

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Faculdade de Engenharia

**Métodos híbridos de pontos interiores/exteriores e de aproximantes de funções em problemas multiobjetivo de despacho econômico e ambiental**

**Elis Gonçalves**

**Bauru – SP  
Junho – 2015**



Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Faculdade de Engenharia

**Métodos híbridos de pontos interiores/exteriores e de  
aproximantes de funções em problemas multiobjetivo de  
despacho econômico e ambiental**

**Elis Gonçalves**

**Orientador: Prof. Dr. Antonio Roberto Balbo**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Bauru da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Campus de Bauru, como um dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Bauru – SP  
Junho – 2015

---

Gonçalves, Elis

Métodos híbridos de pontos interiores/exteriores e de aproximantes de funções em problemas multiobjetivo de despacho econômico e ambiental / Elis Gonçalves, 2015  
172 f.

Orientador: Antonio Roberto Balbo.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2014

1. Método primal-dual de pontos interiores/exteriores. 2. Correção de inércia. 3. Suavização de funções. 4. Métodos de otimização multiobjetivo. 5. Problema multiobjetivo de despacho econômico/ambiental. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado de ELÍS GONÇALVES,  
DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DO(A)  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.**

Aos 02 dias do mês de junho do ano de 2015, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação, da Faculdade de Engenharia de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru, Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Bauru, Profa. Dra. MÁRCIA MARCONDES ALTIMARI SAMED do(a) Departamento de Engenharia de Produção / Universidade Estadual de Maringá, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de ELÍS GONÇALVES, intitulada "MÉTODOS HÍBRIDOS DE PONTOS INTERIORES/EXTERIORES E DE APROXIMANTES DE FUNÇÕES EM PROBLEMAS MULTIOBJETIVO DE DESPACHO ECONÔMICO E AMBIENTAL". Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: ABROVADO..... Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

  
Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO

  
Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO

  
Profa. Dra. MÁRCIA MARCONDES ALTIMARI SAMED

---

*Dedico a minha mãe, Luzia,  
que sempre fez o possível e o impossível por mim,  
a minha irmã, Taís,  
pelo incentivo e apoio,  
e a minha avó,  
que de alguma forma, sempre esteve e estará presente.*



---

## AGRADECIMENTOS

À Deus, que por todos os dias de minha vida me deu força, paciência e perseverança para não desistir, e sabedoria para concluir este trabalho.

À toda minha família, por me incentivarem a prosseguir e entenderem minhas ausências ao longo dessa jornada.

Ao meu orientador e amigo, professor Dr. Antonio Roberto Balbo, por toda orientação e amizade construída ao longo do mestrado. Agradeço também pela paciência e por sempre tentar mostrar uma saída para os problemas, com incentivo e confiança em meu trabalho, principalmente quando as coisas não davam certo.

À minha banca de defesa e, em especial, ao professor Dr. Leonardo Nepomuceno pelos ensinamentos, revisões e sugestões e à professora Dra. Edméa Cássia Baptista, que me mostrou os primeiros passos da pesquisa científica.

Aos meus grandes amigos, Gabriela e Diego, irmãos que fiz durante o mestrado. Obrigada por toda ajuda, pelas sugestões, ideias e, principalmente, por aguentarem e entenderem, por muitas vezes, meu estresse e minhas lágrimas. Sem vocês eu não teria chego até aqui. A trinca sempre estará em meu coração.

Aos amigos do laboratório, que já terminaram e os que ainda estão na luta. Agradeço pela ajuda, pelos palpites e por proporcionarem um ambiente prazeroso e divertido aos estudos.

Aos meus amigos, de longa data e os que carrego da época da faculdade, que de

---

alguma forma sempre estiveram presentes e torceram por mim.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e da Licenciatura em Matemática da UNESP - Bauru, por contribuírem para minha formação acadêmica.

Aos funcionários da Seção Técnica de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia e do Departamento de Matemática, pela colaboração e atenção.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio financeiro.

*“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos  
não é senão uma gota de água no mar.  
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.”*

*Madre Teresa de Calcutá*

*“A persistência é o menor caminho para o êxito”*

*Charles Chaplin*



O problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental é formulado envolvendo a minimização de dois objetivos conflitantes: o custo da geração termoelétrica de energia e a quantidade de emissão de poluentes, sujeitos ao atendimento da demanda e aos limites de operação do sistema. A função objetivo relativa ao custo pode ser modelada de diferentes formas, entre elas, aquela que inclui os efeitos dos pontos de carregamento de válvula, que quando incorporados à função, transformam-na em não-diferenciável nesses pontos, além de não convexa, impossibilitando que métodos clássicos de otimização sejam empregados à resolução do problema. Devido a esse fato, grande parte dos trabalhos encontrados na literatura para resolução deste tipo de problema, não incluem esses efeitos ou, quando incluem utilizam-se de métodos heurísticos. No presente trabalho, um método híbrido envolvendo o primal-dual previsor-corretor barreira logarítmica modificada, com estratégias de correção de inércia e de suavização de funções, acopladas aos métodos de solução de problemas multiobjetivo, é desenvolvido e aplicado à resolução do problema em destaque. A estratégia de correção de inércia possibilita a convergência do método para mínimos locais e a técnica de suavização torna a função despacho econômico diferenciável nos pontos de carregamento de válvula, presentes nos termos modulares da função, possibilitando o uso do método híbrido proposto. Um novo método de resolução de problemas multiobjetivo é proposto e utilizado, variante do método  $\varepsilon$ -restrito e denominado de  $\varepsilon$ -restrito canalizado. Os métodos foram implementados em linguagem Matlab 2011a e aplicados em três casos-teste, demonstrando eficiência nos resultados obtidos quando comparados a outros encontrados na literatura.

**Palavras-chave:** Método primal-dual de pontos interiores/exteriores, correção de inércia, suavização de funções, métodos de otimização multiobjetivo, problema multiobjetivo de despacho econômico/ambiental.



---

## ABSTRACT

The multiobjective economic and environmental dispatch problem is formulated involving the minimization of two conflicting goals: the cost of power thermoelectric generation and the amount of pollutant emissions, subject to meeting demand and system operating limits. The objective function related to the cost can be modeled in different ways, among them, one that includes the effects of valve loading points, which when incorporated to the function, turn it into non-differentiable at these points, as well as non-convex, precluding that classical optimization methods are employed to solve the problem. Due to this fact, most studies found in the literature for solving this type of problem, do not include these effects or, when they are included, the heuristic methods are used. In this study, a hybrid method involving the predictor-corrector primal-dual modified logarithmic barrier method, inertia correction strategies and smoothing functions, coupled to the solution methods for multiobjective problems, is developed and applied to solve the highlighted problem. The inertia correction strategy ensures that the proposed method converges to local minima and the smoothing technique makes the economic dispatch function differentiable in valve loading points, present in modular terms of function, enabling the use of the proposed hybrid method. Variant of the  $\varepsilon$ -constraint method, a new multiobjective optimization method is proposed and used, and called the bounded  $\varepsilon$ -constraint method. The proposed methods were implemented in Matlab 2011a language and applied in three test cases, and the results obtained show its efficiency when compared to others found in the literature.

**Palavras-chave:** Primal-dual interior/exterior point method, inertia correction, functions smoothing, multiobjective optimization methods, multiobjective environmental/economic dispatch problem.



<b>1</b>	<b>Introdução e organização do trabalho</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Organização do trabalho . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Geração de energia</b>	<b>7</b>
2.1	O uso da energia ao decorrer dos anos . . . . .	8
2.2	Geração termoelétrica de energia . . . . .	10
2.2.1	Princípios técnicos e econômicos da geração termoelétrica de energia	11
2.2.2	Impactos ambientais da geração termoelétrica . . . . .	12
2.2.3	Geração termoelétrica no Brasil . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Problemas de despacho</b>	<b>17</b>
3.1	Despacho econômico . . . . .	18
3.2	Despacho ambiental . . . . .	21
3.3	Problema Multiobjetivo de Despacho Econômico e Ambiental com pontos de carregamento de válvula (PMDEA-PV) . . . . .	24
3.4	Estado da arte dos problemas de despacho . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Métodos de aproximação e suavização de funções</b>	<b>33</b>
4.1	Aproximação polinomial . . . . .	34
4.2	<i>Splines</i> . . . . .	36
4.3	Função tangente hiperbólica . . . . .	37

4.4	Método da suavização hiperbólica . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Otimização: teoria e métodos de solução de problemas não lineares</b>	<b>41</b>
5.1	Revisão da teoria e de métodos de otimização não linear . . . . .	41
5.1.1	Revisão teórica de otimização . . . . .	43
5.1.1.1	Otimização irrestrita . . . . .	44
5.1.1.2	Otimização restrita . . . . .	45
5.2	Métodos de otimização . . . . .	50
5.2.1	Método dual-Lagrangiano . . . . .	50
5.2.2	Método de barreira . . . . .	52
5.2.3	Barreira modificada e rescalamento não linear . . . . .	54
5.2.3.1	Atualização dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange . . . . .	56
5.2.3.2	Barreira logarítmica modificada . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Metodologia de solução</b>	<b>59</b>
6.1	Breve abordagem sobre métodos de pontos interiores e exteriores . . . . .	59
6.2	O método primal-dual predictor-corrector barreira logarítmica modificada (PDPCBLM) . . . . .	65
6.2.1	Linearização das equações . . . . .	68
6.2.2	Sistema de direções . . . . .	71
6.2.3	Correção de inércia . . . . .	71
6.2.4	Cálculo das direções de busca . . . . .	74
6.2.4.1	Procedimento predictor . . . . .	75
6.2.4.2	Procedimento corrector . . . . .	78
6.2.5	Atualização do parâmetro de barreira . . . . .	79
6.2.6	Novo ponto e comprimento do passo . . . . .	80
6.2.7	Critério de parada . . . . .	82
6.3	Algoritmo do método PDPCBLM . . . . .	83
<b>7</b>	<b>Problemas de otimização multiobjetivo</b>	<b>85</b>
7.1	Curva de soluções eficientes ou Pareto-ótimas . . . . .	86
7.2	Método da soma ponderada . . . . .	87
7.2.1	Método da soma ponderada e o PMDEA-PV . . . . .	88

---

7.3	Método $\varepsilon$ -restrito . . . . .	90
7.3.1	Método $\varepsilon$ -restrito e o PMDEA-PV . . . . .	90
7.3.1.1	Função objetivo: despacho ambiental . . . . .	91
7.3.1.2	Função objetivo: despacho econômico . . . . .	92
7.4	Método $\varepsilon$ -restrito canalizado . . . . .	93
7.4.1	Estratégia de utilização do método $\varepsilon$ -restrito canalizado . . . . .	94
<b>8</b>	<b>Resultados</b>	<b>97</b>
8.1	Resultados . . . . .	98
8.2	Caso 3 geradores . . . . .	98
8.2.1	Soma ponderada: 3 geradores . . . . .	98
8.2.2	$\varepsilon$ -restrito canalizado: 3 geradores . . . . .	100
8.3	Caso 6 geradores . . . . .	103
8.4	Caso 10 geradores . . . . .	105
8.5	Caso 19 geradores . . . . .	107
8.5.1	Uso do pacote de otimização Couenne . . . . .	108
8.5.2	Considerações para o caso de 19 geradores . . . . .	111
<b>9</b>	<b>Conclusões</b>	<b>113</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>114</b>
<b>A</b>	<b>Dados e resultados numéricos</b>	<b>129</b>
A.1	Caso 3 geradores . . . . .	129
A.1.1	Soma ponderada . . . . .	131
A.1.2	Método $\varepsilon$ -restrito . . . . .	131
A.2	Caso 6 geradores . . . . .	135
A.3	Caso 10 geradores . . . . .	141
A.4	Caso 19 geradores . . . . .	144



## LISTA DE FIGURAS

2.1	Potencial tecnicamente aproveitável para geração de energia hidrelétrica no mundo . . . . .	9
2.2	Oferta interna de energia elétrica por fonte no Brasil em 2013 . . . . .	10
2.3	Curva de entrada-saída de uma Unidade Térmica . . . . .	12
3.1	Curva de entrada-saída de uma Unidade Térmica com efeito de ponto de carregamento de válvula . . . . .	20
4.1	Fenômeno de Runge . . . . .	35
4.2	Aproximação via tangente hiperbólica . . . . .	38
4.3	Função $\vartheta$ para diferentes valores de $\eta$ . . . . .	40
7.1	Soluções eficientes: problema multiobjetivo de funções não convexas . . . . .	88
7.2	Curva de soluções eficientes: custo e emissões . . . . .	90
7.3	Subintervalo para a função ambiental: método $\varepsilon$ -restrito canalizado . . . . .	96
8.1	Caso 3 geradores: método da soma ponderada . . . . .	100
8.2	Caso 3 geradores: método $\varepsilon$ -restrito canalizado - todas as soluções <i>versus</i> curva de Pareto-ótima . . . . .	102
8.3	Caso 6 geradores: método $\varepsilon$ -restrito canalizado - todas as soluções <i>versus</i> curva de Pareto-ótima . . . . .	104
8.4	Caso 10 geradores: método $\varepsilon$ -restrito canalizado e PDPCBLM - curva de Pareto-ótima . . . . .	107

## LISTA DE FIGURAS

---

8.5	Caso 19 geradores: método $\varepsilon$ -restrito canalizado e pacote Couenne . . . . .	109
8.6	Caso 19 geradores: método $\varepsilon$ -restrito canalizado e PDPCBLM - curva Pareto-ótima . . . . .	110
8.7	Caso 19 geradores: método $\varepsilon$ -restrito canalizado - Comparação entre o método PDPCBLM e o Couenne . . . . .	111

---

## LISTA DE TABELAS

2.1	Capacidade instalada em $MW$ no Brasil . . . . .	15
8.1	Valores de $\alpha$ e as soluções $F_e$ versus $F_a$ . . . . .	99
8.2	Valores máximos e mínimos de $F_e$ e $F_a$ para o caso de 3 geradores: método da soma ponderada . . . . .	99
8.3	Valores máximos e mínimos de $F_e$ e $F_a$ para o caso de 3 geradores: método $\varepsilon$ -restrito canalizado . . . . .	101
8.4	Valor mínimo da função custo ( $F_e$ ), aproximada e original: 3 geradores . .	101
8.5	Valor mínimo da função custo ( $F_e$ ), aproximada e original: 6 geradores . .	103
8.6	Valores máximos e mínimos de $F_e$ e $F_a$ para o caso de 6 geradores: método $\varepsilon$ -restrito canalizado . . . . .	104
8.7	Valores máximos e mínimos de $F_e$ e $F_a$ para o caso de 10 geradores: método $\varepsilon$ -restrito canalizado . . . . .	106
8.8	Valor mínimo da função custo ( $F_e$ ), aproximada e original: 3 geradores . .	106
8.9	Valor mínimo da função custo ( $F_e$ ), aproximada e original: 19 geradores . .	110
8.10	Valores máximos e mínimos de $F_e$ e $F_a$ para o caso de 19 geradores: método $\varepsilon$ -restrito canalizado . . . . .	110
8.11	Valores máximos e mínimos de $F_e$ e $F_a$ para o caso de 19 geradores de Balamurugan et al. (2014) . . . . .	112
A.1	Dados 3 geradores . . . . .	130

A.2	Valores de $\alpha$ , ponto inicial ( $x_i$ ), parâmetro de barreira inicial ( $\mu$ ) e fator de aproximação ( $\eta$ ) . . . . .	131
A.3	Região delimitada e soluções eficientes: caso 3 geradores . . . . .	131
A.5	Região delimitada, ponto inicial ( $x_i$ ), parâmetro de barreira inicial ( $\mu$ ) e fator de aproximação ( $\eta$ ): caso 3 geradores . . . . .	133
A.7	Dados 6 geradores . . . . .	136
A.8	Região delimitada e soluções eficientes: caso 6 geradores . . . . .	137
A.10	Região delimitada, ponto inicial ( $x_i$ ), parâmetro de barreira inicial ( $\mu$ ) e fator de aproximação ( $\eta$ ): caso 6 geradores . . . . .	139
A.12	Dados 10 geradores . . . . .	142
A.13	Região delimitada e soluções eficientes: caso 10 geradores . . . . .	143
A.15	Região delimitada, ponto inicial ( $x_i$ ), parâmetro de barreira inicial ( $\mu$ ) e fator de aproximação ( $\eta$ ): caso 10 geradores . . . . .	143
A.17	Dados 19 geradores . . . . .	145
A.18	Região delimitada e soluções eficientes: caso 19 geradores . . . . .	146
A.20	Região delimitada, ponto inicial ( $x_i$ ), parâmetro de barreira inicial ( $\mu$ ) e fator de aproximação ( $\eta$ ): caso 19 geradores . . . . .	147

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

### 1.1 Introdução

Os problemas de despacho estão inseridos na área de sistemas de energia elétrica e são utilizados a fim de calcular a geração termoelétrica de energia, com base em seus aspectos econômicos (problema de despacho econômico – PDE) e para reduzir a emissão de poluentes (problema de despacho ambiental – PDA), respeitando o atendimento da demanda de energia e as restrições operacionais dos geradores. Um problema multiobjetivo envolvendo os dois aspectos, econômico e ambiental, pode ser modelado. A esse problema dá-se o nome de problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental (PMDEA) e sua resolução tem por objetivo reduzir os custos de geração de energia concomitantemente a redução da emissão de poluentes.

A resolução do problema de despacho econômico determina o despacho ótimo de potência ativa das unidades geradoras, de modo a minimizar os custos dos combustíveis ao mesmo tempo em que a demanda do sistema e as restrições operacionais são atendidas. Em sua formulação clássica, o PDE é modelado como um problema de otimização com função objetivo convexa e quadrática. Tal formulação, apesar de bastante difundida na literatura, não leva em consideração alguns aspectos da geração termoelétrica, como a existência de pontos de carregamento de válvula. Após a representação desse fenômeno, termos modulares são acrescentados à função objetivo do problema, tornando-a não convexa e

não-diferenciável em determinados pontos de seu domínio.

O problema de despacho ambiental leva em conta as condições ambientais de um sistema de geração de energia. O PDA passou a ser utilizado nas usinas termoeletricas com o objetivo de reduzir a emissão de poluentes, causada pela queima de combustíveis fósseis, respeitando também as restrições de atendimento de demanda de energia e as restrições operacionais de geradores. Apesar de o Brasil possuir uma matriz energética elétrica baseada, principalmente, nas usinas hidrelétricas, devido a sazonalidade, os níveis de água dos reservatórios não são sempre os mesmos. A escassez das chuvas levou o governo brasileiro a investir mais nas usinas que não dependem do ciclo da água, como por exemplo as termoeletricas, que vêm se tornando cada vez mais relevantes em relação a geração de energia elétrica no país, a fim de que um racionamento ou *black out* seja evitado.

Diante deste cenário, é de extrema importância que estratégias de minimização dos custos de geração, bem como da emissão de poluentes sejam desenvolvidas nas usinas termoeletricas. Por apresentar objetivos conflitantes, a resolução de um problema multiobjetivo não pode ser realizada de forma direta e exige a utilização de estratégias, encontradas na literatura, que transformam o problema multiobjetivo em um conjunto de problemas mono-objetivos. Dessas estratégias, duas destacam-se na literatura: a estratégia de soma ponderada, que considera a soma ponderada das funções ambientais e econômicas como uma única função objetivo e a estratégia  $\varepsilon$ -restrito, que considera a minimização dos custos sujeito às restrições de emissões máximas admissíveis de poluentes para cada unidade de geração de energia ou, ainda, pode considerar a minimização da função ambiental considerando a função custo limitada superiormente como uma restrição do problema. As soluções obtidas para os problemas mono-objetivos caracterizam-se de duas formas: soluções eficientes ou não dominadas e, soluções não eficientes ou dominadas. O conjunto de soluções eficientes obtido compõe uma curva de soluções eficientes, denominada de curva de Pareto-ótima.

Neste trabalho, o PMDEA é resolvido através de uma composição de técnicas e, à função custo, são inseridos os pontos de carregamento de válvula, assim, o problema passa a ser chamado de problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental com pontos de carregamento de válvula (PMDEA-PV). Devido a característica não convexa

da função após a inclusão desses efeitos, no presente trabalho é proposta uma variação do método  $\varepsilon$ -restrito. Esta variação, denominada  $\varepsilon$ -restrito canalizado, inclui, além de um limitante superior, um limitante inferior para a restrição ambiental do problema de minimização dos custos, de tal forma a facilitar a obtenção de pontos da curva de soluções eficientes. O limite inferior imposto à função ambiental é importante, em termos práticos, para a convergência do método híbrido proposto à resolução do PMDEA-PV e, conseqüentemente, para a obtenção da curva de soluções eficientes do problema problema multiobjetivo investigado.

Após formulados matematicamente, aos problemas de despacho podem ser aplicados métodos de otimização. Diversos autores têm proposto métodos de resolução para o PMDEA e o PMDEA-PV. Devido a característica de não-diferenciabilidade do PMDEA-PV, a maioria das abordagens são baseadas em heurísticas. Tendo em vista a dificuldade de métodos determinísticos para a resolução deste problema, neste trabalho é proposto um método híbrido que combina o método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores/exterores baseado na função barreira logarítmica modificada (PDPCBLM), um procedimento de suavização de funções e técnicas de otimização multiobjetivo. O método da função barreira modificada está incluído no contexto da técnica de rescalamento não linear (Griva & Polyak, 2006), a qual aplica uma transformação sobre o problema de otimização restrito a fim de transformar esse problema em um outro problema equivalente, o qual relaxa as condições de fronteira do problema original, permitindo que o método de pontos interiores/exterores opere com uma sequência de pontos inactíveis ao problema original, que, sob determinadas condições, converge para uma solução factível e localmente ótima deste problema. Uma das vantagens no uso de métodos baseados na função barreira modificada é que, estes, são menos propensos a apresentar problemas de mau condicionamento da matriz hessiana que os baseados na barreira clássica. O procedimento de suavização de funções aqui empregado se baseia nos trabalhos de Chen (2012) e Souza (2010). A principal finalidade do uso da técnica de suavização é permitir que métodos clássicos de otimização, que requerem a diferenciabilidade da função objetivo, sejam aplicados à resolução do PMDEA-PV, como é o caso do método PDPCBLM.

Neste trabalho, foi proposto um método híbrido envolvendo uma composição de técnicas: método primal-dual de pontos interiores/exterores, que utiliza o procedimento previsor-corretor e a estratégia de barreira logarítmica modificada, um procedimento de

suavização de funções e métodos de resolução de problemas multiobjetivo. A composição proposta foi implementada com o objetivo de obter uma curva de Pareto-ótima para PMDEA-PV em diferentes casos-teste. A técnica da suavização hiperbólica foi utilizada a fim de suavizar os termos modulares da função custo com pontos de carregamento de válvula e os métodos de otimização multiobjetivo, da soma ponderada e do  $\varepsilon$ -restrito, para tratar o caso multiobjetivo do problema e permitir a aplicação do método de otimização PDPCBLM. Também foi proposta e utilizada uma variação na técnica  $\varepsilon$ -restrito, denominada de método  $\varepsilon$ -restrito canalizado.

### 1.2 Organização do trabalho

O presente trabalho encontra-se dividido e organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2, são levantados aspectos da geração de energia, seu uso no decorrer dos anos e os impactos ambientais causados através de sua geração. Além disso, é destacada a geração de energia elétrica do tipo termoeletrica, seus aspectos técnicos, econômicos e ambientais, no Brasil e no mundo.

No Capítulo 3, os problemas de despacho econômico, com e sem a inserção de pontos de carregamento de válvula e de despacho ambiental são descritos, bem como suas respectivas formulações matemáticas e o problema multiobjetivo, que envolve o despacho econômico e ambiental.

O Capítulo 4 faz um levantamento sobre métodos de aproximação e suavização de funções e destaca-se o método da suavização hiperbólica, utilizado neste trabalho.

No Capítulo 5, é feita uma revisão dos métodos de otimização que apresentam relação com este trabalho, técnicas de solução para problemas com ou sem restrições, bem como sobre o método dual-lagrangiano e os métodos de barreira.

Além do desenvolvimento do método Primal-Dual Previsor-Corretor Barreira Logarítmica Modificada (PDPCBLM), utilizado na resolução do problema multiobjetivo, no Capítulo 6 é feita uma revisão teórica sobre métodos de pontos interiores e exteriores.

O Capítulo 7 destina-se à apresentação de métodos de resolução de problemas de otimização multiobjetivo: método da soma ponderada e método  $\varepsilon$ -restrito, com destaque a

uma proposta de variação deste último, denominada de método  $\varepsilon$ -restrito canalizado. São apresentadas também as formulações de problemas mono-objetivo, resultantes da aplicação desses métodos, utilizados para resolução do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental.

No Capítulo 8, são apresentados os resultados obtidos da aplicação do método proposto à resolução do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental com inserção de pontos de carregamento de válvula, utilizando-se as formulações mono-objetivo definidas no Capítulo anterior.

Por fim, no Capítulo 9, são feitas as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido. Em seguida, são apresentadas as referências bibliográficas.



## CAPÍTULO 2

## GERAÇÃO DE ENERGIA

A energia, em qualquer uma de suas formas, é de uso essencial na vida do ser humano. Por esse motivo, ao longo dos anos, o homem tem buscado maneiras eficientes de aproveitar essa energia, dependendo da influência e das necessidades inerentes dos diferentes grupos sociais. Entender essas diferentes percepções é de extrema importância, pois elas condicionam a maneira de se realizar o planejamento energético em determinado lugar (Jannuzzi & Swisher, 1997).

Muitas fontes de geração e formas de aproveitamento de energia foram descobertas e utilizadas ao longo do tempo, mas foi a Revolução Industrial um grande marco de transição, onde a força humana e animal passou a ser substituída pelo uso das máquinas, com o objetivo de aumentar cada vez mais a produtividade e suprir as necessidades de um mundo voltado para o capitalismo.

Essa transição foi marcada pelo uso intenso de combustíveis fósseis, dando destaque para o carvão mineral, utilizado dentro das indústrias como fonte de energia dos maquinários. Esse fato, aliado ao crescimento acelerado e à produção em grande escala, veio acompanhado da emissão de indesejáveis poluentes na natureza, fazendo surgir, mais atualmente, uma visão ecológica em relação a esse tipo de geração, uma vez que sérios impactos ambientais foram e continuam sendo causados, principalmente nos países em que os combustíveis fósseis são utilizados de forma intensa e os gases subprodutos da combustão são emitidos na atmosfera.

Neste contexto, o objetivo deste capítulo é discorrer sobre o cenário energético no Brasil e no mundo, em relação a produção e ao uso de energia, principalmente elétrica, no decorrer dos anos, bem como sobre os impactos ambientais causados. Além disso, será descrita a geração de energia do tipo termoelétrica, seus aspectos técnicos e econômicos, nos quais se baseiam os modelos propostos neste trabalho.

### 2.1 O uso da energia ao decorrer dos anos

Ao decorrer dos anos, o homem encontrou diversas maneiras de obter e utilizar energia, mas foi a partir da revolução industrial, que trouxe uma série de transformações técnicas e sócio-econômicas no mundo, que o consumo de energia passou a ser feito em grande escala, sendo esse um marco de transição entre uma sociedade que era basicamente agrícola para uma sociedade industrialmente produtiva.

Com o passar do tempo, o progresso no uso de energia ultrapassou o crescimento populacional mundial, de forma heterogênea em quantidade e qualidade, de acordo com o local. Essas diferenças estão ligadas ao tipo de energia consumida e onde ela é utilizada, variando de países industrializados a países em desenvolvimento. Segundo Grübler (2013), existe um padrão entre o avanço do desenvolvimento econômico e o crescimento do consumo de energia utilizada ao longo do tempo em todos os países, quanto maior o nível econômico e o desenvolvimento, maior o nível de acesso à energia.

Em alguns países, como por exemplo, a Inglaterra, juntamente ao progresso industrial existia uma grande dependência em relação ao uso do carvão mineral, única fonte de energia na época. O carvão foi utilizado nas máquinas a vapor de maneira predominante até meados do século XIX, quando iniciou-se o uso do petróleo e o mesmo passou a assumir uma posição de destaque, tornando-se o representante da riqueza da sociedade moderna.

A utilização de energia elétrica deu-se somente por volta de final do século XIX, quando as primeiras estações de geração elétrica foram postas em funcionamento, movidas à queima de carvão. Até hoje, devido a sua versatilidade, a energia elétrica é uma das formas de energia mais utilizadas, podendo ser obtida através de diferentes fontes: materiais radioativos, quedas d'água, carvão mineral, gás natural, biomassa, ventos e luz

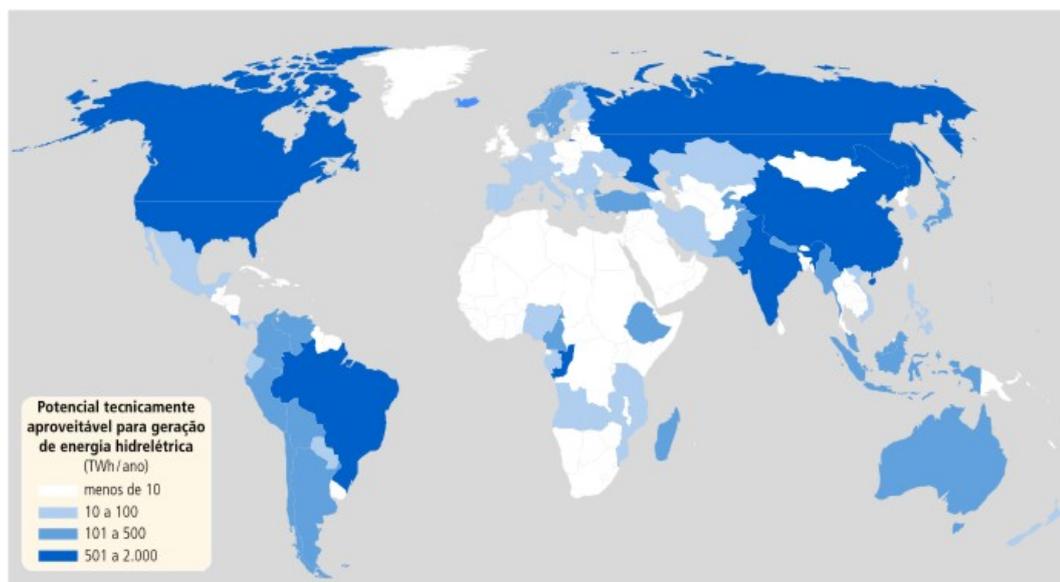


Figura 2.1: Potencial tecnicamente aproveitável para geração de energia hidrelétrica no mundo.  
Fonte: Aneel (2005)

solar.

No Brasil, final do século XIX e início do século XX, o uso de energia elétrica cresceu de maneira acelerada, principalmente nas regiões em que havia atividade industrial. Assim, fez-se necessária a ampliação das usinas e a fusão entre empresas do setor para que os custos fossem reduzidos. Por volta dos anos 50, a geração de energia em usinas hidrelétricas se expandiu no país, na contra mão do que ocorria ao redor do mundo, onde a produção de eletricidade se dava, principalmente, através de derivados do petróleo em usinas termoelétricas. Como é possível observar na Figura 2.1, atualmente, grande parte dos países do mundo ainda possui um baixo índice de utilização de potencial hídrico para geração de energia se comparados ao Brasil.

Até hoje, o suprimento de energia elétrica brasileiro deriva principalmente da geração hidráulica, representando cerca de 70% da matriz energética nacional, como é possível observar na Figura 2.2, enquanto o restante da energia utilizada é produzida utilizando como princípio o gás natural, o petróleo, o carvão, materiais radioativos e fontes alternativas, como a eólica e a biomassa, na qual destaca-se a produção cogenerada de energia proveniente da biomassa de cana-de-açúcar.

Por utilizarem a água como princípio de geração de energia elétrica, as usinas hidrelétricas são as que possuem menor custo e, por este motivo, tendem a ser despachadas durante o maior tempo possível. Porém, as variações sazonais dos níveis de água inter-

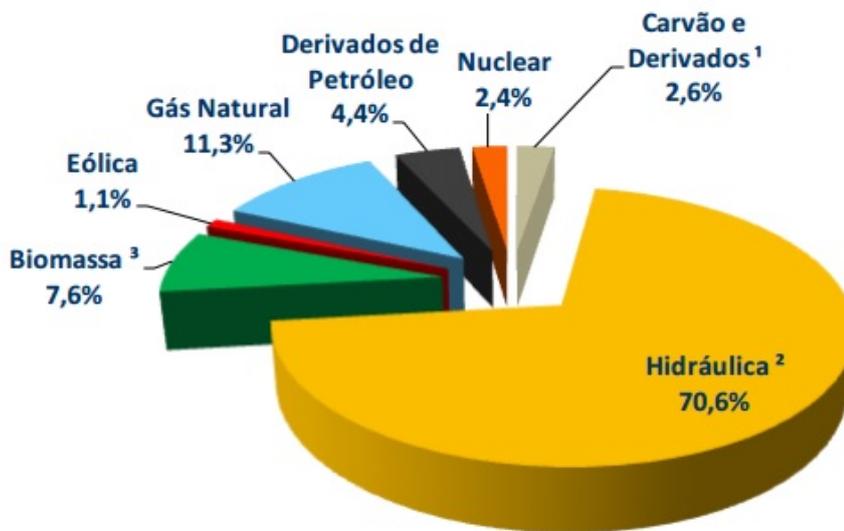


Figura 2.2: Oferta interna de energia elétrica por fonte no Brasil em 2013.  
 Fonte: Brasil (2014)

ferem nesse tipo de geração em períodos em que os recursos hídricos estejam limitados. Assim, é necessário optar por alguma fonte alternativa de geração de energia, de modo que os recursos hídricos sejam armazenados para suprir a demanda durante esses períodos. Neste contexto, a participação das usinas termoeletricas pode ser de grande importância, como será visto na Seção 2.2.

## 2.2 Geração termoeletrica de energia

A geração de energia do tipo termoeletrica é realizada baseando-se na produção de calor, resultante da queima de algum tipo de combustível, renovável ou não. Entre os principais combustíveis utilizados para produção deste tipo de energia destaca-se o carvão mineral, o petróleo, o gás natural e atualmente, a biomassa. Ao contrário do cenário brasileiro, a maioria dos países do mundo tem como principal forma de geração de energia elétrica as usinas termoeletricas que, se comparadas com as usinas hidrelétricas, são mais rápidas para se construir, podendo assim suprir carências de energia de forma mais rápida e podem ser instaladas em locais próximos às regiões de consumo, reduzindo o custo com torres e linhas de transmissão.

Porém, existem alguns aspectos negativos em relação ao uso das usinas termoeletricas, com destaque ao alto custo dos combustíveis utilizados para produção de energia

e as indesejáveis emissões de poluentes na natureza, causando grande impacto ambiental e contribuindo para o aquecimento global. É de interesse de diversas áreas de pesquisa a formulação de um problema em que o custo desses combustíveis empregados sejam minimizados juntamente com a quantidade de emissão de poluentes. Em particular, neste trabalho, os modelos apresentados no Capítulo 3 tratam deste problema.

A seguir, serão detalhados alguns aspectos técnicos e econômicos em relação ao funcionamento das termoelétricas (2.2.1), os impactos ambientais provenientes deste tipo de geração (2.2.2), bem como sobre a ocorrência deste tipo de geração no Brasil (2.2.3).

### **2.2.1 Princípios técnicos e econômicos da geração termoelétrica de energia**

O processo essencial de funcionamento em uma central termoelétrica baseia-se na conversão de energia térmica em energia mecânica e, esta, em energia elétrica. A transformação (energia térmica em energia mecânica) dá-se através do uso de algum fluido que produzirá, quando expandido, trabalho nas turbinas térmicas. Um gerador elétrico acoplado à turbina permite que a energia mecânica seja transformada em energia elétrica. De acordo com a Eletrobras (2014), o processo pode ser resumido em três etapas:

- A primeira, consiste na queima de algum combustível fóssil, transformando a água em vapor com o calor gerado na caldeira;
- A segunda etapa consiste na utilização deste vapor, em alta pressão, para girar a turbina, que por sua vez, aciona o gerador elétrico;
- Na última etapa, o vapor é condensado, transferindo o resíduo da energia térmica para um circuito independente de refrigeração, retornando a água na caldeira e finalizando o ciclo.

