



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de Bauru



**Michael Andrade Maedo**

# Simulação computacional por elementos finitos de múltiplas fissuras em sólidos usando técnica de fragmentação da malha

Bauru (SP)  
2015

**Michael Andrade Maedo**

# Simulação computacional por elementos finitos de múltiplas fissuras em sólidos usando técnica de fragmentação da malha

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: **Dr. Osvaldo Luís Manzoli**

Bauru (SP)  
2015

Maedo, Michael Andrade.

Simulação computacional por elementos finitos de múltiplas fissuras em sólidos usando técnica de fragmentação da malha / Michael Andrade Maedo, 2015  
78 f. : il.

Orientador: Osvaldo Luís Manzoli

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2015

1. Elementos finitos. 2. Elementos de elevada razão de aspecto. 3. Falha material. 4. Fissuras. 5. Fragmentação de malha. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE MICHAEL ANDRADE MAEDO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.**

Aos 13 dias do mês de julho do ano de 2015, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação, da Faculdade de Engenharia de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI do(a) Departamento de Engenharia Civil e Ambiental/ Faculdade de Engenharia de Bauru, Prof. Dr. MARCELO JAVIER SANCHEZ CASTILLA do(a) Civil Engineering/TEXAS A&M UNIVERSITY, Prof. Dr. LUÍS ANTÔNIO GUIMARÃES BITENCORT JÚNIOR do(a) Engenharia Civil/POLI-USP/Pós-doutorando, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de MICHAEL ANDRADE MAEDO, intitulado "SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL POR ELEMENTOS FINITOS DE MÚLTIPLAS FISSURAS EM SÓLIDOS USANDO TÉCNICA DE FRAGMENTAÇÃO DA MALHA". Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

  
Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI

  
Prof. Dr. MARCELO JAVIER SANCHEZ CASTILLA

  
Prof. Dr. LUÍS ANTÔNIO GUIMARÃES BITENCORT JÚNIOR

*À memória de  
Lecilda Pereira Andrade, amada avó.*

# Agradecimentos

---

Eu gostaria de agradecer primeiramente a minha esposa Ana Paula, pois sem o seu apoio eu provavelmente não teria embarcado nessa jornada. Ela não foi apenas a minha companheira de muitas noites de trabalho e estudo, como também foi ela quem resolveu a maioria dos meus problemas burocráticos. Agradeço a minha família, em especial a minha avó, pai, mãe e sogra pelo carinho, consideração e também pela infinita compreensão.

Agradeço ao meu orientador, mestre e mentor Osvaldo Manzoli pela dedicação, tempo e cuidado durante a realização deste trabalho. Ele tem sido não apenas um modelo de cientista como também de caráter. As suas aulas de Mecânica dos Meios Contínuos foram no mínimo inspiradoras e me instigaram a estudar com mais profundidade esta abrangente ciência.

Também sou grato ao Professor Marcelo Sánchez da Texas A&M University pela excelente acolhida durante o meu estágio de pesquisa no exterior. As nossas reuniões enriqueceram o meu conhecimento em Engenharia Geotécnica, ao mesmo tempo em que ampliaram meus horizontes científicos.

Não poderia deixar de agradecer ao meu amigo e professor Carlos Eduardo Javaroni pelas oportunidades oferecidas e paciência. Ele sempre esclareceu de prontidão todas as minhas dúvidas e nunca deixou de se importar.

Fico grato aos professores Leonardo Guimarães Nascimento e Roger Augusto Rodriguez pelo tempo dedicado em ensinar os fundamentos de problemas acoplados, bem como a manipular a ferramenta computacional CODE\_BRIGHT.

Esse trabalho também não seria realizado sem o suporte financeiro providenciado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), a qual forneceu subsídios para o desenvolvimento deste trabalho de mestrado por meio do processo nº 2013/01468-6. A FAPESP também contribuiu com este trabalho por meio do processo nº 2014/06906-4, o qual deferiu a bolsa de estágio de pesquisa no exterior (BEPE).

Meus agradecimentos ao meu amigo Eduardo Alexandre Rodrigues pelas sugestões, parceria e apoio durante a realização das simulações. Agradeço aos meus amigos da UNESP: Júlio César Fernandes, Lucas de Haro Silva, Pedro Rogério Cleto e Bruno Agostinho Hernandez pelo suporte e amizade. Em diversas situações eu fui no mínimo inconveniente. Agradeço também aos professores do departamento de Engenharia Mecânica e Civil, a todos os funcionários da pós-graduação da UNESP de Bauru, e a todos que contribuíram de alguma forma, direta ou indiretamente, para o desenvolvimento deste trabalho.

*“Os que se encantam com a prática sem a ciência  
são como os marinheiros que entram no navio sem  
timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu  
destino.”*

— Leonardo da Vinci

# Resumo

O estudo do processo de fissuração tem sido um tema de crescente interesse ao longo dos últimos anos. O comportamento de muitos materiais, tais como o concreto, alvenaria, rochas, solos e biomateriais, são regidos pelo efeitos decorrentes da fissuração. No contexto do Método dos Elementos Finitos, a formação e propagação de fissuras no interior dos elementos finitos podem ser descritas por meio de elementos finitos com descontinuidades incorporadas ou pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Contudo, ambos os métodos necessitam de algoritmos de construção da trajetória das fissuras. Estas técnicas são relativamente simples para representar poucas fissuras em análises bidimensionais, mas podem ser muito complexas e mesmo inviáveis para problemas tridimensionais. O presente trabalho desenvolve uma metodologia que consiste na fragmentação da malha de elementos finitos convencionais e introdução de elementos de interface entre os elementos regulares da malha original. Esses elementos de interface representam o processo de falha de materiais quase-frágeis, onde a interface é simulada utilizando elementos finitos de elevada razão de aspecto munidos de relações constitutivas consistentes com o regime de descontinuidade forte. A metodologia é bastante atrativa, pois permite a representação de múltiplas fissuras sem a necessidade de algoritmos de reconstrução adaptativa da malha ou técnicas de construção da trajetória da fissura. O estudo sobre a objetividade das soluções obtidas com a metodologia em desenvolvimento foi feito através da análise de diferentes casos, com diferentes malhas, variando-se o tamanho e orientação da malha. Os resultados obtidos indicaram que a técnica é capaz de representar o processo de fissuração, gerando respostas estruturais e padrões de fissuras similares aos experimentais. O uso de malhas não estruturadas são mais indicadas para obter-se independência com respeito à discretização por não apresentarem alinhamento que possam levar a propagação de fissuras em trajetórias que se desviam da correta.

**Palavras-chave:** Elementos finitos, elementos de elevada razão de aspecto, falha material, fissuras, fragmentação de malha.



# Abstract

The study of the crack process has been a subject of increasing interest over the past few years. The behavior of various materials such as concrete, masonry, rocks, soils and biomaterials, are governed by the effects arising from the formation of cracks. In the context of finite element methods the formation and propagation of cracks in the interior of the finite elements can be described via finite elements with embedded discontinuities or Generalized Finite Element Method (G-FEM). Both methods require techniques to track the crack path during the analysis. These techniques are relatively simple in representing few cracks in 2D analyses but can be very complex and even unsuitable for multiple cracks and for tridimensional problems. The present work aims to use the mesh fragmentation technique to insert special interface elements between regular elements of the mesh. These interface elements represent the failure process in quasi-brittle materials, where the interface is simulated using finite elements with a high aspect ratio. The constitutive model of the interface elements are compatible with the strong discontinuity regime. The methodology is very attractive, because it avoids the necessity of crack tracking schemes. A comprehensive study of the objectivity of the solutions obtained with the proposed methodology was done through the analysis of different cases, with different meshes, varying the size and orientation of the finite elements. The results indicated that the technique is able to adequately represent the process of cracking, generating structural responses and crack patterns similar to the experimental ones. The use of unstructured meshes are more appropriate since they do not present alignments that may induce crack propagation trajectories deviating from the correct ones.

**Keywords:** Finite elements, elements with high aspect ratio, material failure, cracks, mesh fragmentation.

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Teoria da falha baseada na mecânica do contínuo . . . . .	2
1.3	Aproximação de fissuras distribuídas . . . . .	3
1.4	Modelo de fissuras coesivas discretas . . . . .	3
1.5	Meio contínuo enriquecido . . . . .	4
1.6	Elementos com descontinuidades incorporadas . . . . .	4
1.7	Método dos elementos finitos generalizados . . . . .	5
1.8	Método de fragmentação da malha . . . . .	5
1.8.1	Elementos de interface contínuos de elevada razão de aspecto . . . . .	6
1.9	Objetivos . . . . .	6
1.10	Conteúdo dos capítulos desta dissertação . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Mecânica do Dano Contínuo</b>	<b>8</b>
2.1	Introdução . . . . .	8
2.2	Variável de dano unidimensional . . . . .	9
2.2.1	Tensão efetiva . . . . .	10
2.2.2	Princípio da equivalência de deformações . . . . .	11
2.2.3	Critério de degradação . . . . .	12
2.2.4	Lei de evolução da variável de dano . . . . .	12
2.2.5	Condição de carga e descarga . . . . .	14
2.2.6	Modelo constitutivo contínuo . . . . .	15
2.2.7	A energia de fratura . . . . .	16
2.3	Extensão para problemas 2D e 3D . . . . .	18
2.3.1	Algoritmo de integração implícito-explicito (IMPL-EX) . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Elemento Finito Sólido de Interface</b>	<b>22</b>
3.1	Introdução . . . . .	22
3.2	Elemento de interface triangular de 3 nós . . . . .	22
3.3	Elemento de interface tetraédrico de 4 nós . . . . .	24
3.4	Cinemática de descontinuidade forte . . . . .	26
3.5	Relação constitutiva discreta do elemento finito degradado . . . . .	28

<b>4</b>	<b>Técnica de Fragmentação da Malha</b>	<b>30</b>
4.1	Introdução . . . . .	30
4.2	Implementação computacional da técnica de fragmentação da malha . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Simulações Numéricas</b>	<b>34</b>
5.1	Introdução . . . . .	34
5.2	Estudos de casos 2D . . . . .	34
5.2.1	Viga de três pontos . . . . .	35
5.2.2	Viga de quatro pontos . . . . .	39
5.2.3	Placa entalhada com carga diagonal . . . . .	41
5.2.4	Placa com dois entalhes . . . . .	43
5.2.5	Ensaio de infiltração . . . . .	44
5.3	Estudos de casos 3D . . . . .	47
5.3.1	Viga de três pontos . . . . .	48
5.3.2	Placa com dois entalhes . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>51</b>
6.1	Conclusão . . . . .	51
6.2	Principais contribuições . . . . .	51
6.3	Trabalhos futuros . . . . .	52
	<b>Referências</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>Faturamento Hidráulico</b>	<b>60</b>
A.1	Introdução . . . . .	60
A.2	Formulação hidromecânica . . . . .	61
A.2.1	O meio poroso . . . . .	61
A.2.2	Porosidade, grau de saturação e capilaridade . . . . .	62
A.2.3	Permeabilidade . . . . .	63
A.2.4	Formulação hidráulica . . . . .	63
A.2.5	Formulação mecânica . . . . .	65
A.2.6	Modelo de placas paralelas . . . . .	66
A.2.7	Esquema hidromecânico acoplado . . . . .	67

## Capítulo 1

# Introdução

---

### 1.1 Motivação

O comportamento de diversos materiais, tais como o concreto, alvenaria, biomateriais, rochas e solos são regidos pelos efeitos provenientes da formação de fissuração, quando submetidos a carregamentos externos ou processos químicos.

O interesse pelos fenômenos que induzem a formação de fissuras, pela predição do padrão e extensão das mesmas, bem como seus efeitos sobre a resistência mecânica ou sobre a permeabilidade dos materiais, envolve diversas áreas da engenharia.

Na engenharia estrutural, o processo de fissuração no concreto define o comportamento não-linear do material. Como a resistência à tração do concreto não é muito significativa, na prática empregam-se peças de concreto armado, cujos esforços de tração são resistidos pela armadura de aço. Nesse caso, fissuras expressivas podem reduzir a proteção das armaduras, tornando-as suscetíveis à corrosão e a ação de agentes químicos.

Na Engenharia de Petróleo, por outro lado, a fissuração deve ser induzida, injetando fluidos a altas pressões para aumentar a permeabilidade do meio, permitindo a extração de petróleo ou gás (LI et al., 2012; ADACHI et al., 2007; ZOBACK, 2007). Tal processo é denominado fraturamento hidráulico e geralmente é empregado na produção de gás e óleo. O adequado entendimento do processo de fraturamento, bem como o controle da fissuração decorrente da pressão hidráulica, é fundamental para concepção de projetos seguros e econômicos nesse campo. Um incorreto processo de fraturamento pode acarretar em redução da produtividade e, em algumas situações, causar danos ambientais significativos e incontroláveis, proporcionado pela infiltração dos gases ou fluidos tóxicos em reservatórios naturais de águas subterrâneas.

A fissuração é um fenômeno complexo em materiais como solos. Estruturas que são construídas sobre solos finos, tais como fundações e taludes, podem ser afetadas pelas alterações mecânicas causadas pela fissuração (YESILLER et al., 2000). O fissuramento em solos pode ocorrer devido a vários processos, incluindo ressecamento, congelamento e descongelamento, penetração de raízes de plantas dentre outros. As fissuras provenientes da secagem do solo afetam significativamente o seu desempenho, criando uma zona de fraqueza e reduzindo a resistência e estabilidade (ATIQUÉ; SANCHEZ, 2011). Muitos trabalhos estão sendo desenvolvidos voltados ao estudo do processo de fissuração em solos. Esse é um campo de estudo de crescente interesse na área de mecânica dos solos.

Assim, o estudo do processo de fissuração tem sido um tema de crescente interesse nos últimos

anos. A simulação do processo de fissuramento é regida por modelos constitutivos baseados na teoria do dano contínuo, mecânica da fratura e nas teorias da elasticidade e plasticidade. Apesar de serem capazes de prever adequadamente as respostas mecânicas, nem sempre os modelos são simples e muitas vezes envolvem a implementação de algoritmos complexos.

Atualmente o Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma das técnicas computacionais mais consolidadas para simular o comportamento de materiais em diversos campos da engenharia, em diversas situações e tipos de aplicações. Contudo, apesar dos enormes esforços conduzidos por pesquisadores ao longo dos últimos 20 anos, a representação da descontinuidade em materiais inicialmente contínuos (de um ponto de vista macroscópico) ainda representa um desafio. Diversos métodos e técnicas foram desenvolvidos, cada um com suas limitações, vantagens e desvantagens. A seguir, a teoria da falha baseada na mecânica do contínuo é abordada e, posteriormente, os modelos e técnicas mais utilizadas para representar a descontinuidade em materiais quase-frágeis são apresentadas resumidamente.

## 1.2 Teoria da falha baseada na mecânica do contínuo

O processo de falha de muitos materiais ocorre em decorrência da formação de bandas de localização de deformação de largura muito pequena. Segundo Manzoli (1998), a formação de tais bandas de localização podem ser interpretadas como a concentração de micro-defeitos na estrutura. Ainda de acordo com o autor, em materiais granulares, tais como areias e alguns tipos de solos, as deformações se concentram em bandas de cisalhamento (*shear bands*), as quais possuem largura que pode variar entre 10 a 20 vezes o tamanho do grão.

Problemas envolvendo localização de deformações são altamente complexos. Nem mesmo as ferramentas fornecidas pela teoria clássica da mecânica do contínuo são capazes de descrever o fenômeno em sua totalidade. Isto ocorre porque a localização de deformação está relacionada à inelasticidade material, a qual está associada a perda de elipticidade na equação diferencial que governa o problema (OTTOSEN; RUNESSON, 1991). Dessa forma, para resolver problemas de localização de deformação é necessário adotar alguns conceitos adicionais à teoria da mecânica de meios contínuos para reproduzir adequadamente os fenômenos inelásticos.

Um dos trabalhos pioneiros nessa área foi o de Rashid (1968), o qual admite o elemento fraturado quando a tensão máxima de tração do elemento excede um valor crítico. Após superar o limite crítico, a equação constitutiva é modificada de modo que as tensões normais na descontinuidade desapareçam. O principal inconveniente desse modelo é a sua sensibilidade com relação ao tamanho da malha de elementos finitos. Além disso, estruturas com entalhes ou previamente fissuradas exibem um campo de tensões não limitadas. Dessa forma, mesmo que o problema com relação ao tamanho dos elementos da malha possa ser contornado, após o início da fratura cria-se uma região instável equivalente à condição de entalhe. Logo, o modelo não é capaz nem de reproduzir o efeito escala experimental e nem de dissipar a energia corretamente.

Os estudos de Rashid foram fundamentais para o aperfeiçoamento da teoria da falha baseada na mecânica de meios contínuos. O seu modelo também foi a base para desenvolvimento da técnica chamada aproximação de fissuras distribuídas.

### 1.3 Aproximação de fissuras distribuídas

As aproximações de fissuras distribuídas (*smeread crack approach*) estão entre as técnicas mais empregadas atualmente, principalmente devido à sua simplicidade e facilidade de introdução em códigos computacionais existentes (ROTS et al., 1985; ROTS, 1988, 1991; CERVENKA, 1994).

Essas aproximações mantêm os conceitos de mecânica de meios contínuos e utilizam os conceitos de tensão e deformação para representar o comportamento constitutivo do material fissurado. Em geral, os modelos constitutivos do tipo contínuo (relacionando tensão e deformação) são baseados na teoria da plasticidade ou de dano, com redução das tensões com o aumento das deformações (*strain softening*) (CERVERA; OLIVER; MANZOLI, 1996; OLIVER et al., 1990). As leis de abrandamento desses modelos são relacionados à propriedade de fraturamento do material quase-frágil, por meio da energia de fratura (OLIVER, 1989).

Esses modelos são capazes de representar bem os efeitos de múltiplas fissuras pouco espaçadas espalhadas em grandes dimensões. Entretanto, não são capazes de representar adequadamente a formação de macro fissuras localizadas, que geralmente induzem o material ao colapso estrutural.

O tratamento de problemas através da mecânica do contínuo clássica, e com aproximação dos campos cinemáticos por funções de formas convencionais do MEF, não é capaz de representar os elevados e ilimitados gradientes de deformação envolvidos, levando à soluções extremamente dependentes da malha. Uma vez que a teoria de contínuo clássica não limita a dimensão da zona de localização de deformações, essa dimensão e sua posição são estabelecidas pelas funções aproximadoras contínuas associadas ao tamanho e orientação dos elementos finitos.

### 1.4 Modelo de fissuras coesivas discretas

Já os chamados modelos de fissuras coesivas tratam o processo de fissuração, desde a localização de deformação até a formação de descontinuidade, por meio de relações constitutivas discretas entre tensões e deslocamentos relativos entre as faces da descontinuidade, abandonando-se o conceito de deformações na zona de localização, que passa a ser representada por uma superfície de descontinuidade (HILLERBORG; MODÉER; PETERSSON, 1976). Neste contexto, a relação constitutiva discreta corresponde a uma lei de abrandamento entre a tensão na superfície da descontinuidade e a abertura da fissura. Esta lei é uma propriedade do material e está intimamente relacionada à energia de fratura.

Os primeiros estudos relacionados às leis tensão-separação podem ser encontrados nos trabalhos precursores de Dugdale (1960) e Barenblatt (1962). Essas primeiras aplicações do modelo envolviam estruturas de concreto fraturadas em modo I e pressupunham a existência de uma macro fissura inicial. Posteriormente, os estudos conduzidos por Hillerborg, Modéer e Petersson (1976) permitiram capturar o início da fratura sem a necessidade de pressupor uma macro fissura inicial. Além disso, uma extensão do modelo discreto foi desenvolvida por Cervenka (1994) a partir dos trabalhos de Carol e Prat (1990).

Segundo Manzoli (1998), um modo de aproximar numericamente os modelos discretos no âmbito do método dos elementos finitos consiste em considerar as faces da descontinuidade como contornos adicionais do meio contínuo. Dessa forma, a superfície de descontinuidade é representada pelas faces de elementos finitos regulares adjacentes e o modelo constitutivo é introduzido para estabelecer a interação entre essas faces (INGRAFFEA; SAOUMA, 1985). Nesse

contexto, a malha de elementos finitos deve ser construída com base na posição prevista da fissura.

Como em geral a posição das fissuras é desconhecida previamente à análise, fazem-se necessários métodos de reconstrução progressiva da malha de maneira a adaptar os contornos dos elementos à descontinuidade que se desenvolve ao longo do processo de carregamento (BITTENCOURT et al., 1996). As técnicas de reconstrução adaptativa da malha são bastante complexas e exigem esforços computacionais elevados, principalmente para problemas tridimensionais, podendo ser completamente inviáveis para a representação de múltiplas fissuras.

## 1.5 Meio contínuo enriquecido

Para minimizar a falta de objetividade das soluções com relação à malha de elementos finitos, foram aplicadas teorias de contínuos especiais (enriquecidos), que contêm um comprimento característico intrínseco, o qual limita a largura da região de localização de deformações e conseqüentemente dos gradientes de deformações envolvidos (PIJAUDIER-CABOT; BAZANT, 1987; BORST, 1991; BORST; MÜHLHAUS, 1992; PAMIN, 1994).

Dessa forma, a aproximação dos campos cinemáticos pode ser feita por meio das funções de forma contínuas convencionais do MEF, mas a malha deve ser composta por elementos finitos menores do que esse comprimento intrínseco para capturar adequadamente os elevados (mas limitados) gradientes de deformações.

Apesar da elegância e boa fundamentação dessas técnicas, em problemas práticos o comprimento intrínseco costuma ser bem menor do que a dimensão do problema, fazendo com que sejam necessárias malhas extremamente refinadas, envolvendo um esforço computacional elevadíssimo.

## 1.6 Elementos com descontinuidades incorporadas

Os elementos com descontinuidades incorporadas (*elements with embedded discontinuities*), como o próprio nome diz, são capazes de representar os efeitos de descontinuidade em seu interior (ALFAIATE, 2003; GARIKIPATI; HUGHES, 1998; JIRÁSEK, 2000; OLIVER; HUESPE, 2004a). Para tal, o elemento finito é enriquecido por funções que tornam possíveis capturar uma linha de descontinuidade fraca que atravessa o elemento.

Seguindo a classificação estabelecida por Jirásek e Belytschko (2002), existem três principais grupos para aproximações envolvendo descontinuidades embebidas: a Simétrica Estaticamente Consistente (S-E), a Simétrica Cinematicamente Consistente (S-C) e a Não-Simétrica Estática e Cinematicamente Consistente (NS-EC). A S-C garante a continuidade da tensão em ambos os lados da descontinuidade, mas não é capaz de reproduzir adequadamente a cinemática associada a fissura, enquanto a S-C é capaz de descrever a cinemática da descontinuidade, mas não assegura continuidade nas tensões. Já a NS-EC garante continuidade nas tensões ao mesmo tempo que reproduz a cinemática da descontinuidade no interior do elemento.

A formulação NS-EC consiste basicamente em decompor o campo de deslocamentos em uma parte contínua e outra descontínua associada à abertura e deslizamento da fissura. A mesma decomposição deve ser realizada nos deslocamentos nodais do elemento. Logo, as descontinuidades podem ser representadas por graus de liberdades adicionais que correspondem às componentes do salto de deslocamento. A contribuição do salto de deslocamento é então subtraída do vetor de deslocamentos nodais, de forma que apenas a parte contínua dos deslocamentos nodais é

utilizada para o cálculo das deformações (JIRÁSEK; BELYTSCHKO, 2002). A relação constitutiva discreta entre tensão na superfície de descontinuidade e o salto no campo de deslocamento descreve como as tensões são transmitidas pela fissura no interior do elemento. Nota-se que as tensões no elemento e na descontinuidade devem satisfazer as condições de equilíbrio interno no elemento.

Uma das grandes vantagens dessa técnica é que a fissura pode se desenvolver de maneira arbitrária sobre uma malha fixa, previamente definida, sem a necessidade de saber a posição da fissura. Entretanto, o método exige um algoritmo de construção progressiva da trajetória da fissura durante o processamento numérico, baseado na direção e extensão da propagação definidos por algum critério em função das tensões ou deformações.

Esses algoritmos podem ser relativamente simples para problemas bidimensionais, nos quais se constroem linhas de descontinuidades que atravessam os elementos, contudo podem ser muito complexos para problemas tridimensionais ou que envolvam múltiplas fissuras.

## 1.7 Método dos elementos finitos generalizados

Esta técnica introduz funções descontínuas nas aproximações cinemáticas contínuas, sendo portanto capazes de representar superfícies de descontinuidade em posições arbitrárias com relação à geometria da malha. Além disso, quando certos aspectos da solução do campo são conhecidos, e.g. os deslocamentos próximos da ponta da fissura, as funções enriquecidas baseadas nesses campos podem ser adicionadas ao espaço de aproximação (BELYTSCHKO; GRACIE; VENTURA, 2009).

A técnica foi originalmente concebida com base na Mecânica da Fratura Elástica Linear, com o enriquecimento construído admitindo tanto o comportamento do conjunto de nós que estão na vizinhança da ponta da fissura, quanto a influência dos nós que pertencem aos elementos cortados pela descontinuidade (DOLBOW; BELYTSCHKO, 1999). Este método foi posteriormente denominado Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e estudos recentes mostram que ele é capaz de representar adequadamente fissuras 3D e até mesmo fissuras que se interceptam (SUKUMAR; BELYTSCHKO, 2000). Um das vantagens da técnica é que não há incompatibilidade entre os elementos, e as deformações em ambos os lados da fissura estão totalmente desacopladas (JIRÁSEK; BELYTSCHKO, 2002).

Neste método mantém-se a simetria da matriz de rigidez, a qual é perdida na formulação NS-EC. Contudo, assim como os elementos com descontinuidade incorporada, também necessitam de algoritmos de construção da trajetória da descontinuidade (BELYTSCHKO et al., 2001; MARIANI; PEREGO, 2003; MOSLER; MESCHKE, 2003; WELLS; SLUYS, 2001). Além disso, em razão do aumento dos graus de liberdade, há um aumento no custo computacional.

## 1.8 Método de fragmentação da malha

Outra possibilidade de representar fissuras sem a necessidade de técnicas de reconstrução da malha é a de introduzir elementos de espessura nula (*zero thickness interface element*) entre os elementos adjacentes da malha original, fragmentando a malha (CABALLERO; LÓPEZ; CAROL, 2006; CAMACHO; ORTIZ, 1996; LOPEZ, 1999; PANDOLFI; ORTIZ, 2002). Esses elementos de interface têm seu comportamento descrito por modelos constitutivos coesivos, entre tensões e deslocamentos relativos. Esta técnica é denominada método de fragmentação da malha. Desse



modo, o processo de falha é representado apenas pelos elementos de interface.

Nesse caso, a fissura se propaga contornando os elementos da malha fixa. A principal vantagem desse método é que ele não necessita de algoritmos de reconstrução da malha ou de construção da trajetória da fissura, o que o torna bastante atrativo para simular a formação de múltiplas fissuras em sólidos. Entretanto, algumas dúvidas sobre a objetividade da resposta com respeito à discretização adotada ainda existem, posto que as descontinuidades devem se propagar contornando os elementos finitos.

Na técnica de fragmentação da malha, somente os elementos de interfaces que atingem o critério de falha durante a análise se ativam, formando naturalmente as trajetórias de fissuras.

A fragmentação da malha pode ser feita antes da análise. Porém, fragmentar toda a malha pode aumentar o problema de maneira exacerbada. Desse modo, em muitas situações procede-se fragmentando apenas a região de estudo, onde poderá ocorrer a formação e propagação das fissuras. A fragmentação também pode ser feita durante a análise, somente nas regiões onde será ativado o critério de falha (PANDOLFI; ORTIZ, 2002). Esse caso exige algoritmo para introdução de elementos de interface durante a análise.

Ambas as possibilidades requerem grande esforço computacional. Na primeira a fragmentação introduz novos nós e elementos na malha original, aumentando bastante os graus de liberdade do problema, principalmente em problemas 3D. A segunda possibilidade requer técnicas complexas para mudança da topologia da malha e introdução de elementos de interface ao longo da análise.

Como as fissuras devem contornar as faces dos elementos sólidos, os métodos de fragmentação podem gerar soluções muito dependentes da malha utilizada.

### **1.8.1 Elementos de interface contínuos de elevada razão de aspecto**

Baseando-se na Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) (OLIVER; CERVERA; MANZOLI, 1999; OLIVER et al., 2004), Manzoli et al. (2012) mostraram recentemente que o comportamento de interfaces pode ser representados por meio de elementos finitos sólidos de elevada razão de aspecto (elevada razão entre a maior e a menor dimensão do elemento), munidos de relações constitutivas do contínuo convencionais (tensão–deformação), baseadas nas teorias da plasticidade ou do dano.

