

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
JÚLIO DE MESQUITA FILHO  
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MARCELO GONÇALVES GARCIA

ESPALHAMENTO COULOMBIANO RELATIVÍSTICO  
PRÓXIMO DAS CONDIÇÕES DE SIMETRIA DE SPIN E  
PSEUDOSPIN

Guaratinguetá

2015

**UNESP**

**Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá**

**Guaratinguetá**

**2015**

MARCELO GONÇALVES GARCIA

ESPALHAMENTO COULOMBIANO RELATIVÍSTICO PRÓXIMO DAS  
CONDIÇÕES DE SIMETRIA DE SPIN E PSEUDOSPIN

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia  
do Campus de Guaratinguetá, Universidade  
Estadual Paulista, para a obtenção do título  
de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Soares de Castro

Guaratinguetá

2015

G216e Garcia, Marcelo Gonçalves  
Espalhamento coulombiano relativístico próximo das condições de simetria de spin e pseudospin / Marcelo Gonçalves Garcia.- Guaratinguetá , 2015  
79 f.: il.  
Bibliografia: f. 72-77

Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2015  
Orientador: Prof. Dr. Antonio Soares de Castro

1. Espalhamento (Física) 2. Estados ligados (Mecânica quântica) 3. Simetria quebrada (Física) I. Título

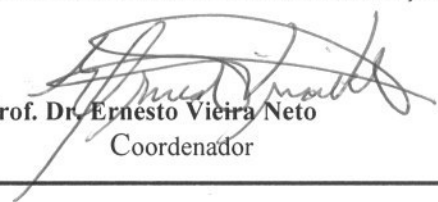
CDU 530.145

**MARCELO GONÇALVES GARCIA**


ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“DOUTOR EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

  
Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**

  
Prof. Dr. ANTONIO SOARES DE CASTRO  
Orientador / UNESP-FEG

  
Prof. Dr. MARCELO BATISTA HOTT  
UNESP-FEG

  
Prof. Dr. PEDRO ALMEIDA VIEIRA ALBERTO  
Universidade de Coimbra - Portugal

  
Prof. Dr. LUIS RAFAEL BENITO CASTRO  
Universidade Federal do Maranhão

  
Prof. Dr. EDISOM DE SOUZA MOREIRA JUNIOR  
UNIFEI

Julho de 2015

## **DADOS CURRICULARES**

**MARCELO GONÇALVES GARCIA**

**NASCIMENTO** 08.12.1982 - **SÃO JOSÉ DOS CAMPOS, SÃO PAULO**

**FILIAÇÃO** David Tomaz Garcia  
Sueli Gonçalves Garcia

**2004 / 2009** Curso de Graduação - Bacharelado em Física  
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá  
Universidade Estadual Paulista - UNESP  
São Paulo-Brasil.

**2009 / 2011** Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado  
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá  
Universidade Estadual Paulista - UNESP  
São Paulo-Brasil.

**2011 / 2015** Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Doutorado  
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá  
Universidade Estadual Paulista - UNESP  
São Paulo-Brasil.

## DEDICATÓRIA

*Esta tese é dedicada à minha esposa **Débora** e minha filha **Beatriz**, pela paciência e pelo amor incondicional.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus e também aos meus pais. Agradeço aos membros da banca por aceitarem o convite e por todas as sugestões. Agradeço aos professores Marcelo Batista Hott, Alvaro de Souza Dutra, Denis Dalmazi, Júlio Marny Hoff da Silva, Roberto Arthur Cornetti e especialmente ao meu orientador Antonio Soares de Castro, que se não fosse por sua infinita paciência para com os meus constantes deslizes e momentos difíceis, este trabalho não poderia ser concluído. Gostaria de aproveitar e deixar claro que qualquer erro neste trabalho deve-se somente à minha incapacidade de absorver seus ensinamentos, os quais não foram negados um dia sequer, nestes 11 anos de convivência. Agradeço aos meus amigos, Elias Leite, Rafael Augusto, Alessandro Luiz, Pedro Henrique, Luiz Augusto, Helton Gaspar, Luis Benito e Luis Arroyo. Finalmente, um agradecimento especial para minha esposa Débora e minha filha Beatriz, não há palavras para descrever o quão grande é o meu amor por vocês e o quanto eu sou agradecido por tantos dias em que tiveram paciência por minha frequente ausência para realizar este trabalho.



Este trabalho contou com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

*Só sabemos com exatidão quando sabemos pouco; à medida que vamos adquirindo conhecimento, instala-se a dúvida*

***Goethe***

Garcia, M. G. **Espalhamento coulombiano relativístico próximo das condições de simetria de spin e pseudospin**. 2015. 79 f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP 2015

## RESUMO

O espalhamento relativístico de bósons de spin 0 e de férmions de spin  $1/2$  por potenciais coulombianos esfericamente simétricos é analisado em detalhes com uma mistura arbitrária de acoplamentos escalar e vetorial. Mostra-se que a série de ondas parciais, seja para bósons ou férmions, se reduz à amplitude de espalhamento de Rutherford exata quando os potenciais escalar e vetorial têm a mesma magnitude. O mesmo acontece na aproximação de potenciais fracos. O comportamento da amplitude de espalhamento próximo das condições que fornecem a forma fechada é também discutido. A partir dos polos complexos da amplitude de onda parcial, soluções exatas de estados ligados para partículas e antipartículas em diferentes circunstâncias são obtidas. A quebra perturbativa da degenerescência acidental aparecendo em um par de casos especiais é relacionado com a não conservação do vetor de Runge-Lenz. No caso de férmions, as amplitudes de ondas parciais têm formas fechadas não apenas para as simetrias de spin e pseudospin mas também quando há uma ligeira quebra das mesmas. Mostra-se que no limite não relativístico, a seção de choque diferencial obtida se reduz para a seção de choque de Rutherford para simetrias de spin e pseudospin exatas e para a seção de choque de Mott quando a simetria é suavemente quebrada.

**Palavras Chave:** Espalhamento. Estados ligados. Simetria de spin. Simetria de pseudospin. Quebra de simetria. Klein-Gordon. Dirac. Coulomb. Runge-Lenz.

Garcia, M. G. **Relativistic coulomb scattering near the conditions of spin and pseudospin symmetry**. 2015. 79 f. Thesis (Doctorate in Physics) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP 2015

### **ABSTRACT**

The relativistic scattering of spin-0 bosons and spin-1/2 fermions by spherically symmetric Coulomb potentials is analyzed in detail with an arbitrary mixing of vector and scalar couplings. It is shown that the partial wave series for both bosons and fermions reduces the scattering amplitude to that one resulting in the Rutherford formula exactly when the vector and scalar potentials have the same magnitude. The same happen in the approximation for weak potentials. The behavior of the scattering amplitude near the conditions that furnish its closed form is also discussed. From the complex poles of the partial scattering amplitude for bosons the exact closed form of bound-state solutions for both particles and antiparticles with different scenarios for the coupling constants are obtained. Perturbative breaking of the accidental degeneracy appearing in a pair of special cases is related to the nonconservation of the Runge-Lenz vector. In the case of fermions, the closed form for the partial wave series occurs not only for the spin and pseudospin symmetries but also when there is a slight breaking of the same. It is shown that in the non-relativistic limit, the differential cross section obtained reduces to Rutherford's cross section when there are spin and pseudospin symmetries and to Mott differential cross section when the symmetry is slightly broken.

**Keywords:** Scattering. Bound states. Spin symmetry. Pseudospin symmetry. Breaking symmetry. Klein-Gordon. Dirac. Coulomb. Runge-Lenz.

# Lista de Figuras

2.1	Ilustração das coordenadas usadas no texto. Fonte: Ref. [45] . . . . .	23
-----	--	----

# Sumário

<b>Lista de figuras</b>	<b>11</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2 A equação de Schrödinger</b>	<b>20</b>
2.1 Seção de choque . . . . .	22
2.2 Análise de ondas parciais . . . . .	24
2.2.1 Deslocamento de fase . . . . .	27
2.2.2 Amplitude de espalhamento . . . . .	27
2.3 O potencial coulombiano não relativístico . . . . .	29
2.3.1 Estados ligados para o potencial coulombiano . . . . .	31
<b>3 A equação de Klein-Gordon</b>	<b>32</b>
3.1 Acoplamentos vetorial e escalar na equação de Klein-Gordon . . . . .	32
3.2 Potenciais coulombianos . . . . .	33
3.2.1 Espalhamento . . . . .	34
3.2.2 Estados ligados . . . . .	37
<b>4 A equação de Dirac</b>	<b>41</b>
4.1 A equação de Dirac para potenciais esfericamente simétricos . . . . .	44
4.2 Simetria de spin . . . . .	47
4.3 Simetria de pseudospin . . . . .	49
4.4 Equivalência de espectro entre férmions e bósons . . . . .	51
4.5 Seção de choque diferencial . . . . .	52
4.6 Amplitudes de espalhamento . . . . .	58
4.7 Potenciais coulombianos vetorial e escalar esfericamente simétricos . . . . .	59

	13
4.8 O deslocamento de fase coulombiano . . . . .	59
4.9 Resultados exatos . . . . .	62
4.10 Resultados aproximados . . . . .	63
4.10.1 Simetria de spin quase exata . . . . .	65
4.10.2 Simetria de pseudospin quase exata . . . . .	65
4.10.3 Discussão sobre os resultados de simetrias quase exatas . . . . .	66
4.10.4 Limite não relativístico . . . . .	66
4.11 Estados ligados . . . . .	68
<b>5 Conclusões</b>	<b>70</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Interações nucleares têm sido investigadas em termos da troca de mésons mediadores desde o trabalho pioneiro de Hideki Yukawa de 1935 [1]. Muitos modelos nucleares contêm combinações de potenciais vetorial repulsivo (gerado pelo méson vetorial  $\omega$ ) e escalar atrativo (gerado pelo méson escalar  $\sigma$ ). Os potenciais vetorial e escalar têm quase a mesma magnitude de forma que o potencial atrativo resultante é relativamente fraco. Entretanto, tal combinação de potenciais fortes produz efeitos relativísticos consideráveis mesmo em baixas energias.

No âmbito de teorias relativísticas denomina-se potencial veorial aquele que acopla com a carga da partícula e é introduzido na teoria pela substituição  $\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu + V^\mu$ , onde  $\hat{p}^\mu$  é o operador quadrimomento e  $V^\mu = (V^0, \vec{V})$  é o potencial vetorial, com componente temporal  $V^0$  e componente espacial  $\vec{V}$ . Essa prescrição mínima é a mesma que ocorre na introdução da interação da carga elétrica com o campo eletromagnético (mediada por fótons), e serve para modelar o acoplamento de outras espécies de cargas com interações mediadas por bósons vetoriais, tal como a interação nuclear mediada pelo méson  $\omega$ . Por outro lado, o potencial escalar é aquele que acopla com a massa da partícula e é introduzido por meio da substituição  $m \rightarrow m + V_S/c^2$ , servindo para modelar interações mediadas por mésons escalares, tal como a interação nuclear mediada pelo méson  $\sigma$ .

Experimentos de espalhamento elástico de um núcleon ou elétron por núcleos atômicos são de grande importância pois podem fornecer detalhes das distribuições de corrente e carga dentro do núcleo por meio do desvio entre a medição do espalhamento real e aquele devido a um núcleo pontual. A solução quântica não relativística para o espalhamento elástico de partículas em um potencial coulombiano fornece a amplitude de espalhamento



clássica de Rutherford. Este resultado foi primeiramente obtido por Gordon [2] por meio da separação de variáveis em coordenadas parabólicas. Então, Mott encontrou a série de ondas parciais em termos dos deslocamentos de fase usando a equação de Schrödinger [3] bem como a equação de Dirac com o potencial coulombiano como a componente temporal de um vetor de Lorentz [4]. Neste último caso, contudo, a amplitude de espalhamento não é conhecida em uma forma fechada.

O espalhamento elástico de uma partícula sem spin como um pión ou um káon por um núcleo pontual é também de fundamental importância e este problema tem recebido alguma atenção na literatura. Kang e Brown [5] abordaram a amplitude de espalhamento usando a equação de Klein-Gordon (KG) com a componente temporal de um potencial coulombiano e encontraram uma expansão perturbativa na constante de acoplamento até terceira ordem, enquanto Hetherington [6] analisou questões relacionadas à convergência das séries de ondas parciais, e Rawitscher [7] examinou desvios das soluções de KG em relação às soluções de Schrödinger para espalhamento em baixas velocidades. A supressão de um termo envolvendo o quadrado do potencial na equação de KG tem ocorrido muitas vezes [8], [9], [10], [11], e em outra publicação a contribuição desse termo somente aparece em termos de mais baixa ordem da série de ondas parciais [12]. Posteriormente, Cooper, Jeppesen e Johnson [13] completaram essa lacuna com uma expressão analítica aproximada levando em conta momentos angulares arbitrariamente altos. Dados experimentais de espalhamento de káons por núcleos foram analisados por Hill, Hetherington and Ravenhall [14] usando a equação de KG com um potencial vetorial mais um potencial escalar do tipo Woods-Saxon. Jansen, Pusch e Soff [15] investigaram as soluções do *continuum* da equação de KG com acoplamentos escalar e vetorial para vários potenciais, incluindo o potencial coulombiano, mas tal investigação não estava diretamente relacionada com o problema da amplitude de espalhamento. Realmente, soluções de estados ligados já tinham recebido atenção anteriormente [16] (veja também Ref. [17]). A mistura escalar-vetorial foi abordada para o potencial coulombiano em dimensões arbitrárias com especial atenção aos estados ligados [18], [19], e posteriormente aos estados de espalhamentos e seu deslocamento de fase [20]. Apesar disso, os autores da Ref. [20] não examinaram minuciosamente as possíveis consequências da amplitude de espalhamento e por essa razão perderam a oportunidade de explorar algumas implicações físicas. Em aplicações, o espalhamento de mésons por um núcleo é descrito por um potencial de curto alcance e um

adicional potencial coulombiano vetorial  $V_v = \hbar c Z \alpha / r$  agindo fora da região da matéria nuclear ( $Z$  é o produto das cargas nuclear e mesônica, e  $\alpha$  é a constante de estrutura fina). A adição de um potencial escalar de curto alcance, relacionado com a troca de bósons mediadores com massa, é importante não somente para estados de espalhamento mas também para descrever o espectro de um méson imerso em um meio nuclear.

Sistemas físicos com férmions sujeitos a potenciais escalar e vetorial não são inco-muns na literatura. A equação de Dirac com potenciais escalar e vetorial foi usada origi-nalmente na tentativa de descrever a dinâmica entre um quark e antiquark para calcular massas de mésons [21]. Posteriormente, a mistura vetor-escalar foi usada para investigar as implicações de uma pequena contribuição de um potencial escalar coulombiano para a espectroscopia atômica [22]. Em 1969, baseados na observação experimental de quase degenerescência, em núcleos esféricos, para estados de núcleon com números quânticos  $(n, l, j = l + 1/2)$  e  $(n - 1, l + 2, j = l + 3/2)$ <sup>1</sup>, Arima, Harvey e Shimizu [23] e paralela-mente Hecht e Adler [24], introduziram o conceito de pseudospin expressando esses dois estados com uma estrutura de dubleto, inserindo os números quânticos “pseudo” momento angular orbital  $\tilde{l} = l + 1$ , que é a média entre os momentos angulares orbitais desses dois estados, e um “pseudo” spin  $\tilde{s} = 1/2$ . Por exemplo os estados  $[ns_{1/2}, (n - 1) d_{3/2}]$  têm  $\tilde{l} = 1$ , os estados  $[np_{3/2}, (n - 1) f_{5/2}]$  têm  $\tilde{l} = 2$  e assim por diante, estes estados são quase degenerados com respeito ao pseudospin  $\tilde{s}$  visto que  $j = \tilde{l} \pm \tilde{s}$  para os dois estados no dubleto [25]. Essa simetria obteve grande sucesso ao explicar diferentes fenômenos na estrutura nuclear envolvendo por exemplo deformação [26], superdeformação [27] e bandas idênticas [28], mas, apesar do grande sucesso nenhuma pista da origem dessa simetria era encontrada na abordagem não relativística. Foi apenas em 1997 que Ginocchio [25] notou que  $\tilde{l}$  nada mais é do que o número quântico momento angular orbital do componente inferior do espinor de Dirac e que a quase degenerescência daqueles dois estados poderia ser explicada por uma pequena quebra de simetria de pseudospin, a qual é uma simetria exata para a hamiltoniana de Dirac com um potencial escalar  $V_s$  atrativo e um potencial vetorial  $V_v$  repulsivo, quando esses potenciais são iguais em magnitude  $V_s + V_v = 0$ . Esta situação em que os potenciais escalar e vetorial são iguais em magnitude mas com sinais diferentes é uma característica das teorias de campo médio relativísticas. A hamiltoni-ana de Dirac com potenciais escalar e vetorial com acoplamentos de mesma magnitude é

---

<sup>1</sup>Onde  $n$ ,  $l$  e  $j$  são os números quânticos radial, momento angular orbital e momento angular total, respectivamente.

invariante sob uma álgebra  $su(2)$  [29]. O espalhamento núcleon-núcleo vem sendo muito bem descrito com fortes potenciais vetoriais repulsivos e escalares atrativos desde a década de 80 (veja por exemplo [30] e referências inclusas). Potenciais vetorial e escalar com aproximadamente a mesma magnitude vêm sendo usados como potenciais de campo médio [31] (relacionado à simetria de pseudospin), no modelo de quark [32], bem como para considerar a possibilidade de antiférmions no núcleo [33], [34] (relacionado à simetria de spin). De fato, muitos estudos das simetrias de spin e pseudospin são limitados a estados ligados, e parece que os dados experimentais sobre espalhamento núcleon-núcleo não exibem características de simetria de pseudospin aproximada [31], [35], [36]. Os autores da Ref. [36] sugerem que a natureza de longo alcance do potencial coulombiano é responsável por quebrar a simetria de pseudospin. Ainda assim, a realização aproximada dessa simetria foi encontrada por outros autores usando diferentes tipos de análises [37], [38], [39], [40], [41]. Recentemente, a natureza perturbativa de ambas as simetrias com potenciais coulombianos foi discutida na Ref. [42] quanto a estados ligados. Foi mostrado também que, para potenciais de qualquer forma, as condições sobre as constantes de acoplamento que originam as simetrias de spin e pseudospin fazem com que partículas de spin  $1/2$  e spin  $0$  tenham o mesmo espectro de energia devido ao desaparecimento do acoplamento spin-órbita e termos de Darwin do componente superior (simetria de spin) ou do componente inferior (simetria de pseudospin) do espinor de Dirac [43]. É a ausência do termo spin-órbita para um dos componentes do espinor de Dirac que explica a existência de dubletos de pseudospin quase degenerados em determinados núcleos, e a existência de dubletos de spin quase degenerados em mésons constituídos de um quark pesado e um quark leve [32].