A Figura 2.3 é utilizada para determinar a entrada de combustível, convertida em calor por hora,  $H(\text{Btu/h})$ , e a saída de energia elétrica, dada em  $P(\text{MW})$ , em uma unidade de geração termoelétrica. A curva obtida através de ensaios térmicos é chamada de curva de entrada-saída e os dados necessários para sua construção podem ser adquiridos através de cálculos de projetos ou de testes de taxa de calor.

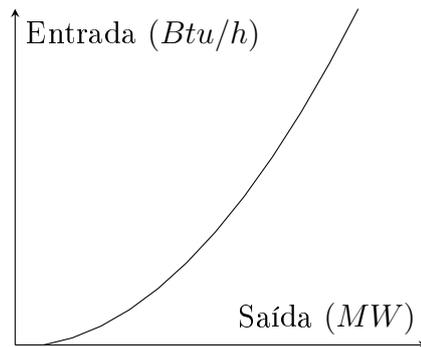


Figura 2.3: Curva de entrada-saída de uma Unidade Térmica

Considerando a curva de entrada-saída de combustível idealizada na Figura 2.3, pode ser realizada uma conversão da entrada de combustível em custo. Multiplica-se a entrada de combustível, dada em Btu/h, pelo equivalente custo de combustível, que é dado em \$/Btu. Neste caso, \$ representa a unidade monetária utilizada. Segundo Samed (2004), o custo de combustível de uma unidade geradora termoelétrica é considerado instável e controlado pelos operadores do sistema, porém pode variar de acordo com as diferentes taxas de combustíveis, pelos requisitos diários de carga e/ou até pela compra e venda de energia. Assim, os responsáveis pela operação direta do sistema não têm total controle sobre estes custos, uma vez que as variações estão ligadas a diferentes fatores. O carregamento das unidades geradoras afeta diretamente o custo dos combustíveis empregados em uma usina termoelétrica e com isso, é possível considerar que existe uma função que relaciona o custo e a potência gerada. Do ponto de vista econômico, estratégias que permitam a redução do custo dos combustíveis queimados são de grande valia para os operadores do sistema e para as usinas. Um problema de otimização pode ser formulado com o objetivo de minimizar esse custo, considerando a demanda a ser satisfeita e os limites operacionais do sistema. Neste trabalho, o foco principal é minimizar essa função custo para as usinas termoelétricas e essa questão será detalhada no próximo capítulo.

### 2.2.2 Impactos ambientais da geração termoelétrica

Durante a crise do petróleo, por volta dos anos 70, os países industrializados foram obrigados a investir de forma intensa no uso de fontes alternativas de geração de energia, como o carvão mineral e a empregada em usinas nucleares. Por sua vez, o uso dessas fontes intensificou a emissão de poluentes na natureza, levando ao surgimento de uma visão

ecológica no processo de produção de energia, juntamente com os conceitos de poluição ambiental, desenvolvimento sustentável e utilização de recursos renováveis (Jannuzzi & Swisher, 1997). Nos países onde os combustíveis fósseis são utilizados de maneira predominante, os gases eliminados como subproduto da combustão são emitidos na atmosfera, causando os impactos mais sérios provenientes da geração de energia.

As companhias elétricas desses países tem como sua maior despesa conseguir cumprir as regulamentações de controle dessa poluição, que geralmente provém de impurezas do próprio combustível, tais como particulados e dióxido de enxofre ( $SO_2$ ) do carvão ou do ar utilizado no processo de combustão, que libera o óxido de nitrogênio ( $NO_x$ ) e o dióxido de carbono ( $CO_2$ ), que afetam não somente a saúde dos seres humanos, mas também as vegetações, os recursos hídricos e a vida animal.

O  $SO_2$  liberado reage com o vapor d'água presente na atmosfera produzindo ácido sulfúrico, que contribui diretamente para elevação da acidez das chuvas e o  $NO_x$ , juntamente com outros produtos secundários, baixam o pH da chuva, neblina e neve, ameaçando a vida aquática e das plantas de todo o planeta. Assim, torna-se imprescindível que as emissões durante o processo de geração de energia em termoelétricas sejam consideradas.

Os países industrializados são os que mais poluem gerando energia e consequentemente os maiores responsáveis pela ameaça de mudanças climáticas em proporções mundiais. Entretanto, esses países são os que possuem maior número de recursos financeiros e tecnológicos para controlar as emissões. Algumas tecnologias vem sendo empregadas atualmente a fim de reduzir a quantidade de poluentes concebida no processo de geração de uma termoelétrica, entre elas destaca-se o problema de despacho ambiental, formulado a fim de que sua resolução minimize a quantidade de poluentes emitidos na natureza durante a geração de eletricidade nas usinas térmicas.

O problema de despacho ambiental é formulado na Seção 3.2 e é utilizado, juntamente com o modelo de minimização dos custos de geração de uma usina termoelétrica, nos métodos empregados neste trabalho.

### 2.2.3 Geração termoelétrica no Brasil

A geração de energia do tipo termoelétrica não é tão expressiva no Brasil quanto a geração em usinas hidroelétricas, uma vez que o país possui grande quantidade de recursos hídricos disponíveis e que são explorados para geração de eletricidade nas usinas hidrelétricas. Apesar dos baixos custos operacionais e de não produzirem resíduos poluentes, as usinas hidrelétricas dependem de um recurso que é gratuito, porém limitado para produção de eletricidade: a água. Assim, esse tipo de usina requer um planejamento adequado, variando de acordo com a sazonalidade das chuvas em cada região.

Como a natureza é imprevisível, não é possível que se tenha absoluta certeza em relação aos níveis dos reservatórios de água das usinas. Caso o planejamento seja mal elaborado e poucos recursos sejam investidos, os níveis dos reservatórios podem ser reduzidos em grandes proporções, prejudicando a geração de energia elétrica e causando até um racionamento no país. Além disso, algumas outras desvantagens estão relacionadas à construção das usinas hidrelétricas, entre elas os grandes investimentos de dinheiro e tempo, além de grandes áreas serem devastadas, contrariando muitas questões ambientais.

Dentro deste contexto, a utilização das usinas termoelétricas para geração de energia no país, como forma de suprir as necessidades imediatas causadas pela falta de água em determinados períodos, é de grande valia, uma vez que suas construções também são mais rápidas se comparadas às hidrelétricas, e não existe uma dependência direta com os fenômenos climáticos para obtenção de sua fonte de geração. Segundo Aneel (2005), as termoelétricas instaladas no Brasil têm como principal função atender à demanda de pico do sistema elétrico e suprir as necessidades de eletricidade em regiões isoladas, caso a hidrologia seja desfavorável, em função do grande potencial hídrico disponível no país.

Com o passar dos anos, houve um aumento relativo em relação a capacidade instalada em *MW* dessas usinas no país. Na Tabela 2.1, terceira coluna, é possível observar que a capacidade instalada das usinas térmicas movidas a biomassa, gás, petróleo e carvão mineral no país, teve um aumento de 11,4% do ano de 2012 para o ano de 2013.

Tabela 2.1: Capacidade instalada em *MW* no Brasil

<b>Fonte</b>	<b>2013</b>	<b>2012</b>	<b><math>\Delta</math> 13/12 (aumento de 2012 para 2013)</b>
Hidrelétrica	86.018	84.294	2,0%
<b>Térmica</b>	<b>36.528</b>	<b>32.778</b>	<b>11,4%</b>
Nuclear	1.990	2.007	-0,8%
Eólica	2.207	1.894	16,5%

Fonte: Brasil (2014)



## CAPÍTULO 3

# PROBLEMAS DE DESPACHO

Os problemas de despacho são importantes na área de sistemas de energia e geralmente buscam a minimização de custos dos combustíveis empregados na geração, o que é conhecido na literatura como problema de despacho econômico. Com a crescente preocupação em relação aos problemas ambientais causados após a utilização de alguns tipos de combustíveis, surgiu a necessidade de modelar um problema de despacho que levasse em conta não somente os fatores econômicos, mas também a minimização da quantidade de emissão de poluentes na natureza, a esse problema dá-se o nome de despacho ambiental.

Segundo Gent & Lamont (1971), por muito tempo o funcionamento ótimo de geração de energia termoeletrica levou em consideração somente os critérios econômicos, desconsiderando qualquer impacto ambiental causado, contribuindo assim, para a elevação da poluição atmosférica. As questões ambientais, que sempre estiveram relacionadas a esse tipo de produção, foram deixadas de lado. A emissão de gases como o dióxido de carbono ( $CO_2$ ), o dióxido de enxofre ( $SO_2$ ), o óxido de nitrogênio ( $NO_x$ ) e outros particulados, comuns em países onde o combustível fóssil é utilizado de forma predominante, quando em excesso, têm consequências negativas para todos os seres vivos, afetando a qualidade de vida e gerando grandes impactos nas vegetações. Consequentemente, essa emissão ocasiona sérias alterações climáticas, o que nos leva a dar uma maior importância ao problema.

Neste capítulo serão descritos os problemas de despacho dos tipos: econômico, econô-

mico com inserção de pontos de carregamento de válvula e ambiental, além da apresentação de seus respectivos modelos matemáticos. Também será apresentado o modelo de otimização multiobjetivo que minimiza simultaneamente a emissão de poluentes na natureza e os custos da produção, satisfazendo o atendimento da demanda e os limites operacionais do sistema.

### 3.1 Despacho econômico

O problema de despacho econômico clássico tem por objetivo reduzir o custo de produção total de energia, calculando a geração de cada unidade de ligada à rede. Ou seja, objetiva-se gerar energia com o custo mínimo possível, suprindo as necessidades dos consumidores. Segundo Happ (1977), o problema de despacho econômico teve início a partir do momento em que duas ou mais unidades geradoras foram destinadas a produzir a carga total de um sistema e cabia ao operador escolher a melhor maneira de dividir a carga entre estas unidades. Por volta de 1920, alguns engenheiros já haviam se deparado com o problema de alocação econômica da geração, ou mais especificamente, em como dividir a carga entre as unidades geradoras disponíveis.

Um dos primeiros métodos utilizados para resolver o problema ficou conhecido como carregamento por ordem de mérito, que consiste em demandar potência da unidade mais eficiente para a menos eficiente, até que a demanda necessária seja suprida. Tal método não se mostrou eficaz para a minimização dos custos de geração e permaneceu em utilização até cerca de 1930, quando uma nova técnica surgiu: o critério dos custos incrementais iguais.

O critério dos custos incrementais iguais passou a ser utilizado e a produzir melhores resultados que o método anterior. A alocação da geração passou a ser realizada de modo que o acréscimo seguinte no carregamento deveria ser feito pela unidade com menor custo incremental. Esse custo incremental é determinado medindo-se a inclinação da curva de entrada-saída e multiplicando-se pelo custo por *Btu* de cada unidade. Este método foi comprovado matematicamente no trabalho de Steinberg & Smith (1934), que investigaram e mostraram que este critério era válido para a obtenção do custo mínimo, no caso de duas unidades geradoras.

Devido a demanda de um sistema elétrico ser atendida por diversas unidades geradoras, cujos custos são expressos por diferentes funções, a função custo total de um sistema elétrico é obtida a partir da soma dos custos individuais de cada uma das unidades geradoras. A função custo, denominada neste trabalho de  $F_e$  (função econômica), dada em (3.1), foi proposta por Steinberg & Smith (1943). Em (3.1) o custo de produção total da rede é igual ao somatório da função de custo de combustível de cada gerador:

$$F_e = \sum_{i=1}^n F_{e_i}(P_i) = \sum_{i=1}^n a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i \quad (3.1)$$

em que:

$F_e$  é a função objetivo de custo total (função econômica);

$F_{e_i}(P_i)$  é a função econômica individual da  $i$ -ésima unidade geradora;

$a_i, b_i$  e  $c_i$  são os coeficientes de custo da unidade geradora  $i$ ;

$P_i$  é a potência gerada pela unidade geradora  $i$ .

A fim de evitar dificuldades relacionadas a problemas não-lineares, grande parte dos trabalhos encontrados na literatura que envolvem a resolução do problema de despacho econômico, utilizam a função custo definida em (3.1), que é uma aproximação quadrática das funções de custo dos geradores de um sistema elétrico, representada pela curva da Figura 2.3 (Capítulo 2). Entretanto, quando são realizados testes reais de taxa de calor em usinas termoeletricas, diferentes funções de custo podem ser determinadas através dos dados obtidos e, conseqüentemente, diferentes curvas.

Para alguns geradores, a representação das curvas de entrada-saída através de uma função quadrática não é a mais adequada. Nos geradores com turbinas a vapor, existem válvulas de admissão de vapor, cuja abertura influencia na saída da unidade. De acordo com Happ (1977), no problema de despacho econômico clássico os custos incrementais são representados como monotonicamente crescentes e tal caracterização ignora as perdas que ocorrem na passagem de vapor através de válvulas parcialmente abertas. É possível expressar as perdas que ocorrem devido aos efeitos gerados em cada válvula de admissão de calor que se abre, como é possível observar na curva tracejada da Figura 3.1. Este efeito é denominado de efeito de ponto de carregamento de válvula e segundo Happ (1977), é definido como o ponto imediatamente anterior a abertura da próxima válvula. Em tais

pontos, teoricamente, não ocorrem estrangulamentos e, portanto, não há perdas a eles associadas.

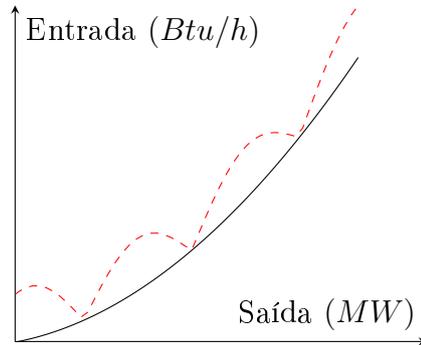


Figura 3.1: Curva de entrada-saída de uma Unidade Térmica com efeito de ponto de carregamento de válvula

A função utilizada para o cálculo do custo total considerando o efeito de ponto de carregamento de válvula (Wood & Wollenberg, 1984), é modelada de acordo com (3.2):

$$F_e = \sum_{i=1}^n F_{e_i}(P(V_i)) = \sum_{i=1}^n a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i + \sum_{i=1}^n |e_i \text{sen}(f_i(P_i^{\text{min}} - P_i))| \quad (3.2)$$

em que:

$F_e$  é a função econômica;

$F_{e_i}(P(V_i))$  é a função custo individual da  $i$ -ésima unidade geradora;

$a_i, b_i, c_i, e_i$  e  $f_i$  são os coeficientes de custo da unidade geradora  $i$ ;

$P_i$  é a potência gerada pela unidade geradora  $i$ .

Devido a inserção da função seno no cálculo do custo, múltiplos mínimos são incorporados ao problema e os termos modulares também tornam a curva não-linear e descontínua em vários pontos. Com isso, a função objetivo do problema de despacho econômico torna-se não convexa e não-diferenciável, inviabilizando a utilização de diversos métodos clássicos de otimização. Somente por volta da década de 70, o problema de despacho econômico com ponto de válvula passou a ser resolvido através de métodos heurísticos, como os variantes dos algoritmos genéticos.

O Problema de Despacho Econômico (PDE) tem por objetivo minimizar a função econômica ( $F_e$ ), definida em (3.1), satisfazendo os limites operacionais do sistema e res-

peitando o atendimento da demanda de energia. O Problema de Despacho Econômico com Pontos de Carregamento de Válvula (PDE-PV) tem por objetivo minimizar a função econômica ( $F_e$ ), definida em (3.2), satisfazendo os limites operacionais do sistema e respeitando o atendimento da demanda de energia. O modelo de otimização para o PDE-PV é expresso por (3.3):

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar } F_e &= \sum_{i=1}^n F_{e_i}(P(V_i)) = \sum_{i=1}^n a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i + \sum_{i=1}^n |e_i \text{sen}(f_i(P_i^{\min} - P_i))| \\
 \text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i &= P_d \\
 P_i^{\min} &\leq P_i \leq P_i^{\max}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

em que:

$F_e$  é a função econômica;

$F_{e_i}(P_i)$  é a função custo individual da  $i$ -ésima unidade geradora;

$a_i, b_i, c_i, e_i$  e  $f_i$  são os coeficientes de custo da unidade geradora  $i$ ;

$P_i$  é a potência gerada pela unidade geradora  $i$ ;

$P_d$  é a potência demandada;

$P_i^{\min}$  e  $P_i^{\max}$  são os limites mínimo e máximo, respectivamente, de saída de potência da unidade geradora  $i$ .

## 3.2 Despacho ambiental

Segundo Gent & Lamont (1971), por muito tempo o funcionamento ótimo de geração de energia termoeétrica levou em consideração somente os critérios econômicos, desconsiderando qualquer impacto ambiental causado. Em muitos países, em que o combustível fóssil é utilizado de maneira predominante, esses impactos são ainda mais sérios devido a emissão desses gases na atmosfera. Dar prioridade a determinadas usinas menos poluidoras seria uma boa alternativa, porém elas geralmente possuem os maiores custos de geração.

No trabalho de Sullivan & Hackett (1973), é proposta uma técnica para despachar geradores a combustível fóssil, e com isso, reduzir o nível de concentração de  $SO_2$  em uma determinada área. O problema denominado de Despacho de Poluição Mínima (DPM) foi resolvido por meio de técnicas matemáticas através de programações na geração, considerando as influências do ambiente e as condições meteorológicas. Porém, segundo Samed (2004), a maioria dos avanços nesta área só ocorreu na década de 90.

O despacho ambiental passou a ser utilizado nas usinas com o objetivo de reduzir a poluição, levando em conta as condições ambientais de um sistema de geração de energia. A resolução deste problema pode fornecer grandes benefícios a um baixo custo ao sistema. De acordo com Samed (2004), a função de emissão de poluentes do despacho ambiental é modelada levando em consideração a relação entre a quantidade de cada poluente e a saída de potência da unidade, calculando os níveis de concentração resultantes. Gent & Lamont (1971) apresentaram uma função de despacho ambiental através de uma combinação entre termos polinomiais e exponenciais, como na equação (3.4):

$$F_a = \sum_{i=1}^n F_{a_i}(P_i) = \sum_{i=1}^n A_i P_i^2 + B_i P_i + C_i + D_i \exp(E_i P_i) \quad (3.4)$$

em que:

- $F_a$  é a função objetivo de emissão total (função ambiental);
- $F_{a_i}(P_i)$  é a função emissão da  $i$ -ésima unidade geradora;
- $A_i, B_i, C_i, D_i$  e  $E_i$  são os coeficientes de emissão da unidade geradora  $i$ ;
- $P_i$  é a potência gerada pela unidade geradora  $i$ .

Em El-Hawary et al. (1992), o último termo da equação (3.4) é desprezado e é utilizada uma função polinomial de segunda ordem para a função emissão, como é possível observar na equação (3.5):

$$F_a = \sum_{i=1}^n F_{a_i}(P_i) = \sum_{i=1}^n A_i P_i^2 + B_i P_i + C_i \quad (3.5)$$

em que:

- $F_a$  é a função ambiental;
- $F_{a_i}(P_i)$  é a função emissão da  $i$ -ésima unidade geradora;

$A_i, B_i$  e  $C_i$  são os coeficientes de emissão da unidade geradora  $i$ ;  
 $P_i$  é a potência gerada pela unidade geradora  $i$ .

A equação de despacho ambiental apresentada em (3.5) é mais comumente utilizada na literatura, sendo também aplicada neste trabalho para formulação do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental.

O Problema de Despacho Ambiental (PDA) pode ser modelado considerando a função emissão como objetivo a ser minimizado, sujeita ao atendimento da demanda e aos limites de operação do sistema. Considerando a minimização das emissões e a função despacho ambiental apresentada em El-Hawary et al. (1992), o problema de despacho ambiental é modelado de acordo com a equação (3.6):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F_a &= \sum_{i=1}^n F_{a_i}(P_i) = \sum_{i=1}^n A_i P_i^2 + B_i P_i + C_i \\ \text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i &= P_d \\ P_i^{\min} &\leq P_i \leq P_i^{\max} \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que:

$F_a$  é a função ambiental;  
 $F_{a_i}(P_i)$  é a função ambiental da  $i$ -ésima unidade geradora;  
 $A_i, B_i$  e  $C_i$  são os coeficientes de emissão da unidade geradora  $i$ ;  
 $P_i$  é a potência gerada pela unidade geradora  $i$ ;  
 $P_d$  é a potência demandada;  
 $P_i^{\min}$  e  $P_i^{\max}$  são os limites mínimo e máximo, respectivamente, de saída de potência da unidade geradora  $i$ .

A estratégia adotada no modelo (3.6) desconsidera a minimização dos custos dos combustíveis empregados, produzindo energia apenas com o objetivo de minimizar as emissões. Uma outra forma de modelagem dos problemas de despacho é a que considera a minimização simultânea dos custos dos combustíveis empregados e da emissão de poluentes. A esse tipo de modelagem dá-se o nome de problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental e será apresentada na seção 3.3.

### 3.3 Problema Multiobjetivo de Despacho Econômico e Ambiental com pontos de carregamento de válvula (PMDEA-PV)

O problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental é formulado com o propósito de minimizar dois objetivos conflitantes ao mesmo tempo: o custo total de geração de energia e a quantidade de emissão de poluentes na natureza. Os dois objetivos devem ser minimizados em uma única função objetivo, sujeita às restrições de demanda e capacidade do sistema, conforme (3.7).

Desde a década de 80, estratégias têm sido utilizadas para solucionar o problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental. No trabalho de Nanda et al. (1988), um problema de despacho econômico e ambiental foi resolvido através da técnica de *Goal Programming*. Um método denominado *Box Complex* foi utilizado para minimizar o problema, considerando dois combustíveis distintos, o gás natural e o óleo combustível e os resultados obtidos se mostraram eficientes.

O problema de otimização definido em (3.7) visa a minimização dos custos dos combustíveis e a emissão de poluentes concomitantemente:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \{F_e, F_a\} \\ & \text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i = P_d \\ & P_i^{Min} \leq P_i \leq P_i^{Max} \end{aligned} \tag{3.7}$$

em que:

$F_e$  é a função objetivo econômica;

$F_a$  é a função objetivo ambiental;

$P_i$  é a potência gerada pela unidade geradora  $i$ ;

$P_d$  é a potência demandada;

$P_i^{\min}$  e  $P_i^{\max}$  são os limites mínimo e máximo, respectivamente, de saída de potência da unidade geradora  $i$ .

A minimização concomitante dos custos de produção de energia e da emissão de poluentes e representação de pontos de carregamento de válvula no problema de despacho econômico, resultam no problema denominado de Problema Multiobjetivo de Despacho Econômico e Ambiental com ponto de válvula (PMDEA-PV). Neste trabalho, foi feito uso da função econômica com pontos de carregamento de válvula na formulação do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental.

Por serem objetivos conflitantes, o despacho econômico e o ambiental não podem ser minimizados diretamente em uma única função objetivo. Assim, algumas estratégias são propostas na literatura a fim de transformar o problema multiobjetivo em um conjunto de problemas mono-objetivo e tornar possível a investigação e determinação de soluções eficientes. Entre os métodos clássicos para resolução de problemas de otimização multi-objetivo, destaca-se neste trabalho o método da soma ponderada, descrito em Miettinen (1999) e detalhado na seção 7.2 e o método  $\varepsilon$ -restrito (Haimes, 1971), detalhado na seção 7.3. Ambos os métodos possibilitam transformar o problema multiobjetivo, definido em (3.7), em um conjunto de problemas mono-objetivo. Através dos métodos de otimização, apresentados no Capítulo 5, é possível obter a resolução desses problemas mono-objetivos e, conseqüentemente, um conjunto de soluções eficientes.

Devido a função custo definida em (3.2) apresentar a característica de não convexidade, a obtenção de pontos da curva de soluções eficientes tornou-se mais complicada. Com isso, é proposta neste trabalho uma variação do método  $\varepsilon$ -restrito citado acima, denominada de método  $\varepsilon$ -restrito canalizado, que inclui, além de um limitante superior, um limitante inferior para a restrição ambiental do problema de minimização dos custos e será detalhado em 7.4.

### 3.4 Estado da arte dos problemas de despacho

Algoritmos genéticos, genético híbrido, co-evolutivo e cultural são comumente utilizados para resolução de problemas de despacho, sendo ele econômico, ambiental ou multi-objetivo, envolvendo a minimização dos custos e da emissão. Nesta seção descreve-se os principais trabalhos encontrados na literatura utilizados para resolução de problemas de despacho, em especial, o problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental,

incluindo o efeito de ponto de carregamento de válvula à função custo. Algumas metodologias aplicadas à sua resolução são sintetizadas.

Por volta de 1934, foi apresentado em Steinberg & Smith (1934) um método para alocar a geração de forma econômica entre as unidades geradoras. Um pouco depois, em Carpentier (1962), algumas contribuições foram acrescentadas ao Problema de Despacho Econômico (PDE), com a introdução do Problema de Fluxo de Potência ótimo (FPO). O FPO é uma generalização para o PDE e a principal contribuição do trabalho de Carpentier é a formulação do problema em bases matemáticas sólidas (Happ, 1977). Em seus trabalhos sobre FPO, Carpentier propôs a solução do problema através da utilização das condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker.

Sullivan & Hackett (1973) propuseram uma técnica para despachar geradores a combustível fóssil e com isso reduzir o nível de concentração de  $SO_2$  em uma determinada área. O problema denominado de Despacho de Poluição Mínima (DPM) foi resolvido por meio de técnicas matemáticas através de programações na geração, considerando as influências do ambiente e as condições meteorológicas.

Em 1984, três algoritmos para resolução do problema de despacho econômico clássico foram apresentados nos trabalhos de Aoki & Satoh (1984): Programação Quadrática Paramétrica (PQP), Programação Quadrática Paramétrica Modificada (PQPM) e Programação Quadrática Recursiva (PQR). Os métodos propostos foram aplicados em um sistema com 120 barras e outro com 31 geradores.

Um método para operação ótima de sistemas de grande porte, visando minimizar o custo dos combustíveis é apresentado em Lee et al. (1988). Os autores apresentam uma formulação ativa-reativa do fluxo de potência ótimo e propõem a decomposição do mesmo em dois problemas: o problema-P é equivalente ao despacho econômico convencional, visando alocar de maneira ótima a geração de potência ativa entre os geradores e o problema-Q visa determinar, de maneira ótima, o despacho de potência reativa. O problema-P é semelhante ao problema de despacho econômico, com restrição de segurança e inserção de pontos de carregamento de válvula. Para resolver os problemas o autor emprega o método do gradiente projetado.

Dhillon et al. (1993) formularam o problema de despacho econômico e ambiental considerando incertezas no custo de produção e na demanda. A lógica é utilizada para

auxiliar o operador do sistema de potência a escolher o ponto ótimo de operação na curva de comprometimento entre custo e emissão. Em Dhillon et al. (1994), uma técnica de programação não linear e o método  $\varepsilon$ -restrito foram utilizados para resolver o problema de despacho multiobjetivo, minimizando custo e emissão. Os testes foram aplicados em sistema de 3 geradores.

Além do trabalho de Dhillon, muitos outros relacionados ao assunto foram publicados em 1994, entre eles, destaca-se o de Granville (1994), que resolveu o problema de despacho ótimo de reativos, utilizando um método primal-dual de pontos interiores. O método proposto pelo autor foi aplicado a dois sistemas teste de grande porte: um com 1832 barras (o sistema Sul/Sudeste brasileiro) e outro com 3467 barras (derivado do sistema de transmissão norte-americano). No mesmo ano, o problema de despacho econômico e ambiental foi modelado por Hu & Wee (1994), como um problema de minimização dos custos com restrição ambiental. A técnica utilizada pelos autores para tratar o caso multiobjetivo é a de sistemas hierárquicos.

Ranaranatha (1994) modelou o mesmo problema multiobjetivo de duas maneiras: como um problema de despacho econômico com restrição ambiental e como uma ponderação das duas funções objetivo em uma única. Esta última técnica empregada é conhecida atualmente como método da soma ponderada.

Uma compilação de publicações sobre o despacho ambiental foi publicada por Talaq et al. (1994), reunindo trabalhos no período de 1970 a 1994, incluindo diversos modelos para tratar o problema.

El-Keib et al. (1994) investigaram o problema de despacho ambiental considerando restrições múltiplas de  $NO_x$  e também restrições de  $SO_2$ . O autor utilizou o método da relaxação lagrangiana para resolver o problema.

No trabalho de Wong et al. (1995), os autores formularam o Problema Multiobjetivo de Despacho Econômico e Ambiental (PMDEA) através da técnica da soma ponderada e resolveram com método *simulated annealing*.

Bhagwan Das & Patvardhan (1998) resolveram o problema multiobjetivo de despacho econômico, visando minimizar os custos de geração incluindo o efeito de pontos de carregamento de válvula, minimizar o índice de emissão de poluentes e maximizar o índice

de margem de segurança. Para tanto, utilizaram uma abordagem heurística denominada SEEDSS (*Secure Economic Emission Dispatch with Stochastic Search*), que consistia de uma abordagem híbrida, incorporando o *simulated annealing* no processo de seleção do algoritmo genético. Os testes foram realizados nos sistemas IEEE-30 barras e IEEE-118 barras.

Em 2001, Shi & Xu (2001) propuseram um algoritmo para resolver um problema com quatro objetivos: custo de operação com ponto de válvula, perdas na transmissão, poluição ambiental e segurança, sendo que o último objetivo é maximizado. A programação evolucionária foi utilizada para resolução do problema.

O PDE-PV foi resolvido e Kim et al. (2002). Os autores utilizaram para resolução do problema um algoritmo genético atávico que resolveu o PDE-PV para o caso de 13 geradores. No mesmo ano, Lin et al. (2002) desenvolveram um algoritmo de busca tabu aperfeiçoado para a resolução do problema de despacho com função objetivo descontínua e não-diferenciável. Assim como em algoritmos genéticos, o método também emprega operadores de mutação e recombinação, baseados em probabilidade. Os testes foram realizados envolvendo sistemas com 3 e 30 unidades geradoras.

Oito variantes de técnicas baseadas em programação evolutiva são aplicadas ao PDE-PV no trabalho de Sinha et al. (2003). Os testes foram realizados para casos com 3, 13 e 40 unidades geradoras.

Em Samed (2004) é apresentado um Algoritmo Genético Híbrido Co-Evolutivo (AGHCOE) para resolução de problemas de despacho. A autora visou resolver o problema de despacho econômico através de um algoritmo genético. Tendo em vista a dificuldade no controle dos parâmetros associados ao AGH, a autora introduziu um algoritmo genético para controle de parâmetros, denominado Co-Evolutivo, que interagia com a população do AGH. O algoritmo foi implementado em Fortran, e testado em casos de PDE-PV, para sistemas com 3 e 13 geradores, bem como em instâncias de 6 geradores de problemas de despacho econômico e ambiental. Os resultados obtidos pela autora auxiliaram a resolução do PMDEA-PV explorado no presente trabalho.

Park et al. (2005) resolveram o problema de despacho econômico com ponto de carregamento de válvula utilizando um algoritmo modificado de otimização por enxame de partículas. Os testes foram realizados para os casos de 3 e 40 geradores.

No ano de 2006, alguns trabalhos relacionados a método de resolução de problemas de despacho foram publicados, entre eles o de Ravi et al. (2006), onde o problema de despacho econômico com ponto de carregamento de válvula é resolvido utilizando um algoritmo baseado em programação evolutiva. Uma população inicial de vetores pais é determinada e, sobre esta população, vetores filhos são determinados pela escolha do melhor filho gerado por mutação Gaussiana ou mutação de Cauchy. Em um ciclo externo do método, os coeficientes-B e a função de perdas são atualizados utilizando um algoritmo de fluxo de potência. Os testes foram realizados com sistemas de 6, 14 e 30 barras, mostrando a eficiência do método proposto.

Abido (2006) utilizou três algoritmos distintos para comparação da resolução do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental: algoritmos genéticos com ordenação não dominada, algoritmos genéticos do tipo Pareto-*niched* e algoritmos evolutivos do tipo *strenght*-Pareto. Em Arantes et al. (2006) um método de evolução diferencial foi aplicado à solução de alguns problemas de engenharia, incluindo o de destaque neste trabalho: problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental.

Coelho & Mariani (2006) propuseram um algoritmo híbrido entre a estratégia evolutiva e o método quase-Newton do tipo BFGS (*Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno*) para busca local. O algoritmo proposto foi empregado à resolução de três problemas de despacho econômico: para sistemas com 3, 13 e 40 geradores, considerando o efeito de ponto de carregamento de válvula.

No ano seguinte, Rodrigues (2007) apresentou um algoritmo cultural para resolução do problemas de despacho econômico e do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental. Esse algoritmo pode ser entendido como uma metaheurística inspirada no processo de evolução cultural da humanidade. Foram aplicados testes em casos de 3 e 13 geradores, com função objetivo quadrática.

Coelho & Mariani (2008) propuseram um algoritmo de otimização por enxame de partículas baseado em mecânica quântica e em poços de potencial de osciladores harmônicos. Resultados foram obtidos para o caso de 13 geradores do PDE-PV, utilizando o algoritmo com cinco configurações distintas de parâmetros.

Alsumait et al. (2009) apresentaram um algoritmo híbrido para a resolução do PDE-PV, composto pelo algoritmo genético como otimizador principal, enquanto utilizou a

busca padrão e a programação sequencial quadrática para refinar os resultados, mostrando a eficiência de tal abordagem através de sistemas testes.

Selvakumar & Thanushkodi (2009) propuseram um algoritmo heurístico denominado Otimização por Enxame Civilizado (*Civilized Swarm Optimization – CSO*), que combina o Algoritmo de Civilização da Sociedade (*Society-Civilization Algorithm – SCA*) com Otimização por Enxame de Partículas. Os testes foram realizados em diversas instâncias do PDE, incluindo casos de grande porte com 200 geradores.

Em Bhattacharya & Chattopadhyay (2010) é apresentado um método híbrido de evolução diferencial com otimização baseada em biogeografia. A otimização baseada em biogeografia utiliza dois mecanismos: migração e mutação. O método foi testado em quatro variantes de problemas de despacho, incluindo o PDE-PV e o PDE clássico. Além deste, Khamsawang & Jiriwibhakorn (2010) utilizaram uma abordagem híbrida, combinando sequências de Sobol, enxame de partículas e busca tabu para a resolução de problemas de despacho, incluindo o PDE-PV.

No ano de 2011, Arul et al. (2011) propuseram a utilização de um algoritmo de busca harmônica para a solução do PDE-PV. O método foi validado utilizando sistemas de 6, 14 e 30 barras. No mesmo ano, Sonmez (2011) apresentou um algoritmo denominado *artificial bee colony*, inspirado pelos processos de vida e comportamentos de abelhas em uma colônia para resolução do PMDEA, que foi tratado neste trabalho usando o fator de penalidade de custo.

Balbo et al. (2012) apresentaram um método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores para resolução do PDE clássico. A ideia básica do método, segundo os autores, é utilizar uma busca unidimensional mais precisa no passo previsor e uma busca mais simples, porém robusta, no passo corretor (que utiliza uma aproximação de segunda ordem para o cálculo dos resíduos). Os autores utilizam o método apresentado para resolver instâncias de 3, 6 e 13 geradores do PDE.

Em Vishwakarma et al. (2012) o PDE-PV foi resolvido empregando a heurística de *simulated annealing*. De acordo com os autores, existem quatro parâmetros críticos na utilização do *simulated annealing*: a temperatura inicial, a temperatura final, a taxa de decremento da temperatura e o número de iterações em cada temperatura. Neste mesmo ano, Yang et al. (2012) utilizaram um algoritmo de vagalumes para resolução do PDE-

PV. Para tratar das restrições do problema, o método utiliza uma função penalidade, semelhante às empregadas em métodos determinísticos.

O PDE-PV, bem como o problema de despacho econômico e ambiental foi resolvido no trabalho de Benasla et al. (2014) por um algoritmo de otimização espiral. Segundo os autores, a abordagem apresenta as seguintes vantagens: poucas variáveis de controle, capacidade de busca local, resultados rápidos, uso fácil, estrutura simples e as fases de diversificação e intensificação ocorrem no mesmo processo.