Assim, ao invés de elementos de interface de espessura nula, utilizam-se elementos sólidos convencionais extremamente delgados. Esse modo de simular interfaces não exige o emprego de técnicas especiais de integração. Somente a lei de abrandamento de tensões deve levar em consideração a espessura dos elementos de interface, garantindo a correta dissipação, associada à energia de fratura.

## **1.9 Objetivos**

No presente trabalho explora-se a técnica de fragmentação da malha usando elementos finitos de elevada razão de aspecto. Apesar dos resultados promissores, análises mais acuradas precisam ser feitas para se ter uma completa avaliação da metodologia. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é realizar um estudo detalhado e exaustivo sobre a metodologia desenvolvida, realizando análises de diferentes casos, com diferentes malhas, variando-se o tamanho e orientação dos elementos finitos.

Assim, é efetuada uma análise aprofundada sobre a objetividade das soluções com relação à

malha de elementos finitos empregada, estabelecendo procedimentos para evitar ou minimizar a dependência da resposta com a malha, quando for o caso.

Também estudam-se as consequências de se obterem trajetórias de fissuras irregulares e não suaves, que contornam os elementos finitos da malha. Aspectos relacionados à energia dissipada na formação da fissura também são abordados.

O presente trabalho também objetiva estudar o acoplamento hidromecânico, por meio de elaboração de testes básicos (*benchmarks*) e análises para a validação da metodologia.

## 1.10 Conteúdo dos capítulos desta dissertação

O presente trabalho está estruturado em 6 capítulos e 1 apêndice, os quais serão brevemente descritos a seguir. Recorda-se que o capítulo 1 discorre resumidamente sobre algumas técnicas computacionais empregadas para representar descontinuidade em sólidos.

O capítulo 2 aborda a teoria da mecânica do dano contínuo, a qual descreve o comportamento mecânico do material no regime inelástico, i.e., pós limite elástico dado pela resistência à tração do material. Inicialmente, o capítulo é dedicado ao estudo unidimensional e, após a introdução de alguns conceitos, expande-se o estudo para casos multidimensionais. Além disso, o modelo de dano à tração utilizado ao longo deste trabalho é apresentado e o esquema de integração IMPL-EX é resumidamente explicado.

O capítulo 3 desenvolve toda a formulação para o elemento finito sólido de interface, mostrando que, conforme a razão de aspecto aumenta, as deformações do elemento também aumentam, aproximando a cinemática de descontinuidade forte. Neste contexto, também é mostrado que a relação constitutiva contínua tende a uma relação constitutiva discreta, conforme a relação de aspecto aumenta.

No capítulo 4, o código desenvolvido para inserir elementos de interface é explicado, comentando sobre as entradas necessárias, os resultados emitidos e as instruções executadas. Além disso, este capítulo também aborda os programas computacionais utilizados para o desenvolvimento deste trabalho.

O capítulo 5 apresenta exemplos numéricos para validação da metodologia empregada. Nesse capítulo, diferentes estruturas, com diferentes tamanhos de malhas são analisadas, contrastando os resultados obtidos com os experimentais. Além disso, este capítulo também estuda o tempo de processamento e a influência do tamanho do elemento de interface na análise.

O capítulo 6 expõe as considerações finais do estudo, evidenciando as conclusões obtidas e sugestões para trabalho futuros.

O apêndice A apresenta a formulação hidromecânica necessária para a realização das simulações envolvendo fraturamento hidráulico. Desse modo, o apêndice discorre sobre as equações hidráulicas e mecânicas empregadas e a forma de acoplamento considerada. Essa formulação é imprescindível para implementação da técnica proposta em sistemas hidromecânicos acoplados.

## Capítulo 2

# Mecânica do Dano Contínuo

---

### 2.1 Introdução

Segundo Souza Neto, Peric e Owen (2011), o dano interno pode ser definido como a presença e evolução de fissuras e vazios em nível microscópico que podem eventualmente levar a estrutura à ruptura, i.e. a completa perda da capacidade resistente. Ainda de acordo com o autor, em muitos problemas de engenharia, particularmente aqueles onde a estrutura está sujeita a condições severas de serviço, a vida útil do material é uma informação crucial que deve ser considerada durante a concepção estrutural. Em diversas situações práticas, o processo de degradação do material é tão importante que ignorá-lo pode levar a consequências catastróficas que vão além de perdas econômicas.

O processo de degradação altera as propriedades elásticas do material, diminuindo sua área efetiva resistente e aumentando conseqüentemente a degradação da rigidez. Esta perda de área efetiva ocorre geralmente devido ao crescimento das fissuras e vazios. Apesar de dano e plasticidade serem fenômenos complementares, materiais frágeis podem fraturar antes mesmo de desenvolverem mecanismos plásticos (OLLER, 2001).

Lemaitre e Lippmann (1996) afirmam que o dano também pode se manifestar em forma de fadiga, onde o material é submetido a ciclos de carregamentos. Outro caso de degradação ocorre quando o metal é carregado a altas temperaturas, por exemplo, acima de  $1/3$  da sua temperatura de derretimento, acarretando em deformações plásticas viscosas (fluência). Assim, com base nas observações anteriores, pode-se afirmar que a forma de manifestação do dano depende não apenas da natureza do material, mas também do tipo de carregamento e da temperatura (LEMAITRE; LIPPMANN, 1996).

De acordo com Souza Neto, Peric e Owen (2011), tradicionalmente, a predição da vida útil do material é decorrente de observações empíricas e experiência adquirida ao longo dos anos. Em alguns casos, o estudo da falha pode ser realizado através de ensaios laboratoriais sistemáticos que reproduzem as condições de serviço. Contudo, os conceitos de mecânica do meio contínuo e da mecânica da fratura permitiram desenvolver equações constitutivas que modelam a evolução do dano interno que causa a falha. Esta abordagem da mecânica dos sólidos contínuos é conhecida como Mecânica do Dano Contínuo (MDC) e permitiu, em conjunto com o advento computacional, simular de forma realística o padrão de falhas. As teorias do dano contínuo são baseadas nos processos termodinâmicos irreversíveis e no estado da variável interna (SIMO; JU, 1987).

Desde o trabalho pioneiro de Kachanov (1999), muitos estudos e trabalhos a respeito da MDC

foram feitos. Assim, a presente seção apresenta os conceitos e fundamentos necessários para descrever o comportamento de materiais quase-frágeis quando ocorre a degradação da rigidez do material. Logo, inicia-se o desenvolvimento da formulação para o caso uniaxial e posteriormente expande-se para os casos 2D e 3D. Como serão realizadas apenas análises quase-estáticas em materiais quase-frágeis, neste trabalho não serão estudados os fenômenos de fadiga ou fluência do material.

## 2.2 Variável de dano unidimensional

Considera-se um sólido degradado com um volume representativo definido por um ponto  $P$  e por um plano cuja normal em  $P$  é  $\mathbf{n}$ , como mostra a Fig. 2.1. Seja  $\delta A$  a área da intersecção do plano de normal  $\mathbf{n}$  com o volume representativo e  $\delta A_D$  a área dos defeitos e microfissuras em  $\delta A$ . Dessa forma, a variável de dano  $d$  em um ponto  $P$  na direção de  $\mathbf{n}$  é dada por:

$$d(P, \mathbf{n}) = \frac{\delta A_D}{\delta A} \quad (2.1)$$

Nota-se que a variável de dano é uma medida de perda de rigidez do material com limites inferior e superior dados por  $d \in [0, 1]$  (OLLER, 2001). Assim,  $d = 0$  representa o estado íntegro do material, sem a ocorrência de dano, enquanto  $d = 1$  corresponde ao material completamente degradado, ou seja, sem qualquer capacidade resistente. Quando  $d \in ]0, 1[$ , o material encontra-se em processo de degradação.

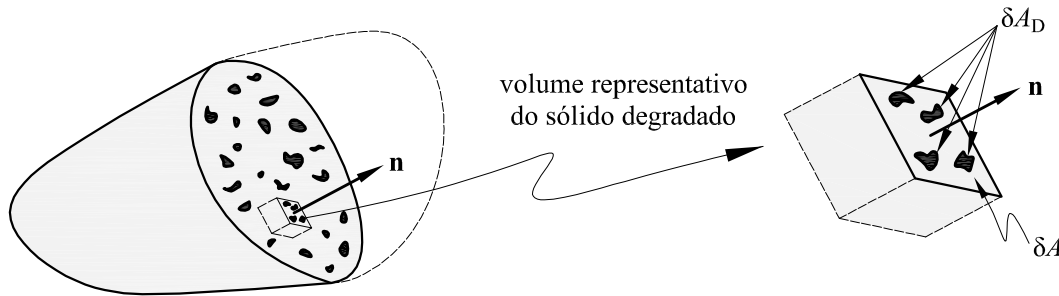


Figura 2.1: Definição do dano (Adaptado de Lemaitre (1983))

Portanto, o dano pode ser definido como uma grandeza física que avalia o nível de integridade de um corpo. Como no presente trabalho admite-se o modelo de dano isotrópico, segundo o qual o material se degrada igualmente em todas as direções,  $d$  é considerado uma entidade física escalar. Para o caso unidimensional e homogêneo, o dano é calculado com base na redução da área da seção transversal devido às microfissuras e vazios existentes. Logo, define-se a variável interna de dano como:

$$d = \frac{A_D}{A} \quad (2.2)$$

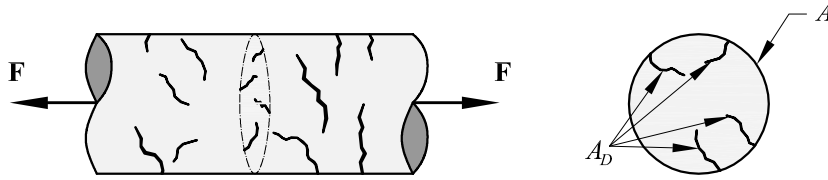
onde  $A$  e  $A_D$  são as áreas da seção transversal total e dos defeitos, respectivamente (Fig. 2.2).

Ressalta-se que o meio contínuo não pode mais retornar ao seu estado íntegro após sofrer degradação, ou seja, ele não pode ser reparado. Desse modo, a área degradada permanecerá neste

estado podendo inclusive crescer, degradando ainda mais o material ao longo do tempo. Portanto, como a variação da área dos defeitos ao longo do tempo é  $\dot{A}_D \geq 0$ , obtém-se:

$$\dot{d} = \frac{\dot{A}_D}{A} \geq 0 \quad (2.3)$$

onde  $\dot{d}$  é a taxa de variação da variável de dano.



**Figura 2.2:** Corpo sólido degradado (Adaptado de Lemaitre (1983))

### 2.2.1 Tensão efetiva

A tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  é aquela associada à área que efetivamente resiste aos esforços, enquanto a tensão aparente (nominal)  $\sigma$  expressa a força que está sendo aplicada sobre a área total da seção transversal. Desse modo,

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.4)$$

e

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{A}}, \quad (2.5)$$

onde  $\bar{A}$  é a área da seção transversal que efetivamente resiste aos esforços, sendo expressa como

$$\bar{A} = A - A_D \Rightarrow A_D = A - \bar{A} \quad (2.6)$$

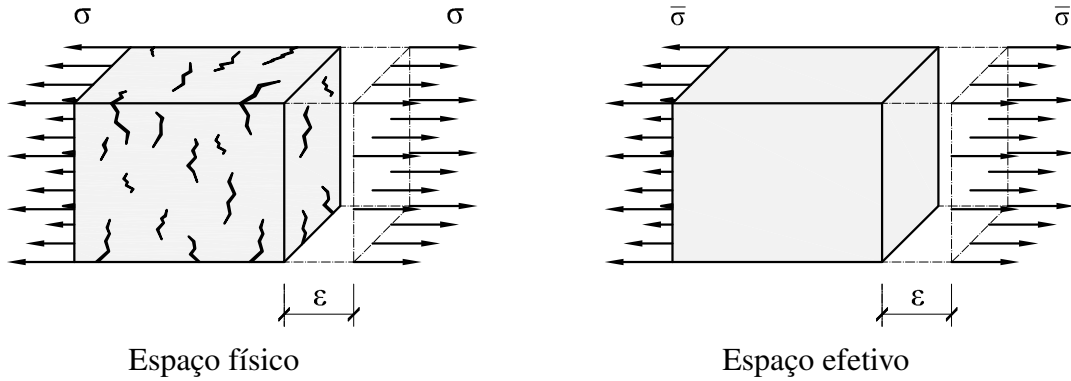
Assim, a Eq. (2.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$d = \frac{A - \bar{A}}{A} = 1 - \frac{\bar{A}}{A} \Rightarrow \frac{\bar{A}}{A} = 1 - d \quad (2.7)$$

Fazendo  $\sigma/\bar{\sigma}$ , pode-se escrever a tensão aparente em função da tensão efetiva e da variável de dano. Logo, com base nas Eqs. (2.4), (2.5) e (2.7), obtém-se

$$\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} = \frac{\bar{A}}{A} = 1 - d \Rightarrow \sigma = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (2.8)$$

A Eq. (2.8) descreve a relação entre as tensões aparente e efetiva com base na variável de dano. Assim, quando o material ainda não sofreu qualquer tipo de dano, o corpo encontra-se em seu estado íntegro e, conseqüentemente,  $d = 0 \Rightarrow \sigma = \bar{\sigma}$ . Por outro lado,  $d = 1 \Rightarrow \bar{\sigma} \rightarrow \infty$ , ou seja, para o material completamente degradado a tensão efetiva tende ao infinito.



**Figura 2.3:** Esquema ilustrativo da hipótese da tensão equivalente (Adaptado de Oller (2001))

### 2.2.2 Princípio da equivalência de deformações

Segundo a hipótese da equivalência de deformações (LEMAITRE, 1983), a deformação do material danificado solicitado pela tensão aparente ( $\sigma$ ) é equivalente à deformação do material íntegro submetido à tensão efetiva ( $\bar{\sigma}$ ). Com base na hipótese anteriormente exposta e na Fig. 2.3, pode-se escrever:

$$\epsilon_1 = \epsilon = \frac{\sigma}{E_D} \quad (2.9)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon = \frac{\bar{\sigma}}{E} \quad (2.10)$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \Rightarrow \frac{\sigma}{E_D} = \frac{\bar{\sigma}}{E} \quad (2.11)$$

sendo  $\epsilon_1$  a deformação do material degradado,  $\epsilon_2$  a deformação do material íntegro,  $E$  o módulo de elasticidade intacto e  $E_D$  o módulo de Young degradado. Dessa forma, a partir da Eq. (2.11) é possível estabelecer uma relação entre o módulo de Young íntegro e degradado. Assim,

$$E_D = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} E = (1 - d)E \quad (2.12)$$

Finalmente, a partir da Eq. (2.12) pode-se rescrever as Eqs. (2.9) e (2.11) da seguinte forma:

$$\sigma = (E_D)\epsilon = (1 - d)E\epsilon \quad (2.13)$$

$$\bar{\sigma} = E\epsilon \quad (2.14)$$

A partir das derivadas das Eqs. (2.13) e (2.14) é possível se determinar a relação constitutiva incremental

$$\dot{\sigma} = E[(1 - d)\dot{\epsilon} - \dot{d}\epsilon] \quad (2.15)$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = E\dot{\epsilon} \quad (2.16)$$

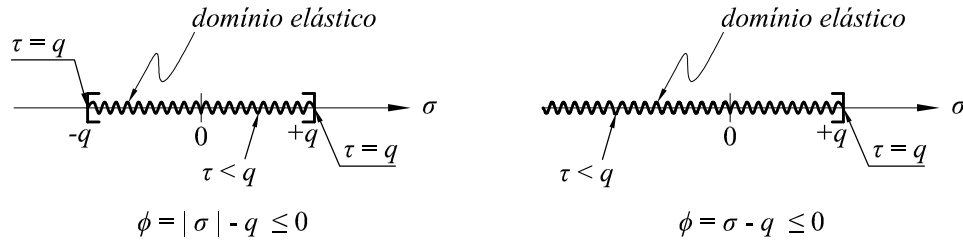
Com base nas definições anteriormente apresentadas é possível desenvolver os conceitos de critério de degradação, lei de evolução da variável de dano, lei de endurecimento/abrandamento e carga e descarga (Kuhn-Tucker), os quais são fundamentais para concepção de um modelo constitutivo de dano. Tais conceitos serão explicados detalhadamente nas próximas subseções.

### 2.2.3 Critério de degradação

O critério de degradação distingue um estado de comportamento elástico, que se encontra no interior do domínio delimitado por esta função de dano, de outro que representa o processo de degradação das propriedades do material. Em outras palavras, admite-se o domínio elástico ( $\mathbb{E} = \{\sigma \in \mathbb{R} | \phi \equiv \tau - q < 0\}$ ) limitado por uma superfície de dano definida por  $\partial\mathbb{E} = \{\sigma \in \mathbb{R} | \phi \equiv \tau - q = 0\}$ . Desse modo, obtém-se:

$$\phi(\sigma) = \tau(\sigma) - q \leq 0 \quad (2.17)$$

onde  $\tau(\sigma)$  é a tensão equivalente e define a forma do domínio elástico e  $q$  é a variável interna que estabelece o tamanho do domínio elástico. Para o caso unidimensional, a relação entre a norma  $\tau(\sigma)$  e a variável  $q$  pode ser representada graficamente como mostra a Fig. 2.4. Estas representações são apenas exemplos, pois a adoção de uma determinada norma dependerá da análise realizada.



**Figura 2.4:** Exemplos de espaços de tensões aparentes para problemas 1D

O critério de degradação pode ser rescrito no espaço de tensões efetivas da seguinte forma:

$$\bar{\phi}(\bar{\sigma}) = \bar{\phi} = \bar{\tau}(\bar{\sigma}) - r \leq 0 \quad (2.18)$$

sendo  $r$  a variável interna no domínio elástico no espaço de tensões efetivas expressa por:

$$r = \frac{q}{1-d} \quad (2.19)$$

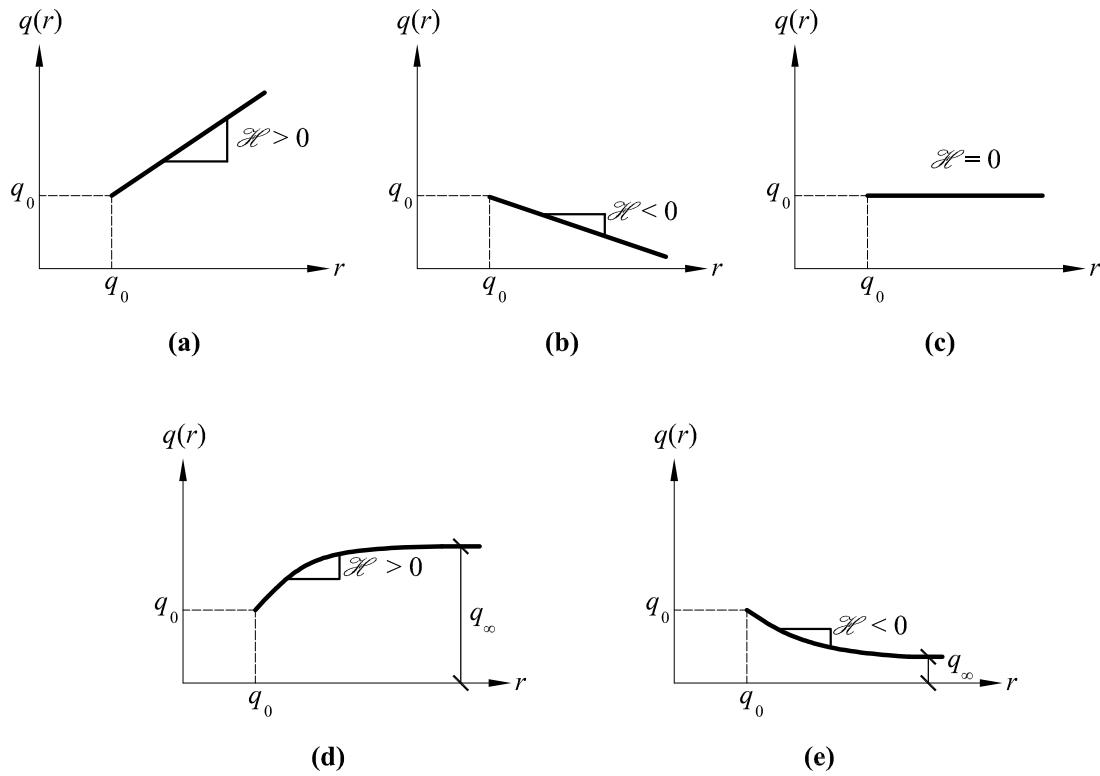
onde a evolução da variável interna é definida por  $\dot{r} \geq 0$ , isto é,  $r$  sempre cresce e a sua tangente nunca será menor que zero.

### 2.2.4 Lei de evolução da variável de dano

A variável de dano pode ser expressa reorganizando a Eq. (2.19). Desse modo:

$$d = d(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (2.20)$$

onde a variável de dano pertence ao intervalo  $0 \leq d \leq 1$ , como anteriormente explicitado. A Fig. 2.5 ilustra possíveis funções de evolução da variável interna  $q(r)$ , as quais definem a lei de endurecimento/abrandamento das tensões.



**Figura 2.5:** Comportamentos distintos de endurecimento/abrandamento: (a) lei de endurecimento linear; (b) lei de abrandamento linear; (c) dano perfeito; (d) lei de endurecimento exponencial; (e) lei de abrandamento exponencial

O parâmetro  $\mathcal{H}$  é denominado módulo de abrandamento/endurecimento e rege o comportamento da evolução do dano após o limite elástico linear. O módulo  $\mathcal{H}$  pode ser obtido através da seguinte equação:

$$\mathcal{H}(r) = \frac{\partial q(r)}{\partial r} = q'(r) \quad (2.21)$$

Observa-se que quando  $\mathcal{H} > 0$  (Fig. 2.5a e Fig. 2.5d) há ocorrência da lei de endurecimento e, nesse caso,  $q$  sempre cresce. Isto significa que conforme o sólido se deforma a tensão resistente aumenta. Para  $\mathcal{H} < 0$  (Fig. 2.5b e Fig. 2.5e), a variável  $q$  decresce, caracterizando o abrandamento que ocorre quando o material começa a falhar. O dano perfeito ocorre quando o módulo  $\mathcal{H} = 0$  e, nesse caso,  $q$  se mantém constante (Fig. 2.5c).

Quando o endurecimento/abrandamento é caracterizado por uma lei linear (Fig. 2.5a e Fig. 2.5b), emprega-se a Eq. (2.22).

$$q(r) = q_0 + \mathcal{H}(r - q_0) \quad (2.22)$$

onde a taxa de variação da lei linear é dada por:

$$\dot{q} = \mathcal{H} \dot{r} \quad (2.23)$$

Por outro lado, quando se pretende expressar o abrandamento ou endurecimento segundo uma função exponencial (Fig. 2.5d e Fig. 2.5e), faz-se

$$q(r) = q_\infty - (q_\infty - q_0) e^{\mathcal{A}\left(1 - \frac{r}{q_0}\right)} \quad (2.24)$$



onde  $\mathcal{A} > 0$  é um parâmetro que controla a concavidade da lei exponencial e depende da energia de fratura do material. Nesse caso,  $\mathcal{H}$  não é constante, mas pode ser determinado pela sua definição, isto é,  $\mathcal{H} = \partial q / \partial r$ . Assim,

$$\mathcal{H}(r) = \mathcal{A} \frac{q_\infty - q_0}{q_0} e^{\mathcal{A} \left(1 - \frac{r}{q_0}\right)} \quad (2.25)$$

Analogamente à lei linear, a taxa de variação da lei exponencial pode ser expressa conforme a equação a seguir

$$\dot{q} = \underbrace{\mathcal{A} \frac{q_\infty - q_0}{q_0} e^{\mathcal{A} \left(1 - \frac{r}{q_0}\right)}}_{\mathcal{H}} \dot{r} \therefore \dot{q} = \mathcal{H} \dot{r} \quad (2.26)$$

Como se pretende representar o comportamento do material utilizando uma lei exponencial de abrandamento com degradação completa, o presente trabalho adota  $q_\infty = 0$  e desse modo

$$q = q_0 e^{\mathcal{A} \left(1 - \frac{r}{q_0}\right)} \quad (2.27)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\partial q}{\partial r} = -\mathcal{A} e^{\mathcal{A} \left(1 - \frac{r}{q_0}\right)} \quad (2.28)$$

$$\dot{q} = \underbrace{-\mathcal{A} e^{\mathcal{A} \left(1 - \frac{r}{q_0}\right)}}_{\mathcal{H}} \dot{r} \Rightarrow \dot{q} = \mathcal{H} \dot{r} \quad (2.29)$$

Antes de prosseguir, há ainda um aspecto relevante a ser ressaltado com base nas Eqs. (2.23), (2.26), (2.29) e na evolução da variável interna,  $\dot{r} \geq 0$ , a partir das quais pode-se escrever:

$$\dot{r} \geq 0 \Rightarrow \dot{q} = \mathcal{H} \dot{r} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} > 0, & \text{se } \mathcal{H} > 0 \\ \dot{q} < 0, & \text{se } \mathcal{H} < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Assim, segundo a Eq. (2.30), embora o espaço de tensões aparentes cresça ou decresça dependendo de  $\mathcal{H}$ , o espaço de tensões efetivas sempre cresce independente do abrandamento ou endurecimento do material.

## 2.2.5 Condição de carga e descarga

Para elucidar melhor a evolução do dano, considere a Fig. 2.6. Como é possível observar, no regime linear elástico (trecho  $\overline{OA}$ ) não há evolução do dano, isto é,  $\dot{d} = 0$  e conseqüentemente  $\bar{\phi} < 0$ . Esta condição evidencia que não houve evolução da variável interna,  $\dot{r} = 0$ . Por outro lado, no regime inelástico a função de dano é  $\bar{\phi} = 0$ , ou seja, a tensão e deformação encontram-se sobre a superfície de dano  $\partial \mathbb{E}$  e, portanto,  $\dot{r} \geq 0$ . Desse modo, pode-se escrever:

$$\dot{r} \geq 0; \quad \bar{\phi} \leq 0; \quad \dot{r} \bar{\phi} = 0. \quad (2.31)$$

Estas condições são conhecidas como relações de Kuhn-Tucker de carga e descarga e são fundamentais para o desenvolvimento do modelo constitutivo. Ainda considerando o sistema sobre

a superfície de dano, e dessa forma  $\bar{\phi} = 0$ , pode-se concluir naturalmente que  $\dot{\bar{\phi}} \leq 0$ , pois  $\dot{\bar{\phi}}$  maior do que zero implicaria em  $\bar{\phi} > 0$ , o que violaria a condição  $\bar{\phi} \leq 0$  anteriormente estabelecida. Além disso, a função de dano em  $\partial\mathbb{E}$  resulta em  $\dot{\bar{\phi}} = 0$  e dessa forma  $\dot{r} \geq 0$ . Desse modo, define-se a condição de consistência

$$\dot{r} \dot{\bar{\phi}} = 0 \text{ se } \bar{\phi} = 0 \quad (2.32)$$

Assim, quando o tensão e deformação encontram-se sobre o trecho  $\overline{AB}$  significa que o sistema está no regime inelástico com evolução de dano. Desse modo

$$\begin{cases} \dot{r} = \dot{\tau} > 0 \\ \dot{d} > 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\dot{\tau} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \dot{\tau} > 0 \\ \dot{d} > 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

A Eq. (2.34) equivale ao processo de carga com crescimento da superfície de dano. Se  $\dot{\bar{\phi}} < 0$ , então o sistema está em processo de descarregamento (trecho  $\overline{BO}$ ) que pode ser definido por

$$\bar{\phi} = 0; \dot{\bar{\phi}} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{d} = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

No caso do trecho  $\overline{OB}$  o mesmo está associado ao processo de recarga com características semelhantes ao regime elástico. Contudo, nesse caso há um fator de redução da rigidez  $(1 - d)$ .