O propósito deste trabalho é a análise da abordagem de ondas parciais para o espalhamento elástico de bósons de spin  $0$  e de férmions de spin  $1/2$  por um potencial coulombiano com uma mistura de acoplamentos vetorial e escalar próximos da condição de simetrias de spin e pseudospin. A análise unificada da equação de KG, bem como da equação de Dirac, com potenciais escalar e vetorial nos habilita a encontrar resultados relevantes em forma fechada tanto para espalhamento como para estados ligados. A adição de um acoplamento escalar ao usual acoplamento vetorial torna o problema mais interessante visto que as séries de ondas parciais podem ser somadas exatamente quando os acoplamentos vetorial e escalar têm a mesma magnitude, além do mais, como

dito anteriormente, neste limite férmions e bósons compartilham o mesmo espectro. A fórmula de Rutherford pode também ser usada como uma aproximação para constantes de acoplamento muito pequenas, como acontece no limite não relativístico da teoria. As soluções das equações de KG e Dirac são expressadas em termos das funções de Whittaker, e a amplitude de espalhamento para pequenos acoplamentos vetorial e escalar, bem como para pequenos desvios da fórmula exata com acoplamentos vetorial e escalar de igual magnitude, é calculada na forma perturbativa para as soluções da equação de KG e como uma pequena quebra de simetria para as soluções da equação de Dirac. As soluções exatas de estados ligados para uma faixa restrita das constantes de acoplamento são obtidas dos polos complexos da amplitude de onda parcial tanto para bósons quanto para férmions. Para tais estados ligados as autoenergias são expressadas em termos da solução de uma equação algébrica de segundo grau e as autofunções expressadas em termos dos polinômios de Laguerre generalizados. Para ambos os tipos de estados estacionários apresentamos um estudo detalhado de alguns casos particulares interessantes. Além do mais, para o caso de bósons, mostramos que a degenerescência acidental para estados ligados aparecendo no limite não relativístico e quando os acoplamentos escalar e vetorial têm a mesma magnitude, relacionados com a conservação do vetor de Runge-Lenz, é quebrada perturbativamente. Para o caso de férmions, fórmulas fechadas para as séries de ondas parciais das amplitudes de espalhamento, bem como para a seção de choque diferencial, são encontradas não somente quando há exata simetria de spin e pseudospin mas também para uma ligeira quebra dessas simetrias. Mostramos que não apenas no limite não relativístico, a seção de choque diferencial obtida se reduz para a seção de choque de Rutherford para simetrias de spin e pseudospin exatas e para a seção de choque de Mott quando há ligeira quebra dessas simetrias. Mostramos um detalhado estudo sobre a influência das partes escalar e vetorial do potencial sobre as amplitude de espalhamento.

Esta tese está dividida em cinco capítulos. No capítulo 1 consta a presente introdução. No capítulo 2 apresentamos uma breve revisão sobre a teoria não relativística do espalhamento, no que concerne à abordagem de ondas parciais, por meio da equação de Schrödinger. Mostramos como obter a amplitude de espalhamento e o deslocamento de fase diretamente do comportamento assintótico da função de onda. Mostramos o caso coulombiano não relativístico com sua conhecida forma fechada e a amplitude de Rutherford, para a série de ondas parciais. Indicamos também que os estados ligados podem

ser obtidos dos polos da amplitude de espalhamento. No capítulo 3 estendemos o estudo de espalhamento e estados ligados para o caso relativístico, especificamente para bósons sujeitos a um potencial coulombiano por meio da equação de Klein-Gordon para uma mistura de potenciais escalar e vetorial. Mostramos que a amplitude de espalhamento, assim como no caso não relativístico se reduz à amplitude de espalhamento de Rutherford, mas apenas quando as magnitudes dos acoplamentos escalar e vetorial são iguais. Fazemos expansões em torno das condições que geram essa forma fechada e também encontramos os estados ligados por meio da análise dos polos da amplitude de espalhamento. No capítulo 4 introduzimos a equação relativística para férmions de spin  $1/2$ , a equação de Dirac. Mostramos suas soluções para o caso de potenciais esfericamente simétricos e a equivalência do espectro de energia entre férmions e bósons sob simetrias de spin e pseudospin. Introduzimos um breve resumo sobre as condições que geram as simetrias de spin e pseudospin. Mostramos também como obter a seção de choque diferencial e as amplitudes de espalhamento. Resolvemos o problema para uma mistura de potenciais escalar e vetorial coulombianos encontrando o deslocamento de fase e as amplitude de espalhamento correspondentes e mostramos um estudo das situações relevantes. Aqui também a amplitude de espalhamento se reduz à formula de Rutherford sob condições de simetrias de spin e pseudospin. Estudamos o caso em que há uma ligeira quebra dessas simetrias e também encontramos fórmulas fechadas para as séries de ondas parciais. Encontramos os estados ligados por meio da análise dos polos da amplitude de espalhamento e comparamos com as soluções obtidas na equação de KG. Por fim no capítulo 5 apresentamos as conclusões.

O que este trabalho traz de novo está contido no capítulo 3 sobre as soluções de espalhamento e estados ligados para potenciais coulombianos na equação de KG juntamente com as soluções de estados de espalhamento para potenciais coulombianos na equação de Dirac tratadas no capítulo 4. O trabalho relacionado ao capítulo 3 gerou um artigo publicado na revista *Physical Review C* [44] e o trabalho referente ao capítulo 4 será submetido em revista de mesmo porte.

# Capítulo 2

## A equação de Schrödinger

Neste capítulo começamos com uma abordagem não relativística dos estudos de espalhamento e estados ligados. Nos experimentos de espalhamento um feixe de partículas incide sobre um alvo que por sua vez espalha as partículas, um detector é colocado a grandes distâncias do centro espalhador de forma a detectar essas partículas. Seguindo o argumento de Joachain [45] o feixe incidente não deve ser tão intenso a ponto de considerar a interação entre as partículas do feixe, nem tão fraco a ponto de não conseguirmos observar um número razoável de eventos. Além disso, o alvo contém um grande número de centros espalhadores e consideramos que as distâncias entre esses centros espalhadores são, em geral, muito grandes comparadas com o comprimento de onda de de Broglie das partículas incidentes e assim podemos negligenciar os efeitos de coerência entre as ondas espalhadas por cada um desses centros. Por fim, se o alvo é muito fino podemos negligenciar sucessivos espalhamentos por esses centros espalhadores e assim podemos assumir como se cada espalhador atuasse sozinho e tratar o problema típico de colisão entre uma partícula incidente e uma partícula alvo [45]. Para este tratamento vamos considerar uma onda plana incidente para representar a partícula incidente, em vez de um pacote de ondas, visto que o resultado encontrado (a amplitude de espalhamento) é o mesmo em qualquer dos dois casos [46], [47]. Isso torna os cálculos muito mais simples e mais apresentáveis. Vamos nos limitar também ao estudo do espalhamento elástico, i.e. as partículas são espalhadas sem qualquer mudança em sua estrutura interna. No referencial do centro de massa, o problema de dois corpos pode ser mapeado em um problema de uma partícula com massa  $\mu$ , que é a massa reduzida das duas partículas, sob a influência de um potencial que depende apenas da distância relativa entre as duas partículas [45]. É este o problema

que vamos tratar, para começar introduzimos a equação de Schrödinger dependente do tempo

$$i\hbar\partial_t\Psi(\vec{r},t) = \hat{H}\Psi(\vec{r},t), \quad (2.1)$$

onde  $\hat{H}$  é o operador hamiltoniano dado por

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2\mu} + V(\vec{r}). \quad (2.2)$$

A equação (2.1) descreve o movimento de uma partícula de massa  $\mu$  sob a influência de um potencial  $V(\vec{r})$ . Para o que segue vamos considerar que  $V(\vec{r})$  é real. Multiplicando (2.1) por  $\Psi^*$  pela esquerda, e o complexo conjugado de (2.1) por  $\Psi$  pela direita e subtraindo, encontramos

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t(\Psi^*\Psi) &= -\frac{\hbar^2}{2\mu}[\Psi^*\nabla^2\Psi - (\nabla^2\Psi^*)\Psi] \\ &= -\vec{\nabla}\cdot\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - (\vec{\nabla}\Psi^*)\Psi\right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

se definimos a densidade de probabilidade por

$$\rho = \Psi^*\Psi, \quad (2.4)$$

e a densidade de corrente de probabilidade por

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{\mu}\text{Im}\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi\right), \quad (2.5)$$

então (2.3) pode ser escrita como

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0, \quad (2.6)$$

que é a conhecida equação da continuidade e expressa a conservação da probabilidade. Fazendo  $\Psi(\vec{r},t) = \exp(-iEt/\hbar)\psi(\vec{r})$  em (2.1) encontramos a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$\left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2\mu} + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (2.7)$$

onde  $E$  é a energia da partícula e  $\psi(\vec{r})$  é autofunção do operador hamiltoniano  $\hat{H}$ . Vamos assumir que o potencial é real e de curto alcance, indo a zero mais rápido do que  $r^{-1}$  em

grandes distâncias e também menos singular do que  $r^{-2}$  na origem. Isso exclui o potencial coulombiano que é de longo alcance e será tratado neste mesmo capítulo na seção 2.3.

Definindo

$$k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}, \quad (2.8)$$

podemos escrever a equação de autovalor (2.7) como:

$$[\nabla^2 - U(\vec{r})] \psi(\vec{r}) = -k^2 \psi(\vec{r}), \quad (2.9)$$

onde

$$U(\vec{r}) = 2\mu V(\vec{r})/\hbar^2, \quad (2.10)$$

é o “potencial reduzido”. A autofunção que representa a partícula espalhada a grandes distâncias do centro espalhador é composta de duas partes, uma corresponde à onda plana incidente que está presente mesmo quando não há centro espalhador, e a outra corresponde a uma onda esférica emergente que se origina no centro espalhador, assim a autofunção espalhada tem o seguinte comportamento assintótico

$$\psi(\vec{r}) \simeq A(k) \left[ e^{ikz} + f(k, \theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right], \quad kr \gg 1. \quad (2.11)$$

A amplitude de espalhamento  $f(k, \theta, \phi)$  é independente do ângulo  $\phi$  para potenciais esfericamente simétricos, enquanto o coeficiente  $A(k)$  é uma constante de normalização que é independente de  $r$ . Doravante consideraremos potenciais esfericamente simétricos. Vamos definir aqui a nomenclatura que usaremos ao longo desta tese no que diz respeito aos termos “curto alcance” ou “longo alcance”. Um potencial de alcance estritamente finito é o potencial que é identicamente nulo para  $r$  maior que um determinado  $r_0$ , chamado de alcance do potencial. Um potencial de “curto alcance” significa um potencial que é desprezível depois de um determinado  $r_0$  e se aproxima de zero mais rapidamente do que  $r^{-1}$  em grandes distâncias, caso contrário será chamado de potencial de longo alcance.

## 2.1 Seção de choque

Nesta seção seguimos o procedimento da Ref. [47]. Chamamos de  $F_i$  o fluxo de partículas do feixe incidente, isto é, o número de partículas por unidade de tempo que atravessam



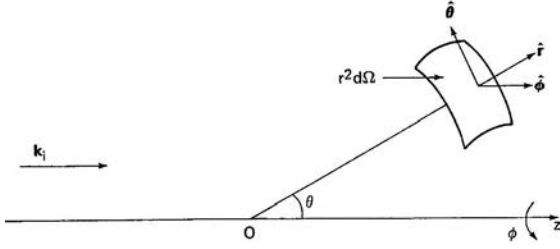


Figura 2.1: Ilustração das coordenadas usadas no texto. Fonte: Ref. [45]

uma unidade de superfície perpendicular ao eixo  $Oz$ . O detector é colocado a grandes distâncias do centro espalhador, longe da influência do potencial, e na direção fixada pelos ângulos polares  $\theta$  e  $\phi$ , subentendida pelo ângulo sólido  $d\Omega$  como pode ser visto na Fig. 2.1. O número de partículas  $dn$  espalhadas por unidade de tempo dentro do ângulo sólido  $d\Omega$  em torno da direção  $(\theta, \phi)$  é proporcional a  $d\Omega$  e a  $F_i$ , ou seja

$$dn = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) F_i d\Omega, \quad (2.12)$$

a constante de proporcionalidade  $d\sigma/d\Omega$  tem dimensão de área e é chamada de seção de choque diferencial de espalhamento.

A corrente incidente  $\vec{j}_i$  é obtida substituindo  $\psi(\vec{r})$  de (2.11) em (2.5), considerando apenas a parte relacionada à onda plana incidente ( $e^{ikz}$ ). Seu módulo é dado por

$$|\vec{j}_i| = \frac{\hbar k}{\mu}. \quad (2.13)$$

Usando  $\vec{\nabla}$  em coordenadas esféricas temos

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (2.14)$$

e substituindo  $\psi(\vec{r})$  pela função  $f(k, \theta, \phi) e^{ikr}/r$  em (2.5), encontramos para a corrente espalhada

$$\begin{aligned} (\vec{j}_e)_r &= \frac{\hbar k}{\mu} \frac{1}{r^2} |f(k, \theta, \phi)|^2, \\ (\vec{j}_e)_\theta &= \frac{\hbar}{\mu r^3} \text{Re} \left[ \frac{1}{i} f^*(k, \theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} f(k, \theta, \phi) \right], \\ (\vec{j}_e)_\phi &= \frac{\hbar}{\mu r^3 \sin \theta} \text{Re} \left[ \frac{1}{i} f^*(k, \theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} f(k, \theta, \phi) \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

uma vez que  $r$  é grande  $(\vec{j}_e)_\theta$  e  $(\vec{j}_e)_\phi$  podem ser desprezados em comparação com  $(\vec{j}_e)_r$  e a corrente espalhada é aproximadamente radial. A corrente total é composta de uma

parte incidente  $j_i$ , uma parte espalhada  $j_e$  e uma parte de interferência  $j_{int}$ , esta última contendo a interferência entre os termos de onda plana e onda espalhada. Para  $\theta \neq 0$ , o qual é o caso de interesse nesta tese, os termos de interferência podem ser negligenciados<sup>1</sup>. O fluxo incidente  $F_i$  é proporcional ao fluxo  $|\vec{j}_i|$  cruzando esta superfície, ou seja

$$F_i = C |\vec{j}_i| = C \frac{\hbar k}{\mu}. \quad (2.16)$$

O número  $dn$  de partículas que alcançam a abertura do detector por unidade de tempo é proporcional ao fluxo  $|\vec{j}_e|$  cruzando a superfície  $dS$  dessa abertura

$$\begin{aligned} dn &= C \vec{j}_e \cdot d\vec{S} = C \left( \vec{j}_e \right)_r r^2 d\Omega \\ &= C \frac{\hbar k}{\mu} |f(k, \theta, \phi)|^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Substituindo (2.17) e (2.16) em (2.12) encontramos para a seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k, \theta, \phi)|^2. \quad (2.18)$$

A seção de choque total é obtida de (2.18) integrando sobre todos os ângulos de espalhamento, i.e.

$$\sigma_{tot} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |f(k, \theta)|^2. \quad (2.19)$$

## 2.2 Análise de ondas parciais

Nesta seção seguimos de perto como guia a Ref. [45], citamos aqui apenas alguns pontos essenciais para o entendimento do texto. Para maiores detalhes sobre as contas veja a referência supracitada. Considerando o espalhamento de partículas sob a influência de um potencial esfericamente simétrico  $V(\vec{r}) = V(r)$ , em coordenadas esféricas o operador hamiltoniano pode ser escrito como

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \right] + V(r), \quad (2.20)$$

---

<sup>1</sup>Para uma prova, veja por exemplo [47], página 915.

onde

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (-i\hbar\vec{\nabla}), \quad (2.21)$$

é o operador momento angular orbital, de tal forma que

$$[H, L^2] = [H, L_z] = [L^2, L_z] = 0, \quad (2.22)$$

com

$$L^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right]. \quad (2.23)$$

Os operadores  $L^2$  e  $L_z$  também satisfazem

$$L^2 Y_{lm_l}(\theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm_l}(\theta, \phi) \quad (2.24)$$

$$L_z Y_{lm_l}(\theta, \phi) = m_l \hbar Y_{lm_l}(\theta, \phi),$$

onde  $Y_{lm_l}(\theta, \phi)$  são os harmônicos esféricos.

Haja vista (2.22), vamos procurar por autofunções que sejam autofunções simultâneas dos operadores  $H$ ,  $L^2$  e  $L_z$ . Além do mais, devido à simetria cilíndrica do problema, as autofunções  $\psi(\vec{r})$  não devem depender de  $\phi$ . Levando em conta que

$$P_l(\cos\theta) = \left( \frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} Y_{l0}(\theta), \quad (2.25)$$

onde  $P_l(\cos\theta)$  são os polinômios de Legendre, podemos expandir as autofunções  $\psi(\vec{r})$  como

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(k) R_l(r) P_l(\cos\theta). \quad (2.26)$$

Fazendo uso da expansão acima em (2.20) e com a ajuda de (2.23) e (2.24) obtemos para cada autofunção radial

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l + V(r) R_l = E R_l. \quad (2.27)$$

Fazendo  $R_l(r) = u_l(r)/r$  em (2.27) encontramos

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) - E \right) u_l(r) = 0. \quad (2.28)$$

Assumimos que  $r^2V(r) \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ , assim

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right) u_l(r) = 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (2.29)$$

as soluções são

$$u_l(r) \sim r^{l+1}, \quad u_l(r) \sim r^{-l}, \quad (2.30)$$

para  $l \neq 0$ , a solução  $u_l(r) \sim r^{-l}$  diverge muito rapidamente em  $r = 0$  para ser normalizável, e a única solução física é  $u_l(r) \sim r^{l+1}$ . Para  $l = 0$  implica que  $R_l(r) \sim 1/r$  e portanto  $\psi(r) \sim 1/r$  e como  $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(r)$  a menos que o potencial contenha uma função delta na origem a equação de Schrödinger não pode ser satisfeita em  $r = 0$ . Portanto devemos ter  $u_l(0) = 0$  [48].

Para a partícula livre,  $V(r) = 0$ , e com a mudança de variáveis  $\rho = kr$  a equação acima torna-se

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\right] R_l(\rho) = 0, \quad (2.31)$$

e é conhecida como equação esférica de Bessel. Ela admite como soluções

$$R_l(\rho) = a_l j_l(\rho) + b_l n_l(\rho), \quad (2.32)$$

onde  $j_l(\rho)$  e  $n_l(\rho)$  são as funções esféricas de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente. Elas satisfazem o seguinte comportamento assintótico quando  $\rho \rightarrow 0$

$$j_l(\rho) \simeq \rho^l, \quad n_l(\rho) \simeq \frac{1}{\rho^{l+1}}. \quad (2.33)$$

Por outro lado, quando  $\rho \rightarrow \infty$  as funções têm o seguinte comportamento assintótico

$$j_l(\rho) \simeq \frac{\sin(\rho - l\pi/2)}{\rho}, \quad n_l(\rho) \simeq -\frac{\cos(\rho - l\pi/2)}{\rho}. \quad (2.34)$$

Fazendo  $R_l(r) = u_l(r)/r$  em (2.27) encontramos

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r)\right) u_l(r) = 0, \quad (2.35)$$

onde  $U(r)$  é o potencial reduzido dado por (2.10). Note que nesta equação o potencial efetivo é a soma do potencial reduzido com o termo de barreira centrífuga repulsivo

$$l(l+1)/r^2.$$

### 2.2.1 Deslocamento de fase

Para grandes distâncias do centro espalhador,  $kr \gg 1$ , o potencial reduzido em (2.35) tende a zero. Visto que nesse limite a equação para  $u_l/r$  é uma equação esférica de Bessel, podemos assumir que as soluções de (2.35) podem ser escritas como

$$u_l(\rho) = \rho [A_l(k) j_l(\rho) + B_l(k) n_l(\rho)]. \quad (2.36)$$

Note que para  $\rho \rightarrow \infty$  temos

$$u_l(\rho) \simeq C_l(k) \sin[\rho - l\pi/2 + \delta_l(k)], \quad (2.37)$$

onde

$$\tan \delta_l(k) = -B(k)/A(k), \quad (2.38)$$

e

$$C_l(k) = \sqrt{A(k)^2 + B(k)^2}. \quad (2.39)$$

A quantidade  $\delta_l(k)$  representa a influência da interação, é a mudança que o potencial  $V(r)$  provoca na função de onda (para  $\rho \rightarrow \infty$  e para um dado  $l$ ) em relação à ausência de interação ( $u_l \simeq \sin(\rho - l\pi/2)$ ), e é chamada de deslocamento de fase. Dessa forma (2.36) torna-se

$$u_l(\rho) = A_l(k) \rho [j_l(\rho) - \tan \delta_l(k) n_l(\rho)], \quad (2.40)$$

e

$$R_l(\rho) = \tilde{A}_l(k) [j_l(\rho) - \tan \delta_l(k) n_l(\rho)], \quad (2.41)$$

onde  $\tilde{A}_l(k) = kA_l(k)$ .

