



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**

FACULDADE DE CIÊNCIAS E LETRAS CÂMPUS DE ARARAQUARA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

Aplicação da Teoria das Filas no caixa rápido de um
supermercado – estudo de caso microeconômico

Monografia apresentada
ao Departamento de
Economia da Faculdade
de Ciências e Letras –
UNESP/Araraquara como
parte dos requisitos para
obtenção do título de
Bacharel em Ciências
Econômicas.

Nome: Lucas Momesso Cervatti

Orientadora: Profa.Dra. Érika Capelato

Araraquara – 2015

Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares pelo apoio ao longo do curso.

A professora e orientadora Erika Capelato pelo apoio, suporte e encorajamento contínuos na pesquisa.

Ao Cláudio, gerente do supermercado Oba Hortifruti, que permitiu a realização da coleta de dados no estabelecimento.

A colaboradora Leticia Monteiro pela ajuda na coleta de dados no supermercado.

Resumo

A Pesquisa Operacional (PO) oferece ferramentas, usando modelos matemáticos, que descrevem situações do mundo real das empresas e do governo. Estes modelos permitem otimizar lucros ou minimizar custos através da Programação Linear (PL), considerada a maior descoberta da matemática aplicada do século XX. Sua aplicabilidade é imensa e a programação computacional é simples. Por exemplo, o uso de software como o Excel, garante encontrar a solução para problemas que podem envolver um número grande de variáveis e assim auxiliar os agentes na tomada de decisão. Vários Prêmios Nobel em Economia tiveram a PL envolvido em seu conteúdo, por exemplo, os prêmios dados a Leonid Kantorovich, Leonid Hurwicz, Tjalling Koopmans, Kenneth J. Arrow e Robert Dorfman, Paul Samuelson e Robert Solow. A Teoria das Filas, utilizada neste trabalho, é uma ferramenta da PO que envolve distribuição de probabilidades e permite investigar a chegada e atendimento de clientes, a partir de certos números de canais disponíveis. O caso em análise é uma fila do caixa rápido do supermercado Oba Hortifruti, localizado na cidade de Indaiatuba – São Paulo. A fila possui característica M/M/1, no qual o primeiro M denota que a chegada de clientes à fila segue uma distribuição de Poisson, o segundo M denota que o tempo de atendimento dos clientes segue a distribuição Exponencial e o “1” significa que há apenas um canal de atendimento. A aplicação desta ferramenta sugere uma otimização do serviço para que o mesmo se torne estável (objetivo qualitativo), gerando assim uma maior satisfação do cliente com o atendimento, podendo elevar a margem de lucro do estabelecimento em estudo (objetivo quantitativo).

Palavras Chaves: Pesquisa Operacional; Teoria das filas; modelo M/M/1.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	6
1. PESQUISA OPERACIONAL.....	9
1.1 Aplicações da Pesquisa Operacional	12
2. TEORIA DAS FILAS	13
2.1 Distribuição de probabilidade Exponencial e Poisson.....	15
2.1.1 <i>Distribuição de Poisson</i>	15
2.1.2 <i>Distribuição Exponencial</i>	18
2.2 Trabalhos que apresentam aplicações da Teoria das Filas	20
2.3 Conceitos básicos de filas	22
2.4 Chegada e atendimento	23
2.5 Parâmetros para sistema de um canal e uma fila com população infinita	28
3. ESTUDO DE CASO: SUPERMERCADO.....	30
3.1 Descrição do sistema estudado.....	30
3.2 Coleta de dados.....	31
3.3 Aplicação da Teoria das Filas.....	40
4. CONCLUSÃO	44
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	47

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Índice de faturamento do setor	7
Figura 2 - Cálculo Poisson.....	16
Figura 3 - Cálculo Poisson através do Javascript	17
Figura 4 - Sistema de atendimento de filas.....	24
Figura 5 - Sistema de fila e um canal de atendimento.....	25
Figura 6 - Características das filas	26
Figura 7 - Filas e servidores	27
Figura 8 - Múltiplos estágio.....	27
Figura 9 - Cálculo dos parâmetros.....	29
Figura 10 - Foto do caixa rápido.....	31
Figura 11 – Frequências de Poisson	34
Figura 12 - Frequência observada por minuto.....	35
Figura 13 - Tempo de atendimento.....	36
Figura 14 - Tempo de atendimento (seg).....	38
Figura 15 - Distribuição Exponencial	39

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Ritmo de chegada dos clientes.....	32
Tabela 2 - Frequências	34
Tabela 4 - Frequência do tempo de atendimento	37
Tabela 5 - Frequência Relativa x Distribuição Exponencial	39

INTRODUÇÃO

A tomada de decisão é um assunto que preocupa os gestores e os estudiosos há muito tempo. A “jogada” certa é essencial para se obter o sucesso em seu negócio ou em seus estudos. A pesquisa operacional vem demonstrando que essas tomadas de decisões podem ser otimizadas através da aplicação de métodos quantitativos, científicos e estatísticos para solução desses problemas.

Segundo a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO)¹, “a pesquisa operacional é uma ciência aplicada voltada para a resolução de problemas reais. Tem como foco as tomadas de decisões, aplica conceitos e métodos de várias áreas científicas na concepção, planejamento ou operação de sistemas. A Pesquisa Operacional é usada para avaliar linhas de ações alternativas e encontrar as soluções que melhor servem aos objetivos dos indivíduos ou organizações.”

A gestão dos estabelecimentos requer uma série de aplicações para se obter o sucesso. Uma das variáveis mais importantes é o grau de qualidade do serviço prestado e o da satisfação dos seus clientes. Para que ocorra o equilíbrio dessas duas variáveis, são necessários planejamentos e estudos específicos. A aplicação da pesquisa operacional possibilita a identificação das melhores alternativas (ou soluções) a serem aplicadas e que satisfaçam todas as restrições impostas.

Para DOILE (2010), “a urbanização rápida e intensa que ocorreu a partir da revolução industrial tem gerado problemas para os setores de atendimento ao público, pois criou gargalos devido ao aumento da demanda descoordenada por bens e serviços. Tornou-se comum a perda de horas em congestionamentos nas estradas, filas em bancos, shoppings, mercados e outros estabelecimentos”. Este fato tem feito com que os gestores pensem sobre a melhor maneira de atenuar os problemas, reduzindo o tempo das filas, sem no entanto, aumentar exageradamente os gastos com pessoal e tecnologia.

São inúmeras as ferramentas oferecidas pela pesquisa operacional nas tomadas de decisões. Neste trabalho, escolhemos o setor dos supermercados para realizar o estudo de casos. O motivo por essa escolha é a significativa representatividade e importância

¹ Criada em 1968. Mais informações em: <http://www.sobrapo.org.br/>. Acesso em 02.06.2015.

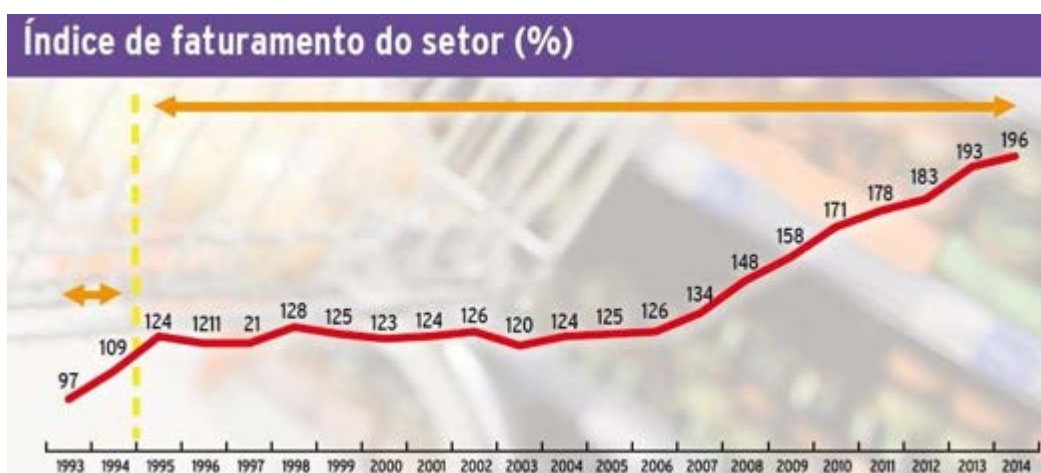
crecente na economia brasileira. Além disso, é um dos locais que mais se tem enfrentado filas devido a crescente demanda pelos produtos ali vendidos.

Segundo FERREIRA, et al (2009), entre os segmentos que compõem o varejo, o setor de supermercados tem maior destaque na economia nacional. No início dos anos de 1980 esse segmento comercializava 75% dos produtos do setor varejista, passando para 82,6% no final daquela década. No final dos anos de 1990, sua participação ampliou-se para 86,1% do volume total de vendas de bens de consumo diário, revelando a importância desse segmento.

Ainda segundo o autor, o setor supermercadista tem promovido evolução significativa em seu ambiente de atuação, na busca de maior eficiência. É catalogado como o principal segmento dentro do macro setor varejista e, ao longo do tempo, tem se deparado com o aumento da concorrência e com as modificações no perfil do consumidor e nas flutuações econômicas.

Como podemos ver no gráfico da revista “SuperHiper”, publicada pelo Departamento de Economia e Pesquisa da Associação Brasileira de Supermercados (ABRAS), o índice de faturamento do setor (em porcentagem) revela o crescimento pelo 12º ano consecutivo. É possível ver também uma desaceleração em 2014, tendo em vista o contexto macroeconômico, e um crescimento de 3 pontos percentuais, o mais tímido, desde 2006.

Figura 1 - Índice de faturamento do setor



Fonte: Abras Brasil. <http://www.abras.com.br/superhiper/superhiper/ultima-edicao/materia-de-capa/>. Acesso em 04.06.2015

Segundo o presidente da ABRAS, Fernando Yamada, a prova de que o varejo vive momento distinto da economia está na relação entre o Produto Interno Bruto (PIB) e o faturamento do autosserviço. Em 2013, o PIB subiu 2,3%, contra 5,5% de crescimento na receita do autosserviço. O resultado dessa relação foi que o setor ganhou mais 0,1 ponto percentual de participação no PIB em 2013, indo para 5,6%. No final de 2014, o setor de supermercado tinha como meta representar 6% do PIB, com um faturamento de 313 bilhões. Os números não deixam dúvidas quanto à importância do mercado interno no desempenho econômico do País

Quando pensamos em diminuir o tempo médio de espera na fila de um supermercado para aumentar o nível de serviço oferecido ao cliente, a solução que parece simples e viável é a de aumentar o número de caixas em operação para que então, as filas se dividam e o tempo médio de espera diminua. Porém, se aplicado dessa maneira, os custos operacionais também serão aumentados e o sistema como um todo não seria otimizado. Surge então a pergunta: qual o procedimento a ser tomado que otimizará o sistema, levando em conta a satisfação do cliente e a minimização dos custos por parte do tomador de decisão?

