



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-D.002/14

Eletrodinâmica Quântica Generalizada *a la* Teoria de Perturbação Causal

Daniel Eduardo Soto Barrientos

Orientador

Prof. Bruto Max Pimentel Escobar

Março de 2014

Agradecimentos

- Agradeço a meus pais. A Esther, minha mãe, pelo apoio incondicional e acreditar no meu caminho que talvez foi perdido por meu avô G. Barrientos. A Donatilo, meu pai, pelo suporte permanente e compartilhar comigo seu gosto pela ciências: física e matemática, e o jogo-ciência: xadrez.
- A meu irmão, Rolando, cuja presença é suficiente estímulo de superação. A minhas irmãs Carol, Fanny, Vivian, Julissa, fontes inacabáveis de carinho e compreensão, e a minha irmãzinha Giuliana (*in memoriam*).
- A meus sobrinhos M. Magdalena, J. Daniel, M. Vivian, V. Daniel e C. Rolando, responsáveis pelo meu otimismo.
- Agradeço ao Prof. B.M. Pimentel pela orientação no desenvolvimento desta tese e outras pesquisas, a confiança em meu trabalho e o apoio nas diversas dificuldades.
- A meus predecessores: Tomazelli, Lunardi, Manzoni, Bonin e Bufalo, cujos trabalhos foram de grande utilidade em minha pesquisa.
- Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese apresentaremos um estudo perturbativo da Eletrodinâmica Quântica Generalizada ($GQED_4$) via abordagem da Teoria de Perturbação Causal (TPC). Com esse propósito, primeiro faremos uma revisão dos fundamentos da TPC e, daremos uma apresentação, o suficientemente geral, para sua aplicação na $GQED_4$. Outro ingrediente essencial, para sua aplicação, é ter uma imagem da teoria livre da Eletrodinâmica Generalizada; em particular obter os propagadores de frequência positiva e negativa. Para a obtenção desses propagadores, introduziremos a sua representação analítica, tendo como base o formalismo de Wightman. Após a classificação dos primeiros termos perturbativos, apresentaremos o espalhamento Moeller e Compton e, mostraremos a modificação do primeiro com relação à Eletrodinâmica Quântica (QED_4). Calcularemos as correções radiativas a 1 -loop e veremos que a normalização da polarização do vácuo segue o roteiro usual, mas na normalização da auto-energia precisaremos introduzir um novo critério na TPC , a fim de satisfazer a condição de camada de massa. Mostraremos também o comportamento regular do vértice, assim como da auto-energia. Por último, *demonstraremos* indutivamente as simetrias discretas, as identidades de Ward-Takahashi-Fradkin e a normalizabilidade da $GQED_4$.

Palavras Chaves: Abordagem axiomática; teorias de campo de ordem-superior; matriz S; causalidade; distribuições.

Áreas do conhecimento: Teorias de Campos.

Abstract

In this thesis, we will present a perturbative research of the Generalized Quantum Electrodynamics ($GQED_4$) within the approach of the Causal Perturbation Theory (TPC). With this purpose, we first make a review of the basics of TPC and give a complete enough theory to apply to $GQED_4$. We need the other essential part for this objective: the Quantum Free Field Theory of the Generalized Electrodynamics, in particular, to obtain the positive and negative frequency propagators, for which, we will introduce their analytic representations, taking as basis the Wightman Formalism. After the classification of the first perturbative terms, we will present the Moeller and Compton scattering and, show the difference with the Quantum Electrodynamics results. We will calculate the radiative corrections at one-loop and, show that the vacuum polarization normalization continues the usual way but, for the electron self-energy normalization we need to introduce a new criterion in TPC , such that fulfills the mass on-shell condition. Also, we will show the regular behavior of the vertex such as in the electron self-energy. Finally, we will *demonstrate* inductively the discrete symmetries, the Ward-Takahashi-Fradkin identities and the normalizability of the $GQED_4$.

Keywords: Axiomatic approach; higher-order field theories; S matrix; causality; distributions.

Knowledge Field: Field Theory.

Sumário

1	Introdução	1
2	Teoria de Perturbação Causal	5
2.1	Introdução	5
2.2	O Programa Perturbativo da <i>Matriz-S</i> na TPC	7
2.3	Axiomas da Teoria de Perturbação Causal	9
2.3.1	Causalidade	10
2.3.2	Condições de Contorno e Base Indutiva	14
2.3.3	Invariância Relativística	16
2.4	Construção Indutiva da <i>Matriz-S</i>	19
2.4.1	Distribuições: Avançada, Retardada e Causal	21
2.4.2	Ordem Singular	26
2.4.3	Bipartição: Ideia Geral	35
2.4.4	Bipartição Regular	37
2.4.5	Bipartição Singular	42
2.4.6	Unicidade da Bipartição e Normalização	52
3	Abordagem Axiomática dos Campos Livres Quantizados: de Dirac e de Podolsky	56
3.1	Introdução	56
3.2	Programa Axiomático da Teoria Livre e o Formalismo de Wightman	58
3.2.1	Axiomas de Wightman	58
3.2.2	Funções de Wightman	62
3.2.3	Representação Analítica dos propagadores PF e NF escalares	65
3.2.4	Programa Axiomático dos Propagadores PF e NF	67
3.3	Campo Escalar	69
3.3.1	Propagadores PF e NF Escalares	69
3.3.2	Relações de Comutação	70
3.3.3	Bóson Escalar	71
3.4	Campo Fermiônico	74
3.4.1	Propagadores PF e NF Fermiônicos	74
3.4.2	Relação de Anticomutação	75
3.4.3	Férmions de Dirac	76

3.5	Campo Eletromagnético de Podolsky	78
3.5.1	Propagadores PF e NF Eletromagnéticos	79
3.5.2	Relações de Comutação	81
3.5.3	Fóton de Podolsky	83
3.6	Primeiros Termos Perturbativos	85
3.6.1	Distribuições de Segunda Ordem	86
3.6.2	Distribuições de Terceira ordem: Vértice	89
4	Espalhamento em $GQED_4$	96
4.1	Introdução	96
4.2	Espalhamento Moeller	97
4.2.1	Distribuições de segunda ordem	98
4.2.2	Ordem Singular	98
4.2.3	Bipartição e o Propagador Retardado Eletromagnético	100
4.2.4	Contribuição de 2º ordem à Matriz-S e o Propagador de Feynman Eletromagnético	104
4.2.5	Amplitude de Transição	107
4.2.6	Probabilidade de Transição e Seção de Choque	110
4.3	Espalhamento Compton	118
4.3.1	Distribuições de segunda ordem	119
4.3.2	Ordem Singular	119
4.3.3	Bipartição e o Propagador Retardado Fermiônico	120
4.3.4	Contribuição de 2º ordem à Matriz-S e o Propagador de Feynman Fermiônico	121
4.3.5	Amplitude de Transição e Seção de Choque	122
5	Correções Radiativas em $GQED_4$	125
5.1	Introdução	125
5.2	Polarização do Vácuo	126
5.2.1	Distribuições de segunda ordem associadas	127
5.2.2	Ordem Singular	128
5.2.3	Bipartição e a Parte Retardada da VP a um loop	131
5.2.4	Tensor de Polarização a um loop	133
5.2.5	Propagador do Fóton com Inserções VP	135
5.3	Auto-energia	139
5.3.1	Distribuições de segunda ordem associadas	140
5.3.2	Ordem Singular	141
5.3.3	Bipartição e a Parte Retardada da AE a um loop	144
5.3.4	Auto-energia a um loop	150
5.3.5	Propagador do Elétron com Inserções AE	152
5.4	Vértice	155

5.4.1	Distribuições de terceira ordem associadas	155
5.4.2	Ordem Singular	156
6	Propriedades Gerais	168
6.1	Introdução	168
6.2	Simetrias Discretas em TPC	169
6.2.1	Conjugação de Carga	170
6.2.2	Paridade	172
6.2.3	Inversão Temporal	175
6.3	Normalizabilidade da GQED ₄	177
6.3.1	Contração Geral	178
6.3.2	Normalizabilidade	182
6.4	Simetria de Gauge	185
6.4.1	Transformação de Gauge	186
6.4.2	Condição de Simetria	187
6.4.3	Identidades de Ward-Takahashi-Fradkin	194
7	Conclusões	198
7.1	O Formalismo da TPC e a Quantização do Campo Livre	198
7.2	Espalhamento e a Teoria Livre do Campo de Podolsky	199
7.3	Correções Radiativas e Normalização	200
7.4	O Método Indutivo, Simetrias, Normalizabilidade e as Identidades de W-T-F	200
7.5	Perspectivas Futuras	201
A	Algumas Noções sobre Distribuições	202
B	A Matriz Inversa	207
C	Relações Causais das Distribuições R'_n, A'_n e D_n	211
D	Unicidade da Fórmula de Bipartição	214
D.1	Unicidade da Fórmula de Bipartição Central	214
D.2	Unicidade da Fórmula de Bipartição Regular	218
E	Lagrangianas de Gauge Fixing	220
F	Gauge fixing não mixturado	222
G	Campo Elétrico Livre	225
H	Potencial Eletrostático de Podolsky	227

I	Espalhamento entre duas partículas	229
I.1	Canais de Reação	229
I.2	Amplitude de Transição	231
J	Matrizes-γ de Dirac	236
K	Convoluções Distribucionais	239
K.1	Cálculo da convolução: $\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)}$	239
K.2	Cálculo de $I_1^{(-)}$	240
K.3	Cálculo de $I_3^{(-)}$	242
L	Valores Esperados	244
L.1	Valor Esperado $I(k)$	245
L.2	Valor Esperado $P \frac{1}{1-s}$	249
L.3	Valor Esperado $P \frac{1}{s(1-s)}$	250
L.4	Valor Esperado $P \frac{1}{s^2(1-s)}$	251
L.5	Valor Esperado $P \frac{\eta}{s(1-s)}$	251
L.6	Valor Esperado $P \frac{\eta}{s^2(1-s)}$	254
M	Integral Escalar	256
M.1	Integral Escalar I_1	257
M.2	Integral Escalar I_2 e I_3	260
M.3	Cálculo de I	263
N	Integral Vectorial	265
N.1	Cálculo de I_1^ν	266
N.2	Cálculo de I_2^ν e I_3^ν	269
N.3	Cálculo de I^ν	272
O	Integral Tensorial	274
O.1	Cálculo de $I_1^{\mu\nu}$	275
O.2	Cálculo de $I_2^{\mu\nu}$ e $I_3^{\mu\nu}$	282
O.3	Cálculo de $I^{\mu\nu}$	287
	Referências	289

Capítulo 1

Introdução

A interação radiação-matéria é um dos fenômenos mais estudados pela Física, tanto experimental como teórica. As diferentes propriedades dessa interação vão depender da frequência (energia) da radiação (fótons), pois diferem muito de uma região espectral para outra.

A maior parte dos fenômenos envolvidos é modelada satisfatoriamente pelas equações de Maxwell [1] e a força de Lorentz, modelo teórico é conhecido como Eletrodinâmica Clássica. E, para fenômenos que considerem efeitos quânticos como o momento magnético do elétron, temos a Eletrodinâmica Quântica* (QED_4). Apesar do grande sucesso dessas teorias, elas apresentam *problemas de divergências*.

No nível clássico, temos divergências associadas a corpos pontuais, como são a auto-energia e a auto-força, singularidades que são provenientes da interação coulombiana r^{-1} . Para resolver os problemas de divergências temos dois propostas: desenvolver uma teoria matematicamente consistente ou modificar a lei de interação. Um dos primeiros a tentar fornecer uma teoria consistente foi J. G. Taylor [2], que aponta para o marco matemático adequado, que é a *teoria de distribuições*. Mas também mostra a dificuldade em definir produtos de distribuições num mesmo ponto.

A segunda proposta foi abordada por F. Bopp [3], P. Schwed e B. Podolsky [4], que propõem estender a lagrangiana da eletrodinâmica de primeira ordem para uma de segunda ordem[†], tal que se mantêm as propriedades do primeiro, mas que agora alguns dos problemas de divergências são resolvidos. Por exemplo, J. Frenkel [5] resolve o problema de auto-força entre partículas carregadas, o conhecido problema 4/3.

No nível quântico, temos que a QED_4 é a teoria quântica de campos de maior sucesso. Assim a versão perturbativa: $pQED_4$, dá resultados teóricos de grande precisão comparados com os experimentais. Em particular, temos o caso do momento magnético do elétron, estudado por Kinoshita *et al* [8] até na décima ordem perturbativa. Contudo a $pQED_4$ apresenta uma

*Entre seus fundadores, da versão moderna, temos em particular os notáveis aportes de Tomonaga, Schwinger, Feynman e Dyson.

[†]Estudo de lagrangianas com derivadas de ordens superiores remonta a 1850 na publicação de Ostrogradsky [43].

série de dificuldades de indefinição: integrais de Feynman divergentes do tipo ultravioleta (UV) e infravermelho (IR). Para obter resultados em função das quantidades físicas mensuráveis se introduz o programa de renormalização e, as divergências são separadas com as técnicas de regularização e, posteriormente absorvidas em contratermos. Essas dificuldades podem ser corrigidas, considerando propostas similares ao caso clássico.

Consideremos primeiro a alternativa de uma teoria de segunda ordem. A primeira versão quântica foi desenvolvida por B. Podolsky *et al* [4], mas nessa tentativa não se consegue o efeito regulador. A versão moderna é conhecida como Eletrodinâmica Quântica Generalizada ($GQED_4$) e, foi introduzida por R. Bufalo, B. M. Pimentel e G.E.R. Zambrano [44] via quantização funcional e, ao considerar a chamada condição de Lorenz generalizada [45] se obtêm que a auto-energia do elétron é finita.

A outra alternativa é introduzir uma teoria com o suficiente rigor matemático, tal que os problemas de divergências desapareçam. Nessa linha temos a chamada Eletrodinâmica Quântica Finita, desenvolvida por G. Scharf *et al* [22]. Nessa teoria perturbativa da QED_4 não há mais divergências UV e as IR conseguem ser contornadas.

A Eletrodinâmica Quântica obtida por G. Scharf *et al* é desenvolvida dentro do formalismo conhecido como Teoria de Perturbação Causal (TPC). Em 1973 Epstein e Glaser [14] começaram o desenvolvimento da TPC , que é uma teoria axiomática perturbativa da *Matriz-S* * que somente considera como axiomas[†]:

- Os princípios físicos: *causalidade, invariância relativística.*
- As condições: *de contorno assintoticamente livre, de termo base ou interação.*

Todos os passos da TPC são desenvolvidos no *marco da teoria de distribuições*. Posteriormente foi implementada no espaço dos momentos por Scharf *et al.* [22], que permite que essa teoria axiomática seja computacionalmente factível.

A Teoria de Perturbação Causal é um formalismo que fornece fortes análises sobre a singularidade de cada termo perturbativo assim como a normalizabilidade do modelo. Além dos trabalhos de G. Scharf *et al* em QED_4 , temos o belo trabalho de A. Aste, G. Sharf e U. Walther [23] sobre o análise da singularidade da polarização do vácuo em QED_2 , que os leva à obtenção da geração dinâmica da massa do fóton[‡]. Outro caso de geração dinâmica de massa ocorre na QED_3 , que encontra dificuldades via a regularização Pauli-Villiar-Raisky[§] e, é resolvido no marco da TPC por G. Scharf, W.F. Wreszinski, B.M. Pimentel, J.L. Tomazelli [31], podendo assim, considerar que esse trabalho mostra como a TPC apresenta maior claridade frente aos

*Nem o formalismo de Wightman [12] nem os formalismo de Lehmann, Symanzik e Zimmermann (LSZ) [11] satisfazem completamente as condições da TPC .

[†]No sentido do programa de Heisenberg [13].

[‡]Conhecida como massa de Schwinger [26].

[§]Depois esclarecido por B.M. Pimentes e J.L. Tomazelli em [32].

métodos de regularização. Um amplo trabalho, A. Aste, C. von Arx e G. Sharf [33] mostra varios exemplos das diferenças entre as técnicas da *TPC* e os métodos de regularização.

Via a *TPC*, G. Scharf, M. Dütsch *et al* analisam a invariância de gauge [36] no caso não massivo, e a quebra da simetria no caso massivo [37]; assim como na teoria eletro-fracca [38]; e, numa série de publicações a teoria de Yang-Mills [39]. Também é possível o estudo da teoria de Duffin-Kemmer-Petiau e, em particular encontramos um estudo do setor escalar por J.T. Lunardi, B.M. Pimentel *et al* em [35].

Modelos perturbativamente não renormalizáveis como o modelo de Thirring, são estudados com grande clareza pela *TPC*, pesquisa desenvolvida por L.A. Manzoni, B.M. Pimentel e J.L. Tomazelli, [34]. Outro caso importante é a análise causal da gravidade como uma teoria de gauge de spin 2 [40]*.

Desde Epstein-Glaser a *TPC* está em constante aperfeiçoamento. Como fizeram notar M. Dütsch, F. Krahe, G. Scharf [30] numa completa análise da Eletrodinâmica Escalar, em dimensão $3 + 1$ em que a teoria só deve considerar a parte da lagrangiana de interação com menor ordem na constante acoplamento, essa descoberta é agora parte dos axiomas do formalismo. Pelo lado computacional, a *TPC* exige o refinamento de suas técnicas de cálculo; por exemplo, para o vértice [41] e diagramas de *2-loops* [42].

Esta tese pode ser entendida como uma pretensão de contribuir à Teoria de Perturbação Causal, tanto no aspecto formal como técnico, via o estudo da Eletrodinâmica Generalizada; mas, também como uma contribuição ao desenvolvimento da *GQED*₄ via os mecanismos rigorosos da *TPC*.

Em qualquer caso, consideramos que é necessária dar uma ampla explicação dos princípios e o roteiro da *TPC*, já que só o maior entendimento possível deste formalismo nos deram a confiança em sua validade e, a consciência de suas dificuldades. Esta parte formal será tratada no segundo capítulo.

Sendo a base da *TPC* a teoria livre do modelo, no terceiro capítulo consideramos conveniente introduzir a representação analítica dos propagadores de frequência positiva e negativa, para cuja dedução partimos de alguns aspectos do formalismo de Wightman [12]. Mantemos a função de Green fermiônica em sua forma usual; mas para o caso eletromagnético, na dedução da função de Green, consideramos uma condição de *gauge-fixing* diferente da proposta por C.A.P. Galvão e B.M. Pimentel [45], sendo que veremos ao longo da tese as vantagens dessa nova condição.

No quarto capítulo estudaremos os espalhamentos Moeller e Compton, no nível árvore. No espalhamento Moeller deduziremos a seção de choque diferencial deste e, encontraremos que este se reduz ao caso da *QED*₄ quando

$$m_p \rightarrow \infty$$

*Para mais detalhes sobre teorias de gauge na abordagem causal vide o livro de Scharf: Quantum Gauge Theories: a true ghost story [54].

onde m_p é a massa de Podolsky [46]. Nesse limite as contribuições de segunda ordem da lagrangiana de Podolsky desaparecem, portanto, esse resultado é coerente. No espalhamento Compton ficará claro a dificuldade da dedução completa de uma teoria livre do eletromagnetismo de Podolsky.

As correções radiativas serão apresentadas no capítulo quinto onde os resultados da polarização do vácuo permaneceram praticamente iguais ao usual; mas os resultados da auto-energia, além da correta análise das singularidades, trazerem dificuldades com a condição da camada de massa, que pode ser resolvida se complementarmos o formalismo. Mostraremos também um análise das singularidades do vértice e, suas dificuldades técnicas [47].

No sexto capítulo, mostraremos o caráter minimal da TPC , já que sem fazer suposições extras conseguimos *demonstrar* indutivamente as simetrias discretas do modelo, a invariância de gauge e as identidades de Ward-Takahashi-Fradkin. Finalmente, seguindo esse método, se consegue analisar a normalizabilidade da Eletrodinâmica de Podolsky [48].

Por último, no sétimo capítulo, teremos nossas conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Teoria de Perturbação Causal

Neste capítulo apresentaremos o marco teórico geral da Teoria de Perturbação Causal (TPC) de Epstein-Glaser na versão moderna desenvolvida por G. Scharf, M. Dütsch et al. Nosso objetivo é dar os critérios gerais necessários e suficientes para sua aplicação num modelo qualquer da Teoria Quântica de Campos. E também fazer uma justificação rigorosa dos princípios nos quais a TPC é baseada.

2.1 Introdução

As quantidades de maior interesse num processo de colisão de partículas são as amplitudes de transição das diferentes configurações possíveis de estados anteriores e posteriores à colisão, a coleção dessas amplitudes formam o conjunto chamado de *Matriz-S*. A generalidade desta quantidade física permite descrever uma grande gama de processos de colisão, que vão de processos de baixas à altas energias. Temos na literatura diferentes teorias da *Matriz-S*; as Teorias Quânticas de Campos (QFT) usuais descrevem as partículas durante todo o processo, inclusive durante a colisão, em termos dos campos quantizados correspondentes ou das funções de Green associadas.

Temos assim por um lado o formalismo de Integração Funcional iniciado por Dirac e Feynman [6], e desenvolvido por Schwinger, Simanzyk e Fradkin [7]. Nesta abordagem a quantização dos campos segue o método funcional, onde se introduz o operador de evolução temporal, e se obtém um conjunto de equações funcionais entre os campos e o operador evolução no limite assintótico. A resolução deve levar a obter a *Matriz-S*, o que é possível ao replanejar o problema como um sistema de equações para o elemento de matriz da transição vácuo-vácuo. Finalmente a solução desse sistema de equações é expressa como relações entre as funções de Green da teoria*, as chamadas equações de Schwinger-Dyson-Fradkin. Embora a abordagem seja não perturbativa, ela nos permite identificar a ordem mais baixa de uma teoria perturbativa.

A abordagem lagrangiano ou canônico das teorias perturbativas (pQFT) tem tido grande sucesso na predição de resultados experimentais, como é o caso da teoria perturbativa da Eletro-

*Propagadores e Vértices.

dinâmica Quântica (pQED) na qual encontramos, por exemplo, uma grande concordância entre o cálculo numérico e a medida experimental do momento magnético do elétron e do muon [8], portanto, a eletrodinâmica é um excelente marco de referência para testar novos formalismos.

Nas abordagens perturbativas, como nas não perturbativas, precisa-se de um programa de renormalização, isto é, um esquema que expresse os resultados em função das quantidades físicas mensuráveis. Usualmente aparecem integrais divergentes o que obriga a se implementar um processo intermediário conhecido como regularização: consistente em separar uma única parte finita dessas integrais; sendo o resto (infinito) "absorvido" nas quantidades físicas.

A origem dessas divergências nas QFT usuais é atribuída a uma falta de rigor matemático e uma não explicitude de princípios gerais, como por exemplo: causalidade. Nas pQFT a *Matriz-S* é expressa como a seguinte série perturbativa:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) : \prod \mathcal{O}(x_{k_j}) : , \quad (2.1)$$

onde os últimos termos que acompanham a cada termo da série são produtos normalmente ordenados de operadores de campos livres. E os coeficientes, S_n , são funções que são expressas em termos dos propagadores de Feynman* dos campos da teoria; esses coeficientes estão relacionados com valores esperados no vácuo (VEV) de produtos temporalmente ordenados. Nesses coeficientes temos problemas de indefinição matemática ("infinitos") porque aparecem produtos de funções degrau e distribuições δ -Dirac: $\theta(x) \delta(x)$, $\delta(x) \delta(x)$; como foi assinalado por Bogoliubov e Parasiuk [10]. Esses produtos dão lugar às conhecidas divergências ultravioletas (UV), e têm como origem a abordagem desses produtos no formalismo da teoria de funções; sendo o formalismo adequado a teoria de distribuições.

Portanto, procura-se uma teoria de campos, com enfoque alternativo, que seja definida na linguagem matemática das distribuições. Nesse novo marco teórico os coeficientes S_n devem ser distribuições, e sua obtenção não deve ser relacionada com VEV de produtos temporalmente ordenados, a não ser com VEV de produtos normalmente ordenados. E além do marco matemático nessa teoria os princípios físicos gerais devem ser sempre manifestos e, então esta abordagem deve ser axiomática.

Ao longo da história das teorias axiomáticas aparecem dois importantes formalismos:

- *O formalismo LSZ* [11], de Lehmann, Symanzik e Zimmermann, que considera como axiomas: o sistema é modelado num espaço de Hilbert com invariância relativística, existência e unicidade do vácuo, condições de contorno assintoticamente livres, existência de campos interpolantes, localidade. Neste formalismo a *Matriz-S* é considerada a partir do início unitária (axioma); e é expressa, via as fórmulas de redução, em termos de

*Este é usualmente chamado simplesmente como propagador, mas como ao longo da tese apresentaremos diferentes propagadores vamos seguir a notação de Bjorken-Drell [9].

VEV de produtos temporalmente ordenados ou "τ-products", ou também em termos dos chamados "r-products". Devido a esses produtos nesta teoria aparecem as divergências UV.

- *O formalismo de Wightman* [12], considera como axiomas: o espaço de Hilbert com invariância relativística, existência e unicidade do vácuo, campos como distribuições a valor de operadores, condição espectral, localidade. Este formalismo se propõe a reconstruir a teoria, via o teorema de reconstrução, a partir do conjunto funções de Wightman de n -pontos que são VEV de produtos de n campos da teoria. Essas funções são na verdade distribuições numéricas. Vemos que esta teoria é matematicamente bem definida mas não é clara a formulação da *Matriz-S*.

Vemos que nenhum desses formalismos satisfaz completamente um formalismo axiomático perturbativo da *Matriz-S* no marco da teoria de distribuições e omitem um importante princípio físico: causalidade. Para fixar ideias, estamos procurando uma teoria da *Matriz-S* no sentido do programa de Heisenberg [13] *i.e.* considerar condições de contorno, sendo estas muito antes e depois da colisão, assintoticamente livres; e que a teoria seja completamente determinada por princípios físicos gerais sem considerar os detalhes da interação.

Encontramos assim que em 1973 *Epstein e Glaser* [14] começaram o desenvolvimento da hoje chamada *Teoria de Perturbação Causal* (TPC), que é uma teoria axiomática perturbativa da *Matriz-S* que somente considera como axiomas:

- Os princípios físicos: *causalidade, invariância relativística.*
- As condições: *de contorno assintoticamente livre, de termo base ou interação.*

Todos os passos da TPC são desenvolvidos no *marco da teoria de distribuições*. Uma grande contribuição posterior foi sua implementação no espaço dos momentos dada por Scharf *et al.* [22], que permite que esta teoria axiomática seja computacionalmente factível.

Na seguinte seção faremos uma introdução geral da *Matriz-S* na TPC.

2.2 O Programa Perturbativo da *Matriz-S* na TPC

Como mencionamos na introdução, a *Matriz-S* é uma coleção de todas as possíveis amplitudes de transição de um sistema, a partir de um instante inicial a um instante final, de todas as configurações possíveis de estados do sistema. Para fixar esse conceito definamos o espaço dos estados iniciais, $|\phi\rangle_{in}$, como o espaço de Hilbert \mathcal{F}_{in} ; e o espaço dos estados finais, $|\psi\rangle_{out}$, como o espaço de Hilbert \mathcal{F}_{out} .^{*} Agora introduzamos a definição do *operador de dispersão* S

^{*}Como por definição estamos considerando sistemas de muitas partículas, os espaços de Hilbert \mathcal{F}_{in} , \mathcal{F}_{out} são espaços de Fock.

, como uma aplicação bijetiva de \mathcal{F}_{in} a \mathcal{F}_{out}

$$S : \mathcal{F}_{in} \longrightarrow \mathcal{F}_{out} . \quad (2.2)$$

Daqui um estado inicial $|\phi\rangle_{in}$ é projetado em \mathcal{F}_{out} como $S|\phi\rangle_{in}$

$$S : |\phi\rangle_{in} \longmapsto |\phi\rangle_{out} \equiv S|\phi\rangle_{in} . \quad (2.3)$$

Então a amplitude de transição a partir de um estado inicial $|\phi\rangle_{in}$ a um estado final $|\psi\rangle_{out}$: \mathcal{A} , é por definição:

$$\mathcal{A}(|\phi\rangle_{in}, |\psi\rangle_{out}) = (|\psi\rangle_{out}, S|\phi\rangle_{in}) \stackrel{ou}{=} \langle \psi | S | \phi \rangle_{in} . \quad (2.4)$$

Usualmente a *Matriz-S* e o *operador de dispersão* S são considerados como um mesmo objeto; mas como vemos são conceitos diferentes, contudo intimamente vinculados. Ao longo da tese usaremos ambos indistintamente.

A Teoria de Perturbação Causal de Epstein-Glaser é na verdade uma teoria perturbativa do *operador de dispersão* S . Os autores tomaram como base alguns dos passos da formulação perturbativa de Bogoliubov [20], em especial a introdução de uma função g definida no espaço-tempo* tal que $g(x) \in [0, 1]$. Esta função tem como rol “switching on”, “parcialmente switching on” ou “switching off”, a interação em diferentes regiões do espaço-tempo, dependendo como está definida. Se numa região dada: $g(x) = 0$ a interação é nula, se $0 < g(x) < 1$ a interação é parcialmente “switched on”, e se $g(x) = 1$ a interação é completamente “switched on”.†

Como os estados finais vão depender da intensidade da interação e então dependerão da função g , concluímos que necessariamente o *operador de dispersão* S deva ser um funcional de g :

$$S = S[g] , \quad (2.5)$$

temos assim que S além de ser um operador que age no espaço de Hilbert é uma funcional, e então se diz que S é uma funcional a valor de operador.

É interessante observar que como temos a liberdade de escolha da função g , o operador de dispersão é definida inclusive em regiões anteriores ao instante inicial e posteriores ao instante final.

Se escolhermos $g = 0$ em todo o espaço-tempo a interação é totalmente cancelada, então podemos afirmar que o sistema é livre. Neste caso teremos que:

$$S[0] = I , \quad (2.6)$$

onde I é o operador identidade. Este é o ponto de partida da proposta perturbativa.

*Nós usaremos o sistema coordenado de Minkowski: (x^0, x^1, x^2, x^3) ; mas também é possível usar as coordenadas do cone de luz: (x^+, x^1, x^2, x^-) .

†A existência desta função é conhecida como a *hipótese adiabática da interação*.

Se agora escolhermos $g(x) \neq 0$ só numa região finita o suficiente, do espaço-tempo, tal que possamos considerar que: o operador de dispersão $S[g]$ pode ser escrito como a seguinte série perturbativa:

$$S[g] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) g(x_1) g(x_2) \dots g(x_n), \quad (2.7)$$

onde podemos identificar a quantidade T_n como uma distribuição a valor de operador e $g^{\otimes n}$ sua função de teste. Para garantir a existência das expressões no espaço dos momentos consideraremos que a função de teste g pertence ao espaço de Schwartz $\mathcal{J}(M^4)$. O fator $\frac{1}{n!}$ faz referência à clara propriedade de simetria que deve ter $T_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ por permutações de suas variáveis

$$T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = T_n(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)}), \quad (2.8)$$

onde $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \mapsto \{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)\}$ é uma permutação qualquer.

A priori não podemos garantir a convergência da série (2.7) para qualquer função g , mas se os termos T_n são distribuições bem definidas, podemos garantir a finitude ou convergência de cada termo da série, isto quer dizer que a teoria é livre de divergências UV.

Como $0 \leq g(x) \leq 1$, podemos considerar a função g como um agente externo; como vimos, temos por um extremo a solução identidade para $g = 0$. A solução considerada pela TPC é no caso em que o sistema é deixado em total liberdade, isto é quando $g \rightarrow 1$ e se esse limite existe (é adiabático) simultaneamente obteremos uma teoria livre de divergências IR. A existência do limite adiabático deve ser provado na TPC. E é neste limite que temos contato com as condições de contorno assintóticas, as quais introduziremos na seguinte seção.

Finalmente, temos claro que se entende como programa perturbativo da TPC ao mecanismo que permite encontrar cada um dos termos da série (2.7). Esse mecanismo é conhecido como *construção indutiva causal*. Os passos desse mecanismo podem ser deduzidos quando introduzimos na teoria condições e princípios físicos na forma de axiomas.

Na seguinte seção apresentaremos em detalhe cada um dos axiomas da TPC.

2.3 Axiomas da Teoria de Perturbação Causal

Nesta seção introduziremos os axiomas da TPC, tal como foi mencionado na introdução estes são:

- Os princípios físicos:

Causalidade, introduzida por Stueckelberg na teoria da *Matriz-S* [15].

Invariância relativística, introduzida por Wigner para qualquer teoria quântica [16].

- As condições:

De contorno assintoticamente livre, a qual nos permite usar resultados da teoria de campos livres quantizados.

De termo base ou interação, necessário no método indutivo.

Ter a *Matriz-S* como uma funcional da função de teste g permite introduzir com grande elegância e clareza os princípios físicos, tal como podemos encontrar no livro de N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov [20]. A partir desses axiomas, rapidamente, conseguiremos deduzir propriedades para as distribuições T_n .

As condições serão apresentadas num só axioma, permitindo-nos apresentá-las em uma unidade porque ambas têm o propósito de delimitar o método indutivo.

Esses axiomas são necessários e suficientes para estabelecer o programa perturbativo da TPC, adicionar outros nós pode trazer sérias dificuldades*. Outras propriedades e condições físicas serão *demonstradas* no capítulo 6.

2.3.1 Causalidade

A ideia de causalidade que adotaremos é a que faz referência a um ordenamento dos eventos por meio de um parâmetro[†] t : *o tempo*. Assim, eventos localizados no espaço-tempo separados por este parâmetro serão ordenados segundo a direção de evolução dele.

Em nossa teoria axiomática da *Matriz-S*, onde a interação é regulada pela função g , definiremos uma relação de causalidade segundo a relação entre os suportes de diferentes funções de teste. Sejam as funções de teste $g_1, g_2 \in \mathcal{J}(M^4)$ com suportes definidos dentro de regiões disjuntas do espaço-tempo, dizemos que o $Supp(g_1)$ é anterior ao $Supp(g_2)$:

$$Supp(g_1) < Supp(g_2) , \quad (2.9)$$

se $\forall x_1 \in Supp(g_1)$ e $\forall x_2 \in Supp(g_2)$ tendo $x_1^0 < x_2^0$ num sistema de referência dado. Daí a relação de causalidade é introduzida por um observador.

Definimos o operador de dispersão do conjunto das regiões de interação como $S[g_1 + g_2]$, sendo os suportes das funções g_1, g_2 separados pelo parâmetro tempo. Uma primeira consequência da causalidade é que podemos definir separadamente os operadores de dispersão $S[g_2], S[g_1]$. Uma segunda consequência se obtém ao considerar a interpretação do operador de dispersão S como um operador de evolução de estados[‡], então teremos duas evoluções

*Como é a propriedade de unitariedade da *Matriz-S*, considerado como axioma na abordagem de Bogoliubov, mas isto causou que essa abordagem não seja finita.

[†]Essa ideia está relacionada à chamada *causalidade primitiva*, vide por exemplo [28]

[‡]Faz evoluir os estados de uma região a outra.

consecutivas ordenadas segundo o parâmetro de evolução:

$$S [g_1 + g_2] = S [g_2] S [g_1] \text{ se } Supp (g_1) < Supp (g_2) , \quad (2.10)$$

esta separação e ordenamento dos eventos expressa a ideia de causalidade na TPC.

Observações:

1. Uma discussão de interesse é com relação à validade de (2.10) em outro sistema de referência, então pode ser que não tenhamos mais a mesma relação entre os suportes e então (2.10) não seja mais válido. Como foi mencionado a intenção é dar enunciados mínimos que proporcionem relações úteis como (2.10), mas é claro que essas podem ser complementadas ao longo do trabalho.
2. Para suportes espacialmente separados $Supp (g_1) \sim Supp (g_2)$, isto é $\forall x_1 \in Supp (g_1)$ e $\forall x_2 \in Supp (g_2)$ com $(x_1 - x_2)^2 < 0$; pode-se encontrar num sistema de referência dado a relação de causalidade:

$$Supp (g_1) < Supp (g_2) \Rightarrow S [g_1 + g_2] = S [g_2] S [g_1] . \quad (2.11)$$

Mas também é possível que em algum outro sistema de referência:

$$Supp (g_1) > Supp (g_2) \Rightarrow S [g_1 + g_2] = S [g_1] S [g_2] . \quad (2.12)$$

A validade "simultânea" de ambas relações implica que:

$$[S [g_1] , S [g_2]] = 0 \text{ se } Supp (g_1) \sim Supp (g_2) . \quad (2.13)$$

3. Para o caso em que os suportes sejam temporalmente separados, isto é $\forall x_1 \in Supp (g_1)$ e $\forall x_2 \in Supp (g_2)$ com $(x_1 - x_2)^2 > 0$; supondo que num sistema de referência $Supp (g_1) < Supp (g_2)$, então

$$S [g_1 + g_2] = S [g_2] S [g_1] , \quad (2.14)$$

esta relação também será válida em qualquer sistema de referência.

Para obter relações úteis que contribuam na formulação do programa indutivo, substitui-se as séries perturbativas da *Matriz-S*, (2.7), na relação de causalidade (2.10):

Relação de Causalidade das Distribuições T_n .- O método direto seria substituir as séries perturbativas dos operadores $S [g_1 + g_2]$, $S [g_2]$, $S [g_1]$ na relação de causalidade (2.10); mas

primeiro vamos reordenar a série associada a $S[g_1 + g_2]$

$$\begin{aligned}
& S[g_1 + g_2] \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n T_n(x_1, \dots, x_n) [g_1(x_1) + g_2(x_1)] \dots [g_1(x_n) + g_2(x_n)] \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n T_n(x_1, \dots, x_n) \\
&\quad \cdot \left[\sum_{\sigma} g_2(x_{j_1}) \dots g_2(x_{j_m}) g_1(x_{j_{m+1}}) \dots g_1(x_{j_n}) \right], \tag{2.15}
\end{aligned}$$

onde a soma \sum_{σ} não contempla permutações dentro dos grupos de índices $\{j_1, \dots, j_m\}$ e $\{j_{m+1}, \dots, j_n\}$. Sendo sempre possível renomear as variáveis de integração e da propriedade de simetria por permutações de $T_n(x_1, \dots, x_n)$, podemos reescrever $S[g_1 + g_2]$ como:

$$\begin{aligned}
S[g_1 + g_2] &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n T_n(x_1, \dots, x_n) \\
&\quad \times \left[\sum_{m=1}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} g_2(x_1) \dots g_2(x_m) g_1(x_{m+1}) \dots g_1(x_n) \right] \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Daqui:

$$\begin{aligned}
S[g_1 + g_2] &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \\
&\quad \times \int dx_1 \dots dx_n T_n(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \\
&\quad \cdot g_2(x_1) \dots g_2(x_m) g_1(x_{m+1}) \dots g_1(x_n). \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Segundo, substituímos as séries perturbativas associadas a $S[g_2]$ e $S[g_1]$ no produto $S[g_2] S[g_1]$:

$$\begin{aligned}
S[g_2] S[g_1] &= \left\{ 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \int dx_1 \dots dx_p T_p(x_1, \dots, x_p) g(x_1) \dots g(x_p) \right\} \\
&\quad \times \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \int dx_1 \dots dx_q T_q(x_1, \dots, x_q) g(x_1) \dots g(x_q) \right\}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Agrupando

$$\begin{aligned}
S[g_2] S[g_1] &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \\
&\quad \times \int dx_1 \dots dx_n T_m(x_1, \dots, x_m) T_{n-m}(x_{m+1}, \dots, x_n) \\
&\quad \cdot g_2(x_1) \dots g_2(x_m) g_1(x_{m+1}) \dots g_1(x_n). \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Agora sim, substituímos $S[g_1 + g_2]$ e o produto $S[g_2] S[g_1]$ na relação de causalidade (2.10), obteremos por comparação a relação de causalidade para a distribuição T_n :

$$T_n(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = T_m(x_1, \dots, x_m) T_{n-m}(x_{m+1}, \dots, x_n), \tag{2.20}$$

sempre que $\{x_1, \dots, x_m\} > \{x_{m+1}, \dots, x_n\}$ * num referencial dado.

Se usássemos consecutivamente a relação de causalidade (2.20) obteríamos a relação causal da distribuição T_n em termos da distribuição T_1 . assim por exemplo para T_2 :

$$T_2(x_1, x_2) = T_1(x_1) T_1(x_2) \text{ se } x_1^0 > x_2^0. \quad (2.21)$$

E em geral:

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = T_1(x_1) T_1(x_2) \dots T_1(x_n) \text{ se } x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_n^0. \quad (2.22)$$

Esta definição é conhecida como *produto causalmente ordenado*, e é bem definida porque não temos produtos num mesmo ponto (numa mesma variável). Nas teorias usuais se introduz a função degrau ou θ -Heaviside o que, como mencionamos na introdução, em alguns casos nos leva às divergências UV. Para mais detalhes fazamos a seguinte observação:

- *Produtos Temporalmente Ordenados.*- Passos similares a nossa dedução da relação de causalidade de T_n foram realizados pela primeira vez por Bogolubov [20], mas como em sua formulação foi introduzida a função θ -Heaviside; então concluiu que T_n pode-se escrever como:

$$\begin{aligned} T_n(x_1, \dots, x_n) &= \mathcal{T} [T_1(x_1) \cdots T_1(x_n)] \\ &= \sum_{\pi} \theta(x_{\pi(1)}^0 - x_{\pi(2)}^0) \cdots \theta(x_{\pi(n-1)}^0 - x_{\pi(n)}^0) T_1(x_{\pi(1)}) \cdots T_1(x_{\pi(n)}) . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Esta definição conhecida como *produto temporalmente ordenado*, é também obtida nas TQC usuais. Na continuação, mostraremos um exemplo em que se obtém uma divergência.

Analisaremos o produto entre a função θ -Heaviside e a distribuição δ -Dirac no caso unidimensional: $\theta(x) \delta(x)$. Faremos esta análise no espaço dos momentos, para isso precisaremos das expressões de cada uma das distribuições nesse espaço, o que se entende como suas transformadas de Fourier, para a δ -Dirac:

$$\mathcal{F}\{\delta\}(k) = \hat{\delta}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int dx \delta(x) e^{ikx} = (2\pi)^{-1/2} . \quad (2.24)$$

Como a função degrau $\theta(x)$ não é absolutamente integrável sua transformada de Fourier não existe. Para definir sua transformada consideremos em vez de $\theta(x)$, a função $\theta(x) e^{-\varepsilon x}$ e logo fazemos o limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\theta\}(k) &= \hat{\theta}(k) = (2\pi)^{-1/2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int dx \theta(x) e^{ikx - \varepsilon x} = - (2\pi)^{-1/2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{ie^{ikx - \varepsilon x}}{k + i\varepsilon} \Big|_0^\infty \\ &= (2\pi)^{-1/2} \frac{i}{k + i0^+} , \end{aligned} \quad (2.25)$$

*Aqui $>$ indica a relação causal $x_i^0 > x_j^0$ para $i = 1, \dots, m$ e $j = m + 1, \dots, n$

vemos que $\hat{\theta}(k)$ é uma distribuição e está relacionada à distribuição de valor principal de Cauchy $P\frac{1}{k}$ e a $\delta(k)$.^{*} A seguir calculemos a transformada de Fourier do produto:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}\{\theta\delta\}(k) \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int dx \theta(x) \delta(x) e^{ikx} \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int dx e^{ikx} \left[(2\pi)^{-1/2} \int dk' \hat{\theta}(k') e^{-ik'x} \right] \left[(2\pi)^{-1/2} \int dk'' \hat{\delta}(k'') e^{-ik''x} \right] \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int dk' \hat{\theta}(k') (2\pi)^{-1} \int dx e^{-i(k'+k''-k)x} .
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Identificando a transformada inversa de $\hat{\delta}$:

$$(2\pi)^{-1} \int dx e^{-i(k'+k''-k)x} = \delta(k' + k'' - k) , \tag{2.27}$$

obtemos finalmente:

$$\mathcal{F}\{\theta\delta\}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int dk' \hat{\theta}(k') \hat{\delta}(k - k') = (2\pi)^{-3/2} \int dk' \frac{i}{k' + i0^+} , \tag{2.28}$$

que é divergente e conhecida como *divergência UV logarítmica*. Vemos que os problemas UV surgem quando consideramos o produto de distribuições num mesmo ponto, o que *a priori* não é bem definida; este problema é superado na Teoria de Perturbação Causal como veremos nas seguintes seções.

2.3.2 Condições de Contorno e Base Indutiva

O observador da colisão considera que para o sistema físico nas regiões do espaço-tempo onde $t \rightarrow \pm\infty$, as partículas que a conformam são livres; se diz que *o sistema é assintoticamente livre no contorno* $t \rightarrow \pm\infty$. Nessas regiões podemos afirmar que os espaços \mathcal{F}_{in} , \mathcal{F}_{out} são espaços de Fock de partículas livres, e podem ser construídos a partir do vácuo pelos operadores de campo correspondentes às partículas livres do sistema. Como, por exemplo, para um sistema de fótons e férmions livres consideramos os campos: $\{A_\mu\}$, $\{\psi, \bar{\psi}\}$ respectivamente.

Esta hipótese é trivial se considerarmos que o suporte de g pertence a uma região finita do espaço-tempo, mas este axioma considera sua validade ainda no caso em que não tenhamos o agente externo repressor, $g \rightarrow 1$, daí sua validade no limite adiabático.

Mas neste limite a série perturbativa da *Matriz-S* terá a forma:

$$S[1] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^n S_n , \tag{2.29}$$

^{*}Para mais detalhes sob essas distribuições e suas propriedades vide o Apêndice A

onde e representa a(s) contante(s) de interação ou acoplamento. A validade da série agora dependerá da *intensidade da interação*; no caso da eletrodinâmica, temos que $e^2 \approx 1/137$ o que faz razoável a expansão perturbativa nesse limite adiabático*.

Nessa condição, também esta inclusa a hipótese de que a *teoria é completamente determinada pelos operadores de campo livre*. Portanto o termo base da contração indutiva é expressa em termos desses operadores; e sua forma é escolhida tal que no limite adiabático a série perturbativa da TPC seja concordante na ordem do termo base com as séries obtidas nas teorias usuais.

A *base indutiva* da contração indutiva é o termo não trivial de menor ordem da série perturbativa (2.7), isto é, a distribuição a valor de operador: T_1 , e tendo a forma†:

$$T_1(x) = i : \mathcal{L}_{int} : , \quad (2.30)$$

onde \mathcal{L}_{int} é a lagrangiana de interação, e os símbolo $: :$ indica que está normalmente ordenado, e esta lagrangiana é expressa em termos dos operadores de campo livre.

Nas teorias de gauge a lagrangiana de interação é obtida pelo método de acoplamento mínimo, por exemplo:

- Em QED_4 , como uma teoria de gauge $U(1)$, temos que:

$$T_1(x) = ie : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x) , \quad (2.31)$$

onde e é a constante de acoplamento.

- Em $SQED_4$ temos que a lagrangiana de interação é dada por

$$\mathcal{L}_{int} = -ie \left(\varphi^+ \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi \right) A^\mu + e^2 \varphi^+ \varphi A^\mu A_\mu . \quad (2.32)$$

Para que a série seja uma expansão na potência da constante de acoplamento se considera somente a ordem mais baixa:

$$T_1 = e : \varphi^+ \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi : A^\mu . \quad (2.33)$$

Com essa proposta se consegue deduzir o termo omitido de segunda ordem [30].

Temos assim que complementar a definição de T_1 da seguinte forma; se \mathcal{L}_{int}^{10} é a parte da lagrangiana de interação que considera somente os termos de primeira ordem na constante de acoplamento, então T_1 é definido como:

$$T_1(x) = i : \mathcal{L}_{int}^{10} : . \quad (2.34)$$

Isto se aplica também nos casos:

*A convergência da série é discutível, como foi mostrado por Dyson [29].

†Isto em favor da consistência com as teorias perturbativas conhecidas.

- Como a teoria de gauge $SU(N)$ sem matéria:

$$T_1(x) = igf_{abc} \{ : A_{\mu a}(x) A_{\nu b}(x) \partial^\nu A_c^\mu(x) : - : A_{\mu a}(x) u_b(x) \partial^\mu u_c(x) \} , \quad (2.35)$$

onde g é a constante de acoplamento, e os termos da ordem g^2 são omitidos.

Nesta tese vamos considerar o modelo de segunda ordem da eletrodinâmica: a Eletrodinâmica Quântica Generalizada na dimensão 3+1: $GQED_4$. Neste modelo consideraremos como termo de primeira ordem da série perturbativa a:

$$T_1(x) = ie : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x) . \quad (2.36)$$

2.3.3 Invariância Relativística

As invariâncias ou simetrias das partículas elementares foram estudadas pela primeira vez por Wigner [16] no marco da Mecânica Quântica, mas esses resultados se mantêm válidos em TQC.

Na descrição passiva de uma transformação de simetria \mathcal{U} ; temos que para os observadores O e O' , para os quais os espaços de Hilbert assintoticamente livres e o operador de dispersão são $\{\mathcal{F}_{in}, \mathcal{F}_{out}, S\}$ e $\{\mathcal{F}'_{in}, \mathcal{F}'_{out}, S'\}$ respectivamente. Como os espaços de Hilbert são equivalentes devem existir as funções bijetivas U_{in}, U_{out} tal que $U_{in(out)} : \mathcal{F}_{in(out)} \rightarrow \mathcal{F}'_{in(out)}$, agora, introduzirmos a definição do operador de dispersão, obtemos o seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{in} & \xrightarrow{S} & \mathcal{F}_{out} \\ U_{in} \downarrow & & \downarrow U_{out} \\ \mathcal{F}'_{in} & \xrightarrow{S'} & \mathcal{F}'_{out} \end{array}$$

Daqui temos que um estado $|\phi\rangle'_{out} \in \mathcal{F}'_{out}$ pode ser escrito em função de um estado $|\phi\rangle_{in} \in \mathcal{F}_{in}$ de duas formas diferentes, segundo a direção seguida no esquema

$$|\phi\rangle'_{out} = U_{out} S |\phi\rangle_{in} \quad (2.37)$$

$$|\phi\rangle'_{out} = S' U_{in} |\phi\rangle_{in} . \quad (2.38)$$

Por comparação obtemos a relação entre os operadores de dispersão S e S' :

$$S' = U_{out} S U_{in}^{-1} . \quad (2.39)$$

Se os estados assintoticamente livres do sistema para os observadores O e O' são $\{|\phi\rangle_{in}, |\psi\rangle_{out}\}$ e $\{|\phi\rangle'_{in}, |\psi\rangle'_{out}\}$ respectivamente; então as funções bijetivas U_{in}, U_{out} representam uma simetria \mathcal{U} se as probabilidades de transição, W , são as mesmas:

$$W(|\phi\rangle_{in}, |\psi\rangle_{out}) = W(|\phi\rangle'_{in}, |\psi\rangle'_{out}) . \quad (2.40)$$

Ou introduzindo o operador de dispersão:

$$|_{out}\langle\psi|S|\phi\rangle_{in}|^2 = |_{out}\langle'\psi|S'|\phi\rangle'_{in}|^2 , \quad (2.41)$$

se diz então que os observadores O e O' são equivalentes.

Substituindo as quantidades de O' em função das quantidades de O :

$$|_{out}\langle\psi|S|\phi\rangle_{in}|^2 = |(U_{out}|\psi\rangle_{out}, U_{out}S|\phi\rangle_{in})|^2 , \quad (2.42)$$

ou

$$|(|\psi\rangle_{out}, |\phi\rangle_{out})|^2 = |(U_{out}|\psi\rangle_{out}, U_{out}|\phi\rangle_{out})|^2 . \quad (2.43)$$

Dessa última, temos que a condição de simetria é satisfeita se $U_{out} : \mathcal{F}_{out} \rightarrow \mathcal{F}'_{out}$ é um mapeamento isométrico (preserva a norma). Vemos que essa é a condição da simetria \mathcal{U} na região assintoticamente livre após a colisão e não precisamos de condições da região assintoticamente livre antes da colisão*.

A transformação de simetria \mathcal{U} na região "out" nos diz que, seguindo o teorema de Wigner[†], embora os estados observados por O' e O sejam diferentes os espaços de Hilbert são os mesmos $\mathcal{F}'_{out} = \mathcal{F}_{out}$, então a função bijetiva U_{out} é um operador. Portanto,

$$(U_{out}|\psi\rangle_{out}, U_{out}|\phi\rangle_{out}) = (|\psi\rangle_{out}, |\phi\rangle_{out}) \quad \text{ou} \quad (U_{out}|\psi\rangle_{out}, U_{out}|\phi\rangle_{out}) = (|\phi\rangle_{out}, |\psi\rangle_{out}) . \quad (2.44)$$

Finalmente obtemos a condição de simetria que é satisfeita se o operador U_{out} é unitário ou antiunitário[‡].

Consideraremos, em especial, o caso em que os espaços de Hilbert assintoticamente livres são iguais, $\mathcal{F}_{in} = \mathcal{F}_{out} = \mathcal{F}$, então os operadores que representam a simetria também são iguais $U_{out} = U_{in} = U$; daí a relação entre os operadores de dispersão S e S' , pela simetria \mathcal{U} , vem dada por:

$$\boxed{S' = USU^{-1} .} \quad (2.45)$$

A continuação apresentaremos as transformações de simetria(próprias) de uma teoria relativística.

*Embora nós houvésemos considerado substituir as quantidades de O em função das quantidades de O' em (2.41), obteríamos o mesmo resultado.

[†]Para uma prova detalhada vide [17].

[‡]Salvo uma fase que pode ser absorvida se em vez de considerar vetores considerarmos a classe de equivalência de vetores (raios).

Invariância Translacional

Essa simetria expressa a *homogeneidade do espaço-tempo*, que é a invariância da teoria pela transformação de translação $x \rightarrow x + a$. Se $S = S[g]$ é o operador de dispersão para o observador O , onde g é a função de teste que ele considera; então o observador transladado O' deve considerar a função de teste g_a , onde $g_a(x) = g(x - a)$, que por definição ele considera como operador de dispersão a $S' = S[g_a]$.

Se denotamos como $U(1, a)$ o operador que representa esta simetria no espaço de Hilbert, \mathcal{F} , das partículas assintoticamente livres; substituindo-a em (2.45) obteremos a relação entre os operadores de dispersão S e S' pela simetria translacional:

$$U(1, a) S[g] U^{-1}(1, a) = S[g_a] \quad \text{onde} \quad g_a(x) = g(x - a) . \quad (2.46)$$

Substituindo a série perturbativa (2.7) nesta relação, encontramos que:

$$U(1, a) T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) U^{-1}(1, a) = T_n(x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a) . \quad (2.47)$$

Sendo assim, que podemos escrever T_n como segue:

$$T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = T_n(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n) . \quad (2.48)$$

Este resultado será de grande utilidade quando descrevamos a teoria no espaço dos momentos.

Invariância de Lorentz

Neste caso estamos considerando a simetria que expressa a *isotropia do espaço* e o *princípio de relatividade* que é a invariância da teoria pela transformação de Lorentz $x \rightarrow \Lambda x$, a qual inclui rotação e boost. Se $S = S[g]$ é o operador de dispersão para o observador O , onde g é a função de teste que ele considera; então o observador O' deve considerar a função de teste g_Λ , onde $g_\Lambda(x) = g(\Lambda^{-1}x)$, que por definição ele considera como operador de dispersão a $S' = S[g_\Lambda]$.

Se denotamos como $U(\Lambda, 0)$ o operador que representa esta simetria no espaço de Hilbert, \mathcal{F} , das partículas assintoticamente livres; substituindo em (2.45), obteremos a relação entre os operadores de dispersão S e S' pela simetria de Lorentz:

$$U(\Lambda, 0) S[g] U^{-1}(\Lambda, 0) = S[g_\Lambda] \quad \text{onde} \quad g_\Lambda(x) = g(\Lambda^{-1}x) . \quad (2.49)$$

Substituindo a série perturbativa (2.7) nessa relação, encontramos que:

$$U(\Lambda, 0) T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) U^{-1}(\Lambda, 0) = T_n(\Lambda x_1, \Lambda x_2, \dots, \Lambda x_n) . \quad (2.50)$$

2.4 Construção Indutiva da *Matriz-S*

O método de indução usual tem como proposta encontrar cada um dos termos da sequência $\{a_n\}_{n \geq 1}$ conhecendo só o termo de menor ordem: a_1 . Para isso procura uma fórmula tal que com ela se consiga passar do termo a_n ao termo a_{n+1} , fórmula que deve ser válida para todo n .

A construção indutiva da Teoria de Perturbação Causal tem também como propósito encontrar cada um dos termos da sequência de distribuições a valor de operadores $\{T_n\}_{n \geq 1}$ conhecendo, por axioma, só o primeiro termo: T_1 ; mas a diferença do método indutivo usual, o termo T_n será encontrado somente se forem encontradas previamente todas as distribuições precedessoras: $\{T_1, \dots, T_{n-1}\}$. Esse método não é direto, se bem que o conjunto $\{T_1, \dots, T_{n-1}\}$ é a base para construir a distribuição T_n , teremos que construir distribuições intermediárias para atingir nosso objetivo, e algumas delas são os termos perturbativos do operador de dispersão inverso: S^{-1} .

- **Operador de Dispersão Inverso:** Como o operador S é bijetivo podemos definir o funcional a valor de operador

$$S^{-1}[g] : \mathcal{F}_{out} \rightarrow \mathcal{F}_{in}, \quad (2.51)$$

conhecido também como *Matriz Inversa*, que deve satisfazer as seguintes relações:

$$S^{-1}[g] S[g] = S[g] S^{-1}[g] = 1. \quad (2.52)$$

Seguindo o mesmo roteiro do operador S , o operador inverso pode ser expandido como a seguinte série perturbativa

$$S^{-1}[g] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \tilde{T}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) g(x_1) g(x_2) \dots g(x_n), \quad (2.53)$$

onde a quantidade \tilde{T}_n é uma distribuição a valor de operador e $g^{\otimes n}$ sua função de teste. Se substituirmos essa série e a série do operador de dispersão (2.7) nas relações acima (2.52) obteremos o seguinte resultado*:

$$\tilde{T}_n(X_n) = \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{P_r} [T_{n_1}(X_1) \dots T_{n_r}(X_r)], \quad (2.54)$$

onde a soma \sum_{P_r} é sobre todas as partições P_r do conjunto $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ em r subconjuntos disjuntos e não vazios: $X_n = \bigcup_{j=1}^r X_j$, $X_j \neq \emptyset$, $|X_j| = n_j$. Desta relação temos que a partir do conjunto $\{T_1, \dots, T_{n-1}\}$ podemos encontrar cada um dos elementos do conjunto $\{\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{n-1}\}$, por exemplo $\tilde{T}_1(x_1) = -T_1(x_1)$.

*Para mais detalhes dessa e de outras propriedades da *Matriz Inversa* vide o Apêndice B.

E quando introduzirmos os princípios gerais, da seção prévia, obteremos as seguintes identidades das distribuições \tilde{T}_n .

Causalidade.-

$$\tilde{T}_n(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \tilde{T}_m(x_1, \dots, x_m) \tilde{T}_{n-m}(x_{m+1}, \dots, x_n), \quad (2.55)$$

se $\{x_1, \dots, x_m\} < \{x_{m+1}, \dots, x_n\}$.

Invariância Relativística.-

$$U(1, a) \tilde{T}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) U^{-1}(1, a) = \tilde{T}_n(x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a) \quad (2.56)$$

$$U(\Lambda, 0) \tilde{T}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) U^{-1}(\Lambda, 0) = \tilde{T}_n(\Lambda x_1, \Lambda x_2, \dots, \Lambda x_n). \quad (2.57)$$

Até este ponto temos que se o conjunto $\{T_1, \dots, T_{n-1}\}$ é conhecido, então podemos considerar como *conjunto base* a

$$\{T_1, \dots, T_{n-1}, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{n-1}\}, \quad (2.58)$$

para construir a distribuição T_n . Esse objetivo é alcançado após a introdução das seguintes distribuições intermediárias de n -pontos: $A'_n(x_1, \dots, x_n), R'_n(x_1, \dots, x_n)$.

- **Distribuições Intermediárias:** Para construir distribuições bem definidas como produto de outras, devemos garantir que não tenhamos produtos num mesmo ponto, na prática, isto é, que este produto seja tensorial ou de variáveis independentes. Então, uma distribuição intermediária bem definida pode ser construída com termos do tipo: $T_p(X) \tilde{T}_{n-p}(Y), \tilde{T}_p(X) T_{n-p}(Y)$ onde $X \cap Y = \emptyset$.

Com esses tipos de produtos obtidos a partir do conjunto base $\{T_1, \dots, T_{n-1}, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{n-1}\}$ construímos distribuições intermediárias de n - pontos tal que a partir deles possamos obter relações de causalidade úteis, por exemplo com respeito ao ponto x_n . Encontramos assim as distribuições intermediárias* bem definidas:

$$A'_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{n-n_1}(Y, x_n) \quad (2.59)$$

$$R'_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{P_2} T_{n-n_1}(Y, x_n) \tilde{T}_{n_1}(X), \quad (2.60)$$

*Também conhecidas como parcialmente avançada (A'), e parcialmente retardada (R').

onde a soma é sobre todas as partições P_2 do conjunto $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ nos subconjuntos disjuntos X, Y tal que $X \neq \emptyset$, e $|X| = n_1 \geq 1$, $|Y| \leq n - 2$. Embora a definição dessas distribuições pareçam arbitrárias, cada uma delas apresentam importante e úteis relações de causalidade respeito a um ponto fixo, que são dadas na forma do seguinte teorema*:

Teorema 1.- *Seja o conjunto $Y = P \cup Q$ tal que $P \neq \emptyset$, $P \cap Q = \emptyset$, $|Y| = n - 1$, e o ponto x tal que $x \notin Y$. Então:*

Se $\{Q, x\} > P$, $|Q| = n_1$, teremos que

$$R'_n(Y, x) = -T_{n_1+1}(Q, x) T_{n-(n_1+1)}(P) \quad (2.61)$$

Se $\{Q, x\} < P$, $|Q| = n_1$, teremos que

$$A'_n(Y, x) = -T_{n-(n_1+1)}(P) T_{n_1+1}(Q, x) \quad (2.62)$$

No caso de distribuições intermediárias de 2-pontos

$$A'_2(x_1, x_2) \equiv \tilde{T}_1(x_1) T_1(x_2) = -T_1(x_1) T_1(x_2) \quad (2.63)$$

$$R'_2(x_1, x_2) \equiv T_1(x_2) \tilde{T}_1(x_1) = -T_1(x_2) T_1(x_1) \quad (2.64)$$

Não é explícita a relação de causalidade, portanto, o teorema só é válido para distribuições intermediárias de mais de 2-pontos.

Com essas distribuições intermediárias e esse teorema, na seguinte seção, definiremos distribuições com conteúdo causal que nos conduziram diretamente a estabelecer o programa perturbativo da TPC : *a construção indutiva.*

2.4.1 Distribuições: Avançada, Retardada e Causal

Introduzamos as versões “completas” das distribuições intermediárias A'_n, R'_n . As extensões naturais que se podem obter, são a chamada *distribuição avançada*

$$A_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{P_2^0} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{n-n_1}(Y, x_n), \quad (2.65)$$

e a *distribuição retardada*

$$R_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{P_2^0} T_{n-n_1}(Y, x_n) \tilde{T}_{n_1}(X), \quad (2.66)$$

*Para uma prova detalhada do teorema vide o Apêndice C.

onde, em ambos casos, a soma é sobre todas as partições P_2^0 do conjunto $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ nos subconjuntos disjuntos X, Y ; mas agora, a diferença das distribuições A'_n e R'_n , consideramos a possibilidade que $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$. Vemos assim que as distribuições* A_n e R_n contêm um termo extra com respeito às distribuições A'_n, R'_n respectivamente; da definição de A_n, R_n temos que

$$A_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{n-n_1}(Y, x_n) + \tilde{T}_0(\emptyset) T_n(x_1, \dots, x_n) \quad (2.67)$$

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_2} T_{n-n_1}(Y, x_n) \tilde{T}_{n_1}(X) + T_n(x_1, \dots, x_n) \tilde{T}_0(\emptyset) . \quad (2.68)$$

Reconhecendo as distribuições intermediárias A'_n, R'_n e como por definição[†] $\tilde{T}_0(\emptyset) = 1$, obtemos as relações

$$A_n(x_1, \dots, x_n) = A'_n(x_1, \dots, x_n) + T_n(x_1, \dots, x_n) \quad (2.69)$$

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = R'_n(x_1, \dots, x_n) + T_n(x_1, \dots, x_n) , \quad (2.70)$$

as quais nos coloca em contato com nosso objetivo: $T_n(x_1, \dots, x_n)$, mas dessas relações só A'_n e R'_n estão diretamente relacionadas com o conjunto base. Devemos então procurar um método indireto que nos leve a encontrar R_n ou A_n . Para vislumbrar esse método analisemos primeiro os suportes de R_n e A_n :

- *Suporte da Distribuição Retardada.*- Se escrevemos a distribuição retardada de n -pontos como: $R_n(Y, x_n)$ onde $Y = (x_1, \dots, x_{n-1})$, então a relação (2.70) pode ser escrita como

$$R_n(Y, x_n) = R'_n(Y, x_n) + T_n(Y, x_n) . \quad (2.71)$$

Introduzindo a partição de Y como: $Y = P \cup Q$ onde $P \cap Q = \emptyset$

$$R_n(P \cup Q, x_n) = R'_n(P \cup Q, x_n) + T_n(P \cup Q, x_n) . \quad (2.72)$$

Se consideramos a relação causal $\{Q, x_n\} > P$, teremos da relação de causalidade (2.20) da distribuição T_n

$$T_n(P \cup Q, x_n) = T(P, \{Q, x_n\}) = T(Q, x_n) T(P) , \quad (2.73)$$

onde são implícitos os índices que indicam a ordem das distribuições.

E se além disso consideramos $P \neq \emptyset$, temos as condições do teorema 1, e então

$$R'_n(P \cup Q, x_n) = -T(Q, x_n) T(P) . \quad (2.74)$$

Portanto, obtemos que

$$R_n(P \cup Q, x_n) = 0 \text{ se } \{Q, x_n\} > P , \forall P \neq \emptyset . \quad (2.75)$$

*Também conhecidas como completamente avançada (A), e completamente retardada (R).

[†]Na verdade é uma notação introduzida para escrever numa só somatória "partições" onde o conjunto total é uma dessas partições.

Este resultado nos diz que para o caso não nulo, nenhuma das variáveis: x_1, \dots, x_{n-1} pode ser anterior a x_n . Como para $n = 2$ o teorema 1 não é válido em princípio não podemos garantir esse resultado para $n = 2$, mas esse caso pode ser demonstrado facilmente usando a definição de R_2 e a relação de causalidade de T_2 :

$$R_2(x_1, x_2) = T_1(x_2) \tilde{T}_1(x_1) + T_2(x_1, x_2) = -T_1(x_2) T_1(x_1) + T_2(x_1, x_2) \quad (2.76)$$

Então para $x_1 > x_2$

$$R_2(x_1, x_2) = -T_1(x_2) T_1(x_1) + T_1(x_2) T_1(x_1) = 0 \quad (2.77)$$

Portanto, (2.10) pode ser estendido para $n = 2$.

É claro que (2.10) não pode ser garantido para qualquer referencial. Mas como as distribuições T e \tilde{T} são invariantes por Lorentz, teremos que

$$\begin{aligned} R_n(\Lambda x_1, \dots, \Lambda x_n) &= \sum_{P_2^0} T_{n-n_1}(\Lambda Y, \Lambda x_n) \tilde{T}_{n_1}(\Lambda X) \\ &= \sum_{P_2^0} U(\Lambda, 0) T_{n-n_1}(Y, x_n) U^{-1}(\Lambda, 0) U(\Lambda, 0) \tilde{T}_{n_1}(X) U^{-1}(\Lambda, 0) \\ &= U(\Lambda, 0) \left\{ \sum_{P_2^0} T_{n-n_1}(Y, x_n) \tilde{T}_{n_1}(X) \right\} U^{-1}(\Lambda, 0) . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Daí a distribuição R_n

$$R_n(\Lambda x_1, \dots, \Lambda x_n) = U(\Lambda, 0) R_n(x_1, \dots, x_n) U^{-1}(\Lambda, 0) , \quad (2.79)$$

é invariante por Lorentz. Portanto, a relação de causalidade (2.75) é válida para qualquer referencial.

Finalmente concluímos que o suporte da distribuição R_n satisfaz a relação:

$$\boxed{\text{Supp} R_n(x_1, \dots, x_n) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(x_n) ,} \quad (2.80)$$

onde $\Gamma_{n-1}^+(x_n) = \{(x_1, \dots, x_n) / x_j \in \bar{V}^+(x_n), \forall j = 1, \dots, n-1\}$, e $\bar{V}^+(x_n)$ é a clausura do cone superior*. Então se diz que $R_n(x_1, \dots, x_n)$ tem *suporte retardado* com respeito a x_n , e é nesse sentido o nome desta distribuição.

- *Suporte da Distribuição Avançada.*- Se escrevemos a distribuição avançada de n -pontos como: $A_n(Y, x_n)$ onde $Y = (x_1, \dots, x_{n-1})$, então a relação (2.69) pode ser escrita como

$$A_n(Y, x_n) = A'_n(Y, x_n) + T_n(Y, x_n) . \quad (2.81)$$

*Este conjunto é definido como: $\bar{V}^+(x_n) = \{y / (y - x_n)^2 \geq 0, y^0 \geq x_n^0\}$.

Introduzindo a partição de Y como: $Y = P \cup Q$ onde $P \cap Q = \emptyset$, e seguindo passos similares ao caso prévio, obteremos que:

$$A_n(P \cup Q, x_n) = 0 \text{ se } \{Q, x_n\} < P, \forall P \neq \emptyset. \quad (2.82)$$

Esse resultado nos diz que para o caso não nulo, nenhuma das variáveis: x_1, \dots, x_{n-1} pode ser posterior a x_n . Similarmente ao caso retardado, podemos mostrar a validade de (2.82) para $n = 2$.

Também temos que (2.82) não é necessariamente válido para qualquer referencial. Mas como as distribuições T e \tilde{T} são invariantes por Lorentz, podemos mostrar que a distribuição A_n

$$A_n(\Lambda x_1, \dots, \Lambda x_n) = U(\Lambda, 0) A_n(x_1, \dots, x_n) U^{-1}(\Lambda, 0), \quad (2.83)$$

é invariante por Lorentz. Portanto, a relação de causalidade (2.82) é válida para qualquer referencial.

Finalmente, concluímos que o suporte da distribuição A_n satisfaz a relação:

$$\boxed{Supp A_n(x_1, \dots, x_n) \subseteq \Gamma_{n-1}^-(x_n)}, \quad (2.84)$$

onde $\Gamma_{n-1}^-(x_n) = \{(x_1, \dots, x_n) / x_j \in \bar{V}^-(x_n), \forall j = 1, \dots, n-1\}$, e $\bar{V}^-(x_n)$ é a clausura do cone inferior*. Então se diz que $A_n(x_1, \dots, x_n)$ tem *suporte avançado* com respeito a x_n , e é nesse sentido que se dá o nome desta distribuição.

Como mencionamos, as distribuições R_n e A_n não podem ser encontradas diretamente a partir do conjunto base, mas das relações (2.69) e (2.70) vemos que a diferença

$$R_n - A_n = R'_n - A'_n, \quad (2.85)$$

sim é possível. Este resultado nos induz a definir à assim chamada *distribuição causal*:

$$D_n(x_1, \dots, x_n) \equiv R'_n(x_1, \dots, x_n) - A'_n(x_1, \dots, x_n), \quad (2.86)$$

que é uma distribuição bem definida e pode ser encontrada diretamente a partir do conjunto base $\{T_1, \dots, T_{n-1}, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{n-1}\}$. E de (2.85) temos que

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = R_n(x_1, \dots, x_n) - A_n(x_1, \dots, x_n). \quad (2.87)$$

*Este conjunto é definido como: $\bar{V}^-(x_n) = \{y / (y - x_n)^2 \geq 0, y^0 \leq x_n^0\}$.

Dessa relação e dos resultados (2.80), (2.84) obtidos para os suportes das distribuições R_n e A_n ; deduzimos que o suporte da distribuição D_n satisfaz a seguinte relação:

$$\text{Supp}D_n(x_1, \dots, x_n) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(x_n) \cup \Gamma_{n-1}^-(x_n) \quad (2.88)$$

Então se diz que $D_n(x_1, \dots, x_n)$ tem *suporte causal* com respeito a x_n , e é nesse sentido que se dá o nome desta distribuição. Em *stricto sensu* (2.88) é demonstrado a partir de sua definição, e então com o uso do teorema 1*, daí que o caso $n = 2$ deve ser provado diretamente, o que faremos no seguinte capítulo para o caso da eletrodinâmica generalizada.

Desse resultado, temos claramente que a distribuição retardada R_n é equivalente à distribuição obtida ao restringir D_n à região $\Gamma_{n-1}^+(x_n)$. Se diz então que a distribuição R_n é *a parte retardada de D_n* . Similarmente A_n é equivalente à distribuição obtida ao restringir D_n à região $\Gamma_{n-1}^-(x_n)$, se diz então que a distribuição A_n é *a parte avançada de D_n* .

O mecanismo que permite definir formalmente a parte retardada ou avançada de D_n é conhecido como *bipartição*; mas para que ele seja estabelecido, devemos previamente conhecer a ordem singular de D_n , o qual trataremos na seguinte seção.

Em resumo, temos que a partir do conjunto base $\{T_1, \dots, T_{n-1}, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{n-1}\}$ podemos encontrar as distribuições A'_n, R'_n e D_n ; e via a bipartição, as distribuições R_n e A_n . Portanto, finalmente conseguimos construir a distribuição T_n ao substituir o par $\{A_n, A'_n\}$ ou o par $\{R_n, R'_n\}$ em[†]

$$T_n = A_n - A'_n \text{ ou } T_n = R_n - R'_n, \quad (2.89)$$

e este último passo fecha o programa perturbativo da TPC.

*Para uma demonstração detalhada vide o Apêndice C.

†Que são as formas equivalentes de (2.69) e (2.70) respectivamente.

Em resumo, o programa perturbativo da TPC pode ser representado no seguinte esquema:

$$\begin{array}{c}
\{T_1, \dots, T_{n-1}\} \\
\Downarrow \\
\{T_1, \dots, T_{n-1}, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{n-1}\} \\
\Downarrow \\
\left\{ \begin{array}{l} A'_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{n-n_1}(Y, x_n) \\ R'_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{P_2} T_{n-n_1}(Y, x_n) \tilde{T}_{n_1}(X) \end{array} \right\} \\
\Downarrow \\
D_n \equiv R'_n - A'_n \\
\Downarrow \\
\text{Bipartição} \\
\Downarrow \\
\{R_n, A_n\} \\
\Downarrow \\
T_n = R_n - R'_n \stackrel{ou}{=} A_n - A'_n
\end{array}$$

2.4.2 Ordem Singular

A ordem singular de uma distribuição é um número inteiro designado a ela. Antes de dar a definição da ordem singular, introduziremos o conceito da parte numérica de uma distribuição a valor de operadores.

Da construção indutiva, temos que a distribuição a valor de operador T_n pode ser obtida a partir do termo base T_1 . Sendo a forma de T_1 um produto normalmente ordenado de operadores de campos livres, e como as distribuições intermediárias são obtidas a partir de produtos; ao aplicar sucessivamente o teorema de Wick e a bipartição, podemos afirmar que T_n terá a forma

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \sum t_n^k(x_1, x_2, \dots, x_n) : \prod \mathcal{O}(x_{k_j}) : , \quad (2.90)$$

onde a somatória contém todas as possíveis contribuições a essa ordem; o termo do extremo direito são os produtos normalmente ordenados dos campos não contraídos no teorema de Wick, a esses termos, chamaremos simplesmente de (operadores de) campos livres. Os termos t_n^k são distribuições numéricas bem definidas que são construídas a partir de combinações lineares e/ou produtos das contrações de campos no teorema de Wick. Se diz que as distribuições t_n^k são a parte numérica de T_n .

Similarmente, podemos introduzir as distribuições numéricas $d_n^k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ como a parte numérica da distribuição causal D_n . Como as distribuições T e \tilde{T} são invariantes por translações,

podemos denotar d_n^k como:

$$d(x) \equiv d_n^k(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n) . \quad (2.91)$$

Como os operadores de campos livres não têm como influir nas propriedades do suporte de uma distribuição a valor de operadores, só sua parte numérica determina seu suporte. Similarmente sua ordem singular é definida como sendo do mesmo valor que a ordem singular de sua parte numérica.

Para dar uma definição clara de ordem singular de uma distribuição numérica, façamos primeiro a seguinte análise:

- **Análise na origem.**- Existem distribuições definidas a partir de funções usuais, então podemos associar a cada ponto de seu suporte um valor* bem definido. Mas existem outro tipo de distribuições nos quais não é possível fazer isso, como, por exemplo na δ -Dirac não é possível associar-lhe um valor na origem. Daí que o produto $\theta(x) \delta(x)$ não seja bem definido.

Um problema similar pode se apresentar ao quer obter, por exemplo, a parte retardada de $d(x)$ simplesmente multiplicando-a por uma função degrau: $\theta(x) d(x)$. Portanto, para obter um mecanismo formal que nos permita extrair a parte retardada ou avançada da distribuição causal, devemos fazer primeiro uma análise que nos permita ter uma ideia do comportamento da distribuição $d(x)$ na origem.

Para isto consideremos a sequência contínua de funções de teste $\{\varphi_\alpha\}$ tal que seus suportes contenham a origem e quando $\alpha \rightarrow 0^+$ o suporte delas seja decrescente. Seja, por exemplo, φ uma função de teste unidimensional com suporte no intervalo $[-1, 1]$, daqui podemos definir as funções de teste φ_α como

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) , \quad (2.92)$$

então elas terão como suporte ao intervalo $[-\alpha, \alpha]$, quando $\alpha \rightarrow 0^+$, satisfazendo as condições impostas à sequência.

Obteremos o comportamento da distribuição $d(x)$ na origem ao analisar a convergência da sequência $\{\langle d, \varphi_\alpha \rangle\}$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$, primeiro observando que cada termo da sequência é equivalente a

$$\langle d, \varphi_\alpha \rangle = \left\langle d(x), \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right\rangle = \alpha^m \langle d(\alpha x), \varphi(x) \rangle , \quad (2.93)$$

onde se d é de ordem n na dimensão $3 + 1$ então $m = 4(n - 1)$. Dessa expressão é claro que para distribuições provenientes de funções, a sequência converge a zero. Mas, para distribuições tipo a δ -Dirac e suas derivadas a convergência não é clara[†]. Para caracterizar esse comportamento introduzimos a função $\rho(\alpha)$ tal que a sequência $\{\rho(\alpha) \langle d, \varphi_\alpha \rangle\}$

*Este pode ser um número ou um operador.

[†]Isto será esclarecido embaixo.

seja convergente não nula. Então as distribuições d serão classificadas segundo as características da função $\rho(\alpha)$.

A partir desta observação é natural introduzir a seguinte definição:

- **Definição 1.**- A distribuição $d(x) \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^m)$ tem uma quase-assintótica $d_0(x)$ em $x = 0$ com respeito a uma função contínua positiva $\rho(\alpha)$, $\alpha > 0$, se o limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) \alpha^m d(\alpha x) = d_0(x) \neq 0, \quad (2.94)$$

existe em $\mathcal{J}'(\mathbb{R}^m)$.

Do ponto de vista pragmático será de grande utilidade ter uma versão dessa definição no espaço dos momentos. Denotemos como \hat{d} à distribuição causal no espaço dos momentos, que é por definição a transformada de Fourier da distribuição d , então se satisfaz a seguinte relação:

$$\langle d(x), \varphi_\alpha(x) \rangle = \langle \hat{d}(p), \check{\varphi}_\alpha(p) \rangle, \quad (2.95)$$

onde $\check{\varphi}_\alpha(p)$ é a transformada inversa de Fourier da função $\varphi_\alpha(x)$, e é uma função de teste bem comportada porque estamos considerando como espaço de funções de teste o espaço de Schwartz. A função de teste $\check{\varphi}_\alpha(p)$ pode ser reescrita como:

$$\check{\varphi}_\alpha(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dx \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{ipx} = (2\pi)^{-m/2} \alpha^m \int dx \varphi(x) e^{i(\alpha p)x} = \alpha^m \check{\varphi}(\alpha p). \quad (2.96)$$

Daqui vemos que quando $\alpha \rightarrow 0^+$, o suporte é crescente; então o análise no espaço de momentos não é na origem senão no "infinito", isto é na região onde $|p_k^{\mu_k}| \rightarrow \infty$. Nesse espaço analisamos também a convergência da sequência $\left\{ \langle \hat{d}, \check{\varphi}_\alpha \rangle \right\}$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$; mas como $\langle d(x), \varphi_\alpha(x) \rangle = \langle \hat{d}(p), \check{\varphi}_\alpha(p) \rangle$, então podemos afirmar que a sequência $\left\{ \rho(\alpha) \langle \hat{d}, \check{\varphi}_\alpha \rangle \right\}$ é convergente não nula, onde a função $\rho(\alpha)$ é a mesma que da versão no espaço de configurações. Portanto *uma distribuição e sua transformada têm a mesma ordem singular*.

Observemos que podemos reescrever cada termo da sequência como:

$$\rho(\alpha) \langle \hat{d}(p), \check{\varphi}_\alpha(p) \rangle = \rho(\alpha) \langle \hat{d}(p), \alpha^m \check{\varphi}(\alpha p) \rangle = \left\langle \rho(\alpha) \hat{d}\left(\frac{p}{\alpha}\right), \check{\varphi}(p) \right\rangle. \quad (2.97)$$

Sendo $\check{\varphi}$ uma função de teste arbitrária não nula, essa última relação nos induz a introduzir a seguinte definição:

- **Definição 2.-** A distribuição $\hat{d}(p) \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^m)$ tem uma quase-assintótica $\hat{d}_0(p)$ em $p = \infty$ com respeito a uma função contínua positiva $\rho(\alpha)$, $\alpha > 0$, se o limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) \hat{d}\left(\frac{p}{\alpha}\right) = \hat{d}_0(p) \neq 0, \quad (2.98)$$

existe em $\mathcal{J}'(\mathbb{R}^m)$.

Como mencionamos no início desta seção a ordem singular é um número inteiro associado à distribuição. É claro que este número deve ser deduzido a partir da forma da função $\rho(\alpha)$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$. Para se ter uma ideia clara dessa forma fazemos a seguinte análise:

- **Análise do comportamento da função $\rho(\alpha)$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$.**- Esse comportamento é vislumbrado ao analisar a distribuição quase-assintótica $\hat{d}_0(p)$ avaliada na função de teste $\check{\varphi}(ap)$, com $a > 0$

$$\langle \hat{d}_0(p), \check{\varphi}(ap) \rangle \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{\alpha}\right), \check{\varphi}(ap) \right\rangle = a^{-m} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{a\alpha}\right), \check{\varphi}(p) \right\rangle, \quad (2.99)$$

então

$$\langle \hat{d}_0(p), \check{\varphi}(ap) \rangle = a^{-m} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{\rho(a\alpha)} \left[\rho(a\alpha) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{a\alpha}\right), \check{\varphi}(p) \right\rangle \right]. \quad (2.100)$$

Como a definição de \hat{d}_0 pode ser escrita como

$$\langle \hat{d}_0(p), \check{\varphi}(p) \rangle \equiv \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \rho(\beta) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{\beta}\right), \check{\varphi}(p) \right\rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(a\alpha) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{a\alpha}\right), \check{\varphi}(p) \right\rangle, \quad (2.101)$$

onde na última igualdade fizemos a mudança $\beta \rightarrow a\alpha$. Identificando essa última em (2.100), obtemos que:

$$\langle \hat{d}_0(p), \check{\varphi}(ap) \rangle = a^{-m} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{\rho(a\alpha)} \langle \hat{d}_0(p), \check{\varphi}(p) \rangle. \quad (2.102)$$

Neste ponto, introduzamos a função ρ_0

$$\rho_0(a) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(a\alpha)}{\rho(\alpha)} = a^{-m} \frac{\langle \hat{d}_0(p), \check{\varphi}(p) \rangle}{\langle \hat{d}_0(p), \check{\varphi}(ap) \rangle}, \quad (2.103)$$

e, seguindo um roteiro similar, podemos mostrar que:

$$\begin{aligned} \langle \hat{d}_0(p), \check{\varphi}(abp) \rangle &\equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{\alpha}\right), \check{\varphi}(b(ap)) \right\rangle \\ &= b^{-m} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{\rho(b\alpha)} \left[\rho(b\alpha) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{b\alpha}\right), \check{\varphi}(ap) \right\rangle \right] \\ &= b^{-m} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{\rho(b\alpha)} \langle \hat{d}_0(p), \check{\varphi}(ap) \rangle. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Identificando a função ρ_0

$$\rho_0(b) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(b\alpha)}{\rho(\alpha)} = b^{-m} \frac{\langle \hat{d}_0(p), \tilde{\varphi}(ap) \rangle}{\langle \hat{d}_0(p), \tilde{\varphi}(abp) \rangle}. \quad (2.105)$$

Desta relação e (2.103), obtemos que

$$\rho_0(a) \rho_0(b) = (ab)^{-m} \frac{\langle \hat{d}_0(p), \tilde{\varphi}(p) \rangle}{\langle \hat{d}_0(p), \tilde{\varphi}(abp) \rangle}. \quad (2.106)$$

Portanto,

$$\rho_0(a) \rho_0(b) = \rho_0(ab). \quad (2.107)$$

Este resultado nos diz que a função ρ_0 é necessariamente uma função potência :

$$\rho_0(a) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(a\alpha)}{\rho(\alpha)} = a^\omega. \quad (2.108)$$

Da análise prévia temos que a função $\rho(\alpha)$, a qual chamaremos de *função contagem de potências*, tem a propriedade de regularidade* em $\alpha = 0$,

$$\rho(\alpha) \rightarrow \alpha^\omega L(\alpha) \quad \text{quando } \alpha \rightarrow 0^+, \quad (2.109)$$

onde $L(\alpha)$ é uma função de variação lenta em $\alpha = 0$, ou “quase-constante”; na prática ela pode ser omitido. Daqui vemos que a função $\rho(\alpha)$ é caracterizada pelo valor de ω .

Resumimos esses resultados na seguinte definição:

- **Definição 3.-** A distribuição $d(x) \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^m)$ é chamada de singular de ordem ω , se esta tem a quase-assintótica $d_0(x)$ em $x = 0$, ou sua transformada de Fourier tem como quase-assintótica a $\hat{d}_0(p)$ em $p = \infty$; com a função contagem de potência $\rho(\alpha)$ satisfazendo

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\rho(a\alpha)}{\rho(\alpha)} = a^\omega, \quad \forall a > 0. \quad (2.110)$$

Essas definições podem ser aplicadas para qualquer distribuição que contenha a origem em seu suporte, como são a parte numérica das distribuições retardada e avançada, denotadas como r e a respectivamente. Para comparar a ordem singular da distribuição causal, retardada e avançada fazemos as seguintes definições: sejam \hat{d}_0 , \hat{r}_0 , \hat{a}_0 suas correspondentes

*Se diz que ρ é de variação regular; para mais detalhes vide [63].

quase-assintóticas; $\omega_d, \omega_r, \omega_a$ suas correspondentes ordens singulares. Como por propriedade $d = r - a$, teremos que:

$$\hat{d}_0(p) = \alpha^{\omega_d - \omega_r} \hat{r}_0(p) - \alpha^{\omega_d - \omega_a} \hat{a}_0(p) \quad (2.111)$$

$$\hat{r}_0(p) = \alpha^{\omega_r - \omega_d} \hat{d}_0(p) + \alpha^{\omega_r - \omega_a} \hat{a}_0(p) \quad (2.112)$$

$$\hat{a}_0(p) = \alpha^{\omega_a - \omega_r} \hat{r}_0(p) - \alpha^{\omega_a - \omega_d} \hat{d}_0(p) , \quad (2.113)$$

quando $\alpha \rightarrow 0^+$. E como as quase-assintóticas são não nulas, uma possibilidade razoável é que todas tenham a mesma ordem singular

$$\omega(D) = \omega(R) = \omega(A) . \quad (2.114)$$

Mas como $d = r - a$, também pode ser possível que:

$$\omega(D) < \omega(R) = \omega(A) . \quad (2.115)$$

No final deste capítulo veremos em que casos teremos cada uma destas possibilidades.

As distribuições são classificadas segundo sua ordem singular como:

- *Distribuições Regulares.*- Se a ordem singular é negativa, $\omega < 0$, como, por exemplo, as funções usuais.
- *Distribuições Singulares.*- Se a ordem singular é não negativa, $\omega \geq 0$, como, por exemplo, a δ -Dirac e suas derivadas.

Exemplos:

1. *Ordem singular de uma função constante.*- Consideremos em particular $d = 1$, para que o limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) \alpha^m d(\alpha x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) \alpha^m , \quad (2.116)$$

seja finito não nulo, será suficiente que $\rho(\alpha) = \alpha^{-m}$, então a ordem singular de uma distribuição constante é:

$$\omega(cte) = -m < 0 , \quad (2.117)$$

portanto, as constantes são distribuições regulares.

2. *Ordem singular das derivadas da δ -Dirac.*- Consideremos o caso genérico $d = D^a \delta(x)$, sendo

$$D^a \equiv \frac{\partial^{a_1 + \dots + a_m}}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_m^{a_m}}, \quad a = a_1 + \dots + a_m , \quad (2.118)$$

onde $\frac{\partial^{a_i}}{\partial x_i^{a_i}} = \prod_{j=0}^3 \frac{\partial^{b_j}}{\partial (x_i^{\mu_j})^{b_j}}$, $a_i = b_0 + \dots + b_3$.

No espaço dos momentos, as derivadas da δ -Dirac podem ser expressas como*

$$\hat{d}(p) = (2\pi)^{-m/2} (-ip)^a, \quad (2.119)$$

daqui

$$\hat{d}\left(\frac{p}{\alpha}\right) = \alpha^{-a} (2\pi)^{-m/2} (-ip)^a. \quad (2.120)$$

Então para que o limite:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) \alpha^{-a} (2\pi)^{-m/2} (-ip)^a, \quad (2.121)$$

seja finito não nulo, será suficiente que $\rho(\alpha) = \alpha^a$, então a ordem singular das derivada genérica da δ -Dirac é:

$$\omega(D^a \delta) = a \geq 0, \quad (2.122)$$

portanto, as derivadas da δ -Dirac são distribuições singulares. Em particular, vemos que a δ -Dirac é de ordem singular $a = 0$.

3. *Ordem singular do propagador causal escalar.*- Essa distribuição na dimensão $3 + 1$ é definida como

$$D_m(x) = \frac{\text{sgn}(x^0)}{2\pi} \left[\delta(x^2) - \frac{m}{2} \frac{\theta(x^2)}{\sqrt{x^2}} J_1(m\sqrt{x^2}) \right], \quad (2.123)$$

onde m é a massa e J_1 é a função de Bessel de primeira ordem, na origem se comporta como

$$J_1(y) = \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2^3 3!} + \dots, \quad y \ll 1, \quad (2.124)$$

então

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 x^2}} J_1(m\sqrt{\alpha^2 x^2}) \rightarrow \frac{m}{2}, \quad \text{quando } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (2.125)$$

Da propriedade de escala da δ -Dirac

$$\delta(\alpha^2 x^2) = \frac{\delta(x^2)}{\alpha^2}, \quad (2.126)$$

teremos finalmente que

$$\alpha^2 D_m(\alpha x) = \alpha^{-2} [\alpha^4 D_m(\alpha x)] \rightarrow \frac{\text{sgn}(x^0)}{2\pi} \delta(x^2) \equiv D_0(x) \neq 0, \quad \text{quando } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (2.127)$$

Sendo pragmáticos $\rho(\alpha) = \alpha^{-2}$, então a ordem singular do propagador causal escalar em dimensão $3 + 1$ é:

$$\omega(D_m) = -2 < 0, \quad (2.128)$$

portanto, é uma distribuição regular.

*Para mais detalhes vide o Apêndice A.

Nas pQFT usuais existe uma quantidade cujo significado é similar à ordem singular, conhecida como *grau de divergência* por contagem de potências de Dyson-Weinberg [24], [25] que é associada às integrais de Feynman no espaço dos momentos, visando o comportamento dos integrandos no infinito. Mas como mostraram A. Aste, G. Scharf e U. Walther em [23], para a polarização de vácuo no modelo de Schwinger, essas quantidades não são necessariamente iguais.

Para fines ilustrativos, reproduziremos parte desse caso paradigmático:

- **Ordem Singular versus Contagem de Potências: o Modelo de Schwinger**

Para o modelo de Schwinger massivo [26], com férmions de massa m . Após o uso do teorema de Wick encontramos que a parte da distribuição causal D_2 que contribui à polarização do vácuo é:

$$D_2^{VP}(x_1 - x_2) = e^2 [P_2^{\mu\nu}(x_1 - x_2) - P_2^{\nu\mu}(x_2 - x_1)] : A_\mu(x) A_\nu(y) : , \quad (2.129)$$

onde $P_1^{\mu\nu}(y) = e^2 \text{tr} [\gamma^\mu S^{(+)}(y) \gamma^\nu S^{(-)}(-y)]$; com $S^{(+)}$ e $S^{(-)}$ são os propagadores fermiônicos de frequência positiva e negativa, respectivamente.

Como o grau de divergência por contagem de potências para QED₂, para grafos de dois pontos, vem dado por

$$w(G) = -2 - \frac{1}{2}f , \quad (2.130)$$

onde f é o número de férmions não contraídos, então para a polarização de vácuo dessa teoria temos que:

$$w(D_2^{VP}) = -2 . \quad (2.131)$$

Agora calcularemos a ordem singular deste caso. Primeiro devemos encontrar a distribuição causal numérica no espaço dos momentos, sendo esta definida como a seguinte transformada de Fourier

$$\hat{d}_2^{\mu\nu}(k) = (2\pi)^{-1} \int d^2z [P_2^{\mu\nu}(z) - P_2^{\nu\mu}(-z)] e^{ikz} . \quad (2.132)$$

Após fazer os cálculos, encontramos que ela tem a forma seguinte:

$$\hat{d}_2^{\mu\nu}(k) = e^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{4m^2}{2\pi} \frac{1}{k^2 \sqrt{1 - 4m^2/k^2}} \text{sgn}(k^0) \theta(k^2 - 4m^2) . \quad (2.133)$$

Segundo a TPC para obter a ordem singular, devemos analisar a seguinte quantidade

$$\begin{aligned} & \hat{d}_2^{\mu\nu} \left(\frac{k}{\alpha} \right) \\ &= e^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{4m^2}{2\pi} \frac{\alpha^2}{k^2 \sqrt{1 - 4\alpha^2 m^2/k^2}} \text{sgn} \left(\frac{k^0}{\alpha} \right) \theta \left(\frac{k^2}{\alpha^2} - 4m^2 \right) \\ &= \frac{e^2}{2\pi} (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \left[\frac{4\alpha^2 m^2}{k^4 \sqrt{1 - 4\alpha^2 m^2/k^2}} \theta(k^2 - 4m^2 \alpha^2) \right] \text{sgn}(k^0) \end{aligned} \quad (2.134)$$

quando $\alpha \rightarrow 0^+$. Vemos então que a parte crítica é encontrar o limite do termo entre colchetes:

$$F(k^2, \alpha) = \frac{4\alpha^2 m^2}{k^4 \sqrt{1 - 4\alpha^2 m^2/k^2}} \theta(k^2 - 4m^2 \alpha^2) . \quad (2.135)$$

Ingenuamente pode-se pensar a primeira vista que

$$\frac{4\alpha^2 m^2}{k^4 \sqrt{1 - 4\alpha^2 m^2/k^2}} \theta(k^2 - 4m^2 \alpha^2) \rightarrow \frac{4\alpha^2 m^2}{k^4} \theta(k^2) , \quad (2.136)$$

o que nos indicaria uma ordem singular de -2 , mas no contexto da teoria de distribuições devemos ter um cuidado maior. Calculemos esse limite considerando a F como uma distribuição.

– *Limite da distribuição F .*– Seja a função g tal que a seguinte integral exista:

$$I = \int_{4m^2}^{\infty} dq \frac{1}{q(q-p^2)} \left(1 - \frac{4m^2}{q}\right)^{-1/2} g(q) . \quad (2.137)$$

Fazendo a mudança de variável $q = \frac{4m^2}{1-y^2}$

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^1 dy \frac{1}{4m^2 - p^2(1-y^2)} g\left(\frac{4m^2}{1-y^2}\right) \\ &= \int_{-1}^1 dy \frac{1}{4m^2 - p^2(1-y^2)} g\left(\frac{4m^2}{1-y^2}\right) . \end{aligned} \quad (2.138)$$

E agora a mudança $y = 1 - 2x$, então

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{m^2 - p^2 x(1-x)} g\left(\frac{m^2}{x(1-x)}\right) . \quad (2.139)$$

Em particular para $g(q) = \frac{q-p^2}{q}$, obtemos que:

$$I = \int_{4m^2}^{\infty} dq \frac{1}{q^2 \sqrt{1 - 4m^2/q}} = \frac{1}{2m^2} . \quad (2.140)$$

Reordenando e fazendo $m \rightarrow \alpha m$, com $\alpha > 0$, encontramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{4\alpha^2 m^2}{q^2 \sqrt{1 - 4\alpha^2 m^2/q}} \theta(q - 4\alpha^2 m^2) = 2 \quad (2.141)$$

Identificando a distribuição δ -Dirac concluímos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F(k^2, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{4\alpha^2 m^2}{q^2 \sqrt{1 - 4\alpha^2 m^2/q}} \theta(q - 4\alpha^2 m^2) = 2\delta(q) . \quad (2.142)$$

Finalmente obtemos o verdadeiro comportamento de $\hat{d}_2^{\mu\nu} \left(\frac{k}{\alpha} \right)$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$:

$$\hat{d}_2^{\mu\nu} \left(\frac{k}{\alpha} \right) \rightarrow \frac{e^2}{\pi} (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \delta(k^2) \operatorname{sgn}(k^0) . \quad (2.143)$$

Sendo pragmáticos $\rho(\alpha) = 1$, então a ordem singular da distribuição $\hat{d}_2^{\mu\nu}$ é 0. Portanto, a ordem singular da polarização de vácuo na dimensão 1 + 1 a 1-loop é

$$\omega(D_2^{VP}) = 0 , \quad (2.144)$$

e então é uma distribuição singular.

Vemos assim que para esse modelo $w(D_2^{VP}) \neq \omega(D_2^{VP})$. Se considerássemos o grau de divergência $w(D_2^{VP}) = -2$ a distribuição seria regular, e como veremos na seguinte seção, não escolher corretos valores de ordem singular pode trazer sérios problemas de indefinição.

2.4.3 Bipartição: Ideia Geral

A bipartição é um mecanismo que nos permite obter a parte retardada ou avançada da distribuição causal. Se $d(x)$ é a parte numérica da distribuição causal, cujo suporte está contido em $\Gamma_{n-1}^+(x_n) \cup \Gamma_{n-1}^-(x_n)$. Esse mecanismo consiste em conseguir formalmente restringir $d(x)$ na região $\Gamma_{n-1}^+(x_n)$ para obter sua parte retardada, ou na região $\Gamma_{n-1}^-(x_n)$ para obter sua parte avançada.

Vamos tentar vislumbrar esse mecanismo, por exemplo, para encontrar a parte retardada. Uma tentativa é multiplicar a distribuição causal por uma função degrau tal que ela seja não nula em $\Gamma_{n-1}^+(x_n)$, mas como mencionamos* anteriormente esse produto pode não ser bem definido. Para superar esta possível dificuldade podemos fazer uso do fato que:

O produto de uma função infinitamente diferenciável ($\in C^\infty$) por uma distribuição é bem definida.

Daqui a ideia é construir uma função do tipo mencionado que simule o comportamento da função degrau, *i.e.* partir da função unidimensional:

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 ; & t \leq 0 \\ < 1 ; & 0 < t \leq 1 \\ 1 ; & 1 \leq t \end{cases} \quad (2.145)$$

onde $\chi(t)$ é uma função C^∞ . Então a função que simula a função degrau unidimensional é: $\chi_\alpha(t) \equiv \chi\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$.

*E mostramos num exemplo ao final da subseção 2.3.1 .

Para estender esta ideia na dimensão $m = 4(n - 1)$, definimos a função infinitamente diferenciável χ_α como

$$\chi_\alpha(x) \equiv \chi\left(\frac{v \cdot x}{\alpha}\right), \quad (2.146)$$

onde $v = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in \Gamma_{n-1}^+(x_n)$. Isto garante valores positivos de $\chi_\alpha(x)$ quando $x \in \Gamma_{n-1}^+(x_n)$ e nulos quando $x \in \Gamma_{n-1}^-(x_n)$, que é uma das características da função degrau desejada. Além desses domínios, não podemos garantir que $\chi_\alpha(x)$ seja nulo, mas isso não é necessário pois o suporte de $d(x)$ está contido em $\Gamma_{n-1}^+(x_n) \cup \Gamma_{n-1}^-(x_n)$.