### 2.2.2 Amplitude de espalhamento

Vamos determinar agora a amplitude de espalhamento. Lembrando da condição assintótica (2.11)

$$\psi(\vec{r}) \simeq A(k) \left[ e^{ikz} + f(k, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right], \quad kr \gg 1 \quad (2.42)$$

e com o uso da expansão em ondas parciais para a amplitude incidente [45]

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta), \quad (2.43)$$

encontramos

$$\psi(\vec{r}) \simeq A(k) \left[ \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr} P_l(\cos\theta) + f(k, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right], \quad kr \gg 1. \quad (2.44)$$

A expressão acima deve ser comparada com (2.26) nesse limite assintótico. Usando (2.37) em (2.26) encontramos

$$\psi(\vec{r}) \simeq \sum_{l=0}^{\infty} c_l(k) A_l(k) \frac{1}{r} \sin \left[ kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k) \right] P_l(\cos\theta), \quad kr \gg 1. \quad (2.45)$$

Comparando as exponenciais  $e^{-ikr}$  em (2.44) e (2.45) encontramos

$$c_l(k) = \frac{A(k) (2l+1) i^l e^{i\delta_l(k)}}{k A_l(k)}, \quad (2.46)$$

comparando da mesma forma mas agora com as exponenciais  $e^{ikr}$  obtemos a amplitude de espalhamento

$$f(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) P_l(\cos\theta), \quad (2.47)$$

onde

$$S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)}. \quad (2.48)$$

Dessa forma, a autofunção é escrita como

$$\psi(\vec{r}) = A(k) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1) i^l e^{i\delta_l(k)}}{k A_l(k)} R_l(r) P_l(\cos\theta). \quad (2.49)$$

A seção de choque diferencial (2.18) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(k, \theta) &= |f(k, \theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1) (2l'+1) e^{i[\delta_l(k) - \delta_{l'}(k)]} \\ &\times \sin \delta_l(k) \sin \delta_{l'}(k) P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Usando (2.18) e a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (2.51)$$

em (2.19), encontramos a seção de choque total

$$\sigma_{tot}(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k). \quad (2.52)$$

Percebe-se que para encontrar as quantidades relevantes para o problema de espalhamento basta conhecer o deslocamento de fase  $\delta_l(k)$ .

### 2.3 O potencial coulombiano não relativístico

O potencial coulombiano é comumente abordado em livros-texto no sistema de coordenadas parabólicas [45], [46], [47], [48], [49], [50]. Neste sistema de coordenadas encontra-se o seguinte comportamento assintótico para a função de onda

$$\psi_c \simeq A \left[ e^{i[kz - \eta \ln kr(1 - \cos \theta)]} + f_c(k, \theta) \frac{e^{i(kr - \eta \ln 2kr)}}{r} \right], \quad kr \gg 1 \quad (2.53)$$

com

$$f_c(k, \theta) = \frac{\Gamma(1 + i\eta) \exp[-i\eta \ln \sin^2 \theta/2]}{\Gamma(-i\eta) 2ik \sin^2 \theta/2}, \quad (2.54)$$

onde

$$\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2 k}, \quad (2.55)$$

e  $\Gamma(x)$  é a função gama. Veja que tanto o termo referente à onda plana como o termo referente à onda emergente são modificados em relação à equação (2.11), essa perturbação é devida ao longo alcance da interação coulombiana em contraposição aos potenciais de curto alcance que vimos até agora. Uma vez que o potencial coulombiano é esfericamente simétrico, o problema pode também ser abordado pelo método de ondas parciais que vimos nas seções anteriores. Para o potencial coulombiano

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, \quad (2.56)$$

juntamente com a mudança de variáveis  $\rho = kr$  encontra-se para a Eq. (2.35)

$$\left( \frac{d^2}{d\rho^2} + 1 - \frac{2\eta k}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) u_l(\rho) = 0, \quad (2.57)$$

onde  $k$  é dado por (2.8). O espectro apresenta uma degenerescência de ordem  $2l+1$  com respeito ao número quântico  $m_l$  devido à simetria esférica do potencial. Como  $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\vec{r})$ , a menos que o potencial contenha uma função delta na origem, devemos impor a condição de Dirichlet homogênea  $u_l(0) = 0$  [48]. Por outro lado, como o potencial vai a zero em grandes distâncias a solução  $u_l$  tem o comportamento assintótico  $e^{ikr}$  conforme  $kr \rightarrow \infty$ . Assim, estados de espalhamento somente ocorrem se  $E > 0$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) enquanto estados ligados ocorrem somente se  $E < 0$  ( $k = i|k|$ ). A solução regular na origem é dada por [51]

$$u_l(\rho) = C_l(\eta) \rho^{l+1} e^{+i\rho} M(l+1+i\eta, 2l+2, -2i\rho), \quad (2.58)$$

onde

$$M(a, b, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+j) \Gamma(b)}{\Gamma(b+j) \Gamma(a) j!} z^j \quad (2.59)$$

é a função hipergeométrica confluyente. Para  $\rho \rightarrow \infty$ , a solução (2.58) tem o comportamento assintótico dado por [51]

$$u_l(\rho) \simeq \sin \left[ \rho - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln(2\rho) + \sigma_l(\eta) \right], \quad (2.60)$$

onde

$$\sigma_l(\eta) = \arg \Gamma(l+1+i\eta), \quad (2.61)$$

é o deslocamento de fase coulombiano. O termo logarítmico no argumento da função seno é inerente ao potencial coulombiano e é devido ao longo alcance do potencial. Neste caso, a amplitude de espalhamento é dada por

$$f(k, \theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (S_l - 1) P_l(\cos \theta), \quad (2.62)$$

onde

$$S_l = e^{2i\sigma_l(\eta)} = \frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(l+1-i\eta)}. \quad (2.63)$$



É muito difícil encontrar livros-texto que mostrem a fórmula exata para a série acima. Na verdade existe muita discussão sobre a convergência dessa série e de fato a série é divergente para  $\theta = 0$ . No entanto, existem pelo menos dois artigos [3], [52] que realizam esta obra para  $\theta \neq 0$ . Lin [52], realiza um tratamento muito simples e didático para obter a fórmula fechada para a amplitude de espalhamento para  $\theta \neq 0$ , naturalmente ele encontra

$$f(k, \theta) = \frac{\Gamma(1 + i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} \frac{\exp[-i\eta \ln \sin^2 \theta/2]}{2ik \sin^2 \theta/2} = f_c(k, \theta), \quad \theta \neq 0. \quad (2.64)$$

### 2.3.1 Estados ligados para o potencial coulombiano

Se  $k = i|k|$  ( $E = -|E|$ ), a amplitude de onda parcial torna-se infinita quando  $l + 1 + i\eta = -N$ , onde  $N = 0, 1, 2, \dots$ , devido aos polos da função gama no numerador de (2.63). A solução (2.58) comporta-se assintoticamente como  $e^{-|k|r}$  quando  $r$  aumenta pois  $M(-N, 2l + 2, 2|k|r)$  é proporcional a  $L_N^{(2l+1)}(2|k|r)$ , o polinômio de Laguerre generalizado de ordem  $N$ . Assim as autofunções são escritas como [46]

$$u(r) = Ar^l e^{-|k|r} L_N^{(2l+1)}(2|k|r),$$

onde  $A$  é uma constante. A condição  $l + 1 + i\eta = -N$  fornece o espectro usual para o potencial coulombiano:

$$E_n = -\frac{\mu Z_1^2 Z_2^2 e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = N + l + 1. \quad (2.65)$$

O procedimento de encontrar a amplitude de espalhamento e posteriormente analisar os polos da amplitude de espalhamento para encontrar os estados ligados, será também o método utilizado para o problema coulombiano relativístico.

# Capítulo 3

## A equação de Klein-Gordon

### 3.1 Acoplamentos vetorial e escalar na equação de Klein-Gordon

A equação de Klein-Gordon independente do tempo para uma partícula sem spin com massa  $m$  e energia  $E$  sob a influência de potenciais vetorial ( $V_v$ ) e escalar ( $V_s$ ) é dada por [44]

$$\left[ (\hbar c)^2 \nabla^2 + (E - V_v)^2 - (mc^2 + V_s)^2 \right] \varphi = 0. \quad (3.1)$$

Note que, como foi dito na introdução, o potencial vetorial  $V_v$  é a componente temporal do quadrivetor  $V^\mu = (V_v, \vec{V})$ , escolhamos  $\vec{V} = \vec{0}$  para este problema, e o potencial escalar é acoplado com a massa de acordo com a substituição  $m \rightarrow m + V_s/c^2$ . Essa prescrição permite a análise de um acoplamento escalar repulsivo ou atrativo no mesmo problema e fornece o limite não relativístico correto da equação de Klein-Gordon (potenciais pequenos comparados com  $mc^2$  e  $E \simeq mc^2$ , e um potencial efetivo  $V_v + V_s$ ), em contraste com a regra  $m^2 \rightarrow m^2 + V_s^2/c^4$  empregada nas Ref. [15], [16], [17]. Se considerarmos potenciais esfericamente simétricos  $\varphi(\vec{r})$  pode ser fatorizada como

$$\varphi_{\nu l m_l}(\vec{r}) = \frac{u_\nu(r)}{r} Y_{l m_l}(\theta, \phi), \quad (3.2)$$

onde  $Y_{lm_l}(\theta, \phi)$  é o usual harmônico esférico,  $\nu$  denota o número quântico principal, e  $u_\nu(r)$  obedece a equação radial

$$\frac{d^2 u_\nu}{dr^2} + \left[ \frac{V_v^2 - V_s^2 - 2(EV_v + mc^2 V_s)}{(\hbar c)^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] u_\nu = 0 \quad (3.3)$$

na qual  $\hbar ck = \sqrt{E^2 - m^2 c^4}$ . Pode ser útil notar que o espectro troca de sinal se  $V_v$  troca, e é simétrico em torno de  $E = 0$  se  $V_v = 0$ . Note também que o espectro apresenta uma degenerescência de ordem  $2l+1$  com respeito a  $m_l$  devido à simetria esférica dos potenciais. Como  $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\vec{r})$ , a menos que os potenciais contenham uma função delta na origem, devemos impor a condição de Dirichlet homogênea  $u_\nu(0) = 0$  [48]. Por outro lado, se ambos os potenciais forem a zero em grandes distâncias a solução apropriada  $u_\nu$  tem o comportamento assintótico  $e^{ikr}$  conforme  $r \rightarrow \infty$ . Assim, estados de espalhamento somente ocorrem se  $|E| > mc^2$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) enquanto estados ligados ocorrem somente se  $|E| < mc^2$  ( $k = i|k|$ ).

## 3.2 Potenciais coulombianos

Quando os potenciais escalar e vetorial são do tipo coulombiano, i.e., são da forma  $V_v = \hbar cg_v/r$  e  $V_s = \hbar cg_s/r$ , o uso das abreviações

$$\gamma_l = \sqrt{(l+1/2)^2 + g_s^2 - g_v^2}, \quad \eta = \frac{Eg_v + mc^2 g_s}{\hbar ck} \quad (3.4)$$

e a mudança de variável  $\zeta = -2ikr$  nos permite escrever a equação de Klein-Gordon radial na forma da equação de Whittaker

$$\frac{d^2 u_\nu}{d\zeta^2} + \left( -\frac{1}{4} - \frac{i\eta}{\zeta} + \frac{1/4 - \gamma_l^2}{\zeta^2} \right) u_\nu = 0, \quad (3.5)$$

com soluções linearmente independentes  $M_{-i\eta, \gamma_l}(\zeta)$  e  $W_{-i\eta, \gamma_l}(\zeta)$  se comportando como  $\zeta^{1/2+\gamma_l}$  e  $\zeta^{1/2-\gamma_l}$  perto da origem, respectivamente [53]. Como  $u_\nu(0) = 0$ , devemos considerar a solução  $u_\nu$  proporcional a [53]

$$M_{-i\eta, \gamma_l}(\zeta) = e^{-\zeta/2} \zeta^{1/2+\gamma_l} M(1/2 + \gamma_l + i\eta, 1 + 2\gamma_l, \zeta) \quad (3.6)$$

Aqui, a condição de contorno na origem implica que  $\gamma_l$  deve ser real e positivo o que nos dá a seguinte condição:

$$|g_v| < \sqrt{1/4 + g_s^2}, \quad (3.7)$$

e  $M(a, b, z)$  é a função hipergeométrica confluyente (2.59). Usando a condição de contorno assintótica de  $M(a, b, z)$  para  $|z|$  grande e  $-\frac{3\pi}{2} < \arg z \leq -\frac{\pi}{2}$  [53],

$$M(a, b, z) \simeq \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} e^{-i\pi a} z^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b}, \quad (3.8)$$

pode-se mostrar que para  $r$  muito grande ( $|k|r \gg 1$ )

$$u_\nu(r) \simeq \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l), \quad (3.9)$$

com o deslocamento de fase relativístico  $\delta_l = \delta_l(\eta)$  dado por

$$\delta_l = \frac{\pi}{2} (l + 1/2 - \gamma_l) + \arg \Gamma(1/2 + \gamma_l + i\eta). \quad (3.10)$$

É instrutivo notar que o termo  $V_v^2 - V_s^2$  na equação de KG (3.1) gera um termo  $r^{-2}$  de curto alcance atrativo (repulsivo) se usarmos o potencial coulombiano com  $|V_v| < |V_s|$  ( $|V_v| > |V_s|$ ). Note também que este termo de curto alcance não existe se os potenciais vetorial e escalar têm a mesma magnitude e perde sua importância no limite em que as constantes de acoplamento são pequenas. Somente na ausência do termo de curto alcance o vetor de Runge-Lenz é uma constante de movimento [54], [55], [56], [57].

### 3.2.1 Espalhamento

Para estados de espalhamento, a solução da equação de KG (3.1) tem a forma assintótica

$$\varphi(\vec{r}) \simeq e^{ikr \cos \theta} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (3.11)$$

onde o primeiro termo corresponde a uma onda plana movendo-se na direção  $\theta = 0$  rumo ao centro espalhador, e o segundo corresponde a uma onda esférica emergente. Para espalhadores esfericamente simétricos, ambos os termos exibem simetria cilíndrica em torno da direção de incidência de tal forma que  $\varphi$  e  $f$  são independentes de  $\phi$ . A conexão entre as formas (3.2) e (3.11) nos permite escrever a amplitude de espalhamento como

uma série de ondas parciais

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos \theta), \quad (3.12)$$

onde  $P_l$  é o polinômio de Legendre de ordem  $l$  e a amplitude de espalhamento parcial é  $f_l = (e^{2i\delta_l} - 1) / (2ik)$ . Com o deslocamento de fase (3.10), a menos de uma fase logarítmica inerente ao potencial coulombiano, encontramos

$$2ik f_l = -1 + e^{i\pi(l+1/2-\gamma_l)} \frac{\Gamma(1/2 + \gamma_l + i\eta)}{\Gamma(1/2 + \gamma_l - i\eta)}. \quad (3.13)$$

A série (3.12) pode ser somada quando  $\gamma_l = l + 1/2$ , a forma fechada sendo [3] (veja também [52])

$$f(\theta) = -\eta \frac{\Gamma(1 + i\eta)}{\Gamma(1 - i\eta)} \frac{\exp(-i\eta \ln \sin^2 \theta/2)}{2k \sin^2 \theta/2}, \quad \theta \neq 0 \quad (3.14)$$

que leva à fórmula de espalhamento de Rutherford para a seção de choque diferencial em mecânica clássica e quântica não relativística. É útil notar que esta última equação é exata se consideramos  $|g_v| = |g_s|$ . Também, é apropriada como uma aproximação para constantes de acoplamentos pequenas.

Para estudar o comportamento da amplitude de espalhamento próximo das condições que fornecem essa forma fechada, expandimos (3.12) para  $g_v$  e  $g_s$  pequenos, conveniente para explorar o limite não relativístico. A expansão próximo da condição  $|g_v| = |g_s|$  é feita mais facilmente se definimos  $g_\Delta$  e  $g_\Sigma$ :

$$g_\Delta = g_v - g_s, \quad g_\Sigma = g_v + g_s. \quad (3.15)$$

As expansões da série (3.12) até a ordem seguinte ao termo líder podem ser feitas usando um par de propriedades da função gama [53]:  $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$  e  $1/\Gamma(z) \simeq ze^{\gamma_e z}$  para  $z \simeq 0$ , onde  $\gamma_e$  é a constante de Euler. Em adição, usamos algumas identidades

matemáticas tomadas da referência [5], viz.

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) &= \frac{1}{2 \sin \theta/2} \\
\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) &= 0, \quad \theta \neq 0 \\
\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \psi(l+1) &= -\frac{1}{2 \sin^2 \theta/2} \\
\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \psi^2(l+1) &= \frac{\ln \sin \theta/2 + \gamma_e}{\sin^2 \theta/2} \\
\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) [\psi^{(2)}(l+1) + 4\psi^3(l+1)] &= -6 \left( \frac{\ln \sin \theta/2 + \gamma_e}{\sin \theta/2} \right)^2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde  $\psi(z) = d \ln \Gamma(z) / dz$  é a função digama e  $\psi^{(n)}(z) = d^n \psi(z) / dz^n$ . Com tais identidades, comparações da expansão de (3.14) e (3.12) com  $f_l$  dada por (3.13) fornecem as desejadas expansões.

As expansões para  $|g_v| \ll 1$  e  $|g_s| \ll 1$  são dadas por

$$f(\theta) = \begin{cases} -\frac{g_v E}{2\hbar c k^2 \sin^2 \theta/2} e^{-i \frac{2g_v E (\ln \sin \theta/2 + \gamma_e)}{\hbar c k}} f_v, & g_s = 0, \\ -\frac{g_s m c^2}{2\hbar c k^2 \sin^2 \theta/2} e^{-i \frac{2g_s m c^2 (\ln \sin \theta/2 + \gamma_e)}{\hbar c k}} f_s, & g_v = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

com

$$\begin{aligned}
f_v &= 1 - \frac{g_v \pi \hbar c k \sin \theta/2}{2E} + \mathcal{O}(g_v^2), \\
f_s &= 1 + \frac{g_s \pi \hbar c k \sin \theta/2}{2m c^2} + \mathcal{O}(g_s^2).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Os termos líderes em ambas as expansões são consistentes com o limite não relativístico com  $|E| \simeq m c^2$ , e a ordem seguinte ao termo líder contribui para mudar a distribuição angular. Diferenças entre os acoplamentos vetorial e escalar aparecem mesmo nos termos de mais baixa ordem. Uma notável diferença entre a natureza dos acoplamentos escalar e vetorial aparece na ordem seguinte ao termo líder: o acoplamento escalar puro sempre contribui para aumentar (diminuir)  $|f(\theta)|$  quando o potencial escalar é repulsivo (atractivo), para o acoplamento vetorial puro, contudo,  $|f(\theta)|$  aumenta ou diminui dependendo

do sinal de  $g_v E$ .