Nesse trabalho, aplicaremos a *Teoria das Filas* para analisar o sistema de chegada e atendimento de clientes num caixa rápido de um supermercado. O propósito é de otimizar o setor e buscar a melhor relação entre cliente e prestador de serviço. Este trabalho vem agregar a outros tantos da literatura, contribuindo para discussão e aplicação dessa ferramenta da pesquisa operacional.

Os capítulos que compõem esta monografia estão organizados da seguinte maneira: no capítulo 1 será feita a explicação sobre a pesquisa operacional e suas aplicações. No capítulo 2 será descrito a ferramenta da Pesquisa Operacional que utilizaremos neste estudo, a *Teoria das Filas*, resgatando também alguns trabalhos realizados sobre o mesmo tema. No capítulo 3 será feita a apresentação da coleta de dados, o tratamento estatístico e a análise da aplicação da Teoria das Filas. No capítulo 4 será apontado as conclusões desse trabalho.

1. PESQUISA OPERACIONAL

A Pesquisa Operacional (PO) é um termo usado desde muito tempo atrás. Para SHAMBLIN (1979, p. 13) a PO se tornou um método científico de tomada de decisão para resolver problemas táticos e estratégicos. Suas ferramentas foram primeiramente usadas na Grã-Bretanha, durante os combates da Segunda Guerra Mundial, para minimizar perdas em consequência de ataques aéreos.

Para MARINS (2011), o início de sua aplicação foi feito por equipes de “analistas operacionais”. Os estudos da época eram relacionados com o desenvolvimento e uso do radar. VALIM (2010) dizia que em 1939, havia um grupo de pesquisadores cuja função era estudar problemas relacionados à detecção de aeronaves inimigas. O objetivo era de aperfeiçoar o sistema tradicional de alarme, que utilizava o Corpo de Observadores e integrá-lo ao sistema de radar que estava sendo desenvolvido.

A primeira aplicação da PO foi o emprego militar. Portanto, pode-se dizer que seu nome possui uma associação com a pesquisa de operações militares (operations research), cuja tradução imprecisa gerou o termo Pesquisa Operacional.

A partir desses primeiros trabalhos, outros foram surgindo como por exemplo: o problema de alocação eficiente de recursos escassos, o problema da dieta e outros mais. Devido ao sucesso e credibilidade conquistada durante a Guerra, a PO se difundiu e tornou-se um recurso importante na tomada de decisões de grande complexidade por parte de profissionais de diversas áreas.

Quando falamos sobre a criação e evolução histórica da PO, não podemos deixar de mencionar o intelectual que teve uma imensa contribuição para a difusão desses estudos, o “pai da Programação Linear”, George Dantzig². Esse matemático estadunidense desenvolveu, em 1947, o algoritmo *Simplex*. Esse método se mostra poderoso no quesito simplicidade, rapidez e precisão computacional. O *Simplex* é a base para resolver problemas de otimização de uma função linear sujeita a equações e inequações também lineares, que denominamos problemas de Programação Linear.

² George Dantzig (1914 - 2005).

O *Simplex* busca atingir o resultado ótimo, ou seja, não há outra solução que maximiza ou minimiza a função calculada. É muito comum encontrarmos na literatura problemas de resolução com base no *Simplex*, que buscam maximizar a produção com base na restrição de armazenamento e fabricação dos mesmos.

Um logro significativo para a economia e também para o entendimento dos problemas de Programação Linear ocorreu em 1975. Dois economistas, Leonid Vitaliyevich Kantorovich da Rússia e Tjalling C. Koopmans³, foram laureados com o prêmio Nobel de Economia. Seus estudos se baseavam na “teoria de alocação ótima dos recursos”, que tinha como essência um problema de Programação Linear.

Já no Brasil, a PO somente se consolidou e tornou-se um estudo relevante a partir da criação da Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional. Segundo o site da sociedade, ela foi fundada em 1969, após a realização, em 1968, do I Simpósio de Pesquisa Operacional, realizado no (ITA - São José dos Campos, SP), por diversos estudiosos. Desde então, tem reunido a grande maioria dos profissionais da PO no Brasil, tanto nas universidades como nas empresas e em órgãos públicos diversos, sejam eles federais, estaduais ou municipais. Além dos encontros, a sociedade conta com a divulgação de sua própria revista que está em seu 38º ano de publicação sob o título Pesquisa Operacional.

Sobre a importância do estudo da PO, a SOBRAPO afirma que “esta é uma disciplina científica de características horizontais com suas contribuições estendendo-se por praticamente todos os domínios da atividade humana, da Engenharia à Medicina, passando pela Economia e a Gestão Empresarial.”

De acordo com EHRlich (1991), a PO contribui com diversas técnicas quantitativas aplicadas às áreas de administração, produção, planejamento e organização. O sucesso dessas diversas técnicas, tanto entre pesquisadores teóricos como entre engenheiros, administradores e economistas, foi o fator aglutinante para o progresso do conhecimento humano.

Os problemas de Programação Linear de PO são compostos por uma função linear, denominada função objetivo, a qual precisa ser maximizada ou minimizada,

³ Holandês que lecionava na Yale University, nos Estados Unidos.

quando se consideram certas restrições que são equações e/ou inequações também lineares, por exemplo:

Sejam $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}_*^n$, onde cada $x_i, i = 1, \dots, n$, representa uma variável de decisão e seja $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função linear, a qual chamamos de função-objetivo. Sejam ainda $g_j : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $j = 1, \dots, m$, funções lineares, que chamamos de função restrição e $b_j \in \mathfrak{R}$, com $j = 1, \dots, m$. Então um Problema de Programação Linear refere-se à resolução, por exemplo, do seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned} & \max f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{Sujeita a: } & \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Os economistas podem usar essa técnica como um método para alocação dos limitados recursos de uma empresa, neste caso estas variáveis seriam as de decisão, de forma que sejam satisfeitas as leis da oferta e da procura para os produtos da sua empresa, estas seriam as funções de restrição.

Para CRANE (1963), todos os estudos completos de PO seguem uma sequência de execução uniforme. Podemos distinguir pelo menos quatro fases fundamentais: a (a) análise da situação atual, para responder porque, como e quanto tem sido feito; (b) síntese, que visa o desenvolvimento de uma teoria ou modelo, partindo da análise; (c) teste do modelo, aplicando-se as várias a condições reais; (d) aplicação dos resultados da pesquisa à operação analisada.

1.1 Aplicações da Pesquisa Operacional

São inúmeras as aplicações da PO. Nessa seção selecionamos alguns exemplos de problemas lineares, ou seja, problemas de Programação Linear, resolvidos pelo método *Simplex*:

Problema do transporte: Um indivíduo (vendedor) sai de sua casa para vender produtos na casa de outras pessoas. Seus clientes moram em lugares distantes um do outro. Ao final do dia, o vendedor precisa retornar a sua casa. Diante desse problema, qual a melhor e mais eficiente maneira de realizar este transporte? Ou seja, qual é o menor caminho, com o menor custo de transporte (levando em conta os custos com a gasolina, depreciação do veículo, pedágio, etc) e qual é o menor tempo?

Problema da Mochila: é um exemplo de otimização combinatória usado na PO, o objetivo é a otimização dos itens levados por um indivíduo em sua mochila, porém com uma capacidade limitada de respectivos pesos e valores. A intenção é de preencher a mochila com os itens úteis e de maiores valores e ao mesmo tempo respeitando o limite máximo de peso permitido.

Análise por envoltória de dados (DEA): Em geral o DEA avalia problemas com múltiplos recursos (inputs) e múltiplas saídas (outputs) para cada Unidade Tomadora de Decisão (UTD). Por exemplo, hospitais do estado paulista são as UTD, o capital investido (representado pelo número de leitos), a mão de obra (em milhares de horas de trabalho) são as variáveis de input e centenas de pacientes jovens, adultos e idosos, três variáveis de output. O DEA permite avaliar a eficiência de cada um dos hospitais.

Outros problemas, bem como o desenvolvimento do método Simplex para sua solução, podem ser encontrados em COLIN (2013).

2. TEORIA DAS FILAS

A Teoria das Filas é uma das técnicas da PO que se iniciou em 1908 na cidade de Copenhague, na Dinamarca. O pioneiro da investigação foi o matemático Agner Krarup Erlang⁴ (1909), quando trabalhava numa companhia telefônica, estudando o problema de redimensionamento de centrais telefônicas da companhia dinamarquesa “Copenhagen Telephone Company”. Nesse trabalho, estudava sobre quantos circuitos eram necessários para os atendimentos das chamadas telefônicas. Somente a partir da Segunda Guerra Mundial que a teoria foi aplicada a outros problemas de filas. Seu trabalho foi difundido por outros pesquisadores em diversos países europeus. Na década de 30, dentre as pesquisas nesta área, Andrey Kolmogorov, na Rússia, estudava um sistema com entrada de probabilidade de Poisson (Siméon Denis Poisson) e saída arbitrária em único ou múltiplo atendente.

Quase todas as pessoas já tiveram o desprazer de algum dia, enfrentar o congestionamento de clientes em filas de empresas para comprar algum produto desejado. Para CARVALHO (2013), a formação de filas ocorre porque a procura pelo serviço é maior do que os atendimentos. No nosso dia a dia, podemos encontrar esse fenômeno em supermercados, bancos, restaurantes, lojas de vestuários e muitas outras situações que citaremos nos próximos capítulos.

Segundo MARINS (2011), quando se trata de uma operação comercial, esta situação deixa os clientes insatisfeitos e conduz à perda de negócios. O tempo de espera em uma fila retrata a qualidade da prestação de serviço de uma empresa, e pode ser significativa na decisão da escolha do consumidor de onde consumir determinado produto.

Esse tipo de problema ocorre também em situações que não fazem parte do nosso dia-a-dia, mas mesmo assim pode afetar indiretamente o consumidor. Segundo PRADO (2009), nas fábricas, a existência de fila em um determinado equipamento pode ocasionar um aumento nos tempos do ciclo de produção. As consequências disto resultam no aumento dos custos e atrasos no atendimento aos pedidos dos clientes.

⁴ Agner Krarup Erlang (1878 – 1929), matemático dinamarquês

Para TORRES (1966)⁵, com o desenvolvimento industrial, o crescimento das empresas e a necessidade de racionalização levam os gestores recorrerem com insistências aos conceitos e métodos da teoria das filas nos diversos setores da economia. Portanto, existem inúmeras aplicações dessa teoria.

Seguindo a ideia de PRADO (2009), na área de transportes, podemos citar o rodoviário, sendo possível analisar a circulação de carros e respectivos fluxos. Como consequência, será adaptado a quantidade e o tempo dos semáforos de uma determinada região. Outra aplicação é a otimização da fila de um pedágio, que depende de diversos fatores como por exemplo: fluxo de carros, layout da praça do pedágio, forma de cobrança, forma de pagamento, entre outros. Já nos modelos marítimos e aéreos, é elaborado a tabela de horários de acordo com o dimensionamento de portos e aeroportos.