No mesmo ano, Balamurugan et al. (2014) resolveram o problema multiobjetivo de minimização de custos e de emissão através da técnica de evolução diferencial. Os autores apresentam uma tabela com as melhores soluções para a função econômica e para a função ambiental, obtidas através da aplicação do seu método. Os seus dados, bem como os resultados são utilizados no presente trabalho.

Em Stanzani et al. (2014) foi utilizado o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores em problemas de programação não linear para resolução do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental, juntamente com as técnicas da soma ponderada e do  $\varepsilon$ -restrito. No presente trabalho, esse mesmo problema será resolvido, porém, com a inserção de pontos de carregamento de válvula à função despacho econômico.

Silva (2014) formulou um problema de despacho econômico, com restrição de segurança e inserção de pontos de carregamento de válvula. Para resolução do problema, o autor aplicou um método de pontos interiores/exteriores, com estratégia de barreira logarítmica modificada e uma técnica de suavização de funções. Seus resultados são eficientes se comparados a outros em que métodos heurísticos foram utilizados.

Diversas técnicas foram utilizadas para resolução de problemas de despacho, mono-objetivo ou multiobjetivo, com ou sem inserção de pontos de carregamento de válvula. Quando a não-diferenciabilidade causada pelos pontos de carregamento de válvula se faz presente, os métodos mais comumente utilizados estão relacionados as abordagens heurísticas ou híbridas. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar um método de otimização determinístico para que, em conjunto com os métodos de suavização de funções e de solução de problemas multiobjetivos, sejam utilizados à resolução do PMDEA-PV.



## CAPÍTULO 4

# MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO E SUAVIZAÇÃO DE FUNÇÕES

Com o objetivo de obter soluções mais próximas da situação real do problema de despacho, pontos de carregamento de válvula foram considerados na função econômica (formulada na Seção (3.7)). Em consequência, dificuldades extras surgiram para sua resolução através de métodos determinísticos. A função econômica passa a apresentar termos modulares, o que a torna não-diferenciável em alguns pontos do seu domínio, além de não-linear e não convexa. Todas essas peculiaridades, geram um problema de otimização com uma vasta quantidade de mínimos locais, dificultando o alcance de um mínimo global.

A utilização de alguns métodos clássicos de otimização para resolução deste tipo de problema torna-se inviável, pois estes necessitam da diferenciabilidade das funções envolvidas. Assim, para que tais métodos clássicos de otimização possam ser aplicados à solução do PMDEA-PV, neste trabalho propõe-se uma estratégia de suavização de funções, que após aplicada a função despacho econômico elimina os termos modulares, gerando uma nova função aproximada e diferenciável.

As aproximações de funções para problemas de otimização são estudadas há décadas para determinar a solução de problemas cuja função objetivo e/ou restrições são não-diferenciáveis. Neste trabalho, a técnica da suavização hiperbólica, definida em Chen (2012), é utilizada para aproximar a função despacho econômico do PMDEA-PV eliminando os termos modulares e será detalhada na Seção 4.4. A ideia é utilizar procedimentos

híbridos envolvendo o método primal-dual de pontos interiores para a busca de soluções destes modelos, acoplado à técnica de aproximação de funções, denominada de suavização hiperbólica. Esse método é explorado juntamente com aqueles propostos para a resolução de problemas multiobjetivo, exibidos no Capítulo 7.

Neste capítulo, é realizada uma revisão de alguns métodos de aproximação e suavização de funções, com destaque ao método da suavização hiperbólica, utilizado no presente trabalho.

## 4.1 Aproximação polinomial

De acordo com Rivlin (1981), a questão de aproximar uma função relativamente complicada por uma função mais simples e com propriedades como diferenciabilidade e continuidade se firmou como um importante problema de matemática, especificamente no ramo da teoria de aproximação. Tendo em vista sua ampla gama de aplicações, o estudo de aproximação de funções é abrangente e inclui diversos tipos de aproximantes. Vários trabalhos desenvolvidos em matemática buscam abordar as diferentes possibilidades de aproximação de funções e estudar qual o valor do erro produzido ao se utilizar tal aproximação ou, ao menos, um limitante para o mesmo.

Um tipo de função comumente abordada em aproximação de funções, é a polinomial, devido à sua simplicidade e boas propriedades, como por exemplo o fato de as funções polinomiais serem infinitamente diferenciáveis. Tais funções são facilmente computadas em algoritmos e sua utilização é justificada pela existência de importantes resultados em análise matemática acerca de convergência e erros. Dentre eles, destaca-se o Teorema da Aproximação de Weierstrass:

**Teorema de Weierstrass:** Seja  $f(x)$  uma função contínua definida sobre um intervalo  $[a, b]$ , então para qualquer precisão  $\varepsilon > 0$  dada, existe um polinômio  $p_n(x)$  de grau  $n$  tal que  $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ .

Este teorema, entretanto, não fornece o polinômio necessário para tal aproximação e também não garante a interpolação da função em pontos desejados. Interpolar a função, significa que a função aproximada deve passar por determinados pontos específicos da

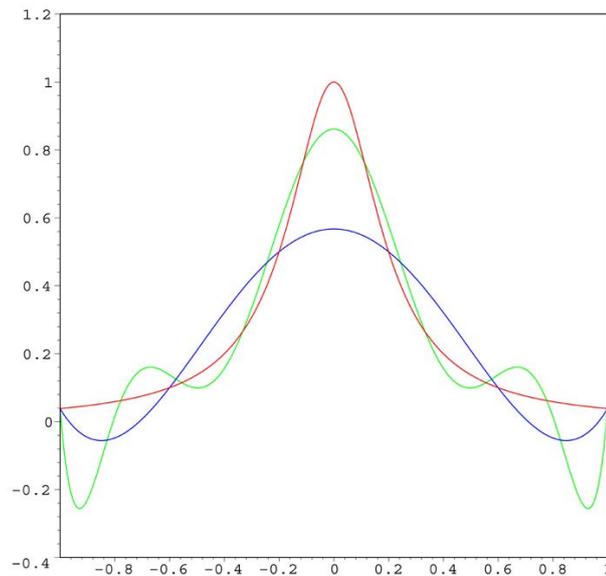


Figura 4.1: Fenômeno de Runge  
Fonte: Wikipedia (2015)

original. Um resultado importante relacionado a este fato é de que em um conjunto  $n$  de pontos distintos,  $\{x_i\}_{i=1}^n$ , existe um único polinômio  $p_{n-1}(x)$  de grau  $n - 1$ , que interpola a função  $f$  nos pontos dados, ou seja,  $p_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ .

Porém, interpolar uma função por um único polinômio em determinados pontos, pode apresentar um problema: o polinômio talvez apresente comportamentos anômalos entre os pontos de referência, ou nós. Um fenômeno comum é o de Runge, em que quanto maior a ordem do polinômio empregado, maior é o erro produzido pela aproximação, como podemos verificar no exemplo (Ruggiero & Lopes, 1996):

**Exemplo (Fenômeno de Runge):** A função  $g(x) = \frac{1}{1+25x^2}$  é aproximada no intervalo  $[0, 1]$  através de um único polinômio interpolador sobre nós uniformemente espaçados. A Figura 4.1 ilustra o comportamento de quanto maior a ordem do polinômio empregado, maior o erro produzido pela aproximação.

Na Figura 4.1, a curva em vermelho corresponde à função  $g(x)$ , enquanto as curvas azul e verde, são aproximantes polinomiais de diferentes ordens para a função  $g(x)$ . Assim, é possível notar que o erro produzido por aproximação polinomial pode ser significativo quando os nós interpolantes não são escolhidos de maneira apropriada.

De acordo com Boor (2001), polinômios interpolantes são muito sensíveis à escolha dos pontos de interpolação. O mesmo autor enfatiza que a interpolação em pontos apro-

priados produz uma aproximação que, para propósitos práticos, diferem muito pouco do melhor aproximante por polinômios de mesma ordem. Tal fato ilustra a limitação essencial da aproximação polinomial: se a função a ser aproximada possui um mal comportamento em qualquer ponto do intervalo de aproximação, então a aproximação é ruim em todo ponto. Este fato pode ser evitado quando os polinômios aproximantes são utilizados por partes, como no caso das *splines*.

## 4.2 *Splines*

De acordo com Ruggiero & Lopes (1996), a origem do nome *spline* vem de uma régua elástica usada em desenhos na engenharia, que pode ser curvada de forma a passar por um dado conjunto de pontos que tem o nome de spline. Essa curva pode ser descrita aproximadamente como sendo uma função por partes de modo que ela e suas duas primeiras derivadas são contínuas sempre.

Uma spline é uma curva definida matematicamente por dois ou mais pontos e os pontos que ficam sob a curva são chamados de nós.

**Definição (*Spline*):** Seja uma função  $f(x)$ , tabelada nos pontos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . Uma função  $S_p(x)$  é denominada *spline* de grau  $P$  com nós nos pontos  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  se satisfaz as seguintes condições abaixo:

- Em cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$ ,  $S_p(x)$  é um polinômio de grau  $p : S_p(x)$ ;
- $S_p(x)$  é contínua e tem derivada contínua até ordem  $(p - 1)$  em  $[a, b]$ ;
- Se  $S_p(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  então será denominada *spline* interpolante.

Em sua forma mais simples, a *spline* linear, realiza a aproximação através de segmentos de reta com extremidades nos nós de referência, necessitando que certas propriedades sejam satisfeitas, como a diferenciabilidade nos nós. A escolha mais comum para utilização de *splines* é conhecida como *spline* cúbica, que consiste em aproximar a função por trechos polinomiais de grau menor ou igual a 3. A spline cúbica tradicional apresenta a vantagem de que a função aproximante obtida é de classe  $C^2$ , no interior do intervalo em que é realizada a aproximação.

Esse tipo de *spline*, entretanto, requer a resolução de um sistema linear para a determinação dos coeficientes dos polinômios utilizados, e os valores da derivada segunda podem não coincidir com o da função aproximada nos nós. Além disso, quando utilizadas para aproximar apenas um trecho de função, a derivada segunda pode não ser contínua nos nós inicial e final.

Se utilizadas as chamadas *splines* cúbicas de Hermite, não existe a necessidade de resolução de um sistema linear para definir a aproximação cúbica por partes, bastando conhecer os valores da função e das derivadas nos nós. O conjunto de polinômios utilizados neste caso, é chamado de funções base de Hermite e a aproximação é feita combinando linearmente esses polinômios.

### 4.3 Função tangente hiperbólica

Conforme já destacado, o problema de despacho econômico com ponto de válvula é caracterizado pela não diferenciabilidade que surge com o termo modular da função objetivo. Daí a necessidade de uma técnica de aproximação suave de funções antes de aplicar os métodos de otimização determinísticos. Dada uma função real  $f(x)$ , a seguinte identidade é válida:

$$|f(x)| = \text{sgn}(f(x))f(x), \text{ para todo } x \in D(f) \quad (4.1)$$

em que  $D(f)$  é o domínio da função  $f(x)$  e  $\text{sgn}(x)$  é a função sinal, expressa por:

$$\begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

A função sinal é descontínua na origem e pode ser aproximada por funções contínuas e infinitamente diferenciáveis com boa precisão, quando se está fora da origem. A técnica é utilizada com frequência, por exemplo, em redes neurais, em que as funções de ativação simulam a função sinal (ou a função degrau unitário), mas precisam ser diferenciáveis Chen & Mangasarian (1996).

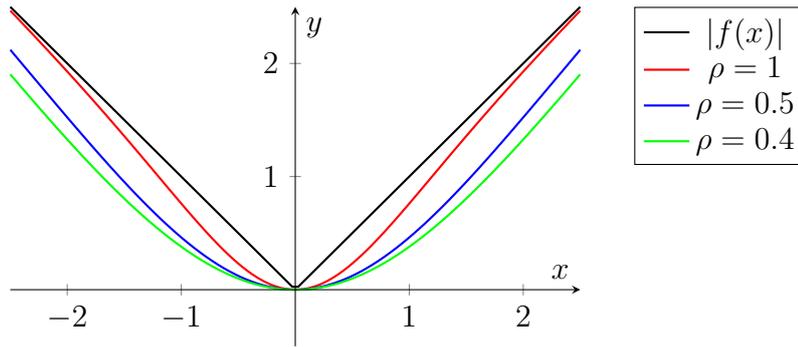


Figura 4.2: Aproximação via tangente hiperbólica

A aproximação para a função sinal pode ser obtida, por exemplo, utilizando a função tangente hiperbólica ou a função sigmoide. Se  $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$  é uma sequência de valores reais tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = +\infty$ , para um  $x \in \mathbb{R}$  fixo, tendo em vista a continuidade da tangente hiperbólica, tem-se que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tanh(\rho_n f(x)) = |f(x)|$ . Isso garante que através da tangente hiperbólica, é possível gerar uma sequência de funções que converge para a função  $|f(x)|$ .

Caso a função  $f(x)$  seja diferenciável, então as funções da sequência gerada também o serão, uma vez que resultam da composição e produto da tangente hiperbólica com uma função diferenciável. A Figura 4.2 mostra como a tangente hiperbólica pode ser utilizada para aproximar a função  $f(x)$ . Para tanto, utilizou-se a função aproximante  $f_\rho(x) = x \tanh(\rho x)$ , em que  $\rho$  é um parâmetro positivo. Quanto maior o valor do parâmetro  $\rho$ , mais próxima fica a função aproximante da função original  $|f(x)|$ .

Outros tipos de funções aproximantes podem ser utilizadas para suavizar uma função, como por exemplo, as transformadas *wavelets*, Frazier (1999). Entretanto, na próxima seção é dada ênfase ao método da suavização hiperbólica, que foi explorado neste trabalho para suavizar a função despacho econômico com pontos de carregamento de válvula, devido a esta, exercer melhor desempenho junto ao método primal-dual previsor-corretor barreira logarítmica modificada, que será definido em 6.2, e as estratégias de resolução de problemas multiobjetivo.

## 4.4 Método da suavização hiperbólica

Considere o problema de otimização a seguir, cuja função objetivo apresenta um termo modular:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= |f(x)| \\ \text{Sujeito a: } x &\in \phi \end{aligned} \tag{4.3}$$

Com a intenção de suavizar a função original do problema, a técnica da Suavização Hiperbólica é aplicada ao problema, de forma análoga a utilizada em Souza (2010). Assim, a função  $z = |f(x)|$  passa a ser expressa de modo aproximado, sendo suavizada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \vartheta(x, \eta) &= \sqrt{(f(x))^2 + \eta^2} \\ \text{Sujeito a: } x &\in \phi \end{aligned} \tag{4.4}$$

em que  $\vartheta(x, \eta)$  é a função objetivo aproximada e  $\eta > 0$  é o parâmetro de suavização.

De acordo com Souza (2010), a função  $\vartheta(x, \eta)$  apresenta algumas propriedades, das quais as principais são destacadas a seguir:

- $\vartheta(x, \eta) > z, \forall \eta > 0$ ;
- $\vartheta(x, \eta)$  é uma função de classe  $C^\infty$ ;
- $\lim_{\eta \rightarrow 0} \vartheta(x, \eta) = z$ , ou seja, a função  $\vartheta(x, \eta)$  é uma boa aproximação de  $z$ , pois a medida que  $\eta \rightarrow 0$ , a função suavizada se aproxima da função original;
- $\vartheta(x, \eta)$  é uma função estritamente crescente em  $\eta$ , para  $\eta > 0$ .

A resolução do problema suavizado é efetuada a partir da solução de problemas continuamente diferenciáveis e que conforme  $\eta \rightarrow 0$ , se aproximam da função original. Na Figura 4.3 é possível notar esse efeito, conforme o parâmetro  $\eta$  se aproxima de zero, a função suavizada  $\vartheta(x, \eta)$  se torna cada vez mais semelhante a função original  $|x|$  e o inverso ocorre quando o valor do parâmetro  $\eta$  é acrescido.

A escolha adequada do parâmetro  $\eta$  utilizado no método é de extrema importância, visto que é ele quem controla o grau da suavização da função e deve representar uma boa relação entre a simplificação do problema e a coerência da solução pretendida, sendo esse fato uma das maiores dificuldades da utilização do método.

Um valor muito baixo para  $\eta$  indica a resolução de um problema muito próximo

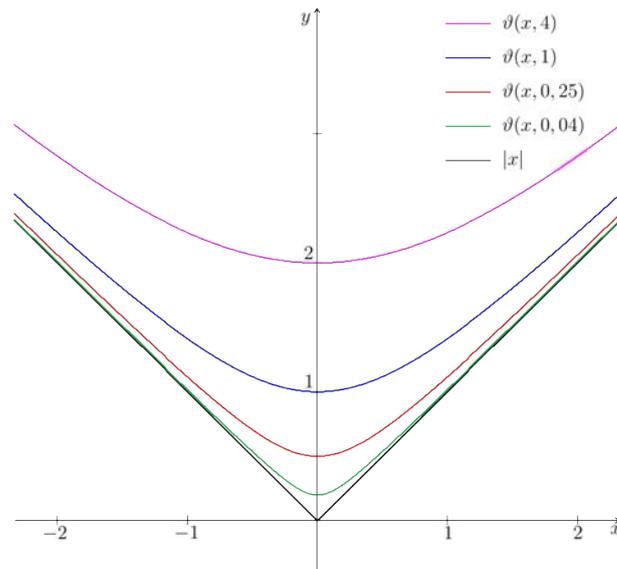


Figura 4.3: Função  $\vartheta$  para diferentes valores de  $\eta$ .  
 Fonte: Silva (2014)

da não-diferenciabilidade e portanto mal condicionado perto das regiões em que o termo modular se anula. Já a escolha de um valor muito grande para  $\eta$  acarreta na suavização excessiva, descaracterizando a função objetivo aproximada em relação a original.

A proposta de suavização da função objetivo relativa à inserção de pontos de carregamento de válvula no PMDEA é feita através da técnica de suavização proposta nesta seção. Com isso, é possível que métodos clássicos de otimização sejam empregados à resolução dos modelos desenvolvido no presente trabalho, neste caso, métodos primais-duais de pontos interiores/exteriores. Para cada solução obtida do PMDEA-PV, ou seja, cada ponto que compõe a curva de soluções eficientes, um parâmetro  $\eta$  diferente foi empregado. O Apêndice A apresenta uma exemplificação dos diferentes valores utilizados para o parâmetro  $\eta$ .

## CAPÍTULO 5

# OTIMIZAÇÃO: TEORIA E MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES

A utilização de modelos matemáticos para a obtenção da melhor solução possível de um problema tem auxiliado diferentes áreas do conhecimento. Esses modelos, estão inseridos na área de otimização e usualmente são formulados minimizando ou maximizando o valor de uma função objetivo, dentro de um conjunto factível de possibilidades de solução.

Neste capítulo, baseando-se em mais uma revisão sobre a teoria da otimização e alguns métodos numéricos utilizados à resolução de problemas não lineares, apresentadas em Silva (2014), e na ampla bibliografia sobre este tema divulgada na literatura, é feito um resumo sobre os mesmos, os quais serão importantes para o desenvolvimento do método proposto por Silva (2014), a ser visto no Capítulo 6.

### **5.1 Revisão da teoria e de métodos de otimização não linear**

Foi durante a segunda guerra mundial, que a otimização para várias variáveis deu um grande salto. Com a escassez de alimentos devido à guerra, surgiu a necessidade de alocação e melhor distribuição de recursos. Assim, o advento do computador proporcionou o desenvolvimento do método simplex para problemas de programação linear, por George

Dantzig, em 1947 e a área de otimização começou a crescer em um ritmo acelerado.

No final da década de 50 e início da década de 60, os problemas de programação não linear tornaram-se significativos após a introdução de métodos de métrica variável (Davidon, 1959), capazes de solucionar problemas com um grande número de variáveis. Surgiram também os primeiros métodos baseados em penalidade e barreira para resolução de problemas não lineares restritos. Destaca-se, neste período, os trabalhos de Frisch (1955) e Carroll & Fiacco (1961), os quais podem ser considerados os precursores da metodologia de pontos interiores, amplamente explorada no início da década de 80. Fiacco & McCormick (1968) também publicaram um trabalho relacionado à programação não linear, com um método misto combinando função barreira e função penalidade numa mesma função auxiliar, baseando-se e popularizando o trabalho de Frisch (1955).

Em Murray (1971), é apresentado um estudo sobre expressões analíticas para autovalores e autovalores de funções barreira em um mínimo intermediário. O autor também citou que os métodos de Newton e quase-Newton são os mais utilizados na resolução de métodos da função barreira.

Segundo Wright (2004), os métodos modernos de pontos interiores estão diretamente ligados aos métodos de barreira que foram desenvolvidos na década de 60. Além desses, os métodos de Lagrangiana aumentada, introduzidos por Hestenes (1969) e Powell (1969), também se tornaram populares e continuam cada vez mais explorados atualmente, como pode ser visto em Baptista (2001) e Baptista et al. (2006), entre outros. Estudos relacionados à função Lagrangiana aumentada datam de 1760, quando o matemático francês Joseph-Louis Lagrange o propôs como uma técnica de solução para problemas de otimização com restrições de igualdade. Métodos lagrangianos, ou seja, métodos que derivam da mesma filosofia de Lagrange, são usados até hoje e podem ser encontrados, entre outros, em Bazaraa et al. (1979), Luenberger (1984) e Fletcher (1985).

A metodologia precursora de solução para problemas lineares, denominada de métodos de pontos interiores, introduzida em Karmarkar (1984) retornou o interesse à utilização do método proposto por Frisch, em 1955. Karmarkar anunciou um algoritmo de tempo polinomial para programação linear que obtinha as soluções do problema em menor tempo computacional em relação ao método simplex, principalmente em problemas de grande porte. A partir do método de Karmarkar, seguiram-se diversas pesquisas e outros

métodos de pontos interiores para programação linear, obtendo limitantes de complexidade melhores e a derivação de propriedades do método de barreira aplicado a problemas lineares.

A partir deste, são publicados diversos métodos variantes, tais como os métodos afins de pontos interiores, os métodos de trajetória central e os métodos primais-duais de pontos interiores. Diversos autores foram responsáveis pelo desenvolvimento dos métodos de pontos interiores, nas décadas de 80 e 90, e estes métodos têm sido muito explorados atualmente para solucionar problemas de programação matemática linear, não-linear e inteira. Esses métodos são citados no início do Capítulo 6.

Apesar dos métodos de pontos interiores apresentarem bom desempenho computacional, segundo Wright (1994), em problemas de otimização linear e, principalmente, em problemas não lineares, de grande porte, os métodos de penalidade que utilizam a função barreira logarítmica apresentam o problema de mau-condicionamento das matrizes hessianas à medida que o método se aproxima da solução do problema.

Polyak (1992), visando amenizar este problema propôs um método que une a função lagrangiana clássica e a barreira clássica, chamado de barreira modificada. As funções propostas por Polyak eram utilizadas para transformar um problema restrito em irrestrito, resolvendo uma sequência de problemas irrestritos até atingir a solução ótima.

Apesar de terem passado por diversas modificações, os métodos de pontos interiores e exteriores continuam sendo amplamente utilizados atualmente para resolução de problemas de otimização e uma abordagem geral sobre os mesmos é feita no Capítulo 6.

Baseando-se nos autores supra-citados, nas seções 5.1.1 e 5.2, uma breve revisão relacionada a teoria e aos métodos de otimização é realizada.

### 5.1.1 Revisão teórica de otimização

Nesta seção são apresentados os conceitos de otimização, irrestrita e restrita, fundamentais para resolução do PMDEA-PV em destaque neste trabalho.

### 5.1.1.1 Otimização irrestrita

Um problema de otimização irrestrito é definido por (5.1):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{Sujeito a: } x \in \mathfrak{N} \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{5.1}$$

em que:

$f : \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função objetivo;

$\mathfrak{N}$  é o conjunto de todos os pontos factíveis  $x$ .

Neste contexto, as definições de mínimo local e mínimo global são de fundamental importância:

- **Mínimo local:** Um ponto  $x^* \in \mathfrak{N}$  é um mínimo local de  $f$  sobre o conjunto  $\mathfrak{N}$  se existe um  $\varepsilon > 0$  e uma bola aberta  $B(x^*, \varepsilon)$  tal que  $f(x^*) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap \mathfrak{N}$  quando  $f(x^*) < f(x)$ ,  $\forall x \in (B(x^*, \varepsilon) - \{x^*\}) \cap \mathfrak{N}$ .
- **Mínimo global:** Um ponto  $x^* \in \mathfrak{N}$  é um *mínimo global* de  $f$  sobre o conjunto  $\mathfrak{N}$  se  $f(x^*) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in \mathfrak{N}$  quando  $f(x^*) < f(x)$ ,  $\forall x \in \mathfrak{N} - \{x^*\}$ .

Definir um mínimo global de uma função, geralmente, é uma tarefa difícil. Porém, algumas condições acerca da função objetivo e da região factível podem garantir a existência de pelo menos um ponto de mínimo global.

Funções convexas definidas sobre conjuntos convexos possuem importantes propriedades relevantes para a teoria da otimização, entre elas a garantia de que mínimos locais são mínimos globais.

Uma função  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa se  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ ,  $\forall x, y \in K, \forall \alpha \in [0, 1]$ .

Com isso, se  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo e  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa, então o mínimo local de  $f$  também é um mínimo global.

Quanto as condições de otimalidade, considere o problema definido em (5.1) assumindo que a função  $f$  possui derivadas primeiras contínuas em um conjunto aberto contendo o conjunto  $\mathfrak{N}$ .

**Teorema 5.1:** Seja  $x^*$  um mínimo local do problema e  $\gamma$  uma curva em  $\aleph$  de classe  $C^1$  partindo de  $x^*$ . Então  $\nabla f(\mathbf{x}^*)^t \gamma'(0) \geq 0$ .

O próximo teorema é a versão baseada em curvas das condições necessárias de segunda ordem.

**Teorema 5.2:** Sejam  $\mathbf{x}^*$  um mínimo local para o problema (5.1) e  $f \in C^2(\aleph)$ .

- (a) Para toda curva  $\gamma$  em  $\aleph$  de classe  $C^2$  partindo de  $\mathbf{x}^*$ ,  $\phi'(0) = \nabla f(\mathbf{x}^*)^t \gamma'(0) \geq 0$ , onde  $\phi(t) = f(\gamma(t))$ .
- (b) Se  $\phi'(0) = 0$ , então  $\phi''(0) \geq 0$ .

Além disso, dois resultados são importantes para que as condições de otimalidade sejam verificadas:

1. Seja  $\mathbf{x}^*$  um ponto interior de  $\aleph$  e mínimo local para o problema (5.1). Então  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ .
2. Se  $\mathbf{x}^*$  é um ponto interior de  $\aleph$  e mínimo local para o problema (5.1) e  $f$  tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas numa vizinhança de  $\mathbf{x}^*$ , então  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  e  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \geq 0$ .

Os dois resultados definidos acima, são denominados de condições necessárias de otimalidade de primeira e segunda ordem, respectivamente. Ambos estabelecem relações com as derivadas parciais de primeira ordem que compõe o vetor gradiente e com as derivadas parciais de segunda ordem, presentes na matriz hessiana.

Um ponto satisfazer as condições necessárias, não garante que o mesmo seja um mínimo local para o problema. Já as condições suficientes de segunda ordem que serão definidas, garantem que um ponto que as satisfaz seja mínimo local de um problema.

**Teorema 5.3:** Sejam  $f \in C^2(\aleph)$  e  $\mathbf{x}^*$  um ponto interior de  $\aleph \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  e  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) > 0$ . Então  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local estrito para o problema (5.1).

### 5.1.1.2 Otimização restrita

Inserindo restrições de igualdade ao problema definido em (5.1), sua modelagem é expressa em (5.2):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{Sujeito a: } g(x) = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

em que:

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  representa o conjunto das restrições de igualdade;  
 $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , com  $\Omega$  um conjunto aberto;  
 $\mathfrak{N} = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$  é o conjunto factível do problema.

A matriz jacobiana relacionada a função  $g$  no ponto  $x$  é denotada por:

$$Jg(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla g_1(\mathbf{x})^t \\ \vdots \\ \nabla g_m(\mathbf{x})^t \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Quanto às condições de otimalidade de problemas com restrições de igualdade, o **Teorema 5.3** dos multiplicadores de Lagrange é de grande importância e equivalente a condições necessárias de primeira ordem:

**Teorema 5.3 (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange):** Seja  $\mathbf{x}^*$  um mínimo local regular para o problema (5.2). Então existem únicos  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$  números reais, denominados multiplicadores de Lagrange, tais que  $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ .

As condições necessárias de segunda ordem são equivalentes ao **Teorema 5.4** apresentado a seguir:

**Teorema 5.4:** Suponha que  $f, g \in C^2$ ,  $\mathbf{x}^*$  é mínimo local regular para o problema 5.2, e que  $\boldsymbol{\lambda}^*$  é o vetor de multiplicadores de Lagrange, cuja existência é garantida pelo **Teorema 5.3**. Então  $v^t \left( \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^*) \right) v \geq 0$ , para todo  $v \in \mathcal{N}(Jg(\mathbf{x}^*))$ .

em que:

$\mathcal{N}(A)$  é o núcleo da matriz  $A$ , tal que  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

As condições suficientes de otimalidade também podem ser introduzidas para o caso em que as restrições de igualdade são inseridas, como segue no **Teorema 5.5**.

**Teorema 5.5:** Sejam  $f, g \in C^2$ ,  $\mathbf{x}^* \in \aleph$  e  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  tais que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Suponha também que a matriz  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^*)$  é definida positiva em  $\mathcal{N}(Jg(\mathbf{x}^*))$ . Então  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local estrito para o problema (5.2).

Ao problema (5.2), podem ser inseridas restrições de desigualdade e sua formulação passa a ser (5.4):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{Sujeito a:} && h(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

em que:

$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  representa o conjunto das restrições de desigualdade;  
 $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , com  $\Omega$  um conjunto aberto;  
 $\aleph = \{x \in \Omega : h(x) \leq 0\}$  é o conjunto factível do problema.

As condições necessárias de otimalidade, neste caso, estão ligadas ao teorema de Fritz-John, que é apresentado a seguir:

**Teorema 5.6 (Condições necessárias de Fritz-John):** Considere o problema (5.4). Seja  $\mathbf{x}^*$  um ponto factível tal que  $f$  e  $h_j$  são diferenciáveis em  $\mathbf{x}^*$ , para  $j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$  (conjunto das restrições ativas), e  $h_j$  é contínua em  $\mathbf{x}^*$ , para  $j \notin \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ . Se  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local, então existem escalares  $\nu_0^*$  e  $\nu_j^*$ , para cada  $j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ , tais que

$$\nu_0^* \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)} \nu_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \tag{5.5a}$$

$$\nu_0^*, \nu_j^* \geq 0, \quad \text{para } j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*) \tag{5.5b}$$

$$(\nu_0^*, \nu_{\mathcal{A}(\mathbf{x}^*)}^*) \neq (0, 0) \tag{5.5c}$$

em que  $\nu_{\mathcal{A}(\mathbf{x}^*)}^*$  é o vetor cujas componentes são  $\nu_j^*$ , com  $j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ . Se, adicionalmente,  $h_j$  for diferenciável em  $\mathbf{x}^*$ , para todo  $j \notin \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ , as condições supracitadas podem ser

escritas da seguinte forma:

$$\nu_0^* \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \nu_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (5.6a)$$

$$\nu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, p \quad (5.6b)$$

$$\nu_0^*, \nu_j^* \geq 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, p \quad (5.6c)$$

$$(\nu_0^*, \nu^*) \neq (0, 0) \quad (5.6d)$$

em que  $\nu^*$  é o vetor cujas componentes são  $\nu_j^*$ , para  $j = 1, \dots, p$ .

Com as condições necessárias de Fritz-John, pode ser enunciado o teorema com as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker, de grande importância na área de otimização não-linear:

**Teorema 5.7 (Condições necessárias de KKT):** Seja  $\mathbf{x}^*$  um ponto factível tal que  $f$  e  $h_j$  são diferenciáveis em  $\mathbf{x}^*$ , para  $j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ , e  $h_j$  é contínua em  $\mathbf{x}^*$ , para  $j \notin \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ . Suponha, ainda, que o conjunto  $\{\nabla h_j(\mathbf{x}^*)\}_{j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)}$  é linearmente independente (isto é,  $\mathbf{x}^*$  é um ponto regular). Se  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local, então existem escalares  $\nu_j^*$ , para cada  $j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ , tais que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)} \nu_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (5.7a)$$

$$\nu_j^* \geq 0, \quad \text{para } j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*). \quad (5.7b)$$

Se, adicionalmente,  $h_j$  for diferenciável em  $\mathbf{x}^*$ , para todo  $j \notin \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ , as condições supracitadas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \nu_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (5.8a)$$

$$\nu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, p \quad (5.8b)$$

$$\nu_j^* \geq 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, p \quad (5.8c)$$

Os problemas de otimização podem ser formulados unindo restrições de igualdade e restrições de desigualdade. Assim esses problemas são definidos da seguinte forma (5.9):

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } f(x) \\
 & \text{Sujeito a: } g(x) = 0 \\
 & \qquad \qquad h(x) \leq 0
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

em que:

$f, g$  e  $h$  são funções de classe  $C^2$ , tal que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ;  
 $g(x)$  representa o conjunto das restrições de igualdade;  
 $h(x)$  representa o conjunto das restrições de desigualdade;  
 $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , com  $\Omega$  um conjunto aberto.

As condições necessárias de otimalidade para o problema definido em (5.9) são dadas no teorema a seguir:

**Teorema 5.8 (Condições necessárias de KKT):** Seja  $\mathbf{x}^*$  um ponto factível tal que  $f, g$  e  $h_j$  são diferenciáveis em  $\mathbf{x}^*$ , para  $j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ , e  $h_j$  é contínua em  $\mathbf{x}^*$ , para  $j \notin \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ . Suponha, ainda, que o conjunto  $\{\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x}^*)\} \cup \{\nabla h_j(\mathbf{x}^*)\}_{j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)}$  é linearmente independente (isto é,  $\mathbf{x}^*$  é um ponto regular). Se  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local, então existem escalares unicamente determinados  $\lambda_i^*$ , para  $i = 1, \dots, m$  e  $\nu_j^*$ , para cada  $j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ , tais que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)} \nu_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \tag{5.10a}$$

$$\nu_j^* \geq 0, \quad \text{para } j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*). \tag{5.10b}$$

Se, adicionalmente,  $h_j$  for diferenciável em  $\mathbf{x}^*$ , para todo  $j \notin \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ , as condições supracitadas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \nu_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \tag{5.11a}$$

$$\nu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, p \tag{5.11b}$$

$$\nu_j^* \geq 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, p \tag{5.11c}$$

Por fim, se as funções  $f, g$  e  $h$  forem de classe  $C^2$ , e  $V(\mathbf{x}^*)$  for a matriz cujas linhas são

os gradientes do conjunto  $\{\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x}^*)\} \cup \{\nabla h_j(\mathbf{x}^*)\}_{j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*)}$ , então

$$v^t \left( \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \nu_j^* \nabla^2 h_j(\mathbf{x}^*) \right) v \geq 0, \quad \text{para todo } v \in \mathcal{N}(V(\mathbf{x}^*))$$

isto é, a matriz  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \nu_j^* \nabla^2 h_j(\mathbf{x}^*)$  é semidefinida positiva em  $\mathcal{N}(V(\mathbf{x}^*))$ .

Como nos casos anteriores,  $\lambda^*$  e  $\nu_j^*$  são denominados multiplicadores de Lagrange.

**Teorema 5.9 (Condições suficientes de KKT):** Suponha que para um dado ponto  $\mathbf{x}^*$ , existam vetores  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)^t$  e  $\nu^* = (\nu_1^*, \dots, \nu_p^*)^t$  satisfazendo as equações (5.11). Defina  $\mathcal{A}^+(\mathbf{x}^*) = \{j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*) : \nu_j^* > 0\}$ ,  $\mathcal{A}^0(\mathbf{x}^*) = \{j \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*) : \nu_j^* = 0\}$  e o cone

$$S(\mathbf{x}^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : d \neq 0, \nabla g_i(\mathbf{x}^*)^t d = 0, \text{ para } i = 1, \dots, m \\ \nabla h_j(\mathbf{x}^*)^t d = 0, \text{ para } j \in \mathcal{A}^+(\mathbf{x}^*), \nabla h_j(\mathbf{x}^*)^t d \leq 0, \text{ para } j \in \mathcal{A}^0(\mathbf{x}^*)\}.$$

Se

$$v^t \left( \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \nu_j^* \nabla^2 h_j(\mathbf{x}^*) \right) v > 0, \text{ para todo } v \in S(\mathbf{x}^*),$$

então  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local estrito do problema (5.9).