Próximo da condição  $|g_v| = |g_s|$ , com  $g_\Delta$  e  $g_\Sigma$  definidos em (3.15), obtemos as seguintes aproximações perturbativas

$$f(\theta) = \begin{cases} -\frac{g_\Sigma(E+mc^2)}{4\hbar ck^2 \sin^2 \theta/2} e^{-i \frac{g_\Sigma(E+mc^2)(\ln \sin \theta/2 + \gamma_e)}{\hbar ck}} f_\Sigma, & g_\Delta \simeq 0, \\ -\frac{g_\Delta(E-mc^2)}{4\hbar ck^2 \sin^2 \theta/2} e^{-i \frac{g_\Delta(E-mc^2)(\ln \sin \theta/2 + \gamma_e)}{\hbar ck}} f_\Delta, & g_\Sigma \simeq 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

com

$$f_\Sigma = 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{g_\Sigma(E+mc^2)(\ln \sin \theta/2 + \gamma_e)}{\hbar ck} \right]^2 + \mathcal{O}(g_\Sigma^3), \quad (3.20)$$

$$f_\Delta = 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{g_\Delta(E-mc^2)(\ln \sin \theta/2 + \gamma_e)}{\hbar ck} \right]^2 + \mathcal{O}(g_\Delta^3).$$

Os termos líderes destas últimas expansões, para  $g_\Delta = 0$  ( $g_\Sigma = 0$ ), revelam consistência com o limite não relativístico com  $E \simeq +mc^2$  ( $E \simeq -mc^2$ ). Os termos de ordem seguinte ao termo líder distorcem a distribuição angular e sempre contribuem para diminuir  $|f(\theta)|$ .

### 3.2.2 Estados ligados

Se  $k = i|k|$  ( $|E| < mc^2$ ), a amplitude de onda parcial torna-se infinita quando  $1/2 + \gamma_l - \text{Im}(\eta) = -N$ , onde  $N = 0, 1, 2, \dots$ , devido aos polos da função gama no numerador de (3.13). Uma vez que  $\text{Im}(\eta) > 0$ , além da condição (3.7) temos  $g_s < |g_v|$ . Lembrando o comportamento assintótico da função hipergeométrica confluyente dado por (3.8), vemos que a função de Whittaker  $M_{\text{Im}(\eta), \gamma_l}(2|k|r)$  comporta-se assintoticamente como  $e^{-|k|r}$  quando  $r$  aumenta pois  $M(-N, 1 + 2\gamma_l, 2|k|r)$  é proporcional a  $L_N^{(2\gamma_l)}(2|k|r)$ , o polinômio de Laguerre generalizado de ordem  $N$ . Assim, o par característico  $(E_\nu, u_\nu)$  representa um estado espacialmente localizado dado explicitamente por

$$E_\nu = mc^2 \frac{-\frac{g_v g_s}{\nu^2} \pm \left(1 + \frac{g_v^2 - g_s^2}{\nu^2}\right)^{1/2}}{1 + \left(\frac{g_v}{\nu}\right)^2}, \quad (3.21)$$

$$u_\nu = A_\nu r^{1/2 + \gamma_l} e^{-|k|r} L_{\nu-1/2-\gamma_l}^{(2\gamma_l)}(2|k|r), \quad (3.22)$$

onde o número quântico  $\nu$  satisfaz

$$\nu = \text{Im}(\eta) = N + 1/2 + \gamma_l > 1/2 \quad (3.23)$$

e  $A_\nu$  é uma constante de normalização. Os níveis de energia vindos do *continuum* para a região de estados ligados ( $|E| < mc^2$ ) vem do *continuum* superior (relacionado a estados de partículas) ou do *continuum* inferior (relacionado a estados de antipartículas).

Podemos verificar que o limite não relativístico é correto. De fato, se  $|g_v| \ll 1$  e  $|g_s| \ll 1$ , encontramos

$$\frac{E_n}{mc^2} \simeq \pm \left[ 1 - \frac{(g_s \pm g_v)^2}{2n^2} \right], \quad g_s \pm g_v < 0, \quad (3.24)$$

na qual  $n$  é um inteiro positivo dado por  $n = N + l + 1 = 1, 2, 3, \dots$  com  $l \leq n - 1$ . Além da degenerescência devido à simetria rotacional, uma distinguível degenerescência com respeito a  $l$  resulta em um espectro com grau de degenerescência igual a  $n^2$ .

Para  $g_v = \varepsilon g_s$  ( $g_s < 0$ ), a expansão de (3.21) até a ordem seguinte ao termo líder em  $\varepsilon$  fornece

$$\frac{E_\nu}{mc^2} = \pm [1 - (g_s/\nu)^2]^{1/2} - \varepsilon (g_s/\nu)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.25)$$

$$\nu = N + 1/2 + \sqrt{(l + 1/2)^2 + g_s^2} + \nu_\varepsilon, \quad (3.26)$$

com

$$\nu_\varepsilon = -\varepsilon^2 \frac{g_s^2}{2\sqrt{(l + 1/2)^2 + g_s^2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (3.27)$$

de tal forma que o espectro é simétrico em torno de  $E = 0$  no caso de um acoplamento escalar puro (o termo de zeroésima ordem), como esperado. A adição de um pequeno acoplamento vetorial aumenta o limite superior sobre  $|g_s|$ , quebrando a simetria do espectro e tornando os estados de partículas (antipartículas) mais fortemente ligados do que os estados de antipartículas (partículas) se o acoplamento vetorial for atrativo (repulsivo).

Por outro lado, para  $g_s = \varepsilon g_v$  encontramos

$$\frac{E_\nu}{mc^2} = -\frac{\text{sgn}(g_v)}{[1 + (g_v/\nu)^2]^{1/2}} - \varepsilon \frac{(g_v/\nu)^2}{1 + (g_v/\nu)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.28)$$



$$\nu = N + 1/2 + \sqrt{(l + 1/2)^2 - g_v^2} + \nu_\varepsilon \quad (3.29)$$

com

$$\nu_\varepsilon = \varepsilon^2 \frac{g_v^2}{2\sqrt{(l + 1)^2 - g_v^2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (3.30)$$

Neste último caso, os níveis de energia positiva (negativa) são excluídos do espectro se o potencial vetorial for repulsivo (atractivo) quando  $\varepsilon = 0$ , e a energia com menor valor absoluto tende à  $-mc^2 \text{sgn}(g_v)/\sqrt{2}$  quando  $|g_v|$  tende ao seu valor limite 1/2 de tal forma que partículas (antipartículas) são sempre associadas com níveis de energia positiva (negativa). A adição de um contaminante escalar aumenta o limite superior imposto sobre  $|g_v|$  e aumenta (diminui) a energia de ligação se  $\varepsilon < 0$  ( $\varepsilon > 0$ ).

Para estudar o espectro próximo da condição  $|g_v| = |g_s|$ , necessariamente com  $g_s < 0$ , expandimos (3.21) e (3.23) para  $g_\Delta$  e  $g_\Sigma$  pequenos, definidos em (3.15). A dependência de  $g_\Delta$  e  $g_\Sigma$  em  $\nu$  vem através de  $g_\Delta g_\Sigma$  e assim a expansão para  $\nu$  é dada por

$$\nu = N + l + 1 - \frac{g_\Delta g_\Sigma}{2l + 1} + \mathcal{O}(g_\Delta^2 g_\Sigma^2). \quad (3.31)$$

Para pequeno  $g_\Delta$  encontramos

$$\frac{E_\nu^{(+)}}{mc^2} = 1 - \frac{2(g_\Sigma/2\nu)^2}{1 + (g_\Sigma/2\nu)^2} + \varepsilon_\Delta, \quad (3.32)$$

$$\frac{E_\nu^{(-)}}{mc^2} = -1 + g_\Delta^2 \frac{1}{2\nu^2} + \mathcal{O}(g_\Delta^3), \quad (3.33)$$

com

$$\varepsilon_\Delta = g_\Delta \frac{2(g_\Sigma/2\nu)^3}{\nu [1 + (g_\Sigma/2\nu)^2]^2} + \mathcal{O}(g_\Delta^2), \quad (3.34)$$

enquanto para pequeno  $g_\Sigma$  temos

$$\frac{E_\nu^{(+)}}{mc^2} = 1 - g_\Sigma^2 \frac{1}{2\nu^2} + \mathcal{O}(g_\Sigma^3), \quad (3.35)$$

$$\frac{E_\nu^{(-)}}{mc^2} = -1 + \frac{2(g_\Delta/2\nu)^2}{1 + (g_\Delta/2\nu)^2} + \varepsilon_\Sigma, \quad (3.36)$$

com

$$\varepsilon_\Sigma = -g_\Sigma \frac{2(g_\Delta/2\nu)^3}{\nu [1 + (g_\Delta/2\nu)^2]^2} + \mathcal{O}(g_\Sigma^2). \quad (3.37)$$

Aqui, a degenerescência acidental já observada no limite não relativístico também vem à tona na zeroésima ordem das expansões em  $g_\Delta$  para  $E_\nu^{(+)}$ , e  $g_\Sigma$  para  $E_\nu^{(-)}$ . Nesta ordem particular, não há limite superior na constante de acoplamento e para um potencial atrativo (repulsivo) os níveis de energia vêm do *continuum* superior (inferior) para pequenos acoplamentos e tendem assintoticamente para o *continuum* inferior (superior) para grandes acoplamentos. A degenerescência acidental no problema coulombiano não relativístico é relacionada com a conservação do vetor de Runge-Lenz [54], [55], [56], [57]. O termo  $V_v^2 - V_s^2$  na equação de KG (3.1), devido ao termo  $r^{-2}$  que o acompanha, viola a conservação do vetor de Runge-Lenz.  $E_\nu^{(+)}$  em (3.32) e  $E_\nu^{(-)}$  em (3.36) revelam que a quebra da degenerescência acidental é perturbativa. Isto pode ser percebido pelo fato que  $g_\Delta$  e  $g_\Sigma$  atuam como parâmetros perturbativos nas equações acima, assim pode-se passar continuamente de um estado ligado sem degenerescência acidental para um estado ligado com degenerescência acidental (o estado não perturbado) conforme esses parâmetros anulem-se. Isto não acontece para  $E_\nu^{(-)}$  em (3.33) nem para  $E_\nu^{(+)}$  em (3.35) devido à inexistência de estados ligados na zeroésima ordem. Relacionado com a quebra perturbativa da degenerescência acidental, uma útil investigação usando o vetor de Runge-Lenz como um método perturbativo para o espalhamento clássico em um potencial coulombiano perturbado pode ser encontrado na Ref. [58].

# Capítulo 4

## A equação de Dirac

Em 1928, P. M. Dirac [59] procurou por uma equação na forma da equação de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\Psi(\vec{x},t) = H_D\Psi(\vec{x},t), \quad (4.1)$$

que fosse linear tanto na derivada temporal quanto na espacial, que obedecesse à relação de dispersão relativística  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$  e que fosse covariante sob transformações de Lorentz. A equação encontrada, ficou conhecida como a equação de Dirac. Para uma partícula livre de massa  $m$  essa equação é escrita por meio da hamiltoniana de partícula livre  $H_D = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2$  como:

$$i\hbar\partial_t\Psi(\vec{x},t) = (c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2)\Psi(\vec{x},t), \quad (4.2)$$

onde  $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$  é o operador momento,  $\Psi$  é um vetor coluna, chamado de espinor

$$\Psi(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\vec{x},t) \\ \Psi_2(\vec{x},t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_N(\vec{x},t) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

e  $\alpha_i$  e  $\beta$  com  $i = 1, 2, 3$  são matrizes que devem ser determinadas. Para satisfazer a relação entre energia  $E$  e o momento  $\vec{p}$  da partícula, cada um dos componentes de  $\Psi$  deve

satisfazer à equação de Klein-Gordon [60]

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \Psi_i = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \Psi_i,$$

para que isso ocorra as seguintes condições para as matrizes  $\alpha_i$  e  $\beta$  devem ser satisfeitas

$$\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2\delta_{ik} \tilde{I}, \quad \beta \alpha_i + \alpha_i \beta = 0, \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = \tilde{I}, \quad (4.4)$$

onde  $\tilde{I}$  é a matriz identidade  $N \times N$ . Para que a hamiltoniana de Dirac seja hermitiana, devemos ter  $\alpha_i^\dagger = \alpha_i$ ,  $\beta^\dagger = \beta$ . As exigências (4.4) ditam que a menor dimensão possível para as matrizes  $\alpha_i$  e  $\beta$  é  $N = 4$  [60]. Usamos a representação usual para as matrizes  $\alpha_i$  e  $\beta$  na forma

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$  e  $\sigma_i$  são as matrizes de Pauli  $2 \times 2$

$$\sigma_x = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Para encontrar a equação da continuidade seguimos o procedimento padrão, multiplicando (4.2) por  $\Psi^\dagger = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*)$  pela esquerda e posteriormente pegando o conjugado hermitiano de (4.2) e multiplicando por  $\Psi$  pela direita e finalmente subtraindo um termo do outro obtemos

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (4.7)$$

onde a densidade de probabilidade  $\rho$  e a densidade de corrente de probabilidade  $\vec{j}$  são definidas como

$$\rho = \Psi^\dagger \Psi = \sum_{i=1}^4 |\Psi_i|^2, \quad (4.8)$$

$$\vec{j} = c \Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi. \quad (4.9)$$

Com a ajuda das seguintes definições

$$\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}, \quad \beta = \gamma^0 = \gamma_0,$$

onde

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.10)$$

as relações (4.4) podem ser escritas como [61]:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tilde{I}, \quad \text{onde } \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (4.11)$$

com o quadrado das matrizes  $\gamma^\mu$  dado por

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -\tilde{I}, \quad (\gamma^0)^2 = \tilde{I}. \quad (4.12)$$

A matriz  $\gamma^0$  é hermitiana enquanto as outras matrizes  $\gamma^i$  são anti-hermitianas, i.e.

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i, \quad (4.13)$$

e também

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Se introduzimos o quadrivetor densidade de corrente  $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ , a equação da continuidade (4.7) pode ser escrita na forma covariante

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (4.15)$$

com o quadrivetor densidade de corrente representado por

$$j^\mu = c\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad (4.16)$$

onde  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$  é o espinor adjunto e a equação de Dirac, na forma covariante, pode ser escrita como:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0. \quad (4.17)$$

## 4.1 A equação de Dirac para potenciais esfericamente simétricos

A equação de Dirac independente do tempo para uma partícula sob a influência de um potencial escalar  $V_s(r)$  e um potencial vetorial  $V_v(r)$ , esfericamente simétricos, é dada por [43]

$$H_D\psi(\vec{r}) = [c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta(mc^2 + V_s) + V_v]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (4.18)$$

O operador paridade é definido como  $\hat{P} = e^{-i\phi}\beta\hat{P}_0$ , onde  $\hat{P}_0$  é o operador que faz a transformação  $\hat{P}_0\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$ . Definindo o momento angular total  $\vec{J}$  como

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{s} = \vec{r}\times\vec{p}I + \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}, \quad (4.19)$$

onde  $\vec{L}$  é o operador momento angular orbital e  $\vec{s}$  o operador de spin, podemos constatar que os harmônicos esféricos espinoriais  $\mathcal{Y}_{jlm}(\hat{r}, \vec{\sigma})$

$$\mathcal{Y}_{jlm}(\hat{r}, \vec{\sigma}) = \sum_{m_l, m_s} \left\langle l, m_l; \frac{1}{2}, m_s | j, m \right\rangle Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \chi_{\frac{1}{2}m_s}(\sigma), \quad (4.20)$$

são autofunções simultâneas dos operadores  $\hat{P}_0$ ,  $\vec{L}^2$ ,  $\vec{s}^2$ ,  $\vec{J}^2$  e  $J_z$  [60] com autovalores  $(-1)^l$ ,  $l(l+1)\hbar^2$ ,  $3\hbar^2/4$ ,  $j(j+1)\hbar^2$ ,  $\hbar m$  respectivamente. Aqui  $Y_{lm_l}(\theta, \varphi)$  são os harmônicos esféricos com  $l = 0, 1, 2, \dots$  e  $m_l = -l, -l+1, \dots, +l$ . As matrizes  $\chi_{\frac{1}{2}m_s}$  são as funções de spin (autofunções simultâneas do operador  $\vec{s}^2$  e  $s_z$  com  $m_s = -s, -s+1, \dots, +s$ ), escritas explicitamente como

$$\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e  $\langle l, m_l; \frac{1}{2}, m_s | j, m \rangle$  são os coeficientes de Clebsch-Gordan [61]. A paridade dos harmônicos esféricos espinoriais vêm da parte relacionada aos harmônicos esféricos

$$\hat{P}_0\mathcal{Y}_{jlm}(\hat{r}, \vec{\sigma}) = (-1)^l \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{r}, \vec{\sigma}). \quad (4.21)$$

Escrevendo  $\psi$  como

$$\psi_{jm} = \begin{pmatrix} \varphi_{jlm} \\ \chi_{j\bar{l}m} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

e substituindo  $\alpha$  e  $\beta$  (4.5) em (4.18) encontramos

$$c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi = (E - mc^2 - \Sigma) \varphi, \quad (4.23)$$

$$c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\varphi = (E + mc^2 - \Delta) \chi,$$

onde

$$\Sigma = V_v + V_s \quad \text{e} \quad \Delta = V_v - V_s. \quad (4.24)$$

Percebe-se de (4.23) que  $\varphi$  e  $\chi$  têm paridade opostas e portanto

$$\hat{P}\psi_{jm} = e^{-i\phi} \begin{pmatrix} \hat{P}_0\varphi_{jlm} \\ -\hat{P}_0\chi_{j\tilde{l}m} \end{pmatrix} = \lambda\psi_{jm}, \quad \lambda = \pm 1 \quad (4.25)$$

e portanto o espinor  $\psi_{jm}$  é autofunção do operador paridade. Podemos supor que os componentes do espinor (4.22) são proporcionais aos harmônicos esféricos espinoriais, com o ansatz

$$\varphi_{jlm} = iG(r) \mathcal{Y}_{jlm}(\vec{n}), \quad (4.26)$$

$$\chi_{j\tilde{l}m} = -F(r) \mathcal{Y}_{j\tilde{l}m}(\vec{n}),$$

onde  $\hat{n}$  é um vetor unitário na direção de  $\vec{r}$ . O número quântico momento angular é diferente para os componentes superior e inferior do espinor pois o operador  $\vec{L}^2$  não comuta com a hamiltoniana (4.18) [43]. Uma vez que  $\hat{P}_0\mathcal{Y}_{j\tilde{l}m}(\hat{r}, \vec{\sigma}) = (-1)^{\tilde{l}}\mathcal{Y}_{j\tilde{l}m}(\hat{r}, \vec{\sigma})$  e que a paridade do componente inferior do espinor é contrária à paridade do componente superior do espinor  $\psi_{jlm}$  concluímos que  $\tilde{l} = l \pm 1$ . Levando em conta que  $\tilde{l}$  pode apenas ser igual a  $j \pm 1/2$  [61] obtemos

$$\tilde{l} = l + 1 = j + 1/2, \quad \text{para} \quad j = l + 1/2, \quad (4.27)$$

$$\tilde{l} = l - 1 = j - 1/2, \quad \text{para} \quad j = l - 1/2.$$

Dessa forma, para o componente superior de (4.23) com  $\varphi_{jlm}$  dado por (4.26), encontramos

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\varphi_{jlm} = \hbar\frac{dG}{dr}\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\mathcal{Y}_{jlm}(\hat{n}) + iG\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\mathcal{Y}_{jlm}(\hat{n}). \quad (4.28)$$