Podemos citar ainda o problema nos bancos, supermercados, escritórios, parques de diversões, no qual necessitam otimizar o número de caixas disponíveis de acordo com o atendimento demandado pelos seus clientes, mantendo a satisfação de ambos os lados. Até mesmo no elevador é possível fazer essa análise: A partir da determinação do número de pessoas que chegam a cada andar, é possível determinar a quantidade de elevadores necessários para minimizar o tempo de espera para esse serviço, minimizando também o custo de movimentação dos elevadores, pois quanto mais paradas ocorrerem entre os andares, maior a energia gasta e maior o custo.

Dessa forma, a *Teoria das Filas* tenta através de análises matemáticas detalhadas, encontrar um ponto de equilíbrio que satisfaça o cliente (ou linha de produção) e seja viável economicamente para o provedor do serviço⁶.

Para melhor entendimento da teoria e suas aplicações, será descrito abaixo seus principais conceitos e os pré-requisitos de probabilidade necessários para o seu desenvolvimento.

⁵ Oswaldo Fadigas Torres, professor de Tempo Parcial, do Departamento de Métodos Quantitativos, da Escola de Administração de Empresas de São Paulo, da Fundação Getúlio Vargas. Livre-Docente e Professor-Assistente de Planejamento de Produção da Escola Politécnica da Universidade de S. Paulo.

⁶ <http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/CO-2.06.pdf>. Pag: 16, acessado em: 11 de julho de 2014.

2.1 Distribuição de probabilidade Exponencial e Poisson

É de extrema importância abordar dois tópicos de probabilidade que são pré requisitos para o estudo da Teoria das Filas: a Distribuição Exponencial e a Distribuição de Poisson.

O entendimento das diferenças e semelhanças entre a Distribuição de Poisson e a Distribuição Exponencial é essencial para realizar os nossos próximos cálculos. Segundo a classificação de MORAIS *et al* (2011), devemos nos atentar a um ponto muito importante que define a diferença entre essas duas distribuições: a distribuição de Poisson mede o número de ocorrências de determinado evento por unidade de tempo, enquanto a distribuição Exponencial indica o tempo decorrido entre duas ocorrências. Assim, quando o número de ocorrências de um determinado evento é explicado pela distribuição de Poisson com média μ , o intervalo entre duas ocorrências segue a distribuição exponencial com média $\frac{1}{\mu}$.

2.1.1 Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é usada frequentemente na resolução de problemas quando falamos de PO. Segundo MORAIS *et al* (2011), a distribuição de probabilidades de Poisson recebeu esse nome devido ao matemático francês Simeon Denis Poisson⁷, e representa uma distribuições de probabilidades de uma variável aleatória discreta (uma variável que possui valores contável) e tem um grande número de aplicações. Essa distribuição é aplicável a ocorrências de um intervalo de tempo específico, sendo que as ocorrências são independentes entre si e a probabilidade de duas ou mais ocorrências simultâneas é praticamente zero.

A probabilidade de n ocorrências em um intervalo de tempo é dado por:

$$P(n) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \quad (1)$$

⁷ Pithiviers, 21 de junho de 1781 — Paris, 25 de abril de 1840

sendo $e = 2,72$, uma aproximação para o número neperiano e μ (pode ser chamado de parâmetro de Poisson) a média dos números de ocorrência dividido por um intervalo de tempo.

Como exemplo da utilização desta distribuição de probabilidade, podemos citar: o número de chamadas telefônicas por hora, número de carros que abastecem no posto de gasolina durante um determinado tempo, número de veículos que chegam no pedágio, clientes chegando ao caixa de um supermercado, etc.

A partir do momento em que todos os critérios de probabilidade de Poisson são aplicados, podemos saber a probabilidade de n ocorrências durante certo tempo.

Exemplo: Calcule a probabilidade de um departamento de polícia receber 3 ligações por minuto, sabendo que a média é de 2 ligação por minuto.

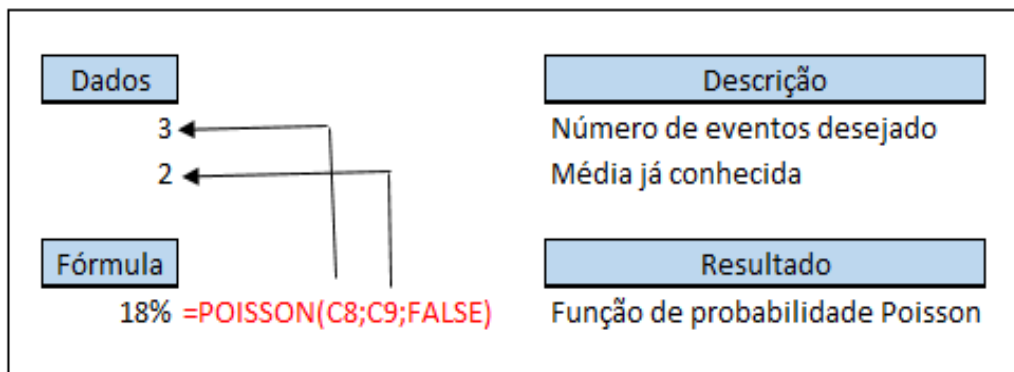
$$P(n) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}$$

$$P(3) = \frac{2^3 2,72^{-2}}{3!}$$

$$P(3) = 0,18 \text{ ou } 18\%$$

Esta resolução também pode ser feita através do uso do Microsoft Excel:

Figura 2 - Cálculo Poisson



Fonte: elaboração própria.

Como curiosidade, podemos informar aos leitores, que há alguns sites na internet que podem ser utilizados como “calculadora” para obter a probabilidade de Poisson, um deles é o “Javascript”⁸. Utilizamos este site para fazer o mesmo exemplo acima:

Figura 3 - Cálculo Poisson através do Javascript

Fonte: <http://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/DistribuicaoProbabilidades/poisson.htm>. Acesso em 01/06/2015

Diante das três maneiras exemplificadas acima, podemos concluir esse exemplo de probabilidade de Poisson sabendo que existe 18% de chances do departamento de polícia receber 3 ligações por minuto.

⁸ Site desenvolvido pelo professor Lúis António Bertolo. Maiores informações em: <http://www.bertolo.pro.br/>.

2.1.2 Distribuição Exponencial

A Distribuição Exponencial é um processo contínuo e antes de definirmos suas funções, precisamos primeiramente definir a função densidade de probabilidade:

Definição 1: Uma função $f: R \rightarrow R$ positiva e integrável é uma *função densidade de probabilidade* se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Assim, denotamos e definimos a probabilidade de um número x estar compreendido entre a e b com $a < b$, por:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

A definição da Distribuição Exponencial é dada através da definição da função densidade exponencial:

Definição 2: A função definida por $f(x) = \mu e^{-\mu x}$, se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$, se $x \leq 0$ é chamada *função de densidade exponencial* de parâmetro μ .

Podemos observar que a função da Definição 2 é, de fato, uma função densidade de probabilidade, ou seja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \mu e^{-\mu x} dx = 1.$$

E então:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \mu e^{-\mu x} dx = e^{-\mu a} - e^{-\mu b} \quad (2).$$

Exemplo: Suponhamos que o tempo médio entre o atendimento de um cliente e o próximo em um supermercado seja de 10 minutos. Suponhamos também que essa situação respeite todos os critérios de distribuição exponencial.

1. Qual a probabilidade desse tempo ser superior a 10 minutos?
2. Qual a probabilidade do tempo não ser maior que 10 minutos?

3. Qual a probabilidade deste tempo ocorrer entre 3 e 7 minutos?

Primeiramente, devemos calcular o tempo médio entre um atendimento e outro. Sendo $\mu = 10$ e o intervalo entre duas ocorrências com distribuição exponencial igual a $\frac{1}{\mu}$:

$$\text{Tempo médio} = \frac{1}{\mu} \rightarrow \frac{1}{10}$$

Solução de 1: supondo que o tempo de atendimento entre um cliente e outro ultrapasse 10 minutos e supondo que o número neperiano “e” é aproximado de 2,71, temos da equação (2):

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \mu e^{-\mu x} dx = e^{-\mu a} - e^{-\mu b}$$

Sendo $a = 10$; $b = \infty$

$$P(x \geq 10) = \int_{10}^{\infty} \mu e^{-\mu x} dx = e^{-\mu a}$$

$$P(x \geq 10) = e^{\frac{-10}{10}} \rightarrow e^{-1}$$

$$P(x \geq 10) = 0,36 \text{ ou } 36\%$$

Ou seja, a probabilidade será de 36%

Solução de 2: No caso da probabilidade não ser maior que 10 minutos, temos:

Supondo que: $a = 0$; $b = 10$

$$P(0 \leq x \leq 10) = \int_0^{10} \mu e^{-\mu x} dx = 1 - e^{-\mu a}$$

$$P(0 \leq x \leq 10) = 1 - e^{-1}$$

$$P(0 \leq x \leq 10) = 1 - 0,36$$

$$P(0 \leq x \leq 10) = 0,64 \text{ ou } 64\%$$

Ou seja, a probabilidade de não ultrapassar os 10 minutos é 64%, uma porcentagem superior que a calculada anteriormente.

Solução de 3: Probabilidade tempo entre os atendimentos de clientes serem entre 3 a 7 minutos, temos:

$$\text{Supondo que: } a = 3; b = 7$$

$$P(3 \leq x \leq 7) = e^{-\frac{3}{10}} - e^{-\frac{7}{10}}$$

$$P(3 \leq x \leq 7) = 0,74 - 0,52$$

$$P(3 \leq x \leq 7) = 0,21 \text{ ou } 21\%$$

Podemos concluir assim, que a probabilidade do tempo de atendimento entre um cliente e outro esteja entre 3 e 7 minutos é de 21%.

2.2 Trabalhos que apresentam aplicações da Teoria das Filas

Podemos encontrar na literatura muitos trabalhos que aplicam uma das ferramentas da PO: a teoria das filas. Entre eles podemos citar alguns trabalhos científicos. Primeiramente, um trabalho realizado nos portos do Brasil. Diante da atual conjuntura de crescimento econômico e prosperidade que estamos, a logística dos portos para importação e exportação dos produtos comercializados é determinante para garantir o sucesso do mesmo. No trabalho da Silva *et.al.* (2006), foi estudado as condições do Porto de Itajaí (SC) para então analisar as características de atendimento aos navios que ali atracam, identificando as possíveis melhorias a serem feitas. Como forma de conclusão para sua tese, foi identificado que era necessário a implantação de um berço a mais no Porto. Desse modo, o tempo de permanência de um navio atracado iria diminuir significativamente. Essa melhoria tem o objetivo de reduzir custos e tempo de operação e com isso garantir a competitividade do porto de Itajaí.