As demonstrações dos teoremas apresentados neste capítulo podem ser obtidas em Silva (2014), que por sua vez, baseou-se principalmente nos trabalhos de Bazaraa et al. (1979) e Luenberger (1984).

## 5.2 Métodos de otimização

### 5.2.1 Método dual-Lagrangiano

Considere o problema de programação não linear definido em (5.12):

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f(x) \\
 &\text{Sujeito a: } g(x) = 0 \\
 &\qquad\qquad h(x) \leq 0
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

em que:

$f, g$  e  $h$  são funções de classe  $C^2$ , tal que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ;  
 $g(x)$  representa as restrições de igualdade;  
 $h(x)$  representa as restrições de desigualdade;  
 $x \in \psi \subseteq \mathbb{R}^n$  com  $\psi$  sendo um conjunto aberto.

O objetivo de (5.12) é determinar um ponto ótimo que minimize a função  $f(x)$ , condicionada ao atendimento das restrições  $g(x)$  e  $h(x)$ . Assim, a estratégia dos multiplicadores de Lagrange consiste em transformar o problema (5.12) restrito, em um problema irrestrito, de modo que o novo problema seja equivalente ao original.

A transformação é feita associando um multiplicador de Lagrange a cada uma das restrições. A nova função objetivo a ser minimizada é denominada de função Lagrangiana e representada por (5.13):

$$L(x, \lambda, v) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p v_j h_j(x) \tag{5.13}$$

em que:

$\lambda_i$ , com  $i = 1, \dots, m$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade;  
 $v_j > 0$ , com  $j = 1, \dots, p$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade.

Quando os multiplicadores de Lagrange atingirem  $(\lambda_i^*, v_j^*)$ , então  $x^*$  deve ser um ponto de mínimo em  $L(x, \lambda, v)$ . Isso ocorre devido ao método dual-Lagrangiano seguir um forte indicativo apresentado pelo teorema do ponto de sela, em que um ponto  $L(x^*, \lambda_i^*, v_j^*)$  que seja ótimo, com *gap* de dualidade nulo, deve satisfazer a condição de ponto de sela.

O método dual-Lagrangiano é geralmente aplicado juntamente com outros métodos,

como ocorre no presente trabalho. A utilização individual do mesmo acarreta em alguns problemas na resolução, uma vez que devido a inserção dos multiplicadores de Lagrange na função objetivo, um aumento no número de variáveis do problema é causado. Além disso, devido à possibilidade de ocorrência do *gap* de dualidade, o método pode divergir ou caminhar para soluções diferentes da ótima.

### 5.2.2 Método de barreira

Os métodos de barreira são comumente utilizados para resolver problemas de otimização com restrições de desigualdade e cujo interior da região viável seja não vazio, como o problema definido em (5.14):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a: } h(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

em que:

$f$  e  $h$  são funções de classe  $C^2$ , tal que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ;  
 $h(x)$  são as restrições de desigualdade;  
 $x \in \psi \subseteq \mathbb{R}^n$  com  $\psi$  sendo um conjunto aberto.

Basicamente, os métodos de barreira convertem um problema restrito (5.14) em irrestrito e o mesmo é resolvido para uma sequência de parâmetros de barreira que tendem a zero. Cada restrição de desigualdade do problema de otimização é tratada através de uma função barreira, ou seja, uma função auxiliar é criada através da incorporação da função barreira à original.

Por ser estritamente factível, o método de barreira permite que os pontos estejam sempre no interior da região factível ao longo do processo iterativo, por isso a necessidade de assumir que o interior determinado pelas restrições seja não-vazio. A barreira criada pelo método preserva a factibilidade e mantém os pontos no interior dessa região e por isso, esses métodos são conhecidos também como métodos de pontos interiores.

A função auxiliar que será incorporada ao problema original é definida de acordo com (5.15):

$$f_{\mu}(x) = f(x) + \mu B(x) \quad (5.15)$$

em que:

$\mu \in \mathbb{R}_+^*$  é denominado parâmetro de barreira;

$B$  é a função barreira.

A função barreira  $B$ , associada ao problema (5.15), é definida de acordo com (5.16):

$$B(x) = \sum_{j=1}^p \phi(h_j(x)) \quad (5.16)$$

em que  $\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \phi(y) &\geq 0, \text{ se } y > 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} \phi(y) &= \infty \end{aligned} \quad (5.17)$$

O problema de otimização irrestrito com a inserção da função auxiliar, passa a ser definido por (5.18):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & f_{\mu}(x) \\ \text{Sujeito a: } & x \in \overset{\circ}{X} \end{aligned} \quad (5.18)$$

em que  $\overset{\circ}{X}$  é o interior não-vazio da região factível do problema (5.14).

A função barreira pode assumir diferentes modelagens, entre elas a apresentada por Carroll & Fiacco (1961), representada na equação (5.19) e denominada de barreira clássica ou inversa e a apresentada por Frisch (1955), definida em (5.20) e denominada de barreira logarítmica.

$$\phi(y) = \frac{1}{y} \quad (5.19)$$

$$\phi(y) = -\ln(y) \quad (5.20)$$

Durante a resolução do método de barreira, deseja-se que  $\mu B(x) \rightarrow 0$ , enquanto a solução chega no seu valor ótimo, ou seja,  $x \rightarrow x^*$ . Porém, se  $x^*$  está na fronteira da região factível, quando  $x \rightarrow x^*$ , tem-se que  $B(x) \rightarrow \infty$ . Assim, é necessário que o parâmetro de barreira  $\mu \rightarrow 0$  mais rapidamente que  $B(x) \rightarrow \infty$ , para que  $\mu B(x) \rightarrow 0$  ocorra.

Assim como nos métodos de penalidade, o parâmetro de barreira multiplicado pela função barreira ( $\mu B(x)$ ), pode ser utilizado como critério de parada do método. Desse modo, se  $\mu B(x)$  não for menor que uma precisão imposta a priori,  $\mu$  deve ser reduzido através de alguma heurística e o problema barreira resolvido novamente.

Semelhante a outros métodos, o de barreira possui algumas dificuldades, entre elas a escolha de um ponto inicial que pertença ao interior da região factível, que não é uma tarefa simples. Conforme  $\mu \rightarrow 0$ , os problemas a serem resolvidos tornam-se cada vez mais difíceis, devido ao mau-condicionamento da matriz hessiana e por isso, o  $\mu$  inicial e sua atualização, devem ser escolhidos de maneira cuidadosa.

### 5.2.3 Barreira modificada e rescalamento não linear

A teoria dos métodos da função barreira logarítmica modificada foi proposta por Polyak, como uma nova forma de tratar as restrições de desigualdade em problemas de otimização. Semelhante aos outros métodos de barreira apresentados, esta técnica também resolve uma sequência de problemas irrestritos, até que o ótimo seja obtido, com uma determinada precisão estabelecida (Polyak, 1992). Em Pinheiro (2012), a função barreira modificada é definida como uma função Lagrangiana aumentada interior.

Com o intuito de estender a teoria da função barreira modificada para uma mais geral, Polyak propôs o rescalamento não-linear. A técnica, incorpora a função barreira modificada e outras funções que satisfazem determinadas propriedades. Considere o problema de otimização formulado em (5.21):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & f(x) \\ \text{Sujeito a: } & h(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{5.21}$$

em que:

$f$  e  $h$  são funções de classe  $C^2$ , tal que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ;  
 $x \in \psi \subseteq \mathbb{R}^n$  com  $\psi$  sendo um conjunto aberto.

Uma transformação na função objetivo e/ou restrições é realizada pelo método do rescalamento não linear, de forma que se obtenha um problema equivalente e com a mesma região factível. A transformação não-linear utilizada é uma função suave e que depende de um parâmetro positivo, a qual denomina-se função de rescalamento. Os multiplicadores de Lagrange das restrições modificadas são chamados de estimadores.

A definição de uma função de rescalamento não linear é dada, de acordo com Polyak & Teboulle (1997), como uma função  $\psi$ , de classe  $C^2$ , sobre um intervalo  $(a, +\infty)$  e satisfazendo  $(-\infty) \leq a < 0$ ,  $\psi(a) = -\infty$  e  $\psi'(a) = +\infty$ . Além disso, a função de rescalamento não linear deve atender as seguintes propriedades:

- $\psi(0) = 0$  e  $\psi'(0) = 1$ ;
- $\psi'(t) > 0$ , ou seja, a função  $\psi$  é estritamente crescente;
- $\psi''(t) < 0$ , ou seja,  $\psi$  é uma função côncava;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi'(t) = 0$ .

Considerando as propriedades da função  $\psi$ , o problema dado em 5.21, pode ser reformulado para um problema equivalente (5.22), considerando um parâmetro  $\mu > 0$  e de modo que na transformação não seja alterado o conjunto de soluções ótimas do problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a: } -\mu\psi(\mu^{-1}h_j(x)) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{5.22}$$

O problema transformado definido em (5.22), permite que seja feita uma relaxação da região factível do problema original, uma vez que sendo a função  $\psi$  definida em  $(a, +\infty)$ , os valores de  $x$  podem ser tais que  $\mu^{-1}h_j(x) > a$  se, e somente se,  $h_j(x) > a\mu$  e como  $a < 0$ , implica em  $a\mu < 0$ .

A região factível relaxada é uma união da região factível original e de uma região adicional, que depende do parâmetro  $\mu$ . A medida que  $\mu$  tende a 0, a região relaxada, em

seu limite, torna-se novamente a região factível original.

Ao problema formulado através da técnica do rescalamento não linear, ou seja, o problema transformado, uma função Lagrangiana pode ser associada (5.23):

$$L_\mu(x, \delta) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \psi(\mu^{-1} h_j(x)) \quad (5.23)$$

em que:

$L_\mu$   $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^p \rightarrow \mathbb{R}$ ;  
 $\delta_j, j = 1, \dots, p$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade transformadas.

Após a formulação do problema de otimização através do rescalamento não linear, sua resolução é feita baseada nas ideias empregadas nos métodos dual-Lagrangiano e de barreira. Caso a convergência não seja obtida, os estimadores e o parâmetro de barreira devem ser atualizados e o processo é repetido.

### 5.2.3.1 Atualização dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange

Considere a função Lagrangiana, do problema transformado, definida em (5.23). Aplicando as condições de otimalidade e assumindo que uma nova solução  $x^{(k+1)}$  foi determinada, tem-se que:

$$\nabla_x L_\mu(x^{k+1}, \delta^k) = \nabla f(x^{k+1}) - \mu^k \sum_{j=1}^p \delta_j^k \psi'((\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1})) (\mu^k)^{-1} \nabla h_j(x^{k+1}) = 0$$

$$\text{se, e somente se, } \nabla f(x^{k+1}) - \sum_{j=1}^p \delta_j^k \psi'((\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1})) \nabla h_j(x^{k+1}) = 0$$

De acordo com Polyak & Teboulle (1997), o estimador do multiplicador de Lagrange pode ser atualizado por:

$$\delta_j^{k+1} = \delta_j^k \psi'((\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1})), \quad j = 1, \dots, p \quad (5.24)$$

Também em Polyak & Teboulle (1997), algumas funções de rescalamento são apresentadas. Neste trabalho, a função utilizada é a função barreira logarítmica modificada, utilizada com sucesso em Pinheiro (2012) e definida em (5.25):

$$\psi(t) = \ln(t + 1), \quad t \in (-1, \infty) \quad (5.25)$$

### 5.2.3.2 Barreira logarítmica modificada

O método da função barreira logarítmica modificada é utilizado, juntamente com a função de rescalamento definida em (5.25). Com isso, a função Lagrangiana do problema transformado passa ser denominada de função barreira logarítmica modificada e definida da seguinte forma (5.26):

$$M_\mu(x, \delta) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \ln(\mu^{-1} h_j(x) + 1) \quad (5.26)$$

em que:

$\delta_j, j = 1, \dots, p$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade.

Se os valores ótimos  $x^*$  e  $\delta^*$  forem conhecidos, a função  $M_\mu$  admite as seguintes propriedades:

- $M_\mu(x^*, \delta^*) = f(x^*)$ , para todo  $\mu > 0$ ;
- $\nabla_x M_\mu(x^*, \delta^*) = \nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^p \delta_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$ , para todo  $\mu > 0$ ;
- E se o problema for convexo, vale que  $x^* = \arg \min\{M_\mu(x, \delta^*)\}$ , para todo  $\mu > 0$ .

Neste método, os multiplicadores de Lagrange serão atualizados por (5.27):

$$\delta_j^{k+1} = \frac{\delta_j^k}{(\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1}) + 1} \quad (5.27)$$

Caso os multiplicadores de Lagrange ótimos sejam conhecidos *a priori*, o problema de otimização restrito pode ser resolvido com a utilização de um único problema de otimização irrestrito, independente do valor do parâmetro de barreira  $\mu$ . Assim, quando existe uma boa estimativa para os multiplicadores de Lagrange, o parâmetro de barreira

$\mu$  não precisa tender a zero com a mesma intensidade dos métodos de barreira clássicos. Esse fato, contribui para uma grande melhoria no condicionamento da matriz hessiana e também para a estabilidade numérica do método.

No trabalho de Pinheiro (2012), uma sugestão computacionalmente mais barata, foi empregada com sucesso para atualização dos multiplicadores de Lagrange na resolução de problemas de fluxo de potência ótimo. Essa atualização também havia sido proposta anteriormente em Griva & Polyak (2006) e consiste em atualizar o estimador  $\delta^{k+1}$  atribuindo a ele o valor do multiplicador de Lagrange da restrição de desigualdade que foi convertida em igualdade,  $v^{k+1}$ , visto em (5.13).

Neste trabalho, essa proposta foi tomada como forma de atualização dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange, uma vez que Pinheiro (2012) aponta várias vantagens em relação ao seu uso, entre elas o fato de que o custo computacional dessa atualização é baixo, já que as componentes  $v^{k+1}$ , recebem o valor das respectivas componentes  $v^k$ . Os algoritmos dos métodos apresentados nesta seção podem ser vistos em Silva (2014) e os resultados dos métodos em destaque serão explorados no Capítulo 6 para desenvolvimento do método primal-dual previsor-corretor barreira logarítmica modificada.

Neste capítulo, será apresentada uma breve descrição dos métodos de pontos interiores e exteriores e o desenvolvimento dos mesmos ao decorrer dos anos. Em seguida, na Seção 6.2, é exposto o método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores, com estratégia de rescalamento não linear baseado na função barreira logarítmica modificada.

O método em destaque será utilizado neste trabalho, juntamente com a técnica de suavização hiperbólica, vista na Seção 4.4, a estratégia de correção de inércia e as estratégias de resolução de problemas multiobjetivo, que serão vistas no Capítulo 7, para resolução do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental com inserção de pontos de carregamento de válvula.

## 6.1 Breve abordagem sobre métodos de pontos interiores e exteriores

Os métodos de pontos interiores têm sido amplamente explorados na atualidade. Esses métodos são investigados e empregados, em especial, na resolução de problemas de programação linear e, mais recentemente, problemas de programação quadrática e não linear, caracterizando um bom desempenho inclusive nos casos em que são explorados problemas de grande porte.

De acordo com as afirmações já feitas no início do Capítulo 5, a estratégia de pontos interiores foi introduzida inicialmente por Frisch (1955) e por Carroll & Fiacco (1961) e, nessa época, os problemas não eram conhecidos na literatura com esta denominação. Esses métodos foram popularizados, mais tarde, por Fiacco & McCormick (1968).

Durante a década de 70, o interesse relacionado aos estudos desses métodos decaiu, devido aos mesmos apresentarem alguns problemas relacionados ao mau-condicionamento da matriz hessiana, as dificuldades na escolha do fator de barreira e de uma solução inicial, a não existência de derivada na solução e o aumento ilimitado da função barreira na vizinhança da fronteira.

Somente em 1984, quando Karmarkar publicou o seu método de transformação projetiva para programação linear (Karmarkar, 1984), que o interesse pela utilização de pontos interiores reapareceu. De acordo com Fang & Puthenpura (1993), o algoritmo de Karmarkar transformou-se em um notável método de ponto interior para a resolução de problemas de otimização linear e provocou grande interesse nas atividades de pesquisa da área. A transformação original de Karmarkar era relativamente complexa, por redefinir o problema de programação linear, modificar a sua forma padrão e dificultar os procedimentos para o desenvolvimento do método.

Um algoritmo denominado de algoritmo afim publicado em 1967 em (Dikin, 1967), foi redescoberto por Barnes (1985) e Vanderbei et al. (1986). Os autores citados exploraram o trabalho de Dikin e baseado no mesmo foi apresentado o algoritmo primal-afim para problemas de programação linear com restrições de igualdade. Nesse método era proposta uma transformação afim ou mudança de escala, substituindo a transformação projetiva proposta por Karmarkar, de modo que fosse possível trabalhar com o problema de programação linear em sua forma padrão. Neste contexto, Adler et al. (1989) propuseram o algoritmo dual-afim para problemas de programação linear com restrição de desigualdade. Os algoritmos afins desenvolvidos nesta época, apresentavam a vantagem de as transformações utilizadas serem mais simples e intuitivas do que as do algoritmo original de Karmarkar. Esses algoritmos quando aplicados em problemas de grande dimensão exibiram resultados promissores, embora a prova teórica da complexidade de tempo polinomial não foi obtida com a transformação utilizada.

O comportamento dos métodos afins de pontos interiores foi estudado por Megiddo

& Shub (1989). Os autores concluíram que, apesar do bom funcionamento na prática, os algoritmos baseados nessa técnica podem falhar, ou ser ineficientes, na resolução de problemas se o método for iniciado a partir de um ponto próximo da fronteira. Deste modo, outros métodos começaram a ser utilizados para evitar esses problemas próximos à região da fronteira, os métodos de "empurrão potencial" (*potential push*), que exploravam a função barreira logarítmica ou variantes dessa.

Inseridos nesta classe de métodos, podem-se citar os desenvolvidos, entre outros, em Megiddo & Shub (1989), Renegar (1988) e Vaidya (1990), bem como os de trajetória central propostos em Gonzaga (1990), entre outros.

Nesta classe de métodos, a complexidade de tempo polinomial dos algoritmos primal-afim e dual-afim pôde ser reestabelecida incorporando a função barreira logarítmica ao problema de programação linear original, a fim de evitar que uma solução interior se aproximasse demais da fronteira e ficasse "presa" a essa, causando a parada prematura do método ou a obtenção de uma solução que não fosse ótima. A demonstração teórica da complexidade de tempo polinomial foi realizada com sucesso por esses autores.

Um terceiro variante dos métodos de pontos interiores foram os métodos introduzidos por Kojima et al. (1989) e Monteiro & Adler (1989), inseridos na metodologia primal-dual de pontos interiores. Esses métodos, além da demonstração teórica da complexidade de tempo polinomial exploravam uma função potencial primal-dual variante da função barreira logarítmica, denominada de função potencial. Esses métodos eram mais robustos que os anteriores por explorarem: a trajetória central e a soluções ótimas dos problemas primal e dual através da análise da relação de complementaridade entre essas soluções. A extensão para o caso de programação quadrática convexa foi realizada com sucesso em Monteiro et al. (1990) e esses métodos se tornaram comuns para solucionar problemas de programação matemática linear, não linear e inteira em diversas áreas, como na área de engenharia.

O método primal-dual previsor-corretor foi apresentado em Mehrotra (1992). Tal método é derivado dos que exploram uma função potencial primal-dual variante da função barreira logarítmica, com propriedades de convergência e complexidade computacional de tempo polinomial. Na técnica de Mehrotra, a cada iteração é dado um passo previsor e um passo corretor à determinação das direções de movimento, resultando em direções de busca

melhores que as apresentadas nos trabalhos de Kojima et al. (1989) e de Monteiro et al. (1990). Uma implementação computacional do método previsor corretor de Mehrotra para problemas de programação linear foi realizada com sucesso em Lustig et al. (1995).

Os métodos de penalidade baseados na função barreira logarítmica, apesar de eficientes, quando aplicados em problemas de otimização linear ou não-linear de grande porte, apresentam o problema de mau condicionamento das matrizes hessianas à medida em que o método se aproxima da solução do problema (Murray (1971) e Wright (1994)).

Com o objetivo de sanar esse problema de mau condicionamento, Polyak (1992) propôs o método da função barreira modificada. O método proposto é uma junção da função lagrangiana clássica e da barreira clássica modificada pela relaxação das inequações de desigualdade do problema. A finalidade deste método era evitar algumas dificuldades até então presentes nos métodos de pontos interiores que utilizavam a estratégia de barreira clássica. As funções de barreira modificada apresentadas por Polyak visavam transformar um problema restrito em irrestrito, resolvendo uma sequência de problemas irrestritos até atingir a solução ótima. Por relaxar e ampliar a região viável do problema e poder operar com pontos exteriores, ineficazes à sua região original, essa estratégia pode ser relacionada à metodologia de pontos exteriores.

Alguns anos depois, Breitfeld & Shanno (1996) propuseram um variante do método de barreira modificada apresentado por Polyak. Uma estratégia de extrapolação quadrática para os termos logarítmicos foi introduzida ao método. Os resultados computacionais obtidos com essa variação foram considerados promissores.

Um eficiente método de pontos interiores e procedimento previsor-corretor foi apresentado por Yan & Quintana (1997) e aplicado à resolução de problemas de despacho econômico com restrição de segurança. O desempenho do método foi melhorado, abordando questões como o efeito do parâmetro de barreira, escolha do ponto inicial e tolerância de convergência.

A função barreira modificada de Polyak, também serviu como base para os métodos apresentados em Conn et al. (1997). A vantagem dessa nova variação em relação ao método de barreira clássica é que o mesmo evita o mau condicionamento da matriz hessiana.

Outras variações do método de barreira foram propostas. Baseados em Polyak, em Breitfeld & Shanno (1996) e em Vassiliadis & Brooks (1998) é proposto o método de barreira-penalidade, usando a barreira logarítmica modificada e extrapolação quadrática nos parâmetros de barreira, para problemas de programação quadrática de grande porte. Com essa estratégia os autores obtiveram uma solução inicial melhor, além de uma solução numérica mais próxima da solução ótima do problema.

Em Shanno & Vanderbei (2000) é apresentado um algoritmo de pontos interiores para otimização não linear e não convexa em que uma perturbação era feita na matriz hessiana da função lagrangiana, a fim de mantê-la definida positiva. Utilizando as idéias do método previsor-corretor de Mehrotra (1992), os mesmos autores aperfeiçoaram o método no ano 2000. Em 2002, novos resultados teóricos sobre métodos de pontos exteriores foram apresentados em Polyak (2002).

Um método de ponto interior primal-dual factível para otimização não-linear foi apresentado em Bakhtiari & Tits (2003). A técnica foi proposta com a propriedade adicional monotonicamente descendente, a qual diminui o valor da função objetivo a cada iteração, além das propriedades de convergência local e global e um bom desempenho em testes.

Em Griva (2004) é demonstrado que, sob determinadas condições, quando os algoritmos de pontos interiores não atingem a solução ótima de um problema não linear com a precisão desejada, a combinação dos mesmos com os métodos de pontos exteriores pode evitar este problema. Novos resultados teóricos sobre métodos de pontos interiores/exteriores foram publicados por Griva & Polyak (2008) e Griva & Polyak (2010).

Problemas de fluxo de potência ótimo foram resolvidos através de um método proposto por Sousa (2006), que consiste em utilizar os métodos de pontos interiores em que as condições de 1ª ordem são aplicadas à função lagrangiana barreira modificada resultando num sistema não linear cuja solução é determinada pelo método de Newton. A autora observou que o número de iterações estava relacionado à escolha dos fatores iniciais de barreira e seus respectivos parâmetros de correção. Uma revisão e resultados deste trabalho foram publicados em Sousa et al. (2012).

Em 2007, Pereira (2007) apresentou e implementou um método de barreira modificada/penalidade para a resolução de problemas restritos gerais de otimização, onde as

restrições de desigualdade canalizadas são tratadas pela função barreira modificada ou por extrapolação quadrática e as restrições de igualdade através da função lagrangiana. Tal método se mostrou eficiente para resolução de problemas de fluxo de potência ótimo.

Um método de pontos interiores foi proposto em Zhang et al. (2009) para resolução do problema multibjetivo de despacho econômico e ambiental, porém a técnica foi aplicada sem a utilização barreira modificada, que será utilizada neste trabalho.

Hemamalini & Simon (2010) apresentaram um método para resolução do problema de despacho econômico com efeito de ponto de carregamento de válvula, através de uma aproximação da função seno por uma série de Maclaurin truncada.

Um método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores com procedimento de busca unidimensional em ambos os passos, foi proposto em 2012 por Balbo et al. (2012). Variante dos trabalhos de Wu et al. (1994) e Mehrotra (1992), diferente do utilizado pelos autores, o método proposto utiliza da estratégia de centragem relacionada à barreira logarítmica no passo previsor. A técnica foi aplicada à resolução do problema clássico de despacho econômico.

Em Pinheiro (2012) e Pinheiro et al. (2015) é apresentado um método primal-dual de pontos interiores/exteriores com estratégia de barreira logarítmica modificada, de extrapolação cúbica e convergência global, variante do método de Levenberg-Marquardt. A técnica desenvolvida foi aplicada com sucesso em problemas de fluxo de potência ótimo da área de sistemas de potência em engenharia elétrica.

Uma outra aplicação de métodos de pontos interiores em problemas de otimização é apresentada nos trabalhos de Stanzani (2012) e Stanzani et al. (2014). Foi utilizado o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores em problemas de programação não linear. O método foi utilizado para resolução do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental, juntamente com as técnicas da soma ponderada e do  $\varepsilon$ -restrito. No presente trabalho, esse mesmo problema será resolvido, porém, com a inserção de pontos de carregamento de válvula ao problema de despacho econômico, o qual não foi considerado nos trabalhos citados, e com a técnica  $\varepsilon$ -restrito canalizado.

Por fim, destaca-se o trabalho de Silva (2014), que resolveu um problema de despacho econômico com pontos de carregamento de válvula e representação da transmissão através do

método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores/exteriores, baseado na função barreira modificada e na técnica de suavização de funções, explorada nesse trabalho.

## 6.2 O método primal-dual previsor-corretor barreira logarítmica modificada (PDPCBLM)

Com base nos trabalhos de Polyak (1992), Griva & Polyak (2006), Sousa (2006) e Pinheiro (2012), nesta seção, será apresentado o método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores, com estratégia de barreira logarítmica modificada (MPDPCBLM) e uso da técnica do rescalamento não linear.

O método proposto será aplicado à resolução do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental, com ponto de carregamento de válvula, definido em 3.3, juntamente com as técnicas: suavização hiperbólica, soma ponderada e  $\varepsilon$ -restrito canalizado. As principais ideias, bem como a elaboração do algoritmo, aqui apresentadas, são baseadas no trabalho de Silva (2014).

A maior dificuldade relacionada ao uso dos métodos de barreira se refere ao mau condicionamento da matriz hessiana da função auxiliar, em decorrência da redução do parâmetro de barreira. Assim, os métodos baseados em rescalamento não linear, principalmente os baseados na função barreira logarítmica modificada, se apresentam como uma alternativa vantajosa para o tratamento das restrições de desigualdade, uma vez que a região factível do problema original é relaxada.

Para elaboração do algoritmo do método, o parâmetro de barreira é empregado nos passos previsor e corretor. O procedimento utilizado é baseado nos trabalhos de Mehrotra (1992) e de Wu et al. (1994). Além disso, é utilizada uma estratégia de convergência, por meio de correção da inércia da matriz do sistema de direções do método e os estimadores dos multiplicadores de Lagrange foram atualizados de acordo com Pinheiro (2012).

Considere o problema de programação não linear com restrições de igualdade e desigualdade definido em (6.1):

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f(x) \\
 &\text{Sujeito a: } g(x) = 0 \\
 &\quad h(x) \leq 0
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  são funções de classe  $C^2$ .

Inserindo as variáveis de folga ao problema (6.1), de modo que sejam mantidas somente restrições de igualdade, ele pode ser reescrito por:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f(x) \\
 &\text{Sujeito a: } g(x) = 0 \\
 &\quad h(x) + s = 0 \\
 &\quad s \geq 0
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

em que  $s \geq 0$  são as variáveis de folga das restrições de desigualdade.

O problema transformado associando as restrições de não-negatividade, a função de rescalamento baseada na barreira logarítmica modificada e os estimadores dos multiplicadores de Lagrange é definido por:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \ln(\mu^{-1} s_j + 1) \\
 &\text{Sujeito a: } g(x) = 0 \\
 &\quad h(x) + s = 0
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

em que  $\mu > 0$  é o parâmetro de barreira e  $\delta \in \mathbb{R}_+^p$  é o vetor de estimadores dos multiplicadores de Lagrange relativos às restrições de não-negatividade das folgas.

Incorporando as restrições de igualdade à função objetivo e utilizando os multiplicadores de Lagrange, é possível obter a função Lagrangiana barreira logarítmica modificada:

$$L_\mu(x, s, \lambda, \nu) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \ln(\mu^{-1} s_j + 1) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \nu_j [h_j(x) + s_j]. \tag{6.4}$$

em que  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  e  $\nu \in \mathbb{R}_+^p$ .

As condições necessárias de primeira ordem de KKT devem ser aplicadas sobre a função lagrangiana (6.4) e o seguinte sistema não linear é obtido:

$$\nabla_x L_\mu(x, s, \lambda, \nu) = \nabla f(x) + Jg(x)^t \lambda + Jh(x)^t \nu = 0 \quad (6.5a)$$

$$\nabla_s L_\mu(x, s, \lambda, \nu) = -\mu \bar{S}^{-1} \delta + \nu = 0 \quad (6.5b)$$

$$\nabla_\lambda L_\mu(x, s, \lambda, \nu) = g(x) = 0 \quad (6.5c)$$

$$\nabla_\nu L_\mu(x, s, \lambda, \nu) = h(x) + s = 0 \quad (6.5d)$$

em que  $Jg(x)$  e  $Jh(x)$  são as matrizes jacobianas de  $g$  e  $h$ , respectivamente e  $\bar{S}$  é definido por:

$$\bar{S} = \text{diag}(s_1 + \mu, \dots, s_m + \mu) \quad (6.6)$$

$$\bar{S}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{s_1 + \mu}, \dots, \frac{1}{s_m + \mu}\right) \quad (6.7)$$

De acordo com Pinheiro (2012), o sistema definido em (6.5) é usualmente reescrito como (6.8):

$$\nabla f(x) + Jg(x)^t \lambda + Jh(x)^t \nu = 0 \quad (6.8a)$$

$$\bar{S} \nu - \mu \delta = 0 \quad (6.8b)$$

$$g(x) = 0 \quad (6.8c)$$

$$h(x) + s = 0 \quad (6.8d)$$

A fim de determinar as direções de busca do método, o sistema definido em 6.8 é linearizado pela fórmula de Taylor de primeira ordem. A seguir serão detalhados os passos da linearização.

### 6.2.1 Linearização das equações

Considerando que o PDPCBLM é um método iterativo, o qual gera uma sequência de variáveis primais e duais a partir de um ponto inicial, até que a solução ótima seja obtida. Em uma determinada iteração  $k$ , uma solução  $(\mathbf{x}^k, s^k, \lambda^k, \nu^k)$  é obtida e a partir da mesma é calculada uma direção de busca  $(\Delta \mathbf{x}^k, \Delta s^k, \Delta \lambda^k, \Delta \nu^k)$ , que após o cálculo do passo, permite que seja encontrado um novo ponto  $(\mathbf{x}^{k+1}, s^{k+1}, \lambda^{k+1}, \nu^{k+1})$ . Assim, o novo ponto pode ser considerado como:

$$(\mathbf{x}^{k+1}, s^{k+1}, \lambda^{k+1}, \nu^{k+1}) = (\mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k, s^k + \Delta s^k, \lambda^k + \Delta \lambda^k, \nu^k + \Delta \nu^k).$$

A equação (6.8a) pode ser reescrita como:

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \nu_j \nabla h_j(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.9)$$

Aplicando a fórmula de Taylor de primeira ordem na vizinhança de  $\mathbf{x}^k$ :

$$\begin{aligned} & \nabla f(\mathbf{x}^k) + \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k \\ & + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k + \sum_{i=1}^m \Delta \lambda_i^k \nabla g_i(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^m \Delta \lambda_i^k \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k \\ & + \sum_{j=1}^p \nu_j^k \nabla h_j(\mathbf{x}^k) + \sum_{j=1}^p \nu_j^k \nabla^2 h_j(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k + \sum_{j=1}^p \Delta \nu_j^k \nabla h_j(\mathbf{x}^k) + \sum_{j=1}^p \Delta \nu_j^k \nabla^2 h_j(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k \\ & = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Desconsiderando os termos mistos que envolvem produtos de direções, em seguida agrupando os termos relacionados às direções e passado para o segundo membro os que não dependem das direções:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^k) + \sum_{j=1}^p \nu_j^k \nabla^2 h_j(\mathbf{x}^k) \right] \Delta \mathbf{x}^k + \sum_{i=1}^m \Delta \lambda_i^k \nabla g_i(\mathbf{x}^k) \\
 & + \sum_{j=1}^p \Delta \nu_j^k \nabla h_j(\mathbf{x}^k) = -\nabla f(\mathbf{x}^k) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(\mathbf{x}^k) - \sum_{j=1}^p \nu_j^k \nabla h_j(\mathbf{x}^k).
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Para escrever de forma mais compacta a equação anterior, basta observar que  $\nabla_{xx}^2 L(\mathbf{x}^k, s^k, \lambda^k, \nu^k) = \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^k) + \sum_{j=1}^p \nu_j^k \nabla^2 h_j(\mathbf{x}^k)$ . Assim, temos que:

$$\nabla_{xx}^2 L(\mathbf{x}^k, s^k, \lambda^k, \nu^k) \Delta \mathbf{x}^k + Jg(\mathbf{x}^k)^t \Delta \lambda^k + Jh(\mathbf{x}^k)^t \Delta \nu^k = m^k, \tag{6.12}$$

em que:

$$m^k = -\nabla f(\mathbf{x}^k) - Jg(\mathbf{x}^k)^t \lambda^k - Jh(\mathbf{x}^k)^t \nu^k. \tag{6.13}$$

O termo  $m^k$  é denominado *resíduo de viabilidade dual*.

Será realizada a linearização da equação 6.8b.