Finalmente, vemos que uma tentativa do mecanismo que permita encontrar a parte retardada da distribuição causal é tomar o limite da sequência $\{\chi\left(\frac{v \cdot x}{\alpha}\right) d(x)\}$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$, e justamente este limite é a parte retardada:

$$r(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \chi\left(\frac{v \cdot x}{\alpha}\right) d(x). \quad (2.147)$$

Mas devemos provar primeiro a existência deste limite e como uma observação prévia temos que se considerarmos esse limite como

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \chi\left(\frac{v \cdot x}{\alpha}\right) d(x) = \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \chi\left(\frac{v \cdot x}{\alpha}\right) \right] d(x), \quad (2.148)$$

voltaríamos ao possível problema de indefinição. Esse limite deve ser considerado no contexto das distribuições e para provar sua existência tomaremos o critério de Cauchy, que considera inclusive o caso em que o valor do limite não pertence ao espaço de distribuições.

O limite existe no sentido de Cauchy se:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall \alpha, \beta < \delta \text{ e } \alpha, \beta > 0 \Rightarrow \|\chi_\beta d - \chi_\alpha d\| < \varepsilon. \quad (2.149)$$

Ou equivalentemente:

$$\forall a > 1, \forall \alpha < \delta \text{ e } \alpha > 0 \Rightarrow \|\chi_{\frac{\alpha}{a}} d - \chi_\alpha d\| < \varepsilon, \quad (2.150)$$

esta expressão tem a vantagem de que podemos fixar a e considerar somente o limite da diferença. Na linguagem das distribuições procuramos o comportamento de

$$\left\langle \psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) d(x), \varphi(x) \right\rangle \text{ quando } \alpha \rightarrow 0^+, \forall \varphi \text{ (função de teste)}, \quad (2.151)$$

onde ψ é uma função definida como $\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \equiv \chi\left(\frac{v \cdot x}{\alpha/a}\right) - \chi\left(\frac{v \cdot x}{\alpha}\right)$, e então pertence a \mathcal{C}^∞ .

Por propriedade temos que:

$$\left\langle \psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) d(x), \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \varphi(x) d(x), \psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right\rangle = \left\langle \varphi(\alpha x) \alpha^m d(\alpha x), \psi(x) \right\rangle. \quad (2.152)$$

Para quando $\alpha \rightarrow 0^+$ temos que:

$$\rho(\alpha) \alpha^m d(\alpha x) \approx d_0(x) \neq 0 \quad (2.153)$$

$$\varphi(\alpha x) \approx \varphi(0) + \alpha [x^1 D^1 \varphi(0)]. \quad (2.154)$$

Daqui:

$$\left\langle \psi \left(\frac{x}{\alpha} \right) d(x), \varphi(x) \right\rangle \approx \varphi(0) \frac{\langle d_0(x), \psi(x) \rangle}{\rho(\alpha)} + \alpha [D^1 \varphi](0) \frac{\langle x^1 d(x), \psi(x) \rangle}{\rho(\alpha)}. \quad (2.155)$$

Lembrando que $\rho(\alpha) \rightarrow \alpha^\omega L(\alpha)$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$, então

$$\left\langle \psi \left(\frac{x}{\alpha} \right) d(x), \varphi(x) \right\rangle \approx \varphi(0) \frac{\langle d_0(x), \psi(x) \rangle}{\alpha^\omega L(\alpha)} + [D^1 \varphi](0) \frac{\langle x^1 d(x), \psi(x) \rangle}{\alpha^{\omega-1} L(\alpha)}. \quad (2.156)$$

Sendo $L(\alpha)$ uma quase-constante (não nula), vemos que quando $\alpha \rightarrow 0^+$, o comportamento será determinado só pelo primeiro termo da expressão acima

$$\left\langle \psi \left(\frac{x}{\alpha} \right) d(x), \varphi(x) \right\rangle \approx \varphi(0) \frac{\langle d_0(x), \psi(x) \rangle}{\alpha^\omega L(\alpha)} \quad (2.157)$$

Daqui vemos dois comportamentos totalmente diferentes correspondentes a $\omega < 0$ e a $\omega \geq 0$, precisamente esta é a razão da classificação das distribuições em regulares e singulares.

Concluimos que a existência ou não do limite (2.147) no sentido de Cauchy vai depender do valor da ordem singular. Portanto, estabeleceremos a bipartição da distribuição causal em dois grandes grupos: *bipartição regular* e *bipartição singular*.

No primeiro, temos garantido a existência do limite e será tratado na seguinte subseção, seguidamente estabeleceremos a bipartição singular, fazendo as modificações necessárias para garantir a existência do limite*.

2.4.4 Bipartição Regular

Nesta seção encontraremos o mecanismo que nos permita encontrar a parte retardada de uma distribuição causal regular. Para esse grupo de distribuições temos que a ordem singular é negativa, $\omega < 0$, considerando esta condição em (2.157) obteremos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left\langle \psi \left(\frac{x}{\alpha} \right) d(x), \varphi(x) \right\rangle = 0, \quad (2.158)$$

para qualquer função de teste φ . Portanto, o limite (2.147) existe no sentido de Cauchy e, agora sim definimos formalmente a parte retardada da distribuição causal $d(x)$ como

$$r(x) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \chi \left(\frac{v \cdot x}{\alpha} \right) d(x), \quad (2.159)$$

*Veremos que a definição deste último não é idêntico ao limite do caso regular.

Neste caso de distribuições regulares podemos considerar este limite como

$$\boxed{r(x) = \theta(v.x) d(x),} \quad (2.160)$$

onde θ é a função degrau. Temos assim que para distribuições regulares não há problemas de indefinição ao multiplicá-las por funções degraus.

Até aqui temos a bipartição bem estabelecida, mas será de grande utilidade ter uma versão dela no espaço dos momentos. Lembrando que uma distribuição no espaço dos momentos é definida como sua transformada de Fourier, então segundo (2.160), a parte retardada no espaço dos momentos, \hat{r} , é definida pela relação:

$$\langle \hat{r}, \check{\varphi} \rangle = \langle \hat{\theta} \hat{d}, \check{\varphi} \rangle, \quad (2.161)$$

onde $\check{\varphi}$ é a transformada inversa de Fourier da função de teste $\varphi(x)$, e a transformada de um produto é definida como proporcional à convolução dos fatores tal como segue

$$\langle \hat{r}, \check{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-m/2} \langle \hat{\theta} * \hat{d}, \check{\varphi} \rangle. \quad (2.162)$$

Usando a definição da convolução:

$$\begin{aligned} \langle \hat{r}(p), \check{\varphi}(p) \rangle &= (2\pi)^{-m/2} \langle \hat{\theta}(k), \langle \hat{d}(p-k), \check{\varphi}(p) \rangle \rangle \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \langle \hat{d}(p-k), \check{\varphi}(p) \rangle \\ &= \left\langle (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \hat{d}(p-k), \check{\varphi}(p) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Por comparação obtemos que a distribuição retardada no espaço dos momentos é dada por:

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \hat{d}(p-k) \quad (2.164)$$

que é equivalente a:

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(p-k) \hat{d}(k). \quad (2.165)$$

Para escrever essa relação explicitamente escolhemos $v = (1, \vec{0}; 0; \dots)$, daí teremos que:

$$\theta(v.x) = \theta(x_1^0). \quad (2.166)$$

Então sua transformada de Fourier é dada por:

$$\hat{\theta}(\kappa) = (2\pi)^{\frac{m}{2}-1} \delta(\vec{\kappa}_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}) \frac{i}{\kappa_1^0 + i0^+}. \quad (2.167)$$

Substituindo em (2.165)

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \int dk_1^0 \frac{\hat{d}(k_1^0, \vec{p}_1, p_2, \dots, p_{n-1})}{p_1^0 - k_1^0 + i0^+}. \quad (2.168)$$

Se fizermos a substituição $k_1^0 = t_1 p_1^0$, obteremos

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_1^0) \int dt_1 \frac{\hat{d}(t_1 p_1^0, \vec{p}_1, p_2, \dots, p_{n-1})}{1 - t_1 + \text{sgn}(p_1^0) i0^+}. \quad (2.169)$$

Até aqui temos um aparente problema de covariância; mas se considerarmos que $p_1 \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$ podemos escolher um sistema de referência tal que $p_1 = (p_1^0, \vec{0})$, então:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_1^0) \int dt_1 \frac{\hat{d}(t_1 p_1^0, \vec{0}, p_2, \dots, p_{n-1})}{1 - t_1 + \text{sgn}(p_1^0) i0^+}. \quad (2.170)$$

E se agora fizermos transformações de boost tal que $(t_1 p_1^0, \vec{0}) \rightarrow (t_1 p_1^0, t_1 \vec{p}_1)$, obteremos que \hat{r} pode ser escrito como

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_1^0) \int dt_1 \frac{\hat{d}(t_1 p_1, p_2, \dots, p_{n-1})}{1 - t_1 + \text{sgn}(p_1^0) i0^+}. \quad (2.171)$$

Encontramos assim uma fórmula de bipartição para o caso em que $p_1 \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$ e para p_2, \dots, p_{n-1} arbitrários, mas se ao invés vez de escolher um vetor v tal que $\theta(v.x) = \theta(x_1^0)$ escolhessemos um v tal que $\theta(v.x) = \theta(x_j^0)$, então a fórmula de bipartição seria

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_j^0) \int dt_j \frac{\hat{d}(p_1, \dots, t_j p_j, \dots, p_{n-1})}{1 - t_j + \text{sgn}(p_j^0) i0^+}, \quad (2.172)$$

e seria válido em $p_j \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$ e para $p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_{n-1}$ arbitrários. Sabemos que com uma função degrau é suficiente para se obter a fórmula de bipartição, como, por exemplo $\theta(x_1^0)$; mas se agregamos outras, por exemplo, na forma $\theta(x_2^0) \theta(x_1^0)$ a região de validade da fórmula de bipartição no espaço dos momentos será mais restrita. Contudo, para obter uma fórmula que não dependa da escolha de uma variável em particular, a conseguiremos esta se ao invés de considerar $\theta(v.x) = \theta(x_1^0)$, considerarmos o produto $\prod_{j=1}^{n-1} \theta(x_j^0)$, e então obtemos a seguinte *fórmula de bipartição*:

$$\hat{r}(p) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{n-1} \text{sgn}\left(\prod_{j=1}^{n-1} p_j^0\right) \int \prod_{j=1}^{n-1} dt_j \left[\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1 - t_j + \text{sgn}(p_j^0) i0^+} \right] \hat{d}(t_1 p_1, \dots, t_{n-1} p_{n-1})$$

(2.173)

que é válida na região $p \in \Gamma_{n-1}^+ \cup \Gamma_{n-1}^-$.

Em particular, para distribuições de segunda ordem teremos que a fórmula de bipartição para qualquer $p \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$ se expressa como segue:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\hat{d}(tp)}{1 - t + \operatorname{sgn}(p_0) i0^+}, \quad (2.174)$$

e que pode ser identificada como uma *relação de dispersão sem subtração*.

É interessante observar que usualmente \hat{d} apresenta certa simetria com respeito ao origem, então a fórmula de bipartição pode ser reescrita convenientemente para os seguintes casos:

- Se \hat{d} é par.- Teremos que $\hat{d}(tp)$ é par em t , então:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(p_0) \int_0^{\infty} dt \left[\frac{1}{1 - t + \operatorname{sgn}(p_0) i0^+} + \frac{1}{1 + t + \operatorname{sgn}(p_0) i0^+} \right] \hat{d}(tp). \quad (2.175)$$

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(p_0) \int_0^{\infty} dt \frac{2\hat{d}(tp)}{1 - t^2 + \operatorname{sgn}(p_0) i0^+}. \quad (2.176)$$

- Se \hat{d} é ímpar.- Teremos que $\hat{d}(tp)$ é ímpar em t , então:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(p_0) \int_0^{\infty} dt \left[\frac{1}{1 - t + \operatorname{sgn}(p_0) i0^+} - \frac{1}{1 + t + \operatorname{sgn}(p_0) i0^+} \right] \hat{d}(tp). \quad (2.177)$$

Portanto, nesse caso:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(p_0) \int_0^{\infty} dt \frac{2t\hat{d}(tp)}{1 - t^2 + \operatorname{sgn}(p_0) i0^+}. \quad (2.178)$$

Lembremos que essas fórmulas de bipartição são para os casos de distribuições regulares, isto é, distribuições com ordem singular negativa. Mas se essas fórmulas são usadas em distribuições singulares o resultado pode trazer sérios problemas. Para ilustrar este erro encontraremos a parte retardada da polarização do vácuo no modelo de Schwinger segundo o grau de divergência por contagem de potências.

• **Bipartição segundo a Contagem de Potências no Modelo de Schwinger**

Voltando ao caso da distribuição causal associado à polarização do vácuo no modelo de Schwinger massivo:

$$\hat{d}_2^{\mu\nu}(k) = e^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{4m^2}{2\pi} \frac{1}{k^2 \sqrt{1 - 4m^2/k^2}} \text{sgn}(k^0) \theta(k^2 - 4m^2) . \quad (2.179)$$

Se considerarmos como ordem singular ao grau de divergência $w(D_2^{VP}) = -2$, para encontrar a distribuição retardada $\hat{r}_2^{\mu\nu}(k)$ teríamos que aplicar a bipartição para distribuições regulares. Sendo $\hat{d}_2^{\mu\nu}$ ímpar teríamos que aplicar a seguinte fórmula:

$$\hat{r}_2^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \int_0^\infty dt \frac{2t \hat{d}_2^{\mu\nu}(tk)}{1 - t^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} . \quad (2.180)$$

Substituindo a distribuição causal:

$$\begin{aligned} \hat{r}_2^{\mu\nu}(k) &= \frac{ie^2 m^2}{\pi^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \text{sgn}(k_0) \\ &\times \int_0^\infty dt \frac{2t}{1 - t^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} \frac{\text{sgn}(tk_0) \theta(t^2 k^2 - 4m^2)}{t^2 k^2 \sqrt{1 - 4m^2/t^2 k^2}} , \end{aligned} \quad (2.181)$$

e como $\text{sgn}(tk_0) = \text{sgn}(k_0) \text{sgn}(t)$ e, fazendo a substituição $s = t^2$

$$\hat{r}_2^{\mu\nu}(k) = \frac{ie^2 m^2}{\pi^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \int_{\frac{4m^2}{k^2}}^\infty ds \frac{1}{s(1-s + \text{sgn}(k_0) i0^+)} \frac{1}{k^2 \sqrt{1 - 4m^2/sk^2}} \quad (2.182)$$

Após os cálculos obteremos a distribuição retardada que é:

$$\hat{r}_2^{\mu\nu}(k) = \frac{ie^2 m^2}{\pi^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 \sqrt{1 - 4m^2/k^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - 4m^2/k^2} + 1}{\sqrt{1 - 4m^2/k^2} - 1} , \quad (2.183)$$

$k^2 > 4m^2, k^0 > 0$. No limite de férmions sem massa $m \rightarrow 0$

$$\hat{r}_2^{\mu\nu}(k) \approx \frac{ie^2}{\pi^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{m^2}{k^2} \left[-\ln \left(-\frac{m^2}{k^2} \right) \right] \rightarrow 0 , \quad (2.184)$$

esta quantidade é nula o que indica a persistência da masa nula do fóton nesta teoria. Esse resultado não é concordante com a dinâmica do modelo, a qual indica uma geração dinâmica de massa para o fóton [26].

2.4.5 Bipartição Singular

Agora encontraremos a fórmula de bipartição que permita obter a parte retardada de uma distribuição causal singular. Nesse grupo de distribuições, suas ordens singulares são não negativas, $\omega \geq 0$, considerando isso em (2.157) obteremos que em geral:

$$\left\langle \psi \left(\frac{x}{\alpha} \right) d(x), \varphi(x) \right\rangle \approx \varphi(0) \frac{\langle d_0(x), \psi(x) \rangle}{\alpha^\omega L(\alpha)} \text{ diverge quando } \alpha \rightarrow 0^+ . \quad (2.185)$$

Portanto, podemos afirmar que o limite:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \chi \left(\frac{v \cdot x}{\alpha} \right) d(x) , \quad (2.186)$$

não existe no sentido de Cauchy para qualquer função de teste.

A chave, para resolver esta dificuldade, esta na última frase. Isto é, que o limite poderia existir num certo espaço de funções de teste, por exemplo, se $\varphi(0) = 0$, obteríamos aparentemente a existência do limite. Para vislumbrar a solução formal olhemos com maior detalhe a dedução da relação (2.157), tínhamos que:

$$\left\langle \psi \left(\frac{x}{\alpha} \right) d(x), \varphi(x) \right\rangle = \langle \varphi(\alpha x) \alpha^m d(\alpha x), \psi(x) \rangle . \quad (2.187)$$

Então poderíamos considerar que:

$$\left\langle \psi \left(\frac{x}{\alpha} \right) d(x), \varphi(x) \right\rangle \approx \frac{\langle \varphi(\alpha x) d_0(x), \psi(x) \rangle}{\alpha^\omega L(\alpha)} \text{ quando } \alpha \rightarrow 0^+ . \quad (2.188)$$

Daqui vemos que se $\varphi(\alpha x)$ tivesse um comportamento conveniente quando $\alpha \rightarrow 0^+$ poderíamos garantir a existência desse limite no sentido de Cauchy. Para garantir uma escolha formal desse subespaço de funções de teste que queremos construir, consideremos o seguinte teorema de distribuições singulares unidimensionais:

Teorema 2.- *Se $f(t)$ é uma distribuição de suporte pontual de ordem singular $\omega \geq 0$, se cumpre que:*

$$\langle f(t), \varkappa(t) \rangle = 0 \quad \leftrightarrow \quad \varkappa(t) = t^{\omega+1} \phi(t) . \quad (2.189)$$

Daqui podemos deduzir que nosso problema é resolvido se ao invés de considerarmos qualquer função de teste $\varphi(x)$ considerássemos a função de teste $\varkappa(x)$ tal que esta última tivesse a forma:

$$\varkappa(x) = x^{\omega+1} \phi(x) , \quad (2.190)$$

onde $x^{\omega+1} = x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}$ com $\omega + 1 = a_1 + \cdots + a_m$ e, sendo $x_i^{a_i} = \prod_{j=0}^3 (x_i^{\mu_j})^{b_j}$ com $a_i = b_0 + \cdots + b_3$. Substituindo em (2.188) obteríamos que

$$\left\langle \psi \left(\frac{x}{\alpha} \right) d(x), \varkappa(x) \right\rangle \approx \alpha \frac{\langle x^{\omega+1} \phi(\alpha x) d_0(x), \psi(x) \rangle}{L(\alpha)} \text{ quando } \alpha \rightarrow 0^+ . \quad (2.191)$$

Portanto, podemos afirmar que o limite:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left\langle \chi \left(\frac{v \cdot x}{\alpha} \right) d(x), \varkappa(x) \right\rangle, \quad (2.192)$$

existe no sentido de Cauchy para qualquer função de teste $\varkappa(x)$ da forma (2.190).

Mas agora enfrentamos uma aparente perda de generalidade. Para atingir esse problema, lembremos que temos a liberdade de estabelecer o mecanismo de bipartição, sempre que este seja formal, portanto, uma solução é incluir no mecanismo a restrição do espaço de funções de teste. Isto é incluir um operador projetor \mathcal{W} tal que

$$\mathcal{W} : \varphi \longmapsto \varkappa. \quad (2.193)$$

Para conseguir definir esse projetor devemos considerar uma certa caracterização do comportamento das funções de teste \varkappa . Encontrando-a no seguinte lema de funções de teste unidimensionais:

Lema 1.- *Seja $\varkappa(t) \in \mathcal{D}$, logo:*

$$\exists \phi(t) \in \mathcal{D} / \varkappa(t) = t^{\omega+1} \phi(t) \leftrightarrow \varkappa^{(\nu)}(0) = 0 ; \nu = 0, \dots, \omega. \quad (2.194)$$

Em nosso caso a leitura seria:

$$\varkappa(t) = t^{\omega+1} \phi(t) \leftrightarrow D^a \varkappa(0) = 0, \quad \forall |a| \leq \omega. \quad (2.195)$$

Considerando essa caracterização, podemos encontrar a definição do projetor \mathcal{W} , de forma similar ao caso unidimensional enunciado no seguinte lema:

Lema 2.- *Seja $w(t) \in \mathcal{D}$ tal que $w(0) = 1$ y $w^{(\nu)}(0) = 0, \nu = 1, \dots, \omega$ e $\varphi(t) \in \mathcal{D}$, $\varkappa(t) \in \mathcal{D}$. Então*

$$\varphi(t) = w(t) \sum_{\nu=0}^{\omega} \frac{1}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(0) t^\nu + \varkappa(t) \leftrightarrow \varkappa^{(\nu)}(0) = 0 ; \nu = 0, \dots, \omega. \quad (2.196)$$

Logo definiremos o operador projeção \mathcal{W} como segue:

$$\mathcal{W}\varphi(x) \equiv \varphi(x) - w(x) \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{1}{a!} D^a \varphi(0) x^a, \quad (2.197)$$

onde $w(x) \in \mathcal{J}(M^m)$ tal que $w(0) = 1$ e $D^\nu w(0) = 0, \nu = 1, \dots, \omega$.

Portanto, definiremos a distribuição retardada $r(x)$, agindo sob uma função de teste qualquer $\varphi(x)$ mediante a relação:

$$\langle r(x), \varphi(x) \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left\langle \chi \left(\frac{v \cdot x}{\alpha} \right) d(x), \mathcal{W}\varphi(x) \right\rangle, \quad (2.198)$$

onde a ação do operador e o limite representam o mecanismo de bipartição neste caso singular.

Agora sim podemos escrever esta relação como

$$\langle r(x), \varphi(x) \rangle = \langle \theta(v.x) d(x), \mathcal{W}\varphi(x) \rangle, \quad (2.199)$$

onde θ é a função degrau. Vemos que, neste caso singular, para que a multiplicação por funções degraus seja bem definida ela não pode ser direta.

Até aqui temos bem estabelecido o mecanismo de bipartição no espaço de configurações, mas será conveniente, do ponto de vista computacional, ter uma versão dele no espaço dos momentos. Sendo \hat{r} a distribuição retardada no espaço dos momentos, teremos que se satisfaz a relação:

$$\langle \hat{r}, \check{\varphi} \rangle = \left\langle \hat{\theta} * \hat{d}, \check{\mathcal{W}}\varphi \right\rangle. \quad (2.200)$$

Obteremos \hat{r} por comparação ao desenvolver essa relação. Começemos dando a forma explícita de $\check{\mathcal{W}}\varphi$:

- *Transformada inversa de Fourier de $\mathcal{W}\varphi$* , por definição esse toma a forma

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{W}}\varphi(p) &= \mathcal{F}^{-1} \left(\varphi(x) - \sum_{a=0}^{\omega} \frac{1}{a!} x^a w(x) D^a \varphi(0) \right) (p) \\ &= \check{\varphi}(p) - \sum_{a=0}^{\omega} \frac{1}{a!} \mathcal{F}^{-1} [x^a w(x)](p) D^a \varphi(0). \end{aligned} \quad (2.201)$$

Como $\mathcal{F}^{-1} [x^a w(x)] = (iD_p)^a \check{w}(p)$ obtemos que

$$\check{\mathcal{W}}\varphi(p) = \check{\varphi}(p) - \sum_{a=0}^{\omega} \frac{1}{a!} (iD_p)^a \check{w}(p) D^a \varphi(0). \quad (2.202)$$

E como $D^a \varphi(0)$ pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} D^a \varphi(0) &= (-1)^a \langle D^a \delta(x), \varphi(x) \rangle = (-1)^a \left\langle (2\pi)^{-m/2} (-ip')^a, \check{\varphi}(p') \right\rangle \\ &= (2\pi)^{-m/2} \langle (ip')^a, \check{\varphi}(p') \rangle. \end{aligned} \quad (2.203)$$

Substituindo em (2.202)

$$\check{\mathcal{W}}\varphi(p) = \check{\varphi}(p) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{1}{a!} (iD_p)^a \check{w}(p) \langle (ip')^a, \check{\varphi}(p') \rangle. \quad (2.204)$$

Finalmente, obtemos a forma explícita de $\check{\mathcal{W}}\varphi(p)$

$$\check{\mathcal{W}}\varphi(p) = \check{\varphi}(p) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{(-1)^a}{a!} D_p^a \check{w}(p) \langle p'^a, \check{\varphi}(p') \rangle. \quad (2.205)$$

Substituindo esse resultado em (2.200), obtemos que:

$$\begin{aligned}\langle \hat{r}, \check{\varphi} \rangle &= \left\langle \hat{\theta} * \hat{d}, \check{\varphi} - (2\pi)^{-m/2} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{(-1)^a}{a!} [D^a \check{w}] \langle p'^a, \check{\varphi}(p') \rangle \right\rangle \\ &= \langle \hat{\theta} * \hat{d}, \check{\varphi} \rangle - (2\pi)^{-m/2} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{(-1)^a}{a!} \langle \hat{\theta} * \hat{d}, D^a \check{w} \rangle \langle p'^a, \check{\varphi}(p') \rangle .\end{aligned}\quad (2.206)$$

No segundo termo fazemos a mudança $p' \rightarrow p$:

$$\langle \hat{r}, \check{\varphi} \rangle = \langle \hat{\theta} * \hat{d}, \check{\varphi} \rangle - (2\pi)^{-m/2} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{(-1)^a}{a!} \langle \hat{\theta} * \hat{d}, D^a \check{w} \rangle \langle p^a, \check{\varphi}(p) \rangle .\quad (2.207)$$

Agora desenvolveremos $\langle \hat{\theta} * \hat{d}, \check{\varphi} \rangle$ nas variáveis k, p ; e $\langle \hat{\theta} * \hat{d}, D^a \check{w} \rangle$ nas variáveis k, p' :

$$\begin{aligned}\langle \hat{r}, \check{\varphi} \rangle &= (2\pi)^{-m/2} \langle \hat{\theta}(k), \langle \hat{d}(p-k), \check{\varphi}(p) \rangle \rangle \\ &\quad - (2\pi)^{-m} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{(-1)^a}{a!} \langle \hat{\theta}(k), \langle \hat{d}(p'-k), D_{p'}^a \check{w}(p') \rangle \rangle \langle p^a, \check{\varphi}(p) \rangle .\end{aligned}\quad (2.208)$$

Como $\langle \hat{\theta}, \dots \rangle$ pode ser escrito na forma integral, podemos escrever $\langle \hat{r}, \check{\varphi} \rangle$ como:

$$\begin{aligned}\langle \hat{r}, \check{\varphi} \rangle &= (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \langle \hat{d}(p-k), \check{\varphi}(p) \rangle \\ &\quad - (2\pi)^{-m} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{(-1)^a}{a!} \int dk \hat{\theta}(k) \langle \hat{d}(p'-k), D_{p'}^a \check{w}(p') \rangle \langle p^a, \check{\varphi}(p) \rangle .\end{aligned}\quad (2.209)$$

Levando em conta a propriedade de linearidade das distribuições, fatoramos da forma seguinte:

$$\begin{aligned}\langle \hat{r}(p), \check{\varphi}(p) \rangle &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int dk \hat{\theta}(k) \\ &\quad \cdot \left[\langle \hat{d}(p-k), \check{\varphi}(p) \rangle - (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{(-1)^a}{a!} \langle \hat{d}(p'-k), D_{p'}^a \check{w}(p') \rangle \langle p^a, \check{\varphi}(p) \rangle \right] .\end{aligned}\quad (2.210)$$

Para simplificar, consideremos a seguinte propriedade: sejam T, L distribuições numéricas e f, g funções de teste, então

$$\langle T, f \rangle \langle L, g \rangle = \langle \langle T, f \rangle L, g \rangle = \langle \langle L, g \rangle T, f \rangle .\quad (2.211)$$

Portanto, podemos escrever $\langle \hat{r}(p), \check{\varphi}(p) \rangle$ como:

$$\begin{aligned} & \langle \hat{r}(p), \check{\varphi}(p) \rangle \\ = & (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \\ & \cdot \left\langle \hat{d}(p-k) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{(-1)^a}{a!} \left\langle \hat{d}(p'-k), D_{p'}^a \check{w}(p') \right\rangle p^a, \check{\varphi}(p) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.212)$$

E, usando novamente a linearidade

$$\begin{aligned} & \langle \hat{r}(p), \check{\varphi}(p) \rangle \\ = & (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \\ & \cdot \left[\left\langle \hat{d}(p-k), \check{\varphi}(p) \right\rangle - \left\langle (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{(-1)^a}{a!} \left\langle \hat{d}(p'-k), D_{p'}^a \check{w}(p') \right\rangle p^a, \check{\varphi}(p) \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.213)$$

Daqui por comparação obtemos que $\hat{r}(p)$ tem a forma:

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\hat{d}(p-k) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{p^a}{a!} (-1)^a \left\langle \hat{d}(p'-k), D_{p'}^a \check{w}(p') \right\rangle \right], \quad (2.214)$$

que pode ser reescrita se usarmos a definição da derivada de uma distribuição, então

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\hat{d}(p-k) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{p^a}{a!} \left\langle D_{p'}^a \hat{d}(p'-k), \check{w}(p') \right\rangle \right]. \quad (2.215)$$

Se introduzirmos a notação integral de uma distribuição, podemos finalmente escrever a distribuição retardada no espaço dos momentos como segue

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\hat{d}(p-k) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{p^a}{a!} \int dp' D_{p'}^a \hat{d}(p'-k) \check{w}(p') \right] \quad (2.216)$$

Este resultado é claramente parcial devido a sua dependência com a função \check{w} (ou w), que não é completamente determinada.

A proposta é conseguir uma expressão em que esta função \check{w} (ou w) não apareça. Para isso vamos usar a propriedade da não unicidade da bipartição*, isto é, se $\hat{r}(p)$ é uma solução, então podemos construir uma nova solução $\tilde{r}(p)$ como:

$$\tilde{r}(p) = \hat{r}(p) + \sum_{a=0}^{\omega} C_a p^a, \quad (2.217)$$

onde C_a são constantes, por enquanto indeterminadas. Seguindo essa ideia construímos a seguinte solução:

*Vide a seguinte subseção.

Bipartição Central.- Definiremos a solução $\tilde{r}(p) = \hat{r}_q(p)$ tal que:

$$D^b \hat{r}_q(q) = 0 \quad , \quad b \leq \omega \quad , \quad (2.218)$$

conhecida como *condição de normalização*. Fixando q , essa condição nos deve proporcionar uma forma unívoca para $\hat{r}_q(p)$. Primeiro devemos encontrar uma expressão geral para $\hat{r}_q(p)$. A partir dessa condição é possível encontrar o seguinte resultado:

$$\hat{r}_q(p) = \hat{r}(p) - \sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} D_q^b \hat{r}(q) \leftrightarrow D^b \hat{r}_q(q) = 0 \quad , \quad b \leq \omega \quad . \quad (2.219)$$

Como $\hat{r}(p)$ é dado por (2.216), temos praticamente a forma explícita de $\hat{r}_q(p)$, mas primeiro temos que calcular os termos da somatória.

Usando diretamente (2.216), obtemos que

$$\begin{aligned} & D_q^b \hat{r}(q) \\ = & (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \\ & \cdot \left[D_q^b \hat{d}(q-k) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{a=b}^{\omega} \frac{1}{a!} \frac{a!}{(a-b)!} q^{a-b} \int dp' D_{p'}^a \hat{d}(p'-k) \check{w}(p') \right] . \end{aligned} \quad (2.220)$$

Agora a substituímos na somatória

$$\begin{aligned} & \sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} D_q^b \hat{r}(q) \\ = & (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} D_q^b \hat{d}(q-k) \right] \\ & - (2\pi)^{-m} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\sum_{b=0}^{\omega} \sum_{a=b}^{\omega} \frac{1}{a!} \frac{a!}{(a-b)!} q^{a-b} (p-q)^b \int dp' D_{p'}^a \hat{d}(p'-k) \check{w}(p') \right] . \end{aligned} \quad (2.221)$$

Reordenando as somas, usando a propriedade: $\sum_{b=0}^{\omega} \sum_{a=b}^{\omega} t_{b,a} = \sum_{a=0}^{\omega} \sum_{b=0}^a t_{b,a}$, obteremos que

$$\begin{aligned} & \sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} D_q^b \hat{r}(q) \\ = & (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} D_q^b \hat{d}(q-k) \right] \\ & - (2\pi)^{-m} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\sum_{a=0}^{\omega} \frac{1}{a!} \left(\sum_{b=0}^a \frac{a!}{(a-b)!} q^{a-b} (p-q)^b \right) \int dp' D_{p'}^a \hat{d}(p'-k) \check{w}(p') \right] \end{aligned} \quad (2.222)$$

Onde identificamos

$$p^a = [q + (p-q)]^a = \sum_{b=0}^a \frac{a!}{(a-b)!} q^{a-b} (p-q)^b \quad . \quad (2.223)$$

E então:

$$\begin{aligned} & \sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} D_q^b \hat{r}(q) \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \\ & \quad \cdot \left[\sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} D_q^b \hat{d}(q-k) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{1}{a!} p^a \int dp' D_{p'}^a \hat{d}(p'-k) \check{w}(p') \right]. \end{aligned} \quad (2.224)$$

Finalmente substituindo esta expressão e (2.216) em (2.219), obtemos a forma de $\hat{r}_q(p)$

$$\hat{r}_q(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\hat{d}(p-k) - \sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} D_q^b \hat{d}(q-k) \right], \quad (2.225)$$

que é independente de w .

Em princípio esse resultado é válido para qualquer valor de q , que a vamos considerar no caso $q = 0$:

$$\hat{r}_0(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\hat{d}(p-k) - \sum_{b=0}^{\omega} \frac{p^b}{b!} D_q^b \hat{d}(q-k) \Big|_{q=0} \right], \quad (2.226)$$

esta solução é conhecida como *bipartição central*.

Para obter a fórmula de bipartição explícita, procuraremos primeiro a forma equivalente da solução central. Começaremos, escrevendo a solução central como:

$$\hat{r}_0(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \hat{d}(p-k) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{b=0}^{\omega} \frac{p^b}{b!} \int dk \hat{\theta}(k) \left[D^b \hat{d} \right](-k). \quad (2.227)$$

Como $\left[D^b \hat{d} \right](-k) = (-1)^b D_k^b \hat{d}(-k)$ e, integrando por partes o segundo termo

$$\hat{r}_0(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \hat{d}(p-k) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{b=0}^{\omega} \frac{p^b}{b!} \int dk D_k^b \hat{\theta}(k) \hat{d}(-k). \quad (2.228)$$

Fazendo as mudanças de variáveis $k \rightarrow p-k$ e $k \rightarrow -k$ no primeiro e segundo termo, respectivamente:

$$\hat{r}_0(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{d}(k) \hat{\theta}(p-k) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{b=0}^{\omega} \frac{p^b}{b!} \int dk \left[D^b \hat{\theta} \right](-k) \hat{d}(k). \quad (2.229)$$

Agrupando, obtemos a forma equivalente da solução central:

$$\hat{r}_0(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{d}(k) \left\{ \hat{\theta}(p-k) - \sum_{b=0}^{\omega} \frac{p^b}{b!} \left[D^b \hat{\theta} \right](-k) \right\}. \quad (2.230)$$

Agora introduzamos a transformada de Fourier de $\theta(v.x) = \theta(x_1^0)$

$$\hat{\theta}(\kappa) = (2\pi)^{\frac{m}{2}-1} \delta(\vec{\kappa}_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}) \frac{i}{\kappa_1^0 + i0^+}. \quad (2.231)$$

E fazendo a seguinte consideração, se na dedução de (2.230) houvésemos considerado em particular $q = (q_1^0, \vec{0}, 0, \dots, 0)$, então teríamos que modificar (2.230) fazendo a substituição $p \rightarrow p_1^0$ e $D^b \rightarrow \partial_0^b$

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{d}(k) \left\{ \hat{\theta}(p-k) - \sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p_1^0)^b}{b!} [\partial_0^b \hat{\theta}](-k) \right\}. \quad (2.232)$$

E, então

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \int dk_1^0 \hat{d}(k_1^0, \vec{p}_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \left\{ \frac{1}{p_1^0 - k_1^0 + i0^+} + \sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p_1^0)^b}{b!} \left(\frac{1}{k_1^0 - i0^+} \right)^{b+1} \right\}. \quad (2.233)$$

A somatória pode ser escrita como:

$$\sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p_1^0)^b}{b!} \left(\frac{1}{k_1^0 - i0^+} \right)^{b+1} = \frac{1}{(k_1^0 - i0^+)^{\omega+1}} \sum_{b=0}^{\omega} (p_1^0)^b (k_1^0 - i0^+)^{\omega-b}. \quad (2.234)$$

Daqui:

$$\begin{aligned} \sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p_1^0)^b}{b!} \left(\frac{1}{k_1^0 - i0^+} \right)^{b+1} &= \frac{\sum_{b=0}^{\omega} (p_1^0)^{b+1} (k_1^0 - i0^+)^{\omega-b} - \sum_{b=0}^{\omega} (p_1^0)^b (k_1^0 - i0^+)^{\omega-(b-1)}}{(k_1^0 - i0^+)^{\omega+1} (p_1^0 - k_1^0 + i0^+)} \\ &= \frac{\sum_{b=1}^{\omega+1} (p_1^0)^b (k_1^0 - i0^+)^{\omega-(b-1)} - \sum_{b=0}^{\omega} (p_1^0)^b (k_1^0 - i0^+)^{\omega-(b-1)}}{(k_1^0 - i0^+)^{\omega+1} (p_1^0 - k_1^0 + i0^+)} \\ &= \frac{(p_1^0)^{\omega+1} - (k_1^0 - i0^+)^{\omega+1}}{(k_1^0 - i0^+)^{\omega+1} (p_1^0 - k_1^0 + i0^+)}. \end{aligned} \quad (2.235)$$

Substituindo em (2.233)

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \int dk_1^0 \frac{(p_1^0)^{\omega+1} \hat{d}(k_1^0, \vec{p}_1, p_2, \dots, p_{n-1})}{(k_1^0 - i0^+)^{\omega+1} (p_1^0 - k_1^0 + i0^+)}. \quad (2.236)$$

Se fizermos a substituição $k_1^0 = t_1 p_1^0$ obteremos que

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_1^0) \int dt_1 \frac{\hat{d}(t_1 p_1^0, \vec{p}_1, p_2, \dots, p_{n-1})}{(t_1 - i0^+)^{\omega+1} (1 - t_1 + \text{sgn}(p_1^0) i0^+)}. \quad (2.237)$$

Temos até aqui um aparente problema de covariância; que é resolvido de forma similar ao caso regular. Obtemos que para $p_1 \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$ a distribuição retardada pode ser escrita como

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_1^0) \int dt_1 \frac{\hat{d}(t_1 p_1, p_2, \dots, p_{n-1})}{(t_1 - i0^+)^{\omega+1} (1 - t_1 + \text{sgn}(p_1^0) i0^+)}. \quad (2.238)$$

Encontramos assim uma fórmula de bipartição para o caso em que $p_1 \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$ e para p_2, \dots, p_{n-1} arbitrários. Mas se houvésemos escolhido um vetor v tal que $\theta(v.x) = \theta(x_j^0)$ e considerado na dedução de (2.238) $q = (0, \dots, q_j^0, \vec{0}, \dots, 0)$, então a fórmula de bipartição seria

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_j^0) \int dt_j \frac{\hat{d}(p_1, \dots, t_j p_j, \dots, p_{n-1})}{(t_j - i0^+)^{\omega+1} (1 - t_j + \text{sgn}(p_j^0) i0^+)}, \quad (2.239)$$

e seria válido em $p_j \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$ e para $p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_{n-1}$ arbitrários.

A obtenção de uma fórmula que não dependesse de uma variável em particular, similar ao caso regular consideraríamos $\prod_{j=1}^{n-1} \theta(x_j^0)$ ao invés de $\theta(x_1^0)$, e se na dedução de (2.238) considerássemos $q = (q_1^0, \vec{0}, \dots, q_j^0, \vec{0}, \dots, q_{n-1}^0, \vec{0})$ mas os passos a seguir não são claros. Consideremos em particular o seguinte caso não trivial: $n = 3$ e $\omega = 0$, teremos que:

$$\hat{\theta}(\kappa) = (2\pi)^{\frac{m}{2}-2} \delta(\vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2) \frac{(i)^2}{(\kappa_1^0 + i0^+)(\kappa_2^0 + i0^+)} \quad (2.240)$$

E de (2.230) teremos que:

$$\hat{r}_0(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{d}(k) \left\{ \hat{\theta}(p-k) - \hat{\theta}(-k) \right\} \quad (2.241)$$

Substituindo as $\hat{\theta}$:

$$\hat{r}_0(p) = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \int dk_1^0 dk_2^0 \hat{d}(k_1^0, \vec{p}_1, k_2^0, \vec{p}_2) \cdot \left\{ \frac{1}{(p_1^0 - k_1^0 + i0^+)(p_2^0 - k_2^0 + i0^+)} + \frac{1}{(k_1^0 - i0^+)(k_2^0 - i0^+)} \right\} \quad (2.242)$$

Simplificando:

$$\hat{r}_0(p) = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \int dk_1^0 dk_2^0 \hat{d}(k_1^0, \vec{p}_1, k_2^0, \vec{p}_2) \cdot \left\{ \frac{2k_1^0 k_2^0 + p_1^0 p_2^0 - p_1^0 k_2^0 - p_2^0 k_1^0}{[(p_1^0 - k_1^0 + i0^+)(k_1^0 - i0^+)] [(p_2^0 - k_2^0 + i0^+)(k_2^0 - i0^+)]} \right\} \quad (2.243)$$

E vemos que não é possível separar em produtos de diferentes variáveis.

Uma tentativa de solução simétrica, válida na região $p \in \Gamma_{n-1}^+$, poderia ser a seguinte *fórmula de bipartição*:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \int dt \frac{\hat{d}(tp_1, \dots, tp_j, \dots, tp_{n-1})}{(t - i0^+)^{\omega+1} (1 - t + i0^+)}. \quad (2.244)$$

Em particular de (2.238), temos que a fórmula de bipartição para distribuições de segunda ordem, com $p \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$, se expressa como segue:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\hat{d}(tp)}{t^{\omega+1} (1 - t + \text{sgn}(p_0) i0^+)}, \quad (2.245)$$

e que pode ser identificada como uma *relação de dispersão com $\omega + 1$ -subtrações*. Omitimos o termo $-i0^+$ no primeiro fator do denominador porque como veremos o suporte da distribuição causal não contém a origem no espaço dos momentos.

Similarmente ao caso regular teremos que quando \hat{d} apresenta certa simetria com respeito a origem, então a fórmula de bipartição pode ser reescrita convenientemente para os seguintes casos:

- Se \hat{d} par e ω ímpar; ou \hat{d} ímpar e ω par.- Teremos que $t^{-(\omega+1)}\hat{d}(tp)$ é par em t , então:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_0^\infty dt \frac{2\hat{d}(tp)}{t^{\omega+1} (1 - t^2 + \text{sgn}(p_0) i0^+)}. \quad (2.246)$$

- Se \hat{d} par e ω par; ou \hat{d} ímpar e ω ímpar.- Teremos que $t^{-(\omega+1)}\hat{d}(tp)$ é ímpar em t , então:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_0^\infty dt \frac{2t\hat{d}(tp)}{t^{\omega+1} (1 - t^2 + \text{sgn}(p_0) i0^+)}. \quad (2.247)$$

Lembremos que essas fórmulas de bipartição são para os casos de distribuições singulares, isto é distribuições com ordem singular não negativa. Portanto, elas seriam adequadas para calcular a parte retardada da polarização do vácuo no modelo de Schwinger segundo a ordem singular da TPC.

• Bipartição segundo a Ordem Singular no Modelo de Schwinger

Voltando ao caso da distribuição causal associado à polarização do vácuo no modelo de Schwinger massivo:

$$\hat{d}_2^{\mu\nu}(k) = e^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{4m^2}{2\pi} \frac{1}{k^2 \sqrt{1 - 4m^2/k^2}} \text{sgn}(k^0) \theta(k^2 - 4m^2), \quad (2.248)$$

onde a ordem singular desta distribuição é $\omega(D_2^{VP}) = 0$, para encontrar a distribuição retardada $\hat{r}_2^{\mu\nu}(k)$ teríamos que aplicar a seguinte fórmula de bipartição:

$$\hat{r}_2^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \int_0^\infty dt \frac{2\hat{d}_2^{\mu\nu}(tk)}{t(1 - t^2 + \text{sgn}(p_0) i0^+)}. \quad (2.249)$$

Substituindo a distribuição causal:

$$\begin{aligned} \hat{r}_2^{\mu\nu}(k) &= \frac{ie^2 m^2}{\pi^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \text{sgn}(k_0) \\ &\times \int_0^\infty dt \frac{2}{t(1 - t^2 + \text{sgn}(p_0) i0^+)} \frac{\text{sgn}(tk_0) \theta(t^2 k^2 - 4m^2)}{t^2 k^2 \sqrt{1 - 4m^2/t^2 k^2}}. \end{aligned} \quad (2.250)$$

Como $\text{sgn}(tk_0) = \text{sgn}(k_0) \text{sgn}(t)$ e fazendo a substituição $s = t^2$

$$\hat{r}_2^{\mu\nu}(k) = \frac{ie^2 m^2}{\pi^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \int_{\frac{4m^2}{k^2}}^{\infty} ds \frac{1}{s^2 (1 - s + \text{sgn}(k_0) i0^+)} \frac{1}{k^2 \sqrt{1 - 4m^2/sk^2}} . \quad (2.251)$$

Após os cálculos, obteremos a distribuição retardada que é:

$$\hat{r}_2^{\mu\nu}(k) = \frac{ie^2 m^2}{\pi^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \left(\frac{1}{k^2 \sqrt{1 - 4m^2/k^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - 4m^2/k^2} + 1}{\sqrt{1 - 4m^2/k^2} - 1} + \frac{1}{2m^2} \right) , \quad (2.252)$$

$k^2 > 4m^2$. No limite de férmions sem massa $m \rightarrow 0$

$$\hat{r}_2^{\mu\nu}(k) \approx \frac{ie^2}{2\pi^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) , \quad (2.253)$$

esta quantidade é não nula, que após resomas obtemos a conhecida massa de Schwinger $m_s^2 = e^2/\pi$ da teoria usual [26], ou seja a conclusão correta deste modelo.

Nota.- Para a bipartição singular de uma distribuição de ordem ω , encontramos que r pode ser expressa via a seguinte fórmula de bipartição:

$$\hat{r}(p_1^0, \vec{0}) = \frac{i}{2\pi} \int dk_1^0 \frac{(p_1^0)^{\omega+1} \hat{d}(k_1^0, \vec{0})}{(k_1^0 - i0^+)^{\omega+1} (p_1^0 - k_1^0 + i0^+)} , \quad (2.254)$$

que é uma solução central, já que claramente satisfaz a condição:

$$[\partial_0^b \hat{r}](p=0) = 0 ; \forall b \in \{0, 1, \dots, \omega\} . \quad (2.255)$$

Mas, para obter uma fórmula mais manobrável tivemos que definir a variável t , da relação $k_1^0 = tp_1^0$ e, assim obter

$$\hat{r}(p_1^0, \vec{0}) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_1^0) \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\hat{d}(tp_1^0, \vec{0})}{t^{\omega+1} (1 - t + \text{sgn}(p_1^0) i0^+)} , \quad (2.256)$$

onde é claro que esta fórmula não terá nenhuma diferença com a primeira para $p_1^0 \neq 0$, e então ambas têm o mesmo comportamento no infinito do espaço dos momentos. Mas em $p_1^0 = 0$ a mudança de variável não tem sentido, contudo esperamos que por continuidade no limite $p_1^0 \rightarrow 0$, a condição da solução central seja satisfeita.

2.4.6 Unicidade da Bipartição e Normalização

A unicidade da *Matriz-S* é garantida se os termos da série perturbativa

$$S[g] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) g(x_1) g(x_2) \dots g(x_n) , \quad (2.257)$$

são únicos. Na prática, isto significa que a parte numérica da distribuição T_n

$$t = r - r', \quad (2.258)$$

é univocamente determinada. Sendo a distribuição intermediária r' , por definição fixa; então temos que garantir a unicidade da distribuição retardada r . Analisaremos este fato separadamente para casos singulares e regulares.

Unicidade de Distribuições Singulares.- Encontramos na seção prévia que a distribuição retardada no espaço dos momentos tem a forma:

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\hat{d}(p-k) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{a=0}^{\omega} \frac{p^a}{a!} \int dp' D_{p'}^a \hat{d}(p'-k) \tilde{w}(p') \right] \quad (2.259)$$

Daqui temos que as distribuições retardada e causal tem a mesma ordem singular: $\omega = \omega(R) = \omega(D)$. E, em teoria de distribuições temos o seguinte teorema:

Teorema 3.- *Se o suporte de uma distribuição $f \in D' (\supset \mathcal{J}')$ consiste num único ponto $x = 0$, então é univocamente representado na forma:*

$$f(x) = \sum_{b=0}^{\omega} c_b D^b \delta(x) \quad (2.260)$$

onde ω é a ordem da distribuição f . E no espaço dos momentos:

$$\hat{f}(p) = \sum_{b=0}^{\omega} c_b p^b \quad (2.261)$$

Corolário.- *Do teorema 2, teremos que essas distribuições ao agir na distribuição $W\varphi(x)$ dão zero. Portanto, essas distribuições não mudam a distribuição retardada de ordem singular ω . Daí a distribuição retardada, no espaço dos momentos, pode ser modificada por um polinômio de grau não maior a ω :*

$$\tilde{r}(p) = \hat{r}(p) + \sum_{a=0}^{\omega} C_a p^a \quad (2.262)$$

Isto nos permite anular a função \tilde{w} , que se consegue quando definimos a seguinte solução:

$$\hat{r}_q(p) = \hat{r}(p) - \sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} D_q^b \hat{r}(q) \quad (2.263)$$

esta solução é única, no sentido que é a única* que satisfaz a condição: $D^b \hat{r}_q(q) = 0, b \leq \omega$. Mas qual é o valor certo de q ?, nós por simplicidade escolhemos $q = 0$, já que com este obtemos uma fórmula de bipartição de forma simples.

*Para uma demonstração detalhada vide o Apêndice D.

Contudo, ainda podemos usar novamente o corolário, e definir a distribuição retardada:

$$\tilde{r}(p) = \hat{r}_0(p) + \sum_{a=0}^{\omega} C_a p^a \quad (2.264)$$

onde \hat{r}_0 é a solução central. Como fixar as constantes $\{C_a\}$? Definiremos como solução a aquela que satisfaz todas as condições físicas (simetrias, propriedades,...) associadas à contribuição \hat{t} correspondente, chamaremos a esta solução de: *solução física*.

Seja Θ o número de condições físicas que \hat{r}_0 satisfaz, e Δ o número total dessas condições físicas. Encontramos os seguintes casos:

1. Se $\Delta = \omega + 1$, teremos que todas as constantes $\{C_a\}$ podem ser fixadas com as condições físicas e, todas as condições podem ser satisfeitas.
 - (a) Em particular, quando $\Delta = \Theta$, todas as constantes serão nulas.
 - (b) Quando $\Delta > \Theta$, teremos $\Delta - \Theta$ constantes não nulas.
2. Se $\Delta < \omega + 1$, teremos que todas as condições podem ser satisfeitas, mas teremos $\omega + 1 - \Delta$ constantes indeterminadas; estas podem ser interpretadas como novas simetrias.
3. Se $\Delta > \omega + 1$, teremos que todas as constantes $\{C_a\}$ podem ser fixadas.
 - (a) Em particular, quando $\Delta - \Theta \leq \omega + 1$, todas as condições são satisfeitas.
 - (b) Quando $\Delta - \Theta > \omega + 1$, teremos $\Delta - \Theta - (\omega + 1)$ condições não são satisfeitas. Neste caso teremos que o número de constantes não são suficientes, encontramos que a única solução é subtrair as subseqüentes potências até satisfazer todas as condições, por exemplo:

$$\tilde{r}(p) = \hat{r}_0(p) + \sum_{a=0}^{\omega} C_a p^a + \sum_{b=\omega+1}^{\Delta-\Theta} C_b p^b \quad (2.265)$$

vemos que a ordem singular desta solução é maior a ω , então esta solução tem ordem singular maior à distribuição causal: $\omega(R) > \omega(D)$. Esta solução não muda a distribuição causal se essas subseqüentes potências também são subtraídas da distribuição avançada.

Unicidade de Distribuições Regulares.- Encontramos na seção prévia que a distribuição retardada no espaço dos momentos tem a forma:

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \hat{d}(p - k) \quad (2.266)$$

Primeiro temos daqui que as distribuições retardada e causal tem a mesma ordem singular: $\omega = \omega(R) = \omega(D)$, segundo, que esta solução é única. Contudo, esta solução deve satisfazer todas as condições físicas. Se Θ é o número de condições físicas que \hat{r} satisfaz, e Δ o número total dessas condições físicas. Encontramos os seguintes casos:

1. Se $\Delta = \Theta$, todas as condições são satisfeitas.
2. Se $\Delta - \Theta > 0$, teremos $\Delta - \Theta$ condições não satisfeitas. Encontramos que a única solução é subtrair potências até satisfazer todas as condições, por exemplo:

$$\tilde{r}(p) = \hat{r}_0(p) + \sum_{b=0}^{\Delta-\Theta} C_b p^b \quad (2.267)$$

vemos que esta solução é singular de ordem ω , então : $\omega(R) \geq 0 > \omega(D)$. Esta solução não muda a distribuição causal se essas potências também são subtraídas da distribuição avançada.

Em qualquer caso, as soluções são fixadas pelas condições físicas, em Teoria de Perturbação Causal esse processo é conhecido como *normalização* ou *normalização polinomial*.

Capítulo 3

Abordagem Axiomática dos Campos Livres Quantizados: de Dirac e de Podolsky

Neste capítulo apresentaremos a teoria livre fermiônica e a teoria livre do eletromagnetismo de Podolsky, para obter as correspondentes contrações que são a base do programa perturbativo da TPC; também encontraremos os estados livres com os quais faremos cálculos de espalhamento nos próximos capítulos.

3.1 Introdução

A Eletrodinâmica Quântica é a teoria quântica de campos de maior sucesso. Em particular a versão perturbativa oferece um esquema computacional que permite obter resultados teóricos de grande precisão com respeito aos resultados experimentais, como é o caso do momento magnético do elétron.

Embora a diagramática da pQED tenha grande utilidade nos cálculos, ela apresenta uma série de dificuldades de indefinição: integrais de Feynman divergentes do tipo ultravioleta (UV) e infravermelho (IR). Para obter resultados finitos e únicos precisase de passos intermediários conhecidos como técnicas de regularização. É neste ponto que surgem propostas perturbativas alternativas, essas alegam que a pQED tem problemas de rigor matemática.

A Teoria de Perturbação Causal é uma dessas alternativas, esta teoria axiomática da *Matriz-S* com base na teoria de distribuições que foi aplicada à electrodinâmica na dimensão $3 + 1$ por Günter Scharf *et al* obtendo o que chamaram de Eletrodinâmica Quântica Finita [22]. Nessa teoria perturbativa da QED₄ não há mais divergências UV e as IR consegue-se contornar. A TPC também introduz um conceito semelhante à “renormalizabilidade da teoria”: no caso da QED₄ se encontra que a teoria é fechada, salvo um número finito de constantes por ordem perturbativa, então se diz que a teoria é renormalizável.

As divergências da eletrodinâmica aparecem já no nível clássico, conhecidas como auto-

energias e auto-forças. Uma proposta que surge é modificar a teoria de Maxwell indo para uma teoria eletromagnética de ordem superior, isto é que considere na lagrangiana derivadas dos campos superiores às de primeira ordem*. A teoria alternativa de segunda ordem, que é uma extensão do Maxwell e que preserva todas as simetrias dela, é conhecida como Electromagnetismo de Podolsky. Essa proposta de Podolsky *et al* [4] tem grandes resultados a nível clássico, tornando o eletromagnetismo finito, mas numa primeira versão quântica não se consegue esse efeito.

A teoria quântica de campos atual da interação de elétrons e fótons de Podolsky, na dimensão $3 + 1$, é conhecida como Eletrodinâmica Quântica Generalizada (GQED₄). Essa versão introduzida por R. Bufalo, B. M. Pimentel e G.E.R. Zambrano via quantização funcional, ao considerar a chamada condição de Lorenz generalizada [45] obtém que a auto-energia do elétron é finita. A interpretação que induz esse resultado é que os termos de segunda ordem da GQED₄ agem como reguladores. Embora a QED₄ tenha resultados muito precisos, existe ainda espaço para a GQED₄, que dá uma contribuição extra via à chamada massa do fóton de Podolsky; sua estimativa e interpretação são parte da pesquisa atual.

Nesta tese formularemos a *TPC da Eletrodinâmica Generalizada*. É claro que nossa motivação não é obter uma teoria finita da eletrodinâmica porque esta é de fato finita na TPC. Uma das razões é complementar e fundamentar alguns dos resultados obtidos pelos métodos de quantização usuais, como por, exemplo, discernir se a GQED₄ é ou não uma teoria super-renormalizável. Outra é mostrar se esse formalismo nos dá novos alcances sobre a massa do fóton de Podolsky.

A construção indutiva da TPC tem a vantagem de ter como base a teoria livre, permitindo introduzir o campo fermiônico e o campo de Podolsky por separado. Neste capítulo, apresentaremos a teoria livre de cada campo. Como os termos de cada ordem perturbativa são essencialmente construídos em base às contrações normais dos campos, e eles são proporcionais a seus propagadores de frequência positiva (PF) e negativa (NF), mostraremos primeiro um mecanismo para obter os propagadores PF e NF, usando como base o formalismo de Wightman e, só depois apresentaremos uma análise dos estados livres. Com esses resultados e usando o teorema de Wick para produtos normalmente ordenados, ao final do capítulo mostraremos e construiremos as distribuições intermediárias de segunda e terceira ordem, e as classificaremos segundo a estrutura de cada contribuição às ordens mencionadas.

*A introdução de lagrangianas com derivadas de ordens superiores remonta a 1850 na publicação de Ostrogradsky [43] sobre uma formulação variacional de equações de movimento de ordem arbitrária.

3.2 Programa Axiomático da Teoria Livre e o Formalismo de Wightman

Introduziremos os campos livres quantizados e os estados seguindo a linha axiomática. A procura de uma teoria que considere como postulados ou axiomas propriedades físicas gerais e as equações de movimento dos campos livres e cuja formulação esteja no marco da teoria de distribuições, nos levou ao Formalismo de Wightman [12]. A grande vantagem que encontramos neste formalismo é que é possível adaptá-lo de uma forma tal que conseguimos deduzir uma prescrição axiomática para os propagadores PF e NF. Isto não só supre as necessidades do programa perturbativo da TPC como também nos dará uma guia para construir os estados livres físicos, essenciais para os cálculos de espalhamento e definição da unitariedade da *Matriz-S*.

Começaremos introduzindo os axiomas de Wightman orientados à teoria livre. Por simplicidade e para efeitos ilustrativos, consideraremos o caso de um campo escalar real (hermitiano).

3.2.1 Axiomas de Wightman

Os axiomas ou postulados de Wightman têm como objetivo estabelecer aspectos estruturais razoáveis de qualquer teoria quântica de campos em que os princípios físicos sejam sempre explícitos. Apresentaremos estes axiomas, seguindo a linha de Othmar Steinmann [56], mas, desde já orientados à teoria livre. Como nosso primeiro objetivo é obter uma prescrição para os PF e NF, explicaremos e desenvolveremos com maior ênfase aquelas que contribuem diretamente com esse propósito.

- **Postulado 1: Teoria Quântica.**- O sistema físico é descrito por estados, os quais pertencem a um espaço de Hilbert \mathcal{H} separável*. Os observáveis e outras quantidades de interesse, como os campos, são representados por operadores que agem sobre \mathcal{H} .

Este postulado oferece um marco geral da estrutura que uma teoria quântica deve ter, cujos ingredientes, como os estados, são na prática muitas vezes “preparados” e os observáveis são relacionados com as medições sobre este sistema preparado. Neste contexto geral, podemos implementar características específicas como, por exemplo, uma álgebra das observáveis, ou introduzir simetrias[†]. Esta última é realizada neste formalismo através do seguinte postulado.

- **Postulado 2: Invariância Relativista.**- O sistema físico é invariante por mudanças de referencial; isto envolve a invariância por translações espaço-temporais, e invariância com respeito à escolha do sistema de referência[‡].

*Aqui nos referimos a um espaço de Hilbert complexo; e pedir que seja separável garante a expansão (asintótica) de um estado numa base contável. Para maiores detalhes sobre este e outros conceitos do espaço de Hilbert vide por exemplo [57].

[†]A inclusão delas nos podem levar a dividir \mathcal{H} em setores (subespaços) independentes.

[‡]Esta última proveniente do seguinte princípio relativístico: “dois observadores com movimento relativo observam a mesma física”.

Como mencionamos no Capítulo 2, quando um sistema for invariante por alguma transformação (de simetria) significa que as probabilidades de transição são invariantes por essas transformações. Ao aplicar o teorema de Wigner para este axioma encontramos que sobre \mathcal{H} é definido uma representação unitária do grupo de translações: $U(1, a)$; e existe um operador $U(\Lambda, 0)$ que representa a simetria por transformações de boost. Este axioma pode ser complementado exigindo a invariância por outras simetrias, como por exemplo as discretas.

- **Postulado 3: Existência e unicidade do vácuo invariante.**- No espaço de estados \mathcal{H} existe um estado chamado de vácuo, e denotado por $|\Omega\rangle$, tal que este seja

– Invariante pelas transformações de simetria do postulado 2, *i.e.*,

$$U(1, a) |\Omega\rangle = |\Omega\rangle \quad (3.1)$$

$$U(\Lambda, 0) |\Omega\rangle = |\Omega\rangle . \quad (3.2)$$

– Normalizada a um,

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = 1 . \quad (3.3)$$

Geralmente a unicidade também é considerada, mas esta condição é discutível, o que a unicidade implica na invariância por qualquer outra simetria: contínua ou discreta; pois garante um vácuo não degenerado. A existência desse estado terá sentido no seguinte postulado.

- **Postulado 4: Campo como Distribuição a valor de Operador.** A teoria é formulada em termos dos campos que serão distribuições covariantes a valor de operadores; os quais gerarão o espaço de estados do sistema físico, o espaço de Hilbert \mathcal{H} , a partir do vácuo $|\Omega\rangle$.

Este postulado será essencial para nossos objetivos, portanto, o desenvolveremos e ilustraremos para o caso do campo escalar.

1. *Primeiro*, devemos indicar que os campos livres são soluções de equações diferenciais homogêneas; para o caso do campo escalar massivo, $\phi(x)$, é a equação de Klein-Gordon-Fock

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0 . \quad (3.4)$$

Para encontrar a solução suponhamos que ela pode ser expressa como a seguinte expansão de Fourier

$$\phi(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4k \hat{\phi}(k) e^{-ikx} . \quad (3.5)$$

Substituindo em (3.4), vemos que o campo transformado necessariamente deve satisfazer a seguinte relação

$$(k^2 - m^2) \hat{\phi}(k) = 0 . \quad (3.6)$$

A solução distribucional, não trivial, dessa equação tem a seguinte forma:

$$\hat{\phi}(k) = \sqrt{2\pi} \tilde{a}(k) \delta(k^2 - m^2) . \quad (3.7)$$

E então o campo escalar massivo terá a seguinte forma geral:

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \tilde{a}(k) e^{-ikx} , \quad (3.8)$$

e como estamos considerando um campo hermitiano, então deve-se cumprir que $\tilde{a}(-k) = \tilde{a}^\dagger(k)$.

2. *Segundo*, nesse formalismo, os campos não são simples funções mas distribuições e, então, são funcionais lineares a valor de operadores sob um espaço de funções de teste,

$$\phi : g \longmapsto \langle \phi, g \rangle , \quad (3.9)$$

onde g é a função de teste e $\langle \phi, g \rangle$ o correspondente operador. Usualmente no formalismo de Wightman se tem a notação $\phi[g]$ para indicar a $\langle \phi, g \rangle$, e definido pela relação:

$$\phi[g] = \int d^4x \phi(x) g(x) , \quad (3.10)$$

mas formalmente essa representação só é válida para um campo sumável.

A representação de uma distribuição no espaço dos momentos é obtida via a transformada de Fourier, cuja existência é garantida se a distribuição é definida sob o espaço de funções de teste conhecido como espaço de Schwartz $\mathcal{J}(M^4)$. Se $\hat{\phi}(k)$ é o campo no espaço dos momentos, satisfaz a seguinte relação:

$$\langle \hat{\phi}, \check{g} \rangle = \langle \phi, g \rangle = \int dk \hat{\phi}(k) \check{g}(k) , \quad (3.11)$$

onde \check{g} é a transformada inversa de g , e é uma função de teste bem comportada de $\hat{\phi}$. Observamos assim que esse postulado esta em conformidade com a Teoria de Perturbação Causal.

3. *Terceiro*, como o espaço de Hilbert é gerado a partir do vácuo, podemos assinalar particularmente que um estado $|\Phi\rangle$ pode ser escrito como

$$|\Phi\rangle = |\Phi(f)\rangle = \int d^4x \phi(x) f(x) |\Omega\rangle = \phi[f] |\Omega\rangle \quad (3.12)$$

onde $f \in \mathcal{J}(M^4)$, conhecido como o *estado pacote de onda* de uma partícula.

- **Postulado 5: Condição espectral.**- Não existem estados com energia negativa. Então um estado não nulo só pode ter componentes de momento na clausura do cone superior, \bar{V}^+ .

Essa é uma condição essencial para definir estados físicos cujo postulado será também de grande utilidade para nossos propósitos, portanto, faremos as seguintes indicações e deduções:

1. *Primeiro*, como os estados são gerados pelo campo $\phi(x)$, será de grande utilidade dividi-lo nas partes correspondentes às componentes com frequência positiva e negativas:

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) , \quad (3.13)$$

onde $\phi^{(+)}$ é a parte positiva e negativa a parte $\phi^{(-)}$ do campo. Isso é feito usualmente ao usar a identidade $1 = \theta(k_0) + \theta(-k_0)$ em (3.8) :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) \tilde{a}(k) e^{-ikx} \\ &\quad + (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \theta(-k_0) \delta(k^2 - m^2) \tilde{a}(k) e^{-ikx} \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) [\tilde{a}(k) e^{-ikx} + \tilde{a}^\dagger(k) e^{ikx}] . \end{aligned} \quad (3.14)$$

E então, como veremos embaixo, temos que a parte positiva e negativa são naturalmente definidas pelas relações:

$$\phi^{(+)}(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) \tilde{a}^\dagger(k) e^{ikx} \quad (3.15)$$

$$\phi^{(-)}(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) \tilde{a}(k) e^{-ikx} . \quad (3.16)$$

2. *Segundo*, desse resultado temos, que o estados pacote de onda $|\Phi\rangle$ podem ser escrito como

$$|\Phi(f)\rangle = \phi^{(+)}[f]|\Omega\rangle + \phi^{(-)}[f]|\Omega\rangle , \quad (3.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi^{(-)}[f]|\Omega\rangle &= (2\pi)^{-3/2} \int d^4x \int d^4k \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) \tilde{a}(k) e^{-ikx} f(x) |\Omega\rangle \\ &= \int d^4k \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) \tilde{a}(k) \hat{f}(-k) |\Omega\rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(+)}[f]|\Omega\rangle &= (2\pi)^{-3/2} \int d^4x \int d^4k \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) \tilde{a}^\dagger(k) e^{ikx} f(x) |\Omega\rangle \\ &= \int d^4k \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) \tilde{a}^\dagger(k) \hat{f}(k) |\Omega\rangle . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como por condição temos componentes não nulos somente se $k \in \bar{V}^{+*}$, então a parte associada a $\hat{f}(k)$ é não nula e a parte associada a $\hat{f}(-k)$ deve ser nula, o que é satisfeito se

$$\begin{aligned} \tilde{a}^\dagger(k) |\Omega\rangle &\neq 0 \\ \tilde{a}(k) |\Omega\rangle &= 0 . \end{aligned} \quad (3.20)$$

*O que implica que $-k \in \bar{V}^-$

daqui o operador $\tilde{a}(k)$ é naturalmente chamado de aniquilação e a $\tilde{a}^\dagger(k)$ de criação, isso também justifica a definição da parte positiva e negativa do campo. Das definições da parte positiva e negativa de um campo temos que $\phi^{\dagger(+)}(x) = \phi^{(-)}(x)$, se denotamos ao vácuo do espaço dual como $\langle \Omega |$; então enquanto $\langle \Omega | \phi^{(-)}[f]$ é um estado dual não nulo, $\langle \Omega | \phi^{(+)}[f]$ é o estado nulo do espaço dual. Então

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \tilde{a}^\dagger(k) &= 0 \\ \langle \Omega | \tilde{a}(k) &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Essas relações serão de grande utilidade na próxima subseção.

Podemos também obter uma consequência trivial se considerarmos um estado, $|\Phi(f)\rangle$, com apenas só componentes de frequência negativa, para esse caso

$$\langle \Phi(f) | \Phi(f) \rangle = 0, \quad (3.22)$$

esta relação também será de utilidade na próxima subseção.

Nota.- Nesta apresentação dos axiomas de Wightman omitimos algumas considerações usuais como a chamada "weak clustering" e o axioma de localidade*, mas esta última será *deduzida* nas próximas subseções para nosso caso alvo: a teoria livre.

3.2.2 Funções de Wightman

Neste formalismo as quantidades que têm o papel principal na teoria são as funções de Wightman, são definidas como os valores esperados no vácuo (VEV) de um produto de campos, por exemplo, para o caso escalar temos, a função de Wightman de n -pontos definida pela relação:

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \langle \Omega | \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle. \quad (3.23)$$

É claro que no sentido rigoroso essa não é uma função senão uma distribuição numérica. A continuação, vamos deduzir, a partir dos axiomas, as propriedades da função de Wightman de dois pontos: $W_2(x_1, x_2)$, esta última nos interessa por ser proporcional aos propagadores PF e NF como veremos na próxima subseção.

- **Propriedade 1: Hermiticidade.** Por definição deve-se cumprir a seguinte relação:

$$W_2(x_2, x_1) = W_2^*(x_1, x_2). \quad (3.24)$$

No caso do campo escalar hermitiano a prova é imediata, para outros caso também é possível estabelecer uma relação de hermiticidade.

*Neste caso equivale à chamada: *microcausalidade*.

- **Propriedade 2: Covariância.** A função de Wightman, pela transformação de Poincaré (Λ, a) , se transforma da forma seguinte:

$$W_2(\Lambda x_1 + a, \Lambda x_2 + a) = W_2(x_1, x_2) . \quad (3.25)$$

Consequência direta dos postulados 2 e 3, em particular, da invariância translacional temos que:

$$W_2(x_1, x_2) = W_2(x_1 - x_2) . \quad (3.26)$$

Este é um resultado fundamental, porque permite escrever essa função como a seguinte expansão de Fourier:

$$W_2(x_1 - x_2) = (2\pi)^{-2} \int d^4k \hat{W}_2(k) e^{-ik(x_1 - x_2)} , \quad (3.27)$$

onde $\hat{W}_2(k)$ é a transformada de Fourier da função de Wightman de 2-pontos e, então, sua versão no espaço dos momentos.

- **Propriedade 3: Equação diferencial.** Para teorias livres, a função de Wightman cumpre a mesma equação diferencial que o campo livre.

Então para o campo escalar massivo, temos que a correspondente função de dois pontos satisfaz a equação de Klein-Gordon-Fock

$$(\square_i + m^2) W_2(x_1 - x_2) = 0 , \quad i = 1, 2 . \quad (3.28)$$

Ao substituir a expressão (3.27), temos que sua versão no espaço dos momentos satisfaz:

$$(k^2 - m^2) \hat{W}_2(k) = 0 \rightarrow \hat{W}_2(k) = b\delta(k^2 - m^2) , \quad (3.29)$$

onde b é uma constante. Temos daqui que o suporte de $\hat{W}_2(k)$ pode estar contido em \bar{V}^+ e/ou em \bar{V}^- , duas possibilidades usualmente* indicadas ao escrever $\hat{W}_2(k)$ da forma seguinte:

$$\hat{W}_2(k) = b [\theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) + \theta(-k_0) \delta(k^2 - m^2)] . \quad (3.30)$$

- **Propriedade 4: Propriedade espectral.** O suporte da função de Wightman, $\hat{W}_2(k)$, esta contido na clausura do cone superior, \bar{V}^+ .

Sendo essa uma propriedade essencial para nossos objetivos vamos deduzi-la. Para isso consideremos o quadrado da norma do estado $|\Phi(f)\rangle$ dado em (3.12)

$$\langle \Phi(f) | \Phi(f) \rangle = (\langle \Omega | \phi[f])^\dagger \phi[f] | \Omega \rangle = \int d^4x \int d^4y f^*(x) f(y) \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle , \quad (3.31)$$

*Usando a identidade: $1 = \theta(k_0) + \theta(-k_0)$

onde usamos a hermiticidade do campo. Identificando a função de dois pontos nesta expressão:

$$\langle \Phi(f) | \Phi(f) \rangle = \int d^4x \int d^4y f^*(x) f(y) W_2(x-y), \quad (3.32)$$

e agora substituímos $W_2(x-y)$ por sua expressão dada em (3.27)

$$\begin{aligned} & \langle \Phi(f) | \Phi(f) \rangle \\ &= (2\pi)^{-2} \int d^4x \int d^4y f^*(x) f(y) \int d^4k \hat{W}_2(k) e^{-ik(x-y)} \\ &= (2\pi)^2 \int d^4k \left[(2\pi)^{-2} \int d^4x f^*(x) e^{-ikx} \right] \left[(2\pi)^{-2} \int d^4y f(y) e^{iky} \right] \hat{W}_2(k). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Obtemos que a norma do estado $|\Phi(f)\rangle$ pode ser escrita como segue

$$\langle \Phi(f) | \Phi(f) \rangle = (2\pi)^2 \int d^4k \hat{f}^*(k) \hat{f}(k) \hat{W}_2(k). \quad (3.34)$$

Daqui encontramos a relação entre a norma do estado $|\Phi(f)\rangle$ e a função de Wightman $\hat{W}_2(k)$

$$\langle \Phi(f) | \Phi(f) \rangle = (2\pi)^2 \int d^4k \left| \hat{f}(k) \right|^2 \hat{W}_2(k). \quad (3.35)$$

Se considerarmos um estado com componentes só de energia negativa, essa quantidade deve ser identicamente nula. Também pode-se entender que para toda função de teste $\left| \hat{f}(k) \right|^2$ com suporte no cone inferior V^- esta expressão é nula, o que implica necessariamente que o suporte de $\hat{W}_2(k)$ está contido na clausura do cone superior, \bar{V}^+ .

Do resultado prévio (3.30) e, considerando os estados $|\Phi(f)\rangle$ normalizados a 2π , teremos finalmente a função de Wightman de dois pontos no espaço dos momentos é dado por:

$$\hat{W}_2(k) = \frac{1}{2\pi} \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2). \quad (3.36)$$

Nota.- Essa propriedade é consequência dos postulados 4 e 5, e é o resultado principal que consideraremos na seguinte subseção. No formalismo usual de Wightman também é considerado a propriedade de localidade deduzível do postulado do mesmo nome, mas que nós omitimos. O formalismo de Wightman propõe estabelecer a teoria dos campos quantizados via o chamado *teorema de reconstrução*, para isso estuda-se as propriedades analíticas das funções de Wightman no espaço de configurações. É nesse ponto que seguimos outro caminho pois como nosso propósito é estabelecer uma prescrição para os propagadores PF e NF no espaço dos momentos, estudaremos as propriedades analíticas, porém no espaço dos momentos.

3.2.3 Representação Analítica dos propagadores PF e NF escalares

Nesta subseção temos como propósito dar uma representação analítica* dos propagadores PF e NF no espaço dos momentos. Primeiro introduziremos a definição do propagador escalar de frequência positiva (PF) no espaço de configuração, que é definida por sua relação com a contração de campos escalares:

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)} \equiv [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] = -iD_m^{(+)}(x-y) . \quad (3.37)$$

Sendo o vácuo normalizado, temos que esse propagador pode ser escrito como:

$$D_m^{(+)}(x-y) = i \langle \Omega | [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] | \Omega \rangle . \quad (3.38)$$

Usando as propriedades da parte positiva e negativa do campo teremos que:

$$D_m^{(+)}(x-y) = i \langle \Omega | \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) | \Omega \rangle = i \langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle \quad (3.39)$$

Identificando a função de Wighman de 2-pontos, finalmente obtemos a relação

$$D_m^{(+)}(x-y) = iW_2(x-y) , \quad (3.40)$$

que translada todas as propriedades gerais da função de dois pontos ao propagador PF.

Similarmente, o propagador escalar de frequência negativa (NF) é definido por sua relação com o seguinte comutador:

$$D_m^{(-)}(x-y) \equiv i [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] . \quad (3.41)$$

Comparando com (3.37) e usando os resultados prévios, obtemos que:

$$D_m^{(-)}(x-y) = -D_m^{(+)}(y-x) = -iW_2(y-x) . \quad (3.42)$$

Indo para o espaço dos momentos e usando a expressão (3.36), obtida para a função de Wightman de 2-pontos, obteremos os propagadores PF e NF no espaço dos momentos que são expressos da seguinte forma:

$$\hat{D}_m^{(\pm)}(k) = \pm \frac{i}{2\pi} \theta(\pm k_0) \delta(k^2 - m^2) . \quad (3.43)$$

Entendemos como representação analítica de uma distribuição quando a expressamos em termos de funções com uma de suas variáveis no plano complexo, isto via um limite ou uma

*Podemos encontrar um amplo estudo de representações analíticas de distribuições em [61].

integral de Cauchy. Segundo essa ideia procuramos expressar os propagadores $\hat{D}_m^{(\pm)}$ como se eles fossem distribuições de uma variável que conseguimos ao escreve-los como

$$\hat{D}_m^{(\pm)}(k) = \pm \frac{i}{2\pi} \theta(\pm k_0) \delta(k_0^2 - \omega_m^2) \quad , \quad \omega_m = \sqrt{k^2 + m^2} \quad , \quad (3.44)$$

onde ω_m é a frequência positiva. Agora esses propagadores podem ser interpretados como distribuições na variável k_0 . Para maior clareza, usaremos a seguinte identidade da distribuição δ -Dirac

$$\delta(k_0^2 - \omega_m^2) = \frac{1}{2\omega_m} [\theta(k_0) \delta(k_0 - \omega_m) + \theta(-k_0) \delta(k_0 + \omega_m)] \quad . \quad (3.45)$$

Então obteremos que:

$$\hat{D}_m^{(\pm)}(k) = \pm \frac{i}{2\pi} \frac{\delta(k_0 \mp \omega_m)}{2\omega_m} = \frac{i}{2\pi} \frac{\delta(k_0 \mp \omega_m)}{k_0 \pm \omega_m} \quad . \quad (3.46)$$

Agora temos claro que a variável k_0 é a chave para obter a representação analítica. É claro que dessa última expressão estes propagadores não estão diretamente vinculados a uma função, pois para vislumbrar esse vínculo e a função usamos a definição da δ -Dirac transladada:

$$\varphi(\pm\omega_m) = \langle \delta(k_0 \mp \omega_m), \varphi(k_0) \rangle \quad , \quad (3.47)$$

onde φ é uma função de teste. Dai temos que as distribuições $\hat{D}_m^{(\pm)}$ podem ser definidas pela relação:

$$\langle \hat{D}_m^{(+)} , \varphi \rangle = \frac{i}{2\pi} \left[\frac{\langle \delta(k_0 \mp \omega_m), \varphi(k_0) \rangle}{k_0 \pm \omega_m} \right] = \frac{i}{2\pi} \left[\frac{\varphi(\pm\omega_m)}{k_0 \pm \omega_m} \right] \quad (3.48)$$

$$= (2\pi)^{-2} \left\{ 2\pi i \left[\frac{\varphi(k_0)}{k_0 \pm \omega_m} \right]_{k_0=\pm\omega_m} \right\} \quad . \quad (3.49)$$

Dessa última igualdade fica claro que a representação analítica é via a integral de Cauchy, no espaço complexo da variável k_0 , portanto obtemos que a representação analítica dos propagadores PF e NF é dada pela expressão:

$$\langle \hat{D}_m^{(\pm)} , \varphi \rangle = (2\pi)^{-2} \oint_{c_{\pm}} \frac{\varphi(k_0)}{k_0^2 - \omega_m^2} dk_0 \quad , \quad (3.50)$$

onde c_{\pm} é o caminho de integração fechado, no sentido antihorário, que contém só o polo positivo (negativo) da função

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{k_0^2 - \omega_m^2} \quad . \quad (3.51)$$

Essa é justamente, a função a qual estão vinculados os propagadores PF e NF. Substituindo ω_m , obtemos a função pode ser escrita como segue

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2} \quad (3.52)$$

O que nos permite identificá-la com a função de Green da equação Klein-Gordon-Fock.

3.2.4 Programa Axiomático dos Propagadores PF e NF

A ideia para obter os propagadores PF e NF para qualquer campo está na generalização e análise da representação analítica do caso escalar (3.50), e sua vinculação com a função de Green correspondente à equação de movimento do campo livre.

Começemos nossa análise, definindo o *propagador causal*, D , como a soma dos propagadores PF e NF:

$$D = D^{(+)} + D^{(-)} . \quad (3.53)$$

Como é uma combinação linear de soluções da equação de movimento da teoria livre, ela também é uma solução.

Denotemos como \hat{D} em sua versão no espaço dos momentos, então satisfaz a relação

$$\hat{D} = \hat{D}^{(+)} + \hat{D}^{(-)} , \quad (3.54)$$

onde $\hat{D}^{(+)}$, $\hat{D}^{(-)}$ são os propagadores PF e NF no espaço dos momentos, respectivamente. Sendo os suportes de $\hat{D}^{(+)}$ e $\hat{D}^{(-)}$ contidos em \bar{V}^+ e \bar{V}^- , respectivamente então, o suporte de \hat{D} está contido em $\bar{V}^+ \cup \bar{V}^-$.

O resultado (3.50) nos induz a propor a seguinte representação analítica para a distribuição causal no espaço dos momentos:

$$\langle \hat{D}, \varphi \rangle = (2\pi)^{-2} \oint_{c_{all}} \hat{G}(k) \varphi(k_0) dk_0 , \quad (3.55)$$

onde φ é uma função de teste, c_{all} são todos os caminhos fechados, no sentido antihorário, que contêm individualmente cada polo da função de Green, $\hat{G}(k)$, associada à equação de movimento do campo livre*.

Da definição do propagador causal, temos que os propagadores PF e NF, no espaço dos momentos, são obtidos como uma bipartição dessa distribuição nos cones \bar{V}^+ e \bar{V}^- , respectivamente. Lembrando que os suportes dos propagadores PF e NF são hipersuperfícies definidas por $\hat{G}^{-1}(k) = 0$, e que a variável k_0 define uma curva que as corta. Então uma bipartição natural é conseguida ao introduzir na representação analítica de \hat{D} uma curva tipo tempo ou luz de parâmetro k_λ , da seguinte forma:

$$\langle \hat{D}^{(\pm)}, \varphi \rangle = (2\pi)^{-2} \theta(\pm k_\lambda) \oint_{c_{all}} \hat{G}(k) \varphi(k_0) dk_0 . \quad (3.56)$$

Essa relação define a representação analítica geral dos propagadores PF e NF. Observe-mos que como as hipersuperfícies podem estar sobre os cones superior e/ou inferior e inclusive conter a origem, em geral para que a bipartição seja bem definida temos que escolher k_λ adequadamente.

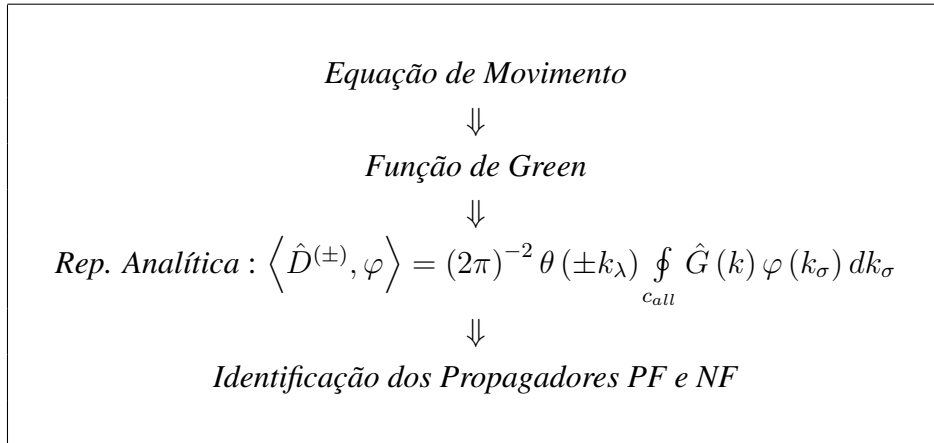
*Esta é calculada como o inverso da transformada de Fourier do operador diferencial associada à equação do campo livre, tal como veremos nas próximas seções.

A expressão (3.56) pode generalizar-se ainda mais se observarmos que os pólos não necessariamente são definidos pela variável k_0 . Em geral podemos escolher convenientemente alguma outra variável k_σ que corte as hipersuperfícies e então defina uma curva tipo tempo ou luz*. Finalmente, temos, que no caso mais geral a representação analítica dos propagadores PF e NF que é dado por:

$$\left\langle \hat{D}^{(\pm)}, \varphi \right\rangle = (2\pi)^{-2} \theta(\pm k_\lambda) \oint_{c_{all}} \hat{G}(k) \varphi(k_\sigma) dk_\sigma. \quad (3.57)$$

Lembremos que φ é uma função de teste, c_{all} são todos os caminhos fechados, no sentido antihorário, que contêm individualmente cada polo da função de Green, $\hat{G}(k)$. Observemos que como k_σ e k_λ são parâmetros de uma curva tipo tempo ou luz que passam pela origem, teremos que: $sgn(k_\sigma) sgn(k_\lambda) = 1$, cuja relação será de grande utilidade nos cálculos e deduções futuras.

Em resumo, nosso programa axiomático para obter os propagadores PF e NF segue o seguinte esquema:



Nota.- Após encontrar os propagadores PF e NF, calculamos logo o propagador causal no espaço dos momentos via (3.57). Por definição, o propagador causal no espaço de configurações é proporcional às relações de comutação ou anticomutação dos operadores de campos, aqui provaremos a localidade da teoria livre.

Referente aos estados ou espaço de estados, eles serão construídos seguindo os postulados 4 e 5, mas ao invés de dar um critério geral, ilustraremos essa construção para o caso escalar na seguinte subseção.

*Como no caso do light-cone gauge, a variável escolhida é $k^+ = \frac{k^0 + k^3}{\sqrt{2}}$

3.3 Campo Escalar

Nesta subsecção, mostraremos a sequência que seguiremos para encontrar e/ou construir as quantidades relevantes para a Teoria de Perturbação Causal. Para começar precisamos da equação de movimento do campo livre, que pode ser dada diretamente ou obtida a partir da lagrangiana do modelo, via as equações de Euler-Lagrange.

No campo escalar massivo hermitiano, $\phi(x)$, esta satisfaz a equação Klein-Gordon

$$\mathcal{H}(\partial)\phi(x) \equiv (\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (3.58)$$

No seguinte passo a solução dessa equação poderia ser dada e logo estabelecer as relações de comutação, para construir os propagadores e o espaço de estados. Optaremos por encontrar primeiro os propagadores PF e NF, seguindo o programa axiomático e, só depois deduziremos as relações de comutação e construiremos o espaço de estados.

3.3.1 Propagadores PF e NF Escalares

Para encontrar os propagadores PF e NF seguindo o algoritmo envolvido em (3.57), temos primeiro que obter a expressão da função de Green associada à equação de movimento que para o campo escalar tem a forma:

$$\hat{G}_m(k) = -[\mathcal{H}(p)]^{-1} = \frac{1}{p^2 - m^2}. \quad (3.59)$$

Agora devemos escolher o parâmetro ou variável dos pólos da função de Green, que é naturalmente obtida ao escrever (3.59) como:

$$\hat{G}_m(k) = \frac{1}{p_0^2 - \omega_m^2} = \frac{1}{(p_0 + \omega_m)(p_0 - \omega_m)}, \quad (3.60)$$

onde $\omega_m = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Daqui vemos que os pólos podem ser expressos na variável p_0 e estão fora da origem, então a representação analítica dos propagadores PF e NF podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \langle \hat{D}_m^{(\pm)}, \varphi \rangle &= (2\pi)^{-2} \oint_{c_{\pm}} \frac{\varphi(p_0)}{(p_0 + \omega_m)(p_0 - \omega_m)} dp_0 \\ &= (2\pi)^{-2} \oint_{c_{\pm}} \frac{1}{(p_0 \mp \omega_m)} \left[\frac{\varphi(p_0)}{(p_0 \pm \omega_m)} \right] dp_0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde c_{\pm} é o caminho de integração, no sentido anti-horário, que contém só o polo positivo (negativo) da função de Green.

Usando a integral de Cauchy, obtemos :

$$\langle \hat{D}_m^{(\pm)}, \varphi \rangle = (2\pi)^{-2} \left\{ 2\pi i \left[\frac{\varphi(p_0)}{p_0 \pm \omega_m} \right]_{p_0 = \pm \omega_m} \right\} = \frac{i}{2\pi} \left[\frac{\varphi(\pm \omega_m)}{p_0 \pm \omega_m} \right]. \quad (3.62)$$

Agora, usando a definição da distribuição δ -Dirac transladada:

$$\varphi(\pm \omega_m) = \langle \delta(p_0 \mp \omega_m), \varphi(p_0) \rangle. \quad (3.63)$$

Obteremos :

$$\hat{D}_m^{(\pm)}(p) = \pm \frac{i}{2\pi} \frac{\delta(p_0 \mp \omega_m)}{2\omega_m}. \quad (3.64)$$

E, usando a seguinte propriedade da distribuição δ -Dirac

$$\theta(\pm p_0) \delta(p_0^2 - \omega_m^2) = \frac{\delta(p_0 \mp \omega_m)}{2\omega_m}. \quad (3.65)$$

Finalmente, obtemos os *propagadores PF e NF escalares* no espaço dos momentos:

$$\hat{D}_m^{(\pm)}(k) = \pm \frac{i}{2\pi} \theta(\pm p_0) \delta(p^2 - m^2) = \pm \frac{i}{2\pi} \theta(\pm p_0) \delta(p_0^2 - \omega_m^2). \quad (3.66)$$

3.3.2 Relações de Comutação

Por definição temos que o comutador de campos escalares é dado por:

$$[\phi(x), \phi(y)] = -iD_m(x - y), \quad (3.67)$$

onde D_m é o propagador causal o que é obtido como a soma dos propagadores PF e NF, usando o resultado (3.66) o propagador causal escalar no espaço dos momentos vem dado por:

$$\hat{D}_m(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \delta(p^2 - m^2). \quad (3.68)$$

Este propagador no espaço de configurações é definido como a transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} D_m(x) &= (2\pi)^{-2} \int d^4p \hat{D}_m(p) e^{-ipx} \\ &= i(2\pi)^{-3} \int d^3p \int dp_0 \text{sgn}(p_0) \delta(p_0^2 - \omega_m^2) e^{-i(p_0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x})}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

O resultado desse cálculo é bem conhecido na literatura*, e se obtém que o *propagador causal escalar* tem a seguinte forma:

$$D_m(x) = (2\pi)^{-1} \text{sgn}(x_0) \left[\delta(x^2) + \theta(x^2) \frac{m}{2\sqrt{x^2}} J_1\left(m\sqrt{x^2}\right) \right], \quad (3.70)$$

*Por exemplo vide [20].

onde J_1 é a função de Bessel de primeiro ordem. Como o suporte da distribuição $\delta(x^2)$ está contido na superfície do cone de luz superior e inferior, e o suporte de $\theta(x^2)$ está contido na clausura do cone superior \bar{V}^+ ; então o suporte do propagador escalar causal, $D_m(x)$, está contido em $\bar{V}^+ \cup \bar{V}^-$.

Portanto, satisfaz a relação de comutação*:

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \text{ para } (x - y)^2 < 0, \quad (3.71)$$

que é identificada como a propriedade de localidade do campo escalar livre.

Em particular, a tempos iguais $x^0 = y^0 \rightarrow x^2 = -(\vec{x} - \vec{y})^2 < 0$ obteremos as conhecidas relações de comutação a tempos iguais (RCTI) :

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = 0 \quad (3.72)$$

3.3.3 Bóson Escalar

O campo escalar quantizado é a solução da equação de Klein-Gordon-Fock, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) [\tilde{a}(p) e^{-ipx} + \tilde{a}^\dagger(p) e^{ipx}], \quad (3.73)$$

ou

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^4p \theta(p_0) \delta(p_0^2 - \omega_m^2) [\tilde{a}(p) e^{-ipx} + \tilde{a}^\dagger(p) e^{ipx}] \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2\omega_m} [\tilde{a}(p) e^{-ipx} + \tilde{a}^\dagger(p) e^{ipx}]_{p_0=\omega_m}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde $\omega_m = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Definimos a parte positiva e negativa como se segue:

$$\phi^{(+)}(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \tilde{a}^\dagger(p) e^{ipx} = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2\omega_m} [\tilde{a}^\dagger(p) e^{ipx}]_{p_0=\omega_m} \quad (3.75)$$

$$\phi^{(-)}(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \tilde{a}(p) e^{-ipx} = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2\omega_m} [\tilde{a}(p) e^{-ipx}]_{p_0=\omega_m}. \quad (3.76)$$

Daqui temos que o comutador entre essas partes é expresso como:

$$\begin{aligned} [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] &= (2\pi)^{-3} \left[\int \frac{d^3p}{2\omega_m} [\tilde{a}(p) e^{-ipx}], \int \frac{d^3p'}{2\omega'_m} [\tilde{a}^\dagger(p') e^{ip'y}] \right] \\ &= (2\pi)^{-3} \int \int \frac{d^3p}{2\omega_m} \frac{d^3p'}{2\omega'_m} [\tilde{a}(p), \tilde{a}^\dagger(p')] e^{-i(px-p'y)}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

*Lembremos que em distribuições singulares não tem sentido calculá-las para pontos dentro do suporte, fora dele pode-se considerá-las como nulas.

onde é implícito $p_0 = \omega_m$, $p'_0 = \omega'_m$. Da subseção prévia temos que:

$$[\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] = -iD_m^{(+)}(x-y) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2\omega_m} e^{-ip(x-y)}. \quad (3.78)$$

Portanto, $\tilde{a}(p)$ e $\tilde{a}^\dagger(p')$ satisfazem a seguinte relação de comutação:

$$[\tilde{a}(p), \tilde{a}^\dagger(p')] = 2\omega_m \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (3.79)$$

Como veremos, esta relação é suficiente para construir o espaço de estados. Primeiro, mostraremos que $\tilde{a}(p)$, $\tilde{a}^\dagger(p')$ são distribuições a valor de operadores; segundo o postulado 4, ϕ é uma distribuição, então se $f \in \mathcal{J}(M^4)$ teremos por definição que

$$\phi[f] = \int d^4x f(x) \phi(x) \quad (3.80)$$

Substituindo ϕ de (3.73)

$$\begin{aligned} \phi[f] &= (2\pi)^{-3/2} \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \left[\tilde{a}(p) \int d^4x f(x) e^{-ipx} + \tilde{a}^\dagger(p) \int d^4x f(x) e^{ipx} \right] \\ &= (2\pi)^{1/2} \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \left[\tilde{a}(p) \hat{f}(-p) + \tilde{a}^\dagger(p) \hat{f}(p) \right], \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde \hat{f} é a transformada de Fourier de f , que é real para ϕ hermitiano.

Daqui deduzimos as definições das distribuições $\tilde{a}(p)$, $\tilde{a}^\dagger(p')$ como segue:

$$\tilde{a}(\hat{f}) = \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \tilde{a}(p) \hat{f}(-p) = \int \frac{d^3p}{2\omega_m} \tilde{a}(p) \hat{f}^*(p) \quad (3.82)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\hat{f}) = \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \tilde{a}^\dagger(p) \hat{f}(p) = \int \frac{d^3p}{2\omega_m} \tilde{a}^\dagger(p) \hat{f}(p), \quad (3.83)$$

onde usamos a identidade $\hat{f}^*(p) = \hat{f}(-p)$, válida para f real.

Agora, calculemos a relação de comutação entre $\tilde{a}(\hat{f})$ e $\tilde{a}^\dagger(\hat{g})$

$$[\tilde{a}(\hat{f}), \tilde{a}^\dagger(\hat{g})] = \int \frac{d^3p}{2\omega_m} \frac{d^3p'}{2\omega'_m} [\tilde{a}(p), \tilde{a}^\dagger(p')] \hat{f}(p) \hat{g}^*(p'). \quad (3.84)$$

Usando as relações de comutação (3.79), obtemos que

$$[\tilde{a}(\hat{f}), \tilde{a}^\dagger(\hat{g})] = \int \frac{d^3p}{2\omega_m} \hat{f}(p) \hat{g}^*(p). \quad (3.85)$$

E introduzindo a medida invariante de Lorentz:

$$d\mu_m = d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) = d^4p \frac{\delta(p_0 - \omega_m)}{2\omega_m} = \frac{d^3p}{2p_0} \Big|_{p_0=\omega_m}, \quad (3.86)$$

sobre a camada de massa $\mathcal{M}^+ = \{p \in M^4 / p^2 = m^2, p_0 > 0\}$. Teremos que:

$$\boxed{[\tilde{a}(\hat{f}), \tilde{a}^\dagger(\hat{g})] = \int_{\mathcal{M}^+} d\mu_m \hat{f}(p) \hat{g}^*(p) \stackrel{def}{=} (\hat{f}, \hat{g})}, \quad (3.87)$$

define a relação de comutação invariante de Lorentz. O produto escalar corresponde ao espaço de Hilbert $L^2(\mathcal{M}^+, d\mu_m)$.

Do postulado 4, temos que o espaço de estados é construído a partir do vácuo, $|\Omega\rangle$, e por condição espectral (postulado 5) temos que

$$\tilde{a}(\hat{f})|\Omega\rangle = 0, \quad \forall \hat{f} \in L^2, \quad (3.88)$$

daí se diz que \tilde{a} é um operador de aniquilação. Analisemos o estado $\tilde{a}^\dagger(\hat{f})|\Omega\rangle$ calculando sua norma

$$(\tilde{a}^\dagger(\hat{f})|\Omega\rangle, \tilde{a}^\dagger(\hat{f})|\Omega\rangle) = (|\Omega\rangle, \tilde{a}(\hat{f})\tilde{a}^\dagger(\hat{f})|\Omega\rangle) \quad (3.89)$$

Usando a relação de comutação (3.87) obtemos que:

$$(\tilde{a}^\dagger(\hat{f})|\Omega\rangle, \tilde{a}^\dagger(\hat{f})|\Omega\rangle) = \int_{\mathcal{M}^+} d\mu_m |\hat{f}(p)|^2 = (\hat{f}, \hat{f}) < \infty. \quad (3.90)$$

O operador $\tilde{a}^\dagger(\hat{f})$ cria um estado de norma $(\hat{f}, \hat{f})^{1/2}$ a partir de $|\Omega\rangle$, ao fazermos isso para todo $\hat{f} \in L^2(\mathcal{M}^+, d\mu_m)$, definiremos um espaço de estados \mathcal{H}_1

$$\tilde{a}^\dagger : L^2(\mathcal{M}^+, d\mu_m) \rightarrow \mathcal{H}_1. \quad (3.91)$$

E, similarmente, ao resultado (3.87), encontramos que

$$(\tilde{a}^\dagger(\hat{f})|\Omega\rangle, \tilde{a}^\dagger(\hat{g})|\Omega\rangle) = \int_{\mathcal{M}^+} d\mu_m \hat{f}(p) \hat{g}^*(p) = (\hat{f}, \hat{g}). \quad (3.92)$$

Portanto, $L^2(\mathcal{M}^+, d\mu_m)$ e \mathcal{H}_1 são isomorfos e, então, se $L^2(\mathcal{M}^+, d\mu_m)$ é separável, teremos que o espaço de estados \mathcal{H}_1 será um espaço de Hilbert também separável. Os estados são interpretados como funções pacotes de onda $\hat{f}(p)$ com $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, portanto \mathcal{H}_1 representa o espaço de estados de uma partícula de massa m . Daqui se diz que \tilde{a}^\dagger é um operador de criação de estados de uma partícula, se definimos como \mathcal{H}_0 o espaço de Hilbert unidimensional ao qual pertence o vácuo, podemos afirmar que:

$$\tilde{a}^\dagger(L^2) : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1. \quad (3.93)$$

Se continuarmos com esse processo, via produtos tensoriais, poderíamos construir um espaço de estados de n partículas idênticas. Do princípio de simetrização para este caso os estados devem ser completamente simétricos e denotaremos a este espaço de estados como $\mathcal{H}_{1+}^{\otimes n}$. Por

exemplo, se contruimos um estado de n -partículas com as funções de onda $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_n$ esse terá a forma:

$$\left| \hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_n \right\rangle_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{j=1}^n \tilde{a}^\dagger(\hat{f}_j) |\Omega\rangle, \quad (3.94)$$

onde a notação $\left| \hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_n \right\rangle_+$ faz referência ao isomorfismo com o espaço que contém as funções de onda completamente simétricas $\left(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_n \right)_+$.