Já o trabalho de Camelo *et al* (2010), que também aplica a teoria das filas em um porto, tem o objetivo de analisar as características de atendimento aos navios que atracam nos piers do Terminal Marítimo de Ponta da Madeira para carregamento de minério de ferro e manganês. Em sua pesquisa, foi concluído que era necessário aumentar a

capacidade do terminal, conseqüentemente aumentando o número de navios carregados ao mês. Diante do investimento de mais de R\$2 bilhões na construção de um novo pier o autor conclui que será um dos maiores e mais eficientes portos do Brasil.

Em outras áreas podemos citar os trabalhos realizados em microempresas. O trabalho de Cardoso, et al. (2010), aplicou a teoria das filas no ambiente físico de uma panificadora com o objetivo de otimizar a fila que forma todos os dias. Após toda coleta de dados, foi identificado ao final do trabalho que o layout (disposição do caixa) da panificadora era um problema relevante na formação da fila.

Figueiredo *et al* (2010), queria prever o número otimizado de caixas necessários em determinado momento para atender a demanda de uma loja (fila do tipo M/M/c, com “c” servidores de atendimento). Sua conclusão, foi sugerir estudos futuros que busquem otimizar as jornadas de trabalho dos funcionários da loja.

No trabalho de CARVALHO *et al* (2013) os autores constataram a ineficiência da fila do restaurante universitário da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e aplicaram essa ferramenta da PO para otimizá-la. Foi identificado a existência de uma instabilidade no sistema e sua proposta de melhora foi que, diante do sistema estudado, o tempo de atendimento médio por cliente deveria diminuir 2,5 segundos para otimizar o serviço, proporcionando então, um ambiente mais confortável para o cliente.

ROSA (2008), identificou a capacidade de atendimento em uma agência bancária, e fez simulação e análise para estudar o comportamento do sistema de filas. As sugestões propostas pelo autor foram: manter os quatro caixas atendendo de forma contínua; e dobrar a capacidade de atendimento de cada caixa, levando em conta as seguintes ações: simplificar processos, treinamento dos funcionários e diminuição das conversas.

Quando falamos de otimização de filas de um supermercado, MORABITO (2000), é analisado o problema da congestão de caixas em um sistema M/M/1. Um consumidor insatisfeito com o tempo de espera pode não voltar mais ao supermercado. Por esse motivo, foi identificado o que deve ser feito para modelar o tempo médio de espera dos consumidores nos caixas desse supermercado. DOILE (2010) também analisou o problema das filas em um supermercado de sua região e concluiu que a melhor maneira para diminuir a fila era a adoção da fila única e diminuição no número de

atendentes de caixa, podendo descolocar essa mão-de-obra “ociosa” para efetuar outra atividade.

Foi possível identificar que, de acordo com a literatura, a aplicação da teoria das filas engloba inúmeras áreas e diversas conclusões, evidenciando que essa teoria é uma ferramenta que agrega muito valor na tomada de decisões de pequenas, médias e grandes empresas e instituições.

2.3 Conceitos básicos de filas

A fila pode ser composta, segundo Shamblin (1979), por *clientes* (ou produtos), que são provenientes de uma determinada população, que chegam ao sistema e esperam em linha até serem atendidos,

A população pode ser composta por diversos elementos:

- Pessoas (Clientes), produtos, máquinas, cartas, veículos.

O atendimento é uma das partes mais importantes do sistema. Esse serviço pode ser feito de duas maneiras:

- Individual: uma pessoa por vez. Por exemplo, em caixas de bancos e em pedágios.
- Em grupo: atendendo mais de uma pessoa por vez. Por exemplo, o serviço de um elevador.

Nessa área, é levado em conta também o número de caixas ou servidores disponíveis para atender os clientes. Esse atendimento pode ser feito por pessoas ou máquinas. Pode-se dizer que, quanto maior a quantidade de servidores disponíveis, menor o tempo de espera na fila. Pode existir também momentos do dia em que esses servidores estejam vazios e o atendente se torne uma peça ineficiente. De acordo com COSTA (2008), a inviabilidade econômica e a limitação de espaço no estabelecimento é a razão pela qual os gerentes e o poder público não aumentam a capacidade do sistema.

No estudo de caso desse trabalho, o tempo de atendimento é de extrema importância. De acordo com o histórico dos últimos trabalhos realizados, pode-se dizer

que esse intervalo muitas vezes é a razão pela qual a fila se forma. Portanto, entender como funciona o atendimento é o primeiro passo para otimizar o sistema analisado.

2.4 *Chegada e atendimento*

Segundo COSTA (2008), a maioria dos modelos de filas estocásticas assumem que os tempos de interchegada e serviço obedecem uma distribuição exponencial ou, equivalentemente, que a taxa de chegada e a taxa de serviço seguem uma distribuição de Poisson e exponencial.

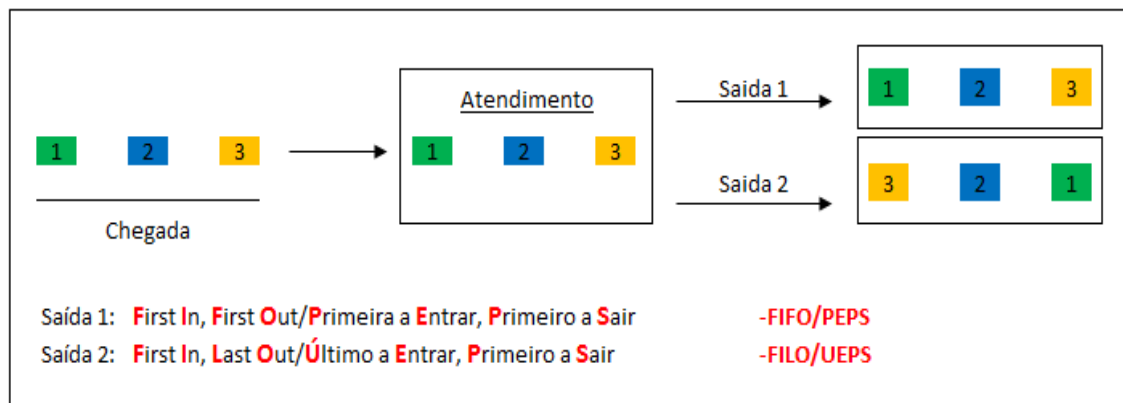
A duração do atendimento é uma das principais peças para que esse sistema funcione sem filas. Quando se fala em filas de um sistema industrial, o tempo de “atendimento” é automatizado e constante.

A disciplina do atendimento é a maneira pela qual os indivíduos são selecionados para receber o serviço. Pode ser classificada pelos seguintes modos:

- FIFO (em português, PEPS – Primeiro a Entrar, Primeiro a Sair) – First In, First Out. É o tipo de atendimento feito por ordem de chegada, é o mais comum. Como exemplo podemos citar o caixa de supermercados e a fila do banco.
- LIFO (em português, UEPS – Último a Entrar, Primeiro a ser Servido) – Last In, First Out. Podemos citar um exemplo clássico utilizado na logística em controle de estoques e transportes, onde o produto carregado por último é o primeiro a ser entregue, por mera questão de facilidade na hora de retirar certo produto. Outro exemplo é a utilização de elevadores lotados.

A imagem a seguir exemplifica a maneira que é feita esses dois tipos de serviço citados acima:

Figura 4 - Sistema de atendimento de filas



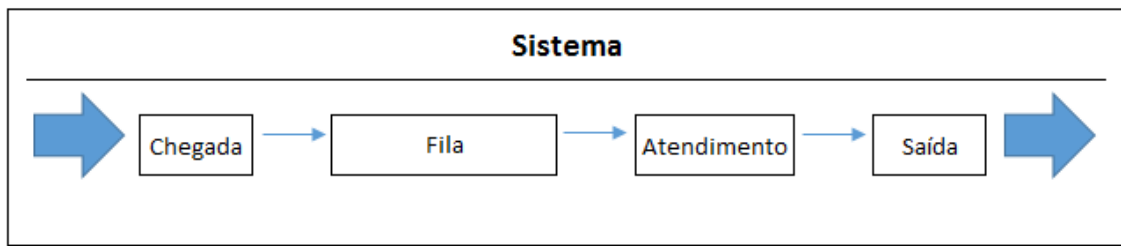
Fonte: Elaboração própria

- Aleatório: não é adotado nenhum critério de atendimento. Um exemplo para esse tipo de atendimento é a prova oral aplicada por uma professora em uma escola.
- Prioritário: No Brasil, o atendimento prioritário é feito exclusivamente para gestantes, pessoas com mais de 60 anos e deficientes físicos. Também existem casos de emergência ou por hora marcada, no qual o indivíduo passa a ser o primeiro da fila, interrompendo o atendimento que está ocorrendo no exato momento.

Uma vez completado o atendimento, o elemento deixa o sistema. Quando falamos de clientes que deixam o sistema, o nível de satisfação do mesmo é um ponto crítico e determinante para o sucesso e a máxima eficiência do modelo.

Portanto, o sistema de uma fila pode ser representado, de acordo com a figura a seguir, por uma fila e um canal:

Figura 5 - Sistema de fila e um canal de atendimento



Fonte: elaboração própria.

Este modelo de “uma fila e um canal de atendimento”, é chamado de “Filas Markovianos”, no qual as equações que denotam os processos de chegada segue a Distribuição de Poisson e as equações do processo de serviço (atendimento) seguem a Distribuição Exponencial, com sistema de atendimento FIFO.

Para uma melhor classificação e identificação de uma fila, é usada a notação de Kendall. Essa notação é composta por uma série de símbolos seguidos da seguinte forma: $A/B/m/k/M$, onde “A” indica a distribuição de chegada, “B” o padrão de serviço de acordo com uma distribuição de probabilidade para o tempo de serviço, “m” o número de canais de servidores, “k” a restrição na capacidade do sistema e “M” a disciplina da fila. Nesse trabalho e também na maioria das situações, somente os três primeiros símbolos são utilizados.