Usando o fato [60]

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{n}) = -\mathcal{Y}_{j\tilde{l}m}(\hat{n}), \quad (4.29)$$

e ainda a propriedade:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \quad (4.30)$$

obtemos

$$-\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{n}) = -\frac{i}{r} (2\hbar + \vec{L} \cdot \vec{\sigma}) \mathcal{Y}_{j\tilde{l}m}(\hat{n}). \quad (4.31)$$

O lado direito da equação acima pode ser avaliado lembrando que

$$\begin{aligned} \hbar \vec{L} \cdot \vec{\sigma} \mathcal{Y}_{j\tilde{l}m}(\hat{n}) &= 2\vec{L} \cdot \vec{s} \mathcal{Y}_{j\tilde{l}m}(\hat{n}) = \left[ \vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \left(\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\right)^2 \right] \mathcal{Y}_{j\tilde{l}m}(\hat{n}) \\ &= \left[ j(j+1) - \tilde{l}(\tilde{l}+1) - \frac{3}{4} \right] \hbar^2 \mathcal{Y}_{j\tilde{l}m}(\hat{n}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Definindo o número quântico  $\kappa = j(j+1) - \tilde{l}(\tilde{l}+1) + 1/4$ , ou seja

$$\kappa = \begin{cases} -(l+1), & j = l + 1/2, \\ l, & j = l - 1/2, \end{cases} \quad (4.33)$$

e substituindo-o em (4.32) e este último em (4.31) encontramos

$$-\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{n}) = -\frac{i}{r} (\kappa + 1) \hbar \mathcal{Y}_{j\tilde{l}m}(\hat{n}). \quad (4.34)$$

Inserindo a equação acima e (4.29) em (4.28) obtemos

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi_{jlm} = -\hbar \mathcal{Y}_{j\tilde{l}m} \left( \frac{d}{dr} + \frac{\kappa + 1}{r} \right) G. \quad (4.35)$$

Com o mesmo procedimento, encontramos também:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_{jlm} = -i\hbar \mathcal{Y}_{jlm} \left( \frac{d}{dr} - \frac{\kappa - 1}{r} \right) F. \quad (4.36)$$



Substituindo as duas últimas equações em (4.23) encontramos finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{dF_\kappa}{dr} - \frac{\kappa-1}{r}F_\kappa + \left(\frac{E-mc^2-\Sigma}{\hbar c}\right)G_\kappa &= 0, \\ \frac{dG_\kappa}{dr} + \frac{\kappa+1}{r}G_\kappa - \left(\frac{E-mc^2-\Delta}{\hbar c}\right)F_\kappa &= 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Fazendo  $G_\kappa = g_\kappa/r$  e  $F_\kappa = f_\kappa/r$  nas equações acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{df_{\bar{\kappa}}}{dr} - \frac{\kappa}{r}f_{\bar{\kappa}} + \left(\frac{E-mc^2-\Sigma}{\hbar c}\right)g_\kappa &= 0, \\ \frac{dg_\kappa}{dr} + \frac{\kappa}{r}g_\kappa - \left(\frac{E-mc^2-\Delta}{\hbar c}\right)f_{\bar{\kappa}} &= 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

e por fim, eliminando uma das funções em termos da outra não é difícil encontrar as equações de segunda ordem para  $g_\kappa$  e  $f_{\bar{\kappa}}$ :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} + \frac{\Delta'}{E+mc^2-\Delta(r)}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1+\kappa}{r}\right)\right]\frac{g_\kappa}{r} &= -\frac{[E+mc^2-\Delta(r)][E-mc^2-\Sigma(r)]}{(\hbar c)^2}\frac{g_\kappa}{r}, \\ \left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2} + \frac{\Sigma'}{E-mc^2-\Sigma(r)}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1-\kappa}{r}\right)\right]\frac{f_{\bar{\kappa}}}{r} &= -\frac{[E+mc^2-\Delta(r)][E-mc^2-\Sigma(r)]}{(\hbar c)^2}\frac{f_{\bar{\kappa}}}{r}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde  $\Delta' = d\Delta/dr$  e  $\Sigma' = d\Sigma/dr$ .

## 4.2 Simetria de spin

A hamiltoniana de Dirac com potenciais escalar e vetorial pode ainda ser escrita em termos da soma  $\Sigma$  e da subtração  $\Delta$  dos potenciais [62]

$$H_D = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2 + P_+\Sigma + P_-\Delta, \quad (4.40)$$

onde  $P_\pm = (\tilde{I} \pm \beta)/2$  é o operador projeção. Projetando o espinor  $\psi$  em seus componentes  $\psi_\pm = P_\pm\psi$  [29]

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

e aplicando-o na equação (4.40) obtemos

$$c\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\psi_- = (E - mc^2 - \Sigma)\psi_+, \quad (4.42)$$

$$c\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\psi_+ = (E + mc^2 - \Delta)\psi_-.$$

Para  $\Delta = 0$  ( $V_v = V_s$ ) desaparece o termo de spin-órbita, então a componente inferior se relaciona com a componente superior por

$$\psi_- = \frac{c\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{\varepsilon + 2mc^2}\psi_+, \quad (4.43)$$

com  $\varepsilon = E - mc^2$ , e a componente superior do espinor obedece à equação tipo Schrödinger

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2M} + \Sigma\right)\psi_+ = \varepsilon\psi_+, \quad (4.44)$$

onde  $Mc^2 = mc^2 + \varepsilon/2$ . A equação acima é invariante sob a transformação [29]

$$\psi'_+ = \psi_+ + \delta\psi_+ = \left(1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\varepsilon}\cdot\vec{S}\right)\psi_+ \quad (4.45)$$

onde  $\vec{S} = \hbar\vec{\sigma}/2$  e

$$\delta\psi_+ = \frac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\sigma}}{2i}\psi_+, \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Da equação (4.43) encontramos

$$\delta\psi_- = \frac{c\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{E + mc^2}\delta\psi_+ = \frac{c\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{E + mc^2}\frac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\sigma}}{2i}\psi_+ \quad (4.47)$$

e também

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\psi_- = \frac{c}{E + mc^2}\vec{p}^2\psi_+ = \frac{cp^2}{E + mc^2}\psi_+, \quad (4.48)$$

de tal forma que

$$\psi_+ = (E + mc^2)\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{cp^2}\psi_-. \quad (4.49)$$

Substituindo (4.49) em (4.47) finalmente encontramos

$$\delta\psi_- = \frac{1}{2i}\vec{\varepsilon}\cdot\left(\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p}\vec{\sigma}\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p}\right)\psi_-. \quad (4.50)$$

Definindo

$$\delta\psi = -\frac{i}{\hbar}\vec{\epsilon}\cdot\vec{\mathcal{S}}\psi, \quad (4.51)$$

os geradores dessa simetria são dados por [32]

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{S}P_+ + \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p}\vec{S}\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p}P_- = \begin{pmatrix} \vec{s} & 0 \\ 0 & \vec{s} \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

onde

$$\vec{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}, \quad \vec{s} = U_p\vec{s}U_p, \quad U_p = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p}. \quad (4.53)$$

Esses geradores obedecem uma álgebra  $\text{su}(2)$ , i.e.,  $[\vec{\mathcal{S}}_i, \vec{\mathcal{S}}_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\vec{\mathcal{S}}_k$  e são conhecidos como os geradores da *simetria de spin* [63]. De forma semelhante, podemos constatar que quando os potenciais são esfericamente simétricos, existe ainda uma outra simetria, também  $\text{su}(2)$ , mas desta vez relacionada com o momento angular orbital cujos geradores são  $\vec{\mathcal{L}} = \vec{L}P_+ + \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p}\vec{L}\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p}P_-$  de tal forma que temos  $\vec{\mathcal{L}}^2\psi = \hbar^2l(l+1)\psi$  [63], onde  $l$  é o momento angular orbital do componente superior. O operador Casimir  $\vec{\mathcal{L}}^2$  comuta com a hamiltoniana e portanto  $l$  é um bom número quântico, apesar de os componentes superior e inferior do espinor terem diferentes números quânticos momento angular orbital [43].

### 4.3 Simetria de pseudospin

Para  $\Sigma = 0$  ( $V_v = -V_s$ ), desaparece o termo de pseudospin-órbita e de (4.42) temos que o componente superior em termos do componente inferior é dado por

$$\psi_+ = \frac{c}{\varepsilon}\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\psi_-, \quad (4.54)$$

e portanto o componente inferior satisfaz uma equação tipo Schrödinger

$$\left( \frac{\vec{p}^2}{2M} + \frac{\varepsilon\Delta}{\varepsilon + 2mc^2} \right) \psi_- = \varepsilon\psi_-, \quad (4.55)$$

a equação acima é invariante sob a transformação [29]

$$\psi'_- = \psi_- + \delta\psi_- = \left( 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\epsilon}\cdot\vec{\mathcal{S}} \right) \psi_-, \quad (4.56)$$

com

$$\delta\psi_- = \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\sigma}}{2i} \psi_- . \quad (4.57)$$

Da equação (4.54) e (4.57) temos

$$\delta\psi_+ = \frac{c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{\varepsilon} \delta\psi_- = \frac{c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\sigma}}{\varepsilon 2i} \psi_- . \quad (4.58)$$

Novamente a equação (4.54) fornece

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} \psi_+ = \frac{c}{\varepsilon} p^2 \psi_- = \frac{cp^2}{\varepsilon} \psi_- , \quad (4.59)$$

ou ainda

$$\psi_- = \frac{\varepsilon \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{c p^2} \psi_+ , \quad (4.60)$$

substituindo a relação acima em (4.58) encontramos finalmente

$$\delta\psi_+ = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\sigma}}{p} \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{2i} \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \psi_+ . \quad (4.61)$$

Definindo

$$\delta\psi = -\frac{i}{\hbar} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{S}} \psi , \quad (4.62)$$

os geradores dessa simetria são expressados como

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{S}P_- + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \vec{S} \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} P_+ = \begin{pmatrix} \vec{s} & 0 \\ 0 & \vec{s} \end{pmatrix} . \quad (4.63)$$

Esses geradores satisfazem uma álgebra  $\mathfrak{su}(2)$ , i.e.,  $[\vec{\mathcal{S}}_i, \vec{\mathcal{S}}_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \vec{\mathcal{S}}_k$ , e são conhecidos como geradores da *simetria de pseudospin*. Como notado por Ginocchio [64] os geradores das simetrias de spin e pseudospin são relacionados pela transformação  $\vec{\mathcal{S}} = \gamma^5 \vec{S} \gamma^5$ . Novamente, para potenciais esfericamente simétricos, existe uma outra simetria, também  $\mathfrak{SU}(2)$ , cujos geradores são [63]  $\vec{\mathcal{L}} = \vec{L}P_- + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \frac{\vec{L}}{p^2} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} P_+ = \gamma^5 \vec{\mathcal{L}} \gamma^5$ , e dessa forma o operador Casimir  $\vec{\mathcal{L}}^2$  satisfaz  $\vec{\mathcal{L}}^2 \psi = \hbar^2 \tilde{l}(\tilde{l} + 1) \psi$ . Esse operador comuta com a hamiltoniana e portanto desta vez,  $\tilde{l}$  é um bom número quântico [43].

## 4.4 Equivalência de espectro entre férmions e bósons

Podemos reescrever a primeira equação de (4.39) da seguinte forma

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{V_v^2 - V_s^2 - 2(EV_v + mc^2V_s)}{(\hbar c)^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] g_\kappa = - \left[ \frac{\Delta' \left( \frac{d}{dr} + \frac{1+\kappa}{r} \right)}{E + mc^2 - \Delta(r)} \right] g_\kappa, \quad (4.64)$$

onde  $\hbar ck = \sqrt{E^2 - m^2c^4}$  e usamos o fato que  $\kappa(\kappa+1) = l(l+1)$  para qualquer valor<sup>1</sup> de  $\kappa$ . Para  $\Delta' = 0$ , ou seja,  $V_v = V_s + C_\Delta$  onde  $C_\Delta$  é uma constante<sup>2</sup>, a equação para o componente superior torna-se

$$\frac{d^2 g_l}{dr^2} + \left[ \frac{V_v^2 - V_s^2 - 2(EV_v + mc^2V_s)}{(\hbar c)^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] g_l = 0, \quad (4.65)$$

note que a equação acima é invariante para estados com  $j = l \pm 1/2$ , ou seja níveis com números quânticos  $(n, l, j = l - 1/2)$  e  $(n, l, j = l + 1/2)$  são degenerados. Seguindo o mesmo procedimento, podemos reescrever a equação para o componente inferior  $f_\kappa$  para encontrar

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{V_v^2 - V_s^2 - 2(EV_v + mc^2V_s)}{(\hbar c)^2} - \frac{\tilde{l}(\tilde{l}+1)}{r^2} + k^2 \right] f_{\tilde{\kappa}} = - \left[ \frac{\Sigma' \left( \frac{d}{dr} + \frac{1-\kappa}{r} \right)}{E - mc^2 - \Sigma(r)} \right] f_{\tilde{\kappa}}, \quad (4.66)$$

onde usamos o fato que  $\kappa(\kappa-1) = \tilde{l}(\tilde{l}+1)$  para qualquer valor<sup>3</sup> de  $\kappa$ . Para  $\Sigma' = 0$  ou seja,  $V_v = -V_s + C_\Sigma$ , onde  $C_\Sigma$  é uma constante<sup>4</sup>, encontramos

$$\frac{d^2 f_{\tilde{l}}}{dr^2} + \left[ \frac{V_v^2 - V_s^2 - 2(EV_v + mc^2V_s)}{(\hbar c)^2} - \frac{\tilde{l}(\tilde{l}+1)}{r^2} + k^2 \right] f_{\tilde{l}} = 0, \quad (4.67)$$

assim como no caso anterior, a equação acima é invariante para estados com  $j = l \pm 1/2$  o que significa dizer que níveis com números quânticos  $(n, l, j = l + 1/2)$  e  $(n', l + 2, j = l + 3/2)$  são degenerados (níveis de estados quânticos relativísticos são sempre nomeados de acordo com os números quânticos do componente superior do espinor). No núcleo  $n' = n - 1$  e foi a observação da quase degenerescência de tais níveis que levou ao conceito de pseudospin [63]. No núcleo o potencial  $\Sigma = V_v + V_s$  atua como um potencial ligante e quando

<sup>1</sup>Veja (4.33).

<sup>2</sup>Se os potenciais forem a zero no infinito essa constante será igual a zero.

<sup>3</sup>Veja (4.27) e (4.33).

<sup>4</sup>Se os potenciais forem a zero no infinito essa constante será igual a zero.

$\Sigma' = 0$  não há estados ligados, então na realidade a simetria de pseudospin deve ser ligeiramente quebrada, isto é, devemos ter  $\Sigma' \simeq 0$  em casos realísticos [25]. Portanto, é a ausência do termo spin-órbita<sup>5</sup> para um dos componentes do espinor de Dirac que explica a existência de dubletos de pseudospin quase degenerados em determinados núcleos, e a existência de dubletos de spin quase degenerados em mésons constituídos de um quark pesado e um quark leve [32]. Como vimos na seção anterior as condições  $\Delta' = 0$  e  $\Sigma' = 0$  estão relacionadas com as *simetria de spin* e *simetria de pseudospin*, respectivamente. As equações (4.65) e (4.67) têm a mesma forma que a equação de Klein-Gordon (3.3) e apesar do resultado ter sido obtido levando em conta apenas potenciais esfericamente simétricos, a equivalência é válida mesmo que não seja esse o caso, como mostram Castro e Alberto [43], os autores chamam a atenção para o fato que quando há simetria de spin ou de pseudospin, ora para o componente superior ora para o inferior, bósons de spin 0 e férmions de mesma massa  $m$  compartilham o mesmo espectro, desde que estejam sob a influência dos mesmos potenciais vetorial  $V_v$  e escalar  $V_s$  com  $|V_v| = |V_s|$ , ou até mesmo quando<sup>6</sup> tenham massas diferentes porém estejam sob a influência do mesmo potencial vetorial  $V_v$  e possuam mesma massa efetiva  $m^* = m + V_s/c^2$ .

## 4.5 Seção de choque diferencial

Para esta seção seguiremos o procedimento padrão descrito nas referências [49], [50], [65]. Escrevendo  $\psi$  na forma de um espinor de dois componentes como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \quad (4.68)$$

---

<sup>5</sup>Veja (4.39), (4.32), (4.31).

<sup>6</sup>A equação (4.65) também pode ser escrita como

$$\frac{d^2 g_l}{dr^2} + \left[ \frac{(E - V_v)^2 - (mc^2 + V_s)^2}{(\hbar c)^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] g_l = 0.$$

para obter a seção de choque é necessário apenas tratar do componente superior do espinor (veja, e.g. [49], [65]) assim

$$\psi_A^{m_s} \sim \chi_{\frac{1}{2}m_s} e^{ikz} + F_{m_s}(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad m_s = \pm \frac{1}{2} \quad (4.69)$$

$$F_{m_s}(\theta, \varphi) = \sum_{m'_s = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \chi_{\frac{1}{2}m'_s}(\sigma) M_{m'_s m_s}(\theta, \varphi).$$

Aqui, assumimos que o potencial é de curto alcance, indo a zero mais rápido do que  $r^{-1}$  em grandes distâncias, no final desta seção indicamos o procedimento para o caso do potencial coulombiano. Para determinar a seção de choque, expandimos  $\psi_A$  em termos dos harmônicos esféricos espinoriais  $\mathcal{Y}_{jlm}(\hat{r}, \vec{\sigma})$ , escrevemos

$$\psi_A = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=l-1/2}^{l+1/2} B_{lj}(k) \frac{g_{lj}(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{r}, \vec{\sigma}), \quad (4.70)$$

aqui  $g_{lj}(r)$  tem a seguinte forma assintótica

$$g_{lj}(r) \sim \sin \left[ kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{lj}(k) \right], \quad kr \rightarrow \infty, \quad j = l \pm \frac{1}{2}, \quad (4.71)$$

portanto, a forma assintótica de (4.70) é dada por

$$\psi_A \sim \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=l-1/2}^{l+1/2} B_{lj}(k) \frac{\sin \left[ kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{lj}(k) \right]}{r} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{r}, \vec{\sigma}). \quad (4.72)$$

A amplitude de espalhamento e a seção de choque podem ser obtidas igualando as formas assintóticas (4.69) e (4.72). Primeiro expressamos o termo de onda plana incidente em (4.69) em termos dos harmônicos esféricos espinoriais  $\mathcal{Y}_{jlm}(\hat{r}, \vec{\sigma})$ . Para isso, notamos que

$$\chi_{\frac{1}{2}m_s}(\sigma) e^{ikz} = \chi_{\frac{1}{2}m_s}(\sigma) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta). \quad (4.73)$$

Adotando a seguinte convenção

$$\langle j_1, j_1; j_2, j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 \rangle = 1, \quad (4.74)$$

temos que os coeficientes Clebsch-Gordan são reais e satisfazem às relações de ortogonalidade [66]

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | jm \rangle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (4.75)$$

e

$$\sum_{jm} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | jm \rangle \langle j_1, m'_1; j_2, m'_2 | jm \rangle = \delta_{jj'} \delta_{m_1 m'_1}, \quad (4.76)$$

com  $m = m_1 + m_2$ . Com a ajuda das relações acima podemos inverter (4.20) para obter

$$Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \chi_{\frac{1}{2}m_s}(\sigma) = \sum_{j=l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \left\langle l, m_l; \frac{1}{2}, m_s | j, m_l + m_s \right\rangle \mathcal{Y}_{jlm_l+m_s}(\hat{r}, \vec{\sigma}). \quad (4.77)$$

Usando a relação

$$P_l(\cos \theta) = \left( \frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} Y_{l0}(\theta, \varphi), \quad (4.78)$$

e também (4.77) em (4.73) obtemos

$$\chi_{\frac{1}{2}m_s}(\sigma) e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} [4\pi(2l+1)]^{1/2} i^l j_l(kr) \left\langle l, 0; \frac{1}{2}, m_s | j, m_s \right\rangle \mathcal{Y}_{jlm_s}(\hat{r}, \vec{\sigma}), \quad (4.79)$$

e quando  $kr \rightarrow \infty$

$$\chi_{\frac{1}{2}m_s}(\sigma) e^{ikz} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} [4\pi(2l+1)]^{1/2} i^l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{lj}\right) \quad (4.80)$$

$$\times \left\langle l, 0; \frac{1}{2}, m_s | j, m_s \right\rangle \mathcal{Y}_{jlm_s}(\hat{r}, \vec{\sigma}),$$

O coeficiente  $B_{lj}(k)$  em (4.70) é determinado igualando os termos contendo  $\exp(-ikr)$  em (4.70) e (4.80) encontrando

$$B_{lj}(k) = k^{-1} [4\pi(2l+1)]^{1/2} i^l e^{i\delta_{lj}} \left\langle l, 0; \frac{1}{2}, m_s | j, m_s \right\rangle.$$



O segundo termo do lado direito de (4.69) pode ser obtido subtraindo (4.80) de (4.72).

