulin, na disciplina Didática Aplicada ao Ensino da Matemática. Sempre atenciosa.

À Rosa Lúcia Sverzut Baroni, na disciplina Álgebra Linear. Sempre amiga e querida desde o início da graduação.

A Irineu Bicudo, nas disciplinas Álgebra e Teoria de Galois das Equações Algébricas. O matemático, meu ídolo.

A Marcos Vieira Teixeira, na disciplina História da Matemática, que dizia ser eu um aluno especial, não regular, portanto, irregular. Simpatia em pessoa.

À Heloisa da Silva, na disciplina Filosofia da Educação Matemática. Amiga e prestativa.

A Marcelo de Carvalho Borba, na disciplina Metodologia de Pesquisa Qualitativa. O pesquisador, a quem dedico o capítulo de Metodologia de Pesquisa.

A Henrique Lazari, na disciplina Fundamentos de Geometria. Meu amigo e mestre.

RESUMO

Esta pesquisa apresenta o ponto de vista e as opiniões que um grupo de professores formadores considera como deve ser abordada a Geometria Euclidiana em um curso de Licenciatura em Matemática para que o professor tenha uma formação geométrica adequada ao exercício da docência na Educação Básica. A coleta de dados se deu por meio de entrevistas semiestruturadas, procurando identificar as considerações dos entrevistados em relação a temas como o nível de rigor com que trabalham a axiomatização e formalização da geometria, das estratégias e da importância do uso da régua e do compasso e, no contexto atual das tecnologias, destacamos suas opiniões acerca da introdução dos softwares de geometria dinâmica na Licenciatura em Matemática, especificamente no caso da geometria. Identificamos, também, qual a literatura de geometria que é por eles utilizada ou considerada adequada na formação inicial do professor de matemática e apontamos suas opiniões sobre quais os motivos do abandono da geometria nas salas de aula da Educação Básica. Os entrevistados apontam que a Geometria Euclidiana deve ser trabalhada de forma axiomática e com formalização rigorosa, de modo que em uma demonstração a figura é um recurso didático, sendo as justificativas decorrentes de resultados e teoremas já demonstrados. Devido à imaturidade do aluno para entender o sistema axiomático formal, os depoentes sugerem que a geometria pode ser trabalhada mais para o final do curso, proporcionando melhor entendimento e ganho em relação ao conteúdo. Régua e compasso são considerados essenciais, e o software de geometria dinâmica, importante como recurso didático que facilita a visualização e movimentação. A bibliografia nacional existente seja complementada com obras estrangeiras, o que nos faz concluir que existe uma carência nesse setor em nosso país. Falta de conhecimento específico e didática são apontados como motivos da ausência da geometria na sala de aula da Educação Básica, sendo a origem do problema o curso de Licenciatura em Matemática, que não oferece formação adequada.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Formação de Professores. Geometria Euclidiana.

ABSTRACT

This research presents the view of a group of lecturers of undergraduate courses on how Euclidian Geometry should be approached in a Mathematics Degree Program, so that the graduating teacher has knowledge of geometry adequate for work on Middle and High School Education. The data collection method was questionnaire and interview, in which it is tried to identify the interviewee take on: rigor level of how axiomatization and formalization of geometry are presented, teaching strategies and how important the use of a ruler and compass is to the undergraduate formation of teachers. Taking into consideration modern technologies, it was also intended to highlight their opinions on the introduction to dynamic geometry softwares in Undergraduate Mathematics Education, specifically for the study of Geometry. The research sought to identify geometry textbooks that they consider adequate for the instruction of math teachers and pinpoint the reasons why there has been a neglect of geometry in Middle and High School classrooms. The interviewees shows that Euclidian Geometry must be presented in a strict axiomatic and formal way. In one demonstration the figure is an important teaching aid, being the demonstration justified by results and theorems already proven. Because of students lack of ability to comprehend the formal axiomatic system, it is suggested that geometry be studied closer to the end of courses to provide better understanding and knowledge retention. Ruler and Compass are found to be essential. Combined with important use of dynamic geometry software, these teachings aids will improve visualization and movement. The existing Brazilian Bibliography must be supplemented by foreign works, concluding that there is a need of reference works in this área in our country. The lack of specific knowledge and teaching tools is pointed as the reason for the absence of geometry in the Middle and High School classroom, problem originated in the Undergraduate Mathematics programs that do not offer adequate instruction.

Key Words: Teaching of Geometry. Teacher Education. Euclidian Geometry.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
1 METODOLOGIA	15
1.1 A entrevista como procedimento de coleta de dados	16
1.2 A seleção dos professores formadores entrevistados	18
2 OS ENTREVISTADOS E AS ENTREVISTAS	20
2.1 Descrição dos entrevistados	20
2.1.1 <i>O primeiro entrevistado</i>	20
2.1.2 <i>O segundo entrevistado</i>	20
2.1.3 <i>O terceiro entrevistado</i>	21
2.1.4 <i>O quarto entrevistado</i>	22
2.2 Relato sobre as entrevistas	22
2.2.1 <i>A primeira entrevista</i>	22
2.2.2 <i>A segunda entrevista</i>	24
2.2.3 <i>A terceira entrevista</i>	24
2.2.4 <i>A quarta entrevista</i>	25
2.3 Transformando a entrevista em texto	26
3 ANÁLISE DOS DADOS	29
3.1 Sobre axiomática e formalização da geometria nos cursos de formação ..	31
3.2 O momento da geometria nos cursos de formação	35
3.3 A figura na demonstração em geometria	39
3.4 A régua, o compasso e os softwares de geometria dinâmica	41

3.5 A bibliografia da geometria nos cursos de formação	47
3.6 Professores do Ensino Básico não ensinam geometria: justificativas segundo os formadores	51
4 BUSCANDO NAS REFERÊNCIAS	62
4.1 A axiomática da Geometria Euclidiana	62
4.2 A demonstração em Matemática	63
4.3 A demonstração em Geometria	68
4.4 Softwares de geometria dinâmica	71
4.5 Os livros citados	78
4.6 O Movimento da Matemática Moderna	85
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
REFERÊNCIAS	95
ANEXO A – ROTEIRO DAS ENTREVISTAS	102
ANEXO B - CONSIDERAÇÕES DO PRIMEIRO ENTREVISTADO EM RELAÇÃO AO ROTEIRO DA ENTREVISTA	104
ANEXO C - ENTREVISTA COM PROFESSOR WLADIMIR	108
ANEXO D - ENTREVISTA COM PROFESSOR GERALDO	122
ANEXO E - ENTREVISTA COM PROFESSOR IRINEU	146
ANEXO F - ENTREVISTA COM PROFESSOR PAULO	159

INTRODUÇÃO

Apresentando a pesquisa

Podemos dizer que há um consenso entre educadores e pesquisadores da Educação Matemática que praticamente não se ensina geometria na Educação Básica e que, de certa forma, o problema também se encontra na formação do professor. Entendemos que, ao deixar alunos concluírem o Ensino Fundamental e Médio sem terem utilizado régua, compasso e transferidor na aula de matemática, mais especificamente, sem aprender noções elementares de geometria, comprometeremos de modo significativo sua formação.

Por outro lado, considerando que o problema se inicia na formação do professor de matemática, nesta pesquisa ouvimos as argumentações de professores formadores, tentando compreender suas opiniões e considerações sobre o ensino da geometria nos cursos de Licenciatura em Matemática. Isso parece refletir diretamente no exercício do professor na rede pública de ensino, pois, de acordo com o estudo realizado por Perez (1991), os professores focam o ensino da aritmética e da álgebra, faltando-lhes conhecimento e metodologia para ensinar geometria. O autor destaca ainda que o argumento utilizado pelos professores é que eles tiveram pouca geometria nos cursos de formação.

Considerando que existe uma lacuna ou deficiência no que se refere ao ensino de geometria na Educação Básica da rede pública de ensino, estamos interessados em entender alguns dos motivos que contribuem para a reincidência desse problema. Buscamos nas argumentações de professores formadores que, por interesse, conhecimento, experiência e discernimento puderam contribuir de forma significativa com suas conclusões sobre o tema. É do nosso interesse encontrar, nessas argumentações, pontos de convergências, divergências ou posicionamentos isolados, mas não menos importantes, no que se referem às práticas adotadas como metodologia, rigor matemático, literatura consultada e que considerações fazem em relação à geometria como campo de estudo na matemática e sua aplicação em outras áreas do conhecimento. Buscamos compreender, a partir das entrevistas, o que ocorre com o ensino de Geometria Euclidiana nos cursos de formação de professores de matemática, procurando indícios que nos mostrem a razão da

ausência desse tema no exercício do professor da rede pública de ensino, mesmo fazendo parte de sua formação. Pretendemos, depois de analisar as entrevistas, sugerir propostas no sentido de melhorar a formação inicial do professor de matemática em relação ao conhecimento do conteúdo e também pedagógico da geometria.

A trajetória do pesquisador

Desde o início do trabalho, até este momento, me questionei sobre a necessidade de colocar ou não a trajetória do pesquisador. Essa, em minha opinião, irrelevante para a maioria dos leitores e, além disso, ocuparia muito espaço se apresentada em detalhes. Mas, considerando que esta pesquisa originou-se em minha trajetória profissional, decidi por relatar brevemente os caminhos por onde andei.

Na Física, percebo que se costuma indicar uma trajetória por uma linha. A minha não há como ser representada por uma linha reta somente, nem unicamente por curvas, nem só por poligonal, mas, talvez, por união de linhas mistas, dificilmente construídas sem régua e compasso.

No primeiro dia de aula, chorei. Não se pega o lápis com a mão esquerda, disse a professora. Não teve jeito, é com ela que escrevo até hoje. Minha alfabetização ocorreu em uma escola rural, com uma única sala comportando, ao mesmo tempo, turmas da primeira, segunda e terceira séries. Pouco tempo se passou para me alfabetizar, ler e escrever as primeiras linhas. Já em outra escolinha, localizada em um distrito de Rio Claro, São Paulo, onde terminei o Ensino Fundamental, ocorreu a primeira parada.

Tempos depois, o Ensino Médio se concretizou em uma escola técnica, mas, no fim, houve a segunda parada. Passado mais um tempo, ingressei na UNESP de Rio Claro. Vale destacar que preenchi o manual errado, era para indicar o curso de Física, mas acabei entrando na Matemática. Após a graduação, ocorreu a terceira parada.

Iniciei minha carreira como professor de Física em escolas públicas da diretoria de Limeira, São Paulo. Tempos depois, tornei-me efetivo e comecei a ministrar aulas de matemática.

Movido pelo desejo de aprender, matriculei-me como aluno especial no curso de Pós – Graduação em Educação Matemática da UNESP por um ano, e ocorreu a quarta parada. Tempos depois, ainda querendo aprender e me atualizar, fiz especialização em Ensino da Matemática em uma instituição particular. Ao fazer o trabalho final de curso, no qual abordei a minha prática para o ensino de geometria, surgiu a ideia desta pesquisa. Novamente, primeiro como aluno especial e, na sequência, agora sem parada, fui selecionado como aluno regular da Pós - Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro.

Os motivos que nos levaram a desenvolver esta pesquisa

Desde que comecei a dar aulas de matemática na sexta série, atual sétimo ano do Ensino Fundamental, sempre reservei um bimestre, um quarto do ano letivo, para o estudo da geometria. Faço isso com muita naturalidade, apresento conceitos e definições elementares, enunciados na lousa e posterior exposição oral. Utilizo a linguagem peculiar da geometria, construo os objetos geométricos fundamentais, como perpendiculares, paralelas, bissetriz e mediatriz com régua e compasso, indico e uso as notações usuais, comento sobre fatos históricos, apresento exercícios e trabalho um pouco o livro didático. Enuncio e demonstro geometricamente o teorema de Pitágoras, faço e solicito que verifiquem que a soma dos ângulos internos do triângulo equivale a dois ângulos retos. Enfim, procuro apresentar o que considero o mínimo do que deva ser uma aula de geometria para alunos dessa série. A única exigência é a de que os alunos façam tudo como lhes apresento em papel sulfite, usando apenas lápis, régua, compasso e transferidor. Motivado pela apresentação do trabalho dos alunos, costumo fotocopiar e fotografar aleatoriamente as atividades na tentativa de mensurar a melhora em seus desempenhos.

Ao buscar algumas referências para escrever sobre a minha prática no trabalho final do curso de especialização, tomei conhecimento do problema enfrentado pela geometria nos últimos anos pela Educação Básica e até mesmo a superior. O abandono. A princípio, não entendia como e nem por que isso era verdade. A leitura de algumas pesquisas: Pavanello (1989), Perez (1991), Lorenzato

(1995), Soares (2001), Crescenti (2005), Duarte (2007), Lovis (2009, 2013), entre outras, me trouxeram diversas possibilidades como justificativas para tal situação. O Movimento da Matemática Moderna, a falta de conhecimento pelo professor, a falta de metodologia, os livros didáticos, a falta de tempo, os cursos de formação, entre outros.

Comecei, então, a me questionar sobre tais motivos, e por que, mesmo decorrido tanto tempo, esse problema ainda é abordado em pesquisas. Crescenti (2005), Serralheiro (2007), Lovis (2009, 2013), entre outros, apontam sua continuidade. Será que ainda existe alguma relação com o movimento de reestruturação da matemática ocorrido nos anos sessenta? De fato, seria possível um professor graduado não saber o básico da geometria? Há algum curso de Licenciatura em Matemática em que a geometria não se faz presente na grade curricular? Independentemente de onde a geometria se encontra nos livros, esses são feitos de páginas, e o professor não pode abri-las quando quiser? Essas indagações, entre outras, me levaram a ter contato com o professor Henrique Lazari, que viria a se tornar meu orientador nesta pesquisa.

Muitas dúvidas e inquietações foram provocadas pelos resultados das pesquisas mencionadas e pelas perguntas anteriores, aparentemente simples, mas cujas respostas não são fáceis nem definitivas. Tudo isso, de alguma forma, nos faz querer entender. Por que não se ensina geometria? Por que ela é abandonada?

Numa tarde de sexta-feira, bati à porta do professor Henrique. Perguntou-me exatamente o que me levou a pensar naquele projeto e qual seria o foco da minha pesquisa. Conversamos por um tempo, contei como tomei conhecimento do problema e comentei a respeito das atividades que desenvolvia na escola onde trabalho. Apresentei o projeto de pesquisa ao professor Henrique e deixei para que pudesse apreciar com mais calma, pois ainda tinha dúvidas se iria ou não aceitar minha proposta. Conforme combinado, retornei na semana seguinte. Acredito que ele realmente aceitou meu projeto após ver as atividades que meus alunos fizeram, por meio de fotografias e fotocópias que lhe mostrei.

Após aprovação do projeto pelo professor Henrique Lazari, começamos o processo de construção da nossa pergunta diretriz. Como bem relatam Araújo e Borba (2012), é um momento crucial da pesquisa, e foi “[...] um longo caminho, cheio

de idas e vindas, mudanças de rumos, retrocessos, até que, após um certo período de amadurecimento, surge a *pergunta*” (p. 33). Algumas reuniões, conversas entre orientando e orientador, discutindo o projeto, tentando encontrar uma direção, e a nossa pergunta não surgia. Sabíamos que “o pesquisador deve estar consciente da importância da pergunta que faz e deve saber colocar as questões necessárias para o sucesso da sua pesquisa” (GOLDENBERG, 2013, p. 71-72).

O tempo foi nosso companheiro, e nos utilizamos dele para ajudar nessa empreitada. Após diversas leituras, contato com nossos entrevistados, os dados encontrados pelo caminho, novas reuniões, finalmente, durante as primeiras análises dos dados, foi surgindo nossa pergunta. Ficou rodeando, acompanhando nossos passos até tomar sua forma definitiva. Como dissemos, o nosso problema era entender a ausência e o abandono da geometria na Educação Básica. A nossa incompreensão dava-se, sobretudo, pelo simples fato de que em nossa prática o tema é abordado em um bimestre do ano letivo, ou seja, é possível ensinar geometria. Ouvimos dos professores formadores o que pensam ou fazem ao tratar sobre geometria na Licenciatura em Matemática. A nossa opinião, aliada aos dados obtidos no processo de investigação, mostrou-nos a pergunta diretriz.

Como um grupo de professores formadores concebe a geometria euclidiana nos cursos de Licenciatura em Matemática de modo a preparar o futuro professor para o ensino da mesma na Educação Básica?

A dissertação encontra-se estruturada como exposta a seguir.

No capítulo 1, apresento a metodologia de pesquisa adotada e os procedimentos para coleta de dados.

No capítulo 2, apresento os entrevistados da pesquisa, relato sobre cada uma das entrevistas e apresento o método utilizado nas transcrições das mesmas.

No capítulo 3, apresento a análise dos dados, abordando os temas das entrevistas. Procuo relacionar os depoimentos convergentes ou divergentes, ao mesmo tempo me posiciono diante dos fatos e busco relacionar com alguns resultados ou opiniões de autores que abordam o tema.

No capítulo 4, abordo alguns dos temas das entrevistas com maior profundidade, apoiado em pesquisas de outros autores que, em seus trabalhos, discutiram essas questões de forma específica ou abrangente.

Nas considerações finais, aponto os resultados encontrados, bem como exponho algumas questões que consideramos relevantes, no sentido de incentivar novos projetos que possam ampliar os resultados aqui obtidos ou, ainda, apontar outros por nós não detectados.

1 METODOLOGIA

Temos o objetivo de compreender as práticas e as metodologias de ensino da geometria nos cursos de formação de professores de matemática, com base em entrevistas com um grupo de professores formadores. Diversos procedimentos poderiam ser adotados para a coleta de dados, mas, pensando no que diz Amorim (2004): “Não há trabalho de campo que não vise ao encontro com um *outro*, que não busque um interlocutor” (p.16), acreditamos que realizar entrevistas com professores formadores seria uma boa opção. Ressaltamos, no entanto, que outros procedimentos para a coleta de dados foram adotados, um pequeno questionário para esclarecimento de pontos importantes da entrevista e conversas informais, caracterizando o que Alves-Mazzotti (1998), Goldenberg (2013) e Araújo e Borba (2012) denominam triangulação, o que para autores como Araújo e Borba (2012), Javaroni, Santos, Borba (2011), resulta em maior credibilidade para a pesquisa.

A pesquisa qualitativa possibilita que o pesquisador descreva com detalhes uma dada instituição, faça análise apurada de um fenômeno, interprete relações de um grupo social, bem como analise e descreva processos de ensino aprendizagem em geral.

A realização de entrevistas resulta, obviamente, em discursos dos sujeitos com os quais manteremos contato. Sobre isso, encontramos um primeiro indício que pode identificar nossa metodologia adotada. “A pesquisa qualitativa, também chamada naturalística, tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes” (D’AMBRÓSIO, 2012, p. 12).

Ao ouvir os entrevistados, estaremos interessados em perceber e compreender o que eles pensam sobre o ensino da geometria, o significado que eles atribuem aos métodos e conceitos geométricos na formação do professor. Nesse aspecto, observamos as considerações em relação à pesquisa qualitativa dadas por Ludke e André (1986):

O material obtido nessas pesquisas é rico em descrições de pessoas, situações, acontecimentos; inclui transcrições de entrevistas e de depoimentos, fotografias, desenhos e extratos de vários tipos de documentos. [...] Nesses estudos há sempre uma tentativa de capturar a “perspectiva dos participantes”, isto é, a maneira como os informantes encaram as questões que estão sendo focalizadas (p. 12).

De acordo com os objetivos propostos pela entrevista, pretendemos obter uma compreensão do que os entrevistados dizem e a forma como eles consideram ser o ensino da geometria nos cursos de formação, considerando suas experiências e suas perspectivas.

Evidencia-se, ainda, em nossa proposta, uma interpretação pessoal e subjetiva. A compreensão e significados atribuídos aos dados obtidos com a entrevista serão pautados em nossa experiência de vida, nossos costumes e crenças pessoais. Então, buscamos uma última caracterização que situasse nossa pesquisa e encontramos:

(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re) configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos, e generalistas (GARNICA, 2012, p. 99).

Nossa pesquisa possui características das argumentações acima apresentadas, o que a classifica como sendo de enfoque qualitativo.

1.1 A entrevista como procedimento de coleta de dados

Após alguns contatos com meu orientador, passamos a discutir qual seria o método da coleta de dados que iríamos adotar. Acreditávamos que esse era um tópico de vital importância a ser definido, pois, segundo Goldenberg (2013, p. 62), “cada pesquisador deve estabelecer os procedimentos de coleta de dados que sejam mais adequados para o seu objeto particular”.

Ao apresentar nosso projeto, pensamos que assistir ou gravar aulas de professores formadores em atividade poderia ser uma alternativa para a coleta de dados. Porém não demorou muito para perceber que essa alternativa poderia apresentar dificuldades. Primeiro, encontrar professores dispostos a colaborar, permitindo nossa presença na sala de aula, uma vez que muitos se sentem intimidados com esse processo e acabam por não atender à solicitação de

cooperação. Outro motivo para nossa desistência desse método foram os possíveis empecilhos com equipamentos de filmagens adequados para a situação e na própria estrutura da sala de aula, que muitas vezes possui um número elevado de pessoas, impossibilitando, assim, captar todas as situações no ambiente pesquisado (JAVARONI; SANTOS; BORBA, 2011).

Queríamos ouvir dos entrevistados os seus pontos de vista e considerações em relação ao nosso tema. A entrevista na pesquisa é:

[...] uma técnica de pesquisa para coleta de dados cujo objetivo básico é entender e compreender o significado que os entrevistados atribuem a questões e situações, em contextos que não foram estruturados anteriormente, com base nas suposições e conjecturas do pesquisador (MARTINS, 2008 apud DIAS, 2009, p. 79).

Quando utilizamos entrevistas, segundo Bogdan e Biklen (1994), estamos recolhendo “[...] dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo” (p.134).

Com base nas considerações anteriores e depois de algumas conversas, decidimos que a entrevista seria a estratégia adotada para a coleta de dados. Acreditamos que, ao utilizarmos a entrevista, poderíamos dar conta do ponto de vista dos nossos entrevistados, além de compreender e interpretar suas realidades (POUPART, 2012).

As entrevistas foram semiestruturadas, possuíam um roteiro previamente definido (LUDKE; ANDRÉ, 1986, GARNICA, 2012), porém “[...] aberto o suficiente para aproveitar as várias experiências relatadas por esses depoentes” (GARNICA, 2012, p. 102). Assim, foi possível incluir novas e diferentes questões no roteiro já definido para cada entrevistado à medida que seus depoimentos eram realizados. As questões foram pensadas seguindo as orientações de Bogdan e Biklen (2004, p. 209), enfatizando que “as questões desenvolvidas para orientar um estudo qualitativo devem ser de natureza mais aberta e devem revelar maior preocupação pelo processo e significado e não pelas suas causas e efeitos”.

Com as questões estabelecidas no roteiro inicial, buscávamos compreender o que pensam os professores em relação aos seguintes temas no curso de formação: a axiomatização e formalização da geometria; o uso da régua, do

compasso e de softwares de geometria dinâmica; a literatura; uma justificativa para a ausência da geometria no Ensino Básico; o modelo dedutivo da geometria¹.

1.2 A seleção dos professores formadores entrevistados

Uma vez estabelecido que a entrevista seria nossa “[...] estratégia dominante para coleta de dados [...]” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.134), começamos a nos preocupar com quais critérios consideraríamos e quem seriam os nossos entrevistados. Para Lefevre e Lefevre (2012), o ato de perguntar requer uma interação conjunta e articulada entre quem faz a pergunta e quem a responde. “O ator perguntador é alguém que quer saber algo e o respondedor é aquele que está em condições de satisfazer esse desejo” (p. 51).

Considerando ser de vital importância, esta etapa foi discutida de forma conjunta com o orientador do projeto, uma vez que reconhecemos:

Nesses casos, a definição de critérios segundo os quais serão selecionados os sujeitos que vão compor o universo de investigação é algo primordial, pois interfere diretamente na qualidade das informações a partir das quais será possível construir a análise e chegar à compreensão mais ampla do problema delineado (DUARTE, 2002, p.141).

Passamos algum tempo focados nas características que julgávamos necessárias aos professores que convidaríamos a compor a lista de entrevistados, já que eles deveriam ser:

[...] um informante-chave, capaz precisamente de “informar” não só sobre as suas próprias práticas e as suas próprias maneiras de pensar, mas também – na medida em que ele é considerado como “representativo” de seu grupo ou de uma fração dele – sobre os diversos componentes de sua sociedade e sobre seus diferentes meios de pertencimento (POUPART, 2012, p. 222).

Havia também que se considerar os objetivos por nós propostos, a disponibilidade e interesse por parte dos sujeitos em relação ao tema e condições de trabalho do próprio pesquisador. Sobre isso, concordamos que:

¹ Essas são as categorias discutidas no capítulo 3.

ao contrário do que ocorre com as pesquisas tradicionais, a escolha do campo onde serão colhidos os dados, bem como dos participantes é proposital, isto é, o pesquisador os escolhe em função das questões de interesse do estudo e também das condições de acesso e permanência no campo e disponibilidade dos sujeitos (ALVES-MAZZOTTI, 1998, p. 162).

Depois de várias discussões, chegamos às características que foram determinantes para a escolha dos entrevistados (GOLDENBERG, 2013) e que julgamos necessárias para que o entrevistado tivesse condições de discutir o tema: ser matemático e formador de professor de matemática; ter publicações ou projetos relacionados ao tema geometria; orientações de mestrado, doutorado ou iniciação científica relacionada à geometria; e, essencialmente, conhecimento e interesse pelo tema geometria.

Outro ponto debatido entre o pesquisador e seu orientador foi em relação ao número de entrevistados. Sabemos que esse item pode gerar controvérsias, não existe consenso quando se pretende definir um número exato de entrevistados em uma pesquisa qualitativa. Mesmo considerando que cada entrevista é única (GOLDENBERG, 2013), não tínhamos intenção de entrevistar muitos professores, por limitações e condições particulares do pesquisador, a dificuldade de encontrar professores que estivessem dispostos a colaborar e, ainda, o fato de que, na pesquisa qualitativa, não há preocupação com a representatividade numérica, mas com a compreensão do grupo social pesquisado (GOLDENBERG, 2013).

Definimos, então, que nossa amostra seria composta por cinco entrevistados. Como já exposto acima, “essa amostra não se constitui ao acaso, mas sim em função de características precisas que o pesquisador pretende analisar” (DESLAURIERS; KÉRISIT, 2012, p. 138). Depois que definimos quem seriam os prováveis entrevistados, coube ao orientador manter o primeiro contato. Nele, o orientador apenas informou que se tratava de uma pesquisa de mestrado, quem era seu aluno e qual seria o tema abordado nas entrevistas. Não houve, no entanto, qualquer indicação das questões que seriam propostas. O êxito foi excelente, todos os cinco convidados por ele se mostraram interessados e disponíveis. Porém, por motivos de agenda pessoal de uma entrevistada, não foi possível marcar a entrevista, obrigando-nos a ficar com um total de quatro entrevistados.

2 OS ENTREVISTADOS E AS ENTREVISTAS

2.1 Descrição dos entrevistados

Pretendemos fornecer aos nossos leitores uma breve descrição dos entrevistados. Basicamente, ela está pautada na formação acadêmica, instituição ao qual está ou foi vinculado, tempo de trabalho dedicado ao ensino de matemática nos cursos de formação, disciplinas relacionadas ao tema geometria que foram ministradas nesse período, além de temas abordados em suas publicações e/ou projetos de pesquisas. A caracterização dos entrevistados seguiu a ordem cronológica das entrevistas.

2.1.1 *O primeiro entrevistado*

O primeiro entrevistado, Wladimir Seixas, é professor no ensino superior e formação de professores há, aproximadamente, 20 anos. É Doutor em Matemática Aplicada, pela University of London, Inglaterra. Além disso, é Bacharel e Mestre em Matemática, com abordagem em geometria, pela Universidade Federal de São Carlos e pela Universidade de Brasília respectivamente. Hoje, é Professor Adjunto II da Universidade Federal de São Carlos – campus de Sorocaba e também colaborador na Universidade Estadual Paulista – campus de Rio Claro, ambas do interior de São Paulo, onde atua na Graduação e Programas de Pós-Graduação. Na graduação, além de diversas outras disciplinas, ministrou e ainda atua nas que se relacionam ao nosso tema de pesquisa, a saber: Desenho Geométrico e Geometria Descritiva, Geometria Euclidiana, Geometria Elementar e Geometria Diferencial. Na Pós-Graduação, ministra disciplinas de Matemática Aplicada, especialmente relacionada aos Sistemas Computacionais e Geometria. Orientou diversos projetos de Iniciação Científica e Mestrado nas áreas de Matemática Aplicada, Geometria e Ensino da Matemática. Além de estar envolvido em projetos de Matemática Aplicada e Computacional, possui diversas publicações nesse assunto.

2.1.2 *O segundo entrevistado*

O segundo entrevistado, Geraldo Perez, é professor aposentado, tendo dedicado mais de 35 anos ao ensino de matemática, especialmente em cursos de formação de professores. É Livre-Docente e Doutor em Educação Matemática, pela Universidade Estadual Paulista – campus de Rio Claro e Unicamp respectivamente. Mestre e Licenciado em Matemática, pela USP – campus de São Carlos, e pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro. Ressaltamos que seus títulos de Doutor e Livre-Docente foram conquistados com projetos envolvendo geometria. Nos cursos de graduação de formação de professores, ministrou disciplinas de diversas áreas do conhecimento matemático, além das relacionadas ao nosso tema: Geometria Elementar, Geometrias Euclidianas I e II, Desenho Geométrico e Geometria Descritiva e, ainda, Geometria Analítica. Na Pós-Graduação, ministrou Metodologias para o Ensino e Aprendizagem Matemática, além de Metodologia de Pesquisa. Sua produção bibliográfica é ampla, sendo inúmeros artigos relacionados ao tema geometria, com destaque para metodologia de ensino e aprendizagem e outros diversos artigos com ênfase na formação do professor. Foi orientador de mestrado, doutorado e iniciação científica, abordando a formação do professor, a Educação Matemática e também a geometria.

2.1.3 O terceiro entrevistado

O terceiro entrevistado, Irineu Bicudo, é professor aposentado que dedicou mais de 35 anos ao estudo e ensino da matemática como professor titular da Universidade Estadual Paulista – campus de Rio Claro. É Bacharel e Licenciado pela Universidade de São Paulo, Doutor pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, possui Pós-Doutorado pela University of California e Livre-Docente em matemática pela Universidade Estadual Paulista – campus de Rio Claro. Sua atuação é abrangente, englobando desde matemática pura, como lógica e álgebra, além de filosofia e história. Ministrou disciplinas para formação de professores de matemática na graduação e pós-graduação. Suas publicações, sejam elas artigos, capítulos de livros, tratam de conteúdos matemáticos específicos, filosofia e história da matemática, dentre os quais alguns referentes à geometria. Traduziu alguns livros clássicos de diversas áreas do conhecimento, incluindo a obra Os Elementos, de Euclides. Ao longo desses anos de trabalho dedicado ao ensino da matemática,

foi orientador de inúmeras dissertações de mestrado e teses de doutorado, abordando história, álgebra, lógica e geometria.

2.1.4 O quarto entrevistado

O quarto entrevistado, Paulo Roberto Vargas Neves, é professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – campus de Araraquara, no interior do Estado de São Paulo. É Mestre em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista – campus de Rio Claro. Atua com a formação de professores há, aproximadamente, cinco anos e ministrou várias disciplinas, além de geometria. Em uma Universidade Particular paulista, atuou como professor colaborador e ministrou disciplinas com foco na geometria. Sua experiência como professor do Ensino Médio em redes de escolas particulares, nos cursos pré-vestibulares, ultrapassa 15 anos. Suas participações e publicações em congressos têm ênfase na geometria e simetrias, temas também abordados nas suas orientações de iniciação científica.

2.2 Relato sobre as entrevistas

Nos parágrafos a seguir, apresentamos, resumidamente, alguns detalhes, como local, data, duração e algumas particularidades de cada entrevista. Acreditamos ser relevante dizer que nenhum dos entrevistados teve acesso ao roteiro ou questões que propomos antes da efetivação dos seus depoimentos.

2.2.1 A primeira entrevista

A nossa primeira entrevista foi também o que se costuma chamar de entrevista piloto, na qual se faz um pré-teste (ANDRÉ, 2008; GOLDENBERG, 2013), simulando a situação real. Ela ocorreu na sala do meu orientador, no Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro, no dia 11 de julho de 2013. Ressaltamos que na sala estavam presentes o pesquisador como entrevistador, o seu orientador como ouvinte e o nosso colaborador. O entrevistado teve a gentileza de se deslocar até Rio Claro para cumprir esse compromisso de colaboração com nosso projeto. Seguindo orientação de Bogdan e Biklen (1994), Goldenberg (2013), Poupart (2012),

inicie com uma conversa descontraída de modo a me apresentar, manter um contato amistoso, obter um clima de confiança e também informar sobre os objetivos da entrevista de forma breve. Ele já havia sido comunicado que seria o primeiro dos entrevistados, porém relembramos o entrevistado de que não havíamos feito um pré-teste e, portanto, aquela entrevista seria de vital importância.

Informamos, também, que, ao final da entrevista, gostaríamos de conversar informalmente no sentido de ouvir dele próprio suas considerações e observações da entrevista, sobre as perguntas, o formato utilizado, as dificuldades encontradas para responder e, se possível, apresentar sugestões. Foi o que fizemos. Uma vez encerrada a entrevista, que teve aproximadamente quarenta e dois minutos de duração, pesquisador, orientador e entrevistado iniciaram uma conversa franca e informal. A ideia era entender como ocorreu a entrevista do ponto de vista do entrevistado e, ao mesmo tempo, compartilhar com as nossas percepções e as observações do orientador, que ouviu toda a entrevista.

O foco foi essencialmente sobre as perguntas e o roteiro da entrevista. Se as perguntas estavam difíceis de responder, sobre a ordem em que apareceram e sobre a possibilidade de se reelaborar o roteiro da entrevista e perguntas (GOLDENBERG, 2013; GARNICA, 2012). O entrevistado comentou sobre a dificuldade que encontrou para responder. Sugeri que as perguntas poderiam ser menos profundas, um pouco mais objetivas e que, no decorrer da entrevista, outras perguntas poderiam ser feitas para se chegar ao ponto desejado. Chegamos ao consenso de que isso poderia ajudar o entrevistado a se soltar e falar livremente com riqueza de dados, o que caracteriza, segundo Bogdan e Biklen (1994), uma boa entrevista.

Como resultado dessa conversa informal, percebemos que, na verdade, tínhamos as cinco perguntas da primeira entrevista como temas a serem abordados. Com perguntas mais específicas, poderíamos deixar o entrevistado em melhores condições para falar, de modo que teríamos como traçar seu perfil. Com isso, outras perguntas seriam formuladas de acordo com as respostas e, assim, estaríamos explorando cada tema do ponto de vista do entrevistado com maior profundidade (POUPART, 2012). Saímos daquela conversa informal com ótimas perspectivas. A ideia inicial era de não intervir nas respostas dos nossos entrevistados, porém deveríamos atuar como legítimos entrevistadores, explorando ao máximo todas as possíveis informações.

2.2.2 A segunda entrevista

A segunda entrevista também ocorreu na sala do meu orientador, no Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro, no dia 10 de setembro de 2013. Foi marcada com certa antecedência, respeitando a agenda do nosso colaborador que, gentilmente, compareceu à Universidade para nos conceder a entrevista. Disse estar bastante motivado por ter sido convidado a relatar sobre o tema da nossa pesquisa, que era assunto do seu interesse e estava contribuindo com orgulho para nosso projeto. Novamente o meu orientador esteve presente na sala durante toda a entrevista, não como alguém que fosse intervir no processo, mas como ouvinte e observador. A ideia era que, depois da entrevista, eu e ele fizéssemos uma avaliação crítica do resultado alcançado com o novo formato dado à entrevista para, novamente, corrigir prováveis falhas ou tecer comentários que pudessem ser pertinentes. Para Duarte (2002, p.146), à medida que “[...] passamos a ouvir nossa própria voz nas gravações realizadas é que se torna possível avaliar criticamente nosso próprio desempenho e ir corrigindo-o gradativamente”.

A abordagem foi feita de acordo com as recomendações citadas acima, na primeira entrevista, o que propiciou um aprofundamento mais detalhado acerca das considerações e informações prestadas pelo professor entrevistado. Além de responder com tranquilidade a todas as nossas perguntas, o professor também fez relevantes comentários sobre suas pesquisas relacionadas ao ensino de geometria, direcionadas tanto ao processo de formação inicial do professor de matemática, bem como na formação continuada do mesmo. Essa foi a mais longa das entrevistas, totalizando, aproximadamente, uma hora e vinte minutos. Ao final da entrevista, pudemos perceber que realmente foi gratificante aquela conversa, tanto da parte do entrevistado como do entrevistador. Permanecemos na sala por alguns minutos conversando informalmente sobre o tema e relembando fatos da carreira do professor, o que foi emocionante.

2.2.3 A terceira entrevista

A terceira entrevista ocorreu nas dependências do Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro, em uma sala reservada de professor da Universidade, no dia 25 de setembro de 2013. Foi também marcada com

antecedência e respeitando a disponibilidade do nosso colaborador. Novamente, contamos com a generosidade do professor entrevistado, que não mediu esforços e se comprometeu a comparecer ao Departamento para que pudéssemos realizar a entrevista. Conversamos informalmente por alguns minutos, e tive a oportunidade de relatar minha experiência e quais eram os objetivos que me moveram a desenvolver o projeto em questão.

Essa entrevista se mostrou por demais interessante. Logo no início, fiquei sabendo que, apesar de ter trabalhado por mais de trinta e cinco anos como professor formador, o entrevistado nunca havia ministrado a disciplina de geometria em qualquer uma de sua modalidade. Por alguns segundos, senti-me desamparado, sem ação. Havia me preparado e estava muito entusiasmado para aquele momento. Antes mesmo de sugerir qualquer coisa, o professor parecia ler meus pensamentos e começou a dizer algo no seguinte sentido: “Bom, se me fosse possível dar um curso de geometria, eu faria da seguinte maneira”. Foi com essas palavras que a entrevista começou a se concretizar. O conhecimento surpreendente sobre o tema, a capacidade de relatar e informar de forma objetiva, aliada à experiência profissional do nosso entrevistado, possibilitaram que a entrevista transcorresse sem maiores problemas.

Com opinião plenamente formada em relação às perguntas que lhe foram feitas, o professor se dispôs prontamente a responder, de modo a expressar com clareza o que pensava sobre o ensino de geometria na formação do professor de matemática. Apesar de não ministrar a disciplina, relatou como deveriam ser, em sua opinião, as aulas de geometria, as bibliografias, o rigor matemático e a metodologia de ensino. Essa foi a entrevista mais curta de todas, teve a duração de, aproximadamente, trinta e três minutos. Ao final, o professor disse que estaria disposto a contribuir de alguma maneira, mesmo que informalmente, à medida que fosse necessário.

2.2.4 A quarta entrevista

A quarta entrevista estava praticamente fechada. Estava aguardando apenas que o entrevistado retornasse de um congresso para definir efetivamente a data, já que o local seria ou na residência do mesmo ou na instituição à qual ele está vinculado em uma cidade próxima de Rio Claro. Porém, no dia 21 de outubro de

2013, através de um contato telefônico, o nosso entrevistado disse estar de passagem por Rio Claro e que se disporia a comparecer à minha residência. Furneci o meu endereço ao entrevistado e, naquele mesmo dia, compareceu à minha casa, onde a entrevista acabou por se realizar.

Iniciamos um bate papo informal, de modo a comentar brevemente como surgiu o meu interesse pelo projeto. Também como os demais, o entrevistado se mostrou entusiasmado com a possibilidade de prestar seu depoimento, era a primeira vez que ele participava nessas condições e, principalmente, por ter interesse pessoal sobre o tema. A entrevista transcorreu de forma tranquila, de modo que todas as perguntas foram respondidas, e teve, aproximadamente, cinquenta e três minutos de duração. Por fim, permanecemos de forma descontraída por quase uma hora, conversando sobre assuntos diversos. O entrevistado também se prontificou a colaborar sempre que solicitado.

2.3 Transformando a entrevista em texto

Todas as entrevistas tiveram o áudio gravado digitalmente, em um telefone celular e também em um gravador portátil. O passo seguinte foi realizar a transcrição de cada uma delas, que é o primeiro momento da produção textual. A transcrição de cada entrevista teve início logo no dia seguinte da realização da mesma, pois segundo Goldenberg (2013), isso contribui positivamente para as entrevistas posteriores.

Considerando que “as transcrições são os principais ‘dados’ de muitos estudos de entrevista” (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 172), e com o objetivo de obter uma transcrição o mais fiel possível, o próprio pesquisador dedicou-se a transcrever integralmente cada uma das entrevistas. O procedimento adotado foi conservar literalmente tudo o que foi dito pelos entrevistados, mantendo-se os vícios de linguagem e palavras repetidas espontaneamente que são comuns na linguagem falada. Pelo nosso interesse em publicar tais entrevistas neste trabalho, realizamos o seu tratamento de acordo com os procedimentos comumente adotados em pesquisas de História Oral e Educação Matemática, tendo como referência Garnica (2012, 2005) e Silva (2007).

O segundo passo na produção textual da entrevista, segundo Garnica (2012), é a textualização, que pode, inclusive, ser feita em vários níveis de elaboração.

A textualização, segundo a concebemos, compõe-se de vários momentos, indo desde a simples “limpeza”, retirando os “vícios” de linguagem, podendo passar pela reorganização das informações transcritas – visando a uma sistematização cronológica ou temática (a narrativa, especialmente aquela dos depoentes mais fluentes, tende a entrelaçar tempos e temas) até uma reelaboração mais radical – a chamada transcrição – para o que podem ser chamados à cena elementos e estilos teatrais, ficcionais, recursos inusitados de estilo etc. (GARNICA, 2005, p. 126).