Finalmente, o espaço de estados que contém todas as configurações possíveis de partículas idênticas vem dado pela soma direta

$$\mathcal{F}_+(\mathcal{H}_1) \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{1+}^{\otimes n} = \mathcal{H}, \quad (3.95)$$

onde $\mathcal{H}_{1+}^{\otimes 0} = \mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_{1+}^{\otimes 1} = \mathcal{H}_1$. Esse espaço de estados satisfaz as propriedades de um espaço de Hilbert, conhecido como o espaço de Hilbert-Fock gerado pelo campo escalar hermitiano.

3.4 Campo Fermiônico

O campo fermiônico da teoria está representado pelos campos de Dirac ψ_α e seu conjugado $\bar{\psi}_\alpha$, com quatro componentes espinoriais $\alpha = 1, 2, 3, 4$ cada uma delas. A teoria de campo livre de Dirac considera a lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} \left(i \overleftrightarrow{\not{\partial}} - m \right) \psi, \quad (3.96)$$

onde $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ e γ^μ são matrizes 4×4 que satisfazem o álgebra de Dirac *, e o operador diferencial $\overleftrightarrow{\partial}$ é definido como $A \overleftrightarrow{\partial} B = A \partial B - (\partial A) B$.

Obtemos daqui as equações de movimento do campo spinorial livre, conhecidas como equações de Dirac:

$$\mathcal{D}(\partial) \psi = (i \not{\partial} - m) \psi = 0, \quad \bar{\psi} \overleftarrow{\mathcal{D}}(\partial) = \bar{\psi} (i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0. \quad (3.97)$$

3.4.1 Propagadores PF e NF Fermiônicos

A função de Green correspondente à equação de Dirac é dado por:

$$\hat{G}(k) = -[\mathcal{D}(k)]^{-1} = \frac{\not{k} + m}{p^2 - m^2} = (\not{k} + m) \hat{G}_m(k), \quad (3.98)$$

* $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

onde $\hat{G}_m(k)$ é a função de Green escalar, daí p_0 é o parâmetro do polo, então, podemos escrever $\hat{G}(k)$ como

$$\hat{G}(k) = \frac{(\not{k} + m)}{p_0^2 - \omega_m^2}. \quad (3.99)$$

Vemos assim que o fator $(\not{k} + m)$ não cancela nenhum dos pólos, então o *propagador PF* e *NF fermiônico* são dados por:

$$\hat{S}^{(\pm)}(k) = (\not{k} + m) \hat{D}_m^{(\pm)}(p), \quad (3.100)$$

onde $\hat{D}_m^{(\pm)}(p)$ são os propagadores PF e NF escalares dados na seção anterior.

3.4.2 Relação de Anticomutação

Usando o resultado (3.100) obtemos o propagador causal fermiônico é dado por:

$$\hat{S}(k) = (\not{k} + m) \hat{D}_m(p). \quad (3.101)$$

Então no espaço de configurações o *propagador causal fermiônico* pode ser escrito como:

$$S(x) = (i \not{\partial} + m) D_m(x), \quad (3.102)$$

onde $D_m(x)$ é o propagador causal escalar obtido na seção prévia. Como o suporte de uma distribuição contém o suporte de suas derivadas,

$$\text{supp}S(x) \subset \text{supp}D_m(x) \subset \bar{V}^+(x) \cup \bar{V}^-(x) \quad (3.103)$$

então, o propagador causal fermiônico tem suporte causal.

Daqui, por definição, teremos que o anticomutador fermiônico é dado por:

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = -i [(i \not{\partial} + m) D_m](x - y). \quad (3.104)$$

Da expressão (3.102), separemos a parte o propagador causal fermiônico, em $x^0 = 0$, na parte temporal, espacial e massiva:

$$S(x) = \left[(i \not{\partial}^0 + i \vec{\not{\partial}} + m) D_m(x) \right]_{x^0=0}, \quad (3.105)$$

onde $\not{\partial}^0 = \gamma^0 \partial_0$, $\vec{\not{\partial}} = \sum_{i=1}^3 \gamma^i \partial_i$. Como a parte massiva e espacial não são explícitos de x^0 , então podemos considerar diretamente $x^0 = 0$ em $D_m(x)$. Do resultado, teremos portanto:

$$[\vec{S} + S^m](0, \vec{x}) = (i \vec{\not{\partial}} + m) D_m(0, \vec{x}) = 0. \quad (3.106)$$

Para a parte temporal, consideremos a expansão de Fourier do propagador causal escalar:

$$\begin{aligned} S^0(x) &= i \not{\partial}^0 D_m(x) = -\gamma^0 (2\pi)^{-3} \int d^3p \int dp_0 \operatorname{sgn}(p_0) \delta(p_0^2 - \omega_m^2) \partial_0 e^{-i(p_0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \\ &= i\gamma^0 (2\pi)^{-3} \int d^3p \int dp_0 |p_0| \delta(p_0^2 - \omega_m^2) e^{-i(p_0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} . \end{aligned} \quad (3.107)$$

Agora fazemos $x^0 = 0$

$$\begin{aligned} S^0(0, \vec{x}) &= i\gamma^0 (2\pi)^{-3} \int d^3p \int dp_0 |p_0| \delta(p_0^2 - \omega_m^2) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \\ &= i\gamma^0 (2\pi)^{-3} \int d^3p e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} . \end{aligned} \quad (3.108)$$

Identificando a δ -Dirac espacial:

$$S^0(0, \vec{x}) = i\gamma^0 \delta(\vec{x}) . \quad (3.109)$$

Agregando a esse resultado os obtidos para a parte espacial e massiva, finalmente obtemos o propagador causal fermiônico em $x^0 = 0$

$$S(0, \vec{x}) = i\gamma^0 \delta(\vec{x}) \quad (3.110)$$

Então, o anticomutador fermiônico é dado por:

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}_{x^0=y^0} = \gamma^0 \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

3.4.3 Férmions de Dirac

O campo Dirac quantizado, são as soluções da equação de Dirac e, tem a forma:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{s=\pm 1} [b_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_s^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) e^{ipx}] . \quad (3.112)$$

E seu conjugado adjunto tem a forma:

$$\bar{\psi}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{s=\pm 1} [b_s^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}_s(\mathbf{p}) e^{ipx} + d_s(\mathbf{p}) \bar{v}_s(\mathbf{p}) e^{-ipx}] . \quad (3.113)$$

Essas expressões são implícitas na camada de massa. Os spinors u e v são obtidas a partir das equações:

$$(\not{p} - m) u_s(\mathbf{p}) = 0 , \quad (\not{p} + m) v_s(-\mathbf{p}) = 0 . \quad (3.114)$$

e expandem os subespaços correspondentes ao espectro positivo e negativo do operador de Dirac, respectivamente. E são satisfeitas as identidades:

$$\sum_{s=\pm 1} u_s(\mathbf{p}) \bar{u}_s(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2E} ; \quad \sum_{s=\pm 1} v_s(\mathbf{p}) \bar{v}_s(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} - m}{2E} , \quad (3.115)$$

onde $E = \sqrt{p^2 + m^2}$. Definimos as partes positivas e negativas do campo de Dirac como segue:

$$\psi^{(+)}(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{s=\pm 1} [d_s^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) e^{ipx}] \quad (3.116)$$

$$\psi^{(-)}(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{s=\pm 1} [b_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) e^{-ipx}] \quad (3.117)$$

$$\bar{\psi}^{(+)}(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{s=\pm 1} [b_s^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}_s(\mathbf{p}) e^{ipx}] \quad (3.118)$$

$$\bar{\psi}^{(-)}(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{s=\pm 1} [d_s(\mathbf{p}) \bar{v}_s(\mathbf{p}) e^{-ipx}] . \quad (3.119)$$

Como os espinors de Dirac satisfazem a estatística de Fermi-Dirac, devemos considerar neste caso os anticomutadores entre as partes positivas e negativas, por exemplo, temos da definição prévia que:

$$\begin{aligned} & \left\{ \psi_a^{(-)}(x), \bar{\psi}_b^{(+)}(y) \right\} \\ &= (2\pi)^{-3} \left\{ \int d^3p \sum_{s=\pm 1} [b_s(\mathbf{p}) u_{sa}(\mathbf{p}) e^{-ipx}], \int d^3p' \sum_{s'=\pm 1} [b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \bar{u}_{s'b}(\mathbf{p}') e^{ip'y}] \right\} \\ &= (2\pi)^{-3} \int \int d^3p d^3p' \sum_{s=\pm 1} \sum_{s'=\pm 1} u_{sa}(\mathbf{p}) \bar{u}_{s'b}(\mathbf{p}') \left\{ b_s(\mathbf{p}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \right\} e^{-i(px-p'y)} , \quad (3.120) \end{aligned}$$

onde é implícito que $p_0 = E$ e $p'_0 = E'$. E da subseção prévia tínhamos que:

$$\left\{ \psi_a^{(-)}(x), \bar{\psi}_b^{(+)}(y) \right\} = (2\pi)^{-3} \int d^3p \frac{(\not{p} + m)_{ab}}{2E} e^{-ip(x-y)} . \quad (3.121)$$

Portanto, comparando essas relações obtemos que $b_s(\mathbf{p})$ e $b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')$ satisfazem a seguinte relação de anticomutação:

$$\left\{ b_s(\mathbf{p}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \right\} = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ss'} . \quad (3.122)$$

Similarmemente da seção prévia tínhamos que:

$$\left\{ \psi_a^{(+)}(x), \bar{\psi}_b^{(-)}(y) \right\} = (2\pi)^{-3} \int d^3p \frac{(\not{p} - m)_{ab}}{2E} e^{ip(x-y)} . \quad (3.123)$$

Daí também podemos concluir que

$$\left\{ d_s^\dagger(\mathbf{p}), d_{s'}(\mathbf{p}') \right\} = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ss'} . \quad (3.124)$$

Similarmemente ao caso escalar identificamos que os operadores b_s^\dagger, d_s^\dagger criam estados a partir do vácuo, e identificamos a b_s^\dagger como o criador de estados correspondentes ao elétron. Esse espaço

de estados que contêm a todas as configurações possíveis de elétrons idênticos vem dado pela soma direta

$$\mathcal{F}_+(\mathcal{H}_1) \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{1-}^{\otimes n} = \mathcal{H}, \quad (3.125)$$

onde $\mathcal{H}_{1-}^{\otimes 0} = \mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_{1-}^{\otimes 1} = \mathcal{H}_1$. O sinal negativo indica que esses estados são completamente antissimétricos.

3.5 Campo Eletromagnético de Podolsky

Nesta teoria de segunda ordem o campo electromagnético livre*, $A^\mu(x)$, é descrito pela densidade lagrangiana de Podolsky [4]:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial_\mu F^{\mu\sigma} \partial^\nu F_{\nu\sigma}, \quad (3.126)$$

onde a é uma constante real de dimensão inversa à energia, e $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Com as condições de contorno apropriadas, encontramos a lagrangiana equivalente:

$$\mathcal{L}_P = \frac{1}{2} A^\mu [(1 + a^2 \square) (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu)] A^\nu. \quad (3.127)$$

Daqui encontramos as equações de Euler Lagrange, via o princípio de Hamilton:

$$[(1 + a^2 \square) (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu)] A^\nu = 0. \quad (3.128)$$

Mas podemos provar que essa equação não tem inversa então, não teríamos uma função de Green, sendo ela o ponto de partida do nosso programa. Portanto, devemos modificar essa equação de tal maneira que consigamos uma que seja inversível. Um critério a seguir é considerar que essa equação modificada possa ser reduzida à equação de movimento do campo físico, como o campo elétrico que no eletromagnetismo de Podolsky, satisfaz a equação

$$(1 + a^2 \square) \square \vec{E} = 0. \quad (3.129)$$

Poderíamos considerar que o campo fundamental, A^μ , cumprirá a mesma equação do campo físico se adicionalmente considerarmos a condição de gauge de Lorenz generalizada:

$$\Omega[A] = (1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.130)$$

Para considerar essa condição na teoria de campos, o método usual é somar à lagrangiana (3.8) a chamada lagrangiana de gauge fixing:

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\xi} \Omega^2[A] = -\frac{1}{2\xi} [(1 + a^2 \square) \partial_\nu A^\nu]^2. \quad (3.131)$$

*Ou campo potencial, que é o campo fundamental dessa teoria de campos.

Mas isso nos leva à seguinte equação de movimento:

$$\left[(1 + a^2 \square) (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) + \frac{1}{\xi} (1 + a^2 \square)^2 \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu = 0. \quad (3.132)$$

Observando que para nenhum ξ a equação de movimento se reduz à equação do campo físico. O problema surge porque consideramos um \mathcal{L}_{fix} que nos leva a uma equação de ordem 6, quando queremos obter uma equação de ordem 4. Um critério razoável é considerar um \mathcal{L}_{fix} tal que não mude a ordem da equação de movimento.

Seguindo esse critério encontramos* a seguinte lagrangiana de gauge fixing:

$$\mathcal{L}_{fix}^{no-mix} = -\frac{1}{2\xi} (\partial.A) (1 + a^2 \square) (\partial.A), \quad (3.133)$$

onde $\partial.A = \partial_\mu A^\mu$.

Assim a nova lagrangiana para o campo de Podolsky tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial_\mu F^{\mu\sigma} \partial^\nu F_{\nu\sigma} - \frac{1}{2\xi} (\partial.A) (1 + a^2 \square) (\partial.A). \quad (3.134)$$

Para esse caso, obtemos a seguinte equação de movimento:

$$\mathcal{E}_{\mu\nu}(\partial) A^\nu \equiv (1 + a^2 \square) \left[(\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) + \frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu = 0. \quad (3.135)$$

Daqui vemos que para $\xi = 1$, o campo fundamental irá satisfazer a mesma equação do campo físico. E, como veremos a continuação é inversível.

3.5.1 Propagadores PF e NF Eletromagnéticos

A função de Green correspondente à equação de movimento (3.135), no espaço dos momentos é dada por:

$$\hat{G}_{\mu\nu}(k) = -[\mathcal{E}_{\mu\nu}(k)]^{-1} = \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{(1 - a^2 k^2) k^2}, \quad (3.136)$$

Introduzindo a definição da massa de Podolsky $m_a = \frac{1}{a}$, obtemos a função de Green que pode ser escrita como:

$$\hat{G}_{\mu\nu}(k) = -g_{\mu\nu} \frac{m_a^2}{(k^2 - m_a^2) k^2} + (1 - \xi) k_\mu k_\nu \frac{m_a^2}{(k^2 - m_a^2) k^4}. \quad (3.137)$$

*Para maior detalhe deste critério vide o Apêndice E e F.

Separando os pólos simples e duplos:

$$\frac{1}{(k^2 - m_a^2) k^2} = \frac{1}{m_a^2} \left(\frac{1}{k^2 - m_a^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad (3.138)$$

$$\frac{1}{(k^2 - m_a^2) k^4} = \frac{1}{m_a^4} \left(\frac{1}{k^2 - m_a^2} - \frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{m_a^2} \frac{1}{(k^2)^2}, \quad (3.139)$$

a função de Green tem a seguinte forma:

$$\hat{G}_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_a^2} \right) - (1 - \xi) k_\mu k_\nu \frac{1}{(k^2)^2} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \left(\frac{1}{k^2 - m_a^2} - \frac{1}{k^2} \right). \quad (3.140)$$

Esta função de Green também pode ser escrita como:

$$\hat{G}_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} \left[\hat{G}_0(k) - \hat{G}_{m_a}(k) \right] - (1 - \xi) k_\mu k_\nu \hat{G}'_0(k) + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \left[\hat{G}_{m_a}(k) - \hat{G}_0(k) \right], \quad (3.141)$$

onde $\hat{G}_0(k)$, $\hat{G}_{m_a}(k)$ são as funções de Green escalares correspondentes a um bóson de massa zero e massa de Podolsky, respectivamente, e $\hat{G}'_0(k) = (k_0^2 - \omega_0^2)^{-2}$. Vemos que neste caso os pólos são expressos na variável k_0 e estão fora da origem, e daqui os fatores $k_\mu k_\nu$ não cancelam nenhum dos pólos. Então, os propagadores PF e NF tem a forma:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\mu\nu}^{(\pm)}(k) &= g_{\mu\nu} \left(\hat{D}_0^{(\pm)}(k) - \hat{D}_{m_a}^{(\pm)}(k) \right) - (1 - \xi) k_\mu k_\nu \hat{D}'_0^{(\pm)}(k) \\ &\quad + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \left(\hat{D}_{m_a}^{(\pm)}(k) - \hat{D}_0^{(\pm)}(k) \right), \end{aligned} \quad (3.142)$$

onde $\hat{D}_0^{(\pm)}(k)$, $\hat{D}_{m_a}^{(\pm)}(k)$ são os propagadores PF e NF escalares de massa $m = 0$ e $m = m_a$, respectivamente. Restando calcular os propagadores PF e NF: $\hat{D}'_0^{(\pm)}(k)$.

- A representação analítica dos propagadores PF e NF, correspondentes à função de Green:

$\hat{G}'_0(k) = (k_0^2 - \omega_0^2)^{-2}$, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \langle \hat{D}'_0^{(\pm)}(k), \varphi \rangle &= (2\pi)^{-2} \oint_{c_\pm} \frac{\varphi(k_0)}{(k_0^2 - \omega_0^2)^2} dk_0 \\ &= (2\pi)^{-2} \oint_{c_\pm} \frac{1}{(k_0 \mp \omega_0)^2} \left[\frac{\varphi(k_0)}{(k_0 \pm \omega_0)^2} \right] dk_0 \end{aligned} \quad (3.143)$$

onde c_\pm é o caminho de integração, no sentido anti-horário, que contém só o polo positivo (negativo) da função de Green. Usando a integral de Cauchy, obtemos que:

$$\begin{aligned} \langle \hat{D}'_0^{(\pm)}(k), \varphi \rangle &= (2\pi)^{-2} \left\{ 2\pi i \frac{d}{dk_0} \left[\frac{\varphi(k_0)}{(k_0 \pm \omega_0)^2} \right]_{k_0 = \pm \omega_0} \right\} \\ &= \frac{i}{2\pi} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \frac{(1+j)!}{(1-j)!} \frac{\varphi^{(1-j)}(\pm \omega_0)}{(\pm 2\omega_0)^{2+j}}. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Agora, identificamos a definição da distribuição δ -Dirac e sua derivada transladada:

$$\varphi^{(1-j)}(\pm\omega_0) = (-1)^{-(1-j)} \langle \delta^{(1-j)}(k_0 \mp \omega_0), \varphi(k_0) \rangle . \quad (3.145)$$

Obteremos por comparação

$$\hat{D}'_0^{(\pm)}(k) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j=0}^1 \frac{(1+j)!}{(1-j)!} \frac{\delta^{(1-j)}(k_0 \mp \omega_0)}{(\pm 2\omega_0)^{2+j}} . \quad (3.146)$$

Usando a propriedade:

$$\theta(\pm\alpha) \delta^{(1)}(\alpha^2 - \beta^2) = \pm \sum_{j=0}^1 \frac{(1+j)!}{(1-j)!} \left[\frac{\delta^{(1-j)}(\alpha \mp \beta)}{(\pm 2\beta)^{2+j}} \right] ; \beta > 0 . \quad (3.147)$$

Obtemos os propagadores correspondentes para este caso

$$\frac{1}{(k_0^2 - \omega_0^2)^2} \rightarrow \hat{D}'_0^{(\pm)}(k) = \mp \frac{i}{2\pi} \theta(\pm k_0) \delta^{(1)}(k_0^2 - \omega_0^2) . \quad (3.148)$$

Finalmente obtemos os *propagadores PF e NF eletromagnéticos*

$$\hat{D}'_{\mu\nu}^{(\pm)}(k) = g_{\mu\nu} \left(\hat{D}'_0^{(\pm)}(k) - \hat{D}'_{m_a}^{(\pm)}(k) \right) - (1 - \xi) k_\mu k_\nu \hat{D}'_0^{(\pm)}(k) + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \left(\hat{D}'_{m_a}^{(\pm)}(k) - \hat{D}'_0^{(\pm)}(k) \right) , \quad (3.149)$$

onde

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \hat{D}'_0^{(\pm)}(k) = \pm \frac{i}{2\pi} \theta(\pm k_0) \delta(k^2) \quad (3.150)$$

$$\frac{1}{k^2 - m_a^2} \rightarrow \hat{D}'_{m_a}^{(\pm)}(k) = \pm \frac{i}{2\pi} \theta(\pm k_0) \delta(k^2 - m_a^2) \quad (3.151)$$

$$\frac{1}{(k^2)^2} \rightarrow \hat{D}'_0^{(\pm)}(k) = \mp \frac{i}{2\pi} \theta(\pm k_0) \delta^{(1)}(k^2) . \quad (3.152)$$

3.5.2 Relações de Comutação

Por definição, o comutador de campos eletromagnéticos é dado por:

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = -i D_{\mu\nu}(x - y) , \quad (3.153)$$

onde $D_{\mu\nu}$ é o propagador causal que é obtido como a soma dos propagadores PF e NF, usando o resultado (3.149) o propagador causal eletromagnético no espaço dos momentos é dado por:

$$\hat{D}_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} \left(\hat{D}_0(k) - \hat{D}_{m_a}(k) \right) - (1 - \xi) k_\mu k_\nu \hat{D}'_0(k) + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \left(\hat{D}_{m_a}(k) - \hat{D}_0(k) \right) , \quad (3.154)$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{D}_0(k) &= \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \delta(k^2) ; \hat{D}_{m_a}(k) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \delta(k^2 - m_a^2) \\ \hat{D}'_0(k) &= -\frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \delta^{(1)}(k^2) .\end{aligned}\quad (3.155)$$

Esse propagador no espaço de configurações é definido como a transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}D_{\mu\nu}(x) &= (2\pi)^{-2} \int d^4k \hat{D}_{\mu\nu}(k) e^{-ikx} \\ &= g_{\mu\nu} [D_0(x) - D_{m_a}(x)] + (1 - \xi) \partial_\mu \partial_\nu D'_0(x) \\ &\quad - (1 - \xi) \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m_a^2} [D_{m_a}(x) - D_0(x)]\end{aligned}\quad (3.156)$$

onde $D_0(x)$ e $D_{m_a}(x)$ são os propagadores causais escalares, já conhecidos na subseção 3.1. Agora, resta calcular a distribuição

$$D'_0(x) \equiv (2\pi)^{-2} \int d^4k \hat{D}'_0(k) e^{-ikx} . \quad (3.157)$$

- Para calcular D'_0 , será conveniente escrever $\hat{D}'_0(k)$ da forma:

$$\hat{D}'_0(k) = \left[\frac{d}{d(M^2)} \hat{D}_M(k) \right]_{M=0} . \quad (3.158)$$

Então:

$$D'_0(x) = \left[\frac{d}{d(M^2)} (2\pi)^{-2} \int d^4k \hat{D}_M(k) e^{-ikx} \right]_{M=0} = \left[\frac{d}{d(M^2)} D_M(x) \right]_{M=0} . \quad (3.159)$$

Lembrando que $D_M(x) = \frac{1}{2\pi} \text{sgn}(x_0) \left[\delta(x^2) - \theta(x^2) \frac{M}{2\sqrt{x^2}} J_1(M\sqrt{x^2}) \right]$, onde J_1 é a função de Bessel de primeiro ordem, então

$$\frac{M}{2\sqrt{x^2}} J_1(M\sqrt{x^2}) = \frac{1}{4} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+1)!} \left(\frac{\sqrt{x^2}}{2} \right)^{2s} (M^2)^{s+1} . \quad (3.160)$$

Daqui

$$\frac{d}{d(M^2)} \left[\frac{M}{2\sqrt{x^2}} J_1(M\sqrt{x^2}) \right] = \frac{1}{4} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!s!} \left(\frac{\sqrt{x^2}}{2} \right)^{2s} (M^2)^s = \frac{1}{4} J_0(M\sqrt{x^2}) , \quad (3.161)$$

onde J_0 é a função de Bessel de ordem zero. Portanto,

$$D'_0(x) = -\frac{1}{8\pi} \text{sgn}(x_0) \theta(x^2) J_0(M\sqrt{x^2}) . \quad (3.162)$$

Finalmente, temos que o *propagador causal eletromagnético* no espaço de configurações tem a forma

$$\boxed{D_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} [D_0(x) - D_{m_a}(x)] + (1 - \xi) \partial_\mu \partial_\nu D'_0(x) - (1 - \xi) \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m_a^2} [D_{m_a}(x) - D_0(x)] ,} \quad (3.163)$$

onde

$$\begin{aligned} D_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \text{sgn}(x_0) \delta(x^2) ; D_{m_a}(x) = \frac{1}{2\pi} \text{sgn}(x_0) \left[\delta(x^2) - \theta(x^2) \frac{m_a}{2\sqrt{x^2}} J_1(m_a \sqrt{x^2}) \right] \\ D'_0(x) &= -\frac{1}{8\pi} \text{sgn}(x_0) \theta(x^2) \left[J_0(M\sqrt{x^2}) \right]_{M=0} = -\frac{1}{8\pi} \text{sgn}(x_0) \theta(x^2) . \end{aligned} \quad (3.164)$$

sendo J_0, J_1 as funções de Bessel de ordem zero e um, respectivamente. Como o suporte da distribuição $\delta(x^2)$ está contido na superfície do cone de luz superior e inferior, e o suporte de $\theta(x^2)$ está contido na clausura do cone superior, \bar{V}^+ , e isso também é válido para suas derivadas; então o suporte do propagador causal eletromagnético, $D_{\mu\nu}(x)$, está contido em $\bar{V}^+ \cup \bar{V}^-$.

Portanto, satisfaz a relação de comutação:

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = 0 \text{ para } (x - y)^2 < 0, \quad (3.165)$$

que é identificada como a propriedade de localidade do campo eletromagnético livre.

Em particular, a tempos iguais $x^0 = y^0 \rightarrow x^2 = -(\vec{x} - \vec{y})^2 < 0$ obteremos as conhecidas RCTI do campo eletromagnético livre:

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)]_{x^0=y^0} = 0 \quad (3.166)$$

3.5.3 Fóton de Podolsky

Consideraremos que o campo eletromagnético livre quantizado que melhor modela o fóton de Podolsky, é aquela que é solução da equação de movimento (3.135) para $\xi = 1$

$$(1 + a^2 \square) \square A^\mu = 0. \quad (3.167)$$

Então, podemos supor que a solução é dada por um campo tipo Maxwell que cumpre uma equação Klein-Gordon-Fock com massa nula:

$$\square A_\mu^{Max}(x) = 0. \quad (3.168)$$

E outra por um campo tipo Proca que cumpre uma equação Klein-Gordon com massa não nula:

$$(\square + m_a^2) A_\mu^{Pro}(x) = 0, \quad (3.169)$$

onde $m_a^2 = a^{-2}$. Estes dois campos são chamados de setores de Podolsky: A_μ^{Max} é o setor sem massa e A_μ^{Pro} é o setor massivo. Portanto, podemos escrever o campo eletromagnético que satisfaça (3.167) como segue:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{Max}(x) + A_\mu^{Pro}(x), \quad (3.170)$$

tal que

$$A_{\mu}^{Max}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathcal{M}_0^+} d\mu_0 [\tilde{a}_{\mu}(k) e^{-ikx} + \tilde{a}_{\mu}^{\dagger}(k) e^{ikx}] \quad (3.171)$$

$$A_{\mu}^{Pro}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathcal{M}_{m_a}^+} d\mu_{m_a} [\tilde{b}_{\mu}(k) e^{-ikx} + \tilde{b}_{\mu}^{\dagger}(k) e^{ikx}] . \quad (3.172)$$

Definimos as partes positiva e negativa de A_{μ}^{Max} :

$$A_{\mu}^{(+)}{}^{Max}(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathcal{M}_0^+} d\mu_0 \tilde{a}_{\mu}^{\dagger}(k) e^{ikx} = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega_0} [\tilde{a}_{\mu}^{\dagger}(k) e^{ikx}]_{k_0=\omega_0} \quad (3.173)$$

$$A_{\mu}^{(-)}{}^{Max}(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathcal{M}_0^+} d\mu_0 \tilde{a}_{\mu}(k) e^{-ikx} = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega_0} [\tilde{a}_{\mu}(k) e^{-ikx}]_{k_0=\omega_0} , \quad (3.174)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\vec{k}^2}$. Similarmente para A_{μ}^{Pro}

$$A_{\mu}^{(+)}{}^{Pro}(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathcal{M}_{m_a}^+} d\mu_{m_a} \tilde{b}_{\mu}^{\dagger}(k) e^{ikx} = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega_{m_a}} [\tilde{b}_{\mu}^{\dagger}(k) e^{ikx}]_{k_0=\omega_{m_a}} \quad (3.175)$$

$$A_{\mu}^{(-)}{}^{Pro}(x) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathcal{M}_{m_a}^+} d\mu_{m_a} \tilde{b}_{\mu}(k) e^{-ikx} = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega_{m_a}} [\tilde{b}_{\mu}(k) e^{-ikx}]_{k_0=\omega_{m_a}} , \quad (3.176)$$

onde neste caso $\omega_{m_a} = \sqrt{\vec{k}^2 + m_a^2}$.

Daqui temos que o comutador entre as partes positiva e negativa do campo eletromagnético A_{μ} é expresso como:

$$\begin{aligned} & (2\pi)^3 [A_{\mu}^{(-)}(x), A_{\nu}^{(+)}(y)] \quad (3.177) \\ = & \int \frac{d^3k}{2\omega_0} \frac{d^3k'}{2\omega_0'} [\tilde{a}_{\mu}(k), \tilde{a}_{\nu}^{\dagger}(k')] e^{-i(kx-k'y)} + \int \frac{d^3k}{2\omega_0} \frac{d^3k'}{2\omega_{m_a}'} [\tilde{a}_{\mu}(k), \tilde{b}_{\nu}^{\dagger}(k')] e^{-i(kx-k'y)} \\ & + \int \frac{d^3k}{2\omega_{m_a}} \frac{d^3k'}{2\omega_0'} [\tilde{b}_{\mu}(k), \tilde{a}_{\nu}^{\dagger}(k')] e^{-i(kx-k'y)} + \int \frac{d^3k}{2\omega_{m_a}} \frac{d^3k'}{2\omega_{m_a}'} [\tilde{b}_{\mu}(k), \tilde{b}_{\nu}^{\dagger}(k')] e^{-i(kx-k'y)} . \end{aligned}$$

Da seção prévia temos que:

$$\begin{aligned} [A_{\mu}^{(-)}(x), A_{\nu}^{(+)}(y)] & = iD_{\mu\nu}^{(+)}(x-y) = ig_{\mu\nu} [D_0^{(+)}(x) - D_{m_a}^{(+)}(x)] \\ & = -(2\pi)^{-3} g_{\mu\nu} \left[\int \frac{d^3k}{2\omega_0} e^{-ik(x-y)} - \int \frac{d^3k}{2\omega_{m_a}} e^{-ik(x-y)} \right] . \quad (3.178) \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{a}_\mu, \tilde{a}_\nu^\dagger, \tilde{b}_\mu, \tilde{b}_\nu^\dagger$ satisfazem as seguinte relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\tilde{a}_\mu(k), \tilde{a}_\nu^\dagger(k')] &= -2g_{\mu\nu}\omega_0\delta(\vec{k} - \vec{k}') ; [\tilde{b}_\mu(k), \tilde{b}_\nu^\dagger(k')] = 2g_{\mu\nu}\omega_{m_a}\delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [\tilde{a}_\mu(k), \tilde{b}_\nu^\dagger(k')] &= [\tilde{b}_\mu(k), \tilde{a}_\nu^\dagger(k')] = 0 . \end{aligned}$$

(3.179)

Da última parte temos que em aparência os operadores $\tilde{a}_\nu^\dagger, \tilde{b}_\nu^\dagger$ criam estados independentemente; e que esses estados estão na camada de massa 0 e m_a , respectivamente. Assim temos também que os estados criados por \tilde{b}_ν^\dagger vão contribuir, só quando se considerem energias de valores não menores a m_a .

A nível clássico encontramos para o campo elétrico livre*, que na parte transversal tanto a parte tipo Maxwell como Proca contribuem, mas na parte longitudinal a única que contribui é a parte tipo Proca. Esses resultados deveram ser refletidos a nível quântico†.

3.6 Primeiros Termos Perturbativos

Os primeiros termos perturbativos estão diretamente relacionados ao termo base indutivo e a distribuição T_1 para a eletrodinâmica generalizada esta é:

$$T_1(x) = -ie : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x) , \quad (3.180)$$

onde os operadores de campo são assintoticamente livres.

O seguinte passo é obter \tilde{T}_1 , de sua definição temos que:

$$\tilde{T}_1(x) = -T_1(x) . \quad (3.181)$$

Com o par $\{T_1, \tilde{T}_1\}$, encontramos as distribuições intermediárias R'_2 e A'_2 , que por definição são expressas como segue:

$$R'_2(x_1, x_2) = -T_1(x_2) T_1(x_1) \quad (3.182)$$

$$A'_2(x_1, x_2) = -T_1(x_1) T_1(x_2) . \quad (3.183)$$

E daí podemos encontrar a distribuição causal D_2 como

$$D_2(x_1, x_2) = R'_2(x_1, x_2) - A'_2(x_1, x_2) = [T_1(x_1), T_1(x_2)] . \quad (3.184)$$

Finalmente com um processo de bipartição, encontraremos a distribuição retardada R_2 (ou avançada A_2) e então T_2 . A continuação, apresentaremos explicitamente as distribuições mencionadas nessa construção indutiva e faremos uma classificação dos diferentes casos possíveis que serão resolvidos (um a um) nos próximos capítulos.

*Vide o Apêndice F.

†No artigo de P.T. Matthews [50] podemos encontrar algumas tentativas da quantização do fóton de Podolsky.

3.6.1 Distribuições de Segunda Ordem

Começaremos pelas distribuições intermediárias de segunda ordem:

Distribuição Intermediária A'_2

Substituindo a expressão de T_1 em A'_2 , obtemos que:

$$\begin{aligned} A'_2(x_1, x_2) &= -T_1(x_1)T_1(x_2) \\ &= -[-ie: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) : A_\mu(x_1)] [-ie: \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : A_\nu(x_2)] \\ A'_2(x_1, x_2) &= e^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) : : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) . \end{aligned} \quad (3.185)$$

Da propriedade de produtos bósons-férmions:

$$A'_2(x_1, x_2) = e^2: \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x_1) \psi_b(x_1) : : \bar{\psi}_c(x_2) A_\nu(x_2) \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : . \quad (3.186)$$

Ou:

$$e^{-2}A'_2(x_1, x_2) =: \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x_1) \psi_b(x_1) : : \bar{\psi}_c(x_2) A_\nu(x_2) \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : . \quad (3.187)$$

Desenvolvendo os produtos normalmente ordenados (Teorema de Wick) :

$$\begin{aligned} e^{-2}A'_2(x_1, x_2) &= : \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x_1) \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) A_\nu(x_2) \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : \\ &+ : \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu \overbrace{A_\mu(x_1) \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) A_\nu(x_2)} \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : \\ &+ : \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x_1) \overbrace{\psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) A_\nu(x_2)} \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : \\ &+ : \overbrace{\bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x_1) \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) A_\nu(x_2)} \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : \\ &+ : \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu \overbrace{A_\mu(x_1) \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) A_\nu(x_2)} \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : \\ &+ : \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x_1) \overbrace{\psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) A_\nu(x_2)} \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : \\ &+ : \overbrace{\bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x_1) \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) A_\nu(x_2)} \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : \\ &+ : \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x_1) \overbrace{\psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) A_\nu(x_2)} \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : \end{aligned} \quad (3.188)$$

onde as contrações são indicadas pelo símbolo: $\overbrace{\quad}$.

Usando as relações de comutação:

$$\overbrace{A_\mu(x) A_\nu(y)} \equiv \{A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(+)}(y)\} = iD_{\mu\nu}^{(+)}(x-y) \quad (3.189)$$

$$\overbrace{\psi_e(x) \bar{\psi}_f(y)} \equiv \{\psi_e^{(-)}(x), \bar{\psi}_f^{(+)}(y)\} = \frac{1}{i}S_{ef}^{(+)}(x-y) \quad (3.190)$$

$$\overbrace{\bar{\psi}_e(x) \psi_f(y)} \equiv \{\bar{\psi}_e^{(-)}(x), \psi_f^{(+)}(y)\} = \frac{1}{i}S_{fe}^{(-)}(y-x) . \quad (3.191)$$

Obteremos que:

$$\begin{aligned}
e^{-2} A'_2(x_1, x_2) = & : \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x_1) \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) A_\nu(x_2) \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : \\
& +: \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu \psi_b(x_1) iD_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) \bar{\psi}_c(x_2) \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : \\
& +: \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x_1) \frac{1}{i} S_{bc}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_2) \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : \\
& +: \gamma_{ab}^\mu A_\mu(x_1) \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) A_\nu(x_2) \gamma_{cd}^\nu \frac{1}{i} S_{da}^{(-)}(x_2 - x_1) : \\
& +: \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu iD_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) \frac{1}{i} S_{bc}^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma_{cd}^\nu \psi_d(x_2) : \\
& +: \gamma_{ab}^\mu \psi_b(x_1) iD_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) \bar{\psi}_c(x_2) \gamma_{cd}^\nu \frac{1}{i} S_{da}^{(-)}(x_2 - x_1) : \\
& +: A_\mu(x_1) \gamma_{ab}^\mu \frac{1}{i} S_{bc}^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma_{cd}^\nu \frac{1}{i} S_{da}^{(-)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_2) : \\
& + \frac{1}{i} S_{bc}^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma_{cd}^\nu iD_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) \frac{1}{i} S_{da}^{(-)}(x_2 - x_1) \gamma_{ab}^\mu . \quad (3.192)
\end{aligned}$$

Contraíndo os índices fermiônicos, sendo necessário, em alguns casos usar a propriedade de reordenamento de férmions dentro de um produto. Os resultados obtidos são classificados da seguinte forma:

$$A_2'^{(0)}(x_1, x_2) = e^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) A_\nu(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : \quad (3.193)$$

$$A_2'^{(1)}(x_1, x_2) = ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : \quad (3.194)$$

$$A_2'^{(2)}(x_1, x_2) = ie^2 : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu A_\nu(x_2) S^{(-)}(x_2 - x_1) A_\mu(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) : \quad (3.195)$$

$$A_2'^{(3)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) S^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : \quad (3.196)$$

$$A_2'^{(4)}(x_1, x_2) = -e^2 : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu S^{(-)}(x_2 - x_1) D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma^\mu \psi(x_1) : \quad (3.197)$$

$$A_2'^{(5)}(x_1, x_2) = e^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) S^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : \quad (3.198)$$

$$A_2'^{(6)}(x_1, x_2) = -e^2 : A_\mu(x_1) \text{tr} [\gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu S^{(-)}(x_2 - x_1)] A_\nu(x_2) : \quad (3.199)$$

$$A_2'^{(7)}(x_1, x_2) = (-ie^2) \text{tr} [S^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu S^{(-)}(x_2 - x_1) \gamma^\mu] D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) \quad (3.200)$$

Distribuição Intermediária R'_2

Por definição da distribuição intermediária R'_2 , pode-se encontrar a partir de A'_2 , fazendo a

substituição $x_1 \rightleftharpoons x_2$, e do resultado prévio obteremos:

$$\begin{aligned}
e^{-2}R'_2(x_1, x_2) = & : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\mu A_\mu(x_2) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_1) A_\nu(x_1) \gamma^\nu \psi(x_1) : \\
& + : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2) iD_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu \psi(x_1) : \\
& + : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\mu A_\mu(x_2) \frac{1}{i} S^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_1) \gamma^\nu \psi(x_1) : \\
& + (-1) : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) \frac{1}{i} S^{(-)}(x_1 - x_2) A_\mu(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2) : \\
& + : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\mu iD_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \frac{1}{i} S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\nu \psi(x_1) : \\
& + (-1) : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu \frac{1}{i} S^{(-)}(x_1 - x_2) iD_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_2) : \\
& + : A_\mu(x_2) \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{i} S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\nu \frac{1}{i} S^{(-)}(x_1 - x_2) \right] A_\nu(x_1) : \\
& + \text{tr} \left[\frac{1}{i} S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\nu \frac{1}{i} S^{(-)}(x_1 - x_2) \gamma^\mu \right] iD_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \quad (3.201)
\end{aligned}$$

Reordenando os bósons e os férmions nos casos que não se perca a sua forma contraída, teremos que:

$$\begin{aligned}
e^{-2}R'_2(x_1, x_2) = & : \bar{\psi}(x_1) A_\nu(x_1) \gamma^\nu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\mu A_\mu(x_2) \psi(x_2) : \\
& + : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu \psi(x_1) iD_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2) : \\
& + : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\mu A_\mu(x_2) \frac{1}{i} S^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_1) \gamma^\nu \psi(x_1) : \\
& + (-1) : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) \frac{1}{i} S^{(-)}(x_1 - x_2) A_\mu(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2) : \\
& + : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\mu iD_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \frac{1}{i} S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\nu \psi(x_1) : \\
& + (-1) : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu \frac{1}{i} S^{(-)}(x_1 - x_2) iD_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_2) : \\
& + : A_\nu(x_1) \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{i} S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\nu \frac{1}{i} S^{(-)}(x_1 - x_2) \right] A_\mu(x_2) : \\
& + \text{tr} \left[\frac{1}{i} S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\nu \frac{1}{i} S^{(-)}(x_1 - x_2) \gamma^\mu \right] iD_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \quad (3.202)
\end{aligned}$$

Renomeando, em alguns casos índices bosônicos, e usando a propriedade $D_{\mu\nu}^{(+)} = D_{\nu\mu}^{(+)}$, os resultados obtidos são classificados da seguinte forma:

$$R_2^{(0)}(x_1, x_2) = e^2 : \bar{\psi}(x_1) A_\mu(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu A_\nu(x_2) \psi(x_2) : \quad (3.203)$$

$$R_2^{(1)}(x_1, x_2) = ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : \quad (3.204)$$

$$R_2^{(2)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu A_\nu(x_2) S^{(+)}(x_2 - x_1) A_\mu(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) : \quad (3.205)$$

$$R_2^{(3)}(x_1, x_2) = ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) S^{(-)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : \quad (3.206)$$

$$R_2^{(4)}(x_1, x_2) = e^2 : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) : \quad (3.207)$$

$$R_2^{(5)}(x_1, x_2) = -e^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_2) D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\nu \psi(x_2) : \quad (3.208)$$

$$R_2^{(6)}(x_1, x_2) = -e^2 : A_\mu(x_1) \text{tr} [\gamma^\nu S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_2)] A_\nu(x_2) : \quad (3.209)$$

$$R_2^{(7)}(x_1, x_2) = (-ie^2) \text{tr} [S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\nu S^{(-)}(x_1 - x_2) \gamma^\mu] D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \quad (3.210)$$

Distribuição Causal D_2

A distribuição causal D_2 pode-se encontrar da relação:

$$D_2(x_1, x_2) = R_2'(x_1, x_2) - A_2'(x_1, x_2) . \quad (3.211)$$

Usando os resultados prévios, obteremos imediatamente que

$$D_2^{(1)} = -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) [D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) - D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1)] \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : (3.212)$$

$$D_2^{(2)} = -ie^2: \bar{\psi}(x_2) \not{A}(x_2) [S^{(+)}(x_2 - x_1) + S^{(-)}(x_2 - x_1)] \not{A}(x_1) \psi(x_1) : (3.213)$$

$$D_2^{(3)} = ie^2: \bar{\psi}(x_1) \not{A}(x_1) [S^{(-)}(x_1 - x_2) + S^{(+)}(x_1 - x_2)] \not{A}(x_2) \psi(x_2) : (3.214)$$

$$D_2^{(4)} = e^2: \bar{\psi}(x_2) \gamma^\mu [D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) S^{(+)}(x_2 - x_1) + S^{(-)}(x_2 - x_1) D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2)] \gamma^\nu \psi(x_1) : (3.215)$$

$$D_2^{(5)} = -e^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu [S^{(-)}(x_1 - x_2) D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) + D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) S^{(+)}(x_1 - x_2)] \gamma^\mu \psi(x_2) : (3.216)$$

$$D_2^{(6)} = e^2: A_\mu(x_1) tr [-\gamma^\nu S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_2) + \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu S^{(-)}(x_2 - x_1)] A_\nu(x_2) : (3.217)$$

$$D_2^{(7)} = ie^2 \{ -tr [S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\nu S^{(-)}(x_1 - x_2) \gamma^\mu] D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) + tr [S^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu S^{(-)}(x_2 - x_1) \gamma^\mu] D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) \} (3.218)$$

As distribuições obtidas podem ser classificadas segundo o processo em que aparecem:

<i>Processo</i>	<i>Distribuições</i>
Espalhamento Moeller	$A_2'^{(1)}, R_2'^{(1)}, D_2'^{(1)}$
Espalhamneto Compton	$A_2'^{(2)}, R_2'^{(2)}, D_2'^{(2)}$ $A_2'^{(3)}, R_2'^{(3)}, D_2'^{(3)}$
Auto-energia	$A_2'^{(4)}, R_2'^{(4)}, D_2'^{(4)}$ $A_2'^{(5)}, R_2'^{(5)}, D_2'^{(5)}$
Polarização do Vácuo	$A_2'^{(6)}, R_2'^{(6)}, D_2'^{(6)}$
Grafo do Vácuo	$A_2'^{(7)}, R_2'^{(7)}, D_2'^{(7)}$

3.6.2 Distribuições de Terceira ordem: Vértice

Continuando com o esquema indutivo, para obter o conjunto de terceira ordem $\{T_3\}$ precisamos do conjunto $\{T_1, \tilde{T}_1, T_2, \tilde{T}_2\}$.

Até agora conhecemos o conjunto de distribuições $\{T_1, \tilde{T}_1\}$:

$$T_1(x) = -ie: \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) : (3.219)$$

$$\tilde{T}_1(x) = -T_1(x) (3.220)$$

Vamos supor que após completar o programa indutivo da segunda ordem, T_2 tem a seguinte forma:

Espalhamento Moeller	$T_2^{(1)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) :$
Espalhamento Compton	$T_2^{(2)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_2) \not{A}(x_2) S^F(x_2 - x_1) \not{A}(x_1) \psi(x_1) :$
Espalhamento Compton	$T_2^{(3)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \not{A}(x_1) S^F(x_1 - x_2) \not{A}(x_2) \psi(x_2) :$
Auto-energia	$T_2^{(4)}(x_1, x_2) = i : \bar{\psi}(x_2) \Sigma(x_2 - x_1) \psi(x_1) :$
Auto-energia	$T_2^{(5)}(x_1, x_2) = i : \bar{\psi}(x_1) \Sigma(x_1 - x_2) \psi(x_2) :$
Polarização do Vácuo	$T_2^{(6)}(x_1, x_2) = -i : A_\mu(x_1) \Pi^{\mu\nu}(x_1 - x_2) A_\nu(x_2) :$
Grafo do Vácuo	$T_2^{(7)}(x_1, x_2) = i\Omega(x_1 - x_2)$

Por propriedade, \tilde{T}_2 é dado como segue:

$$\tilde{T}_2(x_1, x_2) = -T_2(x_1, x_2) + T_1(x_1) T_1(x_2) + T_1(x_2) T_1(x_1) . \quad (3.221)$$

Como:

$$A'_2(x_1, x_2) = -T_1(x_1) T_1(x_2) \quad (3.222)$$

$$R'_2(x_1, x_2) = -T_1(x_2) T_1(x_1) . \quad (3.223)$$

Então:

$$\tilde{T}_2(x_1, x_2) = -T_2(x_1, x_2) - A'_2(x_1, x_2) - R'_2(x_1, x_2) . \quad (3.224)$$

Com isso temos completo (implícitamente) o conjunto $\{T_1, \tilde{T}_1, T_2, \tilde{T}_2\}$ podendo, agora, calcular as distribuições intermediárias de terceira ordem:

$$R'_3(x_1, x_2, x_3) = T_2(x_1, x_3) \tilde{T}_1(x_2) + T_2(x_2, x_3) \tilde{T}_1(x_1) + T_1(x_3) \tilde{T}_2(x_1, x_2) \quad (3.225)$$

$$A'_3(x_1, x_2, x_3) = \tilde{T}_1(x_2) T_2(x_1, x_3) + \tilde{T}_1(x_1) T_2(x_2, x_3) + \tilde{T}_2(x_1, x_2) T_1(x_3) \quad (3.226)$$

Daqui podemos encontrar a distribuição causal D_3 , segundo sua definição:

$$D_3(x_1, x_2, x_3) = R'_3(x_1, x_2, x_3) - A'_3(x_1, x_2, x_3) . \quad (3.227)$$

Concentrando-se nos grafos que contribuem com o chamado vértice, definiremos essas contribuições para as distribuições da forma:

$$e^3 : \bar{\psi}(x_1) f(x_1, x_2, x_3) \psi(x_2) : A_\nu(x_3) , \quad (3.228)$$

onde $f(x_1, x_2, x_3)$ é uma distribuição numérica.

Portanto, as distribuições de dois pontos T_2 que contribuem são:

Espalh. Moeller	$T_2^{(1)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) :$
Espalh. Compton	$T_2^{(2)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_3) \gamma^\nu S^F(x_3 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) : : A_\mu(x_1) A_\nu(x_3) :$
Espalh. Compton	$T_2^{(3)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^F(x_1 - x_3) \gamma^\nu \psi(x_3) : : A_\mu(x_1) A_\nu(x_3) :$

Distribuição Intermediária R'_3 para o Vértice

Da definição geral:

$$R'_3(x_1, x_2, x_3) = T_2(x_1, x_3) \tilde{T}_1(x_2) + T_2(x_2, x_3) \tilde{T}_1(x_1) + T_1(x_3) \tilde{T}_2(x_1, x_2) . \quad (3.229)$$

Calculemos termo a termo:

**Vértice Fundamental - Espalhamento Compton :*

$$\begin{aligned} & R'_{31}(x_1, x_2, x_3) \\ = & T_2(x_1, x_3) \tilde{T}_1(x_2) \\ = & -T_2^{(3)}(x_1, x_3) T_1(x_2) \\ = & -e^3 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^F(x_1 - x_3) \gamma^\nu \psi(x_3) : : A_\mu(x_1) A_\nu(x_3) : : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : A_\lambda(x_2) . \end{aligned} \quad (3.230)$$

Usando o Teorema de Wick:

$$\begin{aligned} & R'_{31}(x_1, x_2, x_3) \\ = & -e^3 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^F(x_1 - x_3) \overbrace{\gamma^\nu \psi(x_3)} : : \overbrace{\bar{\psi}(x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2)} : : \overbrace{A_\mu(x_1) A_\nu(x_3)} : A_\lambda(x_2) \\ = & -e^3 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^F(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) . \end{aligned} \quad (3.231)$$

**Vértice Fundamental - Espalhamento Compton :*

$$\begin{aligned} & R'_{32}(x_1, x_2, x_3) \\ = & T_2(x_2, x_3) \tilde{T}_1(x_1) \\ = & -T_2^{(2)}(x_2, x_3) T_1(x_1) \\ = & -e^3 : \overbrace{\bar{\psi}_a(x_3) \gamma_{ab}^\nu S_{bc}^F(x_3 - x_2) \gamma_{cd}^\mu \psi_d(x_2)} : : \overbrace{\bar{\psi}_e(x_1) \gamma_{ef}^\lambda \psi_f(x_1)} : : \overbrace{A_\mu(x_2) A_\nu(x_3)} : A_\lambda(x_1) \\ = & -e^3 : \gamma_{ab}^\nu S_{bc}^F(x_3 - x_2) \gamma_{cd}^\mu \psi_d(x_2) \bar{\psi}_e(x_1) \gamma_{ef}^\lambda S_{fa}^{(-)}(x_1 - x_3) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) \\ = & e^3 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\lambda S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^F(x_3 - x_2) \gamma^\mu \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) . \end{aligned} \quad (3.232)$$

**Vértice Fundamental - Espalhamento Möeller:*

$$\begin{aligned} & R'_{33}(x_1, x_2, x_3) \\ = & T_1(x_3) \tilde{T}_2(x_1, x_2) \\ = & -T_1(x_3) T_2(x_1, x_2) - T_1(x_3) A'_2(x_1, x_2) - T_1(x_3) R'_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.233)$$

Daqui teremos as sub-contribuições:

1)

$$\begin{aligned} & R'_1(x_1, x_2, x_3) \\ = & -T_1(x_3) T_2(x_1, x_2) \\ = & -T_1(x_3) T_2^{(1)}(x_1, x_2) \\ = & -e^3 : \bar{\psi}_a(x_3) \gamma_{ab}^\nu \psi_b(x_3) : : \bar{\psi}_c(x_1) \gamma_{cd}^\mu \psi_d(x_1) \bar{\psi}_e(x_2) \gamma_{ef}^\lambda \psi_f(x_2) : D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) \\ = & -e^3 : \gamma_{ab}^\nu S_{bc}^{(+)}(x_3 - x_2) \bar{\psi}_c(x_1) \gamma_{cd}^\mu S_{da}^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma_{ef}^\lambda \psi_f(x_2) : D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) \\ = & -e^3 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) . \end{aligned} \quad (3.234)$$

2)

$$\begin{aligned}
& R'_{21}(x_1, x_2, x_3) \\
&= -T_1(x_3) A'_2(x_1, x_2) \\
&= e^3: \bar{\psi}_e(x_3) \gamma'_{ef} \psi_f(x_3) : : \bar{\psi}_a(x_1) \gamma''_{ab} \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) \gamma^\lambda_{cd} \psi_d(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) \\
&= e^3: \gamma'_{ef} S_{fc}^{(+)}(x_3 - x_2) \bar{\psi}_a(x_1) \gamma''_{ab} S_{be}^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\lambda_{cd} \psi_d(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) \\
&= e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) . \quad (3.235)
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
& R'_{22}(x_1, x_2, x_3) \\
&= -T_1(x_3) R'_2(x_1, x_2) \\
&= e^3: \bar{\psi}_e(x_3) \gamma'_{ef} \psi_f(x_3) : : \bar{\psi}_c(x_2) \gamma^\lambda_{cd} \psi_d(x_2) \bar{\psi}_a(x_1) \gamma''_{ab} \psi_b(x_1) : D_{\lambda\mu}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) \\
&= -e^3: \gamma'_{ef} S_{fc}^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda_{cd} \psi_d(x_2) \bar{\psi}_a(x_1) \gamma''_{ab} S_{be}^{(-)}(x_1 - x_3) : D_{\lambda\mu}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) \\
&= e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\lambda\mu}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) . \quad (3.236)
\end{aligned}$$

Antes de continuar unamos os resultados parciais:

$$\begin{aligned}
& R'_{31}(x_1, x_2, x_3) + R'_{21}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.237) \\
&= -e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^F(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) \\
&\quad + e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) ,
\end{aligned}$$

como

$$S^{ret} = -S^F + S^{(-)} \quad (3.238)$$

Então:

$$\begin{aligned}
& R'_{31}(x_1, x_2, x_3) + R'_{21}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.239) \\
&= e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{ret}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) .
\end{aligned}$$

Similarmente:

$$\begin{aligned}
& R'_{32}(x_1, x_2, x_3) + R'_{22}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.240) \\
&= -e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\lambda S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{av}(x_3 - x_2) \gamma^\mu \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) ,
\end{aligned}$$

onde usamos a simetria dos índices do propagador eletromagnético e :

$$S^{av} = -S^F - S^{(+)} \quad (3.241)$$

Em resumo, temos os resultados:

$$\begin{aligned}
R'_1 &= -e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) \\
R'_{31} + R'_{21} &= e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{ret}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) \\
R'_{32} + R'_{22} &= -e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{av}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) .
\end{aligned}$$

$$(3.242)$$

Distribuição Intermediária A'_3 para o Vértice

Da definição geral:

$$A'_3(x_1, x_2, x_3) = \tilde{T}_1(x_2) T_2(x_1, x_3) + \tilde{T}_1(x_1) T_2(x_2, x_3) + \tilde{T}_2(x_1, x_2) T_1(x_3) \quad (3.243)$$

Calculemos termo a termo:

**Vértice Fundamental - Espalhamento Compton :*

$$\begin{aligned} & A'_{31}(x_1, x_2, x_3) \\ = & \tilde{T}_1(x_2) T_2(x_1, x_3) \\ = & -T_1(x_2) T_2^{(3)}(x_1, x_3) \\ = & -e^3 : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^F(x_1 - x_3) \gamma^\nu \psi(x_3) : A_\lambda(x_2) : A_\mu(x_1) A_\nu(x_3) : \\ = & -e^3 : \overbrace{\bar{\psi}(x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^F(x_1 - x_3) \gamma^\nu \psi(x_3) : } : \overbrace{A_\lambda(x_2) : A_\mu(x_1) A_\nu(x_3) : } : \\ = & -e^3 : \gamma^\lambda \psi(x_2) \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^F(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) : D_{\lambda\mu}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) \\ = & e^3 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^F(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) . \quad (3.244) \end{aligned}$$

**Vértice Fundamental - Espalhamento Compton :*

$$\begin{aligned} & A'_{32}(x_1, x_2, x_3) \\ = & \tilde{T}_1(x_1) T_2(x_2, x_3) \\ = & -T_1(x_1) T_2^{(2)}(x_2, x_3) \\ = & -e^3 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\lambda \overbrace{\psi(x_1) : : \bar{\psi}(x_3) \gamma^\nu S^F(x_3 - x_2) \gamma^\mu \psi(x_2) : } : \overbrace{A_\lambda(x_1) : A_\mu(x_2) A_\nu(x_3) : } : \\ = & -e^3 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\lambda S^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^F(x_3 - x_2) \gamma^\mu \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) . \quad (3.245) \end{aligned}$$

**Vértice Fundamental - Espalhamento Möeller :*

$$\begin{aligned} & A'_{33}(x_1, x_2, x_3) \\ = & \tilde{T}_2(x_1, x_2) T_1(x_3) \\ = & -T_2(x_1, x_2) T_1(x_3) - A'_2(x_1, x_2) T_1(x_3) - R'_2(x_1, x_2) T_1(x_3) . \quad (3.246) \end{aligned}$$

Daqui teremos as sub-contribuições:

1)

$$\begin{aligned} & A'_1(x_1, x_2, x_3) \\ = & -T_2(x_1, x_2) T_1(x_3) \\ = & -T_2^{(1)}(x_1, x_2) T_1(x_3) \\ = & -e^3 : \bar{\psi}_c(x_1) \gamma^\mu_{cd} \psi_d(x_1) \bar{\psi}_e(x_2) \gamma^\lambda_{ef} \psi_f(x_2) : : \bar{\psi}_a(x_3) \gamma^\nu_{ab} \psi_b(x_3) : D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) \\ = & -e^3 : \bar{\psi}_c(x_1) \gamma^\mu_{cd} S_{da}^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma^\lambda_{ef} \psi_f(x_2) \gamma^\nu_{ab} S_{be}^{(-)}(x_3 - x_2) : D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) \\ = & -e^3 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) . \quad (3.247) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
& A'_{21}(x_1, x_2, x_3) \\
&= -A'_2(x_1, x_2) T_1(x_3) \\
&= e^3: \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) \gamma_{cd}^\lambda \psi_d(x_2) : : \bar{\psi}_e(x_3) \gamma_{ef}^\nu \psi_f(x_3) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) \\
&= e^3: \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu S_{be}^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma_{ef}^\nu S_{fc}^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma_{cd}^\lambda \psi_d(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) \\
&= e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) . \quad (3.248)
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
& A'_{22}(x_1, x_2, x_3) \\
&= -R'_2(x_1, x_2) T_1(x_3) \\
&= e^3: \bar{\psi}_c(x_2) \gamma_{cd}^\lambda \psi_d(x_2) \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu \psi_b(x_1) : : \bar{\psi}_e(x_3) \gamma_{ef}^\nu \psi_f(x_3) : D_{\lambda\mu}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) \\
&= -e^3: S_{fc}^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma_{cd}^\lambda \psi_d(x_2) \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu S_{be}^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma_{ef}^\nu : D_{\lambda\mu}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) \\
&= e^3: \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\mu S_{be}^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma_{ef}^\nu S_{fc}^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma_{cd}^\lambda \psi_d(x_2) : D_{\lambda\mu}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) \\
&= e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) . \quad (3.249)
\end{aligned}$$

Antes de continuar unamos os resultados parciais:

$$\begin{aligned}
& A'_{31}(x_1, x_2, x_3) + A'_{22}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.250) \\
&= -e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{av}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) .
\end{aligned}$$

Similarmente:

$$\begin{aligned}
& A'_{32}(x_1, x_2, x_3) + A'_{21}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.251) \\
&= e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\lambda S^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{ret}(x_3 - x_2) \gamma^\mu \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) ,
\end{aligned}$$

onde usamos:

$$S^{av} = -S^F - S^{(+)} \quad (3.252)$$

$$S^{ret} = -S^F + S^{(-)} . \quad (3.253)$$

Em resumo, temos os resultados:

$$\begin{aligned}
& A'_1 = -e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) A_\nu(x_3) \\
& A'_{31} + A'_{22} = -e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{av}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) A_\nu(x_3) \\
& A'_{32} + A'_{21} = e^3: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{ret}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) : D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_3)
\end{aligned}$$

(3.254)

Distribuição Causal D_3 para o Vértice

Da definição geral:

$$D_3 = R'_3 - A'_3 . \quad (3.255)$$

E como procuramos distribuições tal que a distribuição causal é da forma:

$$D_3(x_1, x_2, x_3) = -e^3 : \bar{\psi}(x_1) D^\nu(x_1, x_2, x_3) \psi(x_2) : A_\nu(x_3) . \quad (3.256)$$

Dos resultados anteriores obtemos, finalmente, a distribuição causal associada ao vértice:

$$\begin{aligned} D^\nu(x_1, x_2, x_3) = & \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) \\ & - \gamma^\mu S^{ret}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) \\ & + \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{av}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) \\ & - \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) \\ & - \gamma^\mu S^{av}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) \\ & + \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{ret}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (3.257)$$

Capítulo 4

Espalhamento em GQED_4

Neste capítulo aplicaremos a teoria de perturbação causal para encontrar as amplitudes de dispersão Moller e Compton da GQED .

4.1 Introdução

Neste capítulo começaremos com o tópico principal da TPC, que como todo formalismo da *Matriz-S*, é calcular as amplitudes de transição de todas as configurações possíveis de partículas assintoticamente livres. Conhecer essas amplitudes nos permite conhecer logo as probabilidades de transição dessas configurações, isto que pertence ao estudo de processos de espalhamento, em que além das probabilidades calcula-se as seções de choque diferencial e total. No caso da eletrodinâmica consideramos como as partículas livres os: fótons, elétrons e pósitrons. Em particular, nos deteremos nos seguintes casos de espalhamento (elástico) entre duas partículas:

Espalhamento	Processo
<i>Moeller</i>	$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$
<i>Compton</i>	$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$

os outros processos possíveis, como são o espalhamento elétron-pósitron (Bhabha) e a chamada criação de pares, podem ser obtidos a partir dos que foram considerados nesta tese ao aplicar as relações de *crossing*.

O desenvolvimento da TPC aplicado a GQED_4 , para esses espalhamentos, serão apresentados na segunda ordem perturbativa. No decorrer da construção causal obteremos os *propagadores retardados e de Feynman eletromagnéticos e fermiônicos*, nessa ordem, consistentes com os princípios físicos gerais (causalidade e invariância relativística) e no marco rigoroso da teoria de distribuições.

4.2 Espalhamento Moeller

Neste espalhamento temos dois elétrons antes da colisão (iniciais) e dois elétrons após a colisão (finais). Vamos supor que esses elétrons assintoticamente livres são descritos pelos estados:

$$|\psi_i\rangle = b_{s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) b_{\sigma_i}^\dagger(\mathbf{q}_i) |\Omega\rangle \quad (4.1)$$

$$|\psi_f\rangle = b_{s_f}^\dagger(\mathbf{p}_f) b_{\sigma_f}^\dagger(\mathbf{q}_f) |\Omega\rangle, \quad (4.2)$$

onde (\mathbf{p}_i, σ_i) e (\mathbf{q}_i, s_i) são os momentos e espins dos elétrons iniciais, (\mathbf{p}_f, s_f) e (\mathbf{q}_f, σ_f) são os momentos e espins dos elétrons finais.

Lembrando que cada termo perturbativo do operador de dispersão S são proporcionais a

$$T_n^g(x) =: \prod_{j=1}^{f_g} \bar{\psi}(x_{k_j}) t_g(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{j=1}^{f_g} \psi(x_{n_j}) : : \prod_{j=1}^{l_g} A_{\mu_{m_j}}(x_{m_j}) : , \quad (4.3)$$

onde l_g é o número de fótons externos e $2f_g$ é o número total de férmions externos*, e $t_g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma distribuição numérica†. E como as expressões dos operadores fermiônicos livres são dadas como segue:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p_1 [b_{s_1}(\mathbf{p}_1) u_{s_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1x} + d_{s_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) v_{s_1}(\mathbf{p}_1) e^{ip_1x}] \quad (4.4)$$

$$\bar{\psi}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p_2 [b_{s_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) \bar{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2) e^{ip_2x} + d_{s_2}(\mathbf{p}_2) \bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) e^{-ip_2x}] . \quad (4.5)$$

Vemos que os termos da série perturbativa do operador de dispersão que contribuem para esse espalhamento tem a forma:

$$T_n^{Moeller}(x) =: \bar{\psi}(x_{k_1}) \gamma^\mu \psi(x_{n_1}) t_{\mu\nu}^{Moeller}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \bar{\psi}(x_{k_2}) \gamma^\nu \psi(x_{n_2}) : , \quad (4.6)$$

onde $t_{\mu\nu}^{Moeller}(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ é a distribuição numérica correspondente; e explicitamos que só contribuem as ordens pares, porque todos os campos eletromagnéticos estão contraídos. Desse vasto conjunto, temos em particular aqueles de especial interesse cuja forma é

$$T_n^{F,Moeller}(x) =: \bar{\psi}(x_{k_1}) \gamma^\mu \psi(x_{k_1}) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{F(2n)}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \bar{\psi}(x_{n_2}) \gamma^\nu \psi(x_{n_2}) : , \quad (4.7)$$

onde a distribuição numérica $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{F(2n)}(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ é associada à contribuição de ordem $2n$ ao propagador de Feynman eletromagnético completo:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^F(x_1, x_2) = D_{\mu\nu}^F(x_1, x_2) + \int dx_3 dx_4 \mathcal{D}_{\mu\nu}^{F(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) + \dots . \quad (4.8)$$

A primeira contribuição, $D_{\mu\nu}^F(x_1, x_2)$, é o propagador de Feynman eletromagnético livre que deduziremos nesta seção, as outras ordens são associadas às chamadas correções radiativas‡.

*O sub-índice g indica uma configuração fixa dos produtos de operadores normalmente ordenados não contraídos, e cumpre uma função similar aos índices usados no esquema diagramático.

†Provenientes das contrações normais dos operadores livres.

‡Tópico do seguinte capítulo.

4.2.1 Distribuições de segunda ordem

No capítulo 3 encontramos as contribuições correspondentes ao operador de dispersão S em segunda ordem. Sendo suas distribuições numéricas associadas R'_2 e causal D_2 , dada por

$$\begin{aligned} R'_2{}^{(1)}(x_1, x_2) &= ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2): \\ D_2{}^{(1)}(x_1, x_2) &= -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) [D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) - D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1)] \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2): \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $D_{\mu\nu}^{(+)}$ é o propagador eletromagnético de frequência positiva.

Por definição do propagador de frequência negativa, $D_{\mu\nu}^{(-)}(x_1 - x_2) = -D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1)$, podemos reescrever as distribuições prévias como:

$$\begin{aligned} R'_2{}^{(1)}(x_1, x_2) &= -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu}^{(-)}(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2): \\ D_2{}^{(1)}(x_1, x_2) &= -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2): \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde

$$D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) = D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) + D_{\mu\nu}^{(-)}(x_1 - x_2). \quad (4.12)$$

Esta é a distribuição causal eletromagnética encontrada no capítulo 3, onde obtivemos sua expressão no espaço de configurações

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) &= g_{\mu\nu} [D_0(x_1 - x_2) - D_{m_a}(x_1 - x_2)] + (1 - \xi) \partial_\mu \partial_\nu D'_0(x_1 - x_2) \\ &\quad - (1 - \xi) \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m_a^2} [D_{m_a}(x_1 - x_2) - D_0(x_1 - x_2)], \end{aligned} \quad (4.13)$$

com ξ como o parâmetro de gauge, e D_0 , D_{m_a} os propagadores escalares sem massa e com a massa m_a (massa de Podolsky), respectivamente. Também mostramos que esse propagador tem suporte causal: $\text{supp} D_{\mu\nu}(x_1, x_2) \subseteq \Gamma_1^+(x_2) \cup \Gamma_1^-(x_2)$, que mostra a localidade da teoria e, é uma condição indispensável para o processo de bipartição. Mas para iniciar esse processo, devemos conhecer a ordem singular da distribuição causal.

4.2.2 Ordem Singular

Calcularemos a ordem singular segundo o critério obtido para o espaço dos momentos, em que a distribuição causal é dado por:

$$\hat{D}_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} \left(\hat{D}_0(k) - \hat{D}_{m_a}(k) \right) - (1 - \xi) k_\mu k_\nu \hat{D}'_0(k) + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \left(\hat{D}_{m_a}(k) - \hat{D}_0(k) \right), \quad (4.14)$$

onde os propagadores escalares no espaço dos momentos são:

$$\begin{aligned} \hat{D}_0(k) &= \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \delta(k^2) \quad ; \quad \hat{D}_{m_a}(k) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \delta(k^2 - m_a^2) \\ \hat{D}'_0(k) &= -\frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \delta^{(1)}(k^2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Devemos calcular $\hat{D}_{\mu\nu} \left(\frac{k}{\alpha} \right)$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\mu\nu} \left(\frac{k}{\alpha} \right) &= \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn} \left(\frac{k_0}{\alpha} \right) g_{\mu\nu} \left[\delta \left(\frac{k^2}{\alpha^2} \right) - \delta \left(\frac{k^2}{\alpha^2} - m_a^2 \right) \right] \\ &+ \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn} \left(\frac{k_0}{\alpha} \right) (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{\alpha^2} \delta^{(1)} \left(\frac{k^2}{\alpha^2} \right) \\ &+ \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn} \left(\frac{k_0}{\alpha} \right) (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{\alpha^2 m_a^2} \left[\delta \left(\frac{k^2}{\alpha^2} - m_a^2 \right) - \delta \left(\frac{k^2}{\alpha^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Na prática calculamos essa expressão nas primeiras ordens em α ; entretanto vemos que como $\alpha > 0 \rightarrow \operatorname{sgn} \left(\frac{k_0}{\alpha} \right) = \operatorname{sgn} (k_0)$ e da propriedade de escala da distribuição δ -Dirac e suas derivadas $\delta^{(n)} \left(\frac{x}{\beta} \right) = |\beta| \beta^n \delta^{(n)} (x)$, $n = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\mu\nu} \left(\frac{k}{\alpha} \right) &= \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn} (k_0) \alpha^2 g_{\mu\nu} \left[\delta (k^2) - \delta (k^2 - \alpha^2 m_a^2) \right] \\ &+ \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn} (k_0) (1 - \xi) k_\mu k_\nu \alpha^2 \delta^{(1)} (k^2) \\ &+ \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn} (k_0) (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \left[\delta (k^2 - \alpha^2 m_a^2) - \delta (k^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

O coeficiente α^2 na frente do segundo termo nos leva a que esta é da ordem -2 , e no primeiro termo que cada um de seus membros têm ordem singular -2 ; e a ausência desse coeficiente no terceiro termo nos leva a pensar que cada um de seus membros têm ordem singular 0 . Então, globalmente, esses resultados nos induz em concluir que a ordem singular desse propagador é 0 , o qual indicaria que essa distribuição é singular; mas veremos que esse resultado não é correto.

Devemos analisar a distribuição como um todo, para isso será de ajuda considerar a seguinte expansão de Taylor da distribuição δ -Dirac*

$$\delta (x - \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)} (x) \beta^n. \quad (4.18)$$

Então a expressão correta de $\hat{D}_{\mu\nu} \left(\frac{k}{\alpha} \right)$ na aproximação das primeiras ordens de α é:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\mu\nu} \left(\frac{k}{\alpha} \right) &\simeq \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn} (k_0) \alpha^2 g_{\mu\nu} \left[\alpha^2 m_a^2 \delta^{(1)} (k^2) \right] + \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn} (k_0) (1 - \xi) k_\mu k_\nu \alpha^2 \delta^{(1)} (k^2) \\ &- \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn} (k_0) (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \alpha^2 m_a^2 \delta^{(1)} (k^2). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Finalmente:

$$\hat{D}_{\mu\nu} \left(\frac{k}{\alpha} \right) \simeq \alpha^4 \left\{ \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn} (k_0) g_{\mu\nu} \left[m_a^2 \delta^{(1)} (k^2) \right] \right\}. \quad (4.20)$$

Daqui a ordem singular do propagador causal eletromagnético é

$$\omega^{Pod} \left(\hat{D}_{\mu\nu} \right) = -4 < 0. \quad (4.21)$$

*Para mais detalhes sobre essa expansão vide [64].

Portanto, o propagador causal $D_{\mu\nu}$ (ou $\hat{D}_{\mu\nu}$) é uma *distribuição regular da ordem* -4 , e esse resultado *não depende do parâmetro de gauge* ξ . Tal resultado é próprio do eletromagnetismo de Podolsky e, o faz diferente de Maxwell, que tem ordem* -2 . Notamos, por exemplo, que se escolhermos $\xi = 1$ em (4.14)

$$\hat{D}_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu}\hat{D}_0(k) - g_{\mu\nu}\hat{D}_{m_a}(k)$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \omega^{Max} = -2 & & \omega^{Pro} = -2 \\ \omega^{Pod} = -4 \end{array}} \quad (4.22)$$

Podemos interpretar claramente que o segundo termo, associado ao modelo vetorial massivo de Proca, cumpre a função “regularizadora”[†]. Pode-se pensar que regularizar uma distribuição regular é fútil, pelo fato de não alterar a fórmula de bipartição[‡]. Mas como veremos nos capítulos 5 e 6 esse resultado fará uma grande diferença no cálculo da ordem singular no resto das contribuições perturbativas[§], comparado com a QED₄.

4.2.3 Bipartição e o Propagador Retardado Eletromagnético

Como $\hat{D}_{\mu\nu}$ é uma distribuição regular, obteremos a distribuição retardada $\hat{R}_{\mu\nu}$ da relação:

$$\hat{R}_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{D}_{\mu\nu}(tk)}{1-t + \text{sgn}(k_0) i0^+}. \quad (4.23)$$

Substituindo a expressão da distribuição causal, $\hat{D}_{\mu\nu}$, obteremos

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mu\nu}(k) &= g_{\mu\nu} \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{(\hat{D}_0(tk) - \hat{D}_{m_a}(tk))}{1-t + \text{sgn}(k_0) i0^+} \\ &\quad - (1-\xi) k_\mu k_\nu \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{t^2 \hat{D}'_0(tk)}{1-t + \text{sgn}(k_0) i0^+} \\ &\quad + (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{t^2 (\hat{D}_{m_a}(tk) - \hat{D}_0(tk))}{1-t + \text{sgn}(k_0) i0^+}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Podemos pensar em separar os termos em seus membros individuais, que é válido para o primeiro termo; mas como vimos na seção anterior cada um dos membros do terceiro termo

*Para mais detalhes, desse resultado da QED₄ em TPC, vide a referência [22].

[†]Efeito já mencionado, para as correções radiativas, por R. Bufalo, B.M. Pimentel e G.E.R. German em [44], quem dão uma interpretação de regularização *a la* Pauli-Villars-Raisky [51].

[‡]Como foi mostrado no capítulo 2, todas as distribuições regulares cumprem a mesma fórmula de bipartição.

[§]Em especial, no capítulo 6 veremos que todas as contribuições maiores à quarta ordem são regulares.

tem ordem singular 0, para os quais a fórmula de bipartição considerada nos daria resultados divergentes, portanto, o terceiro termo tem que ser considerado como um todo. Feita essa observação calcularemos as seguintes distribuições retardadas

$$\begin{aligned}\hat{R}_M(k) &= \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{D}_M(tk)}{1-t + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+} \\ \hat{R}'_M(k) &= \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{t^2 \hat{D}'_M(tk)}{1-t + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+} \\ \hat{R}''_M(k) &= \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{t^2 (\hat{D}_M(tk) - \hat{D}_0(tk))}{1-t + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+},\end{aligned}\quad (4.25)$$

onde M é uma constante positiva que faz referência à massa.

1. Cálculo da distribuição retardada $\hat{R}_M(k)$, que está definida como

$$\hat{R}_M(k) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{D}_M(tk)}{1-t + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+}, \quad (4.26)$$

onde \hat{D}_M é o propagador causal escalar de massa M , cuja expressão é:

$\hat{D}_M(k) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(k_0) \delta(k^2 - M^2)$. Sendo $\hat{D}_M(tk)$ ímpar, ao substituir-a em (4.26) obteremos

$$\begin{aligned}\hat{R}_M(k) &= -(2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\operatorname{sgn}(t) \delta(t^2 k^2 - M^2)}{1-t + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+} \\ &= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{|k^2|} \int_0^{+\infty} dt^2 \frac{\delta\left(t^2 - \frac{M^2}{k^2}\right)}{1-t^2 + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+},\end{aligned}\quad (4.27)$$

onde também usamos a propriedade de escala $\delta\left(\frac{x}{\beta}\right) = |\beta| \delta(x)$. Finalmente:

$$\hat{R}_M(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+}, \quad k^2 > 0, \quad (4.28)$$

que é o propagador retardado escalar.

2. Cálculo da distribuição retardada $\hat{R}'_M(k)$, que está definida como

$$\hat{R}'_M(k) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{t^2 \hat{D}'_M(tk)}{1-t + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+}, \quad (4.29)$$

onde \hat{D}'_M é o propagador causal do dipolo escalar de massa M , cuja expressão é: $\hat{D}'_M(k) = -\frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \delta^{(1)}(t^2 - M^2)$. Sendo $\hat{D}'_M(tk)$ ímpar, ao substituir-a em (4.29) obteremos

$$\begin{aligned}
& \hat{R}'_M(k) \\
&= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{t^2 \delta^{(1)}(t^2 k^2 - M^2)}{1 - t + \text{sgn}(k_0) i0^+} \text{sgn}(t) \\
&= (2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 |k^2|} \int_0^{+\infty} dt^2 \frac{t^2}{1 - t^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} \delta^{(1)}\left(t^2 - \frac{M^2}{k^2}\right) \\
&= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 |k^2|} \int_0^{+\infty} dt^2 \frac{d}{dt^2} \left(\frac{t^2}{1 - t^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} \right) \delta\left(t^2 - \frac{M^2}{k^2}\right), \quad (4.30)
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade de escala $\delta^{(1)}\left(\frac{x}{\beta}\right) = |\beta| \beta \delta^{(1)}(x)$ e a definição da derivada da δ -Dirac: $\langle \delta^{(1)}, g \rangle = -\langle \delta, g^{(1)} \rangle$. Finalmente

$$\hat{R}'_M(k) = -(2\pi)^{-2} \left(\frac{1}{k^2 - M^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} \right)^2, \quad k^2 > 0, \quad (4.31)$$

que é o propagador retardado do dipolo escalar.

3. Cálculo da distribuição retardada $\hat{R}''_M(k)$, que está definida como

$$\hat{R}''_M(k) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{t^2 \left(\hat{D}_M(tk) - \hat{D}_0(tk) \right)}{1 - t + \text{sgn}(k_0) i0^+}, \quad (4.32)$$

onde \hat{D}_M, \hat{D}_0 são os propagadores causais escalares de massa M e não massivo, respectivamente, cujas expressões são: $\hat{D}_M(k) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \delta(k^2 - M^2)$; $\hat{D}_0(k) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(k_0) \delta(k^2)$. Substituindo-as em (4.32)

$$\begin{aligned}
\hat{R}''_M(k) &= -(2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{t^2 [\delta(t^2 k^2 - M^2) - \delta(t^2 k^2)]}{1 - t + \text{sgn}(k_0) i0^+} \text{sgn}(t) \\
&= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{|k^2|} \int_0^{+\infty} dt^2 \frac{t^2 \left[\delta\left(t^2 - \frac{M^2}{k^2}\right) - \delta(t^2) \right]}{1 - t^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+}, \quad (4.33)
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade de escala $\delta\left(\frac{x}{\beta}\right) = |\beta| \delta(x)$. Nesse ponto vemos a importância de considerar a distribuição como um todo, porque se faz evidente que em $t^2 = 0$ na segunda δ nos dará uma divergência. O passo correto, a seguir, é considerar a

expansão de Taylor: $\delta\left(t^2 - \frac{M^2}{k^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(t^2) \left(\frac{M^2}{k^2}\right)^n$. O que nos leva a:

$$\begin{aligned}
& \hat{R}_M''(k) \\
&= -\frac{(2\pi)^{-2}}{|k^2|} \int_0^{+\infty} dt^2 \frac{t^2}{1-t^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(t^2) \left(\frac{M^2}{k^2}\right)^n \right] \\
&= -\frac{(2\pi)^{-2}}{|k^2|} \int_0^{+\infty} dt^2 \frac{t^2}{1-t^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \delta^{(n+1)}(t^2) \left(\frac{M^2}{k^2}\right)^{(n+1)} \right] \\
&= (2\pi)^{-2} \frac{1}{|k^2|} \int_0^{+\infty} dt^2 \frac{1}{[1-t^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+]^2} \\
&\quad \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \delta^{(n)}(t^2) \left(\frac{M^2}{k^2}\right)^{(n+1)} \right], \tag{4.34}
\end{aligned}$$

nesse último passo usamos a propriedade $\langle \delta^{(n+1)}, g \rangle = -\langle \delta^{(n)}, g^{(1)} \rangle$, usando-a mais n vezes em cada termo da somatória:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_M''(k) &= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{|k^2|} \int_0^{+\infty} dt^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[1-t^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+]^{n+2}} \left[\delta(t^2) \left(\frac{M^2}{k^2}\right)^{(n+1)} \right] \\
&= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{|k^2|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[1 + \text{sgn}(k_0) i0^+]^{n+2}} \left[\left(\frac{M^2}{k^2}\right)^{(n+1)} \right]. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Considerando $k^2 > 0$ e, agrupando convenientemente:

$$\begin{aligned}
& \hat{R}_M''(k) \\
&= -\frac{(2\pi)^{-2}}{[k^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+]} \left(\frac{M^2}{k^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[1 + \text{sgn}(k_0) i0^+]^{n+1}} \left[\left(\frac{M^2}{k^2}\right)^n \right] \\
&= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{[k^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+]} \left(\frac{M^2}{k^2}\right) \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{[1-s + \text{sgn}(k_0) i0^+]} \right]_{s=0} \left(\frac{M^2}{k^2}\right)^n, \tag{4.36}
\end{aligned}$$

e identificando a expansão de Taylor da distribuição: $\frac{1}{[k^2 - M^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+]}$; obteremos

$$\hat{R}_M''(k) = -(2\pi)^{-2} M^2 \frac{1}{[k^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+]} \frac{1}{[k^2 - M^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+]} \tag{4.37}$$

Finalmente:

$$\hat{R}_M''(k) = -(2\pi)^{-2} \left[\frac{1}{k^2 - M^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} - \frac{1}{k^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} \right] = \hat{R}_M(k) - \hat{R}_0(k)$$

(4.38)

onde $k^2 > 0$ e, \hat{R}_M , \hat{R}_0 são os propagadores retardados de massa M e não massivo, respectivamente.

Com esses resultados, obtemos finalmente o *propagador retardado electromagnético*:

$$\hat{R}_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} \left[\hat{R}_0(k) - \hat{R}_{m_a}(k) \right] - (1 - \xi) k_\mu k_\nu \hat{R}'_0(k) + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \left[\hat{R}_{m_a}(k) - \hat{R}_0(k) \right] \quad (4.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{R}_0(k) &= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} ; \hat{R}_{m_a}(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - m_a^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} \\ \hat{R}'_0(k) &= -(2\pi)^{-2} \left(\frac{1}{k^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} \right)^2 , \quad k^2 > 0 . \end{aligned} \quad (4.40)$$

4.2.4 Contribuição de 2º ordem à Matriz-S e o Propagador de Feynman Eletromagnético

Agora calcularemos o termo de segunda ordem do operador de dispersão S correspondente ao espalhamento elétron-elétron, isto é calcular a distribuição $T_2^{(1)}(x_1, x_2)$, cuja expressão segundo a construção indutiva é:

$$T_2^{(1)}(x_1, x_2) = R_2^{(1)}(x_1, x_2) - R_2'^{(1)}(x_1, x_2) , \quad (4.41)$$

onde $R_2^{(1)}$ é a parte retardada de $D_2^{(1)}$. As distribuições $R_2^{(1)}$ e $R_2'^{(1)}$ têm a forma

$$\begin{aligned} R_2'^{(1)}(x_1, x_2) &= -ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) R'_{\mu\nu}(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : \\ R_2^{(1)}(x_1, x_2) &= -ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) R_{\mu\nu}(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : , \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde como vimos nas subseções prévias $R'_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}^{(-)}$ e, $R_{\mu\nu}$ é o propagador retardado eletromagnético.

Assim $T_2^{(1)}$ terá a forma:

$$T_2^{(1)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : , \quad (4.43)$$

onde $D_{\mu\nu}^F$ é definida pela relação:

$$D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) = R_{\mu\nu}(x_1 - x_2) - R'_{\mu\nu}(x_1 - x_2) . \quad (4.44)$$

Ou no espaço dos momentos:

$$\hat{D}_{\mu\nu}^F(k) = \hat{R}_{\mu\nu}(k) - \hat{R}'_{\mu\nu}(k) . \quad (4.45)$$

Das expressões prévias de $\hat{R}_{\mu\nu}$ (4.39) e $\hat{R}'_{\mu\nu}$ (4.11), obtemos que $\hat{D}_{\mu\nu}^F$ tem a forma:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\mu\nu}^F(k) &= g_{\mu\nu} \left(\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k) \right) - (1 - \xi) k_\mu k_\nu \hat{D}_0'^F(k) \\ &+ (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \left(\hat{D}_{m_a}^F(k) - \hat{D}_0^F(k) \right) , \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde:

$$\hat{D}_M^F(k) = \hat{R}_M(k) - \hat{D}_M^{(-)}(k) ; \hat{D}_M'^F(k) = \hat{R}'_M(k) - \hat{D}_M'^{-}(k) . \quad (4.47)$$

Como as distribuições \hat{R}_M , $\hat{D}_M^{(-)}$, $\hat{D}_M'^F$ e $\hat{D}_M'^{-}$ são conhecidas, podemos calcular os propagadores \hat{D}_M^F , $\hat{D}_M'^F$.

1. Cálculo da distribuição $\hat{D}_M^F(k)$, que está definida como

$$\hat{D}_M^F(k) = \hat{R}_M(k) - \hat{D}_M^{(-)}(k) , \quad (4.48)$$

onde \hat{R}_M , $\hat{D}_M^{(-)}$ são os propagadores retardado e NF escalares, respectivamente, cujas expressões são: $\hat{R}_M(k) = - (2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+}$; $\hat{D}_M^{(-)}(k) = - \frac{i}{2\pi} \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2)$. Substituindo-as em (4.48)

$$\hat{D}_M^F(k) = - (2\pi)^{-2} \left[\frac{1}{k^2 - M^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} - 2i\pi\theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \right] . \quad (4.49)$$

Da fórmula de Sochozki: $\frac{1}{x+i0^+} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$, pode-se deduzir seu equivalente:

$$\frac{1}{x+i0^+} = \frac{1}{x + \text{sgn}(k_0) i0^+} - 2i\pi\theta(-k_0) \delta(x) . \quad (4.50)$$

Usando essa última, finalmente obtemos

$$\hat{D}_M^F(k) = - (2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+} , \quad k^2 > 0 , \quad (4.51)$$

que é o propagador de Feynman escalar.

2. Cálculo da distribuição $\hat{D}_M'^F(k)$, que está definida como

$$\hat{D}_M'^F(k) = \hat{R}'_M(k) - \hat{D}_M'^{-}(k) , \quad (4.52)$$

onde \hat{R}'_M , $\hat{D}_M'^{-}$ são os propagadores retardado e NF do dipolo escalar, respectivamente, cujas expressões são:

$$\hat{R}'_M(k) = - (2\pi)^{-2} \left(\frac{1}{k^2 - M^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} \right) ; \hat{D}_M'^{-}(k) = \frac{i}{2\pi} \theta(-k_0) \delta^{(1)}(k^2 - M^2) . \quad (4.53)$$

Substituindo-as em (4.52)

$$\hat{D}'_M(k) = - (2\pi)^{-2} \left[\left(\frac{1}{k^2 - M^2 + \text{sgn}(k_0) i0^+} \right)^2 + 2i\pi\theta(-k_0) \delta^{(1)}(k^2 - M^2) \right]. \quad (4.54)$$

Derivando a fórmula (4.50)

$$\left(\frac{1}{x + i0^+} \right)^2 = \left(\frac{1}{x + \text{sgn}(k_0) i0^+} \right)^2 + 2i\pi\theta(-k_0) \delta^{(1)}(x). \quad (4.55)$$

Usando essa relação finalmente obtemos

$$\hat{D}'_M(k) = - (2\pi)^{-2} \left(\frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+} \right)^2, \quad k^2 > 0, \quad (4.56)$$

que é o propagador de Feynman do dipolo escalar.

Com esses resultados, obtemos, finalmente o *propagador de Feynman electromagnético*:

$$\begin{aligned} \hat{D}^F_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} \left[\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k) \right] - (1 - \xi) k_\mu k_\nu \hat{D}_0^F(k) \\ + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \left[\hat{D}_{m_a}^F(k) - \hat{D}_0^F(k) \right], \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^F(k) &= - (2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 + i0^+} \quad ; \quad \hat{D}_{m_a}^F = - (2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - m_a^2 + i0^+} \\ \hat{D}'_0^F(k) &= - (2\pi)^{-2} \left(\frac{1}{k^2 + i0^+} \right)^2, \quad k^2 > 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Desse resultado podemos dar algumas observações:

1) *Isolação da QED₄*.- Escrevendo o propagador de Feynman eletromagnético da forma:

$$- (2\pi)^2 \hat{D}^F_{\mu\nu}(k) = \underbrace{\left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0^+} \right] \frac{1}{k^2 + i0^+}}_{QED_4} - \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0^+} \right] \frac{1}{k^2 - m_a^2 + i0^+} \quad (4.59)$$

Vemos que, igual ao resultado obtido pela Quantização Funcional da GQED₄ [44], também podemos separar o termo correspondente à QED₄, mas obtemos um resultado diferente no resto da expressão*, cuja origem dessa diferença esta na condição de Lorenz generalizada usada†.

*O resultado obtido em [44] no limite de polarização do vácuo nulo é:

$$i\hat{D}^F_{\mu\nu}(k) = \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2} - \left[g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - m_a^2} \right] \frac{1}{k^2 - m_a^2} + (1 - 2\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k^2 - m_a^2)} + \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m_a^2)^2}$$

†Para mais detalhes vide o capítulo 3.

2) Limite Estático.- O segundo termo de (4.59) não pode ser identificado como o propagador de Proca, cuja expressão é:

$$\hat{D}_{\mu\nu}^{F,Pro}(k) = -(2\pi)^{-2} \left[g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \right] \frac{1}{k^2 - m_a^2 + i0^+}. \quad (4.60)$$

Mas vemos que sim, se escolhermos o gauge $\xi = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\mu\nu,\xi=1}^{F,Podolsky}(k) &= \left[-(2\pi)^{-2} g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i0^+} \right] - \left[-(2\pi)^{-2} g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 - m_a^2 + i0^+} \right] \\ &= \underbrace{\hat{D}_{\mu\nu,\xi=1}^{F,Maxwell}(k)} - \underbrace{\hat{D}_{\mu\nu,\xi=1}^{F,Proca}(k)} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Como esse propagador satisfaz a equação de movimento com uma fonte pontual, o seu limite estático deve ser proporcional ao campo eletrostático gerado por uma carga pontual. Da expressão prévia obtemos o limite estático:

$$\hat{D}_{\mu\nu,\xi=1}^{F,Podolsky}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-2} g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{\mathbf{k}^2 - i0^+} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_a^2 - i0^+} \right]. \quad (4.62)$$

Indo para as coordenadas espaciais, obteremos*:

$$D_{\mu\nu,\xi=1}^{F,Podolsky}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1/2} g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \left(1 - e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{a}} \right) \right]. \quad (4.63)$$

onde $a = \frac{1}{m_a}$. Obtemos assim um limite estático consistente com a lei generalizada de Coulomb, o que reforça nossa escolha de *gauge fixing*.

4.2.5 Amplitude de Transição

Com os resultados prévios, agora, calcularemos a amplitude de transição da dispersão entre dois elétrons, cujos estados iniciais e finais são descritos pelos estados

$$|\psi_i\rangle = b_{s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) b_{\sigma_i}^\dagger(\mathbf{q}_i) |\Omega\rangle \quad (4.64)$$

$$|\psi_f\rangle = b_{s_f}^\dagger(\mathbf{p}_f) b_{\sigma_f}^\dagger(\mathbf{q}_f) |\Omega\rangle. \quad (4.65)$$

respectivamente. A contribuição à amplitude de transição na segunda ordem perturbativa é definida pela expressão:

$$S_{fi} = \langle \psi_f | S_2^{(1)} | \psi_i \rangle = \frac{1}{2!} \langle \psi_f | \int d^4x_1 d^4x_2 T_2^{(1)}(x_1, x_2) | \psi_i \rangle, \quad (4.66)$$

onde já se tem considerado o limite adiabático. Substituindo a expressão $T_2^{(1)}$ obtida na seção prévia obteremos:

$$S_{fi} = -\frac{ie^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \psi_f | : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : | \psi_i \rangle. \quad (4.67)$$

Antes de continuar, observemos que:

*Para mais detalhes vide o Apêndice H.

- *Os termos longitudinais e a conservação da corrente.*- Da seção prévia, temos que o propagador tem a forma: $D_{\mu\nu}^F = g_{\mu\nu} \left[D_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right] + (1 - \xi) \partial_\mu \partial_\nu f$ e, a corrente livre é dada por $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1)$. Podemos escrever S_{fi} como:

$$S_{fi} = -\frac{ie^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \psi_f | : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu, \xi=1}^F(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : | \psi_i \rangle - (1 - \xi) \frac{ie^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \psi_f | : j^\mu(x_1) \partial_\mu \partial_\nu f(x_1 - x_2) j^\nu(x_2) : | \psi_i \rangle . \quad (4.68)$$

Como $\partial_\mu \partial_\nu f(x_1 - x_2) = \partial_\mu^1 \partial_\nu^1 f(x_1 - x_2)$ e, da conservação da corrente* $\partial_\mu^1 j^\mu(x_1) = 0$, ao integrar por partes na variável x_1 , obteremos que

$$S_{fi} = -\frac{ie^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \psi_f | : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu, \xi=1}^F(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : | \psi_i \rangle , \quad (4.69)$$

para essa amplitude, obtemos o mesmo resultado se considerarmos $\xi = 1$ i.e. : S_{fi} não depende do parâmetro de gauge.

Continuando com o cálculo da amplitude de transição, lembremos que como os operadores de campo fermiônicos têm a forma:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p_1 [b_{s_1}(\mathbf{p}_1) u_{s_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1x} + d_{s_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) v_{s_1}(\mathbf{p}_1) e^{ip_1x}] \quad (4.70)$$

$$\bar{\psi}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p_2 [b_{s_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) \bar{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2) e^{ip_2x} + d_{s_2}(\mathbf{p}_2) \bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) e^{-ip_2x}] , \quad (4.71)$$

e se cumprem as regras de anticomutação

$$\{b_{s_1}(\mathbf{p}_1), b_s^\dagger(\mathbf{p})\} = \delta_{s_1s} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) ; \{b_{s_1}^\dagger(\mathbf{p}_1), b_s^\dagger(\mathbf{p})\} = \{b_{s_1}(\mathbf{p}_1), b_s(\mathbf{p})\} = 0 . \quad (4.72)$$

Obtemos imediatamente as relações

$$\begin{aligned} \psi(x) b_s^\dagger(\mathbf{p}) |\Omega\rangle &= \left[(2\pi)^{-3/2} \int d^3p_1 b_{s_1}(\mathbf{p}_1) u_{s_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1x} \right] b_s^\dagger(\mathbf{p}) |\Omega\rangle \\ &= |\Omega\rangle (2\pi)^{-3/2} u_s(\mathbf{p}) e^{-ipx} \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \langle \Omega | b_s(\mathbf{p}) \bar{\psi}(x) &= \langle \Omega | b_s(\mathbf{p}) \left[(2\pi)^{-3/2} \int d^3p_2 b_{s_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) \bar{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2) e^{ip_2x} \right] \\ &= (2\pi)^{-3/2} \bar{u}_s(\mathbf{p}) e^{ipx} \langle \Omega | . \end{aligned} \quad (4.74)$$

Substituindo esses resultados em (4.67), levando em conta todas as possibilidades e o sinal

*Esta é uma identidade da teoria livre, que por cálculo direto temos que $\partial_\mu j^\mu = \bar{\psi} \overleftarrow{\partial} \psi + \bar{\psi} \overrightarrow{\partial} \psi$; vemos que das equações de movimento: $\bar{\psi} (i \overleftarrow{\partial} + m) = 0$, $(i \overrightarrow{\partial} - m) \psi = 0$. Esse gradiente é idênticamente nulo: $\partial_\mu j^\mu = 0$.

negativo por cada comutação, obtemos a seguinte expressão para a amplitude de transição:

$$\begin{aligned}
S_{fi} = & \frac{ie^2}{2!} (2\pi)^{-6} \int d^4x_1 d^4x_2 D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) \\
& \times \left[\bar{u}_{sf}(\mathbf{p}_f) \gamma^\mu u_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) \bar{u}_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \gamma^\nu u_{s_i}(\mathbf{p}_i) e^{i(p_f - q_i)x_1 + i(q_f - p_i)x_2} \right. \\
& - \bar{u}_{sf}(\mathbf{p}_f) \gamma^\mu u_{s_i}(\mathbf{p}_i) \bar{u}_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \gamma^\nu u_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) e^{i(p_f - p_i)x_1 + i(q_f - q_i)x_2} \\
& - \bar{u}_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \gamma^\mu u_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) \bar{u}_{sf}(\mathbf{p}_f) \gamma^\nu u_{s_i}(\mathbf{p}_i) e^{i(q_f - q_i)x_1 + i(p_f - p_i)x_2} \\
& \left. + \bar{u}_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \gamma^\mu u_{s_i}(\mathbf{p}_i) \bar{u}_{sf}(\mathbf{p}_f) \gamma^\nu u_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) e^{i(q_f - p_i)x_1 + i(p_f - q_i)x_2} \right]. \quad (4.75)
\end{aligned}$$

Podemos observar que se integrássemos a primeira e quarta integral, elas seriam iguais, como para a segunda e terceira integral. Então podemos simplificar S_{fi} da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
S_{fi} = & ie^2 (2\pi)^{-6} \int d^4x_1 d^4x_2 D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) \\
& \times \left[\bar{u}_{sf}(\mathbf{p}_f) \gamma^\mu u_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) \bar{u}_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \gamma^\nu u_{s_i}(\mathbf{p}_i) e^{i(p_f - q_i)x_1 + i(q_f - p_i)x_2} \right. \\
& \left. - \bar{u}_{sf}(\mathbf{p}_f) \gamma^\mu u_{s_i}(\mathbf{p}_i) \bar{u}_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \gamma^\nu u_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) e^{i(p_f - p_i)x_1 + i(q_f - q_i)x_2} \right]. \quad (4.76)
\end{aligned}$$

Vemos em cada um dos termos a integral: $\int d^4x_1 d^4x_2 D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) e^{iPx_1 + iQx_2}$, que toma uma forma simples ao fazer as substituições: $x_1 = x + \frac{1}{2}y$, $x_2 = x - \frac{1}{2}y$

$$\begin{aligned}
\int d^4x_1 d^4x_2 D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) e^{iPx_1 + iQx_2} &= \int d^4x e^{i(P+Q)x} \int d^4y D_{\mu\nu}^F(y) e^{i(P-Q)y/2} \\
&= (2\pi)^4 \delta(P+Q) (2\pi)^2 \hat{D}_{\mu\nu}^F\left(\frac{P-Q}{2}\right) \\
&= (2\pi)^6 \delta(P+Q) \hat{D}_{\mu\nu}^F(P), \quad (4.77)
\end{aligned}$$

onde usamos a definição da transformada direta e inversa de Fourier do propagador e da δ -Dirac e, a propriedade: $\delta(x+y) f(y) = \delta(x+y) f(-x)$.