De uma forma geral, podemos ter para os parâmetros A, B, m, k e M as seguintes características que se tornaram padrão na literatura:

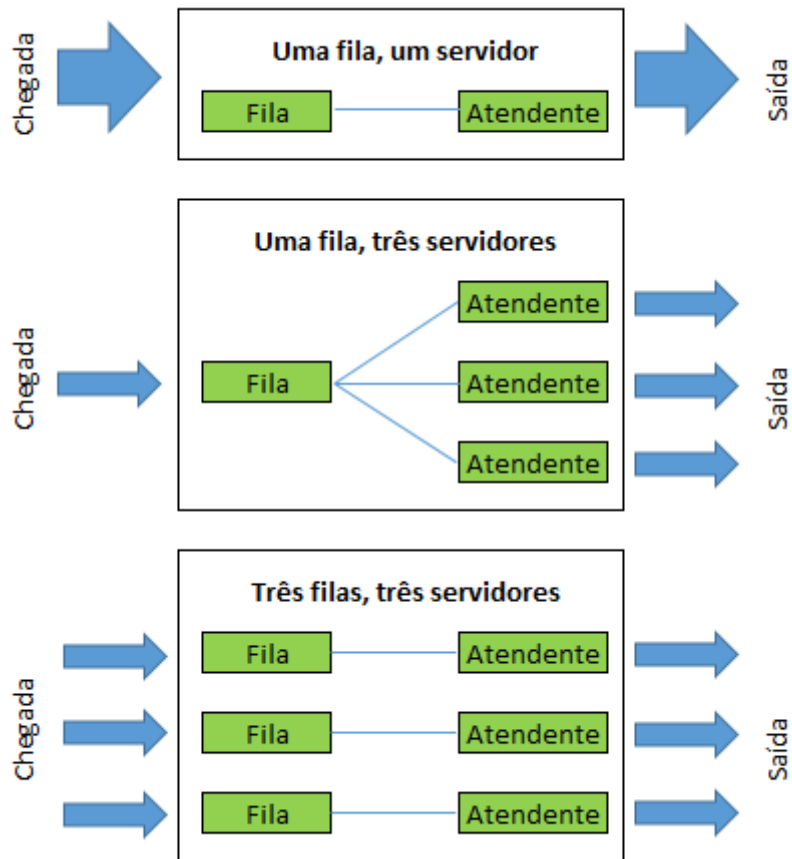
Figura 6 - Características das filas

Características	Símbolo	Explicação	
Distribuição de Tempo de chegada Distribuição de Tempo de Serviço	A	M	Exponencial
		D	Determinístico
	B	E_k	Tipo k-Erland (k=1,2..)
		H_k	Mistura de k exponenciais
		PH	Tipo Fase
	G	Geral	
Número de servidores paralelos	(m)	1,2,.. ∞	
Restrição na capacidade do sistema	(k)	1,2,.. ∞	
Disciplina da fila	(M)	FIFO/PEPS	First in First Out
		FILO/UEPS	First in Last Out
		RANDOM	Aleatório
		PR	Prioritário

Fonte: elaboração própria

A partir dos parâmetros definidos para as filas, podemos representar um sistema de filas com um ou vários estágios de atendimentos. Se tivermos um sistema denotado por M/M/1, M/M/2 e M/M/3 teremos: Distribuição Exponencial de tempo de chegada (Poisson), Distribuição Exponencial para o tempo de serviço e 1, 2 ou 3 canais de atendimento, respectivamente. A seguir, a figura que representa a situação:

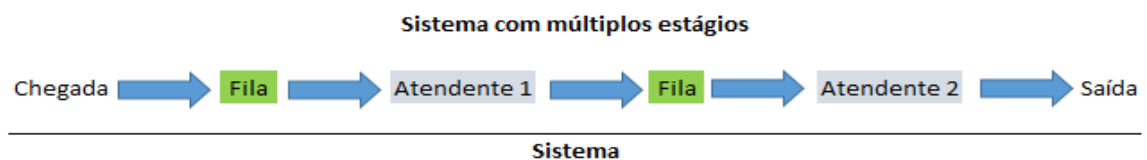
Figura 7 - Filas e servidores



Fonte: elaboração própria

No caso das filas com vários estágios, o cliente precisa passar por mais de uma etapa para poder deixar o sistema. A figura a seguir representa esse tipo de fila:

Figura 8 - Múltiplos estágio



Fonte: Elaboração própria.

2.5 Parâmetros para sistema de um canal e uma fila com população infinita

Para podermos calcular os parâmetros abaixo precisamos que o sistema de filas seja estável, ou seja, após um longo período de funcionamento, é preciso que esteja em equilíbrio. Para identificar se o sistema de filas é um sistema estável ou instável, precisamos calcular a variável ρ , que chamaremos de taxa de ocupação ou fator de utilização do serviço.

Para obtermos ρ , é preciso realizar o razão entre a taxa média de chegada de elementos em um sistema, λ , pela taxa média de atendimento (em segundos ou minutos).

Essa variável é essencial para termos a certeza que o sistema é estável ou não e é válida somente para população infinita. Prado (2009) coloca que sistema estável exige λ menor que μ , ou seja, $\rho < 1$:

Desse modo, podemos definir uma restrição para um sistema estável:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\rho > 1 &\rightarrow \text{Sistema instável} \\ \rho < 1 &\rightarrow \text{Sistema estável}\end{aligned}$$

Se o sistema é estável podemos calcular os seguintes parâmetros a seguir. Vale ressaltar que eles são essenciais para a análise do desempenho do sistema.

- 1- Probabilidade de que o número de clientes no sistema seja n (Índice de ociosidade do sistema):

$$P(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad (1)$$

- 2- Número médio de clientes no Sistema:

$$NS = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)} \quad (2)$$

3- Tempo médio de clientes na fila aguardando atendimento:

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (3)$$

4- Tempo de permanência do cliente no Sistema:

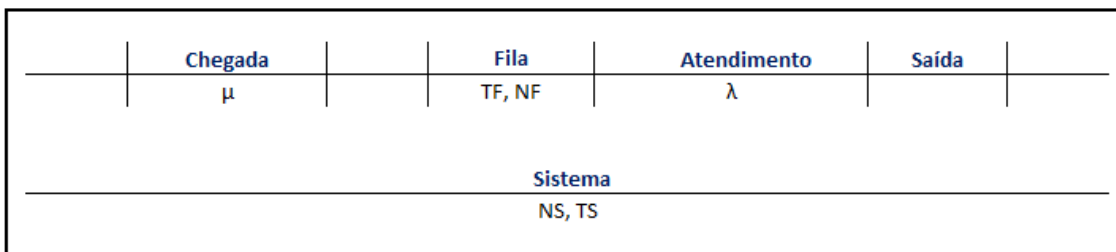
$$TS = \frac{1}{(\mu - \lambda)} \quad (4)$$

5- Tempo de permanência do cliente na fila:

$$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (5)$$

De maneira resumida, os parâmetros acima citados serão calculados nas seguintes etapas:

Figura 9 - Cálculo dos parâmetros



Fonte: Elaboração própria

Para estudar casos mais gerais que filas do tipo M/M/1, o livro de Marins (2011) é uma boa introdução.

3. ESTUDO DE CASO: SUPERMERCADO

Neste capítulo, será feita a descrição do supermercado estudado e a aplicação da teoria das filas. Ao final, será apresentado todos os dados que coletados, as análises e as possíveis sugestões de melhorias.

3.1 *Descrição do sistema estudado*

Segundo o site da companhia⁹, a rede Oba Hortifruti possui 40 lojas. Estão espalhadas pelos estados de São Paulo, Minas Gerais e Distrito Federal. O supermercado escolhido está localizado na cidade de Indaiatuba – São Paulo. Inaugurado em novembro de 2014, possui uma área construída de 700m². Os clientes encontram um serviço diferenciado nos setores de hortifrúti, são eles: adega, padaria, pré-lavados, frios, laticínios, floricultura, importados e biscoitos. A loja fica aberta todos os dias até as 22hrs.

Ainda segundo o site, esta rede emprega hoje 4 mil e 300 pessoas, sendo que 5% de seu quadro profissional é destinado a pessoas com necessidades especiais. A rede investe fortemente no treinamento e capacitação de seus funcionários a fim de garantir a qualidade dos serviços prestados e, sobretudo, bom atendimento aos clientes, fornecedores e parceiros. Para estreitar o relacionamento com os clientes, o supermercado conta com um sistema de call center, que permite o acesso a informações como endereços, horários de funcionamento, disponibilidade de produtos, entre outras.

Este estabelecimento foi escolhido por vários motivos. Primeiramente, por causa da facilidade que encontramos para coletar os dados. Outro motivo, foi pela qualidade do serviço que essa empresa fornece para a população e pela grande quantidade de pessoas que realizam compras no estabelecimento. Identificamos que existe apenas uma fila no caixa rápido desse supermercado e assim, em horários de pico, uma alta demanda pelo serviço prestado.

No local, existem sete postos de atendimentos (caixas) destinados a atender os seus clientes. Cada caixa realiza a cobrança das compras efetuadas, através de um sistema informatizado. Cinco caixas são destinados ao atendimento comum (independentemente

⁹ Maiores informações disponível em: <http://www.grupooba.com.br/sobre-o-oba/nossa-historia.php>. Acesso em: 19/05/2015.

do número de produtos que o cliente for comprar), um caixa prioritário (destinados a clientes idosos, gestantes ou com deficiência física) e um caixa rápido (limitado a 10 produtos por cliente). Segundo indagações do gerente do supermercado, o caixa rápido só abre nos “dias de pico” (alta frequência de clientes), que são as quartas-feiras, a partir das 18hrs e aos sábados, a partir das 16hrs. Nos outros dias, o caixa rápido só abre se houver a necessidade, ficando essa decisão a critério da gerência.

O pagamento pode ser realizado em dinheiro, cheque ou cartão. O último é uma forma de pagamento que leva um pouco mais tempo para ser realizado, pois depende da conectividade com a operadora do cartão. Abaixo é possível visualizar o caixa-rápido onde realizamos esta pesquisa.

Figura 10 - Foto do caixa rápido

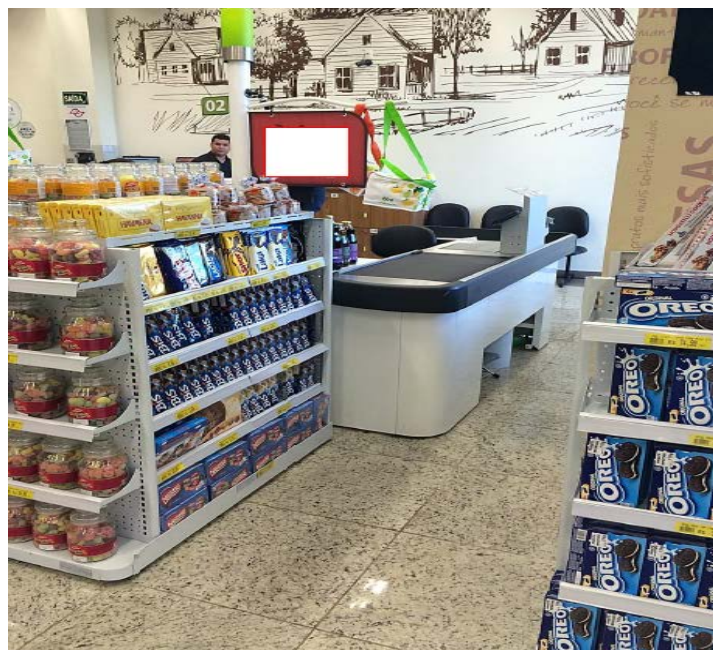


Foto tirada pelo colaborador da pesquisa em 24 de maio de 2015.

3.2 Coleta de dados

Para realização do estudo de caso, a coleta de dados foi feita com a ajuda de um colaborador. Consideramos o nosso sistema apenas o caixa rápido desse supermercado (restrição de 10 produtos por cliente). Nossa coleta de dados foi realizado no dia 30 de

maio de 2015 (sábado) das 17:00hrs até as 19:30hrs. O horário foi escolhido devido ao grande fluxo de clientes, de acordo com as observações previamente realizadas.