Em nosso caso, a opção foi por uma textualização mais elementar, de modo a conservar a fala original dos entrevistados sem descaracterizar o seu discurso, objetivando apenas um texto que permitisse uma leitura mais fluente. “Uma primeira textualização consiste em livrar a transcrição daqueles elementos próprios à fala, evitando as repetições desnecessárias – mas comuns aos discursos falados – e os vícios de linguagem” (GARNICA, 2012, p.104-105).

Para Garnica (2005), já no ato de colher, transcrever e textualizar os depoimentos, o pesquisador deixa sinais da sua interpretação. Na tentativa de minimizar qualquer distorção do real ponto de vista dos entrevistados, e considerando que ao se fazer uma textualização, “deve-se compreendê-la não como uma intervenção num texto que é de outro, mas como uma elaboração do pesquisador a partir do que o outro narrou” (GARNICA, 2005, p. 127), decidimos que essa seria feita de forma conjunta com os entrevistados. Para tanto, o procedimento utilizado foi enviar uma cópia da transcrição inicial da entrevista, como descrito a seguir, para cada um dos professores.

Para o primeiro entrevistado, foi enviada uma cópia via correio eletrônico, sugerindo que ele marcasse em amarelo as palavras ou frases que desejasse vetar e retirar na entrevista. Caso fosse acrescentar algo, sugerimos que colocasse em negrito, de modo que saberíamos o que fazer na elaboração final do texto. Ao recebermos o retorno, o próprio entrevistado havia retirado os vícios de linguagem, palavras repetidas e feito algumas pequenas alterações na sua fala. Consideramos prudente deixar a textualização exatamente como estava, omitindo apenas alguns vícios de linguagem da fala do entrevistado.

Para o segundo entrevistado, foi enviada uma cópia impressa da transcrição. Solicitamos que riscasse as palavras ou frases que quisesse retirar da sua fala e acrescentasse, no corpo do texto, o que considerava relevante em sua opinião. Quando recebemos o retorno, percebemos que ele havia feito o que propomos. Foram riscadas a maioria dos vícios de linguagem, as palavras repetidas e as poucas frases sem relevância. Coube ao pesquisador realizar as alterações propostas pelo entrevistado, deletando e acrescentando poucas palavras, dando ao texto maior fluidez e clareza.

Para o terceiro entrevistado, o procedimento foi idêntico ao segundo, sendo enviada uma cópia impressa com as mesmas instruções. Ao recebermos seu retorno, percebemos que o professor havia riscado os vícios de linguagem e trechos que considerou irrelevantes no seu depoimento, pois fugiam do tema da entrevista, e poucas palavras foram acrescentadas. Novamente, o pesquisador realizou as alterações, idem ao caso anterior.

Para o quarto entrevistado, o procedimento foi idêntico ao primeiro, sendo enviada uma cópia por correio eletrônico. Este seguiu nossas instruções, marcando em amarelo o que pretendia retirar e colocando em negrito as novas informações. O entrevistado, entretanto, não se preocupou com as palavras repetidas ou vícios de linguagem, apenas informou que poderíamos retirar. Eliminamos, então, a maioria dos vícios de linguagem e as palavras que se repetiam, deixando o texto mais limpo, mas preservando quase que totalmente a característica da língua falada. Ao realizar esse procedimento de forma conjunta, estávamos, de certa forma, legitimando os dados obtidos nas entrevistas, visto que:

A textualização (em seu desenvolvimento) pode ser vista, assim, como um processo colaborativo entre aquele que quer se fazer entendido – o entrevistado – e aquele que almeja produzir um texto com os pensamentos do outro – o pesquisador-entrevistador (SILVA, 2007, p. 421).

Já que cada entrevistado tomou ciência do que ele próprio disse no discurso coletado e teve a possibilidade de alterar o que desejasse, consideramos ter dados fiéis, no sentido de representarem o ponto de vista que os entrevistados queriam defender nessa situação específica que é a desta pesquisa.

3 ANÁLISE DOS DADOS

Depois de recolhidos os dados da nossa pesquisa, é chegada a hora de reunir o material disponível e cumprir com a etapa crucial, a análise dos dados. Entre tantas possibilidades, optamos por adotar a análise de conteúdo, tendo como referencial teórico as ideias de Bardin (2009) e Franco (2007). Análise de conteúdo é

um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2009, p. 44).

Nossos dados foram as entrevistas gravadas em áudio e transcritas, um pequeno questionário complementar, além das observações do pesquisador durante o processo. As mensagens contidas nos dados podem estar em formas distintas, a verbal podendo ser oral ou escrita, a gestual, a silenciosa e até mesmo figurativa (FRANCO, 2007). Podíamos, além de ler, ouvir os depoimentos, lembrar-nos dos gestos dos professores durante nossa conversa e ter percepções dos breves momentos de silêncio. Considerando os diversos tipos de mensagens contidas nos dados, acreditamos que é:

Com base na mensagem, que responde às perguntas: o que se fala? O que se escreve? Com que intensidade? Com que frequência? Que tipo de símbolos figurativos são utilizados para expressar ideias? E os silêncios? E as entrelinhas? E assim por diante, a análise de conteúdo permite ao pesquisador fazer inferências sobre qualquer um dos elementos da comunicação (FRANCO, 2007, p. 24).

Para Bardin (2009), existem três fases na análise de conteúdo, que apresentaremos de forma sucinta a seguir.

A primeira fase é a pré-análise, na qual o pesquisador tem por objetivo a organização do material com os dados da pesquisa, sistematiza suas ideias para o desenvolvimento das etapas seguintes. É nessa fase que se faz “a escolha dos

documentos a serem submetidos à análise, a formulação das *hipóteses* e dos *objectivos* e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final” (BARDIN, 2009, p. 121).

Ainda na pré-análise, realizamos o que Bardin (2009) chama de leitura flutuante, na qual o pesquisador tem contato com os documentos que pretende analisar e conhecer o texto. Nesse momento, ele se deixa “[...] invadir por impressões, representações, emoções, conhecimentos e expectativas” (FRANCO, 2007, p. 52). Com essa primeira leitura, definimos o material que iria compor o corpus de nossa análise. “O *corpus* é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos” (BARDIN, 2009, p. 122). Em virtude do número reduzido de entrevistas e também de questionários, decidimos que analisaríamos todos em sua totalidade.

A segunda fase da análise de conteúdo é a exploração do material. Realizamos novas e repetidas leituras dos textos, agora buscando encontrar e compreender detalhes antes não vistos. Tentamos decompor e codificar nosso material. “Esta fase, longa e fastidiosa, consiste essencialmente em operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função das regras previamente formuladas” (BARDIN, 2009, p. 127).

A terceira fase, o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. Nesse momento, tentamos atribuir significados para os dados. “Os resultados em bruto são tratados de maneira a serem significativos (falantes) e válidos” (BARDIN, 2009, p. 127)².

Apresentaremos, neste capítulo, a análise dos dados da pesquisa. Evidentemente que nosso foco será a fala dos professores nas entrevistas transcritas, mas levaremos em conta a percepção que tivemos em relação aos gestos e tom de voz durante a conversa. Acreditamos que isso poderá nos ajudar a compreender melhor cada um deles, além de notar pontos de convergências, divergências ou mesmo pensamentos únicos, mas não menos importantes.

² Em nosso trabalho essa fase aparece no capítulo 3, onde discutimos os dados, relacionando o que foi dito nas entrevistas. E no capítulo 4, onde discutimos os resultados ao lado de referências bibliográficas sobre os temas.

Esclarecemos que os trechos retirados das entrevistas serão precedidos pelos nomes dos entrevistados, a saber: Wladimir, Geraldo, Irineu e Paulo.

3.1 Sobre axiomática e formalização da geometria nos cursos de formação

A Geometria, apesar de ter sua origem como uma ciência empírica e de aplicação prática, torna-se, a partir de Euclides e sua obra *Os Elementos*, uma ciência logicamente construída por um sistema dedutivo axiomático. Assim, nosso primeiro foco era compreender o que nosso grupo de entrevistados pensa ser relevante na formação do professor de matemática em relação à axiomatização da geometria.

Wladimir: No caso eu que já ministrei a disciplina três vezes, a minha ênfase foi, ah, seguir a rigor a questão da axiomática, né?

Geraldo: Ela tem que ser trabalhada. Ela tem que ser trabalhada sempre, sempre. [...] É necessário que o professor de matemática, ao sair do curso de matemática, aprenda e saiba que existe uma geometria axiomática.

Irineu: Então, como a geometria foi a primeira a tentar ser tratada do ponto de vista axiomático desde os gregos, com mais forte razão, no século XX, no século da axiomática, eu faria a coisa do ponto de vista axiomático.

Paulo: Então, essa estruturação da matemática... na forma axiomática, eu acho que é importante na formação de matemática, em particular na formação de geometria.

Foi uma unanimidade o ponto de vista dos professores. Nas suas respostas, percebe-se a convergência de pensamento de que se deve trabalhar a geometria de forma axiomática. Três entrevistados mostram sua preocupação diretamente ligada à formação do professor. Irineu, por sua vez, ressalta que a axiomatização é uma das características históricas da geometria, o que deve ser levado em consideração

ao tratarmos dessa disciplina. Historicamente, o modelo axiomático da geometria se observa a seguir.

Então, por volta do ano 300 a.C., Euclides produziu sua obra memorável, os *Elementos*, uma cadeia dedutiva única de 465 proposições compreendendo de maneira clara e harmoniosa geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega (EVES, 1992, p. 9).

O mesmo autor reafirma a importância da matemática grega, na sua forma lógica e dedutiva, que partia de noções iniciais, argumentando que: “Certamente a contribuição mais importante dos gregos antigos à matemática foi a formulação do modelo de axiomática material e a insistência em que a geometria fosse sistematizada de acordo com esse modelo” (EVES, 1992, p. 10).

Ainda sobre a axiomatização da geometria, o professor Irineu destaca outro fato crucial do ponto de vista histórico da geometria, que foi a formalização da geometria feita por Hilbert.

Irineu: Evidentemente, eu poderia usar uma axiomática moderna. Como David Hilbert usou, mas eu daria um curso de fundamentos de geometria do ponto de vista axiomático.

Os Elementos de Euclides propuseram uma geometria axiomática e com uma organização lógica válida para a época e que serviu de modelo matemático por séculos (FETISSOV, 1994). Porém, no século XIX, o rigor lógico da matemática era o que imperava e, na visão de muitos matemáticos posteriores a Euclides, sua obra carecia do rigor e justificativas que fossem aceitas na época. É nesse momento que: “A axiomática formal foi desenvolvida sistematicamente pela primeira vez por David Hilbert, no seu famoso *Grundlagen der Geometrie (Fundamentos da Geometria)*, de 1899” (EVES, 1992, p. 26). Essa foi uma obra fundamental, considerada depois dos Elementos o trabalho mais importante sobre geometria e base de modelo axiomático formal da matemática do século XX (EVES, 1992).

Porém, apesar de haver uma concordância quanto ao uso da axiomática da geometria na formação do professor, observamos algumas ressalvas. O entrevistado

Wladimir sugere a necessidade de um pré-requisito para que se trabalhe adequadamente a axiomática, além de se preocupar com a parte psicológica do aluno, fato que Paulo, em dado momento, demonstra compartilhar.

Wladimir: No curso de licenciatura acredito ser possível trabalhar a axiomatização e a formalização da Geometria Euclidiana. Para isso é preciso trabalhar alguns pré-requisitos. [...] Se o aluno não teve essa formação em teoria dos conjuntos então a axiomatização e as demonstrações serão mais descritivas, serão mais do ponto de vista descritivo.

Paulo: Ressaltando, é uma disciplina de primeiro ano, de primeiro semestre de graduação... em alguns momentos, eu... não priorizava a formalização.

Essa preocupação dos professores entrevistados é a mesma apontada por Cury (1988), ao dizer que alunos iniciantes nos cursos superiores muitas vezes não apresentam condições de realizar um estudo axiomático. O mesmo fato é apontado por Garnica (1995) em seu estudo sobre a prova rigorosa na formação de professores. Para o autor, os alunos apresentam ansiedades e bloqueios nas disciplinas nas quais se tem o contato com a formalização, logo no início do curso.

As colocações são representativas do ponto de vista da formação do professor. Se pensarmos na qualidade do profissional que sai da Licenciatura em Matemática, é evidente que se espera que ele seja capaz de fazer uma demonstração de maneira formal e aceita nos padrões matemáticos atuais. No entanto, sabe-se que a geometria axiomática nem sempre é trabalhada, ficando ausente em alguns cursos de formação, como aponta Lovis (2009, 2013). Uma consequência é “[...] que a Geometria Euclidiana, para esses professores, pode não passar de fórmulas para o cálculo de áreas, perímetros e volumes, ou como o reconhecimento e nomeação das figuras e sólidos geométricos” (LOVIS, 2013, p. 94).

Outro tópico de interesse em nossas entrevistas norteava a formalização da geometria, já que uma questão que se discute na formação do professor de matemática está relacionada ao rigor e à formalização matemática adotada nos cursos. Nossa pesquisa procura discutir essa questão especificamente no ensino de geometria, mas acreditamos ser necessário antes pensar a formalização e o rigor

matemático na formação do professor de forma geral, tema que abordamos mais especificamente no capítulo Buscando nas Referências.

Queríamos saber o que pensavam nossos entrevistados em relação ao formalismo e rigor matemático focando a geometria dada na formação dos professores.

Wladimir: A dificuldade que encontramos está na maturidade do aluno no que se refere às técnicas de demonstrações e ao próprio entendimento do método axiomático. [...] Nesse sentido, o conteúdo da axiomática, da formalização está muito atrelado à filosofia do curso, da importância que o curso dá.

Geraldo: Eu acho que tem que ser. Tem que ser de forma rigorosa. Porque o professor de matemática tem que receber uma formação como matemático.

Irineu: Mas, na hora de expor, a exposição tem que ser formal, na geometria em particular. [...] Então deve ser rigorosa, sim. Sem dúvida, deve. Os conceitos devem ser introduzidos com definições apropriadas. Os postulados devem ser explicitamente enunciados.

Paulo: [...] sim, eu me preocupava com a formalização, eu me preocupava em redigir de maneira formal no quadro e não, não, eu não cobrava isso dos alunos de uma maneira bastante rigorosa, dada a condição de ser o primeiro semestre.

Nossos entrevistados apontam na direção de que a formalização deve ser trabalhada na formação do professor, em particular na geometria. Isso ficou evidente durante a entrevista, com cada um deles, quer fosse respondendo diretamente essa questão ou em falas intercaladas nos discursos. O professor de matemática tem de conhecer a linguagem formal com base nos conceitos e definições, ou seja, como um matemático.

Para Wladimir e Paulo, uma das dificuldades é que o aluno do primeiro ano está um pouco imaturo para o tratamento axiomático formal da disciplina. Além da dificuldade de entender o sistema dedutivo, o aluno encontra também barreiras na linguagem e escrita formal, obrigando o professor a ponderar o uso da formalização.

Paulo: Muitas vezes eu percebia que havia o entendimento, mas que havia uma dificuldade por ser o primeiro semestre, uma dificuldade muito em... redigir

essa informação, em traduzir esse entendimento para uma linguagem matemática, que é a linguagem formal.

A formalização estaria também dependente da instituição de ensino formadora e dos professores que nela trabalham. Observamos, na fala de Wladimir, que os cursos de formação podem, evidentemente, por meio do programa de cada disciplina e da grade curricular, propor um curso em que a formalização seja trabalhada com maior ou menor ênfase, ou mesmo nem seja trabalhada. Porém cabe ao professor que ministra a disciplina diretamente optar por um tratamento formal ou não em sua prática. Geraldo e Irineu indicam seguir rigorosamente o formalismo, entendendo ser crucial na formação do professor. O curso de Licenciatura em Matemática é, antes de tudo, um curso de Matemática, de modo que o aluno deve receber um aprendizado matemático rigoroso.

Geraldo: Então, entrou no curso de matemática, licenciatura ou bacharelado, ele vai ter que sair daqui sabendo matemática.

Irineu: A matemática não é conhecida como a ciência mais exata, a ciência exata? [...] Não causa medo. É como eu digo a você. Acho que se você aprende desse jeito, é um aprendizado de uma coisa como qualquer aprendizado de qualquer outra coisa.

Assim como ocorreu ao relatarmos sobre a axiomatização, na formalização percebe-se novamente, na fala de Wladimir e Paulo, a preocupação com o momento em que surgem esses temas na formação do professor. Essa preocupação levanta a seguinte questão: existe um melhor momento no curso de formação para ocorrer o estudo da Geometria Euclidiana abordando a axiomatização e a formalização? Esse momento interfere na atuação do futuro professor ao abordar a geometria na Educação Básica?

Dada a ênfase com que essa preocupação apareceu em dois depoimentos, uma categoria de análise foi criada.

3.2 O momento da geometria nos cursos de formação

Ao observarmos as grades curriculares das instituições formadoras de professores de matemática, nota-se, além de diferenças nas disciplinas oferecidas, a ordem em que elas são oferecidas no contexto geral dos cursos. Não é do nosso interesse discutir diretamente qual seria a grade curricular ideal nem apontar uma ordem de apresentação das diversas disciplinas desses cursos. No entanto, constatou-se nos depoimentos dos professores, pensando especificamente na geometria, que uma mudança de ordem poderia alterar a forma de se trabalhar o aprofundamento dado na axiomatização e formalização e que isso poderia influenciar no ponto de vista dos futuros professores em relação à geometria.

A seguir, encontramos, nos depoimentos, algumas observações relacionadas com o momento em que se trabalha a geometria na formação do professor.

Wladimir: Você pode trazer a Geometria Euclidiana para o primeiro semestre, no formalismo e axiomática você vai ensinar uma Geometria Euclidiana do Ensino Médio. Talvez para a formação do professor é melhor que ela esteja mais avançada, depois que ele tiver uma boa noção de contínuo e dos números reais.

Paulo: Então, a disciplina de geometria no primeiro semestre ela ajuda no trabalho com as outras disciplinas. No entanto, pensando só em geometria, é verdade, se ela fosse dada, se tivesse outra disciplina que pudesse ajudar nisso, para que eu pudesse explorar melhor a geometria, a axiomatização, a formalização e o entendimento em situações de problemas.

Vemos que existe, por parte desses professores, uma preocupação real em relação ao momento em que se apresenta a disciplina de geometria nos cursos de formação e que o modo como se trabalha a formalização depende desse momento. A posição de Wladimir é de que se perde muito na formação do professor em relação aos conteúdos da geometria se ela for administrada no início do curso. Sabemos que sem esse conteúdo o professor não teria condições de ensinar geometria, pois faltariam os conhecimentos geométricos necessários na sua prática pedagógica (LORENZATO, 1995). Paulo evidencia uma preocupação com a axiomática e o formalismo, que poderiam ser melhor discutidos com o apoio de outras disciplinas. Manrique (2003) diz que os professores pesquisados por ela apresentavam sentimentos negativos em relação à geometria, o que nos faz pensar

na seguinte questão. Como todos os entrevistados disseram trabalhar a geometria de forma axiomática e formal, seria então possível que professores levem pensamentos negativos em relação ao tema geometria ao concluírem a formação inicial?

Wladimir: Talvez a Geometria Euclidiana não deva ser ensinada no primeiro ano. [...] Então, o que se está defendendo é um momento do ensino de Geometria Euclidiana na formação do professor. Então, aquele momento se justifica, e volta-se na questão do currículo como um conhecimento agregado que faz o estudante ter uma nova visão. Sobre o que aprendeu e sobre o que ele vai ensinar. É claro que ele não vai dar aula de axiomática no Ensino Médio, mas ele terá um entendimento mais amplo de tudo o que tá acontecendo. É neste sentido.

Em sua pesquisa, Cury (1988) relata sobre as considerações de Wladimir. A autora diz que ao ministrar a disciplina de “Geometria Plana” no primeiro semestre de forma axiomática, percebeu que alunos ingressantes nem sempre conseguem fazer um estudo de forma axiomática. A pouca geometria recebida no Ensino Básico e a dificuldade em fazer conjecturas e analisar para demonstrar teoremas seriam as causas. Algo semelhante é relatado por Gravina (1996), afirmando que, ao oferecer a disciplina de Geometria Plana e Espacial aos alunos do primeiro ano na Licenciatura em Matemática, constata a dificuldade com a dedução, o rigor e raciocínio dedutivo da geometria. Aprofundar o estudo da geometria, fundamentada no rigor e na formalização em um segundo momento na formação inicial seria uma alternativa?

A preocupação de Wladimir aponta para a possibilidade de se repensar o currículo das instituições formadoras de modo a contribuir, por um lado, na formação geral do futuro professor e, por outro, no seu conhecimento específico de geometria. O problema curricular das instituições formadoras também é apontado por Lorenzato (1995) como uma das causas da precariedade do ensino da geometria.

Uma delas é o currículo (entendido diminutivamente como conjunto de disciplinas): nos nossos cursos de formação de professores, que possibilitam ao seu término o ensino da Matemática ou Didática da Matemática (Licenciatura em Ciências, em Matemática, em Pedagogia e Formação para o Magistério), a Geometria possui uma

fragilíssima posição, quando consta. Ora, como ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece, está aí mais uma razão para o atual esquecimento geométrico (LORENZATO, 1995, p. 4).

Iniciar o curso de formação com uma disciplina axiomática e promover um estudo formal, segundo relatado pelos entrevistados, pode ter um resultado negativo, de inibição do aluno.

Wladimir: É isso. Agora qual é o problema? Se você fizer aquela axiomática, aquele formalismo no início da formação, talvez ocorra um aborto do indivíduo.

Paulo: Então, eu acho que a gente tem... que ser firme com a questão do rigor, da questão da formalização. No entanto, dada essa condição do aluno, você tem que afrouxar em alguns momentos, pra que o aluno também se sinta à vontade, para que o aluno também é... arrisque alguma coisa.

Nossos entrevistados nos apresentam uma situação que divide opiniões e, certamente, merece discussão. Não pretendemos fazê-la de forma geral aqui. Estamos pensando especificamente na geometria, foco do nosso estudo. Cury (1988), em sua pesquisa, revela que os ingressantes do curso de Matemática reclamam do rigor e formalismo nas demonstrações. Ainda compartilhando com Wladimir e Paulo, para a autora, a exigência de certos detalhes pode produzir uma atitude negativa, a qual condena, que é aprisionar o pensamento do aluno nas cadeias do rigor matemático. Considerando que, em alguns cursos, a geometria está presente no primeiro ano, surge uma pergunta. Estar no início do curso, com uma abordagem formal e rigorosa afasta a geometria da prática pedagógica do futuro professor?

Durante as entrevistas, percebemos que a geometria euclidiana é trabalhada em diferentes momentos se compararmos as instituições onde os entrevistados trabalham ou trabalharam. Ela pode aparecer no primeiro, no segundo ou no quarto ano, ou seja, há uma diferença considerável dependendo do momento em que a disciplina aparece nos cursos de formação. Consideramos que essa questão permanece aberta, uma vez que não temos resultados que apontem qual seria o momento ideal para o estudo da geometria e nem mesmo se isso traria algum

resultado positivo na formação do professor de modo a contribuir na sua prática docente.

3.3 A figura na demonstração em geometria

Nas entrevistas realizadas, pretendíamos obter uma visão geral dos entrevistados em relação ao estudo da geometria na formação de professores. Consideramos pertinente abordar o papel da figura não apenas no contexto geral, mas em particular, o que representa a figura e se ela é aceita na demonstração de uma proposição ou teorema. Algumas das considerações feitas são apresentadas a seguir.

Wladimir: Neste sentido, tem-se a justificativa da construção. Por que aquela construção é verdadeira? Por que aquela construção é a que responde ao problema? As justificativas são exatamente os teoremas e resultados que o estudante viu até aquele momento.

Geraldo: Bom, o desenho... ele sempre ajuda, o desenho ajuda. Na formalização, o desenho não prova.

Irineu: A figura é fundamental nos elementos do Euclides, a figura faz parte da demonstração. [...] Nos Elementos. Do ponto de vista moderno, você não considera mais assim.

Paulo: Então, o desenho para o aluno intuir, para criar conjectura, é... pro aluno ter alguma ideia, ok? Mas eu deixava claro que o desenho não serve como argumento.

No estudo de geometria, a figura aparece de forma espontânea, e, naturalmente, existe a tendência de recorrer a elas em uma demonstração. Foi unanimidade entre os entrevistados de que uma figura em si não é demonstração de um resultado em geometria. É uma fonte auxiliar, que ajuda na demonstração, mas é necessário que se justifique usando os conhecimentos geométricos de que a construção é solução do problema, pois:

Em nosso entender, para estudarmos geometria, devemos esboçar figuras geométricas, procurar identificar os resultados que as figuras nos possam sugerir, refletir sobre essas sugestões e procurar provar as que julgarmos verdadeiras, assim como duvidar de nós mesmos, ou seja, questionar o já sabido (PEREZ, 1991, p. 136).

Historicamente, a figura fazia parte da demonstração nos Elementos, conforme relatado por Irineu, servindo de apoio na obtenção dos resultados. Sobre as construções feitas por Euclides, (BICUDO, 2007, p. 212) diz: “É a partir dela, é tendo-a sempre sob a vista, que a *demonstração* se faz”. Ou seja, era com base nas figuras que Euclides argumentava, recorrendo aos fatos já demonstrados anteriormente para afirmar suas conclusões.

Evidentemente que, em outras épocas, o valor da figura em uma demonstração era outro. Por exemplo, na Idade Média, muitas proposições geométricas não eram demonstradas, um desenho era colocado e junto dele a palavra “veja” indicava que aquilo era verdade (FETISSOV, 1994). O mesmo autor, já modernamente falando, lembra que só a figura não pode ser uma demonstração, só olhar não basta, tem de pensar sobre ela. E ainda afirma: “deve-se ter em mente que o desenho é apenas um meio auxiliar para a demonstração do teorema, que é apenas um exemplo, um caso particular de toda a classe das figuras geométricas, objeto da demonstração considerada” (FETISSOV, 1994, p. 28).

A importância da construção no estudo da geometria foi evidenciada nos relatos, porém a necessidade de uma justificativa para a construção permeava os depoimentos. A justificativa, por sua vez, se dá pela teoria, os conceitos e definições da geometria que não podem ser esquecidos, como se percebe a seguir.

Wladimir: Às vezes, eu acho que se perde muito nesta questão de dissociar os dois assuntos, o Desenho Geométrico e a Geometria. Quando estudamos as construções geométricas, após a construção, queremos saber a justificativa. Por que tal construção é verdadeira. Neste momento, se recorre à Geometria.

Geraldo: Agora você vai dizer para seus alunos: olha, esse é o traçado da perpendicular, mas você vai ter que provar que aquele traçado originou o ângulo reto. Aí é outra coisa.

Paulo: Então, se o aluno fizesse o desenho, se o aluno deixasse ali o desenho, eu podia até olhar pra demonstração dele e tentar perceber o que ele estava tentando dizer com aquilo, através do desenho. [...] Porque o desenho sozinho não... não serve como argumento.

Os depoimentos evidenciam, sobretudo, que o professor de matemática pode e deve se utilizar dos desenhos nas aulas de geometria, já que esse é um dos recursos didáticos consolidados para seu ensino e aprendizagem (PAIS, 1996). Ao mesmo tempo, revela ser primordial que o professor conheça e domine os conteúdos e as definições geométricas, já que sem esses não se podem tirar as conclusões desejadas.

Nas entrevistas, ao abordar o tema figura na demonstração, estávamos supondo, evidentemente, que o professor trabalhasse com seus alunos as demonstrações da geometria. Supomos, também, que seus alunos estão em uma instituição na qual as demonstrações matemáticas, em geral, seriam trabalhadas nas diversas disciplinas do currículo. Porém, como relatado pelos entrevistados, os alunos chegam ao ensino superior com dificuldades elementares da matemática. E justamente “em função dessa situação as licenciaturas foram abandonando as demonstrações em seus cursos” (PIETROPAOLO, 2005, p. 126).

Entendemos que um curso, no qual a demonstração não se faz presente nas diversas disciplinas de conteúdo matemático, o estudo da geometria, em particular, mesmo que presente na grade curricular da instituição fica comprometido. Usiskin (1994) lembra que a geometria foi a primeira a se organizar logicamente e que “dentre todas as áreas da matemática, só a geometria tem como objetivos principais justificar, discutir lógica e dedução e escrever demonstrações” (p. 34).

3.4 A régua, o compasso e os softwares de geometria dinâmica

Outro tema abordado por nós nas entrevistas esteve relacionado à opinião dos professores formadores em relação ao uso da régua, do compasso e dos

softwares de geometria dinâmica. Se esses seriam essenciais na formação do professor e de que forma eles articulariam o seu uso ao ensinarem geometria. Vejamos, então, as primeiras considerações referentes ao uso da régua e do compasso.

Wladimir: As construções com régua e compasso são importantes, principalmente para se trabalhar os conteúdos.

Geraldo: Eu acho, acho que é importante. E... é... é fundamental, é fundamental. Porque com a régua e compasso o aluno consegue ver e imaginar muita daquela geometria que é feita no plano e no espaço tridimensional.

Irineu: Claro que é importante. É importante porque a geometria euclidiana é exatamente a geometria da régua e do compasso.

Paulo: Eu considero muito importante. É... eu não vejo uma Licenciatura em Matemática sem o trabalho, eu não vejo um curso de geometria bem dado sem o trabalho... de um trabalho com régua e compasso.

As considerações dos professores formadores em relação ao uso da régua e do compasso enfatizam sua importância para o estudo da geometria. Abordando primeiramente a consideração de Irineu, percebe-se a concepção de que a geometria euclidiana é a geometria ligada às construções de régua e compasso. Como vimos anteriormente, as figuras auxiliam as demonstrações dos teoremas e “foi precisamente a visualização das figuras que acompanham as demonstrações o que levou Euclides e seus leitores a aceitarem como verdadeiras” algumas alegações (PAVANELLO, 1997 apud ZUIN, 2001, p. 57).

Do ponto de vista de Wladimir e Paulo, encontramos a preocupação com a teoria desenvolvida e a formação do professor. Entendemos que na disciplina de geometria euclidiana, nos cursos de formação, não é suficiente o tratamento teórico, axiomático e formal. Para que o professor consiga cumprir efetivamente seu papel,

[...] deveria receber uma formação geométrica adequada, na qual os diferentes aspectos relativos à visualização geométrica deveriam ser

abordados, enfatizando as diferentes formas de representação de objetos geométricos, o que lhe possibilitaria contato com as diversas interpretações que podem ocorrer (PASSOS, 2000, p. 79).

As construções teriam como possibilidade facilitar a compreensão dos conceitos definidos e seriam fundamentais na formação do professor para sua compreensão e embasamento teórico da geometria (ZUIN, 2001). Essa é também a opinião de Geraldo, que vai além, apontando que, pelas construções, o aluno teria como recurso a visualização. Consideramos imprescindível que o futuro professor consiga explorar plenamente esse recurso, pois “considerando-se que a visualização tem sido reconhecida como um componente necessário para o ensino e aprendizagem da Geometria (exceção do período da Matemática Moderna)” (PASSOS, 2000, p. 92), é de se esperar que ele aprenda a explorar tal recurso na sua formação.

A visualização é um recurso dos mais importantes no ensino da geometria para o Ensino Básico, se levarmos em conta a teoria desenvolvida por Van Hiele, colocando a visualização como o primeiro nível do desenvolvimento do pensamento geométrico da criança. Lembrando que nessa teoria existem cinco níveis: “visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor” (DIAS, 2009, p. 20).

Podemos, inclusive, fazer uso das construções para o estudo axiomático da geometria, de modo que os resultados são observados nas figuras e justificados pela teoria.

Wladimir: Você faz as demonstrações a partir dos resultados geométricos e, depois, algumas construções com régua e compasso que servem como exemplo.

Geraldo: Eram teoremas, eram teoremas de geometria euclidiana que estavam lá para serem desenhados com régua e compasso e provados, matematicamente, com conceitos de geometria euclidiana.

O desenvolvimento acelerado e constante dos recursos tecnológicos dos últimos anos tem sido motivo de mudança na sociedade em geral, em todos os países do mundo. As tecnologias informáticas, cada vez mais acessíveis, alteram a

forma de comunicação, as relações pessoais e também o sistema educacional. Inclui-se, aqui, a Educação Matemática na qual estamos inseridos neste trabalho. Como dito anteriormente, durante as entrevistas, procuramos obter dos entrevistados suas considerações e opiniões sobre o uso das tecnologias informáticas, especificamente, os Softwares de Geometria Dinâmica na formação do professor. Ressaltamos, no entanto, que o foco foi restrito ao seu uso para o ensino da geometria, assim, é o que abordaremos a partir deste momento. Vejamos algumas das considerações obtidas.

Wladimir: Além disso, você só valoriza o software se você sabe a dificuldade em fazer. [...] Eu acredito que é importante fazer o uso primeiro da régua e do compasso para depois utilizar o software.

Geraldo: Bom, eu considero importante, porque o mundo de hoje já passou a usar demais essa máquina. Tudo virou dinâmico e em tudo você usa o computador, usa software pra tudo. Agora, a única coisa que eu ainda não dispenso é... se for pensar em geometria, a gente tem que saber fazer.

Irineu: Eu não conheço nada disso. Isso, realmente, não posso responder.

Paulo: Então, eu acho uma ferramenta bárbara, eu acho uma ferramenta importante tanto no desenho geométrico como na geometria.

Os professores, em sua maioria, apontam que é importante o uso de softwares de geometria dinâmica, considerando a presença dos recursos tecnológicos uma realidade na sociedade moderna. O interessante é observar que, na opinião de Wladimir e Geraldo, implicitamente, máquina ou software nenhum substitui a ação humana, nesse caso, a do professor. Reconhecem que o software tem importância, no entanto, acreditam ser primordial que o professor, diante da responsabilidade educacional e como profissional da área, saiba fazer ele próprio, manualmente, nesse caso, referindo-se às construções geométricas, antes de usar um software de geometria dinâmica. Nesse sentido, acreditamos que o professor precisa ter conhecimento do conteúdo, caso contrário terá dificuldade de realizar atividades utilizando o computador (VALENTE, 1999).

Em relação ao exposto por Irineu, julgamos necessário esclarecer. Primeiro, devemos levar em consideração o fato de que esse entrevistado nunca ministrou a

disciplina de geometria no curso de formação, conforme já informado. Então, podemos dizer que se justifica sua convicção em tal afirmação. Segundo, não podemos afirmar que o professor desconhece os softwares de geometria dinâmica, pois mostra sua compreensão acerca do que eles podem ajudar em uma aula em que se utiliza tal recurso.

Irineu: É uma animação. É animação das coisas, mas... É um recurso. [...] Para visualizar. Como a figura. Para ajudar você a visualizar.

Notadamente, nesse caso, o professor reconhece que os softwares podem contribuir de forma significativa na visualização das figuras, nas relações que se estabelecem e nos conceitos. Implicitamente, ao dizer que “é uma animação”, ele reconhece nos softwares a possibilidade da experimentação (GRAVINA, 2001), o recurso do movimento dos objetos proporcionado pela função “arrastar” dos softwares (DIAS, 2009; ZULATO, 2002).

Paulo: É... o fato da geometria dinâmica dar essa mobilidade, dá movimento pro desenho, pra esse desenho que nos livros, na maneira que a gente estudou na nossa graduação era estático, o fato de dar movimento pode ser um recurso muito rico.

Em suas considerações, Paulo observa a vantagem dos softwares em relação ao livro, que oferece a figura em uma única posição, de forma estática. Ainda, bem explorado, com o recurso da movimentação, o professor pode abordar a criação de conjecturas e discutir demonstrações.

Paulo: [...] com o uso do software de geometria dinâmica, ele consegue mexer as figuras. Então, ele consegue criar conjecturas. [...] Então, você fazer o aluno sentir necessidade de demonstrar pra que ele convença que a conjectura dele está correta ou não está correta, é uma possibilidade muito rica no software de geometria dinâmica.

As observações acima estão sendo exploradas em diversas pesquisas, como Dias (2009), Gravina (2001), Zulatto (2002), entre outras, envolvendo o estudo da geometria e os softwares de geometria dinâmica, analisando a criação de

conjecturas e o estudo de demonstração. Sobre a formulação de conjecturas, por exemplo, Dias (2009) tem a mesma opinião do nosso entrevistado.

A utilização de softwares de geometria dinâmica no ensino e aprendizagem de Geometria tanto pode ser mais uma ilustração para a aula como um rico material didático que instiga a curiosidade dos alunos e aguça seu espírito investigativo, levando-os a elaborar conjecturas sobre situações diversas (DIAS, 2009, p. 49).

A relação que um professor estabelece com o computador, no caso, pensando no uso de um software de geometria dinâmica, em nossa opinião, deve ser de encará-lo como recurso pedagógico importante, capaz de despertar no aluno o interesse pela matemática. Não deve, no entanto, ficar dependente, considerando que o software, por si mesmo, seja autossuficiente na formação do aluno. Como afirma Miskulin (1999), os ambientes computacionais são importantes para explorar e construir conceitos geométricos, porém requer a intervenção do professor. Vamos adiante, observando as considerações dos entrevistados.

Wladimir: Não, eu sei fazer no papel. Então eu acho que é... é importante saber fazer primeiro.

Geraldo: É, eu acho que o computador é um recurso essencial hoje, para o mundo de hoje, né? Mas eu acho que ainda é importante o professor saber que ele tem que saber fazer e que determinadas situações é ele que precisa colocar a mão na massa.

Paulo: Então, é preciso tomar cuidado com a geometria dinâmica e discutir o uso da geometria dinâmica, para que não aconteça alguma coisa lá que vá contra essa teoria daqui da axiomática que a gente quer trabalhar.

Nossos entrevistados reconhecem as diversas possibilidades oferecidas pelos softwares, movimentação, visualização e a própria construção das figuras, entre outras. Deve-se notar, também, a preocupação que eles têm com o papel desempenhado pelo professor nas aulas com o uso do software. Novamente, fica evidente que o domínio do conteúdo específico, aqui os conceitos da geometria, pelo professor, é fundamental.

Apesar de reconhecer as possibilidades pedagógicas pelo uso dos softwares, não podemos afirmar se, nos cursos de formação, em particular, alguns desses professores assumem a responsabilidade de apresentar qualquer software de geometria dinâmica ao ministrarem a disciplina de geometria. Não estamos afirmando que eles, eventualmente, não o façam, nem mesmo pensamos que seja tarefa única e exclusiva do professor de geometria ou qualquer disciplina de conteúdo específico fazer uso de tais softwares. Mas fica uma pergunta. Os cursos de formação em Matemática estão preparando o professor para o uso das tecnologias? Qual seria a melhor forma de se promover essa formação? Não pretendemos responder a essa pergunta, mas concordamos que o uso de tecnologia nos cursos de formação inicial não se restrinja a determinado conteúdo, que seja “[...] de forma interligada com outras disciplinas didáticas, como por exemplo, as relacionadas ao Estágio Supervisionado Obrigatório, Metodologia de Ensino de Matemática ou Didática da Matemática” (MENDES, 2013, p. 50).

Há, no entanto, algumas instituições que estão se organizando e adequando a grade curricular dos seus cursos, oferecendo disciplinas ligadas ao uso das tecnologias informáticas.

Paulo: É, na nossa licenciatura, a gente tem duas disciplinas de dois créditos cada uma que discute a informática na Educação Matemática.

É uma atitude positiva, já que o futuro professor não pode negar a existência e versatilidade dos recursos tecnológicos, podendo eventualmente fazer uso em sua prática docente.

3.5 A bibliografia da geometria nos cursos de formação

Pensamos ser relevante consultar os professores formadores sobre qual seria, na opinião deles, a bibliografia a ser utilizada para a formação do professor em se tratando de geometria. Consideramos que a bibliografia no curso de formação tem relevância, uma vez que é a partir dela que os conceitos, a forma de apresentação e notação de um determinado tema, no caso a geometria, farão parte

não apenas da formação, mas, sobretudo, da prática do futuro professor. Vejamos as primeiras considerações.

Wladimir: Eu ultimamente estou utilizando os livros do João Lucas Barbosa, da SBM, e o livro da Rezende da Editora da Unicamp. A bibliografia não é excelente, mas é nacional.

Geraldo: Uma bibliografia que eu sempre gostei, um texto, é o livro do... do Pogorélov, de geometria né, geometria elementar, em espanhol, mais o livro do Hilbert, mas tem também o livro do Lucas Barbosa.

Irineu: Existem aqueles livros, até acho que publicação do GEEM, do professor Castrucci. [...] Existe o livro editado pelo IMPA, de geometria plana. Mas tenho a impressão que ele é mais elementar que o do professor Castrucci.

Paulo: Esse livro eu uso, que foi o livro que eu estudei, que é o do João Lucas Marques Barbosa.

Aparentemente, existe uma bibliografia básica que é utilizada nos cursos de formação de professor de matemática abordando o tema geometria. Essa bibliografia parece, de alguma forma, estar ligada à história do professor, por ter utilizado em sua própria formação, e também ao curso de formação, por ser considerada a obra padrão da instituição onde ele leciona.

Há, no entanto, algumas ressalvas com relação à bibliografia, o que nos faz presumir que não há na realidade um consenso sobre os livros adotados pelos professores. Evidencia esse fato o que eles próprios dizem:

Wladimir: Então eu acho que na questão de trabalhar textos, temos uma bibliografia pobre nacional, que é acessível no sentido de comprar. Tem uma bibliografia boa nacional, mas que só se dá por meio de reprodução.