Usando esse resultado, obteremos finalmente que a amplitude de transição tem a forma

$$\boxed{S_{fi} = ie^2 \delta(p_f + q_f - p_i - q_i) M,} \quad (4.78)$$

onde

$$\begin{aligned}
M = & ie^2 \left[\hat{D}_{\mu\nu}^F(p_f - q_i) \bar{u}_{sf}(\mathbf{p}_f) \gamma^\mu u_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) \bar{u}_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \gamma^\nu u_{s_i}(\mathbf{p}_i) \right. \\
& \left. - \hat{D}_{\mu\nu}^F(p_f - p_i) \bar{u}_{sf}(\mathbf{p}_f) \gamma^\mu u_{s_i}(\mathbf{p}_i) \bar{u}_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \gamma^\nu u_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) \right]. \quad (4.79)
\end{aligned}$$

A presença da δ -Dirac na expressão de S_{fi} nos diz que essa é uma distribuição; portanto, essa amplitude de transição deve ser interpretada como uma densidade e, então, estará diretamente relacionada às medições experimentais quando é avaliada entre pacotes de onda.

4.2.6 Probabilidade de Transição e Seção de Choque

Por definição a probabilidade de transição, p_{fi} , é definida como segue:

$$p_{fi} \equiv (|\psi_f\rangle, |\psi_i\rangle)^2 = |S_{fi}|^2 = \left| \langle \psi_f | S_2^{(1)} | \psi_i \rangle \right|^2 + \dots \quad (4.80)$$

Mas, como foi mencionado na seção prévia, essas quantidade não tem sentido se não expressamos previamente a amplitude de transição em termo dos pacotes de onda e, então, considerar:

$$b_{s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) b_{\sigma_i}^\dagger(\mathbf{q}_i) |\Omega\rangle \rightarrow |\psi_i\rangle = \int d^3 p_1 d^3 q_1 \psi_i(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) b_{s_i}^\dagger(\mathbf{p}_1) b_{\sigma_i}^\dagger(\mathbf{q}_1) |\Omega\rangle \quad (4.81)$$

$$b_{s_f}^\dagger(\mathbf{p}_f) b_{\sigma_f}^\dagger(\mathbf{q}_f) |\Omega\rangle \rightarrow |\psi_f\rangle = \int d^3 p_2 d^3 q_2 \psi_f(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) b_{s_f}^\dagger(\mathbf{p}_2) b_{\sigma_f}^\dagger(\mathbf{q}_2) |\Omega\rangle \quad (4.82)$$

Para obter uma expressão simples, consideramos todas os pacotes de onda finais, em particular um conjunto completo dessas

$$\sum_f \psi_f^*(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) \psi_f(\mathbf{p}'_2, \mathbf{q}'_2) = \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2) \delta(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}'_2) \quad (4.83)$$

mas se mantêm os espins finais fixos. Além disso consideramos que os pacotes de onda iniciais são de momento concentrados \mathbf{p}_i , \mathbf{q}_i e, espins fixos. Também podemos considerar à partícula 2 como o alvo em repouso e à partícula 1 dirigindo-se a ela com velocidade \mathbf{v} . Como experimentalmente temos um feixe de partículas livres incidentes, ao invés de uma só, é razoável considerar a média na seção transversal de um cilindro de raio R .

Portanto, é possível concluir* que a probabilidade de transição tem a forma:

$$\sum_f p_{fi}(R) = \frac{1}{\pi R^2} \left[(2\pi)^2 \frac{1}{|\mathbf{v}|} \int d^3 p_2 d^3 q_2 |M_{s_i \sigma_i s_f \sigma_f}(p_i, q_i, p_2, q_2)|^2 \delta(p_2 + q_2 - p_i - q_i) \right] \quad (4.84)$$

Nessa expressão os espins iniciais e finais são fixados, mas se considerarmos a probabilidade total para todos os espins finais possíveis, então o termo entre colchetes pode ser interpretada como a área eficaz de interação, essa última é definida como

$$\sigma = (2\pi)^2 \frac{1}{|\mathbf{v}|} \sum_{s_f \sigma_f} \int d^3 p_2 d^3 q_2 |M_{s_i \sigma_i s_f \sigma_f}(p_i, q_i, p_2, q_2)|^2 \delta(p_2 + q_2 - p_i - q_i) \quad (4.85)$$

e, é conhecida como *seção de choque total*. Essa quantidade pode ser escrita de forma invariante (de Lorentz) ao substituir a velocidade relativa em termos da massa e energias:

$$\sigma = (2\pi)^2 \frac{E(p_i) E(q_i)}{\sqrt{(p_i q_i)^2 - m^4}} \sum_{s_f \sigma_f} \int d^3 p_2 d^3 q_2 |M_{s_i \sigma_i s_f \sigma_f}(p_i, q_i, p_2, q_2)|^2 \delta(p_2 + q_2 - p_i - q_i) \quad (4.86)$$

*Para mais detalhes vide o Apêndice I.

onde m é a massa do elétron. Se considerarmos o centro de massa como referencial, podemos encontrar a seguinte simplificação:

$$\sigma_{c.m.} = (2\pi)^2 \frac{E^2}{4} \int d\Omega \sum_{s_f \sigma_f} |M|^2 . \quad (4.87)$$

onde Ω é o ângulo sólido no espaço dos momentos. Daqui identificamos a chamada *seção de choque diferencial*

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{c.m.} = (2\pi)^2 \frac{E^2}{4} |M|^2 . \quad (4.88)$$

nesta expressão os momentos são concentrados e são fixados os espins iniciais e finais. Vemos assim que essa quantidade é vinculada ao conceito inicial de probabilidade de transição. Mas, novamente teríamos que introduzir uma configuração específica de espins iniciais e finais.

Uma simplificação possível, que seguiremos, é considerar todos os espins finais e fazer uma média nos iniciais, o que nos leva a fazer a seguinte substituição em (4.88)

$$|M|^2 \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{s_i \sigma_i} \sum_{s_f \sigma_f} |M|^2 \quad (4.89)$$

Como passo inicial devemos substituir a expressão de M obtida em (4.79), então:

$$\begin{aligned} |M|^2 &= M^\dagger M \\ &= e^4 \left[\hat{D}_{\mu\nu}^{*F}(p_f - q_i) u_{s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) \gamma^{\nu\dagger} \bar{u}_{\sigma_f}^\dagger(\mathbf{q}_f) u_{\sigma_i}^\dagger(\mathbf{q}_i) \gamma^{\mu\dagger} \bar{u}_{s_f}^\dagger(\mathbf{p}_f) \right. \\ &\quad \left. - \hat{D}_{\mu\nu}^{*F}(p_f - p_i) u_{\sigma_i}^\dagger(\mathbf{q}_i) \gamma^{\nu\dagger} \bar{u}_{\sigma_f}^\dagger(\mathbf{q}_f) u_{s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) \gamma^{\mu\dagger} \bar{u}_{s_f}^\dagger(\mathbf{p}_f) \right] \\ &\quad \times \left[\hat{D}_{\alpha\beta}^F(p_f - q_i) \bar{u}_{s_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^\alpha u_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) \bar{u}_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \gamma^\beta u_{s_i}(\mathbf{p}_i) \right. \\ &\quad \left. - \hat{D}_{\alpha\beta}^F(p_f - p_i) \bar{u}_{s_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^\alpha u_{s_i}(\mathbf{p}_i) \bar{u}_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \gamma^\beta u_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) \right] . \end{aligned} \quad (4.90)$$

Após considerar as relações:

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma^0 ; \bar{u}^\dagger = \gamma^0 u ; \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 ; \gamma^0 \gamma^0 = 1 . \quad (4.91)$$

Obteremos:

$$\begin{aligned} |M|^2 &= e^4 \left[\hat{D}_{\mu\nu}^{*F}(p_f - q_i) \bar{u}_{s_i}(\mathbf{p}_i) \gamma^\nu u_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \bar{u}_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) \gamma^\mu u_{s_f}(\mathbf{p}_f) \right. \\ &\quad \left. - \hat{D}_{\mu\nu}^{*F}(p_f - p_i) \bar{u}_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) \gamma^\nu u_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \bar{u}_{s_i}(\mathbf{p}_i) \gamma^\mu u_{s_f}(\mathbf{p}_f) \right] \\ &\quad \times \left[\hat{D}_{\alpha\beta}^F(p_f - q_i) \bar{u}_{s_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^\alpha u_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) \bar{u}_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \gamma^\beta u_{s_i}(\mathbf{p}_i) \right. \\ &\quad \left. - \hat{D}_{\alpha\beta}^F(p_f - p_i) \bar{u}_{s_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^\alpha u_{s_i}(\mathbf{p}_i) \bar{u}_{\sigma_f}(\mathbf{q}_f) \gamma^\beta u_{\sigma_i}(\mathbf{q}_i) \right] . \end{aligned} \quad (4.92)$$

Agora, calculamos $\frac{1}{4} \sum_{s_i \sigma_i} \sum_{s_f \sigma_f} |M|^2$ desenvolvendo os produtos, reordenando e usando a identidade

$$\sum_s u_s(\mathbf{p}) \bar{u}_s(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2E} \quad (4.93)$$

Obteremos que:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \sum_{s_i, \sigma_i, s_f, \sigma_f} |M|^2 \\
= & \frac{e^4}{64E(p_i)E(q_i)E(p_f)E(q_f)} \\
& \left\{ \hat{D}_{\mu\nu}^{*F}(p_f - q_i) \hat{D}_{\alpha\beta}^F(p_f - q_i) \text{tr} [\gamma^\mu (\not{p}_f + m) \gamma^\alpha (\not{q}_i + m)] \text{tr} [\gamma^\nu (\not{q}_f + m) \gamma^\beta (\not{p}_i + m)] \right. \\
& \left. - \hat{D}_{\mu\nu}^{*F}(p_f - p_i) \hat{D}_{\alpha\beta}^F(p_f - q_i) \text{tr} [\gamma^\mu (\not{p}_f + m) \gamma^\alpha (\not{q}_i + m) \gamma^\nu (\not{q}_f + m) \gamma^\beta (\not{p}_i + m)] \right. \\
& \left. q_i \rightleftharpoons p_i \} . \tag{4.94}
\end{aligned}$$

Como mostramos em (4.69) podemos, sem perda de generalidade, podemos considerar o propagador no gauge de Feynman $\xi = 1$, isto é

$$\hat{D}_{\mu\nu}^F(k) = g_{\mu\nu} \left(\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k) \right) \tag{4.95}$$

Usando as propriedades do traço das matrizes γ e o fato que $p_f^2 = q_i^2 = m^2$, podemos demonstrar que*:

$$\begin{aligned}
M_1 &= g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \text{tr} [\gamma^\mu (\not{p}_f + m) \gamma^\alpha (\not{q}_i + m)] \text{tr} [\gamma^\nu (\not{q}_f + m) \gamma^\beta (\not{p}_i + m)] \\
&= 8 [s^2 + t^2 + 8m^2u - 8m^4] \tag{4.96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_1 &= g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \text{tr} [\gamma^\mu (\not{p}_f + m) \gamma^\alpha (\not{q}_i + m) \gamma^\nu (\not{q}_f + m) \gamma^\beta (\not{p}_i + m)] \\
&= 8 [-s^2 + 8m^2s - 12m^4] , \tag{4.97}
\end{aligned}$$

onde s, t, u são as variáveis de Mandelstam [52]; que satisfazem a relação $s + t + u = 4m^2$, e são definidas como segue:

$$s = (p_i + q_i)^2 = (p_f + q_f)^2 = 2m^2 + 2(q_i \cdot p_i) = 2m^2 + 2(p_f \cdot q_f) \tag{4.98}$$

$$t = (p_i - p_f)^2 = (q_i - q_f)^2 = 2m^2 - 2(p_f \cdot p_i) = 2m^2 - 2(q_i \cdot q_f) \tag{4.99}$$

$$u = (p_f - q_i)^2 = (p_i - q_f)^2 = 2m^2 - 2(p_f \cdot q_i) = 2m^2 - 2(p_i \cdot q_f) . \tag{4.100}$$

Então

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \sum_{s_i, \sigma_i, s_f, \sigma_f} |M|^2 \\
= & \frac{e^4}{8E(p_i)E(q_i)E(p_f)E(q_f)} \\
& \left\{ [s^2 + t^2 + 8m^2u - 8m^4] \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right]^* (p_f - q_i) \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right] (p_f - q_i) \right. \\
& + [s^2 + u^2 + 8m^2t - 8m^4] \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right]^* (p_f - p_i) \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right] (p_f - p_i) \\
& + [s^2 - 8m^2s + 12m^4] \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right]^* (p_f - q_i) \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right] (p_f - p_i) \\
& \left. + [s^2 - 8m^2s + 12m^4] \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right]^* (p_f - p_i) \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right] (p_f - q_i) \right\} \tag{4.101}
\end{aligned}$$

*Para mais detalhes vide o Apêndice J.

Da definição dos propagadores escalares não massivo e de massa m_a temos que:

$$\left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right]^* (k) \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right] (k) = (2\pi)^{-4} 2 \frac{1}{k^4 \left(1 - \frac{k^2}{m_a^2} \right)^2} \quad (4.102)$$

e

$$\begin{aligned} & \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right]^* (k) \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right] (q) + \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right]^* (q) \left[\hat{D}_0^F - \hat{D}_{m_a}^F \right] (k) \\ &= (2\pi)^{-4} \left(\frac{1}{k^2 q^2 \left(1 - \frac{k^2}{m_a^2} \right) \left(1 - \frac{q^2}{m_a^2} \right)} \right). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Finalmente a seção de choque diferencial no centro de massa, considerando todos os espins finais e a média dos iniciais, é dado pela relação:

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{c.m.} = \frac{e^4}{32 (2\pi)^2 E^2} F(s, t, u)} \quad (4.104)$$

onde

$$F(s, t, u) = \frac{[s^2 + u^2 + 8m^2t - 8m^4]}{t^2 \left(1 - \frac{t}{m_a^2} \right)^2} + \frac{[s^2 + t^2 + 8m^2u - 8m^4]}{u^2 \left(1 - \frac{u}{m_a^2} \right)^2} + 2 \frac{[s^2 - 8m^2s + 12m^4]}{ut \left(1 - \frac{u}{m_a^2} \right) \left(1 - \frac{t}{m_a^2} \right)} \quad (4.105)$$

Claramente vemos que quando $m_a \rightarrow \infty$, a expressão se reduz ao caso da QED₄ [22], concordante com a redução da lagrangiana de Podolsky à lagrangiana de Maxwell.

Como essa expressão é no centro de massa, temos que: $\mathbf{p}_i = -\mathbf{q}_i \equiv \mathbf{p}$, $\mathbf{p}_f = -\mathbf{q}_f$, $E(p_i) = E(q_i) \equiv E$, $E(p_f) = E(q_f)$; da conservação da energia-momento: $E(p_i) = E(p_f) \rightarrow |\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i|$ e, se definimos o ângulo $\theta = \angle(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f)$, podemos escrever as variáveis de Mandelstam como segue:

$$s = 4m^2 + 4\mathbf{p}^2 = 4E^2 ; u = -4\mathbf{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} ; t = -4\mathbf{p}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (4.106)$$

Antes de substituir, fazemos a seguinte mudança, usando a identidade $s + t + u = 4m^2$

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \frac{[s^2 + u^2 + 8m^2t - 8m^4]}{t^2 \left(1 - \frac{t}{m_a^2} \right)^2} = \frac{s^2 + (4m^2 - s - t)^2 + 8m^2t - 8m^4}{t^2 \left(1 - \frac{t}{m_a^2} \right)^2} \\ &= \frac{2s^2 - 8m^2s + 8m^4 + 2st + t^2}{t^2 \left(1 - \frac{t}{m_a^2} \right)^2} \\ &= \frac{2(s - 2m^2)^2}{t^2 \left(1 - \frac{t}{m_a^2} \right)^2} + \frac{2s}{t \left(1 - \frac{t}{m_a^2} \right)^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{m_a^2} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Similarmente:

$$F_2 \equiv \frac{[s^2 + t^2 + 8m^2u - 8m^4]}{u^2 \left(1 - \frac{u}{m_a^2}\right)^2} = \frac{2(s - 2m^2)^2}{u^2 \left(1 - \frac{u}{m_a^2}\right)^2} + \frac{2s}{u \left(1 - \frac{u}{m_a^2}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{u}{m_a^2}\right)^2} \quad (4.108)$$

$$F_3 \equiv 2 \frac{[s^2 - 8m^2s + 12m^4]}{ut \left(1 - \frac{u}{m_a^2}\right) \left(1 - \frac{t}{m_a^2}\right)} = -\frac{2(s - 2m^2)^2}{ut \left(1 - \frac{u}{m_a^2}\right) \left(1 - \frac{t}{m_a^2}\right)} + \frac{2(2s - 4m^2)(s - 4m^2)}{ut \left(1 - \frac{u}{m_a^2}\right) \left(1 - \frac{t}{m_a^2}\right)}. \quad (4.109)$$

Com esses resultados, vamos calcular a seção de choque para as diferentes regiões de energia, tomando como referência as massas m , m_a e que $m \ll m_a$.

Regiões não-relativísticas.- Consideremos regiões de energia tal que:

$$\frac{(s - 4m^2)}{m_a^2} \sim \frac{|t|}{m_a^2} \sim \frac{|u|}{m_a^2} \ll 1. \quad (4.110)$$

Nessa região podemos considerar a seguinte aproximação:

$$F_1 \approx \frac{2(s - 2m^2)^2}{t^2} + \frac{2s}{t} + 1 \quad (4.111)$$

$$F_2 \approx \frac{2(s - 2m^2)^2}{u^2} + \frac{2s}{u} + 1 \quad (4.112)$$

$$F_3 \approx -\frac{2(s - 2m^2)^2}{ut} + \frac{2(2s - 4m^2)(s - 4m^2)}{ut}. \quad (4.113)$$

Então:

$$F(s, t, u) \approx 2(s - 2m^2)^2 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{ut} \right) + 2 \frac{(s - 4m^2)^2}{ut} + 2. \quad (4.114)$$

Daqui podemos considerar dois casos possíveis:

- Consideremos a região de baixas energias:

$$\frac{(s - 4m^2)}{m^2} \sim \frac{|t|}{m^2} \sim \frac{|u|}{m^2} \ll 1. \quad (4.115)$$

Então:

$$F(s, t, u) \approx 8m^4 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{ut} \right). \quad (4.116)$$

Substituindo em (4.104) e as expressões de t e u em função do ângulo de espalhamento, obteremos a seção de choque diferencial:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{c.m.} = \frac{\alpha^2 m^2}{16(E^2 - m^2)^2} \left(\frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right). \quad (4.117)$$

onde $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ é a constante de estrutura fina. Esse é o *limite não relativístico da fórmula Moeller*.

- Consideremos a região de energias médias:

$$\frac{(s - 4m^2)}{m^2} \sim \frac{|t|}{m^2} \sim \frac{|u|}{m^2} \sim 1. \quad (4.118)$$

Nesse caso temos que considerar a expressão

$$F(s, t, u) \approx 2(s - 2m^2)^2 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{ut} \right) + 2 \frac{(s - 4m^2)^2}{ut} + 2. \quad (4.119)$$

Substituindo em (4.104) e as expressões de t e u em função do ângulo de espalhamento, obteremos a seção de choque diferencial:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{c.m} &= \frac{\alpha^2 (2E^2 - m^2)^2}{16E^2 (E^2 - m^2)^2} \left(\frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\text{cos}^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \text{cos}^2 \frac{\theta}{2}} \right) \\ &+ \frac{\alpha^2}{4E^2} \left(1 + \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \text{cos}^2 \frac{\theta}{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.120)$$

Ou:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{c.m} = \frac{\alpha^2 (2E^2 - m^2)^2}{4E^2 (E^2 - m^2)^2} \left[\frac{4}{\text{sen}^4 \theta} - \frac{3}{\text{sen}^2 \theta} + \frac{(E^2 - m^2)^2}{(2E^2 - m^2)^2} \left(1 + \frac{4}{\text{sen}^2 \theta} \right) \right]. \quad (4.121)$$

que é a conhecida *fórmula Moeller*.

Região (ultra-)relativística.- Consideremos regiões de energia tal que:

$$1 \ll \frac{(s - 4m^2)}{m^2} \sim \frac{|t|}{m^2} \sim \frac{|u|}{m^2}. \quad (4.122)$$

Nessa região temos que considerar os efeitos da massa de Podolsky, então fazamos a seguinte aproximação:

$$F_1 \approx \left[\frac{2(s - 2m^2)^2}{t^2} + \frac{2s}{t} + 1 \right] \left(1 + 2 \frac{t}{m_a^2} \right) \quad (4.123)$$

$$F_2 \approx \left[\frac{2(s - 2m^2)^2}{u^2} + \frac{2s}{u} + 1 \right] \left(1 + 2 \frac{u}{m_a^2} \right) \quad (4.124)$$

$$F_3 \approx \left[-\frac{2(s - 2m^2)^2}{ut} + \frac{2(2s - 4m^2)(s - 4m^2)}{ut} \right] \left(1 - \frac{(s - 4m^2)}{m_a^2} \right). \quad (4.125)$$

Será conveniente extrair o fator $(s - 4m^2)$:

$$F_1 \approx \left[\frac{8m^4}{t^2} + \frac{8m^2(s - 4m^2)}{t} + 2 \left(\frac{s - 4m^2}{t} \right)^2 + \frac{2(s - 4m^2)}{t} + \frac{8m^2}{t} + 1 \right] \left(1 + 2 \frac{t}{m_a^2} \right) \quad (4.126)$$

$$F_2 \approx \left[\frac{8m^4}{u^2} + \frac{8m^2(s-4m^2)}{u} + 2 \left(\frac{s-4m^2}{u} \right)^2 + \frac{2(s-4m^2)}{u} + \frac{8m^2}{u} + 1 \right] \left(1 + 2 \frac{u}{m_a^2} \right) \quad (4.127)$$

$$F_3 \approx \left[-\frac{8m^4}{ut} + \frac{2(s-4m^2)^2}{ut} \right] \left(1 - \frac{(s-4m^2)}{m_a^2} \right). \quad (4.128)$$

Reordenando e considerando somente as primeiras ordens perturbativas:

$$F_1 \approx \left[2 \left(\frac{s-4m^2}{t} \right)^2 + \frac{2(s-4m^2)}{t} + 1 + \frac{8m^2(s-4m^2)}{t} + \frac{8m^2}{t} \right] + \left[2 \left(\frac{s-4m^2}{t} \right)^2 + \frac{2(s-4m^2)}{t} + 1 \right] \left(2 \frac{t}{m_a^2} \right) \quad (4.129)$$

$$F_2 \approx \left[2 \left(\frac{s-4m^2}{u} \right)^2 + \frac{2(s-4m^2)}{u} + 1 + \frac{8m^2(s-4m^2)}{u} + \frac{8m^2}{u} \right] + \left[2 \left(\frac{s-4m^2}{u} \right)^2 + \frac{2(s-4m^2)}{u} + 1 \right] \left(2 \frac{u}{m_a^2} \right) \quad (4.130)$$

$$F_3 \approx \left[\frac{2(s-4m^2)^2}{ut} \right] \left(1 - \frac{(s-4m^2)}{m_a^2} \right). \quad (4.131)$$

Então:

$$\begin{aligned} & F(s, t, u) \\ \approx & 2 \left[\frac{(s-4m^2)^2}{t^2} + \frac{(s-4m^2)^2}{u^2} + 1 \right] \\ & + \frac{8m^2}{(s-4m^2)} \left[\frac{(s-4m^2)^2}{t^2} + \frac{(s-4m^2)^2}{u^2} - \frac{(s-4m^2)^2}{ut} \right] \\ & + \left[2 \frac{(s-4m^2)^2}{t^2} + 2 \frac{(s-4m^2)}{t} + 1 \right] \left(2 \frac{t}{m_a^2} \right) \\ & + \left[2 \frac{(s-4m^2)^2}{u^2} + 2 \frac{(s-4m^2)}{u} + 1 \right] \left(2 \frac{u}{m_a^2} \right) - 2 \frac{(s-4m^2)}{m_a^2} \left[\frac{(s-4m^2)^2}{ut} \right] \end{aligned} \quad (4.132)$$

Daqui podemos considerar dois casos possíveis:

- Consideremos a região energias tal que:

$$m^2 \ll (s-4m^2) \sim |t| \sim |u| \ll m_a^2. \quad (4.133)$$

Então podemos considerar:

$$F(s, t, u) \approx 2 \left[\frac{(s-4m^2)^2}{t^2} + \frac{(s-4m^2)^2}{u^2} + 1 \right]. \quad (4.134)$$

Substituindo em (4.104) e as expressões de t e u em função do ângulo de espalhamento, obteremos a seção de choque diferencial:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{c.m.} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \left(\frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\text{cos}^4 \frac{\theta}{2}} + 1 \right). \quad (4.135)$$

Este é o *limite ultra-relativístico da fórmula Möeller*.

- Consideremos a região de energias tal que:

$$m^2 \ll (s - 4m^2) \sim |t| \sim |u| \sim m_a^2. \quad (4.136)$$

Então podemos considerar:

$$\begin{aligned} & F(s, t, u) \\ \approx & 2 \left[\frac{(s - 4m^2)^2}{t^2} + \frac{(s - 4m^2)^2}{u^2} + 1 \right] + \left[2 \frac{(s - 4m^2)^2}{t^2} + 2 \frac{(s - 4m^2)}{t} + 1 \right] \left(2 \frac{t}{m_a^2} \right) \\ & + \left[2 \frac{(s - 4m^2)^2}{u^2} + 2 \frac{(s - 4m^2)}{u} + 1 \right] \left(2 \frac{u}{m_a^2} \right) \\ & - 2 \frac{(s - 4m^2)}{m_a^2} \left[\frac{(s - 4m^2)^2}{ut} \right]. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Agrupando:

$$F(s, t, u) \approx 2 \left[\frac{(s - 4m^2)^2}{t^2} + \frac{(s - 4m^2)^2}{u^2} + 1 \right] + 6 \left[1 - \frac{(s - 4m^2)^2}{ut} \right] \frac{(s - 4m^2)}{m_a^2}. \quad (4.138)$$

Substituindo em (4.104) e as expressões de t e u em função do ângulo de espalhamento, obteremos a seção de choque diferencial:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{c.m.} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \left(\frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\text{cos}^4 \frac{\theta}{2}} + 1 \right) + \frac{3\alpha^2}{m_a^2} \left(1 - \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \text{cos}^2 \frac{\theta}{2}} \right) \quad (4.139)$$

Assim temos que para energias próximas à massa de Podolsky modifica-se significativamente a fórmula ultra-relativística de Möeller. Mas, se a ordem de m_a é suficientemente grande como para considerar primeiro os efeitos da interação fraca e forte, a validade da fórmula obtida é discutível.

Nota.- O espalhamento elétron-pósitron ou *espalhamento Bhabha*

$$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+ \quad (4.140)$$

Pode ser obtido a partir do espalhamento Moeller via *crossing*, isto é, fazendo a substituição $s \leftrightarrow u$ nas variáveis de Mandelstam consideradas em Moeller*.

4.3 Espalhamento Compton

Este espalhamento considera um elétron e um fóton antes da colisão (iniciais) e um elétron e um fóton após a colisão (finais). Vamos supor que essas partículas assintoticamente livres são descritas pelos estados:

$$|\Phi_i\rangle = |\varphi_i\rangle \otimes |\psi_i\rangle = |\varphi_i\rangle \otimes b_{s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) |\Omega\rangle \quad (4.141)$$

$$|\Phi_f\rangle = |\varphi_f\rangle \otimes |\psi_f\rangle = |\varphi_f\rangle \otimes b_{s_f}^\dagger(\mathbf{p}_f) |\Omega\rangle, \quad (4.142)$$

onde (\mathbf{p}_i, σ_i) e (\mathbf{p}_f, s_f) são o momento e espin do elétron inicial e final respectivamente, e $|\varphi_i\rangle, |\varphi_f\rangle$ são os estados do fóton com momento e polarização do fóton inicial e final: $(\mathbf{k}_i, \lambda_i), (\mathbf{k}_f, \lambda_f)$, respectivamente.

Os termos da série perturbativa do operador de dispersão S , que contribuem para esse espalhamento têm a seguinte forma:

$$T_m^{Compton}(x) =: \bar{\psi}(x_{k_1}) \gamma^\mu A_\alpha(x_{n_1}) t_{\mu\nu}^{\alpha\beta, Comp}(x_1, x_2, \dots, x_m) A_\beta(x_{n_2}) \gamma^\nu \psi(x_{k_2}) : , \quad (4.143)$$

onde $t_{\mu\nu}^{\alpha\beta, Comp}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ é a distribuição numérica correspondente; como os campos eletromagnéticos contraídos são necessariamente pares, então m é par. Lembremos que os operadores fermiônicos livres têm a forma

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p_1 [b_{s_1}(\mathbf{p}_1) u_{s_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1x} + d_{s_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) v_{s_1}(\mathbf{p}_1) e^{ip_1x}] \quad (4.144)$$

$$\bar{\psi}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p_2 [b_{s_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) \bar{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2) e^{ip_2x} + d_{s_2}(\mathbf{p}_2) \bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) e^{-ip_2x}] \quad (4.145)$$

E o operador de campo eletromagnético é dividido em uma parte tipo Maxwell e outra tipo Proca:

$$A_\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_0}} \epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{k}) [a(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{ikx}] \\ + (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{m_a}}} \epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{k}) [c(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ikx} + c^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{ikx}], \quad (4.146)$$

onde ϵ_μ^λ e ϵ_μ^λ são as polarizações respectivas, que em princípio são independentes.

De todas as contribuições, temos em particular aqueles de especial interesse, cuja forma é

$$T_{2n}^{F, Comp}(x) =: \bar{\psi}(x_{k_1}) \gamma^\mu A_\mu(x_{k_1}) \mathcal{S}^{F(2n)}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) A_\nu(x_{n_2}) \gamma^\nu \psi(x_{n_2}) : , \quad (4.147)$$

*Para mais detalhes vide o Apêndice I.1.

onde a distribuição numérica $\mathcal{S}^{F(2n)}(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ é associada à contribuição de ordem $2n$ ao propagador de Feynman fermiônico completo:

$$\mathcal{S}^F(x_1, x_2) = S^F(x_1, x_2) + \int dx_3 dx_4 \mathcal{S}^{F(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) + \dots \quad (4.148)$$

A primeira contribuição, $S^F(x_1, x_2)$, é o propagador de Feynman fermiônico livre, que deduziremos nesta seção e, as outras ordens são associadas às chamadas correções radiativas*.

4.3.1 Distribuições de segunda ordem

No capítulo 3 encontramos as contribuições de segunda ordem do operador de dispersão S , correspondentes a este caso. Sendo suas distribuições numéricas associadas: R'_2 e causal D_2

$$\begin{aligned} R'_2{}^{(2)}(x_1, x_2) &= -ie^2 : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu A_\nu(x_2) S^{(+)}(x_2 - x_1) A_\mu(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) : \\ D_2{}^{(2)}(x_1, x_2) &= -ie^2 : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu S(x_2 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) : : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : . \end{aligned} \quad (4.149)$$

e

$$\begin{aligned} R_2{}^{(3)}(x_1, x_2) &= ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) S^{(-)}(x_1 - x_2) A_\nu(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : \\ D_2{}^{(3)}(x_1, x_2) &= ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S(x_1 - x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : , \end{aligned} \quad (4.150)$$

onde $S = S^{(+)} + S^{(-)}$. Como mostramos no capítulo 3, o propagador fermiônico causal S tem suporte causal, $supp S(x_1, x_2) \subseteq \Gamma_1^+(x_2) \cup \Gamma_1^-(x_2)$.

4.3.2 Ordem Singular

Calcularemos a ordem singular segundo o critério introduzido no capítulo 2, no espaço dos momentos. Nesse espaço a distribuição causal é dado por:

$$\hat{S}(p) = (\not{p} + m) \hat{D}_m(p) , \quad (4.151)$$

onde

$$\hat{D}_m(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \delta(p^2 - m^2) . \quad (4.152)$$

Devemos calcular $\hat{S}\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$

$$\hat{S}\left(\frac{p}{\alpha}\right) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}\left(\frac{p_0}{\alpha}\right) \left(\frac{\not{p}}{\alpha} + m\right) \delta\left(\frac{p^2}{\alpha^2} - m^2\right) . \quad (4.153)$$

*Tópico do seguinte capítulo.

Nesse caso $\text{sgn}\left(\frac{p_0}{\alpha}\right) = \text{sgn}(p_0)$, e da propriedade de escala $\delta\left(\frac{x}{\beta}\right) = |\beta| \delta(x)$. Teremos que:

$$\hat{S}\left(\frac{p}{\alpha}\right) = \alpha \left[\frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) (\not{p} + \alpha m) \delta(p^2 - \alpha^2 m^2) \right]. \quad (4.154)$$

Na prática, o coeficiente α^1 indica que a ordem singular de \hat{S} é $\omega = -1$. Concluimos que o propagador causal fermiônico \hat{S} é uma *distribuição regular da ordem -1*.

$$\omega(\hat{S}) = -1 < 0. \quad (4.155)$$

Como mencionamos no início, esse termo é só a primeira ordem significativa do propagador completo, veremos nos capítulos 5 as outras ordens onde sim observaremos a diferença entre a GQED_4 e a QED_4 . No capítulo 6 mostraremos que a ordem singular não muda no resto das ordens perturbativas.

4.3.3 Bipartição e o Propagador Retardado Fermiônico

Como \hat{S} é uma distribuição regular, obteremos a distribuição retardada \hat{S}^R da relação:

$$\hat{S}^R(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{S}(tp)}{1-t + \text{sgn}(p_0) i0^+}. \quad (4.156)$$

Substituindo a expressão do propagador causal \hat{S}

$$\begin{aligned} \hat{S}^R(p) &= \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{(t \not{p} + m) \hat{D}_m(tp)}{1-t + \text{sgn}(p_0) i0^+} \\ &= \not{p} \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{t \hat{D}_m(tp)}{1-t + \text{sgn}(p_0) i0^+} \\ &\quad + m \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{D}_m(tp)}{1-t + \text{sgn}(p_0) i0^+}. \end{aligned} \quad (4.157)$$

Como por definição $\hat{D}_m(tp)$ é ímpar em t , teremos que:

$$\left[\frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \right]^{-1} \hat{R}_m(p) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{D}_m(tp)}{1-t + \text{sgn}(p_0) i0^+} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{t \hat{D}_m(tp)}{1-t + \text{sgn}(p_0) i0^+}. \quad (4.158)$$

Portanto, obtemos que o *propagador retardado fermiônico* tem a seguinte forma:

$$\hat{S}^R(p) = (\not{p} + m) \hat{R}_m(p), \quad (4.159)$$

onde $\hat{R}_m(p)$ é o propagador retardado escalar

$$\hat{R}_m(p) = - (2\pi)^{-2} \frac{1}{p^2 - m^2 + \text{sgn}(p_0) i0^+} ; p^2 > 0 . \quad (4.160)$$

No espaço de configurações esse propagador terá a forma:

$$S^R(x_1 - x_2) = (i \not{\partial} + m) R_m(x_1 - x_2) \equiv S^{ret}(x_1 - x_2) . \quad (4.161)$$

que é a distribuição a considerar em (4.150) .

Nota.- Como $D_m(x) = -D_m(-x)$, $[\not{\partial} D_m](x) = \not{\partial}^x D_m(x) = \not{\partial}^{-x} D_m(-x)$, então:

$$S(x_2 - x_1) = (i \not{\partial} - m) D_m(x_1 - x_2) = \int d^4p (\not{p} - m) \hat{D}_m(p) e^{-ip(x_1 - x_2)} . \quad (4.162)$$

Daí:

$$S^R(x_2 - x_1) = \int d^4p (\not{p} - m) \hat{R}_m(p) e^{-ip(x_1 - x_2)} = - \int d^4p (\not{p} + m) \hat{R}_m(-p) e^{-ip(x_2 - x_1)} . \quad (4.163)$$

Sendo o propagador escalar avançado:

$$\hat{A}_m(p) = \hat{R}_m(-p) \quad (4.164)$$

Obtemos assim a seguinte relação

$$S^R(x_2 - x_1) = - (i \not{\partial} + m) A_m(x_2 - x_1) \equiv -S^{av}(x_2 - x_1) \quad (4.165)$$

que é a distribuição a considerar em (4.149) . Isto será de utilidade para comparar as duas contribuições, em segunda ordem, ao espalhamento Compton.

4.3.4 Contribuição de 2º ordem à Matriz-S e o Propagador de Feynman Fermiônico

Calculemos o termo de segunda ordem do operador de dispersão S ao espalhamento elétron-fóton, isto é calcular as distribuições $T_2^{(2,3)}(x_1, x_2)$, cuja expressão segundo a construção indutiva é:

$$T_2^{(2,3)}(x_1, x_2) = R_2^{(2,3)}(x_1, x_2) - R_2'^{(2,3)}(x_1, x_2) . \quad (4.166)$$

onde $R_2^{(2,3)}$ é a parte retardada de $D_2^{(2,3)}$. As distribuições envolvidas têm a seguinte forma:

$$R_2^{(2)}(x_1, x_2) = ie^2 : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu S^{av}(x_2 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) : : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \quad (4.167)$$

$$R_2^{(3)}(x_1, x_2) = ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{ret}(x_1 - x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : . \quad (4.168)$$

e:

$$R_2'^{(2)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) : : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \quad (4.169)$$

$$R_2'^{(3)}(x_1, x_2) = ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : . \quad (4.170)$$

Assim $T_2^{(2)}$ e $T_2^{(3)}$ têm a forma:

$$\begin{aligned} T_2^{(2)}(x_1, x_2) &= -ie^2: \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu S^F(x_2 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) :: A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \\ T_2^{(3)}(x_1, x_2) &= -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^F(x_1 - x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) :: A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : , \end{aligned} \quad (4.171)$$

onde S^F é definida pela relação:

$$S^F = - [S^{ret} - S^{(-)}] = - [S^{av} + S^{(+)}] . \quad (4.172)$$

Portanto, teremos que

$$T_2^{(2)}(x_2, x_1) = T_2^{(3)}(x_1, x_2) , \quad (4.173)$$

vemos nessa propriedade de simetria que somente precisamos calcular uma delas.

Calculemos a distribuição S^F no espaço dos momentos, que por definição ela terá a forma:

$$\hat{S}^F(p) = - [\hat{S}^{ret}(p) - \hat{S}^{(-)}(p)] \quad (4.174)$$

Das expressões obtidas para \hat{S}^{ret} , $\hat{S}^{(-)}$ obteremos que \hat{S}^F tem a forma:

$$\begin{aligned} \hat{S}^F(p) &= - [(\not{p} + m) \hat{R}_m(p) - (\not{p} + m) \hat{D}_m^{(-)}(p)] \\ &= - (\not{p} + m) \hat{D}_m^F(p) . \end{aligned} \quad (4.175)$$

onde $\hat{D}_m^F(p)$ é o propagador de Feynman escalar.

Substituindo a expressão da distribuição \hat{D}_m^F , obtemos que:

$$\hat{S}^F(p) = (2\pi)^{-2} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0^+} , \quad (4.176)$$

que é conhecido como o *propagador de Feynman fermiônico*.

4.3.5 Amplitude de Transição e Seção de Choque

Com todos os resultados prévios, poderemos calcular a amplitude de transição do espalhamento elétron-fóton, cujos estados iniciais e finais são descritos pelos estados

$$|\Phi_i\rangle = |\varphi_i\rangle \otimes |\psi_i\rangle = |\varphi_i\rangle \otimes b_{s_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) |\Omega\rangle \quad (4.177)$$

$$|\Phi_f\rangle = |\varphi_f\rangle \otimes |\psi_f\rangle = |\varphi_f\rangle \otimes b_{s_f}^\dagger(\mathbf{p}_f) |\Omega\rangle , \quad (4.178)$$

onde $|\varphi_i\rangle$, $|\varphi_f\rangle$ são os estados do fóton com momento e polarização do fóton inicial e final: $(\mathbf{k}_i, \lambda_i)$, $(\mathbf{k}_f, \lambda_f)$, respectivamente.

A contribuição à amplitude de transição na segunda ordem perturbativa é definida pela expressão:

$$S_{fi} = \langle \Phi_f | S_2^{(2)} + S_2^{(3)} | \Phi_i \rangle = \langle \Phi_f | \frac{1}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 [T_2^{(2)}(x_2, x_1) + T_2^{(3)}(x_1, x_2)] | \Phi_i \rangle . \quad (4.179)$$

Usando a propriedade de simetria (4.173), teremos que:

$$S_{fi} = \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \Phi_f | T_2^{(3)}(x_1, x_2) | \Phi_i \rangle , \quad (4.180)$$

onde já se tem considerado o limite adiabático. Substituindo a expressão $T_2^{(3)}$ obtida na seção prévia obteremos:

$$S_{fi} = -ie^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \psi_f | : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu S^F(x_1 - x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : | \psi_i \rangle \times \langle \varphi_f | : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : | \varphi_i \rangle . \quad (4.181)$$

Para a parte livre correspondente aos elétrons:

$$\begin{aligned} \psi(x) b_s^\dagger(\mathbf{p}) |\Omega\rangle &= \left[(2\pi)^{-3/2} \int d^3p_1 b_{s_1}(\mathbf{p}_1) u_{s_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 x} \right] b_s^\dagger(\mathbf{p}) |\Omega\rangle \\ &= |\Omega\rangle (2\pi)^{-3/2} u_s(\mathbf{p}) e^{-ipx} \end{aligned} \quad (4.182)$$

$$\begin{aligned} \langle \Omega | b_s(\mathbf{p}) \bar{\psi}(x) &= \langle \Omega | b_s(\mathbf{p}) \left[(2\pi)^{-3/2} \int d^3p_2 b_{s_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) \bar{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2) e^{ip_2 x} \right] \\ &= (2\pi)^{-3/2} \bar{u}_s(\mathbf{p}) e^{ipx} \langle \Omega | . \end{aligned} \quad (4.183)$$

E na parte dos fótons, temos que o operador de campo eletromagnético pode ser dividido nos setores independentes, de Maxwell e de Proca:

$$A_\mu(x) = A_\mu^M(x) + A_\mu^P(x) . \quad (4.184)$$

Então teremos que:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_f | : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : | \varphi_i \rangle &= \langle \varphi_f | : A_\mu^{M(+)}(x_1) A_\nu^{M(-)}(x_2) : | \varphi_i \rangle \\ &+ \langle \varphi_f | : A_\mu^{P(+)}(x_1) A_\nu^{P(-)}(x_2) : | \varphi_i \rangle . \end{aligned} \quad (4.185)$$

Nessa relação vemos claramente a separação entre ambos setores e, que a parte correspondente ao setor de Maxwell é independente da massa de Podolsky (m_a). Se bem que não conseguimos definir um fóton com a contribuição tipo Proca, sim podemos concluir que sua contribuição à amplitude de transição vai para zero quando $m_a \rightarrow \infty$.

Como mencionamos no capítulo 3, para fótons com energias menores a m_a somente é possível ter fótons livres de Maxwell:

$$|\varphi_i\rangle = a^\dagger(\mathbf{k}_i, \lambda_i) |\Omega\rangle \quad (4.186)$$

$$|\varphi_f\rangle = a^\dagger(\mathbf{k}_f, \lambda_f) |\Omega\rangle \quad (4.187)$$

Então:

$$\langle \varphi_f | : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : | \varphi_i \rangle = \langle \varphi_f | : A_\mu^{M(+)}(x_1) A_\nu^{M(-)}(x_2) : | \varphi_i \rangle \quad (4.188)$$

Daí que nesse caso o resultado será o mesmo que da QED*, por exemplo, se obtém a seção de choque diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4 \omega_f^2}{64\pi^2 m^2 \omega_i^2} \left[\frac{\omega_i}{\omega_f} + \frac{\omega_f}{\omega_i} - 2 + 4(\varepsilon_i \varepsilon_f)^2 \right] \quad (4.189)$$

onde ω_i, ε_i e ω_f, ε_f são a frequência e tensor de polarização do fóton inicial e final, respectivamente. Essa relação, conhecida como fórmula de Klein-Nishima, também deveria modificarse numa teoria completa do fóton de Podolsky e, aquela reduzir-se a (4.189) quando $m_a \rightarrow \infty$.

*Para mais detalhes desse resultado vide [22].

Capítulo 5

Correções Radiativas em GQED_4

Neste capítulo aplicaremos a Teoria de Perturbação Causal para encontrar as correções radiativas a um loop: Polarização do Vácuo, Auto-energia do Elétron e o Vértice.

5.1 Introdução

No capítulo anterior calculamos as amplitudes de transição na primeira ordem perturbativa significativa, que é a segunda ordem da TPC, dos espalhamentos Moeller e Compton. Também, em nossa análise, encontramos que do vasto conjunto de contribuições de ordem superior temos em particular aquelas que contribuem ao propagador do fóton e do elétron que aparecem em Moeller e Compton, respectivamente.

Observando a série perturbativa da *Matriz-S*, podemos pensar que no espalhamento de elétrons os termos com um número ímpar de operadores eletromagnéticos livres (não contraídos) não contribuem; mas se o espalhamento é gerado por um campo eletromagnético externo todos os termos da série perturbativa com um único operador eletromagnético livre contribuem para a amplitude de transição deste espalhamento. A função de Green associada a esse espalhamento é chamada de Vértice.

No seguinte quadro classificamos e denotamos as primeiras correções radiativas desses espalhamentos:

Espalhamento	Função de Green	Primeira Correção Radiativa
<i>Moeller</i>	<i>Propagador do Fóton</i>	<i>Polarização do Vácuo (VP)</i>
<i>Compton</i>	<i>Propagador do Elétron</i>	<i>Auto-energia (AE)</i>
<i>Por um Campo Ext.</i>	<i>Vértice</i>	<i>Vértice</i>

Nas seguintes seções definiremos e estudaremos cada uma dessas correções radiativas, e também daremos as correções de ordens superiores para alguns casos especiais que podem ser construídos com os mencionados na tabela.

5.2 Polarização do Vácuo

Dos termos perturbativos, do operador de dispersão S , que contribuem para a amplitude de transição do espalhamento Moeller, temos em particular aqueles da seguinte forma

$$T_{2n}^{F,Moeller}(x) =: \bar{\psi}(x_{k_1}) \gamma^\mu \psi(x_{k_1}) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{F(2n)}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \bar{\psi}(x_{n_2}) \gamma^\nu \psi(x_{n_2}) : , \quad (5.1)$$

que são associados ao *propagador de Feynman eletromagnético completo*, cuja forma perturbativa é

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^F(x_1, x_2) = D_{\mu\nu}^F(x_1, x_2) + \int dx_3 dx_4 \mathcal{D}_{\mu\nu}^{F(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) + \dots . \quad (5.2)$$

No capítulo anterior encontramos a primeira contribuição, $D_{\mu\nu}^F(x_1, x_2)$, que é o *propagador de Feynman eletromagnético livre*. Mas como encontrar, sequer, o subsequente termo?. Para isso fazemos a seguinte análise das contribuições, de quarta ordem, primeiro lembremos que nessa ordem as distribuições causais são construídas a partir das distribuições

$$R'_4(x_1, \dots, x_4) \equiv \sum_{P_2} T_{4-n_1}(Y, x_4) \tilde{T}_{n_1}(X) , \quad A'_4(x_1, \dots, x_4) \equiv \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{4-n_1}(Y, x_4) , \quad (5.3)$$

onde P_2 indica todas as partições do conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ nos subconjuntos disjuntos X, Y com $|X| = n_1 \geq 1$, $|Y| \leq 2$. Não pretendendo dar uma descrição detalhada, escrevemos essas distribuições como segue

$$R'_4 = \sum T_3(\dots, x_4) \tilde{T}_1 + \sum T_2(\dots, x_4) \tilde{T}_2 + \sum T_1(x_4) \tilde{T}_3 \quad (5.4)$$

$$A'_4 = \sum \tilde{T}_1 T_3(\dots, x_4) + \sum \tilde{T}_2 T_2(\dots, x_4) + \sum \tilde{T}_3 T_1(x_4) . \quad (5.5)$$

Sendo $\tilde{T}_2 = -T_2 + \sum T_1 T_1$, e focando nossa análise nos termos T_2 que contribuem para o espalhamento Moeller:

$$R'_4 = -T_2^{Mo}(x_2, x_4) T_2^{Mo}(x_3, x_1) + \dots \quad (5.6)$$

$$A'_4 = -T_2^{Mo}(x_1, x_3) T_2^{Mo}(x_4, x_2) + \dots , \quad (5.7)$$

onde temos usado a simetria de índices de T_2^{Mo} . Agora substituamos as expressões, obtidas no capítulo anterior, dos termos Moeller de segunda ordem:

$$T_2^{Mo}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : . \quad (5.8)$$

De todos os termos obtidos, ao usar o teorema de Wick, prestemos atenção em particular a:

$$R'_4 = e^4 : j_2^\nu D_{\nu\beta}^F(x_2 - x_4) \overbrace{\bar{\psi}(x_4) \gamma^\beta \psi(x_4) \bar{\psi}(x_3) \gamma^\alpha \psi(x_3)} D_{\alpha\mu}^F(x_3 - x_1) j_1^\mu : \quad (5.9)$$

$$A'_4 = e^4 : j_1^\mu D_{\mu\alpha}^F(x_1 - x_3) \overbrace{\bar{\psi}(x_3) \gamma^\alpha \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \gamma^\beta \psi(x_4)} D_{\beta\nu}^F(x_4 - x_2) j_2^\nu : . \quad (5.10)$$

onde $j_i^\mu = j^\mu(x_i)$.

Vemos que os termos fermiônicos contraídos são exatamente iguais à parte numérica de uma das contribuições de $R_2^{(6)}$, $A_2^{(6)}$ respectivamente*

$$R_2^{(6)}(x_1, x_2) = e^2: A_\nu(x_2) \overbrace{\bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1)} : A_\mu(x_1) : \quad (5.11)$$

$$A_2^{(6)}(x_1, x_2) = e^2: A_\mu(x_1) \overbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2)} : A_\nu(x_2) : . \quad (5.12)$$

Portanto, será suficiente calcular as correspondentes distribuições de segunda ordem[†].

5.2.1 Distribuições de segunda ordem associadas

No capítulo 3 encontramos as contribuições de segunda ordem correspondentes ao operador de dispersão S deste caso. Sendo suas distribuições numéricas associadas: R_2' e causal D_2 :

$$R_2'^{(6)}(x_1, x_2) = -e^2: A_\mu(x_1) tr [\gamma^\nu S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_2)] A_\nu(x_2) : \quad (5.13)$$

$$D_2^{(6)}(x_1, x_2) = e^2: A_\mu(x_1) tr [\gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu S^{(-)}(x_2 - x_1)] A_\nu(x_2) : \\ -e^2: A_\mu(x_1) tr [\gamma^\nu S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_2)] A_\nu(x_2) : \quad (5.14)$$

onde $S^{(+)}$, $S^{(-)}$ são os propagadores fermiônicos de frequência positiva e negativa. Se introduzirmos o tensor $P_1^{\mu\nu}$ definido como

$$P_1^{\mu\nu}(y) = e^2 tr [\gamma^\mu S^{(+)}(y) \gamma^\nu S^{(-)}(-y)] , \quad (5.15)$$

as distribuições $R_2'^{(6)}$, $D_2^{(6)}$ podem ser escritas simplesmente como:

$$R_2'^{(6)}(x_1, x_2) = -: A_\mu(x_1) P_1^{\nu\mu}(x_2 - x_1) A_\nu(x_2) : \\ D_2^{(6)}(x_1, x_2) =: A_\mu(x_1) d^{\mu\nu}(x_1 - x_2) A_\nu(x_2) : . \quad (5.16)$$

onde

$$d^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \equiv P_1^{\mu\nu}(x_1 - x_2) - P_1^{\nu\mu}(x_2 - x_1) . \quad (5.17)$$

Antes de continuar com a construção indutiva, devemos ter certeza que a parte numérica de $D_2^{(6)}$ tenha suporte causal. Para provar isso reescrevemos $P_1^{\nu\mu}(x_2 - x_1)$ usando a propriedade $tr(ABCD) = tr(DABC)$:

$$P_1^{\nu\mu}(x_2 - x_1) = tr \{ \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu S^{(+)}(x_2 - x_1) \} , \quad (5.18)$$

*Para mais detalhes vide o capítulo 3.

[†]Como na segunda ordem, só temos contrações fermiônicas, não haverá diferença com os resultados da QED₄ obtidos em [22], contudo, faremos nossa própria análise.

e, substituindo a relação: $S^{(-)} = S - S^{(+)}$; obteremos que a parte numérica da distribuição causal, $d^{\mu\nu}$, tem a forma

$$\begin{aligned}
& e^{-2}d^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \\
&= \text{tr} \{ \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu [S - S^{(+)}](x_2 - x_1) \} \\
&\quad - \text{tr} \{ \gamma^\mu [S - S^{(+)}](x_1 - x_2) \gamma^\nu S^{(+)}(x_2 - x_1) \} \\
&= \text{tr} \{ \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma^\nu S(x_2 - x_1) \} - \text{tr} \{ \gamma^\mu S(x_1 - x_2) \gamma^\nu S^{(+)}(x_2 - x_1) \} \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Como o propagador fermiônico S é uma distribuição com suporte causal, embora $S^{(+)}$ não tem suporte causal o produto $S^{(+)}S$ tem suporte causal, portanto, concluímos que a distribuição $d^{\mu\nu}$ ou $D_2^{(6)}$ também têm suporte causal, isto é:

$$\text{supp}D_2^{(6)}(x_1, x_2) \subseteq \Gamma_1^+(x_2) \cup \Gamma_1^-(x_2) , \quad (5.20)$$

que é uma condição indispensável no processo de bipartição. Mas, para iniciar esse processo, devemos conhecer a ordem singular.

5.2.2 Ordem Singular

Calcularemos a ordem singular segundo o critério definido no espaço dos momentos; então antes devemos ter a expressão da distribuição $d^{\mu\nu}$ no espaço dos momentos, uma forma de obtê-la é escrevendo sua expansão de Fourier:

$$\begin{aligned}
d^{\mu\nu}(y) &= P_1^{\mu\nu}(y) - P_1^{\nu\mu}(-y) \\
&= (2\pi)^{-2} \int dk \mathcal{F}[P_1^{\mu\nu}](k) e^{-iky} - (2\pi)^{-4/2} \int dk \mathcal{F}[P_1^{\nu\mu}](k) e^{-ik(-y)} \\
&= (2\pi)^{-2} \int dk [\mathcal{F}[P_1^{\mu\nu}](k) - \mathcal{F}[P_1^{\nu\mu}](-k)] e^{-iky} . \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Daí $d^{\mu\nu}$ no espaço dos momentos, $\hat{d}^{\mu\nu}$, é dada por

$$\hat{d}^{\mu\nu}(k) = \hat{P}_1^{\mu\nu}(k) - \hat{P}_1^{\nu\mu}(-k) , \quad (5.22)$$

onde $\hat{P}_1^{\mu\nu}(k) \equiv \mathcal{F}[P_1^{\mu\nu}](k)$. Portanto, antes devemos calcular a transformada de Fourier do tensor $P_1^{\mu\nu}$.

Transformada de Fourier do tensor $P_1^{\mu\nu}$. - A definição dessa transformada, $\hat{P}_1^{\mu\nu}$, é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
\hat{P}_1^{\mu\nu}(k) &= \mathcal{F}[P_1^{\mu\nu}](k) = (2\pi)^{-4/2} \int dy P_1^{\mu\nu}(y) e^{iky} \\
&= e^2 (2\pi)^{-2} \int dy \text{tr} [\gamma^\mu S^{(+)}(y) \gamma^\nu S^{(-)}(-y)] e^{iky} . \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões das expansões de Fourier dos propagadores PF e NF fermiônico:

$$S^{(+)}(y) = (2\pi)^{-2} \int d^4p \hat{D}_m^{(+)}(p) (\not{p} + m) e^{-ipy} \quad (5.24)$$

$$S^{(-)}(-y) = (2\pi)^{-2} \int d^4q \hat{D}_m^{(-)}(q) (\not{q} + m) e^{-iq(-y)}. \quad (5.25)$$

Obtemos

$$\begin{aligned} \hat{P}_1^{\mu\nu}(k) &= e^2 (2\pi)^{-2} \int d^4p d^4q \text{tr} [\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{q} + m)] \hat{D}_m^{(+)}(p) \hat{D}_m^{(-)}(q) \\ &\quad \cdot \left[(2\pi)^{-4} \int d^4y e^{-i(p-q-k)y} \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Identificando a distribuição $\delta(p - q - k)$ e integrando em q

$$\begin{aligned} \hat{P}_1^{\mu\nu}(k) &= e^2 (2\pi)^{-2} \int d^4p d^4q \text{tr} [\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{q} + m)] \hat{D}_m^{(+)}(p) \hat{D}_m^{(-)}(q) \delta(p - q - k) \\ &= -e^2 (2\pi)^{-2} \int d^4p \text{tr} [\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} - \not{p} - m)] \hat{D}_m^{(+)}(p) \hat{D}_m^{(-)}(p - k) \end{aligned} \quad (5.27)$$

e usando as propriedades do traço das matrizes- γ pode-se obter* que:

$$\text{tr} [\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} - \not{p} - m)] = 4 [p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - 2p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} (pk - (p^2 - m^2))] . \quad (5.28)$$

Substituindo esse resultado

$$\begin{aligned} \hat{P}_1^{\mu\nu}(k) &= -4e^2 (2\pi)^{-2} \int d^4p [p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - 2p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} (pk - (p^2 - m^2))] \\ &\quad \cdot \hat{D}_m^{(+)}(p) \hat{D}_m^{(-)}(p - k) . \end{aligned} \quad (5.29)$$

Uma primeira simplificação dessa expressão se obtém a partir da propriedade: $x\delta(x) = 0$, que nos leva a

$$(q^2 - m^2) \hat{D}_m^{(\pm)}(q) = (q^2 - m^2) [\pm i (2\pi)^{-1} \theta(\pm q^0) \delta(q^2 - m^2)] = 0. \quad (5.30)$$

Ao usá-la, obteremos

$$\hat{P}_1^{\mu\nu}(k) = -4e^2 (2\pi)^{-2} \int d^4p [p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - 2p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} pk] \hat{D}_m^{(+)}(p) \hat{D}_m^{(-)}(p - k) . \quad (5.31)$$

Uma segunda simplificação se obtém ao analisar a transversalidade desse tensor, que na prática é calcular $k_\mu \hat{P}_1^{\mu\nu}(k)$:

$$\begin{aligned} k_\mu \hat{P}_1^{\mu\nu}(k) &= -4e^2 (2\pi)^{-2} \int d^4p [k^2 - 2kp] p^\nu \hat{D}_m^{(+)}(p) \hat{D}_m^{(-)}(p - k) \\ &= -4e^2 (2\pi)^{-2} \int d^4p \{ [(k - p)^2 - m^2] - (p^2 - m^2) \} p^\nu \hat{D}_m^{(+)}(p) \hat{D}_m^{(-)}(p - k) \\ &= -4e^2 (2\pi)^{-2} \int d^4p [(k - p)^2 - m^2] p^\nu \hat{D}_m^{(+)}(p) \hat{D}_m^{(-)}(p - k) , \end{aligned} \quad (5.32)$$

*Vide o Apêndice J.

em que no último passo, usamos a propriedade (5.30) e, usando mais uma vez essa propriedade, chegaremos a que

$$k_\mu \hat{P}_1^{\mu\nu}(k) = 0. \quad (5.33)$$

Então o tensor $\hat{P}_1^{\mu\nu}(k)$ é transversal, e daí pode ser escrito da forma:

$$\hat{P}_1^{\mu\nu}(k) = e^2 (2\pi)^{-4} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \hat{d}_1(k), \quad (5.34)$$

onde

$$\hat{d}_1(k) = \frac{1}{3} e^{-2} (2\pi)^4 \hat{P}_{1,\mu}^\mu(k). \quad (5.35)$$

Do resultado da primeira simplificação (5.31), obteremos

$$\begin{aligned} \hat{d}_1(k) &= \frac{1}{3} e^{-2} (2\pi)^2 \left[4e^2 \int d^4p (2pk + 2p^2) \hat{D}_m^{(+)}(p) \hat{D}_m^{(-)}(p-k) \right] \\ &= \frac{4}{3} (2\pi)^2 \int d^4p (3p^2 + k^2 - (k-p)^2) \hat{D}_m^{(+)}(p) \hat{D}_m^{(-)}(p-k) \\ &= \frac{4}{3} (2m^2 + k^2) (2\pi)^2 \int d^4p \hat{D}_m^{(+)}(p) \hat{D}_m^{(-)}(p-k), \end{aligned} \quad (5.36)$$

no último passo usamos todos os critérios prévios. A última integral é proporcional à convolução $[\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)}](k)$, cujo resultado é*

$$[\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)}](k) = (2\pi)^{-2} \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \right) \theta(k^2 - 4m^2) \theta(k_0), \quad (5.37)$$

dando-nos finalmente a forma explícita da distribuição \hat{d}_1

$$\hat{d}_1(k) = \frac{2\pi}{3} (2m^2 + k^2) \theta(k_0) \theta[k^2 - 4m^2] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \quad (5.38)$$

Substituindo os resultados (5.34), (5.38) em (5.22), obteremos $d^{\mu\nu}$ no espaço dos momentos:

$$\hat{d}^{\mu\nu}(k) = e^2 (2\pi)^{-4} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \hat{d}(k), \quad (5.39)$$

onde

$$\hat{d}(k) = \hat{d}_1(k) - \hat{d}_1(-k) = \frac{2\pi}{3} (2m^2 + k^2) \operatorname{sgn}(k_0) \theta[k^2 - 4m^2] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \quad (5.40)$$

*Vide o Apêndice K

Com esse resultado podemos calcular a ordem singular $\hat{d}_{\mu\nu}$, que se deduz da expressão $\hat{d}_{\mu\nu} \left(\frac{k}{\alpha} \right)$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$, do resultado prévio

$$\begin{aligned} \hat{d}^{\mu\nu} \left(\frac{k}{\alpha} \right) &= \alpha^{-2} e^2 (2\pi)^{-4} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \frac{2\pi}{3} (2m^2 \alpha^2 + k^2) \\ &\quad \times \theta(k^2 - 4m^2 \alpha^2) \operatorname{sgn} \left(\frac{k_0}{\alpha} \right) \left(\sqrt{1 - \frac{4m^2 \alpha^2}{k^2}} \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Daí

$$\hat{d}^{\mu\nu} \left(\frac{k}{\alpha} \right) \rightarrow \alpha^{-2} e^2 (2\pi)^{-4} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \left[\frac{2\pi}{3} (k^2) \theta(k^2) \operatorname{sgn}(k_0) \right]. \quad (5.42)$$

O coeficiente α^{-2} nos leva a conceder-lhe a ordem singular $+2$. Portanto, a distribui o $\hat{d}^{\mu\nu}$ (ou $d_{\mu\nu}$)   uma *distribui o singular da ordem $+2$* . Assim a polariza o do vácuo (VP) na segunda ordem tem ordem singular:

$$\boxed{\omega_2^{VP} = +2.} \quad (5.43)$$

Este resultado está relacionado com o fato da VP ser divergente na abordagem usual; e o valor $+2$ dessa,   o mesmo que a contagem de potência da integral de Feynman da VP*.

5.2.3 Bipartiu o e a Parte Retardada da VP a um loop

Como $\hat{d}^{\mu\nu}$   uma distribui o singular da ordem $+2$, obteremos a parte retardada $\hat{r}^{\mu\nu}$ a partir da seguinte fórmula de bipartiu o:

$$\hat{r}^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}^{\mu\nu}(tk)}{t^{2+1} (1-t + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+)}. \quad (5.44)$$

Substituindo a expressão da distribui o causal, $\hat{d}^{\mu\nu}$, (5.39) obteremos

$$\hat{r}^{\mu\nu}(k) = e^2 (2\pi)^{-4} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \left[\frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}(tk)}{t^{2+1} (1-t + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+)} \right]. \quad (5.45)$$

Vemos que o problema equivale a obter:

$$\hat{r}(k) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}(tk)}{t^{2+1} (1-t + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+)}. \quad (5.46)$$

*Essa igualdade nem sempre se d , tal como se v  em QED₂ [23], como mostramos no capítulo 2, o mandat rio em TPC   a ordem singular.

*Cálculo da parte retardada de $\hat{d}(k)$, que é obtida da expressão

$$\hat{r}(k) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}(tk)}{t^{2+1} (1-t + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+)}. \quad (5.47)$$

Substituindo \hat{d} , cuja expressão é: $\hat{d}(k) = \frac{2\pi}{3} (2m^2 + k^2) \operatorname{sgn}(k_0) \theta[k^2 - 4m^2] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}$; obteremos

$$\hat{r}(k) = \frac{i}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{1}{(1-t + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+)} \left[\frac{(2m^2 + t^2 k^2) \operatorname{sgn}(t) \theta[t^2 k^2 - 4m^2] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{t^2 k^2}}}{t^3} \right]. \quad (5.48)$$

Como a função entre colchetes é par, essa expressão se reduz a:

$$\hat{r}(k) = \frac{i}{3} \int_{\frac{4m^2}{k^2}}^{\infty} ds \frac{1}{1-s + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+} \left(\frac{2m^2 + sk^2}{s^2} \right) \left(\sqrt{1 - \frac{4m^2}{sk^2}} \right), \quad (5.49)$$

onde fizemos a substituição $t^2 \rightarrow s$ e aplicamos a função degrau.

Da fórmula de Sochozki se deduz que:

$$\frac{1}{x + \operatorname{sgn}(k_0) i0^+} = \frac{1}{x + i0^+} + 2i\pi \theta(-k_0) \delta(x)$$

, então \hat{r} pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned} \hat{r}(k) &= \frac{i}{3} \int_{\frac{4m^2}{k^2}}^{\infty} ds \frac{1}{1-s + i0^+} \left(\frac{2m^2 + sk^2}{s^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{sk^2}} \\ &\quad - \frac{2}{3} \theta(-k_0) \theta[k^2 - 4m^2] (2m^2 + k^2) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Identificando o último termo com a distribuição $\hat{d}_1(-k)$, teremos que

$$\hat{r}(k) = \frac{i}{3} I(k) - \hat{d}_1(-k), \quad (5.51)$$

onde $I(k)$ é definido como segue:

$$I(k) = \int_{\frac{4m^2}{k^2}}^{\infty} ds \frac{1}{1-s + i0^+} \left(\frac{2m^2 + sk^2}{s^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{sk^2}}. \quad (5.52)$$

Após os cálculos, podemos mostrar* que esta distribuição é:

$$I(k) = m^2 \left[\frac{1+\xi}{1-\xi} \left(\xi - 4 + \frac{1}{\xi} \right) \ln \xi + \frac{5}{3\xi} + \frac{5\xi}{3} - \frac{22}{3} \right], \quad (5.53)$$

*Para mais detalhes vide o Apêndice L.1.

onde $\xi^{\pm 1} = \left(1 - \frac{k^2}{2m^2}\right) \pm \frac{k^2}{2m^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}$, destas definições obtemos as identidades:

$$\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} = \frac{1 + \xi}{1 - \xi}, \quad 2m^2 + k^2 = -m^2 \left(\xi - 4 + \frac{1}{\xi}\right). \quad (5.54)$$

Substituindo essas expressões em (5.51), obteremos finalmente a parte retardada de $\hat{d}(k)$

$$\hat{r}(k) = \frac{i}{3} m^2 \left\{ \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \left(\xi - 4 + \frac{1}{\xi}\right) \ln \xi + \frac{5}{3\xi} + \frac{5\xi}{3} - \frac{22}{3} \right\} - \hat{d}_1(-k). \quad (5.55)$$

Supondo o resultado de $\hat{r}(k)$ implícito, podemos concluir que a parte retardada da distribuição $\hat{d}^{\mu\nu}$, tem a forma

$$\hat{r}^{\mu\nu}(k) = e^2 (2\pi)^{-4} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \hat{r}(k). \quad (5.56)$$

É claro que da expressão de $\hat{r}(k)$, teremos múltiplos resultados que vão depender da região onde se encontra k^2 . Esses casos serão discutidos na seguinte subseção.

5.2.4 Tensor de Polarização a um loop

Agora calcularemos o termo de segunda ordem do operador de dispersão S que contribui para a polarização do vácuo, isto é calcular a distribuição $T_2^{VP}(x_1, x_2)$, cuja expressão segundo a construção indutiva é:

$$T_2^{VP}(x_1, x_2) = R_2^{(6)}(x_1, x_2) - R_2'^{(6)}(x_1, x_2). \quad (5.57)$$

onde $R_2^{(6)}$ é a parte retardada de $D_2^{(6)}$. Dos resultados das seções precedentes, temos que elas têm a forma

$$R_2^{(6)}(x_1, x_2) = - : A_\mu(x_1) P_1^{\nu\mu}(x_2 - x_1) A_\nu(x_2) : \quad (5.58)$$

$$R_2'^{(6)}(x_1, x_2) = : A_\mu(x_1) r^{\mu\nu}(x_1 - x_2) A_\nu(x_2) : . \quad (5.59)$$

Daí a distribuição T_2^{VP} terá a forma:

$$T_2^{VP}(x_1, x_2) = -i : A_\mu(x_1) \Pi^{\mu\nu}(x_1 - x_2) A_\nu(x_2) : , \quad (5.60)$$

onde o $\Pi^{\mu\nu}$ é chamado de tensor de polarização e é definido pela relação:

$$\Pi^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = i [r^{\mu\nu}(x_1 - x_2) + P_1^{\nu\mu}(x_2 - x_1)]. \quad (5.61)$$

Indo para o espaço dos momentos

$$\hat{\Pi}^{\mu\nu}(k) = i \left[\hat{r}^{\mu\nu}(k) + \hat{P}_1^{\nu\mu}(-k) \right]. \quad (5.62)$$

Substituindo as expressões (5.34), (5.56) obtidas para a transformada de Fourier $\hat{P}_1^{\mu\nu}$ e a distribuição retardada $\hat{r}^{\mu\nu}$, respectivamente, obtemos que o tensor de polarização, $\hat{\Pi}^{\mu\nu}$, é transversal e toma a seguinte forma:

$$\hat{\Pi}^{\mu\nu}(k) = -(2\pi)^{-4} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \hat{\Pi}(k). \quad (5.63)$$

Nesta expressão :

$$\hat{\Pi}(k) = -i \left[\hat{r}(k) + \hat{d}_1(-k) \right], \quad (5.64)$$

e é conhecido como o *escalar de polarização*, do resultado (5.55), esse é explicitamente:

$$\hat{\Pi}(k) = \frac{e^2 m^2}{3} \left\{ \frac{1+\xi}{1-\xi} \left(\xi - 4 + \frac{1}{\xi} \right) \ln \xi + \frac{5}{3\xi} + \frac{5\xi}{3} - \frac{22}{3} \right\}, \quad (5.65)$$

onde

$$\xi = \left(1 - \frac{k^2}{2m^2} \right) + \frac{k^2}{2m^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \quad (5.66)$$

A continuação, classifiquemos cada uma das formas possíveis do escalar de polarização segundo o valor de k^2 :

1. *Setor de Produção.*- Nesse caso, consideramos $k^2 \geq 4m^2 \rightarrow \xi$ é real e pertence ao intervalo $[-1, 0)$; daqui $\xi = -|\xi| = |\xi| e^{i\pi}$, então o escalar de polarização toma a seguinte forma:

$$\hat{\Pi}(k) = \frac{e^2 m^2}{3} \left\{ \frac{1+\xi}{1-\xi} \left(\xi - 4 + \frac{1}{\xi} \right) (\ln |\xi| + i\pi) + \frac{5}{3\xi} + \frac{5\xi}{3} - \frac{22}{3} \right\}. \quad (5.67)$$

Vemos que nessa região a parte imaginária é não nula

$$Im \left(\hat{\Pi}(k) \right) = \frac{\pi}{3} e^2 m^2 \left\{ \frac{1+\xi}{1-\xi} \left(\xi - 4 + \frac{1}{\xi} \right) \right\}. \quad (5.68)$$

Ao substituir as identidades (5.54), obtemo-la na forma usual

$$Im \frac{\hat{\Pi}(k)}{k^2} = -\frac{\pi}{3} e^2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{k^2} \right) \right\}, \quad (5.69)$$

e é proporcional à seção de choque total σ_{tot} da colisão: $e^- + e^+ \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{partícula} + \text{antipartícula}$. Daqui o nome do setor.

2. *Setor não físico.*- Nesse caso, consideramos $4m^2 \geq k^2 > 0 \rightarrow \frac{4m^2}{k^2} > 1$, daqui vemos que

$$\xi = \left(1 - \frac{k^2}{2m^2}\right) + \frac{k^2}{2m^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}, \quad (5.70)$$

é complexo. Usualmente neste setor é introduzido a relação:

$$k^2 = 4m^2 \text{sen}^2(\varphi/2), \quad 0 < \varphi < \pi. \quad (5.71)$$

Daqui podemos mostrar que $\xi = e^{i\varphi}$ e, então, o escalar de polarização toma a seguinte forma :

$$\hat{\Pi}(k) = \frac{e^2 m^2}{3} \left\{ 2 \left(1 + 2 \text{sen}^2 \varphi/2\right) \varphi \cot \varphi/2 - \frac{20}{3} \text{sen}^2 \varphi/2 - 4 \right\}, \quad (5.72)$$

o que mostra que nessa região, $\hat{\Pi}(k)$, é real. Como não temos parte imaginária não se pode interpretar como proporcional à seção de choque de um espalhamento de partículas. Será de interesse ter a expressão para $k^2 \ll m^2$

$$\hat{\Pi}(k) \approx \frac{e^2 m^2}{3} \left\{ 4 \left(1 + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^2}{12}\right) - \frac{20}{3} \frac{\varphi^2}{4} - 4 \right\} + m^2 O\left(\frac{k^4}{m^4}\right) = m^2 O\left(\frac{k^4}{m^4}\right). \quad (5.73)$$

3. *Setor de Dispersão.*- Nesse caso, consideramos $0 \geq k^2$, lembrando que esse caso não é atingido pelo processo de bipartição, e só é obtido por extensão analítica. Como neste caso $\xi \in (0, 1]$, então a extensão analítica do escalar de polarização é simplesmente:

$$\hat{\Pi}(k) = \frac{e^2 m^2}{3} \left\{ \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \left(\xi - 4 + \frac{1}{\xi} \right) \ln \xi + \frac{5}{3\xi} + \frac{5\xi}{3} - \frac{22}{3} \right\}. \quad (5.74)$$

Como vimos no capítulo 2, as distribuições singulares não são únicas, como o escalar de polarização é de orden 2, uma solução geral terá a forma:

$$\tilde{\Pi}(k) = \hat{\Pi}(k) + C_0 + c_\mu k^\mu + C_2 k^2. \quad (5.75)$$

As constantes C_0 , c_μ e C_2 são fixadas por considerações adicionais, por exemplo ao considerar a paridade teremos que $c_\mu = 0$. As outras constantes serão fixadas na seguinte subseção ao introduzir considerações sobre o propagador do fóton.

5.2.5 Propagador do Fóton com Inserções VP

Nesta seção continuaremos com a análise das contribuições ao espalhamento Moeller (ou Bhabha) de quarta ordem associada ao propagador do fóton, das relações (5.9), (5.10) e dos resultados das subseções prévias temos que as distribuições associadas são da forma:

$$R'_4 = -e^2 : j^\mu(x_1) D_{\mu\alpha}^F(x_1 - x_3) P_1^{\beta\alpha}(x_4 - x_3) D_{\beta\nu}^F(x_4 - x_2) j^\nu(x_2) : + \dots \quad (5.76)$$

$$A'_4 = -e^2 : j^\mu(x_1) D_{\mu\alpha}^F(x_1 - x_3) P_1^{\alpha\beta}(x_3 - x_4) D_{\beta\nu}^F(x_4 - x_2) j^\nu(x_2) : + \dots \quad (5.77)$$

Daqui a distribuição causal da quarta ordem é da forma

$$D_4 = R'_4 - A'_4 = e^2: j^\mu(x_1) D_{\mu\alpha}^F(x_1 - x_3) d^{\alpha\beta}(x_3 - x_4) D_{\beta\nu}^F(x_4 - x_2) j^\nu(x_2): + \dots \quad (5.78)$$

Como as distribuições causais de terceira ordem ou superior têm, por construção, suporte causal*; a distribuição D_4 tem suporte causal com relação a x_4 . Então, para encontrar sua parte retardada é suficiente realizar a bipartição referente a x_4 , considerando só uma das outras variáveis. Se em particular escolhermos x_3 , assim, somente devemos bipartir $d^{\alpha\beta}$, portanto a parte retardada de quarta ordem tem a forma:

$$R_4 = e^2: j^\mu(x_1) D_{\mu\alpha}^F(x_1 - x_3) r^{\alpha\beta}(x_3 - x_4) D_{\beta\nu}^F(x_4 - x_2) j^\nu(x_2): + \dots \quad (5.79)$$

Finalmente, o termo do operador de dispersão na quarta ordem, que contribui ao espalhamento Moeller, que é associado ao propagador do fóton é dado por

$$T_4^{Mo} = -ie^2: j^\mu(x_1) D_{\mu\alpha}^F(x_1 - x_3) \Pi^{\alpha\beta}(x_3 - x_4) D_{\beta\nu}^F(x_4 - x_2) j^\nu(x_2): + \dots \quad (5.80)$$

Lembrando que na segunda ordem temos como contribuição ao espalhamento Moeller a

$$T_2^{Mo}(x_1, x_2) = -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2): \quad (5.81)$$

Juntando esses resultados e, da relação que define o propagador completo do fóton

$$T^{Mo}(x_1, x_2) = -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \mathcal{D}_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2): + \dots, \quad (5.82)$$

obtemos $\mathcal{D}_{\mu\nu}^F$ explicitamente até a quarta ordem

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^F(x_1, x_2) = D_{\mu\nu}^F(x_1, x_2) + \int dx_3 dx_4 D_{\mu\alpha}^F(x_1 - x_3) \Pi^{\alpha\beta}(x_3 - x_4) D_{\beta\nu}^F(x_4 - x_2) + \dots \quad (5.83)$$

Para encontrar a expressão de todas as ordens, tomamos a seguinte hipótese:

$$T_{2m}^{Mo} = -ie^2: j^\mu(x_1) D_{\mu\alpha}^F(x_1 - x_3) \dots \Pi^{\lambda\beta}(x_{2m-1} - x_{2m}) D_{\beta\nu}^F(x_{2m} - x_2) j^\nu(x_2): \quad (5.84)$$

Sua demonstração é via indução, supondo válida até $2m = 2n - 2$ e demonstraremos sua validade para $2m = 2n$. Lembremos que as distribuições intermediárias têm a forma:

$$R'_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) \equiv \sum_{P_2} T_{2n-n_1}(Y, x_{2n}) \tilde{T}_{n_1}(X) \quad (5.85)$$

$$A'_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) \equiv \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{2n-n_1}(Y, x_{2n}) \quad (5.86)$$

Focando nossa análise nos termos T que contribuem ao espalhamento Moeller

$$R'_{2n} = -T_{2n-2}^{Mo}(x_2, x_{2n}) T_2^{Mo}(x_{2n-1}, x_1) + \dots \quad (5.87)$$

$$A'_{2n} = -T_{2n-2}^{Mo}(x_1, x_{2n-1}) T_2^{Mo}(x_{2n}, x_2) + \dots \quad (5.88)$$

*Para mais detalhes vide o capítulo 2.

onde usamos a simetria de índices de T^{Mo} . Agora substituímos as expressões dos termos Moeller T_{2n-2}^{Mo} e T_2^{Mo}

$$R'_{2n} = e^4: j^\nu(x_2) \cdots D_{\nu\lambda}^F(x_{2n-2} - x_{2n}) \times \overbrace{\bar{\psi}(x_{2n}) \gamma^\lambda \psi(x_{2n}) \bar{\psi}(x_{2n-1}) \gamma^\alpha \psi(x_{2n-1})} D_{\alpha\mu}^F(x_{2n-1} - x_1) j^\nu(x_1) : + \dots (5.89)$$

$$A'_{2n} = e^4: j^\mu(x_1) \cdots D_{\mu\alpha}^F(x_{2n-2} - x_{2n-1}) \times \overbrace{\bar{\psi}(x_{2n-1}) \gamma^\alpha \psi(x_{2n-1}) \bar{\psi}(x_{2n}) \gamma^\lambda \psi(x_{2n})} D_{\lambda\nu}^F(x_{2n} - x_2) j^\nu(x_2) : + \dots (5.90)$$

Obtemos a mesma estrutura do passo da ordem 2 a 4, mas agora a bipartição é referente a x_{2n} e, escolhemos como a variável de bipartição a x_{2n-1} . Portanto, podemos concluir que o propagador completo de fóton pode ser expresso como a seguinte série perturbativa:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^F(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{F(2m)}(x_1, x_2) \quad (5.91)$$

onde $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{F(2)}(x_1, x_2) = D_{\mu\nu}^F(x_1, x_2) \mathbf{e}$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{F(2m)}(x_1, x_2) = \int dx_3 \cdots dx_{2m} D_{\mu\alpha}^F(x_1 - x_3) \cdots \Pi^{\lambda\beta}(x_{2m-1} - x_{2m}) D_{\beta\nu}^F(x_{2m} - x_2) \quad (5.92)$$

Considerando as expansões de Fourier:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^F(x_1, x_2) &= (2\pi)^{-2} \int dk \hat{D}_{\mu\nu}^F(k) e^{-ik(x_1-x_2)} \quad (5.93) \\ \mathcal{D}_{\mu\nu}^{F(4)}(x_1, x_2) &= (2\pi)^{-6} \int dx_3 dx_4 \int dk \hat{D}_{\mu\alpha}^F(k) e^{-ik(x_1-x_3)} \int dk' \hat{\Pi}^{\alpha\beta}(k') e^{-ik'(x_3-x_4)} \\ &\quad \times \int dk'' \hat{D}_{\beta\nu}^F(k'') e^{-ik''(x_4-x_2)} \\ &= (2\pi)^{-2} \int dk \hat{D}_{\mu\alpha}^F(k) \left[(2\pi)^4 \hat{\Pi}^{\alpha\beta}(k) \right] \hat{D}_{\beta\nu}^F(k) e^{-ik(x_1-x_2)}. \quad (5.94) \end{aligned}$$

Similarmente para as outras ordens, obteremos que o propagador completo do fóton no espaço dos momentos pode ser escrito como a seguinte série:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^F(k) &= \hat{D}_{\mu\nu}^F(k) + \hat{D}_{\mu\alpha}^F(k) \left[(2\pi)^4 \hat{\Pi}^{\alpha\beta}(k) \right] \hat{D}_{\beta\nu}^F(k) \\ &\quad + \hat{D}_{\mu\alpha}^F(k) \left[(2\pi)^4 \hat{\Pi}^{\alpha\lambda}(k) \right] \hat{D}_{\lambda\sigma}^F(k) \left[(2\pi)^4 \hat{\Pi}^{\sigma\beta}(k) \right] \hat{D}_{\beta\nu}^F(k) + \dots \quad (5.95) \end{aligned}$$

Esta é uma série tipo geométrica, e pode ser reescrita como segue:

$$\hat{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^F(k) = \hat{D}_{\mu\nu}^F(k) + \hat{D}_{\mu\alpha}^F(k) \left[(2\pi)^4 \hat{\Pi}^{\alpha\beta}(k) \right] \hat{\mathcal{D}}_{\beta\nu}^F(k). \quad (5.96)$$

Daqui:

$$\left[\hat{\mathcal{D}}^{F,\mu\nu} \right]^{-1}(k) = \left[\hat{D}^{F,\mu\nu} \right]^{-1}(k) - (2\pi)^4 \hat{\Pi}^{\mu\nu}(k). \quad (5.97)$$

Escolhendo o gauge de Feynman, $\xi = 1$, temos que $\hat{D}_{\mu\nu}^F(k) = g_{\mu\nu} [\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k)]$, então:

$$[\hat{D}^{F,\mu\nu}]^{-1}(k) = g^{\mu\nu} [\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k)]^{-1}. \quad (5.98)$$

E da expressão (5.63) do tensor de polarização, teremos que

$$\begin{aligned} [\hat{D}^{-F}]^{\mu\nu}(k) &= \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \left\{ \hat{\Pi}(k) + [\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k)]^{-1} \right\} \\ &\quad + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} [\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k)]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Portanto:

$$\hat{D}_{\mu\nu}^F(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \left\{ \hat{\Pi}(k) + [\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k)]^{-1} \right\}^{-1} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} [\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k)]^{-1}$$

(5.100)

Para o espalhamento Moeller a quantidade de interesse é a parte transversal. Nesse termo faremos algumas considerações. A primeira é referente à massa do fóton, esta será o polo do termo transversal, lembrando que:

$$\hat{D}_0^F(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 + i0^+} \quad ; \quad \hat{D}_{m_a}^F = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - m_a^2 + i0^+}. \quad (5.101)$$

Então:

$$\hat{\Pi}(k) + [\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k)]^{-1} = -(2\pi)^2 \left(k^2 - \frac{k^4}{m_a^2} - (2\pi)^{-2} \hat{\Pi}(k) \right). \quad (5.102)$$

Como mencionamos na seção anterior o escalar de polarização não é único, então em geral:

$$\hat{\Pi}(k) + [\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k)]^{-1} = -(2\pi)^2 \left(k^2 - \frac{k^4}{m_a^2} - (2\pi)^{-2} \hat{\Pi}(k) + c_0 + c_2 k^2 \right) \quad (5.103)$$

onde a expressão de $\hat{\Pi}(k)$ vem dada por (5.65). Procuremos os zeros na região $0 \leq k^2 \ll m^2$, como nessa região $\hat{\Pi}(k) \approx m^2 O\left(\frac{k^4}{m^4}\right)$

$$\hat{\Pi}(k) + [\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k)]^{-1} \approx -(2\pi)^2 (k^2 + c_0 + c_2 k^2) \quad (5.104)$$

Se considerarmos que somente temos um zero nesta região a $k^2 = 0$ então $c_0 = 0$. Vemos também que o fator c_2 mudaria a escala; consideraremos a unidade como escala, então $c_2 = 0$ (com consequência na normalização da carga). Temos então que

$$\hat{\Pi}(k) + [\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k)]^{-1} = -(2\pi)^2 \left(k^2 - \frac{k^4}{m_a^2} - (2\pi)^{-2} \hat{\Pi}(k) \right) \quad (5.105)$$

Se existe outro zero, se encontraria na região $k^2 \gg m^2$, onde o segundo e terceiro termo seriam relevantes, mas como para $k^2 \geq 4m^2$ o escalar de polarização tem uma parte imaginária não nula, não teremos mais zeros.

Em resumo temos que:

$$c_0 = c_2 = 0 ; m_{fóton} = 0 \quad (5.106)$$

5.3 Auto-energia

Os termos da série perturbativa do operador de dispersão S que contribuem à amplitude de transição do espalhamento Compton, temos em particular aqueles da forma

$$T_{2n}^{F,Comp}(x) =: \bar{\psi}(x_{k_1}) \gamma^\mu A_\mu(x_{k_1}) \mathcal{S}^{F(2n)}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) A_\nu(x_{n_2}) \gamma^\nu \psi(x_{n_2}) : , \quad (5.107)$$

os quais são associados ao *propagador de Feynman fermiônico completo*, cuja forma perturbativa é

$$\mathcal{S}^F(x_1, x_2) = S^F(x_1, x_2) + \int dx_3 dx_4 \mathcal{S}^{F(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) + \dots . \quad (5.108)$$

No capítulo anterior encontramos a primeira contribuição, $S^F(x_1, x_2)$, que é o *propagador de Feynman fermiônico livre*. Para encontrar o termo subsequente fazemos a seguinte análise das contribuições de quarta ordem, lembrando que nessa ordem as distribuições causais são construídas a partir das distribuições intermediárias

$$R'_4(x_1, \dots, x_4) \equiv \sum_{P_2} T_{4-n_1}(Y, x_4) \tilde{T}_{n_1}(X) , \quad A'_4(x_1, \dots, x_4) \equiv \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{4-n_1}(Y, x_4) , \quad (5.109)$$

onde P_2 indica todas as partições do conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ nos subconjuntos disjuntos X, Y com $|X| = n_1 \geq 1$, $|Y| \leq 2$. Sem muito detalhe escrevemos essas distribuições como segue

$$R'_4 = \sum T_3(\dots, x_4) \tilde{T}_1 + \sum T_2(\dots, x_4) \tilde{T}_2 + \sum T_1(x_4) \tilde{T}_3 \quad (5.110)$$

$$A'_4 = \sum \tilde{T}_1 T_3(\dots, x_4) + \sum \tilde{T}_2 T_2(\dots, x_4) + \sum \tilde{T}_3 T_1(x_4) . \quad (5.111)$$

Sendo $\tilde{T}_2 = -T_2 + \sum T_1 T_1$, e focando nossa análise nos termos T_2 que contribuem para o espalhamento Compton

$$R'_4 = -T_2^{Comp}(x_2, x_4) T_2^{Comp}(x_3, x_1) + \dots \quad (5.112)$$

$$A'_4 = -T_2^{Comp}(x_3, x_1) T_2^{Comp}(x_2, x_4) + \dots , \quad (5.113)$$

onde também usamos a simetria de índices de T_2^{Comp} . Agora substituamos, em particular, um dos termos Compton de segunda ordem:

$$T_2^{(3)Comp}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) S^F(x_1 - x_2) A_\nu(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : . \quad (5.114)$$

Desenvolvendo os produtos normalmente ordenados, teremos em particular os termos

$$R'_4 = e^4: \overbrace{\bar{\psi}(4) \gamma^\beta A_\beta(4) S^F(4, 2) \gamma^\mu A_\mu(2) \psi(2) \bar{\psi}(1) \gamma^\nu A_\nu(1) S^F(1, 3) A_\alpha(3) \gamma^\alpha \psi(3)} : \quad (5.115)$$

$$A'_4 = e^4: \overbrace{\bar{\psi}(1) \gamma^\nu A_\nu(1) S^F(1, 3) \gamma^\beta A_\beta(3) \psi(3) \bar{\psi}(4) A_\alpha(4) \gamma^\alpha S^F(4, 2) A_\mu(2) \gamma^\mu \psi(2)} : \quad (5.116)$$

onde usamos a simbologia $B(i) = B(x_i)$, $C(i, j) = C(x_i - x_j)$.

Vemos que os termos contraídos são exatamente iguais à parte numérica das distribuições intermediárias $R_2^{(5)}$, $A_2^{(5)}$ respectivamente*,

$$R_2^{(5)}(x_1, x_2) = e^2: \overbrace{\bar{\psi}(x_2) \gamma^\mu A_\mu(x_2) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_1) A_\nu(x_1) \gamma^\nu \psi(x_1)} : \quad (5.117)$$

$$A_2^{(5)}(x_1, x_2) = e^2: \overbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) A_\nu(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2)} : \quad (5.118)$$

Portanto, será suficiente calcular as correspondentes distribuições de segunda ordem.

5.3.1 Distribuições de segunda ordem associadas

No capítulo 3 encontramos as contribuições em segunda ordem, do operador de dispersão S , desse caso. Sendo suas distribuições numéricas associadas: R'_2 e causal D_2 , as seguintes:

$$R_2^{(4)} = e^2: \bar{\psi}(x_2) \gamma^\mu D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) S^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\nu \psi(x_1) : \quad (5.119)$$

$$D_2^{(4)} = e^2: \bar{\psi}(x_2) \gamma^\mu [D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) S^{(+)}(x_2 - x_1) + S^{(-)}(x_2 - x_1) D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2)] \gamma^\nu \psi(x_1) : , \quad (5.120)$$

e

$$R_2^{(5)} = -e^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu S^{(-)}(x_1 - x_2) D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_2) : \quad (5.121)$$

$$D_2^{(5)} = -e^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu [S^{(-)}(x_1 - x_2) D_{\mu\nu}^{(+)}(x_2 - x_1) + D_{\mu\nu}^{(+)}(x_1 - x_2) S^{(+)}(x_1 - x_2)] \gamma^\mu \psi(x_2) : . \quad (5.122)$$

Observamos que essas contribuições são simétricas entre elas por indexação.

Se introduzimos a distribuição numérica $d^{(5)} = d_-^{(5)} + d_+^{(5)}$, poderemos escrever, por exemplo, as distribuições $R_2^{(5)}$ e $D_2^{(5)}$ como segue:

$$\begin{aligned} R_2^{(5)}(x_1, x_2) &= : \bar{\psi}(x_1) d_-^{(5)}(x_1 - x_2) \psi(x_2) : \\ D_2^{(5)}(x_1, x_2) &= : \bar{\psi}(x_1) d^{(5)}(x_1 - x_2) \psi(x_2) : , \end{aligned} \quad (5.123)$$

*Para mais detalhes vide o capítulo 3.

onde $d_{\pm}^{(5)}(y) = -e^2 \gamma^\mu d_{\mu\nu\pm}(y) \gamma^\nu$, sendo

$$d_{\mu\nu-}(y) = S^{(-)}(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(-y) = -D_{\mu\nu}^{(-)}(y) S^{(-)}(y) \quad (5.124)$$

$$d_{\mu\nu+}(y) = S^{(+)}(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(y) = D_{\mu\nu}^{(+)}(y) S^{(+)}(y) . \quad (5.125)$$

Antes de continuar com a construção indutiva, devemos ter certeza que $d^{(5)}$ tem suporte causal, sendo essa distribuição por definição igual a:

$$d^{(5)}(y) = -e^2 \gamma^\mu [S^{(-)}(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(-y) + S^{(+)}(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(y)] \gamma^\nu . \quad (5.126)$$

Ou também:

$$\begin{aligned} d^{(5)}(y) &= -e^2 \gamma^\mu [S^{(-)}(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(-y) + S^{(+)}(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(y)] \gamma^\nu \\ &= -e^2 \gamma^\mu [(S(y) - S^{(+)}(y)) D_{\mu\nu}^{(+)}(-y) + S^{(+)}(y) (D_{\mu\nu}(y) - D_{\mu\nu}^{(-)}(y))] \gamma^\nu \\ &= -e^2 \gamma^\mu [S(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(-y) + S^{(+)}(y) D_{\mu\nu}(y) \\ &\quad - S^{(+)}(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(-y) - S^{(+)}(y) D_{\mu\nu}^{(-)}(y)] \gamma^\nu . \end{aligned} \quad (5.127)$$

Como $D_{\mu\nu}^{(+)}(-y) = -D_{\mu\nu}^{(-)}(y)$, obteremos que:

$$d^{(5)}(y) = -e^2 \gamma^\mu [S(y) D_{\mu\nu}^{(+)}(-y) + S^{(+)}(y) D_{\mu\nu}(y)] \gamma^\nu . \quad (5.128)$$

Como as distribuições S e $D_{\mu\nu}$ têm suporte causal, podemos concluir que $d^{(5)}$ (ou $D_2^{(5)}$) tem suporte causal.

5.3.2 Ordem Singular

Calcularemos a ordem singular segundo o critério obtido no espaço dos momentos; então antes devemos ter a expressão da distribuição $d^{(5)} = d_+^{(5)} + d_-^{(5)}$ no espaço dos momentos

$$\hat{d}_{\pm}^{(5)}(p) = -e^2 \gamma^\mu \hat{d}_{\mu\nu\pm}(p) \gamma^\nu . \quad (5.129)$$

Calcularemos essa expressão a continuação:

Cálculo da transformada de Fourier de $d_{\pm}^{(5)}$. - Sendo a transformada de Fourier da distribuição $d_{\mu\nu\pm}$ dada por:

$$\begin{aligned} \hat{d}_{\mu\nu\pm}(p) &= \mathcal{F}[d_{\mu\nu\pm}](p) = \mathcal{F}[\pm D_{\mu\nu}^{(\pm)} S^{(\pm)}](p) = \pm (2\pi)^{-4/2} (\hat{D}_{\mu\nu}^{(\pm)} * \hat{S}^{(\pm)})(p) \\ &= \pm (2\pi)^{-2} \int dq \hat{D}_{\mu\nu}^{(\pm)}(p-q) \hat{S}^{(\pm)}(q) . \end{aligned} \quad (5.130)$$

Sendo o propagador fermiônico PF(NF): $\hat{S}^{(\pm)}(q) = (\not{q} + m) \hat{D}_m^{(\pm)}(q)$, obteremos que:

$$\begin{aligned} \hat{d}_{\mu\nu\pm}(p) &= \pm (2\pi)^{-2} \int dq \hat{D}_{\mu\nu}^{(\pm)}(p-q) [m + \not{q}] \hat{D}_m^{(\pm)}(q) \\ &= \pm (2\pi)^{-2} (m) \int dq \hat{D}_{\mu\nu}^{(\pm)}(p-q) \hat{D}_m^{(\pm)}(q) \\ &\quad \pm (2\pi)^{-2} \int dq \hat{D}_{\mu\nu}^{(\pm)}(p-q) [\not{q}] \hat{D}_m^{(\pm)}(q) . \end{aligned} \quad (5.131)$$

Daqui $\hat{d}_{\pm}^{(5)}$ pode-se expressar como segue:

$$\begin{aligned} \hat{d}_{\pm}^{(5)}(p) &= \mp (2\pi)^{-2} e^2 (m) \int dq \gamma^\mu \hat{D}_{\mu\nu}^{(\pm)}(p-q) \gamma^\nu \hat{D}_m^{(\pm)}(q) \\ &\quad \mp (2\pi)^{-2} e^2 \int dq \gamma^\mu \hat{D}_{\mu\nu}^{(\pm)}(p-q) [\not{q}] \gamma^\nu \hat{D}_m^{(\pm)}(q) . \end{aligned} \quad (5.132)$$

Vemos que teremos uma contribuição associada à massa (do elétron) e outra ao momento. Sendo $\hat{D}_{\mu\nu}^{(\pm)}$ dado por:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\mu\nu}^{(\pm)}(k) &= g_{\mu\nu} \left(\hat{D}_0^{(\pm)}(k) - \hat{D}_{m_a}^{(\pm)}(k) \right) - (1 - \xi) k_\mu k_\nu \hat{D}_0^{(\pm)}(k) \\ &\quad + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_a^2} \left(\hat{D}_{m_a}^{(\pm)}(k) - \hat{D}_0^{(\pm)}(k) \right) . \end{aligned} \quad (5.133)$$

Vemos que a auto-energia vai depender explicitamente do parâmetro de gauge, mas vamos supor que as propriedades gerais não dependem deste parâmetro, então escolheremos em particular o gauge de Feynman: $\xi = 1$. Portanto, daqui para frente consideraremos:

$$\hat{D}_{\mu\nu}^{(\pm)}(k) = g_{\mu\nu} \left(\hat{D}_0^{(\pm)}(k) - \hat{D}_{m_a}^{(\pm)}(k) \right) . \quad (5.134)$$

Usando as propriedades: $\gamma_\nu \gamma^\nu = 4$, $\gamma_\nu \not{q} \gamma^\nu = -2 \not{q}$. Obteremos que:

$$\begin{aligned} \hat{d}_{\pm}^{1(5)}(p) &= \mp (2\pi)^{-2} e^2 (4m) \left[I_1^{(\pm)}(p, 0) - I_1^{(\pm)}(p, m_a) \right] \\ &\quad \pm e^2 (2\pi)^{-2} (2) \left[I_3^{(\pm)}(p, 0) - I_3^{(\pm)}(p, m_a) \right] , \end{aligned} \quad (5.135)$$

onde

$$I_1^{(\pm)}(p, M) \equiv \int dq \hat{D}_M^{(\pm)}(p-q) \hat{D}_m^{(\pm)}(q) , I_3^{(\pm)}(p, M) \equiv \int dq \not{q} \hat{D}_M^{(\pm)}(p-q) \hat{D}_m^{(\pm)}(q) . \quad (5.136)$$

As quantidades com superíndice negativo são calculadas no Apêndice K. E como $\hat{D}_M^{(+)}(k) = -\hat{D}_M^{(-)}(-k)$, teremos que:

$$I_1^{(+)}(p, M) = \int dQ \hat{D}_M^{(-)}(-p-Q) \hat{D}_m^{(-)}(Q) = I_1^{(-)}(-p, M) \quad (5.137)$$

$$I_3^{(+)}(p, M) = - \int dQ \not{Q} \hat{D}_M^{(-)}(-p-Q) \hat{D}_m^{(-)}(Q) = -I_3^{(-)}(-p, M) , \quad (5.138)$$

daí as quantidades com superíndice positivo também serão conhecidos.