Durante o período observado anotamos os processos de chegada de clientes na fila e o tempo de atendimento de cada um.

Para cada minuto analisado, obtivemos a frequência de clientes que chegaram no sistema e, ao final do tempo o número total de clientes que entraram no sistema ($n = 81$ pessoas). Todos estes dados foram inseridos em uma planilha do Microsoft Office Excel e através de fórmulas e cálculos, foram feitos os cálculos que serão expostos a seguir.

Tabela 1 - Ritmo de chegada dos clientes

Ritmo de chegada dos clientes, em cada minuto, no sistema					
Minuto	Frequência observada	Minuto	Frequência observada	Minuto	Frequência observada
1°	0	41°	1	81°	0
2°	0	42°	2	82°	2
3°	0	43°	1	83°	2
4°	0	44°	0	84°	1
5°	0	45°	0	85°	1
6°	1	46°	0	86°	1
7°	1	47°	2	87°	1
8°	1	48°	2	88°	1
9°	0	49°	1	89°	0
10°	0	50°	1	90°	0
11°	0	51°	0	91°	1
12°	0	52°	0	92°	0
13°	2	53°	0	93°	1
14°	1	54°	0	94°	0
15°	0	55°	1	95°	4
16°	1	56°	0	96°	2
17°	1	57°	0	97°	1
18°	4	58°	0	98°	1
19°	1	59°	2	99°	5
20°	1	60°	1	100°	0
21°	0	61°	0	101°	1
22°	1	62°	0	102°	0
23°	2	63°	0	103°	1
24°	0	64°	1	104°	0
25°	1	65°	1	105°	0
26°	2	66°	2	106°	0
27°	1	67°	1	107°	0
28°	0	68°	1	108°	0

29°	0	69°	0	109°	0
30°	0	70°	1	110°	0
31°	0	71°	0	111°	0
32°	0	72°	2	112°	0
33°	0	73°	2	113°	1
34°	0	74°	1	114°	1
35°	0	75°	0	115°	1
36°	2	76°	0	116°	0
37°	0	77°	0	117°	0
38°	0	78°	0	118°	1
39°	0	79°	0	119°	1
40°	0	80°	0	120°	1
Total de clientes no período: $n = 81$					

Fonte: elaboração própria a partir dos dados coletados.

Para calcular as frequências dos dados coletados, foi feito os seguintes procedimentos, a partir dos dados da Tabela 1:

- Frequência absoluta (em cada minuto): quantos clientes, por minuto, entraram no sistema em certos ritmos: 0,1,2,4 ou 5. Exemplo: Dentro dos 120 minutos, durante 40 minutos entraram 1 pessoa.
- Frequência relativa (em relação aos minutos): é a frequência absoluta de cada ritmo dividido pela somatória do total de frequência absoluta (120 minutos).
- Frequência relativa acumulada: É o cálculo da frequência relativa atual mais a frequência relativa anterior. Portanto, o total é 100%. A partir desse dado podemos identificar a representatividade.
- Frequência de Poisson (em cada minuto): Usamos a fórmula: $P(x) = \frac{\tilde{\lambda}^x e^{-\tilde{\lambda}}}{x!}$, onde x é o ritmo de chegada de clientes por minuto, $\tilde{\lambda} = \frac{81}{120} = 0,68$ ou seja, a chegada média de clientes por minuto e $e = 2,72$ uma aproximação para o número neperiano.

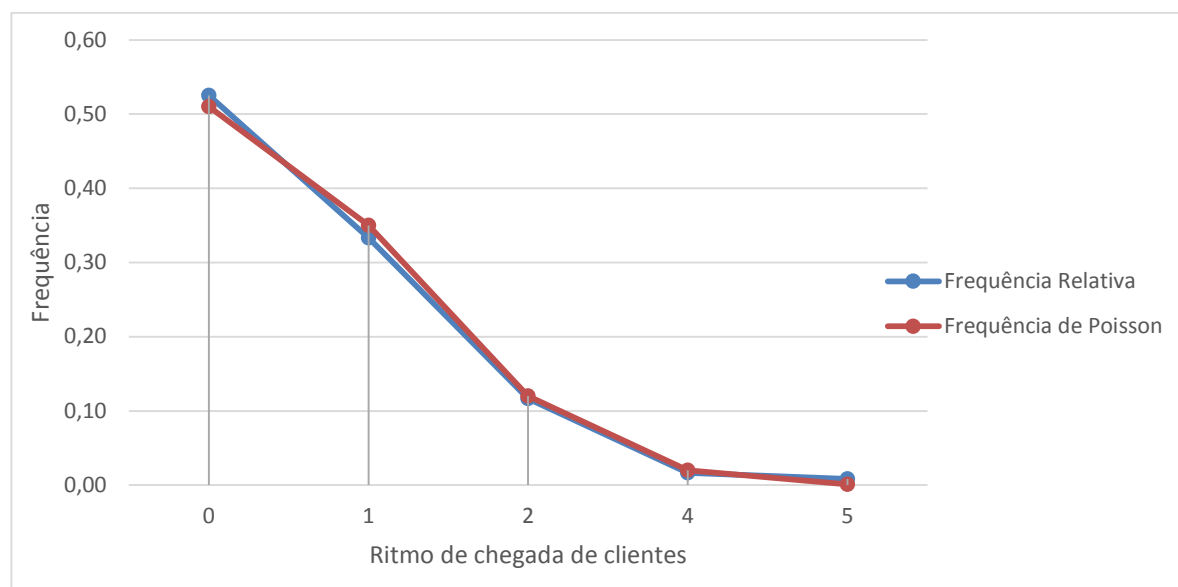
Tabela 2 - Frequências

Frequência absoluta e relativa em cada minuto				
Ritmo	Frequência Absoluta	Frequência Relativa de clientes por minuto	Frequência relativa acumulada	Frequência de Poisson
0	63	0,53	0,53	0,51
1	40	0,33	0,86	0,35
2	14	0,12	0,98	0,12
4	2	0,02	0,99	0,02
5	1	0,01	1,00	0,001
Total	120			

Fonte: elaboração própria a partir dos dados coletados.

Comparando as frequências relativa e de Poisson, notamos que a chegada de clientes a fila segue, de fato, a Distribuição de Poisson. Podemos demonstrar esse fato através do gráfico a seguir:

Figura 11 – Frequências de Poisson



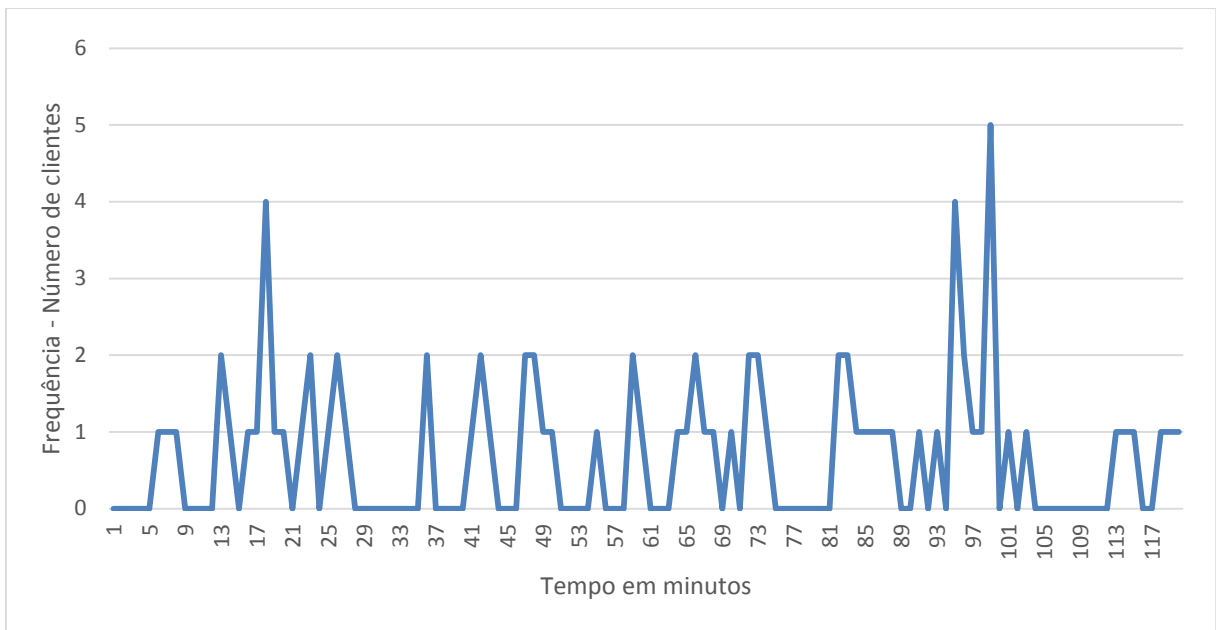
Fonte: Elaboração própria

Como forma de complemento da nossa análise, podemos observar, através da frequência relativa acumulada, que durante a coleta de dados, 98% do tempo entrou de 0

a 2 pessoas no sistema. De maneira geral, não há um grande volume de clientes entrando ao mesmo tempo.

Através da análise gráfica de frequência observada por minuto do gráfico abaixo, podemos perceber que não houve uniformidade de clientes por minuto e que, de certo modo, há alguns momentos no qual chegam mais clientes, porém este número corresponde a apenas 6,1% do total de clientes.

Figura 12 - Frequência observada por minuto



Fonte: elaboração própria a partir dos dados coletados.

Para os 81 clientes que entraram no sistema, foi cronometrado os seus respectivos tempos de atendimento. Essa etapa é de grande importância para obtermos a base para o estudo de casos da teoria das filas.