Finalmente, com base nas Eqs. (2.31), (2.32) e (2.18) e sendo  $r = q_0$  antes do processo de degradação, obtém-se uma lei de evolução explícita para a variável interna:

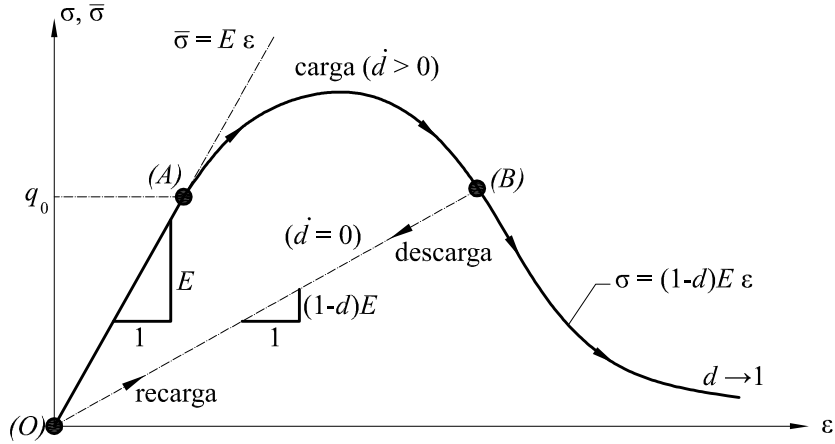
$$r(t) = r_t = \max_{s \in [0, t]} [q_0, \bar{\tau}(s)] \quad (2.36)$$

ou seja, a variável interna de dano equivale ao máximo valor atingido por  $\tau(\bar{\sigma})$  durante o processo de carga ( $r \geq q_0$ ).

### 2.2.6 Modelo constitutivo contínuo

Com base nos conceitos definidos anteriormente, a presente seção apresenta o modelo constitutivo de dano contínuo para problemas 1D. Assim, considerando as Eqs. (2.13), (2.14), (2.18), (2.36), (2.20) e (2.24), desenvolve-se o modelo de dano conforme a Tab. 2.1.

Ressalta-se que o modelo de dano 1D apresentado não foi implementado durante o presente trabalho. Ele foi utilizado apenas como base para o desenvolvimento do modelo de dano que trata de análises bi e tridimensionais. Assim, posteriormente o modelo 1D será estendido para problemas 2D e 3D. Contudo, antes de prosseguir, serão explanados os conceitos relacionados à energia de fratura.



**Figura 2.6:** Diagrama tensão–deformação axial

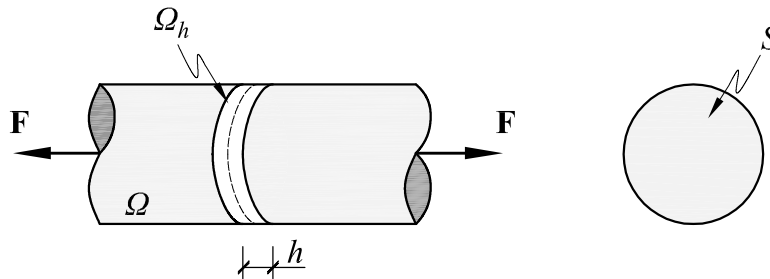
**Tabela 2.1:** Modelo constitutivo contínuo de dano isotrópico para problemas 1D

Relação constitutiva:	$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} = E\epsilon$
Tensão equivalente:	$\bar{\tau} =  \bar{\sigma}  \quad \text{ou} \quad \bar{\tau} = \bar{\sigma}$
Critério de dano:	$\bar{\phi} = \bar{\tau} - r \leq 0$
Evolução da variável interna $r$ :	$r = \max_{S \in [0, t]} [q_0, \tau_S]$
Evolução do dano:	$d = 1 - q(r)/r, \quad d = [0, 1]$
Lei de endurecimento/abrandamento:	$q(r) = q_0 e^{\mathcal{A}(1-r/q_0)} \quad \text{ou} \quad q = q_0 + \mathcal{H}(r - q_0)$

### 2.2.7 A energia de fratura

Para se definir o conceito de energia de fratura em modo I, considere um corpo sólido submetido a uma carga de tração monotônica crescente em regime inelástico, i.e.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{E} > 0 \Rightarrow \dot{\bar{\sigma}} = E\dot{\epsilon} > 0 \\ \dot{r} > 0 \Rightarrow \bar{\phi} \equiv \bar{\tau} - r = 0 \Rightarrow \bar{\sigma} = r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\bar{\sigma}} = \dot{r} = E\dot{\epsilon} \Rightarrow \dot{\epsilon} = \frac{\dot{r}}{E} \quad (2.37)$$



**Figura 2.7:** Sólido submetido a uma carga de tração monotônica crescente

Seja  $\Omega_h$  uma região de localização de deformação situada em uma determinada seção transversal  $S$  do sólido, conforme Fig. 2.7. Sendo  $h$  a largura de  $\Omega_h$ , pode-se escrever:

$$d\Omega_h = h dS \quad (2.38)$$

Logo, desconsiderando a energia cinética (uma vez que se considera análises quase-estáticas) tem-se que a potência externa introduzida é igual à potência tensional no corpo, i.e.

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathcal{P}_{\text{ext}}^{\Omega}}_{\text{Potência externa introduzida}} &= \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \dot{\epsilon} d\Omega}_{\text{Potência tensional}} \\ &= \int_{\Omega} \underbrace{(1-d)}_{\frac{q}{r}} \underbrace{E\epsilon}_{\bar{\sigma}=r} \underbrace{\dot{\epsilon}}_{\frac{\dot{q}}{E}} d\Omega = \int_{\Omega} q \frac{\dot{r}}{E} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{q\dot{q}}{\mathcal{H}E} d\Omega \end{aligned} \quad (2.39)$$

Empregando a lei exponencial de abrandamento dada pela Eq. (2.27) e com base na Eq. (2.28), obtém-se:

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}^{\Omega} = \int_{\Omega} \frac{q\dot{q}}{-\mathcal{A} e^{\mathcal{A}(1-\frac{r}{q_0})} E} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{q\dot{q}}{-\mathcal{A} \frac{q}{q_0} E} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{q_0 \dot{q}}{\mathcal{A} E} d\Omega \quad (2.40)$$

Contudo, a fissura se desenvolve na região de localização e por isso deve-se calcular a potência externa em  $\Omega_h$ , ou seja

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}^{\Omega_h} = - \int_{\Omega_h} \frac{q_0 \dot{q}}{\mathcal{A} E} d\Omega_h = - \frac{h q_0}{\mathcal{A} E} \int_S \dot{q} dS \quad (2.41)$$

O processo de degradação do material ocorre no intervalo de tempo  $t \in [0, t_{\infty}]$ , onde  $t_{\infty}$  é o tempo no qual a degradação completa é alcançada, isto é,  $\sigma|_{t_{\infty}} = 0$ . Assim, integrando a potência  $\mathcal{P}_{\text{ext}}^{\Omega_h}$  ao longo do tempo, o trabalho total  $\mathcal{W}^{\Omega_h}$  pode ser calculado como:

$$\mathcal{W}^{\Omega_h} = \int_0^{t_{\infty}} \mathcal{P}_{\text{ext}}^{\Omega} dt = \int_0^{t_{\infty}} \left[ - \frac{h q_0}{\mathcal{A} E} \int_S \dot{q} dS \right] dt \quad (2.42)$$

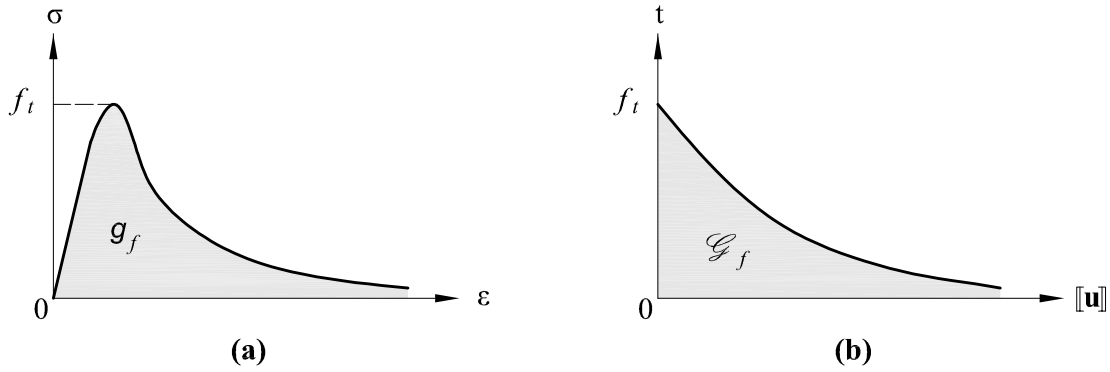
Como  $\mathcal{W}^{\Omega_h}$  é uma função integrável em  $S$  e  $[0, t_{\infty}]$ , pode-se utilizar o teorema de Fubini (FRIEDMAN et al., 1980; DIBENEDETTO, 2012), segundo o qual integrais duplas podem ser calculadas por meio de integrais iteradas e, conseqüentemente, é permitido inverter a ordem da integração. Logo,

$$\mathcal{W}^{\Omega_h} = \int_S \left[ - \frac{h q_0}{\mathcal{A} E} \int_0^{t_{\infty}} \dot{q} dt \right] dS = \int_S \left[ - \frac{h q_0}{\mathcal{A} E} \int_{q_0}^0 dq \right] dS = \int_S \underbrace{h \frac{q_0^2}{\mathcal{A} E}}_{\mathcal{G}_f} dS \quad (2.43)$$

Portanto, a energia de fratura é dada por:

$$\mathcal{G}_f = h \frac{q_0^2}{\mathcal{A} E} \quad (2.44)$$

onde  $\mathcal{G}_f$  é a energia de fratura que representa a energia consumida na formação de uma unidade de área de fratura. Desse modo, quando um sólido é tracionado até a sua completa degradação,



**Figura 2.8:** Modelos de dano: (a) contínuo e (b) discreto

a integral do seu digrama tensão por deformação resulta na energia volumétrica dissipada  $g_f$  (Fig. 2.8a). Multiplicando  $g_f$  pela largura  $h$  da região de localização de deformação, obtém-se a energia de fratura  $\mathcal{G}_f$ . Como é possível observar a partir da Eq. (2.44),  $\mathcal{G}_f$  é uma propriedade intrínseca do material que pode ser caracterizada a partir das propriedades mecânicas  $q_0$ ,  $\mathcal{A}$  e  $E$ .

A energia de fratura também pode ser determinada a partir da curva entre a força de tração  $t$  e o salto no campo de deslocamentos  $[[u]]$ , conforme Fig. 2.8b. Nesse caso, a integral dessa curva resulta na energia de fratura  $\mathcal{G}_f$ . O cálculo de  $\mathcal{G}_f$  a partir da relação discreta entre a força de tração e o salto no campo de deslocamentos será abordado com mais detalhe na seção 5 do capítulo 3.

### 2.3 Extensão para problemas 2D e 3D

O modelo de dano apresentado pode ser utilizado para o estudo de problemas 1D, com aplicação de passos de deformação axial em um determinado ponto. Tal modelo pode ser generalizado para problemas 2D e 3D de maneira relativamente simples. Contudo, evidentemente o estudo se torna mais complexo, envolvendo operações mais sofisticadas e critérios de dano mais elaborados, como por exemplo, os critérios de von Mises e de Rankine. Apesar disso, os procedimentos computacionais para problemas unidimensionais e multidimensionais são bastante semelhantes. A seguir serão explanados os processos para o desenvolvimento do modelo de dano contínuo isotrópico para problemas com mais de uma dimensão. Deve-se ressaltar que este é um modelo de dano à tração e, portanto, ele não é capaz de representar fenômenos de dano à compressão.

Assim, inicialmente determina-se a relação entre tensão aparente e efetiva de forma análoga ao caso 1D. Contudo, ao invés de se utilizar tensões escalares serão empregados tensores de tensões. Desse modo,

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d)\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.45)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões aparentes e  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  é o tensor elástico de tensões efetivas dado por

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.46)$$

sendo  $\mathbf{C} = 2G\mathbf{I} + (K - \frac{2}{3}G)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$  o tensor elástico de quarta ordem,  $\boldsymbol{\epsilon}$  o tensor de deformações,  $\mathbf{I}$  o tensor simétrico unitário de quarta ordem,  $\mathbf{1}$  o tensor unitário de segunda ordem,  $G$  o módulo de elasticidade transversal,

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.47)$$

o módulo de compressibilidade do material e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Dentre as várias formas de se calcular a tensão equivalente que existem, o presente trabalho utiliza principalmente o critério baseado na componente  $\bar{\sigma}_{nn}$  do tensor de tensões do elemento de interface. Nos próximos capítulos será mostrado que elementos finitos sólidos (triangulares para análises 2D e tetraédricos para análises 3D) de elevada razão de aspecto são capazes de reproduzir o processo de degradação. Como tais elementos representam fissuras, de modo que a abertura da fissura é dada pelo salto no campo de deslocamentos desses elementos de interface, a tensão equivalente  $\bar{\tau}(\bar{\sigma})$  é definida pela componente  $\bar{\sigma}_{nn}$  que corresponde àquela tensão que é normal à base desses elementos de elevada razão de aspecto.

Também foram realizados estudos empregando o critério de Rankine, o qual define a norma como sendo a tensão principal máxima,  $\bar{\sigma}_1$ , do tensor de tensões efetivas. A tensão  $\bar{\sigma}_1$  é obtida calculando os auto-valores do tensor de tensões. Assim, o auto-valor positivo de maior valor numérico é considerado a tensão principal máxima. O critério de Rankine é amplamente utilizado em análises de materiais quase-frágeis. Como este trabalho aborda apenas simulações envolvendo esses tipos de materiais, este critério também foi empregado para estudo do método de fragmentação da malha.

Desse modo, com base nas explicações anteriores, escreve-se:

$$\bar{\tau}(\bar{\sigma}) = \begin{cases} \bar{\sigma}_1 & \text{(Critério de Rankine) ou} \\ \bar{\sigma}_{nn} & \text{(Critério da tensão normal)} \end{cases} \quad (2.48)$$

Deve-se ressaltar que o modelo de dano desenvolvido não é capaz de reproduzir o processo de degradação à compressão e, conseqüentemente, só ocorrerá evolução do dano quando  $\bar{\tau} = \bar{\sigma}_{nn} > 0$  ou  $\bar{\tau} = \bar{\sigma}_1 > 0$ .

No caso do critério de dano, procede-se de forma análoga ao caso unidimensional, ou seja

$$\bar{\phi} = \tau(\bar{\sigma}) + r \leq 0 \quad (2.49)$$

As Eqs. (2.20), (2.36), (2.22) e (2.24) que definem  $d$ ,  $r$  e as leis linear e exponencial de  $q$  para o caso 1D também podem ser empregadas para os modelos 2D e 3D. Desse modo, estabelecidos todos os conceitos necessários, pode-se conceber o modelo de dano isotrópico contínuo para análises bi e tridimensionais conforme Tab. 2.2

**Tabela 2.2:** Modelo constitutivo contínuo de dano à tração para problemas 2D e 3D

Relação constitutiva:	$\sigma = \begin{cases} (1-d)\bar{\sigma}, & \text{se } \bar{\tau} > 0 \\ \bar{\sigma}, & \text{se } \bar{\tau} < 0 \end{cases}, \quad \bar{\sigma} = \mathbf{C} : \epsilon$
Tensão equivalente:	$\bar{\tau} = \bar{\sigma}_{nn} \quad \text{ou} \quad \bar{\tau} = \bar{\sigma}_1$
Critério de dano:	$\bar{\phi} = \bar{\tau} - r \leq 0$
Evolução da variável interna $r$ :	$r = \max_{S \in [0, t]} [q_0, \tau_S]$
Evolução do dano:	$d = 1 - q(r)/r, \quad d = [0, 1]$
Lei de endurecimento/abrandamento:	$q(r) = q_0 e^{\alpha(1-r/q_0)}$

Comparando as Tabs. 2.1 e 2.2 é possível observar que apenas duas expressões, aquelas associadas à equação constitutiva e à tensão equivalente, não são as mesmas para os casos uni e multidimensional.

Os estudos desenvolvidos no presente item ilustram as relações constitutivas de dano que podem ser utilizadas para a análise de sólidos. Ressalta-se que a utilização do modelo de dano adequado depende não só do material que constitui o sólido, mas também da técnica que será utilizada.

### 2.3.1 Algoritmo de integração implícito-explícito (IMPL-EX)

A integração do modelo de dano à tração foi realizado usando o método IMPL-EX proposto por Oliver, Huespe e Cante (2008). Este método de integração é bastante robusto e nada mais é do que uma simplificação do algoritmo implícito, com uma projeção explícita da variável interna  $r$ , de modo a reduzir a não linearidade do algoritmo de integração. Em outras palavras, o algoritmo IMPL-EX trata da atualização da variável interna  $r$  que, conforme anteriormente explicado, define o limite de degradação. Com o valor de  $r$  é possível calcular a variável de dano corrente  $e$ , consequentemente, obter o tensor de tensões  $\sigma$ .

A Tab. 2.3 mostra o esquema para a técnica de integração implícita-explícita para  $\bar{\tau} = \bar{\sigma}_{nn}$  para a determinação das tensões no passo  $i + 1$  do processo incremental de carregamento.

Essa técnica de integração garante a convergência do modelo ao custo de uma violação na condição de consistência. Desse modo, os resultados podem perder precisão ou mesmo apresentarem oscilações. Esses inconvenientes podem ser contornados adotando incrementos de carga pequenos.

A principal vantagem da técnica com relação ao método puramente implícito é a sua estabilidade e robustez computacional, uma vez que o IMPL-EX garante a convergência em cada passo de tempo com uma única iteração (OLIVER; HUESPE; CANTE, 2008).

**Tabela 2.3:** Esquema de integração IMPL-EX para o modelo dano à tração

**Entrada:**  $\epsilon_{(i+1)}, \bar{\sigma}_{nn(i)}, r_{(i)}, \Delta r_{(i)}$

(i) Calcular o tensor de tensões efetivas no passo  $i + 1$

$$\bar{\sigma}_{(i+1)} \leftarrow \mathbf{C} : \epsilon_{(i+1)}$$

(ii) Calcular a tensão equivalente

$$\bar{r}_{(i+1)} \leftarrow \bar{\sigma}_{nn(i+1)} = \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_{(i+1)} \cdot \mathbf{n}$$

(iii) Verificar a condição de carregamento e descarregamento.

SE  $\bar{\sigma}_{nn(i+1)} \leq r_{(i)}$  ENTÃO

$$r_{(i+1)} \leftarrow r_{(i)}$$

SENÃO

$$r_{(i+1)} \leftarrow \bar{r}_{(i+1)}$$

FIM SE

(iv) Calcular o incremento na variável interna

$$\Delta r_{(i+1)} \leftarrow r_{(i+1)} - r_{(i)}$$

(v) Calcular a extrapolação linear explícita de  $r$

$$\tilde{r}_{(i+1)} \leftarrow r_{(i)} + \frac{\Delta t_{(i+1)}}{\Delta t_{(i)}} \Delta r_{(i)}; \quad \Delta t_{(i+1)} \leftarrow t_{(i+1)} - t_{(i)}; \quad \Delta t_{(i)} \leftarrow t_{(i)} - t_{(i-1)}$$

(vi) Atualizar os valores da variável  $q$ , segundo uma lei exponencial, e da variável de dano  $d$

$$\tilde{q}_{(i+1)} \leftarrow q_{(i)} e^{\mathcal{A}(1-\tilde{r}_{(i+1)}/q_{(i)})}; \quad \tilde{d}_{(i+1)} \leftarrow 1 - \frac{\tilde{q}_{(i+1)}}{\tilde{r}_{(i+1)}}$$

(vii) Atualizar o valor da tensão

$$\tilde{\sigma}_{(i+1)} \leftarrow (1 - \tilde{d}_{(i+1)}) \bar{\sigma}_{(i+1)}, \quad \text{SE } \bar{\sigma}_{nn(i)} > 0$$

$$\tilde{\sigma}_{(i+1)} \leftarrow \bar{\sigma}_{(i+1)}, \quad \text{SE } \bar{\sigma}_{nn(i)} \leq 0$$

**Saída:**  $\tilde{\sigma}_{(i+1)}, \bar{\sigma}_{nn(i+1)}, r_{(i+1)}, \Delta r_{(i+1)}$



## Capítulo 3

# Elemento Finito Sólido de Interface

---

### 3.1 Introdução

Neste trabalho, denominam-se elementos de interface aqueles que possuem elevada razão de aspecto (i.e. razão entre a maior e menor dimensão), onde a menor dimensão corresponde a espessura da região de interface. Neste capítulo será demonstrado que, conforme a razão de aspecto aumenta, as deformações do elemento também aumentam, aproximando a mesma cinemática apresentada no caso da ACDF (OLIVER; CERVERA; MANZOLI, 1999; OLIVER; HUESPE, 2004b). Desse modo, baseado no mesmo princípio da ACDF, tensões limitadas serão obtidas a partir de deformações ilimitadas, utilizando relações constitutivas contínuas, as quais tendem a relações constitutivas discretas conforme a razão de aspecto aumenta (MANZOLI et al., 2012, 2014).

### 3.2 Elemento de interface triangular de 3 nós

Considere o elemento finito triangular de três nós, com base  $b$  formada pelo segmento de reta entre os nós 2 e 3, e altura  $h$  correspondendo à distância entre o nó 1 e a sua projeção na base do elemento (Fig. 3.1).

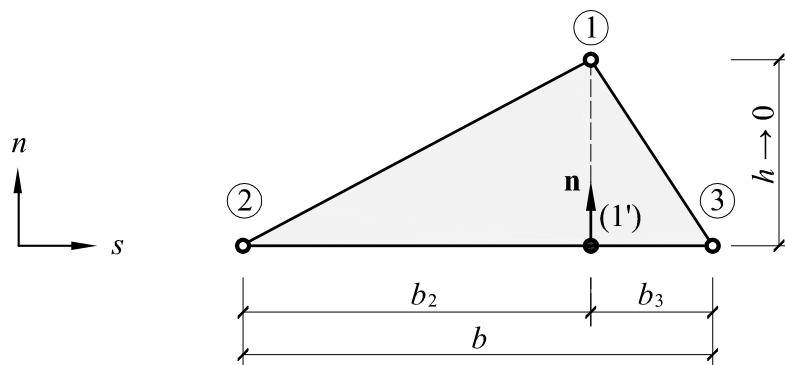


Figura 3.1: Elemento de interface triangular (Adaptado de Manzoli et al. (2014))

Dado o sistema de eixos coordenados  $(n, s)$ , onde  $n$  é normal à base do elemento, pode-se

escrever (REDDY, 1993; GOSZ, 2005):

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{d}\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_{nn} \\ \epsilon_{ss} \\ \gamma_{ns} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} X_s^{32} & 0 & -X_s^{31} & 0 & X_s^{21} & 0 \\ 0 & -X_n^{32} & 0 & X_n^{31} & 0 & -X_n^{21} \\ -X_n^{32} & X_s^{32} & X_n^{31} & X_s^{31} & -X_n^{21} & X_s^{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n^{(1)} \\ u_s^{(1)} \\ u_n^{(2)} \\ u_s^{(2)} \\ u_n^{(3)} \\ u_s^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

onde  $\{\epsilon\}$  é o vetor de deformações,  $[\mathbf{B}]$  a matriz das derivadas das funções de forma,  $\{\mathbf{d}\}$  o vetor de deslocamentos nodais,  $A$  a área do elemento finito triangular e  $u_n^{(i)}$  e  $u_s^{(i)}$  são componentes do deslocamento do nó  $i$  na direção dos eixos  $n$  e  $s$ , respectivamente. A notação  $X_s^{32}$  representa a diferença entre as coordenadas dos nós 3 e 2 na direção de  $s$ , i.e.,  $X_s^{32} = X_s^3 - X_s^2$ . Assim, pode-se observar que  $X_s^{32} = b$ ,  $-X_s^{31} = -b_3$ ,  $X_s^{21} = -b_2$ ,  $-X_n^{32} = 0$ ,  $X_n^{31} = -h$  e  $-X_n^{21} = h$ . Desse modo, pode-se rescrever a Eq. (3.1) do seguinte modo:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{nn} \\ \epsilon_{ss} \\ \gamma_{ns} \end{Bmatrix} = \frac{1}{bh} \begin{bmatrix} b & 0 & -b_3 & 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h & 0 & h \\ 0 & b & -h & -b_3 & h & -b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n^{(1)} \\ u_s^{(1)} \\ u_n^{(2)} \\ u_s^{(2)} \\ u_n^{(3)} \\ u_s^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{u_n^{(1)} - (b_3/b)u_n^{(2)} - (b_2/b)u_n^{(3)}}{h} \\ \frac{(u_s^{(3)} - u_s^{(2)})}{b} \\ \frac{(u_n^{(3)} - u_n^{(2)})}{b} + \frac{u_s^{(1)} - (b_3/b)u_s^{(2)} - (b_2/b)u_s^{(3)}}{h} \end{Bmatrix}$$

Como os deslocamentos da projeção 1' podem ser determinados interpolando-se os deslocamentos dos nós 2 e 3, pode-se escrever:

$$u_n^{(1)} - \underbrace{[(b_3/b)u_n^{(2)} + (b_2/b)u_n^{(3)}]}_{u_n^{(1')}} = u_n^{(1)} - u_n^{(1')} = \llbracket u \rrbracket_n \quad (3.3)$$

$$u_s^{(1)} - \underbrace{[(b_3/b)u_s^{(2)} + (b_2/b)u_s^{(3)}]}_{u_s^{(1')}} = u_s^{(1)} - u_s^{(1')} = \llbracket u \rrbracket_s$$

onde  $\llbracket u \rrbracket_n$  e  $\llbracket u \rrbracket_s$  são as componentes de  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ , dado pelo deslocamento relativo entre o nó 1 e a sua projeção na base do elemento. Logo, conforme a teoria da mecânica dos meios contínuos, obtém-se o seguinte tensor de deformações:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} & \frac{\gamma_{ns}}{2} & 0 \\ \frac{\gamma_{ns}}{2} & \epsilon_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} \llbracket u \rrbracket_n & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h} \llbracket u \rrbracket_s + \frac{1}{b} (u_n^{(3)} - u_n^{(2)}) \right] & 0 \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h} \llbracket u \rrbracket_s + \frac{1}{b} (u_n^{(3)} - u_n^{(2)}) \right] & \frac{1}{b} (u_s^{(3)} - u_s^{(2)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Pode-se decompor o tensor de deformações  $\epsilon$  em duas partes,  $\tilde{\epsilon}$  e  $\hat{\epsilon}$ , onde a primeira armazena todos os termos do tensor de deformações que dependem de  $b$  e a outra contém os termos que dependem de  $h$ . Dessa forma,

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} + \hat{\epsilon} \quad (3.5)$$

onde

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} (u_n^{(3)} - u_n^{(2)}) & 0 \\ \frac{1}{2} (u_n^{(3)} - u_n^{(2)}) & (u_s^{(3)} - u_s^{(2)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \llbracket u \rrbracket_n & \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket_s & 0 \\ \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

O tensor associado à altura  $h$ , expresso pela Eq. (3.7), pode ser escrito de uma forma mais geral como:

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^S \quad (3.8)$$

sendo  $(\bullet)^S$  a parte simétrica de  $(\bullet)$ ,  $\mathbf{n}$  o vetor unitário normal à base do elemento e  $\otimes$  o produto diádico. Assim, substituindo a Eq. (3.8) na Eq. (3.5), obtém-se:

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} + \underbrace{\frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^S}_{\hat{\epsilon}} \quad (3.9)$$

Quando a altura  $h$  tende a zero, o tensor  $\tilde{\epsilon}$  permanece limitado enquanto  $\hat{\epsilon}$  deixa de ser limitado. Assim, na situação limite, as deformações do elemento de interface são definidas quase exclusivamente pelos deslocamentos entre o nó 1 e a sua projeção na base do elemento. Nota-se que quando  $h \rightarrow 0$ , o nó 1 e a sua projeção convergem para o mesmo ponto material. Logo, o deslocamento relativo  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  torna-se a medida de descontinuidade do deslocamento.

Será demonstrado em seções subsequentes que o campo de deformações da Eq. (3.9) corresponde à cinemática da ACDF. Portanto, as mesmas aplicações da ACDF podem ser tratadas com elementos finitos triangulares de elevada razão de aspecto. Contudo, antes do equacionamento da cinemática de descontinuidade forte será realizada a dedução para o elemento de interface tetraédrico de 4 nós.