Chamando este termo de  $\psi_{sc}$  encontramos

$$\psi_{sc}(\vec{r}) \sim \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} [4\pi(2l+1)]^{1/2} (e^{2i\delta_{lj}} - 1) \left\langle l, 0; \frac{1}{2}, m_s | j, m_s \right\rangle \mathcal{Y}_{jlm_s}(\hat{r}, \vec{\sigma}) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (4.81)$$

Para encontrar  $M_{m'_s m_s}(\theta, \varphi)$  basta substituir os harmônicos esféricos espinoriais de (4.20)

e comparar com (4.69) encontrando assim

$$M_{m'_s m_s}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=l-1/2}^{l+1/2} [4\pi(2l+1)]^{1/2} (e^{2i\delta_{lj}} - 1) \times \left\langle l, 0; \frac{1}{2}, m_s | j, m_s \right\rangle \left\langle l, m_s - m'_s; \frac{1}{2}, m'_s | j, m_s \right\rangle Y_{l, m_s - m'_s}(\theta, \varphi). \quad (4.82)$$

Os coeficientes de Clebsch-Gordan são dados por

$$\begin{aligned} \left\langle l, m_s - m'_s; \frac{1}{2}, m'_s | j, m_s \right\rangle &= (-1)^{\Theta(\kappa)\Theta(m'_s)} \sqrt{\frac{j+\Theta(\kappa)-\text{sgn}(m'_s)\text{sgn}(\kappa)m_s}{2j+2\Theta(\kappa)}} \\ &= (-1)^{\Theta(\kappa)\Theta(m'_s)} \sqrt{\frac{l+1/2-\text{sgn}(m'_s)\text{sgn}(\kappa)m_s}{2l+1}}, \end{aligned} \quad (4.83)$$

onde  $\Theta(x)$  é a função de Heaviside e  $\text{sgn}(x)$  a função sinal. Da relação acima pode-se encontrar também

$$\begin{aligned} \left\langle l, 0; \frac{1}{2}, m_s | j, m_s \right\rangle &= (-1)^{\Theta(\kappa)\Theta(m_s)} \sqrt{\frac{j+\Theta(\kappa)-\text{sgn}(m_s)\text{sgn}(\kappa)m_s}{2j+2\Theta(\kappa)}} \\ &= (-1)^{\Theta(\kappa)\Theta(m_s)} \sqrt{\frac{l+1/2-\text{sgn}(m_s)\text{sgn}(\kappa)m_s}{2l+1}}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Multiplicando os fatores das duas últimas equações, encontramos

$$\begin{aligned} \left\langle l, 0; \frac{1}{2}, m_s | j, m_s \right\rangle \left\langle l, m_s - m'_s; \frac{1}{2}, m'_s | j, m_s \right\rangle &= (-1)^{\Theta(\kappa)[\Theta(m'_s)+\Theta(m_s)]} \\ &\times \frac{\sqrt{(l+1/2)^2 - [\text{sgn}(m_s)+\text{sgn}(m'_s)]\text{sgn}(\kappa)m_s(l+1/2) + \text{sgn}(m'_s)\text{sgn}(m_s)m_s^2}}{2l+1}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Com a ajuda das relações

$$Y_{l,m_s-m'_s}(\theta, \varphi) = (-1)^{m_s-m'_s} \left[ \frac{(2l+1)(l-m_s+m'_s)!}{4\pi(l+m_s-m'_s)!} \right]^{1/2} \times P_l^{m_s-m'_s}(\cos \theta) \exp[i(m_s-m'_s)\varphi], \quad m_s-m'_s \geq 0 \quad (4.86)$$

e

$$Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta, \varphi), \quad (4.87)$$

escrevemos

$$Y_{l,m_s-m'_s}(\theta, \varphi) = [-\text{sgn}(m_s)]^{\Theta(-m'_s m_s)} \left[ \frac{(2l+1)}{4\pi l(l+1)} \right]^{1/2} P_l^{(\Theta(-m'_s m_s))}(\cos \theta) e^{\text{sgn}(m_s) i \varphi \Theta(-m'_s m_s)}, \quad (4.88)$$

e ainda

$$\begin{aligned} & \langle l, 0; \frac{1}{2}, m_s | j, m_s \rangle \langle l, m_s - m'_s; \frac{1}{2}, m'_s | j, m_s \rangle Y_{l,m_s-m'_s}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{[\text{sgn}(m_s)^{\Theta(-m'_s m_s)}] \text{sgn}(\kappa) \kappa^{\Theta(m'_s m_s)} P_l^{(\Theta(-m'_s m_s))}(\cos \theta) e^{\text{sgn}(m_s) i \varphi \Theta(-m'_s m_s)}}{\sqrt{4\pi(2l+1)}}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Substituindo (4.89) em (4.82) encontramos finalmente

$$\begin{aligned} M_{m'_s m_s}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\kappa=-l-1}^l (e^{2i\delta_\kappa} - 1) \left[ \text{sgn}(m_s)^{\Theta(-m'_s m_s)} \right] \\ &\times \text{sgn}(\kappa) \kappa^{\Theta(m'_s m_s)} P_l^{(\Theta(-m'_s m_s))}(\cos \theta) e^{\text{sgn}(m_s) i \varphi \Theta(-m'_s m_s)} \end{aligned} \quad (4.90)$$

Para a situação em que o número quântico de spin inicial é igual ao final, ou seja  $m_s = m'_s$  encontramos a chamada *amplitude direta*  $M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = M_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \equiv A(k, \theta)$ , onde

$$\begin{aligned} A(k, \theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\kappa=-l-1}^l (e^{2i\delta_\kappa} - 1) |\kappa| P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(e^{2i\delta_{-l-1}} - 1) + (e^{2i\delta_l} - 1)l] P_l(\cos \theta), \end{aligned} \quad (4.91)$$

por outro lado, para o caso em que o número quântico de spin final é diferente do inicial, ou seja  $m_s \neq m'_s$ , as amplitudes advindas dessa situação são chamadas de amplitudes *spin-flip* e são dadas por  $M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = h(k, \theta) e^{-i\varphi}$  e  $M_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = -h(k, \theta) e^{i\varphi}$ . Definindo  $B(k, \theta) \equiv ih(k, \theta)$  e por estarem relacionadas, doravante chamaremos a amplitude  $B$  de amplitude

*spin-flip*, dada por

$$\begin{aligned}
 B(k, \theta) &= -\frac{1}{2k} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\kappa=-l-1}^l (e^{2i\delta_{\kappa}} - 1) \operatorname{sgn}(\kappa) P_l^{(1)}(\cos \theta) \\
 &= \frac{1}{2k} \sum_{l=1}^{\infty} (e^{2i\delta_{-l-1}} - e^{2i\delta_l}) P_l^{(1)}(\cos \theta).
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

Esses resultados podem ser condensados em uma forma matricial com

$$M_{m'_s m_s}(\theta, \varphi) = \left\langle \chi_{\frac{1}{2}m'_s} | M(\theta, \varphi) | \chi_{\frac{1}{2}m_s} \right\rangle, \tag{4.93}$$

onde

$$M(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} & M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \\ M_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} & M_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(k, \theta) & -iB(k, \theta) e^{-i\varphi} \\ iB(k, \theta) e^{i\varphi} & A(k, \theta) \end{pmatrix}. \tag{4.94}$$

Essa expressão pode ser simplificada se definimos o plano  $(x, z)$  como sendo o plano de espalhamento, com o eixo  $z$  sendo a direção do feixe incidente, dessa forma  $\varphi = 0$  e obtemos

$$M = A(k, \theta) I + B(k, \theta) \vec{\sigma} \cdot \hat{n}, \tag{4.95}$$

onde introduzimos o vetor unitário  $\hat{n}$  perpendicular ao plano de espalhamento definido pelos vetores incidente e espalhado  $\vec{k}_i$  e  $\vec{k}_f$  respectivamente, ou seja [49]

$$\hat{n} = \frac{\vec{k}_i \times \vec{k}_f}{|\vec{k}_i \times \vec{k}_f|}. \tag{4.96}$$

Por outro lado, quando o potencial vai a zero como  $r^{-1}$  para  $kr \rightarrow \infty$  temos o caso coulombiano e devemos ter o seguinte comportamento assintótico [65]

$$\psi_A \sim \chi_{\frac{1}{2}m_s} e^{ikz - i\nu \ln k(r-z)} + F_{m_s} \frac{e^{ikr - i\nu \ln 2kr}}{r}, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}, \tag{4.97}$$

com o comportamento assintótico da função  $g_{lj}$  dado por

$$g_{lj} \sim \sin \left( kr - \frac{l\pi}{2} + \nu \ln 2kr + \delta_{lj} \right), \tag{4.98}$$

quando considerado dessa forma e adotando o procedimento para encontrar a seção de choque diferencial descrito nesta seção encontra-se que a equação (4.82) permanece a mesma bem como todos os resultados obtidos posteriormente.

## 4.6 Amplitudes de espalhamento

Quando a orientação do spin não é medida no estado final, férmions não polarizados com momento  $\hbar k$  espalhados por um alvo de spin zero, apresentam uma seção de choque diferencial, correspondente a uma onda plana movendo-se ao longo de  $\theta = 0$  e uma onda esférica espalhada na direção  $\theta$ , expressada por [67]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A|^2 + |B|^2, \quad (4.99)$$

onde as amplitude direta  $A$  e *spin-flip*  $B$  encontradas na seção anterior, são expressadas em termos das séries de ondas parciais:

$$A = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(e^{2i\delta_{-l-1}} - 1) + l(e^{2i\delta_l} - 1)] P_l(\cos\theta), \quad (4.100)$$

$$B = \frac{1}{2k} \sum_{l=1}^{\infty} (e^{2i\delta_{-l-1}} - e^{2i\delta_l}) P_l^{(1)}(\cos\theta).$$

De acordo com Ginocchio [37], as amplitudes em termos das ondas parciais para o componente inferior do espinor envolvendo  $\tilde{l}$  podem ser relacionadas com aquelas envolvendo  $l$  por meio da transformação unitária

$$A = \tilde{A} \cos\theta - i\tilde{B} \sin\theta, \quad B = \tilde{B} \cos\theta - i\tilde{A} \sin\theta, \quad (4.101)$$

de tal forma que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\tilde{A}|^2 + |\tilde{B}|^2. \quad (4.102)$$

As fases  $\delta_{-l-1} = \delta_{-\tilde{l}}$  e  $\delta_l = \delta_{\tilde{l}+1}$  nas amplitudes representam a contribuição dos estados  $j = l + 1/2 = \tilde{l} - 1/2$  e  $j = l - 1/2 = \tilde{l} + 1/2$  para o espalhamento, respectivamente. Note que na ausência do acoplamento spin-órbita  $\delta_l = \delta_{-l-1}$  então  $B = 0$ . Também, na ausência do acoplamento pseudospin-órbita  $\delta_{-\tilde{l}} = \delta_{\tilde{l}+1}$  então  $\tilde{B} = 0$ . Nesses casos onde o

espalhamento é independente de spin temos que

$$A = \tilde{A} = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos\theta), \quad (4.103)$$

e assim as amplitudes reduzem-se para a forma usual de Schrödinger e Klein-Gordon.

## 4.7 Potenciais coulombianos vetorial e escalar esfericamente simétricos

As funções radiais dos componentes superior e inferior do espinor de Dirac,  $g_\kappa$  e  $f_{\tilde{\kappa}}$  respectivamente, para um férmion sob a influência de potenciais escalar e vetorial esfericamente simétricos e independentes do tempo,  $V_v$  and  $V_s$  respectivamente, são escritos como

$$\frac{dg_\kappa}{dr} = -\kappa \frac{g_\kappa}{r} + \frac{E+mc^2-\Delta}{\hbar c} f_{\tilde{\kappa}}, \quad (4.104)$$

$$\frac{df_{\tilde{\kappa}}}{dr} = -\tilde{\kappa} \frac{f_{\tilde{\kappa}}}{r} - \frac{E-mc^2-\Sigma}{\hbar c} g_\kappa,$$

onde  $\kappa = (-1)^{j+l+1/2} (j+1/2)$  e  $\tilde{\kappa} = -\kappa$ , com  $\Sigma = V_v + V_s$  e  $\Delta = V_v - V_s$ . Os números quânticos momento angular orbital e total podem ser obtidos de  $\kappa$  por  $l = |\kappa| + (\text{sgn } \kappa - 1)/2$  e  $j = |\kappa| - 1/2$ .

Para potenciais que se anulam no infinito,  $g_\kappa$  e  $f_{\tilde{\kappa}}$  comportam-se como  $e^{ikr}$  para grandes valores de  $r$ . Aqui  $\hbar ck = \sqrt{E^2 - m^2 c^4}$ , então estados de espalhamento demandam  $|E| > mc^2$ . As funções  $g_\kappa$  e  $f_{\tilde{\kappa}}$  no caso de partícula livre anulam-se na origem e têm formas assintóticas para  $kr \gg 1$  expressadas por

$$g_l \sim A_1 \sin(kr - l\pi/2), \quad f_{\tilde{l}} \sim \tilde{A}_1 \sin(kr - \tilde{l}\pi/2), \quad (4.105)$$

onde  $l$  é o momento angular do componente superior e  $\tilde{l} = l - \text{sgn } \kappa$ .

## 4.8 O deslocamento de fase coulombiano

Para potenciais coulombianos, temos  $V_v = -\hbar c \alpha_v / r$  e  $V_s = -\hbar c \alpha_s / r$  logo  $\Sigma = -\hbar c \alpha_\Sigma / r$  e  $\Delta = -\hbar c \alpha_\Delta / r$ , com  $\alpha_\Sigma = \alpha_v + \alpha_s$  e  $\alpha_\Delta = \alpha_v - \alpha_s$ . Os estados de espalhamento

para férmions sujeitos a um potencial vetorial puro podem ser encontrado na literatura (veja, por exemplo [60], [65], [68]). Nesta tese, adotamos o procedimento padrão com as modificações pertinentes para incluir o potencial escalar. Procuramos soluções na forma

$$g_{\kappa} = \sqrt{\varepsilon(E + mc^2)}(\phi_1 + \phi_2), \quad (4.106)$$

$$f_{\bar{\kappa}} = i\varepsilon\sqrt{\varepsilon(E - mc^2)}(\phi_1 - \phi_2),$$

com  $\varepsilon = \pm 1$  e  $\varepsilon E > mc^2$ . Tal como  $g_{\kappa}$  e  $f_{\bar{\kappa}}$ ,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são funções que anulam-se na origem, pelo menos no limite de partícula livre ( $\alpha_{\Sigma} = \alpha_{\Delta} = 0$ ). Definindo

$$\nu = \frac{\alpha_{\Sigma}(E+mc^2) + \alpha_{\Delta}(E-mc^2)}{2\hbar ck}, \quad (4.107)$$

$$\nu' = \frac{\alpha_{\Sigma}(E+mc^2) - \alpha_{\Delta}(E-mc^2)}{2\hbar ck},$$

e substituindo (4.106) em (4.104) encontramos

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\nu}{x}\right)\phi_1 + \left(-\frac{\kappa}{x} + \frac{i\nu'}{x}\right)\phi_2, \quad (4.108)$$

$$\frac{d\phi_2}{dx} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{i\nu}{x}\right)\phi_2 - \left(\frac{\kappa}{x} + \frac{i\nu'}{x}\right)\phi_1,$$

onde  $x = 2ikr$ , e nota-se que  $\phi_2 = \phi_1^*$ . Se  $\phi_2$  é eliminada do par de equações (4.108), obtemos

$$\frac{d^2\phi_1}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\phi_1}{dx} - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + i\nu\right)\frac{1}{x} + \frac{\gamma_{\kappa}^2}{x^2}\right]\phi_1 = 0, \quad (4.109)$$

com  $\gamma_{\kappa}^2 = \kappa^2 - \alpha_{\Sigma}\alpha_{\Delta}$ . Escrevendo  $\phi_1 = x^{-1/2}v$ , onde  $v$  deve se comportar próximo da origem como  $x^{\alpha}$  com  $\alpha > 1/2$ , podemos ver que  $v$  satisfaz a equação de Whittaker [53]

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\mu}{x} + \frac{1/4 - \gamma_{\kappa}^2}{x^2}\right)v = 0, \quad (4.110)$$

com  $\mu = -(1/2 + i\nu)$ . A solução geral de (4.110) pode ser escrita como uma combinação linear das soluções linearmente independentes

$$M_{\mu, \gamma_\kappa} = e^{-x/2} x^{1/2 + \gamma_\kappa} M(1/2 + \gamma_\kappa - \mu, 1 + 2\gamma_\kappa, x), \quad (4.111)$$

$$W_{\mu, \gamma_\kappa} = \frac{\Gamma(-2\gamma_\kappa)}{\Gamma(1/2 - \gamma_\kappa - \mu)} M_{\mu, \gamma_\kappa}(x) + \frac{\Gamma(+2\gamma_\kappa)}{\Gamma(1/2 + \gamma_\kappa - \mu)} M_{\mu, -\gamma_\kappa}(x),$$

onde  $M(a, b, x)$  é a função hipergeométrica confluyente regular na origem. Assim, a solução que anula-se na origem é escrita como

$$\phi_1 = N(\gamma_\kappa + i\nu) e^{-i(kr - \eta_\kappa)} (2kr)^{\gamma_\kappa} M(\gamma_\kappa + 1 + i\nu, 1 + 2\gamma_\kappa, 2ikr), \quad (4.112)$$

onde  $N \in \mathbb{R}$ , e  $\gamma_\kappa = \sqrt{\kappa^2 - \alpha_\Sigma \alpha_\Delta} \in \mathbb{R}$ . A fase  $\eta_\kappa$  pode ser determinada substituindo (4.112) em (4.108) com  $\phi_2 = \phi_1^*$ , resultando em

$$e^{2i\eta_\kappa} = \frac{-\kappa + i\nu'}{\gamma_\kappa + i\nu}. \quad (4.113)$$

Dessa forma, escrevemos

$$g_\kappa = 2\sqrt{\varepsilon(E + mc^2)} \operatorname{Re} \phi_1, \quad (4.114)$$

$$f_{\tilde{\kappa}} = -2\varepsilon\sqrt{\varepsilon(E - mc^2)} \operatorname{Im} \phi_1.$$

Usando a relação

$$(2ikr)^{i\nu} = e^{-(1+4\tilde{n})\pi\nu/2 + i\nu \ln 2kr}, \quad \tilde{n} \in \mathbb{Z}, \quad (4.115)$$

junto com as propriedades da função hipergeométrica confluyente e seu comportamento assintótico (3.8), escrevemos (veja [65], [68])

$$g_\kappa \sim A_1 \sin(kr + \nu \ln 2kr - l\pi/2 + \delta_\kappa), \quad (4.116)$$

$$f_{\tilde{\kappa}} \sim \tilde{A}_1 \sin\left(kr + \nu \ln 2kr - \tilde{l}\pi/2 + \delta_\kappa\right),$$

para  $kr \gg 1$ . Deve ser mencionado que os diversos ramos em (4.115) não ameaçam a unicidade das soluções porque os fatores reais  $e^{-(1+4\tilde{n})\pi\nu/2}$  podem ser absorvidos nas constantes de normalização  $A_1$  e  $\tilde{A}_1$ . Comparando (4.116) e (4.105), exceto por um termo

logarítmico característico de um potencial coulombiano, encontramos o deslocamento de fase

$$\delta_\kappa = \arg \Gamma(\gamma_\kappa - i\nu) + \eta_\kappa + \frac{\pi}{2}(l + 1 - \gamma_\kappa). \quad (4.117)$$

Note que o deslocamento de fase distingue o espalhamento de férmions e antiférmions devido à presença do potencial vetorial. É também instrutivo notar que o deslocamento de fase se reduz ao obtido na equação de Klein-Gordon para simetrias de spin e pseudospin exatas [44], e aquele obtido na equação de Schrödinger no extremo limite não relativístico.