Geraldo: Bom, aqui, em geral, o... os cursos de licenciatura têm bibliografias que são bibliografias padrões.

Irineu: Creio que seria de todo muito importante que o professor lesse alguma vez na vida os Elementos do Euclides. [...] Sim, sim, há outras obras

clássicas evidentemente. Por exemplo, com o auxílio de alguém que oriente, a obra do Hilbert é bastante acessível.

Paulo: [...] eu acho importante o aluno ter contato com outras... é... outras escritas, outras ideias, eu acho que os livros se complementam.

Na opinião de Wladimir, os textos nacionais disponíveis não são de fato o que se espera como ideal para ser utilizado na formação do professor. Revela, ainda, nas entrelinhas, o que podemos entender como um declínio da bibliografia nacional ao considerar que bons textos sobre geometria estão fora de edição. Relacionado ao que Geraldo afirma, os cursos oferecem como opção os textos evidentemente em circulação o que, de certa forma, obriga o professor a segui-los.

Fazendo um paralelo entre as opiniões de Irineu e Paulo, evidencia-se a necessidade de o professor, eventualmente, substituir a bibliografia adotada por outra, quer seja pensando nas diferenças do conteúdo oferecido, na forma de apresentação e estruturação ou mesmo na questão do formalismo e rigor que o texto aborda. A escolha de bons livros, bem como a sua utilização só é possível, em nossa opinião, se pensar, também, na formação dos formadores, o que implica em critérios para a escolha desses profissionais dos cursos de licenciatura (PIETROPAOLO, 2005).

Não podemos deixar de mencionar que os textos considerados clássicos da geometria, produzidos por Euclides, Hilbert e mesmo Pogorélov, ainda são lembrados como indispensáveis na formação do professor. Essas obras, como sabemos, serviram de modelo e inspiração para tantos outros escritos posteriormente, mas que não fazem sombra à luz que os textos clássicos emanam.

Ainda sobre os textos adotados, deparamo-nos com outra dificuldade que emergiu das entrevistas: o uso de um idioma estrangeiro.

Wladimir: Bons livros estão fora de edição e, em muitas vezes, os livros bons estão em inglês. Assim, o aluno tem que... dominar uma língua estrangeira.

Geraldo: Tá ficando cada vez mais difícil você usar livros em língua estrangeira. Antigamente, quando eu entrei pra fazer curso de Licenciatura em

Matemática... Ninguém perguntava, o professor não perguntava se você lia ou se você não lia em inglês ou espanhol ou o que quer que fosse lá, não.

Irineu: Há uma obra... cujo título em inglês é “Euclides e Além”, “Euclid and Beyond” [...] É uma obra fundamentalíssima, eu acho.

Nossos entrevistados reconhecem que há necessidade, porém dificuldades em se utilizar bibliografias que não estejam em português, como a obra de Robin Hartshorne (2000), citada por Irineu.

Essa questão, evidentemente, abrange um problema maior, que está relacionado às deficiências e à decadência em geral da Educação Básica que ocorrem no país como um todo, e que não pretendemos abordar. Lembramos, no entanto, que são alunos frutos dessa decadência que entram nos cursos de formação e suas deficiências são perceptíveis, quer sejam elas em relação ao conhecimento matemático ou de outras áreas de ensino. Porém não deixa de ser mais um agravante na formação do professor, impossibilitando que se estude geometria em textos estrangeiros que ainda não foram traduzidos para o português.

Entendemos que o professor formador tem papel fundamental na escolha do livro adotado como referência, ou de outros que eventualmente pode indicar aos seus alunos no curso de Licenciatura em Matemática. Durante a entrevista, nossos entrevistados demonstram ter consciência da importância do livro e da sua responsabilidade na escolha dos mesmos.

Wladimir: O papel do professor, no caso da formação de professores, é complementar essa literatura fraca nacional. [...] Eu tento conciliar os quatro: textos antigos, textos atuais, textos estrangeiros e artigos de divulgação. É o máximo que podemos trabalhar no sentido de referências com os estudantes.

Geraldo: Então, você quando pega uma disciplina, você é professor, é designado a ministrar uma disciplina, você recebe um programa dessa disciplina, já com uma bibliografia pronta. Você tem autonomia pra mexer naquela bibliografia. [...] Você dá a alternativa lá pros alunos. Olha, tem esse aqui em inglês, tem esse aqui em espanhol, tem esse aqui em português.

Irineu: E há uma porção de desdobramentos, de outras obras que são calcadas sobre a axiomática de Hilbert. [...] O Pogorélov tem não um único livro, mas vários e alguns de geometrias, não só um de geometria, mas... mais de um de geometria.

Esses depoimentos em relação à bibliografia evidenciam, acima de tudo, a necessidade de que o professor formador assuma uma postura de atualização constante, atento aos novos trabalhos que são publicados, bem como ser conhecedor das obras consideradas clássicas ou não, mas que podem ser consideradas boas referências ao tema de estudo, em nosso caso, a geometria.

Ao iniciarmos a análise do tema bibliografia adotada pelos professores formadores para o ensino de geometria, sentimos dificuldade para encontrar referências abordando esse assunto. Não existem, ainda, estudos analisando livros de geometria para a formação de professores. Constatamos que poucos livros de geometria são publicados para cursos de Licenciatura em Matemática, o que evidencia uma carência no setor. Assim, outras questões precisam ser respondidas. Por que não se publicam livros de geometria para cursos de matemática? A ausência de publicações está relacionada com a falta de geômetras no Brasil? A carência de novos livros de geometria para a formação de professores contribui para a ausência do tema na Educação Básica?

Concluimos que não se pode dizer que há uma convergência na opinião dos professores quanto à bibliografia ideal para a geometria na Licenciatura em Matemática, uma vez que apontam algumas opções e também a falta delas. Concordamos assim com Lorenzato (1995), afirmando que é preciso investir na publicação de livros para professores.

3.6 Professores do Ensino Básico não ensinam geometria: justificativas segundo os formadores

A ausência da geometria na Educação Básica tem sido apontada em várias pesquisas, como Pavanello (1989, 1993), Perez (1991), Lorenzato (1995), Gazire

(2000), Crescenti (2005), Serralheiro (2007), Lovis (2009, 2013), entre outras, e, como dissemos, é também o que nos levou a desenvolver nossa pesquisa. Assim, não poderíamos deixar de abordar esse problema nas entrevistas com os professores formadores, na tentativa de encontrar em seus argumentos os prováveis motivos para um problema que tem sido alvo de pesquisas há muito tempo.

Nos depoimentos, buscamos opiniões, já que os professores formadores, em geral, não participam do cotidiano da Educação Básica. Isso pareceu-nos mais evidente nos depoimentos de Wladimir e Irineu, que não convivem diretamente com a Educação Básica. Por outro lado, Paulo trabalhou por bom tempo na Educação Básica, e Geraldo desenvolveu sua pesquisa de doutorado abordando esse problema. No entanto, percebe-se que as considerações feitas por todos estão em conformidade com algumas das pesquisas por nós mencionadas. As considerações iniciais foram:

Wladimir: Então, ao mesmo tempo que se tem consciência que o assunto geometria é importante para a formação do indivíduo, este conteúdo não está sendo cobrado. [...] Me preocupa porque nos exames de seleção as questões de geometria não são tratadas.

Consideramos prudente iniciar a análise sobre a ausência da geometria pela observação acima, pois foi o único entrevistado enfatizando que não há cobrança dos conhecimentos de geometria em exames de seleção. Não sabemos até que ponto essa afirmação se caracterizava como sendo um fato, ficamos interessados e nos questionamos se a geometria está sendo abandonada também em exames de seleção como, por exemplo, no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)³.

O mesmo entrevistado fez referência a um processo histórico, ocorrido no mundo inteiro, e que chegou ao Brasil nos anos sessenta.

Wladimir: Depois, temos a Matemática Moderna, que surge na década de setenta. [...] Era a importância da formalização, da teoria dos conjuntos. A geometria vai perdendo sua importância.

³ Numa breve análise no Exame Nacional do Ensino Médio de 2011 a 2014, constatamos que, em média, sete questões, aproximadamente 16% do total, envolviam conhecimentos de geometria. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/web/emem/enem>>. Acesso em: 16 dez. 2014.

O Movimento da Matemática Moderna chega ao Brasil quando foi criado, “em 31 de outubro de 1961, o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, mais conhecido pela sigla GEEM” (SOARES, 2001, p. 81), na cidade de São Paulo, e foi considerado em várias pesquisas, como Pavanello (1989, 1993), Soares (2001), Crescenti (2005), Duarte (2007), entre outras, como um dos responsáveis pelo abandono da geometria, como podemos observar, motivados pela forma proposta de abordagem.

A orientação de trabalhar a geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela grande maioria dos professores secundários, acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente a álgebra – mesmo porque, como a Matemática Moderna fora introduzida através desse conteúdo, enfatizara sua importância (PAVANELLO, 1989, p. 164-165).

Ainda confirmando a opinião do nosso entrevistado, Crescenti (2005, p. 37), diz que “[...] a preocupação excessiva com a linguagem da teoria dos conjuntos acabou por comprometer ainda mais o ensino dessa área, acarretando sua supressão ou o empobrecimento do conteúdo”.

Dessa forma, nosso entrevistado nos remete a um dos momentos marcantes da história da educação mundial e brasileira, o Movimento da Matemática Moderna. O modelo proposto não vigorou, mas, de acordo com pesquisas, teve contribuição negativa para a geometria, afetando ainda hoje o seu ensino. É como uma bola de neve, o tempo passa e a bola aumenta, de forma cíclica, como se pode ver na seguinte afirmação: “Presentemente, está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la” (LORENZATO, 1995, p. 4).

Voltemos aos depoimentos, compartilhando outras opiniões.

Geraldo: Mas, na verdade, os professores não ensinavam geometria. E por que os professores não ensinavam geometria? Porque faltava conhecimento sobre geometria pra eles.

Irineu: É como nós estávamos falando antes. Eu acho que a falta de conhecimento dos professores em matéria de geometria.

Paulo: É muito comum ter pessoas que não têm boa formação de geometria.

Em todos os depoimentos, predominou a convicção de que a falta de conhecimento específico é o fator predominante para que o professor da escola básica não aborde a geometria na sua prática. Percebemos, pela entonação da voz e até mesmo pela linguagem gestual de nossos entrevistados, que, ao se referirem a conhecimento específico, estão dizendo conhecimentos elementares da geometria. Ou seja, a geometria não faz parte do conhecimento do professor.

A falta de conhecimento do conteúdo em geometria é apontada em várias pesquisas, como Perez (1991), Lorenzato (1995), Passos (2000), Crescenti (2005), Lovis (2009), entre outras, como um dos motivos para que o professor a deixe fora da sua prática. Entendemos que não saber justifica não saber ensinar. O professor, enquanto profissional, não se atreve nem mesmo a se arriscar, uma vez que ele não consegue e não pode ensinar o que ele próprio desconhece e, assim, “muitos professores, por falta de conhecimento do conteúdo geométrico ou de como ensiná-lo, têm deixado essa área relegada ao esquecimento ou têm dado um tratamento superficial aos seus conceitos, princípios e procedimentos” (CRESCENTI, 2005, p. 55).

Se o professor não tem domínio do conteúdo, como apontam as pesquisas, deve existir, naturalmente, um motivo que justifique essa situação. No discurso dos professores formadores encontramos tal motivo, o qual aparece com muita convicção.

Geraldo: Então, veja, o professor não ensina por quê? Porque ele não sabe, então isso significa que ele passou por um curso de formação onde ele teve pouca geometria.

Irineu: É que os cursos de matemática, na grande maioria das instituições de ensino, são muito ruins, e os alunos saem muito mal formados.

Paulo: Mas têm muitos cursos de formação de professores que não abordam geometria⁴.

⁴ Reconhecemos que esse depoimento merece uma investigação, porém detalhada, que abranja todos os cursos de Licenciatura em Matemática do território brasileiro, que optamos por deixar para uma pesquisa futura.

Como se pode observar, os professores formadores colocam a culpa pelo não domínio por parte dos professores, do conteúdo da geometria, nas instituições formadoras, ou seja, uma formação inicial que não oferece uma boa formação em geometria. Esse fato também é apontado nas pesquisas Perez (1991), Gouvêa (1998), Passos (2000), Crescenti (2005), entre outras. Nesse caso, consideramos que um estudo qualiquantitativo, de âmbito nacional, poderia trazer resultados significativos para discussão e, certamente, contribuiria no sentido de se pensar em uma melhor estruturação dos cursos formadores, de modo a se estabelecer um currículo que contemple a geometria. Promover um currículo que passe a “exigir que todos os futuros professores de matemática, da escola elementar ou secundária, estudem geometria na faculdade” (USISKIN, 1994, p. 25). Concordamos com a autora de que esse seria um dos passos na tentativa de ampliar o estudo da geometria.

É preciso observar que os professores formadores não estão generalizando. Há instituições que oferecem cursos nos quais a geometria é trabalhada, segundo suas concepções.

Geraldo: A sua faculdade estadual te deu formação em geometria. A sua! Esta aqui. Oh, esta estadual aqui, Unesp, de Rio Claro. Só que noventa por cento das faculdades que formavam e formam os professores de matemática não e... não conseguiam dar a formação em geometria nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Irineu: Infelizmente, cada esquina tem uma faculdade. E o pessoal que não consegue entrar numa faculdade boa, porque não tem condições, acaba indo para essas, para essas escolas ruins. E aí o produto final é muito ruim.

Nota-se, nos relatos, que existem instituições as quais oferecem uma boa formação, sobretudo em conteúdos da geometria. Porém, provavelmente atrelado ao número grande de instituições oferecendo cursos de formação, ao número limitado de vagas em instituições reconhecidamente mais concorridas e, ainda, ao atual nível educacional do Ensino Médio, há uma proliferação de professores cuja formação matemática, em particular, a de geometria, fica abaixo do esperado.

Decorrente da deficiência em relação aos conteúdos fica evidente outro problema, apontado pelos entrevistados. O de não saber como trabalhar o que eventualmente aprendeu de geometria.

Geraldo: E falta metodologia de ensino. [...] se ele não tem formação, falta a ele como trabalhar aquela pouca geometria.

Paulo: O cara não teve aula de geometria, ele vai dar aula do... como que ele vai dar aula de geometria? Então eu acho que esse é outro elemento.

Observamos que não conhecer bem os conteúdos da geometria significa também não ter conhecimento metodológico suficiente para ensinar. Entendemos que, na formação inicial, ao mesmo tempo em que o futuro professor recebe os conteúdos específicos, com mais ou menos intensidade, recebe, também, alguma instrução metodológica, mesmo que essa não seja a prioridade do professor formador, preocupado naquele momento com a formação específica, como aponta um dos entrevistados.

Wladimir: O professor não está preocupado na discussão em como ensinar, mas trazer o conteúdo para o futuro professor. O professor não está preocupado em material manipulativo ou nas estratégias de ensino. Mas em trabalhar o conteúdo com os alunos.

Já outro entrevistado indica ter preocupação com a parte pedagógica além do conteúdo a ser trabalhado. Entende ser importante que se utilizem formas diferentes de apresentar o conteúdo, para que o futuro professor possa também se valer desses recursos em sua prática.

Paulo: Quando a gente tá falando de formação, é... eu também não consigo dissociar essas coisas. É... a formação do ponto de vista do conteúdo e a formação pedagógica. Então, quando a gente propõe atividades, é... com, por exemplo, com geometria dinâmica, ou, por exemplo, com material manipulável.

Frequentemente, nos cursos de formação, é comum que os professores das disciplinas específicas tenham pouca preocupação com orientações didáticas ou metodologias de ensino. Essa tarefa fica a cargo das práticas de ensino, bem como de outras disciplinas pedagógicas que fazem parte da grade curricular das

instituições para o curso de Licenciatura em Matemática. Devemos deixar claro não ser nosso objetivo discutir a questão de forma geral, ficaremos restritos aos dados para o caso da geometria.

Por exemplo, questionado sobre o uso de material manipulativo na formação do professor, Irineu indica sua importância, mas não concebe como necessário usar esse tipo de material.

Irineu: O material concreto ajuda aqui você a entender a etapa da criação. Ele não ajuda na etapa da exposição, não. Do meu ponto de vista, o material concreto é para dar aquelas intuições que, possivelmente, o que inventou, o que criou aquilo teve. Mas não na hora da exposição. [...] Então, o material concreto ajudaria nisso. A ver como é que a coisa funciona. Quais foram as intuições que estavam por trás da criação dessa parte.

Evidencia-se, na opinião de Irineu, que o material manipulativo tem importância e ajudaria na construção e entendimento dos conceitos. Seria uma forma interessante para abordar empiricamente a construção do conhecimento. Porém não considera que atividades com esses materiais sejam pertinentes e essenciais na formação inicial do professor.

Paulo: Claro que é importante a formação técnica do conteúdo matemático. O matemático sozinho, a formação matemática sozinha não... não é suficiente. Claro, a formação pedagógica sozinha não é suficiente. As duas coisas são fundamentais, pra formar um professor com esse perfil. Conhecer o técnico e conhecer o... o pedagógico.

Nesse último discurso, verificamos que a preocupação de Paulo não é só com o conhecimento específico, mas dá a mesma importância ao pedagógico, de modo que a formação inicial deve se preocupar com ambos. Para ele, o futuro professor fará uso de diferentes estratégias de ensino se tiver passado por um processo de formação inicial que seja favorável nesse aspecto.

Paulo: Então, a sala de aula convencional pode é... atingir um determinado grupo de alunos. Mas a geometria dinâmica pode atingir um outro grupo de alunos.

[...] eu acho que favorece no sentido dele ficar mais à vontade de quando ele tiver na qualidade de professor, ele usar esse recurso também.

Não entendemos que haja, entre os entrevistados, um único ponto de vista em relação às práticas pedagógicas para o estudo da geometria nos cursos de formação. Todos concordam que é necessário conhecer e dominar os conceitos, ou seja, o conteúdo específico. Não há, entretanto, a mesma opinião de que se deva dar orientação de metodologia de ensino. Subentende-se, que ao ensinar os conteúdos, estão ensinando também a ensiná-los. Para Lins (2005), quando se trabalha uma disciplina de conteúdo matemático, se oferece para os alunos um modelo de aula e de como ensinar. Pensamos que um laboratório de prática de ensino equipado com recursos materiais e com atividades direcionadas para o ensino da geometria seria uma boa alternativa nos cursos de formação. Uma ação simples, que pode contribuir positivamente na superação da falta de metodologia de ensino da geometria dos futuros professores.

Indo além, encontramos nos depoimentos um agravante que está intimamente ligado tanto ao pouco conhecimento do conteúdo, bem como a falta de metodologia de ensino. Nas palavras dos entrevistados, o professor tem medo. Esse mesmo sentimento é apontado por Crescenti (2005, p. 227), “[...] encontramos professores que aprenderam pouco ou nada de Geometria nos cursos de Licenciatura; que têm medo de ensinar Geometria”.

Geraldo: Eles tinham medo de ensinar geometria. Tinham medo, faltava conhecimento.

Irineu: Ele tem medo de ensinar, e aí surge o movimento para acabar com a geometria mesmo.

Paulo: Elas não se sentem à vontade para dar aula de geometria e, quando dão, dão como consequência disso uma geometria prescritiva.

Como afirmamos acima, os depoimentos apontam uma consequência imediata relacionada à falta do conhecimento. O não saber faz com que o professor se feche em si mesmo, inibindo-o de qualquer atitude em relação a tentar trabalhar, mesmo em situações elementares, o conteúdo de geometria. Pode ser essa a

justificativa, como apontam Perez (1991), Pavanello (1989), Gazire (2000), Crescenti (2005), Serralheiro (2007), Lovis (2009), de o professor não ensinar ou colocar a geometria para ser trabalhada no fim do ano e culpar os livros que abordam o tema nos últimos capítulos, o que é uma desculpa de que não deu tempo de ensiná-la, como diz nosso entrevistado.

Paulo: Então, tem muito professor formado que tem um conhecimento muito pequeno de geometria. Eu arrisco a dizer. E por isso é... se a pessoa tiver a possibilidade, se a pessoa tiver a opção, ela deixa a geometria lá pro finalzinho. Porque caso não der tempo, é a geometria que não vai ser dada.

Vejamos outra consideração de um dos entrevistados.

Geraldo: Então, fundamental naquela época é a gente dizer, o professor não ensinava porque faltava conhecimento e não sabia como ensinar.

Essa afirmação é feita com base em fatos constatados pelo entrevistado durante sua pesquisa apontando o não ensino da geometria. Também está coerente com o que diz Serralheiro (2007). “O interesse inicial de pesquisa voltou-se para o ensino de Geometria e surgiu pela nossa experiência como docente na escola pública, quando percebemos que muitos professores não trabalhavam esse conteúdo no decorrer do ano letivo” (p. 16).

Diante do exposto, verifica-se que o problema do abandono da geometria na Educação Básica, segundo os entrevistados, está relacionado à falta de conhecimento e metodologia de ensino e cursos que não preparam bem o professor, entre outros, assim como apontam pesquisas acima mencionadas.

A maneira como está estruturada a geometria, fundamentada em axiomas e todos os demais resultados sendo mostrados de forma dedutiva, contribui para que os alunos da Licenciatura em Matemática, os futuros professores, tenham aversão ao seu ensino? Vejamos os depoimentos.

Irineu: E, evidentemente, você pegar uma disciplina como a geometria para ensinar do ponto de vista formal, do ponto de vista axiomático, para essa gente fica fora de alcance. Ora, se o professor não sabe, ele vai ensinar o quê?

Paulo: Então, quando chega para estudar geometria, é... sob o ponto de vista axiomático, uma geometria que ela é dedutiva, eu tô estudando aquele conteúdo que ele pode ter visto ou não no ensino médio e no final do ensino fundamental. Mas dando um ponto de vista de dedução e não de prescrição. E esse é um elemento que assusta. [...] Primeiro, eu acho que é... Geometria é um curso que assusta, é uma disciplina que assusta as pessoas. E as pessoas não se sentem à vontade pra dar aula de geometria.

A geometria, em sua essência, parece exigir que professor e aluno se dediquem mais ao pensar, além do que normalmente se faz em outro conteúdo matemático. É o que se observa no relato de Irineu e também no de Geraldo ao comentar sobre um trabalho feito junto a professores da rede pública de ensino.

Irineu: Porque em álgebra você faz umas continhas, há umas fórmulas. Você vai resolver uma equação do segundo grau e, para isso, usa a fórmula e pronto. A geometria não, você tem que usar a cabeça. E, é o que eles não conseguem fazer, usar a cabeça. Essa é minha opinião.

Geraldo: E todo mundo acabava dizendo: a geometria é muito importante porque ajuda o aluno a aprender a pensar. [...] Mas ele não conseguia levar a geometria pra dentro da sala de aula. Ele não sabia, ele tinha medo.

Em seus depoimentos, Irineu e Geraldo estão pensando na característica axiomática dedutiva da geometria, que consideram importante ser abordada na formação do professor. Essa característica é um dos motivos para que professores da Educação Básica não abordem a geometria em sua prática, têm medo. É fundamental lembrarmos que a geometria que se apresenta no Ensino Fundamental tem forte apelo nas figuras e, para o Ensino Médio, geralmente aparece de forma prescritiva, com uso de fórmulas para resolução de problemas. Essa característica é, segundo Paulo, utilizada para o ensino da geometria e da matemática em geral.

Paulo: Aliás, ensino de matemática, no colégio, eu, na maneira que eu entendo, na sua maioria, ele é feito de maneira prescritiva e não de maneira dedutiva.

A geometria axiomática formal, que para os entrevistados é essencial que se discuta nos cursos de formação, não é apresentada fazendo uso de material

concreto, manipulável, ou utilizando os softwares de geometria dinâmica. Os professores formadores, em geral, não conhecem o currículo da Escola Básica, mas estão preparando professores para ela.

Pensamos que saber o que ensinar e como ensinar são condições necessárias ao professor de matemática, em especial, para o ensino da geometria. Mas concordamos com Garnica (1995), ao abordar dois desafios dos cursos de licenciatura:

o primeiro seria o de acreditar que 'no dia em que tivermos educadores mais qualificados teremos resolvido os problemas da educação' e o segundo se definiria pela existência de uma 'tradição muito forte nas teorias pedagógicas de que, quem sabe o que ensinar e como ensinar, terminará ensinando, desde que o educando seja normal'. Caracteriza-se já aí a distância entre "o que" ensinar e "como ensinar", germe do problema da dicotomia existente entre os domínios pedagógico e específico (GARNICA, 1995, p. 82-83).

Preparar o futuro professor, para que ele tenha não apenas domínio do conteúdo matemático específico, em nosso caso, o de geometria, mas também o pedagógico é um desafio para os cursos de Licenciatura em Matemática. O diálogo entre as partes é essencial, para que não apenas sugestões, mas também atitudes no sentido de proporcionar uma melhor formação sejam tomadas. É preciso investir em laboratórios de ensino nessas instituições, bem como em atividades de formação continuada, na tentativa de combater as deficiências de conteúdo e de práticas pedagógicas para o ensino da geometria.

4 BUSCANDO NAS REFERÊNCIAS

Neste capítulo, buscaremos nas referências bibliográficas uma melhor compreensão do que apontam os dados desta pesquisa. Selecionamos seis temas considerados relevantes em nossos dados, a saber: A axiomática da Geometria Euclidiana; A demonstração em Matemática, A demonstração em Geometria; Softwares de geometria dinâmica; Sobre os livros citados; O Movimento da Matemática Moderna. Faremos um breve relato do que pensam alguns autores sobre esses temas, relacionaremos os resultados de suas pesquisas ou estudos com a discussão dada nas entrevistas e análise dos nossos dados.

4.1 A axiomática da Geometria Euclidiana

É impossível falar da Geometria Euclidiana sem tocar no tema axiomática. Nas palavras de Polya (1978), “a Geometria euclidiana é, não somente um sistema lógico, como também o primeiro e grande exemplo de um tal sistema, que outras ciências têm tentado, e continuam tentando, imitar” (p. 116). Mas o que afinal estudiosos da geometria ou educadores em geral dizem ser a axiomatização? Onde ela surgiu? Segundo Eves (1992), Tales de Mileto pode ser considerado como responsável pelo surgimento da geometria demonstrativa e teria sido o primeiro a utilizar métodos dedutivos na geometria já na Grécia antiga. Ainda segundo o mesmo autor, Pitágoras teria dado prosseguimento à sistematização iniciada por Tales, e muitos estudos matemáticos teriam sido feitos pela escola pitagórica, entre eles trabalhos sobre a geometria dedutiva.

O *Sumário eudemiano* afirma que um pitagórico, Hipócrates de Quio, foi o primeiro a tentar, com sucesso pelo menos parcial, uma apresentação lógica da geometria sob forma de uma única cadeia de proposições baseadas em algumas definições e suposições iniciais (EVES, 1992, p. 9, grifo do autor).

Ainda outras tentativas também se sucederam, mas o ponto culminante ocorreu no século III a.C., com os Elementos de Euclides.

De forma geral, “a axiomatização de uma teoria representa um ponto de chegada, o final do seu desenvolvimento; ela constitui uma formulação sistemática de elementos previamente elaborados, através da qual se tenta esclarecer as suas relações lógicas” (PIAGET e GARCIA, 1987 apud LOVIS, 2009, p. 27).

De qualquer forma, nossos entrevistados indicaram ser extremamente importante que a geometria seja trabalhada de forma axiomática na formação do professor, especificamente na Licenciatura em Matemática, mesma posição assumida pela maioria dos sujeitos da pesquisa de Pietropaolo (2005). Uma boa formação em geometria seria pautada, sobretudo, na sua estrutura axiomática. Mas pesquisas como as de Pietropaolo (2005) e Serralheiro (2007) apontam que os cursos de formação não preparam os professores para trabalhar atividades de ordem dedutiva. Serralheiro (2007), ao apresentar para um grupo de professores uma questão mencionando a importância da demonstração com o raciocínio dedutivo, percebe que seus investigados não tinham total conhecimento sobre o que estavam sendo questionados. Apesar de ser considerado importante, concluímos que o estudo axiomático está longe do seu ideal nas instituições formadoras.

4.2 A demonstração em Matemática

Como se observa no capítulo Análise de Dados, a demonstração foi um dos itens abordados na entrevista. Em particular, questionamos o uso da figura na demonstração, uma vez que era nosso foco a demonstração em geometria. Para informações detalhadas sobre demonstração, sugerimos ao leitor, Garnica (1995), Pietropaolo (2005), Serralheiro (2007), Dias (2009). Neste item, faremos uma breve introdução sobre a demonstração, o que dizem alguns autores e traremos resultados de pesquisas sobre o tema na matemática, em especial, na geometria, na formação do professor em Licenciatura em Matemática e na formação continuada.

Lembro que na minha formação inicial em Licenciatura Plena em Matemática, na UNESP de Rio Claro, SP, as demonstrações estavam presentes em várias disciplinas. Na época, ao enunciar um teorema ou proposição, alguns professores afirmavam que iriam demonstrar, enquanto outros preferiam dizer que iriam provar. Fiquei com a convicção de que prova e demonstração são termos considerados sinônimos pelos matemáticos, e que não haveria distinção entre eles, fato este confirmado por Garnica (1995), Pietropaolo (2005) e Dias (2009). No entanto, os mesmos autores apresentam algumas considerações e reflexões entre os matemáticos que preferem fazer distinção entre prova e demonstração, como veremos mais adiante. Alertamos nossos leitores que atentem para o fato de que a definição dada por Tarski (1991) apud Pietropaolo (2005) para demonstração formal é a mesma dada por Balacheff (1987) apud Dias (2009) para demonstração, e que considera esta um caso particular de prova. Outra observação importante a ser feita é que, em geral, as demonstrações feitas entre os matemáticos não são apresentadas exatamente como propostas por Tarski (1991), isto é, não se enuncia explicitamente em cada linha os axiomas ou resultados necessários que compõem a demonstração. Em vez disso, costuma-se adotar um discurso cujas argumentações se apresentam logicamente estruturadas.

Apresentamos, abaixo, algumas considerações feitas em relação aos termos provas e demonstrações.

Considerando prova e demonstração como sinônimos,

é o que atesta a veracidade ou autenticidade, a garantia, o testemunho, o processo de verificação da exatidão de cálculos ou raciocínios, a dedução que mantém a verdade de sua conclusão apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras (GARNICA, 1995, p. 10).

Pietropaolo (2005) apresenta o que Tarski (1991) sintetiza como modelo formal de demonstração.

[...] uma demonstração formal de uma sentença dada consiste em construir uma sequência finita de sentenças tal que (1) a primeira sentença na sequência é um axioma (2) cada uma das sentenças seguintes é um axioma ou, então, é derivável diretamente de algumas sentenças que a precedem na sequência através de uma das regras de demonstração, e (3) a última sentença na sequência é aquela que deve ser demonstrada. Alterando um pouco o uso do termo 'demonstração' podemos dizer que uma demonstração formal de uma sentença é simplesmente qualquer sequência finita de sentenças que possua as três propriedades assinaladas (TARSKI, 1991 apud PIETROPAOLO, 2005, p. 55).

Os mesmos autores, Garnica (1995), Pietropaolo (2005), Dias (2009), afirmam existir os que fazem distinção entre prova e demonstração. A exemplo disso, Dias (2009) apresenta a diferenciação dada por Balacheff (1987) para prova e demonstração.

Chamamos **prova** uma explicação aceita por uma comunidade em um determinado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate entre a significação e a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores. Entre as provas, certamente há uma particular, elas são uma sequência de enunciados seguindo regras determinadas: um enunciado é conhecido como sendo verdadeiro, ou bem é obtido a partir daqueles que lhe precedem com o auxílio de uma regra de dedução tomada de um conjunto de regras bem definidas. Chamamos **demonstração** essas provas (BALACHEFF, 1987 apud DIAS, 2009, p. 31-32, grifos da autora).

Balacheff (1987) designa como prova o que usualmente é designado como demonstração e usa o termo demonstração para significar prova formal.

A demonstração torna-se um caso particular de prova, aceita pela comunidade matemática (GARNICA, 1995; DIAS 2009). No sentido que Balacheff dá a essas palavras podemos então afirmar que todas as demonstrações são provas, mas que nem todas as provas são consideradas demonstrações. Em nossa pesquisa, adotamos o conceito de demonstração aquela aceita pela comunidade matemática.

Em sua dissertação de mestrado, Gouvêa (1998) realiza um trabalho com professores do Ensino Fundamental, tentando auxiliar pedagogicamente o ensino da

geometria tendo como suporte a demonstração. Segundo a autora, apesar de os professores considerarem importante a demonstração, a maioria não aborda e não sabe como trabalhar o assunto de forma significativa para seus alunos. Há, na opinião da autora, certa rejeição e “alergia” por parte do professor em trabalhar a demonstração, “[...] por não se sentir seguro em seus conhecimentos de Geometria dedutiva, não ter recebido orientações em seus cursos de licenciatura e não encontrar nos livros didáticos referencial claro e seguro” (GOUVÊA, 1998, p. 80).

Na sua tese de doutorado, Dias (2009) investiga em um grupo de alunos da Licenciatura em Matemática as influências dos ambientes de geometria dinâmica na construção de argumentações⁵. Em sua pesquisa, a autora diz que ao trabalhar com alunos da Licenciatura em Matemática encontra bastante resistência ao estudo das demonstrações em geometria pela maioria dos alunos. Além disso, com base nos resultados, afirma que, nos cursos de Licenciatura em Matemática, não há efetivamente uma abordagem adequada em atividades de natureza dedutiva, sobretudo as demonstrações em geometria. Afirma que existem cursos de licenciaturas “[...] com ênfase excessiva no estudo das demonstrações [...]” e, por outro lado, “[...] até licenciaturas nas quais o ensino de demonstrações restringe-se a alguns teoremas demonstrados em disciplinas específicas” (DIAS, 2009, p. 66).

Na dissertação de mestrado de Serralheiro (2007), a autora investiga um grupo de professores da rede pública participantes de um curso de formação continuada, em que uma das questões da pesquisa que se relaciona com nosso tema era: quais são os discursos e conhecimentos iniciais sobre demonstração em Matemática apresentados pelos professores participantes do projeto “O raciocínio dedutivo no processo ensino-aprendizagem da Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental”, na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Ao apresentar um questionário diagnóstico, a autora chega a uma constatação crítica em relação aos professores de matemática. “Assim, acreditamos que muitos professores de Matemática nem ao menos sabem a que se refere realmente o processo de demonstração” (SERRALHEIRO, 2007, p. 76). De acordo com a autora, os professores apresentam conhecimentos superficiais sobre demonstrações em matemática, e mesmo aqueles que estudaram o tema na formação inicial, não o

⁵ No item 4.4 apresentamos alguns resultados sobre o uso de softwares de geometria dinâmica.

viram de maneira suficiente para que pudessem desenvolver o assunto em sala de aula.

Em sua tese de doutorado, Pietropaolo (2005) analisa a demonstração na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática. Investiga dois grupos de professores. O primeiro, formado por professores de cursos de licenciatura e/ou pesquisadores de Educação Matemática, identificados como sendo o grupo que representava “a fala da teoria”. O segundo, formado por professores de Matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio, identificado como grupo que representava a “fala da prática”. De acordo com a autora, em sua pesquisa houve consenso entre todos, educadores matemáticos e professores do Ensino Fundamental de que as provas são importantes em aulas de Matemática no Ensino Fundamental. Mas também há o consenso entre os pesquisadores de que para isso os cursos de licenciatura “[...] tratem esse tema não apenas sob a perspectiva da formação geral do professor de Matemática, mas também do ponto de vista de um profissional que vai ensinar esse assunto” (PIETROPAOLO, 2005, p. 139). Já para o grupo de professores que representava “a fala da prática”, haveria o consenso de que as provas formais não seriam para todos, apontando dificuldades de ensino e rejeição dos alunos. Nesse sentido, Pietropaolo (2005) conclui ainda que, para se trabalhar provas matemáticas na Educação Básica, seria necessário ampliar seu significado e que seu ensino aconteça num processo de questionamento, conjecturas e contraexemplos.

Em sua tese de doutorado, Garnica (1995) tenta responder a seguinte pergunta: o que significa a prova rigorosa na formação do professor de Matemática? O autor trabalha com dados coletados em depoimentos de alguns professores matemáticos e educadores matemáticos de instituições formadoras. Em relação a sua pergunta, o autor apresenta duas leituras divergentes: a “leitura técnica” e a “leitura crítica”, que afirmam a importância da prova rigorosa na formação do professor. O autor expõe assim:

Cada uma dessas leituras é plasmada em concepções próprias de setores bastante diferenciados: a leitura técnica funda-se na prática científica da Matemática enquanto a crítica se estabelece como

ponto de vista a ser defendido pela Educação Matemática (GARNICA, 1995, p. 230).

A divergência entre as duas leituras pode ser vista como mais um ponto de discussão na dualidade entre conteúdo específico e conteúdo pedagógico na formação do professor, discussão essa constante entre muitos educadores e pesquisadores. Como o próprio Garnica (1995) afirma, ele fez uma leitura crítica da prova rigorosa na formação do professor de Matemática e acredita que não se pode concluir nada em definitivo, uma vez que compreensões não se esgotam.

De forma geral, nota-se, nas pesquisas acima, que, provavelmente, nos cursos de formação, a matemática dedutiva e axiomática não tem sido tratada de forma adequada, em especial na geometria. Por um lado, em algumas instituições as atividades com demonstrações estariam praticamente fora do currículo, ou presentes esporadicamente e de forma superficial em algumas disciplinas. De outro, o tema estaria sendo trabalhado em diversas disciplinas que se caracterizam como tendo uma estrutura lógica e axiomática, porém sem a preocupação pedagógica dessas atividades. Os departamentos de Matemática e Educação Matemática, caso sejam independentes em suas instituições formadoras do professor de Matemática, precisam de diálogo constante entre seus membros, no sentido de encontrar soluções pertinentes de como as demonstrações podem e devem ser trabalhadas nas diversas disciplinas.

Analisando as afirmações, podemos pensar nas seguintes questões: será possível que um professor formador abandone sua prática de apresentar um estudo formal envolvendo demonstrações motivado pela incompreensão e resistência por parte dos alunos? Estariam alguns cursos de licenciatura retirando as demonstrações do currículo por conta do nível de qualificação que seus alunos ingressantes apresentam?

4.3 A demonstração em Geometria

Trataremos aqui um pouco mais especificamente da demonstração em geometria, evidenciando sua importância em termos educativos e seu papel na própria geometria.

Estudar geometria em qualquer nível de ensino significa estar em contato com uma fonte inquestionável e altamente favorável para o desenvolvimento do pensamento lógico, dedutivo, abstrato e de generalização. O trabalho com a demonstração em geometria parece ser o caminho mais curto para isso.

Polya (1978) diz que um aluno pode até perder conceitos geométricos, mas sem contato com demonstrações de geometria “[...] terá deixado escapar os melhores e mais simples exemplos de verdadeiras provas e perdido a melhor oportunidade de adquirir a ideia de raciocínio rigoroso” (p. 116). A educação também seria afetada se o tema não fosse incluído na formação do aluno. “Em suma, se a educação pretende inculcar no estudante as noções de prova intuitiva e do raciocínio lógico ela deverá reservar um lugar para as demonstrações geométricas” (POLYA, 1978, p. 116).

Adotaremos como referência, nos próximos parágrafos, Fetissov (1994), em sua obra “A demonstração em geometria”, a qual sugerimos como uma agradável leitura.

Fetissov (1994) argumenta que, em uma demonstração, usamos indução, que é um método para se obter conclusões gerais pela análise de numerosos casos particulares, e usamos a dedução, que sendo conhecidas algumas leis gerais, as aplicamos em casos particulares. Para o autor, os primeiros conhecimentos geométricos teriam sido estabelecidos pelo método indutivo e que, uma vez estabelecidas algumas verdades geométricas, percebeu-se que outras poderiam ser obtidas por raciocínios, a dedução.

O sistema geométrico é composto por algumas verdades fundamentais, os axiomas, aceitos sem demonstração. As outras proposições geométricas decorrentes dos axiomas são os teoremas. Uma demonstração em geometria “[...] consiste em um conjunto de raciocínios feitos a partir de axiomas e verdades já demonstradas, raciocínios através dos quais se estabelece a veracidade de uma dada proposição” (FETISSOV, 1994, p. 22).

Em geometria, há que se tomar cuidado em fazer afirmações do que parece ser evidente em uma figura, somente uma demonstração é que garante a veracidade de uma proposição. O autor resume a necessidade de uma demonstração, como segue.

a) Em geometria só se admite sem demonstração um pequeno número de verdades fundamentais ou axiomas. Todas as demais verdades – teoremas – se demonstram com base nesses axiomas, mediante uma série de deduções. b) As demonstrações são uma exigência decorrente de uma das leis fundamentais de nosso pensamento – o princípio da razão suficiente, que aponta para a necessidade de fundamentar rigorosamente nossas afirmações. c) Para uma demonstração bem estruturada não podemos nos basear senão em proposições já estabelecidas, sendo inadmissível qualquer alegação de evidência. d) A demonstração de um teorema também é necessária quando se tem em vista sua generalidade, isto é, quando se pretende garantir sua aplicabilidade em todos os casos particulares. e) Finalmente por meio de demonstrações, podem-se dispor as verdades geométricas num sistema harmonioso de conhecimentos científicos, no qual se manifestam todas as relações internas existentes entre as diversas propriedades das formas espaciais (FETISSOV, 1994, p. 29).