Considera-se uma linha  $j$  da equação  $\bar{S}\nu - \mu\delta = 0$ , tal que:

$$(s_j + \mu)\nu_j - \mu\delta_j = 0. \tag{6.14}$$

Linearizando cada equação, tem-se que:

$$(s_j^{k+1} + \mu)\nu_j^{k+1} - \mu\delta_j^k = 0, \text{ ou seja, } (s_j^k + \Delta s_j^k + \mu)(\nu_j^k + \Delta \nu_j^k) - \mu\delta_j^k = 0.$$

Esta expressão pode ser reescrita como:

$$(s_j^k + \mu)\nu_j^k + (s_j^k + \mu)\Delta \nu_j^k + \nu_j^k \Delta s_j^k + \Delta s_j^k \Delta \nu_j^k - \mu\delta_j^k = 0. \tag{6.15}$$

Tendo em vista a igualdade (6.15), a linearização para todas as equações em (6.8b)

pode ser representada por:

$$\bar{S}_k \nu^k + \bar{S}_k \Delta \nu^k + N^k \Delta s^k + \Delta s^k \circ \Delta \nu^k - \mu \delta^k = 0, \quad (6.16)$$

Denotando por  $N^k = \text{diag}(\nu^k)$  e  $\Delta s^k \circ \Delta \nu^k$  é denominado produto de Hadamard, isto é, o produto componente-a-componente, entre os vetores  $\Delta s^k$  e  $\Delta \nu^k$ , a igualdade em (6.16) pode ser escrita como:

$$N^k \Delta s^k + \bar{S}_k \Delta \nu^k = \pi^k, \quad (6.17)$$

em que

$$\pi^k = -\bar{S}_k \nu^k + \mu \delta^k - \Delta s^k \circ \Delta \nu^k. \quad (6.18)$$

A equação (6.8c) também é linearizada. Primeiramente, considera-se que:

$$g(\mathbf{x}^{k+1}) = 0, \text{ ou seja, } g(\mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k) = 0.$$

Disto, segue que:

$$g(\mathbf{x}^k) + Jg(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k = 0. \quad (6.19)$$

A igualdade expressa por (6.19) pode ser reescrita como:

$$Jg(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k = t^k, \quad (6.20)$$

em que

$$t^k = -g(\mathbf{x}^k). \quad (6.21)$$

Por fim, a equação (6.8d) também é linearizada, de forma semelhante a anterior:

$$h(\mathbf{x}^{k+1}) + s^{k+1} = 0, \text{ ou seja, } h(\mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k) + s^k + \Delta s^k = 0.$$

Assim,

$$h(\mathbf{x}^k) + Jh(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k + s^k + \Delta s^k = 0. \quad (6.22)$$

A igualdade pode ser reescrita como:

$$Jh(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k + \Delta s^k = u^k, \quad (6.23)$$

em que

$$u^k = -h(\mathbf{x}^k) - s^k. \quad (6.24)$$

## 6.2.2 Sistema de direções

As direções de busca podem ser determinadas através da resolução de um sistema. Basta considerar as equações definidas em (6.12), (6.17), (6.20) e (6.23) e premultiplicação da segunda linha por  $\bar{S}_k^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} K & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \bar{S}_k^{-1}N^k & 0 & I_p \\ Jg(x^k) & 0 & 0 & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta s^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta \nu^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \bar{S}_k^{-1}\pi^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

em que  $I_p$  é a matriz identidade de ordem  $p$  e  $K = \nabla_{xx}^2 L(\mathbf{x}^k, s^k, \lambda^k, \nu^k)$ .

## 6.2.3 Correção de inércia

Em problemas de otimização do tipo não-convexo, a resolução do sistema definido em (6.25), nem sempre garante que mínimos locais sejam obtidos. Em muitos casos, pontos de máximo ou outros tipos de pontos onde gradiente é zero podem ser determinados, devido a resolução do sistema visar apenas a busca de uma região em que as condições de KKT sejam satisfeitas. Caso a matriz hessiana da função lagrangiana de um problema com restrições de igualdade, em seu ponto ótimo, seja definida positiva no espaço das restrições, então é possível garantir que esse ponto é um mínimo local. O mesmo ocorre

se houver a inserção de restrições de desigualdade, em que a matriz é definida positiva no cone de direções viáveis.

Diante deste cenário, é importante que a inércia de uma matriz seja conhecida. A inércia é utilizada para determinar o número de autovalores positivos, negativos ou nulos de uma matriz. De acordo com Silva (2014), a inércia é definida como:

**Definição:** A *inércia* de uma matriz simétrica  $A$  é a tripla ordenada  $\mathcal{I}(A) = (i_+, i_-, i_0)$ , em que  $i_+$  é o número de autovalores positivos de  $A$ ,  $i_-$  é o número de autovalores negativos, e  $i_0$  é o número de autovalores nulos.

Um teorema garante que se  $A$  é uma matriz simétrica e  $S$  uma matriz não singular qualquer de mesma dimensão, então  $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(SAS^t)$ . Além disso, garante-se também que qualquer permutação simétrica de linhas e colunas preserva a inércia de uma matriz.

Para a matriz  $A_k$  obtida após a resolução do sistema (6.25), vale que:

$$\mathcal{I}(A_k) = (n + p, m + p, 0). \quad (6.26)$$

em que  $n + p$  é o número de autovalores positivos relacionados às variáveis primais e ao problema de minimização,  $m + p$  é o número de autovalores negativos, relacionados às variáveis duais e ao problema de maximização.

De acordo com Nocedal & Wright (2006), caso a matriz  $A_k$  não possua a inércia desejada, algumas modificações podem ser feitas visando favorecer a obtenção de direções de descida ao resolver o sistema. No presente trabalho, a estratégia utilizada é baseada no trabalho de Silva (2014).

A matriz  $\Sigma = \bar{S}_k^{-1}N^k$  é sempre definida positiva, porém para a matriz  $K = \nabla_{xx}^2 L(x^k, s^k, \lambda^k, \nu^k)$  não se pode garantir que o mesmo ocorra. Com isso, a ideia é substituir esta matriz por  $K + \beta I_n$ , em que  $\beta > 0$  é escolhido suficientemente grande para assegurar que a inércia de  $A_k$  é igual à apresentada em (6.26). O valor necessário para o parâmetro  $\beta$  não é conhecido *a priori*, de modo que valores sucessivamente maiores devem ser testados, até que a inércia desejada seja obtida.

Um outro problema pode ocorrer caso a matriz  $A_k$  se torne singular devido à deficiência de posto da matriz  $Jg(\mathbf{x}^k)$ . Esta dificuldade pode ser evitada através da utilização

de um parâmetro  $\gamma \geq 0$ . Com isso, a matriz primal-dual modificada é definida da seguinte forma:

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(\mathbf{x}^k)^t & Jh(\mathbf{x}^k)^t \\ 0 & \Sigma & 0 & I_p \\ Jg(\mathbf{x}^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(\mathbf{x}^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

O sinal “−” utilizado para perturbação  $-\gamma I_m$ , além de evitar a singularidade pela deficiência de posto de  $Jg(\mathbf{x}^k)$ , também evita que um número excessivo de autovalores positivos sejam produzidos, o que prejudicaria a obtenção da inércia desejada (Silva, 2014).

O objetivo principal, neste trabalho, não é que a matriz  $A_k$  seja definida positiva, mas sim indefinida com um determinado número de autovalores positivos e negativos. Em geral, a decomposição de Cholesky é utilizada para determinar se uma matriz é definida positiva, pois uma matriz simétrica indefinida não possui a decomposição. Dessa forma, quando a matriz é simétrica e indefinida, a utilização de outros métodos para calcular a inércia são necessários.

Quando matrizes simétricas indefinidas precisam ser fatoradas, as decomposições do tipo  $LDL^t$  são uma alternativa viável. Nocedal & Wright (2006) apontam que qualquer matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , definida positiva ou não, pode ser escrita da forma

$$PAP^t = LDL^t \quad (6.28)$$

em que  $L$  é uma matriz triangular inferior,  $D$  é uma matriz diagonal por blocos, com blocos diagonais de dimensão  $1 \times 1$  ou  $2 \times 2$ , e  $P$  é uma matriz de permutação.

Ao contrário da decomposição de Cholesky, na decomposição  $LDL^t$ , em que  $D$  é uma matriz diagonal por blocos  $1 \times 1$  ou  $2 \times 2$ , pode-se garantir que a fatoração (6.28) sempre existe e pode ser computada de maneira estável.

De acordo com Silva (2014), a inércia da matriz  $A$  deve ser igual à da matriz diagonal por blocos  $D$ . Além disso, os blocos  $2 \times 2$  da matriz  $D$  são sempre construídos de modo que

possuam um autovalor positivo e um autovalor negativo. Assim, o número de autovalores positivos da matriz  $A$  é igual ao número de blocos positivos  $1 \times 1$  acrescido do número de blocos  $2 \times 2$ . Por outro lado, o número de autovalores negativos é igual ao número de blocos negativos  $1 \times 1$  acrescido do número de blocos  $2 \times 2$ .

No presente trabalho, foi utilizado o comando do Matlab, denominado `ldl`, para realizar a fatoração  $LDL^t$  de uma matriz simétrica.

Após calculada a inércia de uma matriz  $A_k$ , faz-se necessário a determinação de uma estratégia para corrigir a inércia, através da matriz modificada  $\tilde{A}_k$ .

O parâmetro  $\beta$  utilizado em (6.27), é atualizado, neste trabalho, de acordo com:

$$\beta^{k+1} = \kappa_1 \beta^k, \quad (6.29)$$

em que  $\kappa_1 > 1$  é o fator de aumento.

O valor de  $\beta$  é reduzido, para a iteração seguinte, através de um parâmetro  $\kappa_2 > 1$  quando a inércia desejada é obtida. O parâmetro  $\gamma$  de  $\tilde{A}_k$ , o valor utilizado neste trabalho é de  $\gamma = 10^{-6}$ .

Para avaliar o quanto uma matriz está próxima da singularidade, o comando `cond` do Matlab foi utilizado e o termo  $\gamma$  acrescentado quando o número do condicionamento foi superior a  $10^6$ .

O algoritmo utilizado para correção de inércia neste trabalho, é baseado em Silva (2014), que por sua vez, baseou-se em Nocedal & Wright (2006) e Wächter & Biegler (2006).

#### 6.2.4 Cálculo das direções de busca

Considere o sistema definido em (6.25):

$$\begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & N^k & 0 & \bar{S}_k \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta s^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta \nu^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \pi^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

Com base em Mehrotra (1992), são definidos os procedimentos previsor e corretor do método PDPCBLM.

#### 6.2.4.1 Procedimento previsor

O passo previsor, neste trabalho, é calculado da mesma maneira apresentada em Silva (2014), que por sua vez, baseou-se no trabalho de Pinheiro (2012). De acordo com este, o parâmetro de barreira é considerado no passo previsor, pois o mesmo possui influência nas condições de complementaridade, de modo que é interessante não deprezá-lo nesse passo. Além disso, o método proposto por Silva (2014), que foi utilizado neste trabalho inclui uma estratégia de escolha entre direções do previsor ou corretor, assim, a utilização do parâmetro de barreira se faz necessária em ambos os procedimentos, pois não se sabe previamente qual direção será escolhida.

Utiliza-se o seguinte resíduo neste passo:

$$\tilde{\pi}^k = -\bar{S}_k \nu^k + \mu \delta^k. \quad (6.31)$$

O sistema a ser resolvido é definido por:

$$\begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(\mathbf{x}^k)^t & Jh(\mathbf{x}^k)^t \\ 0 & N^k & 0 & \bar{S}_k \\ Jg(\mathbf{x}^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(\mathbf{x}^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \mathbf{x}^k \\ \tilde{\Delta} s^k \\ \tilde{\Delta} \lambda^k \\ \tilde{\Delta} \nu^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \tilde{\pi}^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

A resolução do sistema 6.32, permite que as direções  $\tilde{\Delta} \mathbf{x}^k$ ,  $\tilde{\Delta} s^k$ ,  $\tilde{\Delta} \lambda^k$  e  $\tilde{\Delta} \nu^k$  sejam calculadas. Da última linha do sistema, temos:

$$Jh(\mathbf{x}^k)\tilde{\Delta}\mathbf{x}^k + \tilde{\Delta}s^k = u^k, \quad (6.33)$$

assim,

$$\tilde{\Delta}s^k = u^k - Jh(\mathbf{x}^k)\tilde{\Delta}\mathbf{x}^k. \quad (6.34)$$

Da segunda linha do sistema (6.32):

$$N^k\tilde{\Delta}s^k + \bar{S}_k\tilde{\Delta}\nu^k = \tilde{\pi}^k, \quad (6.35)$$

e, portanto,

$$\tilde{\Delta}\nu^k = \bar{S}_k^{-1}(\tilde{\pi}^k - N^k\tilde{\Delta}s^k). \quad (6.36)$$

$\tilde{\Delta}\mathbf{x}^k$  e  $\tilde{\Delta}\lambda^k$ , são obtidos considerando a primeira linha do sistema (6.32):

$$(K + \beta I_n)\tilde{\Delta}\mathbf{x}^k + Jg(\mathbf{x}^k)^t\tilde{\Delta}\lambda^k + Jh(\mathbf{x}^k)^t\tilde{\Delta}\nu^k = m^k. \quad (6.37)$$

Na equação (6.37), substitui-se  $\tilde{\Delta}\nu^k$ , obtida em (6.36) e, em seguida, substitui-se  $\tilde{\Delta}s^k$ , obtida em (6.34). Assim, temos:

$$(K + \beta I_n)\tilde{\Delta}\mathbf{x}^k + Jg(\mathbf{x}^k)^t\tilde{\Delta}\lambda^k + Jh(\mathbf{x}^k)^t\bar{S}_k^{-1}[\tilde{\pi}^k - N^k(u^k - Jh(\mathbf{x}^k)\tilde{\Delta}\mathbf{x}^k)] = m^k, \quad (6.38)$$

agrupando os termos:

$$\begin{aligned} [K + \beta I_n + Jh(\mathbf{x}^k)^t\bar{S}_k^{-1}N^kJh(\mathbf{x}^k)]\tilde{\Delta}\mathbf{x}^k + Jg(\mathbf{x}^k)^t\tilde{\Delta}\lambda^k \\ + Jh(\mathbf{x}^k)^t\bar{S}_k^{-1}(\tilde{\pi}^k - N^ku^k) = m^k. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Definindo

$$\theta_k = K + \beta I_n + Jh(\mathbf{x}^k)^t\bar{S}_k^{-1}N^kJh(\mathbf{x}^k) \quad (6.40)$$

e

$$\tilde{p}^k = Jh(\mathbf{x}^k)^t\bar{S}_k^{-1}(\tilde{\pi}^k - N^ku^k). \quad (6.41)$$

e, em seguida, substituindo na equação (6.39), a mesma pode ser reescrita como:

$$\theta_k \tilde{\Delta} \mathbf{x}^k + Jg(\mathbf{x}^k)^t \tilde{\Delta} \lambda^k = m^k - \tilde{p}^k. \quad (6.42)$$

Unindo a terceira equação do sistema (6.32) e a equação (6.42), é possível obter o seguinte *sistema reduzido*:

$$\begin{pmatrix} \theta_k & Jg(\mathbf{x}^k)^t \\ Jg(\mathbf{x}^k) & -\gamma I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \mathbf{x}^k \\ \tilde{\Delta} \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k - \tilde{p}^k \\ t^k \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

Da segunda equação de (6.43), pode-se obter:

$$Jg(\mathbf{x}^k) \tilde{\Delta} \mathbf{x}^k = \gamma \tilde{\Delta} \lambda^k + t^k. \quad (6.44)$$

Com (6.42):

$$Jg(\mathbf{x}^k)^t \tilde{\Delta} \lambda^k = m^k - \tilde{p}^k - \theta_k \tilde{\Delta} \mathbf{x}^k. \quad (6.45)$$

Multiplicando à esquerda pela matriz  $\theta_k^{-1}$ , tem-se:

$$\theta_k^{-1} Jg(\mathbf{x}^k)^t \tilde{\Delta} \lambda^k = \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - \tilde{\Delta} \mathbf{x}^k. \quad (6.46)$$

Multiplicando (6.46) à esquerda por  $Jg(\mathbf{x}^k)$ :

$$Jg(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} Jg(\mathbf{x}^k)^t \tilde{\Delta} \lambda^k = Jg(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - Jg(\mathbf{x}^k) \tilde{\Delta} \mathbf{x}^k. \quad (6.47)$$

Substituindo (6.44) em (6.47):

$$Jg(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} Jg(\mathbf{x}^k)^t \tilde{\Delta} \lambda^k = Jg(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - (\gamma \tilde{\Delta} \lambda^k + t^k). \quad (6.48)$$

$$\tilde{\Delta} \lambda^k = [Jg(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} Jg(\mathbf{x}^k)^t + \gamma I_m]^{-1} [Jg(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - t^k]. \quad (6.49)$$

Assim, é possível calcular  $\tilde{\Delta}\mathbf{x}^k$ :

$$\tilde{\Delta}\mathbf{x}^k = \theta_k^{-1}[m^k - \tilde{p}^k - Jg(\mathbf{x}^k)^t \tilde{\Delta}\lambda^k]. \quad (6.50)$$

#### 6.2.4.2 Procedimento corretor

O cálculo das direções corrigidas é feito a partir das direções obtidas no passo previsor, de modo que os termos de segunda ordem dos resíduos de complementaridade sejam considerados:

$$\pi^k = -\bar{S}_k \nu^k + \mu \delta^k - \tilde{\Delta}s^k \circ \tilde{\Delta}\nu^k. \quad (6.51)$$

O sistema a ser resolvido é definido por:

$$\begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(\mathbf{x}^k)^t & Jh(\mathbf{x}^k)^t \\ 0 & N^k & 0 & \bar{S}_k \\ Jg(\mathbf{x}^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(\mathbf{x}^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x}^k \\ \Delta s^k \\ \Delta\lambda^k \\ \Delta\nu^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \pi^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix}, \quad (6.52)$$

Como no passo previsor, as direções corrigidas são determinadas de acordo com:

$$\Delta\lambda^k = [Jg(\mathbf{x}^k)\theta_k^{-1}Jg(\mathbf{x}^k)^t + \gamma I_m]^{-1}[Jg(\mathbf{x}^k)\theta_k^{-1}(m^k - p^k) - t^k] \quad (6.53)$$

$$\Delta\mathbf{x}^k = \theta_k^{-1}[m^k - p^k - Jg(\mathbf{x}^k)^t \Delta\lambda^k] \quad (6.54)$$

$$\Delta s^k = u^k - Jh(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k \quad (6.55)$$

$$\Delta\nu^k = \bar{S}_k^{-1}(\pi^k - N^k \Delta s^k) \quad (6.56)$$

em que

$$p^k = Jh(\mathbf{x}^k)^t \bar{S}_k^{-1}(\pi^k - N^k u^k). \quad (6.57)$$

### 6.2.5 Atualização do parâmetro de barreira

O parâmetro de barreira é atualizado por:

$$\mu^{k+1} = \tau_1 \mu^k \quad (6.58)$$

em que:

$$\tau_1 \in (0, 1);$$

$\mu^0$ , deve ser tal que a condição  $\mathbf{s}^0 > -\mu$  seja satisfeita, isto é, as folgas devem satisfazer estritamente a restrição de não-negatividade relaxada (ou seja, as folgas devem estar no interior da região relaxada).

O valor de  $\tau_1$  não deve ser escolhido muito pequeno, a fim de que o método não tenha comportamento oscilatório. Porém, também não deve ser muito grande, para que não ocorra a parada prematura do método em pontos que não sejam ótimos (Stanzani, 2012).

Neste trabalho, é proposta uma atualização da solução, com passo previsor ou corretor, dependendo dos valores de complementaridade obtidos. Após calcular as direções dos passos previsor e corretor, são calculadas as duas soluções provisórias, uma para o previsor (6.59):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{prev}}^+ &= \mathbf{x}^k + \alpha_{P,\text{prev}}^k \tilde{\Delta} \mathbf{x}^k \\ s_{\text{prev}}^+ &= s^k + \alpha_{P,\text{prev}}^k \tilde{\Delta} s^k \\ \lambda_{\text{prev}}^+ &= \lambda^k + \alpha_{D,\text{prev}}^k \tilde{\Delta} \lambda^k \\ \nu_{\text{prev}}^+ &= \nu^k + \alpha_{D,\text{prev}}^k \tilde{\Delta} \nu^k \end{aligned} \quad (6.59)$$

e outra para o corretor (6.60):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{\text{cor}}^+ &= \mathbf{x}^k + \alpha_{P,\text{cor}}^k \Delta \mathbf{x}^k \\
 s_{\text{cor}}^+ &= s^k + \alpha_{P,\text{cor}}^k \Delta s^k \\
 \lambda_{\text{cor}}^+ &= \lambda^k + \alpha_{D,\text{cor}}^k \Delta \lambda^k \\
 \nu_{\text{cor}}^+ &= \nu^k + \alpha_{D,\text{cor}}^k \Delta \nu^k
 \end{aligned} \tag{6.60}$$

em que:

$\alpha_{P,\text{prev}}$  e  $\alpha_{D,\text{prev}}$  são denominados passos primal e dual, respectivamente, para o procedimento previsor;

$\alpha_{P,\text{cor}}$  e  $\alpha_{D,\text{cor}}$  são denominados passos primal e dual, respectivamente, para o procedimento corretor.

Os passos são determinados a partir das condições de fronteira da região factível. Para as variáveis primais, essa escolha deve ser feita com cuidado, devido a quando se utiliza a função barreira logarítmica modificada, tendo em vista que as condições de fronteira relacionadas às variáveis de folga,  $\mathbf{s}$ , variam a cada iteração, juntamente com o parâmetro de barreira.

### 6.2.6 Novo ponto e comprimento do passo

Para que o próximo ponto seja factível, para cada coordenada  $j = 1, \dots, p$ , deve-se ter:

$$s_j^{k+1} > -\mu^{k+1}, \tag{6.61}$$

isto é,

$$s_j^k + \alpha_P^k \Delta s_j^k > -\tau_1 \mu^k, \tag{6.62}$$

então:

$$\alpha_P^k \Delta s_j^k > -(s_j^k + \tau_1 \mu^k). \tag{6.63}$$

Como  $s_j^k + \tau_1 \mu^k > 0$ , a desigualdade é trivialmente verdadeira quando  $\Delta s_j^k \geq 0$ .

Assim, o passo somente é calculado quando  $\Delta s_j^k < 0$ . Neste caso, deve-se ter:

$$\alpha_P^k < -\frac{s_j^k + \tau_1 \mu^k}{\Delta s_j^k}. \quad (6.64)$$

De modo que seja garantido que a fronteira da região relaxada não seja atingida, um parâmetro  $\sigma \in (0, 1)$  é utilizado. Com isso, o passo primal para o previsor e o corretor, respectivamente, é calculado por:

$$\alpha_{P,\text{prev}}^k = \sigma \min \left\{ 1, -\frac{(s_j^k + \tau_1 \mu^k)}{\tilde{\Delta} s_j^k} : \tilde{\Delta} s_j^k < 0 \right\}, \quad (6.65)$$

$$\alpha_{P,\text{cor}}^k = \sigma \min \left\{ 1, -\frac{(s_j^k + \tau_1 \mu^k)}{\Delta s_j^k} : \Delta s_j^k < 0 \right\}. \quad (6.66)$$

E o passo dual para o previsor e o corretor é calculado, respectivamente, por:

$$\alpha_{D,\text{prev}}^k = \sigma \min \left\{ 1, -\frac{\nu_j^k}{\tilde{\Delta} \nu_j^k} : \tilde{\Delta} \nu_j^k < 0 \right\}, \quad (6.67)$$

$$\alpha_{D,\text{cor}}^k = \sigma \min \left\{ 1, -\frac{\nu_j^k}{\Delta \nu_j^k} : \Delta \nu_j^k < 0 \right\}. \quad (6.68)$$

No caso de  $s_j^k + \tau_1 \mu^k \leq 0$  para algum  $j$ , problemas podem ocorrer. Este é o caso em que a solução atual deixaria de estar no interior da região factível relaxada ao atualizar o parâmetro de barreira pela heurística (6.58). Assim, neste trabalho, preferiu-se adotar a estratégia empregada por Silva (2014) e apresentada por Pinheiro (2012): realizar uma nova relaxação da região factível, se ocorrer  $s_j^{k+1} \leq -\tau_1 \mu^k$  para algum  $j = 1, \dots, p$ . Neste caso, o parâmetro de barreira é atualizado por:

$$\mu^{k+1} = -(1 + \tau_2) \min_{j=1, \dots, p} \{s_j^{k+1}\}. \quad (6.69)$$

em que:

$\tau_2 > 0$  é um parâmetro.

O novo ponto é determinado com base nos valores provisórios obtidos para as di-

reções do previsor e do corretor, de acordo com o seguinte critério, em que  $\chi > 0$  é o parâmetro que controla a escolha entre os passos previsor ou corretor, com base no valor de complementaridade:

- se  $(s_{\text{prev}}^+)^t \nu_{\text{prev}}^+ < \chi (s_{\text{cor}}^+)^t \nu_{\text{cor}}^+$ , então:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}_{\text{prev}}^+ \\ s^{k+1} &= s_{\text{prev}}^+ \\ \lambda^{k+1} &= \lambda_{\text{prev}}^+ \\ \nu^{k+1} &= \nu_{\text{prev}}^+ \end{aligned} \tag{6.70}$$

- caso contrário:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}_{\text{cor}}^+ \\ s^{k+1} &= s_{\text{cor}}^+ \\ \lambda^{k+1} &= \lambda_{\text{cor}}^+ \\ \nu^{k+1} &= \nu_{\text{cor}}^+ \end{aligned} \tag{6.71}$$

### 6.2.7 Critério de parada

O método PDPCBLM não determina a solução exata para o problema de otimização não linear, assim como a maioria dos métodos iterativos. Assim, faz necessário o uso de um critério de parada que defina se uma solução é de boa qualidade ou não, ou seja, suficientemente próxima de um ótimo. O critério de parada utilizado neste trabalho é o mesmo de Silva (2014) e se baseia no trabalho de Pinheiro (2012), em que uma boa solução é obtida quando os resíduos são suficientemente pequenos.

Dada uma precisão  $\varepsilon > 0$ , o critério de parada é definido por:

- Factibilidade Primal:

$$\|t^k\|_{\infty} \leq \varepsilon \text{ e } \|u^k\|_{\infty} \leq \varepsilon. \tag{6.72}$$

- Factibilidade Dual:

$$\|m^k\|_{\infty} \leq \varepsilon. \tag{6.73}$$

- Folgas Complementares:

$$\|\pi^k\|_\infty \leq \varepsilon. \quad (6.74)$$

Estas três condições são equivalentes a dizer que:

$$\|\nabla L(\mathbf{x}^k, s^k, \lambda^k, \nu^k)\|_\infty \leq \varepsilon. \quad (6.75)$$

### 6.3 Algoritmo do método PDPCBLM

O método PDPCBLM utilizado no presente trabalho é apresentado no algoritmo 1. A inicialização das variáveis é baseada no trabalho de Pinheiro (2012).

---

**Algoritmo 1:** Método PDPCBLM

---

- 1 Inicialização: Parâmetro de barreira inicial  $\mu^0 > 0$ , fator de redução  $\tau \in (0, 1)$ , e dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange  $\delta^0 > \mathbf{0}$ ;
  - 2 Inicialize a variável primal,  $\mathbf{x}^0$ , bem como as variáveis para a correção de inércia Faça  $k \leftarrow 0$ ;
  - 3 Calcule:  $f(\mathbf{x}^k)$ ,  $\nabla f(\mathbf{x}^k)$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ ,  $J\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}^k)$  e  $J\mathbf{h}(\mathbf{x}^k)$ ;
  - 4 Calcule  $\mathbf{s}^0 \leftarrow -\mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$  e monte as matrizes  $\bar{S}_k$  e  $\bar{S}_k^{-1}$ ;
  - 5 Calcule  $\boldsymbol{\nu}^0 \leftarrow \mu^0 \bar{S}_k^{-1} \delta^0$  e  $\boldsymbol{\lambda}^0 \leftarrow -[J\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)J\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)^t]^{-1}J\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)[\nabla f(\mathbf{x}^0) + J\mathbf{h}(\mathbf{x}^0)^t\boldsymbol{\nu}^0]$  e determine a matriz  $N^k$ ;
  - 6 Construa matriz  $A_k$  e utilize a Correção de Inércia para determinar os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  de modo que  $\tilde{A}_k$  tenha a inércia desejada;
  - 7 Calcule os resíduos do previsor:  $\mathbf{m}^k$  (6.13),  $\tilde{\boldsymbol{\pi}}^k$  (6.31),  $\mathbf{t}^k$  (6.21) e  $\mathbf{u}^k$  (6.24);
  - 8 Calcule o vetor  $\tilde{\mathbf{p}}^k$  e  $\theta_k$  e as direções do procedimento previsor:  $\tilde{\Delta}\boldsymbol{\lambda}^k$  (6.49),  $\tilde{\Delta}\mathbf{x}^k$  (6.50),  $\tilde{\Delta}\mathbf{s}^k$  (6.34) e  $\tilde{\Delta}\boldsymbol{\nu}^k$  (6.36);
  - 9 Calcule o resíduo  $\boldsymbol{\pi}^k$  (6.51);
  - 10 **enquanto**  $\|\mathbf{m}^k\|_\infty > \varepsilon$  ou  $\|\boldsymbol{\pi}^k\|_\infty > \varepsilon$  ou  $\|\mathbf{t}^k\|_\infty > \varepsilon$  ou  $\|\mathbf{u}^k\|_\infty > \varepsilon$  **faça**
  - 11     Calcule o vetor  $\mathbf{p}^k$  (6.57) e as direções do procedimento corretor:  $\Delta\boldsymbol{\lambda}^k$  (6.53),  $\Delta\mathbf{x}^k$  (6.54),  $\Delta\mathbf{s}^k$  (6.55) e  $\Delta\boldsymbol{\nu}^k$  (6.56);
  - 12     Calcule os passos primal,  $\alpha_P^k$  e dual,  $\alpha_D^k$ . Utilize  $\sigma = 0,9995$ ;
  - 13     Atualize a solução, obtendo  $\mathbf{x}^{k+1}$ ,  $\mathbf{s}^{k+1}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^{k+1}$  e  $\boldsymbol{\nu}^{k+1}$ ;
  - 14     Atualize o parâmetro de barreira utilizando (6.58) e, caso exista algum  $s_j^{k+1} \leq -\tau\mu^k$ , utilize (6.69);
  - 15     Atualize os estimadores dos multiplicadores de Lagrange:  $\delta^{k+1} = \boldsymbol{\nu}^{k+1}$ ;
  - 16     Faça  $k \leftarrow k + 1$ ;
  - 17     Calcule:  $f(\mathbf{x}^k)$ ,  $\nabla f(\mathbf{x}^k)$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ ,  $J\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}^k)$  e  $J\mathbf{h}(\mathbf{x}^k)$ ;
  - 18     Monte as matrizes  $\bar{S}_k$ ,  $\bar{S}_k^{-1}$  e  $N^k$ ;
  - 19     Construa matriz  $A_k$  e utilize a Correção de Inércia para determinar os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  de modo que  $\tilde{A}_k$  tenha a inércia desejada;
  - 20     Calcule os resíduos do previsor:  $\mathbf{m}^k$  (6.13),  $\tilde{\boldsymbol{\pi}}^k$  (6.31),  $\mathbf{t}^k$  (6.21) e  $\mathbf{u}^k$  (6.24) e o vetor  $\tilde{\mathbf{p}}^k$  e  $\theta_k$ ;
  - 21     Calcule as direções do procedimento previsor:  $\tilde{\Delta}\boldsymbol{\lambda}^k$  (6.49),  $\tilde{\Delta}\mathbf{x}^k$  (6.50),  $\tilde{\Delta}\mathbf{s}^k$  (6.34) e  $\tilde{\Delta}\boldsymbol{\nu}^k$  (6.36) e o resíduo  $\boldsymbol{\pi}^k$  (6.51);
  - 22 Retorne a solução ótima dentro da precisão desejada:  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^k$ ,  $\mathbf{s}^* = \mathbf{s}^k$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}^k$  e  $\boldsymbol{\nu}^* = \boldsymbol{\nu}^k$ .
-

## CAPÍTULO 7

# PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

Problemas que possuem mais de um objetivo a ser alcançado são comuns na área de otimização e conhecidos como problemas de otimização multiobjetivo. Normalmente, esses objetivos são conflitantes entre si, dificultando que se encontre, ao mesmo tempo, uma solução ótima para todos, que, de acordo com a definição da teoria sobre esse tema, é denominada de solução utópica. Realizar o processo de otimização para esse tipo de problema significa encontrar soluções viáveis, não explicitamente conhecidas, apresentadas geralmente na forma de uma curva de soluções eficientes, conhecidas também como Pareto-ótimas ou não dominadas (Miettinen, 1999).

Vários métodos podem ser utilizados para resolver um problema multiobjetivo, cada um com suas características específicas, que conseqüentemente, determinam diferentes aplicações. Um método pode ser bom para determinado problema e ineficaz para outro. Assim, faz-se necessário escolher o procedimento mais adequado de acordo com os objetivos que serão otimizados, analisando o contexto do processo de tomada de decisão.

O custo dos combustíveis empregados na geração termoelétrica e as emissões de poluentes podem ser combinados em uma única função objetivo de um problema multiobjetivo. No entanto, não podem ser minimizados simultaneamente, pois uma estratégia que priorize o objetivo econômico não é a melhor em relação ao ponto de vista ambiental e vice-versa. Portanto, pode ser utilizada a atribuição de diferentes pesos a cada um dos objetivos, de acordo com a prioridade que deve ser satisfeita, estratégia esta conhecida

como soma ponderada; ou então pode-se considerar uma das funções como restrição do modelo de otimização, mantendo a outra como objetivo a ser minimizado, estratégia esta conhecida como  $\varepsilon$ -restrito.

Diante deste cenário, neste capítulo será realizada a apresentação de dois métodos utilizados para resolução de problemas multiobjetivo e que foram aplicados no presente trabalho: método da soma ponderada e método  $\varepsilon$ -restrito, bem como sobre a curva de soluções eficientes obtida após a resolução de um problema deste tipo. Apresenta-se também uma nova estratégia variante da  $\varepsilon$ -restrito denominada  $\varepsilon$ -restrito canalizado que, de fato, foi utilizada para a resolução do problema multiobjetivo de interesse neste trabalho.

## 7.1 Curva de soluções eficientes ou Pareto-ótimas

De acordo com Coello (2003), a resolução de problemas de otimização com objetivo único, implica na determinação de uma solução ótima. Porém, nos problemas em que vários objetivos, geralmente conflitantes, devem ser otimizados simultaneamente, não é possível que se determine uma única solução.

Analisando a resolução de problemas do tipo multiobjetivo, surgiu a necessidade de uma nova definição de “ótimo” e de condições de otimalidade. Assim, grande parte das condições de otimalidade empregadas neste tipo de otimização têm origem nos trabalhos de Edgeworth e Pareto (Coello, 2003) e ficaram conhecidas como Otimalidade de Pareto. Após a aplicação de métodos de resolução de problemas multiobjetivo, um incalculável conjunto de soluções é obtido, as quais produzem vetores que compõe o comprometimento no espaço de decisão. Esses vetores de soluções definem uma curva multidimensional ou uma superfície, variando de acordo com a quantidade de objetivos que foi otimizada concomitantemente.

As soluções Pareto-ótimas são aquelas que compõem o vetor onde ambos os objetivos não podem ser melhorados sem que haja uma deterioração em pelo menos um outro. As soluções que não se encaixam nesta condição, devem ser descartadas. Além de Pareto-ótimas, essas soluções são chamadas de eficientes ou não dominadas e os vetores correspondentes são conhecidos como fronteira de Pareto.

Encontrar a fronteira de Pareto de um problema multiobjetivo pode não ser tão trivial quanto parece, já que os problemas reais, em geral, possuem formulações complexas, com funções não convexas e não-diferenciáveis em seus modelos. Com isso, a curva ou superfície pode não ser “bem comportada” e surgirá a necessidade de uma aproximação. O PMDEA-PV definido em (3.7) (Capítulo 3) é um exemplo de problema multiobjetivo com grandes dificuldades de se obter a fronteira de Pareto, pois é não convexo e não-diferenciável em muitos pontos, devido à inserção dos pontos de carregamento de válvula à função custo.

Devido ao fato de o problema (3.7) envolver a minimização de duas funções conflitantes: custo e emissões de poluentes, os objetivos não podem ser minimizados simultaneamente em uma única função objetivo. Algumas estratégias são propostas para investigação e determinação de soluções eficientes deste tipo de problema e serão empregadas neste trabalho. Inseridos nessas estratégias, o método da soma ponderada e o método  $\varepsilon$ -restrito definidos em 7.2 e 7.3, respectivamente, transformam o problema multiobjetivo em um conjunto de problemas mono-objetivo, permitindo que métodos de otimização sejam aplicados à sua resolução. Neste sentido, na Seção 7.4 é proposto o método  $\varepsilon$ -restrito canalizado, o qual foi utilizado para auxiliar na resolução do PMDEA-PV.

## 7.2 Método da soma ponderada

Segundo Sampaio (2011), Zadeh (1963) foi o primeiro a experimentar o método da soma ponderada, considerado um dos mais simples para a resolução de problemas multiobjetivo e que é utilizado para obter uma aproximação da fronteira de soluções eficientes.

Definida em Miettinen (1999), a técnica consiste em combinar todas as funções objetivo em uma única, usando um parâmetro (peso) para multiplicar cada uma delas e em seguida somá-las. Dessa maneira, o problema inicial transforma-se num problema de objetivo único e que mantém as restrições originais.