## 4.9 Resultados exatos

Usando o deslocamento de fase (4.117) junto com (4.113), escrevemos

$$e^{2i\delta_\kappa} = (-1)^{\gamma_\kappa - l} \frac{\kappa - i\nu' \Gamma(\gamma_\kappa - i\nu)}{\gamma_\kappa + i\nu \Gamma(\gamma_\kappa + i\nu)}, \quad (4.118)$$

e encontramos tanto para simetrias de spin e pseudospin exatas bem como para uma aproximação no limite não relativístico extremo o seguinte

$$e^{2i\delta_{-l-1}} = e^{2i\delta_l} = \frac{\Gamma(l + 1 - i\nu)}{\Gamma(l + 1 + i\nu)}. \quad (4.119)$$

Podemos ver de (4.100) que a amplitude *spin-flip* se reduz para  $B = 0$  no caso de simetria de spin exata, e também para  $\tilde{B} = 0$  no caso de simetria de pseudospin exata. Por outro lado, as amplitudes diretas  $A$  e  $\tilde{A}$  reduzem-se para a forma familiar obtida tanto na equação de Klein-Gordon como nos casos não relativísticos extremos. Para  $\theta \neq 0$  (veja, e.g. [52])

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \frac{\Gamma(l + 1 - i\nu)}{\Gamma(l + 1 + i\nu)} P_l(\cos \theta) = \frac{i\nu}{\sin^2 \theta/2} e^{i\nu \ln \sin^2 \theta/2} \frac{\Gamma(1 - i\nu)}{\Gamma(1 + i\nu)}, \quad (4.120)$$

de tal forma que as expressões analíticas exatas são dadas por

$$A = \tilde{A} = A_{rh} = \nu \frac{\Gamma(1 - i\nu) \exp(i\nu \ln \sin^2 \theta/2)}{\Gamma(1 + i\nu) 2k \sin^2 \theta/2}, \quad \text{para } \theta \neq 0, \quad (4.121)$$



que resulta na bem conhecida fórmula de espalhamento de Rutherford:

$$\frac{d\sigma_{rh}}{d\Omega} = \frac{\nu^2}{4k^2 \sin^4 \theta/2}. \quad (4.122)$$

É importante enfatizar que (4.121) e (4.122) não implicam qualquer tipo de aproximação sob condições de simetrias de spin e pseudospin exatas.

## 4.10 Resultados aproximados

No limite não relativístico e próximo das condições que fornecem as simetrias de spin e pseudospin podemos aproximar  $\gamma_\kappa$  por  $|\kappa|$ . Neste caso, notando que [69]

$$(l+1) \frac{\Gamma(l+1-i\nu)}{\Gamma(l+2+i\nu)} - l \frac{\Gamma(l-i\nu)}{\Gamma(l+1+i\nu)} = -i\nu (2l+1) \frac{\Gamma(l-i\nu)}{\Gamma(l+2+i\nu)}, \quad (4.123)$$

$$\frac{\Gamma(l+1-i\nu)}{\Gamma(l+2+i\nu)} + \frac{\Gamma(l-i\nu)}{\Gamma(l+1+i\nu)} = (2l+1) \frac{\Gamma(l-i\nu)}{\Gamma(l+2+i\nu)},$$

as amplitudes (4.100) podem ser escritas como

$$A = A_{rh} - \frac{\nu(\nu-\nu')}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\Gamma(l-i\nu)}{\Gamma(l+2+i\nu)} P_l(\cos \theta), \quad (4.124)$$

$$B = \frac{i(\nu'-\nu)}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\Gamma(l-i\nu)}{\Gamma(l+2+i\nu)} P_l^{(1)}(\cos \theta).$$

A soma em (4.124) pode ser avaliada exatamente fazendo  $i\nu \rightarrow i\nu + 1$  em (4.120) e assim encontramos [69]

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\Gamma(l-i\nu)}{\Gamma(l+2+i\nu)} P_l(\cos \theta) = 2ki A_{rh} \frac{\sin^2 \theta/2}{\nu^2}, \quad (4.125)$$

usando a relação

$$P_l^{(1)}(\cos \theta) = \sin \theta \frac{dP_l(\cos \theta)}{d \cos \theta}, \quad (4.126)$$

juntamente com (4.125) encontramos

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\Gamma(l-i\nu)}{\Gamma(l+2+i\nu)} P_l^{(1)}(\cos \theta) = \frac{k}{\nu} A_{rh} \sin \theta. \quad (4.127)$$

Finalmente (4.124) torna-se

$$A = A_{rh} \left( 1 - \frac{\nu - \nu'}{\nu} \sin^2 \theta/2 \right), \quad (4.128)$$

$$B = A_{rh} \left( -\frac{i}{2} \frac{\nu - \nu'}{\nu} \sin \theta \right).$$

Usando o procedimento de Ginocchio [37] obtemos

$$\tilde{A} = A_{rh} \left( 1 - \frac{\nu + \nu'}{\nu} \sin^2 \theta/2 \right), \quad (4.129)$$

$$\tilde{B} = A_{rh} \left( \frac{i}{2} \frac{\nu + \nu'}{\nu} \sin \theta \right).$$

Este conjunto de amplitudes leva à seção de choque diferencial com mesma forma que a fórmula de Mott:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{rh}}{d\Omega} \left( 1 - \frac{\nu^2 - \nu'^2}{\nu^2} \sin^2 \theta/2 \right). \quad (4.130)$$

Para o acoplamento puramente vetorial, i.e.  $\alpha_s = 0$ , a fórmula acima se reduz para

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{rh}}{d\Omega} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta/2 \right), \quad (4.131)$$

e quando o acoplamento é puramente escalar, ou seja  $\alpha_v = 0$  a fórmula se reduz para

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{rh}}{d\Omega} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \sin^2 \theta/2 \right), \quad \gamma^2 = (1 - v^2/c^2)^{-1}, \quad (4.132)$$

e no limite não relativístico as duas últimas fórmulas diferem apenas por um sinal. Uma vez que  $(\nu^2 - \nu'^2)/\nu^2 \simeq 2(\nu \mp \nu')/\nu$  para  $\nu' \simeq \pm\nu$ , é óbvio que a amplitude *spin-flip* não contribui para a seção de choque diferencial em uma aproximação de primeira ordem. São úteis as seguintes relações:  $\nu^2 - \nu'^2 = \alpha_\Sigma \alpha_\Delta$ ,

$$\frac{\nu + \nu'}{\nu} = 2 \frac{\alpha_\Sigma (E + mc^2)}{\alpha_\Delta (E - mc^2)} \left[ 1 + \frac{\alpha_\Sigma (E + mc^2)}{\alpha_\Delta (E - mc^2)} \right]^{-1}, \quad (4.133)$$

$$\frac{\nu - \nu'}{\nu} = 2 \frac{\alpha_\Delta (E - mc^2)}{\alpha_\Sigma (E + mc^2)} \left[ 1 + \frac{\alpha_\Delta (E - mc^2)}{\alpha_\Sigma (E + mc^2)} \right]^{-1},$$

### 4.10.1 Simetria de spin quase exata

Quando  $\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma \simeq 0$  e é conveniente usar as amplitudes  $A$  e  $B$  porque  $(\nu - \nu')/\nu$  é proporcional à  $\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma$ . Portanto,

$$A = A_{rh} \left( 1 - 2 \frac{\alpha_\Delta}{\alpha_\Sigma} \frac{E - mc^2}{E + mc^2} \sin^2 \theta/2 \right), \quad (4.134)$$

$$B = A_{rh} \left( -i \frac{\alpha_\Delta}{\alpha_\Sigma} \frac{E - mc^2}{E + mc^2} \sin \theta \right),$$

com

$$A_{rh} = \frac{\alpha_\Sigma (E + mc^2) \Gamma(1 - i\nu_\Sigma)}{4\hbar ck^2 \sin^2 \theta/2 \Gamma(1 + i\nu_\Sigma)} e^{i \frac{\alpha_\Sigma (E + mc^2)}{\hbar ck} \ln \sin \theta/2}, \quad \nu_\Sigma = \alpha_\Sigma \frac{E + mc^2}{2\hbar ck} \quad (4.135)$$

e

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{rh}}{d\Omega} \left( 1 - 4 \frac{\alpha_\Delta}{\alpha_\Sigma} \frac{E - mc^2}{E + mc^2} \sin^2 \theta/2 \right), \quad (4.136)$$

com

$$\frac{d\sigma_{rh}}{d\Omega} = \frac{(\hbar c \alpha_\Sigma)^2}{16 (E - mc^2)^2 \sin^4 \theta/2}. \quad (4.137)$$

### 4.10.2 Simetria de pseudospin quase exata

Quando  $\alpha_\Sigma/\alpha_\Delta \simeq 0$  temos  $(\nu + \nu')/\nu$  proporcional à  $\alpha_\Sigma/\alpha_\Delta$ , então é conveniente usar as amplitudes  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ . Portanto,

$$\tilde{A} = A_{rh} \left( 1 - 2 \frac{\alpha_\Sigma}{\alpha_\Delta} \frac{E + mc^2}{E - mc^2} \sin^2 \theta/2 \right), \quad (4.138)$$

$$\tilde{B} = A_{rh} \left( i \frac{\alpha_\Sigma}{\alpha_\Delta} \frac{E + mc^2}{E - mc^2} \sin \theta \right),$$

com

$$A_{rh} = \frac{\alpha_\Delta (E - mc^2) \Gamma(1 - i\nu_\Delta)}{4\hbar ck^2 \sin^2 \theta/2 \Gamma(1 + i\nu_\Delta)} e^{i \frac{\alpha_\Delta (E - mc^2)}{\hbar ck} \ln \sin \theta/2}, \quad \nu_\Delta = \frac{\alpha_\Delta (E - mc^2)}{2\hbar ck} \quad (4.139)$$

e

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{rh}}{d\Omega} \left( 1 - 4 \frac{\alpha_\Sigma}{\alpha_\Delta} \frac{E + mc^2}{E - mc^2} \sin^2 \theta/2 \right), \quad (4.140)$$

com

$$\frac{d\sigma_{rh}}{d\Omega} = \frac{(\hbar c \alpha_\Delta)^2}{16 (E + mc^2)^2 \sin^4 \theta/2}. \quad (4.141)$$

### 4.10.3 Discussão sobre os resultados de simetrias quase exatas

Em relação às equações (4.134), (4.136) para a simetria de spin quase exata e (4.138), (4.140) para a simetria de pseudospin quase exata podemos dizer que são consistentes com o limite não relativístico com  $E \simeq \pm mc^2$  respectivamente, o termo seguinte ao termo líder nessas equações contribui para mudar a distribuição angular. Diferenças entre os acoplamentos vetorial e escalar aparecem mesmo nos termos de mais baixa ordem. Uma diferença notável entre a natureza dos acoplamentos escalar e vetorial e inclusive entre férmions e bósons aparece na ordem seguinte ao termo líder: Visto que  $(E + mc^2) / (E - mc^2)$  é sempre positivo para  $\varepsilon E > mc^2$  com  $\varepsilon = \pm 1$ , o acoplamento escalar puro sempre contribui para aumentar  $|A|$  e  $d\sigma/d\Omega$ , enquanto que o acoplamento vetorial puro sempre contribui para diminuir  $|A|$  e  $d\sigma/d\Omega$ , independentemente dos potenciais serem atrativos ou repulsivos como acontece no caso dos bósons. Quando há uma mistura de potenciais, então  $|A|$  e  $d\sigma/d\Omega$  aumentam (diminuem) se  $|\alpha_v| < |\alpha_s|$  ( $|\alpha_v| > |\alpha_s|$ ). Como vimos, quando há simetria de spin e pseudospin as amplitudes de espalhamento para bósons de spin 0 e férmions são iguais, porém a semelhança desaparece já no termo seguinte ao termo líder quando consideramos ligeira quebra das simetrias.

### 4.10.4 Limite não relativístico

No limite não relativístico  $\alpha_v \simeq \alpha_s \simeq 0$  e a fase  $\arg \Gamma(1 - i\nu)$  em (4.121) pode ser aproximada usando um par de propriedades da função gama [53]:  $\Gamma(1 + z) = z\Gamma(z)$  e  $1/\Gamma(z) \simeq ze^{\gamma_e z}$  para  $z \simeq 0$ , onde  $\gamma_e$  é a constante de Euler. Então, para  $\nu \simeq 0$  escrevemos  $\arg \Gamma(1 - i\nu) = +\gamma_e \nu$ . Com  $E \simeq +mc^2$ , encontramos

$$\begin{aligned}
 A &= A_{rh} \left( 1 + \frac{\alpha_s - \alpha_v}{\alpha_s + \alpha_v} \frac{|E - mc^2|}{mc^2} \sin^2 \theta/2 \right), \\
 B &= A_{rh} \left( \frac{i}{2} \frac{\alpha_s - \alpha_v}{\alpha_s + \alpha_v} \frac{|E - mc^2|}{mc^2} \sin \theta \right),
 \end{aligned}
 \tag{4.142}$$

e com  $E \simeq -mc^2$

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A_{rh} \left( 1 + \frac{\alpha_s + \alpha_v}{\alpha_s - \alpha_v} \frac{|E + mc^2|}{mc^2} \sin^2 \theta/2 \right), \\ \tilde{B} &= A_{rh} \left( -\frac{i}{2} \frac{\alpha_s + \alpha_v}{\alpha_s - \alpha_v} \frac{|E + mc^2|}{mc^2} \sin \theta \right).\end{aligned}\tag{4.143}$$

Então, com  $E \simeq \pm mc^2$  encontramos

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{d\sigma_{rh}}{d\Omega} \left( 1 + 2 \frac{\alpha_s \mp \alpha_v}{\alpha_s \pm \alpha_v} \frac{|E \mp mc^2|}{mc^2} \sin^2 \theta/2 \right) \\ &= \frac{d\sigma_{rh}}{d\Omega} \left( 1 + \frac{\alpha_s \mp \alpha_v}{\alpha_s \pm \alpha_v} \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta/2 \right),\end{aligned}\tag{4.144}$$

onde  $v$  é a velocidade da partícula e com

$$\begin{aligned}A_{rh} &= \frac{\hbar c (\alpha_s \pm \alpha_v)}{4|E \mp mc^2| \sin^2 \theta/2} e^{i\phi_{nr}}, \\ \phi_{nr} &= \sqrt{2} (\alpha_s \pm \alpha_v) \sqrt{\frac{mc^2}{|E \mp mc^2|}} (\ln \sin \theta/2 + \gamma_e), \\ \frac{d\sigma_{rh}}{d\Omega} &= \frac{(\hbar c)^2 (\alpha_s \pm \alpha_v)^2}{16|E \mp mc^2| \sin^4 \theta/2}.\end{aligned}\tag{4.145}$$

Não há distinção no sinal da seção de choque diferencial  $d\sigma_{rh}/d\Omega$  para acoplamento escalar ou vetorial puros, porém, como vimos, de (4.131) e (4.132) e agora de (4.144) a seção de choque diferencial para o acoplamento vetorial (escalar) puro, é dada respectivamente por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{rh}}{d\Omega} \left( 1 \mp \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta/2 \right),$$

e portanto a distinção entre os potenciais escalar e vetorial aparece na ordem seguinte ao termo líder. Desta forma, o acoplamento vetorial (escalar) puro sempre tende a diminuir (aumentar)  $|A|$  e  $d\sigma/d\Omega$ . Assim, no limite não relativístico, a seção de choque tende para a seção de choque de Rutherford para simetria de spin e pseudospin exata e tende para a seção de choque de Mott quando há ligeira quebra de simetrias.