Sendo uma demonstração feita por uma série de inferências, ela está efetivamente correta se cada uma assim estiver. Fetissov (1994) propõe condições para que possamos considerar uma demonstração correta.

a) Toda demonstração deve basear-se unicamente em proposições verdadeiras, isto é, nos axiomas e nos teoremas previamente demonstrados. b) Todas as conclusões que façam parte de uma demonstração devem ser estruturadas corretamente. c) É preciso não perder de vista o objetivo da demonstração, ou seja, o de firmar a veracidade da proposição respectiva, cuidando para não substituí-la eventualmente por outra qualquer (FETISSOV, 1994, p. 45-46).

Finalmente, propomos algumas reflexões sobre o sistema de axiomas da geometria. Os axiomas são as afirmações básicas mais importantes da geometria e os únicos aceitos sem demonstração. Sempre foi objetivo dos geômetras reduzir ao mínimo o número de axiomas, pois isso garante maior importância individual de

cada um, facilita a comprovação de sua veracidade e, como consequência desse número reduzido, as propriedades geométricas deles decorrentes são mais genéricas, profundas e importantes.

Entretanto, existem regras básicas para o estabelecimento do número mínimo de axiomas de modo a garantir um sistema axiomático completo. Analisando esse conjunto mínimo de axiomas e relacionando-os entre si devem satisfazer as seguintes condições:

A condição de consistência: “além de não se contradizerem uns aos outros, os axiomas de um sistema de axiomas não devem implicar proposições contrárias entre si”. A condição de independência: “a exigência de que não haja axiomas decorrentes de outros axiomas”. A condição de completude: “[...] se o sistema é completo, toda nova afirmação acrescentada a ele e envolvendo os mesmos conceitos a que se referem os axiomas é consequência desses axiomas ou entra em contradição com eles” (FETISSOV, 1994, p. 56-57).

Pensamos, assim, ter feito apontamentos mínimos e necessários ao que nos propusemos.

4.4 Softwares de geometria dinâmica

Neste item, apresentamos algumas considerações gerais sobre o uso das Tecnologias Informáticas no ensino da matemática, porém o foco será sintetizar algumas pesquisas e seus resultados sobre o uso de softwares de geometria dinâmica especificamente trabalhando com geometria.

Se no final do século XIX e por todo o século XX questões sobre a axiomática formal e o rigor da matemática predominavam as discussões entre matemáticos, educadores matemáticos ou entre ambos, mesmo que ainda se faça, ousamos dizer que comparativamente um novo tema tende a predominar no século XXI, o uso das Tecnologias Informáticas no ensino da matemática.

Entendemos que, no centro dessas discussões, questões importantes e desafiadoras devam ser respondidas. Como bem argumenta Borba (1999), uma delas seria: qual o novo papel do professor e do computador na sala de aula? Entre outras tantas, podemos destacar: quais conteúdos matemáticos podem ser abordados com o uso de tecnologias? Que tipos de questões devem ser trabalhadas para facilitar a aprendizagem desses conteúdos usando as tecnologias? Como fazer o aluno sentir que precisa ele próprio tirar conclusões mesmo utilizando o computador? Como elaborar atividades para que o aluno precise raciocinar e usar o computador como ferramenta facilitadora? Como estabelecer critérios de rigor nessas atividades?

Outro aspecto importante a se discutir é com relação à formação do professor para usar os modernos equipamentos e os softwares educacionais disponíveis, pois “a formação dos educadores é naturalmente crucial em todo e qualquer processo que vise à adequada integração das tecnologias em contexto educativo” (AMANTE, 2007 apud MENDES, 2013, p. 40). Ele precisa ser capaz de usar o computador, conhecer recursos disponibilizados pelo software e desenvolver atividades que sejam pedagogicamente coerentes para atingir objetivos específicos sobre o conteúdo abordado.

A formação do professor para ser capaz de integrar a informática nas atividades que realiza em sala de aula deve prover condições para ele construir conhecimento sobre as técnicas computacionais, entender por que e como integrar o computador na sua prática pedagógica e ser capaz de superar barreiras de ordem administrativa e pedagógica (VALENTE, 1999, p. 141).

Sobretudo é preciso que o professor tenha total consciência do uso da tecnologia em suas atividades na sala de aula. Para que as tecnologias sejam incorporadas em atividades escolares, “um aspecto fundamental dessa implementação consiste na formação de professores, que devem receber uma preparação adequada à utilização consciente e crítica da Tecnologia” (MISKULIN, 1999, p. 525).

Abordaremos, a partir de agora, alguns trabalhos envolvendo softwares de geometria dinâmica.

Os softwares de geometria dinâmica, além de fornecer subsídios para o ensino e aprendizagem da geometria, estão sendo utilizados como base no desenvolvimento de inúmeras pesquisas em Educação Matemática. Iremos sintetizar o que pensam alguns pesquisadores sobre o uso da tecnologia, em especial os softwares de geometria dinâmica, na formação do professor de matemática. Apresentaremos alguns resultados obtidos nessa área, em especial, os que se relacionam com geometria, apontando o que dizem os autores em relação às possibilidades que observam e resultados por eles encontrados.

Em sua pesquisa, Dias (2009) investiga a influência de softwares de geometria dinâmica na construção de argumentações, tendo como sujeitos de pesquisa alunos do sexto período de um curso de Licenciatura em Matemática. Em sua análise, a autora busca fazer uma articulação entre os níveis de raciocínio geométrico proposto por Parzysz (2001, 2006) e os tipos de prova propostos por Balacheff (1987)⁶. Os dados foram coletados em dois ambientes distintos, no ambiente papel e lápis e no ambiente de geometria dinâmica Geogebra, nos quais coletou registros escritos, construções gravadas no software, além de entrevistas semiestruturadas. Dias (2009) constata que o uso do software tem influência na produção e verificação de conjecturas, mas não apresenta influência na construção de argumentação. Na articulação entre seu referencial teórico, observa que os tipos de prova empirismo ingênuo e experiência crucial surgem com raciocínios geométricos do nível spatio-grafique e que o tipo de prova experiência mental é derivada do raciocínio o proto-axiomático.

Outras observações feitas por Dias (2009) são pertinentes, sobretudo porque versam sobre o uso de softwares de geometria dinâmica e da formação do professor em relação à geometria. Para a autora, os softwares de geometria

⁶ Dias (2009) usa as seguintes referências:

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et deduction dans une démarche géométrique en PE1. Extraído do *Colóquio de COPIRELEM*, Tours, 2001.

PARZYSZ, B. La Géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? In: *Quaderni di Ricerca in Didattica*. n. 17. 2006. Itália: Universidade de Palermo.

BALACHEFF, N. Processus de Preuve et Situations de Validation. In: *Educational Studies in Mathematics*. n. 18. p. 147 – 176, 1987.

dinâmica em aulas de geometria podem servir apenas como ilustração ou um rico material didático para desenvolver o espírito investigativo. Fica sobre o professor a responsabilidade de como explorar esse recurso, verificando propriedades de figuras ou indo além, utilizando para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Assim, se o professor formador não explorar as potencialidades das ferramentas dos softwares, “[...] os futuros professores subestimarão a utilização da geometria dinâmica em sala de aula, perdendo-se uma grande oportunidade de desenvolver a capacidade investigativa dos estudantes” (DIAS, 2009, p. 205). Para a autora, há a necessidade de um melhor estudo sobre os tipos de problemas a serem explorados com os softwares de geometria dinâmica, pois, em alguns casos, os mesmos podem levar o aluno a uma conjectura falsa. A possibilidade de movimentação de figuras no ambiente de geometria dinâmica ajuda o aluno a pensar em uma generalização, contrário do ambiente papel e lápis em que o aluno fica com uma única construção.

O trabalho de Zulatto (2002) foi investigar o perfil de professores que utilizam softwares de geometria dinâmica em suas aulas e quais eram suas perspectivas sobre as potencialidades dos softwares, em particular, na elaboração de conjecturas e demonstração. A autora pesquisa professores de nível Fundamental e Médio, da rede pública e particular de ensino, por meio de entrevistas. Segundo Zulatto (2002), em relação à formação inicial, nem todos os professores discutiram na sua graduação o uso de softwares na prática docente. O que faz os professores utilizarem esse recurso em suas aulas é, basicamente, a necessidade imposta pela sociedade educacional atual e também as potencialidades didáticas que eles oferecem. A maioria dos professores pesquisados tem participado de cursos de formação continuada ou recebem auxílio de quem já utiliza algum software em aula. A autora observou que os professores pesquisados recebiam algum tipo de suporte que facilitaria a inserção da informática na sala de aula. O suporte pode ser de colegas que melhor conhecem e têm experiência com os softwares ou por encontros com pesquisadores que realizam estudos sobre o tema.

Fato interessante observado por Zulatto (2002) é que os professores trabalham conteúdos variados e que esses têm relação com o conhecimento sobre o software. Independente do tipo de software que se usa, o conhecimento do conteúdo matemático pelo professor ainda é essencial, como observa a autora. “Por outro lado, é preciso enfatizar que o fato de conhecer bem matemática ajuda a utilizar

mais recursos do software” (ZULATTO, 2002, p. 82). Segundo a autora, a pesquisa revelou que as potencialidades dos softwares, segundo os professores, são as construções geométricas, a investigação e descobertas, a visualização, o dinamismo e motivação dos alunos. Seguindo sua análise, a autora afirma que a palavra demonstração parece ter sentidos diferentes para os professores, o que não possibilitou esclarecer o tema com mais profundidade, mas percebeu que de forma geral não realizavam demonstrações formais. Os professores não demonstram, eles mostram, utilizam os computadores para mostrar propriedades que foram estudadas em sala de aula. A pesquisadora acredita que a formação continuada é essencial para que os professores passem a utilizar informática em sua prática docente.

Em seu artigo, Gravina (1996) apresenta um estudo sobre as contribuições de ambientes de geometria dinâmica na superação de dificuldades, como as do raciocínio dedutivo, generalizações e conceitos da geometria sobre um grupo de alunos ingressantes da Licenciatura em Matemática. Para a autora, as possibilidades oferecidas pelos softwares de arrastar e movimentar são um recurso didático importante, pois

a variedade de desenhos estabelece harmonia entre aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento (GRAVINA, 1996, p. 6).

Ao testar os recursos de movimento proporcionados pelos softwares de geometria dinâmica, Gravina (1996) afirma que os alunos estabelecem conjecturas que são corrigidas e refinadas durante o processo, estabelecendo o espírito de investigação. Favorece o aprendizado de conceitos geométricos, argumentam e deduzem propriedades e passam para níveis mentais superiores da dedução e do rigor.

Em sua tese de doutorado, Gravina (2001) utiliza o software de geometria dinâmica Cabri-Geometry II para investigar o desenvolvimento do pensamento hipotético dedutivo em um grupo de alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática. Como metodologia, a autora se utiliza da Engenharia Didática, sendo que os dados da pesquisa coletados foram as atividades gravadas em

disquete, material escrito das construções e demonstrações, além das observações e diálogos entre a pesquisadora e os alunos.

Para Gravina (2001), os ambientes de geometria dinâmica incentivam nos alunos o espírito investigativo, que é importante na criação da matemática. A autora busca responder como os softwares de geometria dinâmica contribuem para que os alunos entendam o significado de demonstração e como contribuem para que os alunos construam suas próprias demonstrações. Como resultado de suas investigações, a autora aponta que os alunos evoluíram de um conhecimento empírico para um modelo teórico.

A utilização do ambiente de geometria dinâmica favoreceu a ascensão de patamar de conhecimento geométrico; a partir do patamar de conhecimento ainda empírico, os alunos ascenderam àquele em que a geometria é entendida como um modelo teórico; neste novo patamar, com os desenhos em movimento os alunos desenvolveram progressivamente habilidades para construir suas próprias demonstrações; a utilização do ambiente também favoreceu os pensamentos de natureza visual, fonte de insights para a construção de demonstrações (GRAVINA, 2001, p. 191).

Lovis (2009) faz uma pesquisa na qual utiliza o software de geometria dinâmica GeoGebra no estudo de Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica, em um minicurso oferecido para professores da rede pública de ensino do norte do Paraná. Tem como objetivo saber que conhecimentos os professores tinham dessas geometrias e que contribuições o software oferece para o aprendizado das mesmas. Busca também identificar a existência de obstáculos epistemológicos no aprendizado durante as atividades que utilizam o modelo do disco de Poincaré. Para a autora, o ensino da Geometria Euclidiana não tem recebido atenção adequada. Considera que a situação é ainda pior no caso de Geometrias Não-Euclidianas, pois o tema não é tratado na maioria dos cursos de formação, o que faz com que muitos professores desconheçam a existência de outras geometrias, além da Euclidiana. “Os professores apresentam uma resistência ao ensino de Geometrias Não-Euclidianas. Além de muitos não as conhecerem como um conhecimento geométrico também desconhece a importância de ensinar esses conteúdos” (LOVIS, 2009, p. 47).

Em relação à Geometria Euclidiana, Lovis (2009) afirma que os professores apresentam dificuldades em relação às definições, propriedades que justificam as construções e que a maioria dos professores desconhecem as construções com régua e compasso. No caso da Geometria Hiperbólica, a autora diz que, em alguns momentos, o entendimento dessa geometria foi dificultado pelo fato de os professores desconhecerem os conceitos e resultados da Geometria Euclidiana, e que pelo fato de desconhecerem a existência de Geometrias Não-Euclidianas há dificuldade em aceitá-las e compreendê-las. A autora identifica obstáculos epistemológicos no aprendizado da Geometria Hiperbólica, pois precisam aceitar uma nova representação para o que estão acostumados na Geometria Euclidiana. “O fato dos professores conhecerem somente a Geometria Euclidiana e acreditarem que esta Geometria é a única possível também se constitui em um obstáculo epistemológico” (LOVIS, 2009, p. 135). Segundo a autora, o uso do software teve fundamental importância tanto para fazer as construções bem como para explorar e verificar propriedades geométricas.

Como se observa nas pesquisas anteriormente mencionadas, o campo de investigação sobre o uso de softwares de geometria dinâmica na formação do professor de Matemática ou na utilização diversa em sala de aula é amplo, e, certamente, outras pesquisas, dando continuidade às já iniciadas, ou que abordem novas direções, precisam ser feitas. Concordamos com Zulato (2002), Serralheiro (2007), Dias (2009), Lovis (2009), Mendes (2013) de que os professores precisam investir em sua formação continuada, quer seja no sentido de adquirir domínio sobre conceitos matemáticos e aprimorar metodologias de ensino, ou ainda, mais especificamente, para conhecer softwares educativos, seus recursos e suas possibilidades de aplicação na prática em sala de aula. Tal investimento se faz necessário “para responder aos desafios constantemente renovados que se colocam à escola pela evolução tecnológica, pelo progresso científico e pela mudança social, o professor tem de estar sempre a aprender” (PONTE, 1998, p. 2).

Igualmente, é preciso que a formação inicial propicie ao futuro professor a oportunidade de contato com as tecnologias, dando indicações de prováveis situações e contextos nos quais ele poderá aplicar esses recursos. Entendemos, ainda, que a utilização das tecnologias nos cursos de formação se faça por diversas disciplinas, inclusive as didáticas, como propõe Mendes (2013). Há que se pensar, no entanto, nas possíveis dificuldades enfrentadas pelos professores formadores. Se

ele for professor de conteúdo específico, no caso, em geometria, é preciso que ele tenha, também, domínio e conhecimento não só do software, mas das tecnologias em geral. Se ele for professor de disciplinas pedagógicas, é preciso que tenha esses mesmos domínios, mas certamente lhe faltará o conhecimento específico a ser trabalhado. Em nossa opinião, esse é um desafio a ser encarado pelas instituições formadoras, já que trata de uma situação atual e pertinente na formação do professor. Quer seja na formação inicial ou continuada, não basta que se oriente o professor apenas na utilização do computador e dos recursos dos softwares, mas que se apresentem propostas de atividades e a maneira de conduzi-las, para que os objetivos educacionais sejam plenamente atingidos.

4.5 Os livros citados

Nossa proposta, neste item, é fazer uma breve apresentação da literatura mencionada por nossos entrevistados no que se refere ao estudo da geometria na formação do professor. Não pretendemos fazer uma análise crítica dessas obras, no entanto, iremos expor algumas observações, de modo que nosso leitor possa, eventualmente, tirar algumas conclusões preliminares. Sugerimos, aos interessados pela geometria, consultar pessoalmente cada uma dessas obras.

Um dos livros mencionados tem como autor João Lucas Marques Barbosa, publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática e cujo título é Geometria Euclidiana Plana. Segundo Barbosa (1995), o livro tem como público alvo alunos da Licenciatura em Matemática e adota os axiomas selecionados por A. V. Pogorélov (1974), que abordaremos mais adiante. O quinto postulado da Geometria Euclidiana aparece no sexto capítulo, caracterizando o livro até o quinto capítulo como introdução a um curso de Geometria Absoluta.

No livro constam dez capítulos, na seguinte ordem: os axiomas de incidência e ordem; axiomas sobre medição de segmentos; axiomas sobre medição de ângulos; congruência; o teorema do ângulo externo e suas consequências; o axioma das paralelas; semelhança de triângulos; o círculo; funções trigonométricas e, por último, área. Cada um dos capítulos, exceto o nove, que não tem problemas, está subdividido, além da teoria, em exercícios, com o objetivo de fixar o conteúdo

apresentado, problemas, por meio dos quais se pretende buscar o domínio conceitual, e comentários, nos quais o autor aborda temas diversos. O texto não apresenta estudo sobre movimento de figuras, como rotação ou translação, e não aborda a construção com régua e compasso.

Ao longo do texto, são enunciados 15 axiomas, 19 definições, 41 proposições e 23 teoremas. Podemos encontrar, entre os dez capítulos, 128 exercícios e 97 problemas. Entre ambos, é possível notar que em 59 deles, o autor pede para que se prove determinado resultado e, em oito, é solicitada uma demonstração. Em vários outros, exercícios ou problemas, o autor prefere usar o termo “mostre”, ao solicitar a verificação de um resultado. Observa-se, ainda, um total de 83 figuras, sem considerar as que aparecem nos problemas ou exercícios. Elas procuram auxiliar visualmente as definições, proposições, axiomas e, principalmente, as provas apresentadas pelo autor.

Outra obra é a de Benedito Castrucci, intitulada Lições de Geometria Plana. Devemos lembrar que esse livro não foi elaborado especialmente para se trabalhar na formação do professor. Segundo Castrucci (1968), esse livro era ideal para alguém que tivesse concluído naquela época o Científico, atual Ensino Médio, o qual teria oportunidade de estudar o tema de forma mais axiomática; destinava, ainda, para aqueles que queriam entrar em escolas superiores ou a iniciantes do magistério. Não se trata de um livro texto como aos quais estamos habituados, ou seja, com uma teoria explicativa antes ou entre as definições e alguns resultados. O livro todo é basicamente feito da enunciação de postulados, definições e teoremas em quatro capítulos sem títulos que são divididos em parágrafos. Capítulo I: a reta; capítulo II: o plano; retas perpendiculares; triângulos; desigualdades entre elementos de um triângulo; igualdade de triângulos retângulos; perpendiculares e oblíquas; paralelismo de retas, lugar geométrico, polígonos convexos, quadriláteros, paralelas e transversais; pontos notáveis de um triângulo; equivalência de polígonos; capítulo III: circunferência; diâmetros e cordas; posições relativas de reta e circunferência; posições relativas de duas circunferências; ângulos na circunferência; polígonos regulares; capítulo IV: grandezas geométricas; noções de medida; grandezas geométricas proporcionais; segmentos proporcionais; polígonos semelhantes; relações de semelhança nos triângulos e nas circunferências; áreas poligonais; relações métricas no triângulo, na circunferência e nos polígonos regulares; medida

da circunferência; área do círculo; área do setor circular e do segmento circular; cálculo de π .

Ao longo do livro, encontramos 168 figuras, sem contarmos as dos exercícios, que acompanham, sobretudo, os teoremas, mas aparecem também nas definições e postulados. Há um total de 159 teoremas, que são obtidos de um total de 26 postulados e 94 definições. É possível se dedicar à resolução de 220 exercícios, sendo que se tem que provar em 41 deles e demonstrar em outros três.

Geometria Moderna, de Edwin E. Moise e Floyd L. Downs, Jr. é outra obra sobre geometria mencionada por nossos entrevistados. Esse livro se diferencia dos anteriores, uma vez que não trata apenas de Geometria Plana. Há uma introdução de conceitos de geometria espacial antes mesmo do seu efetivo estudo em capítulos posteriores. O estudo de coordenadas também acontece, de modo que a álgebra passa a ser incorporada. Moise e Downs (1975) afirmam ter antecipado o estudo de área para o meio do livro, e não deixá-lo para o final, por considerarem o tema fácil e útil para a teoria restante. Os autores valorizam o uso de figuras, que são amplamente utilizadas na teoria, auxiliando intuitivamente nos conceitos, nas definições, problemas e nas demonstrações dos teoremas. Outra preocupação dos autores é com relação à notação, mantendo coerência com a linguagem matemática para cada conceito definido, já que, segundo eles, isso não é seguido em alguns livros. Há ainda no livro um espaço destinado às construções com régua e compasso.

O livro está dividido em 17 capítulos, como seguem: bom-senso e raciocínio exato; conjuntos, números reais e retas; retas, planos e separação; ângulos e triângulos; congruências, um exame mais detalhado de uma demonstração; desigualdades geométricas; retas e planos perpendiculares no espaço; retas paralelas em um plano; retas e planos paralelos; regiões poligonais e suas áreas; semelhança; geometria analítica no plano; circunferências e superfícies esféricas; caracterizações e construções; áreas de círculos e setores; sólidos e seus volumes.

Como as figuras aparecem invariavelmente exemplificando definições, postulados, teoremas e problemas, que são muitos, decidimos por não contá-las. Para se ter uma ideia, no livro são sugeridos, aproximadamente, 1950 problemas, desde os mais elementares e outros considerados pelos autores mais difíceis. Entre

os problemas, é explicitamente solicitado que se demonstre algo próximo de 500 resultados. Curiosamente, nesse livro, há um caso em que o termo prove aparece em dado problema. A teoria se constrói com base em 24 postulados, sendo que 171 teoremas foram enunciados.

A obra de Pogorélov (1974), “Geometria elemental”, que apresentamos é uma tradução do russo para o espanhol de Carlos Vega. Para Pogorélov (1974), a tarefa do ensino da geometria na escola é ensinar o aluno a raciocinar de maneira lógica, argumentar e demonstrar suas afirmações. Trata-se de um livro com forte apelo didático e, segundo o autor, tem como base conceitos elementares conhecidos nos anos iniciais de estudo e que tem como meta introduzi-los a partir dos axiomas, que foram minuciosamente selecionados pela análise de curso escolar de geometria, levando-se em consideração os elementos de demonstração tradicionais.

Planimetria é a primeira parte do livro, com os seguintes parágrafos: propriedades fundamentais das figuras geométricas elementares; de como se estudam na geometria as propriedades das figuras; ângulos; igualdade dos triângulos; relações entre os ângulos e os lados do triângulo; triângulos retângulos; construções geométricas; retas paralelas; quadriláteros; movimentos; igualdade de figuras; circunferência; semelhança de triângulos; teorema de Pitágoras e suas aplicações; funções trigonométricas do ângulo; polígonos; áreas de figuras; comprimento da circunferência; área do círculo. Na segunda parte, estereometria, encontramos os parágrafos: axiomas da estereometria e alguns corolários; paralelismo de retas e planos; perpendicularidade de retas e planos; ângulos entre retas e planos; ângulos diedros, triedros e poliedros; movimento e outras transformações no espaço; poliedros; elementos de geometria descritiva (Pogorélov usa o termo delineação projetiva); volumes de corpos simples; corpos de revolução; volumes de corpos de revolução; áreas de superfícies de revolução; noções de história da geometria.

É possível encontrar, no final de cada parágrafo, perguntas e exercícios, totalizando 426 entre ambos, e desses, o autor sugere a demonstração de 224 resultados. Pogorélov (1974) enuncia 16 axiomas, além disso, 136 teoremas e 231

figuras ilustrativas quer seja para visualização de conceitos ou auxiliando demonstrações, compõem sua obra.

De Robin Hartshorne (2000), “Geometry: Euclid and Beyond” é uma obra em língua inglesa que apresentamos. Segundo o autor, é um livro feito a partir de sua experiência no ensino de geometria, e nele aborda também algumas técnicas de Teoria dos Corpos que são relevantes no estudo de problemas geométricos. O livro inicia com uma análise crítica dos Elementos de Euclides, é fundamentado com base nos axiomas de Hilbert. Podemos dizer que, em linhas gerais, faz uma abordagem moderna da geometria euclidiana. Além disso, aborda geometria abstrata, área, construções geométricas e geometrias não euclidianas.

No livro, é possível encontrar, segundo o próprio autor, 550 ilustrações que, curiosamente, em sua maioria, foram traçadas manualmente, numa tentativa de manter o espírito euclidiano. No livro, podemos encontrar 19 axiomas, 163 proposições, 50 definições e foram enunciados 38 teoremas, além de diversos corolários e lemas que não foram por nós contabilizados. Além disso, são propostos 602 exercícios, nos quais se pede para mostrar ou provar resultados em cerca de 330 desses exercícios.

O livro “Fundamentos da Geometria”, de David Hilbert (2003), teve sua primeira publicação em 1899. A versão que apresentaremos é uma tradução para o português, por Paulino Lima Fontes e A. J. Franco de Oliveira, com base na sétima edição de “Grundlagen der Geometrie”, sendo esta melhorada pelo próprio Hilbert, e a última feita por ele ainda em vida. Vale ressaltar que essa é a segunda edição portuguesa e se baseou, além da sua primeira tradução, em edições para a língua inglesa, “Foundations of Geometry”, da décima edição alemã.

É importante observar que a obra “Fundamentos da Geometria” se destaca entre as demais anteriormente apresentadas. É um livro em que Hilbert considera todo o trabalho realizado por Euclides em “Os Elementos”, porém em uma nova abordagem, na qual a axiomática, o rigor e o formalismo aceitos pelos matemáticos do século XX se fazem presentes. Nessa obra, a Geometria Euclidiana é então fundamentada em um sistema axiomático formal.

O livro é composto por sete capítulos, na seguinte ordem: os cinco grupos de axiomas; a não-contradição e independência mútua dos axiomas; teoria das proporções; a teoria das áreas no plano; o teorema de Desargues; o teorema de Pascal; as construções geométricas com base nos axiomas I-V. Além disso, essa edição inclui um apêndice, são apresentados dez artigos publicados por Hilbert e suplementos, elaborados por P. Bernays, F. Henriques e H. Poincaré.

No livro, encontramos 21 axiomas, sendo que para dois deles é feita uma segunda versão, a saber, o axioma das paralelas e axioma de Arquimedes, respectivamente. Foram feitas 30 definições, enunciados 68 teoremas e 77 figuras aparecem como ilustração.

A obra de Euclides, os Elementos, escrita por volta de 300 a. C., e que se tornaria a de maior repercussão de todos os tempos, não poderia deixar de ser mencionada. Euclides consegue organizar todo o conhecimento de geometria da Grécia antiga em um sistema lógico dedutivo, que se tornaria modelo de ciência e, em nosso entendimento, sua obra deu origem ao que chamamos hoje de matemática. Todos os escritos sobre geometria de que falamos estão intimamente ligados à obra de Euclides.

Felizmente, em relação aos Elementos, temos em mãos a tradução feita por Irineu Bicudo (2009), diretamente do original grego, com o objetivo de ser o mais fiel possível. Toda teoria geométrica contida nos Elementos é feita a partir de cinco postulados e nove afirmações denominadas noções comuns. São feitas 131 definições e enunciadas 465 proposições, cuja demonstração vem acompanhada de, pelo menos, uma figura.

Sugerimos aos nossos leitores que tenham contato direto com essa tradução, caso não o tenham feito. Recomendamos aos mais interessados em compreender os inúmeros detalhes dessa obra, que leiam primeiro o prefácio e a introdução do tradutor, pois, certamente, o ajudará na interpretação de todo o restante.

Damos por encerrada a apresentação da literatura mencionada por nossos entrevistados. Não tivemos a preocupação em detalhar criteriosamente esses livros, mas dar alguns indicativos de sua estrutura. Tivemos a preocupação de informar a

base de axiomas ou postulados considerados pelos autores, bem como definições dadas e teoremas enunciados. Destacamos não só o número de exercícios propostos, bem como tentamos evidenciar o número de demonstrações que são sugeridas. Procuramos com isso destacar, além do modelo axiomático, típico da geometria, evidenciar a necessidade do trabalho com demonstrações nos cursos de formação, em especial no ensino da geometria.

Pensamos ser conveniente destacar a presença das figuras nesses livros. Não se trata de comparar quanto ao número de ilustrações, mas tornar evidente que, de alguma forma, as figuras ainda são usadas de modo a despertar intuitivamente as conjecturas e auxiliar no entendimento de conceitos e nas demonstrações, assim como foi nos Elementos de Euclides. Ainda sobre as figuras, percebe-se que nem todos os autores abordam as construções com régua e compasso o que, em nossa opinião, se caracteriza como uma falha na formação do professor.

Como afirmamos anteriormente, acreditamos que a literatura utilizada desempenha papel importante no processo de formação inicial do professor de matemática. É a partir dela que a teoria será estudada e fundamentada, bem como servirá de consulta e influenciará na prática do futuro professor. Dentre as obras que foram apontadas nas entrevistas, Barbosa (1985), Castrucci (1968), Moise (1975), Pogorélov (1974) e Euclides (2009) são, em nossa opinião, textos para uma primeira abordagem da geometria na formação do professor. Fica a critério do professor formador a opção de escolher uma entre elas, bem como sugerir outra, ou, ainda, adotar uma diferente das aqui mencionadas.

Pensamos que, para uma formação adequada em geometria, haveria que se complementar em um segundo momento essa formação, adotando outras referências, comparativamente com o que se faz no Cálculo e Análise Matemática. Essa complementação seria um curso de Fundamentos de Geometria, agora mais intenso e rigoroso que o inicial, contribuindo positivamente na formação do professor, dando-lhe condições plenas para ensinar geometria em sua prática docente na Educação Básica. Nossa ideia se justifica, por exemplo, se considerarmos que dois dos autores citados anteriormente, Pogorélov e Moise, possuem publicações que tratam a geometria de forma mais profunda em

comparação com as por nós apresentadas, Pogorélov (1987), Moise (1990), e que, sendo oferecidas em um segundo momento estariam complementando a formação inicial do professor.

Como já observamos na análise das entrevistas e também nas indicações que faremos adiante, podemos dizer que existe a falta de publicações sobre o tema geometria em língua portuguesa para formação de professores e até de autores nacionais. Há que se lembrar, ainda, que foram mencionados, nas entrevistas, casos de livros que não estão mais sendo editados, novamente evidenciando que há uma carência nesse setor, o que pode ser mais um agravante para o não ensino da geometria na Educação Básica.

Deixamos, como sugestão, algumas referências que consultamos durante a pesquisa ou utilizamos em nossa formação e que acreditamos ser particularmente interessantes para uma abordagem mais profunda da Geometria. Os já apresentados “Fundamentos da Geometria”, Hilbert (2003); “Geometry: Euclid and Beyond”, Hartshorne (2000) e outros, como: “Geometry”, Pogorélov (1987); “Introduction to Geometry”, Coxeter (1969); “Elementary Geometry from an Advanced Standpoint”, Moise (1990) e “Euclidian and non-Euclidian Geometries: Development and History”, Greenberg (1993). Entendemos que esses livros devem ser utilizados em conjunto com os Elementos de Euclides, pois são, na verdade, uma visão moderna da geometria originada nesta obra.

4.6 O Movimento da Matemática Moderna

Um dos entrevistados fez referência ao Movimento da Matemática Moderna, dessa forma, acreditamos ser relevante apresentar resumidamente algumas considerações e resultados obtidos por outros pesquisadores exaltando, inclusive, o que se refere à geometria, complementando o exposto na análise dos dados acerca do tema.

No início do século passado, discutia-se sobre a deficiência e problemas referentes ao ensino de matemática de forma geral no mundo todo, sendo que a discussão aumentou no decorrer dos anos, motivada pelo processo da

industrialização. Surgiu, então, um movimento que visava internacionalizar o ensino da matemática, o qual pretendia preparar os alunos para lidar com as novas tecnologias que estavam surgindo com a industrialização e, dessa forma, atender o crescimento do mercado de trabalho e qualificar a mão de obra para as novas profissões. Pretendia-se “[...] modernizar o Ensino de Matemática, oferecendo um ensino mais qualificado, adaptando-o aos anseios dos alunos pertencentes a uma sociedade que estava em rápida evolução tecnológica” (LIMA, 2006, p. 115).

Para Duarte (2007), o nascimento da Matemática Moderna não pode ser dado com precisão, uma vez que se identifica por modernos alguns trabalhos escritos por matemáticos já nos séculos XVII e XVIII, e que, “somente a partir de 1930, a teorização do método aflorou em sua totalidade, decorrente dos trabalhos do Grupo Bourbaki” (DUARTE, 2007, p. 49).

O Movimento da Matemática Moderna chega ao Brasil no início dos anos 60, no Estado de São Paulo, e, segundo Burigo (1989), em 1961, é criado, em São Paulo, o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), tendo como um de seus líderes o professor Osvaldo Sangiorgi e outros seguidores. Grupos semelhantes surgiram posteriormente em outras regiões do país, sendo que o objetivo principal dos professores participantes era mudar o ensino de matemática da época, procurando trabalhar de acordo com o sugerido pelo movimento. De acordo com Burigo (1989), os membros do GEEM fizeram cursos e encontros internacionais de preparação. Esses grupos foram, portanto, responsáveis pelos cursos de atualização oferecidos aos professores da rede pública de ensino dos diversos níveis. A intenção era preparar e informar os mesmos para lidar com a metodologia e conteúdos sugeridos pelo movimento.

No entanto, os cursos oferecidos aos professores da Educação Básica parecem não ter obtido os resultados que se esperava.

Apesar de ter havido todo esse empenho dos formadores, o mesmo não foi revertido em certeza de sucesso da prática dos professores-alunos, pois o que observamos é que isso não foi suficiente para que esses profissionais do ensino ficassem aptos a repassar os conteúdos apreendidos nos cursos (LIMA, 2006, p. 117-118).

Segundo Lima (2006), uma das causas que impossibilitou o sucesso desses cursos foi a metodologia que se baseava em treinamentos matemáticos da matemática formal, que era fundamentada em modelos internacionais que não representavam a realidade brasileira, e até mesmo pelo tempo curto dos mesmos.

De acordo com Pavanello (1989), os professores da Educação Básica não estavam preparados e não se sentiam à vontade para trabalhar de acordo com as propostas do Movimento da Matemática Moderna, sobretudo no que se refere ao ensino da geometria, contribuindo para o seu abandono. Ainda em relação ao despreparo dos professores, destacamos o que afirma Baraldi (2003) em sua pesquisa.

Desse modo, sobretudo nos países em desenvolvimento, com o Movimento da Matemática Moderna pretendeu-se ensinar abstrações matemáticas adiantadas em qualquer série, muitas vezes, por professores que não entendiam o significado das aplicações, no plano matemático, do que estavam ensinando, estando também mal amparados em relação à necessária alteração de concepção sobre ensino e aprendizagem de matemática, que necessariamente deve acompanhar as mudanças educacionais (BARALDI, 2003, p. 175).

Para Soares (2001), durante o período do movimento modernista, os professores deveriam ministrar aulas de matemática diferente da que aprenderam, sem que houvesse planejamento adequado, e o ensino foi prejudicado. “A geometria foi abandonada, e os cálculos numéricos foram substituídos por formalismos excessivos desvinculados da realidade” (SOARES, 2001, p. 139).

A proposta de se trabalhar a geometria por meio de espaços vetoriais e transformações, segundo Pavanello (1989), Perez (1991), Gouvêa (1998), Duarte (2007), que, por ser assunto não dominado pela maioria dos professores e até mesmo pela dificuldade de aprendizagem dos alunos, faz com que a geometria seja abandonada na Educação Básica.

Ao analisarem a produção de significados atribuídos ao Movimento Matemática Moderna, Souza e Garnica (2013) afirmam que houve pluralidade de perspectivas.

Uma análise global das narrativas de que dispúnhamos nos permitiu compreender que, quando o tema “Matemática Moderna” vinha à cena, os modos de falar sobre ele indicavam compreensões distintas

a cada enunciação e, em consequência, diferentes mobilizações. Não havia, portanto, UMA Matemática Moderna que os professores tentavam aplicar em suas salas de aula de modos diferenciados, na medida do possível, ou que defendiam ou rechaçavam (SOUZA; GARNICA, 2013, p. 374).

Durante todo o período do Movimento da Matemática Moderna, houve opositores ao novo sistema de ensino proposto e o mesmo foi se enfraquecendo e perdendo força. No Brasil, “com o desgaste do Movimento da Matemática Moderna e a divisão no interior do grupo, o GEEM encerrou suas atividades em 1976, sendo extinto em 1978” (SOARES, 2001, p. 88).

Constatamos que, nos cursos oferecidos pelo GEEM, a ênfase era o conhecimento matemático e não uma proposta pedagógica para o ensino da matemática. Dessa forma, justifica-se o fato de muitos considerarem que, após a vinda do Movimento da Matemática Moderna, tem início a falta de interesse pelo ensino da geometria, já que os professores não estavam devidamente preparados para lidar com essa proposta de ensino. Não podemos afirmar se ainda hoje o movimento modernista afeta o ensino da geometria na Educação Básica. Não podemos, no entanto, esquecer que muitos professores que atualmente estão em atividade tiveram sua formação nessa época e que, pelo fato de não terem estudado geometria, acreditem que não seja conveniente ensinar aos seus alunos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As motivações para a realização dessa investigação se deram ao percebermos que inúmeras pesquisas feitas, sobretudo em Educação Matemática, já há muito tempo, direta ou indiretamente apontam o abandono da geometria na Educação Básica. Para nós, isso era um problema inimaginável, já que, atuando diretamente na rede pública de ensino do Estado de São Paulo, dedicamos um bimestre do ano letivo ao ensino de geometria. Nosso problema parecia ser simples, uma vez que buscávamos apenas entender essa situação da sala de aula. Por que não se ensina geometria? Por que ela é abandonada?

Inúmeras possibilidades de pesquisa poderiam ser adotadas. A nossa opção foi investigar um grupo de professores formadores, com o intuito de conhecer e compreender o que dizem, e o seu ponto de vista de como deve ser abordada a Geometria Euclidiana na Licenciatura em Matemática. Esperamos, com isso, oferecer sugestões para uma proposta de formação inicial do professor de matemática como indicações para uma formação geométrica adequada para o exercício da docência na Educação Básica.

Pensando na geometria como sendo uma ciência logicamente construída por um sistema dedutivo e axiomático, essa questão foi discutida com os entrevistados. Os depoimentos apontam que na Licenciatura em Matemática ela deve ser trabalhada de forma axiomática, sendo essencial que o professor saiba que existe e aprenda dessa forma. Reconhecem que a geometria foi a primeira parte da matemática a ser tratada dessa forma desde os gregos antigos, sobretudo na obra de Euclides, Os Elementos. Admitem a importância e o valor histórico dos Elementos e que deve ser apresentado na formação do professor. No entanto, sugerem que o estudo da geometria euclidiana seja feito com a formalização apresentada por Hilbert, em sua obra Fundamentos da Geometria, do final do século XIX.

Com relação à formalização da geometria euclidiana, todos dizem ser importante, houve o consenso de que deve ser trabalhada na Licenciatura em Matemática. A imaturidade do aluno para a introdução de uma teoria axiomática e formal foi apontada pelos entrevistados como uma barreira a ser transposta, já que

os alunos têm dificuldades para entender o que é um sistema axiomático e de utilizar a escrita formal.

No entanto, fazem algumas considerações importantes quanto ao uso e apresentação da axiomatização e formalização. Seria interessante que o aluno tivesse uma disciplina como pré-requisito, por exemplo, teoria dos conjuntos, e que isso facilitaria o entendimento do modelo axiomático, bem como propiciaria que as demonstrações da geometria fossem menos descritivas e mais formais.

Evidenciamos, ainda, uma preocupação com o momento em que se apresenta a geometria e que o modo como se trabalha a axiomatização e formalização depende desse momento. Sugerem a possibilidade de a geometria euclidiana não ser trabalhada logo no início do curso de formação e que se fosse apresentada mais para o final sua axiomatização e formalização seria melhor trabalhada, de modo que haveria um melhor entendimento e um ganho em questão de conteúdo por parte do futuro professor.

Não podemos afirmar que, se colocar a geometria euclidiana mais para o final do curso, influenciará positivamente ou não na prática do professor. Pensamos que uma possibilidade seria apresentar a geometria em dois momentos no curso de formação, por exemplo, como se faz no cálculo e análise matemática. A princípio, a introdução de uma geometria axiomática, mas sem uma linguagem formal excessiva, mais descritiva. Posteriormente, em um segundo momento, aprofundar o estudo da geometria fundamentada no rigor e na formalização, para melhor qualificar o professor e auxiliá-lo na superação dos obstáculos apontados anteriormente. Essa proposta faz sentido para uma instituição de formação de professor de matemática em que de fato a geometria euclidiana seja trabalhada como sugerem os entrevistados. Uma vez que eles argumentam existir cursos onde a geometria é mal abordada e ainda, outros onde ela não é ensinada.

Entendemos que os cursos de Licenciatura em Matemática devem abordar as demonstrações nas disciplinas de conteúdo matemático, em particular, na geometria. E, considerando que a figura é um recurso didático para seu estudo, buscamos saber o que pensam nossos entrevistados sobre o uso da figura nas demonstrações. Foi unânime o fato de que a figura não serve como demonstração, auxilia, é importante para ter as intuições, porém necessita de justificativas, com

base na teoria, conceitos e definições. Reconhecem que a figura vem sendo usada desde a época de Euclides nos Elementos, é um recurso didático, porém, modernamente, dentro dos padrões atuais do rigor matemático, uma figura não pode ser aceita, devendo-se recorrer aos resultados e teoremas já demonstrados para provar o que se deseja.