### 3.3 Elemento de interface tetraédrico de 4 nós

A presente subseção não tem a intenção de detalhar a dedução do tensor de deformações para o elemento tetraédrico, como anteriormente realizado para o elemento triangular de 3 nós, mas sim demonstrar que o equacionamento de  $\epsilon$  para elemento tetraédrico pode ser feito analogamente àquele desenvolvido para o elemento triangular (BITENCOURT JR, 2015). Assim, considere o

elemento tetraédrico de 4 nós ilustrado pela Fig. 3.2. Seja  $h$  a altura desse elemento, dada pela distância entre o nó 1 e a sua projeção na base e  $A$  a área da base do elemento. Admitindo o tetraedro em um sistema de eixos coordenados  $(n, s, t)$ , de tal forma que o eixo  $n$  é ortogonal à sua base, o tensor de deformações pode ser expresso conforme Eq. (3.5), com

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_{nn} & \tilde{\epsilon}_{ns} & \tilde{\epsilon}_{nt} \\ \tilde{\epsilon}_{ns} & \tilde{\epsilon}_{ss} & \tilde{\epsilon}_{st} \\ \tilde{\epsilon}_{nt} & \tilde{\epsilon}_{st} & \tilde{\epsilon}_{tt} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

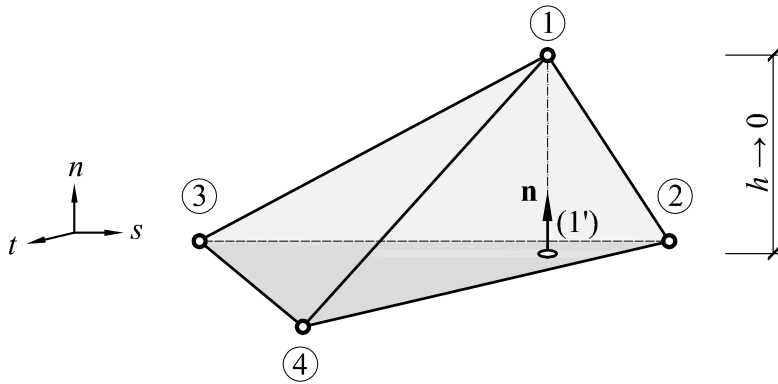
e

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \llbracket u \rrbracket_n & \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket_s & \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket_t \\ \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket_s & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket_t & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{nn} &= 0, \\ \tilde{\epsilon}_{ss} &= \frac{1}{2} [X_t^{32} u_s^{(4)} - X_t^{42} u_s^{(3)} + X_t^{43} u_s^{(2)}], \\ \tilde{\epsilon}_{tt} &= -\frac{1}{2} [X_s^{32} u_s^{(4)} - X_s^{42} u_t^{(3)} + X_s^{43} u_t^{(2)}], \\ \tilde{\epsilon}_{ns} &= \frac{1}{4} [X_t^{32} u_n^{(4)} - X_t^{42} u_n^{(3)} + X_t^{43} u_n^{(2)}], \\ \tilde{\epsilon}_{nt} &= -\frac{1}{4} [X_s^{32} u_n^{(4)} - X_s^{42} u_n^{(3)} + X_s^{43} u_n^{(2)}], \\ \tilde{\epsilon}_{st} &= \frac{1}{4} [X_t^{32} u_t^{(4)} - X_s^{42} u_t^{(3)} + X_t^{43} u_t^{(2)} - X_s^{32} u_s^{(4)} + X_s^{42} u_s^{(3)} - X_s^{43} u_s^{(2)}], \end{aligned}$$

e  $u_n^{(i)}$ ,  $u_s^{(i)}$  e  $u_t^{(i)}$  são componentes do deslocamento do nó  $i$  na direção dos eixos  $n$ ,  $s$  e  $t$ , respectivamente, e  $\llbracket u \rrbracket_n = u_n^{(1)} - u_n^{(1')}$ ,  $\llbracket u \rrbracket_s = u_s^{(1)} - u_s^{(1')}$  e  $\llbracket u \rrbracket_t = u_t^{(1)} - u_t^{(1')}$  são as componentes de  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ , dado pelo deslocamento relativo entre o nó 1 e a sua projeção na base do elemento.



**Figura 3.2:** Elemento de interface tetraédrico (adaptado de Bitencourt Jr (2015))

### 3.4 Cinemática de descontinuidade forte

Considere um sólido com uma superfície de descontinuidade  $S$  que separa o domínio  $\Omega$  em duas partes  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$  (Fig. 3.3). O campo de deslocamento total para cada ponto material em  $\Omega$  pode ser expresso como a soma do campo de deslocamento regular  $\tilde{\mathbf{u}}$ , pelo campo de deslocamento descontínuo,  $[[\mathbf{u}]]$  ao longo de  $S$ . Desse modo:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + H_S [[\mathbf{u}]] \quad (3.12)$$

onde  $H_S$  é a função de Heaviside localizada na superfície  $S$  e  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal a  $S$ .

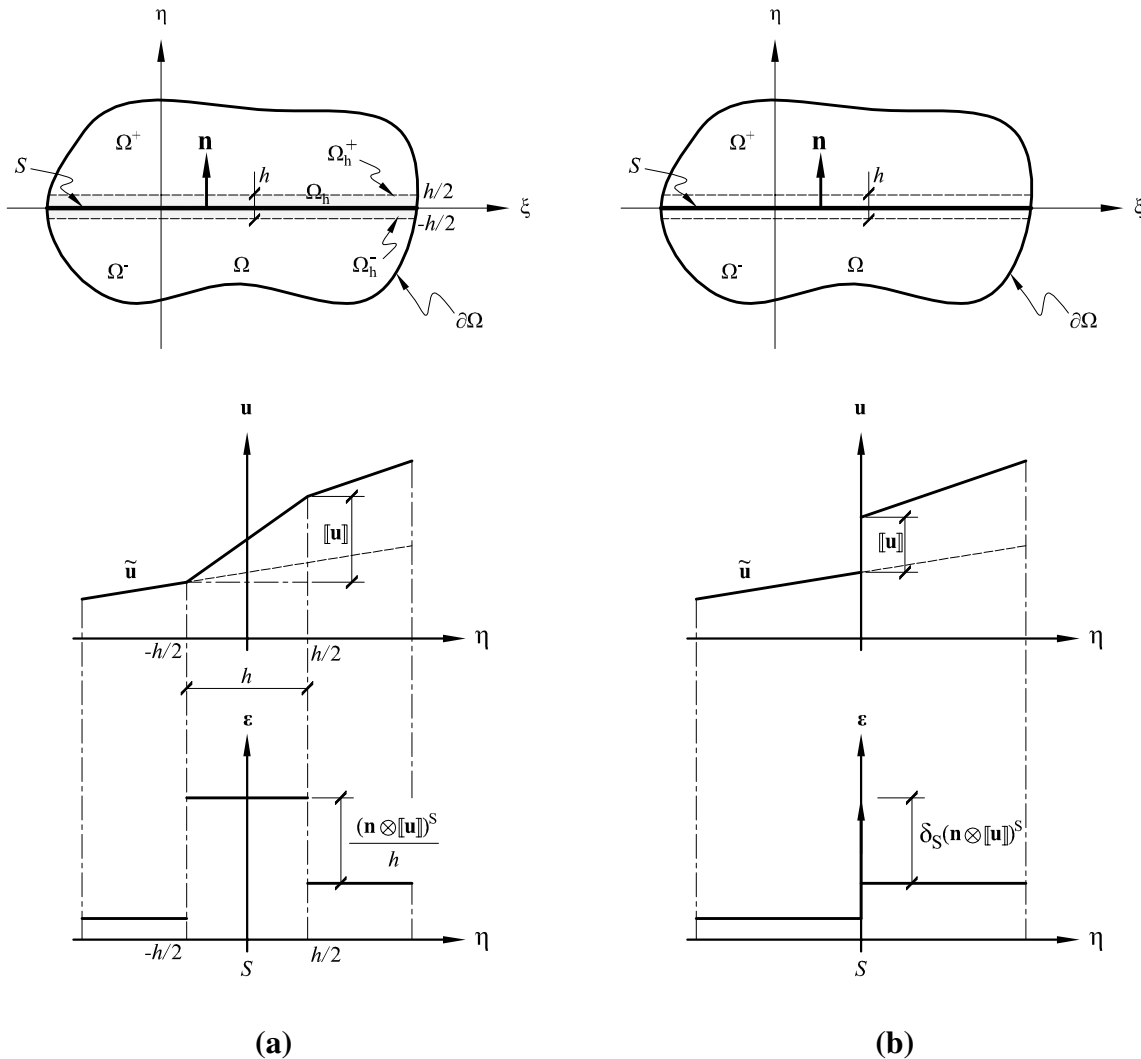


Figura 3.3: (a) Cinemática de descontinuidade fraca; (b) cinemática de descontinuidade forte

O campo de deslocamento no regime de descontinuidade forte pode ser interpretado como a situação limite do regime de descontinuidade fraca, a qual pode ser expressa como:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + Z_S [[\mathbf{u}]] \quad (3.13)$$

sendo  $Z_S(\eta)$  uma função rampa definida por:

$$Z_S(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{se } \eta < -\frac{h}{2} \\ 1, & \text{se } \eta > \frac{h}{2} \\ \frac{\eta}{h} + \frac{1}{2}, & \text{se } -\frac{h}{2} \leq \eta \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (3.14)$$

sendo  $\eta$  o eixo coordenado local normal à superfície  $S$ , de tal modo que  $S$  corresponde a linha  $\eta = 0$  e  $h$  é a banda de localização de deformação (Fig. 3.3a).

Assim, o campo de deformações pode ser expresso pela seguinte equação:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \underbrace{\nabla^S \tilde{\mathbf{u}} + Z_S \nabla^S \llbracket \mathbf{u} \rrbracket}_{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} + \frac{\mu_S(\eta)}{h} (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^S \quad (3.15)$$

onde  $\mu_S$  é função de colocação na banda de localização da deformação expressa pela seguinte equação:

$$\mu_S(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\frac{h}{2} \leq \eta \leq \frac{h}{2} \\ 0, & \text{se } \eta < -\frac{h}{2} \text{ ou } \eta > \frac{h}{2} \end{cases} \quad (3.16)$$

Reorganizando a Eq. (3.15),

$$\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\mu_S(\eta)}{h} (\mathbf{n} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^S \quad (3.17)$$

Conforme a Fig. 3.3, a cinemática de descontinuidade forte corresponde a situação limite do regime descontinuidade fraca quando  $h$  tende a zero. Assim, no regime de descontinuidade forte, a Eq. (3.17) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} + \delta_S (\mathbf{n} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^S \quad (3.18)$$

onde  $\delta_S$  é o delta de Dirac, definido como:

$$\delta_S = \begin{cases} 0, & \text{se } \eta \neq 0 \\ \infty, & \text{se } \eta = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_S d\eta = 1 \quad (3.20)$$

Quando  $h$  se aproxima de zero a deformação do elemento triangular dada pela Eq. (3.9) torna-se similar a expressão da deformação do regime de descontinuidade forte da Eq. (3.15), nos pontos dentro da banda de localização ( $\mu_S = 1$ ).

Portanto, segundo a ACDF, o correspondente campo de tensões pode ser obtido por meio da relação constitutiva contínua (tensão-deformação) mesmo para as deformações não limitadas. Esta abordagem vem sendo utilizada para representar a formação de descontinuidade forte em elementos com descontinuidade incorporada (OLIVER; CERVERA; MANZOLI, 1999; OLIVER; HUESPE; SAMANIEGO, 2003).

### 3.5 Relação constitutiva discreta do elemento finito degradado

O modelo de dano contínuo mostrado previamente no capítulo 2 (Tab. 2.2) foi projetado para representar o processo de fissuração em materiais quase-frágeis. Como comentado também no capítulo anterior, o presente trabalho usa o critério de dano baseado na componente do tensor de tensões normal à base do elemento de interface e em alguns casos estudados também emprega-se o critério de Rankine. Assim, é possível representar a fissuração em modo I e, como a variável de dano degrada todos os componentes da tensão efetiva, também é possível o desenvolvimento de fissuras em modo misto. Portanto, com base nessas observações será usado o modelo constitutivo de dano contínuo dada pela Tab. 2.2.

Como anteriormente mencionado, na situação limite em que a altura  $h$  do elemento de interface tende a zero, a relação constitutiva contínua entre tensões e deformações desse elemento tende a uma relação constitutiva discreta entre tensões na interface e os componentes do salto de deslocamentos. Tal fato pode ser demonstrado considerando as Eqs. (2.45), (2.46) e (3.9), a partir das quais pode-se escrever:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d)\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} = (1 - d)\mathbf{C} : \left[ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{1}{h}(\mathbf{n} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^S \right] = \frac{(1 - d)}{h}\mathbf{C} : [h\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} + (\mathbf{n} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^S] \quad (3.21)$$

Na condição limite de descontinuidade forte, a relação constitutiva dada pela Eq. (3.21) fica

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \underbrace{\frac{(1 - d)}{h} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n})}_{\hat{\mathbf{K}}} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \hat{\mathbf{K}} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (3.22)$$

sendo  $\mathbf{t} = \{ \sigma_{nm} \ \sigma_{ns} \ \sigma_{nt} \}^T$ ,  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \{ \llbracket u \rrbracket_n \ \llbracket u \rrbracket_s \ \llbracket u \rrbracket_t \}^T$  e

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{(1 - d)}{h} \begin{bmatrix} \frac{4}{3}G + K & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Para manter a tensão limitada quando  $h \rightarrow 0$ , os componentes do salto de deslocamentos devem tender para zero quando o sistema encontra-se no regime linear elástico ( $d = 0$ ). Por outro lado, no regime inelástico ( $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \neq 0$ ) a variável de dano  $d$  tende a 1 e o elemento de interface representa o comportamento de dano rígido. A abordagem de usar tensões limitadas a partir de deformações ilimitadas é resultado da teoria da aproximação contínua de descontinuidade forte. Mais detalhes podem ser encontrados em bibliografia específica (SIMO; OLIVER; ARMERO, 1993; OLIVER, 1996; OLIVER; CERVERA; MANZOLI, 1999; OLIVER; HUESPE, 2004a).

Se o coeficiente de Poisson é zero ( $\nu = 0$ ), a relação discreta pode ser expressa pelo módulo de Young,  $E$ , donde

$$\frac{4}{3}G + K = E, \quad G = \frac{1}{2}E \quad (3.24)$$

Para o aumento do deslocamento normal em modo I ( $\llbracket \dot{u} \rrbracket_n > 0$ ,  $\llbracket u \rrbracket_n |_{t=0} = 0$ ,  $\llbracket u \rrbracket_s = 0$ ,  $\llbracket u \rrbracket_t = 0$ ), a evolução da tensão normal torna-se:

$$\sigma_{nn}(\llbracket u \rrbracket_n) = (1 - d) \frac{1}{h} E \llbracket u \rrbracket_n = \begin{cases} \frac{1}{h} E \llbracket u \rrbracket_n & \text{se } \llbracket u \rrbracket_n \leq \llbracket u_0 \rrbracket_n \\ \underbrace{(1 - d)}_{\frac{q}{r}} \underbrace{\frac{1}{h} E \llbracket u \rrbracket_n}_{r} = q(r) & \text{se } \llbracket u \rrbracket_n > \llbracket u_0 \rrbracket_n \end{cases} \quad (3.25)$$

onde  $[[u_0]]_n = (h q_0)/E$ .

Admitindo a lei de abrandamento exponencial dada pela Eq (2.27) e fazendo  $q_0 = f_t$ , obtém-se:

$$q(r) = f_t e^{\mathcal{A} h \left(1 - \frac{r}{f_t}\right)} \quad (3.26)$$

onde  $f_t$  é a tensão de resistência à tração do material e  $\mathcal{A}$  o parâmetro que controla a curvatura da lei exponencial. Quando o elemento de interface se encontra completamente degradado, a energia  $\mathcal{G}_f$  dissipada em modo I pode ser calculada conforme o equacionamento a seguir (ver Fig. 2.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_f &= \int_0^\infty \sigma_{nn}([[u]]_n) d[[u]]_n = \int_0^{[[u_0]]_n} \sigma_{nn}([[u]]_n) d[[u]]_n + \int_{[[u_0]]_n}^\infty \sigma_{nn}([[u]]_n) d[[u]]_n \\ &= \int_0^{[[u_0]]_n} \frac{1}{h} E [[u]]_n d[[u]]_n + \int_{[[u_0]]_n}^\infty f_t e^{\mathcal{A} h \left(1 - \frac{\frac{1}{h} E [[u]]_n}{f_t}\right)} d[[u]]_n \\ &= \frac{1}{h} E \frac{([[u]]_n)^2}{2} \Big|_0^{[[u_0]]_n} - \frac{f_t^2}{\mathcal{A} E} e^{\mathcal{A} h \left(1 - \frac{\frac{1}{h} E [[u]]_n}{f_t}\right)} \Big|_{[[u_0]]_n}^\infty = \frac{1}{E} \left( \frac{f_t^2 h}{2} + \frac{f_t^2}{\mathcal{A}} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Na situação limite  $h \rightarrow 0$  e, conseqüentemente

$$\mathcal{G}_f = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{f_t^2 h}{2} + \frac{f_t^2}{\mathcal{A}} \right) \right] = \frac{f_t^2}{\mathcal{A} E} \quad (3.28)$$

Assim, o parâmetro  $\mathcal{A}$  pode ser expresso pela equação:

$$\mathcal{A} = \frac{f_t^2}{\mathcal{G}_f E} \quad (3.29)$$

Finalmente, pode-se escrever o modelo de dano discreto conforme a Tab. 3.1.

**Tabela 3.1:** Modelo constitutivo discreto de dano isotrópico para problemas 2D e 3D

Relação constitutiva:	$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{K}} [[\mathbf{u}]], \quad \hat{\mathbf{K}} = \frac{(1-d)}{h} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}$
Tensão equivalente:	$\bar{\tau} = \bar{\sigma}_{nn} = \frac{1}{h} E [[u]]_n$
Critério de dano:	$\bar{\phi} = \bar{\tau} - r \leq 0$
Evolução da variável interna $r$ :	$r = \max_{S \in [0, t]} [q_0, \tau_S]$
Evolução do dano:	$d = 1 - q(r)/r, \quad d = [0, 1]$
Lei de endurecimento/abrandamento:	$q(r) = f_t e^{\mathcal{A} h (1 - r/f_t)}$
Para o caso 2D:	$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ns} \end{Bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{K}} = (1-d) \frac{1}{h} E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}; \quad [[\mathbf{u}]] = \begin{Bmatrix} [[u]]_n \\ [[u]]_s \end{Bmatrix}$
Para o caso 3D:	$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ns} \\ \sigma_{nt} \end{Bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{K}} = (1-d) \frac{1}{h} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}; \quad [[\mathbf{u}]] = \begin{Bmatrix} [[u]]_n \\ [[u]]_s \\ [[u]]_t \end{Bmatrix}$



# Técnica de Fragmentação da Malha

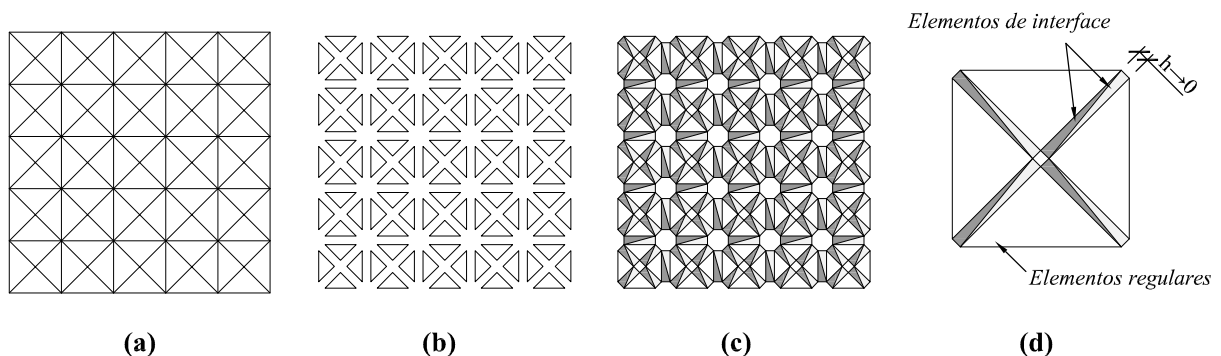
---

## 4.1 Introdução

Para o desenvolvimento deste trabalho foi utilizado o software GiD (CIMNE, 2015) durante as etapas de pré e pós-processamento e o programa *in house* Omega para análise numérica dos modelos. Além disso, a introdução dos elementos sólidos de interface foi automatizada, dando origem a uma rotina que fragmenta a malha inicial. Esta rotina foi escrita em linguagem FORTRAN e denominada *dfrag2d3d*. As seções subsequentes expandem a análise e estudo desse procedimento, explanando quais são as entradas necessárias, as saídas emitidas, a estrutura do algoritmo e a interação com as outras ferramentas empregadas.

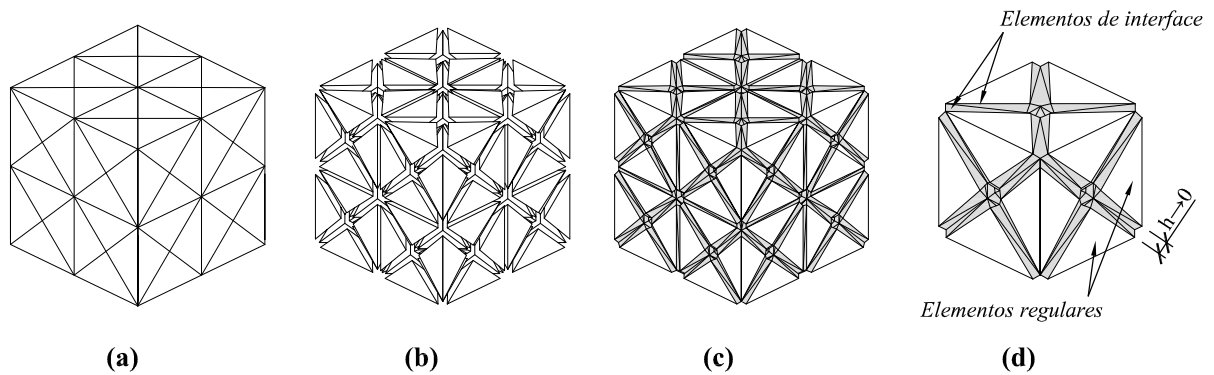
## 4.2 Implementação computacional da técnica de fragmentação da malha

De modo geral, o programa *dfrag2d3d* recebe dados topológicos do sistema, elabora uma nova topologia, constrói elementos finitos de elevada razão de aspecto e os insere entre os elementos da malha original, conforme Fig. 4.1 para o caso 2D e Fig. 4.2 para o caso 3D.



**Figura 4.1:** Técnica de fragmentação da malha para problemas 2D (Adaptado de Sánchez, Manzoli e Guimarães (2014)): (a) malha original; (b) malha fragmentada; (c) malha com elementos de interface entre os elementos regulares; (d) par de elementos de interface entre os elementos regulares

Como a topologia, as condições de contorno e a definição dos parâmetros materiais constituem parte do pré-processo, o programa recebe como dados de entrada informações da malha original gerada pelo GiD. Logo, o código recebe como dados de entrada o número de nós, elementos, nós



**Figura 4.2:** Técnica de fragmentação da malha para problemas 3D (Adaptado de Sánchez, Manzoli e Guimarães (2014)): (a) malha original; (b) malha fragmentada; (c) malha com elementos de interface entre os elementos regulares; (d) elementos de interface entre os elementos regulares

por elemento, dimensões e materiais. Além disso, o programa também precisa dos números que definem cada um dos materiais e a espessura dos elementos finitos de interface que serão inseridos. Também devem ser listados todos os elementos com os respectivos nós que os definem, além do material que os compõem. Após a lista de incidência de elementos, todos os nós devem ser inseridos com as suas correspondentes coordenadas em  $x$  e  $y$ , no caso 2D, ou em  $x$ ,  $y$  e  $z$  para problemas 3D. A Fig. 4.3 ilustra um arquivo padrão resultante do pré-processamento e a Fig. 4.4 mostra um típico arquivo de entrada de dados para o programa de fragmentação da malha.

Após a leitura de dados, o programa percorre a matriz de conectividade comparando dois elementos e verifica a existência de nós comuns entre eles. Nas análises realizadas foram utilizados apenas elementos triangulares, para estudos no plano, e elementos tetraédricos, para sistemas tridimensionais. Logo, no plano, só são considerados vizinhos os elementos que apresentarem dois nós em comuns, enquanto no espaço os elementos são definidos como vizinhos quando possuírem três nós em comuns, como mostra a Fig. 4.5.

```

$-----
CONTROL_DATA
  Dimensions: [npoin= 5 nelem= 2 ndime= 3 nnode= 4] /
              [ngaus= 1 nsets= 2 nmats= 2] mcurv=20 nfunc=2
SMOOTHING: DIRECT
END_CONTROL_DATA
$-----
GENERAL_DATA
$-----
GEOMETRY: NO_INTERPOLATE


|   |         |         |         |         |         |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 1       | 4       | 2       | 3       | 5       |
| 2 | 2       | 2       | 4       | 3       | 1       |
| 1 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 2 | 1.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 3 | 1.00000 | 1.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 4 | 1.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 1.00000 | 0.00000 |
| 5 | 2.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |


END_GEOMETRY
$-----

```

**Figura 4.3:** Arquivo com extensão .dat exportado pelo GiD

```

5 2 4 3 NNOS NELEM NNOD NDIM
2 1 2 0.01 NSETS NMAT1 NMAT2 NMAT3 THICK
1 1 4 2 3 5
2 2 2 4 3 1

```

matriz conen(nelm, nnod)

1	0.00000	0.00000	0.00000
2	1.00000	0.00000	0.00000
3	1.00000	1.00000	0.00000
4	1.00000	0.00000	1.00000
5	2.00000	0.00000	0.00000
0			

matriz nc(ndim, nnos)

vetor nset(nelm)

Figura 4.4: Arquivo inp3d.dat necessário para executar o programa de fragmentação da malha

As próximas instruções do código executam repetições para inserir novos nós em elementos que são vizinhos e que pertençam à região que deverá ser fragmentada. Nesta etapa, na região onde ocorrerá a fragmentação da malha, as coordenadas dos nós serão alteradas reduzindo os elementos da malha original. Entretanto, esta redução é muito pequena, pois, nas lacunas entre elementos da malha serão inseridos os elementos de elevada razão de aspecto. Logo, ao término dessas instruções, os elementos que serão fragmentados estarão separados por uma distância igual a espessura dos elementos especiais de interface.

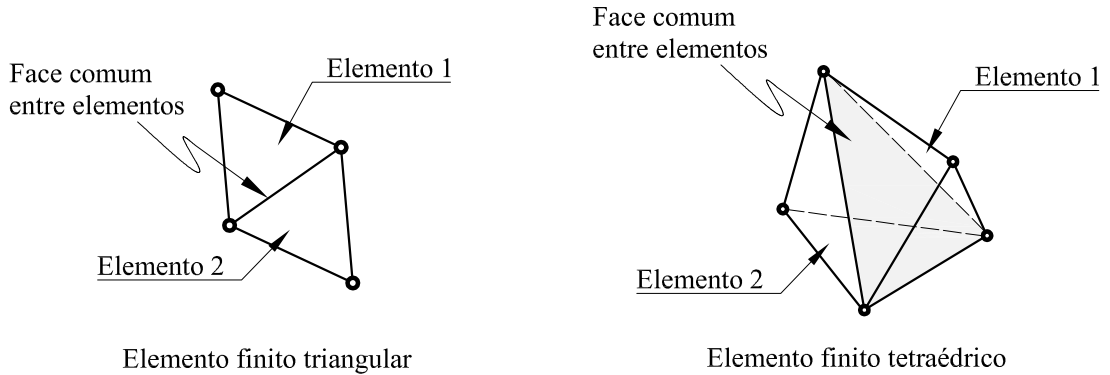


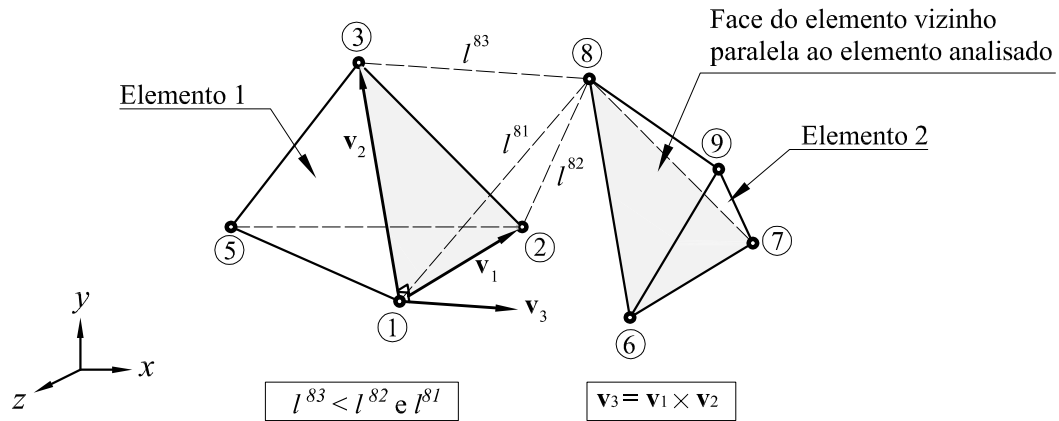
Figura 4.5: Elementos finitos adjacentes

No próximo bloco de comandos o código analisa toda a malha, verificando o material de cada elemento. Caso o material delimite a região de fragmentação, então o programa percorre as quatro faces do elemento. Assim, com base no elemento e na face considerada, o programa encontra o elemento vizinho e procura qual face eles compartilham. Caso o elemento adjacente exista, possua numeração maior do que a do elemento considerado e eles estejam separados, o código deve fazer a correspondência dos nós. A associação entre os nós é feita pela menor distância entre dois pontos. Esta distância  $l$  é calculada como:

$$l^{ji} = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 \tag{4.1}$$

onde  $l^{ji}$  é a distância entre os pontos  $i$  e  $j$ ,  $x_j, y_j$  e  $z_j$  são as coordenadas do ponto  $j$  e  $x_i, y_i$  e  $z_i$  são as coordenadas do ponto  $i$  (Fig. 4.6). Para problemas 2D,  $z_j = z_i = 0$ . Note que  $l$  é apenas utilizado como fator comparativo para fazer a correspondência entre dois nós de elementos diferentes.