Do resultado obtido (5.135), teremos então que $d^{(5)}$ no espaço dos momentos tem a seguinte forma:

$$\hat{d}^{(5)}(p) = - (2\pi)^{-2} e^2 (4m) [I_1(p, 0) - I_1(p, m_a)] + e^2 (2\pi)^{-2} (2) [I_3(p, 0) - I_3(p, m_a)] , \quad (5.139)$$

sendo

$$I_1(p, M) = I_1^{(+)}(p, M) - I_1^{(-)}(p, M) = I_1^{(-)}(-p, M) - I_1^{(-)}(p, M) \quad (5.140)$$

$$I_3(p, M) = I_3^{(+)}(p, M) - I_3^{(-)}(p, M) = -I_3^{(-)}(-p, M) - I_3^{(-)}(p, M) . \quad (5.141)$$

Das expressões de $I_1^{(-)}$ e $I_3^{(-)}$ *, obtemos que

$$I_1(p, M) = \left(-\frac{1}{4}\right) I(p, M) \quad , \quad I_3(p, M) = \left(-\frac{\not{p}}{8}\right) \left(1 + \frac{m^2 - M^2}{p^2}\right) I(p, M) \quad , \quad (5.142)$$

onde

$$I(p, M) = (2\pi)^{-1} \operatorname{sgn}(p_0) \theta [p^2 - (m + M)^2] \sqrt{1 - 2\frac{(m^2 + M^2)}{p^2} + \frac{(m^2 - M^2)^2}{p^4}} \quad (5.143)$$

Usualmente dividiremos $\hat{d}^{(5)}$, numa parte associada à massa e outra ao momento:

$$\hat{d}^{(5)} = \hat{d}^{m(5)} + \hat{d}^{p(5)} \quad (5.144)$$

Dos resultados previos (5.139), (5.142) obteremos que cada uma das contribuições podem ser escritas como segue:

Contribuição associada à massa:

$$\hat{d}^{m(5)}(p) = 4 \left[(2\pi)^{-2} e^2 \left(\frac{m}{4}\right) \right] [I(p, 0) - I(p, m_a)] . \quad (5.145)$$

Contribuição associada ao momento

$$\hat{d}^{p(5)}(p) = -2 \left[(2\pi)^{-2} e^2 \left(\frac{\not{p}}{8}\right) \right] \left[\left(1 + \frac{m^2}{p^2}\right) I(p, 0) - \left(1 + \frac{m^2 - m_a^2}{p^2}\right) I(p, m_a) \right] . \quad (5.146)$$

Com esses resultados estamos pronto para calcular a ordem singular, que se deduz da expressão $\hat{d}^{(5)}\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$. Calcularemos cada contribuição separadamente, da definição de I podemos considerar que:

$$I\left(\frac{p}{\alpha}, M\right) \approx (2\pi)^{-1} \operatorname{sgn}(p_0) \theta(p^2) \left(1 - \alpha^2 \frac{(m^2 + M^2)}{p^2} - 2\alpha^4 \frac{m^2 M^2}{p^4}\right) . \quad (5.147)$$

*Vide o Apêndice K.2 e K.3.

Então

$$\hat{d}^{m(5)}\left(\frac{p}{\alpha}\right) \approx 4\alpha^2 \left[(2\pi)^{-3} e^2 \left(\frac{m}{4}\right) \right] \text{sgn}(p_0) \theta(p^2) \left(\frac{m_a^2}{p^2}\right) \quad (5.148)$$

$$\hat{d}^{p(5)}\left(\frac{p}{\alpha}\right) \approx -4\alpha^1 \left[(2\pi)^{-3} e^2 \left(\frac{p}{8}\right) \right] \text{sgn}(p_0) \theta(p^2) \left(\frac{m_a^2}{p^2}\right). \quad (5.149)$$

O coeficiente α^2 na frente do termo associado à massa nos leva a conceder-lhe a ordem singular -2 ; e o coeficiente α^1 na frente do termo associado ao momento nos leva a dar-lhe a ordem singular -1 . Portanto, teremos que $\hat{d}^{(5)}$ é uma *distribuição regular da ordem -1* . E então a auto-energia (AE), na segunda ordem, tem como ordem singular a :

$$\boxed{\omega_2^{AE} = -1.} \quad (5.150)$$

Daí a auto-energia será não divergente no modelo generalizado da eletrodinâmica.

5.3.3 Bipartição e a Parte Retardada da AE a um loop

Como $\hat{d}^{(5)}$ é uma distribuição regular da ordem -1 , obteremos a parte retardada $\hat{r}^{(5)}$ a partir da seguinte fórmula de bipartição:

$$\hat{r}^{(5)}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}^{(5)}(tp)}{(1-t + \text{sgn}(p_0) i0^+)}. \quad (5.151)$$

Similarmente à ordem singular, calcularemos separadamente, a parte associada à massa e ao momento.

Bipartição associada à massa.- Como por definição $\hat{d}^{m(5)}$ é ímpar, então teremos para a parte retardada correspondente:

$$\hat{r}^{m(5)}(p) \equiv \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}^{m(5)}(tp)}{(1-t + \text{sgn}(p_0) i0^+)} = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_0^{\infty} dt \frac{2t\hat{d}^{m(5)}(tp)}{1-t^2 + \text{sgn}(p_0) i0^+}, \quad (5.152)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{d}^{m(5)}(p) &= 4 \left[(2\pi)^{-3} e^2 \left(\frac{m}{4}\right) \right] \text{sgn}(p_0) \theta[p^2 - m^2] \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \\ &\quad - 4 \left[(2\pi)^{-3} e^2 \left(\frac{m}{4}\right) \right] \text{sgn}(p_0) \theta[p^2 - (m + m_a)^2] \\ &\quad \times \sqrt{1 - 2\frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4}}. \end{aligned} \quad (5.153)$$

Por praticidade definamos as seguintes quantidades:

$$\alpha_1 \equiv 4 [(2\pi)^{-3} e^2] \quad (5.154)$$

$$f_1(p^2) \equiv \theta [p^2 - m^2] \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) - \theta [p^2 - (m + m_a)^2] \sqrt{1 - 2 \frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4}}. \quad (5.155)$$

Com essas definições

$$\hat{d}^{m(5)}(p) = \alpha_1 \left(\frac{m}{4}\right) \text{sgn}(p_0) f_1(p^2). \quad (5.156)$$

Daí a distribuição retardada pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \hat{r}^{m(5)}(p) &= \alpha_1 \left(\frac{m}{4}\right) \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_0^\infty dt \frac{2t \text{sgn}(tp_0) f_1(t^2 p^2)}{1 - t^2 + \text{sgn}(p_0) i0^+} \\ &= \alpha_1 \left(\frac{m}{4}\right) \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty dt \frac{2t f_1(t^2 p^2)}{1 - t^2 + \text{sgn}(p_0) i0^+}. \end{aligned} \quad (5.157)$$

Fazendo a mudança de variável $s = t^2$, obteremos

$$\hat{r}^{m(5)}(p) = \alpha_1 \left(\frac{m}{4}\right) \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty ds \frac{f_1(sp^2)}{1 - s + \text{sgn}(p_0) i0^+}. \quad (5.158)$$

Usando a fórmula de Sochozky

$$\frac{1}{1 - s + \text{sgn}(p_0) i0^+} = P \frac{1}{1 - s} - i\pi \text{sgn}(p_0) \delta(1 - s) \quad (5.159)$$

Teremos que:

$$\begin{aligned} \hat{r}^{m(5)}(p) &= \alpha_1 \left(\frac{m}{4}\right) \frac{i}{2\pi} \left[P \int_0^\infty ds \frac{f_1(sp^2)}{1 - s} - i\pi \text{sgn}(p_0) f_1(p^2) \right] \\ &= \alpha_1 \left(\frac{m}{4}\right) \frac{i}{2\pi} P \int_0^\infty ds \frac{f_1(sp^2)}{1 - s} + \frac{1}{2} \alpha_1 \text{sgn}(p_0) f_1(p^2). \end{aligned} \quad (5.160)$$

Identificando $\hat{d}^{m(5)}(p)$, na forma de (5.156), vemos que a parte retardada pode ser escrita como segue:

$$\hat{r}^{m(5)}(p) = \alpha_1 \left(\frac{m}{4}\right) \frac{i}{2\pi} P \int_0^\infty ds \frac{f_1(sp^2)}{1 - s} + \frac{1}{2} \hat{d}^{m(5)}(p). \quad (5.161)$$

Então o problema se reduz ao cálculo do seguinte valor principal:

$$P_1 \equiv P \int_0^{+\infty} ds \frac{1}{(1-s)} f_1(sp^2) . \quad (5.162)$$

Por definição de f_1 , teremos que:

$$P_1 = P \int_{m^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{1}{(1-s)} f_1(sp^2) . \quad (5.163)$$

Temos que este valor principal é válido* para $p^2 \neq m^2$ e, para garantir que também seja válido no caso que $p^2 = m^2$, calculemos o limite:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{f_1(sm^2)}{(1-s)} = -1 \quad (5.164)$$

Portanto, P_1 é bem definido para qualquer valor de p^2 .

Sem perda de generalidade podemos dividir o intervalo de integração[†] no ponto $(m + m_a)^2/p^2$, então o valor principal P_1 pode-se dividir em:

$$P_1 = P \int_{m^2/p^2}^{(m+m_a)^2/p^2} ds \frac{1}{(1-s)} f_1(sp^2) + P \int_{(m+m_a)^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{1}{(1-s)} f_1(sp^2) . \quad (5.165)$$

Substituindo a definição de f_1 teremos que:

$$\begin{aligned} P_1 = & P \int_{m^2/p^2}^{(m+m_a)^2/p^2} ds \frac{1}{1-s} + \left(-\frac{m^2}{p^2}\right) P \int_{m^2/p^2}^{(m+m_a)^2/p^2} ds \frac{1}{s(1-s)} \\ & + P \int_{\frac{(m+m_a)^2}{p^2}}^{+\infty} ds \frac{1}{(1-s)} \left[\left(1 - \frac{m^2}{sp^2}\right) - \sqrt{1 - 2\frac{(m^2 + m_a^2)}{sp^2} + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{s^2p^4}} \right] \end{aligned} \quad (5.166)$$

Por propriedade num tramo finito o primeiro valor principal é finito, mas não num tramo infinito[‡]. Similarmente cada termo do último valor principal é infinito, daí que o último termo deve ser considerado em conjunto. Usando a substituição de Euler:

$$s = \frac{\eta^2 - \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4}}{2 \left[\eta - \frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} \right]} . \quad (5.167)$$

*Para uma maior explicação vide o Apêndice C.

†Para maior detalhe desta propriedade vide o Apêndice K.

‡Propriedade mostrada no Apêndice K.2.

Temos que:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 - 2 \frac{(m^2 + m_a^2)}{sp^2} + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{s^2 p^4}} \\
&= \frac{1}{s} \sqrt{(s - \eta)^2 + 2s \left[\eta - \frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} \right] - \eta^2 + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4}} \\
&= \frac{1}{s} |s - \eta|. \tag{5.168}
\end{aligned}$$

Como o domínio de s é $\left(\frac{(m+m_a)^2}{p^2}, +\infty\right)$, o domínio de η é $\left(\frac{(m^2+m_a^2)}{p^2}, \frac{(m+m_a)^2}{p^2}\right)$. Então:

$$\sqrt{1 - 2 \frac{(m^2 + m_a^2)}{sp^2} + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{s^2 p^4}} = 1 - \frac{\eta}{s}. \tag{5.169}$$

Usando esse resultado em (5.166), obteremos que:

$$\begin{aligned}
P_1 &= P \int_{m^2/p^2}^{(m+m_a)^2/p^2} ds \frac{1}{1-s} - \frac{m^2}{p^2} P \int_{m^2/p^2}^{(m+m_a)^2/p^2} ds \frac{1}{s(1-s)} \\
&\quad - \frac{m^2}{p^2} P \int_{(m+m_a)^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{1}{s(1-s)} - P \int_{(m+m_a)^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{\eta}{s(1-s)}. \tag{5.170}
\end{aligned}$$

Agrupando:

$$P_1 = P \int_{m^2/p^2}^{(m+m_a)^2/p^2} ds \frac{1}{1-s} - \frac{m^2}{p^2} P \int_{m^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{1}{s(1-s)} + P \int_{(m+m_a)^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{\eta}{s(1-s)}. \tag{5.171}$$

Observemos que $\eta \rightarrow \frac{(m^2+m_a^2)}{p^2}$ quando $s \rightarrow +\infty$, então o último valor principal também é finito. Fazendo os cálculos* obteremos:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left|1 - \frac{p^2}{m^2}\right| + \left[1 + \frac{m_a^2 - m^2}{p^2}\right] \ln \left|\frac{m}{m_a}\right| \\
&\quad - \sqrt{1 - 2 \frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4}} \ln \left| \frac{\sqrt{p^2 - (m + m_a)^2} + \sqrt{p^2 - (m - m_a)^2}}{\sqrt{p^2 - (m + m_a)^2} - \sqrt{p^2 - (m - m_a)^2}} \right|. \tag{5.172}
\end{aligned}$$

Bipartição associada ao momento: Como por definição $\hat{d}^{p(5)}$ é par, então teremos para a parte retardada correspondente:

$$\hat{r}^{p(5)}(p) \equiv \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}^{p(5)}(tp)}{(1-t + \text{sgn}(p_0) i0^+)} = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_0^{\infty} dt \frac{2\hat{d}^{p(5)}(tp)}{1-t^2 + \text{sgn}(p_0) i0^+}, \tag{5.173}$$

*Vide o Apêndice L.

onde:

$$\begin{aligned} \hat{d}^{p(5)}(p) &= -2 \left[(2\pi)^{-3} e^2 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \right] \text{sgn}(p_0) \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \theta [p^2 - m^2] \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \\ &+ 2 \left[(2\pi)^{-3} e^2 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \right] \text{sgn}(p_0) \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \\ &\times \theta [p^2 - (m + m_a)^2] \sqrt{1 - 2 \frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4}} \end{aligned} \quad (5.174)$$

Por praticidade definamos as seguintes quantidades:

$$\alpha_3 \equiv -2 [(2\pi)^{-3} e^2] \quad (5.175)$$

$$\begin{aligned} f_3(p^2) &\equiv \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \theta [p^2 - m^2] \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \\ &- \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \theta [p^2 - (m + m_a)^2] \sqrt{1 - 2 \frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4}} \end{aligned} \quad (5.176)$$

Com essas definições

$$\hat{d}^{p(5)}(p) = \alpha_3 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \text{sgn}(p_0) f_3(p^2) . \quad (5.177)$$

Daí a distribuição retardada pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \hat{r}^{p(5)}(p) &= \alpha_3 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_0^\infty dt \frac{2t \text{sgn}(tp_0) f_3(t^2 p^2)}{1 - t^2 + \text{sgn}(p_0) i0^+} \\ &= \alpha_3 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty dt \frac{2t f_3(t^2 p^2)}{1 - t^2 + \text{sgn}(p_0) i0^+} . \end{aligned} \quad (5.178)$$

Fazendo a mudança de variável $s = t^2$, obteremos

$$\hat{r}^{p(5)}(p) = \alpha_3 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty ds \frac{f_3(sp^2)}{1 - s + \text{sgn}(p_0) i0^+} . \quad (5.179)$$

Usando a fórmula de Sochozky

$$\frac{1}{1 - s + \text{sgn}(p_0) i0^+} = P \frac{1}{1 - s} - i\pi \text{sgn}(p_0) \delta(1 - s) \quad (5.180)$$

Teremos que:

$$\begin{aligned} \hat{r}^{p(5)}(p) &= \alpha_3 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \frac{i}{2\pi} \left[P \int_0^\infty ds \frac{f_3(sp^2)}{1 - s} - i\pi \text{sgn}(p_0) f_3(p^2) \right] \\ &= \alpha_3 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \frac{i}{2\pi} P \int_0^\infty ds \frac{f_3(sp^2)}{1 - s} + \frac{1}{2} \alpha_3 \text{sgn}(p_0) f_3(p^2) . \end{aligned} \quad (5.181)$$

Identificando $\hat{d}^{p(5)}(p)$, na forma de (5.177), vemos que a parte retardada pode ser escrita como segue:

$$\hat{r}^{p(5)}(p) = \alpha_3 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \frac{i}{2\pi} P \int_0^{+\infty} ds \frac{f_3(sp^2)}{1-s} + \frac{1}{2} \hat{d}^{p(5)}(p), \quad (5.182)$$

O problema se reduz ao cálculo do seguinte valor principal:

$$P_3 \equiv P \int_0^{+\infty} ds \frac{1}{(1-s)} f_3(sp^2). \quad (5.183)$$

Seguindo os passos do caso anterior, dividimos a integral no ponto $(m+m_a)^2/p^2$, então

$$P_3 = P \int_0^{(m+m_a)^2/p^2} ds \frac{1}{(1-s)} f_3(sp^2) + P \int_{(m+m_a)^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{1}{(1-s)} f_3(sp^2). \quad (5.184)$$

Da definição de f_3 :

$$\begin{aligned} P_3 = & P \int_{m^2/p^2}^{(m+m_a)^2/p^2} ds \frac{1}{1-s} + \left(-\frac{m^4}{p^4} \right) P \int_{m^2/p^2}^{(m+m_a)^2/p^2} ds \frac{1}{s^2(1-s)} \\ & + P \int_{\frac{(m+m_a)^2}{p^2}}^{+\infty} ds \frac{1}{(1-s)} \left[\left(1 - \frac{m^4}{s^2 p^4} \right) \right. \\ & \left. - \left(1 + \frac{m^2}{sp^2} \right) \sqrt{1 - 2 \frac{(m^2+m_a^2)}{sp^2} + \frac{(m^2-m_a^2)^2}{s^2 p^4}} \right] \end{aligned} \quad (5.185)$$

Como em P_1 devemos considerar o último termo em conjunto. Novamente usamos a substituição de Euler:

$$s = \frac{\eta^2 - \frac{(m^2-m_a^2)^2}{p^4}}{2 \left[\eta - \frac{(m^2+m_a^2)}{p^2} \right]}. \quad (5.186)$$

E teremos que:

$$\sqrt{1 - 2 \frac{(m^2+m_a^2)}{sp^2} + \frac{(m^2-m_a^2)^2}{s^2 p^4}} = 1 - \frac{\eta}{s}, \quad (5.187)$$

onde o domínio de η é $\left(\frac{(m^2+m_a^2)}{p^2}, \frac{(m+m_a)^2}{p^2} \right)$. Usando esse resultado em (5.185), obteremos

que:

$$\begin{aligned}
P_3 = & P \int_{m^2/p^2}^{(m+m_a)^2/p^2} ds \frac{1}{1-s} - \left(\frac{m^2}{p^2}\right) P \int_{(m+m_a)^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{1}{s(1-s)} - \left(\frac{m^4}{p^4}\right) P \int_{m^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{1}{s^2(1-s)} \\
& + P \int_{(m+m_a)^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{\eta}{s(1-s)} + \left(\frac{m^2}{p^2}\right) P \int_{(m+m_a)^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{\eta}{s^2(1-s)}. \quad (5.188)
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos* obteremos:

$$\begin{aligned}
P_3 = & \left(1 - \frac{m^4}{p^4}\right) \ln \left| 1 - \frac{p^2}{m^2} \right| \\
& + \left(1 + \frac{m^2}{p^2}\right) \left(1 + \frac{m_a^2 - m^2}{p^2}\right) \ln \left| \frac{m}{m_a} \right| - \left(\frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left| \frac{m}{m_a} \right| - \left(\frac{m^2}{p^2}\right) \left(\frac{m_a^2 + m^2}{m_a^2 - m^2}\right) \ln \left| \frac{m}{m_a} \right| \\
& - \left(1 + \frac{m^2}{p^2}\right) \sqrt{1 - 2\frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4}} + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4} \ln \left| \frac{\sqrt{p^2 - (m + m_a)^2} + \sqrt{p^2 - (m - m_a)^2}}{\sqrt{p^2 - (m + m_a)^2} - \sqrt{p^2 - (m - m_a)^2}} \right|. \quad (5.189)
\end{aligned}$$

5.3.4 Auto-energia a um loop

Calculemos um dos termos de segunda ordem do operador de dispersão S que contribui à auto-energia do elétron, isto é calcular a distribuição $T_2^{(5)}(x_1, x_2)$, cuja expressão segundo a construção indutiva é:

$$T_2^{(5)}(x_1, x_2) = R_2^{(5)}(x_1, x_2) - R_2'^{(5)}(x_1, x_2). \quad (5.190)$$

onde $R_2^{(5)}$ é a parte retardada de $D_2^{(5)}$. Dos resultados das seções precedentes, temos que estas têm a forma seguinte:

$$R_2'^{(5)}(x_1, x_2) = : \bar{\psi}(x_1) d_-^{(5)}(x_1 - x_2) \psi(x_2) : \quad (5.191)$$

$$R_2^{(5)}(x_1, x_2) = : \bar{\psi}(x_1) r^{(5)}(x_1 - x_2) \psi(x_2) : . \quad (5.192)$$

Daí a distribuição $T_2^{(5)}$ terá a forma:

$$T_2^{(5)}(x_1, x_2) = i: \bar{\psi}(x_1) \Sigma(x_1 - x_2) \psi(x_2) : , \quad (5.193)$$

onde o Σ é chamado de auto-energia, e é definido pela relação:

$$\Sigma(x_1 - x_2) = -i \left[r^{(5)}(x_1 - x_2) - d_-^{(5)}(x_1 - x_2) \right]. \quad (5.194)$$

*Vide o Apêndice L.

Indo para o espaço dos momentos

$$\hat{\Sigma}(p) = -i \left[\hat{r}^{(5)}(p) - \hat{d}_-^{(5)}(p) \right]. \quad (5.195)$$

Das expressões previas de $\hat{r}^{(5)}$ e $\hat{d}_-^{(5)}$, obteremos que $\hat{\Sigma}$ tem a forma:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(p) &= -i \left[\hat{r}^{m(5)}(p) + \hat{r}^{p(5)}(p) - \hat{d}_-^{(5)}(p) \right] \\ &= -i \left[\alpha_1 \left(\frac{m}{4} \right) \frac{i}{2\pi} P \int_0^{+\infty} ds \frac{f_1(sp^2)}{1-s} + \frac{1}{2} \hat{d}^{m(5)}(p) \right] \\ &\quad -i \left[\alpha_3 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \frac{i}{2\pi} P \int_0^{+\infty} ds \frac{f_3(sp^2)}{1-s} + \frac{1}{2} \hat{d}^{(5)}(p) \right] + i \hat{d}_-^{(5)}(p). \end{aligned} \quad (5.196)$$

Então:

$$\hat{\Sigma}(p) = \alpha_1 \left(\frac{m}{4} \right) \frac{1}{2\pi} P \int_0^{+\infty} ds \frac{f_1(sp^2)}{1-s} + \alpha_3 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \frac{1}{2\pi} P \int_0^{+\infty} ds \frac{f_3(sp^2)}{1-s} - i \frac{1}{2} \hat{d}^{(5)}(p) + i \hat{d}_-^{(5)}(p). \quad (5.197)$$

Por definição:

$$-i \frac{1}{2} \hat{d}^{(5)}(p) + i \hat{d}_-^{(5)}(p) = -i \frac{1}{2} \left(\hat{d}_+^{(5)}(p) - \hat{d}_-^{(5)}(p) \right). \quad (5.198)$$

E como:

$$\hat{d}_\pm^{(5)}(p) = \pm \left[\alpha_1 \left(\frac{m}{4} \right) \theta(\pm p_0) f_1(p^2) + \alpha_3 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \theta(\pm p_0) f_3(p^2) \right]. \quad (5.199)$$

Daí:

$$-i \frac{1}{2} \hat{d}^{(5)}(p) + i \hat{d}_-^{(5)}(p) = -i \frac{1}{2} \left[\alpha_1 \left(\frac{m}{4} \right) f_1(p^2) + \alpha_3 \left(\frac{\not{p}}{8} \right) f_3(p^2) \right]. \quad (5.200)$$

Substituindo em (5.197) obtemos a forma geral da auto-energia no gauge de Feynman :

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(p) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{4} \right) \alpha_1 \left(P \int_0^{+\infty} ds \frac{f_1(sp^2)}{1-s} - i\pi f_1(p^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \alpha_3 \left(P \int_0^{+\infty} ds \frac{f_3(sp^2)}{1-s} - i\pi f_3(p^2) \right) \end{aligned} \quad (5.201)$$

Ou

$$\hat{\Sigma}(p) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{4} \right) \alpha_1 [P_1 - i\pi f_1(p^2)] + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\not{p}}{8} \right) \alpha_3 [P_3 - i\pi f_3(p^2)] \quad (5.202)$$

onde os valores esperados

$$P_1 \equiv P \int_0^{+\infty} ds \frac{f_1(sp^2)}{1-s}, \quad P_3 \equiv P \int_0^{+\infty} ds \frac{f_3(sp^2)}{1-s} \quad (5.203)$$

foram obtidos em (5.172) e (5.189), respectivamente.

5.3.5 Propagador do Elétron com Inserções AE

Nesta seção continuaremos com a análise das contribuições ao espalhamento Compton de quarta ordem associada ao propagador do elétron, das relações (5.115), (5.116) e dos resultados das subseções prévias temos que as distribuições associadas são da forma:

$$R'_4 = -e^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) S^F(x_1 - x_3) d_-^{(5)}(x_3 - x_4) S^F(x_4 - x_2) A_\mu(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2): \quad (5.204)$$

$$A'_4 = e^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) S^F(x_1 - x_3) d_+^{(5)}(x_3 - x_4) S^F(x_4 - x_2) A_\mu(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2): \quad (5.205)$$

Daqui a distribuição causal da quarta ordem é da forma

$$D_4 = -e^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) S^F(x_1 - x_3) d^{(5)}(x_3 - x_4) S^F(x_4 - x_2) A_\mu(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2): \quad (5.206)$$

Como as distribuições causais de terceira ordem ou superior têm, por construção, suporte causal*; a distribuição D_4 tem suporte causal com relação a x_4 . Então, para encontrar sua parte retardada é suficiente realizar a bipartição referente a x_4 , considerando só uma das outras variáveis. Se em particular escolhermos x_3 , assim, somente devemos bipartir $d^{\alpha\beta}$, portanto a parte retardada de quarta ordem tem a forma:

$$R_4 = -e^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) S^F(x_1 - x_3) r^{(5)}(x_3 - x_4) S^F(x_4 - x_2) A_\mu(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2): \quad (5.207)$$

Finalmente, o termo do operador de dispersão na quarta ordem, que contribui ao espalhamento Compton é:

$$T_4^{Comp} = -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) S^F(x_1 - x_3) \Sigma(x_3 - x_4) S^F(x_4 - x_2) A_\mu(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2): \quad (5.208)$$

Lembrando que na segunda ordem temos como contribuição ao espalhamento Compton a

$$T_2^{Comp}(x_1, x_2) = -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) S^F(x_1 - x_2) A_\mu(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2): \quad (5.209)$$

Juntando esses resultados e, da relação que define o propagador completo do elétron

$$T^{Comp}(x_1, x_2) = -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) \mathcal{S}^F(x_1 - x_2) A_\mu(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2): + \dots \quad (5.210)$$

obtemos \mathcal{S}^F explicitamente até a quarta ordem

$$\mathcal{S}^F(x_1, x_2) = S^F(x_1, x_2) + \int dx_3 dx_4 S^F(x_1 - x_3) \Sigma(x_3 - x_4) S^F(x_4 - x_2) + \dots \quad (5.211)$$

Para encontrar a expressão de todas as ordens, tomamos a seguinte hipótese:

$$\begin{aligned} T_{2m}^{Comp} &= -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) S^F(x_1 - x_3) \dots \Sigma(x_{2m-1} - x_{2m}) \\ &\quad \times S^F(x_{2m} - x_2) A_\mu(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2): \end{aligned} \quad (5.212)$$

*Para mais detalhes vide o capítulo 2.

A sua demonstração é via indução, supondo válida até $2m = 2n - 2$ e demonstraremos sua validade para $2m = 2n$. Lembremos que as distribuições intermediárias têm a forma:

$$R'_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) \equiv \sum_{P_2} T_{2n-n_1}(Y, x_{2n}) \tilde{T}_{n_1}(X) \quad (5.213)$$

$$A'_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) \equiv \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{2n-n_1}(Y, x_{2n}) . \quad (5.214)$$

Focando nossa análise nos termos T que contribuem ao espalhamento Compton

$$R'_{2n} = -T_{2n-2}^{Comp}(x_2, x_{2n}) T_2^{Comp}(x_{2n-1}, x_1) + \dots \quad (5.215)$$

$$A'_{2n} = -T_{2n-2}^{Comp}(x_1, x_{2n-1}) T_2^{Comp}(x_{2n}, x_2) + \dots \quad (5.216)$$

onde usamos a simetria de índices de T^{Comp} . Agora substituamos as expressões dos termos Compton T_{2n-2}^{Comp} e T_2^{Comp}

$$R'_{2n} = -e^4 : \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) \dots S^F(x_{2n-2} - x_{2n-1})}_{\times \gamma^\alpha A_\alpha(x_{2n}) \psi(x_{2n}) \bar{\psi}(x_{2n-1}) A_\beta(x_{2n-1}) \gamma^\beta S^F(x_{2n} - x_2) A_\mu(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2)} : \quad (5.217)$$

$$A'_{2n} = e^4 : \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) \dots S^F(x_{2n-2} - x_{2n-1})}_{\times \gamma^\beta A_\beta(x_{2n-1}) \psi(x_{2n-1}) \bar{\psi}(x_{2n}) A_\alpha(x_{2n}) \gamma^\alpha S^F(x_{2n} - x_2) A_\mu(x_2) \gamma^\mu \psi(x_2)} : \quad (5.218)$$

Obtemos a mesma estrutura do passo da ordem 2 a 4, mas agora a bipartição é referente a x_{2n} e, escolhemos como a variável de bipartição a x_{2n-1} . Portanto, podemos concluir que o propagador completo de elétron pode ser expresso como a seguinte série perturbativa:

$$\mathcal{S}^F(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{S}^{F(2m)}(x_1, x_2) \quad (5.219)$$

onde $\mathcal{S}^{F(2)}(x_1, x_2) = S^F(x_1, x_2)$ e

$$\mathcal{S}^{F(2m)}(x_1, x_2) = \int dx_3 \dots dx_{2m} S^F(x_1 - x_3) \dots \Sigma(x_{2m-1} - x_{2m}) S^F(x_{2m} - x_2) \quad (5.220)$$

Considerando as expansões de Fourier:

$$S^F(x_1, x_2) = (2\pi)^{-2} \int dp \hat{S}^F(p) e^{-ip(x_1 - x_2)} \quad (5.221)$$

$$\mathcal{S}^{F(2m)}(x_1, x_2) = (2\pi)^{-2} \int dp \hat{S}^F(p) \left[(2\pi)^4 \hat{\Sigma}(p) \right] \hat{S}^F(p) e^{-ip(x_1 - x_2)} . \quad (5.222)$$

Similarmente para as outras ordens, obteremos que o propagador completo do elétron no espaço dos momentos pode ser escrito como a seguinte série:

$$\hat{\mathcal{S}}^F(p) = \hat{S}^F(p) + \hat{S}^F(p) \left[(2\pi)^4 \hat{\Sigma}(p) \right] \hat{S}^F(p) + \dots \quad (5.223)$$

Esta é uma série tipo geométrica, e pode ser reescrita como segue:

$$\widehat{\mathcal{S}}^F(p) = \widehat{S}^F(p) + \widehat{S}^F(p) \left[(2\pi)^4 \widehat{\Sigma}(p) \right] \widehat{\mathcal{S}}^F \quad (5.224)$$

Daqui:

$$\left[\widehat{\mathcal{S}}^F \right]^{-1}(p) = \left[\widehat{S}^F \right]^{-1}(p) - (2\pi)^4 \widehat{\Sigma}(p) . \quad (5.225)$$

Portanto, o propagador do elétron com inserções de AE de *1-loop* tem a seguinte forma:

$$\widehat{\mathcal{S}}^F(p) = \left\{ \left[\widehat{S}^F \right]^{-1}(p) - (2\pi)^4 \widehat{\Sigma}(p) \right\}^{-1} \quad (5.226)$$

onde

$$\widehat{S}^F(p) = (2\pi)^{-2} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0^+} \quad (5.227)$$

e $\widehat{\Sigma}(p)$ é dado por (5.201).

Como o polo de $\widehat{\mathcal{S}}^F$ é a massa do fóton, que é mesmo que o zero de

$$\left[\widehat{\mathcal{S}}^F \right]^{-1}(p) = (2\pi)^2 \left[\not{p} - m - (2\pi)^2 \widehat{\Sigma}(p) \right] . \quad (5.228)$$

Por condição esta massa é m , daí se deve satisfazer que:

$$\widehat{\Sigma}(p = m) = 0 \quad (5.229)$$

Mas, fazendo os cálculos, obtemos que para $\not{p} \approx m$:

$$\widehat{\Sigma}^m(\not{p} \approx m) = m \left[(2\pi)^{-4} e^2 \right] \left(\frac{m_a^2}{m^2} \right) \ln \left| \frac{m}{m_a} \right| \quad (5.230)$$

$$\widehat{\Sigma}^p(\not{p} \approx m) = -m \left[(2\pi)^{-4} e^2 \right] \frac{1}{2} \left(\frac{m_a^2}{m^2} \right) \left(1 - \frac{m^2}{m_a^2 - m^2} \right) \ln \left| \frac{m}{m_a} \right| . \quad (5.231)$$

Então:

$$\widehat{\Sigma}(p = m) = m \left[(2\pi)^{-4} e^2 \right] \frac{1}{2} \left(\frac{m_a^2}{m^2} \right) \left(1 + \frac{m^2}{m_a^2 - m^2} \right) \ln \left| \frac{m}{m_a} \right| \neq 0 \quad (5.232)$$

Desse resultado concluímos que para nossas considerações o propagador fermiônico completo não se comporta como o propagador livre em $\not{p} = m$. Essa dificuldade é resolvida via a normalização polinomial com grau maior à ordem singular da distribuição original, e então a auto-energia física a *1-loop* é dada pela subtração:

$$\widetilde{\Sigma}(p) = \widehat{\Sigma}(p) - \widehat{\Sigma}(p = m) \quad (5.233)$$

Normalização e Renormalização da auto-energia em QED₄.- Na Teoria de Perturbação Causal a solução geral da auto-energia, deste caso, tem a forma seguinte

$$\hat{\Sigma}(p, m) = e^2 (2\pi)^{-4} \left\{ \left[\log \left| 1 - \frac{p^2}{m^2} \right| - i\pi\theta(p^2 - m^2) \right] \left[m - \frac{\not{p}}{4} \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \right] \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \right\} + c_0 + \not{p}c_1, \quad (5.234)$$

onde se considera a m como a massa física do elétron. As constantes c_0, c_1 finitas são obtidas com a chamada condição "camada de massa", são estas constantes que permitem passar de uma solução central à uma na camada de massa.

Na teoria de renormalização a autoenergia renormalizada tem a forma seguinte

$$\hat{\Sigma}(p, m) = \Sigma(p, m) - m\delta_{Z_0} + \not{p}\delta_{Z_2} \quad (5.235)$$

onde m é a massa renormalizada, Z_0 e Z_1 são as constantes de renormalização. As constantes $\delta_{Z_0}, \delta_{Z_2}$ são obtidas com a chamada condição "camada de massa". O paralelismo com a TPC é evidente, mas agora as constantes são divergentes.

Para o caso da GQED₄ a renormalização é finita, e as constantes $\delta_{Z_0}, \delta_{Z_2}$ são finitas não nulas, e são fixadas pela condição camada de massa. Mas para a TPC não temos constantes e então a solução na camada de massa não é necessariamente satisfeita, esta é solução só obtida se consideramos subtrações além da ordem singular da distribuição .

Por comparação entre a renormalização finita e nossos resultados , teremos que para $\xi = 1$:

$$\delta_{Z_0} = [(2\pi)^{-4} e^2] \left(\frac{m_a^2}{m^2} \right) \ln \left| \frac{m}{m_a} \right| \quad (5.236)$$

$$\delta_{Z_2} = [(2\pi)^{-4} e^2] \frac{1}{2} \left(\frac{m_a^2}{m^2} \right) \left(1 - \frac{m^2}{m_a^2 - m^2} \right) \ln \left| \frac{m}{m_a} \right| \quad (5.237)$$

5.4 Vértice

Segundo o teorema de Furry os termos da série perturbativa da matriz- S que não contribuem num espalhamento são as que contêm um número ímpar de operadores eletromagnéticos não contraídos. Mas, na presença de um campo eletromagnético externo esses termos são relevantes.

5.4.1 Distribuições de terceira ordem associadas

No capítulo 2 encontramos as contribuições, correspondente ao operador se dispersão S , em terceira ordem. Sendo a forma da suas distribuições numéricas associadas: R'_3 e causal D_3 , as seguintes:

$$\begin{aligned} R'_3(x_1, x_2, x_3) &= -e^3 : \bar{\psi}(x_1) R'^{\nu} (x_1, x_2, x_3) \psi(x_2) : A_{\nu}(x_3) \\ D_2(x_1, x_2, x_3) &= -e^3 : \bar{\psi}(x_1) D^{\nu} (x_1, x_2, x_3) \psi(x_2) : A_{\nu}(x_3), \end{aligned} \quad (5.238)$$

onde as partes numéricas são

$$\begin{aligned}
R^\nu &= \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) \\
&\quad - \gamma^\mu S^{ret}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) \\
&\quad + \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{av}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) , \quad (5.239)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
D^\nu &= \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) \\
&\quad - \gamma^\mu S^{ret}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) \\
&\quad + \gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{av}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) \\
&\quad - \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) \\
&\quad - \gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{ret}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) \\
&\quad + \gamma^\mu S^{av}(x_1 - x_3) \gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) \gamma^\lambda D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_2 - x_1) , \quad (5.240)
\end{aligned}$$

respectivamente. Vemos que os três primeiros termos, dessa última, correspondem à definição de R^ν e os outros três correspondem a A^ν . Por teorema, as distribuições de mais de dois pontos têm suporte causal, então D^ν tem suporte causal.

5.4.2 Ordem Singular

Calcularemos a ordem singular segundo o critério feito para o espaço dos momentos; então antes devemos ter a expressão da distribuição D^ν no espaço dos momentos. Por invariância translacional $D^\nu(x_1, x_2, x_3)$ pode-se escrever como:

$$D^\nu(x_1, x_2, x_3) = D^\nu(x_1 - x_3, x_2 - x_3) . \quad (5.241)$$

Usualmente encontraríamos sua expressão no espaço dos momento usando a relação:

$$\hat{D}^\nu(p, Q) = (2\pi)^{-4} \int dy_1 dY_2 D^\nu(x_1, x_2, x_3) e^{i(py_1 + QY_2)} , \quad (5.242)$$

onde $y_1 = x_1 - x_3$ e $Y_2 = x_2 - x_3$. Mas, por conveniência introduziremos a variável $y_2 = -Y_2 = x_3 - x_2$, e então:

$$\hat{D}^\nu(p, Q) = (2\pi)^{-4} \int dy_1 dy_2 D^\nu(x_1, x_2, x_3) e^{i(py_1 - Qy_2)} . \quad (5.243)$$

Por praticidade definiremos a distribuição:

$$\hat{D}^\nu(p, q) \equiv (2\pi)^{-4} \int dy_1 dy_2 D^\nu(x_1, x_2, x_3) e^{i(py_1 + qy_2)} . \quad (5.244)$$

A qual calcularemos a continuação:

Transformada de Fourier \hat{D}^ν . - Como os propagadores eletromagnéticos podem ser escritos como:

$$D_{\mu\lambda}^F(x_1 - x_2) = (2\pi)^{-2} \int dk \hat{D}_{\mu\lambda}^F(k) e^{-ik(x_1 - x_2)} = (2\pi)^{-2} \int dk \hat{D}_{\mu\lambda}^F(k) e^{-ik(y_1 + y_2)} \quad (5.245)$$

$$D_{\mu\lambda}^{(+)}(x_1 - x_2) = (2\pi)^{-2} \int dk \hat{D}_{\mu\lambda}^{(+)}(k) e^{-ik(y_1 + y_2)}. \quad (5.246)$$

Substituindo na definição (5.240) de $D^\nu(x_1, x_2, x_3)$ teremos que (5.244) pode ser escrito como segue:

$$\begin{aligned} \hat{D}^\nu(p, q) = (2\pi)^{-2} \int dk & \\ & \left[\gamma^\mu \hat{S}^{(-)}(p - k) \gamma^\nu \hat{S}^{(+)}(q - k) \gamma^\lambda \hat{D}_{\mu\lambda}^F(k) \right. \\ & - \gamma^\mu \hat{S}^{ret}(p - k) \gamma^\nu \hat{S}^{(+)}(q - k) \gamma^\lambda \hat{D}_{\mu\lambda}^{(+)}(k) \\ & + \gamma^\mu \hat{S}^{(-)}(p - k) \gamma^\nu \hat{S}^{av}(q - k) \gamma^\lambda \hat{D}_{\mu\lambda}^{(+)}(-k) \\ & - \gamma^\mu \hat{S}^{(+)}(p - k) \gamma^\nu \hat{S}^{(-)}(q - k) \gamma^\lambda \hat{D}_{\mu\lambda}^F(k) \\ & + \gamma^\mu \hat{S}^{(+)}(p - k) \gamma^\nu \hat{S}^{ret}(q - k) \gamma^\lambda \hat{D}_{\mu\lambda}^{(+)}(k) \\ & \left. - \gamma^\mu \hat{S}^{av}(p - k) \gamma^\nu \hat{S}^{(-)}(q - k) \gamma^\lambda \hat{D}_{\mu\lambda}^{(+)}(-k) \right]. \quad (5.247) \end{aligned}$$

Usando as expressões dos propagadores fermiônicos:

$$\begin{aligned} \hat{S}^{(\pm)}(p) &= (\not{p} + m) \hat{D}_m^{(\pm)}(p) ; \hat{S}^{ret}(p) = (\not{p} + m) \hat{D}_m^{ret}(p) \\ \hat{S}^{av}(p) &= (\not{p} + m) \hat{D}_m^{av}(p). \quad (5.248) \end{aligned}$$

E considerando os propagadores eletromagnéticos no gauge de Feynman:

$$\hat{D}_{\mu\lambda}^F(k) = g_{\mu\lambda} \left[\hat{D}_0^F(k) - \hat{D}_{m_a}^F(k) \right] ; \hat{D}_{\mu\lambda}^{(+)}(k) = g_{\mu\lambda} \left[\hat{D}_0^{(+)}(k) - \hat{D}_{m_a}^{(+)}(k) \right]. \quad (5.249)$$

A possibilidade de ter esta escolha nos permite obter uma expressão simples para \hat{D}^ν :

$$\hat{D}^\nu(p, q) = (2\pi)^{-2} \int dk G^\nu(p, q, k) [J(p, q, k, 0) - J(p, q, k, m_a)], \quad (5.250)$$

sendo:

$$\begin{aligned} G^\nu &= \gamma^\mu [(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma^\nu [(\not{q} - \not{k}) + m] \gamma_\mu \\ &= -2 \not{q} \gamma^\nu \not{p} + 2 \not{k} \gamma^\nu \not{p} + 2 \not{q} \gamma^\nu \not{k} + 2k^2 \gamma^\nu - 4 \not{k} k^\nu \\ &\quad + 4m(p^\nu + q^\nu) - 8mk^\nu - 2m^2 \gamma^\nu \quad (5.251) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &J(p, q, k, M) \\ = &\hat{D}_m^{(-)}(p - k) \hat{D}_m^{(+)}(q - k) \hat{D}_M^F(k) - \hat{D}_m^{ret}(p - k) \hat{D}_m^{(+)}(q - k) \hat{D}_M^{(+)}(k) \\ &+ \hat{D}_m^{(-)}(p - k) \hat{D}_m^{av}(q - k) \hat{D}_M^{(+)}(-k) - \hat{D}_m^{(+)}(p - k) \hat{D}_m^{(-)}(q - k) \hat{D}_M^F(k) \\ &+ \hat{D}_m^{(+)}(p - k) \hat{D}_m^{ret}(q - k) \hat{D}_M^{(+)}(k) - \hat{D}_m^{av}(p - k) \hat{D}_m^{(-)}(q - k) \hat{D}_M^{(+)}(-k) \quad (5.252) \end{aligned}$$

onde por definição :

$$\begin{aligned}\hat{D}_M^{ret}(k) &= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 + i \operatorname{sgn}(k_0) 0^+} ; \hat{D}_M^{av}(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 - i \operatorname{sgn}(k_0) 0^+} \\ \hat{D}_M^F(k) &= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+} ; \hat{D}_M^{(\pm)}(k) = \pm \frac{i}{2\pi} \theta(\pm k_0) \delta(k^2 - M^2)\end{aligned}\quad (5.253)$$

Ao substituir explicitamente as expressões de G^ν e J no resultado (5.250) da distribuição causal, encontramos que é conveniente dividir esse resultado em três partes: *escalar*, *vectorial* e *tensorial**

Escalar:

$$\hat{D}_{1.0}^\nu(p, q) = [-2 \not{k} \gamma^\nu \not{p} + 4m(p^\nu + q^\nu) - 2m^2 \gamma^\nu] [I(p, q, 0) - I(p, q, m_a)], \quad (5.254)$$

onde a chamada integral escalar I tem a forma seguinte

$$\begin{aligned}I(p, q, M) &= \frac{\pi}{4\sqrt{N}} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn}(P_0) \theta(P^2 - 4m^2) \log_1 \\ &\quad - \frac{\pi}{4\sqrt{N}} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn}(q_0) \theta[q^2 - (m + M)^2] \log_2 \\ &\quad + \frac{\pi}{4\sqrt{N}} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn}(p_0) \theta[p^2 - (m + M)^2] \log_3, \quad (5.255)\end{aligned}$$

sendo

$$\log_1 \equiv \ln \left(\frac{pq + m^2 - M^2 + \sqrt{N} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}}}{pq + m^2 - M^2 - \sqrt{N} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}}} \right) \quad (5.256)$$

$$\log_2 \equiv \ln \left(\frac{p^2 - (m^2 - M^2) - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2}\right) + \sqrt{N} \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}}}{p^2 - (m^2 - M^2) - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2}\right) - \sqrt{N} \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}}} \right) \quad (5.257)$$

$$\log_3 = \log_2(q, p). \quad (5.258)$$

e onde $N \equiv (Pp)^2 - P^2 p^2$ e $P = p - q$.

Vectorial:

$$\hat{D}_{1.1}^\nu(p, q) = [2 \not{k} \gamma^\nu \gamma^\mu + 2\gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} - 8mg^{\mu\nu}] [I_\mu(p, q, 0) - I_\mu(p, q, m_a)], \quad (5.259)$$

*Já que cada uma estão relacionadas às integrais: escalar, vectorial e tensorial, as quais são calculadas no Apêndice M, N e O, respectivamente

onde a chamada integral vectorial I^ν tem a forma seguinte:

$$\begin{aligned}
& I^\nu(p, q, M) \\
= & \frac{1}{2N} I(p, q, M) V_0^\nu(p, q, M) \\
& + \frac{\pi}{4N} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn}(P_0) \theta(P^2 - 4m^2) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} V_1^\nu(p, q) \\
& - \frac{\pi}{4N} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn}(q_0) \theta[q^2 - (m + M)^2] \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}} V_2^\nu \\
& + \frac{\pi}{4N} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn}(p_0) \theta[p^2 - (m + M)^2] \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{p^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{p^4}} V_3^\nu \quad (5.260)
\end{aligned}$$

sendo os polinômios $V_0^\nu, V_1^\nu, V_2^\nu, V_3^\nu$ definidos como segue:

$$V_0^\nu(p, q, M) \equiv p^\nu \{pq [q^2 - (m^2 - M^2)] - q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)]\} \quad (5.261)$$

$$+ q^\nu \{pq [p^2 - (m^2 - M^2)] - p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)]\}$$

$$V_1^\nu(p, q) \equiv [p^\nu (pq - q^2) + q^\nu (qp - p^2)] \quad (5.262)$$

$$V_2^\nu(p, q) \equiv (p^\nu q^2 - q^\nu qp) \quad (5.263)$$

$$V_3^\nu(p, q) = V_2^\nu(q, p) . \quad (5.264)$$

Tensorial:

$$\hat{D}_{1,2}^\nu(p, q) = [2g_{\mu\sigma}\gamma^\nu - 4\gamma_\mu\delta_\sigma^\nu] [I^{\mu\sigma}(p, q, 0) - I^{\mu\sigma}(p, q, m_a)] , \quad (5.265)$$

onde a chamada integral tensorial $I^{\mu\nu}$ tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& I^{\mu\nu}(p, q, M) \\
= & \frac{1}{8N^2} I(p, q, M) F_0^{\mu\nu}(p, q, M) \\
& + \frac{\pi}{4N} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn}(P_0) \theta(P^2 - 4m^2) \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} F_1^{\mu\nu}(p, q, M) \\
& - \frac{\pi}{16N^2} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn}(q_0) \theta[q^2 - (m + M)^2] \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}} F_2^{\mu\nu} \\
& + \frac{\pi}{16N^2} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn}(p_0) \theta[p^2 - (m + M)^2] \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{p^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{p^4}} F_3^{\mu\nu} \quad (5.266)
\end{aligned}$$

sendo $F_0^{\mu\nu}, F_1^{\mu\nu}, F_2^{\mu\nu}, F_3^{\mu\nu}$ definidos como segue:

$$\begin{aligned}
& F_0^{\mu\nu}(p, q, M) \\
\equiv & q^\mu q^\nu \left[3 \left\{ p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)] - pq [p^2 - (m^2 - M^2)] \right\}^2 \right] \\
& - q^\mu q^\nu \left[N [p^2 - (m^2 - M^2)]^2 + 4p^2 N (M^2) \right] \\
& + p^\mu p^\nu \left[3 \left\{ q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)] - pq [q^2 - (m^2 - M^2)] \right\}^2 \right] \\
& - p^\mu p^\nu \left[N [q^2 - (m^2 - M^2)]^2 + 4q^2 N (M^2) \right] \\
& - (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) 3(pq) \left\{ q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)]^2 - 2pq [p^2 - (m^2 - M^2)] [q^2 - (m^2 - M^2)] \right\} \\
& - (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) 3(pq) \left\{ p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)]^2 \right\} \\
& - (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) \left\{ 2N [p^2 - (m^2 - M^2)] [q^2 - (m^2 - M^2)] + 4(pq) N (M^2) \right\} \\
& + g^{\mu\nu} N \left\{ q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)]^2 - 2pq [p^2 - (m^2 - M^2)] [q^2 - (m^2 - M^2)] \right\} \\
& + g^{\mu\nu} N \left\{ p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)]^2 + 4N (M^2) \right\} \tag{5.267}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_1^{\mu\nu}(p, q, M) \\
\equiv & q^\mu q^\nu \left[5pq - 4p^2 + m^2 - M^2 - 3 \frac{(pq + m^2 - M^2)(pq - p^2)^2}{N} \right] \\
& + p^\mu p^\nu \left[5pq - 4q^2 + m^2 - M^2 - 3 \frac{(pq + m^2 - M^2)(pq - q^2)^2}{N} \right] \\
& + (q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) \left[3pq - 2(p^2 + q^2) - (m^2 - M^2) - 3 \frac{(pq + m^2 - M^2)(pq - q^2)(pq - p^2)}{N} \right] \\
& - g^{\mu\nu} [(p - q)^2 (pq + m^2 - M^2)] \tag{5.268}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_3^{\mu\nu}(p, q, M) \\
\equiv & -p^\mu p^\nu \left\{ [q^2 - (m^2 - M^2)] [(p^2 q^2) + 2(pq)^2] - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{p^2} \right) [5(p^2 q^2) - 2(pq)^2] \right\} \\
& - q^\mu q^\nu 3(p^2) [p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)] - pq (p^2 - (m^2 - M^2))] \\
& + (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) (p^2) \left[3pq [q^2 - (m^2 - M^2)] - [(pq)^2 + 2p^2 q^2] \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{p^2} \right) \right] \\
& - g^{\mu\nu} N p^2 \left[[q^2 - (m^2 - M^2)] - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{p^2} \right) \right]. \tag{5.269}
\end{aligned}$$

$$E: F_2^{\mu\nu}(p, q, M) = F_3^{\mu\nu}(q, p, M)$$

Com esses resultados encontraremos separadamente as ordens singulares de cada contribuição, antes observemos que das expressões:

$$\hat{D}_{1.0}^\nu(p, q) = [-2 \not{q} \gamma^\nu \not{p} + 4m(p^\nu + q^\nu) - 2m^2 \gamma^\nu] [I(p, q, 0) - I(p, q, m_a)] \tag{5.270}$$

$$\hat{D}_{1.1}^\nu(p, q) = [2 \not{q} \gamma^\nu \gamma^\mu + 2\gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} - 8mg^{\mu\nu}] [I_\mu(p, q, 0) - I_\mu(p, q, m_a)] \tag{5.271}$$

$$\hat{D}_{1.2}^\nu(p, q) = [2g_{\mu\sigma} \gamma^\nu - 4\gamma_\mu \delta_\sigma^\nu] [I^{\mu\sigma}(p, q, 0) - I^{\mu\sigma}(p, q, m_a)], \tag{5.272}$$

vemos que os primeiros termos do lado direito correspondem ao caso da QED₄ [22] e então cada uma dessas têm ordem singular 0 , suspeitamos que a diferença nos dará uma ordem singular -2 para cada caso. Calculemos a continuação explicitamente cada uma das ordens singulares:

Orden Singular do Termo Escalar.- Conseguimos calcular pragmaticamente a ordem singular obtendo a expressão $\hat{D}_{1.0}^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha} \right)$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$, calculemos esta expressão na aproximação das primeiras potência não nula de α :

$$\hat{D}_{1.0}^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha} \right) = [-2\alpha^{-2} \not{A}\not{\gamma}^\nu \not{p} + 4\alpha^{-1}m(p^\nu + q^\nu) - 2m^2\gamma^\nu] \left[I \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, 0 \right) - I \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, m_a \right) \right].$$

(5.273)

Da expressão (5.255), de I , vemos que:

$$\begin{aligned} I \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) &= \alpha^2 \frac{\pi}{4\sqrt{N}} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn} \left(\frac{P_0}{\alpha} \right) \theta \left(\frac{P_0^2}{\alpha^2} - 4m^2 \right) \log_1 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\ &\quad - \alpha^2 \frac{\pi}{4\sqrt{N}} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn} \left(\frac{q_0}{\alpha} \right) \theta \left[\frac{q^2}{\alpha^2} - (m+M)^2 \right] \log_2 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\ &\quad + \alpha^2 \frac{\pi}{4\sqrt{N}} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn} \left(\frac{p_0}{\alpha} \right) \theta \left[\frac{p^2}{\alpha^2} - (m+M)^2 \right] \log_3 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \end{aligned} \quad (5.274)$$

como $\alpha \rightarrow 0^+$ podemos considerar

$$I \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \approx \alpha^2 \frac{\pi}{4\sqrt{N}} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn} (P_0) \theta (P_0^2) \log_1 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \quad (5.275)$$

$$- \alpha^2 \frac{\pi}{4\sqrt{N}} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn} (q_0) \theta [q^2] \log_2 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \quad (5.276)$$

$$+ \alpha^2 \frac{\pi}{4\sqrt{N}} (2\pi)^{-6} \operatorname{sgn} (p_0) \theta [p^2] \log_3 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) . \quad (5.277)$$

Então o problema se reduz a obter as aproximações individuais das funções \log_i , para \log_1 temos que:

$$\begin{aligned} &\log_1 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\ &= \ln \left(\frac{pq + \alpha^2 (m^2 - M^2) + \sqrt{N} \sqrt{1 - \alpha^2 \frac{4m^2}{P^2}}}{pq + \alpha^2 (m^2 - M^2) - \sqrt{N} \sqrt{1 - \alpha^2 \frac{4m^2}{P^2}}} \right) \\ &\approx \ln \left(\frac{pq + \sqrt{N}}{pq - \sqrt{N}} \right) + \alpha^2 \frac{(m^2 - M^2) + \sqrt{N} \frac{1}{2} \left(-\frac{4m^2}{P^2} \right)}{pq + \sqrt{N}} - \alpha^2 \frac{(m^2 - M^2) - \sqrt{N} \frac{1}{2} \left(-\frac{4m^2}{P^2} \right)}{pq - \sqrt{N}} \\ &\approx \ln \left(\frac{pq + \sqrt{N}}{pq - \sqrt{N}} \right) + \alpha^2 \left[\frac{(m^2 - M^2) - 2\sqrt{N} \left(\frac{m^2}{P^2} \right)}{pq + \sqrt{N}} - \frac{(m^2 - M^2) + 2\sqrt{N} \left(\frac{m^2}{P^2} \right)}{pq - \sqrt{N}} \right] \end{aligned} \quad (5.278)$$

Similarmente:

$$\begin{aligned}
& \log_2 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\
&= \ln \left(\frac{p^2 - \alpha^2 (m^2 - M^2) - pq \left(1 - \alpha^2 \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) + \sqrt{N} \sqrt{1 - 2\alpha^2 \frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \alpha^4 \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}}}{p^2 - \alpha^2 (m^2 - M^2) - pq \left(1 - \alpha^2 \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) - \sqrt{N} \sqrt{1 - 2\alpha^2 \frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \alpha^4 \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}}} \right) \\
&\approx \ln \left(\frac{p^2 - pq + \sqrt{N}}{p^2 - pq - \sqrt{N}} \right) + \alpha^2 \frac{-(m^2 - M^2) + pq \left(\frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) - \sqrt{N} \frac{(M^2 + m^2)}{q^2}}{p^2 - pq + \sqrt{N}} \\
&\quad - \alpha^2 \frac{-(m^2 - M^2) + pq \left(\frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) + \sqrt{N} \frac{(M^2 + m^2)}{q^2}}{p^2 - pq - \sqrt{N}}. \tag{5.279}
\end{aligned}$$

Com esses resultados vemos que:

$$\log_1 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, 0 \right) - \log_1 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, m_a \right) \approx \alpha^2 m_a^2 \left[\frac{1}{pq + \sqrt{N}} - \frac{1}{pq - \sqrt{N}} \right] \approx \alpha^2 m_a^2 \left(-\frac{2\sqrt{N}}{p^2 q^2} \right) \tag{5.280}$$

E

$$\begin{aligned}
\log_2 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, 0 \right) - \log_2 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, m_a \right) &\approx \alpha^2 m_a^2 \left[\frac{1}{q^2} \frac{-q^2 + pq + \sqrt{N}}{p^2 - pq + \sqrt{N}} - \frac{1}{q^2} \frac{-q^2 + pq - \sqrt{N}}{p^2 - pq - \sqrt{N}} \right] \\
&\approx \alpha^2 m_a^2 \left[\frac{1}{q^2} \left(\frac{qP + \sqrt{N}}{pP + \sqrt{N}} - \frac{qP - \sqrt{N}}{pP - \sqrt{N}} \right) \right] \\
&\approx \alpha^2 m_a^2 \left(2 \frac{\sqrt{N}}{p^2 q^2} \right), \tag{5.281}
\end{aligned}$$

e como $\log_3(p, q) = \log_2(q, p)$. Então

$$\log_3 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, 0 \right) - \log_3 \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, m_a \right) \approx \alpha^2 m_a^2 \left(2 \frac{\sqrt{N}}{p^2 q^2} \right). \tag{5.282}$$

Daqui obtemos a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned}
& I \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, 0 \right) - I \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, m_a \right) \\
&\approx \frac{\pi}{4} (2\pi)^{-6} \alpha^4 m_a^2 \left(\frac{2}{p^2 q^2} \right) [-\operatorname{sgn}(P_0) \theta(P_0^2) - \operatorname{sgn}(q_0) \theta[q^2] + \operatorname{sgn}(p_0) \theta[p^2]] \tag{5.283}
\end{aligned}$$

Substituindo em (5.273), finalmente temos que:

$$\begin{aligned}
\hat{D}_{1.0}^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha} \right) &\approx m_a^2 \frac{\pi}{4} (2\pi)^{-6} [-2\alpha^2 \not{h} \gamma^\nu \not{p} + 4\alpha^3 m (p^\nu + q^\nu) - 2\alpha^4 m^2 \gamma^\nu] \\
&\quad \times \left(\frac{2}{p^2 q^2} \right) [-\operatorname{sgn}(P_0) \theta(P_0^2) - \operatorname{sgn}(q_0) \theta[q^2] + \operatorname{sgn}(p_0) \theta[p^2]]. \tag{5.284}
\end{aligned}$$

Então a ordem singular da contribuição escalar é:

$$\omega \left(\hat{D}_{1.0}^\nu \right) = -2 . \quad (5.285)$$

Portanto, esta contribuição é uma **distribuição regular**.

Orden Singular do Termo Vectorial.- Conseguimos calcular a ordem singular obtendo a expressão $\hat{D}_{1.1}^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha} \right)$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$, calculemos esta expressão na aproximação das primeiras potência não nula de α :

$$\hat{D}_{1.1}^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha} \right) = [2\alpha^{-1} \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} + 2\alpha^{-1} \not{q} \gamma^\nu \gamma^\mu - 8mg^{\mu\nu}] \left[I_\mu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, 0 \right) - I_\mu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, m_a \right) \right] . \quad (5.286)$$

Da expressão (5.260), de I^ν , vemos que:

$$\begin{aligned} & I^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\ \approx & \frac{\alpha^4}{2N} I \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) V_0^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\ & + \frac{\alpha^4 \pi}{4N} (2\pi)^{-6} \text{sgn}(P_0) \theta(P^2) \left(1 - \alpha^2 \frac{2m^2}{P^2} \right) V_1^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\ & - \frac{\alpha^4 \pi}{4N} (2\pi)^{-6} \text{sgn}(q_0) \theta[q^2] \left(1 - \alpha^2 \frac{(M^2 + m^2)}{q^2} \right) V_2^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\ & + \frac{\alpha^4 \pi}{4N} (2\pi)^{-6} \text{sgn}(p_0) \theta[p^2] \left(1 - \alpha^2 \frac{(M^2 + m^2)}{p^2} \right) V_3^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) , \quad (5.287) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} V_0^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) &= \alpha^{-5} [p^v q^2 (pq - p^2) + (p \rightleftharpoons q)] \\ &\quad - \alpha^{-3} (m^2 - M^2) [p^v (pq - q^2) + (p \rightleftharpoons q)] \quad (5.288) \end{aligned}$$

$$V_1^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha} \right) = \alpha^{-3} [p^v (pq - q^2) + q^v (qp - p^2)] = \alpha^{-3} V_1^\nu(p, q) \quad (5.289)$$

$$V_2^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha} \right) = \alpha^{-3} (p^v q^2 - q^v qp) = \alpha^{-3} V_2^\nu(p, q) \quad (5.290)$$

$$V_3^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha} \right) = \alpha^{-3} V_2^\nu(q, p) . \quad (5.291)$$

Então obteremos que:

$$\begin{aligned} & I_\mu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, 0 \right) - I_\mu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, m_a \right) \\ \approx & \frac{\alpha^{-1}}{2N} \left[I \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, 0 \right) - I \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, m_a \right) \right] [p^v q^2 (pq - p^2) + (p \rightleftharpoons q)] \\ & - (m_a^2) \frac{\alpha^3 \pi}{4N} (2\pi)^{-6} \left[\frac{\text{sgn}(q_0) \theta[q^2]}{q^2} V_2^\nu(p, q) - (p \rightleftharpoons q) \right] . \quad (5.292) \end{aligned}$$

Usando o resultado obtido para a diferença da parte escalar (5.283) obteremos que:

$$I_\mu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, 0 \right) - I_\mu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, m_a \right) \approx \frac{\pi}{4} (2\pi)^{-6} \frac{\alpha^3 m_a^2}{2N} f_\mu(p, q), \quad (5.293)$$

onde

$$\begin{aligned} f_\mu(p, q) \equiv & -2 \left[\frac{\text{sgn}(q_0) \theta[q^2]}{q^2} V_2^\nu(p, q) - (p \leftrightarrow q) \right] \\ & + [p_\mu q^2 (pq - p^2) + (p \leftrightarrow q)] \left(\frac{2}{p^2 q^2} \right) \\ & \times [-\text{sgn}(P_0) \theta(P_0^2) - \text{sgn}(q_0) \theta(q^2) + \text{sgn}(p_0) \theta(p^2)]. \end{aligned} \quad (5.294)$$

Substituindo em (5.286), finalmente temos que:

$$\hat{D}_{1.1}^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha} \right) \approx m_a^2 \frac{\pi (2\pi)^{-6}}{4 \cdot 2N} [2\alpha^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} + 2\alpha^2 \not{q} \gamma^\nu \gamma^\mu - 8\alpha^3 m g^{\mu\nu}] f_\mu(p, q). \quad (5.295)$$

Então a ordem singular da contribuição vectorial é:

$$\omega \left(\hat{D}_{1.1}^\nu \right) = -2.$$

(5.296)

Portanto, esta contribuição é uma **distribuição regular**.

Orden Singular do Termo Tensorial.- Calculamos esta ordem singular obtendo a expressão $\hat{D}_{1.2}^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha} \right)$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$, então na aproximação das primeiras potência não nula de α :

$$\hat{D}_{1.2}^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha} \right) = [2g_{\mu\sigma} \gamma^\nu - 4\gamma_\mu \delta_\sigma^\nu] \left[I^{\mu\sigma} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, 0 \right) - I^{\mu\sigma} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, m_a \right) \right]. \quad (5.297)$$

Da expressão (5.266), de $I^{\mu\nu}$, vemos que:

$$\begin{aligned} & I^{\mu\nu} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\ \approx & \frac{\alpha^8}{8N^2} I \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) F_0^{\mu\nu} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\ & + \frac{\pi \alpha^4}{4N} (2\pi)^{-6} \text{sgn}(P_0) \theta(P^2) \left(1 - \alpha^2 \frac{2m^2}{P^2} \right) \frac{1}{4} F_1^{\mu\nu} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\ & - \frac{\pi \alpha^8}{16N^2} (2\pi)^{-6} \text{sgn}(q_0) \theta[q^2] \left(1 - \alpha^2 \frac{(M^2 + m^2)}{q^2} \right) F_2^{\mu\nu} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\ & + \frac{\pi \alpha^8}{16N^2} (2\pi)^{-6} \text{sgn}(p_0) \theta[p^2] \left(1 - \alpha^2 \frac{(M^2 + m^2)}{p^2} \right) F_3^{\mu\nu} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right), \end{aligned} \quad (5.298)$$

onde

$$\begin{aligned}
& F_0^{\mu\nu} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\
& \approx \alpha^{-10} q^\mu q^\nu \left[3 \{ p^2 q^2 - pq (p^2) \}^2 - N (p^2)^2 \right] + \alpha^{-10} p^\mu p^\nu \left[3 \{ q^2 p^2 - pq (q^2) \}^2 - N (q^2)^2 \right] \\
& - \alpha^{-10} (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) \left[3 (pq) \left\{ q^2 (p^2)^2 - 2 (pq) p^2 q^2 + p^2 (q^2)^2 \right\} + 2 N p^2 q^2 \right] \\
& + \alpha^{-10} g^{\mu\nu} N \left\{ q^2 (p^2)^2 - 2 (pq) p^2 q^2 + p^2 (q^2)^2 \right\} = \alpha^{-10} F_0^{\mu\nu} (p, q, M = m = 0) \quad (5.299)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_1^{\mu\nu} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \\
& = \alpha^{-4} q^\mu q^\nu \left[5pq - 4p^2 + \alpha^2 (m^2 - M^2) - 3 \frac{(pq + \alpha^2 (m^2 - M^2)) (pq - p^2)^2}{N} \right] \\
& + \alpha^{-4} p^\mu p^\nu \left[5pq - 4q^2 + \alpha^2 (m^2 - M^2) - 3 \frac{(pq + \alpha^2 (m^2 - M^2)) (pq - q^2)^2}{N} \right] \\
& - \alpha^{-4} g^{\mu\nu} [(p - q)^2 (pq + \alpha^2 (m^2 - M^2))] \\
& + \alpha^{-4} (q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) \\
& \times \left[3pq - 2 (p^2 + q^2) - \alpha^2 (m^2 - M^2) - 3 \frac{(pq + \alpha^2 (m^2 - M^2)) (pq - q^2) (pq - p^2)}{N} \right] \quad (5.300)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_3^{\mu\nu} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) \times \left(1 - \alpha^2 \frac{(M^2 + m^2)}{p^2} \right) \\
& \approx -\alpha^{-8} p^\mu p^\nu \left\{ \left[q^2 - \alpha^2 (m^2 - M^2) - \alpha^2 \frac{q^2 (M^2 + m^2)}{p^2} \right] [(p^2 q^2) + 2 (pq)^2] \right\} \\
& - \alpha^{-8} p^\mu p^\nu \left\{ -pq \left(1 - 2 \frac{\alpha^2 m^2}{p^2} \right) [5 (p^2 q^2) - 2 (pq)^2] \right\} \\
& - \alpha^{-8} q^\mu q^\nu 3 (p^2) \left\{ p^2 \left[q^2 - \alpha^2 (m^2 - M^2) - \alpha^2 \frac{q^2 (M^2 + m^2)}{p^2} \right] - pq (p^2 - 2\alpha^2 m^2) \right\} \\
& + \alpha^{-8} (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) (p^2) \left\{ 3pq \left[q^2 - \alpha^2 (m^2 - M^2) - \alpha^2 \frac{q^2 (M^2 + m^2)}{p^2} \right] \right\} \\
& + \alpha^{-8} (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) (p^2) \left\{ - [(pq)^2 + 2p^2 q^2] \left(1 - 2 \frac{\alpha^2 m^2}{p^2} \right) \right\} \\
& - \alpha^{-8} g^{\mu\nu} N p^2 \left\{ \left[q^2 - \alpha^2 (m^2 - M^2) - \alpha^2 \frac{q^2 (M^2 + m^2)}{p^2} \right] - pq \left(1 - 2 \frac{\alpha^2 m^2}{p^2} \right) \right\} . \quad (5.301)
\end{aligned}$$

e $F_2^{\mu\nu} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, M \right) = F_3^{\mu\nu} \left(\frac{q}{\alpha}, \frac{p}{\alpha}, M \right)$. Usando o resultado (5.283) obtido para a diferença da parte escalar, obteremos que:

$$I^{\mu\nu} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, 0 \right) - I^{\mu\nu} \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}, m_a \right) \approx \frac{\pi}{32 (2\pi)^6 N^2} \alpha^2 m_a^2 h^{\mu\sigma} (p, q) , \quad (5.302)$$

onde

$$\begin{aligned}
h^{\mu\sigma} = & \left(\frac{2}{p^2 q^2} \right) [-sgn(P_0) \theta(P_0^2) - sgn(q_0) \theta(q^2) + sgn(p_0) \theta(p^2)] \\
& \times \left\{ q^\mu q^\nu \left[3 [p^2 q^2 - pq(p^2)]^2 - N(p^2)^2 \right] + p^\mu p^\nu \left[3 [q^2 p^2 - pq(q^2)]^2 - N(q^2)^2 \right] \right. \\
& - (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) \left[3(pq) \left\{ q^2(p^2)^2 - 2(pq)p^2 q^2 + p^2(q^2)^2 \right\} + 2Np^2 q^2 \right] \\
& + N g^{\mu\nu} \left\{ q^2(p^2)^2 - 2(pq)p^2 q^2 + p^2(q^2)^2 \right\} \left. \right\} \\
& + sgn(P_0) \theta(P^2) 2N \left\{ q^\mu q^\nu \left[1 - 3 \frac{(pq - p^2)^2}{N} \right] + p^\mu p^\nu \left[1 - 3 \frac{(pq - q^2)^2}{N} \right] \right. \\
& - (q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) \left[1 + 3 \frac{(pq - q^2)(pq - p^2)}{N} \right] - g^{\mu\nu} (p - q)^2 \left. \right\} \\
& + sgn(p_0) \theta(p^2) \\
& \times \left\{ \frac{1}{4N} p^\mu p^\nu \left(1 - \frac{q^2}{p^2} \right) \left[(p^2 q^2) + 2(pq)^2 \right] + \frac{1}{4N} q^\mu q^\nu \left\{ 3(p^2) \left[p^2 \left(1 - \frac{q^2}{p^2} \right) \right] \right\} \right. \\
& - \frac{1}{4N} (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) (p^2) \left[3pq \left(1 - \frac{q^2}{p^2} \right) \right] + g^{\mu\nu} \frac{p^2}{4} \left(1 - \frac{q^2}{p^2} \right) \left. \right\} \\
& - sgn(q_0) \theta(q^2) \times \{p \rightleftharpoons q\} . \tag{5.303}
\end{aligned}$$

Substituindo em (5.297), finalmente temos que:

$$\hat{D}_{1,2}^\nu \left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha} \right) \approx \frac{\pi}{32 (2\pi)^6 N^2} \alpha^2 m_a^2 [2g_{\mu\sigma} \gamma^\nu - 4\gamma_\mu \delta_\sigma^\nu] h^{\mu\sigma} . \tag{5.304}$$

Então a ordem singular da contribuição tensorial é:

$$\omega \left(\hat{D}_{1,2}^\nu \right) = -2 . \tag{5.305}$$

Portanto, esta contribuição também é uma **distribuição regular**.

Concluimos assim que a distribuição causal de 3-pontos associada ao vértice é regular e de ordem -2 . Como a bipartição não muda a ordem singular, teremos que a parte retardada e o mesmo vértice serão distribuições regulares e de ordem -2 . *Daí o vértice será não divergente no modelo generalizado da eletrodinâmica.*

Nota.- No capítulo 2 encontramos que a fórmula de bipartição para uma distribuição de 3-pontos é:

$$\begin{aligned}
\hat{r}(p, q) = & \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 sgn(p^0) sgn(q^0) \\
& \times \int dt \frac{1}{(1 - t + sgn(p^0) i0^+)} \left[\int ds \frac{\hat{d}(tp, sq)}{(1 - s + sgn(q^0) i0^+)} \right] \tag{5.306}
\end{aligned}$$

A qual poderia dividir-se independentemente nas partes escalar, vectorial e tensorial, contudo cada uma delas é um grande desafio.

Capítulo 6

Propriedades Gerais

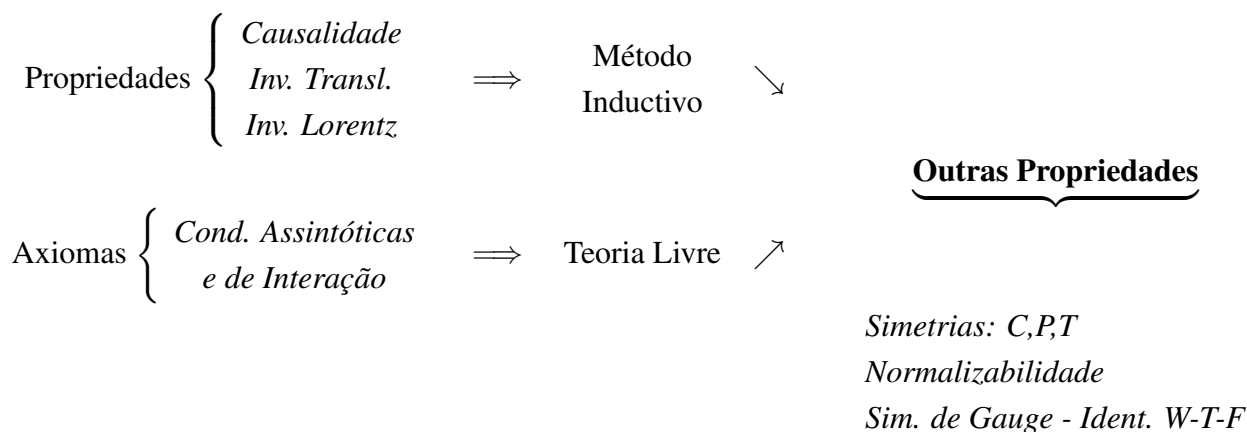
Neste capítulo aplicaremos o método da construção indutiva para deduzir propriedades gerais a partir do primeiro termo da teoria livre, que é regido pela teoria livre. Assim, mostraremos para essa teoria: as simetrias discretas, normalizabilidade, invariância de gauge e identidades de Ward-Takahashi-Fradkin (W-T-F).

6.1 Introdução

A Teoria de Perturbação Causal da *Matriz-S* é uma teoria axiomática que impõe somente alguns poucos princípios físicos tais como: *causalidade, invariância translacional e de Lorentz*. Como é mostrado ao longo da tese, essas propriedades, as *condições assintóticas* e o axioma de *interação* são suficientes para determinar cada um dos termos da série perturbativa.

Mas existem muitas outras propriedades como, por exemplo, as chamadas *simetrias discretas*: de conjugação de carga (C), paridade (P) e de inversão temporal (T); a *simetria de gauge* da qual são deduzidas as importantes identidades de Ward-Fradkin-Takahashi. Também, temos propriedades não provenientes de simetrias físicas, mas são de grande importância para uma teoria perturbativa assim como é a *normalizabilidade*.

Todas estas propriedades de relevância física e teórica, embora não sejam diretamente manifestas na TPC, devem e podem ser deduzidas. O mecanismo usado para *demonstrar* estas propriedades é o método indutivo, tomando como base resultados da teoria livre.



6.2 Simetrias Discretas em TPC

O conceito geral de simetrias em física é de grande importância por sua aplicabilidade em qualquer fenômeno e sua independência dos detalhes desse fenômeno. Isto nos proporciona uma ferramenta para analisar sistemas físicos sem conhecer os detalhes da teoria que os modelam. Mas também são vínculos que qualquer teoria deve manifestar. Como foi mencionado no capítulo 2, numa teoria quântica uma simetria é associada a uma transformação do sistema tal que as probabilidades de transição se mantenham invariantes.

Na Teoria de Perturbação Causal são considerados como axiomas as assim chamadas simetrias próprias de Poincaré, mas as chamadas impróprias ou discretas foram omitidas.

- *Paridade,*
- *Inversão temporal.*

Como mencionamos na introdução, essas serão demonstradas pelo método indutivo, que completa a invariância da *Matriz-S* pelo grupo completo de transformações de Poincaré.

Existe outra simetria discreta, chamada de

- *Conjugação de carga,*

Que não está diretamente relacionada a uma simetria espaço-temporal, senão está relacionada à simetria partícula-antipartícula.

6.2.1 Conjugação de Carga

Aqui a amplitude de transição é invariante pela transformação: *partícula* \Leftrightarrow *antipartícula*. Isto é garantido se cada ordem da série perturbativa do operador de dispersão S for invariante por essa transformação. Lembrando que para a teoria livre:

$$U_C j^\mu(x) U_C^{-1} = -j^\mu(x) \quad (6.1)$$

$$U_C A_\mu(x) U_C^{-1} = -A_\mu(x) , \quad (6.2)$$

em que o operador unitário U_C representa essa simetria. Daqui temos que a distribuição correspondente à primeira ordem

$$U_C T_1(x) U_C^{-1} = ie[-j^\mu(x)][-A_\mu(x)] = T_1(x) , \quad (6.3)$$

é invariante por conjugação de carga ou é C -invariante, o mesmo se dá para $\tilde{T}_1(x) = -T_1(x)$. Com esses resultados e seguindo o método indutivo, mostraremos que T_n também é C -invariante.

Partindo da hipótese indutiva de que o conjunto $\{T_1, \dots, T_{n-1}, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{n-1}\}$ é C -invariante; temos que as distribuições intermediárias

$$U_C A'_n(x_1, \dots, x_n) U_C^{-1} = \sum_{P_2} U_C \tilde{T}_{n_1}(X) U_C^{-1} U_C T_{n-n_1}(Y, x_n) U_C^{-1} = A'_n(x_1, \dots, x_n) \quad (6.4)$$

$$U_C R'_n(x_1, \dots, x_n) U_C^{-1} = \sum_{P_2} U_C T_{n-n_1}(Y, x_n) U_C^{-1} U_C \tilde{T}_{n_1}(X) U_C^{-1} = R'_n(x_1, \dots, x_n) , \quad (6.5)$$

são C -invariantes. Então, por definição, a distribuição causal

$$D_n(x_1, \dots, x_n) \equiv R'_n(x_1, \dots, x_n) - A'_n(x_1, \dots, x_n) , \quad (6.6)$$

também é C -invariante.

Se R_n é a distribuição retardada obtida ao aplicar a fórmula de bipartição em D_n , então $U_C R_n U_C^{-1}$ será a distribuição retardada obtida ao aplicar a fórmula de bipartição em $U_C D_n U_C^{-1}$. Mas como $U_C D_n U_C^{-1} = D_n$, então concluímos que $U_C R_n U_C^{-1}$ também é uma distribuição retardada de D_n .

Assim, tanto R_n e $U_C R_n U_C^{-1}$ são a parte retardada da distribuição D_n , como também o será uma combinação linear de elas. Em particular a combinação linear

$$\bar{R}_n = \frac{1}{2} [R_n + U_C R_n U_C^{-1}] . \quad (6.7)$$

Então:

$$U_C \bar{R}_n U_C^{-1} = \frac{1}{2} [U_C R_n U_C^{-1} + U_C^2 R_n (U_C^2)^{-1}] , \quad (6.8)$$

como U_C é nilpotente, \bar{R}_n também é C -invariante. O que, junto a (6.5), mostra-se finalmente que a contribuição n -ésima

$$T_n = \bar{R}_n - R'_n , \quad (6.9)$$

é C -invariante, o que prova que o operador de dispersão S é invariante pela conjugação de carga.

- **Grafos na Teoria de Perturbação Causal.**- Como em geral T_n não é uma só distribuição mas que é formada por um vasto conjunto de distribuições de n -pontos que podem ser agrupadas em subconjuntos T_n^g

$$T_n = \sum_g T_n^g(x_1, x_2, \dots, x_n) , \quad (6.10)$$

onde cada um dos termos desse subconjunto apresenta uma mesma estrutura ou configuração

$$T_n^g(x) = \sum : \prod_{j=1}^{f_g} \bar{\psi}(x_{k_j}) t_g(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{j=1}^{f_g} \psi(x_{n_j}) : : \prod_{j=1}^{l_g} A_{\mu_{m_j}}(x_{m_j}) : , \quad (6.11)$$

onde l_g é o número de fótons livres*, $2f_g$ é o número total de férmions livres e $t_g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma distribuição numérica†. O sub-índice g indica uma configuração fixa de campos externos, que chamaremos de *classe de grafos* e cada um de seus membros de *grafo*. Como cada configuração é independente das outras, podemos afirmar que cada classe de grafo é C -invariante, mas cada grafo dessa classe não necessariamente. Por exemplo, na segunda ordem, temos que os grafos correspondentes ao espalhamento Compton

$$T_2^{(2)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_2) \not{A}(x_2) S^F(x_2 - x_1) \not{A}(x_1) \psi(x_1) : \quad (6.12)$$

$$T_2^{(3)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_1) \not{A}(x_1) S^F(x_1 - x_2) \not{A}(x_2) \psi(x_2) : , \quad (6.13)$$

são C -invariante em conjunto. Outra classe de grafos de $T_2^{(2)}$ que é C -invariante são as auto-energias

$$T_2^{(4)}(x_1, x_2) = i : \bar{\psi}(x_2) \Sigma(x_2 - x_1) \psi(x_1) : \quad (6.14)$$

$$T_2^{(5)}(x_1, x_2) = i : \bar{\psi}(x_1) \Sigma(x_1 - x_2) \psi(x_2) : , \quad (6.15)$$

vemos que cada um dos membros não são C -invariantes, porém o conjunto sim.

Dessa observação, analisemos em particular a classe de grafos que não apresenta operadores fermiônicos livres e então, por exemplo que tenham l operadores eletromagnético livres

$$T_n^{A_l}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{g^{A_l}} t^{\mu_{m_1} \dots \mu_{m_l}}(x_1, x_2, \dots, x_n) : \prod_{j=1}^l A_{\mu_{m_j}}(x_{m_j}) : . \quad (6.16)$$

Fazendo a transformação de conjugação de carga

$$\begin{aligned} U_C T_n^{A_l}(x_1, x_2, \dots, x_n) U_C^{-1} &= \sum_{g^{A_l}} t^{\mu_{m_1} \dots \mu_{m_l}}(x_1, x_2, \dots, x_n) : \prod_{j=1}^l U_C A_{\mu_{m_j}}(x_{m_j}) U_C^{-1} : \\ &= (-1)^l \sum_{g^{A_l}} t^{\mu_{m_1} \dots \mu_{m_l}}(x_1, x_2, \dots, x_n) : \prod_{j=1}^l A_{\mu_{m_j}}(x_{m_j}) : \end{aligned} \quad (6.17)$$

*Ou operadores de campo não contraídos.

†Provenientes das contrações normais dos operadores livres.

e como o número de possíveis contrações fotônicas são dadas em pares teremos que $(-1)^l = (-1)^n$, e daí:

$$U_C T_n^{A_l}(x_1, x_2, \dots, x_n) U_C^{-1} = (-1)^n \sum_{g^{A_l}} t^{\mu_{m_1} \dots \mu_{m_l}}(x_1, x_2, \dots, x_n) : \prod_{j=1}^l A_{\mu_{m_j}}(x_{m_j}) : \quad (6.18)$$

Da observação temos que a classe de grafo $T_n^{A_l}$ é C -invariante, e daí temos duas possibilidades:

- Se n é par a invariância é demonstrada.
- Se n é ímpar a única opção é $T_n^{A_l} = 0$.

Esse resultado é conhecido como o Teorema de Furry.

Teorema de Furry.- *As classes de grafos de um número ímpar de pontos que só contém, como operadores livres, os campos eletromagnéticos livres, não contribuem para a Matriz-S.*

Essa imposição contribui para fixar as constantes dos polinômios livres, e é conhecida como *Condição de Normalização C*.

6.2.2 Paridade

Nesta seção consideraremos a transformação de reflexão espacial: $x = (x_0, \vec{x}) \rightarrow x_P = (x_0, -\vec{x})$. Se a teoria é invariante por essa transformação, temos que demonstrar que o operador de dispersão S se transforma como segue:

$$U_P S[g] U_P^{-1} = S[g_P] \quad \text{onde} \quad g_P(x) = g(x_P) , \quad (6.19)$$

nessa expressão U_P é o operador que representa essa simetria no espaço de Hilbert, \mathcal{F} , das partículas assintoticamente livres.

Se essa relação é válida, então ao substituí-la na série perturbativa, da *Matriz-S*, devemos ter que:

$$U_P T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) U_P^{-1} = T_n(x_{1P}, \dots, x_{nP}) . \quad (6.20)$$

Se a distribuição T_n satisfaz essa relação se diz que é P -invariante, o que garante que cada ordem da série perturbativa do operador de dispersão S seja invariante por reflexão espacial. Daqui, o objetivo desta seção é provar que T_n é P -invariante $\forall n \in \mathbb{N}$.

Seguindo o método indutivo, devemos verificar (6.20) primeiro para $n = 1$. Para a teoria livre, temos se têm as seguintes relações

$$U_P j^\mu(x) U_P^{-1} = g^{\mu\mu} j^\mu(x_P) \quad (6.21)$$

$$U_P A_\mu(x) U_P^{-1} = g^{\mu\mu} A_\mu(x_P) . \quad (6.22)$$

Então a distribuição $T_1(x) = iej^\mu(x) A_\mu(x)$ se transforma por reflexão espacial como:

$$U_P T_1(x) U_P^{-1} = ie [g^{\mu\mu} j^\mu(x_P)] [g^{\mu\mu} A_\mu(x_P)] = T_1(x_P) . \quad (6.23)$$

O que prova que é P -invariante e do mesmo modo, podemos provar que $\tilde{T}_1(x) = -T_1(x)$ é P -invariante.

Para provar T_n é P -invariante para $n > 1$, partimos da hipótese indutiva: o conjunto $\{T_1, \dots, T_{n-1}, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{n-1}\}$ é P -invariante. Daqui as distribuições intermediárias, construídas com esse conjunto, se transformam como

$$U_P A'_n(x_1, \dots, x_n) U_P^{-1} = \sum_{P_2} U_P \tilde{T}_{n_1}(X) U_P^{-1} U_P T_{n-n_1}(Y, x_n) U_P^{-1} = A'_n(x_{1P}, \dots, x_{nP}) \quad (6.24)$$

$$U_P R'_n(x_1, \dots, x_n) U_P^{-1} = \sum_{P_2} U_P T_{n-n_1}(Y, x_n) U_P^{-1} U_P \tilde{T}_{n_1}(X) U_P^{-1} = R'_n(x_{1P}, \dots, x_{nP}) , \quad (6.25)$$

então são P -invariantes. Daí, por definição, teremos que a distribuição causal

$$D_n(x_1, \dots, x_n) \equiv R'_n(x_1, \dots, x_n) - A'_n(x_1, \dots, x_n) , \quad (6.26)$$

também é P -invariante.

Lembrando que T_n é obtida da relação

$$T_n = R_n - R'_n = A_n - A'_n , \quad (6.27)$$

temos que o passo final é mostrar que a parte retardada (ou avançada) da distribuição D_n é P -invariante. Isto se consegue se levamos em consideração a seguinte observação:

- Como a distribuição causal D_n é P -invariante: $U_P D_n(X) U_P^{-1} = D_n(X_P)$; ela pode ser escrita das seguintes formas:

$$D_n(X) = U_P D_n(X_P) U_P^{-1} = U_P^2 D_n(X) U_P^{-2} ; D_n(X) = U_P^3 D_n(X_P) U_P^{-3} , \quad (6.28)$$

onde $X = (x_1, \dots, x_n)$. E então D_n pode ser escrita como a seguinte combinação linear:

$$D_n(X) = \frac{1}{4} [D_n(X) + U_P D_n(X_P) U_P^{-1} + U_P^2 D_n(X) U_P^{-2} + U_P^3 D_n(X_P) U_P^{-3}] . \quad (6.29)$$

E como as fórmulas de bipartição só agem na parte numérica, a forma bipartida da distribuição causal pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & D_n(X) \\ &= \frac{1}{4} [R_n(X) + U_P R_n(X_P) U_P^{-1} + U_P^2 R_n(X) U_P^{-2} + U_P^3 R_n(X_P) U_P^{-3}] \\ &\quad - \frac{1}{4} [A_n(X) + U_P A_n(X_P) U_P^{-1} + U_P^2 A_n(X) U_P^{-2} + U_P^3 A_n(X_P) U_P^{-3}] \end{aligned} \quad (6.30)$$

Tal como está escrita, pode-se pensar que a primeira linha é a parte retardada, mas isso não pode ser considerado *a priori*. Por definição é claro que R_n pertence à parte retardada, e como os operadores não agem na parte numérica, $U_P^2 R_n(X) U_P^{-2}$ também pertence à parte retardada. Para o resto consideremos o seguinte fato: *se para a distribuição $r(X)$ temos que $\text{supp}[r(X)] \subseteq \Gamma_{n-1}^+(x_n = 0)$ então $\text{supp}[r(X_P)] \subseteq \Gamma_{n-1}^+(x_n = 0)$, porque a reflexão espacial não muda a relação de causalidade*. E, então, tanto $U_P R_n(X_P) U_P^{-1}$ como $U_P^3 R_n(X_P) U_P^{-3}$ pertencem à parte retardada de D_n . Nesse sentido uma análise similar nos mostraria que o resto de (6.30) pertence à parte avançada.

Se denotamos como \bar{R}_n à parte retardada da combinação linear (6.30), teremos que essa é

$$\bar{R}_n(X) = \frac{1}{4} [R_n(X) + U_P R_n(X_P) U_P^{-1} + U_P^2 R_n(X) U_P^{-2} + U_P^3 R_n(X_P) U_P^{-3}] . \quad (6.31)$$

E que se transforma por reflexão espacial como

$$\begin{aligned} U_P \bar{R}_n(X) U_P^{-1} &= \frac{1}{4} [U_P R_n(X) U_P^{-1} + U_P^2 R_n(X_P) U_P^{-2} + U_P^3 R_n(X) U_P^{-3} + R_n(X_P)] \\ &= \bar{R}_n(X_P) , \end{aligned} \quad (6.32)$$

onde usamos o fato que $U_P^4 = 1$. Então a distribuição retardada \bar{R}_n é P -invariante.

Da observação temos que sempre é possível construir uma distribuição retardada P -invariante que representa à parte retardada da distribuição causal D_n . Portanto, a contribuição n -ésima da *Matriz-S*

$$T_n = \bar{R}_n - R_n' , \quad (6.33)$$

é P -invariante no sentido (6.20), o que prova a *invariância da teoria por reflexão espacial*.

- Bem, como mencionamos na seção anterior os termos contidos em T_n podem ser agrupados em classes de grafos

$$T_n^g(X) = \sum : \prod_{j=1}^{f_g} \bar{\psi}(x_{k_j}) t_g(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{j=1}^{f_g} \psi(x_{n_j}) : : \prod_{j=1}^{l_g} A_{\mu_{m_j}}(x_{m_j}) : . \quad (6.34)$$

E como as classes de grafos são independentes uns de outros, teremos que cada classe é P -invariante

$$U_P T_n^g(X) U_P^{-1} = T_n^g(X_P) . \quad (6.35)$$

Para classes de grafos com ordem singular $\omega \geq 0$ a distribuição retardada obtida por construção (\bar{R}_n) e por bipartição direta (R_n) não são iguais

$$\bar{R}_n^g(X) \neq R_n^g(X) . \quad (6.36)$$

A diferença está no *polinômio livre*, da ordem ω , contida na parte numérica, r_n^g , de R_n^g . Se queremos que a teoria seja diretamente* invariante por reflexão espacial, fazemos a seguinte imposição: "A parte numérica da distribuição retardada é invariante por reflexão espacial".

Essa imposição contribui para fixar as constantes dos polinômios livres, e é conhecida como *Condição de Normalização P*.

6.2.3 Inversão Temporal

Nesta seção consideraremos a transformação de inversão temporal: $x = (x_0, \vec{x}) \rightarrow x_T = (-x_0, \vec{x})$. Se a teoria é invariante por essa transformação, temos que demonstrar que o operador de dispersão S se transforma no operador inverso S^{-1}

$$U_T S [g] U_T^{-1} = S^{-1} [g_T] \quad \text{onde } g_T(x) = g(x_T) , \quad (6.37)$$

nessa expressão U_T é o operador que representa essa simetria no espaço de Hilbert, \mathcal{F} , das partículas assintoticamente livres.

Se essa relação é válida, então ao substituí-la na série perturbativa, da *Matriz-S*, devemos ter que:

$$U_T T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) U_T^{-1} = \tilde{T}_n(x_{1T}, \dots, x_{nT}) . \quad (6.38)$$

Se a distribuição T_n satisfaz essa relação se diz que é T -invariante. Portanto, o objetivo desta seção é provar que T_n é T -invariante $\forall n \in \mathbb{N}$.

Seguindo o método indutivo, devemos verificar (6.38) primeiro para $n = 1$. Para a teoria livre temos as seguintes relações

$$U_T j^\mu(x) U_T^{-1} = -g^{\mu\mu} j^\mu(x_T) \quad (6.39)$$

$$U_T A_\mu(x) U_T^{-1} = g^{\mu\mu} A_\mu(x_T) , \quad (6.40)$$

onde o operador antiunitário U_T representa essa simetria. Daqui temos que a distribuição correspondente à primeira ordem

$$U_T T_1(x) U_T^{-1} = ie [-g^{\mu\mu} j^\mu(x_T)] [g^{\mu\mu} A_\mu(x_T)] = -T_1(x_T) = \tilde{T}_1(x_T) , \quad (6.41)$$

é invariante por inversão temporal ou é T -invariante, similarmente para $\tilde{T}_1(x_T)$: $U_T \tilde{T}_1(x) U_T^{-1} = T_1(x_T)$. Com esses resultados e, seguindo o método indutivo, mostraremos que T_n também é T -invariante.

*E não passe pelo processo construtivo da observação prévia.

Partindo da hipótese indutiva, o conjunto $\{T_1, \dots, T_{n-1}, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{n-1}\}$ é T -invariante; temos que a distribuição intermediária A'_n se transforma como:

$$\begin{aligned} U_T A'_n(x_1, \dots, x_n) U_T^{-1} &= \sum_{P_2} U_T \tilde{T}_{n_1}(X) U_T^{-1} U_T T_{n-n_1}(Y, x_n) U_T^{-1} = \sum_{P_2} T_{n_1}(X) \tilde{T}_{n-n_1}(Y, x_n) \\ &= \tilde{R}'_n(x_{1T}, \dots, x_{nT}) , \end{aligned} \quad (6.42)$$

similarmente R'_n se transforma como

$$U_T R'_n(x_1, \dots, x_n) U_T^{-1} = \sum_{P_2} \tilde{T}_{n-n_1}(Y, x_n) T_{n_1}(X) = \tilde{A}'_n(x_{1T}, \dots, x_{nT}) . \quad (6.43)$$

Por definição, a distribuição retardada pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{P_2^0} T_{n-n_1}(Y, x_n) \tilde{T}_{n_1}(X) = R'_n + T_n \\ &= \sum_{P_2^0} T_{n_1}(X) \tilde{T}_{n-n_1}(Y, x_n) = -\tilde{R}'_n - \tilde{T}_n , \end{aligned} \quad (6.44)$$

onde na segunda linha usamos a propriedade $\sum_{P_2^0} \tilde{T}_{n-n_1}(X) T_{n_1}(Z \setminus X) = 0$. Similarmente pode-se obter que:

$$A_n = A'_n + T_n = -\tilde{A}'_n - \tilde{T}_n . \quad (6.45)$$

Com esses resultados, obtemos que a distribuição causal satisfaz a relação:

$$D_n \equiv R'_n - A'_n = R_n - A_n = -\tilde{R}'_n + \tilde{A}'_n . \quad (6.46)$$

O que implica que essa distribuição se transforma como

$$U_T D_n(x_1, \dots, x_n) U_T^{-1} = D_n(x_{1T}, \dots, x_{nT}) , \quad (6.47)$$

Se $\{R_n, A_n\}$ são as distribuições retardada e avançada de D_n , respectivamente, e como $U_T D_n(X) U_T^{-1} = D_n(X_T)$, teremos que:

$$U_T^3 D_n(X_T) U_T^{-3} = U_T^2 D_n(X) U_T^{-2} = U_T D_n(X_T) U_T^{-1} = D_n(X) . \quad (6.48)$$

Daí podemos afirmar que as seguintes quantidades

$$\{R_n(X), U_T A_n(X_T) U_T^{-1}, U_T^2 R_n(X) U_T^{-2}, U_T^3 A_n(X_T) U_T^{-3}\} , \quad (6.49)$$

representam a parte retardada, e

$$\{A_n(X), U_T R_n(X_T) U_T^{-1}, U_T^2 A_n(X) U_T^{-2}, U_T^3 R_n(X_T) U_T^{-3}\} , \quad (6.50)$$

a parte avançada.

Então, podemos, em particular, definir as seguintes partes retardada e avançada:

$$\bar{R}_n(X) = \frac{1}{4} [R_n(X) - U_T A_n(X_T) U_T^{-1} + U_T^2 R_n(X) U_T^{-2} - U_T^3 A_n(X_T) U_T^{-3}] \quad (6.51)$$

$$\bar{A}_n(X) = \frac{1}{4} [A_n(X) - U_T R_n(X_T) U_T^{-1} + U_T^2 A_n(X) U_T^{-2} - U_T^3 R_n(X_T) U_T^{-3}] \quad (6.52)$$

Ao realizar a transformação de inversão temporal nessas distribuições

$$U_T \bar{R}_n(X) U_T^{-1} = \frac{1}{4} [U_T R_n(X) U_T^{-1} - U_T^2 A_n(X_T) U_T^{-2} + U_T^3 R_n(X) U_T^{-3} - U_T^4 A_n(X_T) U_T^{-4}] \quad (6.53)$$

$$U_T \bar{A}_n(X) U_T^{-1} = \frac{1}{4} [U_T A_n(X) U_T^{-1} - U_T^2 R_n(X_T) U_T^{-2} + U_T^3 A_n(X) U_T^{-3} - U_T^4 R_n(X_T) U_T^{-4}] , \quad (6.54)$$

e como $U_T^4 = 1$, teremos que

$$U_T \bar{R}_n(X) U_T^{-1} = -\bar{A}_n(X_T) \quad (6.55)$$

$$U_T \bar{A}_n(X) U_T^{-1} = -\bar{R}_n(X_T) \quad (6.56)$$

Finalmente a contribuição n -ésima

$$\begin{aligned} U_T T_n(x_1, \dots, x_n) U_T^{-1} &= U_T \bar{R}_n(x_1, \dots, x_n) U_T^{-1} - U_T R'_n(x_1, \dots, x_n) U_T^{-1} \\ &= -\bar{A}_n(x_{1T}, \dots, x_{nT}) - \tilde{A}'_n(x_{1T}, \dots, x_{nT}) \\ &= \tilde{T}_n(x_{1T}, \dots, x_{nT}) \end{aligned} \quad (6.57)$$

é T -invariante, o que prova que a teoria é invariante pela inversão temporal.