Figura 13 - Tempo de atendimento

Cliente	Tempo (min)	Tempo (seg)	Cliente	Tempo (min)	Tempo (seg)	Cliente	Tempo (min)	Tempo (seg)
1	1,1	66	34	2,1	126	67	2,4	144
2	7,3	438	35	1,2	72	68	0,7	42
3	1,1	66	36	3	180	69	0,2	12
4	2,2	132	37	2	120	70	0,3	18
5	2,3	138	38	2	120	71	1	60
6	0,2	12	39	0,8	48	72	0,4	24
7	0,4	24	40	2	120	73	0,4	24
8	0,1	6	41	2,2	132	74	2,3	138
9	2,1	126	42	1,3	78	75	1,1	66
10	2,3	138	43	2,1	126	76	2	120
11	5	300	44	3,5	210	77	0,29	17,4
12	2	120	45	0,8	48	78	0,8	48
13	1,1	66	46	2,1	126	79	0,3	18
14	8,4	504	47	4,1	246	80	1,1	66
15	1,3	78	48	0,8	48	81	3,2	192
16	1,3	78	49	2	120			
17	0,7	42	50	0,5	30			
18	0,8	48	51	0,4	24			
19	0,5	30	52	0,5	30			
20	1,2	72	53	1,5	90			
21	1,5	90	54	0,4	24			
22	1,2	72	55	0,6	36			
23	3,1	186	56	2,1	126			
24	1,6	96	57	2,5	150			
25	2,1	126	58	2,7	162			
26	1,3	78	59	2,1	126			
27	0,8	48	60	2,3	138			
28	0,8	48	61	2,5	150			
29	2,4	144	62	0,2	12			
30	0,7	42	63	0,3	18			
31	2,3	138	64	0,4	24			
32	4,2	252	65	0,4	24			
33	3,1	186	66	4,3	258			

Fonte: Elaboração própria através dos dados coletados

A partir da Tabela 3 consideramos um intervalo de tempo e extraímos o tempo médio dos atendimentos em segundos e a frequência absoluta de clientes neste intervalo. Multiplicando essas duas variáveis obtivemos, ao final, o tempo médio de atendimento por cliente. Os dados da Tabela 4 serão essenciais para concluirmos esse estudo de caso:

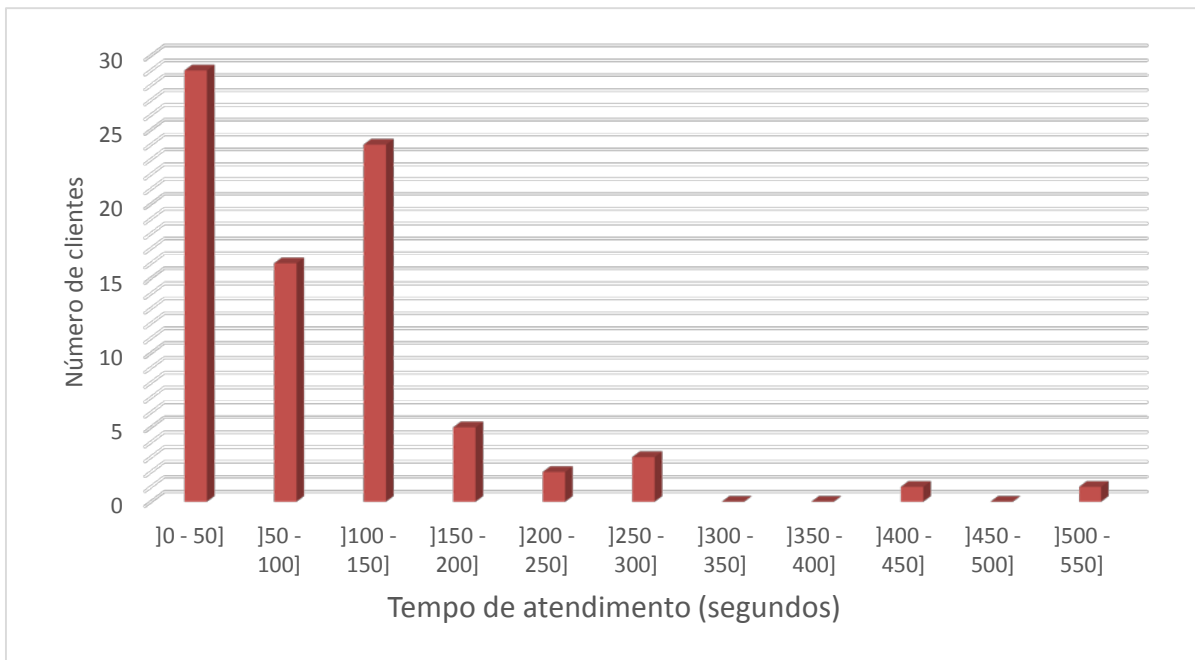
Tabela 3 - Frequência do tempo de atendimento

Intervalo em segundos	Média dos segundos (M)	Frequência absoluta (f)	Frequência absoluta acumulada	M*f
]0 - 50]	25	29	29	725
]50 - 100]	75	16	45	1200
]100 - 150]	125	24	69	3000
]150 - 200]	175	5	74	875
]200 - 250]	225	2	76	450
]250 - 300]	275	3	79	825
]300 - 350]	325	0	79	0
]350 - 400]	375	0	79	0
]400 - 450]	425	1	80	425
]450 - 500]	475	0	80	0
]500 - 550]	525	1	81	525
Mais de 550	0	0	0	
		Total: 81		$r = \frac{U}{81} = \frac{8025}{81} = 99.07$

Fonte: elaboração própria a partir dos dados coletados.

Segue abaixo um gráfico que relaciona o número de clientes e o tempo (em segundos) que durou o seu atendimento:

Figura 14 - Tempo de atendimento (seg)



Fonte: elaboração própria

Para mostrarmos que o tempo de atendimento segue uma Distribuição Exponencial, vamos calcular as probabilidades de um cliente ser atendido num tempo compreendido entre a e b segundos, de acordo com a equação (2) obtida na Seção 2.1.2:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \mu e^{-\mu x} dx = e^{-\mu a} - e^{-\mu b}$$

Onde a e b serão os extremos dos intervalos na primeira coluna da Tabela 4, o parâmetro $\mu = \frac{1}{99,07} = 0,01$ é a taxa média de atendimento e $e = 2,71$, uma aproximação para o número neperiano.

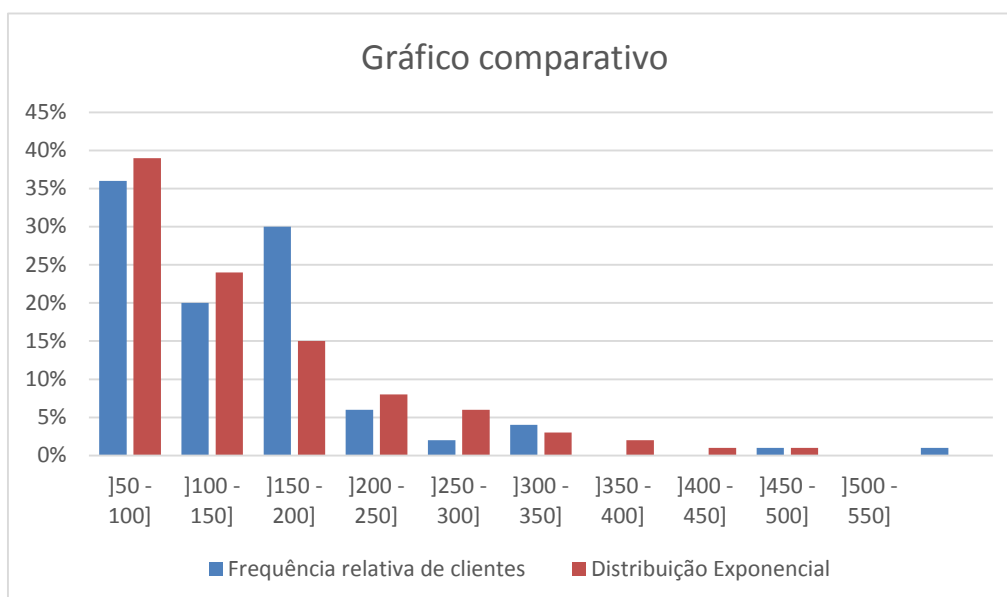
Tabela 4 - Frequência Relativa x Distribuição Exponencial

Intervalo em segundos	Média dos segundos (M)	Frequência absoluta (f)	Frequência relativa de clientes	Distribuição Exponencial
]0 - 50]	25	29	36%	0,39
]50 - 100]	75	16	20%	0,24
]100 - 150]	125	24	30%	0,15
]150 - 200]	175	5	6%	0,08
]200 - 250]	225	2	2%	0,06
]250 - 300]	275	3	4%	0,03
]300 - 350]	325	0	0%	0,02
]350 - 400]	375	0	0%	0,01
]400 - 450]	425	1	1%	0,01
]450 - 500]	475	0	0%	0
]500 - 550]	525	1	1%	0
		Total: 81	Total:100%	Total: 0,98

Fonte: elaboração própria a partir dos dados coletados.

A partir da análise da Tabela 4, podemos perceber que 86% dos clientes foram atendidos de 0 a 150 segundos. Além disso, podemos perceber através dos cálculos da distribuição exponencial que o gráfico comparativo a seguir exibe a equivalência entre a frequência relativa de clientes observada e a distribuição exponencial:

Figura 15 - Distribuição Exponencial



Fonte: Elaboração própria

3.3 Aplicação da Teoria das Filas

A disciplina desse serviço é, de acordo com a teoria, PEPS (Primeiro a Entrar, Primeiro a Sair). Ainda segundo a notação de Kendall, a fila é do tipo M/M/1 (Tempo de chegada exponencialmente distribuído – do tipo Poisson, distribuição de tempo de serviço exponencial e somente 1 canal de serviço - servidor). A população e o tamanho da fila são classificados como infinitos.

Na Tabela 1 anotamos uma amostra de $n = 81$ logo, a média (λ) de clientes que entraram no sistema por segundo é:

$$\lambda = \frac{81}{7200} = 0,01125.$$

Na Tabela 4 obtivemos que o tempo médio de atendimento por cliente foi $r = 99,07$ segundos. Então, calculamos a taxa média de atendimento:

$$\mu = \frac{1}{r} = 0,01009$$

A partir dessas variáveis podemos calcular a taxa de ocupação denotada por, ρ , dividindo a taxa média de chegada λ pela taxa média de atendimento μ . No nosso caso temos:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,01125}{0,01009} = 1,114$$

De acordo com a teoria explanada acima, se $\rho > 1$ o sistema é instável e se $\rho < 1$ o sistema é estável. O sistema estudado é altamente instável e por esse motivo não podemos calcular outros parâmetros, como os apresentados na Seção 2.5 deste texto, que servem como base para analisar o seu desempenho. Neste caso, se o sistema estudado mantiver estes dados após um longo período de funcionamento a fila será imensa.

Para tornar a taxa de ocupação $\rho < 1$ (estável), precisamos diminuir, no mínimo, 0,1145 da taxa de ocupação atual:

$$\rho = 1,1145 - 0,1145 = 1$$

Para que isso seja possível, é preciso obter um novo μ , que iremos chamar de μ' . Sabemos que:

$$\mu' = 0,1145$$

Sendo assim, para obter esse valor precisamos calcular um novo r , que iremos chamar de r' .

$$\mu' = 0,1145$$

$$r' = \frac{1}{\mu'} \rightarrow \frac{1}{0,1145} = 87,336$$

Após o cálculo de r' , multiplicamos pelo número total de clientes no sistema ($n = 81$), e então obtemos:

$$U' = 87,336 \times 81$$

$$U' = 7074,22$$

Para se obter o resultado ótimo U^β (taxa de ocupação $\rho = 1$), é necessário subtrair o tempo de atendimento médio total do sistema estudado U , obtido na Tabela 4, do tempo de atendimento médio U' :

$$U^\beta = U - U' \rightarrow 8025 - 7074,23$$

$$U^\beta = 950,76 \text{ segundos}$$

Ou seja, para que o sistema fique estável e para se obter um resultado ótimo, é necessário diminuir 950,76 segundos do sistema estudado.