A escolha do peso que multiplica cada uma das funções objetivo envolvidas é especificada pelo usuário, de forma que a soma de todos os valores escolhidos para cada função objetivo resulte em 1. Os pesos definidos podem assumir qualquer valor desde que pertençam ao intervalo  $[0, 1]$ .

Apesar de sua simplicidade, o método da soma ponderada possui algumas desvantagens em relação a sua utilização. De acordo com Das & Dennis (1997) e Messac et al. (2000), na resolução de um problema multiobjetivo em que o conjunto viável não é convexo, o método torna-se ineficaz, pois não consegue obter pontos em partes não convexas da fronteira eficiente. Neste caso, o método baseado na estrutura de multiplicação por pesos encontrará somente parte do conjunto de soluções eficientes, deixando de mapear muitas das soluções factíveis. Assim, o conjunto de pontos resultante será semelhante ao da Figura 7.1, em que as soluções ótimas estão situadas em torno da parte convexa do conjunto viável no espaço objetivo e  $f_1$  e  $f_2$  representam as duas funções objetivo que foram minimizadas. A Figura 7.1 foi obtida após a resolução do caso teste de três geradores, que será detalhado no Capítulo 8.

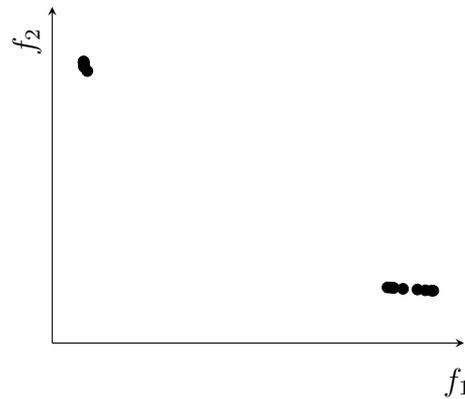


Figura 7.1: Soluções eficientes: problema multiobjetivo de funções não convexas

### 7.2.1 Método da soma ponderada e o PMDEA-PV

Considerando o PMDEA-PV definido em (3.7) e o método da soma ponderada, a função objetivo do problema de otimização é expressa por (7.1):

$$(1 - \alpha)F_e + \alpha F_a \tag{7.1}$$

em que:

$F_e$  é a função econômica;

$F_a$  é a função ambiental;

$\alpha \in [0, 1]$  é o parâmetro do método soma ponderada.

Dessa forma o PMDEA-PV, incluindo as restrições de demanda e os limites operacionais do sistema, passa a ser representado por (7.2):

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && (1 - \alpha)F_e + \alpha F_a \\
 &\text{Sujeito a:} && \sum_{i=1}^n P_i = P_d \\
 &&& P_i^{Min} \leq P_i \leq P_i^{Max}
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

em que:

$F_e$  é a função econômica;

$F_a$  é a função ambiental;

$\alpha \in [0, 1]$  é o parâmetro do método soma ponderada;

$P_d$  é a potência demandada;

$P_i^{\min}$  e  $P_i^{\max}$  são os limites mínimo e máximo, respectivamente, de saída de potência da unidade geradora  $i$ .

A função objetivo ponderada é minimizada para valores sucessivos de  $\alpha$ , percorrendo todo o intervalo de 0 até 1. Para cada valor de  $\alpha$ , pontos que compõe uma curva de soluções são obtidos, com valores para o custo e para a emissão. Neste trabalho, identificou-se que a atribuição de diferentes valores de  $\alpha$  levaram, em alguns casos, a busca em regiões não factíveis.

A Figura 7.2 representa a curva de relação entre o custo e a quantidade de emissões, obtida após a resolução do problema de otimização multiobjetivo através do método da soma ponderada, com  $\alpha$  percorrendo o intervalo de 0 até 1. Nota-se que quando  $\alpha = 1$ , a curva atinge a emissão mínima e o custo é máximo, já o inverso ocorre em  $\alpha = 0$ , onde o custo é mínimo e a emissão é máxima. Ressalta-se que, a fronteira de Pareto, representada pela curva convexa vista na Figura 7.2 só é possível de ser obtida quando as funções a serem minimizadas são convexas. Este não é o caso do PMDEA-PV investigado neste trabalho, cujas características são melhor representadas pela curva esboçada na Figura 7.1.

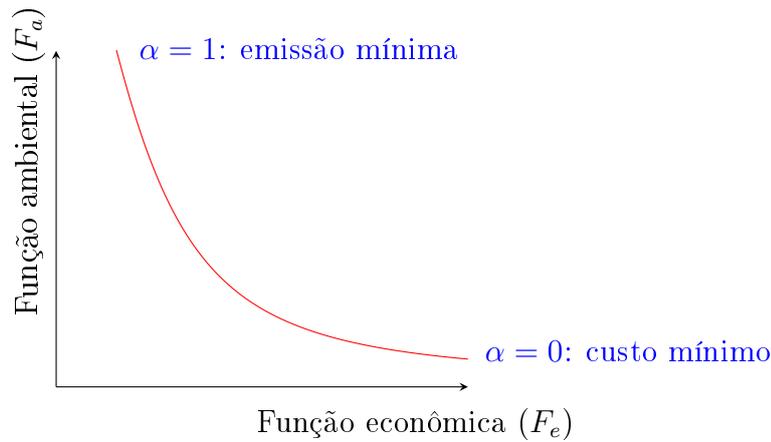


Figura 7.2: Curva de soluções eficientes: custo e emissões

### 7.3 Método $\varepsilon$ -restrito

Sugerido por Haimes (1971) e definido em Miettinen (1999), o método  $\varepsilon$ -restrito é empregado a fim de transformar um problema multiobjetivo em um conjunto de problemas mono-objetivos, possibilitando assim a aplicação de um método de otimização à sua resolução. A ideia principal do método é otimizar uma das funções objetivo e incorporar as demais ao conjunto de restrições do problema.

Semelhante ao método da soma ponderada, o  $\varepsilon$ -restrito é utilizado para obter uma aproximação da fronteira de soluções eficientes de um problema de otimização multiobjetivo. Destaca-se, neste caso, o controle de cobertura da fronteira de soluções eficientes, sendo possível obter pontos por toda a curva, até mesmo nos casos em que a função objetivo ou alguma das restrições são funções não convexas.

A escolha da função objetivo a ser minimizada ou incorporada às restrições deve ser feita de maneira cautelosa, de modo que os problemas envolvidos não se tornem inviáveis e a busca ocorra em regiões não factíveis. Além disso, nem toda solução encontrada por essa abordagem é eficiente, devendo existir uma seleção de pontos não dominados para a construção da curva de soluções eficientes.

#### 7.3.1 Método $\varepsilon$ -restrito e o PMDEA-PV

Considerando o PMDEA-PV definido em (3.7) e o método  $\varepsilon$ -restrito, duas formulações são possíveis para o problema de otimização:

- Adotar a função despacho econômico com ponto de carregamento de válvula como restrição do problema, limitada superiormente para níveis máximos de custo de geração e minimizar o despacho ambiental;
- Minimizar a função custo e incorporar às restrições do problema a função despacho ambiental, limitando-a superiormente para níveis máximos permissíveis de emissão.

A obtenção dos pontos que formam o conjunto Pareto-ótimo (soluções eficientes) é feita variando-se o nível máximo de custo da restrição econômica (caso de minimização do despacho ambiental), ou o nível máximo de emissão da restrição ambiental (caso de minimização da função custo), sendo que para cada valor máximo escolhido é resolvido um novo problema de otimização.

### 7.3.1.1 Função objetivo: despacho ambiental

O conjunto (7.3) trata de um problema de despacho ambiental sujeito a uma restrição econômica, limitada superiormente por um custo máximo de geração:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } F_a \\
 &\text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i = P_d \\
 &F_e \leq F_e^{\max} \\
 &P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max}
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

em que:

$F_e$  é a função econômica;

$F_a$  é a função ambiental;

$P_d$  é a potência demandada;

$P_i^{\min}$  e  $P_i^{\max}$  são os limites mínimo e máximo, respectivamente, de saída de potência da unidade geradora  $i$ ;

$F_e^{\max}$  é o limitante superior da função custo.

### 7.3.1.2 Função objetivo: despacho econômico

Uma outra possibilidade de formulação é definida em (7.4) e minimiza a função despacho econômico, sujeita as restrições operacionais do sistema e a restrição de emissão, limitada por níveis máximos de emissão permissíveis:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } F_e \\
 & \text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i = P_d \\
 & F_a \leq F_a^{\max} \\
 & P_i^{\text{Min}} \leq P_i \leq P_i^{\text{Max}}
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

em que:

$F_e$  é a função econômica;

$F_a$  é a função ambiental;

$P_d$  é a potência demandada;

$P_i^{\min}$  e  $P_i^{\max}$  são os limites mínimo e máximo, respectivamente, de saída de potência da unidade geradora  $i$ ;

$F_a^{\max}$  é o limitante máximo de níveis permissíveis de emissão.

Aos modelos apresentados em (7.3) e (7.4), pode ser incluída uma característica que considera a restrição de máximo custo (modelo (7.3)) ou a restrição de máxima emissão (modelo (7.4)) ressaltando as características individuais de cada gerador, ou seja, para cada uma das unidades geradoras do sistema é imposto um limite máximo de custo ou de emissão. Esta formulação para a resolução do PMDEA sem a inserção de pontos de carregamento de válvula pode ser vista em Stanzani et al. (2014).

Apesar de ser possível a formulação do problema de minimização da função ambiental com restrição econômica, sua resolução não se faz interessante, uma vez que o principal objetivo das concessionárias é priorizar a minimização dos custos. Com isso, neste trabalho, somente é considerada a formulação de minimização dos custos com inserção de pontos de carregamento de válvula, com restrição da função ambiental.

## 7.4 Método $\varepsilon$ -restrito canalizado

Considerando o modelo de otimização apresentado em (7.4) para o PMDEA-PV, neste trabalho foi realizada uma canalização da restrição ambiental incorporada ao conjunto de restrições do problema de despacho econômico. Além de limitada superiormente para níveis máximos de emissão, a função despacho ambiental passou a ser limitada também em relação a níveis mínimos de emissão. Mas observe que, esses níveis mínimos (que poderiam não fazer sentido em termos operacionais) são definidos para algum valor de emissão obtido para uma solução eficiente do problema, já determinada pelo método PDPCBLM, ou seja, o valor mínimo da função ambiental imposto inicialmente é obtido após a resolução do problema mono-objetivo de despacho ambiental.

A inserção de um limite inferior à função ambiental é considerada a fim de auxiliar na obtenção de pontos da curva de soluções eficientes do problema, sendo fundamental para a convergência do método PDPCBLM. Tais limites são obtidos após a resolução dos problemas mono-objetivos de despacho econômico e de despacho ambiental, através do método híbrido proposto neste trabalho. Quando o problema mono-objetivo de despacho econômico é resolvido, obtemos o valor máximo da função ambiental e quando o problema mono-objetivo de despacho ambiental é resolvido, tem-se o resultado do valor mínimo para função ambiental.

Os limites são importantes, em termos práticos, para a obtenção da curva de soluções eficientes (Pareto-ótima) do problema multiobjetivo investigado. Assim, os mesmos relacionam-se exclusivamente à determinação de alguma nova solução eficiente com valor da função econômica intermediário ao de soluções eficientes já obtidas anteriormente pelo método. O intervalo dado inicialmente (valor mínimo e valor máximo da função ambiental), é dividido em vários subintervalos, determinados aleatoriamente, permitindo a obtenção das soluções eficientes.

O PMDEA-PV, ainda que resolvido pelo método híbrido através de suavização de funções, opera com funções objetivo não convexas, neste caso, a  $F_e$  suavizada e este fato dificulta a aplicação direta dos métodos da soma ponderada ou  $\varepsilon$ -restrito para a obtenção da curva de soluções eficientes do problema. A utilização do novo método proposto possibilitou a obtenção desta curva para o PMDEA-PV de interesse neste trabalho.

O modelo de otimização para o caso do método  $\varepsilon$ -restrito canalizado do PMDEA-PV é dado por (7.5):

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } F_e \\
 &\text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i = P_d \\
 &F_a^{\min} \leq F_a \leq F_a^{\max} \\
 &P_i^{\text{Min}} \leq P_i \leq P_i^{\text{Max}}
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

em que:

$F_e$  é a função econômica;

$F_a$  é a função ambiental;

$P_d$  é a potência demandada;

$P_i^{\min}$  e  $P_i^{\max}$  são os limites mínimo e máximo, respectivamente, de saída de potência da unidade geradora  $i$ ;

$F_a^{\max}$  é o limitante máximo da função ambiental;

$F_a^{\min}$  é o limitante mínimo da função ambiental.

Na seção seguinte, é detalhado o passo a passo do método  $\varepsilon$ -restrito canalizado.

### 7.4.1 Estratégia de utilização do método $\varepsilon$ -restrito canalizado

Ao modelo definido em (7.5), o método  $\varepsilon$ -restrito canalizado, utilizado para tratar o caso multiobjetivo e possibilitar o uso de métodos determinísticos de otimização, foi empregado da seguinte forma:

1. Formulação do problema: a função ambiental é incorporada às restrições do problema de despacho econômico e limitada superiormente para valores máximos permissíveis de emissão e inferiormente para valores mínimos permissíveis de emissão, valores estes que serão alterados no decorrer da resolução do problema. O modelo utilizado neste caso é apresentado em (7.5).
2. Determinação dos resultados do problemas de despacho mono-objetivo: os problemas de despacho mono-objetivo, econômico e ambiental, são resolvidos através do

método híbrido proposto neste trabalho. Os valores obtidos são representados pelos pontos extremos em cada uma das curvas de soluções eficientes, ou seja, o valor mínimo do custo determinado pela resolução do problema de despacho econômico é o ponto em que a emissão é máxima e o valor mínimo de emissão, determinado pela resolução do problema de despacho ambiental, é ponto onde o custo é máximo. Esses pontos norteiam a construção da curva de Pareto-ótima, pois são os extremos da mesma.

3. Preenchimento da curva de soluções: entre os dois pontos obtidos após a resolução dos problemas de despacho mono-objetivo (valor mínimo e valor máximo da função ambiental), são determinados vários subintervalos, de forma aleatória, com valor mínimo e valor máximo para a função ambiental. Operando na região delimitada entre pontos de mínimo e máximo determinados para a função ambiental, o método converge para soluções eficientes, de modo que a curva desejada seja completada. A fim de preencher toda a curva, o processo é repetido utilizando valores ambientais já determinados em duas soluções eficientes do problema, ou seja, duas soluções eficientes já obtidas são utilizadas como novo valor mínimo e novo valor máximo da função ambiental, e neste intervalo o método consegue encontrar uma nova solução. Este processo de delimitar uma nova região para a função ambiental é realizado sucessivamente, até que sejam encontrados pontos por toda a curva de Pareto-ótima.

De modo a exemplificar do funcionamento do método, a Figura 7.3 apresenta um único caso de subintervalo utilizado para a determinação de soluções eficientes do PMDEA-PV, em que  $F_a^{\max}$  é o valor máximo atribuído à restrição ambiental e  $F_a^{\min}$  o valor mínimo atribuído à restrição ambiental. A região hachurada é onde foi determinada uma nova solução eficiente. Os demais pontos são soluções eficientes já obtidas e a região hachurada foi determinada entre duas soluções eficientes, a fim de tornar a curva mais completa.

Para cada um dos casos teste realizados, inúmeros subintervalos foram determinados entre as soluções mínima de despacho econômico e mínima de despacho ambiental. Os valores utilizados para  $F_a^{\max}$  e  $F_a^{\min}$ , bem como as soluções obtidas para cada região, são apresentados nos resultados de cada um dos testes, na próxima seção. O modelo de otimização apresentado em (7.2) também foi utilizado para determinação de soluções eficientes de um caso-teste do PMDEA-PV, porém, o método  $\varepsilon$ -restrito canalizado, pro-

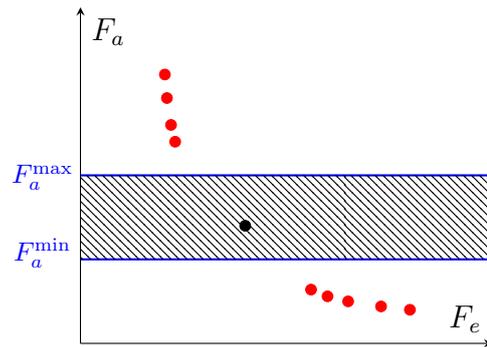


Figura 7.3: Subintervalo para a função ambiental: método  $\varepsilon$ -restrito canalizado

posto neste trabalho, foi o que se mostrou eficaz para a resolução deste tipo de problema. Diferentes testes foram aplicados ao PMDEA-PV, cujos dados e os respectivos resultados são apresentados no Capítulo 8.

Este capítulo é destinado a apresentar os resultados obtidos, para diferentes casos-teste, do PMDEA-PV destacado no Capítulo 3. Descreve-se a aplicação dos métodos da soma ponderada e  $\varepsilon$ -restrito canalizado, empregados a fim de transformar o problema multiobjetivo em um conjunto de problemas mono-objetivo, bem como a aplicação do método de otimização PDPCBLM, definido no Capítulo 6, para determinação da curva de soluções eficientes em cada um dos casos-teste. A função custo do PMDEA-PV já está aproximada através do método da suavização hiperbólica, descrito em 4.

As estratégias utilizadas foram implementadas em linguagem Matlab, utilizando o Matlab 2011a e sua execução realizada em um computador com processador Intel Core i5, com 6GB de memória RAM e sistema operacional Windows 8.1. Baseado na estrutura do algoritmo apresentado por Silva (2014), o proposto neste trabalho é uma extensão daquele algoritmo devido à inclusão dos métodos de resolução de problemas multiobjetivo, da soma ponderada e  $\varepsilon$ -restrito canalizado.

O método híbrido proposto e implementado foi aplicado em problemas teste distintos, envolvendo sistemas com 3, 6, 10 e 19 geradores, cujos dados são apresentados nas Tabelas A.1, A.7, A.12 e A.17, respectivamente. O método PDPCBLM, definido na Seção 6.2, foi aplicado aos problemas teste variando seus parâmetros e ponto inicial, para cada uma das soluções eficientes obtidas. O fator de redução do parâmetro de barreira foi empregado satisfazendo  $\tau_1 \in (0, 1)$ . Já o fator utilizado pela técnica da suavização

hiperbólica é aplicado variando em um intervalo  $(1, 10)$ , ou seja,  $\eta \in (1, 10)$ , já que esses valores proporcionaram melhor desempenho do método na resolução do PMDEA-PV.

## 8.1 Resultados

Nas Seções 8.2, 8.3, 8.4 e 8.5 são apresentados os resultados, as curvas Pareto-ótimas e as considerações, para os casos de 3, 6, 10 e 19 geradores, respectivamente.

## 8.2 Caso 3 geradores

Na Tabela A.1, que se encontra no Apêndice A deste trabalho, são apresentados os dados utilizados para resolução do caso de 3 geradores, extraídos de Samed (2004) e Senthil & Manikandan (2010). Para o caso teste de 3 geradores, dois problemas diferentes foram formulados e resolvidos: através do método da soma ponderada e do método  $\varepsilon$ -restrito canalizado.

### 8.2.1 Soma ponderada: 3 geradores

Para este caso, o algoritmo do método PDPCBLM foi aplicado ao PMDEA-PV com a atribuição de valores sucessivos de  $\alpha$ , percorrendo todo o intervalo  $[0, 1]$ . Para cada valor atribuído a  $\alpha$ , um ponto no conjunto de soluções foi obtido.

A Tabela 8.1, apresenta os valores de  $\alpha$  utilizados e os respectivos resultados obtidos para a função econômica ( $F_e$ ) e para a função ambiental ( $F_a$ ). No ponto em que  $\alpha = 0$ , a função econômica atinge seu valor mínimo, enquanto a ambiental o seu valor máximo. Já em  $\alpha = 1$ , ocorre o inverso, a função despacho ambiental atinge o seu mínimo e a econômica valor máximo. Esses casos, representam os pontos extremos da curva da Figura 8.1. Os pontos iniciais, parâmetros de barreira e parâmetros de aproximação utilizados para a convergência do método PDPCBLM para cada valor de  $\alpha$  empregado, são apresentados no Apêndice A deste trabalho.

Tabela 8.1: Valores de  $\alpha$  e as soluções  $F_e$  versus  $F_a$

$\alpha$	$F_e$ (\$/h)	$F_a$ (Kg/h)
0	8234,35	2275,67
0,10	8234,40	2275,42
0,20	8234,48	2275,03
0,30	8234,69	2274,20
0,40	8234,88	2273,22
0,50	8238,45	2271,39
0,70	8566,49	2174,81
0,75	8573,07	2174,60
0,80	8569,50	2174,79
0,88	8583,36	2174,19
0,92	8599,16	2173,88
0,99	8614,60	2173,38
1	8616,44	2173,35

Como é possível observar na Figura 8.1, os pontos obtidos concentram-se somente nas regiões próximas aos valores mínimos de emissão e de custo máximo ou então o contrário, onde os custos são mínimos mas a emissão é máxima.

Nota-se que, conforme o valor de  $\alpha$  aumenta, o grau de importância da função emissão também aumenta e a emissão é reduzida ao passo que, o grau de importância da função custo diminui e os preços aumentam. Quando dois objetivos conflitantes são otimizados, uma melhora em um objetivo só é alcançada através de uma piora no outro objetivo (Samed, 2004).

Tabela 8.2: Valores máximos e mínimos de  $F_e$  e  $F_a$  para o caso de 3 geradores: método da soma ponderada

$\alpha$	$F_e$ (\$/h)	$F_a$ (Kg/h)
0 (custo mínimo)	<b>8234,35</b>	2275,67
1 (emissão mínima)	8616,44	<b>2173,35</b>

Devido à consideração dos pontos de carregamento de válvula ao problema de despacho econômico, termos senoidais modulares foram incorporados ao problema e a função

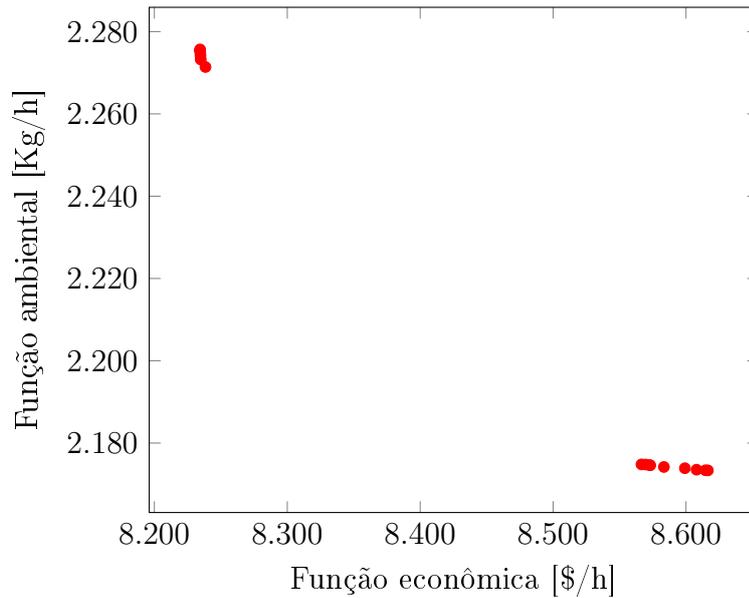


Figura 8.1: Caso 3 geradores: método da soma ponderada

custo tornou-se não convexa e não-diferenciável em alguns pontos do seu domínio. Ainda que a estratégia de suavização fosse utilizada, o método da soma ponderada foi ineficaz para a resolução do PMDEA-PV.

Em busca na literatura relacionada à resolução de problemas multiobjetivo de despacho, foi possível encontrar somente casos em que o problema é resolvido através do método da soma ponderada, mas sem a inserção dos pontos de carregamento de válvula. Em geral, o método da soma ponderada não é eficiente para a resolução de problemas multiobjetivo com, pelo menos, uma função objetivo não convexa. Como já citado anteriormente, de acordo com Das & Dennis (1997) e Messac et al. (2000), na resolução de um problema multiobjetivo em que o conjunto viável não é convexo, o método torna-se ineficaz, pois não consegue obter pontos em partes não convexas da fronteira eficiente. Neste caso, são as partes da curva em que não foram obtidos nenhum dos pontos. A Figura 8.1 ilustra esse fato.

### 8.2.2 $\varepsilon$ -restrito canalizado: 3 geradores

O método  $\varepsilon$ -restrito canalizado, definido na Seção 7.4, foi aplicado para tratar o caso multiobjetivo nesta situação. Os passos definidos em 7.4.1 foram seguidos para resolução do PMDEA-PV no caso de 3 geradores. Foram determinados vários subintervalos, entre os valores mínimo e máximo do problema obtidos pela resolução do problema mono-objetivo

de despacho ambiental.

Os valores dos subintervalos utilizados para a obtenção das soluções eficientes são apresentados na Tabela A.3, do Apêndice A, assim como os pontos iniciais, parâmetros de barreira e parâmetros de aproximação iniciais, para cada caso. Iniciando o método com soluções iniciais factíveis e não factíveis, foi possível determinar uma solução ótima para cada subproblema mono-objetivo, ou seja, para cada subintervalo dado à função ambiental.

Os pontos extremos obtidos na curva de soluções, valor mínimo da função ambiental (máximo da função econômica) e valor mínimo da função econômica (máximo da função ambiental), foram determinados pela resolução dos problemas de despacho mono-objetivo, econômico e ambiental, através do método híbrido proposto neste trabalho e são apresentados na Tabela 8.3.

Tabela 8.3: Valores máximos e mínimos de  $F_e$  e  $F_a$  para o caso de 3 geradores: método  $\varepsilon$ -restrito canalizado

Custo(\$/h)	Emissão(Kg/h)
<b>8234, 1745</b>	2275, 86
8606, 823	<b>2173, 400</b>

A Tabela 8.4, mostra que a utilização do método da suavização hiperbólica foi eficiente para este caso, uma vez que os valores das funções econômica aproximada e econômica original, são bem próximos:

Tabela 8.4: Valor mínimo da função custo ( $F_e$ ), aproximada e original: 3 geradores

$F_e$ aproximada	$F_e$ original
8234, 6831	8234, 1745

A Figura 8.2 apresenta a curva de pontos que contempla soluções dominadas e não dominadas do PMDEA-PV para o caso de 3 geradores, da função econômica versus ambiental. Após a eliminação dos pontos considerados dominados ou não eficientes da curva em vermelho da Figura 8.2, a fim de que seja obtida uma curva composta somente por soluções eficientes, ou seja, aquelas que compõem o vetor onde ambos os objetivos possuem a melhor solução possível, a curva de Pareto-ótima é obtida e apresentada pela curva em azul da mesma figura.

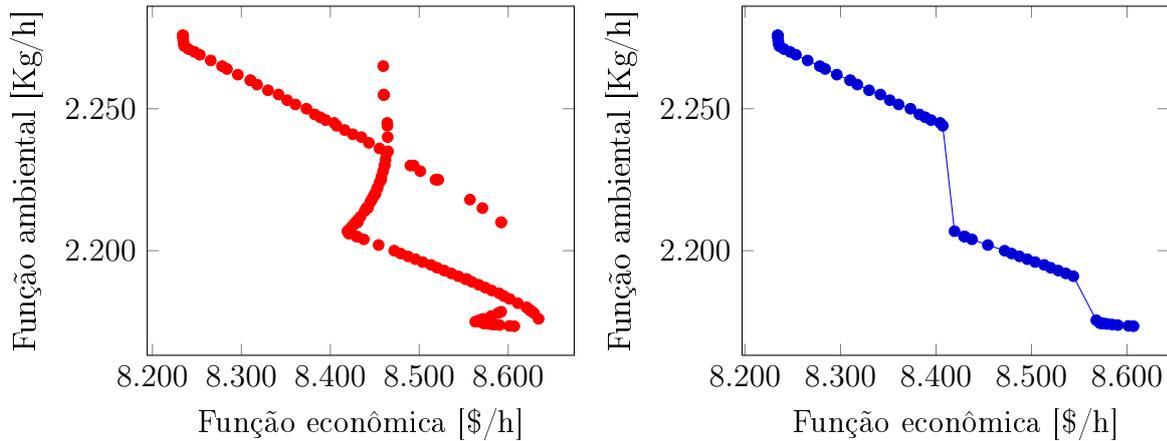


Figura 8.2: Caso 3 geradores: método  $\varepsilon$ -restrito canalizado - todas as soluções *versus* curva de Pareto-ótima

Considerando que os dados utilizados neste trabalho são os mesmos utilizados no trabalho de Silva (2014), o qual minimizou somente a função despacho econômico com inserção de pontos de carregamento de válvula, é possível realizar uma comparação parcial em relação ao caso extremo obtido na resolução do PMDEA-PV, quando a função econômica atinge seu valor mínimo, ou seja, é o ótimo para esse subproblema mono-objetivo. No presente trabalho, o valor mínimo obtido para o custo é de 8234,1745(\$/h), enquanto que no trabalho de Silva (2014) o valor obtido é de 8234,07(\$/h).

A diferença entre os resultados é relativamente pequena, observando que foi inserida uma restrição ambiental ao problema original de minimização dos custos utilizado por Silva (2014), por isso o preço é de algumas unidades monetárias a mais. Assim, o método é eficiente para resolução do PMDEA-PV neste caso.

Em termos de uma comparação mais justa, não foi encontrado na literatura a resolução do PMDEA-PV para o caso de 3 geradores. Comumente, é resolvido somente o problema de despacho econômico com inserção de pontos de carregamento de válvula ou o problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental, sem a inserção desses pontos. A este último problema, na grande maioria dos casos em que foi resolvido, empregaram-se métodos bio-inspirados ou híbridos, de acordo com o descrito na Seção 3.4.

### 8.3 Caso 6 geradores

A Tabela A.7, do Apêndice A, fornece os coeficientes da função econômica, dos pontos de carregamento de válvula, limitantes máximos e mínimos de operação do sistema e coeficientes da função ambiental para o caso de 6 geradores. Os dados utilizados neste trabalho foram extraídos de Ravi et al. (2006) e Samed (2004). Os pontos iniciais, parâmetros de barreira e parâmetros de aproximação utilizados para a convergência do método PDPC-BLM para cada valor de  $\alpha$  empregado são apresentados no Apêndice A deste trabalho.

Utilizando o método  $\varepsilon$ -restrito canalizado, juntamente com o método PDPCBLM e a técnica da suavização hiperbólica, o PMDEA-PV foi resolvido para o caso de 6 geradores. De maneira análoga ao caso de 3 geradores, o problema foi solucionado com a determinação de várias faixas, limitadas superiormente e inferiormente para valores da função ambiental.

Para a obtenção do conjunto solução, ou seja, a determinação de diversos pontos possivelmente eficientes, o intervalo dado à restrição ambiental foi subdividido em vários subintervalos, sendo que em cada um deles um novo problema mono-objetivo foi resolvido. Assim, cada subintervalo gerou uma solução ótima do seu respectivo subproblema mono-objetivo e os pontos referentes os valores, da solução econômica e da solução ambiental, foram determinados. A Tabela A.8, do Apêndice A, contém os intervalos utilizados para a função ambiental e os respectivos valores obtidos para a função econômica e ambiental. No Apêndice A também constam os valores utilizados para os pontos iniciais, os parâmetros de barreira e parâmetros de aproximação iniciais, para subintervalo da função ambiental.

Como no caso de 3 geradores, os pontos extremos da curva de soluções, valor mínimo da função ambiental e valor mínimo da função econômica, foram determinados através da resolução dos problemas de despacho mono-objetivo, econômico e ambiental. A Tabela 8.5, mostra que a utilização do método da suavização hiperbólica foi eficiente para este caso, uma vez que os valores mínimos das funções econômica, aproximada e original, são bem próximos:

Tabela 8.5: Valor mínimo da função custo ( $F_e$ ), aproximada e original: 6 geradores

$F_e$ aproximada	$F_e$ original
860,5777	860,3729

A curva de pontos que contempla soluções dominadas e não dominadas do PMDEA-

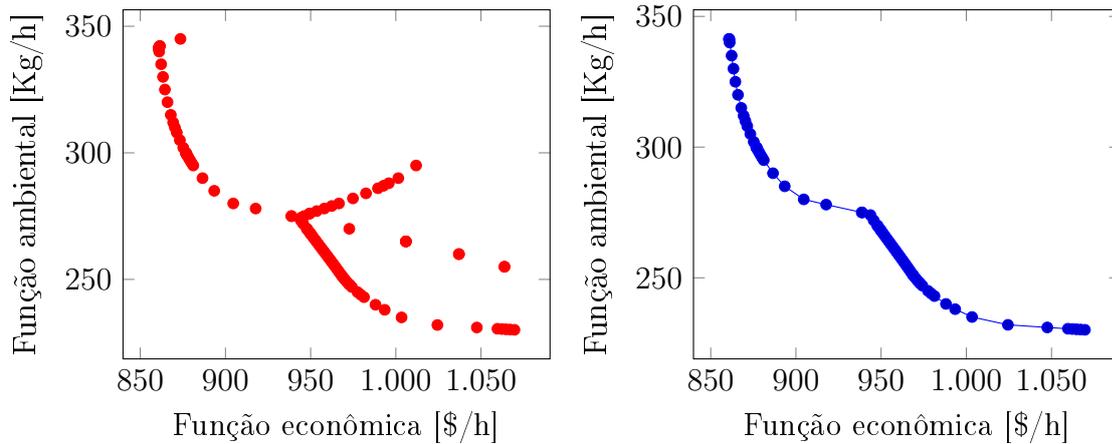


Figura 8.3: Caso 6 geradores: método  $\varepsilon$ -restrito canalizado - todas as soluções *versus* curva de Pareto-ótima

PV para o caso de 6 geradores, função econômica versus ambiental, contendo todas as soluções determinadas pelo método é representada na Figura 8.3 pela curva em vermelho, da direita. É possível observar que, em vários pontos, os valores para ambas as funções podem ser melhorados, ou seja, existe algum ponto, na mesma faixa de valores, em que a função econômica e a função ambiental sejam menores. Eliminando as soluções que não são eficientes, a curva de Pareto-ótima é obtida e é apresentada pela curva em azul, da direita, da Figura 8.3.

Os pontos de mínimo e máximo para as funções custo e emissão (extremos da curva representada em 8.3), para os problemas mono-objetivos solucionados, são destacados na Tabela 8.6. Lembrando que, devido a serem objetivos conflitantes, quando o custo tem valor mínimo, a emissão tem valor máximo e quando a emissão é mínima o custo é máximo.

Tabela 8.6: Valores máximos e mínimos de  $F_e$  e  $F_a$  para o caso de 6 geradores: método  $\varepsilon$ -restrito canalizado

Custo(\$/h)	Emissão(Kg/h)
<b>860, 3729</b>	341, 4600
1069, 6050	<b>230, 1000</b>

Como no caso de 3 geradores, não foi possível encontrar na literatura o PMDEA-PV aplicado ao problema de 6 geradores utilizado neste trabalho. Em Samed (2004), onde foram obtidos os dados da função despacho ambiental, foi resolvido o problema de despacho econômico e ambiental, porém sem a inserção dos pontos de carregamento de

válvula ao problema de despacho econômico. Assim, a função minimizada é quadrática, convexa e diferenciável, sendo desnecessário o uso da estratégia de suavização no problema de otimização, além de ser possível a utilização da técnica da soma ponderada para tratar o caso multiobjetivo.

Em Stanzani (2012) o problema multiobjetivo também foi resolvido através do método da soma ponderada para o caso de 6 geradores, porém, como no trabalho de Samed (2004), sem a inserção dos pontos de carregamento de válvula.

No trabalho de Ravi et al. (2006), de onde foram obtidos os dados utilizados no problema de despacho econômico com inserção de pontos de carregamento de válvula utilizados neste caso, foi realizada a minimização do problema mono-objetivo de despacho econômico considerando as perdas do sistema. Ravi et al. (2006) obteve 868,0300(\$/h) como sendo o valor mínimo da função custo e no presente trabalho, o valor mínimo é de 860,3729(\$/h), sem a influência das perdas. Lembrando que a comparação é parcial, uma vez que Ravi et al. (2006) resolveu o problema de despacho econômico com inserção de pontos de carregamento de válvula e consideração das perdas e no presente trabalho, foi minimizado o custo com o acréscimo de uma restrição ambiental ao problema, sem a consideração das perdas, mas obtendo um resultado esperado e inferior ao encontrado em Ravi et al. (2006), o que verifica que a composição de técnicas utilizadas neste trabalho é eficiente para resolução do PMDEA-PV neste caso.