Investigamos nossos entrevistados quanto ao uso da régua e do compasso por acreditar que são importantes no estudo da geometria euclidiana. Historicamente, porque desde Euclides as construções com esses instrumentos se fazem presentes na geometria, e, do ponto de vista da formação, uma vez que é um recurso a ser utilizado na prática em sala de aula em algumas construções, para a visualização de conceitos.

A geometria euclidiana é para eles a geometria da régua e do compasso. Seu uso ajuda no entendimento e visualização de conceitos da geometria plana e espacial. Trabalhar as construções utilizando esses instrumentos é fundamental para a formação do professor, que poderá se utilizar desse recurso. Observam, ainda, ser possível, em muitos casos, construir figuras nos teoremas para serem provados matematicamente pelos conceitos da geometria euclidiana.

No contexto atual, não poderíamos deixar de abordar as tecnologias digitais. Os softwares de geometria dinâmica, na opinião dos formadores, é um recurso que auxilia o estudo da geometria. Reconhecem que no mundo atual o computador se faz presente na sociedade e que os softwares se caracterizam por apresentar vantagens ao se fazer construções, bem como para visualizações das figuras em diversas posições, o que nos livros é de forma estática. Concordam que pelo recurso da movimentação é possível realizar atividades de experimentação e que tal recurso facilita na criação de conjecturas e na discussão de demonstrações. Ressaltam, no entanto, ser necessário que o professor saiba construir antes com régua e compasso e depois utilize os softwares. Para eles, saber fazer manualmente, desde que possível, além de ter domínio do conteúdo específico, é essencial para o professor, e um bom curso de formação tem obrigação de fornecer essa condição.

Devemos encarar o uso de computadores e dos softwares de geometria dinâmica como um recurso pedagógico importante nas aulas de matemática. Os professores devem utilizá-los não apenas para facilitar e despertar o interesse dos

alunos pelas aulas, no caso geometria, mas preparar atividades que promovam a possibilidade de investigação. Não atribuímos como sendo responsabilidade exclusiva do professor de geometria euclidiana ou de outra disciplina de conteúdo específico a de promover o uso de software de geometria dinâmica na formação de professores. Na verdade, sobre esse tema, inúmeras são as questões a serem respondidas, como, por exemplo: Como os cursos de Licenciatura em Matemática podem introduzir de forma efetiva as tecnologias informáticas na formação do professor?

Consideramos que a bibliografia utilizada no curso de Licenciatura em Matemática é de extrema importância e que o professor formador tem papel fundamental na escolha do livro adotado ou de outros que eventualmente possa indicar para que seus alunos utilizem como consulta. É por intermédio dela que os conceitos, definições e teoremas são apresentados. Além disso, é com a linguagem utilizada nessa referência que se dá a formação e que influenciará na prática do futuro professor. Observamos que a bibliografia indicada pelos entrevistados está, de alguma forma, relacionada à sua própria formação ou por ser a bibliografia padrão adotada pelas instituições onde eles trabalham.

Não há consenso de qual bibliografia a ser usada. Se por um lado existe uma literatura nacional, não há concordância de que seja suficiente para a formação em geometria. Sugerem algumas atualmente fora de edição, que poderiam acrescentar no sentido de proporcionar uma formação mais adequada, o que nos leva a concluir que há um declínio no que se refere aos livros publicados.

Nossos entrevistados demonstram ter consciência da importância e da responsabilidade da escolha da referência adotada por ele ou pela instituição, podendo substituí-la por outra que apresente, de acordo com sua concepção, um diferencial no que se refere ao conteúdo ou à forma de apresentação, da axiomatização, bem como do rigor e linguagem formal utilizada. Consideram essencial que obras clássicas como Os Elementos de Euclides e o texto elaborado por Hilbert, Fundamentos da Geometria, sejam vistos na formação do professor. Apontam, ainda, a necessidade de se apresentar textos estrangeiros para uma melhor formação. Porém, neste caso, argumentam que existe o problema da falta de

conhecimento ou domínio de uma língua estrangeira, por isso, caso não tenha disponível a tradução, dificulta ou se torna impossível a utilização dessas obras.

Ao abordarmos esse tema, notamos que existem poucas referências sobre geometria para a Licenciatura em Matemática, indicando que há uma carência neste setor. Isso nos sugere algumas questões. Por que não se publicam livros de geometria para cursos de Licenciatura em Matemática? A falta de novos livros contribui para a ausência da geometria na Educação Básica? A ausência de publicações está relacionada com a falta de geômetras no Brasil?

Ao abordarem as prováveis causas para o abandono da geometria da Educação Básica, houve, entre os entrevistados, opiniões convergentes e coerentes com o resultado de outras pesquisas que tratam direta ou indiretamente o tema.

A geometria deveria ser mais cobrada em exames de seleção. Por outro lado, ainda comentam sobre vestígios do Movimento da Matemática Moderna ocorrido nas décadas de sessenta e setenta. Isso nos faz pensar que professores que tiveram pouco contato com geometria no seu processo de formação não considerem relevante abordá-la na sua prática.

A falta do conhecimento específico de geometria pelo professor é considerada como o motivo principal do seu não ensino e ausência na sala de aula da Educação Básica. Os professores sabem pouco, inclusive conhecimentos elementares de geometria. A causa disso são as instituições que não apresentam ou que não conseguem dar uma formação adequada em geometria. Ressaltam existir instituições que apresentam boa formação, mas que representam uma parcela pequena diante no número elevado de cursos formadores, o que nos faz presumir que há um grande número de professores atualmente em formação que possuem pouco conhecimento de geometria.

Como não sabem o conteúdo, também não possuem uma didática apropriada e não conseguem ensinar. Para os formadores, isso resulta em um agravante, fazendo com que os professores tenham medo de ensinar geometria. Consideram que a estrutura da geometria euclidiana, por ser modelo de sistema axiomático dedutivo, também pode contribuir para que não seja devidamente explorada na Educação Básica e que, de alguma forma, parece exigir mais do

professor. Não conhecer bem os conteúdos da geometria significa também não ter conhecimento metodológico suficiente para ensinar.

Da nossa prática como professor da rede pública de ensino, resta dizer algo que não vimos em nenhuma pesquisa que aponta o abandono da geometria na Educação Básica. Ensinar geometria não é difícil, é fácil. É preciso que o professor se levante, vá à lousa, trace retas, círculos e caminhe para o centro da sala. Oriente, converse, tenha paciência e retorne à lousa fazendo novamente o já feito. Em outras palavras, é preciso que o professor trabalhe. Em outras palavras, ensinar geometria dá trabalho.

Damos por acabado algo que não terminou. Diante da nossa proposta e dos dados da pesquisa, o que deixamos foi nossa interpretação e reconhecemos que poderia prosseguir continuamente refinando os resultados e apontando outros que não fomos capazes. Por se tratar de uma análise qualitativa, outros olhares podem ser feitos e incorporados, o que esperamos que seja feito.

REFERÊNCIAS

- ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas Ciências Naturais e Sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. São Paulo: Pioneira, 1998.
- AMORIM, M. *O pesquisador e seu outro: Bakhtin nas ciências humanas*. São Paulo: Musa, 2004.
- ANDRÉ, M. E. D. A. *Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional*. 3. ed. Brasília: Liber Livro, 2008.
- ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.
- BARALDI, I. M. *Retratos da Educação Matemática na Região de Bauru (SP): uma história em construção*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Universidade Estadual Paulista, UNESP, Rio Claro, 2003.
- BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1985.
- BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. Tradução: Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. 4. ed. rev. e atual. Lisboa: Edições 70, 2009.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação Qualitativa em Educação Matemática: uma introdução à teoria e aos métodos*. Lisboa: Porto, 1994.
- BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. Ed. UNESP, São Paulo, 1999.
- BICUDO, I. As figuras nos Elementos de Euclides. *Revista Brasileira de História da Matemática*, RBHM, Especial n. 1, p. 211-213, 2007.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas (INEP). Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/web/emem/enem>>. Acesso em: 16 dez. 2014.

BURIGO, E. Z. *Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60*. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

CASTRUCCI, B. *Lições de Geometria Plana*. 6. ed. São Paulo: Nobel, 1968.

COXETER, H. S. M. *Introduction to Geometry*. 2nd ed. New York: Wiley, 1969.

CRESCENTI, E. P. *Os professores de matemática e a geometria: opiniões sobre a área e seu ensino*. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos - SP, 2005.

CURY, H. N. *Análise de erros em demonstrações de geometria plana: um estudo com alunos do 3º grau*. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 1988. Disponível em: <http://www.unifra.br/professores/13935/Dissertacao_Helena_Cury.pdf>. Acesso em: 01 mar. 2014.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

DESLAURIES, J. P.; KÉRISIT, M. O delineamento de pesquisa qualitativa. In: POUPART, J.; et al. *A pesquisa Qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos*. Tradução de Ana Cristina Nasser. 3. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

DIAS, M. S. S. *Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

DUARTE, R. M. Pesquisa qualitativa: reflexões sobre o trabalho de campo. *Cadernos de pesquisa*, n. 115, p. 139-154, março/ 2002.

DUARTE, A. R. S. *Matemática e Educação Matemática: a dinâmica de suas relações ao tempo do Movimento da Matemática Moderna no Brasil*. Tese (Doutorado em

Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

EVES, H. *História da geometria*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

FETISSOV, A. I. *A demonstração em geometria*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

FRANCO, M. L. P. B. *Análise do conteúdo*. 2. ed. Brasília: Liber Livro, 2007.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

GARNICA, A. V. M. *Um tema, Dois ensaios: Método, História Oral, Concepções, Educação Matemática*. Tese (Livre Docência) Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da UNESP, Bauru, 2005.

GARNICA, A. V. M. *Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática*. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, UNESP, Rio Claro, 1995.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. 13. ed. Rio de Janeiro: Record, 2013.

GAZIRE, E. S. *O não resgate das geometrias*. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas, SP, 2000.

GOUVÊA, F. A. T. *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, p. 1-13, Belo Horizonte, Brasil, 1996. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/pdf/maria-alice_geometria-dinamica1996-vii_sbie.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2014.

GRAVINA, M. A. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. Tese (Doutorado em Informática na Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GREENBERG, M. J. *Euclidian and non-Euclidian Geometries: Development and History*. New York: Freeman, 1993.

HARTSHORNE, R. *Geometry: Euclid and Beyond*. New York: Springer, 2000.

HILBERT, D. *Fundamentos da Geometria*. Tradução: Paulino Lima Fontes e A. J. Franco de Oliveira. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

JAVARONI, S. L.; SANTOS, S. C.; BORBA, M. C. Tecnologias digitais na produção e análise de dados qualitativos. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 197-218, 2011.

LEFEVRE, F.; LEFEVRE, A. M. C. *Pesquisa de Representação Social: um enfoque qualiquantitativo: a metodologia do discurso do sujeito coletivo*. 2. ed. Brasília: Liber Livro, 2012.

LIMA, F. R. de. *GEEM- Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e a formação de professores durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

LINS, R. C. A Formação Pedagógica em Disciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Matemática. *Revista de Educação PUC-Campinas*, n. 18, p. 117-123. Campinas, 2005. Disponível em: <<http://periodicos.puc-campinas.edu.br/seer/index.php/reveducacao/article/view/267/250>>. Acesso em: 22 dez. 2014.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *A Educação Matemática em Revista*, SBEM, n. 4, p. 3-13, 1995.

LOVIS, K. A. *As concepções de Geometria de um grupo de professores de Matemática da Educação Básica*. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática), Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

LOVIS, K. A. *Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores*. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática), Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

MANRIQUE, A. L. *Processo de formação de professores em geometria: mudanças em concepções e práticas*. Tese (Doutorado em Educação), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

MENDES, R. M. *A formação do professor que ensina matemática, as tecnologias de informação e comunicação e as comunidades de prática: uma relação possível*. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, UNESP, Rio Claro, 2013.

MISKULIN, R. G. S. *Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria*. Tese (Doutorado em Educação), UNICAMP, Campinas, 1999.

MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. *Geometria moderna*. Tradução de Renate G. Watanabe e Dorival A. Mello. São Paulo: Edgard Blucher, 1975.

MOISE, E. E. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. 3 rd ed. Reading: Addison-Wesley, 1990.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. *Zetetiké*, v. 4, n. 6, p. 65-74, Campinas, SP, jul./dez. 1996. Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/view/2664/2405>. Acesso em: 18 mar. 2014.

PASSOS, C. L. B. *Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula*. Tese (Doutorado em Educação Matemática), UNICAMP, Campinas, 2000.

PAVANELLO, R. M. *O Abandono do Ensino de Geometria: Uma Visão Histórica*. Dissertação (Mestrado em Educação), UNICAMP, Campinas, 1989.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, ano 1, n. 1. P. 7-17, UNICAMP, Campinas, 1993.

Disponível em:

<<http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/view/2611/2353>>.

Acesso em: 27 mar. 2014.

PEREZ, G. *Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino da geometria para as camadas populares*. Tese (Doutorado em Educação), UNICAMP, Campinas, 1991.

PIETROPAOLO, R. C. *(Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática*. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

POGORÉLOV, A. V. *Geometria elemental*. Tradução de Carlos Vega. Moscou: Mir, 1974.

POGORÉLOV, A. V. *Geometry*. Tradução de Leonid Levant; Aleksandr Repeyev; Oleg Efimov. Moscou: Mir, 1987.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, J. P. Da formação ao desenvolvimento profissional. In: ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA PROFMAT98, 1998, Guimarães. *Actas do ProfMat98*, Lisboa: APM, 1998, P. 27- 44. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/98-Ponte\(Profmat\).rtf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/98-Ponte(Profmat).rtf)>. Acesso em: 01 abr. 2014.

POUPART, J. A entrevista de tipo qualitativo: considerações epistemológicas, teóricas e metodológicas. In: POUPART, J.; et al. *A Pesquisa Qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos*. Tradução de Ana Cristina Nasser. 3. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

SERRALHEIRO, T. D. *Formação de professores: conhecimentos, discursos e mudanças na prática de demonstrações*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA, H. *Centro de Educação Matemática (CEM): Fragmentos de Identidade*. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, UNESP, Rio Claro, 2007.

SOARES, F. S. *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: avanço ou retrocesso?* Dissertação (Mestrado em Matemática), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

SOUZA, L. A.; GARNICA, A. V. M. As Matemáticas Modernas: um ensaio sobre os modos de produção de significado ao(s) movimento(s) no ensino primário brasileiro. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v. 16, n. 3, p. 369–393, 2013. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/pdf/335/33529866005.pdf>>. Acesso em: 22 dez. 2014.

USISKIN, Z. Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

VALENTE, J. A. (Org.). *O computador na sociedade do conhecimento*. UNICAMP/NIED, Campinas, SP, 1999.

ZUIN, E. S. L. *Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil*. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

ZULATO, R. B. A. *Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, UNESP, Rio Claro, 2002.

ANEXO A – ROTEIRO DAS ENTREVISTAS

Roteiro da primeira entrevista

Como devem ser trabalhadas em um curso de Licenciatura em Matemática a axiomatização e a formalização da Geometria Euclidiana?

Como se devem utilizar régua e compasso e os softwares de geometria dinâmica para o estudo da Geometria Euclidiana na formação do professor de matemática?

Que tipo de literatura cujo tema é geometria deve ser utilizado na formação do professor de matemática?

Pesquisas apontam que os alunos do Ensino Fundamental e Médio não estudam geometria. Ou seja, a geometria está ausente na sala de aula. Se você concorda com essas afirmações, quais seriam, em sua opinião, os motivos para este fato?

A intuição e o método axiomático, típicos da Geometria Euclidiana, são características de toda a atividade matemática. Em que outra área do conhecimento você considera que os conceitos ou o domínio do método axiomático obtido com a formação em geometria sejam fundamentais?

Roteiro da segunda, terceira e quarta entrevistas

Como você trabalha em um curso de Licenciatura em Matemática o conteúdo de geometria?

A axiomatização é trabalhada?

A formalização deve ser feita de forma rigorosa?

Em uma demonstração, a figura é aceita?

A geometria deve ser trabalhada no estilo de Euclides ou do ponto de vista moderno?

Você considera que o uso da régua e do compasso é importante no curso de licenciatura?

Como você trabalha a régua e o compasso?

Em que tipos de atividades você usa esses instrumentos?

Sobre o uso de softwares de geometria dinâmica, você considera importante na formação do professor de matemática?

Que tipo de literatura cujo tema é geometria você utiliza na formação do professor de matemática?

Como você faz uso dessa bibliografia?

Pesquisas apontam que os alunos do Ensino Fundamental e Médio não estudam geometria. Ou seja, a geometria está ausente na sala de aula. Se você concorda com essas afirmações, quais seriam, em sua opinião, os motivos para este fato?

A intuição e o método axiomático, típicos da Geometria Euclidiana, são características de toda a atividade matemática. Em que outra área do conhecimento você considera que os conceitos ou o domínio do método axiomático obtido com a formação em geometria sejam fundamentais?

ANEXO B - CONSIDERAÇÕES DO PRIMEIRO ENTREVISTADO EM RELAÇÃO AO ROTEIRO DA ENTREVISTA

Apresentamos a transcrição do depoimento feito pelo primeiro entrevistado sobre sua percepção e sugestões para o roteiro da entrevista. Foi com base neste depoimento que pesquisador e orientador pensaram nas questões que abordassem os mesmos temas nas outras três entrevistas seguintes. Identificamos orientador, entrevistador e entrevistado por Henrique, Luiz e Wladimir, respectivamente.

Henrique: É o seguinte, Wladimir. Agora a gente vai fazer uma discussão.

Wladimir: Um processo em mim no tribunal de Hilbert!

Henrique: É... entender exatamente como foi, como poderia ser, e a gente pede para você comentar o modo como foi feito.

Luiz: Que você fale sobre a ordem das questões. Se tem alguma questão que você achou difícil de responder, enfim, sobre a entrevista como um todo.

Henrique: Eu queria que você falasse sobre o que poderia melhorar.

Wladimir: É... eu não sei... talvez uma... sugestão, né? Assim, que eu senti, na minha dificuldade em responder. Talvez quebrar um pouco as perguntas, dividir elas.

Luiz: Um pouco longas?

Wladimir: Não, não é longa. Eu optaria por perguntas... menos profundas e mais objetivas, né? Pra talvez chegar aonde você quer. Por exemplo, você propõe aqui. Como devem ser trabalhadas em um curso de Licenciatura em Matemática a axiomatização e a formalização? Talvez, uma primeira pergunta seria assim. Como que você trabalha num curso de Licenciatura o conteúdo de geometria? Então, você primeiro deixa a pessoa falar o que ela faz. Em cima disso, por exemplo, ela diz... ah, eu gosto muito de trabalhar com régua e compasso. Pronto, te abriu para outra pergunta. Tá bom, com régua e compasso, como que você trabalha isso? Trabalha com laboratório de informática ou com material de desenho? Trabalha com objetos manipuláveis? Trabalha com geometria espacial ou não? Entendeu, porque... antes de você entrar na questão da axiomatização, formalização, você deixa primeiro a

pessoa falar. Ela pode dizer: não, eu gosto muito de trabalhar construções geométricas, as discussões... Ah... tá bom. Em algum momento você trabalha a axiomatização? Entendeu? Você já não bateu de frente com a pessoa.

Henrique: Ah! Legal, a gente não tinha pensado nisso.

Wladimir: Talvez a primeira pergunta seria assim: Como que você trabalha os conteúdos? Depois... Que dificuldade você enxerga que os alunos manifestam no aprendizado desse conteúdo? Então você já deu uma brecha. Aí você vem. Em algum momento você trabalha a axiomatização? Em outro momento... Nos seus critérios de avaliação você cobra demais a formalização do aluno, ou apenas a ideia? Você é punitivo se ele não escrever a dedução? Você aceita um desenho como demonstração? Então você está... não sei se você está percebendo. Eu estou dividindo a sua pergunta de forma mais para traçar o perfil do entrevistado.

Luiz: Sem encostar ele na parede, né?

Wladimir: Porque você pode ter resposta tipo assim. Não, em nenhum momento eu trabalho a axiomatização e a formalização. Eu não trabalho isso na disciplina. O aluno não entende isso. O cara pode te responder isso.

Henrique: E para aí... né?

Wladimir: Aí você fala. Mas por que ele não entende? Ah, porque ele não tem maturidade. Agora é diferente, você dá aula de geometria? Como você dá essa aula? Como que você trabalha? Você em algum momento aborda a história? Você gosta de trabalhar a geometria do ponto de vista do Euclides, com as falhas que ele tem, ou mais do ponto de vista moderno? Aí a questão da régua e do compasso. Que tipo de atividades você faz utilizando o compasso? Aí você vê como ele vai te respondendo e vai tendo uma opção mais elaborada. Meio um fluxograma, dependendo do tipo de resposta, você vai para uma pergunta. Aí vai te abrindo a coisa... O que eu tô entendendo, não sei... é que no conjunto de perguntas você quer traçar um perfil, ou um tipo de realidade do ensino de geometria. Porque essa entrevista... essa pesquisa é qualitativa, não é quantitativa. Porque se fosse quantitativa você iria passar um questionário, eu ia responder e você passaria para todos os professores. Ela virou uma pesquisa quantitativa, uma amostragem estatística. Como é qualitativa, ela é uma entrevista em profundidade.

Henrique: Isso, exatamente. Por ser uma pesquisa qualitativa, a gente tá querendo saber a visão desses cinco professores.

Wladimir: Isso... Então, através dessa pesquisa, as suas perguntas... têm que... têm que ter um roteiro que você consiga ir em profundidade no tema. Então, abrir a questão, deixar a pessoa te situar, não você situar a pessoa, inverte o papel. Então uma pergunta. Como você ensina? E deixa o cara responder. Minha aula é expositiva, mas ela é talvez argumentativa, discutida. Agora eu sei... outro professor pode responder. Não, eu faço uso as deduções, eu mando os alunos deduzirem, ou eu faço a partir das construções, eu prefiro os resultados geométricos, as demonstrações. Então, são experiências que você tem e você detecta isso e vai te direcionando o que você quer saber. Então dividir e abrir a pergunta é uma boa.

Henrique: Muito provavelmente isso... vamos dizer um esquema manual dele... são cinco grandes perguntas. O modo de ele formular.

Wladimir: Na realidade, cada pergunta é um tema. A forma com que você desenvolve a entrevista é que vai te dar profundidade no tema.

Luiz: Para eu atingir os objetivos.

Wladimir: Não na pergunta, mas no tema. Você tem o tema o uso da régua e do compasso e softwares. Aí, dependendo do professor, você vai detectando a profundidade. Então, você pode ter um professor que na entrevista ele vai falar assim: Ah, eu faço uso só de régua e compasso. E você diz: Mas por quê? Ah, porque na minha instituição não tem laboratório de informática. Ou ele pode dizer: não, eu não sei mexer no computador. E você fala: você acha isso importante mesmo você não tendo? Então, você vai abrindo e traçando o perfil. Então, dependendo da resposta, você pega como que o professor trabalha o tema.

Luiz: É, seu comentário foi muito importante. A gente já sabia de início que essas perguntas dariam uma abertura muito grande para alguns professores e menos para outros. Em cima dessas respostas é que a gente entraria com outras.

Wladimir: Eu penso que a sua participação é importante, apesar de você achar que não deve ficar intervindo, isso é verdade. Mas você... o seu caráter é de explorador. Você tem que explorar a resposta da pessoa, a clareza, as vertentes, pra onde a

questão vai, é seu papel. Você jogar isso para o entrevistado, ele não vai te dar abertura, não vai saber aonde você quer chegar.

Luiz: Essa nossa escolha... maneira de fazer foi pela falta de experiência.

Wladimir: Talvez o teste seria você pensar cada questão como um tema e dentro da questão fazer mais ou menos uma simulação do que as pessoas responderiam. Por exemplo, a pessoa poderia chegar e dizer: não, eu não dou aula de geometria. Pronto, matou a tua entrevista. Desculpa, entrevistei a pessoa errada, né? Então, de acordo com as respostas, você vai fazendo as opções, um algoritmo mesmo.

Luiz: Entendi.

Wladimir: Se você for entrevistar outro professor, ele vai ter uma visão totalmente diferente da minha. E eu acho que ele vai ter um material muito rico de resposta que complementa a minha. Se você for entrevistar outra pessoa, ela vai ter outro enfoque diferente dele e meu. E aí, você não pode perder o que eles têm pra falar, cada um em sua praia, né? Cada um na sua profundidade, acho que isso é legal. Porque é o que... não sei o direcionamento que o Henrique... qual direcionamento que vocês querem dar no trabalho. Mas vai ser filtrar e pegar as coisas importantes, fragmentos das entrevistas, comentários que cada um faz.

Henrique: Na verdade, a nossa conversa da escolha das pessoas foi... eu acho que o critério fundamental, talvez até a gente não tenha usado tanto essa palavra, mas o que ficou implícito foi: que deveria haver visões diferentes, o mais diferente possível, mas vamos dizer com um ponto em comum, que seria um compromisso com a coisa. Quer dizer, a gente quer evitar justamente esse caso do... ah, não estou interessado nisso. Então a gente procurou pessoas que nós conhecemos e que a gente sabe tem o que dizer sobre o assunto. Significa ter um compromisso, eu diria... simpatia pelo assunto, compromisso no sentido de ter interesse no problema, você entendeu? Então, é por isso que a gente pegou um espectro amplo, quer dizer, até pelo aspecto de ser uma pesquisa qualitativa e não quantitativa, então você precisa restringir mesmo. Foi interessante essa ideia de montar esse fluxograma, mesmo que não seja escrito, mas fica na cabeça do Luiz o fluxograma pronto.

Wladimir: Pense cada pergunta como tema, e aí como que você direciona dentro desse tema. Porque dentro desse tema você tem certos questionamentos.

ANEXO C – ENTREVISTA COM PROFESSOR WLADIMIR

Local: Departamento de Matemática, Unesp – Campus de Rio Claro

Data: 11 de julho de 2013

A presente transcrição é a versão revista pelo entrevistado. Identificamos o entrevistador por Luiz, o entrevistado por Wladimir e o orientador por Henrique. Reticências indicam pequena pausa para formalizar o pensamento.

Luiz: Bom, vamos dar início a nossa primeira entrevista.

Como devem ser trabalhadas em um curso de Licenciatura em Matemática a axiomatização e a formalização da Geometria Euclidiana?

Wladimir: Essa pergunta é muito boa. No curso de licenciatura, acredito ser possível trabalhar a axiomatização e a formalização da Geometria Euclidiana. Para isso é preciso trabalhar alguns pré-requisitos.

Você tem duas opções. Se o aluno teve um curso de teoria dos conjuntos, não no sentido mais elevado, mas no sentido básico. Se ele domina a notação de teoria de conjuntos, então pode-se fazer a axiomatização e as demonstrações nos argumentos de teoria de conjuntos. Esse é um tratamento que você pode dar.

Se o aluno não teve essa formação em teoria dos conjuntos, então a axiomatização e as demonstrações serão mais descritivas, serão mais do ponto de vista descritivo. Existem textos nos quais a axiomatização é tratada desta forma. Acredito ser possível. A dificuldade que encontramos está na maturidade do aluno no que se refere às técnicas de demonstrações e ao próprio entendimento do método axiomático. Espero ter respondido a sua pergunta.

Luiz: Sim, na realidade, se... como é trabalhar a axiomatização e a formalização?

Wladimir: Hum, ah.

Luiz: Se elas seriam coisas independentes.

Wladimir: Não. Eu acho que a axiomatização depende do domínio da linguagem de teoria dos conjuntos. Já a sua formalização é mais profunda.

Luiz: Tá.

Wladimir: Porque se discute inclusive as técnicas de dedução e de demonstração. Quando a linguagem da teoria dos conjuntos não é dominada, a formalização torna-se mais descritiva. É muito mais linguística com introdução, desenvolvimento, conclusão do ponto de vista de um texto descritivo.

Luiz: Certo.

Wladimir: Você não se apoia tanto na lógica dedutiva, de um ponto de vista mais lógico. É lógico dedutivo mais do ponto de vista linguístico mesmo. Por exemplo, essa é minha hipótese, esses são os meus argumentos e essa é minha conclusão e está demonstrado.

Assim, depende do momento em que isso é trabalhado. Por exemplo, eu já ministrei a disciplina de Geometria Euclidiana, no passado, aqui na Unesp. Esta disciplina ocorre no terceiro semestre. Existe uma disciplina de Geometria Elementar que eu acredito ser desnecessária. A Geometria Euclidiana acontece no terceiro semestre do curso.

Luiz: Inclusive Euclidiana um e Euclidiana dois.

Wladimir: Correto. Euclidiana um e Euclidiana dois. A Euclidiana um seria o conteúdo de geometria plana e a Euclidiana dois o de espacial. No meu caso, quando eu fiz graduação na década de oitenta, a Geometria Euclidiana não aparecia no currículo. Não era nem mencionada. Existia uma disciplina de último semestre para o bacharelado que era chamada Fundamentos de Geometria, em que se tinha um pouco da axiomática e se trabalhava mais as questões das transformações no plano e as geometrias não-euclidiana.

A axiomática não aparecia, praticamente não existia. Se você me permite fazer um parêntese, às vezes eu observo, em alguns cursos, em suas grades curriculares, que a Geometria Euclidiana é vista como conteúdo mais da licenciatura do que do bacharelado. Então, se o estudante faz a opção pelo bacharelado, o conteúdo de Geometria Euclidiana praticamente não aparece.

Pode-se dizer que esse conteúdo não é da formação de um pesquisador, enquanto que, na licenciatura, isso é conteúdo para formação do professor. Acredito que temos uma ruptura, uma distância curricular que às vezes você não percebe.

Nesse sentido, o conteúdo da axiomática, da formalização está muito atrelado à filosofia do curso, da importância que o curso dá. Na UFSCar, em Sorocaba, o conteúdo de Geometria Euclidiana ocorre, em uma única disciplina, no sétimo período, após a disciplina de Teoria dos Conjuntos.

Luiz: Ah, tá.

Wladimir: Espacial e plana em sessenta horas aula, né, é bem corrido. Tudo, então, aí, depende do professor. No caso, eu que já ministrei a disciplina três vezes, a minha ênfase foi, ah, seguir a rigor a questão da axiomática, né?

Luiz: Sei.

Wladimir: O formalismo, a dedução e o trabalhar a importância do raciocínio geométrico é uma ênfase que o professor dá. O professor não está preocupado na discussão em como ensinar, mas trazer o conteúdo para o futuro professor. O professor não está preocupado em material manipulativo ou nas estratégias de ensino. Mas em trabalhar o conteúdo com os alunos.

Luiz: Bom, muito obrigado, então. Vamos para a segunda pergunta.

Como se devem utilizar régua e compasso e os softwares de geometria dinâmica para o estudo da Geometria Euclidiana na formação do professor de matemática?

Wladimir: Ah, isso é uma ideia que eu venho tendo. Até comentei com o Henrique.

Henrique: *Risos* (comentário inaudível).

Wladimir: Eu vi um texto em que se faz isso. É um texto que saiu agora, há pouco tempo, do Caminha, uma coleção da Sociedade Brasileira de Matemática, em que ele faz um texto como o produto de treinamento para alunos voltados para a Olimpíada de Matemática.

Ele faz uma coisa que eu acho interessante. A inserção da disciplina de Desenho Geométrico dentro da disciplina de Geometria Euclidiana. Você faz as

demonstrações a partir dos resultados geométricos e, depois, algumas construções com régua e compasso que servem como exemplo.

Neste sentido, tem-se a justificativa da construção. Por que aquela construção é verdadeira? Por que aquela construção é a que responde ao problema? As justificativas são exatamente os teoremas e resultados que o estudante viu até aquele momento.

Desta forma, o estudante vê uma aplicação, o resultado real. Às vezes, eu acho que se perde muito nesta questão de dissociar os dois assuntos, o Desenho Geométrico e a Geometria. Quando estudamos as construções geométricas, após a construção, queremos saber a justificativa, por que tal construção é verdadeira. Neste momento, se recorre à Geometria.

Ao mesmo tempo, existe um problema lógico. Não sei se foi o Henrique que levantou esta questão, mas eu estava pensando nisso ontem. Existe um problema terrível nesse tipo de tratamento. A axiomática que se ensina é a axiomática de Birkhoff, a partir do Axioma da Régua, da régua e do transferidor.

Então, não se usa a formalização e os axiomas de Hilbert. Utilizamos um atalho didático que é a axiomática de Birkhoff, em que se supõe a existência de uma régua e de um transferidor. Existe uma métrica, uma noção de distância para arco e medida de distância entre pontos. Só que quando vamos para as construções com régua e compasso, a régua e o compasso não têm mais medidas. *Risos*. As construções geométricas não podem ter métrica.

Luiz: Certo.

Wladimir: Então fica uma coisa estranha. Você ensina com régua e tira os resultados, a partir da régua e compasso, todos aqueles resultados. Depois, nas construções geométricas, você fala que isso não pode acontecer. Sua régua não é graduada. Você não tem um transferidor. Ao mesmo tempo, você pede para que o aluno justifique, sendo que, na justificativa dele, a régua tinha métrica. *Risos*. Estamos num círculo vicioso.

Para mim, é algo que não está resolvido. Realmente é um problema. Temos que discutir isso com aluno. As construções com régua e compasso são importantes,

principalmente para se trabalhar os conteúdos. Assim, seja ela com a régua e o compasso propriamente dito ou com o software, acho que elas são importantes.

O meu orientando de mestrado em Sorocaba passou um questionário da mesma forma que você está fazendo. Ele passou para os professores da rede e uma das respostas nos assustou. Uma professora disse que não faz uso de régua e compasso em sala de aula porque os estudantes se “ferem”. Ela teve problema de um estudante “espetar” o outro com ...

Luiz: Compasso.

Wladimir: ... com o compasso. Ela disse ter medo em usar esse instrumento em sala de aula apesar de ser dado pelo estado. Neste sentido, a dinâmica com o uso do software resolve. Mas eu acho que não é toda escola que tem acesso a esse tipo de tecnologia.

Luiz: É, o acesso é um pouco complicado.

Wladimir: O acesso é complicado. Temos que saber conviver com a questão.

Luiz: É mais uma desculpa para não trabalhar.

Wladimir: Exatamente. Mais uma desculpa para não trabalhar. Não sei se eu estou adiantando alguma pergunta, mas também é um desafio para o professor trabalhar dessa forma. Como o professor utiliza a régua e compasso? Como que ele pode utilizar esses instrumentos sem correr riscos? Como também um outro professor respondeu argumentando que, mesmo não entregando o compasso, os estudantes quebram as régua, quebram o material fornecido pelo Estado.

Então, o problema do uso é, além da questão didática, do conteúdo matemático. É um problema mais social? Difícil de se lidar também. Agora, a importância é que é um material que vai ser do dia a dia do estudante. Desde alinhar um batente de porta, fazer um ângulo reto em um campo de futebol. Até fazer a inclinação de telhado.

Luiz: Aplicações.

Wladimir: As aplicações... medir altura de uma caixa d'água. Esse tipo de coisa. Esse tipo de atividade, que não são do tipo régua e compasso, mas que são construções geométricas. É uma descrição do espaço físico. Não sei se eu respondi.

Luiz: Sim!

Wladimir: O que você queria.

Luiz: Só acrescentando nesta mesma pergunta, a régua viria antes do software... junto, trabalho junto?

Wladimir: No caso da universidade, eu faço primeiro. Eu faço as construções e mando os estudantes fazerem as construções com a régua e o compasso. É uma questão até motora. O estudante tem que saber mexer com o instrumento. Além disso, você só valoriza o software se você sabe a dificuldade em fazer. Da mesma forma, você só valoriza uma calculadora depois que você sabe fazer a conta na mão. Quando você faz a conta, aquela sucessão de contas na mão, depois você vê na calculadora que é mais rápido. Pelo menos você aprendeu. Ábaco primeiro. *Risos*. Primeiro você aprendeu o instrumento para depois poder valorizar esse novo artefato. Eu acredito que é importante fazer o uso primeiro da régua e do compasso para depois utilizar o software. Além disso, se faltar luz, não há aula? É a mesma situação quando acaba a pilha da calculadora. Eu não saberei fazer a conta? Não, eu sei fazer no papel. Então eu acho que é...

Luiz: É importante.

Wladimir: ... é importante saber fazer primeiro.

Luiz: Terceira pergunta.

Que tipos de literatura onde o tema é geometria devem ser utilizados na formação do professor de matemática?

Wladimir: Eu ultimamente estou utilizando os livros do João Lucas Barbosa, da SBM⁷, e o livro da Rezende, da Editora da Unicamp⁸. A bibliografia não é excelente,

⁷ BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1985.

⁸ REZENDE, E. Q. F.; QUIROZ, M. L. B. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. Ed. Unicamp, Campinas, 2000.

mas é nacional. Bons livros estão fora de edição e, em muitas vezes, os livros bons estão em inglês. Assim, o aluno tem que...

Luiz: Dominar uma língua estrangeira.

Wladimir: ... dominar uma língua estrangeira. O papel do professor, no caso da formação de professores, é complementar essa literatura fraca nacional. Ao mesmo tempo, o tema geometria vem aparecendo em muitas revistas de divulgação científica nacionais. Temos a Revista do Professor de Matemática (da SBM) que sempre traz algum material. A revista Matemática Universitária (da SBM) nem tanto. Eu assino a revista Cálculo (da Editora Segmento). Nos últimos três meses, saíram artigos sobre geometria que eu encaminhei para os alunos. No caso, dois textos interessantes. Um sobre o teorema de Pitágoras e outro sobre os axiomas de Hilbert. Quando passei para os estudantes, comentei: vocês ao final da leitura vão ter que ter entendido cem por cento do que o texto trata. Porque é uma autoavaliação da disciplina. Vocês devem compreender do que o texto trata, uma vez que o artigo é de divulgação, voltada para o público de professores que não estão fazendo o mestrado e que não fizeram a disciplina de Geometria. Então o texto dever estar numa linguagem acessível.

Luiz: Certo.

Wladimir: Então, coloquei como uma forma de brincadeira para eles. Falei assim: se ao final vocês entenderem cem por cento é uma autoavaliação da disciplina. Uma avaliação do seu rendimento na disciplina. Porque realmente tudo que está lá, quem fez a disciplina tem que entender. É interessante que, no texto, trabalha com o conteúdo da sua primeira pergunta.

O texto trabalha o formalismo, listando todos os axiomas, colocando-os em caixas informativas. O texto coloca os axiomas na sua forma descritiva. Todos os axiomas da geometria plana. Acho que espacial também. Então eu acho que na questão de trabalhar textos, temos uma bibliografia pobre nacional, que é acessível no sentido de comprar. Tem uma bibliografia boa nacional, mas que só se dá por meio de reprodução. Tem que fotocopiar porque são livros que estão fora de edição. Tem a bibliografia estrangeira que o aluno tem que dominar o inglês, se ele quiser complementar. E temos textos de divulgação. Eu tento conciliar os quatro: textos

antigos, textos atuais, textos estrangeiros e artigos de divulgação. É o máximo que podemos trabalhar no sentido de referências com os estudantes.

Luiz: Ótimo. Vamos, então, à quarta pergunta.

Pesquisas apontam que os alunos do Ensino Fundamental e Médio não estudam geometria. Ou seja, a geometria está ausente na sala de aula. Se você concorda com essas afirmações, quais seriam, em sua opinião, os motivos para este fato?

Wladimir: Vou “vender o peixe” que me passaram. Não estou certo quanto à dimensão do problema. Mas é uma situação real. Temos um mestrando que deseja trabalhar com a geometria analítica no ensino médio usando software. Este é o tema, o objeto de trabalho, da dissertação. Ele relatou para mim que elaborou as atividades e, quando foi implementar, a resposta dos alunos foi que aquele conteúdo não valia a pena estudar, pois não cai no ENEM.

Então, ao mesmo tempo que se tem consciência que o assunto geometria é importante para a formação do indivíduo, este conteúdo não está sendo cobrado. Parece que não está sendo uma ênfase. É um processo histórico também...

Henrique: *Risos.*

Wladimir: Não sei se o Henrique é da época do latim ainda na escola.

Henrique: Não, não, não peguei.

Wladimir: Talvez uma boa pessoa para você conversar mais sobre esta questão de como foi ensino, em como ele aprendeu, seja o professor Bicudo.

Henrique: Tá na lista.

Wladimir: A questão é como ele aprendeu geometria na infância. Como se deu o ensino de Geometria. Ele deve de ser da formação da primeira escola...

Henrique: É verdade, é.

Wladimir: A escola clássica. Até onde eu sei, a Geometria era uma disciplina à parte da matemática. Eram geometria e aritmética.

Henrique: Isso aparece na biografia, por exemplo, do Fernando Pessoa. O boletim escolar tem matemática e tem Euclid, na África do Sul.

Wladimir: Exatamente.

Luiz: Isso é devido à importância dada à geometria na época?

Wladimir: A geometria era tratada como um assunto separado da matemática. Uma área do conhecimento. A importância do ensino de geometria. Depois, temos a Matemática Moderna, que surge na década de setenta. Eu e o Henrique vivemos isso. Era a importância da formalização, da teoria dos conjuntos. A geometria vai perdendo sua importância. E o Desenho Geométrico passa a ser muito mais... Né, argumentação, e aí ela se distancia mais ainda, porque o aluno não vê.

Luiz: Não assimila?

Wladimir: Não assimila. Atualmente, é o que se encontra nos Cadernos do Professor do governo do Estado. Essa é a ênfase que está se dando para a geometria. Me preocupa porque nos exames de seleção as questões de geometria não são tratadas. Se apoiam mais na contextualização e na modelagem. Talvez os problemas geométricos não entrem nessa filosofia. Você, que está trabalhando na parte da educação, deve saber melhor o porquê disso.