6.3 Normalizabilidade da GQED_4

O termo *normalizável* introduzido na TPC faz referência a que cada termo da série perturbativa tem ordem singular finita e o número de termos com ordem singular não negativa é infinito; este conceito é equivalente ao conhecido como *renormalizável* ou *estritamente renormalizável* das teorias usuais. Similarmente ao caso usual, também é possível que o número de termos com ordem singular finita não-negativa seja finito ou pelo contrario que a ordem singular aumente com a ordem da série. Nesses casos, se diz que a teoria é *super-normalizável* e *não-normalizável*, respectivamente.

A proposta desta seção é determinar qual desses casos pertence a eletrodinâmica generalizada. O objetivo é encontrar a ordem singular de um grafo qualquer g :

$$T_n^g(x) =: \prod_{j=1}^{f_g/2} \bar{\psi}(x_{k_j}) t_g(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{j=1}^{f_g/2} \psi(x_{n_j}) : : \prod_{j=1}^{l_g} A_{\mu_{m_j}}(x_{m_j}) : , \quad (6.58)$$

onde l_g é o número de fótons livres , f_g é o número total de férmions livres e $t_g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a correspondente distribuição numérica. Para calcular a ordem singular procederemos via o

método indutivo, partindo da base:

	<i>Grafo</i>	<i>Ordem Singular</i>
<i>Espalhamento Möeller</i>	$T_2^{(1)} = -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) :$	-4
<i>Espalhamento Compton</i>	$T_2^{(2)} = -ie^2: \bar{\psi}(x_2) \not{A}(x_2) S^F(x_2 - x_1) \not{A}(x_1) \psi(x_1) :$ $T_2^{(3)} = -ie^2: \bar{\psi}(x_1) \not{A}(x_1) S^F(x_1 - x_2) \not{A}(x_2) \psi(x_2) :$	-1
<i>Auto-energia</i>	$T_2^{(4)} = i: \bar{\psi}(x_2) \Sigma(x_2 - x_1) \psi(x_1) :$ $T_2^{(5)} = i: \bar{\psi}(x_1) \Sigma(x_1 - x_2) \psi(x_2) :$	-1
<i>Polarização do Vácuo</i>	$T_2^{(6)} = -i: A_\mu(x_1) \Pi^{\mu\nu}(x_1 - x_2) A_\nu(x_2) :$	+2
<i>Grafo do Vácuo</i>	$T_2^{(7)} = i\Omega(x_1 - x_2)$	
<i>Vértice</i>	$T_3^{(Ver)} = -e^3: \bar{\psi}(x_1) V^\nu(x_1, x_2, x_3) \psi(x_2) : A_\nu(x_3)$	-2

6.3.1 Contração Geral

Sejam os grafos: G_1 de r -pontos e G_2 de s -pontos, indicados como segue

$$t_1(x_1 - x_r, \dots, x_{r-1} - x_r) \quad (6.59)$$

$$t_2(y_1 - y_s, \dots, y_{s-1} - y_s) , \quad (6.60)$$

respectivamente. Consideremos que os grafos G_1 e G_2 são unidos por κ -contrações de um mesmo campo, então o grafo da união terá a forma:

$$t_1(x_1 - x_r, \dots, x_{r-1} - x_r) \prod_{j=1}^{\kappa} D_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}(x_{r_j} - y_{s_j}) t_2(y_1 - y_s, \dots, y_{s-1} - y_s) , \quad (6.61)$$

onde $D_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}$ denota a parte numérica da contração dos operadores situados em x_{r_j} e y_{s_j} ; e a_{r_j} , b_{s_j} são os índices associados ao campo. É claro que para obter a ordem singular do grafo da união teríamos que obter-la via um processo de bipartição, mas como vimos no capítulo 2, a ordem singular não muda por bipartição, portanto, nossos resultados em nível de contrações serão válidos também para os grafos resultantes.

Denotemos a parte contraída (numérica) do conjunto como:

$$t(x_1 - x_r, \dots, x_{r-1} - x_r, y_1 - y_s, \dots, y_{s-1} - y_s) , \quad (6.62)$$

e definindo as variáveis:

$$\begin{aligned} \xi_i &= x_i - x_r , \quad i = 1, \dots, r-1 \\ \eta_k &= y_k - y_s , \quad k = 1, \dots, s-1 \\ \eta &= x_r - y_s . \end{aligned} \quad (6.63)$$

Por comparação obtemos que:

$$t(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \eta_1, \dots, \eta_{s-1}, \eta) = t_1(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}) \prod_{j=1}^{\kappa} D_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}(\xi_{r_j} - \eta_{s_j} + \eta) t_2(\eta_1, \dots, \eta_{s-1}). \quad (6.64)$$

Para encontrar a ordem singular do conjunto, $\omega(t)$, vamos usar a definição de ordem singular no espaço dos momentos dado pela TPC. Será útil introduzir as variáveis conjugadas:

$$\xi_i \rightarrow p_i ; \eta_k \rightarrow q_k ; \eta \rightarrow q. \quad (6.65)$$

Então a transformada de Fourier de t é obtida da relação

$$\begin{aligned} & \hat{t}(p_1, \dots, p_{r-1}, q_1, \dots, q_{s-1}, q) \\ &= (2\pi)^{-\frac{4(r+s-1)}{2}} \int d^{r-1}\xi d^{s-1}\eta d\eta \exp i \left(\sum_{i=1}^{r-1} p_i \xi_i + \sum_{k=1}^{s-1} q_k \eta_k + q\eta \right) \\ & t_1(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}) \prod_{j=1}^{\kappa} D_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}(\xi_{r_j} - \eta_{s_j} + \eta) t_2(\eta_1, \dots, \eta_{s-1}). \end{aligned} \quad (6.66)$$

Lembrando que a expansão de Fourier, em $3 + 1$, da distribuição numérica $D_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}$ é dada por

$$D_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}(\xi_{r_j} - \eta_{s_j} + \eta) = (2\pi)^{-\frac{4}{2}} \int dk_j \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}(k_j) \exp -ik_j (\xi_{r_j} - \eta_{s_j} + \eta), \quad (6.67)$$

e da identidade

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r-1} p_i \xi_i + \sum_{k=1}^{s-1} q_k \eta_k + q\eta &= \sum_{i \neq r_j} p_i \xi_i + \sum_{k \neq s_j} q_k \eta_k \\ &+ \sum_j (p_{r_j} - k_j) \xi_{r_j} + \sum_j (q_{s_j} + k_j) \eta_{s_j} \\ &+ \sum_j k_j (\xi_{r_j} - \eta_{s_j} + \eta) + \left(q - \sum_j k_j \right) \eta, \end{aligned} \quad (6.68)$$

Podemos escrever \hat{t} como segue

$$\begin{aligned} & \hat{t}(p_1, \dots, p_{r-1}, q_1, \dots, q_{s-1}, q) \\ &= (2\pi)^{-\frac{4(r-1)}{2}} \int d^{r-1}\xi \exp i \left(\sum_{i \neq r_j} p_i \xi_i + \sum_j (p_{r_j} - k_j) \xi_{r_j} \right) t_1(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}) \\ & (2\pi)^{-\frac{4(s-1)}{2}} \int d^{s-1}\eta \exp i \left(\sum_{k \neq s_j} q_k \eta_k + \sum_j (q_{s_j} + k_j) \eta_{s_j} \right) t_2(\eta_1, \dots, \eta_{s-1}) \\ & (2\pi)^{-\frac{4l}{2}} \int \prod_{j=1}^{\kappa} dk_j (2\pi)^{-\frac{4}{2}} \int d\eta \exp i \left[\left(q - \sum_j k_j \right) \eta \right] \prod_{j=1}^{\kappa} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}(k_j). \end{aligned} \quad (6.69)$$

Identificando as transformadas de Fourier de t_1 e t_2 obtemos que:

$$\begin{aligned} \hat{t}(p_1, \dots, p_{r-1}, q_1, \dots, q_{s-1}, q) &= \hat{t}_1(\dots, p_i, \dots, p_{r_j} - k_j, \dots) \hat{t}_2(\dots, q_k, \dots, q_{s_j} + k_j, \dots) \\ &\times (2\pi)^{-\frac{4\kappa}{2}} \int \prod_{j=1}^{\kappa} dk_j \delta\left(q - \sum_j k_j\right) \prod_{j=1}^{\kappa} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}(k_j). \end{aligned} \quad (6.70)$$

Lembrando que estamos procurando a função contadora de potências ρ onde a ordem singular é a potência desta, denotada como ω . Agindo de forma pragmática, temos por definição que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) \alpha^m \langle \hat{t}(p), \check{\varphi}(\alpha p) \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) \left\langle \hat{t}\left(\frac{p}{\alpha}\right), \check{\varphi}(p) \right\rangle = \langle \hat{t}_0(p), \check{\varphi}(p) \rangle, \quad (6.71)$$

onde φ é uma função de teste e, em nosso caso $m = 4(r + s - 1)$.

Seguindo essa definição, calculemos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{t}(p), \check{\varphi}(\alpha p) \rangle &= \int d^{r-1} p d^{s-1} q dq \hat{t}_1(\dots, p_i, \dots, p_{r_j} - k_j, \dots) \hat{t}_2(\dots, q_k, \dots, q_{s_j} + k_j, \dots) \\ &(2\pi)^{-\frac{4\kappa}{2}} \int \prod_{j=1}^{\kappa} dk_j \delta\left(q - \sum_j k_j\right) \prod_{j=1}^{\kappa} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}(k_j) \\ &\check{\varphi}(\dots, \alpha p_i, \dots, \alpha p_{r_j}, \dots, \alpha q_k, \dots, \alpha q_{s_j}, \dots, \alpha q). \end{aligned} \quad (6.72)$$

Fazendo as mudanças de variáveis

$$p_i \rightarrow p'_i, \quad p_{r_j} - k_j \rightarrow p'_{r_j}, \quad q_k \rightarrow q'_k, \quad q_{s_j} + k_j \rightarrow q'_{s_j}, \quad q \rightarrow q', \quad (6.73)$$

teremos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{t}(p), \check{\varphi}(\alpha p) \rangle &= \int d^{r-1} p' d^{s-1} q' dq' \hat{t}_1(\dots, p'_i, \dots, p'_{r_j}, \dots) \hat{t}_2(\dots, q'_k, \dots, q'_{s_j}, \dots) \\ &(2\pi)^{-\frac{4\kappa}{2}} \int \prod_{j=1}^{\kappa} dk_j \delta\left(q' - \sum_j k_j\right) \prod_{j=1}^{\kappa} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}(k_j) \\ &\check{\varphi}(\dots, \alpha p'_i, \dots, \alpha p'_{r_j} + \alpha k_j, \dots, \alpha q'_k, \dots, \alpha q'_{s_j} - \alpha k_j, \dots, \alpha q') \end{aligned} \quad (6.74)$$

Fazendo uma mudança de escala:

$$\begin{aligned} \langle \hat{t}(p), \check{\varphi}(\alpha p) \rangle &= \int \frac{d^{r-1} p'}{\alpha^{4(r-1)}} \frac{d^{s-1} q'}{\alpha^{4(s-1)}} \frac{dq'}{\alpha^4} \hat{t}_1\left(\dots, \frac{p'_i}{\alpha}, \dots, \frac{p'_{r_j}}{\alpha}, \dots\right) \hat{t}_2\left(\dots, \frac{q'_k}{\alpha}, \dots, \frac{q'_{s_j}}{\alpha}, \dots\right) \\ &(2\pi)^{-\frac{4\kappa}{2}} \int \frac{1}{\alpha^{4\kappa}} \prod_{j=1}^{\kappa} dk_j \delta\left(\frac{q' - \sum_j k_j}{\alpha}\right) \prod_{j=1}^{\kappa} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{+}\left(\frac{k_j}{\alpha}\right) \\ &\check{\varphi}\left(\dots, p'_i, \dots, p'_{r_j} + k_j, \dots, \dots, q'_k, \dots, q'_{s_j} - k_j, \dots, q'\right), \end{aligned} \quad (6.75)$$

e levando em conta que

$$\delta\left(\frac{k}{\alpha}\right) = \alpha^4 \delta(k) \quad (6.76)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{+}\left(\frac{k}{\alpha}\right) = \alpha^{-e} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{0(+)}(k), \quad (6.77)$$

onde $\hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{0(+)}$ é uma distribuição finita não nula e, ϱ é a ordem singular de $\hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}$; então quando $\alpha \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \langle \hat{t}(p), \check{\varphi}(\alpha p) \rangle &= \frac{1}{\alpha^m} \int d^{r-1} p' d^{s-1} q' dq' \hat{t}_1 \left(\dots, \frac{p'_i}{\alpha}, \dots, \frac{p'_{r_j}}{\alpha}, \dots \right) \hat{t}_2 \left(\dots, \frac{q'_k}{\alpha}, \dots, \frac{q'_{s_j}}{\alpha}, \dots \right) \\ &= (2\pi)^{-\frac{4\kappa}{2}} \int \frac{1}{\alpha^{4\kappa}} \prod_{j=1}^{\kappa} dk_j \alpha^4 \delta \left(q' - \sum_j k_j \right) \alpha^{-\kappa\varrho} \prod_{j=1}^{\kappa} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{0(+)}(k) \\ &\quad \check{\varphi} \left(\dots, p'_i, \dots, p'_{r_j} + k_j, \dots, q'_k, \dots, q'_{s_j} - k_j, \dots, q' \right), \end{aligned} \quad (6.78)$$

ou

$$\begin{aligned} &\langle \hat{t}(p), \check{\varphi}(\alpha p) \rangle \\ &= \frac{1}{\alpha^{m-4}} \frac{1}{\alpha^{(4+\varrho)\kappa}} \int d^{r-1} p' d^{s-1} q' dq' \hat{t}_1 \left(\dots, \frac{p'_i}{\alpha}, \dots, \frac{p'_{r_j}}{\alpha}, \dots \right) \hat{t}_2 \left(\dots, \frac{q'_k}{\alpha}, \dots, \frac{q'_{s_j}}{\alpha}, \dots \right) \\ &\quad (2\pi)^{-\frac{4\kappa}{2}} \int \prod_{j=1}^{\kappa} dk_j \delta \left(q' - \sum_j k_j \right) \prod_{j=1}^{\kappa} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{0(+)}(k, m_a^2) \\ &\quad \check{\varphi} \left(\dots, p'_i, \dots, p'_{r_j} + k_j, \dots, \dots, q'_k, \dots, q'_{s_j} - k_j, \dots, q' \right). \end{aligned} \quad (6.79)$$

Reordenando e multiplicando pelas funções contadoras de potência $\rho_1(\alpha)$, $\rho_2(\alpha)$ correspondentes a t_1 e t_2 respectivamente, obteremos que:

$$\begin{aligned} &[\alpha^{-4} \rho_1(\alpha) \rho_2(\alpha)] \alpha^m \langle \hat{t}(p), \check{\varphi}(\alpha p) \rangle \\ &= \frac{1}{\alpha^{(4+\varrho)\kappa}} \int d^{r-1} p' d^{s-1} q' dq' \\ &\quad \cdot \left[\rho_1(\alpha) \hat{t}_1 \left(\dots, \frac{p'_i}{\alpha}, \dots, \frac{p'_{r_j}}{\alpha}, \dots \right) \right] \left[\rho_2(\alpha) \hat{t}_2 \left(\dots, \frac{q'_k}{\alpha}, \dots, \frac{q'_{s_j}}{\alpha}, \dots \right) \right] \\ &\quad (2\pi)^{-\frac{4\kappa}{2}} \int \prod_{j=1}^{\kappa} dk_j \delta \left(q' - \sum_j k_j \right) \prod_{j=1}^{\kappa} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)}(k) \\ &\quad \check{\varphi} \left(\dots, p'_i, \dots, p'_{r_j} + k_j, \dots, \dots, q'_k, \dots, q'_{s_j} - k_j, \dots, q' \right). \end{aligned} \quad (6.80)$$

Sabendo que para os grafos G_1 e G_2 temos a existência dos limite

$$\rho(\alpha) \hat{t}_i \left(\frac{p}{\alpha} \right) \rightarrow \hat{t}_{i,0}(p) \quad \text{quando } \alpha \rightarrow 0^+, \quad (6.81)$$

então

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \rightarrow 0} [\alpha^{-4} \rho_1(\alpha) \rho_2(\alpha)] \alpha^m \langle \hat{t}(p), \check{\varphi}(\alpha p) \rangle \\ &= \alpha^{-(4+\varrho)\kappa} \int d^{r-1} p' d^{s-1} q' dq' \hat{t}_{1,0} \left(\dots, p'_i, \dots, p'_{r_j}, \dots \right) \hat{t}_{2,0} \left(\dots, q'_k, \dots, q'_{s_j}, \dots \right) \\ &\quad (2\pi)^{-\frac{4\kappa}{2}} \int \prod_{j=1}^{\kappa} dk_j \delta \left(q' - \sum_j k_j \right) \prod_{j=1}^{\kappa} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{0(+)}(k) \\ &\quad \check{\varphi} \left(\dots, p'_i, \dots, p'_{r_j} + k_j, \dots, \dots, q'_k, \dots, q'_{s_j} - k_j, \dots, q' \right). \end{aligned} \quad (6.82)$$

Voltando às variáveis iniciais (6.73)

$$\begin{aligned}
& \lim_{\alpha \rightarrow 0} [\alpha^{-4} \rho_1(\alpha) \rho_2(\alpha)] \alpha^m \langle \hat{t}(p), \check{\varphi}(\alpha p) \rangle \\
= & \alpha^{-(4+\varrho)\kappa} \int d^{r-1} p d^{s-1} q d q (2\pi)^{-\frac{4\kappa}{2}} \\
& \int \prod_{j=1}^{\kappa} d k_j \hat{t}_{1,0}(\dots, p_i, \dots, p_{r_j} - k_j, \dots) \hat{t}_{2,0}(\dots, q_k, \dots, q_{s_j} + k_j, \dots) \delta\left(q' - \sum_j k_j\right) \\
& \cdot \prod_{j=1}^{\kappa} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{0(+)}(k) \check{\varphi}(\dots, p_i, \dots, p_{r_j}, \dots, \dots, q_k, \dots, q_{s_j}, \dots, q) \quad (6.83)
\end{aligned}$$

Dessa relação podemos afirmar a existência do limite

$$\begin{aligned}
& \lim_{\alpha \rightarrow 0} [\alpha^{(4+\varrho)\kappa-4} \rho_1(\alpha) \rho_2(\alpha)] \hat{t}\left(\dots, \frac{p_i}{\alpha}, \dots, \frac{q_k}{\alpha}, \dots, \frac{q}{\alpha}\right) \\
= & (2\pi)^{-\frac{4\kappa}{2}} \int \prod_{j=1}^{\kappa} d k_j \hat{t}_{1,0}(\dots, p_i, \dots, p_{r_j} - k_j, \dots) \hat{t}_{2,0}(\dots, q_k, \dots, q_{s_j} + k_j, \dots) \\
& \delta\left(q' - \sum_j k_j\right) \prod_{j=1}^{\kappa} \hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{0(+)}(k) . \quad (6.84)
\end{aligned}$$

E, então, a função contagem de potências da união é proporcional a

$$\rho(\alpha) \sim \alpha^{(4+\varrho)\kappa-4} \rho_1(\alpha) \rho_2(\alpha) . \quad (6.85)$$

Para as funções contagem de potências ρ_1, ρ_2

$$\rho_1(\alpha) \sim \alpha^{\omega(t_1)} ; \rho_2(\alpha) \sim \alpha^{\omega(t_2)} \quad (6.86)$$

Portanto, a função contagem de potências da união tem a forma

$$\rho(\alpha) \sim \alpha^{(4+\varrho)\kappa-4+\omega(t_1)+\omega(t_2)} . \quad (6.87)$$

Finalmente, podemos afirmar que a ordem singular da contração dos grafos G_1 e $G_2 : G$. Sendo a ordem singular de G_1 e $G_2 : \omega(G_1)$ e $\omega(G_2)$ respectivamente, teremos que ordem singular de G é

$$\omega(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2) + (4 + \varrho)\kappa - 4 , \quad (6.88)$$

lembrando que κ é o número de contrações, e ϱ a ordem singular da contração.

6.3.2 Normalizabilidade

Calcularemos a ordem singular para a união entre os grafos G_1 e G_2 por contrações de operadores de campo férmíonicos e eletromagnéticos.

*) Para contrações fermiônicas temos $\hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)} = S^{(+)}$ que é o propagador PF fermiônico com ordem singular $\omega(S^{(+)}) = -1$; então de (6.88) e, considerando F contrações fermiônicas teremos que:

$$\omega(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2) + 3F - 4. \quad (6.89)$$

*) Para contrações de campos de Podolsky temos $\hat{D}_{a_{r_j} b_{s_j}}^{(+)} = \hat{D}_{\mu_{r_j} \nu_{s_j}}^{(+)}$ que é o propagador PF eletromagnético com ordem singular $\omega(\hat{D}_{\mu_{r_j} \nu_{s_j}}^{(+)}) = -4$; então de (6.88) e, considerando L contrações eletromagnéticas teremos que:

$$\omega(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2) - 4. \quad (6.90)$$

*) Em conjunto para F contrações fermiônicas e L eletromagnéticas, em forma simultânea, teremos que:

$$\omega(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2) + 3F - 4, \quad (6.91)$$

vemos que a ordem singular resultante não depende do número de contrações eletromagnéticas.

Usando a relação (6.91), procuraremos uma fórmula para encontrar a ordem singular de um grafo de n -pontos, tal que seja uma função linear do número de pontos (n), do número de campos fermiônicos livres (f) e do número campos de Podolsky livres (l):

$$\omega_n = an + bf + cl + d, \quad (6.92)$$

onde a, b, c, d são constantes.

Calcularemos essas constantes, usando o resultado (6.91), sejam os grafos de n_1 -pontos e n_2 -pontos com ordens singulares

$$\omega_{n_1} = an_1 + bf_1 + cl_1 + d \quad (6.93)$$

$$\omega_{n_2} = an_2 + bf_2 + cl_2 + d. \quad (6.94)$$

Tal que $n = n_1 + n_2$ e se temos F contrações de pares fermiônicos e L contrações de campos de Podolsky entre esses grafos, então segundo (6.91), teremos que

$$\omega_n = an + b(f_1 + f_2) + c(l_1 + l_2) + 2d + 3F - 4. \quad (6.95)$$

E por hipótese

$$\omega_n = an + b(f_1 + f_2 - 2F) + c(l_1 + l_2 - 2L) + d. \quad (6.96)$$

Comparando essas expressões, obtemos que $d = 4$, $b = -\frac{3}{2}$ e $c = 0$. Portanto:

$$\omega_n = 4 + an - \frac{3}{2}f. \quad (6.97)$$

Para fixar o fator a consideremos em particular o grafo associado à dispersão Moeller, $f = 4$ e $n = 2$, que tem ordem singular -4 , então encontraremos que: $a = -1$. Finalmente, obtemos que a orden singular do grafo de n pontos vem dado por:

$$\omega_n = 4 - n - \frac{3}{2}f. \quad (6.98)$$

Desse resultado deduzimos as seguintes conclusões:

* De (6.98) é claro que os grafos de mais de 4-pontos são distribuições regulares (ou finitos UV), e então concluímos que **a GQED₄ é uma teoria super-normalizável**. A análise se reduz aos grafos de até quatro pontos.

* Encontremos quais são os possíveis grafos singulares:

1. Para $n = 4$ temos que

$$\omega_4 = -\frac{3}{2}f, \quad (6.99)$$

portanto, os únicos casos singulares (ou infinitos UV) são quando $f = 0$ isto é quando todos os férmions estão contraídos, os casos possíveis são: a polarização do vácuo de 4-pontos (a *2-loops* e os irreduzíveis) e o espalhamento luz-luz, ambos com ordem singular $\omega = 0$.

2. Para $n = 3$ temos que

$$\omega_3 = 1 - \frac{3}{2}f, \quad (6.100)$$

daqui os casos singulares são dados quando $f = 0$, portanto, o único caso possível seria o grafo com tres campos eletromagnéticos livres, mas do teorema de Furry ele não contribui à série perturbativa.

3. Para $n = 2$ temos que

$$\omega_2 = 2 - \frac{3}{2}f, \quad (6.101)$$

daqui os casos singulares são dados quando $f = 0$, portanto, os grafos singulares são: a polarização do vácuo a *1-loop* e o grafo do vácuo, ambos com ordem singular $\omega = 2$.

4. Para $n = 1$ temos que

$$\omega_1 = 3 - \frac{3}{2}(2) = 0, \quad (6.102)$$

é o caso do vértice fundamental ou termo base da TPC, que não é analisado na TPC mas assumir que ele tem ordem singular nulo é de grande utilidade, por exemplo, usando

a relação indutiva (6.91) deduzimos rapidamente a ordem singular dos grafos de 2 e 3 pontos. Por exemplo, encontramos que a ordem do grafo do vácuo para $n = 2$, é $\omega_2^{GV} = 2$.

6.4 Simetria de Gauge

Nesta seção, estudaremos as condições necessárias para que a eletrodinâmica de Podolsky seja invariante pela transformação

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) , \quad (6.103)$$

onde $\Lambda(x)$ pode ser considerada um operador de campo ou uma função, nós consideraremos essa última por conveniência para nossos objetivos.

Na Teoria de Perturbação Causal a invariância da GQED_4 implica na invariância da série perturbativa da *Matriz-S*

$$S[g] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) g(x_1) g(x_2) \dots g(x_n) , \quad (6.104)$$

ordem a ordem. Por exemplo se $S'_1[g]$ é a contribuição transformada na primeira ordem, ela terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} S'_1[g] &= ie \int dx : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A'_\mu(x) g(x) \\ &= ie \int dx : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \left[A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \right] g(x) \\ &= ie \int dx : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x) g(x) - i \int dx : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \partial_\mu \Lambda(x) g(x) \\ S_1[g] &= ie \int dx : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x) g(x) - i \left[: \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \Lambda(x) g(x) \right]_{x^\mu=-\infty}^{x^\mu=+\infty} \\ &\quad + i \int dx \partial_\mu [: \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :] \Lambda(x) g(x) \\ &\quad + i \int dx : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \Lambda(x) \partial_\mu g(x) . \end{aligned} \quad (6.105)$$

Considerando os operadores de campo livre nulos no infinito ($x^\mu = \pm\infty$), obteremos que:

$$S_1[g] = S'_1[g] + i \int dx \partial_\mu [: \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :] \Lambda(x) g(x) + i \int dx : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \Lambda(x) \partial_\mu g(x) . \quad (6.106)$$

Então para manter essa contribuição invariante de gauge, temos que impor que:

$$\partial_\mu [: \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :] = 0 ; \quad \partial_\mu g(x) = 0 . \quad (6.107)$$

A primeira condição é conhecida como a conservação da corrente $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$, onde $j^\mu = e: \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :$ é a corrente. A segunda condição pode ser garantida no limite adiabático $g \rightarrow 1$. Consideraremos essa última como uma primeira condição na invariância de gauge, portanto, teremos que estudar a transformação de gauge de cada uma das contribuições:

$$S_n[1] = \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) . \quad (6.108)$$

6.4.1 Transformação de Gauge

Para encontrar a expressão de como se transforma $S_n[1]$ pela transformação (6.103) teremos que propor uma forma geral para a distribuição T_n . Como nessa transformação os operadores eletromagnéticos são de especial importância, em princípio, consideraremos, explicitamente, todas as possíveis contribuições a T_n da seguinte forma:

$$T_n = \sum_{l=0}^n \sum_{g_l} : \prod_{j=1}^{f_g} \bar{\psi}(x_{i_j}) \left[\mu_{m_1} \dots \mu_{m_l} t_{n_1 \dots n_{f_g}}^{i_1 \dots i_{f_g}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right] \prod_{j=1}^{f_g} \psi(x_{n_j}) : : \prod_{j=1}^l A_{\mu_{m_j}}(x_{m_j}) : . \quad (6.109)$$

Para nossa finalidade imediata podemos considerar a seguinte versão simplificada dessa expressão:

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l=0}^n \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \dots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : , \quad (6.110)$$

onde $\mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}$ contém os operadores fermiônicos não contraídos e a distribuição numérica. É na parte numérica que é possível encontrar operadores de campo eletromagnéticos contraídos, e como Λ é uma função, as contrações

$$[A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(y)] = [A^{\mu(-)}(x), A^{\nu(+)}(y)] = iD^{\mu\nu(+)}(x-y) , \quad (6.111)$$

são invariantes de gauge. Portanto, se $\mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}$ é a versão transformada de $\mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}$, teremos que:

$$\mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} = \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} . \quad (6.112)$$

Daqui a distribuição transformada T_n^r terá a seguinte forma:

$$T_n^r(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l=0}^n \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) : A'_{\mu_1}(x_{k_1}) \dots A'_{\mu_j}(x_{k_j}) \dots A'_{\mu_l}(x_{k_l}) : . \quad (6.113)$$

Explicitando a transformação do campo A_{μ_j}

$$\begin{aligned}
& T'_n(x_1, \dots, x_n) \\
&= \sum_{l=0}^n \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \cdots \left[A_{\mu_j}(x_{k_j}) - \frac{1}{e} \partial_{\mu_j} \Lambda(x_{k_j}) \right] \cdots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : \\
&= \sum_{l=0}^n \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \cdots A_{\mu_j}(x_{k_j}) \cdots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : \\
&\quad - \frac{1}{e} \sum_{l=0}^n \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \cdots \partial_{\mu_j} \Lambda(x_{k_j}) \cdots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : \tag{6.114}
\end{aligned}$$

Então, a contribuição transformada S'_n [1] pode ser expressa como segue

$$\begin{aligned}
S'_n &= \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^n \int dx_1 \dots dx_n \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \cdots A_{\mu_j}(x_{k_j}) \cdots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : \\
&\quad - \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^n \frac{1}{e} \int dx_1 \dots dx_n \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \cdots \partial_{\mu_j} \Lambda(x_{k_j}) \cdots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^n \int dx_1 \dots dx_n \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \cdots A_{\mu_j}(x_{k_j}) \cdots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : \\
&\quad + \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^n \frac{1}{e} \int dx_1 \dots dx_n [\partial_{\mu_j} \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n)] : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \cdots \Lambda(x_{k_j}) \cdots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : \\
&\quad - \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^n \frac{1}{e} \int dx_1 \dots dx_{k_j-1} dx_{k_j+1} \dots dx_n \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) \\
&\quad \quad \quad \times : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \cdots \Lambda(x_{k_j}) \cdots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : \Big|_{x_{k_j}^{\mu_j} = -\infty}^{x_{k_j}^{\mu_j} = +\infty} \tag{6.115}
\end{aligned}$$

Lembrando que estamos considerando os operadores de campo livre nulos no infinito ($x_{k_j}^{\mu_j} = \pm\infty$), obteremos a contribuição de ordem n à *Matriz-S* que se transforma explicitamente no campo A_{μ_j} como segue:

$$\begin{aligned}
S'_n[1] &= \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^n \int dx_1 \dots dx_n \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \cdots A_{\mu_j}(x_{k_j}) \cdots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : \\
&\quad + \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^n \frac{1}{e} \int dx_1 \dots dx_n [\partial_{\mu_j} \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n)] : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \cdots \Lambda(x_{k_j}) \cdots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : \dots
\end{aligned}$$

(6.116)

6.4.2 Condição de Simetria

Como mencionamos anteriormente a condição de simetria é dada ordem a ordem, isto é $S'_n[1] = S_n[1]$, $\forall n$. A relação (6.116) implica que:

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_j}^{\mu_j}} \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \forall j, \forall l \text{ e } \forall n, \tag{6.117}$$

é uma condição suficiente para a invariância. A demonstração dessa relação será desenvolvida usando o método indutivo.

Para $n = 1$, temos que:

$$T_1(x_1) = \mathcal{T}_1^\mu(x_1) A_\mu(x_1) , \quad (6.118)$$

onde $\mathcal{T}_1^\mu(x_1) = ie : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : .$ No início desta seção vimos que:

$$\partial_\mu \mathcal{T}_1^\mu(x_1) = 0 . \quad (6.119)$$

Vamos supor que (6.117) seja válida para $m \leq n - 1$, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_j}^{\mu_j}} \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_m) = 0 , \quad \forall j, \forall l \text{ e } \forall m \leq n - 1 . \quad (6.120)$$

Lembrando que as distribuições intermediárias de ordem n são definidas como:

$$R'_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_2} T_{n-n_1}(Y, x_n) \tilde{T}_{n_1}(X) ; A'_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{n-n_1}(Y, x_n) . \quad (6.121)$$

Teremos então de (6.120) e, junto com as condições de contorno, a seguinte integral da distribuição causal D_n

$$\frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n D_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n [R'_n - A'_n](x_1, \dots, x_n) , \quad (6.122)$$

é invariante de gauge. Se escrevemos D_n como:

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l=0}^n \mathcal{D}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \dots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : . \quad (6.123)$$

A condição de simetria nos leva a que:

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_j}^{\mu_j}} \mathcal{D}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) = 0 , \quad \forall j, \forall l . \quad (6.124)$$

Como queremos mostrar que $S_n[1]$ é invariante, vemos que quando escrevemos T_n como $T_n = R_n - R'_n$ teremos que

$$\begin{aligned} S_n[1] &= \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n [R_n - R'_n](x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n R_n(x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n R'_n(x_1, \dots, x_n) . \end{aligned} \quad (6.125)$$

Como a segunda integral é invariante, concluímos que a primeira também deve ser invariante. Ao escrever a distribuição retardada R_n como:

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l=0}^n \mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_n) : A_{\mu_1}(x_{k_1}) \dots A_{\mu_l}(x_{k_l}) : . \quad (6.126)$$

Encontramos que a demonstração se reduz a provar que:

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_j}^{\mu_j}} \mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \forall j, \forall l. \quad (6.127)$$

Até aqui temos claro que provar esta relação demonstraria a invariância de gauge. Para começar, observemos que como R_n é a parte retardada de D_n então teremos que:

$$\mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} = \begin{cases} \mathcal{D}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} & \text{em } \Gamma_{n-1}^+(x_n) \\ 0 & \text{em } (\Gamma_{n-1}^+(x_n))^c \end{cases}. \quad (6.128)$$

Do resultado (6.124) obtido para a distribuição causal, teremos que a condição (6.127) é satisfeita

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_j}^{\mu_j}} \mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{em } (\Gamma_{n-1}^+(x_n) \setminus \{(x_1, \dots, x_n)\}) \cup (\Gamma_{n-1}^+(x_n))^c, \quad (6.129)$$

salvo na origem (x_n, \dots, x_n) . Na origem $o \equiv (x_n, \dots, x_n)$ somente podemos afirmar que:

$$Supp \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{k_j}^{\mu_j}} \mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n) \right\} \subseteq \{o\}. \quad (6.130)$$

Para uma melhor análise, neste ponto, escrevemos R_n de forma similar à expressão (6.109) de T_n e então temos que:

$$R_n = \sum_{l=0}^n \sum_{g_l} : \prod_{j=1}^{f_g} \bar{\psi}(x_{i_j}) \left[\mu_{m_1} \dots \mu_{m_l} r_{n_1 \dots n_{f_g}}^{i_1 \dots i_{f_g}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right] \prod_{j=1}^{f_g} \psi(x_{n_j}) : : \prod_{j=1}^l A_{\mu_{m_j}}(x_{m_j}) : . \quad (6.131)$$

Daqui podemos escrever $\mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l}$ como uma soma de contribuições com número de férmions fixos:

$$\mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n) = \sum_{f=0}^{2n} [{}^f \mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n)], \quad (6.132)$$

onde:

$${}^f \mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{g_l} : \prod_{j=1}^{f_g} \bar{\psi}(x_{i_j}) \left[\mu_{m_1} \dots \mu_{m_l} r_{n_1 \dots n_{f_g}}^{i_1 \dots i_{f_g}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right] \prod_{j=1}^{f_g} \psi(x_{n_j}) : . \quad (6.133)$$

Sendo as contribuições com diferente número de linhas de férmions livres e independentes, teremos que (6.130) implica que

$$Supp \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{k_j}^{\mu_j}} [{}^f \mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n)] \right\} \subseteq \{o\}. \quad (6.134)$$

Da definição e por um teorema da teoria de distribuições* temos que:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_{k_j}^{\mu_j}} [{}^f \mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n)] \\ &= \sum_{g_{f,l}} : \prod_{j=1}^f \bar{\psi}(x_{i_j}) \left[\sum_{|a|=0}^{\omega(g_{f,l})+1} C_a^{g_{f,l}} D^a \delta(x_1 - x_n) \cdots \delta(x_{n-1} - x_n) \right] \prod_{j=1}^f \psi(x_{n_j}) : , \end{aligned} \quad (6.135)$$

onde a soma é para todo grafo retardado com $2f$ férmions e l bósons externos, e $\omega(g_{f,l})$ é a ordem singular do grafo retardado $g_{f,l}$. Portanto, vemos que a condição de invariância é quase satisfeita.

Antes de continuarmos com a análise desse resultado, vamos esclarecer a obtenção deste resultado:

- Na expressão (6.135) não consideramos termos derivativos dos férmions, pelo fato que eles são absorvidos. Vamos supor que temos num dos grafos retardados a seguinte situação: no ponto x_n temos o operador eletromagnético $A_{\mu_n}(x_n)$ e o operador $\bar{\psi}(x_n)$, então esse vértice está conetado ao resto do grafo no ponto x_i por uma linha fermiônica que pode ser representada por $S_R(x_n - x_i)$, $S_A(x_n - x_i)$ ou $S_F(x_n - x_i)$, então da definição (6.133) teremos que

$${}^f \mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n) = : \prod_{j=1}^{f-1} \bar{\psi}(x_{i_j}) [\bar{\psi}(x_n) S_R(x_n - x_i) \times \cdots] \prod_{j=1}^f \psi(x_{n_j}) : + \cdots , \quad (6.136)$$

escolhemos em particular S_R , o resultado não mudará com outra escolha. Daí a derivada dessa expressão na variável $x_n^{\mu_n}$ é

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_n^{\mu_n}} [{}^f \mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n)] \\ &= : \prod_{j=1}^{f-1} \bar{\psi}(x_{i_j}) \frac{\partial}{\partial x_n^{\mu_n}} [\bar{\psi}(x_n) \gamma^{\mu_n} S_R(x_n - x_i) \times \cdots] \prod_{j=1}^f \psi(x_{n_j}) : + \cdots \\ &= : \prod_{j=1}^{f-1} \bar{\psi}(x_{i_j}) \left[\frac{\partial}{\partial x_n^{\mu_n}} [\bar{\psi}(x_n) \gamma^{\mu_n} S_R(x_n - x_i)] \times (\cdots) \right] \prod_{j=1}^f \psi(x_{n_j}) : \\ &+ : \prod_{j=1}^{f-1} \bar{\psi}(x_{i_j}) \left[\bar{\psi}(x_n) \gamma^{\mu_n} S_R(x_n - x_i) \times \frac{\partial}{\partial x_n^{\mu_n}} (\cdots) \right] \prod_{j=1}^f \psi(x_{n_j}) : + \cdots \end{aligned} \quad (6.137)$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x_n^{\mu_n}} [\bar{\psi}(x_n) \gamma^{\mu_n} S_R(x_n - x_i)] = i \bar{\psi}(x_n) \delta(x_n - x_i) , \quad (6.138)$$

*Vide o apêndice A.

(válido também para S_A e S_F). Então:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_n^{\mu_n}} [{}^f \mathcal{R}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n)] \\
&= : \prod_{j=1}^{f-1} \bar{\psi}(x_{i_j}) \bar{\psi}(x_n) [i\delta(x_n - x_i) \times (\dots)] \prod_{j=1}^f \psi(x_{n_j}) : \\
&+ : \prod_{j=1}^{f-1} \bar{\psi}(x_{i_j}) \bar{\psi}(x_n) \left[\gamma^{\mu_n} S_R(x_n - x_i) \times \frac{\partial}{\partial x_n^{\mu_n}} (\dots) \right] \prod_{j=1}^f \psi(x_{n_j}) : + \dots \quad (6.139)
\end{aligned}$$

Vemos assim que os termos derivativos dos férmions são absorvidos, um processo similar pode-se fazer para o férmion $\psi(x_n)$.

Continuando com a análise vemos que como $T_n = R_n - R'_n$ o resultado é transferido a T_n , introduzindo a definição

$${}^f \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{g_l} : \prod_{j=1}^{f_g} \bar{\psi}(x_{i_j}) \left[\mu_{m_1} \dots \mu_{m_l} r_{n_1 \dots n_{f_g}}^{i_1 \dots i_{f_g}} (x_1, x_2, \dots, x_n) \right] \prod_{j=1}^{f_g} \psi(x_{n_j}) : . \quad (6.140)$$

Obteremos que:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_{k_j}^{\mu_j}} [{}^f \mathcal{T}_{k_1 \dots k_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (x_1, \dots, x_n)] \\
&= \sum_{g_{f,l}} : \prod_{j=1}^f \bar{\psi}(x_{i_j}) \left[\sum_{|a|=0}^{\omega(g_{f,l})+1} C_a^{g_{f,l}} D^a \delta(x_1 - x_n) \dots \delta(x_{n-1} - x_n) \right] \prod_{j=1}^f \psi(x_{n_j}) : , \quad (6.141)
\end{aligned}$$

onde a soma é para todo grafo com f férmions e l bósons externos, e $\omega(g_{f,l})$ é a ordem singular do grafo $g_{f,l}$. Se os termos da soma são não nulos eles seriam conhecidos como *anomalias*, porque não satisfizeriam a invariância de gauge.

Analisemos cada uma das possíveis anomalias:

Para $n=5$: Neste caso, o grafo tem ordem singular $\omega_5 = -1 - \frac{3}{2}f$, então os únicos casos com anomalias possíveis teriam $f = 0 \rightarrow \omega_5 = -1$. E como as contrações eletromagnéticas são em pares, teremos sempre uma quantidade ímpar de operadores eletromagnéticos livres, e pelo teorema de Furry, não contribui. Portanto, os grafos de 5-pontos não possuem anomalias.

Para $n=4$: Neste caso, o grafo tem ordem singular $\omega_4 = -\frac{3}{2}f$, então o únicos casos com anomalias possíveis é quando $f = 0 \rightarrow \omega_4 = 0$. Daqui temos duas contribuições possíveis: a polarização do vácuo de 4-pontos (a 2-loops e as irreduzíveis) e o espalhamento luz-luz. Sendo a configuração desses casos diferentes, podemos analisar cada um em forma independente.

1. Polarização do Vácuo de 4-pontos.- Neste caso temos dois operadores eletromagnéticos livres, supondo-os em x_1 e x_4 , neste caso não temos férmions externos, então a quantidade

$${}^0\mathcal{T}_{VP}^{\mu_1\mu_4}(x_1, \dots, x_4) = \sum_{g_{0,2}} t^{\mu_1\mu_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \Pi^{\mu_1\mu_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) , \quad (6.142)$$

é uma distribuição numérica. Do resultado (6.141), a derivada com relação a x_1 é

$$\begin{aligned} \partial_{\mu_1} [{}^0\mathcal{T}_{VP}^{\mu_1\mu_4}(x_1, \dots, x_4)] &= \sum_{|a|=0}^1 C_a^{gf,l} D^a \delta(x_1 - x_4) \cdots \delta(x_3 - x_4) \\ &= \sum_{k=1}^3 C_{4k} \partial_k^{\mu_4} \delta(x_1 - x_4) \cdots \delta(x_3 - x_4) . \end{aligned} \quad (6.143)$$

omitimos o termo constante por não ser invariante por Lorentz. Como $\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_4} [{}^0\mathcal{T}_{VP}^{\mu_1\mu_4}]$ é simétrica com relação a (x_1, x_4) , então:

$$\partial_{\mu_1} [{}^0\mathcal{T}_{VP}^{\mu_1\mu_4}(x_1, \dots, x_4)] = C \partial_{\mu_1} [\delta(x_1 - x_4) \cdots \delta(x_3 - x_4)] . \quad (6.144)$$

Daqui vemos que esta anomalia pode ser cancelada via a normalização de $\Pi^{\mu_1\mu_4}$, o mesmo para x_4 . Portanto:

$$\partial_{\mu_j} \Pi^{\mu_1\mu_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 , \quad j = 1, 4 . \quad (6.145)$$

2. Espalhamento luz-luz.- Neste caso, temos os quatro operadores bosônicos livres, e não temos férmions externos, então, a quantidade

$${}^0\mathcal{T}_{FF}^{\mu_1 \dots \mu_4}(x_1, \dots, x_4) = t^{\mu_1 \dots \mu_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) , \quad (6.146)$$

é uma distribuição numérica. Do resultado (6.141), a derivada com relação a x_1 é

$$\begin{aligned} \partial_{\mu_1} [{}^0\mathcal{T}_{FF}^{\mu_1 \dots \mu_4}(x_1, \dots, x_4)] &= \sum_{|a|=0}^1 C_a^{gf,l} D^a \delta(x_1 - x_4) \cdots \delta(x_3 - x_4) \\ &= \left[\sum_{k=1}^3 (C_{2k} \partial_k^{\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} + C_{3k} \partial_k^{\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} + C_{4k} \partial_k^{\mu_4} g^{\mu_2\mu_3}) \right] \\ &\quad \times \delta(x_1 - x_4) \cdots \delta(x_3 - x_4) . \end{aligned} \quad (6.147)$$

Como $\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \partial_{\mu_4} [{}^0\mathcal{T}_{SF}^{\mu_1 \dots \mu_4}]$ é simétrica com relação a (x_1, \dots, x_4) , então:

$$\begin{aligned} &\partial_{\mu_1} [{}^0\mathcal{T}_{FF}^{\mu_1 \dots \mu_4}(x_1, \dots, x_4)] \\ &= C \partial_{\mu_1} [(g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} + g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} + g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3}) \delta(x_1 - x_4) \cdots \delta(x_3 - x_4)] \end{aligned} \quad (6.148)$$

Daqui vemos que essa anomalia pode ser cancelada com a condição de normalização para $t^{\mu_1 \dots \mu_4}$, o mesmo para as outras variáveis. Portanto:

$$\partial_{\mu_j} t^{\mu_1 \dots \mu_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 , \quad j = 1, 2, 3, 4 . \quad (6.149)$$

Para n=3 : Neste caso, o grafo tem ordem singular $\omega_3 = 1 - \frac{3}{2}f$, então os únicos casos com anomalias possíveis é quando $f = 0 \rightarrow \omega_3 = 1$. Daqui temos como único caso quando temos três operadores eletromagnéticos livres, mas do teorema de Furry, esse caso não contribui. Portanto, os grafos de 3-pontos não possuem anomalias.

Para n=2 : Neste caso, o grafo tem ordem singular $\omega_2 = 2 - \frac{3}{2}f$, então os únicos casos com anomalias possíveis é quando $f = 0, 2 \rightarrow \omega_2 = 2, -1$. Daqui temos três casos possíveis: a polarização do vácuo a 1-loop, o espalhamento Compton e a autoenergia a 1-loop. Sendo a configuração desses casos diferentes, podemos analisar cada um de forma independente.

1. Polarização do Vácuo a 1-loop.- Nesse caso, temos dois operadores eletromagnéticos livres, e não temos férmions externos então a quantidade

$${}^0\mathcal{T}_{VP}^{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2) = \Pi^{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2) , \quad (6.150)$$

é uma distribuição numérica. E como temos provado no capítulo 5 esse tensor é transversal, então:

$$\partial_{\mu_j} \Pi^{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2) = 0 , \quad j = 1, 2 . \quad (6.151)$$

Portanto, não possui anomalias.

2. Espalhamento Compton.- Neste caso, temos dois operadores eletromagnéticos livres e dois operadores fermiônicos livres, então por definição

$${}^2\mathcal{T}_{EF}^{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2) = : \bar{\psi}(x_1) \gamma^{\mu_1} S^F(x_1 - x_2) \gamma^{\mu_2} \psi(x_2) : + : \bar{\psi}(x_2) \gamma^{\mu_1} S^F(x_2 - x_1) \gamma^{\mu_2} \psi(x_1) : . \quad (6.152)$$

Para esse caso $\omega_2 = -1$ e do resultado (6.141), a derivada com relação a x_1 é :

$$\partial_{\mu_1} [{}^2\mathcal{T}_{EF}^{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2)] = C_{12} : \bar{\psi}(x_1) \delta(x_1 - x_2) \gamma^{\mu_2} \psi(x_2) : + C_{21} : \bar{\psi}(x_2) \delta(x_2 - x_1) \gamma^{\mu_2} \psi(x_1) : . \quad (6.153)$$

Esta anomalia não pode ser cancelada por normalização, mas como tem suporte $x_1 = x_2$ e da invariância por conjugação da carga, teremos que

$$\partial_{\mu_j} [{}^2\mathcal{T}_{EF}^{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2)] = 0 , \quad j = 1, 2 . \quad (6.154)$$

Portanto, não possui anomalias.

3. Auto-energia a 1-loop.- Neste caso, temos dois operadores fermiônicos livres, então por definição

$${}^2\mathcal{T}_{AE}(x_1, x_2) = : \bar{\psi}(x_1) \Sigma(x_1 - x_2) \psi(x_2) : + : \bar{\psi}(x_2) \Sigma(x_2 - x_1) \psi(x_1) : . \quad (6.155)$$

Como para esse caso $\omega_2 = -1$ e do resultado (6.141), a derivada com relação a x_1 é :

$$\partial_{\mu_1} [{}^2\mathcal{T}_{AE}(x_1, x_2)] = C_{12} : \bar{\psi}(x_1) \delta(x_1 - x_2) \gamma^{\mu_2} \psi(x_2) : + C_{21} : \bar{\psi}(x_2) \delta(x_2 - x_1) \gamma^{\mu_2} \psi(x_1) : . \quad (6.156)$$

Esta anomalia não pode ser cancelada por normalização, mas como tem suporte $x_1 = x_2$ e da invariância por conjugação da carga, teremos que

$$\partial_{\mu_j} \left[{}^2\mathcal{T}_{EF}^{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2) \right] = 0, \quad j = 1, 2. \quad (6.157)$$

Portanto, não possui anomalias.

6.4.3 Identidades de Ward-Takahashi-Fradkin

A imposição da invariância de gauge na teoria vai introduzir relações nos grafos, essas relações são conhecidas como identidades de Ward-Takahashi-Fradkin. Mostraremos que as relações provadas para QED_4 também são válidas para GQED_4 , estas são:

Transversalidade da Polarização do Vácuo.- Os grafos que contribuem à polarização do vácuo (VP) são todos aqueles que têm dois operadores eletromagnéticos não contraídos. A transversalidade será demonstrada para cada grafo. Consideremos o grafo VP de n -pontos com os operadores eletromagnéticos livres nos pontos (x_1, x_2) , então a quantidade seguinte

$${}^0\mathcal{T}_{VP}^{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Pi^{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (6.158)$$

é uma distribuição numérica. Do resultado (6.141) temos que

$$\partial_{\mu_j} \Pi^{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \forall n > 4. \quad (6.159)$$

E da subseção prévia esse resultado também pode ser válido para $n = 2$ e $n = 4$. Assim,

$$\partial_{\mu_j} \Pi^{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \forall n \geq 2. \quad (6.160)$$

Por permutação esse resultado pode ser estendido para os outros j . Portanto, temos demonstrado que a polarização do vácuo é transversal, trivialmente para mais de 4-pontos, ajustável para 4-pontos e explicitamente para 2-pontos.

Vértice e Auto-energia.- Consideremos os grafos tipo vértice de n -pontos, por exemplo, aqueles com um operador eletromagnético no ponto x_n e dois operadores fermiônicos nos pontos (x_i, x_j) . Vemos que podemos sub-agrupar em três tipos: quando os três operadores se encontram em diferentes pontos, quando um dos operadores fermiônicos está no mesmo ponto que o eletromagnético (este vértice é conectado ao grafo por uma linha fermiônica) e quando os dois operadores fermiônicos estão no mesmo ponto (este vértice é conectado ao grafo por uma

linha bosónica). Por definição teremos para este caso:

$$\begin{aligned}
& {}^2\mathcal{T}_{Ver}^{\mu_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
= & \sum_{i \neq j}^{n-1} : \bar{\psi}(x_i) \Lambda^{\mu_n}(x_n, x_i, x_j, \dots) \psi(x_j) : \\
& + \sum_{i \neq j}^{n-1} : \bar{\psi}(x_n) \gamma^{\mu_n} S_F(x_n - x_i) \Sigma(x_i, x_j, \dots) \psi(x_j) : \\
& + \sum_{i \neq j}^{n-1} : \bar{\psi}(x_i) \Sigma(x_i, x_j, \dots) S_F(x_j - x_n) \gamma^{\mu_n} \psi(x_n) : \\
& + \sum_{i \neq j}^{n-1} : \bar{\psi}(x_i) \Pi^{\mu_n \mu_j}(x_n, x_j, \dots) D_{\mu_j \mu_i}(x_j - x_i) \gamma^{\mu_i} \psi(x_i) : \quad (6.161)
\end{aligned}$$

Como o vértice tem orden singular máximo -2 , de (6.141) teremos que para o vértice satisfaz trivialmente:

$$\partial_{\mu_n} [{}^2\mathcal{T}_{Ver}^{\mu_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 0, \quad (6.162)$$

sem ser necessario a normalização. Da transversalidade da polarização do vácuo e das propriedades:

$$\frac{\partial}{\partial x_n^{\mu_n}} [\bar{\psi}(x_n) \gamma^{\mu_n} S_F(x_n - x_i)] = i \bar{\psi}(x_n) \delta(x_n - x_i) \quad (6.163)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n^{\mu_n}} [S_F(x_j - x_n) \gamma^{\mu_n} \psi(x_n)] = -i \delta(x_j - x_n) \psi(x_n). \quad (6.164)$$

Obtemos que

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{i \neq j}^{n-1} : \bar{\psi}(x_i) \partial_{\mu_n} \Lambda^{\mu_n}(x_n, x_i, x_j, \dots) \psi(x_j) : \\
& + i \sum_{i \neq j}^{n-1} : \bar{\psi}(x_n) \delta(x_n - x_i) \Sigma(x_i, x_j, \dots) \psi(x_j) : \\
& - i \sum_{i \neq j}^{n-1} : \bar{\psi}(x_i) \Sigma(x_i, x_j, \dots) \delta(x_j - x_n) \psi(x_n) : \quad (6.165)
\end{aligned}$$

Daqui teremos que:

$$\partial_{\mu_n} \Lambda^{\mu_n}(x_n, x_i, x_j, \dots) = i [\delta(x_j - x_n) \Sigma(x_i, x_j, \dots) - \delta(x_n - x_i) \Sigma(x_i, x_j, \dots)]. \quad (6.166)$$

Sendo cada um dos membros invariantes por translações (já antes de derivar) em forma independente, fazamos uma translação do vértice respeito a x_n e as auto-energias com relação a x_j ; obteremos a conhecida *identidade de Ward-Takahashi-Fradkin no espaço de configurações*

$$\partial_{\mu_n} \Lambda^{\mu_n}(x_i - x_n, x_j - x_n, \dots) = i [\delta(x_j - x_n) \Sigma(x_i - x_j, \dots) - \delta(x_i - x_n) \Sigma(x_i - x_j, \dots)] \quad (6.167)$$

Usando as variáveis $y_k = x_k - x_n$

$$- \sum \partial_\nu^{y_k} \Lambda^\nu (y_i, y_j, \dots) = i [\delta (y_j) \Sigma (y_i - y_j, \dots) - \delta (y_i) \Sigma (y_i - y_j, \dots)] . \quad (6.168)$$

Fazendo a transformada de Fourier do termo do lado esquerdo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\sum \partial_\nu^{y_k} \Lambda^\nu \right] &= (2\pi)^{-2(n-1)} \int \prod_{k=1}^{n-1} dy_k \left[\sum \partial_\nu^{y_k} \Lambda^\nu (y_i, y_j, \dots) \right] e^{i \sum p_k \cdot y_k} \\ &= - (2\pi)^{-2(n-1)} \int \prod_{k=1}^{n-1} dy_k \left[\sum \partial_\nu^{y_k} e^{i \sum p_k \cdot y_k} \right] \Lambda^\nu (y_i, y_j, \dots) \\ &= -i (2\pi)^{-2(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_{k\nu} \right) \int \prod_{k=1}^{n-1} dy_k \Lambda^\nu (y_i, y_j, \dots) e^{i \sum p_k \cdot y_k} \\ &= -i \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_{k\nu} \right) \hat{\Lambda}^\nu (p_i, p_j, \dots) . \end{aligned} \quad (6.169)$$

E a transformada da primeira auto-energia do termo direito

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [\delta \Sigma] &= (2\pi)^{-2(n-1)} \int \prod_{k=1}^{n-1} dy_k \delta (y_j) \Sigma (y_i - y_j, \dots) e^{i \sum p_k \cdot y_k} \\ &= (2\pi)^{-2(n-1)} \int \prod_{k \neq j}^{n-1} dy_k \Sigma (y_i, \dots) e^{i \sum_{\neq j} p_k} \\ &= (2\pi)^{-2} \hat{\Sigma} (p_i, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots) . \end{aligned} \quad (6.170)$$

E da segunda auto-energia

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [\delta \Sigma] &= (2\pi)^{-2(n-1)} \int \prod_{k=1}^{n-1} dy_k \delta (y_i) \Sigma (y_i - y_j, \dots) e^{i \sum p_k \cdot y_k} \\ &= (2\pi)^{-2(n-1)} \int \prod_{k \neq j}^{n-1} dy_k \Sigma (-y_j, \dots) e^{i \sum_{\neq i} p_k \cdot (y_k - y_j)} e^{i (\sum_{\neq i} p_k) \cdot y_j} \\ &= (2\pi)^{-2} \hat{\Sigma} \left(- \left(\sum_{\neq i} p_k \right), \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots \right) . \end{aligned} \quad (6.171)$$

Substituindo esses resultados em (6.168) obteremos a *identidade de Ward-Takahashi-Fradkin no espaço dos momentos*

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{n-1} p_{k\nu} \right) \hat{\Lambda}^\nu (p_i, p_j, \dots) \\ &= (2\pi)^{-2} \left[\hat{\Sigma} (p_i, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots) - \hat{\Sigma} \left(- \left(\sum_{\neq i} p_k \right), \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots \right) \right] . \end{aligned} \quad (6.172)$$

Em particular para $n = 3$ e $i = 1, j = 2$

$$(p_1 + p_2)_\nu \hat{\Lambda}^\nu(p_1, p_2) = (2\pi)^{-2} \left[\hat{\Sigma}(p_1) - \hat{\Sigma}(-p_2) \right]. \quad (6.173)$$

Fazendo $p_1 \rightarrow p, p_2 \rightarrow -q$ e $\hat{\Lambda}^\nu(p, -q) \rightarrow \hat{\Lambda}^\nu(p, q)$, obtemos a forma conhecida da identidade de W-T-F:

$$(p - q)_\nu \hat{\Lambda}^\nu(p, q) = (2\pi)^{-2} \left[\hat{\Sigma}(p) - \hat{\Sigma}(q) \right]. \quad (6.174)$$

Nota.- Dessa relação poderíamos calcular $\hat{\Lambda}^\nu(p, p)$ na forma:

$$\hat{\Lambda}^\nu(p, p) = (2\pi)^{-2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \hat{\Sigma}(p) \quad (6.175)$$

Como $\hat{\Lambda}^\nu$ e $\hat{\Sigma}$ são distribuições de ordem singular -2 e -1 , respectivamente, teremos que ambas são regulares (finitas UV). Mas impondo a condição central ao vértice, teremos que fazer a subtração constante:

$$\hat{\Lambda}^\nu(p, p) - \hat{\Lambda}^\nu(0, 0) \quad (6.176)$$

que nos leva a uma subtração linear em $\hat{\Sigma}$.

Capítulo 7

Conclusões

Finalmente, apresentaremos as conclusões sobre os diferentes resultados obtidos ao longo da tese, e as perspectivas referentes a esses resultados. Mas, não só apresentaremos as conclusões e perspectivas dos resultados *positivos*, como também apresentaremos aqueles referentes às dificuldades encontradas que representam aberturas para novas pesquisas.

7.1 O Formalismo da TPC e a Quantização do Campo Livre

Da revisão do formalismo, consideramos que dos axiomas estudados, o princípio de causalidade é a maior contribuição da *TPC*, pela elegância de sua formulação e seus alcances. A formulação da causalidade determina o método indutivo da *TPC* e, nesse axioma definimos o parâmetro de evolução: *o tempo*. Temos aqui uma abertura à implementação de uma *TPC* que considera como tempo uma das coordenadas do cone de luz e fazendo as modificações necessárias, obteremos um formalismo perturbativo-causal da teoria quântica de campos nas coordenadas do cone de luz.

Mostramos como na *TPC* é possível definir, sem ambiguidades, a ordem singular de cada termo da série perturbativa e, que esse valor não é necessariamente igual ao grau de divergência. Temos assim que a *TPC* nos proporciona uma técnica para determinar a singularidade dos grafos ao rever os graus de divergência em aparência ambíguos.

Encontramos, em princípio, que a bipartição de distribuições regulares é finitas e única, a bipartição de distribuições singulares que satisfazem a condição de solução central também o é, mas ainda está por desenvolver a fórmula de bipartição para distribuições singulares de mais de dois pontos. Os resultados obtidos devem ser ajustados, porque consideramos partículas iniciais e finais assintoticamente livres e definidas com parâmetros físicos, leva-nos a impor a condição de camada de massa. Para o caso singular o ajuste é razoavelmente bem estabelecido; mas, no caso regular ainda não. No capítulo 2 mostramos algumas formas para se fazer esse ajuste.

Conhecer a teoria livre é essencial na aplicação do formalismo causal, mas a *TPC* por si só não nos fornece da teoria livre. Elementos da teoria livre, como os propagadores de frequência positiva e negativa são fundamentais para construir o operador de dispersão S . No

começo focamos nossa atenção na obtenção desse operador, e embora não tenhamos uma teoria livre completa, com o conhecimento desses propagadores será suficiente. Assim encontramos que os propagadores de frequência positiva e negativa podem ser encontrados a partir de sua representação analítica, a obtenção dessa proposta foi possível ao considerar os fundamentos do formalismo de Wightman. A representação analítica é coerente com a linha axiomática da *TPC* e, sua generalidade permite-nos obter os outros propagadores sem ambiguidades. Inclusive, é possível levar essa proposta às coordenadas do cone de luz e, em particular, obter os propagadores de Feynman livre da QED_4 sem prescrições [49].

7.2 Espalhamento e a Teoria Livre do Campo de Podolsky

Estudamos primeiro o espalhamento Moeller pelo fato de que os estados fermiônicos são conhecidos e, a parte eletromagnética só intervém na parte numérica do operador de dispersão. Sendo conhecida essa contribuição a partir da representação analítica e da conservação da corrente livre, encontramos que só é necessário a parte transversal do propagador eletromagnético. Assim, encontramos a expressão da seção de choque diferencial na eletrodinâmica de Podolsky, que difere da de Maxwell, mas que se reduz a ela quando fazemos o limite: $m_p \rightarrow \infty$. Esse resultado poderia ser considerado como uma primeira evidência deste modelo; mas quando escrevemos esse resultado nas diferentes regiões de energia, considerando como pontos de referência a massa do elétron m e a massa de Podolsky m_p e, que $m \ll m_p$, encontramos que o modelo de Podolsky será sensível na região de altas energias, onde teremos que considerar outras interações.

No estudo do espalhamento Compton é necessário a formulação dos fótons de Podolsky livres. Esse é ainda um desafio a ser resolvido, e como resultado parcial encontramos que o setor de Proca deverá ser considerado para energias do fóton no menores a m_p e, nesse caso deveria considerar-se a componente longitudinal do fóton. Mostramos assim que para energias menores a m_p , o resultado da seção de choque desse espalhamento não varia com relação ao obtido no modelo de Maxwell.

O ponto de partida da construção da representação analítica dos propagadores de frequência positiva e negativa é a função de Green do campo. No eletromagnetismo de Podolsky a função de Green pode ser obtida, considerando a condição de *gauge-fixing* introduzida por Galvão e Pimentel [45] e, que é usada no formalismo funcional [44]. Nós consideramos outra alternativa: uma condição de *gauge-fixing* tal que para o parâmetro de gauge $\xi = 1$ se consegue separar os setores de Maxwell e Proca, propriedade de grande utilidade do ponto de vista pragmático. A dedução dessa condição não foi formalmente rigorosa e nela se introduz operadores pseudodiferenciais. Consideramos aqui uma abertura na pesquisa de teorias de campos com esse tipo de operadores e, no potencial uso dessa condição de *gauge-fixing* em outros formalismos, como o funcional.

7.3 Correções Radiativas e Normalização

A polarização do vácuo não muda com relação ao obtido na QED_4 , já que nele intervêm só os propagadores fermiônicos e encontramos que ela não gera massa dinâmica ao fóton de Podolsky.

Na análise da auto-energia devemos considerar o propagador do fóton, aqui considerando pertinente escolher como parâmetro de gauge $\xi = 1$. Esta escolha permite-nos separar na maior parte das análises, as contribuições associadas ao setor de Maxwell e de Proca. Com essa consideração, encontramos da análise da ordem singular da auto-energia que esta é uma distribuição regular. Esse resultado pode ser interpretado nos formalismos usuais como a ausência das divergências UV que no formalismo funcional [44] se traduz no uso da renormalização finita na camada de massa. Em nosso caso, não temos um mecanismo conhecido para distribuições regulares que permite-nos ajustar a condição de camada de massa. Este fato nos leva, nesta tese, a introduzir um mecanismo no formalismo da TPC que permite manter a condição de camada de massa para casos como este.

Na análise do vértice também consideramos como parâmetro de gauge $\xi = 1$, com isso se consegue grandes simplificações e, determinar que ele também é regular. Contudo, a complexidade técnica é bem maior que dos casos prévios. Este problema nos mostra a necessidade de sistematizar propriedades e cálculos próprios da TPC , que facilitaria o abordagem de diferentes modelos.

7.4 O Método Indutivo, Simetrias, Normalizabilidade e as Identidades de W-T-F

Um dos resultados mais relevantes da TPC é que os princípios e propriedades não considerados em seus axiomas podem ser *demonstrados* pelo método indutivo, tal como se consegue no capítulo 6 para as simetrias discretas e, em particular na demonstração do Teorema de Furry.

Pelo método indutivo conseguimos uma fórmula geral para encontrar a ordem singular de um grafo e, ela pode ser usada inclusive em outros modelos. Em nosso caso encontramos para os grafos de mais de quatro pontos ordens singulares negativas e, então eles são regulares. Portanto, em princípio, o número de grafos a ser analisados é finito e então se diz que o modelo é super-normalizável. Esse resultado também nos leva a que a $GQED_4$ satisfaz perturbativamente a invariância de gauge, trivialmente para contribuições maiores à quinta ordem, do Teorema de Furry aos termos de quinta ordem não contribuem, portanto, a invariância de gauge para as contribuições menores à quinta ordem representará condições de normalização para essas contribuições. Mostramos que para a $GQED_4$ que a polarização do vácuo é transversal trivialmente para ordens maiores a 2 -loops, explícito a 1 -loop, portanto, só os casos de 4-pontos teriam que ser analisados. Similarmente demonstramos as identidades de Ward-Takahashi-Fradkin, cuja dedução neste caso é bem mais simples que na QED_4 , pela ausência

de singularidades nos termos perturbativos de mais de 4-pontos.

7.5 Perspectivas Futuras

Como projetos futuros pretendemos fazer um estudo completo via Teoria de Perturbação Causal da Eletrodinâmica Quântica Generalizada Escalar em $3 + 1$ dimensões ($GSQED_4$), do setor escalar da teoria Duffin-Kemmer-Petiau usual e generalizado em $3 + 1$ dimensões ($SDKP_4$ e $GSDKP_4$). Completar o formalismo da Teoria de Perturbação Causal no cone de luz ($LF-TPC$), e sua aplicação à Eletrodinâmica Quântica ($LF-QED_4$). Outros projetos, como implementar a TPC à temperatura finita e, em espaços não comutativos, também poderão ser desenvolvidos.

Apêndice A

Algumas Noções sobre Distribuições

Para resolver as equações da física-matemática são introduzidos alguns conceitos necessários para fixar o problema. Uma dessas definições é a continuidade do espaço-tempo, que permite associar funções contínuas a ele, tal como a temperatura.

Na prática não é possível obter continuamente os valores associados, mas sim os valores médios numa região dada. Para esse caso fazemos a seguinte proposta: vamos supor que queremos encontrar o valor associado no ponto ζ ; logo devemos encontrar os valores médios de regiões cada vez menores que contêm a ζ , então o valor associado a ζ é o limite dessa sequência.

O formalismo dessa ideia nos exige introduzir duas quantidades, uma denotada como f que representará a quantidade física e outra φ associada à região Ω_n que nos proporcionará a média. É interessante observar que podemos introduzir as funções φ_n que representam a φ restringida em Ω_n , então adotar o conjunto de funções φ_n associadas à região Ω .

Portanto, formalmente temos que para a quantidade física f os números

$$\langle f, \varphi_n \rangle = a_n, \quad (\text{A.1})$$

são as médias observadas. Essas observações nós levam à introdução dos seguintes conceitos gerais:

Distribuição.- Se diz que T é uma *distribuição** ou *função generalizada*†, se T é uma funcional linear contínua sob o espaço de funções \mathcal{K} , cujos elementos são conhecidos como *funções de teste*. É associada a cada função de teste $\varphi \in \mathcal{K}$ um número real (ou complexo) $\langle T, \varphi \rangle$ de tal maneira que, para duas funções de teste qualquer φ_1 e φ_2 em \mathcal{K} e os números reais a_1 e a_2 , teremos que $\langle T, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \rangle = a_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + a_2 \langle T, \varphi_2 \rangle$, e qualquer sequência de funções de teste $\{\varphi_n\}$ convergente a φ em \mathcal{K} implica na convergência da sequência numérica $\{\langle T, \varphi_n \rangle\}$ a $\langle T, \varphi \rangle$.

Além disso, uma distribuição pode ser entendida como o limite de uma sequência de funcionais regulares, ou o valor de contorno de uma função analítica definida no plano complexo.

*Notação introduzida por Schwartz.

†Nome introduzido por Sobolev.

Se mantemos a noção de funções, então uma distribuição T pode ser escrita como a seguinte média

$$\langle T, \varphi \rangle = \int d^4x T(x) \varphi(x) , \quad (\text{A.2})$$

onde φ é uma função de teste em M^4 , nula no infinito. Tal como é introduzido no formalismo de Wightman.

Isso é possível só quando T é uma função sumável, e neste caso a distribuição é chamada de *regular*.

Mas existe outro tipo de distribuições chamadas de *singulares*, as quais não é possível modelá-las como uma função e a expressão (A.2) será só uma notação. Um desses casos é a distribuição δ -Dirac, definida como segue:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) . \quad (\text{A.3})$$

Outro caso importante é o *valor principal de Cauchy* $P\frac{1}{x}$, esta distribuição singular é definida pela fórmula:

$$\left\langle P\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = VP \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx \frac{\varphi(x)}{x} + \int_{\varepsilon}^{\infty} dx \frac{\varphi(x)}{x} \right) . \quad (\text{A.4})$$

Dessas duas distribuições temos que elas se relacionam como segue:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} = -i\pi\varphi(0) + VP \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\varphi(x)}{x} . \quad (\text{A.5})$$

Daqui se obtém a chamada *fórmula de Sochozki*:

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x) . \quad (\text{A.6})$$

Algumas Operações Básicas.- As propriedades e operações são usualmente obtidas como extensões dos casos regulares. Uma das primeiras operações é a *mudança de variável* de uma distribuição; seja a função f localmente integrável, a mudança $x \rightarrow Ay + b$ e a função de teste φ , então:

$$\int dy f(Ay + b) \varphi(y) = \frac{1}{|\det A|} \int dx f(x) \varphi[A^{-1}(x - b)] . \quad (\text{A.7})$$

Dessa relação teremos que a distribuição $f(Ay + b)$ é definida a partir da distribuição $f(x)$ como segue:

$$\langle f(Ay + b), \varphi(y) \rangle = \left\langle f(x), \frac{\varphi[A^{-1}(x - b)]}{|\det A|} \right\rangle . \quad (\text{A.8})$$

Esta relação é válida para distribuições regulares e singulares, em particular, temos que a δ -Dirac transladada e a propriedade de escala

$$\langle \delta(x - b), \varphi(x) \rangle = \varphi(b) \quad (\text{A.9})$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) , \quad (\text{A.10})$$

respectivamente.

A segunda operação é a *multiplicação por uma função infinitamente diferenciável* ; seja a função f localmente integrável, a uma função infinitamente diferenciável (C^∞) e a função de teste φ , então:

$$\int dx [f(x) a(x)] \varphi(x) = \int dx f(x) [a(x) \varphi(x)] . \quad (\text{A.11})$$

Dessa relação, teremos que a distribuição af é definida a partir da distribuição f como segue:

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle . \quad (\text{A.12})$$

Em particular, temos para os produtos $a\delta$, $xP\frac{1}{x}$

$$\langle a(x) \delta(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), a(x) \varphi(x) \rangle = a(0) \varphi(0) \rightarrow a\delta = a(0) \delta \quad (\text{A.13})$$

$$\left\langle xP\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \left\langle P\frac{1}{x}, x\varphi(x) \right\rangle = VP \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) \rightarrow xP\frac{1}{x} = 1 . \quad (\text{A.14})$$

Por último apresentaremos a *derivada de uma distribuição* ; seja f uma função k vezes diferenciável e a função de teste φ , então:

$$\int dx \partial^k f(x) \varphi(x) = (-1)^k \int dx f(x) \partial^k \varphi(x) . \quad (\text{A.15})$$

Dessa relação teremos que a distribuição derivada $\partial^k f$ é definida a partir da distribuição f como segue:

$$\langle \partial^k f, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \partial^k \varphi \rangle . \quad (\text{A.16})$$

Em particular a k -ésima derivada da δ -Dirac é definida como segue:

$$\langle \partial^k \delta, \varphi \rangle = (-1)^k \partial^k \varphi(0) . \quad (\text{A.17})$$

Suporte de uma Função e de uma Distribuição.- O suporte de uma função se define como a região onde a função (de teste) é não nula, região denotada como: $supp(\varphi)$. Seja $\{\varphi\}$ o conjunto de funções de teste onde a distribuição T é definida, teremos que para alguma dessas funções de teste $\langle T, \varphi \rangle = 0$ e em particular esse resultado se manterá no maior conjunto aberto contido no suporte de φ , em que definiremos o suporte desta distribuição como o complemento do maior conjunto aberto onde $\langle T, \varphi \rangle = 0$, e é denotado como: $supp(T)$.

Para as distribuições regulares seus suportes são geralmente conjuntos abertos. Nas distribuições singulares existem aquelas que têm suporte pontual ou concentrado; se a distribuição f tem como suporte o único ponto $x = 0$, então, por teorema tem a forma seguinte:

$$f(x) = \sum_{|a| \leq n} C_a \partial^a \delta(x) , \quad (\text{A.18})$$

onde n é a ordem da distribuição.

Espaços de Funções de Teste e de Distribuições.- O espaço de funções de teste vai depender da definição da distribuição. Por exemplo, para uma distribuição regular definida segundo (A.2) bastará o espaço de funções integráveis, e para a δ -Dirac as funções contínuas na origem. É possível ter um espaço de funções de teste onde mais de uma distribuição é definida nele, como é o caso do espaço de funções de teste \mathcal{D} que é definido como o espaço de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto; e o espaço definido pelo conjunto das distribuições definidas em \mathcal{D} é denotado por \mathcal{D}' (seu dual), sendo assim vemos que uns de seus elementos são a distribuição (A.2), a δ -Dirac e suas derivadas.

Um espaço de funções de teste de grande interesse é aquele onde existe a transformada de Fourier. A transformada de Fourier de uma função f é denotada como $\mathcal{F}[f]$ ou \hat{f} , e definida, para o caso unidimensional, como segue:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx f(x) e^{ikx} . \quad (\text{A.19})$$

Similarmente a transformada inversa, $\mathcal{F}^{-1}[f]$ ou \check{f} , é definida como segue:

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk f(k) e^{-ikx} . \quad (\text{A.20})$$

O espaço fechado onde a transformada direta e inversa existem é conhecido como o *espaço de Schwartz*: \mathcal{S} . Esse espaço é formado por funções tal que elas e suas derivadas decrescem, no infinito, mais rápido que qualquer polinômio.

Construção de Distribuições.- Similarmente à teoria de funções, podemos definir novas distribuições a partir de outras. Um caso é via o *produto direto de distribuições*, sejam as distribuições $f, g \in \mathcal{D}'$ então, definimos o produto direto $f \times g$ como segue:

$$\langle f(x) \times g(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle , \quad (\text{A.21})$$

onde $\varphi(x, y)$ é uma função de teste que pertence a $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Um exemplo simples é a distribuição δ -Dirac bidimensional:

$$\delta(x, y) = \delta(x) \times \delta(y) \quad (\text{A.22})$$

Outra construção possível é a *convolução de distribuições*. Sejam f e g funções localmente integráveis então definimos a convolução $f * g$ como segue:

$$(f * g)(x) = \int dy f(y) g(x - y) = \int dy g(y) f(x - y) = (g * f)(x) . \quad (\text{A.23})$$

Se $\varphi \in \mathcal{D}$, introduzimos a convolução $f * g$ como a seguinte funcional:

$$\begin{aligned} \langle (f * g), \varphi \rangle &= \int dx (f * g)(x) \varphi(x) = \int dx \int dy f(y) g(x - y) \varphi(x) \\ &= \int dy f(y) \int dx g(x - y) \varphi(x) = \int dy f(y) \int d\xi g(\xi) \varphi(\xi + y) \\ \langle (f * g), \varphi \rangle &= \int dx dy f(x) g(y) \varphi(x + y) . \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Se consideramos a f, g como distribuições, a convolução $f * g$ é definida como segue:

$$\langle (f * g), \varphi \rangle = \langle f(x) \times g(y), \varphi(x+y) \rangle . \quad (\text{A.25})$$

Em particular, a convolução com a δ -Dirac é dada como segue:

$$\begin{aligned} \langle (f * \delta), \varphi \rangle &= \langle f(x) \times \delta(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle f(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle f(x), \varphi(x) \rangle \rightarrow f * \delta = f . \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Transformada de Fourier de uma Distribuição.- Sejam f, φ funções localmente integráveis, então temos que

$$\begin{aligned} \int dx \hat{f}(x) \varphi(x) &= \int dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\xi f(\xi) e^{i\xi x} \varphi(x) = \int d\xi f(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \varphi(x) e^{i\xi x} \\ &= \int d\xi f(\xi) \hat{\varphi}(\xi) . \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Extendendo este resultado para uma distribuição f , teremos que sua transformada é definida como segue:

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle . \quad (\text{A.28})$$

Em particular temos que a transformada da δ -Dirac é dada como segue:

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \varphi(x) e^{i0x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \varphi(x) \rightarrow \hat{\delta}(k) = (2\pi)^{-1/2} . \quad (\text{A.29})$$

Para o caso da n -ésima derivada da δ -Dirac é dada como segue:

$$\langle \mathcal{F}[\delta^{(n)}], \varphi \rangle = \langle \delta^{(n)}, \hat{\varphi} \rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int dx (ix)^n \varphi(x) \rightarrow \mathcal{F}[\delta^{(n)}](k) = (2\pi)^{-1/2} (-ik)^n . \quad (\text{A.30})$$

Nota.- Nesta tese usamos como referências básicas a: [59], [60] e [62], onde encontraremos muito além deste resumo.

Apêndice B

A Matriz Inversa

Vamos assumir que o operador S seja bijetivo, então podemos definir o seguinte funcional a valor de operador

$$S^{-1} [g] : \mathcal{F}_{out} \rightarrow \mathcal{F}_{in} . \quad (\text{B.1})$$

conhecido também como *Matriz Inversa*, que deve satisfazer as seguintes relações:

$$S^{-1} [g] S [g] = S [g] S^{-1} [g] = 1 . \quad (\text{B.2})$$

Seguindo o mesmo roteiro do operador S , o operador inverso pode ser expandido como a seguinte série perturbativa

$$S^{-1} [g] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \tilde{T}_n (x_1, x_2, \dots, x_n) g (x_1) g (x_2) \dots g (x_n) , \quad (\text{B.3})$$

onde a quantidade \tilde{T}_n é uma distribuição a valor de operador e $g^{\otimes n}$ sua função de teste. Substituindo essa série e a série do operador de dispersão (2.7) nas relações acima (B.2):

$$S [g] S^{-1} [g] = \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} T_p \right) \left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_q \right) = 1 , \quad (\text{B.4})$$

onde nessa expressão as quantidades T_n e \tilde{T}_n são definidas como segue:

$$T_n = \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n T_n (x_1, x_2, \dots, x_n) g (x_1) g (x_2) \dots g (x_n) \quad (\text{B.5})$$

$$\tilde{T}_n = \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \tilde{T}_n (x_1, x_2, \dots, x_n) g (x_1) g (x_2) \dots g (x_n) . \quad (\text{B.6})$$

Desenvolvendo o produto das somas teremos:

$$S [g] S^{-1} [g] = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} T_p + \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_q + \sum_{p=1}^{\infty} T_p \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{T}_q = 1 . \quad (\text{B.7})$$

Daqui deduzimos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n + \tilde{T}_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} T_{n-m} \tilde{T}_m = 0. \quad (\text{B.8})$$

Assim encontramos a seguinte relação:

$$\tilde{T}_n = -T_n - \sum_{m=1}^{n-1} T_{n-m} \tilde{T}_m, \quad (\text{B.9})$$

vemos que ela tem termos cruzados entre as \tilde{T} e T . A intenção é expressar \tilde{T} em termos de T . Portanto, vamos começar levando em conta que por definição:

$$T_0 = 1 \quad (\text{B.10})$$

$$\tilde{T}_0 = 1. \quad (\text{B.11})$$

Com isso, podemos resolver as primeiras ordens:

$$\tilde{T}_1 = -T_1 \quad (\text{B.12})$$

$$\tilde{T}_2 = -T_2 + T_1^2 \quad (\text{B.13})$$

$$\tilde{T}_3 = -T_3 + (T_2 T_1 + T_1 T_2) - T_1^3. \quad (\text{B.14})$$

Esses resultados nos induz a formular a seguinte hipótese:

$$\tilde{T}_n = \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{\sum n_j = n} [T_{n_1} T_{n_2} \dots T_{n_r}], \quad (\text{B.15})$$

que é comprovada para os primeiros termos e, então para mostrar sua validade bastará mostrar que essa forma se mantém para o termo $n + 1$, vejamos:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{n+1} &= -T_{n+1} - \sum_{m=1}^n T_{n+1-m} \tilde{T}_m \\ &= -T_{n+1} - \sum_{m=1}^n T_{n+1-m} \sum_{r'=1}^m (-1)^{r'} \sum_{\sum n_j = m} [T_{n_1} T_{n_2} \dots T_{n_{r'}}] \\ &= (-1)^1 T_{n+1} + \sum_{r'=1}^n (-1)^{r'+1} \sum_{\sum n_j = n} [T_{n_1} T_{n_2} \dots T_{n_{r'}}] \\ &= (-1)^1 T_{n+1} + \sum_{r=2}^{n+1} (-1)^r \sum_{\sum n_j = n+1} [T_{n_1} T_{n_2} \dots T_{n_r}] \\ \tilde{T}_{n+1} &= \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^r \sum_{\sum n_j = n+1} [T_{n_1} T_{n_2} \dots T_{n_r}], \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

que é o que queríamos demonstrar.

Até aqui temos produtos de distribuições avaliadas numa função de teste dada; agora vamos introduzir os produtos somente de distribuições. Substituindo as definições (B.5) e (B.6), obtemos:

$$\frac{1}{n!} \tilde{T}_n (X_n) = \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{\sum n_j=n} \frac{1}{n_1!} \cdots \frac{1}{n_r!} [T_{n_1} (X_{n_1}) \cdots T_{n_r} (X_{n_r})] , \quad (\text{B.17})$$

onde por simplicidade denotamos o conjunto $X_m = \{x_1, \dots, x_m\}$. Esses produtos são bem definidos pelo fato que os pontos são distintos. Reescrevendo essa relação, teremos:

$$\tilde{T}_n (X_n) = \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{\sum n_j=n} \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!} [T_{n_1} (X_1) \cdots T_{n_r} (X_r)] . \quad (\text{B.18})$$

Que finalmente pode ser escrita como:

$$\tilde{T}_n (X_n) = \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{P_r} [T_{n_1} (X_1) \cdots T_{n_r} (X_r)] , \quad (\text{B.19})$$

onde a soma \sum_{P_r} é sobre todas as partições P_r do conjunto $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ em r subconjuntos disjuntos e não vazios: $X_n = \bigcup_{j=1}^r X_j$, $X_j \neq \emptyset$, $|X_j| = n_j$. Dessa relação temos que a partir do conjunto $\{T_1, \dots, T_{n-1}\}$ podemos encontrar cada um dos elementos do conjunto $\{\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{n-1}\}$, por exemplo $\tilde{T}_1 (x_1) = -T_1 (x_1)$.

Por último façamos a seguinte dedução; usando a definição da matriz inversa $S [g] S^{-1} [g] = 1$, tínhamos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n + \tilde{T}_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} T_{n-m} \tilde{T}_m = 0 , \quad (\text{B.20})$$

o que pode ser escrito da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p+q=n} T_p \tilde{T}_q = 0 . \quad (\text{B.21})$$

Supondo a independência de cada termo, teremos:

$$\sum_{p+q=n} T_p \tilde{T}_q = 0 . \quad (\text{B.22})$$

Substituindo as definições de T_p, \tilde{T}_q :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{p+q=n} \frac{1}{p!} \int dx_1 \dots dx_p T_p(x_1, \dots, x_p) g(x_1) \dots g(x_p) \\
&\quad \times \frac{1}{q!} \int dy_1 \dots dy_q \tilde{T}_q(y_1, \dots, y_q) g(y_1) \dots g(y_q) \\
&= \sum_{p+q=n} \frac{1}{p!q!} \int dx_1 \dots dx_p dy_1 \dots dy_q T_p(x_1, \dots, x_p) \tilde{T}_q(y_1, \dots, y_q) g(x_1) \dots g(x_p) g(y_1) \dots g(y_q) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \int dx_1 \dots dx_p dy_1 \dots dy_q \frac{n!}{p!q!} T_p(x_1, \dots, x_p) \tilde{T}_q(y_1, \dots, y_q) \\
&\quad \cdot g(x_1) \dots g(x_p) g(y_1) \dots g(y_q) . \tag{B.23}
\end{aligned}$$

Renomeando as variáveis (y_1, \dots, y_q) como (x_{p+1}, \dots, x_n)

$$\sum_{p=0}^n \int dx_1 \dots dx_n \frac{n!}{p!(n-p)!} T_p(x_1, \dots, x_p) \tilde{T}_{n-p}(x_{p+1}, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) = 0 , \tag{B.24}$$

onde $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ pode ser interpretado como o número de possíveis formas de escolher p pontos de um conjunto de n pontos (distinguíveis). Então podemos reescrever essa relação como:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{P_2} \int dx_1 \dots dx_n T_p(X) \tilde{T}_{n-p}(Y) g(x_1) \dots g(x_n) \\
&= \int dx_1 \dots dx_n \sum_{P_2^0} T_p(X) \tilde{T}_{n-p}(Y) g(x_1) \dots g(x_n) , \tag{B.25}
\end{aligned}$$

onde P_2^0 indica todas as partições de $\{x_1, \dots, x_n\}$ nos conjuntos X, Y , com $|X| = p$ e sendo possível que X, Y sejam vazios (\emptyset). Levando em conta que o caso trivial $T_0(\emptyset) = \tilde{T}_0(\emptyset) = 1$, obtemos finalmente a propriedade:

$$\sum_{P_2^0} T_p(X) \tilde{T}_{n-p}(Y) = 0 . \tag{B.26}$$

Se agora usassemos a definição da matriz inversa $S^{-1}[g] S[g] = 1$, obteríamos a seguinte relação::

$$\sum_{P_2^0} \tilde{T}_p(X) T_{n-p}(Y) = 0 . \tag{B.27}$$

Apêndice C

Relações Causais das Distribuições R'_n , A'_n e D_n

As distribuições intermediárias $A'_n(x_1, \dots, x_n)$, $R'_n(x_1, \dots, x_n)$ e causal $D_n(x_1, \dots, x_n)$ satisfazem uma importante propriedade concernente à relação causal dos pontos (x_1, \dots, x_{n-1}) com respeito ao ponto $x \equiv x_n$. Vamos enunciar essas propriedades na forma do seguinte teorema e corolário.

- **Teorema.-** *Seja o conjunto $Y = P \cup Q$ tal que $P \neq \emptyset$, $P \cap Q = \emptyset$, $|Y| = n - 1$, e o ponto x tal que $x \notin Y$. Então:*

Se $\{Q, x\} > P$, $|Q| = n_1$, teremos que

$$R'_n(Y, x) = -T_{n_1+1}(Q, x) T_{n-(n_1+1)}(P) \quad (\text{C.1})$$

Se $\{Q, x\} < P$, $|Q| = n_1$, teremos que

$$A'_n(Y, x) = -T_{n-(n_1+1)}(P) T_{n_1+1}(Q, x) \quad (\text{C.2})$$

Prova

Por definição temos que:

$$R'_{n_1+1}(Y, x) = \sum_{P_2} T_{n_1+1-n_3}(Y', x) \tilde{T}_{n_3}(X), \quad (\text{C.3})$$

onde $Y = Y' \cup X$ e $n_3 = |X| \neq 0$. Fazendo $Y' = Y_1 \cup Y_2$, $X = X_1 \cup X_2$, então

$$R'_{n_1+1}(Y, x) = \sum_{P_2} T_{n_1+1-n_3}(Y_1 \cup Y_2, x) \tilde{T}_{n_3}(X_1 \cup X_2) \quad (\text{C.4})$$

e os conjuntos Y_1, Y_2, X_1, X_2 são definidos tal que se satisfazem as relações de causalidade $\{Y_2, x\} > Y_1, X_2 > X_1$, então

$$\begin{aligned} R'_{n_1+1}(Y, x) &= \sum_{P_2} T_{n_1+1-n_3}(\{Y_2, x\}, Y_1) \tilde{T}_{n_3}(X_1, X_2) \\ &= \sum_{P_4^0} T(Y_2, x) T(Y_1) \tilde{T}(X_1) \tilde{T}(X_2), \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

onde consideramos que Y_1, Y_2, X_1 ou X_2 podem ser vazios, mas $X_1 \cup X_2 \neq \emptyset$.

Supondo que $X_2 \neq \emptyset$, então é possível que $X_1 = \emptyset$, e por definição $X_1 \cup Y_1 = P, X_2 \cup Y_2 = Q$ são conjuntos fixos, teremos que:

$$R'_{n_1+1}(Y, x) = \sum_{P_2^0} T(Y_2, x) \left[\sum_{P_2^0} T(Y_1) \tilde{T}(X_1) \right] \tilde{T}(X_2). \quad (\text{C.6})$$

Por propriedade: $\sum_{P_2^0} T(Y_1) \tilde{T}(X_1) = 0$, daí:

$$R'_{n_1+1}(Y, x) = 0. \quad (\text{C.7})$$

Então para o caso não nulo necessariamente $X_2 = \emptyset$ e, então $X_1 \neq \emptyset$, assim $Q = Y_2$, teremos agora que:

$$\begin{aligned} R'_{n_1+1}(Y, x) &= T(Q, x) \left[\sum_{P_2} T(Y_1) \tilde{T}(X_1) \right] \\ &= T(Q, x) \left[\sum_{P_2^0} T(Y_1) \tilde{T}(X_1) - T(P) \tilde{T}(\emptyset) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Novamente usamos a propriedade $\sum_{P_2^0} T(Y_1) \tilde{T}(X_1) = 0$, e como $\tilde{T}(\emptyset) = 1$, finalmente, obtemos o seguinte resultado:

$$R'_{n_1+1}(Y, x) = -T(Q, x) T(P) \quad \text{para } \{Q, x\} > P \neq \emptyset. \quad (\text{C.9})$$

Seguindo passos semelhantes também podemos obter o resultado:

$$A'_{n_1+1}(Y, x) = -T(P) T(Q, x) \quad \text{para } \{Q, x\} < P \neq \emptyset. \quad (\text{C.10})$$

Notemos que este teorema somente é válido para distribuições de mais de dois pontos.

• **Corolário.**- A distribuição causal D_n , definida como:

$$D_n(x_1, \dots, x_n) \equiv R'_n(x_1, \dots, x_n) - A'_n(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{C.11})$$

Tem suporte causal com respeito a x_n , isto é:

$$\text{Supp}D_n(x_1, \dots, x_n) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(x_n) \cup \Gamma_{n-1}^-(x_n) \quad (\text{C.12})$$

Prova

Definamos os conjuntos P' , S' e Q' tal que:

$$P' \cup S' \cup Q' = \{x_1, \dots, x_n\} \quad , P', Q' \neq \emptyset \quad , x_n \in S' \quad (C.13)$$

E num referencial dado:

$$x_j^0 > x_n^0, \forall x_j \in P' \quad ; \quad x_j^0 = x_n^0, \forall x_j \in S' \quad ; \quad x_j^0 < x_n^0, \forall x_j \in Q' \quad (C.14)$$

Daqui teremos que $P' > S' > Q'$ e como $x \equiv x_n \in S'$, do teorema teremos que:

$$R'_n(x_1, \dots, x_n) = -T(P' \cup S')T(Q') \quad (C.15)$$

$$A'_n(x_1, \dots, x_n) = -T(P')T(Q' \cup S') \quad (C.16)$$

E da relação causal da distribuição T , teremos que

$$R'_n(x_1, \dots, x_n) = -T(P')T(S')T(Q') \quad (C.17)$$

$$A'_n(x_1, \dots, x_n) = -T(P')T(S')T(P') \quad (C.18)$$

Portanto, nas condições do teorema $P' \neq \emptyset$ e $Q' \neq \emptyset$, temos que:

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (C.19)$$

Agora analisemos os possíveis casos não nulos:

1. Se $P' \neq \emptyset$ e $Q' = \emptyset$, vamos supor que $\exists x_j \in P' \cup S' \setminus \{x_n\}$ tal que x_j e x_n sejam espacialmente separados, portanto, pode existir um referencial tal que $x_j^0 < x_n^0$. Daí que nesse referencial $Q' \neq \emptyset$, se consideramos a invariância de Lorentz, teremos que necessariamente:

$$SuppD_n(x_1, \dots, x_n) \not\subseteq [\Gamma_{n-1}^+(x_n) \cup \Gamma_{n-1}^-(x_n)]^c \quad \text{e} \quad SuppD_n(x_1, \dots, x_n) \cap \Gamma_{n-1}^+(x_n) \neq \emptyset \quad (C.20)$$

2. Se $P' = \emptyset$ e $Q' \neq \emptyset$, vamos supor que $\exists x_j \in Q' \cup S' \setminus \{x_n\}$ tal que x_j e x_n sejam espacialmente separados, portanto, pode existir um referencial tal que $x_j^0 > x_n^0$. Daí que nesse referencial $P' \neq \emptyset$, se consideramos a invariância de Lorentz, teremos que necessariamente:

$$SuppD_n(x_1, \dots, x_n) \not\subseteq [\Gamma_{n-1}^+(x_n) \cup \Gamma_{n-1}^-(x_n)]^c \quad \text{e} \quad SuppD_n(x_1, \dots, x_n) \cap \Gamma_{n-1}^-(x_n) \neq \emptyset \quad (C.21)$$

Destes resultados podemos concluir que:

$$SuppD_n(x_1, \dots, x_n) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(x_n) \cup \Gamma_{n-1}^-(x_n) \quad (C.22)$$

Nesta dedução não consideramos a propriedade causal de T_n e como usamos o teorema, este resultado é válido para $n \geq 3$, para $n = 2$ teremos que fazer o cálculo explícito.

Apêndice D

Unicidade da Fórmula de Bipartição

No capítulo 2 encontramos fórmulas de bipartição para distribuições regulares e singulares, demonstraremos que essas fórmulas são únicas. E analisaremos possíveis modificações dessas fórmulas.

D.1 Unicidade da Fórmula de Bipartição Central

Primeiro demonstraremos que a solução na camada $p = q$ é única:

Teorema.- *Seja a distribuição retardada $\hat{r}(p)$ de ordem singular ω , então podemos definir a distribuição $\hat{r}_q(p)$ tal que:*

$$D^b \hat{r}_q(q) = 0 \quad , \quad b \leq \omega \quad \leftrightarrow \quad \hat{r}_q(p) = \hat{r}(p) - \sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} D^b \hat{r}(q) \quad (\text{D.1})$$

Prova:

(\leftarrow) É direto.