## 8.4 Caso 10 geradores

Para o caso de 10 geradores o algoritmo do método PDPCBLM foi aplicado ao PMDEA-PV com os dados da Tabela A.12 (Apêndice A) juntamente com a técnica  $\varepsilon$ -restrito canalizado. Foram determinados vários subintervalos entre os limites máximo e mínimo estabelecidos para a restrição ambiental, Tabela A.13. Os pontos iniciais, parâmetros de barreira e parâmetros de aproximação utilizados para a convergência do método PDPCBLM para cada valor de  $\alpha$  empregado, são apresentados no Apêndice A deste trabalho.

O método foi iniciado com soluções factíveis e não factíveis, ou seja, exteriores à região viável, mas interiores à região relaxada pelo procedimento da barreira modificada e foi possível determinar uma sequência de pontos que convergiu para uma solução ótima

de cada subproblema mono-objetivo, gerado através da estratégia  $\varepsilon$ -restrito canalizado. Os pontos extremos obtidos na curva de soluções, valor mínimo da função ambiental (máximo da função econômica) e valor mínimo da função econômica (máximo da função ambiental), foram determinados através da resolução dos problemas de despacho mono-objetivo, econômico e ambiental e são apresentados na Tabela 8.7.

Tabela 8.7: Valores máximos e mínimos de  $F_e$  e  $F_a$  para o caso de 10 geradores: método  $\varepsilon$ -restrito canalizado

Custo(\$/h)	Emissão(tons/h)
<b>106185, 9119</b>	4050, 0000
111662, 5774	<b>3570, 0000</b>

O método da suavização hiperbólica foi eficiente para este caso, como é possível observar na Tabela 8.8. Os valores das funções econômica aproximada e econômica original, são relativamente próximos um do outro.

Tabela 8.8: Valor mínimo da função custo ( $F_e$ ), aproximada e original: 3 geradores

$F_e$ aproximada	$F_e$ original
106185, 9119	106185, 8583

A curva de pontos que contempla as soluções não dominadas do PMDEA-PV para o caso de 10 geradores é apresentada na Figura 8.4. A função econômica versus ambiental do gráfico determina a curva de Pareto-ótima.

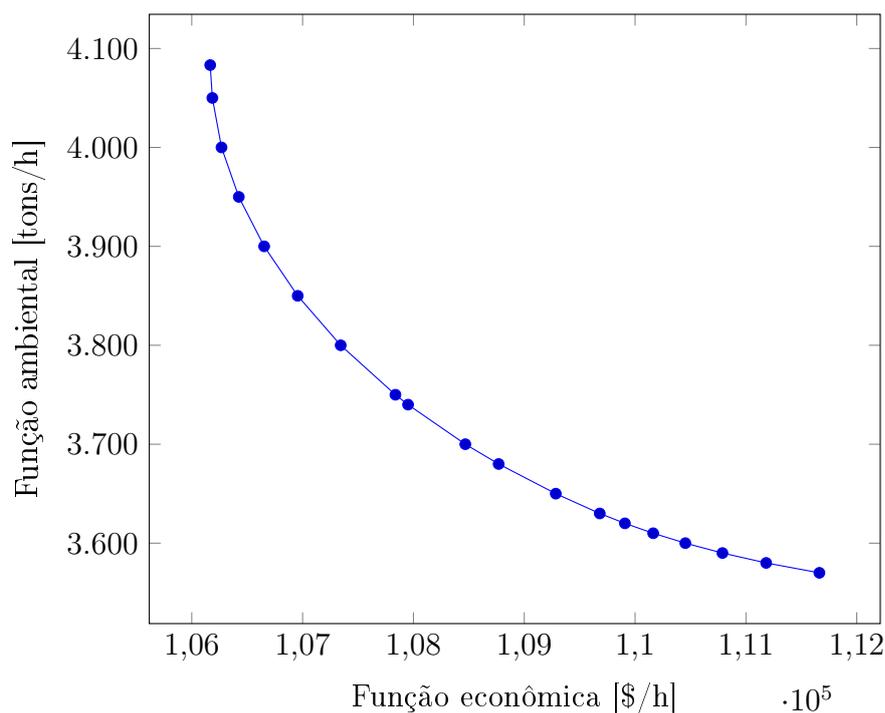


Figura 8.4: Caso 10 geradores: método  $\varepsilon$ -restrito canalizado e PDPCBLM - curva de Pareto-ótima

No trabalho de Basu (2011), de onde foram extraídos os dados utilizados para o caso de 10 geradores, o valor mínimo obtido para função custo, com representação das perdas, é 111500,00\$/h. Neste trabalho, o valor mínimo obtido é 106185,8583\$/h, porém sem representação das perdas na função custo. O mesmo ocorre com a função emissão, em que o autor obteve 3923,40 toneladas como valor mínimo, mas levou em consideração termos exponenciais, o que não ocorreu neste trabalho, onde o valor obtido, 3570,00 toneladas, é inferior ao do autor citado. Entretanto, os resultados obtidos mostram a eficiência do método híbrido proposto para a resolução do PMDEA-PV de 10 geradores pois, ao desconsiderar-se a inclusão de perdas na função custo e dos termos exponenciais na função ambiental, de fato, os resultados obtidos pelo método proposto neste trabalho deveriam, e foram, inferiores aos do autor citado.

## 8.5 Caso 19 geradores

A Tabela A.17 (Apêndice A), apresenta os coeficientes da função econômica, dos pontos de carregamento de válvula, limitantes máximos e mínimos de operação do sistema e coeficientes da função ambiental utilizados para o caso de 19 geradores. Também se

encontra no Apêndice A o valor da potência demandada utilizada para este sistema teste. Os dados utilizados neste trabalho foram extraídos de Balamurugan et al. (2014), a função custo é dada em dólar por hora (\$/h) e a emissão em toneladas por hora (tons/h).

De forma semelhante aos outros testes realizados neste trabalho, neste caso foram resolvidos os problemas mono-objetivos de despacho econômico e de despacho ambiental, com o objetivo de determinar o intervalo, utilizado posteriormente, como canalização da função ambiental, incorporada às restrições do problema de minimização dos custos. Aplicando o método PDPCBLM ao problema mono-objetivo de despacho ambiental, a quantidade mínima de emissão obtida é de 12756,377 (tons/h), enquanto o valor máximo é de 14844,403 (tons/h).

Este intervalo foi dividido em vários subintervalos, de forma aleatória, de modo a determinar os pontos do conjunto de soluções do problema. Porém, devido ao método PDPCBLM necessitar, além de um subintervalo para a função ambiental ( $F_a$ ), da determinação de um ponto inicial e de alguns outros parâmetros, como o da suavização hiperbólica, surgiram algumas dificuldades para resolução do problema neste caso. Desta forma, uma nova estratégia foi adotada para auxiliar a resolução do problema, antes da aplicação do método PDPCBLM. Através do pacote de otimização Couenne, disponível na interface GAMS, foi possível obter os pontos iniciais, que, posteriormente foram utilizados para cada subintervalo da função ambiental pelo método PDPCBLM. Esse procedimento será detalhado na Seção 8.5.1.

### 8.5.1 Uso do pacote de otimização Couenne

O pacote de otimização Couenne 24.3.3 é utilizado para resolução de problemas de otimização do tipo não linear, não convexo e inteiro-misto. O algoritmo utilizado foi desenvolvido originalmente em uma cooperação entre a *Carnegie Mellon University* e *IBM Research*. Para mais informações sobre o algoritmo do método consulte GAMS (2014).

Após inserir o PMDEA-PV, com a mesma formulação utilizada no método  $\varepsilon$ -restrito canalizado, na interface GAMS, o intervalo [12750, 14900] (uma aproximação dos extremos obtidos para a função ambiental através do método PDPCBLM) foi dividido aleatoriamente em pequenos subintervalos e para cada subintervalo o problema foi resolvido através

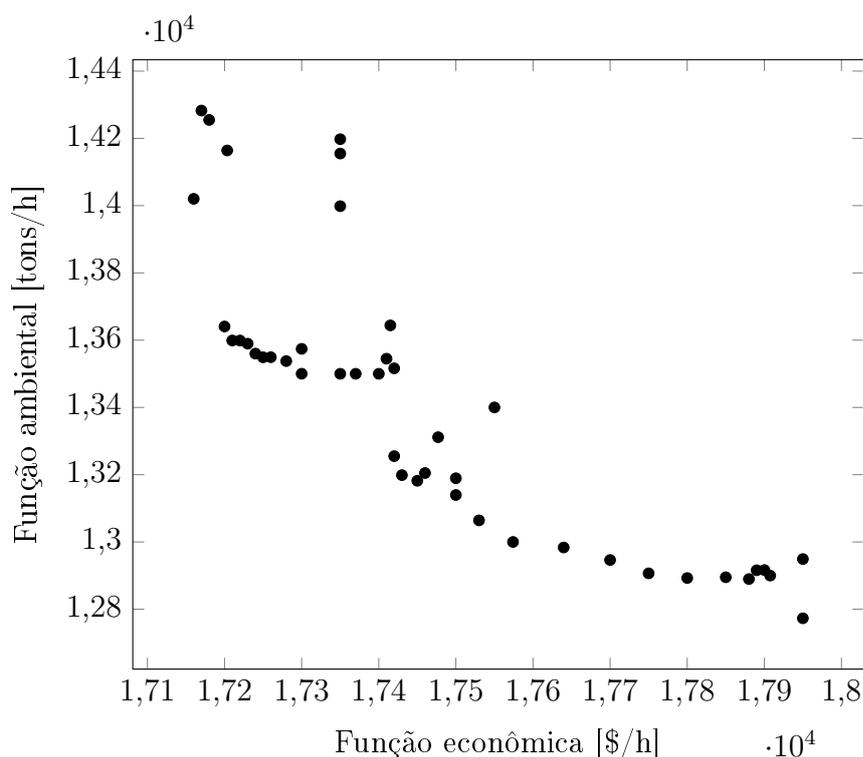


Figura 8.5: Caso 19 geradores: método  $\varepsilon$ -restrito canalizado e pacote Couenne

do pacote de otimização Couenne. Com isso, foi possível determinar soluções para o problema multiobjetivo e além disso, extrair os valores utilizados como ponto inicial, pelo pacote, para serem utilizados pelo método PDPCBLM, para cada subintervalo.

A Figura 8.5 apresenta a curva de soluções obtidas através do uso do pacote de otimização citado, relacionando o comprometimento entre a função econômica e a função ambiental para o problema teste de 19 geradores.

Com os valores dos pontos iniciais de cada subproblema e seus respectivos intervalos para a canalização da restrição ambiental, foi possível utilizar então o algoritmo do método PDPCBLM novamente. A Tabela A.18 apresenta os valores das regiões utilizadas para a função ambiental e os respectivos resultados obtidos para a função econômica e ambiental. Os pontos iniciais, parâmetros de barreira e parâmetros de aproximação utilizados para a convergência do método PDPCBLM para cada valor de  $\alpha$  empregado, são apresentados no Apêndice A deste trabalho. Com a inicialização no ponto adequado para o intervalo escolhido e o ajuste dos outros parâmetros, foi possível determinar as soluções do problema. Desta forma, a Figura 8.6, apresenta as soluções eficientes obtidas pelo método PDPCBLM do PMDEA-PV.

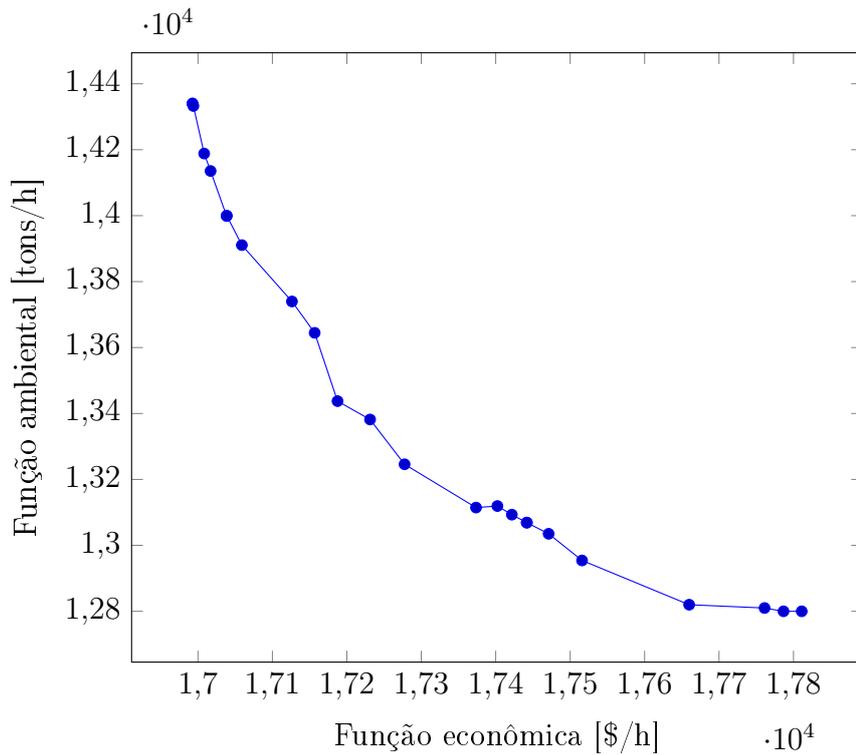


Figura 8.6: Caso 19 geradores: método  $\varepsilon$ -restrito canalizado e PDPCBLM - curva Pareto-ótima

Neste caso, a utilização do método da suavização hiperbólica também se mostrou eficiente, uma vez que os valores das funções econômica aproximada e econômica original, são bem próximos, como é possível observar na Tabela 8.9:

Tabela 8.9: Valor mínimo da função custo ( $F_e$ ), aproximada e original: 19 geradores

$F_e$ aproximada	$F_e$ original
16992,8247	16992,5643

Os pontos de mínimo e máximo para as funções custo e emissão (extremos da curva representada em 8.6) são destacados na Tabela 8.10. Lembrando que, devido a serem objetivos conflitantes, quando o custo tem valor mínimo, a emissão tem valor máximo e quando a emissão é mínima o custo é máximo.

Tabela 8.10: Valores máximos e mínimos de  $F_e$  e  $F_a$  para o caso de 19 geradores: método  $\varepsilon$ -restrito canalizado

Custo(\$/h)	Emissão(tons/h)
<b>16992,5640</b>	14339,9510
17811,0050	<b>12800,0000</b>

### 8.5.2 Considerações para o caso de 19 geradores

Considerando a resolução do PMDEA-PV para o teste de 19 geradores através do método  $\varepsilon$ -restrito canalizado, pode ser estabelecida uma comparação entre as duas estratégias utilizadas: pacote de otimização Couenne ou método PDPCBLM definido em 6.2.

Em relação às soluções obtidas para determinação da curva de soluções eficientes ou Pareto-ótima, é possível notar que com o uso do algoritmo PDPCBLM, os valores que relacionam a função econômica com a função ambiental, ou seja, os pontos obtidos como soluções eficientes do problema, determinam valores econômicos e ambientais relativamente menores. Com isso, a curva construída a partir do método implementado, é mais eficiente.

Na Figura 8.7 são apresentadas as soluções obtidas pelo pacote de otimização Couenne e as soluções obtidas pelo método PDPCBLM, iniciado com o ponto fornecido pelo Couenne, para o PMDEA-PV.

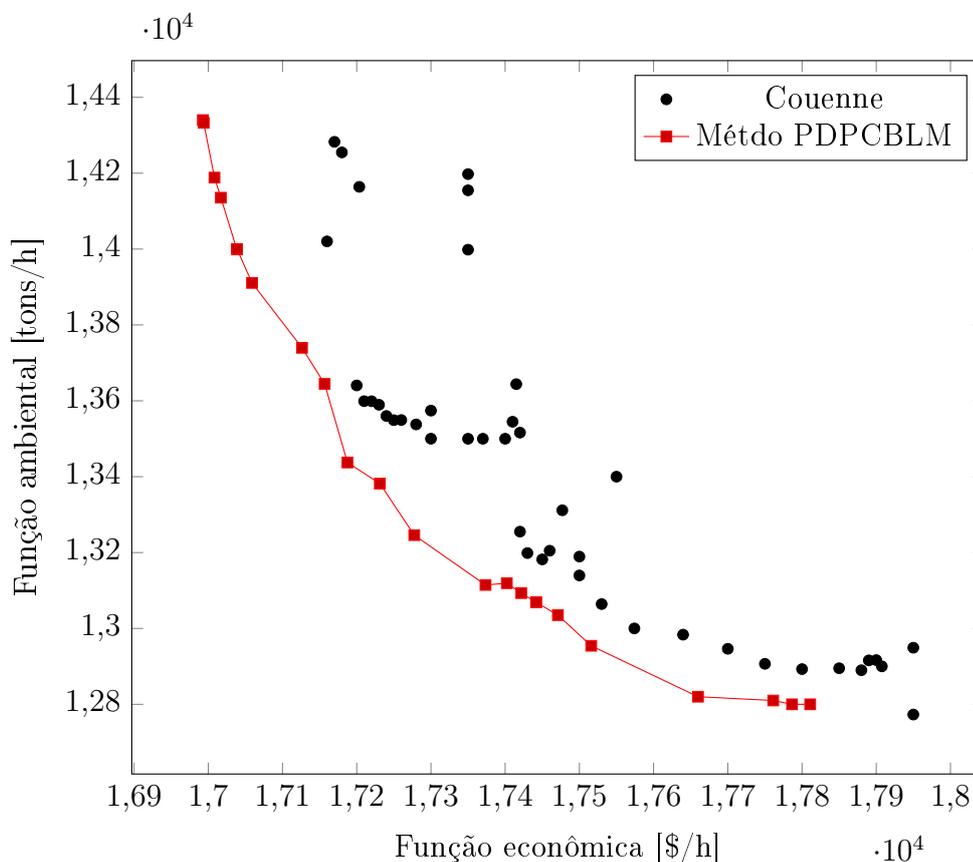


Figura 8.7: Caso 19 geradores: método  $\varepsilon$ -restrito canalizado - Comparação entre o método PDPCBLM e o Couenne

Quanto ao artigo de Balamurugan et al. (2014), de onde foram retirados os dados utilizados para este teste, o problema multiobjetivo de minimização de custos e de emissão, sem a consideração das perdas, foi resolvido através da técnica de evolução diferencial. O autor apresenta uma tabela (Tabela 8.11), com as melhores soluções para a função econômica e para a função ambiental, obtidas através da aplicação do seu método.

Tabela 8.11: Valores máximos e mínimos de  $F_e$  e  $F_a$  para o caso de 19 geradores de Balamurugan et al. (2014)

Custo(\$/h)	Emissão(tons/h)
19145	17471

Se comparados os resultados obtidos pelo autor e o do presente trabalho, em que o método PDPCBLM foi utilizado, os valores encontrados neste caso se mostram mais eficientes, pois a função econômica tem valor mínimo de 16992,5640 (\$/h) e ambiental de 12800,000 (\$/h).

Neste trabalho foi desenvolvido um método híbrido, envolvendo o método primal-dual de pontos interiores, com procedimento previsor-corretor, e de pontos exteriores, baseado na função barreira logarítmica modificada, com a estratégia da suavização hiperbólica, acoplados aos métodos de resolução de problemas multiobjetivo: soma ponderada e  $\varepsilon$ -restrito canalizado.

Após a implementação do algoritmo do método PDPCBLM, associado ao método da soma ponderada e/ou ao método  $\varepsilon$ -restrito canalizado, o mesmo foi aplicado a quatro casos de PMDEA-PV, de 3, 6, 10 e 19 geradores, possibilitando a determinação de um conjunto de soluções, das quais foram eliminadas as não eficientes, de modo que uma curva Pareto-ótima fosse esboçada para cada caso investigado.

O procedimento híbrido envolvendo o método da soma ponderada e do  $\varepsilon$ -restrito canalizado, quando aplicado para o caso de 3 geradores, mostrou que o primeiro método foi ineficiente para a resolução do problema, concordando com o que encontra-se divulgado na literatura. Em relação ao segundo método, aplicado para este mesmo caso, foi possível a obtenção da curva Pareto-ótima.

Aos casos de 6, 10 e 19 geradores, foi considerado somente o método  $\varepsilon$ -restrito canalizado e a curva de soluções eficientes de Pareto também foi obtida. Em todos os testes, objetivou-se obter uma curva de soluções eficientes, que para os problemas mono-objetivos resolvidos pelo método PDPCBLM, minimizou a função de custos dos combustíveis em-

pregados na geração termoelétrica e/ou a quantidade de emissão de poluentes, os quais, quando considera-se o problema multiobjetivo relacionam-se a dois objetivos conflitantes, que não podem ser minimizados simultaneamente.

Destaca-se neste trabalho a inserção dos pontos de carregamento de válvula à função despacho econômico do PMDEA-PV, que tornou o problema, anteriormente com função objetivo quadrática e convexa, em um problema não linear, não convexo e não-diferenciável em pontos discretos do seu domínio, os pontos de carregamento de válvula, presentes nos termos modulares da função despacho econômico. Assim, a estratégia da suavização hiperbólica utilizada possibilitou a suavização dos termos modulares dessa função nos pontos de carregamento de válvula e permitiu que uma curva de soluções eficientes fosse obtida em cada caso explorado por um método clássico de otimização, neste caso, o método PDPCBLM. Além disso, os valores obtidos para a função despacho econômico suavizada, quando comparados com os valores da função despacho econômico original, são relativamente próximos um do outro (ver Tabelas 8.4, 8.5 e 8.9). O parâmetro relativo à função aproximante de suavização hiperbólica foi ajustado de tal forma a melhor depurar os valores entre a função de despacho econômico, com inserção de pontos de carregamento de válvula, original e aproximada, como foi visto nas tabelas citadas.

Uma nova proposta de estratégia de resolução de problemas multiobjetivo foi apresentada, denominada de estratégia  $\varepsilon$ -restrito canalizado, a qual mostrou-se viável à resolução do PMDEA-PV, que é um problemas com função objetivo não-convexa (a função despacho econômico com a inserção de pontos de carregamento de válvula).

Em continuidade a este trabalho, destacam-se como propostas futuras: investigar a possibilidade de uma estratégia para obtenção de pontos iniciais utilizados no método PDPCBLM; estudar e implementar novas técnicas de resolução de problemas multiobjetivo, como a de programação por metas ou a de programação por compromissos apresentadas em Jones & Tamiz (2010), a fim de aprimorar os resultados obtidos pela estratégia da soma ponderada; incluir a representação da transmissão e resolver o PMDEA-PV, através do método híbrido proposto, para casos com dimensão maior aos solucionados neste trabalho, iniciando com o de 40 unidades geradoras, encontrado na literatura em Basu (2011).

---

## BIBLIOGRAFIA

- Abido, M. A. (2003). Environmental/economic power dispatch using multiobjective evolutionary algorithms. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 18.
- Abido, M. A. (2006). Multiobjective evolutionary algorithms for electric power dispatch problem. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 10.
- Adler, I., Resende, M., Veiga, G., & Karmarkar, N. (1989). An implementation of karmarkar's algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, 44(1-3), 297–335.
- Alsumait, J. S., SYKULSKI, J. K., & AL-OTHMAN, A. K. (2009). A hybrid ga-ps-sqp method to solve power system valve-point economic dispatch problems.
- Aneel (2005). *Atlas de energia elétrica do Brasil*. Agência nacional de energia elétrica, 2 edition.
- Aoki, K. & Satoh, T. (1984). New algorithms for classic economic load dispatch. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-103(6), 1423–1431.
- Arantes, M. B., Oliveira, G. T. S., & Saramago, S. F. P. (2006). Evolução diferencial aplicada à solução de alguns problemas de engenharia de produção. *FAMAT em revista*.
- Arul, R., Ravi, D. G., & Velusami, D. S. (2011). Non-convex economic dispatch with heuristic load patterns using harmony search algorithm. *International Journal of Computer Applications*, 16(1), 26–33. Published by Foundation of Computer Science.

- Avila, M. A. & Pfeilsticker, P. C. (2014). Problema de otimização multiobjetivo. <http://www.cpdee.ufmg.br/~lusoba/disciplinas/ele037/t5.pdf>. Acessado em: 08 de janeiro de 2015.
- Bakhtiari, S. & Tits, A. L. (2003). A simple primal-dual feasible interior-point method for nonlinear programming with monotone descent. *Computational optimization and applications*, 25, 17–38.
- Balamurugan, K., Muralisachithndam, R., & Krishnan, S. R. (2014). Differential evolution based solution for combined economic and emission power dispatch with valve loading effect. *International Journal on Electrical Engineering and Informatics*, 6(1).
- Balbo, A. R., Souza, M. A. S., Baptista, E. C., & Nepomuceno, L. (2012). Predictor-corrector primal-dual interior point method for solving economic dispatch problems: A postoptimization analysis. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, 1–26.
- Baptista, E. C. (2001). *Método da função lagrangiana aumentada barreira logarítmica para solução do problema de fluxo de potência ótimo*. PhD thesis, Escola de engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- Baptista, E. C., Belati, E. A., Sousa, V. A., & Costa, G. R. M. (2006). Primal-dual logarithmic barrier and augmented lagrangian function to the loss minimization in power systems. *Electric Power Components and Systems*.
- Barnes, E. R. (1985). A variation on karmarkar's algorithm for solving linear programming problems. *Mathematical Programming*, 36(2), 174–182.
- Basu, M. (2011). Economic environmental dispatch using multi-objective differential evolution. *Applied Soft Computing*, 11(2), 2845 – 2853.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M. (1979). *Nonlinear Programming – Theory and Algorithms*. New York: John Wiley & Sons.
- Benasla, L., Belmadani, A., & Rahli, M. (2014). Spiral optimization algorithm for solving combined economic and emission dispatch. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 62(0), 163–174.

- Bhagwan Das, D. & Patvardhan, C. (1998). A new approach for security constrained economic emission dispatch in power systems. In *TENCON '98. 1998 IEEE Region 10 International Conference on Global Connectivity in Energy, Computer, Communication and Control*, volume 2 (pp. 470–473 vol.2).
- Bhattacharya, A. & Chattopadhyay, P. (2010). Hybrid differential evolution with biogeography-based optimization for solution of economic load dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, 25(4), 1955–1964.
- Boor, C. d. (2001). A practical guide to splines. series: Applied mathematical sciences. *Springer*.
- Brasil (2014). *Balanço energético nacional*. Empresa de Pesquisa Energética, Ministério de Minas e Energia.
- Breitfeld, M. G. & Shanno, D. F. (1996). Computational experience with penalty-barrier methods for nonlinear programming. *Annals of Operations Research*, 62(1), 439–463.
- Carpentier, J. L. (1962). Contribution to the economic dispatch. *Bulletin de la Société Française des Electriciens*, 3(8), 431–447. In French.
- Carroll, C. W. & Fiacco, A. V. (1961). The created response surface technique for optimizing nonlinear restrained systems. *Operations Research*, 9(2), 169–185.
- Chen, C. & Mangasarian, O. (1996). A class of smoothing functions for nonlinear and mixed complementarity problems. *Computational Optimization and Applications*, 5(2), 97–138.
- Chen, X. (2012). Smoothing methods for nonsmooth, nonconvex minimization. *Mathematical Programming*, 134(1), 71–99.
- Chowdhury, B. & Rahman, S. (1990). A review of recent advances in economic dispatch. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 5(4), 1248–1259.
- Coelho, L. S. & Mariani, V. C. (2006). Otimização de despacho econômico com ponto de válvula usando estratégia evolutiva e método quase-newton. *Learning and Nonlinear Models - Revista da Sociedade Brasileira de Redes Neurais (SBRN)*, 4(1), 1–12.

- Coelho, L. S. & Mariani, V. C. (2008). Particle swarm approach based on quantum mechanics and harmonic oscillator potential well for economic load dispatch with valve-point effects. *Energy Conversion and Management*, 49(11), 3080–3085. Special Issue 3rd International Conference on Thermal Engineering: Theory and Applications.
- Coello, C. (2003). Guest editorial: special issue on evolutionary multiobjective optimization. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 7(2), 97–99.
- Conn, A. R., Gould, N., & Toint, P. L. (1997). A globally convergent lagrangian barrier algorithm for optimization with general inequality constraints and simple bounds. *Mathematics of computation*, 66(217).
- Das, I. & Dennis, J. (1997). A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for pareto set generation in multicriteria optimization problems. *Structural optimization*, 14(1), 63–69.
- Davidon, W. C. (1959). Variable metric method for minimization. *Research and development- Atomic energy commission*.
- Deb, K. (2004). Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. *John-Wiley*.
- Decker, G. L. & Brooks, A. D. (1958). Valve point loading of turbines. *Power Apparatus and Systems, Part III. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 77(3), 481–484.
- Dhillon, J. S., Parti, S. C., & Kothari, D. P. (1993). Stochastic economic emission load dispatch. *Electric Power Systems Research*, 26.
- Dhillon, J. S., Parti, S. C., & Kothari, D. P. (1994). Multiobjective optimal thermal power dispatch. *Electrical Power & Energy Systems*, 16.
- Dikin, I. I. (1967). Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. *Doklady Akademiai Nauk*, 8, 747–748.
- El-Hawary, M. E., El-Hawary, F., & Mbamalu, G. A. N. (1992). Nox emission performance models in electric power systems. *Proceedings of the 1992 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, 2.

- El-Keib, A., Ma, H., & Hart, J. (1994). Environmentally constrained economic dispatch using the lagrangian relaxation method. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 9(4), 1723–1729.
- Eletrobras (2014). Sistema Furnas de geração e transmissão, Ministério de Minas e Energia. <http://www.furnas.com.br>.
- Fang, S. C. & Puthenpura, S. (1993). *Linear optimization and extensions: theory and algorithms*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Fiacco, A. V. & McCormick, G. P. (1968). *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Fletcher, R. (1985). *Practical methods of optimization*, volume 2. John Wiley & Sons.
- Frazier, M. (1999). *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*. Springer.
- Frisch, K. R. (1955). *The logarithmic potential method of convex programming*. Technical report, University Institute of Economics, Oslo, Norway.
- GAMS, T. G. A. M. S. (2014). Gams solvers/couenne 0.4. <http://www.gams.com>.
- Gent, M. R. & Lamont, J. W. (1971). Minimum-emission dispatch. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-90(6), 2650–2660.
- Gjengedal, T., Johansen, S., & Hansen, O. (1992a). A qualitative approach to economic-environmental dispatch - treatment os multiple pollutants. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 7.
- Gjengedal, T., Johansen, S., & Hansen, O. (1992b). A qualitative approach to economic-environmental dispatch - treatment os multiple pollutants. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 7.
- Gonzaga, C. C. (1990). Polynomial affine algorithms for linear programming. *Mathematical Programming*, 49(1-3), 7–21.
- Granville, S. (1994). Optimal reactive dispatch through interior point methods. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 9(1), 136–146.

- Grübler, A. (2013). Energy transitions, in encyclopedia of earth c. j. [http://www.eoearth.org/article/Energy\\_transitions](http://www.eoearth.org/article/Energy_transitions). Acessado em: 29 de outubro de 2014.
- Griva, I. (2004). Numerical experiments with an interior-exterior point method for nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, 29(2), 173–195.
- Griva, I., Nash, S. G., & Sofer, A. (2009). *Linear and Nonlinear Optimization*. SIAM.
- Griva, I. & Polyak, R. A. (2006). Primal-dual nonlinear rescaling method with dynamic scaling parameter update. *Mathematical Programming*, 106(2), 237–259.
- Griva, I. & Polyak, R. A. (2008). Q-superlinear convergence of an exterior-point method for constrained optimization. *Journal of Global Optimization*, 40, 679–695.
- Griva, I. & Polyak, R. A. (2010). Primal-dual methods for nonlinear constrained optimization. *John Wiley & Sons, Inc.*, 40.
- Haimes, Y. Y. (1971). On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, SMC-1(3), 296–297.
- Happ, H. (1977). Optimal power dispatch - a comprehensive survey. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, 96(3), 841–854.
- Hemamalini, S. & Simon, S. P. (2010). Dynamic economic dispatch with valve-point effect using Maclaurin series based lagrangian method. *International Journal of Computer Applications*, 1(17), 60–67. Published By Foundation of Computer Science.
- Hestenes, M. R. (1969). Multiplier and gradient methods. *Journal of optimization theory and applications*, 4(5).
- Hu, Y.-L. & Wee, W. (1994). A hierarchical system for economic dispatch with environmental constraints. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 9(2), 1076–1082.
- Huneault, M. & Galiana, F. (1991). A survey of the optimal power flow literature. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 6(2), 762–770.
- Jannuzzi, G. M. & Swisher, J. N. P. (1997). *Planejamento integrado de recursos energéticos*. Campinas: Autores associados.

- Jones, D. F. & Tamiz, M. (2010). Practical goal programming. *Springer*.
- Jubril, A., Komolafe, O., & Alawode, K. (2013). Solving multi-objective economic dispatch problem via semidefinite programming. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 28(3), 2056–2064.
- Karmarkar, N. (1984). *A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming*. Proceedings of the Sixteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing.
- Khamsawang, S. & Jiriwibhakorn, S. (2010). DSPSO–TSA for economic dispatch problem with nonsmooth and noncontinuous cost functions. *Energy Conversion and Management*, 51(2), 365–375.
- Kim, J. O., Shin, D.-J., Park, J.-N., & Singh, C. (2002). Atavistic genetic algorithm for economic dispatch with valve point effect. *Electric Power Systems Research*, 62(3), 201 – 207.
- Kojima, M., Megiddo, N., & Mizuno, S. (1993). A primal-dual infeasible-interior-point algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, 61(1-3), 263–280.
- Kojima, M., Mizuno, S., & Yoshise, A. (1989). A primal-dual interior point algorithm for linear programming. In *Progress in Mathematical Programming* (pp. 29–47).
- Lee, K., Ortiz, J. L., Mohtadi, M. A., & Park, Y. (1988). Optimal operation of large-scale power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 3(2), 413–420.
- Lin, C., Chen, S., & Huang, C. (1992). A direct newton-raphson economic dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, 7(3), 1149–1154.
- Lin, W.-M., Cheng, F.-S., & Tsay, M.-T. (2002). An improved tabu search for economic dispatch with multiple minima. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 17(1), 108–112.
- Luenberger, D. G. (1984). *Linear and nonlinear programming*. Addison-wesley, 2 edition.
- Lustig, R. E., Marsten, R. E., & Shanno, D. F. (1995). On implementing mehrotra’s predictor-corrector interior point method for linear programming. *SIAM Journal on optimization*, 2.

- Mattick, C., Williams, E., & Allenby, B. (2009). Energy and civilization: A history of energy production and consumption in a global cultural, technological and economic context. In *Sustainable Systems and Technology, 2009. ISSST '09. IEEE International Symposium on* (pp. 1–6).
- Megiddo, N. & Shub, M. (1989). Boundary behavior of interior point algorithms in linear programming. *Mathematics of Operations Research*, 14(1), 97–146.
- Mehrotra, S. (1992). On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, 2(4), 575–601.
- Messac, A., Puemi-Sukam, C., & Melachrinoudis, E. (2000). Aggregate objective functions and pareto frontiers: Required relationships and practical implications. *Optimization and Engineering*, 1(2), 171–188.
- Miettinen, K. (1999). *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Boston: Kluwer.
- Miller, R. H. (1987). *Operação de Sistemas de Potência*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill.
- Monteiro, Renato, D. & Adler, I. (1989). Interior path following primal-dual algorithms. part i: Linear programming. *Mathematical Programming*, 44(1-3), 27–41.
- Monteiro, R. D. C., Adler, I., & Resende, M. C. (1990). A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension. *Mathematics of Operations Research*, 15(2).
- Monticelli, A. J. (1983). *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. São Paulo: Edgard Blücher.
- Murray, W. (1971). Analytical expressions for the eigenvalues and eigenvectors of the hessian matrices of barrier and penalty functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 7(3), 189–196.
- Muslu, M. (2004). Economic dispatch with environmental considerations: tradeoff curves and emission reduction rates. *Electric Power Systems Research*, 71(2), 153 – 158.
- Nanda, J., Hari, L., & Kothari, M. (1994). Economic emission load dispatch with line flow constraints using a classical technique. *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-*, 141(1), 1–10.