Talvez a geometria não entre como um objeto que se aplique muito nas questões de contextualização ou modelagem. Apesar que tem como. Mas não é tão explorado. Estamos vivendo um problema no que refere à valorização da geometria.

Se não me engano, no currículo do Estado, a geometria é colocada no final do período acadêmico. Além disso, é sempre...

Luiz: É intercalada.

Wladimir: É, acho que é quarto bimestre. O professor ou acaba pulando, deixando aquilo por último, ou acaba não dando. Não cumpre o programa. O aluno chega, nos anos seguintes, com muita dificuldade e deficiência. Isso reflete a dificuldade que eles têm com Geometria Analítica logo no primeiro ano da universidade. Independente se irá fazer matemática ou não, é uma disciplina básica, e eles não dominam nenhum conteúdo geométrico. A Geometria Analítica surge como um

modelo da Geometria Euclidiana. Então, o estudante não sabe e não valoriza porque aquela equação algébrica está respondendo a um problema de Geometria Euclidiana.

Não sei se eu estou sendo claro. Os problemas da Geometria Euclidiana estão lá. Dada uma reta e um ponto, trace a perpendicular. A construção com régua e compasso faz a construção geométrica desse problema. Na Geometria Analítica, isso se transforma no problema de declividade da reta. Temos a equação. Sabemos obter o vetor direção. Tomamos o ortogonal ou, a partir da equação geral da reta, descobrimos a declividade, faz-se menos um sobre “m” da reta. Temos a declividade da reta perpendicular. Basta fazer a reta passar pelo ponto. E resolvemos o problema. Comprova-se a Geometria Euclidiana. O que acontece é que os alunos não sabem a Geometria Euclidiana. Então isso se torna algo distante. Construções de paralelas, interseções, todos os resultados da Geometria Euclidiana, que o estudante não domina, e que devem aparecer (recuperados) na Geometria Analítica, agora com uma linguagem algébrica, ficam piores ainda.

Luiz: Piorou.

Wladimir: Piorou. Mais ainda, eles têm muita dificuldade de visualização, porque não foi trabalhado. Valorização do assunto também. É uma situação que está, para mim, sem uma resposta muito clara do que está acontecendo. É importante, mas, ao mesmo tempo, não é trabalhada. É estranho.

Luiz: É verdade. Então vamos para a quinta questão.

A intuição e o método axiomático, típicos da Geometria Euclidiana, são características de toda a atividade matemática. Em que outra área do conhecimento você considera que os conceitos ou o domínio do método axiomático obtido com a formação em geometria sejam fundamentais?

Wladimir: Temos consequências imediatas. A teoria dos conjuntos é uma delas. Temos a sua axiomatização. A Álgebra Linear também. Principalmente a questão da definição, que é um conjunto de axiomas. A definição de espaço vetorial é um conjunto de axiomas. Na parte de estruturas algébricas também. Eu acredito que é uma questão de maturidade.

Hoje eu me sinto muito mais feliz em saber um pouco sobre o método axiomático porque tenho um entendimento melhor de outros assuntos, que quando eu aprendi não eram dados dessa forma. Por outro lado, talvez alterar a ordem pode ser também prejudicial. Você acredita que vai acertar, mas pode piorar. Então o melhor, talvez, é continuar, do ponto de vista do aprendizado inicial, ensinar cálculo, teoria dos números, a construção dos números reais sem a axiomática. Sem muita ênfase nesse formalismo para a formação matemática.

Após isso, inicia-se o formalismo axiomático. Cabe ao indivíduo retomar e enxergar aquilo que aprendeu, novamente, de outra forma. Então ele tem um deslumbre, tem um maravilhamento e começa a entender a matemática de uma outra forma.

Luiz: Acende a luz, né?

Wladimir: É. Acende a luz e começa a ter entendimento. É isso. Agora qual é o problema? Se você fizer aquela axiomática, aquele formalismo no início da formação, talvez ocorra um aborto do indivíduo. Você sacrificará muita coisa. A mesma coisa acontece com o cálculo um. Por que aprendo cálculo um dessa forma? Só vou aprender a sua formalização em Análise Matemática. Se você ensinar inicialmente da forma feita na disciplina de Análise Matemática, você inibe todos os primeiros resultados que desejamos que o estudante domine. Acredito que é uma questão de objetivo. Se os objetivos são outros, inicialmente nesses cursos, então talvez por isso a importância. Talvez a Geometria Euclidiana não deva ser ensinada no primeiro ano.

O mesmo ocorre com Teoria dos Conjuntos. Nesse semestre, eu ministrei Teoria dos Conjuntos, em Sorocaba, e os alunos falavam: professor, essa disciplina tinha que ocorrer no primeiro semestre porque agora a gente entende muitas coisas de outras disciplinas. Só que, no primeiro semestre, eles não têm maturidade para trabalhar aquela axiomática. Então, é melhor ficar do jeito que está. Se você trazer para o primeiro semestre, esta disciplina vai ser ministrada num outro nível e não poderemos explorar a axiomática e a formalização. Você vai só ensinar a linguagem e não vai fundamentar. Porque o estudante não tem maturidade para assimilar aquele conteúdo. Então é mesma coisa. Você pode trazer a Geometria Euclidiana para o primeiro semestre, no formalismo e axiomática você vai ensinar uma Geometria Euclidiana do ensino médio. Talvez para a formação do professor é

melhor que ela esteja mais avançada, depois que ele tiver uma boa noção de contínuo e dos números reais. De Cálculo e de Geometria Analítica para que ele entenda a dimensão do que tá sendo ensinado....

Luiz: Dê mais significado.

Wladimir: Dê mais significado daquilo que tá sendo ensinado. A formalização pode te enganar. Quando começamos a aprender a formalização e a axiomática colocamos esta questão: por que eu não começo assim? Pode ser um tiro no pé. Pode ser uma coisa que não tiraremos proveito. Não teremos rendimento de trazer isso logo no início. Talvez esse foi o erro da Matemática Moderna, né? De trazer um formalismo num nível muito inicial, em que o estudante não tem maturidade suficiente. Desejamos que, naquele momento da vida do estudante, que ele tenha operacionalidade. Que ele domine contas, um raciocínio lógico dedutivo, mas não a formalização.

Acho que a questão mesmo da inserção é neste sentido. A axiomática e o método dedutivo da Geometria Euclidiana vão ter a aplicação que você mencionou. De forma mais de retornar, depois que faz. Ah, era por isso que eu fazia assim lá em Cálculo. Ah, estou identificando um axioma lá em estruturas algébricas. Não dá para você trazer para o início.

Dentro dessa linha, o último comentário que faço é: você vai passar esse questionário para pessoas diferentes? ... Então, acho que o que eu tento, o que eu quero ter é uma coesão nas cinco respostas de um pensamento no sentido da formalização da axiomática nesse tipo de tratamento. Eu tento ser coerente nesse tipo de coisa.

É claro que uma outra pessoa com outra ênfase acredita que a Geometria Euclidiana pode ser ensinada logo no início, que ela tem o seu mérito, que não há necessidade de tanta formalização. Então, o que se está defendendo é um momento do ensino de Geometria Euclidiana na formação do professor. Então, aquele momento se justifica e volta-se na questão do currículo como um conhecimento agregado que faz o estudante ter uma nova visão. Sobre o que aprendeu e sobre o que ele vai ensinar. É claro que ele não vai dar aula de axiomática no ensino médio,

mas ele terá um entendimento mais amplo de tudo o que tá acontecendo. É neste sentido.

Luiz: Fora a matemática em si, alguma outra área específica?

Wladimir: Ah, é um dos problemas de Hilbert: a axiomatização da mecânica quântica, da...

Henrique: Física. *Risos.*

Wladimir: É. É um dos problemas, é impossível, *risos...* é um dos vinte e um problemas de Hilbert: a axiomatização da Física. Hilbert queria colocar num conjunto de axiomas toda a Física. Quais seriam os axiomas fundamentais da Física? Temos o pensamento euclidiano na mecânica de Newton. Se lermos o Principia, a única diferença lá é que ele troca a palavra axioma por lei.

O axioma na Física é uma lei. Postulados e teoremas são deduzidos a partir daqueles princípios. É um processo de abstração do mundo físico. Essa linha de pensamento se apresenta na Economia. Temos também certos axiomas na Economia. São princípios que colocamos. Não dá para axiomatizar da mesma forma que Hilbert faz ou como Euclides faz. Não dá para colocar todo o conhecimento.

Henrique: As leis de Maxwell.

Wladimir: As leis de Maxwell. Você deriva de uma comparação experimental e ali você coloca um comportamento. Por exemplo: a não existência de monopolo magnético. É uma realidade física que entra como axioma na teoria. Se um dia mudarem, você muda sua base de axiomas. Se um dia descobrirem, isolarem um polo magnético...

Henrique: Muda a teoria.

Wladimir: Você altera a teoria sem problema algum. Não tem problema com a equação. Inclusive já está pronta.

Henrique: Talvez,... ah, vai ficar guardada um bom tempo.

Wladimir: É mais a... todo esse, esse tal... isso é uma coisa que eu tenho até, ah, assim, um pensamento meu. Gostaria de discutir isso com filósofos: a axiomática e o

método dedutivo. Nada mais é do que a sistematização do pensamento humano. Eu acredito que é a organização do pensamento humano. Ela é do ser humano. É do ser humano esse jeito de pensar. Ele se sente mais confortável dessa forma quando coloca princípios.

Luiz: Organizado.

Wladimir: Organizado e retira esse determinismo a partir de axiomas os resultados logicamente dedutíveis. Isso tudo aparece em vários momentos na biologia de Darwin. Einstein também faz isso. Einstein recupera isso. Isso tudo é muito da ciência. Eu acredito que é do pensamento científico mesmo trabalhar nesse tipo de estrutura. Na matemática ela é uma linguagem. Então, o conforto matemático é mais pela linguagem. Se existe ou não realidade para isso, não importa para o matemático.

Luiz: Tá certo.

Wladimir: Por isso que matemática não é ciência... *risos*.

Henrique: *Risos*.

Wladimir: Não sei se o Henrique concorda... *risos*.

Henrique: Concordo.

Wladimir: Isso é uma discussão muito interessante. A matemática não é uma ciência.

Henrique: Linguagem.

Wladimir: É uma linguagem. A ciência começa e termina nas realidades físicas.

Henrique: Não só concordo, como toda vez que eu falo isso, o pessoal me olha esquisito. *Risos*.

Wladimir: Isso.

Luiz: Bom, as cinco perguntas iniciais eram essas, professor.

Wladimir: Obrigado. Quando quiser, estou à disposição.

ANEXO D – ENTREVISTA COM PROFESSOR GERALDO

LOCAL: Departamento de Matemática, Unesp – Campus de Rio Claro

Data: 10 de setembro de 2013

A presente transcrição é uma correção da original. Optou-se por conservar alguns dos vícios de linguagem, mantendo a naturalidade da conversa. Foram realizadas pequenas alterações solicitadas pelo entrevistado. Identificamos o entrevistador por Luiz, o entrevistado por Geraldo e o orientador por Henrique. Reticências indicam pequena pausa para formalizar o pensamento.

Geraldo: Ah, um gravadorzinho desse tamanho, antigamente os alunos usavam...

Luiz: Era com fita né, fita cassete.

Geraldo: Fita cassete, um negócio desse tamanho, rapaz!

Henrique: Mudou muito, né?

Geraldo: *Risos.* É.

Luiz: Bom, então vamos iniciar nossa conversa, professor, tentar falar um pouco sobre o ensino de geometria, né?

Como você trabalha em um curso de licenciatura em matemática o conteúdo de geometria?

Geraldo: Bom, como eu trabalhava, né?

Luiz: Hã-hã.

Geraldo: Trabalhava.

Luiz: Vamos fazer de conta que estamos ainda em atividade.

Geraldo: Isso... ah. Desde as primeiras séries, o primeiro ano, o segundo ano do curso de licenciatura, principalmente, porque o bacharelado também, mas principalmente a licenciatura. Eu tenho um enfoque que é bastante interessante. Eu trabalho um semestre de qualquer disciplina que envolva geometria, procurando

levar coisas interessantes para dentro da sala de aula. No sentido de fazer com que os alunos pensem naquilo que têm que fazer ou descobrir.

Ou seja, levo problemas para dentro da sala de aula. Problemas, questões para dentro da sala de aula. Desafios também. E através desses problemas ou através desses desafios, todo aquele conteúdo que eu programei para o semestre todinho vai ter que começar a aparecer.

Luiz: Na solução do problema?

Geraldo: Isso, no desenvolvimento daquele problema, ou de diversos problemas, né? Agora, como é que esses problemas são arrumados? São arrumados ao longo da minha experiência de trinta anos, trinta e cinco anos como professor, não tem outra alternativa, não tem receita. Então, os problemas aparecem e a gente começa a colocar dentro da sala de aula como desafios. Muitas vezes, os alunos dizem: mas isso pode ser resolvido? Quer dizer, tem solução? Em um problema que, muitas vezes, parece não ter resposta, começamos a pensar sobre ele, e os próprios alunos começam a fazer perguntas.

Ao fazer perguntas,... caminhos começam a aparecer, questionamentos começam a aparecer, discussões começam a aparecer. Então, veja, isso começa a ser um roteiro de trabalho e acontece durante o semestre todinho. Perguntas, questionamentos, discussões, dúvidas; muitas vezes, dúvidas sobre aquilo que já apareceu antes, já foi discutido antes ou outros caminhos, outras soluções, outras alternativas.

Luiz: Hum!

Geraldo: Mas será que isso tem relação com... com outros assuntos? E, muitas vezes, você, na geometria, começa a trabalhar outras disciplinas. Então, por exemplo, é um dos temas logo no começo do primeiro ano da licenciatura, trabalhar volume, capacidade. Você quer saber quanto cabe, qual o máximo que cabe ou qual o volume. E, de repente, você conduz os alunos a pensar em problemas de máximos e mínimos do cálculo diferencial, do cálculo integral. E os alunos começam a perceber que é possível relacionar. Poxa, mas isso aqui não é aquele problema lá do cálculo, perguntam?

Mas isso acontece porque, você ministrando uma disciplina de geometria, tem que conversar constantemente com o professor de cálculo. Pra dizer a ele: eu vou colocar determinado tipo de problema lá na minha disciplina de geometria. Dá o nome da disciplina. Vão acontecer determinadas coisas na disciplina de geometria. De repente, eles vão estar discutindo máximos e mínimos de cálculo diferencial da sua disciplina. Então, não se preocupe se eles perguntarem pra você, é que eles vão estar discutindo capacidade, volume, o máximo que cabe.

Luiz: Hã-hã.

Geraldo: Mas preocupados lá com a geometria. Então, pra mim, sempre foi muito importante, em toda a minha área de pesquisa, nas coisas que eu conduzi em pesquisa, em formação de professores, fazer com que meus alunos, futuros professores, aprendessem a pensar.

Luiz: Tá certo.

Geraldo: Aprendessem a discutir. Eu cursei várias disciplinas de pós-graduação também. E uma pessoa que falava, constantemente nisso, era o professor Paulo Freire, lá na Unicamp. Paulo Freire sempre insistia que era necessário levar as pessoas a aprender a pensar, aprender a discutir em cima daquilo que eles já sabiam. De repente, na hora que você começa a pensar muito sobre isso, você, sem querer, já incorporou e está usando. Então você está ministrando uma disciplina de geometria, pode ser geometria euclidiana, pode ser geometria analítica, pode ser uma disciplina de geometria elementar. Tem geometria elementar no primeiro ano ainda?

Henrique: Ainda tem.

Geraldo: Que é a geometria introdutória.

Luiz: Hum.

Geraldo: Onde diversos problemas são colocados ao longo do primeiro ano, mas, em todos eles, na minha cabeça, tinham de ser colocados a fim de levar os alunos a questionar, aprender a pensar. E uma coisa que eu sempre fiz e que, no começo, era difícil para os alunos era fazer provas em grupo. Eu fazia provas, tá, eu sempre fazia provas, várias provas durante o semestre. Mas fazia provas em conjunto.

Luiz: Ah!

Geraldo: Em grupo. Então chegava na classe, tava marcada, hoje é dia de prova, tá bom, então nós vamos fazer. Como que era esse grupo mesmo? Reúne esse grupo, esse, esse... Então nós vamos fazer prova em grupo. Então entregava as folhas com questões e, de início, os alunos ficavam surpresos. Porque ele vem lá do Ensino Médio de uma determinada forma. Oh, fazer prova em grupo. Bom, então quem vai fazer e eu vou copiar, pensavam...

Só que eu fazia um trato com eles logo no começo da primeira prova. Vocês vão fazer a prova em grupo, todo mundo vai ter que participar. E eu vou ficar andando aqui pela sala, vou estar com um caderno na minha mão, e vou estar anotando, aqui pra mim, quem de cada grupo está participando das discussões e quem só está copiando dos outros. E essa anotação é minha e eu não vou mostrar pra ninguém.

E dizia: na hora que eu corrigir, e na hora que eu for atribuir nota, eu vou levar em consideração todas as minhas anotações. E eu as levava em consideração. Quando eu entregava as notas, eles, na primeira vez, questionavam, na segunda já não queriam questionar e, na terceira, já não tocavam mais no assunto. Por quê? Porque eles percebiam que tinham que fazer a prova em grupo e que todo mundo tinha que participar.

Luiz: Realizar alguma coisa.

Geraldo: E sabe o que acontecia de significativo? Quando eles trabalhavam em grupo, todo mundo tinha os mesmos tipos de problemas. E não eram problemas que já tinham sido discutidos na sala de aula. Eram problemas que ainda não tinha aparecido. Mas que eles tinham que discutir pra arrumar uma solução. Às vezes, alguém levantava e sentava no grupo ao lado e perguntava: Vocês já conseguiram descobrir algum caminho?

Bom, e começavam a conversar. Então, o que é que eu permitia? Eu permitia que o grupo dissesse: olha, nós estamos achando que tal caminho pode ajudar. Mas já mexeram, já mexeram? Olha, mexemos, fizemos isso, tal coisa, mas a gente ainda não sabe o que vai acontecer. Ah, tá legal, obrigado! Levanta, volta lá pro seu grupo, conta o que ouviu e começa a atacar o caminho sugerido. Não ir lá e copiar o exercício feito.

Luiz: Oh, certo.

Geraldo: Então, eles começaram a aprender que poderiam trabalhar em conjunto no grupo e trabalhar em conjunto com a classe. O que eles estavam fazendo? Eles estavam fazendo um trabalho coletivo. Nesse sentido, algumas das minhas pesquisas falam de trabalho voluntário, falam de trabalho colaborativo. Algumas das pesquisas que eu publiquei falam de trabalho colaborativo. Você pode trabalhar de forma colaborativa, você pode fazer alguma doação sua para o colega, porque depois o colega pode também fazer uma doação pro seu grupo. Agora, o seu grupo tem que interagir inteirinho. E se você não participar, se você faltar, a sua nota é zero. Naquele dia, porque simplesmente você faltou, faltou, não participou daquela atividade. Mas naquela atividade. Em outras atividades, você vai ter nota, você vai ter avaliação.

Eles começam a descobrir que podem preparar temas e apresentar para a classe. E perdem o medo de apresentar. Então você imagina, no começo, o aluno chega do ensino médio e tem um medo tremendo numa classe com quarenta, cinquenta alunos. Juntando quem já está atrasado, ou quem veio de outra escola, ou quem tá reprovado, por algum motivo não fez aquela disciplina tal, tem lá cinquenta alunos. Então, um grupo de cinco alunos vai apresentar um tema pra aquela turma toda. Eles têm medo, eles estão tremendo, eles não sabem como se apresentar, como fazer, como falar. Só que, depois de algum momento, eles começam a falar, começam a falar, os colegas começam a perguntar e aí, de repente, depois do primeiro grupo, do segundo, do terceiro, não tem mais ninguém dando risada, não tem mais ninguém tirando sarro e todo mundo se envolve.

Teve uma tese que eu orientei do Paulo Cesar Duarte que era lá de Itajubá, MG, agora parece que ele está em outra cidade, ele trabalhou muito com cidadania. Com aspectos de cidadania, ele queria levar e explorar a cidadania dentro da sala de aula de matemática. E a dissertação dele de mestrado foi isso. Hoje o Paulo Cesar faz acho que doutorado com a Rosa.

Henrique: Não sei, Geraldo.

Geraldo: Acho que ele tá fazendo, ele faz doutorado acho que com a Rosa. Aqui, faz aqui, acho que o doutorado faz com a Rosa. E explorando aspectos de cidadania,

porque ele queria buscar esse tipo de coisa, como que as pessoas podiam se relacionar dentro da sala de aula com trabalho de doação. Sem que um tentasse passar por cima do outro, tirar sarro do outro e duvidar do outro, dar risada do outro.

Então, as aulas de geometria vão acontecendo. Porque os problemas de geometria são problemas que permitem que você pense bastante, comece a descobrir caminhos sem fazer contas. Comece a pensar nos problemas, imaginar os problemas, você pega papel, começa a fazer desenhos, figuras e sem fazer contas. Quer dizer, diferente do problema de cálculo onde, necessariamente, você tem que ter algumas regrinhas, tem que fazer algumas contas, tem que ter alguns procedimentos pra ver se você descobre alguns caminhos ou não. Algumas técnicas pra você usar. Na geometria, você faz desenhos, figuras e começa a pensar em cima delas.

Então, de repente, a geometria permite que você vá caminhando e vá indo embora. E não é só no curso de licenciatura, não. Uma vez, lá na Universidade Federal da Paraíba, em João Pessoa, ocorreu um curso pra professores. E tinha meia dúzia de colegas da universidade que estavam participando junto comigo para podermos participar juntos. Um laboratório de ensino de matemática acontecendo lá, com alguém que era de fora.

E uma das atividades que eu pedi para as pessoas era assim: peguem uma folha de papel, papel A4, por favor. Eles tinham lápis, régua, borracha, compasso e... Construam com essa folha de papel sulfite, essa folha de papel A4, a superfície, só a superfície de um cone com 10 cm de altura. Um chapeuzinho de palhaço assim, com 10 cm de altura.

Um dos professores pegava aquela folha, começava a enrolar a folha e fazia o que a criança faz assim, rapaz. Depois não conseguia, aí ele começou a pegar, fez, pegou o compasso, fez um círculo assim, ó, abriu 10 cm, fez um semicírculo assim, com 10 cm, passou um risco aqui, tentava dobrar aquele negócio, né? E... e as pessoas tentavam, tentavam e tentavam, mas por quê? Porque faltava a eles isso que você vai ensinar agora, as relações métricas. Eles só trabalhavam com geometria plana, embora o “chapéu” solicitado tivesse dimensão três.

Luiz: No triângulo retângulo.

Geraldo: No triângulo retângulo da oitava série, da primeira série do ensino médio, faltava as relações métricas ali, rapaz, pra vê.

Luiz: Os conceitos básicos.

Geraldo: Os conceitos básicos, né? Quer dizer, mas como era geometria, o que que faltava? Faltava a pessoa olhar, quer dizer, ir lá pegar um, um chapuzinho de palhaço, um cone que tá montado, colocá-lo em cima da mesa, olhar pra ele e pensar, bom, os 10 cm de altura estão aqui, né? Ó, na parte de dentro, aqui deste chapuzinho. Quer dizer, eu não tô fazendo a geratriz aqui com 10 cm, né, lá de altura. A altura tá lá. Não é uma geratriz aqui. Se pegar a tesoura e cortar e abrir aquilo que tá pronto. Então, isso que era importante na geometria lá do primeiro ano, e era importante nos cursos com... com professores. Porque para trabalhar com régua e compasso também. Quer dizer, você pegar coisa que você tem na sua mão que é concreto ali. Então, um problema desse, levado numa sala de aula, num primeiro ano de Licenciatura em Matemática, deixa os alunos malucos. Porque eles não conseguem construir o chapuzinho de palhaço.

Luiz: É ali que vai surgir os conceitos, né?

Geraldo: Ali é que os conceitos vão começar a aparecer. De repente alguém fala nas relações métricas, nas relações trigonométricas do triângulo, né? Oh, mas espera um pouco. Mas o que que é isso, onde que tá isso aí, onde que eu aprendi?! Ah, mas eu não aprendi. Não, eu aprendi lá na primeira série do Ensino Médio. Ah, quando eu estava estudando tal coisa. E você? Ah, não, ah... E aí começa uma discussão. Então você proporcionou a discussão, os alunos começam a descobrir a geometria.

Então isso era bastante importante porque é... Bem antigamente, você podia chegar no primeiro ano de um curso de licenciatura ou bacharelado e botar cálculo diferencial integral, álgebra moderna e colocar bastante conteúdo e as pessoas davam conta. Mas, hoje, com o nível do atual Ensino Fundamental e Ensino Médio, é diferente, você tem que trabalhar com o aluno que está no primeiro ano de licenciatura ou bacharelado em matemática e dos outros cursos de graduação também. Tem que trabalhar de forma diferente com eles. E, na minha cabeça, você

tem que fazer com que essas pessoas pensem. E a geometria é o lugar onde mais você pode fazer os alunos pensarem.

Luiz: Passado esse momento desses problemas, né, essas soluções essas conversas.... E a axiomatização da geometria, ela é trabalhada?

Geraldo: Ela tem que ser trabalhada. Ela tem que ser trabalhada sempre, sempre. Porque você pode ter uma disciplina no começo que é chamada de geometria elementar, onde problemas surgem, questionamentos surgem, você consegue relacionar disciplinas de geometria elementar com cálculo diferencial e integral, principalmente, mas, em seguida, em outro semestre, aparece geometria euclidiana. Se ela aparece com o nome de geometria euclidiana é porque os axiomas da geometria euclidiana vão aparecer.

E aí, dependendo do professor, dependendo do programa, da bibliografia que o professor vai querer seguir, você vai ter a axiomatização. É necessário que o professor de matemática, ao sair do curso de matemática, aprenda e saiba que existe uma geometria axiomática. Existe uma geometria que você pode fazer no plano, que você pode fazer no espaço de dimensão três, mas existe uma geometria que você pode fazer em cima de uma esfera. Então, as diversas disciplinas de geometria num curso de licenciatura ou de bacharelado vão ter que contar pro aluno, num nível mais elevado ou menos elevado, um pouco da axiomatização de cada uma dessas geometrias. É por isso que esse curso de Rio Claro traz várias disciplinas de geometria.

Luiz: Hã-hã. Além da axiomatização, tem a formalização também, né, professor? Ela deve ser feita de forma rigorosa na licenciatura?

Geraldo: Eu acho que tem que ser. Tem que ser de forma rigorosa. Porque o professor de matemática tem que receber uma formação como matemático. Ele tem que sair daqui...

Luiz: Sabendo matemática.

Geraldo: Sabendo matemática. Esta instituição é, na minha opinião, ela é uma universidade pública que sobrevive com dinheiro público, dinheiro dos impostos que nós pagamos. Que a sociedade paga. Então, o aluno vem pra cá, não paga

mensalidade nenhuma, tem uma bela biblioteca, tem restaurante universitário, ele pode estudar de graça aqui. Então, ele tem tudo pra sair daqui com uma boa formação. Os professores aqui são professores doutores ou mais. Então esses professores doutores são convidados a fazer com que os alunos se formem com a melhor formação possível.

Então, entrou no curso de matemática, licenciatura ou bacharelado, ele vai ter que sair daqui sabendo matemática. E ele tem que dominar conteúdo, uns saem dominando mais, outros saem dominando menos. Mas eles têm que sair daqui como alguém que sabe matemática. Porque, infelizmente, a gente sabe que muitas faculdades por aí oferecem pouca formação em conteúdo. Agora, aqui, que é pública, que vive dos impostos que a gente paga, esta instituição tem que formar um bom profissional. Então, você tem que sair daqui como alguém que recebeu uma boa formação de matemática. Tem que sair daqui com a axiomatização na sua cabeça, né? Então você tem que saber, se você estiver trabalhando em cima de uma esfera, se linhas paralelas têm a mesma conotação que linhas paralelas num plano.

Como é que são as linhas paralelas em cima de uma esfera? Como é que são linhas paralelas no plano? As duas linhas, lá da estrada de ferro, tem um jeito de você interpretar. Se você pegar o trópico de Câncer e o trópico de Capricórnio, em cima da esfera tem outro. Mas se você pegar o trópico de Câncer e pegar um meridiano, o que que acontece com eles em cima da esfera? Quer dizer, é um outro mundo, uma outra realidade, então você tem que ter uma formação, não é? Então você realmente tem que... tem que ter formação, tem que sair daqui com formação.

Luiz: Com essa formação, essa formalização... Em uma demonstração, o desenho, ele é aceito?

Geraldo: Bom, o desenho... ele sempre ajuda, o desenho ajuda. Na formalização, o desenho não prova. Mas o desenho ajuda. Porque o desenho te facilita com o visual. Você... você tenta ver, tenta imaginar, agora tem situações que você não consegue ver, não é? Tem situações que você só vai poder imaginar, mas que você não consegue ver.

Luiz: Muito menos desenhar.

Geraldo: Dimensões, muito menos desenhar, quer dizer, fora de três dimensões você não consegue ver. Mas você tem que tentar imaginar o que seriam coisas na geometria. E tem que ter a formalização. E aí, é a matemática que vai provar, são os resultados matemáticos que provam, não é?

Luiz: Hã-hã.

Geraldo: Mas quando é possível fazer desenhos,...

Luiz: Facilita.

Geraldo: As figuras auxiliam, as figuras auxiliam. Agora, quando você estiver trabalhando com régua e compasso, a régua e o compasso auxiliam. Agora você vai dizer para seus alunos: olha, esse é o traçado da perpendicular, mas você vai ter que provar que aquele traçado originou o ângulo reto. Aí é outra coisa.

Luiz: Aproveitando a sua fala já da régua e do compasso, né, você considera que o uso da régua e do compasso é importante no curso de licenciatura?

Geraldo: Eu acho, acho que é importante. E... é... é fundamental, é fundamental. Porque com a régua e compasso o aluno consegue ver e imaginar muita daquela geometria que é feita no plano e no espaço tridimensional. Ele consegue ver, ele pode ver, não só imaginar, ele pode ver. Agora, ele pode construir...

Luiz: Teoremas, as demonstrações.

Geraldo: Teoremas, demonstrações. Ele constrói. Agora você tem que provar matematicamente que aquela construção dá origem a aquele resultado matemático. Quer dizer, aquela construção implica que aquele resultado é...

Luiz: Verdadeiro.

Geraldo: É aquilo que você quer, é verdadeiro ou não. Só a construção não prova. Não é, mas ela te auxilia, te ajuda a concluir. Porque uma construção te permite formar triângulos, quadriláteros, círculos e aí você vai mostrar que coisas ali construídas são congruentes, são semelhantes e você vai usar resultados já provados anteriormente pra poder concluir os resultados novos que estão aparecendo.

Luiz: E a utilização da régua e do compasso ela pode ser feita na resolução de um problema, na demonstração de um teorema?

Geraldo: Pode, pode, pode. Por isso que eu até falei pra você desse material (texto, apostila) que nós construímos já há bastante tempo, que é chamado de construções geométricas. Eu não sei se eu tenho algum sobrando na minha casa. Quem que coordena o laboratório? O Laboratório de Ensino de Matemática tem diversas dessas apostilas.

Henrique: Eu tenho... Você lembra quando você desmanchou a sua sala?

Geraldo: Lembro.

Henrique: Eu peguei na sua sala isso aí.

Geraldo: Então, mas eu me lembro que tinha caixas com isso.

Henrique: Bom, aí não sei.

Geraldo: Que eu falei pra Rosana, que era coordenadora do laboratório naquela ocasião. E ela disse que ela iria levar.

Henrique: Acho que é a Miriam que tá agora.

Geraldo: A Miriam que tá. Que ia colocar no laboratório. Então, de repente... é... em algum lugar do laboratório de ensino, pode ser que eu encontre, eu vou ver se eu encontro daí eu passo pro Henrique. E você vai ver que ali você tem todo um curso de régua e compasso e construções geométricas. Um curso de geometria com régua e compasso, até construção de números racionais e irracionais.

E, ali, você vai ver que existem muitos exercícios, nenhum repetido, e na verdade todos eles são teoremas. Todos eles são teoremas e... e quando a gente levava isso pra fazer, ou com alunos da licenciatura ou com professores do Ensino Fundamental e Médio, todo esse pessoal conseguia demonstrar todos esses teoremas, que estavam lá colocados, sem saber que eram teoremas. Porque eles olhavam como exercícios, porque o nome tava lá como exercício. Olhavam como exercício.

Luiz: Mas eram teoremas.

Geraldo: Eram teoremas, eram teoremas de geometria euclidiana que estavam lá para serem desenhados com régua e compasso e provados, matematicamente, com conceitos de geometria euclidiana. E a gente partia no começo de tudo da apostila, de três ou quatro resultados, axiomas, que o Pogorélov considerava como válidos, lá no começo.

A partir daqui a gente construía um curso de geometria. Pronto e pumba, e fazia a construção de um curso de geometria. Então, construções geométricas com régua e compasso. Na verdade, você estava construindo um curso de geometria de forma axiomática, de forma axiomática.

Luiz: Porque tinha que usar essa axiomatização e a formalização.

Geraldo: Tinha que usar a axiomatização e a formalização.

Luiz: Além da construção.

Geraldo: A formalização ia sendo construída, e o professor ou o aluno da licenciatura não percebia. Ele só percebia quando ele já estava lá na frente e dizia: mas isso aqui é um curso de geometria euclidiana. Eu tô construindo um curso de geometria euclidiana, porque eu estou fazendo uma axiomatização, quer dizer, a partir de alguns, de repente, aparecia a perpendicular, de repente, aparecia o axioma das paralelas, depois um ponto fora da circunferência, então os resultados iam aparecendo e tudo o que acompanha aquilo lá. E, de repente, pronto. Olha, você tinha uma axiomatização, tinha um curso de geometria de forma axiomática, feito ali com régua e compasso.

Luiz: Certo.

Geraldo: Então você consegue com régua e compasso.

Luiz: Eu sei que alguns anos já se passaram, mas... enfim. Sobre o uso de software de geometria dinâmica, você considera importante na formação inicial do professor de matemática?

Geraldo: Na formação inicial você tá querendo dizer o quê? Na primeira?

Luiz: Aqui na faculdade, na sua formação dentro da licenciatura.

Geraldo: Bom, eu considero importante, porque o mundo de hoje já passou a usar demais essa máquina. Tudo virou dinâmico e em tudo você usa o computador, usa software pra tudo. Agora, a única coisa que eu ainda não dispenso é... se for pensar em geometria, a gente tem que saber fazer.

Luiz: Na mão.

Geraldo: Na mão, tem que saber fazer na mão, porque se eu disser pra máquina: desenhe pra mim a superfície de um cone com 10 cm de altura, a máquina põe um desenho de um cone.

Luiz: E não mostra nem o que utilizou.

Geraldo: Não mostra nada. Agora, se eu falar pra você: toma uma folha de papel e construa um chapéuzinho de palhaço com 10 cm de altura, e daí? É diferente de você ter um software, que faz lá na máquina, que desenha lá na máquina. Então, eu defendo que é importante e que a máquina consiga fazer, agora a máquina, o que que ela pode fazer? Ela pode construir pra você um chapéuzinho de palhaço aberto, pra você imprimir e colar. Colar e pronto, ó, você tem o chapéuzinho de palhaço. Que é o que a fábrica faz, né? Uma fábrica que constrói o chapéuzinho de palhaço pra vender, em grande escala, faz isso. Tem um software que produz aquilo, dobra, cola e vende.

Henrique: E acabou.

Geraldo: E acabou. Agora, se eu disser pra você ou para o professor de matemática. Toma um pedaço de cartolina, construa o chapéuzinho de palhaço com 10 cm de altura, ele não faz. Ele não faz se ele não souber as relações métricas, as relações que estão ali, ó, ele não vai saber, porque ele vai, ele vai ter problema em pensar, em fazer a diferença entre altura e geratriz, né, que é o que, infelizmente, o colega doutor em matemática sofreu, sofreu, passou a maior vergonha na frente dos alunos.

E daí, quando nós paramos pra pensar e alguém fez o desenho tal, daí ele falou. Olha, realmente é... a gente tem que fazer esse laboratório nosso e funcionar com coisas mais concretas, isso que você tá dizendo que é muito simples, a gente tem que fazer, a gente tem que colocar no meio das disciplinas.

Luiz: Partir de um concreto.

Geraldo: Mesmo que seja na prática de ensino, mas tem que acontecer aqui, a gente não pode deixar isso passar em branco. Porque a gente fica fazendo a geometria axiomática, a gente faz coisas que são fundamentais, a gente dá uma bela duma formação, mas se... se coloca uma pergunta dessa, dá um problema desse, não é possível a gente ficar de bobeira aqui, né, e... e não conseguir montar o chapeuzinho de palhaço assim.

Luiz: Um problema real usando aquela teoria, né?

Geraldo: Usando aquela teoria. Então a axiomatização é importante, mas você tem que saber colocar a mão na massa. Quer dizer, construir, pegar ali na régua e compasso. Então, eu tenho lá meus compassos ainda guardados, de vez em quando eu brinco com eles, gosto de fazer algumas coisas.

Luiz: O computador seria um recurso a mais, um conhecimento a mais pra esse professor tá utilizando.

Geraldo: É, eu acho que o computador é um recurso essencial hoje, pro mundo de hoje, né? Mas eu acho que ainda é importante o professor saber que ele tem que saber fazer e que determinadas situações ele que precisa colocar a mão na massa.

Luiz: Tá ótimo, professor.

Geraldo: Até porque, se você pega uma indústria lá, que o fulano, às vezes, o sujeito passa trinta anos na frente dum peça e só vêm parafusos assim para fazer, ó, parafusos, parafusos. Às vezes ele dá pancadinha no parafuso, pancadinha no parafuso tal e, de repente, ele vê um que não tá bom, ele separa, não é, ou ele tem que colocar parafuso numa determinada posição pra depois a máquina... Então, tem coisas que são elementares, o fulano passa a vida inteira fazendo aquele negocinho, de repente, ele viu que alguma coisa não funcionou, ele tira. Mas tem que ter aquela pessoa, fazendo aquele papel ali ainda. Para não deixar estragar, não deixar acontecer de ir errado, porque a máquina tem que continuar fazendo corretamente, mas tem que passar por aquele... aquele estágio ali, né? Então, eu acho que ainda a pessoa tem que saber que ali pode fazer de forma concreta, né?

Luiz: Tá certo. Bom, nosso tema agora vai ser literatura, professor. Que tipo de literatura, onde o tema é geometria, você utiliza na formação do professor de matemática?

Geraldo: Bom, aqui, em geral, o... os cursos de licenciatura têm bibliografias que são bibliografias padrões. Então, você quando pega uma disciplina, você é professor, é designado a ministrar uma disciplina, você recebe um programa dessa disciplina, já com uma bibliografia pronta. Você tem autonomia pra mexer naquela bibliografia. Uma bibliografia que eu sempre gostei, um texto, é o livro do... do Pogorélov⁹, de geometria, né, geometria elementar, em espanhol, mais o livro do Hilbert¹⁰, mas tem também o livro do Lucas Barbosa.

Henrique: Barbosa.

Geraldo: Barbosa que... aquele da capa branquinha lá.

Henrique: Eu tenho ele aí.

Geraldo: É, tem alguns autores.

Henrique: Ele tá aí, em algum lugar aí, eu não tô conseguindo lembrar.

Geraldo: Alguns autores brasileiros usaram já a literatura estrangeira e produziram livros baseados em algumas coisas boas estrangeiras.

Luiz: Os clássicos, digamos assim.

Geraldo: Traduziram clássicos, traduziram, produziram textos em português, pra poderem ser utilizados em cursos de licenciatura, cursos de bacharelado. Tá ficando cada vez mais difícil você usar livros em língua estrangeira. Antigamente, quando eu entrei pra fazer curso de Licenciatura em Matemática...

Henrique: Ninguém perguntava.

⁹ POGORÉLOV, A. V. *Geometria elemental*. Tradução de Carlos Vega. Moscou: Mir, 1974.

¹⁰ HILBERT, D. *Fundamentos da Geometria*. Tradução: Paulino Lima Fontes e A. J. Franco de Oliveira. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

Geraldo: Ninguém perguntava, o professor não perguntava se você lia ou se você não lia em inglês ou espanhol ou o que quer que fosse lá, não. Ele colocava a literatura e falava assim, ó: o curso de variáveis complexas vai ser no livro do Churchill¹¹, no livro do Rudin¹² e se virem, né? Que era livro em inglês e a gente tinha que estudar naquele livro em inglês e rachava de estudar, fazia todos os exercícios que estavam no livro, né? Em compensação, na hora que você saía daqui, ia fazer mestrado ou se conseguia fazer mestrado, rapaz, a gente tirava de letra o mestrado, né, essas disciplinas aí, álgebra, álgebra moderna, era livro do... como que era álgebra moderna, como que era?

Henrique: Era o Freire e o Albert, né?

Geraldo: É, rapaz, tinha uns livros de topologia, os livros, olha.

Luiz: Todos em língua estrangeira.

Geraldo: No terceiro científico, quando eu fiz o terceiro ano do científico, hoje Ensino Médio, eu estudei cálculo diferencial todinho no terceiro ano do científico que eu fiz em Mogi Mirim. Eu entrei aqui, eu já tinha visto um ano de derivadas e integral. Assim era o curso científico daquela época, lá em Mogi Mirim. Então, os professores não perguntavam se você podia ou não podia pegar livros em inglês pra estudar. Mas hoje tá mais difícil, então a literatura, a bibliografia tem livros estrangeiros e tem livros em português. Você dá a alternativa lá pros alunos. Olha, tem esse aqui em inglês, tem esse aqui em espanhol, tem esse aqui em português. Eu vou tentar no máximo possível usar esse aqui que tá em português, mas é, por exemplo, em geometria, o Pogorélov, que é espanhol, todo mundo conseguia é...