O programa segue chamando uma função que calcula o vetor unitário normal à face considerada. Deve-se ressaltar que o sinal desse vetor define em qual sentido deve ser introduzido os elementos

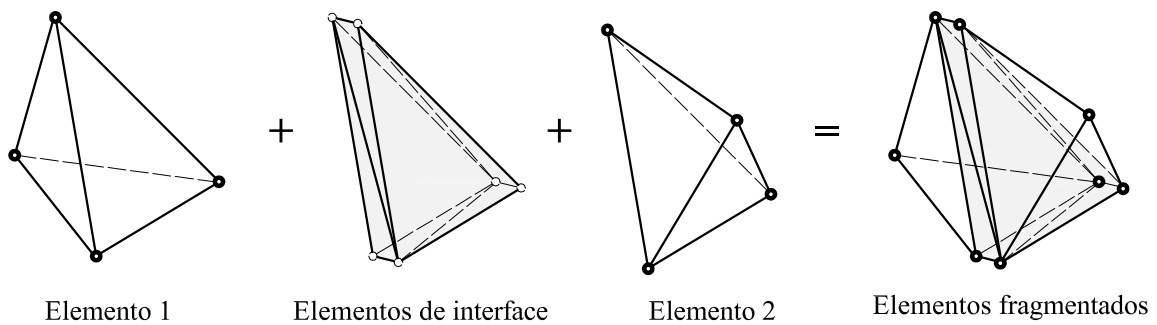


**Figura 4.6:** Associação entre os nós de elementos adjacentes pela menor distância

de interface. Desse modo, deve-se proceder fazendo o produto vetorial no plano da face analisada. A Fig. 4.6 mostra esquematicamente o vetor resultante do cálculo algébrico.

A partir da Fig. 4.6 é possível observar a influência do sinal. Caso o vetor  $\mathbf{v}_3$  fosse negativo, isso indicaria que a interface deveria ser introduzida no sentido contrário. Assim, o programa calcula o volume vetorialmente para determinação do vetor normal à face e o seu sentido. Contudo, o módulo desse vetor deve ser unitário, indicando apenas uma direção e um sentido. Assim, o vetor normal é normalizado.

Com base na orientação espacial dada pelo vetor unitário  $\mathbf{n}$  e na espessura da interface  $h$ , o código prossegue inserindo os elementos de interface entre os elementos regulares da malha original (Fig. 4.7). O programa finaliza, retornando como respostas o número de nós, número de elementos e duas matrizes: a primeira contendo a incidência de todos os elementos e a segunda com todos os nós e suas respectivas coordenadas.



**Figura 4.7:** Inserção dos elementos especiais de interface entre os elementos regulares

Ao término do programa, as informações do arquivo de saída devem ser copiadas para um arquivo de cálculo para que possa ser realizado o processamento. Todos os casos estudados do próximo capítulo foram submetidos ao processo de fragmentação da malha. Conseqüentemente, o programa desenvolvido foi utilizado extensivamente e, por isso, a automatização possibilitou o estudo da técnica para diferentes casos e malhas.

# Simulações Numéricas

---

## 5.1 Introdução

Todas as estruturas bidimensionais foram modeladas utilizando elementos triangulares lineares, enquanto os modelos tridimensionais foram simulados com elementos finitos tetraédricos lineares. Para representar o processo de fissuração foram introduzidos elementos especiais de interface entre os elementos da malha original. Em alguns casos foram inseridos elementos especiais em toda a malha. Contudo, em diversas situações os elementos de interface foram inseridos apenas em uma determinada região da malha original com o intuito de minimizar o tempo de processamento e o esforço computacional envolvido (MANZOLI et al., 2014).

A parte não-linear das análises foi tratada com um método numérico que combina os processos iterativos de Newton-Raphson (CRISFIELD, 1991) com a técnica de controle de deslocamento (BATOZ; DHATT, 1979). O caso envolvendo fraturamento hidráulico é uma exceção, pois, neste tipo de problema deve-se levar em consideração a influência do fluido no processo de fratura. O modelo constitutivo de dano à tração de todos os casos foi integrado por meio do algoritmo implícito-explícito IMPL-EX abordado no capítulo 2. O tamanho dos passos de carga varia conforme o caso.

Vale frisar que apenas o comportamento dos elementos de interface é descrito pelo modelo de dano à tração, enquanto os elementos regulares da malha exibem comportamento elástico linear. Ressalta-se também que o parâmetro  $\mathcal{A}$  desses elementos munidos com o modelo de dano à tração foi calculado com base na Eq. (3.29)

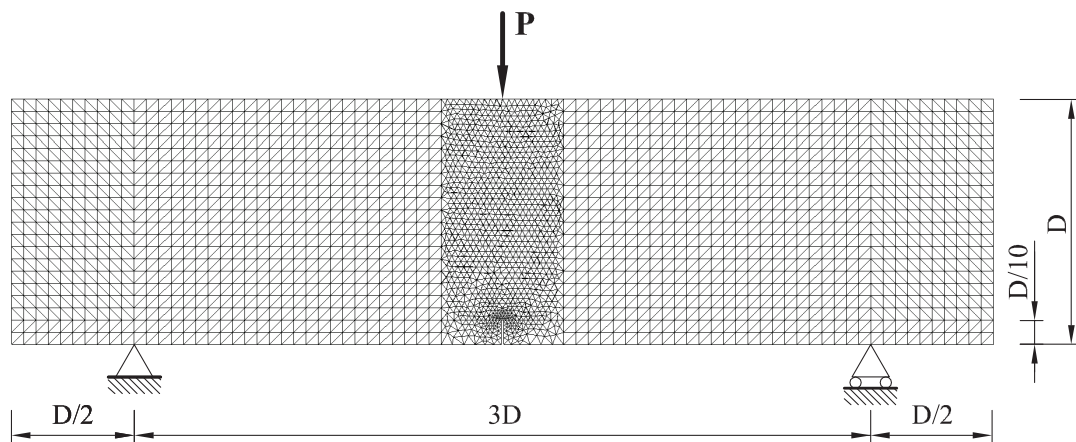
## 5.2 Estudos de casos 2D

Cinco estruturas bidimensionais foram simuladas (duas vigas, duas placas e um poço), sendo que para os quatro primeiros casos analisados foram geradas malhas com diferentes graus de refinamento. Além disso, nesses quatro casos contrastou-se as respostas estruturais obtidas para cada malha com as experimentais, objetivando estudar a dependência da técnica com relação à malha de elementos finitos. Para a viga de três pontos também analisou-se a influência da espessura dos elementos de interface na resposta estrutural obtida. O poço foi simulado com o intuito de mostrar que a técnica também é capaz de tratar problemas de fraturamento hidráulico.

As análises 2D das vigas e das placas foram realizadas considerando estado plano de tensão. Já no caso do poço admitiu-se estado plano de deformação. Nas próximas subseções serão apresentados os casos 2D estudados.

### 5.2.1 Viga de três pontos

A simulação da viga de três pontos foi desenvolvida com base nos ensaios realizados por Bellego, Gérard e Pijaudier-Cabot (2000). Assim, três vigas com diferentes alturas foram submetidas a deslocamentos verticais no topo da seção transversal central da peça. A geometria e as condições de contorno do presente caso podem ser observadas na Fig. 5.1. Como é possível observar, a malha foi concebida de tal forma que houve um refinamento apenas na região central da peça. Nota-se que esse refinamento deve ser realizado na região de propagação da fissura. Consequentemente, apenas entre os elementos da parte refinada serão inseridos elementos de elevada razão de aspecto.



**Figura 5.1:** Geometria e condições de contorno da viga de três pontos

Para os elementos regulares da viga de três pontos foram considerados  $E = 38.5$  GPa e  $\nu = 0.24$ . No caso dos elementos de interface, as seguintes propriedades mecânicas foram utilizadas:  $E = 38.5$  GPa,  $f_t = 3.6$  MPa,  $\mathcal{G}_f = 50$  N/m e  $\nu = 0$ .

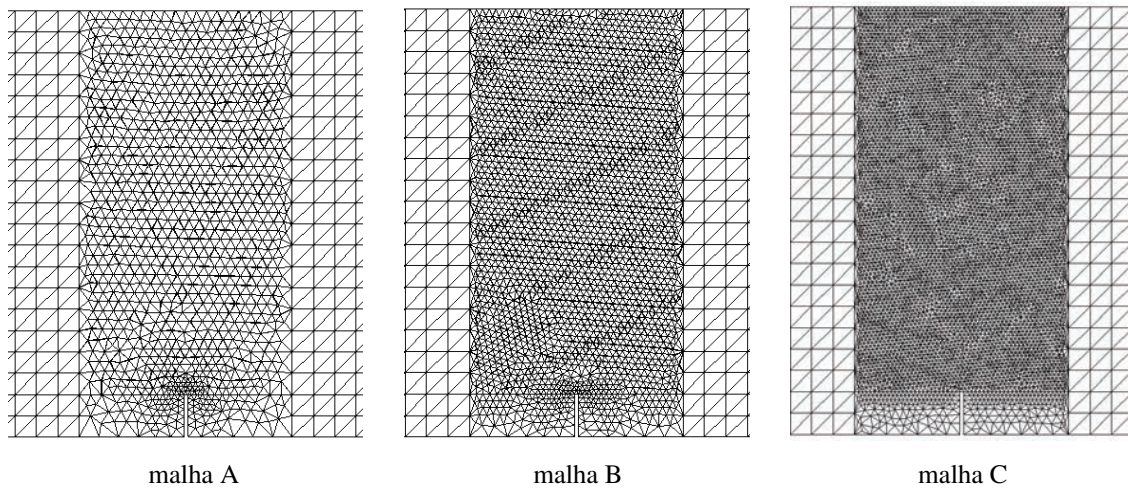
Todos os estudos envolvendo a viga de três pontos foram conduzidos considerando incrementos de deslocamento de  $1.25 \times 10^{-4}$  mm/passos, os quais foram aplicados ao longo de 3200 passos. Desse modo, calculou-se a carga  $P$  (ver Fig. 5.1) para cada incremento de deslocamento no topo da seção transversal central da viga.

As análises foram realizadas variando o tamanho das amostras e da malha de elementos finitos. Assim, foram utilizadas três escalas diferentes ( $D = 320$  mm,  $160$  mm e  $80$  mm) e para cada viga foram geradas três malhas com diferentes graus de refinamento, conforme Fig. 5.2 e Tab. 5.1.  $N_{nos}$ ,  $N_{el(r)}$ ,  $N_{el(i)}$  e  $N_{el(t)}$  referem-se ao número de nós, de elementos regulares, de elementos de interface e total, respectivamente. Nota-se que a espessura de todas as vigas é  $40$  mm, independente da altura  $D$  utilizada.

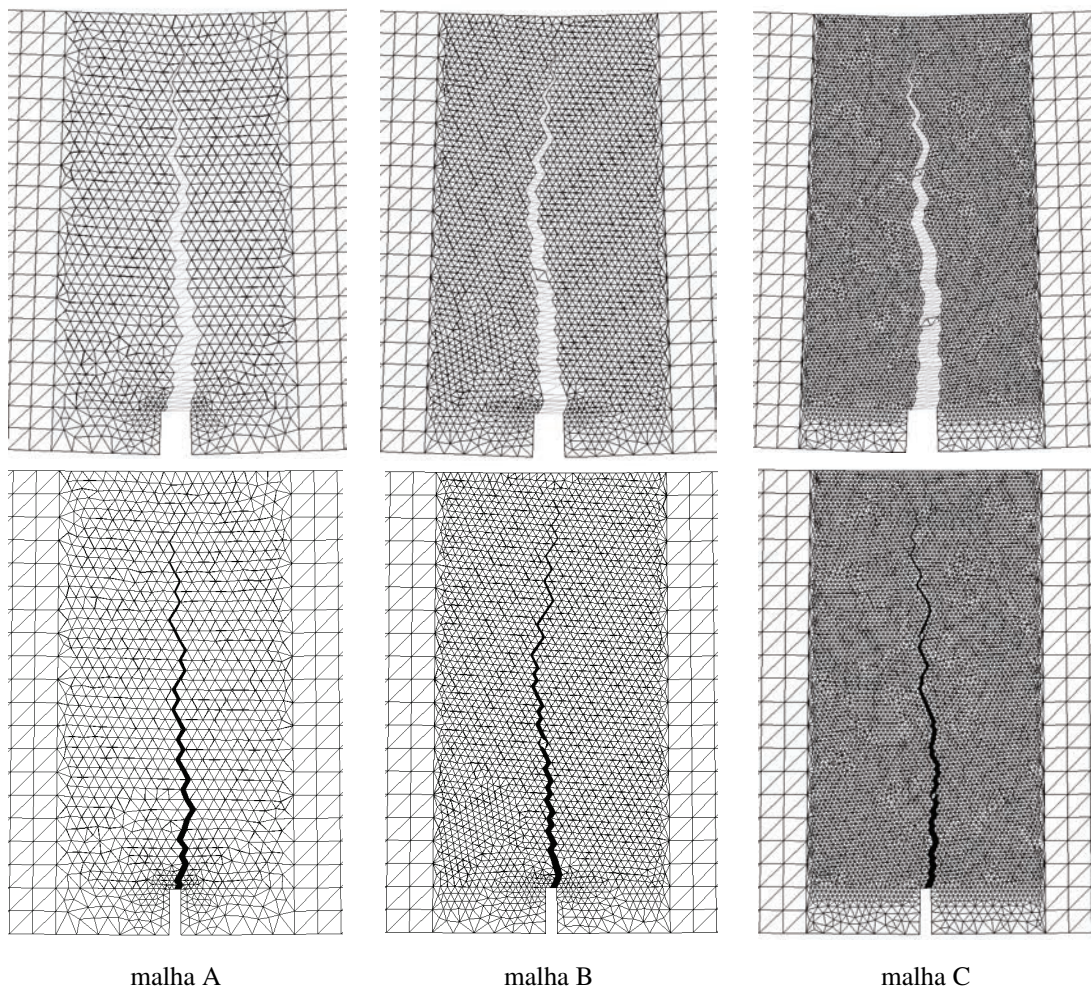
**Tabela 5.1:** Características das malhas da viga de três pontos

Malha de elementos finitos	$N_{nos}$	$N_{el(r)}$	$N_{el(i)}$	$N_{el(t)}$
malha A	6861	4747	5264	10011
malha B	14335	7335	12672	20007
malha C	36748	14983	34962	49945





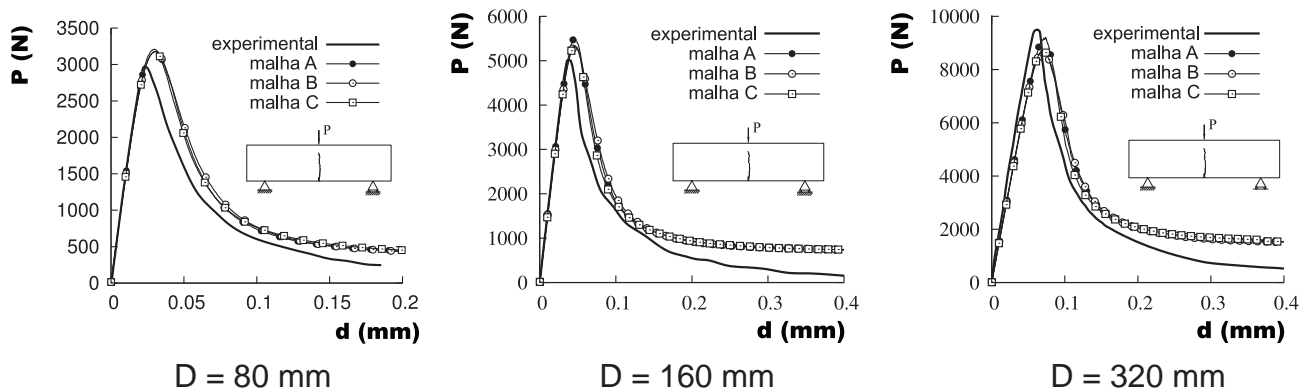
**Figura 5.2:** Malhas utilizadas para a análise da viga de três pontos



**Figura 5.3:** Malhas da viga de três pontos deformadas

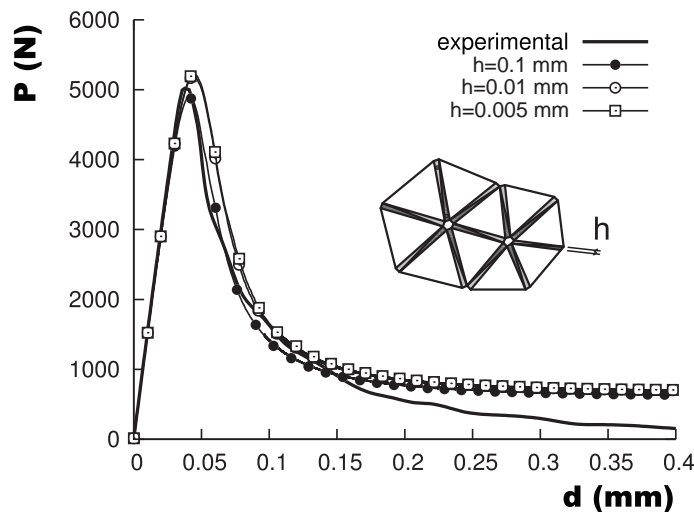
**Observação 5.1.** As três malhas mostradas na Fig. 5.2 e na Fig. 5.3 são da peça que possui  $D = 160$  mm. Essas mesmas malhas também foram empregadas para simular as vigas com  $D = 320$  mm e  $D = 80$  mm, alternado-se as escalas das malhas.

A Fig. 5.3 mostra a viga fissurada com um fator de ampliação dos deslocamentos exagerado para mostrar os elementos de interface e, posteriormente, ilustra o padrão da fissura. As soluções obtidas para cada amostra podem ser observadas na Fig. 5.4. Deve-se ressaltar que não há uma diferença expressiva entre os resultados obtidos para as diferentes malhas, não evidenciando uma significativa dependência da malha. Além disso, as respostas decorrentes das análises condizem com a experimental.



**Figura 5.4:** Respostas estruturais para as diferentes amostras e malhas da viga de três pontos

Para a malha B da viga de três pontos também estudou-se a influência da espessura dos elementos de interface na resposta. Para tanto, analisou-se a peça com  $D = 160$  mm utilizando três interfaces diferentes com  $h = 0.1$ ,  $0.01$  e  $0.005$  milímetros. Assim, a resposta estrutural, mostrada na Fig. 5.5, evidencia que não há uma diferença expressiva nos resultados ao variar-se a dimensão  $h$  do elemento de elevada razão de aspecto.



**Figura 5.5:** Respostas estruturais para diferentes espessuras de interface



Empregando o critério de Rankine nas simulações (ao invés daquele baseado na componente do tensor de tensões normal à base do elemento de interface), as fissuras se desenvolveram conforme Fig. 5.6, obtendo-se como soluções as curvas ilustradas na Fig. 5.7a. Observe que neste caso as três malhas foram denominadas como A', B' e C'. A Fig. 5.7b mostra a resposta estrutural das soluções obtidas, comparando os critérios utilizados.

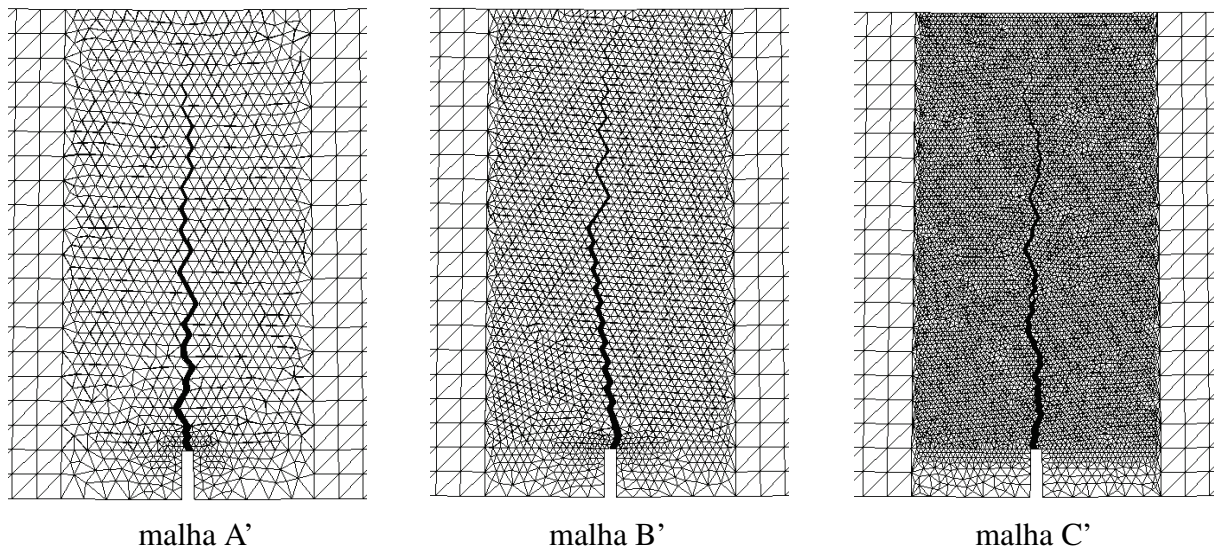


Figura 5.6: Malhas da viga de três pontos deformadas, utilizando o critério de dano de Rankine

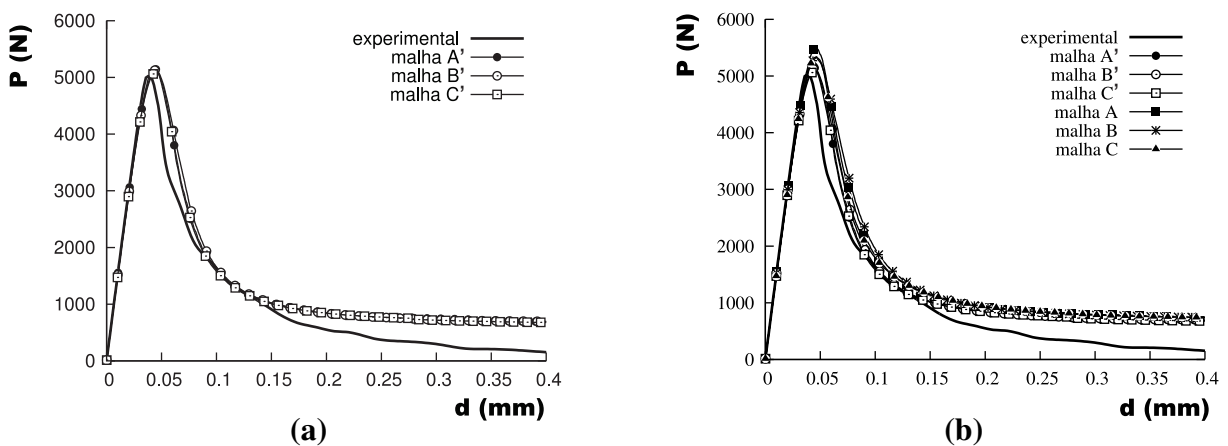
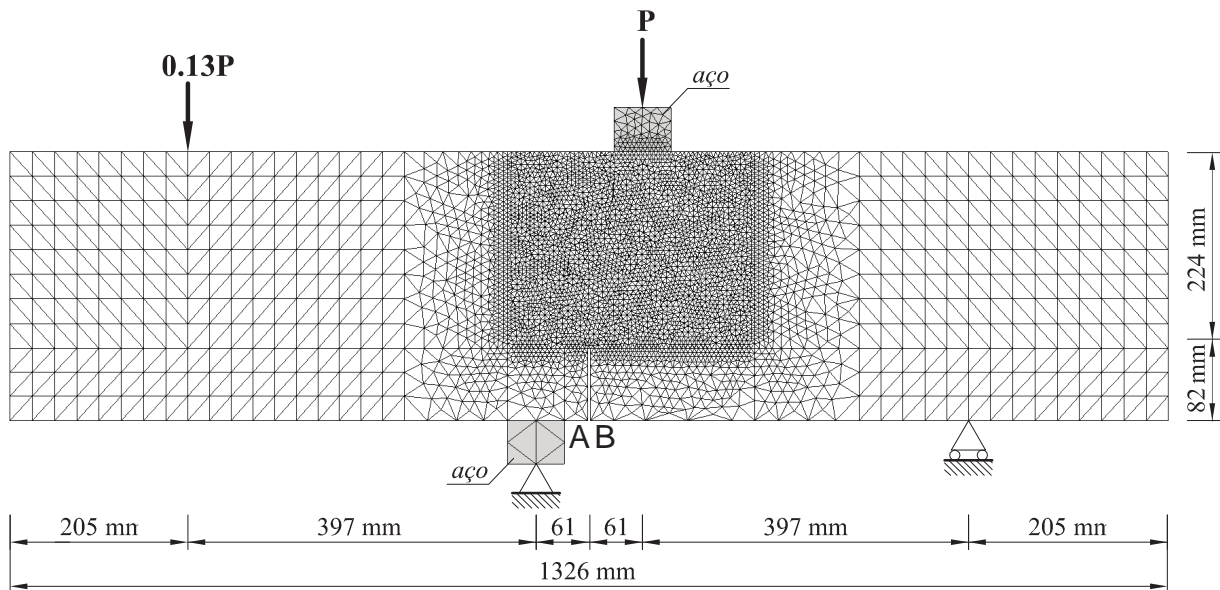


Figura 5.7: Resposta estrutural da viga de três pontos: (a) Critério de dano de Rankine; (b) comparação entre os critérios de dano

### 5.2.2 Viga de quatro pontos

Neste caso, a viga de quatro pontos ensaiada por Arrea e Ingraffea (1982) foi simulada. As características geométricas e as condições de contorno da estrutura de concreto são mostradas na Fig. 5.8. A viga apresenta espessura de 150 mm. Os parâmetros considerados para os elementos regulares foram  $E = 28.8 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0.18$ . Para os elementos de interface, as seguintes propriedades mecânicas foram assumidas:  $E = 28.8 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0$ ,  $\mathcal{G}_f = 100 \text{ N/m}$ , e  $f_t = 2.8 \text{ MPa}$ . Analogamente ao caso anteriormente estudado, apenas a região da malha onde deve ocorrer a fratura foi refinada e fragmentada.



**Figura 5.8:** Geometria e condições de contorno para viga de quatro pontos

O estudo foi realizado utilizando seis diferentes malhas: três compostas de muitos alinhamentos, denominadas A', B' e C', e três malhas com muitos desalinhamentos, chamadas de A, B e C. A Tab. 5.2 mostra o número de nós ( $Nnos$ ), elementos regulares ( $Nel_{(r)}$ ), de interface ( $Nel_{(i)}$ ) e total ( $Nel_{(t)}$ ) de cada malha.