Para calcular quanto o atendimento deveria economizar em tempo, ω , em cada cliente do sistema, basta dividirmos U^β por $n=81$. Outra maneira seria subtrair o tempo médio de atendimento por cliente (r) no sistema estudado pelo tempo médio ótimo de atendimento por cliente (r'):

$$\omega = \frac{U^\beta}{n}$$

$$\omega = \frac{950,76}{81} = 11,73$$

$$\omega = r - r'$$

$$\omega = 99,07 - 87,33 = 11,73$$

Nesse caso, para calcularmos os parâmetros da Seção 2.5 devemos supor um tempo de atendimento médio menor que 87,33. Podemos supor uma situação em ocorra um tempo de atendimento médio de 70 segundos por cliente. Desse modo, teremos um novo μ médio, o qual denotaremos por μ'' , e uma nova taxa de ocupação, ρ'' , sendo que λ continua sendo 0,01125:

$$\mu'' = \frac{1}{70} = 0,0142$$

$$\rho'' = \frac{\lambda}{\mu''} = \frac{0,01125}{0,0142} = 0,79$$

Nessa situação temos um $\rho'' < 1$, obtendo uma situação de um sistema estável. Desta forma podemos calcular:

- 1- A Probabilidade de o sistema estar vazio, fazendo $n = 0$ na fórmula (1):

$$P(0) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu''}\right) = 0,21 = 21\% ;$$

- 2- Número médio de clientes no sistema:

$$NS = \frac{\lambda}{(\mu'' - \lambda)} = 3,8 \text{ clientes};$$

- 3- Número médio de clientes na fila esperando o atendimento:

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu''(\mu'' - \lambda)} = 3 \text{ clientes};$$

- 4- Tempo médio de permanência do cliente no sistema, em segundos:

$$TS = \frac{1}{(\mu'' - \lambda)} = 338 \text{ segundos};$$

- 5- Tempo médio de permanência do cliente na fila, em segundos:

$$TF = \frac{\lambda}{\mu''(\mu''-\lambda)} = 268 \text{ segundos.}$$

A partir dos cálculos acima, podemos concluir que o tempo médio de permanência no sistema será de 5,6 minutos, mesmo em horário de grande frequência de clientes. Um tempo tolerável levando em conta que o sistema está em seu ponto ideal e atuando com uma maior eficiência em ambas as partes, ou seja, é capaz de atender as necessidades dos clientes.

4. CONCLUSÃO

Com o uso da *Teoria das Filas*, podemos analisar a operacionalidade de um sistema. Seus dados permitem avaliar o sistema de gerência do cliente e do atendimento. Quando combinamos estas informações, obtemos informações importantes e podemos melhorar o seu funcionamento. Portanto, esta teoria pode ser uma ferramenta útil para modelar o sistema de filas de um supermercado.

Diante dos resultados obtidos, sabemos que existe a possibilidade de otimizar o sistema de filas estudado. A partir da amostra obtida, é possível estudar uma fila e, através da cronometragem dos tempos de atendimento, otimizá-la para que os clientes e o empresário fiquem mais satisfeitos com o sistema.

Atualmente, o tempo de atendimento de cada cliente neste caixa rápido é de 99,07 segundos. A análise feita mostra que, para este sistema ser estável, este tempo médio de atendimento por cliente deveria ser de 87,33 segundos. Por esse motivo, para que o supermercado em estudo tenha uma taxa de utilização de serviço estável, é necessário diminuir o tempo de atendimento do caixa rápido em, no mínimo, 11,73 segundos de cada cliente atendido.

Pode-se perceber também que, mesmo diminuindo esse tempo sugerido, os clientes ainda enfrentariam filas de 5,6 minutos que não necessariamente os deixariam insatisfeitos.

Segundo o PROCON da cidade em que foi feito o estudo de caso, existe uma lei municipal que estabelece um tempo máximo de esperas nos estabelecimentos comerciais. De acordo com essa lei, nos dias normais o limite de espera é de 15 minutos. Já nos domingos e feriados, 30 minutos.

Identificou-se também que isto é praticado em alguns outros estados e cidades do Brasil. Na Câmara Municipal de Macéio foi aprovado o projeto de lei que o consumidor não poderá permanecer mais de 20 minutos na fila de um caixa em dias considerados normais, além de ultrapassar 30 minutos em véspera de feriado e após feriados prolongados, havendo a previsão de multa para quem descumprir tais normais.

No estado do Paraná, a lei Nº 13400 - 21/12/2001 Publicado no Diário Oficial Nº 6137 de 26/12/2002, determina que as instituições bancárias, financeiras e de crédito, bem como os supermercados, deverão colocar a disposição dos seus usuários, pessoal suficiente e necessário, no setor de caixa, para que o atendimento seja efetivado em tempo

razoável. Entende-se atendimento em tempo razoável o prazo máximo de 20 minutos em dias normais e de 30 minutos em véspera ou após feriados prolongados.

De acordo com a média das leis verificadas, o tempo de espera proposto em nosso estudo de caso (5,6 minutos) é consideravelmente abaixo do limite. Portanto, concluímos que é um tempo tolerável.

Por se tratar de um servidor de atendimento com produtos limitados a 10 unidades, o maior objetivo é realizar um atendimento de alta qualidade e eficiência (rápido). Porém, sempre há imprevistos, fazendo com que o tempo de atendimento seja mais longo que o normal. Isso torna a média de atendimento um pouco maior, distorcendo a tendência original do servidor (caixa rápido).

Outros experimentos são necessários para concluir de maneira mais precisa esse modelo de otimização de filas. Mas analisando esse estudo de caso, a diminuição no tempo de atendimento pode ser obtida por alguns meios, como por exemplo: na otimização do tempo utilizado pelos clientes para pagamento de suas compras. Esse tempo ótimo pode ser atingido através da correção de alguns procedimentos imperfeitos, que foram identificados no serviço prestado durante a coleta de dados. Por parte do supermercado, seria necessário realizar um planejamento prévio de troco (dinheiro) que um caixa rápido necessita para atender seus clientes. Desse modo, não será necessário chamar o responsável para abastecer o caixa durante o atendimento do cliente.

O tempo de atendimento também pode ser melhorado se houver uma maior agilidade dos funcionários que trabalham nesse caixa rápido, diminuindo o tempo de atendimento médio.

Devemos levar em conta algumas imperfeições que aumentam o tempo de atendimento e que não serão totalmente previsíveis devido a sua intangibilidade. É o caso dos pagamentos com o cartão de crédito ou débito e as instabilidades das operadoras de cartão. Esse tipo de pagamento é indispensável pois torna as compras mais acessíveis e viáveis. Diante das modernidades, os estabelecimentos necessitam oferecer facilidades aos clientes.

Alguns estabelecimentos, para distrair os clientes durante o tempo de espera, colocam músicas, espelhos e produtos próximos das filas. Mas é importante ressaltar que, no caso dos supermercados, o tempo de espera no sistema é valorizado, pois muitas vezes os clientes tem consigo produtos perecíveis.

Devido ao elevado grau de competição do setor analisado, o simples aumento da eficiência através da correção desses obstáculos encontrados, favorece aos gestores a se

manterem competitivos e com um alto grau de desempenho em relação as outras organizações do setor.

Essas ações de melhorias através da junção da ciência e de habilidades empreendedoras é o primeiro passo para garantir o sucesso do empreendimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARDOSO, F., Fernandes, R., Santos, Y. **Aplicação de teoria de filas no sistema de uma panificadora**. XXX Encontro Nacional de Engenharia de Produção, São Carlos, 2010. Disponível em: <http://www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2010_TN_STP_1-18_771-15877.pdf>. Acesso em: 15 de abril de 2015.

CARVALHO, L., *et.al.* **Aplicação de teoria das filas no restaurante universitário da UFMS**. XLV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Natal, 2013. Disponível em: <http://www.eng-prod.ufms.br/wp-content/uploads/2013/11/SBPO-2013-Teoria-das-Filas.pdf>. Acesso em: 17 de Agosto de 2014.

COSTA, L.C. **Teoria das filas**. Disponível em: <http://www.deinf.ufma.br/mario/grad/filas/TeoriaFilas_Cajado.pdf>. Acesso em: 17 de Agosto de 2014.

CRANE, Roger R. **Pesquisa operacional e sua aplicação no varejo**. RAE - Revista de Administração de Empresas, 1963, vol. 2, issue 6.

DOILE, L.F Pacheco. **Teoria das filas – analisando o fluxo de atendimento e o número de atendentes em um supermercado**. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29741/000779029.pdf?sequence=1>. Acesso em 7 de março de 2015.

EHRlich, P.J., **Pesquisa Operacional: curso introdutório**. 3 ed. São Paulo: Atlas, 1991.

FERREIRA, M.; VENÂNCIO, M.; ABRANTES, L. **Análise da eficiência do setor de supermercados no Brasil**. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci-arttext&pid=S1413-80502009000200007>. Acesso em 2 de maio de 2015.

FIGUEIREDO, D.D., Rocha, S.H., **Aplicação da teoria das filas na otimização do número de caixas: um estudo de caso**. Iniciação Científica CESUMAR, vol 2. no.12, 175-182, 2010.

INHESTA, S. **Sector de supermercado quer ampliar a participação no PIB**. Disponível em: <<http://economia.estadao.com.br/noticias/geral,setor-de-supermercados-quer-ampliar-participacao-no-pib,152812e>>. Acesso em 4 de fevereiro de 2015.

MARINS, F.A.S. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: Cultura Acadêmica, Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2011.

MIRSHAWKA, V. **Pesquisa Operacional**. São Paulo: Nobel, 1978.

MORABITO, F., Lima, F.C.R., **Um modelo para analisar o problema de filas em caixas de supermercados: um estudo de caso**, Pesquisa Operacional, v. 20, no. 1, junho 2000.

MORAIS, F. G. **Introdução À Teoria das Filas**. Disponível em: <Error! Hyperlink reference not valid.>. Acesso em: 12 de abril de 2015.

SHAMBLIN, J.E., Stevens, G. T. **Pesquisa operacional: uma abordagem básica**. São Paulo: Atlas, 1979.

SILVA, V.M.D, Souza, R.A., Bortolotti, S.L.V. **Teoria das Filas aplicada ao caso: Porto de Itajaí-SC**. XIII SIMPEP, Bauru, 2006.

Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional. Disponível em: <<http://www.sobrapo.org.br/>>. Acesso em 02 de junho de 2015

ROSA, R. **Aplicação da teoria das filas para análise da Capacidade: um estudo de caso de uma agência Bancária**. Instituto Cenecista Fayal de Ensino Superior, Itajaí, 2008.

TORRES, O.F. **Elementos da teoria das filas**. Disponível em: <http://rae.fgv.br/sites/rae.fgv.br/files/artigos/10.1590_S0034-75901966002000006.pdf>. Acesso em: 10 de julho de 2014.

VALIM, Helio. **Otimização: A origem da Pesquisa Operacional**. Disponível em: <www.logsite.eng.br/Textos/artigopo.doc>. Acesso em: 10 de julho de 2015.