- Nanda, J., Kothari, D., & Lingamurthy, K. (1988). Economic-emission load dispatch through goal programming techniques. *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, 3(1), 26–32.
- Nocedal, J. & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization*. New York: Springer.
- Park, J.-B., Lee, K.-S., Shin, J.-R., & Lee, K. Y. (2005). A particle swarm optimization for economic dispatch with nonsmooth cost functions. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(1), 34–42.
- Pereira, A. A. (2007). O método da função lagrangiana barreira modificada/penalidade. Master's thesis, Escola de engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- Pinheiro, R. B. N. (2012). *Um método predictor-corretor primal-dual de pontos interiores barreira logarítmica modificada, com estratégias de global e de ajuste cúbico, para problemas de programação não-linear e não-conveça*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, SP.
- Pinheiro, R. B. N., Balbo, A. R., Baptista, E. C., & Nepomuceno, L. (2015). Interior-exterior point method with global convergence strategy for solving the optimal reactive power flow problem. Aceito para publicação na revista *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*.
- Polyak, R. & Teboulle, M. (1997). Nonlinear rescaling and proximal-like methods in convex optimization. *Mathematical Programming*, 76(2), 265–284.
- Polyak, R. A. (1992). Modified barrier functions. *Mathematical Programming*, 54.
- Polyak, R. A. (2002). Nonlinear rescaling vs. smoothing technique in convex optimization. *Mathematical Programming*, 92(2), 197–235.
- Powell, M. J. D. (1969). A method for nonlinear constraints in minimization problems. *Fletcher Optimization*.
- Ranaranatha, R. (1994). Emission constrained economic dispatch. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 9.

- Ravi, G., Chakrabarti, R., & Choudhuri, S. (2006). Nonconvex economic dispatch with heuristic load patterns using improved fast evolutionary program. *Electric Power Components and Systems*, 34(1), 37–45.
- Renegar, J. (1988). A polynomial-time algorithm, based on newton’s method, for linear programming. *Mathematical Programming*, 40(1-3), 59–93.
- Rivlin, T. (1981). An introduction to the approximation of functions. *Dover Publications*.
- Rodrigues, N. M. (2007). Um algoritmo cultural para problemas de despacho de energia elétrica. Master’s thesis, Universidade Estadual de Maringá (UEM).
- Ruggiero, M. A. G. & Lopes, V. L. R. (1996). *Cálculo numérico - aspectos teóricos e computacionais*. Pearson, 2 edition.
- Samed, M. M. A. (2004). *Um algoritmo genético híbrido co-evolutivo para resolver problemas de despacho*. PhD thesis, Departamento de Engenharia Química - Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PN.
- Sampaio, P. R. (2011). Teoria, métodos e aplicações de otimização multiobjetivo. Master’s thesis, Universidade de São Paulo.
- Selvakumar, A. I. & Thanushkodi, K. (2009). Optimization using civilized swarm: Solution to economic dispatch with multiple minima. *Electric Power Systems Research*, 79(1), 8–16.
- Senthil, K. & Manikandan, K. (2010). Economic thermal power dispatch with emission constraint and valve point effect loading using improved tabu search algorithm. *International Journal of Computer Applications*, 3(9).
- Shanno, D. F. & Vanderbei, R. J. (2000). Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: ordenings and higher-order methods. *Mathematical Programming*.
- Shi, L. & Xu, G. (2001). Self-adaptive evolutionary programming and its application to multi-objective optimal operation of power systems. *Electric Power Systems Research*, 57.
- Silva, D. N. (2014). *Método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores e exteriores com estratégias de correção de inércia e suavização hiperbólica aplicado ao problema de*

- despacho econômico com ponto de válvula e representação da transmissão*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru.
- Silva, J. A. B. (2007). Despacho econômico e ambiental nebuloso em sistemas de energia elétrica. Master's thesis, Universidade de Campinas (UNICAMP).
- Sinha, N., Chakrabarti, R., & Chattopadhyay, R. (2003). Evolutionary programming techniques for economic load dispatch. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 7(1), 83–94.
- Sonmez, Y. (2011). Multiobjective environmental/economic dispatch solution with penalty factor using artificial bee colony algorithm. *Scientific Research and Essays*, 6.
- Sousa, V. A. (2006). *Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo Via Método da Função Lagrangiana Barreira Modificada*. PhD thesis, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.
- Sousa, V. A., Baptista, E. C., & Costa, G. R. M. (2012). Optimal reactive power flow via the modified barrier lagrangian function approach. *Electric Power Systems Research*, 84(1), 159–164.
- Souza, M. F. (2010). *Suavização hiperbólica aplicada à otimização de geometria molecular*. PhD thesis, COPPE- Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Stanzani, A. L. (2012). *Método predictor-corrector primal-dual de pontos interiores em problemas multiobjetivo de despacho econômico e ambiental*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru.
- Stanzani, A. L., Balbo, A. R., Baptista, E. C., & Nepomuceno, L. (2014). Solving the multiobjective environmental/economic dispatch problem using weighted sum and  $\varepsilon$ -constraint strategies and a predictor-corrector primal-dual interior point method. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*.
- Steinberg, M. & Smith, T. (1943). *Economy Loading of Power Plants and Electric Systems*. J. Wiley & sons, Incorporated.

- Steinberg, M. J. & Smith, T. H. (1934). The theory of incremental rates and their practical application to load division – part i. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 53(3), 432–445.
- Sullivan, R. L. & Hackett, D. F. (1973). Air quality control using a minimum pollution-dispatching algorithm. *Environmental Science & Technology*, 7.
- Talaq, J., El-Hawary, F., & El-hawary, M. (1994). Minimum emissions power flow. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 9(1), 429–435.
- Torres, G. L. (1998). *Nonlinear Optimal Power Flow by Interior and Non-Interior Point Methods*. PhD thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.
- Vaidya, P. (1990). An algorithm for linear programming which requires  $o(((m + n)n^2 + (m + n)^{1.5}n)l)$  arithmetic operations. *Mathematical Programming*, 47(1-3), 175–201.
- Vanderbei, R. J., Meketon, M. S., & Freedman, B. A. (1986). A modification of karmarkar’s linear programming algorithm. *Algorithmica*, 1(1-4), 395–407.
- Vassiliadis, V. S. & Brooks, S. A. (1998). Applications of the modified barrier method in large-scale quadratic programming problems. *Computer and chemical engineering*.
- Vishwakarma, K. K., Dubey, H. M., Pandit, M., & Panigrahi, B. K. (2012). Simulated annealing approach for solving economic load dispatch problems with valve point loading effects. *International Journal of Engineering, Science and Technology*, 4(4), 60–72.
- Walters, D. & Sheble, G. (1993a). Genetic algorithm solution of economic dispatch with valve point loading. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 8(3), 1325–1332.
- Walters, D. C. & Sheble, G. B. (1993b). Genetic algorithm solution of economic dispatch with valve point loading. *IEEE Transactions on Power Systems*, 8(3), 1325–1332.
- Wächter, A. & Biegler, L. T. (2006). On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 106(1), 25–57.
- Wikipedia (2015). Fenômeno de runge. [http://www.wikipedia.org/wiki/Fenómeno\\_de\\_Runge](http://www.wikipedia.org/wiki/Fenómeno_de_Runge). Acessado em: 28 de janeiro de 2015.

- Wong, K. P., Fan, B., Chang, C. S., & Liew, A. C. (1995). Multiobjective generation dispatch using bi-criterion global optimisation. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 10.
- Wood, A. & Wollenberg, B. (1984). *Power generation, operation, and control*. Wiley.
- Wright, M. H. (1994). Some properties of the hessian of the logarithmic barrier function. *Mathematical Programming*, 67.
- Wright, M. H. (2004). The interior-point revolution in optimization: History, recent developments, and lasting consequences. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 42(1), 39–56.
- Wu, Y.-C., Debs, A., & Marsten, R. (1994). A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 9(2), 876–883.
- Yan, X. & Quintana, V. H. (1997). *An efficient predictor-corrector interior point algorithm for security-constrained economic dispatch*. Technical report, Universidade Waterloo.
- Yang, X.-S., Hosseini, S. S. S., & Gandomi, A. H. (2012). Firefly algorithm for solving non-convex economic dispatch problems with valve loading effect. *Applied Soft Computing*, 12(3), 1180–1186.
- Yokoyama, R., Bae, S., Morita, T., & Sasaki, H. (1988). Multiobjective optimal generation dispatch based on probability security criteria. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 3(1), 317–324.
- Zadeh, L. (1963). Optimality and non-scalar-valued performance criteria. *IEEE transactions on automatic control*, (pp. 59–60).
- Zhang, A., Zhang, J., Shang, J., & Qin, J. (2009). Security and economic dispatch of power. *Power Systems, IEEE Transactions on*.
- Zitzler, E., Thiele, L., Laumanns, M., Fonseca, C., & da Fonseca, V. (2003). Performance assessment of multiobjective optimizers: an analysis and review. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 7(2), 117–132.



## APÊNDICE A

### DADOS E RESULTADOS NUMÉRICOS

Este apêndice apresenta os dados dos sistemas elétricos utilizados e os resultados numéricos obtidos para o PMDEA-PV em cada um dos casos-teste, com sistema de 3, 6, 10 e 19 geradores. As variáveis  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  representam os valores dos coeficientes da função despacho econômico,  $e_i$  e  $f_i$  são os valores utilizados para os pontos de carregamento de válvula e  $P_i^{min}$  e  $P_i^{max}$  são os valores dos limites operacionais do sistema. Já as variáveis  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$ , são os valores dos coeficientes da função emissão. O despacho econômico é calculado em unidade monetária (dólar por hora) e representado por  $\$/h$ . Já o despacho ambiental é calculado em quantidade de emissão, para o caso de 3 e 6 geradores  $Kg/h$ , para os casos de 10 e de 19 geradores,  $tons/h$ .

#### A.1 Caso 3 geradores

Tabela A.1: Dados 3 geradores

Unidade geradora $i$	Função econômica (\$/h)						Função ambiental (Kg/h)			
	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$e_i$	$f_i$	$P_i^{min}$	$P_i^{max}$	$A_i$	$B_i$	$C_i$
1	0,001562	7,92	561	300	0,0315	100	600	0,0126	-1,355	22,983
2	0,00482	7,97	78	150	0,063	50	200	0,01375	-1,249	137,37
3	0,00194	7,85	310	200	0,042	100	400	0,00765	-0,805	363,704

Com demanda de 850,00MW.

### A.1.1 Soma ponderada

Tabela A.2: Valores de  $\alpha$ , ponto inicial ( $x_i$ ), parâmetro de barreira inicial ( $\mu$ ) e fator de aproximação ( $\eta$ )

$\alpha$	$(x_i)$	$\mu$ inicial	$\eta$ inicial
0	[340, 170, 400]	10	5
0, 10	[340, 170, 400]	10	5
0, 20	[340, 170, 400]	10	5
0, 30	[340, 170, 400]	10	5
0, 40	[340, 170, 400]	10	5
0, 50	[340, 170, 400]	10	5
0, 70	[450, 150, 350]	10	5
0, 75	[450, 150, 350]	10	5
0, 80	[450, 150, 350]	10	5
0, 88	[450, 150, 350]	10	5
0, 92	[450, 150, 350]	10	5
0, 99	[450, 150, 350]	10	5
1	[450, 150, 350]	10	5

### A.1.2 Método $\varepsilon$ -restrito

Tabela A.3: Região delimitada e soluções eficientes: caso 3 geradores

Região $[F_a^{\min}, F_a^{\max}]$	$F_e$ (\$/h)	$F_a$ (Kg/h)
[2165, 2175]	8606, 823445	2173, 40
[2170, 2175]	8601, 503015	2173, 50
[2170, 2175]	8590, 360224	2173, 80
[2170, 2175]	8584, 434473	2174, 00
[2170, 2175]	8579, 106211	2174, 20
[2170, 2180]	8576, 602829	2174, 30
[2170, 2180]	8574, 185804	2174, 40
[2170, 2180]	8571, 843960	2174, 50

## APÊNDICE A. DADOS E RESULTADOS NUMÉRICOS

---

[2175, 2180]	8567, 899075	2175, 50
[2185, 2195]	8543, 833191	2191, 00
[2190, 2195]	8535, 965529	2192, 00
[2190, 2195]	8528, 014488	2193, 00
[2190, 2195]	8519, 991629	2194, 00
[2190, 2200]	8513, 252644	2195, 00
[2190, 2200]	8503, 770419	2196, 00
[2190, 2200]	8495, 589417	2197, 00
[2190, 2200]	8487, 371871	2198, 00
[2190, 2210]	8479, 124171	2199, 00
[2190, 2210]	8471, 809422	2200, 00
[2190, 2210]	8454, 256867	2202, 00
[2190, 2210]	8437, 609440	2204, 00
[2200, 2210]	8430, 005074	2204, 99
[2200, 2210]	8429, 244420	2205, 00
[2200, 2210]	8419, 341448	2206, 85
[2230, 2250]	8407, 028057	2244, 00
[2240, 2250]	8404, 297515	2244, 99
[2240, 2250]	8394, 764264	2246, 00
[2240, 2250]	8388, 613357	2247, 00
[2240, 2250]	8382, 452335	2248, 00
[2240, 2250]	8373, 226032	2249, 99
[2245, 2260]	8360, 835670	2251, 50
[2245, 2260]	8351, 559165	2253, 00
[2250, 2260]	8341, 832976	2254, 99
[2250, 2260]	8329, 925473	2256, 50
[2250, 2260]	8317, 589108	2258, 50
[2250, 2260]	8310, 183507	2259, 99
[2250, 2265]	8296, 079685	2262, 00
[2255, 2265]	8283, 841913	2264, 00
[2255, 2265]	8278, 300373	2264, 99
[2255, 2270]	8265, 527114	2267, 00

[2255, 2270]	8253, 241339	2269, 00
[2260, 2270]	8247, 350523	2269, 99
[2260, 2275]	8240, 702811	2271, 00
[2265, 2275]	8235, 960497	2272, 00
[2265, 2275]	8235, 019735	2273, 00
[2265, 2275]	8234, 753226	2274, 00
[2265, 2275]	8234, 522477	2275, 00
[2270, 2280]	8234, 384753	2275, 72
[2270, 2280]	8234, 193431	2275, 76
[2275, 2280]	8234, 174540	2275, 86

Tabela A.5: Região delimitada, ponto inicial ( $x_i$ ), parâmetro de barreira inicial ( $\mu$ ) e fator de aproximação ( $\eta$ ): caso 3 geradores

Região [ $F_a^{\min}$ , $F_a^{\max}$ ]	( $x_i$ )	$\mu$ inicial	$\eta$ inicial
[2165, 2175]	[290; 200; 350]	80	4
[2170, 2175]	[290; 200; 350]	80	4
[2170, 2180]	[290; 200; 350]	80	4
[2170, 2180]	[290; 200; 350]	80	4
[2170, 2180]	[290; 200; 350]	80	4
[2175, 2180]	[290; 165; 395]	80	4
[2185, 2195]	[290; 200; 350]	80	4
[2190, 2195]	[290; 170; 395]	80	4
[2190, 2195]	[290; 160; 395]	80	4
[2190, 2195]	[290; 165; 395]	80	4
[2190, 2200]	[280; 200; 350]	80	4
[2190, 2200]	[290; 200; 350]	80	4
[2190, 2200]	[290; 190; 350]	80	4
[2190, 2200]	[290; 200; 340]	80	4
[2190, 2210]	[290; 200; 330]	80	4
[2190, 2210]	[290; 165; 395]	80	4
[2190, 2210]	[290; 170; 395]	80	4
[2190, 2210]	[290; 160; 395]	80	4

APÊNDICE A. DADOS E RESULTADOS NUMÉRICOS

---

[2200, 2210]	[290; 200; 350]	80	4
[2200, 2210]	[290; 210; 350]	80	4
[2200, 2210]	[295; 200; 350]	80	4
[2230, 2250]	[290; 150; 390]	80	4
[2240, 2250]	[290; 160; 390]	80	4
[2240, 2250]	[290; 150; 390]	80	4
[2240, 2250]	[290; 140; 390]	80	4
[2240, 2250]	[295; 150; 390]	80	4
[2240, 2250]	[295; 160; 390]	80	4
[2245, 2260]	[290; 150; 390]	80	4
[2245, 2260]	[290; 150; 395]	80	4
[2250, 2260]	[290; 155; 390]	80	4
[2250, 2260]	[295; 150; 390]	80	4
[2250, 2260]	[290; 150; 390]	80	4
[2250, 2260]	[300; 200; 325]	80	4
[2250, 2265]	[290; 165; 395]	80	4
[2255, 2265]	[290; 170; 395]	80	4
[2255, 2265]	[290; 170; 395]	80	4
[2255, 2270]	[290; 175; 395]	80	4
[2255, 2270]	[290; 170; 395]	80	4
[2260, 2270]	[295; 170; 395]	80	4
[2260, 2275]	[290; 180; 380]	80	4
[2265, 2275]	[290; 180; 380]	80	4
[2265, 2275]	[290; 175; 380]	80	4
[2265, 2275]	[295; 180; 380]	80	4
[2265, 2275]	[290; 185; 380]	80	4
[2270, 2280]	[290; 185; 380]	80	4
[2270, 2280]	[290; 180; 380]	80	4
[2275, 2280]	[290; 180; 380]	80	4

---

## A.2 Caso 6 geradores

Tabela A.7: Dados 6 geradores

Unidade geradora $i$	Função econômica ( $\$/h$ )						Função ambiental (Kg/h)					
	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$e_i$	$f_i$	$P_i^{min}$	$P_i^{max}$	$A_i$	$B_i$	$C_i$		
1	0,00375	2	0	120	0,073	50	200	0,00419	0,32767	13,85932		
2	0,0175	1,75	0	50	0,032	20	80	0,00419	0,32767	13,85932		
3	0,0625	1	0	30	0,051	15	50	0,00683	-0,54551	40,2669		
4	0,00834	3,25	0	25	0,026	10	35	0,00683	-0,54551	40,2669		
5	0,025	3	0	25	0,026	10	30	0,00461	-0,51116	42,89553		
6	0,025	3	0	30	0,048	12	40	0,00461	-0,51116	42,89553		

Com demanda de 283,4MW.

Tabela A.8: Região delimitada e soluções eficientes: caso 6 geradores

Região $[F_a^{\min}, F_a^{\max}]$	$F_e$ (\$/h)	$F_a$ (Kg/h)
[335, 345]	860, 3729240	341, 46
[335, 345]	860, 8402386	341, 36
[340, 345]	860, 8491757	341, 00
[335, 345]	861, 0866631	340, 00
[335, 340]	862, 2479021	335, 00
[325, 335]	863, 3200235	330, 00
[320, 330]	864, 4542652	325, 00
[315, 325]	865, 9769965	320, 00
[310, 325]	867, 9067040	315, 00
[310, 320]	869, 2890842	312, 00
[305, 315]	870, 3143494	310, 00
[300, 315]	871, 4238805	308, 00
[300, 310]	873, 2366804	305, 00
[295, 305]	875, 2434472	302, 00
[290, 305]	876, 7376939	300, 00
[290, 300]	876, 8159749	299, 90
[285, 300]	876, 8945982	299, 80
[285, 300]	877, 1326360	299, 50
[285, 300]	877, 5364038	299, 00
[285, 300]	878, 3711849	298, 00
[285, 300]	879, 2432948	297, 00
[285, 300]	880, 1542277	296, 00
[285, 295]	881, 1055427	295, 00
[280, 295]	886, 5327479	290, 00
[280, 290]	893, 4169724	285, 00
[275, 290]	904, 5933520	280, 00
[275, 285]	917, 7350066	278, 00
[270, 285]	938, 7320535	275, 00
[270, 275]	943, 7570708	274, 00

APÊNDICE A. DADOS E RESULTADOS NUMÉRICOS

---

[265, 275]	945, 6372250	272, 00
[265, 270]	947, 8042435	270, 00
[260, 270]	948, 8996207	269, 00
[255, 270]	950, 0017555	268, 00
[255, 270]	951, 1097589	267, 00
[255, 270]	952, 2227179	266, 00
[255, 270]	953, 3396350	265, 00
[255, 265]	954, 4594778	264, 00
[250, 265]	955, 5811628	263, 00
[250, 265]	956, 7035555	262, 00
[250, 265]	957, 8254876	261, 00
[250, 260]	958, 9456683	260, 00
[250, 260]	960, 0627932	259, 00
[250, 260]	961, 1755419	258, 00
[245, 260]	962, 2824740	257, 00
[245, 260]	963, 3821188	256, 00
[245, 255]	964, 4729604	255, 00
[245, 255]	965, 5534478	254, 00
[245, 255]	966, 6220145	253, 00
[240, 255]	967, 6785588	252, 00
[240, 255]	968, 7891558	251, 00
[240, 250]	969, 9910977	250, 00
[240, 250]	971, 2875048	249, 00
[240, 250]	972, 6820797	248, 00
[235, 250]	974, 1790218	247, 00
[235, 250]	977, 5003027	245, 00
[235, 245]	979, 3370896	244, 00
[235, 245]	981, 3015403	243, 00
[230, 245]	988, 0666081	240, 00
[230, 240]	993, 4547706	238, 00
[230, 240]	1003, 367935	235, 00
[225, 240]	1024, 419439	232, 00

APÊNDICE A. DADOS E RESULTADOS NUMÉRICOS

---

[225, 235]	1047, 550909	231, 00
[225, 235]	1059, 669200	230, 50
[225, 235]	1062, 133900	230, 40
[225, 235]	1064, 611600	230, 30
[220, 235]	1067, 102200	230, 20
[220, 235]	1069, 605200	230, 10

---

Tabela A.10: Região delimitada, ponto inicial ( $x_i$ ), parâmetro de barreira inicial ( $\mu$ ) e fator de aproximação ( $\eta$ ): caso 6 geradores

Região [ $F_a^{\min}, F_a^{\max}$ ]	( $x_i$ )	$\mu$ inicial	$\eta$ inicial
[335, 345]	[100; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5
[335, 345]	[100; 70; 20; 35; 30; 30]	100	5
[340, 345]	[135; 40; 25; 35; 28; 15]	100	5
[335, 345]	[135; 45; 25; 35; 28; 15]	100	5
[335, 340]	[135; 40; 25; 35; 28; 15]	100	5
[325, 335]	[135; 40; 25; 35; 28; 15]	100	5
[320, 330]	[135; 40; 25; 35; 28; 15]	100	5
[315, 325]	[135; 40; 25; 35; 28; 15]	100	5
[310, 325]	[135; 40; 25; 35; 28; 15]	100	5
[310, 320]	[135; 40; 25; 35; 28; 15]	100	5
[305, 315]	[135; 40; 25; 35; 28; 15]	100	5
[300, 315]	[135; 40; 25; 35; 28; 15]	100	5
[300, 310]	[135; 40; 25; 35; 28; 15]	100	5
[295, 305]	[135; 40; 25; 35; 28; 15]	100	5
[290, 305]	[135; 40; 25; 35; 28; 15]	100	5
[290, 300]	[175; 30; 45; 30; 25; 15]	100	5
[285, 300]	[170; 70; 45; 30; 25; 40]	100	5
[285, 300]	[175; 70; 45; 30; 25; 40]	100	5
[285, 300]	[175; 75; 45; 30; 25; 40]	100	5
[285, 300]	[175; 70; 40; 30; 25; 40]	100	5
[285, 300]	[170; 75; 45; 30; 25; 40]	100	5
[285, 295]	[175; 70; 45; 30; 25; 40]	100	5

APÊNDICE A. DADOS E RESULTADOS NUMÉRICOS

---

[280, 295]	[175; 70; 45; 30; 25; 40]	100	5
[280, 290]	[175; 70; 45; 30; 25; 40]	100	5
[275, 290]	[175; 70; 45; 30; 25; 40]	100	5
[275, 285]	[135; 20; 25; 38; 30; 35]	100	5
[270, 285]	[75; 60; 25; 35; 20; 25]	100	5
[270, 275]	[150; 60; 30; 15; 20; 25]	100	5
[265, 275]	[75; 60; 35; 25; 20; 25]	100	5
[265, 270]	[75; 60; 25; 35; 20; 25]	100	5
[260, 270]	[100; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5
[255, 270]	[100; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5
[255, 270]	[150; 60; 30; 15; 20; 25]	100	5
[255, 270]	[75; 60; 35; 25; 20; 25]	100	5
[255, 270]	[75; 65; 35; 25; 20; 25]	100	5
[255, 265]	[70; 60; 35; 25; 20; 25]	100	5
[250, 265]	[75; 60; 35; 25; 20; 25]	100	5
[250, 265]	[75; 65; 35; 25; 20; 25]	100	5
[250, 265]	[75; 60; 40; 25; 20; 25]	100	5
[250, 260]	[75; 60; 40; 25; 20; 25]	100	5
[250, 260]	[75; 60; 35; 25; 20; 25]	100	5
[250, 260]	[75; 65; 35; 25; 20; 25]	100	5
[245, 260]	[75; 60; 35; 25; 20; 25]	100	5
[245, 260]	[70; 60; 35; 25; 20; 25]	100	5
[245, 255]	[75; 60; 35; 25; 20; 25]	100	5
[245, 255]	[80; 60; 35; 25; 20; 25]	100	5
[245, 255]	[75; 60; 35; 25; 20; 25]	100	5
[240, 255]	[75; 60; 35; 25; 20; 25]	100	5
[240, 255]	[150; 60; 30; 15; 20; 25]	100	5
[240, 250]	[75; 60; 35; 25; 20; 25]	100	5
[240, 250]	[75; 65; 35; 25; 20; 25]	100	5
[240, 250]	[65; 60; 40; 25; 20; 25]	100	5
[235, 250]	[105; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5
[235, 250]	[100; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5

[235, 245]	[100; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5
[235, 245]	[100; 70; 20; 35; 30; 30]	100	5
[230, 245]	[100; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5
[230, 240]	[95; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5
[230, 240]	[100; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5
[225, 240]	[100; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5
[225, 235]	[100; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5
[225, 235]	[100; 75; 25; 35; 30; 30]	100	5
[225, 235]	[100; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5
[225, 235]	[100; 75; 20; 30; 30; 30]	100	5
[220, 235]	[100; 75; 20; 35; 30; 30]	100	5
[220, 235]	[100; 75; 25; 35; 30; 30]	100	5

---

### A.3 Caso 10 geradores

Tabela A.12: Dados 10 geradores

Unidade geradora $i$	Função econômica (\$/h)					Função ambiental (tons/h)				
	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$e_i$	$f_i$	$P_i^{min}$	$P_i^{max}$	$A_i$	$B_i$	$C_i$
1	0,12951	40,5407	1000,403	33	0,0174	10	55	0,04702	-3,9864	360,0012
2	0,10908	39,5904	950,606	25	0,0178	20	80	0,04652	-3,9524	350,0056
3	0,12511	36,5104	900,705	32	0,0162	47	120	0,04652	-3,9023	330,0056
4	0,12111	39,5104	800,705	30	0,0168	20	130	0,04652	-3,9023	330,0056
5	0,15247	38,5390	756,799	30	0,0148	50	160	0,00420	0,32770	13,85930
6	0,10587	46,1592	451,325	20	0,0163	70	240	0,00420	0,32770	13,85930
7	0,03546	38,3055	1243,531	20	0,0152	60	300	0,00680	-0,5455	40,26690
8	0,02803	40,3965	1049,998	30	0,0128	70	340	0,00680	-0,5455	40,26690
9	0,02111	36,3178	1658,569	60	0,0136	135	470	0,00460	-0,5112	42,89550
10	0,01799	38,2704	1356,659	40	0,0141	150	470	0,00460	-0,5112	42,89550

Com demanda de 2000,00MW.

Tabela A.13: Região delimitada e soluções eficientes: caso 10 geradores

Região [ $F_a^{\min}, F_a^{\max}$ ]	$F_e$ (\$/h)	$F_a$ (Kg/h)
[4000, 4050]	106185, 9119	4050
[3900, 4000]	106268, 6932	4000
[3900, 3950]	106424, 6366	3950
[3870, 3900]	106653, 3743	3900
[3800, 3850]	106956, 0407	3850
[3750, 3800]	107343, 7805	3800
[3700, 3750]	107837, 6086	3750
[3710, 3740]	107951, 5723	3740
[3650, 3700]	108468, 2918	3700
[3660, 3680]	108768, 8463	3680
[3600, 3650]	109284, 3794	3650
[3610, 3630]	109681, 0415	3630
[3610, 3620]	109908, 1189	3620
[3600, 3610]	110163, 3993	3610
[3550, 3600]	110453, 4788	3600
[3580, 3590]	110788, 0237	3590
[3570, 3580]	111182, 3081	3580
[3560, 3570]	111662, 5774	3570

Tabela A.15: Região delimitada, ponto inicial ( $x_i$ ), parâmetro de barreira inicial ( $\mu$ ) e fator de aproximação ( $\eta$ ): caso 10 geradores

Região [ $F_a^{\min}, F_a^{\max}$ ]	( $x_i$ )	$\mu$ inicial	$\eta$ inicial
[4000, 4050]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2, 0
[3900, 4000]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2, 0
[3900, 3950]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2, 0
[3870, 3900]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2, 0
[3800, 3850]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2, 0
[3750, 3800]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2, 0

## APÊNDICE A. DADOS E RESULTADOS NUMÉRICOS

---

[3700, 3750]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2,0
[3710, 3740]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2,0
[3650, 3700]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2,0
[3660, 3680]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2,0
[3600, 3650]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2,0
[3610, 3630]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2,0
[3610, 3620]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2,0
[3600, 3610]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2,0
[3550, 3600]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2,0
[3580, 3590]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2,0
[3570, 3580]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2,0
[3560, 3570]	[32, 5; 50; 83, 5; 75; 105; 155; 180; 205; 302, 5; 310]	10	2,0

---

### A.4 Caso 19 geradores

Tabela A.17: Dados 19 geradores

Unidade geradora $i$	Função econômica (\$/h)						Função ambiental (tons/h)					
	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$e_i$	$f_i$	$P_i^{min}$	$P_i^{max}$	$A_i$	$B_i$	$C_i$		
1	0,0097	6,8	119	90	0,72	100	300	0,018	-1,81	24,3		
2	0,0055	4	90	79	0,05	120	438	0,033	-2,5	27,023		
3	0,0055	4	45	0	0	100	250	0,033	-2,5	27,023		
4	0,0025	0,85	0	0	0	8	25	0,0136	-1,3	22,07		
5	0	5,28	0,891	0	0	50	63,75	0,018	-1,81	24,3		
6	0,008	3,5	110	0	0	150	300	0,033	-2,5	27,023		
7	0	5,439	21	0	0	50	63,75	0,0126	-1,36	23,04		
8	0,0075	6	88	50	0,52	100	500	0,036	-3	29,03		
9	0,0085	6	55	0	0	200	600	0,04	-3,2	27,05		
10	0,009	5,2	90	0	0	15	40	0,0136	-1,3	22,07		
11	0,0045	1,6	65	0	0	50	150	0,0139	-1,25	23,01		
12	0,0025	0,85	78	58	0,02	25	75	0,0121	-1,27	21,09		
13	0	2,55	49	0	0	50	63,75	0,018	-1,81	24,3		
14	0,0045	1,6	85	0	0	0	95	0,014	-1,2	23,06		
15	0,0065	4,7	80	92	0,75	20	220	0,036	-3	29		
16	0,0045	1,4	90	0	0	15	80	0,0139	-1,25	23,01		
17	0,0025	0,85	10	0	0	15	80	0,0136	-1,3	22,07		
18	0,0045	1,6	25	0	0	50	230	0,018	-1,81	24,3		
19	0,008	5,5	90	0	0	400	500	0,04	-3	27,01		

Com demanda de 2908,00MW.

Tabela A.18: Região delimitada e soluções eficientes: caso 19 geradores

Região $[F_a^{\min}, F_a^{\max}]$	$F_e$ (\$/h)	$F_a$ (Kg/h)
[14300, 14500]	16992, 56435	14339, 95099
[14300, 14500]	16992, 67510	14339, 99965
[14200, 14500]	16993, 82933	14332, 69518
[14150, 14300]	17008, 31319	14188, 40457
[14100, 14300]	17016, 92648	14135, 46117
[13900, 14300]	17038, 44849	13999, 01430
[14000, 14300]	17038, 64940	14000, 00001
[13850, 14200]	17058, 96118	13910, 69639
[13650, 13850]	17126, 28894	13739, 74328
[13600, 13750]	17156, 78565	13644, 60319
[13250, 13500]	17187, 50991	13437, 43053
[13245, 13400]	17231, 19180	13381, 77099
[13000, 13350]	17277, 51134	13245, 90042
[13000, 13400]	17373, 54271	13114, 57794
[13000, 13200]	17402, 26413	13119, 24309
[12900, 13100]	17421, 66840	13093, 13332
[13000, 13200]	17441, 74626	13068, 96356
[13000, 13200]	17441, 74626	13068, 96356
[12900, 13100]	17471, 08478	13035, 11619
[12900, 13100]	17515, 94864	12954, 24657
[17700, 17820]	17659, 84683	12820, 00000
[12790, 12810]	17761, 15253	12810, 00001
[12790, 12810]	17786, 55634	12800, 00000
[12790, 12810]	17811, 00598	12800, 00001

Tabela A.20: Região delimitada, ponto inicial ( $x_i$ ), parâmetro de barreira inicial ( $\mu$ ) e fator de aproximação ( $\eta$ ): caso 19 geradores

Região [ $F_a^{\min}, F_a^{\max}$ ]	( $x_i$ )	$\mu$ inicial	$\eta$ inicial
[14300, 14500]	[120; 308; 250; 25; 64; 282; 64; 166; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 213; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[14300, 14500]	[122; 308; 250; 25; 64; 282; 64; 166; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 213; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[14200, 14500]	[113; 308; 250; 25; 64; 269; 64; 184; 200; 40; 150; 80; 64; 95; 217; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[14150, 14300]	[131; 308; 250; 25; 64; 267; 64; 173; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 213; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[14100, 14300]	[144; 309; 250; 25; 64; 268; 64; 154; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 217; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[13900, 14300]	[152; 309; 250; 25; 64; 245; 64; 160; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 217; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[14000, 14300]	[152; 309; 250; 25; 64; 245; 64; 160; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 217; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[13850, 14200]	[161; 308; 250; 25; 64; 245; 64; 160; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 217; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[13650, 13850]	[187; 308; 250; 25; 64; 246; 64; 154; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 196; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[13600, 13750]	[187; 308; 250; 25; 64; 222; 64; 178; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 196; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[13250, 13500]	[183; 245; 243; 25; 63; 250; 63; 197; 211; 40; 150; 75; 63; 95; 217; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[13245, 13400]	[196; 245; 249; 25; 64; 263; 64; 197; 200; 40; 150; 75; 63; 95; 192; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[13000, 13350]	[218; 256; 235; 25; 64; 235; 64; 179; 224; 40; 150; 75; 64; 95; 196; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[13000, 13400]	[235; 246; 230; 25; 64; 212; 64; 197; 243; 40; 150; 75; 64; 95; 180; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[13000, 13200]	[257; 250; 240; 25; 63; 227; 64; 149; 223; 40; 150; 75; 64; 95; 196; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[12900, 13100]	[261; 246; 250; 25; 64; 240; 64; 148; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 196; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[13000, 13200]	[266; 239; 247; 25; 64; 233; 64; 149; 213; 40; 150; 75; 64; 95; 196; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3

[12900, 13100]	[248; 246; 227; 25; 64; 223; 64; 215; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 183; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[12900, 13100]	[261; 246; 229; 25; 64; 192; 64; 197; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 217; 80; 80; 230; 400]	10	1, 3
[17700, 17820]	[297; 227; 225; 25; 64; 224; 64; 167; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 196; 80; 80; 230; 400]	1000	1, 3
[12790, 12810]	[297; 227; 225; 25; 64; 224; 64; 167; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 196; 80; 80; 230; 400]	1000	1, 3
[12790, 12810]	[297; 227; 225; 25; 64; 224; 64; 167; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 196; 80; 80; 230; 400]	1000	1, 3
[12790, 12810]	[297; 227; 225; 25; 64; 224; 64; 167; 200; 40; 150; 75; 64; 95; 196; 80; 80; 230; 400]	1000	1, 3