**Tabela 5.2:** Características das malhas da viga de quatro pontos

Malha de elementos finitos	$Nnos$	$Nel_{(r)}$	$Nel_{(i)}$	$Nel_{(t)}$
malha A	16718	7972	15204	23176
malha B	50615	20800	48188	68988
malha C	115772	44491	112170	156661
malha A'	18730	8232	17456	25688
malha B'	50053	19191	48476	67667
malha C'	111113	40271	109134	149405

Dois intervalos de aplicação de deslocamentos foram utilizados nesse caso. Assim, no primeiro intervalo controlou-se o deslocamento vertical no nó correspondente ao ponto de aplicação da carga

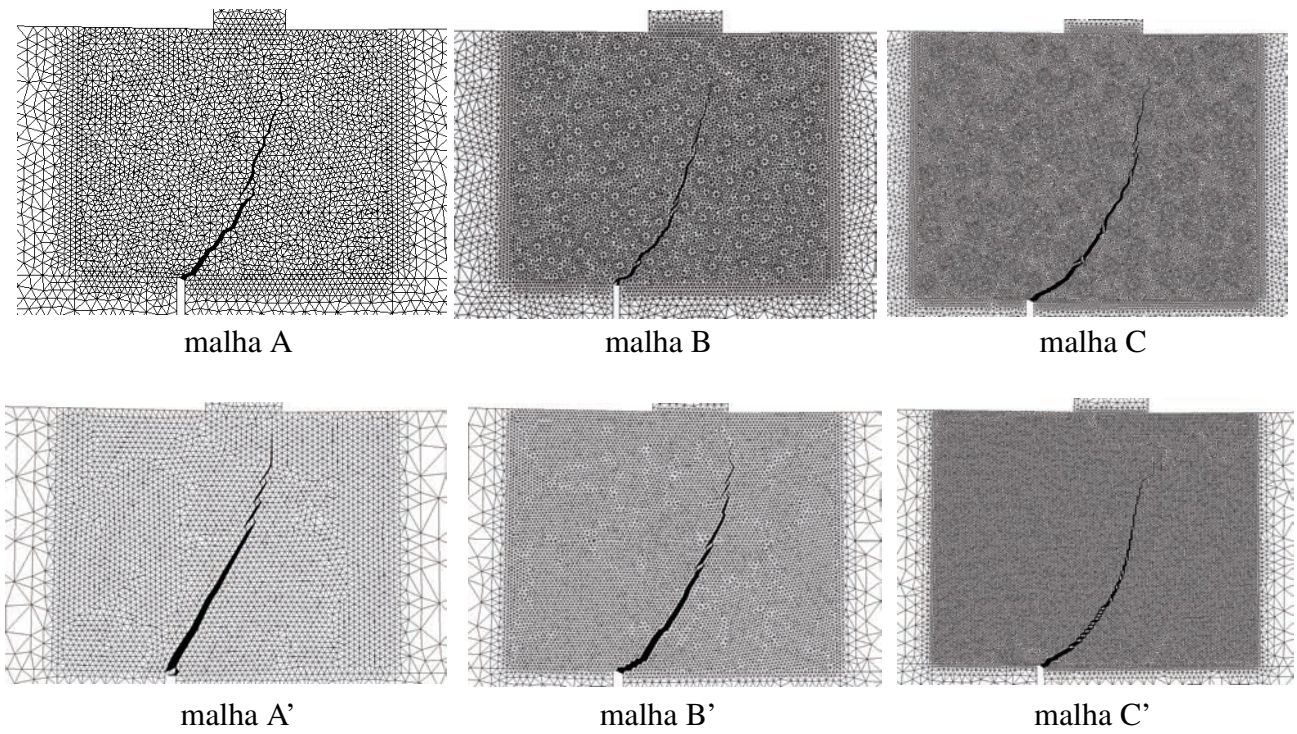


Figura 5.9: Malhas da viga de quatro pontos deformadas

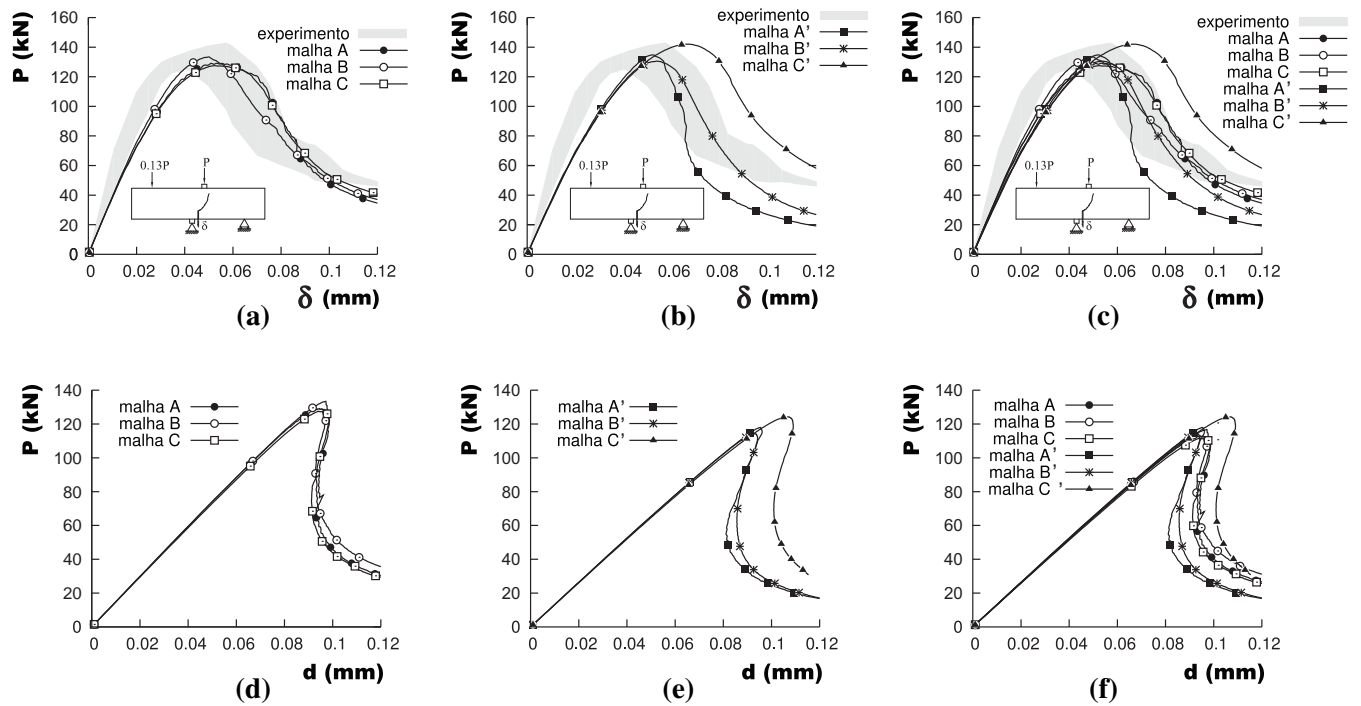


Figura 5.10: Respostas estruturais para a viga de quatro pontos

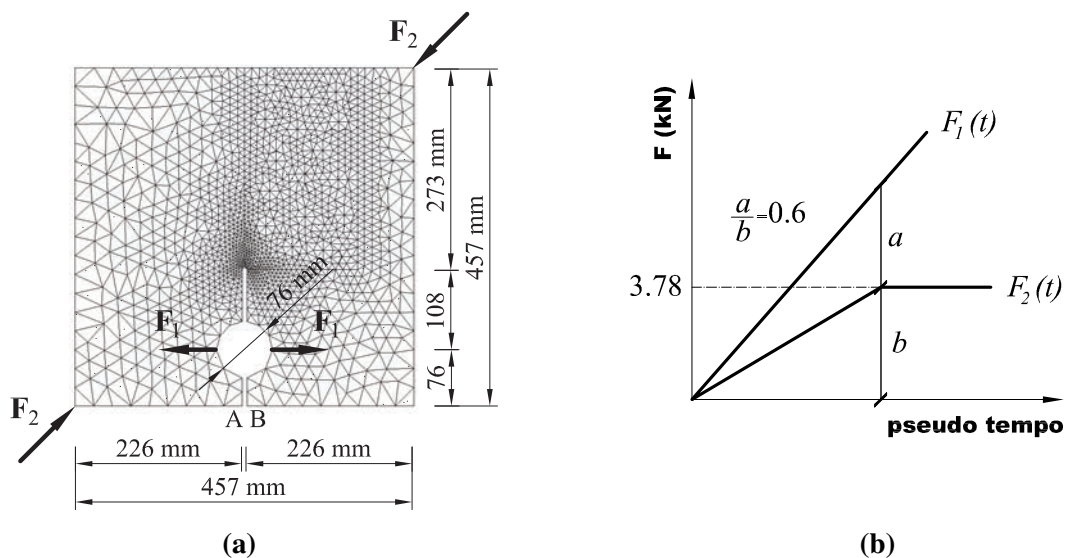


**P.** No segundo intervalo, controlou-se o deslocamento vertical do ponto B (ver Fig. 5.8), isto é, do ponto associado ao lado direito inferior do entalhe. Enquanto no primeiro intervalo foram aplicados 50 passos de incrementos de deslocamentos de  $10^{-3}$  mm/passos, no segundo intervalo a viga foi submetida a 900 passos de incrementos verticais de  $2 \times 10^{-4}$  mm/passos.

A Fig. 5.9 ilustra a trajetória da fissura resultante da simulação numérica. Já a Fig. 5.10, mostra as curvas de  $\mathbf{P}$  vs.  $\delta$  e  $\mathbf{P}$  vs.  $\mathbf{d}$ , onde  $\mathbf{P}$  é a carga,  $\delta$  é deslocamento vertical relativo entre os pontos A e B (Fig. 5.8) e  $\mathbf{d}$  é o deslocamento vertical do ponto B. Ainda de acordo com a Fig. 5.10 é possível observar os resultados decorrentes dos ensaios conduzidos por Arrea e Ingraffea (1982). Nota-se que as curvas numéricas das malhas não estruturadas estão dentro da região delimitada pela resposta experimental.

### 5.2.3 Placa entalhada com carga diagonal

A simulação numérica do presente caso foi baseada nos ensaios relatados por Kobayashi et al. (1985). Conforme a Fig. 5.11a, a placa possui dimensões de 457 mm  $\times$  457 mm, com espessura de 50.8 mm, e foi submetida a um par de forças  $F_1$ , que solicita o interior do entalhe, e outro par de forças  $F_2$  que comprime diagonalmente a estrutura. Esse caso também foi estudado mediante dois intervalos de tempo. O primeiro intervalo consiste na aplicação das cargas  $F_1$  e  $F_2$  ao longo de 10 passos, conforme Fig. 5.11b. No segundo intervalo controlou-se o deslocamento horizontal no ponto onde  $F_1$  aponta para a direita. Ressalta-se que nesse intervalo a força  $F_2$  é mantida constante ao longo do processo de carga. Assim, a placa é submetida a 1600 passos de  $3.5 \times 10^{-4}$  mm/passos nesse segundo intervalo.



**Figura 5.11:** Placa entalhada com carga diagonal: (a) geometria e condições de contorno; (b) processo de carga no primeiro intervalo

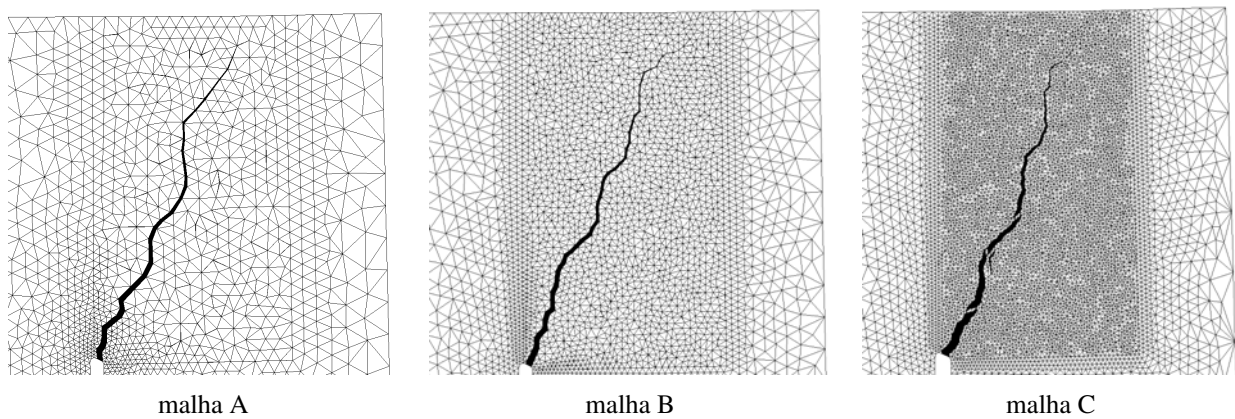
Para a presente simulação foram considerados os seguintes parâmetros para os elementos regulares:  $E = 31$  GPa e  $\nu = 0.2$ . Já para os elementos de interface, admitiu-se:  $E = 31$  GPa,  $\nu = 0$ ,  $f_t = 2.7$  MPa e  $\mathcal{G}_f = 0.1$  N/mm.

As análises foram conduzidas considerando três diferentes malhas, conforme Tab. 5.3. Como nos casos anteriores, também apenas a região da malha correspondente à propagação da fissura

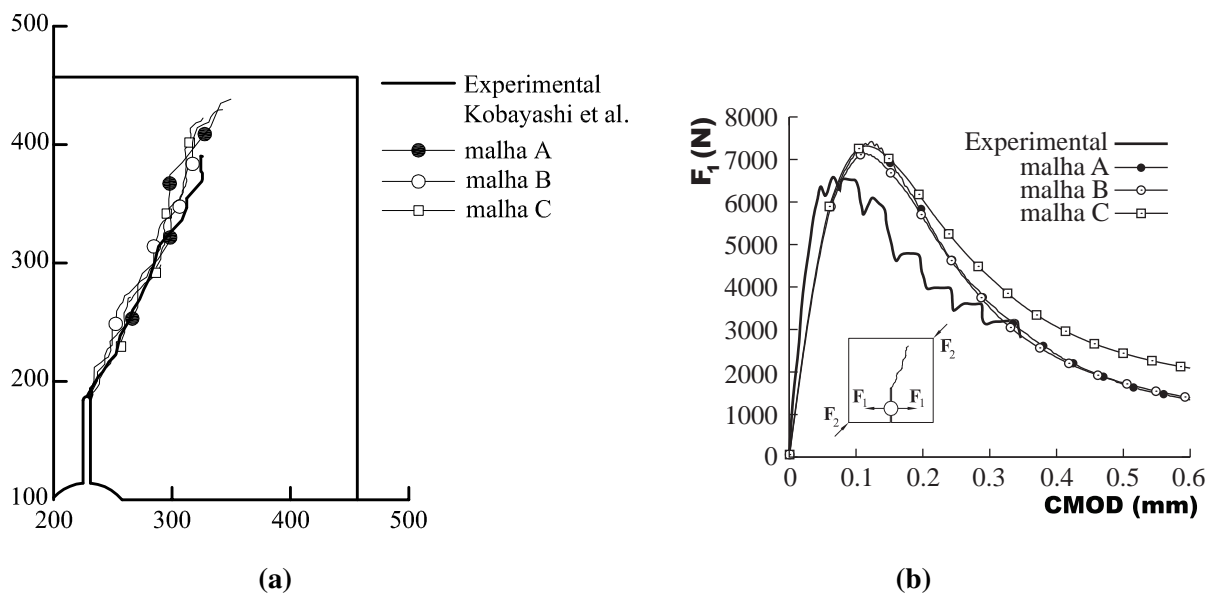
foi refinada e fragmentada. A Fig. 5.12 ilustra as três malhas deformadas com suas respectivas fissuras, enquanto a Fig. 5.13a compara as trajetórias das fissuras obtidas com a experimental. Na Fig. 5.13b, as curvas  $F_1$  vs. CMOD são mostradas, de modo que  $F_1$  denota a carga e CMOD é o deslocamento da abertura dos lábios da fissura (*crack mouth opening displacement*), i.e., é o deslocamento horizontal relativo entre os nós A e B (Fig. 5.11a). Como é possível observar, neste caso também contrastou-se as soluções obtidas com a experimental.

**Tabela 5.3:** Características das malhas da placa entalhada com carga diagonal

Malha de elementos finitos	$N_{nos}$	$Nel_{(r)}$	$Nel_{(i)}$	$Nel_{(t)}$
malha A	2798	1921	2152	4073
malha B	11076	5725	9812	15537
malha C	43827	18671	41364	60035



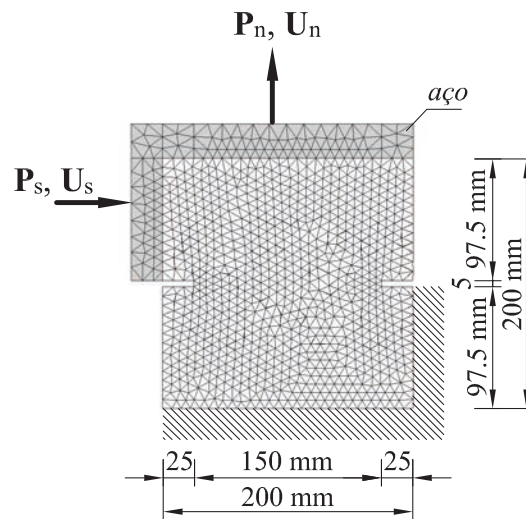
**Figura 5.12:** Malhas deformadas para a placa entalhada com carga diagonal



**Figura 5.13:** Resultados da placa entalhada com carga diagonal: (a) trajetória da fissura; (b) resposta estrutural

### 5.2.4 Placa com dois entalhes

Para ilustrar a capacidade da técnica de representar o processo de fissuração em modo misto foi testada uma espécime plana de concreto com dois entalhes. Este teste foi ensaiado por Nooru-Mohamed (1992). Como ilustra a Fig. 5.14, a placa de dimensões  $200 \times 200 \times 50$  mm foi solicitada inicialmente por uma força  $\mathbf{P}_s = 10$  kN e posteriormente submetida a deslocamentos verticais  $\mathbf{U}_n$ . Logo, enquanto no primeiro intervalo aplicou-se 10 passos de carga na placa, no segundo intervalo houve o controle dos deslocamentos verticais no topo da peça, de modo que foram aplicados 1600 passos de  $10^{-4}$  mm/passos. Observa-se que durante a imposição de  $\mathbf{U}_n$ , a carga  $\mathbf{P}_s$  se manteve constante.



**Figura 5.14:** Geometria e condições de contorno para a placa com dois entalhes

O módulo de elasticidade  $E = 32$  GPa e o coeficiente de Poisson  $\nu = 0.18$  foram utilizados como parâmetro para os elementos finitos regulares. No caso dos elementos de interface, adotaram-se:  $E = 32$  GPa,  $\nu = 0$ ,  $\mathcal{G}_f = 25$  N/m e  $f_t = 2.5$  MPa.

Para o presente estudo, também foram geradas três malhas com diferentes refinamentos como mostra a Tab. 5.4. A Fig. 5.15 ilustra as fissuras decorrentes do processo de fratura para as três malhas analisadas. A Fig. 5.16 compara as fissuras simuladas e a fissura ensaiada por Nooru-Mohamed (1992). A Fig. 5.16 também mostra as respostas estruturais numéricas e a decorrente do experimento. Pode-se observar que o resultado numérico representou adequadamente o experimental, não demonstrando dependência significativa da malha.

**Tabela 5.4:** Características das malhas da placa com dois entalhes e tempo de processamento

Malha de elementos finitos	$N_{nos}$	$N_{el(r)}$	$N_{el(i)}$	$N_{el(t)}$	$t_p$ [h : m : s]
malha A	2959	1794	2418	4212	0:3:31
malha B	8470	3632	2280	5912	0:10:31
malha C	24455	14826	20324	35150	3:29:49

Nesse caso, também avaliou-se o tempo de processamento envolvido ( $t_p$ ). Para tanto, todas as malhas foram simuladas com o mesmo número de passos de carregamento. A Tab. 5.4 mostra o tempo que cada malha levou para ser processada.

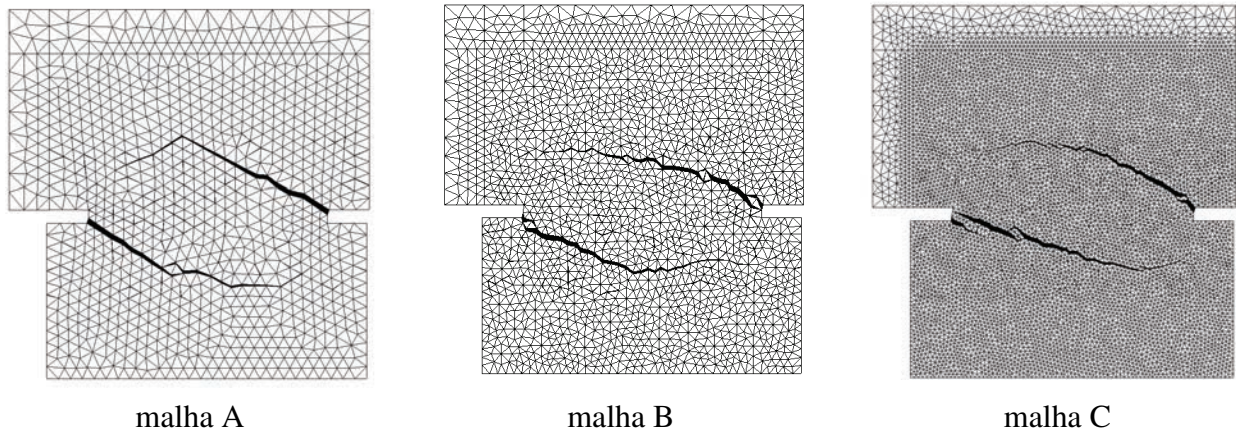


Figura 5.15: Malhas deformadas para a placa com dois entalhes

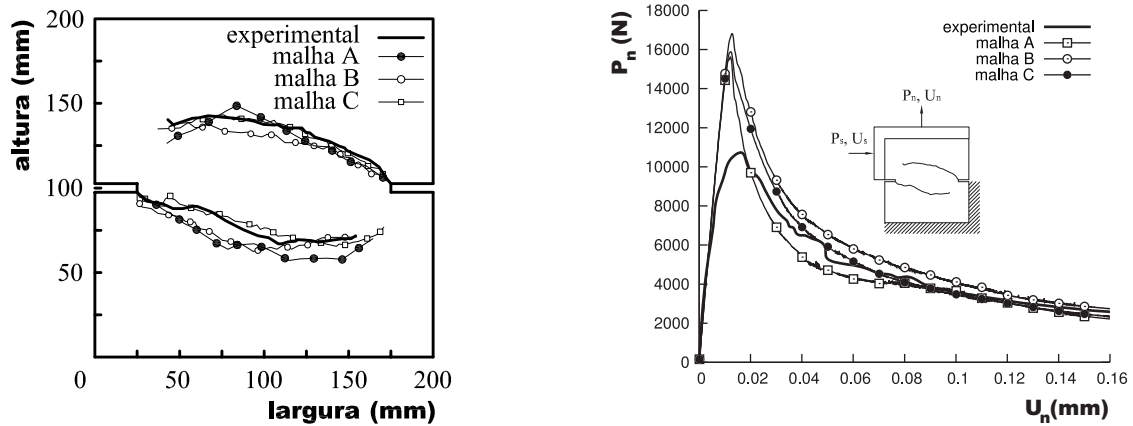


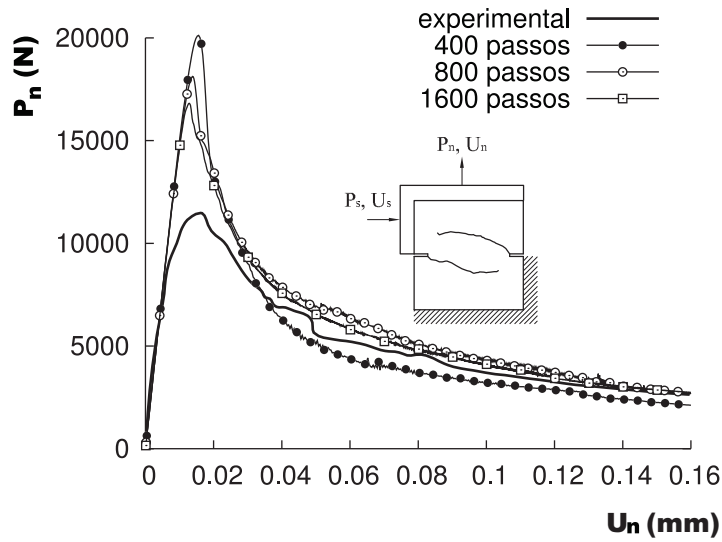
Figura 5.16: Respostas estruturais para a placa com dois entalhes

Como é possível notar na Fig. 5.16, na região de pico há uma diferença entre as respostas numéricas e experimental. Com o intuito de mostrar que tal diferença não é decorrente do processo de integração IMPL-EX, uma análise de convergência foi realizada. Dessa forma, analisou-se a malha B considerando 400, 800 e 1600 passos de 0.0004, 0.0002 e 0.0001 mm/passos, respectivamente. As curvas da análise de convergência podem ser observadas na Fig. 5.17. Como é possível notar, não há uma diferença significativa entre as curvas de 800 e 1600 passos. Tal fato evidencia a convergência do resultado.

### 5.2.5 Ensaio de infiltração

Com o intuito de demonstrar a capacidade da técnica em representar fraturas hidráulicas, o poço simulado por Wang et al. (2009) também foi analisado empregando a técnica proposta. Este tipo de problema requer o uso de sistemas hidromecânicos acoplados para a análise e, conseqüentemente, há a necessidade de se considerar a parte hidráulica e estabelecer uma equação que relacione a fratura e o fluido aplicado. Para este fim, o apêndice A do presente trabalho apresenta a teoria

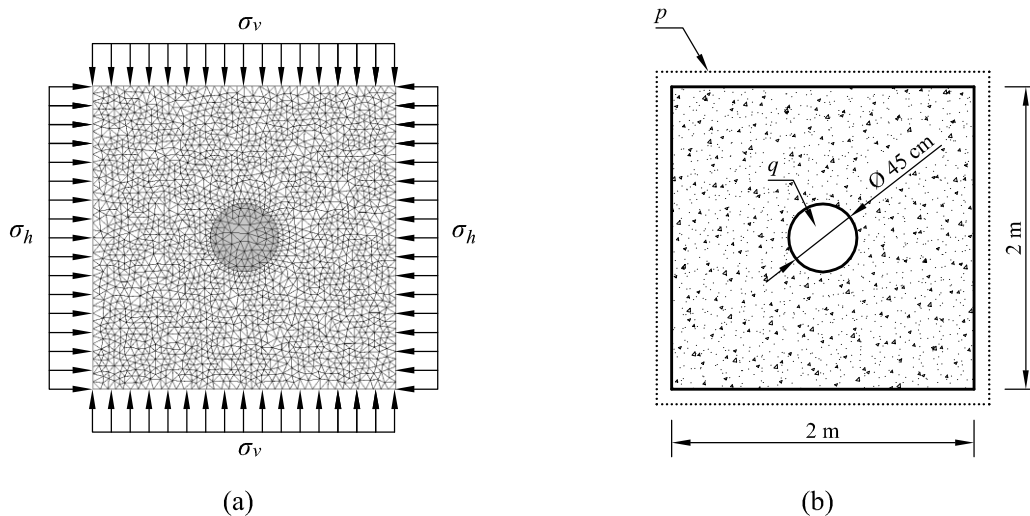




**Figura 5.17:** Respostas estruturais para a placa com dois entalhes

e as formulações consideradas para esse tipo de análise. Ressalta-se que problemas envolvendo fraturamento hidráulico são bastante complexos e o estudo detalhado sobre as soluções obtidas a partir desse tipo de análise estão fora do escopo deste trabalho.

Assim, neste estudo de caso, uma taxa de injeção constante de  $q = 15 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$  é aplicada no poço de um sólido saturado. A Fig. 5.18 mostra a malha, a geometria e as condições de contorno do problema. Para este estudo, em todos os elementos da malha que compõem o sólido foram inseridos elementos de elevada razão de aspecto. O sólido é submetido a um estado de tensões anisotrópico, isto é,  $\sigma_v \neq \sigma_h$ . A injeção de fluido ao longo do tempo causa uma pressão radial nas paredes do poço. Assim, a pressão cresce gradualmente. Quando a fratura induzida pela pressão hidráulica começa, a pressão na parede do poço decresce.