Uma quantidade relacionada com o acoplamento spin(pseudospin)-órbita e conse-

quentemente fornecendo uma medida da quebra de simetria é dada pela razão das amplitudes *spin-flip* e direta  $|R_s|^2 = |B|^2 / |A|^2$  ( $|R_{ps}|^2 = |\tilde{B}|^2 / |\tilde{A}|^2$ ) [37] com

$$R_s = -i \sin \theta \left( \cos \theta + \frac{\nu + \nu'}{\nu - \nu'} \right)^{-1}, \quad R_{ps} = +i \sin \theta \left( \cos \theta + \frac{\nu - \nu'}{\nu + \nu'} \right)^{-1}. \quad (4.146)$$

Para  $\alpha_\Delta \simeq 0$  temos

$$R_s = \frac{B}{A} = -i \sin \theta \left[ \cos \theta + \frac{\alpha_\Sigma (E + mc^2)}{\alpha_\Delta (E - mc^2)} \right]^{-1}, \quad (4.147)$$

e para  $\alpha_\Sigma \simeq 0$  encontramos

$$R_{ps} = i \sin \theta \left[ \cos \theta + \frac{\alpha_\Delta (E - mc^2)}{\alpha_\Sigma (E + mc^2)} \right]^{-1}. \quad (4.148)$$

## 4.11 Estados ligados

O problema de estados ligados para uma mistura de potenciais escalar e vetorial já foi abordado na literatura [42], [60]. Vamos mostrar os resultados conhecidos por motivo de comparação com os resultados obtidos na equação de KG. Novamente, com o mesmo procedimento padrão podemos obter os estados ligados analisando os polos da amplitude de espalhamento. Agora, como faremos  $k \rightarrow i|k|$  não é mais verdade que  $\phi_1^* = \phi_2$  e sim que  $\phi_1^* = \phi_1$  e  $\phi_2 = \phi_2^*$ , fazendo  $k = i\lambda = i\sqrt{m^2c^4 - E^2}/\hbar c$ ,  $\tilde{N} = Ai^{-\gamma_\kappa} e^{i\eta_\kappa}$  com  $A$  real e ainda  $i\nu \rightarrow \eta_1$  e  $i\nu' \rightarrow \eta_2$  e  $\rho = 2\lambda r$ , temos

$$\eta_1 = \frac{\alpha_\Sigma(E+mc^2) + \alpha_\Delta(E-mc^2)}{2\hbar c\lambda}, \quad (4.149)$$

$$\eta_2 = \frac{\alpha_\Sigma(E+mc^2) - \alpha_\Delta(E-mc^2)}{2\hbar c\lambda},$$

e de (4.112) encontramos

$$\phi_1(r) = -A\rho^{\gamma_\kappa} (\kappa - \eta_2) e^{-\rho/2} M(\gamma_\kappa - \eta_1, 1 + 2\gamma_\kappa; \rho) \quad (4.150)$$

$$\phi_2(r) = A\rho^{\gamma_\kappa} (\gamma_\kappa - \eta_1) e^{-\rho/2} M(1 + \gamma_\kappa - \eta_1, 1 + 2\gamma_\kappa; \rho).$$

A partir do deslocamento de fase (4.117) encontramos

$$e^{2i\delta_\kappa} = (\kappa - \eta_2) \frac{\Gamma(\gamma_\kappa - \eta_1)}{\Gamma(1 + \gamma_\kappa + \eta_1)} e^{i\pi(l+1-\gamma_\kappa)}, \quad (4.151)$$

com  $\kappa - \eta_2 \neq 0$ , percebe-se que os polos ocorrem para

$$\gamma_\kappa - \eta_1 = -n_r, \quad (4.152)$$

onde  $n_r = 0, 1, 2, \dots$ . Partindo da equação acima e definindo  $\xi = \gamma_\kappa + n_r$  é fácil encontrar [42]

$$E_{n_r, \kappa}^\pm = mc^2 \frac{\alpha_\Delta^2 - \alpha_\Sigma^2 \pm 4\xi \sqrt{\xi^2 + \alpha_\Sigma \alpha_\Delta}}{(\alpha_\Sigma + \alpha_\Delta)^2 + 4\xi^2}, \quad (4.153)$$

ou mais explicitamente

$$E_{n_r, \kappa}^\pm = mc^2 \frac{-\frac{\alpha_v \alpha_s}{\xi^2} \pm \left[ 1 + \frac{\alpha_v^2 - \alpha_s^2}{\xi^2} \right]^{1/2}}{1 + \left( \frac{\alpha_v}{\xi} \right)^2}, \quad (4.154)$$

veja que a equação acima tem a mesma forma de (3.21), mesmo para  $\alpha_v \neq \alpha_s$ , a diferença principal residindo entre  $\xi$  e (3.23). As funções radiais tornam-se [42]

$$g_\kappa = -A\sqrt{mc^2 + E}\rho^{\gamma_\kappa} e^{-\rho/2} \left[ (\kappa - \eta_2) L_{n_r}^{(2\gamma_\kappa)}(\rho) + n_r L_{n_r-1}^{(2\gamma_\kappa)}(\rho) \right] \quad (4.155)$$

$$f_{\tilde{\kappa}} = A\sqrt{mc^2 - E}\rho^{\gamma_\kappa} e^{-\rho/2} \left[ (\kappa - \eta_2) L_{n_r}^{(2\gamma_\kappa)}(\rho) - n_r L_{n_r-1}^{(2\gamma_\kappa)}(\rho) \right],$$

onde  $L_{n_r}^{(2\gamma_\kappa)}(\rho) = M(-n_r, 1 + 2\gamma_\kappa; \rho)$  são os polinômios de Laguerre generalizados. Um estudo detalhado das soluções acima pode ser encontrado na Ref. [42].

# Capítulo 5

## Conclusões

A análise de ondas parciais para o espalhamento elástico de bósons de spin 0 e de férmions de spin 1/2 por um potencial coulombiano com uma mistura geral de acoplamentos escalar e vetorial foi feita em detalhes. A série de ondas parciais se reduz à fórmula de Rutherford não só no limite não relativístico da teoria mas também quando os potenciais escalar e vetorial têm a mesma magnitude, seja para férmions ou para bósons. Calculamos a amplitude de espalhamento para acoplamentos vetorial e escalar pequenos, bem como para desvios da fórmula exata para acoplamentos vetorial e escalar com mesma magnitude em uma forma perturbativa. Tanto para o caso de férmions quanto de bósons, os polos complexos da amplitude de espalhamento parcial fornecem as soluções exatas para estados ligados. As energias de tais estados ligados são soluções de uma equação algébrica de segundo grau, e as correspondentes autofunções são expressas em termos dos polinômios de Laguerre generalizados. Para a equação de KG apresentamos um estudo detalhado de alguns casos particulares interessantes de estados estacionários com atenção especial às diferenças entre os acoplamentos vetorial e escalar. A análise das energias para  $g_v \simeq -g_s$  e  $g_v \simeq +g_s$  mostrou que a degenerescência acidental vista nos casos  $g_v = -g_s$  e  $g_v = +g_s$  é quebrada perturbativamente e que esta quebra é relacionada com a não conservação do vetor de Runge-Lenz. Mostramos que as soluções obtidas para os estados ligados de férmions apresentam a mesma forma da obtida na equação de KG. A presença de um potencial escalar atrativo em adição a um potencial vetorial nos habilita abordar também a espectroscopia de átomos mesônicos com um número atômico  $Z$  muito grande, e este fato nos dá esperança de abordar a espectroscopia de átomos mesônicos com potenciais mais realísticos com os acoplamentos escalar e vetorial.



A análise de onda parcial para o espalhamento elástico de férmions por um potencial coulombiano com uma mistura geral de acoplamentos escalar e vetorial fornece também uma forma fechada, a fórmula de Rutherford, para a amplitude de onda parcial sob condições de simetria de spin e de pseudospin, levando à seção de choque diferencial de Rutherford. Por meio do estudo de uma ligeira quebra de simetria, tanto para spin como para pseudospin, obtemos também fórmulas fechadas para as amplitude de espalhamento levando à seção de choque diferencial de mesma forma que a seção de choque diferencial de Mott, e exatamente para esta quando  $\alpha_s = 0$  ou  $\alpha_v = 0$ . Neste último caso a diferença entre os potenciais escalar e vetorial tornam-se evidentes, e de modo geral o acoplamento escalar sempre contribui para aumentar a seção de choque diferencial e o acoplamento vetorial o contrário. Mostramos também que no limite não relativístico essas formas são reduzidas para essas duas seções de choque supracitadas. Diferenças marcantes aparecem entre os acoplamentos escalar e vetorial e também entre férmions e bósons nas aproximações em torno das condições que geram as simetrias de spin e pseudospin. Para bósons, o aumento ou a diminuição do módulo da amplitude de espalhamento, numa aproximação de primeira ordem, para um acoplamento vetorial puro ou escalar puro depende desses potenciais serem atrativos ou repulsivos. Já no caso de férmions, o acoplamento vetorial (escalar) puro sempre contribui para diminuir (aumentar) o módulo da amplitude de espalhamento e da seção de choque independente dos potenciais serem atrativos ou repulsivos. O potencial coulombiano é o único potencial que fornece solução exata para a amplitude de espalhamento e também é um dos poucos potenciais que fornece soluções analíticas para estados ligados. A adição de um acoplamento escalar possibilita encontrar uma forma fechada para o caso relativístico tanto para férmions quanto para bósons, sob determinadas condições e sendo assim o potencial coulombiano constitui um excelente laboratório para o estudo de soluções analíticas seja para estados de espalhamento ou para estados ligados. Além disso pela facilidade dos cálculos é uma boa introdução para o estudo das simetrias de spin e pseudospin.

# Referências Bibliográficas

- [1] YUKAWA, H. On the interaction of elementary particles I. **Proceedings of Physics-Mathematics Society of Japan**, v. 17, p. 48-57, 1935.
- [2] GORDON, W. Die energieniveaus des wasserstoffatoms nach der diracschen quantentheorie des elektrons. **Zeitschrift für Physik**, v. 48, p.11-14, n. 1, 1928.
- [3] MOTT, N. F. The solution of wave equation for the scattering of particles by a coulombian centre of force. **Proceedings of the Royal Society of London A**, v. 118, p. 542-549, 1928.
- [4] MOTT, N. F. The scattering of fast electrons by atomic nuclei. **Proceedings of the Royal Society of London A**, v. 124, p. 425-440, 1929.
- [5] KANG, I. J.; BROWN, L. M. Higher born approximations for the Coulomb scattering of a spinless particle. **Physical Review**, v. 128, n. 6, p. 2828-2832, 1962.
- [6] HETHERINGTON, J. H. Partial wave analysis of the scattering of charged spinless particles **Journal of Mathematical Physics**, v.4, n. 3, p. 357-358, 1963.
- [7] RAWITSCHER, G. H. Non-Relativistic limit of coulomb scattering. **Physics Letters**, v. 9, p. 337-339, n. 4, 1964.
- [8] EISENSTEIN, R. A.; TABAKIN, F. Pipit: A momentum space optical potential code for pions. **Computer Physics Communications**, v. 12, p. 237-257, 1976.
- [9] COOPER, M. D.; JOHNSON, M. B. Integrated pion-nucleus cross section. **Nuclear Physics A**, v. 260, p. 352-368, 1976.
- [10] COOPER, M. D.; JOHNSON, M. B.; WEST, G. B. Coulomb-nuclear interference with pions. **Nuclear Physics A**, v. 292, p. 350-374, 1977.

- [11] JÄCKLE, R., PILKUHN, H.; SCHLAILE, H. G. Amplitude analysis of elastic pion-nucleus scattering. **Physics Letters B**, v. 76, p. 177-181, 1978.
- [12] EISENSTEIN, R. A.; MILLER, G. A. Pirk: A computer program to calculate the elastic scattering of pions from nuclei. **Computer Physics Communications**, v. 8, p. 130-140, 1974.
- [13] COOPER, M. D.; JEPPESEN, R. H.; JOHNSON, M. B. Coulomb effects in the Klein-Gordon equation for pions. **Physical Review C**, v. 20, n. 2, p. 696-704, 1979.
- [14] HILL, R. D., HETHERINGTON, J. H.; RAVENHALL, D. G. K-meson scattering in nuclear emulsion. **Physical Review**, v. 122, n.1, p. 267-272, 1961.
- [15] JANSEN, G.; PUSCH, M.; SOFF, G. Continuum solutions of the Klein-Gordon equation. **Zeitschrift für Physik D**, v.8, p. 315-327, 1988.
- [16] FLEISCHER, W.; SOFF, G. Bound state solution of the Klein-Gordon equation for strong potentials. **Zeitschrift für Naturforschung A**, v.39, p. 703-719, 1984.
- [17] GREINER, W.; MÜLLER, B.; RAFELSKI, J. **Quantum electrodynamics of strong fields**. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1985.
- [18] CHEN, C. Y. et al. Bound states of the Klein-Gordon equation with n-dimensional scalar and vector hydrogen atom-type potentials. **Acta Physica Sinica**, v. 52, p. 1579-1584, 2003.
- [19] MA, Z. Q. et al. **International Journal of Modern Physics E**, v. 13, n. 3, p. 597-610, 2004.
- [20] CHEN, C. Y.; SUN, D. S.; LU, F. L. Scattering states of the Klein-Gordon equation with Coulomb-like scalar plus vector potentials in arbitrary dimension. **Physics Letters A**, v. 330, p. 424-428, 2004.
- [21] SMITH, G. B.; TASSIE, L. J. Excited states of mesons and the Quark-Antiquark interaction. **Annals of Physics**, v. 65, p. 352-360, 1971.
- [22] SOFF, G. et al. Solution of the Dirac equation for scalar potentials and its implications in atomic physics. **Zeitschrift für Naturforschung A**, v. 28, p. 1389-1396, 1973.

- [23] ARIMA, A.; HARVEY, M.; SHIMIZU, K. Pseudo LS coupling and pseudo su3 coupling schemes. **Physics Letters B**, v. 30, n. 8, p. 517-522, 1969.
- [24] HECHT, K. T.; ADLER, A. Generalized seniority for favored  $J \neq 0$  pairs in mixed configurations. **Nuclear Physics A**, v. 137, p. 129-143, 1969.
- [25] GINOCCHIO, J. N. Pseudospin as a relativistic symmetry. **Physical Review Letters**, v. 78, n.3, p. 436-439, 1997.
- [26] BOHR, A.; HAMAMOTO, I.; MOTTELSON, B. R. Pseudospin in Rotating Nuclear Potentials. **Physica Scripta**, v. 26, p. 267-272, 1982.
- [27] DUDEK, J. et al. Abundance and systematics of nuclear superdeformed states; relation to the pseudospin and pseudo-su(3) symmetries. **Physical Review Letters**, v.59, n. 13, p. 1405-1408, 1987.
- [28] NAZAREWICZ, W. et al. Natural-Parity states in superdeformed bands and pseudo su(3) symmetry at extreme conditions. **Physical Review Letters**, v.64, n. 14, p. 1654-1657, 1990.
- [29] BELL, J. S.; RUEGG, H. Dirac equations with an exact higher symmetry. **Nuclear Physics B**, v.98, p. 151-153, 1975.
- [30] HAMA, S. et al. Global Dirac optical potentials for elastic proton scattering from heavy nuclei. **Physical Review C**, v.41, n. 6, p. 2737-2755, 1990.
- [31] GINOCCHIO, J. N. Relativistic symmetries in nuclei and hadrons. **Physics Reports**, v. 414, p. 165-261, 2005.
- [32] PAGE, P. R.; GOLDMAN, T.; GINOCCHIO, J. N. Relativistic symmetry suppresses quark spin-orbit splitting. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 2, p. 204-207, 2001.
- [33] ZHOU, S. G.; MENG, J.; RING, P. Spin symmetry in the antinucleon spectrum. **Physical Review Letters**, v.91, p. 262501-1/262501-4, 2003.
- [34] LISBOA, R. et al. Spin and pseudospin symmetries in the antinucleon spectrum of nuclei. **Physical Review C**, v. 81, p. 064324-1/064324-8, 2010.

- [35] BOWLIN, J. B.; GOLDHABER, A. S. ; WILKIN, C. Sudden death of a symmetry. **Zeitschrift für Physik A**, v.331, p. 83-87, 1988.
- [36] LEEB, H.; SOFIANOS, S. A. Relevance of pseudospin symmetry in proton-nucleus scattering. **Physical Review C**, v. 69, p. 054608-1/054608-8, 2004.
- [37] GINOCCHIO, J. N. Resurrection of a symmetry in nucleon-nucleus scattering. **Physical Review Letters**, v. 82, p. 4599-4602, 1999.
- [38] LEEB, H.; WILMSEN, S. Violation of pseudospin symmetry in nucleon-nucleus scattering: Exact relations. **Physical Review C**, v.62, p. 024602-1/024602-4, 2000.
- [39] GUO, J. Y.; WANG, R. D.; FANG, X. Z. Pseudospin symmetry in the resonant states of nuclei. **Physical Review C**, v. 72, p. 054319-1/054319-8, 2005.
- [40] LU, B. N.; ZHAO, E. G.; ZHOU, S. G. Pseudospin symmetry in single particle resonant states. **Physical Review Letters**, v. 109, p. 072501-1/072501-5, 2012.
- [41] LU, B. N.; ZHAO, E. G. ; ZHOU, S. G. Pseudospin symmetry in single-particle resonances in spherical square wells. **Physical Review C**, v.88, p. 024323-1/024323-11, 2013.
- [42] CASTRO, A. S. de; ALBERTO, P. Spin and pseudospin symmetries in the Dirac equation with central Coulomb potentials. **Physical Review A**, v. 86, p. 032122-1/032122-7, 2012.
- [43] ALBERTO, P.; CASTRO, A. S. de; MALHEIRO, M. Spin and pseudospin symmetries and the equivalent spectra of relativistic spin-1/2 and spin-0 particles. **Physical Review C**, v. 75, p. 047303-1/047303-4, 2007.
- [44] GARCIA, M. G.; CASTRO, A. S. de. Relativistic Coulomb scattering of spinless bosons. **Physical Review C**, v. 91, p. 034903-1/034903-6, 2015.
- [45] JOACHAIN, C. J. **Quantum collision theory**. Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975.
- [46] MERZBACHER, E. **Quantum mechanics**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1970.

- [47] TANNOUJJI, C. C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum mechanics**. Nova Iorque: Wiley, 1992.
- [48] BAYM, G. **Lectures on quantum mechanics**. Nova Iorque: Westview, 1969.
- [49] BURKE, P. G.; JOACHAIN, C. J. **Physics of atoms and molecules, theory of electron-atom collisions, part I-Potential scattering**. Nova Iorque: Springer, 1995.
- [50] BURKE, P. G. **R-Matrix theory of atomic collisions**. Nova Iorque: Springer, 2011.
- [51] OLVER, F. W. J; LOZIER, D.W. **NIST Handbook of mathematical functions**. Nova Iorque: Cambridge, 2010.
- [52] LIN, Q. G. On the partial wave amplitude of Coulomb scattering in three dimensions. **American Journal of Physics**, v. 68, n.11, p. 1056-1057, 2000.
- [53] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions**. Nova Iorque: Dover Publications, 1972.
- [54] PAULI, W. Uber das wasserstoffspektrum vom standpunkt der neuen quantenmechanik. **Zeitschrift für Physik**, v. 36, p. 336-363, 1926.
- [55] HEINTZ, W. H. Runge–Lenz vector for nonrelativistic Kepler motion modified by an inverse cube force. **American Journal of Physics**, v. 44, p. 687-694, 1976.
- [56] YOSHIDA, T. Considerations on the precessing orbit via a rotating Laplace–Runge–Lenz vector. **American Journal of Physics**, v. 55, n. 12, p. 1133-1136, 1987.
- [57] YOSHIDA, T. Applications of the rotating Laplace-Runge-Lenz vector to quantum eigenvalue problems. **Nuovo Cimento B**, v.103, n. 2, p.127-148, 1989.
- [58] AGUIAR, C. E.; BARROSO, M. F. The Runge–Lenz vector and perturbed Rutherford scattering. **American Journal of Physics**, v. 64, n. 8, p. 1042-1048, 1996.
- [59] DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. **Proceedings of the Royal Society of London A**, v.117, p. 610-624, 1928.
- [60] GREINER, W. **Relativistic quantum mechanics**. Nova Iorque: Springer, 2000.

- [61] SAVUSHKIN, L. N.; TOKI, H. **The atomic nucleus as a relativistic system.** Nova Iorque: Springer, 2004.
- [62] ALBERTO, P.; CASTRO, A. S. de; MALHEIRO, M. Spin and pseudospin symmetries of the Dirac equation with confining central potentials. **Physical Review C**, v. 87, p. 031301-1/031301-5, 2013.
- [63] ALBERTO, P. et al. Relativistic pseudospin and spin symmetries in physical systems – recent results. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 490, p. 012069-1/012069-4, 2014.
- [64] GINOCCHIO, J. N.  $U(3)$  and pseudo- $u(3)$  symmetry of the relativistic harmonic oscillator. **Physical Review Letters**, v. 95, p. 252501-1/252501-3, 2005.
- [65] AKHIESER, A. I.; BERESTETSKII, V. B. **Quantum electrodynamics.** Nova Iorque: Interscience Publishers, 1965.
- [66] CONDON, E. U.; SHORLEY, G.H. **The theory of atomic spectra.** Cambridge: University Press, 1935.
- [67] FESHBACH, H. **Theoretical nuclear physics - Nuclear reactions.** Nova Iorque: Wiley, 1992.
- [68] ROSE, M. E. **Relativistic electron theory.** Nova Iorque: Wiley, 1961.
- [69] JOHNSON, W. R. **Approximate coulomb scattering amplitudes.** Disponível em ([www3.nd.edu/johnson/](http://www3.nd.edu/johnson/)). Acesso em 19/06/2015.