Luiz: Dominar.

Geraldo: Utilizar o livro do Pogorélov porque era um espanhol tranquilo. O espanhol só não era tranquilo quando era escrito no espanhol lá de Barcelona.

Henrique: É o catalão.

Geraldo: Que é o catalão.

¹¹ CHURCHILL, R. V. *Complex Variables and Applications*. 3rd ed. New York: MACGRAW-HILL, 1974.

¹² RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. New York: MCGRAW-HILL, 1966.

Henrique: Tenho alguns artigos em catalão.

Geraldo: Você tem artigo em catalão? Rapaz, nós tivemos um espanhol que veio, ficou um mês aqui dando curso pra gente, na pós-graduação, ele era de Barcelona.

Henrique: Não entende nada.

Geraldo: Ele falava, deu o curso em espanhol pra gente, você não entendia nada do que ele falava. Ele trouxe uma apostila dessa grossura assim, escrito em catalão, você olhava pra aquilo e falava: não é possível, isso aqui é espanhol? Né, era catalão, catalão é outra língua, é um espanhol completamente diferente do resto. Então, o espanhol, o espanhol é outra região da Espanha. Não é pra onde foi lá o Neymar foi pra Catalunha?

Henrique: É outro país, né?

Geraldo: É outro país. Mas, em geral, a gente tem bons livros em português também, né, hoje a gente tem uma boa literatura em português mesmo.

Luiz: Bom, aqui é uma pergunta agora...

Geraldo: Agora o Henrique que gosta dos livros só em inglês, né, Henrique?

Henrique: *Risos.*

Geraldo: Nas aulas de álgebra dele, ele só usava livro em inglês.

Henrique: Não, não, eu gostava do Jaci também.

Geraldo: Gostava do Jaci.

Henrique: Usava bastante o do Jaci.

Geraldo: Eu tinha uma apostila do Jaci Monteiro.

Henrique: Oh, sabe que tem um livro aí na estante, eu acho que foi você que me deu, aí, bem atrás de você, este de capa cinza, bem grande.

Geraldo: Esse.

Henrique: Lembra... Gonçalves. Não, Vózimo não, como é que chamava? Esse é o cara que deu aula aqui pro... como é que chamava esse cara, é? Acho que foi você que me deu esse livro, não foi?

Geraldo: Juarez Milano, tem nome do Anízio, ó.

Henrique: Ah, não, então foi o Anízio.

Geraldo: É.

Henrique: Juarez Milano.

Geraldo: Notas de álgebra moderna, ó, sessenta e oito, sessenta e oito, que foi quando nós entramos aqui. Que ano você nasceu?

Luiz: Sessenta e oito.

Geraldo: Nasceu em sessenta e oito? Sessenta e oito a gente já tava aqui, eu e o Anízio, ó, aí, ó, Juarez Milano. Juarez Milano e escritas com orientação do professor Jaci Monteiro.

Henrique: Ele deu aula aqui.

Geraldo: Sessenta e três. É... Jaci Monteiro deu aula aqui. Aí, ó, anéis e corpos, rapaz, aí, ó, no primeiro ano você estudava anéis e corpos, ó. Hoje, o Henrique ficou dando aulas de anéis e corpos no quarto ano, pô, não é?

Luiz: E pro bacharelado.

Geraldo: Ia dar aulas de anéis e corpos pro bacharelado.

Henrique: Bacharelado, é.

Geraldo: Então veja a diferença. Ainda tem anéis e corpos?

Henrique: Tem teoria dos corpos agora, grupos no primeiro semestre e corpos no segundo.

Geraldo: Corpos no segundo, então, rapaz, ó, então veja como que é, como que é diferente, né, mas dá, dá pra trabalhar é... coisas com livros em português, né,

escritos em português, esse pessoal pega, traduz e... livros escritos em português, né?

Luiz: Tá certo. Pesquisas apontam que alunos do Ensino Fundamental e Médio não estudam geometria. Ou seja, a geometria está ausente da sala de aula. Quais seriam, na sua opinião, os motivos para este fato?

Geraldo: Olha, eu sempre, desde a época do doutorado, quando eu fiz a tese de doutorado, e antes, né, e depois, principalmente, mas, antes disso, e trabalhando com professores, trabalhando com alunos, ministrando cursos para professores, o que deu origem à tese de doutorado, mostrei que os alunos sempre gostavam de geometria. Os alunos do Ensino Fundamental e Médio, segundo os professores, sempre gostaram. Mas, na verdade, os professores não ensinavam geometria. E por que os professores não ensinavam geometria? Porque faltava conhecimento sobre geometria pra eles. Eles tinham medo de ensinar geometria. Tinha medo, faltava conhecimento.

Então, você viu lá na minha tese de doutorado, de 1991, naquela época, já, né, na década de noventa. É... duas categorias principais a respeito de não ensino de geometria. Você se lembra, você viu, você leu, tinha duas categorias principais.

Luiz: A geometria é relegada a segundo plano, né?

Geraldo: A geometria é relegada a segundo plano, então, pelo professor.

Luiz: E que falta metodologia de ensino.

Geraldo: E falta metodologia de ensino. Então, veja, o professor não ensina por quê? Porque ele não sabe, então isso significa que ele passou por um curso de formação onde ele teve pouca geometria. A sua faculdade estadual te deu formação em geometria. A sua! Esta aqui. Oh, esta estadual aqui, Unesp, de Rio Claro. Só que noventa por cento das faculdades que formavam e formam os professores de matemática não e... não conseguiam dar a formação em geometria nos cursos de Licenciatura em Matemática. Então, o professor não tinha formação em geometria no seu curso de formação de professores. Consequentemente, ele não sabia como... se ele não tem formação, falta a ele como trabalhar aquela pouca geometria. Então faltava a ele também receber cursos de geometria, e a quem caberia?

Caberia à Secretaria da Educação, caberia às Universidades. E nós estávamos na década de noventa, uma época em que a Secretaria da Educação, a Secretaria Estadual da Educação estava trabalhando bastante com cursos para professores.

Naquela época, a gente ministrava muitos cursos para professores. E os cursos ficavam lotados de professores, tinha quarenta vagas e tinha quarenta professores frequentando os cursos. Cursos de geometria no estado todinho. E onde a gente ia, vários professores aqui de Rio Claro, onde a gente ia, lotava os cursos de geometria. Por quê? Porque os professores queriam receber conteúdo e queriam receber formas de como levar aquele conteúdo pra dentro da sala de aula. Eles diziam isso pra gente.

E a gente aproveitava sempre esses cursos que nós estávamos ministrando e levávamos questionários aos professores. E eles respondiam ao final do curso, respondiam e nos entregavam. Então, nós tínhamos questionários respondidos por professores da primeira à quarta série, da quinta à oitava série, do Ensino Médio, tudo separado, uma infinidade de questionários que deu um trabalho muito grande pra ser analisado, mas que em todos esses três degraus diferentes a conclusão foi a mesma. Faltava a eles conteúdo e eles não sabiam como levar a geometria pra dentro da sala de aula.

Luiz: Culpa da formação, então?

Geraldo: Hein?

Luiz: Culpa da formação inicial.

Geraldo: Culpa da formação inicial, culpa da formação inicial. Por outro lado, tá lá escrito, também na tese de doutorado, que eles queriam ensinar a geometria. Então, fundamental naquela época é a gente dizer, o professor não ensinava porque faltava conhecimento e não sabia como ensinar. Então, ele tinha medo e ele preferia não ensinar. Ele fazia o planejamento e colocava a geometria no finalzinho do planejamento, não dava tempo, terminava o ano. Mas todos eles diziam que gostariam de ensinar a geometria. Se era verdade ou não, não sei. Mas todos eles diziam que gostariam de ensinar geometria. Todos eles diziam que achavam que a geometria era importante, porque ensinava o aluno a pensar.

Então, era incrível as conclusões lá no doutorado, e uma quantidade muito grande de perguntas, foi difícil elaborar o questionário. Porque ele tinha que ser elaborado de tal forma que a medida que o professor fosse respondendo, é... as respostas teriam que uma completar a outra já dita anteriormente. E a gente tinha que poder concluir e não deixar escapar nada nas respostas. Então, esse questionário tinha que ser muito bem elaborado pra não escapar nada. E todo mundo acabava dizendo: a geometria é muito importante porque ajuda o aluno a aprender a pensar.

Então, você fica imaginando. Por que que o professor diz isso? Que a geometria ensina o aluno a pensar. Acho que na cabeça dele, realmente a geometria ajuda o aluno a aprender a pensar, na cabeça dele, professor. E acho que isso é a verdade pra ele. Mas ele não conseguia levar a geometria pra dentro da sala de aula. Ele não sabia, ele tinha medo.

Alguns que sabiam um pouco até faziam um pouco de geometria dentro da sala de aula. Algumas escolas permitiam que o professor, em determinados momentos, colocassem duas aulas de desenho geométrico por semana durante um semestre. Então, eles faziam um pouquinho de geometria durante um semestre, junto com a disciplina de matemática. Então, separava, ele mesmo, mas separavam um pouco de geometria. Porque ele, talvez, sabendo um pouco de geometria e tendo um pouquinho mais de domínio de geometria, queria trabalhar um pouco de geometria dentro da sala de aula. E conseguia, e fazia, mas autorizado a dividir matemática com desenho geométrico.

Então os alunos tinham caderno de desenho, aprendiam a trabalhar um pouquinho com régua e compasso. Faziam algumas perpendiculares, paralelas, faziam alguma coisa de desenho, não é? Mas é, aquilo que... que eu sempre gostei de fazer na licenciatura, que era levar problemas, levar desafios pra que os alunos aprendessem que a geometria existe, que a geometria pode começar a se concretizar dentro da sala de aula, né, tem relação até com outras disciplinas. Isso nunca acontecia lá no Ensino Fundamental e Médio, né? Porque, infelizmente, na sua formação, o professor nunca aprendeu a fazer isso.

Luiz: Tá certo.

Geraldo: O que que de certa forma poderia acontecer, né, poderia e... se o curso de formação inicial fosse um curso bem preparado, direitinho, né? Houve uma época em que os professores do primeiro ano, não sei como é que estão os professores do primeiro ano agora. Mas houve uma época em que os professores do primeiro ano, aqui em Rio Claro, eles se reuniam semanalmente. Então o professor de...

Henrique: Continua.

Geraldo: Continua, porque eles tinham é que preparar todo o primeiro ano em conjunto. Pra dizer: olha, o primeiro ano vai acontecer assim, assim, assado. As disciplinas têm que é serem desenvolvidas dessa forma. Então, era uma coisa bonita e boa pra aquele tipo de aluno que estava chegando naquele ano, né? E a geometria ali dentro. Com problemas e desafios, né?

Agora, não pense você que era fácil, não, porque até perante colegas do departamento tinham colegas que diziam pra mim: mas você faz provas em conjunto? E como é que você dá nota? Como que dizendo, você vai aprovar todo mundo? Você vai dar nota pra todo mundo? Você vai dar dez pra todo mundo, você vai ser professor bonzinho e eu não. Não é. Isso você não precisa por. Mas, *risos*, mas até isso, até isso acontecia. E só depois de algum tempo é que as pessoas começavam a perceber que você podia trabalhar daquela forma, e os alunos aprendiam a confiar no professor, e o professor aprendia a confiar nos alunos. E os alunos sabiam que não era só pra ficar colando de todo mundo assim, não. E que as notas variavam, variavam, não veio, a nota é zero. Não tá participando, a nota é baixíssima, não é?

Luiz: A última pergunta agora. Ela é bastante ampla, mas vamos tentar. A intuição e o método axiomático, típicos da geometria euclidiana, são características de toda a atividade matemática. Em que outra área do conhecimento você considera que os conceitos ou domínio do método axiomático obtido com a formação em geometria sejam fundamentais?

Geraldo: Bom, em todas as áreas do conhecimento, o tipo de método axiomático ele é importante, se você imaginar que de uma coisa você deriva outra, depois outra, uma próxima, uma seguinte, ou seja, que elas têm um início e que, a partir desse início, você tem a seguinte e depois todas elas vão se abrindo como um leque.

Então, se você imaginar coisas desse tipo, olhando pra axiomática dessa forma, dando origem a algo que vai crescendo sempre, então você pode imaginar que toda a teoria do conhecimento cresce dessa forma.

Por que o que não cresceria dessa forma? O que seria rígido e fixo e fechado assim, ó, uma única direção... né? O que você consideraria como fixo numa única direção? Matemática é importante, mas porque, na verdade, tudo é matemática na vida, né? A forma do pensamento matemático tá presente em tudo. E, aliás, até eu acho o pensamento matemático é tão importante que... que... Se as pessoas perguntam pra você e... o que você faz na vida? Se você disser: ah, eu sou professor de matemática. Ah, pelo amor de Deus.

Então elas olham pra você como sendo alguém diferenciado, quer dizer, o matemático é diferenciado. Ela vai olhar pra você como sendo alguém que tem uma cabeça muito ampla, é... o matemático é uma pessoa assim.

Henrique: Estranha.

Geraldo: Estranho, mas é alguém que tem uma cabeça que se abre demais, e um sobrenatural é um negócio amplo demais. Quer dizer, matemático, ah, pelo amor de Deus. Eu detestava matemática, eu... Tá querendo dizer o quê? Ah, eu me conformava com aquilo que eu gostava de fazer. Você não. Você é matemático, você era bom! Olha pra você como sendo alguém que consegue pensar de forma grande, quer dizer, você é matemático, é o pensamento, matemático. Quer dizer, olhou pra matemático, né, e disse que é matemático e porque o matemático é o que consegue ver as coisas de forma ampla, né, de forma grande, tal, então, tudo e... é um crescimento grande demais, tudo é amplo, tudo é matemática.

Luiz: Esse modelo axiomático, dedutivo, euclidiano é um modelo de ciência, né?

Geraldo: É o modelo de ciência. É o modelo de conhecimento pra mim. É porque nós crescemos assim, nós vivemos assim a vida toda. Ficamos aqui, no mundo da ciência, e pensando matematicamente a vida toda.

Quer dizer, pode ter certeza de uma coisa. Se você um dia for numa psicóloga, numa terapeuta, numa reunião de discussão e as pessoas vão acabar dizendo pra você: ah, é, você é matemático, você não dá pra discutir com você, porque você

quer as coisas tudo certinho, você quer fazer um monte de perguntas, você quer saber tudo, você quer é... você não para de perguntar... você quer descobrir tudo... quer dizer, é o matemático, quer dizer, é o indivíduo que passou a vida inteira fazendo perguntas. É o indivíduo que passou a vida inteira questionando, duvidando, né, e perguntando, e esse é o matemático. Então, a vida é assim pra gente, né, mas esse é o modelo de mundo pra gente, é o modelo de ciência, mas é o modelo de mundo pra gente, então tudo é. Então, pra nós, o modelo axiomático é um modelo de mundo pra gente, porque nós pensamos dessa forma, né? Nós agimos dessa forma. Às vezes, pode ser bom, pode ser ruim, né? Pode ter consequências pra gente, né, mas nós vivemos desse jeito, né? Nós questionamos tudo, às vezes questionamos demais e pode ter consequência pra gente, mas nós questionamos demais, né?

Luiz: Tá certo.

Geraldo: Até a... *risos*, até a minha neta não me aguenta. *Risos*. Vô, não começa a perguntar, né? Oh, para com isso, vô. Ah, sete anos, né? Vô, ah, lá vai ele, vai começar as perguntas dele já, né, com sete anos. Porque o avô começa, começa a perguntar e não para mais, né?

Luiz: Segundo o modelo matemático.

Geraldo: É o modelo matemático, né?

Luiz: Bom, as perguntas iniciais eram essas, professor, já são aí uma hora e doze minutos de entrevista. Eu agradeço demais sua cooperação, colaboração.

Geraldo: Esse é o mundo nosso, o mundo da vivência em disciplinas, são as coisas que a gente faz, que a gente gosta de fazer. Como a gente vive no nosso dia a dia. Sem inventar nada, sem colocar nada de diferente.

Henrique: Confessar uma coisa. *Risos*. Conversei com você antes de conversar com ele. *Risos*. Mas eu tinha certeza que ele iria querer conversar com você, então esta entrevista só provou que eu tava com a mira certa.

Luiz: Quando eu vi sua tese de doutorado, eu falei: não... é... ele tem uma visão que a gente precisa saber e, né, da formação do professor, eu sabia que a gente precisava conversar, sim.

ANEXO E – ENTREVISTA COM PROFESSOR IRINEU

Local: Sala do Departamento de Matemática, Unesp – Campus de Rio Claro

Data: 25 de setembro de 2013

A presente transcrição é uma correção da original. Aqui, os vícios de linguagem, palavras repetidas, comuns no discurso falado, e algumas frases não pertinentes foram retirados com o auxílio do próprio entrevistado. Identificamos o entrevistador por Luiz e o entrevistado por Irineu.

Luiz: Bom, muito obrigado, professor. Vamos tentar conversar um pouquinho sobre a sua prática, enquanto professor do ensino de geometria. Vamos fazer de conta que o professor está trabalhando.

Como você trabalha em um curso de Licenciatura em Matemática o conteúdo de geometria?

Irineu: Isso eu não posso responder, porque nunca tive experiência, nunca ensinei geometria.

Luiz: Diretamente a geometria não?

Irineu: Não, diretamente, nunca ensinei. No nosso curso de graduação aqui, nos meus trinta e cinco anos, nunca ensinei geometria realmente.

Luiz: Está certo.

Irineu: Então não sei como faria.

Luiz: Mas vamos...

Irineu: Bom, se me fosse possível...

Luiz: Aplicar um curso.

Irineu: Ah, dar um curso de geometria, vamos dizer, um curso de geometria elementar, acho que faria do ponto de vista axiomático, quer dizer, como o Euclides fez. Evidentemente, eu poderia usar uma axiomática moderna. Como David Hilbert

usou, mas eu daria um curso de fundamentos de geometria do ponto de vista axiomático. Porque acho que o espírito da matemática é ser axiomática. Assim, a exposição axiomática das teorias axiomáticas, acho, foi a grande conquista principalmente do século XX. Então, como a geometria foi a primeira a tentar ser tratada do ponto de vista axiomático desde os gregos, com mais forte razão, no século XX, no século da axiomática, eu faria a coisa do ponto de vista axiomático.

Luiz: Justamente esta pergunta estaria entrando logo em seguida. É que alguns professores desprezam um pouco essa axiomática. Eu queria realmente saber se o professor...

Irineu: Porque há uma confusão. Acho que há uma confusão entre duas coisas. Uma coisa é como a matemática é criada. E outra coisa é como a matemática é exposta.

Evidentemente, no processo criativo, no processo em que o matemático profissional cria a matemática, ele não está criando aquilo axiomáticamente. Ele usa todos os recursos possíveis, eu vou dar só um exemplo. Desde a antiguidade, há uma obra de Arquimedes, conhecida com o nome de O Método. Na verdade, é uma carta que Arquimedes escreve para um discípulo, explicando como ele, Arquimedes, fazia, tinha seus insights para chegar às invenções matemáticas que concebia.

Então, usava, nesse processo criativo, todas as coisas possíveis. Alavanca... coisas físicas em si. Mas, uma vez chegado ao resultado, desprezava tudo aquilo e ia demonstrar do ponto de vista...

Luiz: Teórico.

Irineu: Dos Elementos da geometria. Dos Elementos euclidianos. Então, uma coisa é a invenção matemática. Claro que, nessa, o processo dedutivo está meio escondido, não aparece sempre, nem deve aparecer. Outra coisa é a exposição. Então, uma vez concebida a matemática daquele jeito, a exposição, acho que deva ser feita do ponto de vista formal, do ponto de vista axiomático. É claro que o professor, na sala de aula, pode motivar, exatamente falando do processo, caso ele conheça, das descobertas daquelas noções matemáticas. Mas, na hora de expor, a exposição tem que ser formal, na geometria em particular.

Luiz: Tá, e falando inclusive dessa formalização, ela deve ser rigorosa, professor?

Irineu: Acho que sim. Eu acho que sim. A matemática não é conhecida como a ciência mais exata, a ciência exata? Então deve ser rigorosa, sim. Sem dúvida, deve. Os conceitos devem ser introduzidos com definições apropriadas. Os postulados devem ser explicitamente enunciados. Essas são as regras do jogo. As regras iniciais, e depois você toca as coisas sobre essa formalização inicial, sim, acho isso.

Luiz: Mesmo que isso cause medo para o futuro professor, ele não tenha esse domínio?

Irineu: Não causa medo. É como eu digo a você. Acho que se você aprende desse jeito, é um aprendizado de uma coisa como qualquer aprendizado de qualquer outra coisa. É a mesma coisa que aprender língua. Evidentemente, a sua língua materna você aprende antes da gramática, mas uma língua estrangeira você tem que conhecer os princípios da gramática, senão você nunca vai ter certeza do que está falando.

Luiz: Hã-hã!

Irineu: E a gramática é exatamente essa parte sintática que corresponde à formalização em matemática.

Luiz: Tá certo. A geometria, então, ela pode ser trabalhada no estilo de Euclides ou nesse estilo mais moderno de Hilbert?

Irineu: De Hilbert, sim.

Luiz: De Hilbert.

Irineu: Sim, acho que Hilbert, porque aí você põe todas as premissas. Porque Euclides, o que se acusa é que Euclides usa certas coisas que ele não definiu antes, ou não demonstrou antes.

Por exemplo, eu costumo dizer o seguinte. Já na primeira proposição do Euclides há uma falha. É aquela que dado um segmento você constrói um triângulo equilátero que tenha aquele segmento como lado. Estou falando isso numa linguagem moderna. Então ele centra o compasso numa das extremidades e traça a circunferência. Centra na outra e traça a circunferência de mesmo raio, onde as

duas se encontram... Então as pessoas acusam. Bom, mas quem garante que as duas se encontram? Ele não postulou a continuidade da linha, para que as duas possam se encontrar.

Eu digo, essa é uma acusação que fazem as pessoas que ignoram o trabalho de Aristóteles. Porque Aristóteles tem uma obra chamada *Categorias*, que é a primeira obra de lógica de Aristóteles, e, claro, que Euclides conhecia, em que ele divide as quantidades em dois tipos. Em quantidades discretas e quantidades contínuas. E das quantidades contínuas ele exatamente dá como exemplo a linha. Então, para Euclides, a linha era contínua. Não precisava expor, Aristóteles já tinha dito. Assim, comentar que o Euclides comete esse erro é desconhecer o trabalho de Aristóteles.

Luiz: E ele usou.

Irineu: Sem dúvida. Ele usou baseado em Aristóteles, como todo o resto foi baseado no Aristóteles. Porque Aristóteles, na verdade, é que expôs os princípios de uma ciência dedutiva em um grupo de obras lógicas. Esse grupo é conhecido pelo nome de *Organon*, que significa um instrumento, isto é, instrumento para a ciência. Desse modo, a lógica se presta como instrumento para fazer ciência. E tudo o que se faz, vamos dizer, o que está feito nos *Elementos* tem base aproximadamente nessas obras de Aristóteles.

Luiz: Está certo. Se o professor fosse então ensinar geometria euclidiana no curso de formação... Você considera que o uso da régua e do compasso é importante no curso de licenciatura?

Irineu: Claro que é importante. É importante porque a geometria euclidiana é exatamente a geometria da régua e do compasso. Que tipo de régua e que tipo de compasso? A geometria euclidiana se caracteriza por usar régua só para traçar retas, não para medir distância; e compasso só para traçar círculos. Se você levanta o compasso para transportar distância, por exemplo, se levanta o compasso do papel, ele colapsa. Então, a geometria euclidiana é a geometria da régua e do compasso usadas exatamente neste sentido, e é claro que o uso desses instrumentos é muito importante.

Luiz: Sim. A atividade com régua e compasso seria usada em demonstrações, por exemplo, professor?

Irineu: Não, você usa em construções.

Luiz: Nas construções...

Irineu: Nas construções.

Luiz: Uma figura não...

Irineu: A figura é fundamental nos elementos do Euclides, a figura faz parte da demonstração. É... eu digo que há um jeito, do meu ponto de vista, de ver isso nos elementos no Euclides. Todo teorema tem seis partes.

A primeira parte é exatamente o enunciado. Na segunda e a terceira partes ele desdobra o enunciado nas coisas que são dadas e nas que são pedidas. Então já temos três partes. A quarta parte é a parte central do teorema, que se chama em grego *Kataskeuê*, que significa “construção”. Ele vai fazer as construções necessárias para chegar ao resultado. E aí é que estão traçadas as figuras. A quinta parte é a chamada propriamente “demonstração”, em que ele mostra que aquela “construção” resolve o problema dele. E a sexta parte é uma “conclusão”. Ele volta ao enunciado e mostra que aquilo foi feito.

Muito bem. Na quarta parte, na *Kataskeuê*, ele só usa um tempo verbal, praticamente em toda a obra, toda a quarta parte só faz uso de um tempo verbal que nós nem temos no português o correspondente, que é o imperativo perfeito passivo. E a explicação, minha explicação, é a seguinte. O imperativo porque ele está dando ordens. Passivos porque os objetos matemáticos sofrem a ação do comando. Por exemplo, ligar dois pontos, traçar tal coisa, prolongar etc. E o perfeito. A noção do perfeito, que é uma noção fundamental em grego. O perfeito em grego é um tempo que dá um resultado atual de uma ação efetuada. De uma ação já efetuada no passado.

Luiz: Certo.

Irineu: Então, quando uso o perfeito, significa que aqueles comandos foram dados, já foram executados e tenho o resultado. Por isso é que a figura é importante, a figura é parte central, é parte fundamental da demonstração.

Luiz: Da demonstração.

Irineu: Nos Elementos. Do ponto de vista moderno, você não considera mais assim. Mas nos elementos a figura é parte integral da demonstração e essa, vamos dizer, explicação filológica mostra isso.

Luiz: Ela auxilia, hoje é um auxiliador na demonstração.

Irineu: É. Sempre, sempre a figura foi um auxiliar. Lá era fundamental, mas que ela é importante, ela é importante. Só que, não modernamente na demonstração em si, mas para ajudar a entender o funcionamento das coisas.

Luiz: O professor já disse que é bem tradicional, mas eu vou fazer essa pergunta assim mesmo. Hoje em dia, existem softwares de geometria dinâmica e que a maioria dos professores até fazem cursos de formação continuada. Mas vamos pensar na formação inicial. O professor considera que os softwares de geometria dinâmica são importantes na formação?

Irineu: Eu não conheço nada disso. Isso, realmente, não posso responder.

Luiz: É, tá.

Irineu: Acho que é como você ver um filme.

Luiz: É uma...

Irineu: É uma animação. É animação das coisas, mas...

Luiz: É um recurso.

Irineu: É um recurso.

Luiz: Pra uma aula.

Irineu: Para visualizar. Como a figura. Para ajudar você a visualizar.

Luiz: Na dificuldade de construir ali com régua e compasso.

Irineu: Claro. Na verdade, elas são construídas com régua e compasso, não é?

Luiz: Sim, está ótimo, professor. O tema agora seria a gente pensar em literatura, que bibliografia ser utilizada, professor. Que tipo de literatura onde a geometria, onde o tema é geometria você utiliza na formação do professor de matemática?

Irineu: Creio que seria de todo muito importante que o professor lesse alguma vez na vida os Elementos do Euclides¹³. Não, não é porque eu traduzi, não, não. Não foi, não é essa intenção. Mas julgo que aquela obra é uma obra tão importante, do ponto de vista da história, e mesmo do ponto de vista da conceituação da matemática. Todo professor devia ter a oportunidade de ler os Elementos de Euclides.

Luiz: Tá, mas existem...

Irineu: Se ele soubesse grego, pudesse ler no original, seria melhor.

Luiz: *Risos.*

Irineu: *Risos.*

Luiz: Mas existem também outras obras clássicas.

Irineu: Sim, sim, há outras obras clássicas evidentemente. Por exemplo, com o auxílio de alguém que oriente, a obra do Hilbert é bastante acessível. E há uma porção de desdobramentos, de outras obras que são calcadas sobre a axiomática de Hilbert. Há uma obra... cujo título em inglês é “Euclides e Além”, “Euclid and Beyond”¹⁴, de um professor da universidade...

Luiz: É um livro recente este, não é?

Irineu: Isso... é um professor da universidade da Califórnia, em Berkley. Eu conheço até o professor, Hartshorne é o nome dele. É uma obra fundamentalíssima, eu acho.

Luiz: Ele trabalha lá os elementos, ou o que que ele tá fazendo?

Irineu: Ele começa com Euclides, mas vai, como diz o título, além, a Hilbert e mais. É realmente um livro extraordinário.

Luiz: O professor considera que seria uma bibliografia a ser utilizada.

Irineu: Boa, muito boa, excelente.

Luiz: As bibliografias nacionais, professor, teria alguma ou...

¹³ EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução: Irineu Bicudo, São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

¹⁴ HARTSHORNE, R. *Geometry: Euclid and Beyond*. New York: Springer, 2000.

Irineu: Existem aqueles livros, até acho que publicação do GEEM, do professor Castrucci¹⁵. O professor Castrucci foi um professor catedrático de geometria na Universidade de São Paulo, foi meu professor. E ele dava um curso, no quarto ano da faculdade, um curso de fundamentos de geometria e escreveu alguns livros. Mesmo os livros que ele publicou em nível, vamos dizer, mais modesto, há um texto de geometria plana dele que é muito bom, muito bom mesmo. É... ele escreveu, evidentemente, com a intenção, vamos dizer, de ser acessível ao aluno do ensino médio, mas o livro supera de muito a expectativa. E ah... ele também tinha um livro de geometria espacial, de estereometria. Tenho que os livros do professor Castrucci são de muito bom nível.

Luiz: Está certo.

Irineu: Essa é a bibliografia em português que conheço. Existe o livro editado pelo IMPA, de geometria plana. Mas tenho a impressão que ele é mais elementar que o do professor Castrucci.

Luiz: Do João Lucas.

Irineu: Isso.

Luiz: E é bastante utilizado esse do João Lucas.

Irineu: É verdade.

Luiz: Inclusive aqui (Unesp) foi utilizado. E tem o Pogorélov também.

Irineu: O Pogorélov também, sem dúvida nenhuma, mas aí é uma outra abordagem, um pouco diferente. O Pogorélov tem não um único livro, mas vários e alguns de geometrias, não só um de geometria, mas... mais de um de geometria.

Luiz: Mais de um volume.

Irineu: E todos editados pela editora russa MIR. Existe em espanhol, existe em inglês, existe em francês, porque a ideia era fazer a propaganda na época em que a Rússia era a Rússia. Então eles traduziram para várias línguas, e todos editados por essa editora russa, a editora MIR. E eu conheço, por exemplo, o mais fininho deles...

¹⁵ CASTRUCCI, B. *Lições de Geometria Plana*. 6. ed. São Paulo: Nobel, 1968.

Luiz: Não é do Fetissov¹⁶, não, que o senhor está falando?

Irineu: Hã?

Luiz: Não é um do Fetissov a demonstração em geometria?

Irineu: Não, não... não. São livros mesmo. Não, não, “a demonstração em geometria”, não. Há um curso do Pogorélov. Ele começa com... geometria etc., depois álgebra, álgebra linear e teoria de Galois; são vários livros, da editora MIR.

Luiz: Alguns livros russos que foram traduzidos, inclusive para o inglês, acho que devido à qualidade desses livros.

Irineu: Sim, sim, sem dúvida.

Luiz: Agora outra pergunta também, que quando eu falei para o professor que eu li alguns textos. Pesquisas apontam que os alunos do Ensino Fundamental e Médio não estudam geometria. Ou seja, a geometria está ausente da sala de aula. Qual seria, na opinião do professor, os motivos para este fato? O que levaria a isso?

Irineu: É como nós estávamos falando antes. Eu acho que a falta de conhecimento dos professores em matéria de geometria. É que os cursos de matemática, na grande maioria das instituições de ensino, são muito ruins, e os alunos saem muito mal formados. E, evidentemente, você pegar uma disciplina como a geometria para ensinar do ponto de vista formal, do ponto de vista axiomático, para essa gente fica fora de alcance. Ora, se o professor não sabe, ele vai ensinar o quê? Ele tem medo de ensinar, e aí surge o movimento para acabar com a geometria mesmo. Porque em álgebra você faz umas continhas, há umas fórmulas. Você vai resolver uma equação do segundo grau e, para isso, usa a fórmula e pronto. A geometria não, você tem que usar a cabeça. E é o que eles não conseguem fazer, usar a cabeça. Essa é minha opinião.

Luiz: Está certo. Seria então culpa do próprio curso formador ou...

¹⁶ FETISSOV, A. I. *A demonstração em geometria*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

Irineu: Claro, claro, sem dúvida. Do curso formador e dos alunos. Infelizmente, cada esquina tem uma faculdade. E o pessoal que não consegue entrar numa faculdade boa, porque não tem condições, acaba indo para essas, para essas escolas ruins. E aí o produto final é muito ruim.

Luiz: Mas, em sua opinião, qual a relevância da geometria para o curso de Licenciatura em Matemática?

Irineu: A geometria é uma disciplina matemática importante. Desde a antiguidade. E nós estamos falando da geometria elementar, outras... outras partes da geometria são construídas. E é um ramo da matemática importante, como é a álgebra, como...

Luiz: É porque a gente pode pensar a matemática como álgebra, geometria e aritmética, digamos assim. Ela tem um peso muito...

Irineu: Tem um peso muito grande, sim, a análise matemática, você esqueceu de falar. Sim, ela tem um peso muito grande, sem dúvida nenhuma. E as pesquisas continuam na área. Nós estamos falando só da geometria elementar, mas com o nome geometria, a coisa é extensíssima. E depois há combinações dessas coisas. A geometria algébrica, que combina geometria e álgebra. Essas coisas vão se estendendo, vão se esparramando. A matemática não tem limite superior em conhecimento.

Luiz: Esse modelo de geometria, né? A intuição e o método axiomático típicos da geometria euclidiana, que é também uma característica de toda atividade matemática, não é, professor?

Irineu: Sim, sim, como eu disse. São duas coisas. A intuição funciona no processo criativo. Depois que você criou a coisa, você não precisa mais da intuição. Aí, você tem que formalizar a coisa. Então são duas, são dois pontos. Uma coisa é a criação da matemática, outra coisa é a exposição da matemática criada.

Luiz: Tá, então seguindo esse modelo, a intuição e o método axiomático, em que outra área do conhecimento o professor considera que isso é utilizado, ou seja, é fundamental esse modelo?

Irineu: Esse modelo matemático?

Luiz: Isso, da geometria mesmo.

Irineu: Não, eu acho que a intuição você usa... em todas as áreas. Essa construção do conhecimento começa com certas intuições. Agora, a formalização você não precisa de todo, em todos os conhecimentos. Há certos lugares, eu diria o Direito, por exemplo, se os advogados soubessem de fato Direito. A gente precisaria formalizar... e... o processo de formalização seria bem interessante. Até para evitar que duas leis fossem contraditórias. Mas, infelizmente, as coisas não são assim, e como a gente está vendo aí no julgamento...

Luiz: *Risos.*

Irineu: Do mensalão, infelizmente.

Luiz: Eles não seguem ali o modelo.

Irineu: Não, eles não seguem o modelo matemático. Mas a física não é, na física, evidentemente, a matemática...

Luiz: Utiliza muito de geometria, né?

Irineu: A matemática é preponderante. E a geometria, não a geometria euclidiana. Que a geometria euclidiana foi utilizada por Newton, mas para a teoria da relatividade etc., isso são geometrias não euclidianas. Aliás, é interessante. Há um historiador da matemática, muito importante, já falecido, recentemente, chamado Imri Toth. Ele escreveu uma obra muito importante, pouco conhecida, em que mostra, em trechos da obra de Aristóteles, ideias da geometria não euclidiana. Ele diz que a matemática... a matemática é a única ciência em que parece que a negação é importante. Ele dá o seguinte exemplo.

Ah... Sacheri, um padre, o padre Sacheri, um dos precursores da geometria não euclidiana, queria defender a geometria euclidiana. E queria mostrar que se você negasse as proposições da geometria euclidiana, uma certa hora você ia dar em uma contradição. Por isso que ela era absolutamente necessária. E começou a desenvolver alguma coisa usando as negações das proposições euclidianas. E não chegava à contradição nenhuma. Porque, quando você nega, por exemplo, o quinto postulado, o famoso postulado das paralelas, o postulado do Euclides. A ideia era

que você chegasse, de fato, a uma contradição porque ele era uma coisa absolutamente essencial.

E você não chega a uma contradição, pelo contrário, você chega a um outro modelo de geometria. Então, é neste sentido que o Imri Toth diz que na matemática a negação é importante. E acha que era a única ciência em que a negação é importante, porque você acaba negando e chegando a uma outra coisa. Um outro universo, digamos assim. Acho que isso é uma característica da matemática, uma característica importante da matemática.

Luiz: Está bem. Em termos de conteúdos de geometria que seriam relevantes para se trabalhar no curso de formação.

Irineu: Eu diria o material que está nos Elementos do Euclides.

Luiz: Tem que ser abordado.

Irineu: Ah, sim, acho que sim. Claro, você podia fazer outras coisas. Em álgebra, por exemplo, os grupos de transformação que caracterizam certos tipos de geometria. Um grupo desse jeito dá esse tipo de geometria, desse outro jeito dá outro tipo de geometria. Mas aí ficaria fora do alcance da maioria.

Luiz: Fora do alcance.

Irineu: Se na formação do professor de matemática, ele soubesse direito o conteúdo que está lá nos Elementos do Euclides...

Luiz: Seria o suficiente.

Irineu: Seria mais que suficiente.

Luiz: Mais que suficiente não é, essa é a verdade.

Irineu: Mais que suficiente, sim, sem dúvida nenhuma.

Luiz: Tá certo. A utilização do material concreto, assim, por professor na universidade, seria mais uma metodologia de ensino mesmo, professor?

Irineu: É... como disse. O material concreto estaria, como eu disse a você, você tem duas etapas distintas. Uma etapa é a criação, outra etapa é a exposição. O material

concreto ajuda aqui você a entender a etapa da criação. Ele não ajuda na etapa da exposição, não. Do meu ponto de vista, o material concreto é para dar aquelas intuições que, possivelmente, o que inventou, o que criou aquilo teve. Mas não na hora da exposição. A exposição está em outro nível. É outro estágio.

Luiz: É uma prática que muitos... muitos defendem que o aluno tem que ter esse material concreto, que ajudaria...

Irineu: Não, ajuda, ajudaria exatamente nessas ideias da criação. Porque depois que você viu, depois que você viu a coisa, vamos dizer, em princípio você seria capaz de pôr em pratos limpos para expor. Claro que, para expor, você precisa primeiro ter a intuição, para ver como é que a coisa funciona. Então, o material concreto ajudaria nisso. A ver como é que a coisa funciona. Quais foram as intuições que estavam por trás da criação dessa parte.

Luiz: Mas ele também só consegue usar o material concreto em sala de aula se ele souber a teoria, não é, professor?

Irineu: Ah, sim, sim.

Luiz: Ele vai levar lá um cone e não vai saber... fazer sentido.

Irineu: Sim, sim. E... também o tipo de material concreto, claro.

Luiz: *Risos.*

Irineu: *Risos.*

Luiz: A princípio, professor, as cinco primeiras perguntas a gente já abriu assim.

Irineu: Eu acho que nós já conversamos o suficiente.

Luiz: É, já deu para... e com a transcrição agora. Enfim, depois, alguma dúvida a gente vai direto.

Irineu: Está bom.

Luiz: Muito obrigado então, professor.

ANEXO F – ENTREVISTA COM PROFESSOR PAULO

Local: Residência do entrevistador

Data: 21 de outubro de 2013

A presente transcrição é uma correção da original. Optou-se por conservar alguns dos vícios de linguagem, mantendo a naturalidade da conversa. Foram realizadas pequenas alterações solicitadas pelo entrevistado. Identificamos o entrevistador por Luiz, o entrevistado por Paulo. Reticências indicam pequena pausa para formalizar o pensamento.

Luiz: Bom, quero agradecer sua presença, professor. Vamos então abrir nossa conversa, falar um pouco sobre o ensino de geometria na formação de professores.

Como você trabalha em um curso de Licenciatura em Matemática o conteúdo de geometria?

Paulo: Olha... o que a gente... o que eu fiz nas três oportunidades que eu dei essa disciplina, Luiz, foi trabalhar a questão da axiomática.

Luiz: É?

Paulo: Trabalhar, porque é uma disciplina que é oferecida no primeiro semestre do curso de matemática e, além das deficiências que o aluno chega no curso de matemática... Você sabe, é um curso menos concorrido, é um curso... de maneira que os alunos chegam com bastante... deficiência, bastante deficiência nos...

Luiz: Conceitos.

Paulo: Nos conceitos de matemática básica, por exemplo, não só de geometria, mas de álgebra. Então, além dessa característica, os alunos, muitas vezes, não têm... possivelmente, não foi trabalhado com eles essa questão da axiomática. Então, por que que a soma dos ângulos internos é cento e oitenta graus? A soma dos ângulos internos de um triângulo. Isso não foi trabalhado com eles.

Foi trabalhado assim. É cento e oitenta, faça uma porção de exercícios. Então, essa estruturação da matemática... na forma axiomática, eu acho que é importante na formação de matemática, em particular na formação de geometria. Para saber, para o aluno saber o que decorre do quê. Para ele não demonstrar o teorema de Pitágoras com a lei dos cossenos. Porque a relação... a relação de dependência é inversa, não é? Primeiro você... primeiro você deduz o teorema de Pitágoras para depois... deduz e demonstra, enfim, pra depois você falar de... lei dos cossenos, por exemplo.