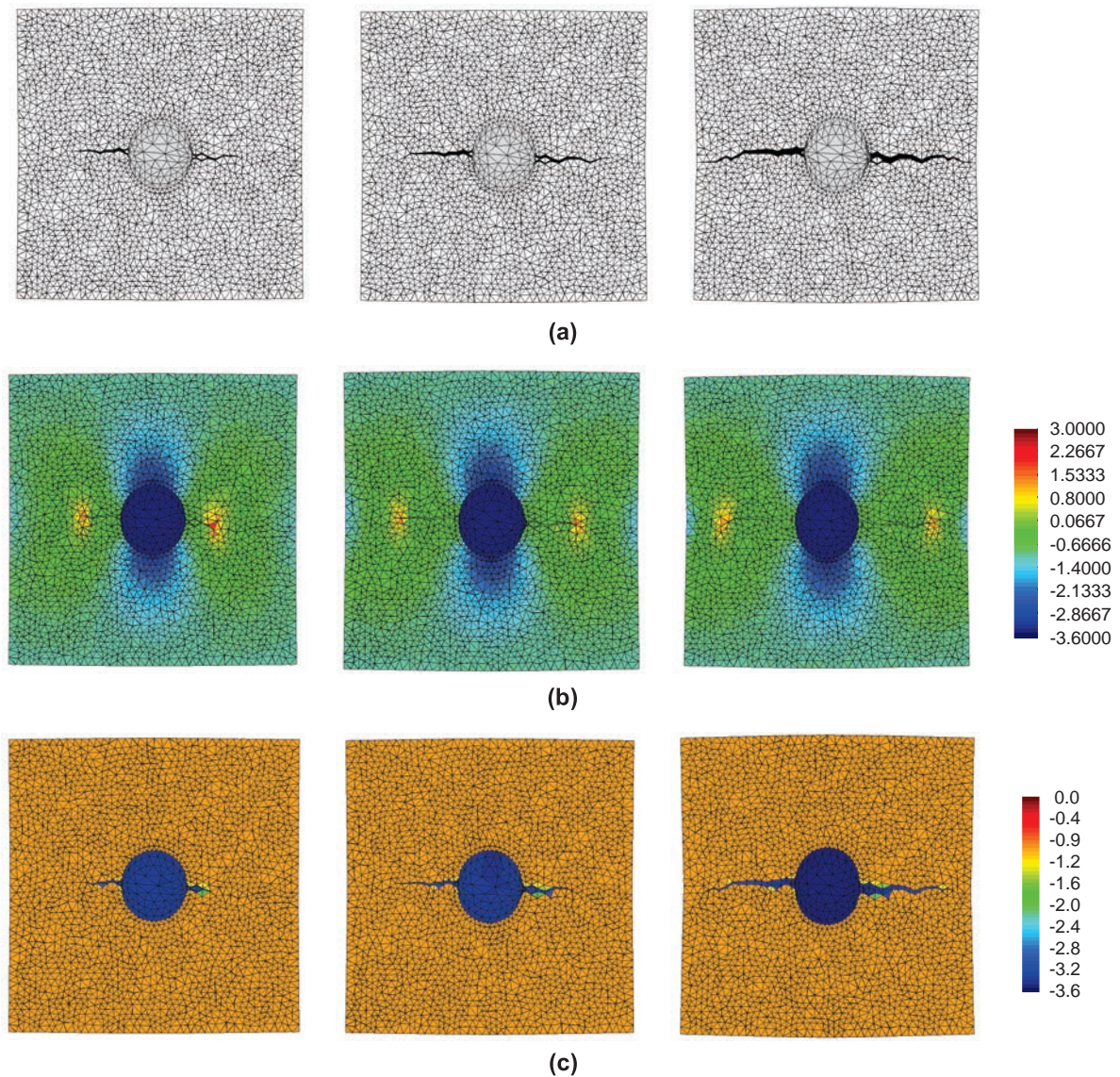
**Figura 5.18:** Geometria e condições de contorno para o ensaio de infiltração

O comportamento dos elementos regulares da malha é linear elástico com  $E = 5000 \text{ MPa}$  e



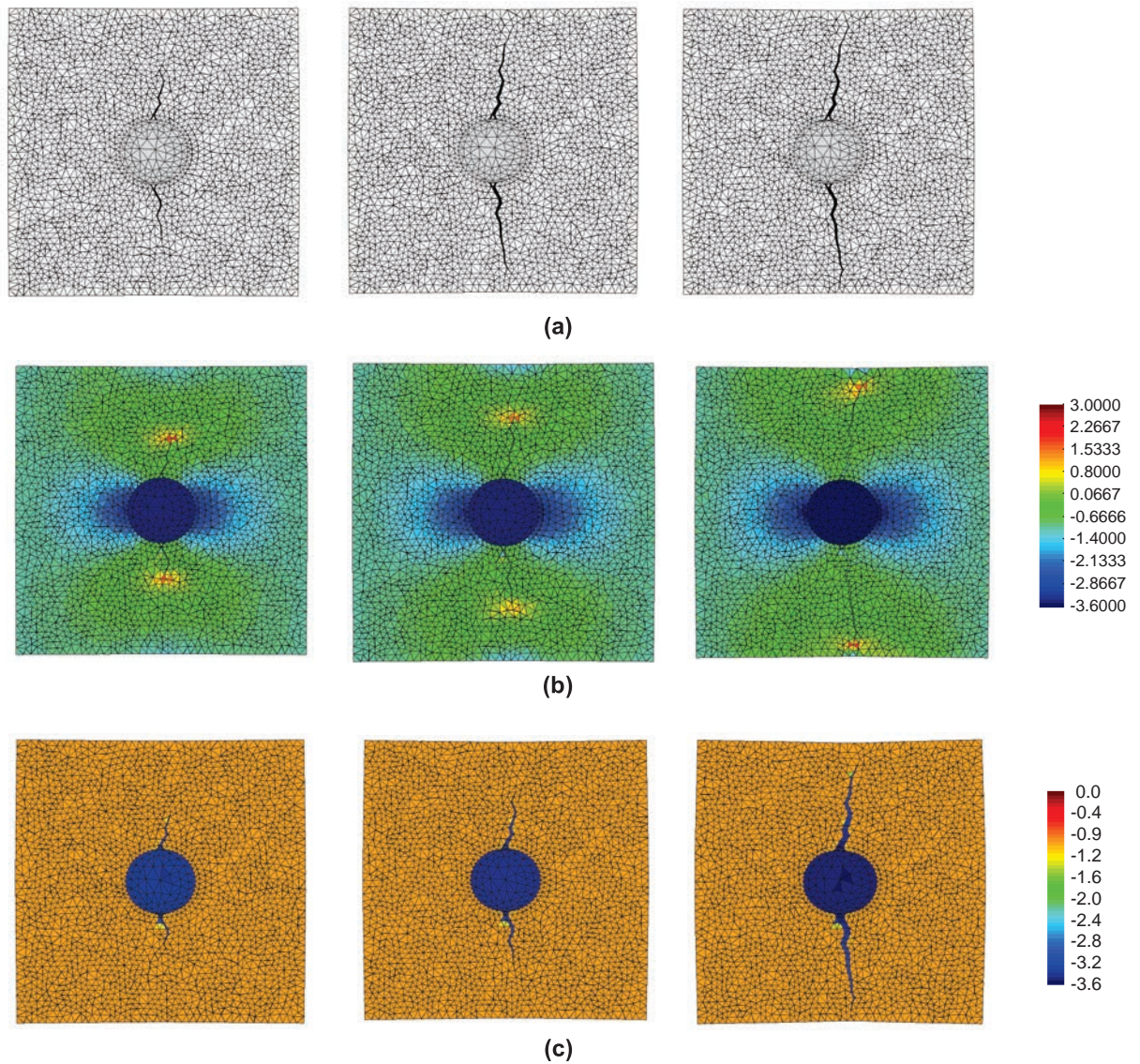
$\nu = 0.25$  e permeabilidade intrínseca  $k_0 = 2 \times 10^{-18} \text{ m}^2$ . Os parâmetros materiais dos elementos de interface são:  $E = 5000 \text{ MPa}$ ,  $k_0 = 2 \times 10^{-18} \text{ m}^2$ ,  $f_t = 2.8 \text{ MPa}$  e  $\mathcal{G}_f = 100 \text{ N/m}$ . Nota-se que  $K_0$  é a condutividade hidráulica antes do processo de fissuração. Quando o meio começa a fissurar, a permeabilidade dos elementos de interface cresce conforme Eq. (A.26).

Dois diferentes casos foram simulados. No primeiro assumiu-se  $\sigma_v = 1 \text{ MPa}$  e  $\sigma_h = 2 \text{ MPa}$ . A Fig. 5.19 mostra os principais resultados para este caso. Desse modo, a trajetória da fratura é ilustrada na Fig. 5.19a, o estado de tensões vertical é mostrado na Fig. 5.19b e a pressão fluídica é exibida na Fig. 5.19c. No segundo caso admitiu-se  $\sigma_v = 2 \text{ MPa}$  e  $\sigma_h = 1 \text{ MPa}$ . Similarmente, as Fig. 5.19a, Fig. 5.19b e Fig. 5.19c mostram a fratura, o estado de tensões horizontal e a pressão fluídica, respectivamente. Como esperado, no primeiro caso a fratura se propaga na direção horizontal, enquanto no segunda caso a fratura se desenvolve na direção vertical.



**Figura 5.19:** Ensaio de infiltração admitindo  $\sigma_v = 1 \text{ MPa}$  e  $\sigma_h = 2 \text{ MPa}$ : (a) trajetória da fratura; (b) estado de tensões verticais; (c) pressão fluídica





**Figura 5.20:** Ensaio de infiltração admitindo  $\sigma_v = 2 \text{ MPa}$  e  $\sigma_h = 1 \text{ MPa}$ : (a) trajetória da fratura; (b) estado de tensões verticais; (c) pressão fluídica

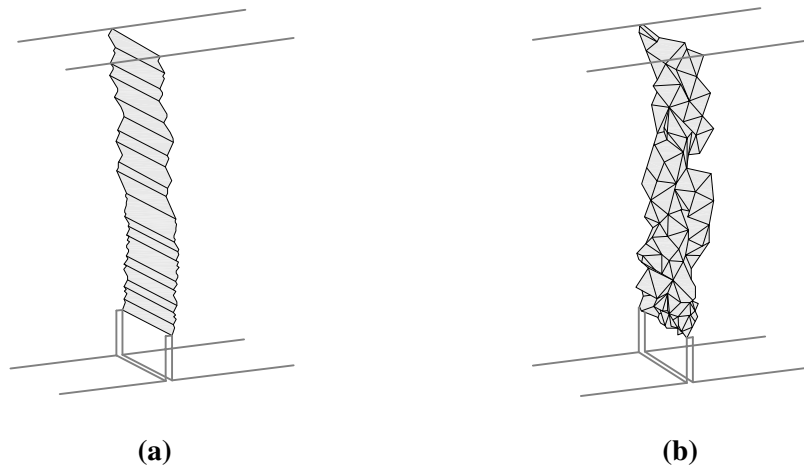
### 5.3 Estudos de casos 3D

Duas estruturas, a viga de três pontos e a placa com dois entalhes, também foram analisadas utilizando modelos 3D com a finalidade de demonstrar a capacidade da técnica de representar o processo de formação e propagação de fissuras em casos tridimensionais. Nesse sentido, foi utilizado o critério de dano baseado na componente normal à base dos elementos de interface tetraédricos. As curvas obtidas para esses casos foram comparadas com a resposta experimental e com as curvas decorrentes dos estudos 2D do presente trabalho. As próximas subseções descrevem as análises 3D desenvolvidas.

### 5.3.1 Viga de três pontos

A viga de três pontos com  $D = 160$  mm ensaiada por Bellego, Gérard e Pijaudier-Cabot (2000) também foi analisada tridimensionalmente. Assim, o estudo foi conduzido admitindo a mesma geometria e condições de contorno utilizados nas análises 2D. Os parâmetros também foram considerados os mesmos do caso 2D, com exceção da energia de fratura que foi assumida  $\mathcal{G}_f = 35$  N/m.

**Observação 5.2.** A energia de fratura considerada na análise tridimensional é menor do que aquela utilizada na análise bidimensional. Tal fato ocorre devido às diferenças existentes entre as superfícies de fratura 2D e 3D, pois, problemas 2D não levam em consideração as irregularidades da malha na terceira dimensão (Fig. 5.21). Além disso, em ensaios experimentais admite-se uma superfície teórica suave para determinação da energia de fratura. Portanto, como a fissura deve contornar os elementos regulares da malha e em simulações 3D existem muitos desalinhamentos, foi necessário ajustar a energia de fratura do modelo para se obter dissipação similares, já que as superfícies de fratura resultantes nas análises tridimensionais são maiores.

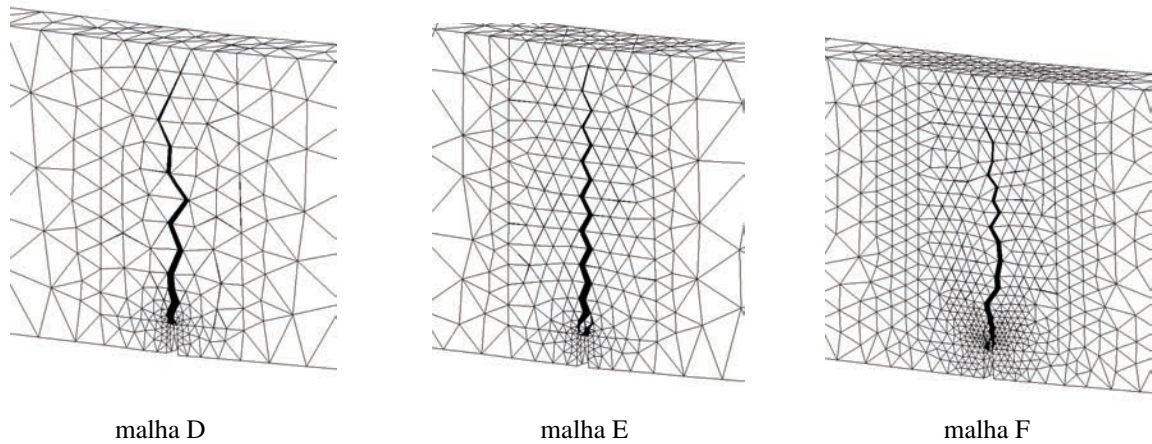


**Figura 5.21:** Superfícies de fratura da viga de três pontos: (a) superfície da análise 2D; (b) superfície da análise 3D.

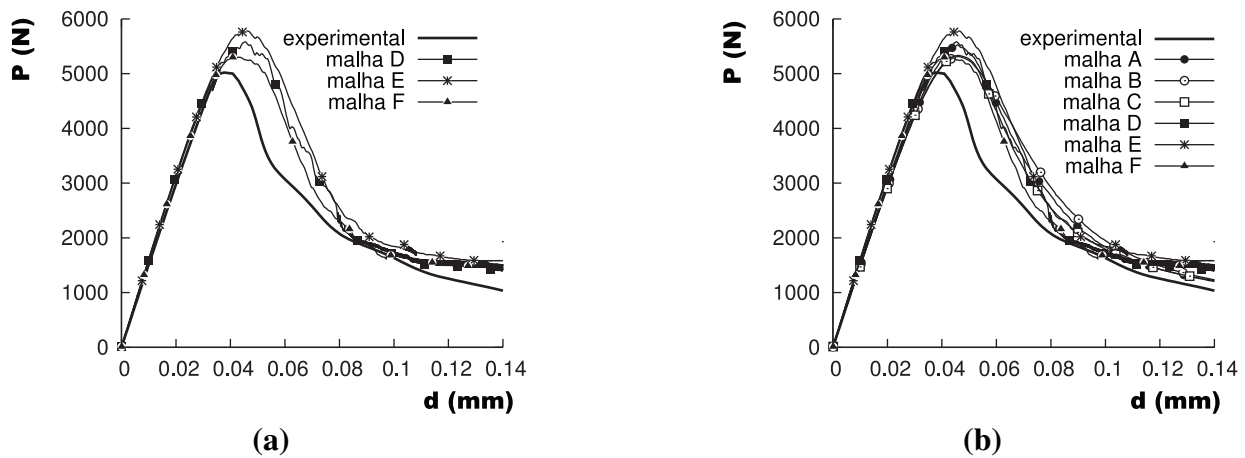
Analogamente aos casos anteriormente estudados, três malhas com diferentes números de nós e elementos foram simuladas, como mostra a Tab. 5.5. As fissuras para as três malhas empregadas podem ser observadas conforme a Fig. 5.22. A Fig. 5.23a ilustra a curva estrutural para as malhas simuladas, enquanto a Fig. 5.23b apresenta uma comparação entre as respostas obtidas a partir das análises 2D e 3D.

**Tabela 5.5:** Características das malhas 3D da viga de três pontos

Malha de elementos finitos	$N_{nos}$	$Nel_{(r)}$	$Nel_{(i)}$	$Nel_{(t)}$
malha D	8345	4044	11253	15297
malha E	20340	7471	28851	36322
malha F	31333	12638	43647	56285



**Figura 5.22:** Malhas deformadas da viga de três pontos (Análise tridimensional)



**Figura 5.23:** Respostas estruturais para a viga de três pontos: (a) Análise tridimensional; (b) Comparação entre as curvas obtidas a partir das análises 2D e 3D

### 5.3.2 Placa com dois entalhes

O ensaio conduzido por Nooru-Mohamed (1992) também foi simulado tridimensionalmente empregando três diferentes malhas (Tab. 5.6) e considerando as mesmas condições de contorno, geometria e propriedades mecânicas dos estudos 2D realizados na subseção 5.2.4 (Fig. 5.14).

**Tabela 5.6:** Características das malhas 3D da placa com dois entalhes

Malha de elementos finitos	$N_{nos}$	$N_{el(r)}$	$N_{el(i)}$	$N_{el(t)}$
malha D	7160	2537	9678	12215
malha E	12974	4517	18204	22721
malha F	43398	9633	33765	43398

A Fig. 5.24 mostra as trajetórias das fissuras para as diferentes malhas empregadas. A Fig. 5.25a ilustra a resposta estrutural para as três malhas empregadas nas análises 3D e a Fig 5.25b compara os resultados 2D e 3D obtidos.

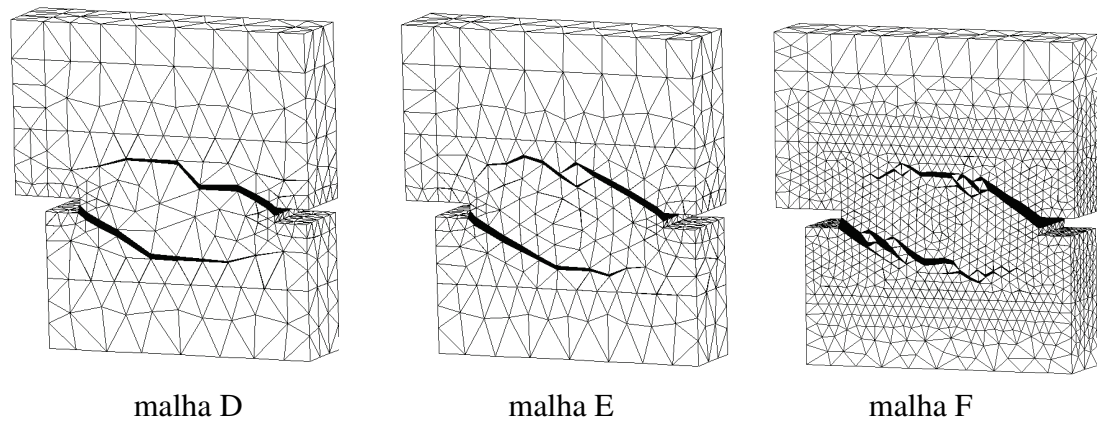


Figura 5.24: Malhas deformadas da placa com dois entalhes (Análise tridimensional)

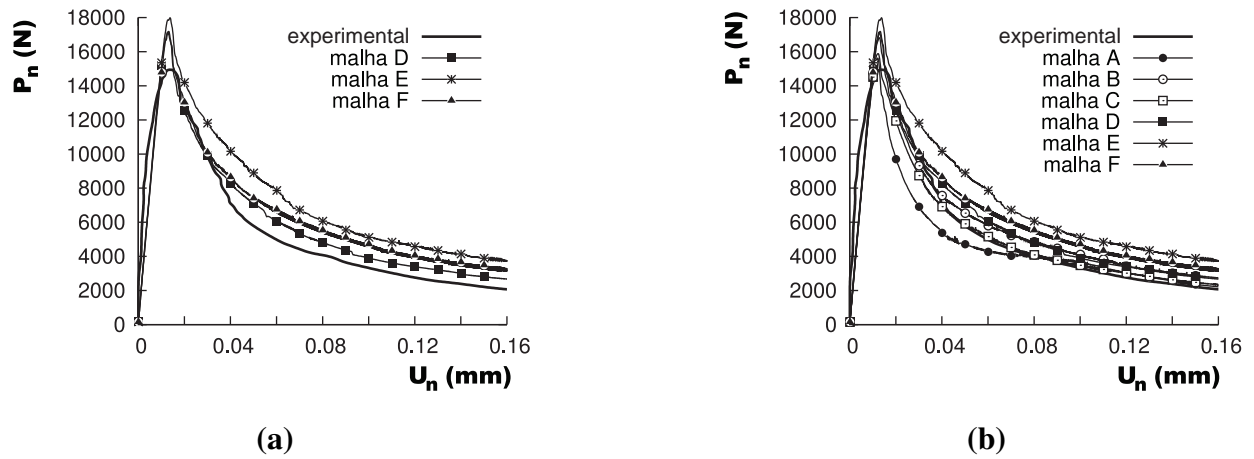


Figura 5.25: Respostas estruturais para a placa com dois entalhes: (a) Análise tridimensional; (b) Comparação entre as curvas obtidas a partir das análises 2D e 3D



## Capítulo 6

# Considerações Finais

---

### 6.1 Conclusão

No presente trabalho apresentou-se uma nova metodologia capaz de representar o processo de formação e propagação de fissuras em materiais quase-frágeis, para diferentes casos e com diferentes malhas.

A metodologia, denominada fragmentação da malha, mostrou-se eficaz para simular a formação de fissuras sem a necessidade de um tratamento especial para construção da trajetória da fissura, como ocorre no caso dos elementos com descontinuidade incorporada ou do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Assim, a técnica consiste em fragmentar os elementos da malha original, introduzindo elementos de elevada razão de aspecto, que são capazes de representar a cinemática de descontinuidade forte, como na ACDF. Assim, a metodologia altera a topologia do problema inicial, mas não muda a disposição dos elementos. Desse modo, quando o dano é atingido, os elementos especiais são ativados e, como estes contornam os elementos regulares, o processo de fissuração ocorrerá entre os elementos da malha inicial.

Apesar de parecer evidente a influência da malha na técnica, o método não apresentou dependência significativa para malhas não estruturadas, de tal forma que os desalinhamentos não influenciaram na resposta estrutural ou mesmo no padrão da trajetória das fissuras.

Os exemplos numéricos simulados demonstraram que o método também foi capaz de reproduzir os padrões de fissuras desenvolvidos em ensaios experimentais. Além disso, o método de fragmentação também foi capaz de representar o processo de fissuração em modo misto, também não evidenciando influencia significativa da malha na resposta.

A irregularidade na trajetória da superfície da fissura é inerente ao método estudado e pode não ser compatível com as superfícies teóricas suaves consideradas para a determinação da energia de fratura em ensaios experimentais. Esta diferença pode ser mais pronunciada em simulações tridimensionais.

### 6.2 Principais contribuições

As principais contribuições conferidas pelo presente trabalho são as seguintes:

- apresentação, validação e avaliação de uma nova técnica capaz de representar o fenômeno de localização de deformação em materiais quase-frágeis, sem a necessidade de utilizar técnicas

de reconstrução progressiva da malha ou algoritmos para construção da trajetória da fissura;

- desenvolvimento de um novo critério de dano baseado na componente do tensor de tensões que é normal à base do elemento de interface;
- extensão da técnica estudada para sistemas hidromecânicos acoplados, mostrando que a metodologia também pode ser empregada para problemas envolvendo fraturamento hidráulico.

### 6.3 Trabalhos futuros

As contribuições decorrentes do presente trabalho são imprescindíveis para o desenvolvimento de novos estudos envolvendo a técnica de fragmentação da malha, uma vez que os resultados obtidos permitem uma avaliação detalhada da metodologia. Dessa forma, pode-se sugerir como trabalhos futuros:

- estudos mais detalhados com relação a problemas acoplados. Neste contexto, pode-se empregar a técnica proposta para descrever o processo de ressecamento de solos ou até mesmo para simular meios porosos naturalmente fraturados;
- estudos mais detalhados a respeito da irregularidade na trajetória da fissura, a qual é intrínseca ao método, de modo a esclarecer se a energia de fratura considerada deve refletir o grau de desalinhamento da malha para a adequada dissipação de energia;
- extensão da formulação para tratar de casos envolvendo deformações finitas, isto é, quando a hipótese de pequenas deformações não é válida;
- aplicação da técnica para tratar modelos multiescala. No caso do concreto, por exemplo, elementos de interface são inseridos entre os elementos que compõem a matriz e entre a interface agregado – matriz;
- desenvolvimento de métodos para otimização do tempo de processamento, inserindo os elementos de elevada razão de aspecto durante a análise, mediante um processo adaptativo;
- extensão a outros modelos constitutivos que possam também representar, dentre outros, o fenômeno de dano à compressão.

# Referências

---

- ADACHI, J. et al. Computer simulation of hydraulic fractures. *Int J Rock Mech Min Sci*, v. 44, p. 739–757, 2007.
- ALFAIATE, J. New developments in the study of strong embedded discontinuities in finite elements. *Key Engineering Materials*, Trans Tech Publ, v. 251, p. 109–114, 2003.
- ARREA, M.; INGRAFFEA, A. *Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete*. New York, 1982.
- ATIQUÉ, A.; SANCHEZ, M. Analysis of cracking behavior of drying soil. In: *2nd international conference on Environmental Science and Technology IPCBEE*. [S.l.: s.n.], 2011. v. 6, p. 66–70.
- BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in applied mechanics*, v. 7, n. 1, p. 55–129, 1962.
- BATOZ, J.-L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 14, n. 8, p. 1262–1267, 1979.
- BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.
- BELLEGO, C. L.; GÉRARD, B.; PIJAUDIER-CABOT, G. Chemo-mechanical effects in mortar beams subjected to water hydrolysis. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 126, n. 3, p. 266–272, 2000.
- BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, IOP Publishing, v. 17, n. 4, p. 043001, 2009.
- BELYTSCHKO, T. et al. Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 50, n. 4, p. 993–1013, 2001.
- BITENCOURT JR, L. A. G. *Numerical modeling of failure processes in steel fiber reinforced cementitious materials*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica – Universidade de São Paulo, USP, 2015.



- BITTENCOURT, T. et al. Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2d lefm problems. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 55, n. 2, p. 321–334, 1996.
- BORST, R. D. Simulation of strain localization: a reappraisal of the cosserat continuum. *Engineering computations*, MCB UP Ltd, v. 8, n. 4, p. 317–332, 1991.
- BORST, R. D.; MÜHLHAUS, H.-B. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 35, n. 3, p. 521–539, 1992.
- CABALLERO, A.; LÓPEZ, C.; CAROL, I. 3d meso-structural analysis of concrete specimens under uniaxial tension. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 195, n. 52, p. 7182–7195, 2006.
- CAMACHO, G.; ORTIZ, M. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of solids and structures*, Elsevier, v. 33, n. 20, p. 2899–2938, 1996.
- CAROL, I.; PRAT, P. A statically constrained microplane model for the smeared analysis of concrete cracking. *Computer aided analysis and design of concrete structures*, Pineridge, Swansea, UK, v. 2, p. 919–930, 1990.
- CERVENKA, J. *Discrete crack modeling in concrete structures*. [S.l.]: University of Colorado at Boulder, 1994.
- CERVERA, M.; OLIVER, J.; MANZOLI, O. A rate-dependent isotropic damage model for the seismic analysis of concrete dams. *Earthquake engineering & structural dynamics*, Wiley Online Library, v. 25, n. 9, p. 987–1010, 1996.
- CIMNE. *GiD - The personal pre- and post processor*. 2015. Disponível em: <http://gid.cimne.upc.es>. Acesso em: Junho de 2015.
- COSTA, L. et al. Numerical modelling of hydro-mechanical behaviour of collapsible soils. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 24, n. 12, p. 1839–1852, 2008.
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991.
- DIBENEDETTO, E. *Real analysis*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, v. 46, n. 1, p. 131–150, 1999.
- DUGDALE, D. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, v. 8, n. 2, p. 100–104, 1960.
- FRIEDMAN, H. et al. A consistent fubini-tonelli theorem for nonmeasurable functions. *Illinois Journal of Mathematics*, University of Illinois at Urbana-Champaign, Department of Mathematics, v. 24, n. 3, p. 390–395, 1980.