(\rightarrow) Por teorema, se $\hat{r}(p)$ é uma distribuição retardada de ordem singular ω , podemos definir a distribuição $\hat{r}_q(p)$ na forma:

$$\hat{r}_q(p) = \hat{r}(q) + \sum_{a=0}^{\omega} C_a q^a \quad (\text{D.2})$$

Por condição $D^b \hat{r}_q(q) = 0$, $\forall b \leq \omega$; fixando um b teremos que:

$$0 = D^b \hat{r}(q) + \sum_{a=b}^{\omega} C_a \frac{a!}{(a-b)!} q^{a-b} \quad (\text{D.3})$$

Daqui podemos separar a constante C_b :

$$\begin{aligned} C_b &= - \left[\frac{1}{b!} D^b \hat{r}(q) + \sum_{a=b+1}^{\omega} \binom{a}{b} C_a q^{a-b} \right] \\ &= - \left[\frac{1}{b!} D^b \hat{r}(q) + \sum_{a=0}^{\omega-b-1} \binom{\omega-a}{b} C_{\omega-a} q^{\omega-b-a} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Para deduzir sua forma geral analisemos os seguintes casos:

*) $b = \omega$

$$C_{\omega} = - \left[\frac{(-1)^0}{\omega!0!} D^{\omega \hat{r}}(q) \right] \quad (\text{D.5})$$

*) $b = \omega - 1$

$$C_{\omega-1} = - \left[\frac{(-1)^0}{(\omega-1)!} D^{\omega-1 \hat{r}}(q) + \binom{\omega}{\omega-1} C_{\omega} q \right] \quad (\text{D.6})$$

Do caso prévio:

$$C_{\omega-1} = - \left[\frac{(-1)^0}{(\omega-1)!0!} D^{\omega-1 \hat{r}}(q) + \frac{(-1)^1}{(\omega-1)!1!} D^{\omega \hat{r}}(q) q \right] \quad (\text{D.7})$$

*) $b = \omega - 2$

$$C_{\omega-2} = - \left[\frac{1}{(\omega-2)!0!} D^{\omega-2 \hat{r}}(q) + \binom{\omega-1}{\omega-2} C_{\omega-1} q + \binom{\omega}{\omega-2} C_{\omega} q^2 \right] \quad (\text{D.8})$$

Do caso prévio:

$$C_{\omega-2} = - \left[\frac{1}{(\omega-2)!0!} D^{\omega-2 \hat{r}}(q) + \frac{(-1)^1}{(\omega-2)!1!} D^{\omega-1 \hat{r}}(q) q + \frac{(-1)^2}{(\omega-2)!2!} D^{\omega \hat{r}}(q) q^2 \right] \quad (\text{D.9})$$

Olhando estes casos, deduzimos a seguinte hipótese:

$$C_b = - \left[\sum_{e=b}^{\omega} \frac{(-1)^{e-b}}{b!(e-b)!} D^{e \hat{r}}(q) q^{e-b} \right] \quad (\text{D.10})$$

Ou, equivalentemente

$$C_{\omega-d} = - \left[\sum_{e=\omega-d}^{\omega} \frac{(-1)^{e-\omega+d}}{(\omega-d)!(e-\omega+d)!} D^{e \hat{r}}(q) q^{e-\omega+d} \right] \quad (\text{D.11})$$

Fazendo a mudança $e - \omega + d \rightarrow f$

$$C_{\omega-d} = - \left[\sum_{f=0}^d \frac{(-1)^f}{(\omega-d)!f!} D^{\omega-d+f \hat{r}}(q) q^f \right] \quad (\text{D.12})$$

Que é válido para $\omega - 0$, e supondo válido de $\omega - 1$ a $\omega - (d - 1)$, mostraremos que também é válido para $\omega - d$. Temos que:

$$C_{\omega-d} = - \left[\frac{1}{(\omega-d)!} D^{\omega-d \hat{r}}(q) + \sum_{a=0}^{d-1} \binom{\omega-a}{\omega-d} C_{\omega-a} q^{d-a} \right] \quad (\text{D.13})$$

Substituindo as constantes $C_{\omega-a}$ com $a \leq d - 1$, obteremos que:

$$C_{\omega-d} = - \left[\frac{(-1)^0}{(\omega-d)!0!} D^{\omega-d \hat{r}}(q) + \frac{1}{(\omega-d)!} \sum_{a=0}^{d-1} \sum_{f=0}^a \frac{(-1)^{f+1}}{(d-a)!f!} D^{\omega-(a-f) \hat{r}}(q) q^{d-(a-f)} \right] \quad (\text{D.14})$$

Usando a propriedade:

$$\sum_{a=0}^{d-1} \sum_{f=0}^a t_{a,f} = \sum_{b=0}^{d-1} \sum_{k=0}^{d-1-b} t_{k+b,k} \quad (\text{D.15})$$

Teremos que

$$C_{\omega-d} = - \left[\frac{(-1)^0}{(\omega-d)!0!} D^{\omega-d} \hat{r}(q) + \frac{1}{(\omega-d)!} \sum_{b=0}^{d-1} \sum_{k=0}^{d-1-b} \frac{(-1)^{b+1}}{(d-k-b)!b!} D^{\omega-k} \hat{r}(q) q^{d-k} \right] \quad (\text{D.16})$$

Fazendo a mudança $d-k \rightarrow f$

$$C_{\omega-d} = - \left[\frac{(-1)^0}{(\omega-d)!0!} D^{\omega-d} \hat{r}(q) + \frac{1}{(\omega-d)!} \sum_{b=0}^{d-1} \sum_{f=b+1}^d \frac{(-1)^{b+1}}{(f-b)!b!} D^{\omega-d+f} \hat{r}(q) q^f \right] \quad (\text{D.17})$$

E usando a propriedade:

$$\sum_{b=0}^{d-1} \sum_{f=b+1}^d t_{b,f} = \sum_{f=1}^d \sum_{b=0}^{f-1} t_{b,f} \quad (\text{D.18})$$

Então

$$C_{\omega-d} = - \left[\frac{(-1)^0}{(\omega-d)!0!} D^{\omega-d} \hat{r}(q) + \frac{1}{(\omega-d)!} \sum_{f=1}^d \sum_{b=0}^{f-1} \frac{(-1)^{b+1}}{(f-b)!b!} D^{\omega-d+f} \hat{r}(q) q^f \right] \quad (\text{D.19})$$

Ou

$$C_{\omega-d} = - \left[\frac{(-1)^0}{(\omega-d)!0!} D^{\omega-d} \hat{r}(q) + \frac{1}{(\omega-d)!} \sum_{f=1}^d \frac{1}{f!} \left[- \sum_{b=0}^{f-1} \binom{f}{b} (-1)^b \right] D^{\omega-d+f} \hat{r}(q) q^f \right] \quad (\text{D.20})$$

Como:

$$0 = (1-1)^f = \sum_{b=0}^f \binom{f}{b} (-1)^b (1)^{f-b} (1)^b = \sum_{b=0}^f \binom{f}{b} (-1)^b = (-1)^f + \sum_{b=0}^{f-1} \binom{f}{b} (-1)^b \quad (\text{D.21})$$

Daí:

$$\begin{aligned} C_{\omega-d} &= - \left[\frac{(-1)^0}{(\omega-d)!0!} D^{\omega-d} \hat{r}(q) + \frac{1}{(\omega-d)!} \sum_{f=1}^d \frac{1}{f!} (-1)^f D^{\omega-d+f} \hat{r}(q) q^f \right] \\ &= - \left[\sum_{f=0}^d \frac{(-1)^f}{(\omega-d)!f!} D^{\omega-d+f} \hat{r}(q) q^f \right] \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Que prova a hipótese sob a forma de C_a . Finalmente podemos escrever $\hat{r}_q(p)$ como

$$\hat{r}_q(p) = \hat{r}(p) - \sum_{a=0}^{\omega} \sum_{b=a}^{\omega} \frac{(-1)^{b-a}}{a!(b-a)!} D^b \hat{r}(q) q^{b-a} p^a \quad (\text{D.23})$$

Reordenando as somatórias:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_q(p) &= \hat{r}(p) - \sum_{b=0}^{\omega} \sum_{a=0}^b \frac{(-1)^{b-a}}{a!(b-a)!} D^b \hat{r}(q) q^{b-a} p^a \\
&= \hat{r}(p) - \sum_{b=0}^{\omega} \left[(-1)^b \sum_{a=0}^b \frac{(-1)^a}{a!(b-a)!} q^{b-a} p^a \right] D^b \hat{r}(q) \\
&= \hat{r}(p) - \sum_{b=0}^{\omega} \left[\frac{(-1)^b}{b!} \sum_{a=0}^b (-1)^a \binom{b}{a} q^{b-a} p^a \right] D^b \hat{r}(q)
\end{aligned} \tag{D.24}$$

Portanto:

$$\hat{r}_q(p) = \hat{r}(p) - \sum_{b=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} D^b \hat{r}(q) \tag{D.25}$$

Que finalmente demonstra o teorema.

Em particular, teremos que a solução central, isto é em $q = 0$

$$\hat{r}_0(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\hat{d}(p-k) - \sum_{b=0}^{\omega} \frac{p^b}{b!} D_q^b \hat{d}(q-k) \Big|_{q=0} \right] \tag{D.26}$$

é única. Contudo, é possível propor as seguintes discussões:

1.- Usualmente a distribuição causal tem várias componentes de diferentes ordens singulares. Seja a distribuição causal \hat{d} tal que

$$\hat{d} = \hat{d}_1 + \hat{d}_2 \tag{D.27}$$

onde \hat{d}_1 e \hat{d}_2 têm ordens singulares ω_1 e ω_2 , com $\omega_1 > \omega_2$. Daí a parte retardada será:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_0(p) &= (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\hat{d}_1(p-k) - \sum_{b=0}^{\omega_2} \frac{p^b}{b!} D_q^b \hat{d}_1(q-k) \Big|_{q=0} \right] \\
&+ (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\hat{d}_2(p-k) - \sum_{b=0}^{\omega_2} \frac{p^b}{b!} D_q^b \hat{d}_2(q-k) \Big|_{q=0} \right]
\end{aligned} \tag{D.28}$$

Definamos o último termo como $\hat{r}_{0,2}$, então

$$\begin{aligned}
\hat{r}_{0,2}(p) &= (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \left[\hat{d}_2(p-k) - \sum_{b=0}^{\omega_2} \frac{p^b}{b!} [D^b \hat{d}_2](-k) \right] \\
&- (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(k) \sum_{\omega_2+1}^{\omega_1} \frac{p^b}{b!} [D^b \hat{d}_2](-k)
\end{aligned} \tag{D.29}$$

Vemos que a primeira integral já é bem definida (finita) e a segunda também já que $D^b \hat{d}_2$ tem ordem singular $\omega_2 - b$, este resultado nos induz a propor fórmulas de bipartição central individual para cada componente segundo sua ordem singular. A diferença entre esta proposta e a original será um polinômio de potência não maior à maior ordem singular, na prática a nova

proposta também é possível já que a diferença (o polinômio) pode ser absorvida pelas condições de normalização.

2.- Existem casos em que é possível obter o mesmo resultado para diferentes subtrações. Por exemplo, vamos supor que \hat{d} é ímpar e da ordem $2n$ e, consideremos uma fórmula de bipartição com $\omega = 2n + 1$, por propriedade teremos que:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(p_0) \int_0^{\infty} dt \frac{2t\hat{d}(tp)}{t^{2n+2} (1 - t^2 + \operatorname{sgn}(p_0) i0^+)}, \quad (\text{D.30})$$

e esta é equivalente a

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(p_0) \int_0^{\infty} dt \frac{2\hat{d}(tp)}{t^{2n+1} (1 - t^2 + \operatorname{sgn}(p_0) i0^+)}. \quad (\text{D.31})$$

Que é exatamente a fórmula de bipartição para $\omega = 2n$. Então obtemos o mesmo resultado, neste caso particular, para $\omega > \omega(R)$.

Do caso 1 temos que sempre temos resultados finitos para $\omega > \omega(R)$, contudo, existem casos especiais onde também se obtêm resultados finitos para $\omega < \omega(R)$, por exemplo, o caso inverso do caso 2, outro é o caso da polarização do vácuo no modelo de Schwinger, visto no capítulo 2.

D.2 Unicidade da Fórmula de Bipartição Regular

A distribuição retardada tem a forma

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\theta}(p - k) \hat{d}(k) \quad (\text{D.32})$$

e no caso de 2-pontos

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\hat{d}(tp)}{1 - t + \operatorname{sgn}(p_0) i0^+} \quad (\text{D.33})$$

Essas fórmulas são obtidas por definição, então são únicas. Contudo, é possível propor as seguintes discussões:

1.- Uma distribuição regular de 2-pontos pode estar acompanhada por uma singular de ordem $\omega (\geq 0)$, então usamos a fórmula

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\hat{d}(tp)}{t^{\omega+1} (1 - t + \operatorname{sgn}(p_0) i0^+)} \quad (\text{D.34})$$

Este resultado é finito já que apresenta maior convergência que a original. E do caso 1 da seção prévia, temos que a diferença entre essas soluções é um polinômio que pode ser absorvido pelas condições de normalização.

2.- Outra solução convergente é dada pela fórmula:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\hat{d}(tp)}{t^{\omega+1} (1 - t + \operatorname{sgn}(p_0) i0^+)} \quad (\text{D.35})$$

onde agora $\omega < 0$ é a ordem da distribuição \hat{d} . Mas, esta fórmula não pode ser obtida por subtrações de polinômios.

Apêndice E

Lagrangianas de Gauge Fixing

Vamos a mostrar, de forma pragmática, como construir lagrangianas de gauge fixing. Por exemplo, temos que no eletromagnetismo de Maxwell, a lagrangiana é de primeiro ordem, então pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \partial A \cdot \partial A . \quad (\text{E.1})$$

onde A representa ao campo e ∂ derivadas de primeiro ordem, o produto é covariante e inclui possíveis constantes. Para essa teoria de primeiro ordem podemos encontrar uma lagrangiana equivalente via a transformação:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} - \partial \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial A)} A \right] . \quad (\text{E.2})$$

Substituindo a lagrangiana original \mathcal{L} , obtemos:

$$\mathcal{L}' = -A [\partial \partial A] \quad (\text{E.3})$$

Nessa expressão identificamos que a equação de movimento tem a forma:

$$\partial \partial A = 0 , \quad (\text{E.4})$$

que é uma equação de segunda ordem. Se temos como critério que o aditamento de uma lagrangiana de gauge fixing não muda o ordem da equação de movimento, então essa lagrangiana deve ter a forma:

$$\mathcal{L}_{fix} = \partial A \cdot \partial A . \quad (\text{E.5})$$

No caso do eletromagnetismo de Podolsky, a lagrangiana é de segunda ordem, então pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \partial A \cdot \partial A + (\partial \partial A) \cdot (\partial \partial A) . \quad (\text{E.6})$$

Para essa teoria de segunda ordem podemos encontrar uma lagrangiana equivalente via a transformação:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} - \partial \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \partial A)} \partial A + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial A)} - \partial \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \partial A)} \right] A \right\} . \quad (\text{E.7})$$

Substituindo a lagrangiana original \mathcal{L} , obtemos:

$$\mathcal{L}' = -A [\partial\partial A] + A [\partial\partial\partial\partial A] \quad (\text{E.8})$$

Nessa expressão identificamos que a equação de movimento tem a forma:

$$\partial\partial A - \partial\partial\partial\partial A = 0, \quad (\text{E.9})$$

que é uma equação de quarta ordem. Sendo o critério do aditamento de uma lagrangiana de gauge fixing, a não mudança da ordem da equação de movimento, então essa lagrangiana deve ter a forma:

$$\mathcal{L}_{fix} = (\partial\partial A) \cdot (\partial\partial A) . \quad (\text{E.10})$$

Outra possibilidade, equivalente é

$$\mathcal{L}_{fix} = (\partial A) \cdot (\partial\partial\partial A) . \quad (\text{E.11})$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, podemos encontrar a forma da lagrangiana de gauge fixing para uma teoria de ordem superior qualquer, a base é considerar o critério:

A lagrangiana de gauge fixing não muda o ordem da equação de movimento.

Apêndice F

Gauge fixing não misturado

No eletromagnetismo de Podolsky o campo elétrico livre satisfaz a seguinte equação:

$$\left(1 + \frac{1}{m_a^2} \square\right) \square \vec{E} = 0 \quad (\text{F.1})$$

A teoria de campos desse modelo considera como campo fundamental ao campo potencial eletromagnético, A^μ . E para esse campo considera a seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a}{2} \partial_\mu F^{\mu\sigma} \partial^\nu F_{\nu\sigma} . \quad (\text{F.2})$$

onde $a = \frac{1}{m_a}$. Daí obtemos a equação de movimento do campo A^μ

$$\left(1 + \frac{1}{m_a^2} \square\right) (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu = 0 . \quad (\text{F.3})$$

Por simples observação vemos que o campo fundamental vai satisfazer a mesma equação do campo físico se, adicionalmente, considerarmos a condição de gauge de Lorenz generalizada:

$$\Omega[A] = \left(1 + \frac{1}{m_a^2} \square\right) \partial_\mu A^\mu = 0 . \quad (\text{F.4})$$

Para considerar essa condição na teoria de campos, o método usual é aditar à lagrangiana o seguinte termo:

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\xi} \Omega^2[A] = -\frac{1}{2\xi} \left[\left(1 + \frac{1}{m_a^2} \square\right) \partial_\mu A^\mu \right]^2 \quad (\text{F.5})$$

Mas isso nos leva à seguinte equação de movimento:

$$\left[(1 + a^2 \square) (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) + \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{1}{m_a^2} \square\right)^2 \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu = 0 . \quad (\text{F.6})$$

Observando que para nenhum ξ , a equação de movimento se reduz á equação do campo físico.

Essa dificuldade pode ser corrigida se considerarmos como lagrangiana de gauge fixing a:

$$\mathcal{L}_{fix}^{no-mix} = -\frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A) \left(1 + \frac{1}{m_a^2} \square\right) (\partial \cdot A) , \quad (\text{F.7})$$

onde $\partial.A = \partial_\mu A^\mu$.

Porque ao considerar essa, obtemos a seguinte equação de movimento:

$$(1 + a^2 \square) \left[(\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) + \frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu = 0. \quad (\text{F.8})$$

Daqui vemos que para $\xi = 1$, o campo fundamental satisfaz a mesma equação do campo físico. Para explicar a lagrangiana $\mathcal{L}_{fix}^{no-mix}$, no método usual, escrevamos essa da forma:

$$\mathcal{L}_{fix}^{no-mix} = -\frac{1}{2\xi} F^2 [A]. \quad (\text{F.9})$$

O que supõe como condição de gauge:

$$F [A] = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{m_a^2} \square\right)} (\partial.A) = 0. \quad (\text{F.10})$$

Vamos a provar que esta nos leva efetivamente à lagrangiana $\mathcal{L}_{fix}^{no-mix}$. Seguindo [58], temos que o operador diferencial

$$\mathcal{D}^2 \equiv 1 + \frac{1}{m_a^2} \square, \quad (\text{F.11})$$

agindo sobre uma função φ , infinitamente diferenciável, pode ser escrito como:

$$(\mathcal{D}^2 \varphi)(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4 k \left(1 - \frac{k^2}{m_a^2}\right) \hat{\varphi}(k) e^{ikx} \quad (\text{F.12})$$

onde $\hat{\varphi}$ é a transformada de Fourier de φ , definida como

$$\hat{\varphi}(k) = (2\pi)^{-2} \int d^4 y \varphi(y) e^{-iky} \quad (\text{F.13})$$

Substituindo essa expressão obtemos que o operador diferencial \mathcal{D}^2 pode ser definido como:

$$(\mathcal{D}^2 \varphi)(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4 y \int d^4 k \left(1 - \frac{k^2}{m_a^2}\right) \varphi(y) e^{ik(x-y)} \quad (\text{F.14})$$

Seguindo essa ideia o operador pseudodiferencial \mathcal{D} , denotado como

$$\mathcal{D} \equiv \sqrt{\left(1 + \frac{1}{m_a^2} \square\right)}, \quad (\text{F.15})$$

pode ser definido como

$$(\mathcal{D}\varphi)(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4 y \int d^4 k \sqrt{1 - \frac{k^2}{m_a^2}} \varphi(y) e^{ik(x-y)} \quad (\text{F.16})$$

Daí temos que a lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\mathcal{D}\varphi)^2(x) = [(\mathcal{D}\varphi)(x)] [(\mathcal{D}\varphi)(x)] \\ &= (2\pi)^{-8} \int d^4 z \int d^4 y \int d^4 k \int d^4 \kappa \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{m_a^2}\right) \left(1 - \frac{\kappa^2}{m_a^2}\right)} \\ &\quad \cdot \varphi(y) \varphi(z) e^{ix(k+\kappa)} e^{i(-ky-\kappa z)}. \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

Contribui á ação em:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \int d^4x (\mathcal{D}\varphi)^2(x) \\
&= (2\pi)^{-8} \int d^4z \int d^4y \int d^4k \int d^4\kappa \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{m_a^2}\right) \left(1 - \frac{\kappa^2}{m_a^2}\right)} \\
&\quad \cdot \varphi(y) \varphi(z) e^{i(-ky - \kappa z)} \int d^4x e^{ix(k+\kappa)}. \quad (\text{F.18})
\end{aligned}$$

Identificando a distribuição $\delta(k + \kappa)$:

$$\mathcal{S} = \int d^4x (\mathcal{D}\varphi)^2(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4z \varphi(z) \int d^4y \int d^4k \left(1 - \frac{k^2}{m_a^2}\right) \varphi(y) e^{ik(z-y)}, \quad (\text{F.19})$$

e $(\mathcal{D}^2\varphi)(z)$, finalmente obtemos que:

$$\mathcal{S} = \int d^4x (\mathcal{D}\varphi)^2(x) = \int d^4z \varphi(z) (\mathcal{D}^2\varphi)(z) \quad (\text{F.20})$$

Substituindo $\varphi = (\partial.A)$, obteremos a seguinte equivalência para a lagrangiana de gauge fixing

$$\mathcal{L}_{fix}^{no-mix} = -\frac{1}{2\xi} F^2[A] \iff -\frac{1}{2\xi} (\partial.A) \left(1 + \frac{1}{m_a^2} \square\right) (\partial.A). \quad (\text{F.21})$$

Apêndice G

Campo Elétrico Livre

Na teoria clássica do eletromagnetismo de Podolsky, temos que no vácuo o campo elétrico satisfaz as seguintes equações:

$$(\square + m_a^2) \square \vec{E} = 0 \quad (\text{G.1})$$

$$(\square + m_a^2) \nabla \cdot \vec{E} = 0. \quad (\text{G.2})$$

As soluções dessas equações são:

$$\vec{E}(x) = \int d^3y D_0(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0 \vec{E}(y) + \int d^3y \frac{1}{m_a^2} (D_0 - D_{m_a})(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0 \square \vec{E}(y) \quad (\text{G.3})$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(x) = \int d^3y D_{m_a}(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0 \nabla \cdot \vec{E}(y). \quad (\text{G.4})$$

onde D_0, D_{m_a} são os propagadores escalares causais de massa 0 e m_a , respectivamente.

Da equação (G.2) podemos encontrar que:

$$\square [(\square + m_a^2) \nabla \cdot \vec{E}] = 0. \quad (\text{G.5})$$

Com solução:

$$(\square + m_a^2) \nabla \cdot \vec{E}(x) = \int d^3y D_0(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0 [(\square + m_a^2) \nabla \cdot \vec{E}(y)]. \quad (\text{G.6})$$

Para que seja nulo em todo instante devemos ter que:

$$(\square + m_a^2) \nabla \cdot \vec{E}_{t_0} = 0 \quad (\text{G.7})$$

$$[\partial_0 (\square + m_a^2) \nabla \cdot \vec{E}]_{t_0} = 0. \quad (\text{G.8})$$

Definindo o "campo elétrico de Maxwell", $\vec{E}^{Max}(x)$, como:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{Max}(x) &= \int d^3y D_0(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0 \left[\vec{E}(y) + \frac{1}{m_a^2} \square \vec{E}(y) \right] \\ &= \int d^3y D_0(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0 [1 + a^2 \square] \vec{E}(y). \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Encontramos que :

$$\begin{aligned}\square \vec{E}^{Max} &= 0 \\ \vec{E}_{t_0}^{Max} &= [1 + a^2 \square] \vec{E}_{t_0} .\end{aligned}\tag{G.10}$$

E também:

$$\nabla \cdot \vec{E}^{Max}(x) = \int d^3y D_0(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0^y [1 + a^2 \square] \nabla \cdot \vec{E}(y) = 0 .\tag{G.11}$$

Similarmente se definimos o "campo elétrico de Proca", $\vec{E}^{Pro}(x)$, como:

$$\vec{E}^{Pro}(x) = -\frac{1}{m_a^2} \int d^3y D_{m_a}(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0^y \square \vec{E}(y)\tag{G.12}$$

Encontramos que:

$$\begin{aligned}(\square + m_a^2) \vec{E}^{Pro} &= 0 \\ \vec{E}_{t_0}^{Pro} &= -a^2 \square \vec{E}_{t_0} .\end{aligned}\tag{G.13}$$

E

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}^{Pro}(x) &= - \int d^3y D_{m_a}(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0^y (a^2 \square) \nabla \cdot \vec{E}(y) \\ &= - \int d^3y D_{m_a}(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0^y (1 + a^2 \square) \nabla \cdot \vec{E}(y) \\ &\quad + \int d^3y D_{m_a}(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0^y \nabla \cdot \vec{E}(y)\end{aligned}\tag{G.14}$$

Então:

$$\nabla \cdot \vec{E}^{Pro}(x) = \int d^3y D_{m_a}(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0^y \nabla \cdot \vec{E}(y) .\tag{G.15}$$

Apêndice H

Potencial Eletrostático de Podolsky

Encontramos que o propagador no limite estático, que é proporcional ao campo eletrostático gerado por uma carga pontual, é expresso como:

$$\begin{aligned}\hat{D}_{\mu\nu,\xi=1}^{F,Podolsky}(\mathbf{k}) &= (2\pi)^{-2} g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{\mathbf{k}^2 - i0^+} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_a^2 - i0^+} \right] \\ &= (2\pi)^{-2} m_a^2 g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{(\mathbf{k}^2 - i0^+)(\mathbf{k}^2 + m_a^2 - i0^+)} \right]\end{aligned}\quad (\text{H.1})$$

Então para encontrar o potencial, devemos calcular esse propagador no espaço de configurações, isto é calcular a transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}D_{\mu\nu,\xi=1}^{F,Podolsky}(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \hat{D}_{\mu\nu,\xi=1}^{F,Podolsky}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= (2\pi)^{-7/2} m_a^2 g_{\mu\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \left[\frac{1}{(\mathbf{k}^2 - i0^+)(\mathbf{k}^2 + m_a^2 - i0^+)} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (\text{H.2})$$

Da simetria

$$D_{\mu\nu,\xi=1}^{F,Podolsky}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-5/2} m_a^2 g_{\mu\nu} \int_0^{+\infty} dk \left[\frac{k^2}{(k^2 - i0^+)(k^2 + m_a^2 - i0^+)} \right] \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{ikr \cos\theta}\quad (\text{H.3})$$

onde $k = |\mathbf{k}|$, $r = |\mathbf{x}|$. Então

$$D_{\mu\nu,\xi=1}^{F,Podolsky}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-5/2} \frac{m_a^2 g_{\mu\nu}}{ir} \int_0^{+\infty} dk \left[\frac{k}{(k^2 - i0^+)(k^2 + m_a^2 - i0^+)} \right] (e^{ikr} - e^{-ikr})\quad (\text{H.4})$$

Sendo o integrando par:

$$D_{\mu\nu,\xi=1}^{F,Podolsky}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-5/2} \frac{m_a^2 g_{\mu\nu}}{2ir} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\frac{k}{(k^2 - i0^+)(k^2 + m_a^2 - i0^+)} \right] (e^{ikr} - e^{-ikr})\quad (\text{H.5})$$

No denominador temos o segundo termo têm zeros em $k = \pm im_a$, então seu deslocamento $-i0^+$ não é necessário. E da relação:

$$\frac{k}{k^2 - i0^+} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k + i0^+} + \frac{1}{k - i0^+} \right) \quad (\text{H.6})$$

Então:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu, \xi=1}^{F, Podolsky}(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-5/2} \frac{m_a^2 g_{\mu\nu}}{4ir} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{(k + i0^+)(k^2 + m_a^2)} e^{ikr} \\ &\quad - (2\pi)^{-5/2} \frac{m_a^2 g_{\mu\nu}}{4ir} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{(k + i0^+)(k^2 + m_a^2)} e^{-ikr} \\ &\quad + \{+i0^+ \rightarrow -i0^+\} \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

Calculando as integrais pelo método dos resíduos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{(k + i0^+)(k^2 + m_a^2)} e^{ikr} = 2\pi i \frac{e^{-m_a r}}{(im_a)(2im_a)} = -\frac{i\pi}{m_a^2} e^{-m_a r} \quad (\text{H.8})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{(k + i0^+)(k^2 + m_a^2)} e^{-ikr} = -2\pi i \left[\frac{e^{-m_a r}}{(-im_a)(-2im_a)} + \frac{1}{m_a^2} \right] = \frac{i\pi}{m_a^2} e^{-m_a r} - 2\pi i \frac{1}{m_a^2} \quad (\text{H.9})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{(k - i0^+)(k^2 + m_a^2)} e^{ikr} = 2\pi i \left[\frac{e^{-m_a r}}{(im_a)(2im_a)} + \frac{1}{m_a^2} \right] = -\frac{i\pi}{m_a^2} e^{-m_a r} + 2\pi i \frac{1}{m_a^2} \quad (\text{H.10})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{(k - i0^+)(k^2 + m_a^2)} e^{-ikr} = -2\pi i \frac{e^{-m_a r}}{(-im_a)(-2im_a)} = \frac{i\pi}{m_a^2} e^{-m_a r} \quad (\text{H.11})$$

Portanto,

$$D_{\mu\nu, \xi=1}^{F, Podolsky}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \frac{g_{\mu\nu}}{2r} (1 - e^{-m_a r}) \quad (\text{H.12})$$

Ou

$$D_{\mu\nu, \xi=1}^{F, Podolsky}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1/2} g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \left(1 - e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{a}} \right) \right]. \quad (\text{H.13})$$

onde $a = \frac{1}{m_a}$. Obtemos assim um limite estático consistente com a lei generalizada de Coulomb.

Apêndice I

Espalhamento entre duas partículas

Uma colisão ou espalhamento entre duas partículas pode ser do tipo dispersão elástica ou dado por processos inelásticos (dispersão inelástica e reações). A colisão é dita elástica se os estados intrínsecos das partículas envolvidas não são afetados pela colisão, enquanto que em colisões inelásticas os estados intrínsecos são modificados em uma ou ambas partículas; em reações, as partículas finais não são as mesmas que as iniciais.

Lembrando que nas colisões consideradas temos partículas iniciais e finais o suficientemente separadas tal que elas são consideradas livres (asintoticamente livres), então, as dispersões e reações podem ser descritas pelo operador de dispersão S , cujos elementos de matriz formam a conhecida *Matriz S*.

I.1 Canais de Reação

Definiremos o *canal de reação* como o estado provável do sistema, então se $|\varphi_\alpha\rangle, |\varphi_\beta\rangle$ são os estados inicial e final, respectivamente, do sistema teremos que α é o canal de entrada e β o canal de saída. O canal é descrito pela energia do movimento relativo das partículas e os números quânticos associados com os estados intrínsecos. Para uma dispersão elástica o canal de saída é igual ao canal de entrada ($\alpha = \beta$), se o canal de saída é diferente ao canal de entrada ($\alpha \neq \beta$) pode ser uma dispersão inelástica ou uma reação.

Seja por exemplo a seguinte colisão:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (\text{I.1})$$

onde 1, 2 são as partículas iniciais e 3, 4 as partículas finais. Segundo o princípio de conservação da energia-momento (p):

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 . \quad (\text{I.2})$$

Se m_i é a massa da partícula i ($= 1, 2, 3, 4$), e como as partículas são assintoticamente livres, elas estão na camada de massa:

$$p_i^2 = m_i^2 , \quad (\text{I.3})$$

daí o estado da partícula pode ser caracterizado pelo momento, sendo a energia implícita.

Agora introduziremos as variáveis invariantes:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad (\text{I.4})$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \quad (\text{I.5})$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \quad (\text{I.6})$$

conhecidas como as *variáveis de Mandelstam* [52]. E da condição (I.3), podemos mostrar a propriedade:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2, \quad (\text{I.7})$$

daí vemos que o número de variáveis independentes se reduz a dois.

Pode-se observar que no referencial do centro de massa, s é o quadrado da energia total e t e u são associados à transferência de momento. Assim a colisão (I.1) é conhecido como o *canal s*.

Nesta teoria de colisões é possível definir a operação conhecida como *crossing*, a qual consiste em intercambiar uma partícula (antipartícula) entrante por a correspondente antipartícula (partícula) saínte.

Por exemplo um crossing de (I.1) é a colisão:

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4 \quad (\text{I.8})$$

sendo $p_{\bar{3}}, p_{\bar{2}}$ as energia-momento das antipartículas $\bar{3}, \bar{2}$ respectivamente. Se definimos as quantidades: $p_3 = -p_{\bar{3}}, p_2 = -p_{\bar{2}}$; teremos como as correspondentes variáveis de Mandelstam:

$$s' = (p_1 + p_{\bar{3}})^2 = (p_1 - p_3)^2 = t \quad (\text{I.9})$$

$$t' = (p_1 - p_{\bar{2}})^2 = (p_1 + p_2)^2 = s \quad (\text{I.10})$$

$$u' = (p_1 - p_4)^2 = u \quad (\text{I.11})$$

Este é o conhecido *canal t*.

Outro crossing possível é a colisão:

$$1 + \bar{4} \rightarrow 3 + \bar{2} \quad (\text{I.12})$$

sendo $p_{\bar{4}}, p_{\bar{2}}$ as energia-momento das antipartículas $\bar{4}, \bar{2}$ respectivamente. Se definimos as quantidades: $p_4 = -p_{\bar{4}}, p_2 = -p_{\bar{2}}$; teremos como as correspondentes variáveis de Mandelstam:

$$s'' = (p_1 + p_{\bar{4}})^2 = (p_1 - p_4)^2 = u \quad (\text{I.13})$$

$$t'' = (p_1 - p_3)^2 = t \quad (\text{I.14})$$

$$u'' = (p_1 - p_{\bar{2}})^2 = (p_1 + p_2)^2 = s \quad (\text{I.15})$$

Este é o conhecido *canal u*.

Desses resultados vemos que podemos passar do canal s ao canal t se fazemos a substituição $s \leftrightarrow t$, e ao canal u se fazemos a substituição $s \leftrightarrow u$.

Um caso comum em eletrodinâmica é a dispersão (elástica) elétron-elétron:

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- \quad (\text{I.16})$$

também conhecida como *espalhamento Moeller*. Se consideramos esse como o canal s , o espalhamento elétron-pósitron:

$$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+ \quad (\text{I.17})$$

também conhecida como *espalhamento Bhabha*, é o canal u e pode-se obter fazendo a substituição $s \leftrightarrow u$ em Moeller.

Outro caso importante é espalhamento elétron-fóton:

$$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma \quad (\text{I.18})$$

também conhecida como *espalhamento Compton*. Se consideramos esse como o canal s , a aniquilação elétron-pósitron em dois fótons:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \quad (\text{I.19})$$

é o canal t e pode-se obter fazendo a substituição $s \leftrightarrow t$ em Compton.

E a criação do par elétron-pósitron por dois fótons:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+ \quad (\text{I.20})$$

é também o canal t mas com todos os momentos com sinal trocada.

I.2 Amplitude de Transição

Na teoria da *Matriz S*, a quantidade diretamente deduzível é a amplitude de transição. Por exemplo, para a colisão (I.1) temos que a amplitude pode ser expressa como:

$$S_{fi} = \langle \mathbf{p}_3 | \otimes \langle \mathbf{p}_4 | S | \mathbf{p}_1 \rangle \otimes | \mathbf{p}_2 \rangle . \quad (\text{I.21})$$

Sendo a forma geral do operador de dispersão:

$$S = 1 + T . \quad (\text{I.22})$$

Então podemos expressar S_{fi} como

$$S_{fi} = (\langle \mathbf{p}_3 | \otimes \langle \mathbf{p}_4 |) (| \mathbf{p}_1 \rangle \otimes | \mathbf{p}_2 \rangle) + \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) M . \quad (\text{I.23})$$

O primeiro termo contribui somente no caso de não interação, então temos como caso não trivial:

$$S_{fi}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) M, \quad (\text{I.24})$$

onde vemos que a presença da δ -Dirac da conta da conservação da energia-momento, mas também que S_{fi} é uma distribuição. Nessa expressão M é uma função analítica dos momentos (ou das variáveis de Mandelstam).

Então não é possível calcular diretamente a probabilidade de transição $|S_{fi}|^2$, para que isto tenha sentido, devemos expressar a amplitude de transição em termo dos pacotes de onda:

$$|\varphi_i\rangle = \int d^3p_1 d^3p_2 \varphi_i(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) |\mathbf{p}_1\rangle \otimes |\mathbf{p}_2\rangle \quad (\text{I.25})$$

$$|\varphi_f\rangle = \int d^3p_3 d^3p_4 \varphi_f(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) |\mathbf{p}_3\rangle \otimes |\mathbf{p}_4\rangle. \quad (\text{I.26})$$

Então a amplitude de transição pode-se escrever como:

$$S_{fi} = \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4 \varphi_f^*(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) S_{fi}(p_1, p_2, p_3, p_4) \varphi_i(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2). \quad (\text{I.27})$$

Agora sim tem sentido escrever a probabilidade de transição como:

$$p_{fi} = |S_{fi}|^2. \quad (\text{I.28})$$

Considerando um conjunto completo de pacotes de onda finais $\{\varphi_f\}$, e então:

$$\sum_f \varphi_f^*(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \varphi_f(\mathbf{p}'_3, \mathbf{p}'_4) = \delta(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}'_3) \delta(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}'_4). \quad (\text{I.29})$$

Com isso obtemos que a probabilidade de transição, considerando todos os pacotes finais, é dado por:

$$\begin{aligned} & \sum_f p_{fi} \\ &= \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p'_1 d^3p'_2 d^3p_3 d^3p_4 M(p_1, p_2, p_3, p_4) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ & \quad \times M^*(p'_1, p'_2, p_3, p_4) \delta(p'_1 + p'_2 - p_3 - p_4) \varphi_i(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \varphi_i^*(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2). \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

Especificando os pacotes de onda de cada partícula inicial:

$$\varphi_i(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \varphi_1(\mathbf{p}_1) \varphi_2(\mathbf{p}_2) \quad (\text{I.31})$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_f p_{fi} \\ &= \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p'_1 d^3p'_2 d^3p_3 d^3p_4 M(p_1, p_2, p_3, p_4) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ & \quad \times M^*(p'_1, p'_2, p_3, p_4) \delta(p'_1 + p'_2 - p_3 - p_4) \varphi_1(\mathbf{p}_1) \varphi_2(\mathbf{p}_2) \varphi_1^*(\mathbf{p}'_1) \varphi_2^*(\mathbf{p}'_2) \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

Experimentalmente pode-se preparar pacotes de onda φ_1, φ_2 tal que estes sejam apenas não nulos para valores de momento diferentes a $\mathbf{p}_{1i}, \mathbf{p}_{2i}$, respectivamente. Então se M é uma função suave dos momentos obteremos que:

$$\sum_f p_{fi} = \int d^3 p_3 d^3 p_4 |M(p_{1i}, p_{2i}, p_3, p_4)|^2 \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2 \delta(p'_1 + p'_2 - p_3 - p_4) \times \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \varphi_1(\mathbf{p}_1) \varphi_2(\mathbf{p}_2) \varphi_1^*(\mathbf{p}'_1) \varphi_2^*(\mathbf{p}'_2) . \quad (\text{I.33})$$

Analisemos a segunda integral:

$$I(p) = \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2 \delta(p'_1 + p'_2 - p_3 - p_4) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \cdot \varphi_1(\mathbf{p}_1) \varphi_2(\mathbf{p}_2) \varphi_1^*(\mathbf{p}'_1) \varphi_2^*(\mathbf{p}'_2) , \quad (\text{I.34})$$

onde $p = p_3 + p_4$. Substituindo em ela a identidade:

$$\delta(p) = (2\pi)^{-4} \int e^{\pm i p x} d^4 x . \quad (\text{I.35})$$

Obteremos:

$$\begin{aligned} I(p) &= (2\pi)^{-8} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2 \\ &\quad \times e^{-i(p_1+p_2-p)x_1} e^{i(p'_1+p'_2-p)x_2} \varphi_1(\mathbf{p}_1) \varphi_2(\mathbf{p}_2) \varphi_1^*(\mathbf{p}'_1) \varphi_2^*(\mathbf{p}'_2) \\ &= (2\pi)^{-8} \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{ip(x_1-x_2)} \int d^3 p_1 \varphi_1(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 x_1} \int d^3 p_2 \varphi_2(\mathbf{p}_2) e^{-ip_2 x_1} \\ &\quad \cdot \int d^3 p'_1 \varphi_1^*(\mathbf{p}'_1) e^{ip'_1 x_2} \int d^3 p'_2 \varphi_2^*(\mathbf{p}'_2) e^{ip'_2 x_2} . \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

Introduzindo o pacote de onda no espaço de configurações:

$$\tilde{\varphi}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3 p \varphi_1(\mathbf{p}) e^{-ipx} . \quad (\text{I.37})$$

Obteremos:

$$I(p) = (2\pi)^{-2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \tilde{\varphi}_1(x_1) \tilde{\varphi}_2(x_1) \tilde{\varphi}_1^*(x_2) \tilde{\varphi}_2^*(x_2) e^{ip(x_1-x_2)} . \quad (\text{I.38})$$

Daqui e da identidade (I.35) podemos mostrar que $I(p)$ é normalizado como:

$$\int d^4 p I(p) = (2\pi)^2 \int d^4 x |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2 . \quad (\text{I.39})$$

Como foi dito estamos considerando pacotes de onda incidentes não nulos apenas para valores de momento diferentes a $\mathbf{p}_{1i}, \mathbf{p}_{2i}$. Então teremos que no limite $I(p)$ tem suporte concentrado em $p = p_3 + p_4 = p_1 + p_2 \approx p_{1i} + p_{2i}$, daí essa pode ser uma combinação linear de derivadas da distribuição δ , vamos assumir (caso mais simple) que essa tem a forma:

$$I(p) = \delta(p - p_{1i} - p_{2i}) (2\pi)^2 \int d^4 x |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2 . \quad (\text{I.40})$$

Substituindo na expressão da probabilidade de transição (I.33) obteremos:

$$\sum_f p_{fi} = \int d^3 p_3 d^3 p_4 |M(p_{1i}, p_{2i}, p_3, p_4)|^2 \delta(p - p_{1i} - p_{2i}) (2\pi)^2 \int d^4 x |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2 . \quad (\text{I.41})$$

Como os pacotes de onda tem momento concentrado, podemos afirmar que as funções de onda no espaço de configurações praticamente não perdem sua forma com o tempo. Consideremos a partícula 2 massiva e, então pode-se interpretar como o alvo em repouso:

$$\tilde{\varphi}_2(x) = \phi_2(\mathbf{x}) . \quad (\text{I.42})$$

E a partícula 1 dirigindo-se a ela com velocidade \mathbf{v} :

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \phi_1(\mathbf{x} + \mathbf{v}t) . \quad (\text{I.43})$$

Experimentalmente não se tem uma única partícula incidente, mas sim um feixe de partículas livres (suficientemente separadas). Podemos caracterizar cada pacote como centrada em diferentes pontos: $\phi_1(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}t)$. Sendo o número de partículas do feixe indeterminado, é razoável considerar uma média contínua delas na seção transversal de um cilindro de raio R , então devemos fazer a substituição:

$$|\tilde{\varphi}_1(x)|^2 \rightarrow \frac{1}{\pi R^2} \int_{|\mathbf{x}_{1\perp}|} d^2 x_{1\perp} |\phi_1(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}t)|^2 \quad (\text{I.44})$$

Daí:

$$\begin{aligned} \int d^4 x |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2 &\rightarrow \frac{1}{\pi R^2} \int_{|\mathbf{x}_{1\perp}|} d^2 x_{1\perp} \int d^4 x |\phi_1(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}t)|^2 |\phi_2(\mathbf{x})|^2 \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{|\mathbf{x}_{1\perp}|} d^2 x_{1\perp} \int dt \int d^3 x |\phi_1(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}t)|^2 |\phi_2(\mathbf{x})|^2 \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \frac{1}{|\mathbf{v}|} \int_{|\mathbf{x}_{1\perp}|} d^3 x_1 \int d^3 x |\phi_1(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1)|^2 |\phi_2(\mathbf{x})|^2 . \end{aligned} \quad (\text{I.45})$$

Sendo os pacotes de onda normalizados, então:

$$\int d^4 x |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2 \rightarrow \frac{1}{\pi R^2} \frac{1}{|\mathbf{v}|} \quad (\text{I.46})$$

Finalmente, substituindo em (I.41) obteremos a probabilidade de transição é dado por:

$$\sum_f p_{fi}(R) = \frac{1}{\pi R^2} \left[(2\pi)^2 \frac{1}{|\mathbf{v}|} \int d^3 p_3 d^3 p_4 |M(p_{1i}, p_{2i}, p_3, p_4)|^2 \delta(p - p_{1i} - p_{2i}) \right] . \quad (\text{I.47})$$

Observamos que o termo entre colchetes pode ser interpretado como a área eficaz de interação, definindo essa quantidade independente do radio:

$$\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi R^2 \sum_f p_{fi}(R) = (2\pi)^2 \frac{1}{|\mathbf{v}|} \int d^3p_3 d^3p_4 |M(p_{1i}, p_{2i}, p_3, p_4)|^2 \delta(p - p_{1i} - p_{2i}).$$

(I.48)

ela é usualmente conhecida como *seção de choque total*. Essa quantidade é equivalente à taxa entre a intensidade de partículas dispersadas e o fluxo de partículas incidentes. Essa definição tem uma realidade experimental e, então pode ser comparada com a expressão teórica.

Outra quantidade experimental é a seção de choque diferencial cuja definição é parecida à seção de choque total mas considerando as partículas dispersadas em um ângulo sólido dado.

Apêndice J

Matrizes- γ de Dirac

A álgebra das matrizes- γ de Dirac é dado como segue:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{J.1})$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico no espaço de Minkowski. A partir dessa relação se deduz que:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4, \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu = -2\gamma^\alpha, \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 4g^{\alpha\beta} \quad (\text{J.2})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\mu = -2\gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\alpha, \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\mu = 2(\gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\rho) \quad (\text{J.3})$$

Se A, B, \dots são vectores tal que definimos a quantidade \not{A} como: $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$, então se satisfazem as relações:

$$\not{A}^2 = A^2, \gamma_\mu \not{A} \gamma^\mu = -2 \not{A}, \gamma_\mu \not{A} \not{B} \gamma^\mu = 4AB, \quad (\text{J.4})$$

$$\gamma_\mu \not{A} \not{B} \not{C} \gamma^\mu = -2 \not{C} \not{B} \not{A}, \gamma_\mu \not{A} \not{B} \not{C} \not{D} \gamma^\mu = 2(\not{D} \not{A} \not{B} \not{C} + \not{C} \not{B} \not{A} \not{D}) \quad (\text{J.5})$$

Também serão necessários os cálculos dos seguintes traços:

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, Tr(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = 4(g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}), \quad (\text{J.6})$$

e destas relações se deduz que

$$Tr(\not{A} \not{B}) = 4AB, Tr(\not{A} \not{B} \not{C} \not{D}) = 4[(AB)(CD) - (AC)(BD) + (AD)(BC)], \quad (\text{J.7})$$

E se pode mostrar que para um número ímpar de matrizes- γ

$$tr(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n-1}}) = 0, n = 1, 2, \dots \quad (\text{J.8})$$

Aplicaremos essas propriedades para calcular o traço seguinte :

$$\begin{aligned} & tr[\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} - \not{p} - m)] \\ &= tr[\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu (\not{k} - \not{p}) - \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu m + \gamma^\mu \gamma^\nu (\not{k} - \not{p}) m - \gamma^\mu \gamma^\nu m^2] \\ &= tr[\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu (\not{k} - \not{p})] - tr[\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu] m + tr[\gamma^\mu \gamma^\nu (\not{k} - \not{p})] m - tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] m^2. \quad (\text{J.9}) \end{aligned}$$

Usando a propriedade do traço de uma quantidade ímpar de γ -s :

$$\begin{aligned}
& tr [\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} - \not{p} - m)] \\
&= tr [\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu (\not{k} - \not{p})] - tr [\gamma^\mu \gamma^\nu] m^2 \\
&= tr [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] p_\alpha (k_\beta - p_\beta) - tr [\gamma^\mu \gamma^\nu] m^2 .
\end{aligned} \tag{J.10}$$

E usando as propriedades dos casos pares de γ -s, obtemos:

$$\begin{aligned}
& tr [\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} - \not{p} - m)] \\
&= 4p^\mu (k^\nu - p^\nu) + 4p^\nu (k^\mu - p^\mu) - 4g^{\mu\nu} p (k - p) - 4g^{\mu\nu} m^2 \\
&= 4 [p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - 2p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} (pk - (p^2 - m^2))] .
\end{aligned} \tag{J.11}$$

Similarmente podemos calcular os seguintes traços:

*) M_1 :

$$\begin{aligned}
M_1 &= g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} tr [\gamma^\mu (\not{p}_f + m) \gamma^\alpha (\not{q}_i + m)] tr [\gamma^\nu (\not{q}_f + m) \gamma^\beta (\not{p}_i + m)] \\
&= tr [\gamma^\mu (\not{p}_f + m) \gamma^\alpha (\not{q}_i + m)] tr [\gamma_\mu (\not{q}_f + m) \gamma_\alpha (\not{p}_i + m)] \\
&= 16 [p_f^\mu q_i^\alpha + p_f^\alpha q_i^\mu - g^{\mu\alpha} p_f \cdot q_i + m^2 g^{\mu\alpha}] [q_{f\mu} p_{i\alpha} + q_{f\alpha} p_{i\mu} - g_{\mu\alpha} q_f \cdot p_i + m^2 g_{\mu\alpha}] \\
&= 16 [(p_f \cdot q_f) (q_i \cdot p_i) + (p_f \cdot p_i) (q_f \cdot q_i) - (q_f \cdot p_i) (p_f \cdot q_i) + m^2 (q_f \cdot p_i)] \\
&\quad + 16 [(p_f \cdot p_i) (q_f \cdot q_i) + (p_f \cdot q_f) (q_i \cdot p_i) - (q_f \cdot p_i) (p_f \cdot q_i) + m^2 (q_f \cdot p_i)] \\
&\quad - 16 [2 (p_f \cdot q_i) (q_f \cdot p_i) - 4 (p_f \cdot q_i) (q_f \cdot p_i) + 4m^2 (q_f \cdot p_i)] \\
&\quad + 16 [2m^2 (p_f \cdot q_i) - 4m^2 (p_f \cdot q_i) + 4m^4]
\end{aligned} \tag{J.12}$$

Simplificando:

$$M_1 = 8 [4 (p_f \cdot q_f) (q_i \cdot p_i) + 4 (p_f \cdot p_i) (q_f \cdot q_i) - 8m^2 (q_f \cdot p_i) + 8m^4] \tag{J.13}$$

*) N_1

$$\begin{aligned}
N_1 &= g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} tr [\gamma^\mu (\not{p}_f + m) \gamma^\alpha (\not{q}_i + m) \gamma^\nu (\not{q}_f + m) \gamma^\beta (\not{p}_i + m)] \\
&= 16 [-2 (p_i \cdot q_i) (p_f \cdot q_f) + m^2 (p_f \cdot q_i) + m^2 (p_i \cdot q_i) + m^2 (q_i \cdot q_f)] \\
&\quad + 16 [m^2 (p_i \cdot p_f) + m^2 (p_f \cdot q_f) + m^2 (p_i \cdot q_f) - 2m^4]
\end{aligned} \tag{J.14}$$

onde usamos os resultados:

$$g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} tr [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] = -2g_{\alpha\beta} tr [\gamma^\alpha \gamma^\beta] = -32 \tag{J.15}$$

$$g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} tr [\gamma^\mu \not{p}_f \gamma^\alpha \not{q}_i \gamma^\nu \gamma^\beta] = 4g_{\alpha\beta} tr [\not{q}_i \not{p}_f] = 16 (p_f \cdot q_i) \tag{J.16}$$

$$g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} tr [\gamma^\mu \gamma^\alpha \not{q}_i \gamma^\nu \gamma^\beta \not{p}_i] = 4tr [\not{q}_i \not{p}_i] = 16 (p_i \cdot q_i) \tag{J.17}$$

$$g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}tr [\gamma^\mu\gamma^\alpha \not{A}_i\gamma^\nu \not{A}_f\gamma^\beta] = g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}tr [\gamma^\alpha \not{A}_i\gamma^\nu \not{A}_f\gamma^\beta\gamma^\mu] = 16 (q_i \cdot q_f) \quad (\text{J.18})$$

$$g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}tr [\gamma^\mu \not{p}_f\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta \not{p}_i] = g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}tr [\gamma^\beta \not{p}_i\gamma^\mu \not{p}_f\gamma^\alpha\gamma^\nu] = 16 (p_i \cdot p_f) \quad (\text{J.19})$$

$$g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}tr [\gamma^\mu \not{p}_f\gamma^\alpha\gamma^\nu \not{A}_f\gamma^\beta] = g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}tr [\gamma^\beta\gamma^\mu \not{p}_f\gamma^\alpha\gamma^\nu \not{A}_f] = 16 (p_f \cdot q_f) \quad (\text{J.20})$$

$$g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}tr [\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu \not{A}_f\gamma^\beta \not{p}_i] = g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}tr [\gamma^\nu \not{A}_f\gamma^\beta \not{p}_i\gamma^\mu\gamma^\alpha] = 16 (p_i \cdot q_f) \quad (\text{J.21})$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}tr [\gamma^\mu \not{p}_f\gamma^\alpha \not{A}_i\gamma^\nu \not{A}_f\gamma^\beta \not{p}_i] &= -2g_{\alpha\beta}tr [\not{A}_i\gamma^\alpha \not{p}_f \not{A}_f\gamma^\beta \not{p}_i] \\ &= -2tr [\not{A}_i\gamma^\alpha \not{p}_f \not{A}_f\gamma^\alpha \not{p}_i] = -8 (p_f \cdot q_f) tr [\not{A}_i \not{p}_i] \\ &= -32 (p_i \cdot q_i) (p_f \cdot q_f) \end{aligned} \quad (\text{J.22})$$

Apêndice K

Convoluções Distribucionais

Consideremos os seguintes casos:

K.1 Cálculo da convolução: $\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)}$

A convolução $\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)}$ é definida como:

$$\left[\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)} \right] (k) = \int d^4p \hat{D}_m^{(+)}(p) \hat{D}_m^{(-)}(p-k) . \quad (\text{K.1})$$

Substituindo a definição dos propagadores de frequência positiva e negativa:

$$\hat{D}_m^{(+)}(p) = i(2\pi)^{-1} \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) , \quad (\text{K.2})$$

$$\hat{D}_m^{(-)}(p-k) = -i(2\pi)^{-1} \theta[-(p_0 - k_0)] \delta[(p-k)^2 - m^2] . \quad (\text{K.3})$$

Obtemos que:

$$\begin{aligned} & \left[\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)} \right] (k) \\ &= (2\pi)^{-2} \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \theta[-(p_0 - k_0)] \delta[(p-k)^2 - m^2] \\ &= (2\pi)^{-2} \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \theta[-(p_0 - k_0)] \delta(k^2 - 2pk) . \end{aligned} \quad (\text{K.4})$$

E da propriedade:

$$\theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2E_p} \delta(p_0 - E_p) \quad \text{onde} \quad E_p = \sqrt{p^2 + m^2} \geq m > 0 . \quad (\text{K.5})$$

Obteremos que:

$$\begin{aligned} & \left[\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)} \right] (k) \\ &= (2\pi)^{-2} \int d^4p \frac{1}{2E_p} \delta(p_0 - E_p) \theta[-(p_0 - k_0)] \delta(k^2 - 2pk) \\ &= (2\pi)^{-2} \int \frac{d^3p}{2E_p} \theta(k_0 - E_p) \delta(k^2 - 2E_p k_0 + 2\vec{p} \cdot \vec{k}) . \end{aligned} \quad (\text{K.6})$$

Como é possível escolher um sistema de referência de tal modo que $k = (k_0, \vec{0})$. Obtemos nesse sistema de referência:

$$\begin{aligned} \left[\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)} \right] (k) &= (2\pi)^{-2} \int \frac{d^3 p}{2E_p} \theta(k_0 - E_p) \delta(k_0^2 - 2E_p k_0) \\ &= (2\pi)^{-2} \int \frac{d^3 p}{2E_p} \theta(k_0 - E_p) \delta \left[2k_0 \left(\frac{k_0}{2} - E_p \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{K.7})$$

Usando a propriedade de escala $\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}$, obteremos:

$$\left[\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)} \right] (k) = (2\pi)^{-2} \frac{1}{|2k_0|} \int \frac{d^3 p}{2E_p} \theta(k_0 - E_p) \delta \left(\frac{k_0}{2} - E_p \right). \quad (\text{K.8})$$

Da definição $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ vemos que esta integral tem simetria esférica e como $E_p dE_p = |\vec{p}| d|\vec{p}|$:

$$\begin{aligned} &\left[\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)} \right] (k) \\ &= (2\pi)^{-2} \frac{1}{|2k_0|} \int \frac{4\pi |\vec{p}|^2 d|\vec{p}|}{2E_p} \theta(k_0 - E_p) \delta \left(\frac{k_0}{2} - E_p \right) \\ &= (2\pi)^{-2} \frac{\pi}{|k_0|} \int dE_p |\vec{p}| \theta(k_0 - E_p) \delta \left(\frac{k_0}{2} - E_p \right) \\ &= (2\pi)^{-2} \frac{\pi}{|k_0|} \int dE_p \left(\sqrt{E_p^2 - m^2} \right) \theta(E_p - m) \theta(k_0 - E_p) \delta \left(\frac{k_0}{2} - E_p \right) \\ &= (2\pi)^{-2} \frac{\pi}{|k_0|} \left(\sqrt{\left(\frac{k_0}{2} \right)^2 - m^2} \right) \theta \left(\frac{k_0}{2} - m \right) \theta \left(\frac{k_0}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{K.9})$$

Então:

$$\left[\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)} \right] (k) = (2\pi)^{-2} \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k_0^2}} \right) \theta(k_0 - 2m). \quad (\text{K.10})$$

E como $\theta(k_0 - 2m) = \theta(k_0^2 - 4m^2) \theta(k_0)$, finalmente, para um sistema de referência qualquer :

$$\left[\hat{D}_m^{(+)} * \hat{D}_m^{(-)} \right] (k) = (2\pi)^{-2} \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \right) \theta(k^2 - 4m^2) \theta(k_0). \quad (\text{K.11})$$

K.2 Cálculo de $I_1^{(-)}$

A função $I_1^{(-)}$ está definida pela integral:

$$I_1^{(-)}(p, M) = \int dq \hat{D}_M^{(-)}(p-q) \hat{D}_m^{(-)}(q), \quad (\text{K.12})$$

onde $\hat{D}_M^{(-)}(k) = -\frac{i}{2\pi} \delta(k^2 - M^2) \theta(-k^0)$. Para o referencial tal que $p = (p^0, \vec{0})$, $p^0 < 0$, teremos que:

$$\begin{aligned} & I_1^{(-)}(p_0, M) \\ &= -(2\pi)^{-2} \int d^4q \delta((p-q)^2 - M^2) \theta(-p_0 + q_0) \delta(q^2 - m^2) \theta(-q_0) \\ &= -(2\pi)^{-2} \int d^4q \delta(p_0^2 - 2p_0q_0 + m^2 - M^2) \theta(-p_0 + q_0) \delta(q^2 - m^2) \theta(-q_0). \end{aligned} \quad (\text{K.13})$$

Como por propriedade:

$$\delta(q^2 - m^2) \theta(-q^0) = \frac{\delta(q^0 + E_q)}{2E_q}, \quad (\text{K.14})$$

onde $E_q = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2} \geq m > 0$. Então:

$$\begin{aligned} I_1^{(-)}(p_0, M) &= -(2\pi)^{-2} \int d^4q \delta(p_0^2 - 2p_0q_0 + m^2 - M^2) \theta(-p_0 + q_0) \frac{\delta(q^0 + E_q)}{2E_q} \\ &= -(2\pi)^{-2} \int \frac{d^3q}{2E_q} \delta(p_0^2 + 2p_0E_q + m^2 - M^2) \theta(-p_0 - E_q). \end{aligned} \quad (\text{K.15})$$

Da simetria esférica do problema: $d^3q = 4\pi |\vec{q}|^2 d|\vec{q}|$, e da definição de E_q : $E_q dE_q = |\vec{q}| d|\vec{q}|$. Obtemos que:

$$d^3q = 4\pi \sqrt{E_q^2 - m^2} E_q dE_q, \quad (\text{K.16})$$

Em $I_1^{(-)}(p_0, M)$:

$$I_1^{(-)}(p_0, M) = -(2\pi)^{-1} \int_m^\infty dE_q \sqrt{E_q^2 - m^2} \theta(-p_0 - E_q) \delta(p_0^2 + 2p_0E_q + m^2 - M^2). \quad (\text{K.17})$$

Reescrevendo a distribuição δ :

$$\delta[p_0^2 + 2p_0E_q + m^2 - M^2] = \frac{1}{2|p_0|} \delta\left(E_q + \frac{p_0^2 + m^2 - M^2}{2p_0}\right). \quad (\text{K.18})$$

Assim vemos que:

$$\theta(-p_0 - E_q) \delta[p_0^2 + 2p_0E_q + m^2 - M^2] = \frac{1}{2|p_0|} \theta\left(\frac{m^2 - M^2 - p_0^2}{2p_0}\right) \delta\left(E_q + \frac{p_0^2 + m^2 - M^2}{2p_0}\right) \quad (\text{K.19})$$

Como $p_0 < -E_q < -m$:

$$\begin{aligned} & \theta(-p_0 - E_q) \delta[p_0^2 + 2p_0E_q + m^2 - M^2] \\ &= \frac{1}{2|p_0|} \theta(-p_0) \theta[p_0^2 - (m+M)^2] \delta\left(E_q + \frac{p_0^2 + m^2 - M^2}{2p_0}\right) \end{aligned} \quad (\text{K.20})$$

Em $I_1(p_0, M)$:

$$\begin{aligned}
& I_1^{(-)}(p_0, M) \\
&= -(2\pi)^{-1} \frac{1}{2|p_0|} \theta(-p_0) \theta[p_0^2 - (m+M)^2] \int_m^\infty dE_q \sqrt{E_q^2 - m^2} \delta\left(E_q + \frac{p_0^2 + m^2 - M^2}{2p_0}\right) \\
&= -(2\pi)^{-1} \frac{1}{4} \theta(-p_0) \theta[p_0^2 - (m+M)^2] \frac{\sqrt{p_0^4 - 2p_0^2(m^2 + M^2) + (m^2 - M^2)^2}}{p_0^2}. \quad (\text{K.21})
\end{aligned}$$

Num referencial qualquer:

$$I_1^{(-)}(p, M) = -(2\pi)^{-1} \frac{1}{4} \theta(-p_0) \theta[p^2 - (m+M)^2] \sqrt{1 - 2\frac{(m^2 + M^2)}{p^2} + \frac{(m^2 - M^2)^2}{p^4}}, \quad (\text{K.22})$$

onde $p \in \Gamma^-$.

Definindo a função $I^{(-)}$:

$$I^{(-)}(p, M) = (2\pi)^{-1} \theta(-p_0) \theta[p^2 - (m+M)^2] \sqrt{1 - 2\frac{(m^2 + M^2)}{p^2} + \frac{(m^2 - M^2)^2}{p^4}}. \quad (\text{K.23})$$

Podemos escrever $I_1^{(-)}$ simplesmente como:

$$I_1^{(-)}(p, M) = -\frac{1}{4} I^{(-)}(p, M). \quad (\text{K.24})$$

K.3 Cálculo de $I_3^{(-)}$

A função $I_3^{(-)}$ está definida pela integral:

$$I_3^{(-)}(p, M) = \int dq \not{q} \hat{D}_M^{(-)}(p-q) \hat{D}_m^{(-)}(q), \quad (\text{K.25})$$

onde $\hat{D}_M^{(-)}(k) = -\frac{i}{2\pi} \delta(k^2 - M^2) \theta(-k^0)$. No referencial $p = (p^0, \vec{0})$, $p^0 < 0$:

$$I_3^{(-)}(p_0, M) = -(2\pi)^{-2} \int d^4q \not{q} \delta(p_0^2 - 2p_0q_0 + m^2 - M^2) \theta(-p_0 + q_0) \delta(q^2 - m^2) \theta(-q_0) \quad (\text{K.26})$$

Vemos que as δ são pares em q_i , então:

$$I_3^{(-)}(p_0, M) = -(2\pi)^{-2} \gamma^0 \int d^4q q_0 \delta(p_0^2 - 2p_0q_0 + m^2 - M^2) \theta(-p_0 + q_0) \delta(q^2 - m^2) \theta(-q_0) \quad (\text{K.27})$$

Procedendo em forma similar a $I_1^{(-)}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
I_3^{(-)}(p_0, M) &= -(2\pi)^{-1} \frac{\gamma^0}{2|p_0|} \theta(-p_0) \theta[p_0^2 - (m+M)^2] \\
&\quad \times \int_m^\infty dE_q (-E_q) \sqrt{E_q^2 - m^2} \delta\left(E_q + \frac{p_0^2 + m^2 - M^2}{2p_0}\right) \\
&= -(2\pi)^{-1} \frac{\gamma^0 p_0}{8} \theta(-p_0) \theta[p_0^2 - (m+M)^2] \left(1 + \frac{m^2 - M^2}{p_0^2}\right) \\
&\quad \times \frac{\sqrt{p_0^4 - 2p_0^2(m^2 + M^2) + (m^2 - M^2)^2}}{p_0^2} \tag{K.28}
\end{aligned}$$

Num referencial qualquer:

$$I_3^{(-)}(p, M) = -\frac{\not{p}}{8} \left(1 + \frac{m^2 - M^2}{p^2}\right) I^{(-)}(p, M) , \tag{K.29}$$

onde $p \in \Gamma^-$ e

$$I^{(-)}(p, M) = (2\pi)^{-1} \theta(-p_0) \theta[p^2 - (m+M)^2] \sqrt{1 - 2\frac{(m^2 + M^2)}{p^2} + \frac{(m^2 - M^2)^2}{p^4}} \tag{K.30}$$

Apêndice L

Valores Esperados

Usualmente a distribuição valor principal ou valor principal de Cauchy é denotado por $P\frac{1}{x}$ e, é definido pela relação:

$$\left\langle P\frac{1}{x}, \phi(x) \right\rangle = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{x} \phi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx \frac{1}{x} \phi(x) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} dx \frac{1}{x} \phi(x) \right]. \quad (\text{L.1})$$

onde ϕ é uma adequada função de teste.

Consideramos os casos seguintes:

1.- Se $c < a$ ou $c > b$, então:

$$P \int_a^b dx \frac{\phi(x)}{x-c} = \int_a^b dx \frac{\phi(x)}{x-c} = F(b) - F(a). \quad (\text{L.2})$$

O valor esperado, neste caso, é uma integral comum.

2.- Se $a < c < b$

$$P \int_a^b dx \frac{\phi(x)}{x-c} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} dx \frac{\phi(x)}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b dx \frac{\phi(x)}{x-c} \right]. \quad (\text{L.3})$$

Podemos esperar que cada integral dentro do colchete seja divergente quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e, que nos intervalos $(a, c - \varepsilon)$ e $(c + \varepsilon, b)$ os integrandos sejam integráveis, então:

$$\int_a^{c-\varepsilon} dx \frac{\phi(x)}{x-c} = F(c-\varepsilon) - F(a), \quad \int_{c+\varepsilon}^b dx \frac{\phi(x)}{x-c} = F(b) - F(c+\varepsilon). \quad (\text{L.4})$$

Daí:

$$P \int_a^b dx \frac{\phi(x)}{x-c} = F(b) - F(a) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [F(c-\varepsilon) - F(c+\varepsilon)] = F(b) - F(a). \quad (\text{L.5})$$

Portanto, junto com o caso 1, na prática o valor esperado pode ser tratado como uma integral comum.

3.- Se $a = c$ ou $c = b$, neste caso, o valor esperado é bem definido se existe o seguinte limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(c + \varepsilon)}{\varepsilon} \quad (\text{L.6})$$

Os casos 2 e 3 abrem a possibilidade, prática, de dividir o intervalo (a, b) em $(a, d) \cup (d, b)$, então:

$$\begin{aligned} P \int_a^b dx \frac{\phi(x)}{x-c} &= P \int_a^d dx \frac{\phi(x)}{x-c} + P \int_d^b dx \frac{\phi(x)}{x-c} \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned} \quad (\text{L.7})$$

Se $d \neq c$ não teremos nenhum problema de indefinição e, se $d = c$ os valores esperados da direita podem não ter sentido, nesse caso terimos que seguir o caso dois, sem modificarse o resultado final. Temos assim que se d é, ou pode ser considerada, uma variável os valores esperados da direita podem ser considerados bem definidos, ja que o resultado final não depende de d .

L.1 Valor Esperado $I(k)$

Calculemos o seguinte valor esperado:

$$I(k) = P \int_{\frac{4m^2}{k^2}}^{\infty} ds \frac{2m^2 + sk^2}{s^2(1-s)} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{sk^2}}. \quad (\text{L.8})$$

Primeiro fazemos a mudança de variável:

$$s = -\frac{m^2(1-\eta)^2}{k^2\eta}. \quad (\text{L.9})$$

Daqui vemos que:

$$ds = d\eta \frac{m^2}{k^2} \left(\frac{1-\eta^2}{\eta^2} \right) ; \quad -1 < \eta < 0. \quad (\text{L.10})$$

Fazendo a substituição:

$$\begin{aligned} I(k) &= m^2 \left(\frac{k^2}{m^2} \right)^2 P \int_{-1}^0 d\eta \left(\frac{1-\eta^2}{\eta^2} \right) \frac{2 - \frac{(1-\eta)^2}{\eta}}{\left(\frac{(1-\eta)^2}{\eta} \right)^2 \left(\frac{k^2}{m^2} + \frac{(1-\eta)^2}{\eta} \right)} \sqrt{1 + \frac{4}{\frac{(1-\eta)^2}{\eta}}} \\ &= m^2 \left(\frac{k^2}{m^2} \right)^2 P \int_{-1}^0 d\eta (1+\eta)^2 \frac{2\eta - (1-\eta)^2}{(1-\eta)^4 \left(\eta \frac{k^2}{m^2} + (1-\eta)^2 \right)}. \end{aligned} \quad (\text{L.11})$$

Reescrevendo o segundo produto do denominador como:

$$\begin{aligned} \eta \frac{k^2}{m^2} + (1 - \eta)^2 &= \eta^2 - 2\eta \left(1 - \frac{k^2}{2m^2}\right) + 1 \\ &= \left\{ \eta - \left[\left(1 - \frac{k^2}{2m^2}\right) + \sqrt{\frac{k^4}{4m^4} \left(1 - \frac{4m^2}{k^2}\right)} \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ \eta - \left[\left(1 - \frac{k^2}{2m^2}\right) - \sqrt{\frac{k^4}{4m^4} \left(1 - \frac{4m^2}{k^2}\right)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{L.12})$$

Então podemos identificar dois polos no integrando, um deles é:

$$\xi = \left(1 - \frac{k^2}{2m^2}\right) + \sqrt{\frac{k^4}{4m^4} \left(1 - \frac{4m^2}{k^2}\right)}. \quad (\text{L.13})$$

E o outro é seu inverso:

$$\frac{1}{\xi} = \left(1 - \frac{k^2}{2m^2}\right) - \sqrt{\frac{k^4}{4m^4} \left(1 - \frac{4m^2}{k^2}\right)}, \quad (\text{L.14})$$

e podemos verificar que:

$$k^2 = -m^2 \frac{(1 - \xi)^2}{\xi} = -m^2 \frac{(1 - 1/\xi)^2}{1/\xi}. \quad (\text{L.15})$$

Então o segundo produto do denominador pode-se escrever simplesmente como:

$$\eta \frac{k^2}{m^2} + (1 - \eta)^2 = \left(\eta - \frac{1}{\xi}\right) (\eta - \xi). \quad (\text{L.16})$$

Substituindo esse resultado em $I(k)$:

$$\begin{aligned} I(k) &= m^2 \frac{(1 - \xi)^4}{\xi^2} P \int_{-1}^0 d\eta (1 + \eta)^2 \frac{2\eta - (1 - \eta)^2}{(1 - \eta)^4 \left(\eta - \frac{1}{\xi}\right) (\eta - \xi)} \\ &= m^2 \frac{(1 - \xi)^4}{\xi^2} P \int_{-1}^0 d\eta \frac{(1 + \eta)^2 [(1 - \eta)^2 - 2\eta]}{(1 - \eta)^4 (\xi - \eta) \left(\eta - \frac{1}{\xi}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{L.17})$$

Como:

$$\frac{1}{(\xi - \eta) \left(\eta - \frac{1}{\xi}\right)} = \left[-\frac{1}{(\eta - \xi)} + \frac{1}{\left(\eta - \frac{1}{\xi}\right)} \right] \left(\frac{\xi}{\xi^2 - 1} \right). \quad (\text{L.18})$$

Então teremos que:

$$I(k) = m^2 \frac{(1 - \xi)^3}{\xi(1 + \xi)} \left[P \int_{-1}^0 d\eta \frac{(1 + \eta)^2 [(1 - \eta)^2 - 2\eta]}{(1 - \eta)^4 (\eta - \xi)} - P \int_{-1}^0 d\eta \frac{(1 + \eta)^2 [(1 - \eta)^2 - 2\eta]}{(1 - \eta)^4 \left(\eta - \frac{1}{\xi}\right)} \right] \quad (\text{L.19})$$

Assim temos que este problema se divide em duas partes:

$$I_1(k) = P \int_{-1}^0 d\eta \frac{(1+\eta)^2 [(1-\eta)^2 - 2\eta]}{(1-\eta)^4 (\eta - \xi)}, \quad (\text{L.20})$$

$$I_2(k) = P \int_{-1}^0 d\eta \frac{(1+\eta)^2 [(1-\eta)^2 - 2\eta]}{(1-\eta)^4 \left(\eta - \frac{1}{\xi}\right)}. \quad (\text{L.21})$$

Cálculo dos valores esperados: $I_1(k)$, $I_2(k)$

Considerando que $k^2 > 4m^2$, então a quantidade

$$\xi = \left(1 - \frac{k^2}{2m^2}\right) + \frac{k^2}{2m^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}, \quad (\text{L.22})$$

é real, e $-1 < \xi < 0$. Portanto, é um polo no domínio de integração.

Desenvolvendo a expressão de $I_1(k)$:

$$\begin{aligned} I_1(k) &= P \int_{-1}^0 d\eta \frac{(1+\eta)^2 [(1-\eta)^2 - 2\eta]}{(1-\eta)^4 (\eta - \xi)} \\ &= P \int_{-1}^0 d\eta \frac{(\eta-1)^4 + 2(\eta-1)^3 - 6(\eta-1)^2 - 16(\eta-1) - 8}{(\eta-1)^4 (\eta - \xi)} \end{aligned} \quad (\text{L.23})$$

Teremos então que calcular as integrais:

$I_{11}(k)$:

$$I_{11}(k) = P \int_{-1}^0 d\eta \frac{1}{(\eta - \xi)} = -\ln \left| \frac{1+\xi}{\xi} \right|. \quad (\text{L.24})$$

$I_{12}(k)$:

$$\begin{aligned} I_{12}(k) &= 2P \int_{-1}^0 d\eta \frac{1}{(\eta-1)(\eta-\xi)} \\ &= \frac{1}{1-\xi} (2) \left(-\ln|-2| + \ln \left| \frac{1+\xi}{\xi} \right| \right). \end{aligned} \quad (\text{L.25})$$

$I_{13}(k)$:

$$\begin{aligned} I_{13}(k) &= -6P \int_{-1}^0 d\eta \frac{1}{(\eta-1)^2 (\eta-\xi)} \\ &= \frac{1}{1-\xi} (-3) + \frac{6}{1-\xi} P \int_{-1}^0 d\eta \frac{1}{(\eta-1)(\eta-\xi)}. \end{aligned} \quad (\text{L.26})$$

Identificando I_{12} :

$$I_{13}(k) = \frac{1}{1-\xi} (-3) + \frac{1}{(1-\xi)^2} (6) \left(-\ln|-2| + \ln \left| \frac{1+\xi}{\xi} \right| \right). \quad (\text{L.27})$$

$I_{14}(k)$:

$$\begin{aligned} I_{14}(k) &= -16P \int_{-1}^0 d\eta \frac{1}{(\eta-1)^3(\eta-\xi)} \\ &= \frac{1}{1-\xi} (6) + \frac{16}{1-\xi} P \int_{-1}^0 d\eta \frac{1}{(\eta-1)^2(\eta-\xi)}. \end{aligned} \quad (\text{L.28})$$

Identificando I_{13} :

$$\begin{aligned} I_{14}(k) &= \frac{1}{1-\xi} (6) + \frac{16}{1-\xi} \left[\frac{1}{1-\xi} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{(1-\xi)^2} \left(-\ln|-2| + \ln \left| \frac{1+\xi}{\xi} \right| \right) \right] \\ &= \frac{1}{1-\xi} (6) + \frac{1}{(1-\xi)^2} (8) - \frac{1}{(1-\xi)^3} (16) \left(-\ln|-2| + \ln \left| \frac{1+\xi}{\xi} \right| \right) \end{aligned} \quad (\text{L.29})$$

$I_{15}(k)$:

$$\begin{aligned} I_{15}(k) &= -8P \int_{-1}^0 d\eta \frac{1}{(\eta-1)^4(\eta-\xi)} \\ &= \frac{1}{1-\xi} \left(-\frac{7}{3} \right) + \frac{8}{1-\xi} P \int_{-1}^0 d\eta \frac{1}{(\eta-1)^3(\eta-\xi)}. \end{aligned} \quad (\text{L.30})$$

Identificando I_{14} :

$$\begin{aligned} I_{15}(k) &= \frac{1}{1-\xi} \left(-\frac{7}{3} \right) \\ &\quad - \frac{1}{1-\xi} \left[\frac{1}{1-\xi} (3) + \frac{1}{(1-\xi)^2} (4) - \frac{1}{(1-\xi)^3} (8) \left(-\ln|-2| + \ln \left| \frac{1+\xi}{\xi} \right| \right) \right] \\ &= \frac{1}{1-\xi} \left(-\frac{7}{3} \right) - \frac{1}{(1-\xi)^2} (3) - \frac{1}{(1-\xi)^3} (4) \\ &\quad + \frac{1}{(1-\xi)^4} (8) \left(-\ln|-2| + \ln \left| \frac{1+\xi}{\xi} \right| \right). \end{aligned} \quad (\text{L.31})$$

Substituindo esses resultados em $I_1(k)$:

$$\begin{aligned} I_1(k) &= I_{11}(k) + I_{12}(k) + I_{13}(k) + I_{14}(k) + I_{15}(k) \\ &= - \left(\frac{(\xi+1)^2(\xi^2-4\xi+1)}{(\xi-1)^4} \right) \ln \left| \frac{1+\xi}{\xi} \right| + \left(\frac{(\xi+1)^2(\xi^2-4\xi+1)}{(\xi-1)^4} \right) \ln|-2| - \ln|-2| \\ &\quad + \frac{1}{1-\xi} \left(\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{(1-\xi)^2} (5) - \frac{1}{(1-\xi)^3} (4). \end{aligned} \quad (\text{L.32})$$

Para encontrar $I_2(k)$ é suficiente fazer a mudança $\xi \rightarrow 1/\xi$, obtendo:

$$I_2(k) = - \left(\frac{(\xi+1)^2(\xi^2-4\xi+1)}{(\xi-1)^4} \right) \ln|1+\xi| + \left(\frac{(\xi+1)^2(\xi^2-4\xi+1)}{(\xi-1)^4} \right) \ln|-2| - \ln|-2| - \frac{\xi}{1-\xi} \left(\frac{2}{3} \right) + \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2} (5) + \frac{\xi^3}{(1-\xi)^3} (4). \quad (\text{L.33})$$

Somando esses resultados :

$$\begin{aligned} I(k) &= m^2 \frac{(1-\xi)^3}{\xi(1+\xi)} [I_1(k) - I_2(k)] \\ &= m^2 \frac{(1-\xi)^3}{\xi(1+\xi)} \left[- \left(\frac{(\xi+1)^2(\xi^2-4\xi+1)}{(\xi-1)^4} \right) \ln \left| \frac{1}{\xi} \right| \right] \\ &\quad + m^2 \frac{(1-\xi)^3}{\xi(1+\xi)} \left[\frac{1+\xi}{1-\xi} \left(\frac{2}{3} \right) + \frac{1-\xi^2}{(1-\xi)^2} (5) - \frac{1+\xi^3}{(1-\xi)^3} (4) \right] \\ &= m^2 \left[\left(\frac{(\xi+1)(\xi^2-4\xi+1)}{\xi(1-\xi)} \right) \ln|\xi| \right] + m^2 \frac{1}{\xi} \left[\frac{5}{3} + \xi^2 \frac{5}{3} + \xi \left(-\frac{22}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{L.34})$$

Finalmente:

$$I(k) = m^2 \left[\frac{1+\xi}{1-\xi} \left(\xi - 4 + \frac{1}{\xi} \right) \ln|\xi| + \frac{5}{3\xi} + \frac{5\xi}{3} - \frac{22}{3} \right]. \quad (\text{L.35})$$

L.2 Valor Esperado $P \frac{1}{1-s}$

1.- Se $0 < a < b < \infty$, calculemos:

$$\begin{aligned} P \int_a^b ds \frac{1}{1-s} &= \int_a^{1-0^+} ds \frac{1}{1-s} + \int_{1+0^+}^b ds \frac{1}{1-s} \\ &= -\ln|0^+| + \ln|1-a| - \ln|1-b| + \ln|0^+| \\ &= \ln \left| \frac{1-a}{1-b} \right|. \end{aligned} \quad (\text{L.36})$$

Daqui vemos que este cálculo pode-se considerar, na prática, como uma integral usual (!!).

Em particular:

$$P_{11} = P \int_{m^2/p^2}^{(m+m_a)^2/p^2} ds \frac{1}{1-s} = \ln \left| 1 - \frac{p^2}{m^2} \right| - \ln \left| \frac{(m+m_a)^2}{m^2} - \frac{p^2}{m^2} \right|. \quad (\text{L.37})$$

2.- Se $0 < a < b \rightarrow \infty$, calculemos:

$$\begin{aligned}
 P \int_a^b ds \frac{1}{1-s} &= \int_a^{1-0^+} ds \frac{1}{1-s} + \int_{1+0^+}^{b \rightarrow \infty} ds \frac{1}{1-s} \\
 &= -\ln |1-s|_a^{1-0^+} - \ln |1-s|_{1+0^+}^{b \rightarrow \infty} \\
 &= \ln |1-a| - \ln |1-b|_{b \rightarrow \infty} .
 \end{aligned} \tag{L.38}$$

Vemos que:

$$P \int_a^b ds \frac{1}{1-s} \rightarrow \infty . \tag{L.39}$$

Daí que num tramo infinito devemos ter considerações adicionais sob o comportamento assintótico.

L.3 Valor Esperado $P \frac{1}{s(1-s)}$

1.- Se $0 < a < b < \infty$, calculemos:

$$\begin{aligned}
 P \int_a^b ds \frac{1}{s(1-s)} &= P \int_a^b ds \frac{1}{s} + P \int_a^b ds \frac{1}{1-s} = \ln \left| \frac{b}{a} \right| + \ln \left| \frac{1-a}{1-b} \right| \\
 &= \ln \left| \frac{b(1-a)}{a(1-b)} \right| .
 \end{aligned} \tag{L.40}$$

2.- Se $0 < a < b \rightarrow \infty$, calculemos:

$$\begin{aligned}
 P \int_a^b ds \frac{1}{s(1-s)} &= P \int_a^{b \rightarrow \infty} ds \frac{1}{s} + P \int_a^{b \rightarrow \infty} ds \frac{1}{1-s} \\
 &= \ln |b|_{b \rightarrow \infty} - \ln |a| + \ln |1-a| - \ln |1-b|_{b \rightarrow \infty} \\
 &= \ln \left| \frac{1-a}{a} \right| = \ln \left| 1 - \frac{1}{a} \right| .
 \end{aligned} \tag{L.41}$$

Em particular:

$$\begin{aligned}
 P_{12} &= P \int_{m^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{1}{s(1-s)} = \ln \left| 1 - \frac{p^2}{m^2} \right| \\
 P_{32} &= P \int_{(m+m_a)^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{1}{s(1-s)} = \ln \left| 1 - \frac{p^2}{(m+m_a)^2} \right| .
 \end{aligned} \tag{L.42}$$

Dos casos desenvolvidos, concluímos que:

$$P \int_a^b ds \frac{f(s)}{s-c} = \int_a^b ds \frac{f(s)}{s-c} < \infty ; \forall b(a, \infty) \text{ e } |f(s)| \leq \frac{C}{|s|} \text{ quando } s \rightarrow \infty . \tag{L.43}$$

L.4 Valor Esperado $P \frac{1}{s^2(1-s)}$

1.- Se $0 < a < b < \infty$, calculemos:

$$\begin{aligned}
 P \int_a^b ds \frac{1}{s^2(1-s)} &= P \int_a^b ds \frac{1}{s^2} + P \int_a^b ds \frac{1}{s} + P \int_a^b ds \frac{1}{1-s} \\
 &= \left(\frac{b-a}{ab} \right) + \ln \left| \frac{b}{a} \right| + \ln \left| \frac{1-a}{1-b} \right| \\
 &= \ln \left| \frac{b(1-a)}{a(1-b)} \right|. \tag{L.44}
 \end{aligned}$$

2.- Se $0 < a < b \rightarrow \infty$, calculemos:

$$\begin{aligned}
 P \int_a^b ds \frac{1}{s^2(1-s)} &= P \int_a^{b \rightarrow \infty} ds \frac{1}{s^2} + P \int_a^{b \rightarrow \infty} ds \frac{1}{s} + P \int_a^{b \rightarrow \infty} ds \frac{1}{1-s} \\
 &= \frac{1}{a} + \ln |b|_{b \rightarrow \infty} - \ln |a| + \ln |1-a| - \ln |1-b|_{b \rightarrow \infty} \\
 &= \frac{1}{a} + \ln \left| \frac{1-a}{a} \right| = \frac{1}{a} + \ln \left| 1 - \frac{1}{a} \right|. \tag{L.45}
 \end{aligned}$$

Em particular:

$$P_{33} = P \int_{m^2/p^2}^{+\infty} ds \frac{1}{s^2(1-s)} = \frac{p^2}{m^2} + \ln \left| 1 - \frac{p^2}{m^2} \right|. \tag{L.46}$$

L.5 Valor Esperado $P \frac{\eta}{s(1-s)}$

Queremos resolver:

$$P_{13} = \int_{\frac{(m+m_a)^2}{p^2}}^{\infty} ds \frac{\eta}{s(1-s)}, \tag{L.47}$$

sendo

$$s = \frac{\eta^2 - \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4}}{2 \left[\eta - \frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} \right]} = \frac{\eta^2 - \eta_a \eta_c}{2(\eta - \eta_\infty)} \rightarrow \frac{ds}{d\eta} = -\frac{s - \eta}{\eta - \eta_\infty}, \tag{L.48}$$

onde são definidas as constantes:

$$a = \frac{(m + m_a)^2}{p^2}, \eta_a = \eta(s = a) = a, \eta_c = \frac{(m - m_a)^2}{p^2}, \eta_\infty = \eta(s \rightarrow \infty) = \frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} \tag{L.49}$$

Então:

$$\begin{aligned}
P_{13} &= \int_{\frac{(m+m_a)^2}{p^2}}^{\infty} ds \frac{\eta}{s(1-s)} = \int_{\eta_a}^{\eta_\infty} d\eta \frac{ds}{d\eta} \frac{\eta}{s(1-s)} = \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \frac{(s-\eta)\eta}{(\eta-\eta_\infty)s(1-s)} \\
&= \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \frac{\eta}{(\eta-\eta_\infty)} \left(\frac{s-\eta}{s(1-s)} \right) = \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \frac{\eta}{(\eta-\eta_\infty)} \left(\frac{1}{1-s} - \frac{\eta}{s(1-s)} \right) \quad (\text{L.50})
\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\frac{1}{s(1-s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \rightarrow \ln|s| - \ln|1-s| : \text{ é finito incluso quando } s \rightarrow \infty. \quad (\text{L.51})$$

Então:

$$P_{13} = \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \frac{\eta}{(\eta-\eta_\infty)} \left(\frac{1-\eta}{1-s} - \frac{\eta}{s} \right). \quad (\text{L.52})$$

Como pode-se ver; sendo $1-\eta > 0$, $\eta > 0$ teremos que:

$$-(1-\eta) \ln|1-s| - \eta \ln|s| : \text{ é infinito quando } s \rightarrow \infty. \quad (\text{L.53})$$

Mas como $\eta - \eta_\infty \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$, teremos que cada um dos termos são finitos independentemente do outro.

Continuando com a resolução, temos que:

$$s = \frac{\eta^2 - \eta_a \eta_c}{2(\eta - \eta_\infty)} \quad (\text{L.54})$$

$$s - 1 = \frac{\eta^2 - 2\eta + 2\eta_\infty - \eta_a \eta_c}{2(\eta - \eta_\infty)} = \frac{(\eta - 1)^2 - (1 - \eta_a)(1 - \eta_c)}{2(\eta - \eta_\infty)} \quad (\text{L.55})$$

Daí:

$$P_{13} = 2 \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \left(\frac{\eta(\eta-1)}{(\eta-1)^2 - (1-\eta_a)(1-\eta_c)} - \frac{\eta^2}{\eta^2 - \eta_a \eta_c} \right). \quad (\text{L.56})$$

Como:

$$\eta^2 - \eta_a \eta_c = (\eta - \sqrt{\eta_a \eta_c})(\eta + \sqrt{\eta_a \eta_c}) \quad (\text{L.57})$$

$$\frac{\eta}{\eta^2 - \eta_a \eta_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta + \sqrt{\eta_a \eta_c}} + \frac{1}{\eta - \sqrt{\eta_a \eta_c}} \right) \quad (\text{L.58})$$

$$(\eta - 1)^2 - A = (\eta - 1 - \sqrt{A})(\eta - 1 + \sqrt{A}) \quad (\text{L.59})$$

$$\frac{\eta - 1}{(\eta - 1)^2 - A} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta - 1 + \sqrt{A}} + \frac{1}{\eta - 1 - \sqrt{A}} \right), \quad (\text{L.60})$$

onde $A = (1 - \eta_a)(1 - \eta_c) > 0$. Então:

$$P_{13} = \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \left(\frac{\eta}{\eta - 1 + \sqrt{A}} + \frac{\eta}{\eta - 1 - \sqrt{A}} - \frac{\eta}{\eta + \sqrt{\eta_a \eta_c}} - \frac{\eta}{\eta - \sqrt{\eta_a \eta_c}} \right). \quad (\text{L.61})$$

Como:

$$\frac{\eta}{\eta + \alpha} = 1 - \frac{\alpha}{\eta + \alpha}. \quad (\text{L.62})$$

Então:

$$\begin{aligned} P_{13} = & \sqrt{\eta_a \eta_c} \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \left(\frac{1}{\eta + \sqrt{\eta_a \eta_c}} - \frac{1}{\eta - \sqrt{\eta_a \eta_c}} \right) \\ & - \sqrt{A} \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \left(\frac{1}{\eta - 1 + \sqrt{A}} - \frac{1}{\eta - 1 - \sqrt{A}} \right) \\ & + \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \left(\frac{1}{\eta - 1 + \sqrt{A}} + \frac{1}{\eta - 1 - \sqrt{A}} \right). \end{aligned} \quad (\text{L.63})$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} P_{13} = & \sqrt{\eta_a \eta_c} \ln \left| \frac{\eta + \sqrt{\eta_a \eta_c}}{\eta - \sqrt{\eta_a \eta_c}} \right|_{\eta_\infty}^{\eta_a} - \sqrt{A} \ln \left| \frac{\eta - 1 + \sqrt{A}}{\eta - 1 - \sqrt{A}} \right|_{\eta_\infty}^{\eta_a} \\ & + \ln \left| \left(\eta - 1 + \sqrt{A} \right) \left(\eta - 1 - \sqrt{A} \right) \right|_{\eta_\infty}^{\eta_a}. \end{aligned} \quad (\text{L.64})$$

Como:

$$\eta_a \pm \sqrt{\eta_a \eta_c} = \sqrt{\eta_a} (\sqrt{\eta_a} \pm \sqrt{\eta_c}) \quad (\text{L.65})$$

$$\eta_a - 1 \pm \sqrt{(1 - \eta_a)(1 - \eta_c)} = -\sqrt{(1 - \eta_a)} \left(\sqrt{(1 - \eta_a)} \mp \sqrt{(1 - \eta_c)} \right) \quad (\text{L.66})$$

$$\eta_\infty \pm \sqrt{\eta_a \eta_c} = \frac{1}{2} (\sqrt{\eta_a} \pm \sqrt{\eta_c})^2 \quad (\text{L.67})$$

$$\eta_\infty - 1 \pm \sqrt{(1 - \eta_a)(1 - \eta_c)} = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{(1 - \eta_a)} \mp \sqrt{(1 - \eta_c)} \right)^2. \quad (\text{L.68})$$

Então:

$$P_{13} = \sqrt{\eta_a \eta_c} \ln \left| \frac{\sqrt{\eta_a} - \sqrt{\eta_c}}{\sqrt{\eta_a} + \sqrt{\eta_c}} \right| - \sqrt{A} \ln \left| \frac{\sqrt{(1 - \eta_a)} + \sqrt{(1 - \eta_c)}}{\sqrt{(1 - \eta_a)} - \sqrt{(1 - \eta_c)}} \right| + \ln \left| \frac{(1 - \eta_a)}{\frac{1}{4}(\eta_a - \eta_c)} \right|. \quad (\text{L.69})$$

Substituindo as expressões de η_a , η_c e considerando que $m_a > m$, finalmente, obtemos que:

$$\begin{aligned} P_{13} = & \left(1 + \frac{m_a^2 - m^2}{p^2} \right) \ln \left| \frac{m}{m_a} \right| + \ln \left| \frac{(m + m_a)^2}{m^2} - \frac{p^2}{m^2} \right| \\ & - \sqrt{1 - 2 \frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4}} \ln \left| \frac{\sqrt{p^2 - (m + m_a)^2} + \sqrt{p^2 - (m - m_a)^2}}{\sqrt{p^2 - (m + m_a)^2} - \sqrt{p^2 - (m - m_a)^2}} \right|. \end{aligned}$$

(L.70)

Nota.- Nesta expressão estamos supondo implícito o fator: $\theta [p^2 - (m + m_a)^2]$, que garante a existência da raiz. E considerando a aproximação quando $m_a \rightarrow 0^+$

$$\sqrt{p^2 - (m \pm m_a)^2} = \sqrt{p^2 - m^2} \mp \frac{m_a m}{\sqrt{p^2 - m^2}} \quad (\text{L.71})$$

Daí:

$$\ln \left| \frac{\sqrt{p^2 - (m + m_a)^2} + \sqrt{p^2 - (m - m_a)^2}}{\sqrt{p^2 - (m + m_a)^2} - \sqrt{p^2 - (m - m_a)^2}} \right| = \ln \left| \frac{p^2 - m^2}{m_a m} \right| \quad (\text{L.72})$$

Assim obteremos que quando $m_a \rightarrow 0^+$

$$P_{13} = \int_{\frac{(m+m_a)^2}{p^2}}^{\infty} ds \frac{\eta}{s(1-s)} \rightarrow \frac{m^2}{p^2} \ln \left| 1 - \frac{p^2}{m^2} \right| = \frac{m^2}{p^2} \int_{\frac{m^2}{p^2}}^{\infty} ds \frac{1}{s(1-s)} \quad (\text{L.73})$$

Resultado conhecido em QED₄.

L.6 Valor Esperado $P \frac{\eta}{s^2(1-s)}$

Queremos resolver:

$$P_{35} = \int_{\frac{(m+m_a)^2}{p^2}}^{\infty} ds \frac{\eta}{s^2(1-s)}.$$

Sendo

$$s = \frac{\eta^2 - \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4}}{2 \left[\eta - \frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} \right]} = \frac{\eta^2 - \eta_a \eta_c}{2(\eta - \eta_\infty)} \rightarrow \frac{ds}{d\eta} = -\frac{s - \eta}{\eta - \eta_\infty}, \quad (\text{L.74})$$

onde as constantes são definidos como segue:

$$a = \frac{(m + m_a)^2}{p^2}; \eta_a = \eta(s = a) = a; \eta_c = \frac{(m - m_a)^2}{p^2}; \eta_\infty = \eta(s \rightarrow \infty) = \frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2}. \quad (\text{L.75})$$

Então:

$$\begin{aligned} P_{35} &= \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \frac{\eta}{(\eta - \eta_\infty)} \left(\frac{s - \eta}{s^2(1-s)} \right) = \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \frac{\eta(s - \eta)}{(\eta - \eta_\infty)} \left(\frac{1}{s(1-s)} + \frac{1}{s^2} \right) \\ &= P_{13} + \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \frac{\eta}{(\eta - \eta_\infty)s} - \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \frac{1}{(\eta - \eta_\infty)} \left(\frac{\eta^2}{s^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{L.76})$$

Como:

$$s = \frac{\eta^2 - \eta_a \eta_c}{2(\eta - \eta_\infty)}. \quad (\text{L.77})$$

Daí:

$$P_{35} = P_{13} + 2 \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \frac{\eta}{\eta^2 - \eta_a \eta_c} - 4 \int_{\eta_\infty}^{\eta_a} d\eta \frac{\eta^2 (\eta - \eta_\infty)}{(\eta^2 - \eta_a \eta_c)^2}. \quad (\text{L.78})$$

Seguindo passos similares que em P_{13} , finalmente, obteremos que:

$$\begin{aligned} P_{35} &= P_{13} - \frac{\eta_\infty}{\sqrt{\eta_a \eta_c}} \ln \left| \frac{\eta + \sqrt{\eta_a \eta_c}}{\eta - \sqrt{\eta_a \eta_c}} \right|_{\eta_\infty}^{\eta_a} - \ln \left| \eta^2 - \eta_a \eta_c \right|_{\eta_\infty}^{\eta_a} \\ &+ (-\sqrt{\eta_a \eta_c} - \eta_\infty) \left(\frac{1}{\eta + \sqrt{\eta_a \eta_c}} \right)_{\eta_\infty}^{\eta_a} \\ &+ (\sqrt{\eta_a \eta_c} - \eta_\infty) \left(\frac{1}{\eta - \sqrt{\eta_a \eta_c}} \right)_{\eta_\infty}^{\eta_a}. \end{aligned} \quad (\text{L.79})$$

Como:

$$\eta_a \pm \sqrt{\eta_a \eta_c} = \sqrt{\eta_a} (\sqrt{\eta_a} \pm \sqrt{\eta_c}) \quad (\text{L.80})$$

$$\eta_\infty \pm \sqrt{\eta_a \eta_c} = \frac{1}{2} (\sqrt{\eta_a} \pm \sqrt{\eta_c})^2. \quad (\text{L.81})$$

Então:

$$P_{35} = P_{13} - \frac{\eta_\infty}{\sqrt{\eta_a \eta_c}} \ln \left| \frac{\sqrt{\eta_a} - \sqrt{\eta_c}}{\sqrt{\eta_a} + \sqrt{\eta_c}} \right| - \ln \left| 4 \frac{\eta_a}{\eta_a - \eta_c} \right| + 1. \quad (\text{L.82})$$

Substituindo as expressões de η_a , η_c e considerando que $m_a > m$, obteremos que:

$$\begin{aligned} P_{35} &= \left[1 + \frac{m_a^2 - m^2}{p^2} \right] \ln \left| \frac{m}{m_a} \right| + \ln \left| \frac{(m + m_a)^2}{m^2} - \frac{p^2}{m^2} \right| \\ &- \sqrt{1 - 2 \frac{(m^2 + m_a^2)}{p^2} + \frac{(m^2 - m_a^2)^2}{p^4}} \ln \left| \frac{\sqrt{p^2 - (m + m_a)^2} + \sqrt{p^2 - (m - m_a)^2}}{\sqrt{p^2 - (m + m_a)^2} - \sqrt{p^2 - (m - m_a)^2}} \right| \\ &- \left(\frac{m_a^2 + m^2}{m_a^2 - m^2} \right) \ln \left| \frac{m}{m_a} \right| - \ln \left| \frac{(m + m_a)^2}{m_a m} \right| + 1. \end{aligned}$$

(L.83)

Apêndice M

Integral Escalar

A função I está definida pela integral:

$$\begin{aligned}
 & (2\pi)^2 I(p, q, M) \\
 = & \int dk \left[\hat{D}_m^{(-)}(p-k) \hat{D}_m^{(+)}(q-k) \hat{D}_M^F(k) - \hat{D}_m^{ret}(p-k) \hat{D}_m^{(+)}(q-k) \hat{D}_M^{(+)}(k) \right. \\
 & + \hat{D}_m^{(-)}(p-k) \hat{D}_m^{av}(q-k) \hat{D}_M^{(+)}(-k) - \hat{D}_m^{(+)}(p-k) \hat{D}_m^{(-)}(q-k) \hat{D}_M^F(k) \\
 & \left. + \hat{D}_m^{(+)}(p-k) \hat{D}_m^{ret}(q-k) \hat{D}_M^{(+)}(k) - \hat{D}_m^{av}(p-k) \hat{D}_m^{(-)}(q-k) \hat{D}_M^{(+)}(-k) \right] \quad (\text{M.1})
 \end{aligned}$$

Vemos que os três últimos termos se obtêm fazendo $p \rightleftharpoons q$ nos três primeiros. Sendo

$$\begin{aligned}
 \hat{D}_M^F(k) &= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+}, \quad \hat{D}_M^{ret}(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+(k_0)}, \\
 \hat{D}_M^{av}(k) &= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 - i0^+(k_0)}, \quad \hat{D}_M^{(\pm)}(k) = \pm \frac{i}{2\pi} \theta(\pm k_0) \delta(k^2 - M^2) \quad (\text{M.2})
 \end{aligned}$$

Então I explicitamente é:

$$\begin{aligned}
 & I(p, q, M) \\
 = & (2\pi)^{-6} \int dk \\
 & [-\theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+} \\
 & - \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i0^+(p_0 - k_0)} \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \\
 & - \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \frac{1}{(q-k)^2 - m^2 - i0^+(q_0 - k_0)} \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \\
 & - (p \rightleftharpoons q)]. \quad (\text{M.3})
 \end{aligned}$$

Daí vemos que temos que calcular as integrais:

$$I_1 = \int \frac{dk}{k^2 - M^2 + i0^+} \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \quad (\text{M.4})$$

$$I_2 = \int \frac{dk}{(p-k)^2 - m^2 + i0^+(p_0 - k_0)} \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \quad (\text{M.5})$$

$$I_3 = \int \frac{dk}{(q-k)^2 - m^2 - i0^+(q_0 - k_0)} \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \quad (\text{M.6})$$

Observação.- Se fazemos $k \rightarrow -k$ na integral I_2 vemos que:

$$I_2 = \int \frac{dk}{(p+k)^2 - m^2 + i0^+} \theta(q_0 + k_0) \delta((q+k)^2 - m^2) \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) , \quad (\text{M.7})$$

e logo $p \rightarrow -q$ e $q \rightarrow -p$:

$$\begin{aligned} I_2 &\rightarrow \int \frac{dk}{(-q+k)^2 - m^2 + i0^+} \theta(-q_0 + k_0) \delta((-p+k)^2 - m^2) \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \\ &= \int \frac{dk}{(q-k)^2 - m^2 - i0^+} \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \\ &= I_3 \end{aligned} \quad (\text{M.8})$$

Então somente precisamos calcular I_1 e I_2 .