Luiz: Está certo.

Paulo: Então, essa relação de dependência das coisas e essa estruturação. De eu partir de alguns pressupostos e, a partir desses pressupostos,... construir essa... eu uso essa figura de linguagem mesmo do tijolinho. Do... ou do jogo, que você pensando nas regras, como os axiomas, pensando nas jogadas como os teoremas. Só que a diferença para o jogo é que quando eu faço alguma coisa, por exemplo, no basquete... quando eu faço alguma coisa,... eu preciso, eu sempre questiono, aonde que eu saí da regra.

Fazendo a associação do teorema com uma jogada, se você diz que aquela jogada não é válida, o meu questionamento é: qual parte da regra eu transgredi? Transformando isso para geometria,... tem uma diferença nessa analogia. Por quê? Porque você não... vai falar qual parte da regra você transgrediu. Você vai fazer o contrário. Você vai mostrar que aquilo vale porque aquilo decorre das regras do jogo ou, na analogia, dos axiomas.

Então, a visão do trabalho que eu faço ou que eu fiz na oportunidade que eu ministrei essa disciplina. Pensando na axiomática, pondo foco especial na axiomática. E... é nesse sentido. Agora,... passado um tempo e repensando algumas coisas da geometria, eu acho que eu podia ter feito melhor. É, pensando em formação de professores, sem fugir da axiomática, mas eu podia ter proposto. Tem

um livro da Lúcia Tinoco que chama “Geometria com resoluções de problemas”¹⁷. Não sei se você conhece.

Luiz: Não conheço.

Paulo: É... ela propõe várias atividades que você, para resolver aquelas atividades, você usa o seu conhecimento de geometria.

Então, acho que poderia ter sido trabalhado mais, por exemplo, desse aspecto de resolução de problemas, como alguma coisa que complementasse a questão do ponto de vista axiomático. E que preenchesse também o espaço ali, um vazio ali, que o axiomático pode não preencher, que é justamente no entendimento, no manuseio dessas coisas. Então, fazendo, pensando isso,... naquele cronograma apertado, que é um curso de geometria com quatro aulas por semana, durante dezenove semanas. Naquele cronograma apertado, possivelmente achar um... um espaço para trabalhar, por exemplo, resolução de problema ou alguma atividade de... algum.

Luiz: Alguma aplicação dos conceitos de geometria.

Paulo: Sim, mas usando, por exemplo, algum problema relacionado a um... à informática, por exemplo. Num ambiente, por exemplo, no geogebra ou em algum software de régua e compasso, enfim. Talvez trabalhar mais essas questões da percepção. Porque você sai um pouco das amarras da axiomática e complementa, põe um foco bastante nesta questão do entendimento. Hoje, refletindo, e como te falei, eu escrevi um artigo... agora, recentemente, sobre isso. Eu estou refletindo um pouco mais sobre geometria, sobre a minha prática em geometria. Eu acho que isso poderia complementar de maneira interessante.

Luiz: Nossa, muito bom, professor, eu iria perguntar justamente sobre a axiomatização. Alguns professores a deixam de lado. Mas além da axiomatização tem a formalização, Paulo? E eu queria saber se essa formalização... se você trabalha de forma rigorosa.

¹⁷TINOCO, L. A. A. *Geometria euclidiana por meio da resolução de problemas*. Colaboração de Victor Giraldo e Beth Belfort. 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, Projeto Fundação, 2004.

Paulo: Olha, Luiz. Para mim, quando eu falo da questão da axiomática, da estrutura axiomática, eu já vejo... eu vejo a formalização como parte dessa questão da axiomatização. Então, o que eu penso e o que eu fazia... nessa disciplina. Ressaltando, é uma disciplina de primeiro ano, de primeiro semestre de graduação... em alguns momentos, eu... não priorizava a formalização. Em quais momentos? No momento em que o aluno estava redigindo a questão de prova, por exemplo. Muitas vezes eu percebia que havia o entendimento, mas que havia uma dificuldade por ser o primeiro semestre, uma dificuldade muito em... redigir essa informação, em traduzir esse entendimento para uma linguagem matemática, que é a linguagem formal.

Luiz: Formal.

Paulo: Então, por exemplo, só para esclarecer, Luiz. Tem uma disciplina de quatro aulas por semana de geometria plana axiomática. No segundo semestre, tem uma disciplina de duas aulas por semana de desenho geométrico. E, no terceiro semestre, tem uma disciplina de quatro aulas por semana de geometria espacial. Então, não sei se me antecipo a sua pergunta, mas questão de régua e compasso. Claro, quando você estuda geometria plana, não dá para você deixar de lado, para você prescindir a construção com régua e compasso.

Mas eu discutia algumas construções, mas eu não me estendia por quê? Porque ele ia ter uma disciplina só pra isso. Mas quando eu propunha uma construção com régua e compasso, ou quando eu propunha a justificativa de uma determinada construção com régua e compasso, eu usava esse momento para discutir os elementos da geometria que ele estava vendo do ponto de vista axiomático para favorecer o entendimento. Enfim, era um problema que ele tinha que usar os conhecimentos da disciplina para resolver.

Luiz: Está bem.

Paulo: Então, tinha vários momentos, quando você fala de círculos, por exemplo, você fala... abre brecha para você falar de construção, não é? Porque a característica do círculo permite que você faça uma porção de construção. De construção de triângulo e tudo isso.

Luiz: Está certo.

Paulo: Então, quando você fala de condição de existência de triângulo, você abre uma brecha para falar de construção. Então, é... era dessa maneira que era feito. Mas, respondendo diretamente a sua pergunta, sim, eu me preocupava com a formalização, eu me preocupava em redigir de maneira formal no quadro e não, não, eu não cobrava isso dos alunos de uma maneira bastante rigorosa, dada a condição de ser o primeiro semestre.

Então, eu tentava estimulá-lo, estimulá-los para que eles fossem redigindo de uma maneira bonitinha, com o passar do tempo fossem melhorando essa redação.

Luiz: Está bom.

Paulo: É... por exemplo. O que é hipótese e o que é tese? Existe muita dificuldade no entendimento disso, no primeiro semestre da faculdade. Como que eu vou demonstrar, como que eu vou demonstrar sem usar a tese? Não é... maneira de demonstrar. Então, tem uma disciplina no terceiro semestre que ele estuda a demonstração direta, a demonstração por... pela contrapositiva, a demonstração por absurdo. Ele estuda isso só no terceiro semestre. Eu preciso disso no primeiro semestre em geometria.

Então, de alguma maneira, eu ia conduzindo essa... formalização. Acho que... acho que eu...

Luiz: Eu entendi o que você disse, professor. Você acha, então, que, se essa disciplina fosse talvez no segundo semestre, no segundo ano, ela seria melhor trabalhada? Teria condições de trabalhar ela melhor?

Paulo: Sim, eu entendo que sim. Veja, Luiz. Eu gosto de enxergar a matemática como um todo e não como vários pacotes, várias gavetas, vários compartimentos. Eu gosto de enxergar a matemática, eu tento enxergar a matemática como uma coisa só e eu posso olhar de diversas maneiras. Algebricamente, geometricamente, do seu ponto de vista do desenho geométrico. Enfim, e aí, assim, o ganho dessa disciplina no primeiro semestre é que ela ajuda bastante o aluno a pensar de maneira mais... se expressar de maneira mais formal.

Entender melhor a demonstração. Então, a disciplina de geometria no primeiro semestre ela ajuda no trabalho com as outras disciplinas. No entanto, pensando só em geometria, é verdade, se ela fosse dada, se tivesse outra disciplina que pudesse ajudar nisso, para que eu pudesse explorar melhor a geometria, a axiomatização, a formalização e o entendimento em situações de problemas.

Se eu conseguisse, se ela fosse no segundo semestre, no terceiro semestre, no quarto semestre, é verdade que ela seria trabalhada de outra maneira. Mas ela perderia essa função de auxílio nas outras disciplinas.

Luiz: Está certo. Você disse que não cobrava, assim, muito a formalização do aluno por ser do primeiro ano. E na demonstração, um desenho, uma figura ela é aceita?

Paulo: Não. Como... como argumento, não. É verdade que o desenho pode ajudar na intuição.

Luiz: Auxilia.

Paulo: É... a intuição é um elemento muito importante no meu ver. O problema é você tornar a intuição a tua única arma, a tua única ferramenta. E aí você cai em várias ciladas. Mas, sabendo usar, a intuição é uma arma muito poderosa ao meu ver. Então, o desenho para o aluno intuir, para criar conjectura, é... pro aluno ter alguma ideia, ok? Mas eu deixava claro que o desenho não serve como argumento.

Então, se o aluno fizesse o desenho, se o aluno deixasse ali o desenho, eu podia até olhar pra demonstração dele e tentar perceber o que ele estava tentando dizer com aquilo, através do desenho. Mas aí era um... eu estava quebrando a regra ou eu estava... eu estava afrouxando um pouco a regra, por quê? Porque o desenho sozinho não... não serve como argumento. Então, eu acho que não dá pra ser nem tão é... firme com a regra. Não é porque... Tá, se é uma disciplina de primeiro semestre, Luiz, não é uma muleta. Não é uma desculpa, né? Eu acho que a gente tem, eu falo isso o tempo todo, mas eu não uso isso como uma desculpa. Então, eu acho que a gente tem... que ser firme com a questão do rigor, da questão da formalização. No entanto, dada essa condição do aluno, você tem que afrouxar em alguns momentos, pra que o aluno também se sinta à vontade, para que o aluno

também é... arrisque alguma coisa. Porque eu vejo que são duas questões que são trabalhadas, por exemplo, quando eu estou avaliando ou corrigindo uma questão.

Uma questão, um elemento a ser trabalhado é: qual a ideia dele, qual conhecimento ele tá tentando me mostrar aqui? E a outra questão a ser trabalhada é... com qual linguagem ele está mostrando esse conhecimento? É claro que é uma coisa só. Mas eu analiso, tento analisar esses dois aspectos. Um é o conhecimento que pode está passando pela cabeça dele e o outro é como que ele se expressa matematicamente pra dizer isso. Como que ele usa esse, como que ele me mostra esse conhecimento. E mostrar esse conhecimento passa pela formalização. Então, nem tanto a terra nem tanto ao mar, né? Não sei se eu respondi.

Luiz: Sim, tá ótimo, professor. Ah, era exatamente isso, tá. Agora a gente vai... você até já antecipou um pouquinho, mas eu vou retornar à pergunta. Você considera que o uso da régua e do compasso é importante na licenciatura em matemática?

Paulo: Eu considero muito importante. É... eu não vejo uma Licenciatura em Matemática sem o trabalho, eu não vejo um curso de geometria bem dado sem o trabalho... de um trabalho com régua e compasso. Porque eu acho que ele... a questão axiomática e a questão da construção elas se completam, pensando em geometria plana. E se você me permitir, tem mais um elemento que a gente, no nosso curso, no Instituto Federal de São Paulo, Campus Araraquara, que a gente não contempla, e que eu acho que deveria ser contemplado, que é o estudo de transformações geométricas. Ter em algum momento um curso que abordasse transformações geométricas.

Porque as transformações geométricas elas dão caráter de movimento para a geometria, que é estática. É, as transformações geométricas, naqueles problemas que envolvem transformações geométricas, você usa os conceitos de geometria e você usa régua e compasso para resolver uma porção de problemas.

Então, eu acho que além da axiomática e além do desenho, o estudo de transformações geométricas enriquece muito a formação do professor. E isso eu não tive na minha graduação. Foi uma disciplina que eu fiz no mestrado e recomendo

que você faça para pensar nessas coisas. É... nessa graduação que eu trabalho hoje, nessa Licenciatura em Matemática que eu trabalho hoje não tem. Eu tô pensando em oferecer isso como uma disciplina extra, como um... curso extra, mas acho importante na formação do professor.

Luiz: Excelente. Em relação, agora, ao uso de softwares de geometria dinâmica. Na formação do professor de matemática, você considera importante esse trabalho com softwares?

Paulo: Considero muito importante, Luiz. É, na nossa licenciatura, a gente tem duas disciplinas de dois créditos cada uma que discute a informática na Educação Matemática. Por que que eu estou falando isso? Porque, no meu entendimento, aliás, no entendimento de uma porção de autores aí, a geometria dinâmica que você trabalha com o software, eu gosto de trabalhar com o geogebra, não é a mesma geometria axiomática. São duas geometrias diferentes. É claro, porque na própria maneira em que foi construído o programa, ele tem, ele traz algumas características, eu não consigo lembrar nenhuma de cabeça, mas ele traz algumas características que, diferente da geometria plana, axiomática que a gente tá habituado.

Então, é preciso tomar cuidado com a geometria dinâmica e discutir o uso da geometria dinâmica, para que não aconteça alguma coisa lá que vá contra essa teoria daqui da axiomática que a gente quer trabalhar. Então, eu acho uma ferramenta bárbara, eu acho uma ferramenta importante tanto no desenho geométrico como na geometria. É... o fato da geometria dinâmica dar essa mobilidade, dá movimento pro desenho, pra esse desenho que nos livros, na maneira que a gente estudou na nossa graduação era estático, o fato de dar movimento pode ser um recurso muito rico. É... tem uma prática, Luiz, que eu acho muito bacana, que é a questão da investigação, ou pode passar pela resolução de problemas, enfim, mas que você propõe um exercício ou propõe uma situação para o aluno resolver e, com o uso do software de geometria dinâmica, ele consegue mexer as figuras.

Então, ele consegue criar conjecturas. Pensando num trabalho em grupo, essa criação de conjecturas como que eu justifico, como que eu convenço você, meu colega de grupo, que minha conjectura é boa? O meu argumento vai ser a

demonstração. Para que esse, pra eu validar, não com o professor, mas com os meus colegas. Para eu validar é... a minha conjectura no ambiente onde seja é... estimulado a discussão, onde seja estimulado o questionamento. Pra eu validar a minha conjectura, possivelmente passe pela demonstração. Então, acho esse um papel importante da geometria dinâmica. Porque ela cria um significado diferente pra demonstração.

O aluno enxerga a demonstração como um monstro. E eu acho que eu enxergava também na minha graduação até certo momento. Então, você fazer o aluno sentir necessidade de demonstrar pra que ele convença que a conjectura dele está correta ou não está correta, é uma possibilidade muito rica no software de geometria dinâmica. Então eu acho importante.

Luiz: É, o software permite movimento, permite visualizar coisas que aquela parte estática não dava, né, professor?

Paulo: É verdade. E veja, Luiz. Quando a gente tá falando de formação, eu também não consigo dissociar essas coisas. É... a formação do ponto de vista do conteúdo e a formação pedagógica. Então, quando a gente propõe atividades, é... com, por exemplo, com geometria dinâmica, ou, por exemplo, com material manipulável. Você além da questão da formação do professor do ponto de vista do conteúdo, você tá fazendo com que ele, na qualidade de aluno, experimente uma situação diferente. Você experimenta uma situação diferente é... da sala de aula convencional.

Então, a sala de aula convencional pode é... atingir um determinado grupo de alunos. Mas a geometria dinâmica pode atingir um outro grupo de alunos. Ou construção com régua e compasso, físico mesmo, não da geometria dinâmica, pode atingir um outro tipo de aluno. Então, acho que são trabalhos complementares, e você é... tira essa exclusividade da aula tradicional, né? Mesmo que seja uma aula expositiva, dialogada, mesmo que nessa aula os alunos sejam instigados a questionar e a falar, mas você tira a exclusividade. A aula expositiva, ao meu ver, ela não é um problema, ela não é um... alguma coisa a ser execrada. Ela tem uma parcela muito boa, mas ela não pode ser única. O problema é a exclusividade dela. E a atividade com geometria dinâmica, com régua e compasso, você pode tirar essa

exclusividade. E o aluno experimentando, na qualidade de aluno, experimentar aquilo, eu acho que favorece no sentido dele ficar mais à vontade de quando ele tiver na qualidade de professor, ele usar esse recurso também.

Luiz: Muito bom, professor, vamos a outro tema. Agora nosso tema seria a literatura abordada, né? Que tipo de literatura, onde o tema é geometria, você utiliza na formação do professor de matemática?

Paulo: É... bom. Tem os... ah, o livro que eu gosto de tomar como base, né? Eu não... normalmente, em outras disciplinas, eu não adoto um livro. Justamente por esta questão que a gente conversou informalmente e, agora, na entrevista, que eu acho importante o aluno ter contato com outras... é... outras escritas, outras ideias, eu acho que os livros se complementam.

Mas, sendo um curso de geometria, um curso de primeiro semestre, e... a questão da axiomática que você tem que seguir uma convenção de notação. Você tem que seguir, o que um coloca como axioma, o outro pode colocar como teorema e... e coloca, ele troca coisas equivalentes, troca resultados equivalentes, né? Então, mas principalmente a questão da notação, principalmente a questão da nomenclatura. Quando a disciplina tem um corpo axiomático forte que vai ser discutido durante o curso, eu acho importante usar um livro como referência. Esse livro eu uso, que foi o livro que eu estudei, que é o do João Lucas Marques Barbosa.

Luiz: Hã-hã!

Paulo: Embora a SBM anda fazendo umas barbeiragens com a impressão desse livro. E eu gosto de registrar isso também, mas eu acho um livro muito bom. Agora, eu peço pra que os alunos estudem também, ficando atentos a essa questão de convenções e de nomenclaturas. Mas eu acho que o livro do Moise¹⁸ é um livro... é um livro interessante, o livro do “Fundamentos da Matemática Elementar”¹⁹ do... a gente sempre fala do Gelson Iezzi, porque ele escreveu boa parte dessa coleção, né? Que é uma coleção antiga, que é uma coleção que foi... que era usada no

¹⁸ MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. *Geometria moderna*. Tradução de Renate G. Watanabe e Dorival A. Mello. São Paulo: Edgard Blucher, 1975.

¹⁹ IEZZI, G. et al. *Fundamentos de matemática elementar*. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005.

segundo grau há bastante tempo atrás, mas que é um livro que embora não tenha esse caráter axiomático, ele tem muitos exercícios que dão ideias pros alunos. Muitos exercícios que eu julgo interessante. Ele também trabalha alguns conceitos de uma maneira mais leve, de uma maneira mais suave, mais maleável e mais acessível.

Então, esse livro de “Fundamentos da Matemática Elementar”, eu oriento meus alunos, alguns tópicos específicos a procurarem esse livro ou começar a fazer alguns exercícios desse livro, mas pensando no que foi discutido em aula. Pra depois ir pra parte de exercícios do Barbosa. E tem um livro que eu mencionei já na... nesse nosso bate-papo, que é o livro da Lúcia Tinoco, que infelizmente não edita mais, não sei por quê. Que é um livro que é geometria com resoluções de problemas, alguma coisa. Minha memória não é boa pra isso. Né, pra saber o nome exato.

Mas ela põe um curso inteiro de geometria com resoluções de problemas. Eu não tinha na... e não tenho ainda, é um amadurecimento pra pegar esse livro, usar esse livro como base para um curso. Talvez seja possível, é... o livro é incrível. Mas eu não tenho condições de trabalhar dessa maneira por deficiência minha, por falta de amadurecimento, talvez, meu. Mas é um livro cuja proposta era essa. Trabalhar geometria só com resolução de problemas.

Então, eu uso esse livro aí, eu... não é um livro que eu indico pros alunos, mas é um livro que eu uso para preparar aula. E, muitas vezes, pra colocar situações ou colocar problemas no começo da aula, bem provocativos. Seja pra gente sentir a necessidade de um tema novo que vai ser discutido, ou seja para... discutir, para analisar um problema que discuta e que analise é... conteúdos que a gente já fez em sala de aula. Então, tanto para olhar pra trás e para usar aquilo que a gente já discutiu em sala de aula pra resolver esse problema, ou como um problema que vai despertar a necessidade da discussão do conteúdo que eu quero fazer daqui a pouco. Então, esse livro eu acho muito bom.

E assim, é, não sei se eu falei, mas o Moise é um livro... é um livro bastante usado, mas eu não gosto da sequência...

Luiz: Que ele apresenta.

Paulo: Tanto do Moise quanto dos fundamentos. Da sequência, da maneira como ele apresenta. O Moise ele mistura um pouco de geometria espacial com geometria plana, enfim, eu não gosto do direcionamento dado por esse livro. Então, são livros que em alguns momentos eu peço pros alunos é... olharem com mais carinho. Mas o livro que eu uso como coluna cervical do curso é o do Barbosa.

Luiz: É, ele é muito utilizado esse livro, viu, professor. Já abordamos o tema literatura, e eu ia perguntar justamente como você fazia uso do livro, né, mas já tá respondido a pergunta. Agora um outro tema, o que me levou a fazer inclusive a pesquisa, né? Pesquisas apontam que os alunos do Ensino Fundamental e Médio não estudam geometria. Ou seja, a geometria está ausente na sala de aula. Quais seriam, em sua opinião, os motivos para este fato?

Paulo: *Risos...* Essa é uma pergunta que ela não é simples de ser resolvida, de ser respondida, Luiz. Então, é... eu vou... respondendo pra você, mas vou tomando cuidado pra usar as palavras corretas, mais adequadas e pra que eu não use o meu costumeiro é... exagero. Eu sou meio exagerado às vezes na minha fala, no meu discurso. Então, é... bom. Primeira coisa. Tostines vende mais porque é sempre fresquinho ou é fresquinho porque vende mais?

Mas assim. O fato do aluno não ter visto geometria no colégio,... quando ele chega na Licenciatura em Matemática, ele se assusta com geometria. O fato dele ter visto geometria como uma geometria prescritiva. Aliás, ensino de matemática, no colégio, eu, na maneira que eu entendo, na sua maioria, ele é feito de maneira prescritiva e não de maneira dedutiva. Por vários motivos que fogem a nossa discussão aqui, mas ele é assim. Faça isso, faça aquilo, faz aquilo e faz aquele outro.

Então, quando chega para estudar geometria, é... sob o ponto de vista axiomático, uma geometria que ela é dedutiva, eu tô estudando aquele conteúdo que ele pode ter visto ou não no Ensino Médio e no final do Ensino Fundamental. Mas dando um ponto de vista de dedução e não de prescrição. E esse é um elemento que assusta. E, aí, eu fiz a brincadeira da bolacha porque, se o professor não fez um bom curso

de geometria, ele não vai se sentir à vontade pra dar a disciplina de geometria. Então, é... primeiro elencando.

Primeiro, eu acho que é... Geometria é um curso que assusta, é uma disciplina que assusta as pessoas. E as pessoas não se sentem à vontade pra dar aula de geometria. Segundo, tem muitos cursos... você... eu quero ler seu trabalho depois pra ver esse levantamento, você possivelmente vai fazer. Mas tem muitos cursos de formação de professores que não abordam geometria. Por um motivo muito simples. Não existe professor de geometria. Então, se na formação de professores não tem geometria, e a gente sabe, tem muitas faculdades, principalmente as particulares, que põem um foco danado no pedagógico e que suavizam muito, que flexibilizam muito a discussão dos conteúdos...

Luiz: Específicos.

Paulo: Específicos da matemática. Então, o cara, trocando em miúdos, o cara não teve aula de geometria, ele vai dar aula do... como que ele vai dar aula de geometria? Então eu acho que esse é outro elemento. Na nossa condição de aluno da Unesp, agora professor do Instituto Federal, de professor do ensino básico, trabalhar geometria da forma que você e que um grupo reduzido de professores trabalha é... é muito raro. É muito comum ter pessoas que não têm boa formação de geometria. Elas não se sentem à vontade para dar aula de geometria e, quando dão, dão como consequência disso uma geometria prescritiva.

Eu quero deixar o seguinte relato, Luiz. Quando eu trabalhava, quando eu comecei a dar aula em escolas particulares, em cursinho pré-vestibular, muitas das aulas que eu peguei foi porque eu topava dar aula de geometria. E aí, eu fazia até uma brincadeira um pouco é... Não sei qual o adjetivo, mas eu era até um pouco mala, até um pouco é... arrogante não é a palavra, mas, enfim, neste sentido. Porque eu falava, eu sou professor de matemática, entre outras coisas...

Luiz: De geometria.

Paulo: Eu sei geometria. Então, geometria e a parte de análise combinatória e probabilidade, ninguém dava. Eu dizia não, não, pode deixar que eu dou geometria. E aí, isso me diferenciava dos...

Luiz: Demais.

Paulo: Dos demais concorrentes. Às vezes, numa aula teste, numa prova didática, quando punha um desses dois temas, análise combinatória e probabilidade e geometria, as pessoas... ficavam apavoradíssimas. E eu tive, eu estudei bastante isso, são conteúdos que eu gosto e que muitos empregos eu arrumei por conta disso.

Outro relato interessante, Luiz, é o seguinte. Como eu te falei, eu acabei de vir agora do Congresso Internacional do Ensino da Matemática, lá na UBRA, no Rio Grande do Sul, Canoas. É... tinham muitos trabalhos, comunicação científica, relatos de experiência. Tinha alguns trabalhos sobre geometria. Mas uma geometria muito experimental, uma geometria mais lúdica do que formal, talvez. É, enfim, tinham alguns relatos, muitos não, mas tinham alguns minicursos, relatos de experiência de geometria. Mas pôster, por exemplo... além do meu aluno de iniciação, eu não lembro de ter visto outro.

Então, alguns professores paravam no curso, paravam no pôster e falavam assim: poxa, que legal, você... o seu foi o único trabalho que abordou construções geométricas. Geometria até tinha. Construções geométricas, pouquíssimas. E aí, eu dizia assim: olha, vai ter uma comunicação que a gente vai fazer uma propaganda. E a gente dizia: vai ter uma comunicação científica que é um trabalho, do qual essa iniciação científica aqui é uma parte do trabalho. Então, eu vou fazer uma apresentação, vou discutir essas coisas. Então, muitas das pessoas que paravam no pôster foram ver essa comunicação científica. Então, por quê? Porque eu vejo que muitas pessoas têm essa necessidade, essa disposição como você pra discutir geometria. Mas, nos congressos, não têm muita coisa feita a respeito disso. Porque ela assusta... como você... provoca na sua pergunta. Ela assusta.

Luiz: Você acha que essa deficiência, então, é do próprio curso de formador, Paulo? Ele não dá uma estrutura suficiente para o professor ensinar geometria? Ele não sabe o suficiente?

Paulo: Eu entendo que sim. Eu entendo que sim. E a gente não pode é analisar e tomar como realidade, é... Por exemplo, a gente tá em Rio Claro, o curso da Unesp

de Rio Claro. O curso onde eu trabalho, que é uma universidade pública, é uma universidade que é um Instituto Federal, a gente não pode tomar como base alguns cursos que são cursos de excelência. Tomando, a gente tem muitos cursos de formação de matemática que formam o professor de matemática em três anos. Então, em muitos desses cursos, não tem geometria.

Luiz: Tá certo.

Paulo: Então, tem muito professor formado que tem um conhecimento muito pequeno de geometria. Eu arrisco a dizer. E por isso é... se a pessoa tiver a possibilidade, se a pessoa tiver a opção, ela deixa a geometria lá pro finalzinho. Porque caso não der tempo, é a geometria que não vai ser dada. É mais confortável isso para determinado perfil de professor.

Luiz: Tá joia. Um último tema agora, professor. É uma pergunta um pouco ampla, mas, enfim, acho que até você já respondeu parte dela. A intuição e o método axiomático típicos da geometria euclidiana são características de toda atividade matemática. Em que outra área do conhecimento ou o domínio do método axiomático, com a formação em geometria, por exemplo, são fundamentais? Ou seja, esse modelo axiomático.

Paulo: ... Poxa, *risos*... deixa eu pensar, Luiz. É... veja. Eu... eu... na formação de professores, acho que é a condição que eu tô sendo entrevistado. Honestamente, eu não tenho uma preocupação muito grande com isso. As pessoas é... muitas vezes, até pelo questionamento do aluno, até pela característica da escola... da escola atual, né? Eu não estou falando de nenhuma específica. As pessoas têm uma preocupação muito grande com o valor utilitário do conhecimento.

Pra que que eu vou usar isso? Pra que que serve isso? E essa não é a única função da escola, né? Então, olhando a escola como formadora de cidadão, que é uma função importante da escola, é... eu não preciso... eu não preciso é... ter uma... mostrar pro meu aluno uma aplicação direta. É verdade, o conhecimento de geometria pode passar, por exemplo, pode ter uma relação interessante, pensando na escola, né? Na escola, no ensino básico, Fundamental e Médio.

Ela pode ter um papel interessante, por exemplo, na escola técnica. No desenho mecânico, no desenho de... da parte da construção civil. É verdade que ela tem papéis bastante interessantes, ela aparece em algumas situações. Só que, nessas aplicações, por exemplo, na construção civil e, por exemplo, no desenho mecânico, sei lá, por exemplo, na arquitetura, não existe uma... ao meu ver, eu não enxergo, eu não vou dizer que não existe. Eu não enxergo uma importância absurda da axiomática nessa aplicação. Eu enxergo uma importância muito... uma importância fundamental da axiomática sobre quem vai falar sobre geometria. Não diretamente na aplicação. Não sei se eu tô sendo claro nisso.

Luiz: Sim, isso.

Paulo: Então, quando você vai fazer é... a matemática, uma relação de matemática com arte que... tem a ver com meu trabalho de mestrado, é... a proposta é o professor que vai trabalhar, por exemplo, essa interdisciplinaridade, essa transdisciplinaridade, eu não entendo direito a diferença entre esses conceitos, Luiz, mas o professor que vai fazer esse tipo de trabalho, ele tem que ter um conhecimento muito sólido de geometria. Isso passa pela axiomatização. Então, é... assim como... outras áreas da matemática.

Muitas vezes, para você dar um bom exemplo, ou pra você dar um contra-exemplo, é... ou pra você encaminhar uma questão, você tá buscando lá no seu... no seu arsenal, você tá buscando lá no seu... Lá no seu conhecimento, ideias que você não discutiu sob o ponto de vista mais elementar. Você discutiu sob o ponto de vista mais avançado. Mas essa discussão, esse amadurecimento, do ponto de vista avançado, faz com que você tenha tranquilidade pra... discutir aquele assunto em níveis mais elementares. Com contra-exemplo, com exemplos adequados, com propostas e provocações, dependendo da maneira que você tiver dando aula naquele momento.

Então, eu vou dar um exemplo mais prático. É... arcos e ângulos na circunferência. Existem alguns livros que conduzem esse assunto de maneira prescritiva, fórmulas. Se for assim, é assim. Se for assado, é assado. Se for um ângulo excêntrico exterior, a diferença dividida por dois. A diferença da medida dos arcos dividida por dois. Se for um ângulo excêntrico interior, a média, o ângulo central é a medida do arco. Se

for um ângulo inscrito é assim, se for um ângulo, o segmento é assim, ok? Tem alguns livros, alguns materiais que propõem você trabalhar com dois conceitos. Ângulo inscrito e ângulo central. E, a partir daí, você deduz é... todo o resto, né? Se deduz todo o resto do conteúdo e trabalha é... Tem discussões interessantes, porque essa discussão passa pelo teorema do ângulo externo, passa por soma dos ângulos internos, que são dois resultados equivalentes.

Enfim, agora, tanto em um contexto como em outro, principalmente no contexto prescritivo, o aluno fala assim: Paulo, eu descobri tal coisa. Eu achei esse resultado. A gente discute o exercício, chega a um certo resultado e fala: eu achei o mesmo resultado de outra maneira.

E aí, você diz, como? Ele fala: ah, eu fiz isso, isso, isso. E como você justifica se aquilo vale ou se aquilo não vale? Pode ter sido uma coincidência. Trinta, sessenta são números onde existem coincidências muito grandes. Mas não, ele pode ter... essa conjectura do aluno, usando o nosso linguajar, pode ser resultado de um outro conhecimento e, muitas vezes, isso acontece. Eu consigo deduzir, eu consigo demonstrar que aquilo é verdade a partir de conhecimentos anteriores, anteriormente discutido. Se você não conhece a geometria, ou se você não trabalhou com a formalização, com a parte axiomática, você não consegue justificar. E aí, o que que você vai fazer com seu aluno?

Fala assim, ó: fica quieto e faz do jeito que eu estou prescrevendo, né, ou vai enrolá-lo, ou vai dizer não sei. Mas eu não sei vem sempre acompanhado de não sei, mas vou pensar sobre o assunto. Então, você vai fazer o quê? Você vai enganá-lo e vai continuar prescrevendo ou vai tentar justificar a validade ou a invalidade daquilo através dos conhecimentos de geometria? Então, eu falo desse conteúdo porque eu já passei por isso algumas vezes. E, muitas vezes, o aluno, a conjectura do aluno era genial. Mas mais bacana do que a conjectura do aluno era sentar com ele e...

Luiz: Conseguir entender ela.

Paulo: Tentar descobrir o porquê que aquilo valia, no caso. E aí, esse trabalho eu entendo, é importante na formação do aluno.

Uma outra questão, Luiz, que se você me permite, é... e aí eu respondo diretamente a sua pergunta, né, que é uma pergunta difícil. Eu usei a minha experiência no ensino... no Ensino Médio, né, eu costumo falar escola básica pra juntar Médio e Fundamental numa categoria só. Mas a minha experiência no Ensino Médio com geometria me fez ter uma aplicação muito bonita e muito interessante da axiomática na formação do cidadão.

Como que a axiomática ajuda a formar o cidadão? Né, como é que isso é possível? E eu te respondo. Quando a gente vai falar de geometria e mesmo no Ensino Médio, que você é... trabalha com axiomática, claro, a formalização nesse momento não é o ponto alto. Você desenvolve, mas não é o ponto principal. Mas a questão da axiomática, quando você trabalha com isso, você pergunta, você... é... instiga o aluno a perguntar o porquê das coisas.

Você instiga o aluno a quase um desafio de falar. Professor, por que que isso é verdade? Se ele... se ele topa entrar nessa, nesse desafio, ou se ele topa entrar nesse jogo, né? Quando você coloca um resultado, ele vai te perguntar: professor, baseado em que você tá fazendo isso? O porquê que você está, por que que você tá fazendo isso? Ou isso veio na tábua de Moisés como décimo primeiro mandamento? E quando você faz o aluno romper com essa prática tradicional da sala de aula, que o professor é inquestionável, você tá dando um passo importante pra formação do cidadão.

Porque não é só você que ele vai questionar. Ele vai questionar o professor de Física. Ele vai questionar o professor de História, ele vai questionar o professor de Português. E aí, as pessoas vão ter mais dificuldade em prescrever as coisas pra ele. E ele vai questionar também o diretor da escola. Então, eu fazia essa provocação constantemente. Eu não posso vir de bermuda. Tudo bem, por quê? Então, minha orientação pro aluno é: não adianta você brigar, não adianta você xingar, o caminho é o diálogo. Mas questionar você pode. Questionar sem... sem ser pouco educado, sem ser agressivo. Mas questionar você pode. Então, veja o questionamento que foi instigado lá com o pretexto, talvez, da axiomática, né?

O fato do aluno querer perguntar por que, querer saber, é... baseado em que que você tá fazendo aquilo, aconteceu muitas vezes e em outros momentos naquele

mesmo colégio, naquela mesma instituição. Trabalhei bastante tempo em instituições particulares... do aluno, depois desta experiência com geometria, questionar o coordenador, do aluno questionar o dono da escola, do aluno questionar o mantenedor, que é o chefe absoluto. E aí, as pessoas brincavam comigo. Mas algumas brincadeiras é... nem tão brincadeiras assim. Falavam assim: você está criando monstros. Por quê? Porque no meu entender isso estava ajudando a compor uma característica do cidadão, que é assim um cidadão questionador, de ser um cidadão crítico ou de ser uma pessoa questionadora, uma pessoa crítica. Uma pessoa que consegue, ou que tenta, ou que desenvolve. Porque isso não vai surgir de uma hora para outra, mas é um exercício de questionamento, de refutar uma ideia sem que isso faça com que ele seja agressivo, que ele seja pouco educado. Sem que isso cause um... um atrito do ponto de vista ruim. Eu tô discutindo ideias, não estou brigando, nesse sentido.

Então, eu acho a... pensando sob o ponto de vista da axiomática, esse é o principal resultado. Porque, no meu entender, Luiz, é... a matemática pela matemática, pra mim, não serve pra muita coisa. Talvez na tecnologia tenha uma aplicação e tem, né? E, em várias áreas do conhecimento, tem, mas quando a gente tá falando de escola básica, a principal função da escola básica, ao meu ver, é formar cidadão. E aí, eu acho que é interessante essa consequência que a axiomática traz. Ou essa consequência da axiomática na formação do... na mudança da maneira de agir da pessoa. Eu acho que é... a pergunta que tem que ser feita é: do ponto de vista de formar cidadão, como o conhecimento desse conteúdo ou dessa disciplina pode mudar a minha realidade? E não precisa, pra mudar a realidade, ter uma aplicação direta.

Ah, eu sei regra de três porque vai me ajudar a comprar o papel higiênico mais barato. Não, é mais amplo que isso. É mudar minha realidade e me fazer pensar de outras maneiras, é mudar minha realidade sabendo que eu tenho condições de questionar. É mudar a minha realidade sabendo, claro, que eu consigo interpretar uma porção de coisa. Então, pra mim, essa é a função da escola, da escola básica.

É verdade que lá na frente ele vai ter... se ele seguir caminho de tecnologia, ele vai usar isso pra uma porção de coisa. Mas, na situação de formação de professores,

desculpa, na situação de formação de cidadão, eu acho isso importante. Foi uma coisa que eu lembrei nessa nossa prosa aí.

Luiz: Tá certo. Isso tudo, professor, é... o professor só dá essa liberdade ao seu aluno se ele tem uma boa formação sólida mesmo, né? Se ele tem uma estrutura pra tá discutindo aqueles conceitos com seus alunos.

Paulo: Luiz, eu... Bom, a gente tá falando de concordar, discordar, refutar. Eu vou ser um pouco mais sutil. É... do que... eu vou... vou ser mais provocativo, talvez. Sutil não é a palavra. O professor, além de ter uma boa... além de ter uma boa formação, ou tão importante quanto ter uma boa formação, o professor tem que estar disposto a discutir.

Então, ele tem que estar disposto a ser questionado, ele tem que tá disposto a falar durante vários momentos, não sei, né? Ele tem que tá disposto a lidar com tecnologia e perceber que o aluno, naquele momento, está dando um baile nele. Porque o aluno já descobriu tanta coisa no software e que você nem passou pela sua cabeça que aquilo existia. Então, usando um termo que a Miriam usa, a Miriam Godoy Penteado, é... O professor tem que estar disposto a sair da sua zona de conforto. Tem que tá disposto a abrir a guarda, a dar a cara à tapa. Porque, pra formar um cidadão crítico, reflexivo, o professor tem que ser também.

Eu acho que a formação importante não é só a formação de conteúdo. É formação, é... enquanto cidadão. Né, ninguém dá o que não tem. Então, se eu sou durão, se eu sou autoritário, se eu não quero que ninguém discorde de mim, é... esse tipo de situação não vai acontecer. Eu tenho que é me colocar como um aprendiz, se eu quero que meu aluno aprenda, eu tenho que ser aprendiz. Se eu quero que meu aluno discuta, eu tenho que tá disposto a discutir, eu tenho que tá disposto a ceder. Ou, em alguns momentos, eu preciso conduzir. Porque é... o amadurecimento suficiente pra uma questão é... o professor. O professor que é o profissional que, muitas vezes, precisa conduzir, mas precisa tá aberto à discussão.

Então, eu acho que se o professor não tem esse perfil, e que não é um dom, que não é uma coisa é... inata dele, que é uma coisa que é desenvolvida, é uma coisa

que o professor precisa estudar, precisa ler, precisa discutir, né, precisa ler mais, precisa discutir mais.

Se não é uma coisa que o professor desenvolveu, ele não tem isso pra compartilhar com os alunos. Então, ele não vai formar cidadão. Ele vai formar o quê? O tecnicista, o cara que vai precisar sempre de uma prescrição, que é muito comum nas salas de aula. Ah, professor, o que eu faço agora? Ele vai formar pessoas que só sabem resolver problemas parecidos com aquele que você resolveu, que não vai inovar, que não vai ter criatividade.

Porque, pra ter tudo isso, você tem que sair da sua zona de conforto. Tem que ir pra ... tem que ir pra zona de risco. E... isso é perigoso, isso dá mais trabalho, isso foge da acomodação. E talvez seja por isso que algumas pessoas não tomem esse tipo de caminho, nesse sentido. Eu acho mais importante a formação é... pedagógica, muitas vezes, e de reflexão e tudo, do que a formação. Claro que é importante a formação técnica do conteúdo matemático. O matemático sozinho, a formação matemática sozinha não... não é suficiente. Claro, a formação pedagógica sozinha não é suficiente. As duas coisas são fundamentais pra formar um professor com esse perfil. Conhecer o técnico e conhecer o... pedagógico.

Luiz: Tá certo, professor, as perguntas iniciais eram essas. Eu agradeço muito, muito mesmo a sua presença aqui pra tá respondendo.

Paulo: Maravilha, eu que agradeço. Como eu te falei no momento informal da conversa, eu fico muito lisonjeado de poder participar de uma pesquisa. Primeiro que tá sendo elaborada por dois amigos, você e o professor Henrique. E primeiro, também, porque não existe uma escala de hierarquia aí, poder discutir esse tipo de coisa. Eu acho que isso é muito importante, isso vai enriquecer a literatura, vai... eu tô curioso pra saber qual o rumo e as questões e as conclusões levantadas pelo seu trabalho.

Luiz: O professor irá saber.

Paulo: Maravilha.

Luiz: Agradeço, professor.