M.1 Integral Escalar I_1

Definida como:

$$I_1 = \int \frac{dk}{k^2 - M^2 + i0^+} \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \quad (\text{M.9})$$

Definindo:

$$P = p - q , \quad k' = k - p \rightarrow k \quad (\text{M.10})$$

Teremos que:

$$I_1 = \int \frac{dk}{(k+p)^2 - M^2 + i0^+} \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) \theta(-P_0 - k_0) \delta((P+k)^2 - m^2) . \quad (\text{M.11})$$

Usando:

$$\theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) = \frac{\delta(E_k - k_0)}{2E_k} ; \quad E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} . \quad (\text{M.12})$$

Então:

$$I_1 = \int \frac{dk}{(k+p)^2 - M^2 + i0^+} \frac{\delta(E_k - k_0)}{2E_k} \theta(-P_0 - k_0) \delta((P+k)^2 - m^2) . \quad (\text{M.13})$$

Daí que será não nulo se:

$$P_0 < -k_0 < -m \quad \text{ou} \quad m < k_0 < -P_0 . \quad (\text{M.14})$$

Supondo que P seja un vetor tipo espaço, então existe um referencial de Lorentz tal que $P_0 = 0$, então nesse caso I_1 é nulo. Portanto, para o caso não nulo P tem que ser tipo tempo,

e podemos encontrar um referencial tal que $\vec{P} = 0$ ($= \vec{p} - \vec{q}$, centro de massa). Teremos então que:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{dk}{(k+p)^2 - M^2 + i0^+} \frac{\delta(E_k - k_0)}{2E_k} \theta(-P_0 - k_0) \delta\left((P_0 + k_0)^2 - \vec{k}^2 - m^2\right) \\
&= \int \frac{dk}{(k+p)^2 - M^2 + i0^+} \frac{\delta(E_k - k_0)}{2E_k} \theta(-P_0 - k_0) \delta\left((P_0 + k_0)^2 - E_k^2\right) \\
&= \theta(-P_0) \int \frac{d^3k}{(E_k + p_0)^2 - |\vec{k}|^2 - |\vec{p}|^2 - 2|\vec{k}||\vec{p}|\cos\vartheta - M^2 + i0^+} \frac{\delta\left(E_k + \frac{P_0}{2}\right)}{4|P_0|E_k} \quad (\text{M.15})
\end{aligned}$$

onde $\vec{k} \cdot \vec{p} = |\vec{k}||\vec{p}|\cos\vartheta$.

Como:

$$d^3k = 2\pi |\vec{k}|^2 \text{sen}\vartheta d\vartheta d|\vec{k}| = -2\pi |\vec{k}|^2 d\cos\vartheta d|\vec{k}|, \quad (\text{M.16})$$

e da definição de E_k , $|\vec{k}| d|\vec{k}| = E_k dE_k$ e $|\vec{k}| = \sqrt{E_k^2 - m^2}$, daí:

$$d^3k = -2\pi E_k \sqrt{E_k^2 - m^2} d\cos\vartheta dE_k \quad (\text{M.17})$$

Então teremos que:

$$I_1 = \theta(-P_0) \int \frac{-2\pi E_k \sqrt{E_k^2 - m^2} d\cos\vartheta dE_k}{(E_k + p_0)^2 - |\vec{k}|^2 - |\vec{p}|^2 - 2|\vec{k}||\vec{p}|\cos\vartheta - M^2 + i0^+} \frac{\delta\left(E_k + \frac{P_0}{2}\right)}{4|P_0|E_k} \quad (\text{M.18})$$

Integrando em E_k :

$$I_1 = 2\pi\theta(-P_0) \frac{1}{4|P_0|} \sqrt{\frac{P_0^2}{4} - m^2} \int_{-1}^1 \frac{d\cos\vartheta}{\lambda^2 - \mathbf{k}^2 - |\vec{p}|^2 - 2\mathbf{k}|\vec{p}|\cos\vartheta - M^2 + i0^+} \quad (\text{M.19})$$

onde:

$$\lambda = -\frac{P_0}{2} + p_0, \quad \mathbf{k} = \sqrt{\frac{P_0^2}{4} - m^2}. \quad (\text{M.20})$$

Como E_k é real, devemos introduzir a função degrau:

$$I_1 = 2\pi\theta(-P_0) \frac{\theta(P_0^2 - 4m^2)}{4|P_0|} \sqrt{\frac{P_0^2}{4} - m^2} \int_{-1}^1 \frac{d\cos\vartheta}{\lambda^2 - \mathbf{k}^2 - |\vec{p}|^2 - 2\mathbf{k}|\vec{p}|\cos\vartheta - M^2 + i0^+} \quad (\text{M.21})$$

Usando a relação

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{a - bx} = \frac{1}{b} \ln \frac{a+b}{a-b} \quad (\text{M.22})$$

como válida para distribuições. Identificando:

$$a = \lambda^2 - \mathbf{k}^2 - |\vec{p}|^2 - M^2 + i0^+ \quad (\text{M.23})$$

$$b = 2\mathbf{k}|\vec{p}| \quad (\text{M.24})$$

Obteremos:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi\theta(-P_0) \frac{\theta(P_0^2 - 4m^2)}{4|P_0|} \sqrt{\frac{P_0^2}{4} - m^2} \frac{1}{b} \ln \frac{a+b}{a-b} \\ &= \frac{\pi}{4} \theta(-P_0) \frac{\theta(P_0^2 - 4m^2)}{|P_0| |\vec{p}|} \ln \frac{a+b}{a-b}. \end{aligned} \quad (\text{M.25})$$

Da definição de λ e \mathbf{k} :

$$a = \lambda^2 - \mathbf{k}^2 - |\vec{p}|^2 - M^2 + i0^+ = p^2 + m^2 - M^2 - P_0 p_0 + i0^+ \quad (\text{M.26})$$

$$b = 2\mathbf{k} |\vec{p}| = 2 \left(\sqrt{\frac{P_0^2}{4} - m^2} \right) |\vec{p}| = |\vec{p}| |P_0| \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P_0^2}}. \quad (\text{M.27})$$

Para obter um resultado num sistema de referencia qualquer devemos passar de $P = (P_0, \vec{0})$ a $P' = (P'_0, \vec{P}')$, para isso realizaremos uma transformação de boost de um sistema em repouso a um sistema que se movimenta com velocidade \vec{v} respeito ao primeiro:

$$\vec{P}'_{\parallel} = \frac{\vec{P}_{\parallel} - P_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}} = -P_0 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}; \quad \vec{P}'_{\perp} = \vec{P}_{\perp} = 0 \quad (\text{M.28})$$

$$P'_0 = \frac{P_0 - \vec{v} \cdot \vec{P}}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{P_0}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (\text{M.29})$$

onde

$$\vec{P}_{\parallel} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{P}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}; \quad \vec{P}_{\perp} = \vec{P} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{P}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}. \quad (\text{M.30})$$

Facilmente podemos passar $P_0 p_0$ a $P' p'$ e de P_0^2 a P'^2 , mas o problema é $|\vec{p}|$. Para o qual expressaremos \vec{p} nas variáveis linhas:

$$\vec{p}_{\parallel} = \frac{\vec{p}'_{\parallel} + p'_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}; \quad \vec{p}'_{\perp} = \vec{p}_{\perp}. \quad (\text{M.31})$$

Daí:

$$\vec{p} = \vec{p}'_{\perp} + \frac{\vec{p}'_{\parallel} + p'_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (\text{M.32})$$

Sendo os termos do lado direito ortogonais, ao tomar o quadrado:

$$\vec{p}^2 = \left(\vec{p}' - \vec{v} \frac{\vec{v} \cdot \vec{p}'}{|\vec{v}|^2} \right)^2 + \left(\vec{v} \frac{\vec{v} \cdot \vec{p}'}{|\vec{v}|^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{p'_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \right)^2. \quad (\text{M.33})$$

E das primeiras relações:

$$\vec{v} = -\frac{\vec{P}'}{P'_0}. \quad (\text{M.34})$$

Então:

$$\begin{aligned} \vec{p}^2 &= \left(\vec{p}' - \vec{P}' \frac{\vec{P}' \cdot \vec{p}'}{|\vec{P}'|^2} \right)^2 + \left(\vec{P}' \frac{\vec{P}' \cdot \vec{p}'}{|\vec{P}'|^2} \frac{P'_0}{\sqrt{P'^2}} + \frac{\vec{P}' p'_0}{\sqrt{P'^2}} \right)^2 \\ &= -p'^2 + \frac{(P' p')^2}{P'^2}. \end{aligned} \quad (\text{M.35})$$

Dáí:

$$|\vec{p}| \sqrt{P'^2} = \sqrt{(P'p')^2 - P'^2 p'^2}. \quad (\text{M.36})$$

Se definimos a quantidade:

$$\begin{aligned} N &\equiv (Pp)^2 - P^2 p^2 = (p^2 - qp)^2 - (p - q)^2 p^2 \\ &= (qp)^2 - q^2 p^2. \end{aligned} \quad (\text{M.37})$$

A generalização mais relevante obtida é:

$$|\vec{p}| P_0 \rightarrow \sqrt{N}$$

Finalmente podemos expressar I_1 como:

$$I_1 = \frac{\pi \theta(-P_0) \theta(P^2 - 4m^2)}{4 \sqrt{N}} \ln \frac{a + b}{a - b}, \quad (\text{M.38})$$

onde agora:

$$a = p^2 + m^2 - M^2 - Pp + i0^+ = pq + m^2 - M^2 + i0^+ \quad (\text{M.39})$$

$$b = \sqrt{N} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}}. \quad (\text{M.40})$$

Outra forma de expressar I_1 é usando a propriedade:

$$\begin{aligned} \ln \frac{d + ic0^+}{f + ic0^+} &= \ln \left(\frac{d}{f} e^{i(\frac{c}{d} - \frac{c}{f})0^+} \right) = \ln \left(\frac{d}{f} + i \frac{c}{f^2} (f - d) 0^+ \right) \\ &= \ln \left(\frac{d}{f} + ic(f - d) 0^+ \right). \end{aligned} \quad (\text{M.41})$$

Então podemos escrever I_1 da forma:

$$I_1 = \frac{\pi \theta(-P_0) \theta(P_0^2 - 4m^2)}{4 \sqrt{N}} \log_1 \quad (\text{M.42})$$

onde:

$$\log_1 \equiv \ln \left(\frac{pq + m^2 - M^2 + \sqrt{N} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}}}{pq + m^2 - M^2 - \sqrt{N} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}}} - i0^+ \right). \quad (\text{M.43})$$

M.2 Integral Escalar I_2 e I_3

Definido como:

$$I_2 = \int \frac{dk}{(p - k)^2 - m^2 + i0^+ (p_0 - k_0)} \theta(q_0 - k_0) \delta((q - k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \quad (\text{M.44})$$

Usando:

$$\theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) = \frac{\delta(E_k - k_0)}{2E_k} ; \quad E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}. \quad (\text{M.45})$$

Então:

$$I_2 = \int \frac{dk}{(p-k)^2 - m^2 + i0^+ (p_0 - k_0)} \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \frac{\delta(E_k - k_0)}{2E_k}, \quad (\text{M.46})$$

como os casos não nulos são quando $(q-k)^2 - m^2 = 0$ e $q_0 > k_0 > 0$. Então $q \in V^+$, então pode existir um referencial tal que $q = (q_0, \vec{0})$:

$$I_2 = \int dk \frac{\theta(q_0 - k_0) \delta(q_0^2 - 2q_0 k_0 + M^2 - m^2)}{p^2 - 2p_0 k_0 + M^2 - m^2 + 2|\vec{k}| |\vec{p}| \cos \vartheta + i0^+ (p_0 - k_0)} \frac{\delta(E_k - k_0)}{2E_k}. \quad (\text{M.47})$$

onde $\vec{k} \cdot \vec{p} = |\vec{k}| |\vec{p}| \cos \vartheta$.

Integrando em k_0 :

$$I_2 = \frac{1}{4q_0} \int d^3k \frac{\theta(q_0 - E_k) \delta\left(E_k - \frac{q_0^2 + M^2 - m^2}{2q_0}\right)}{p^2 - 2p_0 E_k + M^2 - m^2 + 2|\vec{k}| |\vec{p}| \cos \vartheta + i0^+ (p_0 - E_k)} \frac{1}{E_k}. \quad (\text{M.48})$$

Como:

$$d^3k = 2\pi |\vec{k}|^2 \sin \vartheta d\vartheta d|\vec{k}| = -2\pi |\vec{k}|^2 d \cos \vartheta d|\vec{k}|, \quad (\text{M.49})$$

e da definição de E_k , $|\vec{k}| d|\vec{k}| = E_k dE_k$ e $|\vec{k}| = \sqrt{E_k^2 - M^2}$

$$d^3k = -2\pi E_k \sqrt{E_k^2 - M^2} d \cos \vartheta dE_k. \quad (\text{M.50})$$

Então:

$$I_2 = \frac{\pi}{2q_0} \int_{-1}^1 \int_M^\infty \frac{\theta(q_0 - E_k) E_k \sqrt{E_k^2 - M^2} d \cos \vartheta dE_k}{p^2 - 2p_0 E_k + M^2 - m^2 + 2|\vec{k}| |\vec{p}| \cos \vartheta + i0^+ (p_0 - E_k)} \frac{\delta\left(E_k - \frac{q_0^2 + M^2 - m^2}{2q_0}\right)}{E_k}. \quad (\text{M.51})$$

Integrando em E_k :

$$I_2 = \theta(q_0) \theta[q_0^2 - (m+M)^2] \frac{\pi}{2q_0} \mathbf{k} \int_{-1}^1 \frac{d \cos \vartheta}{\lambda^2 + 2\mathbf{k} |\vec{p}| \cos \vartheta + i\alpha 0^+}, \quad (\text{M.52})$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= p^2 - \frac{p_0}{q_0} (q_0^2 + M^2 - m^2) + M^2 - m^2 \\ &= p^2 - (m^2 - M^2) - p_0 q_0 \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q_0^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{M.53})$$

$$\mathbf{k} = \sqrt{E_k^2 - M^2} = \frac{q_0}{2} \sqrt{1 - 2 \frac{(M^2 + m^2)}{q_0^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q_0^4}} \quad (\text{M.54})$$

$$\alpha = p_0 - \frac{q_0^2 + M^2 - m^2}{2q_0} = \frac{2p_0 q_0 - q_0^2 - M^2 + m^2}{2q_0}. \quad (\text{M.55})$$

Usando a relação

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln \frac{a+b}{a-b} \quad (\text{M.56})$$

e identificando:

$$a = \lambda^2 + i\alpha 0^+ \quad (\text{M.57})$$

$$b = 2\mathbf{k} |\vec{p}| \quad (\text{M.58})$$

Obteremos:

$$I_2 = \frac{\pi}{4} \frac{\theta(q_0) \theta[q_0^2 - (m+M)^2]}{q_0 |\vec{p}|} \ln \frac{a+b}{a-b} \quad (\text{M.59})$$

Para obter a expressão em qualquer referencial usaremos os resultados obtidos para P (em I_1). Similarmente se fazemos:

$$q_0 |\vec{p}| \rightarrow \sqrt{N} ; p_0 q_0 \rightarrow pq ; q_0 \rightarrow \sqrt{q^2} . \quad (\text{M.60})$$

Finalmente, podemos expressar I_2 como:

$$I_2 = \frac{\pi}{4} \frac{\theta(q_0) \theta[q^2 - (m+M)^2]}{\sqrt{N}} \ln \frac{a+b}{a-b} , \quad (\text{M.61})$$

onde agora:

$$a = p^2 - m^2 + M^2 - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) + i\alpha 0^+ ; \alpha = \frac{2pq - q^2 - M^2 + m^2}{2\sqrt{q^2}} \quad (\text{M.62})$$

$$b = \sqrt{N} \sqrt{1 - 2 \frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}} . \quad (\text{M.63})$$

Outra forma de expressar I_2 é usando a propriedade:

$$\ln \frac{d + ic0^+}{f + ic0^+} = \ln \left(\frac{d}{f} + ic(f-d)0^+ \right) . \quad (\text{M.64})$$

Então podemos escrever I_2 da forma:

$$I_2 = \frac{\pi}{4} \frac{\theta(q_0) \theta[q^2 - (m+M)^2]}{\sqrt{N}} \log_2 \quad (\text{M.65})$$

onde

$$\log_2 = \ln \left(\frac{p^2 - m^2 + M^2 - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) + \sqrt{N} \sqrt{1 - 2 \frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}}}{p^2 - m^2 + M^2 - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) - \sqrt{N} \sqrt{1 - 2 \frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}}} + i(q^2 - m^2 - 2pq + M^2)0^+ \right)$$

Como mostramos I_3 pode-se obter se fazemos em I_2 , $p \rightarrow -q$ e $q \rightarrow -p$. Então:

$$I_2 = \frac{\pi \theta(-p_0) \theta [p^2 - (m + M)^2]}{4 \sqrt{N}} \log_3 \quad (\text{M.66})$$

onde

$$\log_3 = \ln \left(\frac{q^2 - m^2 + M^2 - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{p^2}\right) + \sqrt{N} \sqrt{1 - 2 \frac{(M^2 + m^2)}{p^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{p^4}}}{q^2 - m^2 + M^2 - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{p^2}\right) - \sqrt{N} \sqrt{1 - 2 \frac{(M^2 + m^2)}{p^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{p^4}}} + i(p^2 - m^2 - 2pq + M^2) 0^+ \right)$$

M.3 Cálculo de I

Voltando ao problema inicial, o cálculo de I . Vemos que de sua definição, esta pode-se escrever como:

$$I(p, q, M) = I^{R'}(p, q, M) - I^{A'}(p, q, M), \quad (\text{M.67})$$

onde:

$$I^{R'}(p, q, M) = -(2\pi)^{-6} [I_1(p, q, M) + I_2(p, q, M) + I_3(p, q, M)]. \quad (\text{M.68})$$

E por propriedade:

$$I^{A'}(p, q, M) = I^{R'}(q, p, M). \quad (\text{M.69})$$

Podemos observar da definição de $I^{R'}$:

$$\begin{aligned} & I^{R'}(p, q, M) \\ = & -(2\pi)^{-6} \int dk \\ & \left[\theta(k_0 - p_0) \delta((p - k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q - k)^2 - m^2) \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+} \right. \\ & + \frac{1}{(p - k)^2 - m^2 + i0^+} \theta(q_0 - k_0) \delta((q - k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \\ & \left. + \theta(k_0 - p_0) \delta((p - k)^2 - m^2) \frac{1}{(q - k)^2 - m^2 - i0^+} \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \right] \quad (\text{M.70}) \end{aligned}$$

Então sua parte imaginária é:

$$\begin{aligned} & Im I^{R'}(p, q, M) \\ = & \pi (2\pi)^{-6} \int dk \delta((p - k)^2 - m^2) \delta((q - k)^2 - m^2) \delta(k^2 - M^2) \\ & \cdot [\theta(p_0 - k_0) \theta(q_0 - k_0) \theta(k_0) + \theta(k_0 - p_0) \theta(k_0 - q_0) \theta(-k_0)] \quad (\text{M.71}) \end{aligned}$$

E da relação entre $I^{R'}$ e $I^{A'}$ vemos que:

$$Im I^{R'}(p, q, M) = Im I^{A'}(p, q, M). \quad (\text{M.72})$$

Com isso concluímos que

$$I(p, q, M) = \text{Re}I^{R'}(p, q, M) - \text{Re}I^{A'}(p, q, M) \quad (\text{M.73})$$

Finalmente, podemos expressar I da forma:

$$\begin{aligned} I(p, q, M) = & \frac{\pi}{4\sqrt{\pi N}} (2\pi)^{-6} \text{sgn}(P_0) \theta(P^2 - 4m^2) \log_1 \\ & - \frac{\pi}{4\sqrt{\pi N}} (2\pi)^{-6} \text{sgn}(q_0) \theta[q^2 - (m + M)^2] \log_2 \\ & + \frac{\pi}{4\sqrt{\pi N}} (2\pi)^{-6} \text{sgn}(p_0) \theta[p^2 - (m + M)^2] \log_3 \end{aligned} \quad (\text{M.74})$$

sendo

$$\log_1 \equiv \ln \left(\frac{pq + m^2 - M^2 + \sqrt{N} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}}}{pq + m^2 - M^2 - \sqrt{N} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}}} \right) \quad (\text{M.75})$$

$$\log_2 \equiv \ln \left(\frac{p^2 - (m^2 - M^2) - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2}\right) + \sqrt{N} \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}}}{p^2 - (m^2 - M^2) - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2}\right) - \sqrt{N} \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}}} \right) \quad (\text{M.76})$$

$$\log_3 = \log_2(q, p) . \quad (\text{M.77})$$

e, onde $N \equiv (Pp)^2 - P^2p^2$ e $P = p - q$.

Apêndice N

Integral Vectorial

A função I^ν está definida pela integral:

$$\begin{aligned}
 & (2\pi)^2 I^\nu(p, q, M) \\
 = & \int dk k^\nu \left[\hat{D}_m^{(-)}(p-k) \hat{D}_m^{(+)}(q-k) \hat{D}_M^F(k) - \hat{D}_m^{ret}(p-k) \hat{D}_m^{(+)}(q-k) \hat{D}_M^{(+)}(k) \right. \\
 & + \hat{D}_m^{(-)}(p-k) \hat{D}_m^{av}(q-k) \hat{D}_M^{(+)}(-k) - \hat{D}_m^{(+)}(p-k) \hat{D}_m^{(-)}(q-k) \hat{D}_M^F(k) \\
 & \left. + \hat{D}_m^{(+)}(p-k) \hat{D}_m^{ret}(q-k) \hat{D}_M^{(+)}(k) - \hat{D}_m^{av}(p-k) \hat{D}_m^{(-)}(q-k) \hat{D}_M^{(+)}(-k) \right] \quad (\text{N.1})
 \end{aligned}$$

Vemos que os três últimos termos se obtêm fazendo $p \rightleftharpoons q$ nos primeiros três. Sendo

$$\begin{aligned}
 \hat{D}_M^F(k) &= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+}, \quad \hat{D}_M^{ret}(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+} \\
 \hat{D}_M^{av}(k) &= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 - i0^+}, \quad \hat{D}_M^{(\pm)}(k) = \pm \frac{i}{2\pi} \theta(\pm k_0) \delta(k^2 - M^2) \quad (\text{N.2})
 \end{aligned}$$

Então I^ν explicitamente é:

$$\begin{aligned}
 & I^\nu(p, q, M) \\
 = & (2\pi)^{-6} \int dk k^\nu \\
 & [-\theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+} \\
 & - \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i0^+} \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \\
 & - \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \frac{1}{(q-k)^2 - m^2 - i0^+} \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \\
 & - (p \rightleftharpoons q)]. \quad (\text{N.3})
 \end{aligned}$$

Daqui vemos que nosso trabalho é calcular as integrais:

$$I_1^\nu = \int \frac{dk k^\nu}{k^2 - M^2 + i0^+} \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \quad (\text{N.4})$$

$$I_2^\nu = \int \frac{dk k^\nu}{(p-k)^2 - m^2 + i0^+} \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \quad (\text{N.5})$$

$$I_3^\nu = \int \frac{dk k^\nu}{(q-k)^2 - m^2 - i0^+} \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \quad (\text{N.6})$$

Observação.- Se fazemos $k \rightarrow -k$ a integral I_2^ν vemos que :

$$I_2^\nu = - \int \frac{dkk^\nu}{(p+k)^2 - m^2 + i0^+ (p_0 + k_0)} \theta(q_0 + k_0) \delta((q+k)^2 - m^2) \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \quad (\text{N.7})$$

E agora se fazemos $p \rightarrow -q$ e $q \rightarrow -p$:

$$\begin{aligned} I_2^\nu &\rightarrow - \int \frac{dkk^\nu}{(q-k)^2 - m^2 - i0^+ (q_0 - k_0)} \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \\ &= -I_3^\nu \end{aligned} \quad (\text{N.8})$$

Daí somente precisamos calcular I_1 e I_2 .

N.1 Cálculo de I_1^ν

Definida como segue:

$$I_1^\nu = \int \frac{dkk^\nu}{k^2 - M^2 + i0^+} \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \quad (\text{N.9})$$

Usando a identidade:

$$\frac{k^\nu}{k^2 - M^2 + i0^+} = \frac{1}{2} \partial_k^\nu \ln(k^2 - M^2 + i0^+) . \quad (\text{N.10})$$

E fazendo uso da integração por partes e da presença das δ -s teremos extremos nulos:

$$I_1^\nu = -\frac{1}{2} \int dk \ln(k^2 - M^2 + i0^+) \partial_k^\nu [\theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2)] \quad (\text{N.11})$$

E da propriedade $\partial_k^\nu f(p-k) = -\partial_p^\nu f(p-k)$ (similarmente para q) teremos:

$$\begin{aligned} I_1^\nu &= \frac{1}{2} \int dk \ln(k^2 - M^2 + i0^+) \\ &\quad \cdot (\partial_p^\nu + \partial_q^\nu) [\theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2)] \end{aligned} \quad (\text{N.12})$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_p^\nu + \partial_q^\nu) J_1(p, q) , \quad (\text{N.13})$$

onde

$$J_1 = \int dk \ln(k^2 - M^2 + i0^+) [\theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2)] . \quad (\text{N.14})$$

Calcularemos J_1 em forma similar ao caso de I_1 , observando que as contas são iguais se fazemos a mudança de funções:

$$\frac{1}{(*)} \rightarrow \ln(*) . \quad (\text{N.15})$$

Então obteremos:

$$J_1 = 2\pi\theta(-P_0) \frac{\theta(P_0^2 - 4m^2)}{4|P_0|} \sqrt{\frac{P_0^2}{4} - m^2} \int_{-1}^1 d\cos\vartheta \ln[\lambda^2 - \mathbf{k}^2 - |\vec{p}|^2 - 2\mathbf{k}|\vec{p}|\cos\vartheta - M^2 + i0^+] \quad (\text{N.16})$$

Lembrando que este é o caso não nulo que acontece no referencial tal que $\vec{P} = 0$ (onde $P = p - q$), e nesta expressão:

$$\lambda = -\frac{P_0}{2} + p_0; \mathbf{k} = \sqrt{\frac{P_0^2}{4} - m^2}. \quad (\text{N.17})$$

Usando a relação

$$\int_{-1}^1 dx \ln(a - bx) = \frac{1}{b} \left[a \ln \frac{a+b}{a-b} + b \ln(a^2 - b^2) - 2b \right] \quad (\text{N.18})$$

como válida para distribuições. Identificando:

$$a = \lambda^2 - \mathbf{k}^2 - |\vec{p}|^2 - M^2 + i0^+ \quad (\text{N.19})$$

$$b = 2\mathbf{k}|\vec{p}|. \quad (\text{N.20})$$

Teremos que:

$$\begin{aligned} J_1 &= 2\pi\theta(-P_0) \frac{\theta(P_0^2 - 4m^2)}{4|P_0|} \sqrt{\frac{P_0^2}{4} - m^2} \frac{1}{b} \left[a \ln \frac{a+b}{a-b} + b \ln(a^2 - b^2) - 2b \right] \\ &= \frac{\pi}{4} \theta(-P_0) \frac{\theta(P_0^2 - 4m^2)}{|P_0||\vec{p}|} \left[a \ln \frac{a+b}{a-b} + b \ln(a^2 - b^2) - 2b \right] \end{aligned} \quad (\text{N.21})$$

Da definição de λ e \mathbf{k} :

$$a = \lambda^2 - \mathbf{k}^2 - |\vec{p}|^2 - M^2 + i0^+ = p^2 + m^2 - M^2 - P_0 p_0 + i0^+ \quad (\text{N.22})$$

$$b = 2\mathbf{k}|\vec{p}| = |\vec{p}||P_0| \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P_0^2}}. \quad (\text{N.23})$$

Para obter a expressão em qualquer referencial usaremos os resultados obtidos em I_1 , onde se tem a generalização fazendo:

$$P_0|\vec{p}| \rightarrow \sqrt{N}; p_0 P_0 \rightarrow pP; P_0 \rightarrow \sqrt{P^2}, \quad (\text{N.24})$$

onde $N = (qp)^2 - q^2 p^2$

Finalmente, podemos expressar J_1 como:

$$J_1 = \frac{\pi}{4} \theta(-P_0) \frac{\theta(P^2 - 4m^2)}{\sqrt{N}} \left[a \ln \frac{a+b}{a-b} + b \ln(a^2 - b^2) - 2b \right], \quad (\text{N.25})$$

onde agora:

$$a = pq + m^2 - M^2 + i0^+ \quad (\text{N.26})$$

$$b = \sqrt{N} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}}. \quad (\text{N.27})$$

Para calcular $I_1^\nu = \frac{1}{2} (\partial_p^\nu + \partial_q^\nu) J_1$, supondo que as derivadas não agem nas funções degrau, definimos J da forma:

$$J = \frac{1}{c} \left[a \ln \frac{a+b}{a-b} + b \ln (a^2 - b^2) - 2b \right], \quad (\text{N.28})$$

onde $c = \sqrt{N}$.

Então temos que calcular ∂J :

$$\partial J = \frac{1}{c^2} (c\partial a - a\partial c) \ln \frac{a+b}{a-b} + \frac{1}{c^2} (c\partial b - b\partial c) \ln (a^2 - b^2) + 2 \frac{b\partial c}{c^2}, \quad (\text{N.29})$$

onde $\partial = \frac{1}{2} (\partial_p^\nu + \partial_q^\nu)$ das definições de a, b e c teremos:

$$\partial a = \frac{1}{2} (q^\nu + p^\nu) \quad (\text{N.30})$$

$$\partial c = \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\sqrt{N}} = \frac{1}{2\sqrt{N}} [(q^\nu qp - p^\nu q^2) + (p^\nu pq - q^\nu p^2)] \quad (\text{N.31})$$

$$\partial b = \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\sqrt{N}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{N} \frac{\frac{4m^2 \partial P^2}{P^4}}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}}} = \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\sqrt{N}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} \quad (\text{N.32})$$

Então:

$$2c [c\partial a - a\partial c] = p^\nu \{pq [q^2 - (m^2 - M^2)] - q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)]\} + q^\nu \{pq [p^2 - (m^2 - M^2)] - p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)]\} \quad (\text{N.33})$$

onde não consideramos os $i0^+$ pelo fato que estas aparecem como partes de numeradores. Também teremos que:

$$c\partial b - b\partial c = \sqrt{N} \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\sqrt{N}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} - \sqrt{N} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\sqrt{N}} = 0 \quad (\text{N.34})$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{b\partial c}{c^2} &= \frac{\partial N}{N} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} \\ &= \frac{1}{N} [p^\nu (pq - q^2) + q^\nu (qp - p^2)] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} \end{aligned} \quad (\text{N.35})$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} I_1^\nu &= \frac{1}{2} (\partial_p^\nu + \partial_q^\nu) J_1 \\ &= \frac{1}{2N} \frac{\pi}{4} \theta(-P_0) \frac{\theta(P^2 - 4m^2)}{\sqrt{N}} \log_1 \\ &\quad \{p^\nu \{pq [q^2 - (m^2 - M^2)] - q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)]\} \\ &\quad + q^\nu \{pq [p^2 - (m^2 - M^2)] - p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)]\}\} \\ &\quad + \frac{\pi}{4N} \theta(-P_0) \theta(P^2 - 4m^2) [p^\nu (pq - q^2) + q^\nu (qp - p^2)] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} \end{aligned} \quad (\text{N.36})$$

Nesta expressão fizemos a identificação da função \log_1 obtida em I_1 .

N.2 Cálculo de I_2^ν e I_3^ν

Definida como:

$$\begin{aligned} I_2^\nu &= \int \frac{dk k^\nu}{(p-k)^2 - m^2 + i0^+(p_0 - k_0)} \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \\ &= \int \frac{dk (k^\nu - p^\nu)}{(p-k)^2 - m^2 + i0^+(p_0 - k_0)} \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \\ &\quad + p^\nu I_2. \end{aligned} \quad (\text{N.37})$$

Usando a identidade :

$$\frac{k^\nu - p^\nu}{(p-k)^2 - m^2 + i0^+(p_0 - k_0)} = \frac{1}{2} \partial_k^\nu \ln((p-k)^2 - m^2 + i0^+(p_0 - k_0)). \quad (\text{N.38})$$

Então:

$$\begin{aligned} I_2^\nu &= \frac{1}{2} \int dk [\partial_k^\nu \ln((p-k)^2 - m^2 + i0^+(p_0 - k_0))] \\ &\quad \cdot \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \\ &\quad + p^\nu I_2. \end{aligned} \quad (\text{N.39})$$

E da propriedade $\partial_k^\nu f(p-k) = -\partial_p^\nu f(p-k)$

$$I_2^\nu = p^\nu I_2 - \frac{1}{2} \partial_p^\nu J_2, \quad (\text{N.40})$$

onde

$$\begin{aligned} J_2(p, q) &= \int dk \ln((p-k)^2 - m^2 + i0^+(p_0 - k_0)) \\ &\quad \cdot \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2). \end{aligned} \quad (\text{N.41})$$

Calcularemos J_2 similarmente ao caso J_1 , fazendo em J_2 a mudança

$$\frac{1}{(*)} \rightarrow \ln(*). \quad (\text{N.42})$$

Então obteremos:

$$J_2 = \theta(q_0) \theta[q_0^2 - (m+M)^2] \frac{\pi}{2q_0} \mathbf{k} \int_{-1}^1 d \cos \vartheta \ln(\lambda^2 + 2\mathbf{k} |\vec{p}| \cos \vartheta + i\alpha 0^+). \quad (\text{N.43})$$

Lembrando que este é o caso não nulo que é quando $q \in V^+$, onde escolhemos um referencial tal que $q = (q_0, \vec{0})$. E nesta expressão:

$$\lambda^2 = p^2 - (m^2 - M^2) - p_0 q_0 \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q_0^2}\right) \quad (\text{N.44})$$

$$\mathbf{k} = \sqrt{E_k^2 - M^2} = \frac{q_0}{2} \sqrt{1 - 2 \frac{(M^2 + m^2)}{q_0^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q_0^4}} \quad (\text{N.45})$$

$$\alpha = p_0 - \frac{q_0^2 + M^2 - m^2}{2q_0} = \frac{2p_0 q_0 - q_0^2 - M^2 + m^2}{2q_0}. \quad (\text{N.46})$$

Usando a relação

$$\int_{-1}^1 dx \ln(a - bx) = \frac{1}{b} \left[a \ln \frac{a+b}{a-b} + b \ln(a^2 - b^2) - 2b \right] \quad (\text{N.47})$$

como válida para distribuições. Identificando:

$$a = \lambda^2 + i\alpha 0^+ \quad (\text{N.48})$$

$$b = 2\mathbf{k} |\vec{p}| \quad (\text{N.49})$$

Teremos que:

$$J_2 = \frac{\pi \theta(q_0) \theta[q_0^2 - (m+M)^2]}{4 q_0 |\vec{p}|} \left[a \ln \frac{a+b}{a-b} + b \ln(a^2 - b^2) - 2b \right]. \quad (\text{N.50})$$

Para obter a expressão em qualquer referencial usaremos os resultados obtidos para P (em I_1). Similarmente se fazemos:

$$q_0 |\vec{p}| \rightarrow \sqrt{N}; p_0 q_0 \rightarrow pq; q_0 \rightarrow \sqrt{q^2}. \quad (\text{N.51})$$

onde $N = (pq)^2 - p^2 q^2$.

Finalmente podemos expressar J_2 da forma:

$$J_2 = \frac{\pi \theta(q_0) \theta[q^2 - (m+M)^2]}{4 \sqrt{N}} \left[a \ln \frac{a+b}{a-b} + b \ln(a^2 - b^2) - 2b \right], \quad (\text{N.52})$$

onde agora:

$$a = p^2 - m^2 + M^2 - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) + i\alpha 0^+; \alpha = \frac{2pq - q^2 - M^2 + m^2}{2\sqrt{q^2}} \quad (\text{N.53})$$

$$b = \sqrt{N} \sqrt{1 - 2 \frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}}. \quad (\text{N.54})$$

Para calcular $I_2^\nu = p^\nu I_2 - \frac{1}{2} \partial_p^\nu J_2$, supondo que as derivadas não agem nas funções degrau, definimos J da forma:

$$J = \frac{1}{c} \left[a \ln \frac{a+b}{a-b} + b \ln(a^2 - b^2) - 2b \right], \quad (\text{N.55})$$

onde $c = \sqrt{N}$ (J tem a mesma forma que no caso I_1^ν)

Então temos que calcular:

$$\partial J = \frac{1}{c^2} (c\partial a - a\partial c) \ln \frac{a+b}{a-b} + \frac{1}{c^2} (c\partial b - b\partial c) \ln(a^2 - b^2) + 2 \frac{b\partial c}{c^2}, \quad (\text{N.56})$$

onde $\partial = \frac{1}{2}\partial_p^\nu$ das definições de a, b e c teremos:

$$\partial a = p^v - \frac{1}{2}q^\nu \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2}\right) \quad (\text{N.57})$$

$$\partial c = \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\sqrt{N}} = \frac{1}{2\sqrt{N}} (q^v qp - p^v q^2) \quad (\text{N.58})$$

$$\partial b = \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\sqrt{N}} \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}}. \quad (\text{N.59})$$

Então:

$$2c [c\partial a - a\partial c] = 2Np^v - p^v \{pq [q^2 - (m^2 - M^2)] - q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)]\} \\ - q^v \{pq [p^2 - (m^2 - M^2)] - p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)]\} \quad (\text{N.60})$$

$$c\partial b - b\partial c = 0 \quad (\text{N.61})$$

E

$$2\frac{b\partial c}{c^2} = \frac{\partial N}{N} \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}} \\ = -\frac{1}{N} (p^v q^2 - q^v qp) \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}} \quad (\text{N.62})$$

Finalmente:

$$I_2^\nu = p^\nu I_2 - \frac{1}{2}\partial_p^\nu J_2 \\ = \frac{1}{2N} \frac{\pi}{4} \theta(q_0) \frac{\theta [q^2 - (m + M)^2]}{\sqrt{N}} \log_2 \\ \{p^v \{pq [q^2 - (m^2 - M^2)] - q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)]\} \\ + q^v \{pq [p^2 - (m^2 - M^2)] - p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)]\}\} \\ + \frac{\pi}{4N} \theta(q_0) \theta [q^2 - (m + M)^2] (p^v q^2 - q^v qp) \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}} \quad (\text{N.63})$$

Nesta expressão fizemos a identificação da função $\log_2 = \ln \frac{a+b}{a-b}$ obtida em I_2 .

E da observação temos que podemos obter I_3^ν se fazemos em $-I_2^\nu$, $p \rightarrow -q$ e $q \rightarrow -p$.

Então:

$$I_3^\nu = \frac{1}{2N} \frac{\pi}{4} \theta(-p_0) \frac{\theta [p^2 - (m + M)^2]}{\sqrt{N}} \log_3 \\ \{p^v \{pq [q^2 - (m^2 - M^2)] - q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)]\} \\ + q^v \{pq [p^2 - (m^2 - M^2)] - p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)]\}\} \\ + \frac{\pi}{4N} \theta(-p_0) \theta [p^2 - (m + M)^2] (q^v p^2 - p^v qp) \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{p^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{p^4}} \quad (\text{N.64})$$

onde $\log_3(p, q) = \log_2(q, p) = \log_2(-q, -p)$.

N.3 Cálculo de I^ν

Voltando ao problema inicial, o cálculo de I^ν . Vemos que de sua definição, esta pode-se escrever como:

$$I^\nu(p, q, M) = I^{\nu R'}(p, q, M) - I^{\nu A'}(p, q, M) , \quad (\text{N.65})$$

onde:

$$I^{\nu R'}(p, q, M) = -(2\pi)^{-6} [I_1^\nu(p, q, M) + I_2^\nu(p, q, M) + I_3^\nu(p, q, M)] . \quad (\text{N.66})$$

E por propriedade :

$$I^{\nu A'}(p, q, M) = I^{\nu R'}(q, p, M) . \quad (\text{N.67})$$

Dos resultados previos obtemos:

$$\begin{aligned} & I^{\nu R'} \\ = & \frac{1}{2N} I^{R'} \\ & \{ p^\nu \{ pq [q^2 - (m^2 - M^2)] - q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)] \} \\ & + q^\nu \{ pq [p^2 - (m^2 - M^2)] - p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)] \} \} \\ & + (2\pi)^{-6} \left\{ -\frac{\pi}{4N} \theta(-P_0) \theta(P^2 - 4m^2) [p^\nu (pq - q^2) + q^\nu (qp - p^2)] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} \right. \\ & - \frac{\pi}{4N} \theta(q_0) \theta[q^2 - (m + M)^2] (p^\nu q^2 - q^\nu qp) \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}} \\ & \left. - \frac{\pi}{4N} \theta(-p_0) \theta[p^2 - (m + M)^2] (q^\nu p^2 - p^\nu qp) \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{p^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{p^4}} \right\} \quad (\text{N.68}) \end{aligned}$$

Similarmente ao caso escalar encontraremos que:

$$Im I^{\nu R'}(p, q, M) = Im I^{\nu A'}(p, q, M) . \quad (\text{N.69})$$

Com isso concluímos que

$$I^\nu(p, q, M) = Re I^{\nu R'}(p, q, M) - Re I^{\nu A'}(p, q, M) . \quad (\text{N.70})$$

Finalmente, podemos expressar I^ν da forma:

$$\begin{aligned}
& I^\nu(p, q, M) \\
= & \frac{1}{2N} I(p, q, M) \\
& \{p^\nu \{pq [q^2 - (m^2 - M^2)] - q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)]\} \\
& + q^\nu \{pq [p^2 - (m^2 - M^2)] - p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)]\}\} \\
& + (2\pi)^{-6} \left\{ -\frac{\pi}{4N} \theta(-P_0) \theta(P^2 - 4m^2) [p^\nu (pq - q^2) + q^\nu (qp - p^2)] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} \right. \\
& - \frac{\pi}{4N} \theta(q_0) \theta[q^2 - (m + M)^2] (p^\nu q^2 - q^\nu qp) \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}} \\
& \left. - \frac{\pi}{4N} \theta(-p_0) \theta[p^2 - (m + M)^2] (q^\nu p^2 - p^\nu qp) \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{p^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{p^4}} \right\} \quad (\text{N.71})
\end{aligned}$$

Apêndice O

Integral Tensorial

A função $I^{\mu\nu}$ está definida pela integral:

$$\begin{aligned}
 & (2\pi)^2 I^{\mu\nu}(p, q, M) \\
 = & \int dk k^\mu k^\nu \left[\hat{D}_m^{(-)}(p-k) \hat{D}_m^{(+)}(q-k) \hat{D}_M^F(k) - \hat{D}_m^{ret}(p-k) \hat{D}_m^{(+)}(q-k) \hat{D}_M^{(+)}(k) \right. \\
 & + \hat{D}_m^{(-)}(p-k) \hat{D}_m^{av}(q-k) \hat{D}_M^{(+)}(-k) - \hat{D}_m^{(+)}(p-k) \hat{D}_m^{(-)}(q-k) \hat{D}_M^F(k) \\
 & \left. + \hat{D}_m^{(+)}(p-k) \hat{D}_m^{ret}(q-k) \hat{D}_M^{(+)}(k) - \hat{D}_m^{av}(p-k) \hat{D}_m^{(-)}(q-k) \hat{D}_M^{(+)}(-k) \right] \quad (O.1)
 \end{aligned}$$

Vemos que os três últimos termos se obtêm fazendo $p \rightleftharpoons q$ nos primeiros três termos. Sendo

$$\begin{aligned}
 \hat{D}_M^F(k) &= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+}, \quad \hat{D}_M^{ret}(k) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+(k_0)} \\
 \hat{D}_M^{av}(k) &= -(2\pi)^{-2} \frac{1}{k^2 - M^2 - i0^+(k_0)}, \quad \hat{D}_M^{(\pm)}(k) = \pm \frac{i}{2\pi} \theta(\pm k_0) \delta(k^2 - M^2) \quad (O.2)
 \end{aligned}$$

Então $I^{\mu\nu}$ explicitamente é:

$$\begin{aligned}
 & I^{\mu\nu}(p, q, M) \\
 = & (2\pi)^{-6} \int dk k^\mu k^\nu \\
 & \left[-\theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+} \right. \\
 & - \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i0^+(p_0 - k_0)} \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \\
 & - \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \frac{1}{(q-k)^2 - m^2 - i0^+(q_0 - k_0)} \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \\
 & \left. + (p \rightleftharpoons q) \right]. \quad (O.3)
 \end{aligned}$$

Daí vemos que nosso trabalho é calcular as integrais:

$$I_1^{\mu\nu} = \int \frac{dk k^\mu k^\nu}{k^2 - M^2 + i0^+} \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \quad (O.4)$$

$$I_2^{\mu\nu} = \int \frac{dk k^\mu k^\nu}{(p-k)^2 - m^2 + i0^+(p_0 - k_0)} \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \quad (O.5)$$

$$I_3^{\mu\nu} = \int \frac{dk k^\mu k^\nu}{(q-k)^2 - m^2 - i0^+(q_0 - k_0)} \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \quad (O.6)$$

Na integral $I_2^{\mu\nu}$ vemos que se fazemos $k \rightarrow -k$:

$$I_2^{\mu\nu} = \int \frac{dk k^\mu k^\nu}{(p+k)^2 - m^2 + i0^+ (p_0 + k_0)} \theta(q_0 + k_0) \delta((q+k)^2 - m^2) \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \quad (\text{O.7})$$

E $p \rightarrow -q, q \rightarrow -p$:

$$\begin{aligned} I_2^{\mu\nu} &\rightarrow \int \frac{dk k^\mu k^\nu}{(q-k)^2 - m^2 - i0^+ (q_0 - k_0)} \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2) \\ &= I_3^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{O.8})$$

Então somente precisamos calcular $I_1^{\mu\nu}$ e $I_2^{\mu\nu}$.

O.1 Cálculo de $I_1^{\mu\nu}$

Definida como:

$$I_1^{\mu\nu} = \int \frac{dk k^\mu k^\nu}{k^2 - M^2 + i0^+} \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \quad (\text{O.9})$$

Usando a identidade :

$$\begin{aligned} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - M^2 + i0^+} &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \ln(k^2 - M^2 + i0^+) + \frac{1}{2} \partial_k^\nu [k^\mu \ln(k^2 - M^2 + i0^+)] \\ &= \frac{1}{4} \partial_k^\nu \{ \partial_k^\mu [(k^2 - M^2) \ln(k^2 - M^2 + i0^+) - (k^2 - M^2)] \} \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \ln(k^2 - M^2 + i0^+) \end{aligned} \quad (\text{O.10})$$

onde consideramos que para certo conjunto de funções de teste $x\delta(x) = 0, xP_x^{\frac{1}{x}} = 1 \rightarrow x \frac{1}{x \pm i0^+} = 1$.

Então:

$$\begin{aligned} I_1^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} J_1 \\ &\quad + \frac{1}{4} \int dk \partial_k^\nu \{ \partial_k^\mu [(k^2 - M^2) \ln(k^2 - M^2 + i0^+) - (k^2 - M^2)] \} \\ &\quad \times \theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \end{aligned} \quad (\text{O.11})$$

E fazendo uso da integração por partes, e da presença das δ -s teremos extremos nulos:

$$\begin{aligned} I_1^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} J_1 \\ &\quad + \frac{1}{4} \int dk [(k^2 - M^2) \ln(k^2 - M^2 + i0^+) - (k^2 - M^2)] \\ &\quad \times \partial_k^\mu \partial_k^\nu [\theta(k_0 - p_0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2)] \end{aligned} \quad (\text{O.12})$$

E da propriedade $\partial_k^\nu f(p-k) = -\partial_p^\nu f(p-k)$ (similarmente para $p=q$) obteremos que:

$$I_1^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} J_1 + \frac{1}{4} (\partial_p^\mu + \partial_q^\mu) (\partial_p^\nu + \partial_q^\nu) K_1, \quad (\text{O.13})$$

onde

$$K_1 = \int dk [(k^2 - M^2) \ln(k^2 - M^2 + i0^+) - (k^2 - M^2)] \\ \times [\theta(k_0 - p_0) \delta((p - k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q - k)^2 - m^2)] . \quad (\text{O.14})$$

Calcularemos esta em forma similar ao caso de I_1 , observando que as contas são iguais se fazemos a mudança de funções:

$$\frac{1}{(*)} \rightarrow (*) \ln(*) - (*) . \quad (\text{O.15})$$

Então obteremos:

$$K_1 = 2\pi\theta(-P_0) \frac{1}{4|P_0|} \sqrt{\frac{P_0^2}{4} - m^2} \\ \int_{-1}^1 d \cos \vartheta \{ [\lambda^2 - \mathbf{k}^2 - |\vec{p}|^2 - 2\mathbf{k} |\vec{p}| \cos \vartheta - M^2] \\ \times \ln [\lambda^2 - \mathbf{k}^2 - |\vec{p}|^2 - 2\mathbf{k} |\vec{p}| \cos \vartheta - M^2 + i0^+] \\ - [\lambda^2 - \mathbf{k}^2 - |\vec{p}|^2 - 2\mathbf{k} |\vec{p}| \cos \vartheta - M^2] \} . \quad (\text{O.16})$$

Lembrando que este é o caso não nulo que acontece no referencial tal que $\vec{P} = 0$ (onde $P = p - q$), e nesta expressão:

$$\lambda = -\frac{P_0}{2} + p_0 ; \mathbf{k} = \sqrt{\frac{P_0^2}{4} - m^2} . \quad (\text{O.17})$$

Usando a relação

$$\int_{-1}^1 dx [(a - bx) \ln(a - bx) - (a - bx)] = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \ln \frac{a+b}{a-b} + ab (\ln(a^2 - b^2) - 3) \right]$$

(O.18)

como válida para distribuições. Identificando:

$$a = \lambda^2 - \mathbf{k}^2 - |\vec{p}|^2 - M^2 + i0^+ \quad (\text{O.19})$$

$$b = 2\mathbf{k} |\vec{p}| . \quad (\text{O.20})$$

Teremos que:

$$K_1 = 2\pi\theta(-P_0) \frac{1}{4|P_0|} \sqrt{\frac{P_0^2}{4} - m^2} \frac{1}{b} \left[\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \ln \frac{a+b}{a-b} + ab (\ln(a^2 - b^2) - 3) \right] \\ = \frac{\pi \theta(-P_0) \theta(P_0^2 - 4m^2)}{4|P_0| |\vec{p}|} \left[\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \ln \frac{a+b}{a-b} + ab (\ln(a^2 - b^2) - 3) \right] \quad (\text{O.21})$$

Da definição de λ e \mathbf{k} :

$$a = \lambda^2 - \mathbf{k}^2 - |\vec{p}|^2 - M^2 + i0^+ = p^2 + m^2 - M^2 - P_0 p_0 + i0^+ \quad (\text{O.22})$$

$$b = 2\mathbf{k} \cdot \vec{p} = |\vec{p}| |P_0| \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P_0^2}}. \quad (\text{O.23})$$

Para obter a expressão em qualquer referencial usaremos os resultados obtidos em I_1 , onde se tem a generalização fazendo:

$$P_0 |\vec{p}| \rightarrow \sqrt{N}; p_0 P_0 \rightarrow pP; P_0 \rightarrow \sqrt{P^2}. \quad (\text{O.24})$$

onde $N = (qp)^2 - q^2 p^2$.

Finalmente, podemos expressar K_1 como:

$$K_1 = \frac{\pi}{4} \theta(-P_0) \frac{\theta(P^2 - 4m^2)}{\sqrt{N}} \left[\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \ln \frac{a+b}{a-b} + ab (\ln(a^2 - b^2) - 3) \right] \quad (\text{O.25})$$

onde agora:

$$a = pq + m^2 - M^2 + i0^+ \quad (\text{O.26})$$

$$b = \sqrt{N} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}}. \quad (\text{O.27})$$

Para calcular $I_1^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} J_1 + \frac{1}{4} (\partial_p^\mu + \partial_q^\mu) (\partial_p^\nu + \partial_q^\nu) K_1$, supondo que as derivadas não agem nas funções degrau, definimos K da forma:

$$K = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \ln \frac{a+b}{a-b} + ab (\ln(a^2 - b^2) - 3) \right]. \quad (\text{O.28})$$

onde $c = \sqrt{N}$.

Sendo $\partial_1 K$ dado como:

$$\partial_1 K = \partial_1 \left[\frac{1}{2c} (a^2 + b^2) \right] \ln \frac{a+b}{a-b} + \partial_1 \left(\frac{ab}{c} \right) \ln(a^2 - b^2) - 3 \partial_1 \left(\frac{ab}{c} \right) + \frac{1}{c} \partial_1(ab) \quad (\text{O.29})$$

Devemos calcular $\partial_2 \partial_1 K$:

$$\begin{aligned} \partial_2 \partial_1 K &= \partial_2 \partial_1 \left[\frac{1}{2c} (a^2 + b^2) \right] \ln \frac{a+b}{a-b} + \partial_2 \partial_1 \left(\frac{ab}{c} \right) \ln(a^2 - b^2) - 3 \partial_2 \partial_1 \left(\frac{ab}{c} \right) \\ &\quad + \partial_2 \left(\frac{1}{c} \right) \partial_1(ab) + \frac{b}{c} \partial_2 \partial_1 a + \frac{a}{c} \partial_2 \partial_1 b \\ &\quad + \frac{3}{c} (\partial_1 a \partial_2 b + \partial_1 b \partial_2 a) + \partial_1 \left(\frac{1}{c} \right) \partial_2(ab). \end{aligned} \quad (\text{O.30})$$

onde $\partial_1 = \frac{1}{2} (\partial_p^\nu + \partial_q^\nu)$ e $\partial_2 = \frac{1}{2} (\partial_p^\mu + \partial_q^\mu)$. Teremos que calcular os coeficientes:

$$(1) = \partial_2 \partial_1 \left[\frac{1}{2c} (a^2 + b^2) \right] \quad (\text{O.31})$$

$$(2) = \partial_2 \partial_1 \left(\frac{ab}{c} \right) \quad (\text{O.32})$$

$$(3) = -3 \partial_2 \partial_1 \left(\frac{ab}{c} \right) + \frac{b}{c} \partial_2 \partial_1 a + \frac{a}{c} \partial_2 \partial_1 b + \partial_2 \left(\frac{1}{c} \right) \partial_1 (ab) + \partial_1 \left(\frac{1}{c} \right) \partial_2 (ab) \\ + \frac{3}{c} (\partial_1 a \partial_2 b + \partial_1 b \partial_2 a). \quad (\text{O.33})$$

Das definições de a, b e c .

$$\partial_1 a = \frac{1}{2} (q^v + p^v) \quad (\text{O.34})$$

$$\partial_1 c = \frac{1}{2c} [q^v (qp - p^2) + p^v (pq - q^2)] \quad (\text{O.35})$$

$$\partial_{1,2} b = (\partial_{1,2} c) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} = (\partial_{1,2} c) \left(\frac{b}{c} \right). \quad (\text{O.36})$$

Daí:

$$\partial_{1,2} \frac{b}{c} = 0 \quad (\text{O.37})$$

$$\partial_2 \partial_1 a = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \quad (\text{O.38})$$

$$\partial_2 \partial_1 b = \left(\frac{b}{c} \right) (\partial_2 \partial_1 c) \quad (\text{O.39})$$

$$\partial_2 \partial_1 c = \partial_2 \left\{ \frac{1}{2c} [(q^v qp - p^v q^2) + (p^v pq - q^v p^2)] \right\} \\ = -\frac{1}{4c^3} q^\mu q^v [p^2 (p - q)^2] - \frac{1}{4c^3} p^\mu p^v [q^2 (p - q)^2] + \frac{1}{4c^3} (q^\mu p^v + p^\mu q^v) [pq (p - q)^2] \\ - \frac{1}{4c} g^{\mu\nu} (p - q)^2. \quad (\text{O.40})$$

Outros resultados:

$$\partial_2 c \partial_1 b = \left(\frac{b}{c} \right) \partial_2 c \partial_1 c \quad (\text{O.41})$$

$$\partial_2 c \partial_1 c = \frac{1}{4c^2} [q^\mu q^v (qp - p^2)^2 + p^\mu p^v (pq - q^2)^2] \\ + \frac{1}{4c^2} (p^\mu q^v + q^\mu p^v) (pq - q^2) (qp - p^2) \quad (\text{O.42})$$

$$\partial_1 a \partial_2 b = \left(\frac{b}{c} \right) \partial_2 c \partial_1 a \quad (\text{O.43})$$

$$\partial_2 c \partial_1 a = \frac{1}{4c} [q^\mu q^v (qp - p^2) + p^\mu p^v (pq - q^2) + p^\mu q^v (pq - q^2) + q^\mu p^v (qp - p^2)] \quad (\text{O.44})$$

$$\partial_1 b \partial_2 a = \left(\frac{b}{c} \right) \partial_1 c \partial_2 a \quad (\text{O.45})$$

$$\partial_1 c \partial_2 a = \frac{1}{4c} [q^\mu q^v (qp - p^2) + p^\mu p^v (pq - q^2) + q^\mu p^v (pq - q^2) + p^\mu q^v (qp - p^2)] \quad (\text{O.46})$$

Então:

$$\partial_2 \partial_1 \left(\frac{ab}{c} \right) = \frac{b}{c} (\partial_2 \partial_1 a) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{b}{c} \quad (\text{O.47})$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} \partial_2 \partial_1 b &= \frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} \right) \left(\frac{a}{c^2} \right) \left\{ -\frac{1}{c^2} \left[q^\mu q^\nu (qp - p^2)^2 + p^\mu p^\nu (pq - q^2)^2 \right] \right. \\ &\quad - \frac{1}{c^2} (q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) (pq - q^2) (qp - p^2) \\ &\quad \left. + (q^\nu q^\mu + p^\nu p^\mu) - (p^\nu q^\mu + q^\nu p^\mu) - g^{\mu\nu} (p - q)^2 \right\} \quad (\text{O.48}) \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} &\partial_2 \left(\frac{1}{c} \right) \partial_1 (ab) \\ = &-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} \right) \left(\frac{a}{c^2} \right) \left\{ \frac{1}{c^2} \left[q^\mu q^\nu (qp - p^2)^2 + p^\mu p^\nu (pq - q^2)^2 \right] \right\} \\ &-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} \right) \left(\frac{a}{c^2} \right) \left\{ \frac{1}{c^2} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) (pq - q^2) (qp - p^2) \right\} \\ &-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} \right) \left(\frac{1}{c^2} \right) \left[q^\mu q^\nu (qp - p^2) + p^\mu p^\nu (pq - q^2) + p^\mu q^\nu (pq - q^2) + q^\mu p^\nu (qp - p^2) \right] \quad (\text{O.49}) \end{aligned}$$

Fazendo $\mu \rightleftharpoons \nu$:

$$\begin{aligned} &\partial_1 \left(\frac{1}{c} \right) \partial_2 (ab) \\ = &-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} \right) \left(\frac{a}{c^2} \right) \left\{ \frac{1}{c^2} \left[q^\mu q^\nu (qp - p^2)^2 + p^\mu p^\nu (pq - q^2)^2 \right] \right\} \\ &-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} \right) \left(\frac{a}{c^2} \right) \left\{ \frac{1}{c^2} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) (pq - q^2) (qp - p^2) \right\} \\ &-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} \right) \left(\frac{1}{c^2} \right) \left[q^\mu q^\nu (qp - p^2) + p^\mu p^\nu (pq - q^2) + q^\mu p^\nu (pq - q^2) + p^\mu q^\nu (qp - p^2) \right] \quad (\text{O.50}) \end{aligned}$$

Também encontramos que:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c} (\partial_1 a \partial_2 b + \partial_1 b \partial_2 a) \\ = &\frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} \right) \left(\frac{1}{c^2} \right) \\ &\times \left\{ 2q^\mu q^\nu (qp - p^2) + 2p^\mu p^\nu (pq - q^2) + (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) [(qp - p^2) + (pq - q^2)] \right\} \quad (\text{O.51}) \end{aligned}$$

*) Com esses resultados temos calculados os coeficientes:

$$(2) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{b}{c} \right) \quad (\text{O.52})$$

$$(3) = -g^{\mu\nu} \left(\frac{b}{c} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{c^3} \right) [g^{\mu\nu} (p-q)^2 a] \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{c^3} \right) q^\mu q^\nu \left[4 (qp - p^2) + a - 3 \frac{a (qp - p^2)^2}{c^2} \right] \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{c^3} \right) p^\mu p^\nu \left[4 (pq - q^2) + a - 3 \frac{a (pq - q^2)^2}{c^2} \right] \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{c^3} \right) (q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) \left[2 (qp - p^2) + 2 (pq - q^2) - a - 3 \frac{a (pq - q^2) (qp - p^2)}{c^2} \right] \quad (\text{O.53})$$

*) Após simplificações obtemos que último coeficiente tem a forma:

$$(1) = -\frac{1}{2c^2} (\partial_2 \partial_1 c) (a^2 - b^2) + \frac{1}{c^3} (\partial_2 c \partial_1 c) a^2 - \frac{1}{c^2} (\partial_1 c \partial_2 a + \partial_2 c \partial_1 a) a \\ + \frac{1}{c} (\partial_2 a \partial_1 a) + \frac{a}{c} (\partial_2 \partial_1 a) . \quad (\text{O.54})$$

Com os resultados prévios obteremos que:

$$(1) = \frac{1}{8c^5} q^\mu q^\nu \left[p^2 (p-q)^2 (a^2 - b^2) + 2 [(qp - p^2) a - c^2]^2 \right] \\ + \frac{1}{8c^5} p^\mu p^\nu \left[q^2 (p-q)^2 (a^2 - b^2) + 2 [(qp - q^2) a - c^2]^2 \right] \\ - \frac{1}{8c^5} (q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) \\ \times [pq (p-q)^2 (a^2 - b^2) - 2 (pq - q^2) (qp - p^2) a^2 - 2c^2 (p-q)^2 a - 2c^4] \\ + \frac{1}{8c^3} g^{\mu\nu} (p-q)^2 (a^2 - b^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} \right) g^{\mu\nu} . \quad (\text{O.55})$$

Como:

$$-2 (pq - q^2) (qp - p^2) a^2 - 2c^2 (p-q)^2 a - 2c^4 \\ = 2pq (p-q)^2 (a^2 - b^2) + 2c^2 [(p-q)^2 (pq - a) - 4m^2 pq + a^2 - c^2] \quad (\text{O.56})$$

Então:

$$(1) = \frac{1}{8c^5} q^\mu q^\nu \left[p^2 (p-q)^2 (a^2 - b^2) + 2 [(qp - p^2) a - c^2]^2 \right] \\ + \frac{1}{8c^5} p^\mu p^\nu \left[q^2 (p-q)^2 (a^2 - b^2) + 2 [(qp - q^2) a - c^2]^2 \right] \\ - \frac{1}{8c^5} (q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) \\ \times [3pq (p-q)^2 (a^2 - b^2) + 2c^2 [(p-q)^2 (pq - a) - 4m^2 pq + a^2 - c^2]] \\ + \frac{1}{8c^3} g^{\mu\nu} (p-q)^2 (a^2 - b^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} \right) g^{\mu\nu} . \quad (\text{O.57})$$

Finalmente, na expressão:

$$I_1^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}J_1 + \frac{1}{4}(\partial_p^\mu + \partial_q^\mu)(\partial_p^\nu + \partial_q^\nu)K_1, \quad (\text{O.58})$$

e sendo $J_1 = \frac{\pi}{4}\theta(-P_0)\theta(P^2 - 4m^2)\left[\frac{a}{c}\ln\frac{a+b}{a-b} + \frac{b}{c}\ln(a^2 - b^2) - 2\frac{b}{c}\right]$. Obteremos que:

$$I_1^{\mu\nu} = \frac{\pi}{4}\theta(-P_0)\theta(P^2 - 4m^2)\left[(1')\ln\frac{a+b}{a-b} + (2')\ln(a^2 - b^2) + (3')\right], \quad (\text{O.59})$$

onde

$$\begin{aligned} (1') &= \frac{1}{8c^5}q^\mu q^\nu \left[p^2(p-q)^2(a^2 - b^2) + 2[(qp - p^2)a - c^2]^2 \right] \\ &+ \frac{1}{8c^5}p^\mu p^\nu \left[q^2(p-q)^2(a^2 - b^2) + 2[(qp - q^2)a - c^2]^2 \right] \\ &- \frac{1}{8c^5}(q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) \\ &\times \left[3pq(p-q)^2(a^2 - b^2) + 2c^2[(p-q)^2(pq - a) - 4m^2pq + a^2 - c^2] \right] \\ &+ \frac{1}{8c^3}g^{\mu\nu}(p-q)^2(a^2 - b^2) \end{aligned} \quad (\text{O.60})$$

$$(2') = 0 \quad (\text{O.61})$$

$$\begin{aligned} (3') &= -\frac{1}{4}\left(\frac{b}{c^3}\right)[g^{\mu\nu}(p-q)^2a] \\ &+ \frac{1}{4}\left(\frac{b}{c^3}\right)q^\mu q^\nu \left[4(qp - p^2) + a - 3\frac{a(qp - p^2)^2}{c^2} \right] \\ &+ \frac{1}{4}\left(\frac{b}{c^3}\right)p^\mu p^\nu \left[4(pq - q^2) + a - 3\frac{a(pq - q^2)^2}{c^2} \right] \\ &+ \frac{1}{4}\left(\frac{b}{c^3}\right)(q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) \\ &\times \left[2(qp - p^2) + 2(pq - q^2) - a - 3\frac{a(pq - q^2)(qp - p^2)}{c^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{O.62})$$

Fazendo as substituições de a , b e c , finalmente obtemos:

$$\begin{aligned} I_1^{\mu\nu}(p, q, M) &= \frac{1}{8N^2}I_1(p, q, M)F_0^{\mu\nu}(p, q, M) \\ &+ \frac{\pi}{4N}(2\pi)^{-6}\theta(-P_0)\theta(P^2 - 4m^2)\frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}}F_1^{\mu\nu}(p, q, M) \end{aligned} \quad (\text{O.63})$$

sendo $F_0^{\mu\nu}$, $F_1^{\mu\nu}$ definidas como segue:

$$\begin{aligned}
& F_0^{\mu\nu}(p, q, M) \\
\equiv & q^\mu q^\nu \left[3 \left\{ p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)] - pq [p^2 - (m^2 - M^2)] \right\}^2 \right] \\
& - q^\mu q^\nu \left[N [p^2 - (m^2 - M^2)]^2 + 4p^2 N (M^2) \right] \\
& + p^\mu p^\nu \left[3 \left\{ q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)] - pq [q^2 - (m^2 - M^2)] \right\}^2 \right] \\
& - p^\mu p^\nu \left[N [q^2 - (m^2 - M^2)]^2 + 4q^2 N (M^2) \right] \\
& - (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) 3(pq) \left\{ q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)]^2 - 2pq [p^2 - (m^2 - M^2)] [q^2 - (m^2 - M^2)] \right\} \\
& - (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) 3(pq) \left\{ p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)]^2 \right\} \\
& - (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) \left\{ 2N [p^2 - (m^2 - M^2)] [q^2 - (m^2 - M^2)] + 4(pq) N (M^2) \right\} \\
& + g^{\mu\nu} N \left\{ q^2 [p^2 - (m^2 - M^2)]^2 - 2pq [p^2 - (m^2 - M^2)] [q^2 - (m^2 - M^2)] \right\} \\
& + g^{\mu\nu} N \left\{ p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)]^2 + 4N (M^2) \right\} \tag{O.64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_1^{\mu\nu}(p, q, M) \\
\equiv & q^\mu q^\nu \left[5pq - 4p^2 + m^2 - M^2 - 3 \frac{(pq + m^2 - M^2)(pq - p^2)^2}{N} \right] \\
& + p^\mu p^\nu \left[5pq - 4q^2 + m^2 - M^2 - 3 \frac{(pq + m^2 - M^2)(pq - q^2)^2}{N} \right] \\
& + (q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) \left[3pq - 2(p^2 + q^2) - (m^2 - M^2) - 3 \frac{(pq + m^2 - M^2)(pq - q^2)(pq - p^2)}{N} \right] \\
& - g^{\mu\nu} [(p - q)^2 (pq + m^2 - M^2)] \tag{O.65}
\end{aligned}$$

O.2 Cálculo de $I_2^{\mu\nu}$ e $I_3^{\mu\nu}$

Definida como:

$$\begin{aligned}
I_2^{\mu\nu} &= \int \frac{dk k^\mu k^\nu}{(p - k)^2 - m^2 + i0^+ (p_0 - k_0)} \theta(q_0 - k_0) \delta((q - k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \\
&= \int \frac{dk (k^\mu - p^\mu)(k^\nu - p^\nu)}{(p - k)^2 - m^2 + i0^+ (p_0 - k_0)} \theta(q_0 - k_0) \delta((q - k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \\
&\quad + p^\nu (I_2^\mu - p^\mu I_2) + p^\mu (I_2^\nu - p^\nu I_2) + p^\mu p^\nu I. \tag{O.66}
\end{aligned}$$

Usando a identidade :

$$\begin{aligned}
& \frac{(k^\mu - p^\mu)(k^\nu - p^\nu)}{(p - k)^2 - m^2 + i0^+ (p_0 - k_0)} \\
= & \frac{1}{4} \partial_k^\nu \left\{ \partial_k^\mu \left[((p - k)^2 - m^2) \ln((p - k)^2 - m^2 + i0^+ (p_0 - k_0)) - ((p - k)^2 - m^2) \right] \right\} \\
& - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \ln((p - k)^2 - m^2 + i0^+ (p_0 - k_0)) \tag{O.67}
\end{aligned}$$

onde consideramos que para certo conjunto de funções de teste $x\delta(x) = 0$, $xP_x^1 = 1 \rightarrow x \frac{1}{x \pm i0^+} = 1$.

Então:

$$\begin{aligned}
& I_2^{\mu\nu} \\
&= p^\nu (I_2^\mu - p^\mu I_2) + p^\mu (I_2^\nu - p^\nu I_2) + p^\mu p^\nu I - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} J_2 \\
&\quad + \frac{1}{4} \int dk \partial_k^\nu \{ \partial_k^\mu [((p-k)^2 - m^2) \ln((p-k)^2 - m^2 + i0^+ (p_0 - k_0)) - ((p-k)^2 - m^2)] \} \\
&\quad \times \theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \tag{O.68}
\end{aligned}$$

e da propriedade $\partial_k^\nu f(p-k) = -\partial_p^\nu f(p-k)$. Teremos:

$$I_2^{\mu\nu} = p^\nu (I_2^\mu - p^\mu I_2) + p^\mu (I_2^\nu - p^\nu I_2) + p^\mu p^\nu I - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} J_2 + \frac{1}{4} \partial_p^\mu \partial_p^\nu K_2, \tag{O.69}$$

onde

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int dk [((p-k)^2 - m^2) \ln((p-k)^2 - m^2 + i0^+ (p_0 - k_0)) - ((p-k)^2 - m^2)] \\
&\quad \times [\theta(q_0 - k_0) \delta((q-k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2)]. \tag{O.70}
\end{aligned}$$

Calcularemos K_2 em forma similar ao caso de I_2 , observando que os cálculos são iguais se fazemos a mudança de funções:

$$\frac{1}{(*)} \rightarrow (*) \ln(*) - (*). \tag{O.71}$$

Então obteremos:

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_{-1}^1 d \cos \vartheta [(\lambda^2 + 2\mathbf{k} |\vec{p}| \cos \vartheta) \ln(\lambda^2 + 2\mathbf{k} |\vec{p}| \cos \vartheta + i\alpha 0^+) - (\lambda^2 + 2\mathbf{k} |\vec{p}| \cos \vartheta)] \\
&\quad \times \theta(q_0) \theta[q_0^2 - (m+M)^2] \frac{\pi}{2q_0} \mathbf{k} \tag{O.72}
\end{aligned}$$

Lembrando que este é caso não nulo que acontece em $q \in V^+$, onde escolhemos um referencial tal que $q = (q_0, \vec{0})$. Nesta expressão:

$$\lambda^2 = p^2 - (m^2 - M^2) - p_0 q_0 \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q_0^2}\right) \tag{O.73}$$

$$\mathbf{k} = \sqrt{E_k^2 - M^2} = \frac{q_0}{2} \sqrt{1 - 2 \frac{(M^2 + m^2)}{q_0^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q_0^4}} \tag{O.74}$$

$$\alpha = p_0 - \frac{q_0^2 + M^2 - m^2}{2q_0} = \frac{2p_0 q_0 - q_0^2 - M^2 + m^2}{2q_0}. \tag{O.75}$$

Usando a relação

$$\int_{-1}^1 dx [(a-bx) \ln(a-bx) - (a-bx)] = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \ln \frac{a+b}{a-b} + ab (\ln(a^2 - b^2) - 3) \right]$$

(O.76)

como válida para distribuições. Identificando:

$$a = \lambda^2 + i\alpha 0^+ \quad (\text{O.77})$$

$$b = 2\mathbf{k} |\vec{p}| \quad (\text{O.78})$$

Teremos:

$$K_2 = \frac{\pi \theta(q_0) \theta[q_0^2 - (m+M)^2]}{4 q_0 |\vec{p}|} \left[\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \ln \frac{a+b}{a-b} + ab (\ln(a^2 - b^2) - 3) \right]. \quad (\text{O.79})$$

Para obter a expressão em qualquer referencial usaremos os resultados obtidos para P (em I_1). Similarmente se fazemos:

$$q_0 |\vec{p}| \rightarrow \sqrt{N}; p_0 q_0 \rightarrow pq; q_0 \rightarrow \sqrt{q^2}, \quad (\text{O.80})$$

onde $N = (qp)^2 - q^2 p^2$

Finalmente, podemos expressar K_2 como:

$$K_2 = \frac{\pi \theta(q_0) \theta[q^2 - (m+M)^2]}{4 \sqrt{N}} \left[\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \ln \frac{a+b}{a-b} + ab (\ln(a^2 - b^2) - 3) \right], \quad (\text{O.81})$$

onde agora:

$$a = p^2 - m^2 + M^2 - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) + i\alpha 0^+; \alpha = \frac{2pq - q^2 - M^2 + m^2}{2\sqrt{q^2}} \quad (\text{O.82})$$

$$b = \sqrt{N} \sqrt{1 - 2 \frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}}. \quad (\text{O.83})$$

Devemos calcular

$$I_2^{\mu\nu} = p^\nu (I_2^\mu - p^\mu I_2) + p^\mu (I_2^\nu - p^\nu I_2) + p^\mu p^\nu I - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} J_2 + \frac{1}{4} \partial_p^\mu \partial_p^\nu K_2 \quad (\text{O.84})$$

Supondo que as derivadas não agem nas funções degrau, definimos K da forma:

$$K = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \ln \frac{a+b}{a-b} + ab (\ln(a^2 - b^2) - 3) \right], \quad (\text{O.85})$$

onde $c = \sqrt{N}$.

Do resultado da primeira integral ($I_1^{\mu\nu}$), vemos que devemos calcular:

$$\begin{aligned} \partial_2 \partial_1 K &= \partial_2 \partial_1 \left[\frac{1}{2c} (a^2 + b^2) \right] \ln \frac{a+b}{a-b} + \partial_2 \partial_1 \left(\frac{ab}{c} \right) \ln(a^2 - b^2) \\ &\quad - 3 \partial_2 \partial_1 \left(\frac{ab}{c} \right) + \partial_2 \left(\frac{1}{c} \right) \partial_1 (ab) + \frac{b}{c} \partial_2 \partial_1 a + \frac{a}{c} \partial_2 \partial_1 b \\ &\quad + \frac{3}{c} (\partial_1 a \partial_2 b + \partial_1 b \partial_2 a) + \partial_1 \left(\frac{1}{c} \right) \partial_2 (ab), \end{aligned} \quad (\text{O.86})$$

onde $\partial_1 = \frac{1}{2}\partial_p^\nu$ e $\partial_2 = \frac{1}{2}\partial_p^\mu$. Teremos que calcular os coeficientes:

$$(1) = \partial_2 \partial_1 \left[\frac{1}{2c} (a^2 + b^2) \right] \quad (\text{O.87})$$

$$(2) = \partial_2 \partial_1 \left(\frac{ab}{c} \right) \quad (\text{O.88})$$

$$(3) = -3\partial_2 \partial_1 \left(\frac{ab}{c} \right) + \frac{b}{c} \partial_2 \partial_1 a + \frac{a}{c} \partial_2 \partial_1 b + \partial_2 \left(\frac{1}{c} \right) \partial_1 (ab) + \partial_1 \left(\frac{1}{c} \right) \partial_2 (ab) \\ + \frac{3}{c} (\partial_1 a \partial_2 b + \partial_1 b \partial_2 a) . \quad (\text{O.89})$$

Das definições de a, b e c , e fazendo passos similares ao caso anterior, encontraremos que:

$$(2) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{b}{c} \right) \quad (\text{O.90})$$

$$(3) = -g^{\mu\nu} \left(\frac{b}{c} \right) - \left(\frac{b}{c} \right) \left(\frac{1}{4c^2} \right) g^{\mu\nu} (aq^2) - \frac{1}{4c^4} \left(\frac{b}{c} \right) p^\mu p^\nu \left[3a (q^2)^2 \right] - 2 \frac{1}{c^2} \left(\frac{b}{c} \right) p^\mu p^\nu (q^2) \\ - \frac{1}{4c^4} \left(\frac{b}{c} \right) q^\mu q^\nu \left\{ a [(p^2 q^2) + 2(pq)^2] + (pq) \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) (4c^2) \right\} \\ + \frac{1}{4c^4} \left(\frac{b}{c} \right) (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) (q^2) \left[3a (pq) + 2c^2 \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) \right] \\ + \frac{1}{c^2} \left(\frac{b}{c} \right) (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) (pq) \quad (\text{O.91})$$

E que o último coeficiente tem a forma:

$$(1) = -\frac{1}{2c^2} (\partial_2 \partial_1 c) (a^2 - b^2) + \frac{1}{c^3} (\partial_2 c \partial_1 c) a^2 - \frac{1}{c^2} (\partial_1 c \partial_2 a + \partial_2 c \partial_1 a) a \\ + \frac{1}{c} (\partial_2 a \partial_1 a) + \frac{a}{c} (\partial_2 \partial_1 a) \quad (\text{O.92})$$

Calculando individualmente cada uno desses termos, encontraremos que:

$$(1) = \frac{1}{8c^5} q^\mu q^\nu \left[(p^2 q^2) (a^2 - b^2) + 2 \left[c^2 \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) + a (pq) \right]^2 \right] \\ + \frac{1}{8c^5} p^\mu p^\nu \left[(q^2)^2 (a^2 - b^2) + 2 (q^2 a)^2 + 8c^4 + 4c^2 (2q^2) a \right] \\ - \frac{1}{8c^5} (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) \\ \times \left[3(pq) (q^2) (a^2 - b^2) + 2c^2 [(p^2 - (m^2 - M^2)) (q^2 - (m^2 - M^2)) - 4(pq) (M^2)] \right] \\ - \frac{1}{8c^5} (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) \left[4c^2 \left(c^2 \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) + a (pq) \right) \right] \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} \right) g^{\mu\nu} + \frac{1}{8c^3} g^{\mu\nu} q^2 (a^2 - b^2) . \quad (\text{O.93})$$

Finalmente na expressão:

$$I_2^{\mu\nu} = p^\nu (I_2^\mu - p^\mu I_2) + p^\mu (I_2^\nu - p^\nu I_2) + p^\mu p^\nu I - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} J_2 + \frac{1}{4} \partial_p^\mu \partial_p^\nu K_2. \quad (\text{O.94})$$

sendo

$$p^\mu p^\nu I = \frac{\pi}{4} \theta(q_0) \theta [q^2 - (m + M)^2] \left[\frac{1}{c} p^\nu p^\mu \ln \frac{a + b}{a - b} \right] \quad (\text{O.95})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} J_2 &= \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{a}{c} \right) \ln \frac{a + b}{a - b} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{b}{c} \right) \ln (a^2 - b^2) + g^{\mu\nu} \left(\frac{b}{c} \right) \right] \\ &\quad \times \frac{\pi}{4} \theta(q_0) \theta [q^2 - (m + M)^2] \end{aligned} \quad (\text{O.96})$$

E

$$\begin{aligned} &p^\nu (I_2^\mu - p^\mu I_2) + p^\mu (I_2^\nu - p^\nu I_2) \\ &= \frac{\pi}{4} \theta(q_0) \theta [q^2 - (m + M)^2] \ln \frac{a + b}{a - b} \\ &\quad \times \left[-\frac{1}{c} 2p^\nu p^\mu - \frac{1}{c^3} p^\nu p^\mu (q^2 a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c^3} (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) \{pq [p^2 - (m^2 - M^2)] - p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)]\} \right] \\ &\quad + \frac{\pi}{4} \theta(q_0) \theta [q^2 - (m + M)^2] \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{b}{c} \right) p^\nu p^\mu (2q^2) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{b}{c} \right) (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) (qp) \right] \end{aligned} \quad (\text{O.97})$$

Obteremos que:

$$I_2^{\mu\nu} = \frac{\pi}{4} \theta(q_0) \theta [q^2 - (m + M)^2] \left[(1') \ln \frac{a + b}{a - b} + (2') \ln (a^2 - b^2) + (3') \right] \quad (\text{O.98})$$

onde

$$\begin{aligned} (1') &= \frac{1}{8c^5} q^\mu q^\nu \left[(p^2 q^2) (a^2 - b^2) + 2 \left[c^2 \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) + a(pq) \right]^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{8c^5} p^\mu p^\nu \left[(q^2)^2 (a^2 - b^2) + 2 (q^2 a)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{8c^5} (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) \\ &\quad \times \left[3(pq) (q^2) (a^2 - b^2) + 2c^2 [(p^2 - (m^2 - M^2)) (q^2 - (m^2 - M^2)) - 4(pq) (M^2)] \right] \\ &\quad + \frac{1}{8c^3} g^{\mu\nu} q^2 (a^2 - b^2) \end{aligned} \quad (\text{O.99})$$

$$(2') = 0 \quad (\text{O.100})$$

$$\begin{aligned} (3') &= -\frac{1}{4c^4} \left(\frac{b}{c} \right) p^\mu p^\nu \left[3a (q^2)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{4c^4} \left(\frac{b}{c} \right) q^\mu q^\nu \left\{ a [(p^2 q^2) + 2(pq)^2] + (pq) \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) (4c^2) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4c^4} \left(\frac{b}{c} \right) (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) (q^2) \left[3a(pq) + 2c^2 \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{q^2} \right) \right] \\ &\quad - \left(\frac{b}{c} \right) \left(\frac{1}{4c^2} \right) g^{\mu\nu} (aq^2). \end{aligned} \quad (\text{O.101})$$

Fazendo as substituições de a , b e c , finalmente obtemos:

$$\begin{aligned}
& I_2^{\mu\nu}(p, q, M) \\
= & \frac{1}{8N^2} I_2(p, q, M) F_0^{\mu\nu}(p, q, M) \\
& + \frac{\pi}{16N^2} (2\pi)^{-6} \theta(-q_0) \theta[q^2 - (m + M)^2] \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}} F_2^{\mu\nu} \quad (\text{O.102})
\end{aligned}$$

sendo $F_0^{\mu\nu}$ é definido na seção prévia e $F_2^{\mu\nu}(p, q, M) = F_3^{\mu\nu}(q, p, M)$, este último é definido como segue:

$$\begin{aligned}
& F_3^{\mu\nu}(p, q, M) \\
\equiv & -p^\mu p^\nu \left\{ [q^2 - (m^2 - M^2)] [(p^2 q^2) + 2(pq)^2] - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{p^2}\right) [5(p^2 q^2) - 2(pq)^2] \right\} \\
& - q^\mu q^\nu 3(p^2) [p^2 [q^2 - (m^2 - M^2)] - pq(p^2 - (m^2 - M^2))] \\
& + (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) (p^2) \left[3pq [q^2 - (m^2 - M^2)] - [(pq)^2 + 2p^2 q^2] \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{p^2}\right) \right] \\
& - g^{\mu\nu} N p^2 \left[[q^2 - (m^2 - M^2)] - pq \left(1 - \frac{m^2 - M^2}{p^2}\right) \right]. \quad (\text{O.103})
\end{aligned}$$

Por propriedade vemos que podemos obter $I_2^{\mu\nu}$ se fazemos em sua expressão, $p \rightarrow -q$ e $q \rightarrow -p$. Então:

$$\begin{aligned}
& I_3^{\mu\nu}(p, q, M) \\
= & \frac{1}{8N^2} I_3(p, q, M) F_0^{\mu\nu}(p, q, M) \\
& - \frac{\pi}{16N^2} (2\pi)^{-6} \theta(p_0) \theta[p^2 - (m + M)^2] \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{p^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{p^4}} F_3^{\mu\nu} \quad (\text{O.104})
\end{aligned}$$

O.3 Cálculo de $I^{\mu\nu}$

Voltando ao problema inicial, o cálculo de $I^{\mu\nu}$. Vemos que de sua definição, esta pode-se escrever como:

$$I^{\mu\nu}(p, q, M) = I^{\mu\nu R'}(p, q, M) - I^{\mu\nu A'}(p, q, M), \quad (\text{O.105})$$

onde:

$$I^{\mu\nu R'}(p, q, M) = - (2\pi)^{-6} [I_1^{\mu\nu}(p, q, M) + I_2^{\mu\nu}(p, q, M) + I_3^{\mu\nu}(p, q, M)]. \quad (\text{O.106})$$

E por propriedade :

$$I^{\mu\nu A'}(p, q, M) = I^{\mu\nu R'}(q, p, M). \quad (\text{O.107})$$

Podemos observar que como por definição:

$$\begin{aligned}
& I^{\mu\nu R'}(p, q, M) \\
= & -(2\pi)^{-6} \int dk k^\mu k^\nu \\
& [\theta(k_0 - p_0) \delta((p - k)^2 - m^2) \theta(q_0 - k_0) \delta((q - k)^2 - m^2) \frac{1}{k^2 - M^2 + i0^+} \\
& + \frac{1}{(p - k)^2 - m^2 + i0^+} \frac{1}{(p_0 - k_0)} \theta(q_0 - k_0) \delta((q - k)^2 - m^2) \theta(k_0) \delta(k^2 - M^2) \\
& + \theta(k_0 - p_0) \delta((p - k)^2 - m^2) \frac{1}{(q - k)^2 - m^2 - i0^+} \frac{1}{(q_0 - k_0)} \theta(-k_0) \delta(k^2 - M^2)] \quad (\text{O.108})
\end{aligned}$$

Então sua parte imaginária é:

$$\begin{aligned}
& Im I^{\mu\nu R'}(p, q, M) \\
= & \pi (2\pi)^{-6} \int dk k^\mu k^\nu \delta((p - k)^2 - m^2) \delta((q - k)^2 - m^2) \delta(k^2 - M^2) \\
& \{\theta(p_0 - k_0) \theta(q_0 - k_0) \theta(k_0) + \theta(k_0 - p_0) \theta(k_0 - q_0) \theta(-k_0)\} \quad (\text{O.109})
\end{aligned}$$

E da relação entre $I^{\mu\nu R'}$ e $I^{\mu\nu A'}$ vemos que:

$$Im I^{\mu\nu R'}(p, q, M) = Im I^{\mu\nu A'}(p, q, M) .$$

Com isso concluímos que

$$I^{\mu\nu}(p, q, M) = Re I^{\mu\nu R'}(p, q, M) - Re I^{\mu\nu A'}(p, q, M) .$$

Finalmente, podemos expressar $I^{\mu\nu}$ da forma:

$$\begin{aligned}
& I^{\mu\nu}(p, q, M) \\
= & \frac{1}{8N^2} I(p, q, M) F_0^{\mu\nu}(p, q, M) \\
& + \frac{\pi}{4N} (2\pi)^{-6} sgn(P_0) \theta(P^2 - 4m^2) \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} F_1^{\mu\nu}(p, q, M) \\
& - \frac{\pi}{16N^2} (2\pi)^{-6} sgn(q_0) \theta[q^2 - (m + M)^2] \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{q^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{q^4}} F_2^{\mu\nu} \\
& + \frac{\pi}{16N^2} (2\pi)^{-6} sgn(p_0) \theta[p^2 - (m + M)^2] \sqrt{1 - 2\frac{(M^2 + m^2)}{p^2} + \frac{(M^2 - m^2)^2}{p^4}} F_3^{\mu\nu} \quad (\text{O.110})
\end{aligned}$$

onde $F_0^{\mu\nu}$, $F_1^{\mu\nu}$, $F_2^{\mu\nu}$, $F_3^{\mu\nu}$ foram definidos nas seções prévias

Referências Bibliográficas

- [1] J. C. Maxwell, **A Treatise on Electricity and Magnetism**, Vol I, II. Clarendon Press Series (1873).
- [2] J. G. Taylor, **Classical Electrodynamics as a distribution theory**, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **52**, 119-134 (1956).
- [3] F. Bopp, Ann. der Physik **38**, 345 (1940).
- [4] B. Podossky, **Generalized Electrodynamics. Part I-Non-Quantum**, Phys. Rev. **62**, 68 (1942).
B. Podossky and C. Kikuchi, **Generalized Electrodynamics. Part II-Quantum**, Phys. Rev. **65**, 228 (1944).
B. Podossky and P. Schwed, **Review of a Generalized Electrodynamics**, Rev. Mod. Phys. **20**, 40 (1948).
- [5] J. Frenkel, **4/3 problem in classical electrodynamics**, Phys. Rev. **54E** 5859 (1996).
- [6] P.A.M. Dirac, **The Lagrangian in Quantum Mechanics**, Phys. Z. Sowjetunion, **3**, 64 (1933).
R.P. Feynman, **The principle of least action in quantum mechanics**, PhD Thesis (1942).
- [7] J. Schwinger, **On the Green's functions of quantized fields I**, Proc. Nat. Acad. Sc. **37**, 452 (1951); **On the Green's functions of quantized fields II**, Proc. Nat. Acad. Sc. **37**, 455 (1951).
K. Symanzik, Z. Naturforsch **9A**, 809 (1954).
E.S. Fradkin, **The Quantum Theory of Fields I**, Zhur. Ekptl. i Teor. Fiz. **29**, 121 (1951) (Trad: Soviet. Phys. JETP **2**, 148 (1956))
- [8] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, **Tenth-Order QED contribution to Lepton Anomalous Magnetic Moment - Fourth-Order Vertices Containing Sixth-Order Vacuum-Polarization Subdiagrams**, Phys. Rev. **D83**, 053002 (2011).
- [9] J. D. Bjorken and S. D. Drell. **Relativistic Quantum Field**. McGraw-Hill (1965).

- [10] N.N. Bogoliubov and O.A. Parasiuk, **Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie del Felder**, Acta Math. 97, 227 (1957).
- [11] H.Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, **On the formulation of quantized field theories**, Nuovo Cimento **1**, 205 (1955); **On the formulation of quantized field theories II**, Nuovo Cimento **6**, 319 (1957).
- [12] A.S. Wightman, **Quantum Field Theory in Terms of Vacuum Expectation Values**, Phys. Rev. **101**, 860 (1956).
R.F. Streater and A. S. Wightman, **PCT, Spin and Statistics, and all that**, W. A. Benjamin (1964).
- [13] W. Heisenberg. **Die Beobachtbaren Grössen in Theorie der Elementarteilchen**. Z. Physik **120**, 513 (1943).
- [14] H. Epstein and V. Glaser. **The role of locality in perturbation theory**. Ann. Inst. H. Poincaré A **19**, 211 (1973).
- [15] E.C.G. Stückelberg and J. Green, **Elimination des constantes arbitraires dans la théorie relativiste des quanta**, Helv. Phys. Acta **24**, 153 (1949).
E.C.G. Stückelberg and D. Rivier, **Causalité et structure de la Matrice S**, Helv. Phys. Acta **22**, 215 (1950).
- [16] E. Wigner, **On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group**, Ann. Math. **40**, 149 (1939).
- [17] V. Bargmann. **Note on Wigner's Theorem on Symmetry Operations**, J. Math. Phys. **5**, 862 (1964).
- [18] P. Roman. **Introduction to Quantum Field Theory**. John Wiley and Sons, Inc (1968).
- [19] N. N. Bogolubov, A.A. Logunov and I. T. Todorov. **Introduction to Axiomatic Field Theory**. W. A. Benjamin, Inc. (1975).
- [20] N. N. Bogolubov and D. V. Shirkov. **Introduction to the Theory of Quantized Fields**. John Wiley & Sons (1980).
- [21] D. Iagolnitzer. **The S Matrix**. North-Holland Publishing Company (1978).
- [22] G. Scharf, **Finite Quantum Electrodynamics The Causal Approach**, 2nd ed., Springer-Verlag (1995).
- [23] A. Aste, G. Scharf and U. Walther, **Power counting degree vs singular order in the Schwinger model**, Nuovo Cimento A **111**, 323 (1998).
- [24] F. J. Dyson, **The S-Matrix in Quantum Electrodynamics**, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949).

- [25] S. Weinberg, **High-Energy Behavior in Quantum Field Theory**, Phys. Rev. **118**, 838 (1960).
- [26] J. Schwinger, **Gauge Invariance and Mass II**, Phys. Rev. **128**, 2425 (1962).
- [27] Andreas Aste. **Two-Loop Diagrams in Causal Perturbation Theory**. Ann. Phys. **257**, 158-204 (1997).
- [28] H.M. Nussenzveig, **Causality and Dispersion Relations**, Academic Press (1972).
- [29] F. J. Dyson, **Divergence of Perturbation Theory in Quantum Electrodynamics**, Phys. Rev. **85**, 631 (1952).
- [30] M. Dütsch, F. Krahe, G. Scharf, **Scalar QED Revisited**, Nuovo Cimento **106**, 277 (1993).
- [31] G. Scharf, W.F. Wreszinski, B.M. Pimentel, J.L. Tomazelli, **Causal approach to (2+1)-dimensional QED**, Annals Phys. **231**, 185 (1994).
- [32] B.M. Pimentel, J.L. Tomazelli, **What's wrong with Pauli-Villars regularization in QED in three-dimensions?**, Prog.Theor.Phys. **95**, 1217 (1996).
- [33] A. Aste, C. von Arx, G. Sharf, **Regularization in quantum field theory from the causal point of view**, Prog.Part.Nucl.Phys. **64**, 61 (2010).
- [34] L.A. Manzoni, B.M. Pimentel, J.L. Tomazelli, **Causal theory for the gauged Thirring model**, Eur.Phys.J. **C8**, 353 (1999).
L.A. Manzoni, B.M. Pimentel, J.L. Tomazelli, **Radiative corrections for the causal Thirring model**, Eur.Phys.J. **C12**, 701 (2000).
- [35] J.T. Lunardi , L.A. Manzoni, B.M. Pimentel, J.S. Valverde, **Duffin-Kemmer-Petiau theory in the causal approach**, Int.J.Mod.Phys. **A17**, 205 (2002).
- [36] M. Dütsch, T. Hurth, F. Krahe, and G. Scharf, Nuovo Cimento, **106 A**, 1029 (1993).
A. Aste, G. Sharf, M. Dütsch, **Gauge independence of the S-matrix in the causal approach**, J.Phys. **A31**, 1563 (1998).
- [37] Andreas W. Aste, G. Scharf , M. Duetsch, **On gauge invariance and spontaneous symmetry breaking**, J.Phys. **A30**, 5785 (1997).
- [38] M. Dütsch, G. Scharf, **Perturbative gauge invariance: The electroweak theory**, Annalen Phys. **8**, 359 (1999).
Andreas W. Aste, Gunter Scharf, Michael Dütsch, **Perturbative gauge invariance: Electroweak theory. II**, Annalen Phys. **8**, 389 (1999).

- [39] M. Dütsch, T. Hurth, F. Krahe, G. Scharf, **Causal construction of Yang-Mills theories. 1.**, Nuovo Cim. A**106**, 1029 (1993).
- M. Dütsch, T. Hurth, F. Krahe, G. Scharf, **Causal construction of Yang-Mills theories. 2.**, Nuovo Cim. A**107**, 375 (1994).
- M. Dütsch, T. Hurth, F. Krahe, G. Scharf, **Causal construction of Yang-Mills theories. 3.**, Nuovo Cim. A**108**, 679 (1995).
- M. Dütsch, T. Hurth, F. Krahe, G. Scharf, **Causal construction of Yang-Mills theories. 4. Unitarity**, Nuovo Cim. A**108**, 737 (1995).
- [40] G. Scharf, M. Wellmann, **Spin-2 quantum gauge theories and perturbative gauge invariance**, Gen. Rel. Grav. **33**, 553 (2001).
- Dan Radu Grigore, Gunter Scharf, **Massive gravity as a quantum gauge theory**, Gen. Rel. Grav. **37**, 1075 (2005).
- [41] Andreas Aste, **Causal construction of the massless vertex diagram**, Lett. Math. Phys. **78**, 157 (2006).
- [42] Andreas W. Aste, G. Scharf, **The Two loop master diagram in the causal approach**, Annals Phys. **257**, 158 (1997).
- [43] M. Ostrogradsky, **Mémoire sur Les Équations Différentielles relatives au Problème des Isopérimètres**, Mem. Ac. St. Peterburg VI **4**, 385 (1850).
- [44] R. Bufalo, B.M. Pimentel e G.E.R. Zambrano, **Path integral quantization of generalized quantum electrodynamics**, Phys. Rev. D**83**, 065023 (2011).
- R. Bufalo, B.M. Pimentel e G.E.R. Zambrano, **Renormalizability of generalized quantum electrodynamics**, Phys. Rev. D**86**, 125023 (2012).
- [45] C.A.P. Galvão and B.M. Pimentel, **The canonical structure of Podolsky generalized electrodynamics**, Can. J. Phys. **66**, 460 (1988).
- [46] R. Bufalo, B.M. Pimentel e D.E. Soto, **Moeller and Compton Scattering in GQED₄ from the causal point of view**, em preparação.
- [47] R. Bufalo, B.M. Pimentel e D.E. Soto, **Radiative corrections for the generalized quantum electrodynamics in the causal approach**, em preparação.
- [48] R. Bufalo, B.M. Pimentel e D.E. Soto, **Causal theory for the generalized quantum electrodynamics**, em preparação.
- [49] R. Bufalo, B.M. Pimentel e D.E. Soto, **Light-Front QED₄: Commutators and Propagators**, a ser submetido.

- [50] P. T. Matthews, **A note on Podolsky Electrodynamics**, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **45**, 441 (1949).
- [51] J. Raisky, **Polarization of the Vacuum**, Phys. Rev. **75**, 1961 (1949).
W. Pauli e F. Villars, **On the invariant regularization in relativistic quantum theory**, Rev. Mod Phys. **21**, 434 (1949).
- [52] S. Mandelstam, **Dynamical Variables in the Bethe-Salpeter Formalism**, Proc. R. Soc. Lond. **233**, 248 (1955).
- [53] W.H. Furry, **A symmetry theorem in the positron theory**, Phys. Rev. **51**, 125 (1937).
- [54] Gunter Scharf, **Quantum Gauge Theories: A True Ghost Story**, John Wiley & Sons (2001).
- [55] V.S. Vladimirov, **Methods of the Theory of Generalized Functions**, Taylor & Francis (2002).
- [56] O. Steinmann, **Perturbative Quantum Electrodynamics and Axiomatic Field Theory**, Springer-Verlag (2000).
- [57] E. Prugovečki, **Quantum Mechanics in Hilbert Space**, Second edition, Academic Press (1981).
- [58] C. Lämmerzahl, **The pseudodifferential operator square root of the Klein-Gordon equation**, J. Math. Phys. **34** (9), September 1993.
- [59] A.H. Zemanian, **Distribution Theory and Transform Analysis**, McGraw-Hill (1965).
- [60] M. A. Al-Gwaiz, **Theory of Distributions**, Marcel Dekker, Inc. (1992).
- [61] R. D. Carmichael and D. Mitrovic, **Distribution and analytic functions**, Longman Group (1989).
- [62] J. F. Colombeau, **New Generalized Functions and Multiplication of Distributions**, Elsevier Sciences Publishers (1984).
- [63] E. Seneta, **Regularly Varying Functions**, Springer-Verlag (1976).
- [64] Ricardo Estrada e Ram P. Kanwal, **A Distributional Approach to Asymptotics: Theory and Applications**, 2ed Birkhäuser (2002).