- GARIKIPATI, K.; HUGHES, T. J. A study of strain localization in a multiple scale framework—the one-dimensional problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 159, n. 3, p. 193–222, 1998.
- GENS, A. et al. Factors controlling rock–clay buffer interaction in a radioactive waste repository. *Engineering Geology*, Elsevier, v. 64, n. 2, p. 297–308, 2002.
- GENS, A. et al. A full-scale in situ heating test for high-level nuclear waste disposal: observations, analysis and interpretation. *Géotechnique*, Thomas Telford, v. 59, n. 4, p. 377–399, 2009.
- GOMES, I. F. *Implementação em elementos finitos das equações de pressão e saturação para simulação de fluxo bifásico em reservatórios de petróleo deformáveis*. Tese (Doutorado), 2009.
- GOSZ, M. R. *Finite element method: applications in solids, structures, and heat transfer*. [S.l.]: CRC Press, 2005.
- GUIMARAES, L. d. N.; GENS, A.; OLIVELLA, S. Coupled analysis of damage formation around wellbores. *Elsevier Geo-Engineering Book Series*, Elsevier, v. 2, p. 599–604, 2004.
- GUIMARÃES, L. d. N.; GENS, A.; OLIVELLA, S. Coupled thermo-hydro-mechanical and chemical analysis of expansive clay subjected to heating and hydration. *Transport in porous media*, Springer, v. 66, n. 3, p. 341–372, 2007.
- GUIMARÃES, L. d. N. et al. Thm and reactive transport analysis of expansive clay barrier in radioactive waste isolation. *Communications in numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 22, n. 8, p. 849–859, 2006.
- HELMIG, R. et al. *Multiphase flow and transport processes in the subsurface: a contribution to the modeling of hydrosystems*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1997.
- HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P.-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and concrete research*, Elsevier, v. 6, n. 6, p. 773–781, 1976.
- HUITT, J. Fluid flow in simulated fractures. *AIChE Journal*, Wiley Online Library, v. 2, n. 2, p. 259–264, 1956.
- IEA. *World Energy Outlook 2013*. 2013. Disponível em: [http://www.iea.org/publications/freepublications/publication/WEO2013\\\_Executive\\\_Summary\\\_English.pdf](http://www.iea.org/publications/freepublications/publication/WEO2013\_Executive\_Summary\_English.pdf). Acesso em: Junho de 2015.
- INGRAFFEA, A.; SAOUMA, V. Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete. In: *Fracture Mechanics of Concrete: structural application and numerical calculation*. [S.l.]: Springer, 1985. p. 171–225.
- JHA, B. *A mixed finite element framework for modeling coupled fluid flow and reservoir geomechanics*. Tese (Doutorado) — STANFORD UNIVERSITY, 2005.
- JIRÁSEK, M. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 188, n. 1, p. 307–330, 2000.

- JIRÁSEK, M.; BELYTSCHKO, T. Computational resolution of strong discontinuities. In: *Proceedings of Fifth World Congress on Computational Mechanics, WCCM V, Vienna University of Technology, Austria*. [S.l.: s.n.], 2002.
- KACHANOV, L. M. Rupture time under creep conditions. *International journal of fracture*, Springer, v. 97, n. 1-4, p. 11–18, 1999.
- KOBAYASHI, A. et al. Fracture process zone of concrete. In: *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites*. [S.l.]: Springer, 1985. p. 25–50.
- LEMAITRE, J. A three dimensional ductile damage model applied to deep-drawing forming limits. *ICM 4 Stockholm*, v. 2, p. 1047–1053, 1983.
- LEMAITRE, J.; LIPPMANN, H. *A course on damage mechanics*. [S.l.]: Springer Berlin, 1996.
- LI, L. et al. Numerical simulation of 3d hydraulic fracturing based on an improved flow-stress-damage model and a parallel fem technique. *Rock Mech Rock Eng*, 2012.
- LOPEZ, C. *Microstructural analysis of concrete fracture using interface elements. Application to various concretes*. Tese (Doutorado) — ETSECCPB-UPC, 1999.
- MALVERN, L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. [S.l.: s.n.], 1969.
- MANZOLI, O. *Un modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidad fuertes en la mecánica de sólidos*. Tese (Doutorado) — Universitat Politècnica de Catalunya, 1998.
- MANZOLI, O. et al. Modeling of interfaces in two-dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 94, p. 70–82, 2012.
- MANZOLI, O. et al. Modeling of multiple cracks in reinforced concrete members using solid finite elements with high aspect ratio. *Computational Modelling of Concrete Structures*, CRC Press, p. 383, 2014.
- MARIANI, S.; PEREGO, U. Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 58, n. 1, p. 103–126, 2003.
- MATA, C. et al. A hydro-geochemical analysis of the saturation process with salt water of a bentonite crushed granite rock mixture in an engineered nuclear barrier. *Engineering geology*, Elsevier, v. 81, n. 3, p. 227–245, 2005.
- MOSLER, J.; MESCHKE, G. 3d modelling of strong discontinuities in elastoplastic solids: fixed and rotating localization formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 57, n. 11, p. 1553–1576, 2003.
- NOORU-MOHAMED, M. *Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach*. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, 1992. Delft.
- OLIVELLA, S. et al. Nonisothermal multiphase flow of brine and gas through saline media. *Transport in porous media*, Springer, v. 15, n. 3, p. 271–293, 1994.

OLIVELLA, S. et al. Numerical formulation for a simulator (code\_bright) for the coupled analysis of saline media. *Engineering computations*, MCB UP Ltd, v. 13, n. 7, p. 87–112, 1996.

OLIVER, J. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 28, n. 2, p. 461–474, 1989.

OLIVER, J. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 39, n. 21, p. 3575–3600, 1996.

OLIVER, J.; CERVERA, M.; MANZOLI, O. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *International journal of plasticity*, Elsevier, v. 15, n. 3, p. 319–351, 1999.

OLIVER, J. et al. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. In: *Proc. SCI-C Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*. [S.l.: s.n.], 1990. p. 945–957.

OLIVER, J.; HUESPE, A. Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 193, n. 30, p. 3195–3220, 2004.

OLIVER, J.; HUESPE, A. Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 193, n. 30, p. 3195–3220, 2004.

OLIVER, J.; HUESPE, A.; CANTE, J. An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 197, n. 21, p. 1865–1889, 2008.

OLIVER, J.; HUESPE, A.; SAMANIEGO, E. A study on finite elements for capturing strong discontinuities. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 56, n. 14, p. 2135–2161, 2003.

OLIVER, J. et al. Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Wiley Online Library, v. 28, n. 7-8, p. 609–632, 2004.

OLLER, S. *Fractura mecánica. Un enfoque global*. Barcelona, España: Centro Internacional de Métodos Numéricos em Ingeniería, 2001.

OTTOSEN, N. S.; RUNESSON, K. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 27, n. 4, p. 401–421, 1991.

PAMIN, J. Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena. 1994.

PANDOLFI, A.; ORTIZ, M. An efficient adaptive procedure for three-dimensional fragmentation simulations. *Engineering with computers*, Springer, v. 18, n. 2, p. 148–159, 2002.

- PEREIRA, L. C. et al. Coupled hydro-mechanical fault reactivation analysis incorporating evidence theory for uncertainty quantification. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, v. 56, p. 202–215, 2014.
- PIJAUDIER-CABOT, G.; BAZANT, Z. P. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 113, n. 10, p. 1512–1533, 1987.
- RASHID, Y. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear engineering and design*, Elsevier, v. 7, n. 4, p. 334–344, 1968.
- REDDY, J. N. *An introduction to the finite element method*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1993.
- ROTS, J. et al. Smearred crack approach and fracture localization in concrete. *HERON*, 30 (1), 1985, Delft University of Technology, 1985.
- ROTS, J. G. *Computational modeling of concrete fracture*. Tese (Doutorado) — Technische Hogeschool Delft, 1988.
- ROTS, J. G. Smearred and discrete representations of localized fracture. In: *Current Trends in Concrete Fracture Research*. [S.l.]: Springer, 1991. p. 45–59.
- SÁNCHEZ, M.; GENS, A.; GUIMARÃES, L. Thermal–hydraulic–mechanical (thm) behaviour of a large-scale in situ heating experiment during cooling and dismantling. *Canadian Geotechnical Journal*, NRC Research Press, v. 49, n. 10, p. 1169–1195, 2012.
- SÁNCHEZ, M. et al. Implementation algorithm of a generalised plasticity model for swelling clays. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, v. 35, n. 6, p. 860–871, 2008.
- SÁNCHEZ, M.; GENS, A.; OLIVELLA, S. Effect of thermo-coupled processes on the behaviour of a clay barrier submitted to heating and hydration. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, SciELO Brasil, v. 82, n. 1, p. 153–168, 2010.
- SÁNCHEZ, M.; GENS, A.; OLIVELLA, S. Thm analysis of a large-scale heating test incorporating material fabric changes. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, Wiley Online Library, v. 36, n. 4, p. 391–421, 2012.
- SÁNCHEZ, M.; MANZOLI, O. L.; GUIMARÃES, L. J. Modeling 3-d desiccation soil crack networks using a mesh fragmentation technique. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, v. 62, p. 27–39, 2014.
- SÁNCHEZ, M.; SHASTRI, A.; LE, T. Coupled hydromechanical analysis of an underground compressed air energy storage facility in sandstone. *Géotechnique Letters*, Thomas Telford, v. 4, n. April-June, p. 157–164, 2014.
- SÁNCHEZ, M. et al. Typical geomechanical problems associated with railroads on shrink-swell soils. *Transportation Geotechnics*, Elsevier, 2014.
- SARKAR, S.; TOKSOZ, M. N.; BURNS, D. R. *Fluid flow modeling in fractures*. [S.l.], 2004.

- SECCHI, S.; SCHREFLER, B. A. Hydraulic fracturing and its peculiarities. *Asia Pacific Journal on Computational Engineering*, Springer, v. 1, n. 1, p. 8, 2014.
- SIMO, J.; JU, J. Strain-and stress-based continuum damage models—i. formulation. *International journal of solids and structures*, Elsevier, v. 23, n. 7, p. 821–840, 1987.
- SIMO, J. C.; OLIVER, J.; ARMERO, F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational mechanics*, Springer, v. 12, n. 5, p. 277–296, 1993.
- SNOW, D. T. *A parallel plate model of fractured permeable media*. Tese (Doutorado) — University of California, Berkeley, 1965.
- SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- SUKUMAR, N.; BELYTSCHKO, T. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, v. 48, p. 1741–1760, 2000.
- TERZAGHI, K. *Theoretical soil mechanics*. [S.l.]: Wiley, 1943.
- VIDIC, R. et al. Impact of shale gas development on regional water quality. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 340, n. 6134, p. 1235009, 2013.
- WANG, S. et al. 2d-numerical analysis of hydraulic fracturing in heterogeneous geo-materials. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 23, n. 6, p. 2196–2206, 2009.
- WELLS, G.; SLUYS, L. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 50, n. 12, p. 2667–2682, 2001.
- YAQUETO, N. *Avaliação de esquemas de acoplamento na simulação de reservatórios de petróleo*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2011.
- YESILLER, N. et al. Desiccation and cracking behavior of three compacted landfill liner soils. *Engineering Geology*, Elsevier, v. 57, n. 1, p. 105–121, 2000.
- ZOBACK, Z. *Reservoir Geomechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

## Apêndice A

# Fraturamento Hidráulico

---

### A.1 Introdução

Dados do relatório de 2013 da Agência Internacional de Energia (IEA, 2013) mostram que a produção de petróleo no Brasil atingirá 6 mb/dia em 2035, tornando o país o sexto maior produtor do mundo. Ainda de acordo com o relatório, o aumento na produção de gás natural permitirá cobrir todas as necessidades domésticas do país em 2030. Contudo, a IEA afirma que também haverá um aumento no consumo de energia em virtude da necessidade de energia de uma classe média em expansão. Assim, a Agência de Energia relata que o desenvolvimento de um mercado de gás bem-sucedido pode dinamizar os investimentos e melhorar a competitividade da indústria brasileira.

Entretanto, apesar das previsões favoráveis com relação a produção de energia a partir de combustíveis fósseis, as técnicas para obtenção de óleo e gás estão se tornando cada vez mais complexas e sofisticadas. A injeção de fluidos (e.g.  $H_2O$ ,  $CO_2$ ) sob altas pressões é geralmente necessária para obtenção de óleo e gás em reservatórios convencionais. Procedimentos similares são utilizados para produção de combustíveis em reservatórios muito profundos, como por exemplo a bacia de Santos. Projetos para extração e injeção de fluidos a altas profundidades aumentam sensivelmente os riscos geomecânicos (VIDIC et al., 2013), podendo induzir movimentos de descontinuidades tais como falhas e fraturas no interior e na vizinhança do reservatório. Assim, é necessário estudar o meio contínuo considerando condições de temperatura e pressão não convencionais. De acordo com Secchi e Schrefler (2014), em campo é muito difícil obter informações diretas sobre a evolução das fraturas e poucos dados são conhecidos ou acessíveis. Ainda de acordo com os autores, geralmente dois tipos de medições são principalmente realizadas: monitoramento da flutuação da pressão na bomba de injeção e registro da medição acústica na superfície. Desse modo, análises numéricas são extremamente úteis para a obtenção de mais informações a respeito do comportamento das descontinuidades sob tais condições.

Técnicas computacionais avançadas permitem modelar o comportamento de reservatórios naturais de gás e óleo, baseando-se nas equações de continuidade e constitutivas que descrevem o comportamento das rochas (sólidos), fluidos (água e gás) e suas interações. Assim, adaptando a formulação matemática proposta por Olivella et al. (1994), consideram-se as equações de conservação de massa de água e gás. No caso do meio poroso deformável, também se deve admitir a conservação da quantidade de movimento. Para processos não-isotérmicos, a conservação de energia interna total do meio poroso também deve ser admitida. Logo, considerando o

método dos elementos finitos, as incógnitas do problema Termo-Hidro-Mecânico (THM) por nó da malha são: pressões, deslocamentos e temperatura para os problemas hidráulico, mecânico e térmico, respectivamente. Portanto, evidentemente é imprescindível a utilização de uma ferramenta numérica capaz de tratar problemas THM de forma totalmente acoplada. Assim, no presente projeto, as análises serão realizadas com o auxílio do programa de elementos finitos CODE\_BRIGHT (*COupled DEformation, BRIne, Gas, and Heat Transport*) que é capaz de resolver problemas THM de forma totalmente acoplada (OLIVELLA et al., 1996). Este software vem sendo amplamente utilizado na engenharia geotécnica (SÁNCHEZ et al., 2014; COSTA et al., 2008), geotécnica ambiental (SÁNCHEZ; SHASTRI; LE, 2014; SÁNCHEZ; GENS; GUIMARÃES, 2012; SÁNCHEZ; GENS; OLIVELLA, 2012, 2010; GENS et al., 2009; SÁNCHEZ et al., 2008; GUIMARÃES; GENS; OLIVELLA, 2007; GUIMARÃES et al., 2006; MATA et al., 2005; GENS et al., 2002) e na engenharia de petróleo (PEREIRA et al., 2014; GUIMARAES; GENS; OLIVELLA, 2004). Entretanto, para representar o processo de descontinuidades no meio foi necessário implementar no programa uma técnica capaz de simular a descontinuidade e também descrever o comportamento entre o fluido e a fratura. Assim, o modelo de dano apresentado no capítulo 2 e os elementos de elevada razão de aspecto do capítulo 3 foram usados para representar essas descontinuidades em problemas acoplados. Nota-se que a implementação do método da fragmentação da malha no código CODE\_BRIGHT foi realizada em conjunto com o grupo de pesquisa da UFPE.

O presente apêndice objetiva mostrar o equacionamento para sistemas acoplados hidromecânicos, bem como revisar alguns conceitos geotécnicos imprescindíveis para compreender adequadamente o problema.

## **A.2 Formulação hidromecânica**

Sistemas hidromecânicos acoplados são aqueles onde ambos os problemas, o comportamento mecânico do meio poroso e o fluxo fluídico, são resolvidos mutuamente. Consequentemente, devem-se considerar modelos matemáticos para cada fenômeno. Em geral, este tipo de problema é bastante complexo e nem sempre existem soluções analíticas.

Nesta seção, a formulação matemática multifásica proposta por Olivella et al. (1994) é apresentada. Desse modo, as equações empregadas para modelar o fluxo de fluidos, o comportamento mecânico e o sistema acoplado são descritas. Mas primeiro, conceitos básicos tais como porosidade, grau de saturação, capilaridade, densidade e permeabilidade serão revisados.

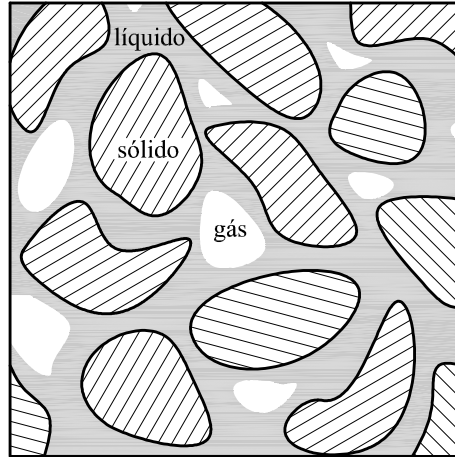
### **A.2.1 O meio poroso**

Segundo Bear (2013), um meio poroso é uma porção do espaço ocupada por matéria heterogênea ou multifásica, onde ao menos uma das fases que compreende esta matéria não é sólida (i.e., elas podem ser líquida e/ou gasosa). Assim, as fases que não são parte da fase sólida constituem o espaço vazio (algumas vezes referido como espaço poroso). Há muito exemplos de materiais porosos. Solos, rochas fraturadas e materiais cerâmicos são apenas alguns exemplos. Neste trabalho, o meio poroso será estudado considerando uma aproximação contínua, ou seja, serão desconsideradas as lacunas ou espaços vazios decorrentes da estrutura molecular da matéria. Dessa forma, as leis físicas e as equações que regem o problema são definidas por funções contínuas.



### A.2.2 Porosidade, grau de saturação e capilaridade

Com o intuito de explicar algumas propriedades do meio poroso, considera-se o meio poroso ilustrado na Fig. A.1. Como é possível observar, o meio consiste de três fases: uma fase sólida, uma líquida e outra gasosa.



**Figura A.1:** Meio poroso

A Porosidade ( $\phi$ ) é definida como a razão entre o volume de vazios ( $V_v$ ) e o volume total do material ( $V_t$ ), i.e.

$$\phi = \frac{V_v}{V_t} = \frac{V_t - V_s}{V_t} \quad (\text{A.1})$$

onde  $V_s$  é o volume de sólidos em  $V_t$ . Em reservatórios geomecânicos, os espaços vazios podem conter água, óleo, e gás, constituindo um sistema trifásico. No caso de sistemas bifásicos o fluido pode ser água e óleo, água e gás ou óleo e gás. Um sistema monofásico ocorre quando há apenas um fluido no meio poroso.

Outra importante propriedade dos meios porosos é o grau de saturação ( $S_\alpha$ ) que é dado pela razão entre o volume da fase  $\alpha$  ( $V_\alpha$ ) e o volume de vazios, ou seja

$$S_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_v} \quad (\text{A.2})$$

Assim, evidentemente cada fase tem o seu grau de saturação, por isso em um sistema multifásico, a soma de todas as fases é sempre 1, i.e.

$$\sum_{\alpha=1}^{n\text{-fases}} S_\alpha = 1 \Rightarrow 0 \leq S_\alpha \leq 1 \quad (\text{A.3})$$

onde  $\alpha = w$ ,  $\alpha = g$  e  $\alpha = o$  indicam água, gás e óleo, respectivamente. O meio poroso é dito saturado quando o volume de espaços vazios está completamente preenchido por fluidos que não sejam o ar.

Em sistemas multifásicos, o fluxo também é influenciado pela força da capilaridade, a qual atua na interface entre os fluidos. Por outro lado, em um sistema monofásico o fluxo é governado pelas forças que são definidas pelo gradiente de pressão. Como o presente trabalho assume o meio poroso completamente saturado com água, conseqüentemente  $S_w = 1$  e a ação da capilaridade não será considerada.

### A.2.3 Permeabilidade

Segundo Gomes (2009), a condutividade hidráulica de rochas e solos mede a influência da viscosidade do fluido e a adesão na superfície dos grãos. Desse modo, define-se condutividade hidráulica através da seguinte equação:

$$\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{k}_{\text{eff}} \frac{\rho_\alpha g}{\mu_\alpha} \quad (\text{A.4})$$

onde  $\rho_\alpha$  é a densidade da fase  $\alpha$ ,  $\mu_\alpha$  é a viscosidade dinâmica do fluido,  $g$  é a aceleração devido a gravidade e  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$  é a permeabilidade efetiva definida por

$$\mathbf{k}_{\text{eff}} = \mathbf{k} k_{r_\alpha}, \quad \text{com} \quad 0 \leq \sum_{\alpha=1}^{n\text{-fases}} k_{r_\alpha} \leq 1 \quad (\text{A.5})$$

sendo  $\mathbf{k}$  o tensor de permeabilidade intrínseca e  $k_{r_\alpha}$  a permeabilidade relativa.

A permeabilidade intrínseca depende somente das propriedades do maciço rochoso e é expressa por um tensor cujas componentes variam conforme a uniformidade do material. Em outras palavras, o tensor  $\mathbf{k}$  depende se o material é homogêneo ou heterogêneo e se é isotrópico ou anisotrópico. Assim, no caso de um material heterogêneo, o tensor de permeabilidade é dado por

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad \text{para análises 3D, e} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad \text{para análises 2D} \quad (\text{A.6})$$

Se o material tem um comportamento isotrópico, como no caso de solos, o tensor de permeabilidade pode então ser escrito como

$$\mathbf{k} = k \mathbf{I} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad \text{para análises 3D, e} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad \text{para análises 2D} \quad (\text{A.7})$$

A permeabilidade relativa é uma quantidade adimensional que depende da saturação. Ela é uma característica da fase e pode ser determinada empregando aproximações analíticas, como as funções de Brooks-Corey e van-Genuchten (HELMIG et al., 1997). Como o presente trabalho considera o meio saturado com água, usa-se  $k_{r_w} = 1$ .

### A.2.4 Formulação hidráulica

O problema de fluxo de fluidos em meios porosos pode ser matematicamente modelado por meio das equações de balanço e da lei de Darcy. Como admitiu-se um meio saturado com água, a única

equação de balanço de massa considerada foi a de balanço de massa de água. A análise do sistema fluídico foi realizado assumindo a lei de Darcy, a qual estabelece uma relação entre o fluxo do fluido e o campo de pressões. Assim, segundo esta lei, para um fluido Newtoniano em regime de escoamento laminar, o fluxo fluídico em um meio poroso pode ser expresso por

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla h \quad (\text{A.8})$$

sendo  $\mathbf{q}$  o fluxo fluídico,  $\mathbf{K}$  o tensor de condutividade hidráulica e  $\nabla h$  a carga hidráulica definida como

$$\nabla h = \nabla \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \quad (\text{A.9})$$

onde o primeiro termo dentro dos parenteses é denominado piezométrico e o segundo termo é chamado altimétrico. Assim, substituindo as Eqs (A.4) e (A.9) na Eq. (A.8), obtém-se

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} k_r \frac{\rho g}{\mu} \left[ \frac{1}{\rho g} \left( \nabla p + \rho \underbrace{g \nabla z}_{-\mathbf{g}} \right) \right] = -\mathbf{k} \frac{k_r}{\mu} [\nabla p - \rho \mathbf{g}] \quad (\text{A.10})$$

onde  $\nabla p$  é o gradiente de pressões e  $\mathbf{g}$  é o vetor de aceleração da gravidade.

Assumindo fluxo isotérmico, a densidade pode ser escrita como

$$\rho = \rho_0 e^{C(p-p_0)} \quad (\text{A.11})$$

onde  $\rho_0$  é a densidade do fluido em uma determinada pressão de referência  $p_0$  e  $C$  é o fator de compressibilidade do fluido. Segundo Gomes (2009), em várias situações o fluxo é considerado incompressível, i.e., a densidade do fluido é constante. Contudo, ao admitir-se a compressibilidade do fluido, a física do problema torna-se mais consistente e com efeito relevante no comportamento do fluido.

Logo, a equação de balanço de água é descrita por três termos, onde o primeiro termo é denominado termo de armazenamento, o segundo é o termo de fluxo e o terceiro é definido como termo de fonte/sumidouro de massa da água:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S \rho) + \nabla \cdot \mathbf{j} - f = 0 \quad (\text{A.12})$$

sendo  $f$  a taxa de produção de fluido por unidade de volume e  $\mathbf{j}$  o fluxo total do fluido. Segundo Olivella et al. (1994), o fluxo total pode ser decomposto em um termo advectivo e um não-advectivo, isto é:

$$\mathbf{j}_w = \rho \mathbf{q} + \phi S \rho \dot{\mathbf{u}} \quad (\text{A.13})$$

onde  $\dot{\mathbf{u}}$  é a velocidade de deslocamento da fase sólida. O segundo termo da equação acima é designada termo de Biot e é definido como o fluxo da fase fluídica devido ao movimento da fase sólida com relação à configuração de referência. Neste trabalho desconsiderou-se o fluxo de Biot. Assim, pode-se rescrever a Eq. (A.12) como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S \rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) - f = 0 \quad (\text{A.14})$$

Desse modo, substituindo a Eq. (A.10) na Eq. (A.14), pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S \rho) + \nabla \cdot \left( -\rho \mathbf{k} \frac{k_r}{\mu} [\nabla p - \rho \mathbf{g}] \right) - f = 0 \quad (\text{A.15})$$

Como anteriormente mencionado, admitiu-se o meio saturado com água. Portanto, água é o único fluido do meio poroso. Consequentemente, as Eqs (A.11) e (A.15) tornam-se

$$\rho_w = \rho_{w0} e^{C(p_w - p_{w0})} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_w) + \nabla \cdot \left( -\rho_{w0} \mathbf{k} \frac{1}{\mu_w} [\nabla p_w - \rho_{w0} \mathbf{g}] \right) - f_w = 0 \quad (\text{A.17})$$

As condições iniciais e de contorno dependem do problema que pretende-se resolver. Como um exemplo de condição inicial, pode-se assumir um tempo inicial  $t_0 = 0$  no qual a pressão  $p_0$  é conhecida ao longo do meio. Ressalta-se que em problemas hidráulicos o campo de pressões é a condição de contorno essencial e o fluxo é a condição de contorno natural.

### A.2.5 Formulação mecânica

De acordo com a teoria da mecânica do contínuo (MALVERN, 1969), a soma das forças atuantes no meio é igual à taxa temporal de variação do seu momento linear. Contudo, como apenas análises quase-estáticas foram realizadas, os termos inerciais podem ser desconsiderados e, consequentemente, o balanço de momento torna-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{A.18})$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões total e  $\mathbf{b}$  é o vetor de forças de corpo, ou de volume.

Segundo o princípio de Terzaghi (TERZAGHI, 1943), em um meio poroso deformável, a poropressão afeta o estado de tensões tal que

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + p_w \mathbf{I} \quad (\text{A.19})$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}'$  é o tensor de tensões efetivas,  $\mathbf{I}$  é o tensor unitário de segunda ordem e  $p_w$  é a poropressão. Ressalta-se que os tensores de tensões efetivas  $\boldsymbol{\sigma}'$  do presente capítulo e  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  do capítulo 2 são diferentes. Nesse caso, o tensor  $\boldsymbol{\sigma}'$  corresponde ao tensor de tensões aparantes do capítulo 2.

Substituindo a Eq. (A.19) na Eq. (A.18), obtém-se:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \nabla p_w + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{A.20})$$

Esta equação computa a mudança nas tensões efetivas, a qual tende a aumentar conforme a poropressão decresce.

Todas as simulações foram realizadas no contexto da teoria de pequenas deformações. Logo, as deformações são definidas pelo tensor de deformações infinitesimais  $\boldsymbol{\epsilon}$ . O acoplamento entre o fluxo e a equação mecânica está somente presente na componente volumétrica de  $\boldsymbol{\epsilon}$  (JHA, 2005). Portanto,

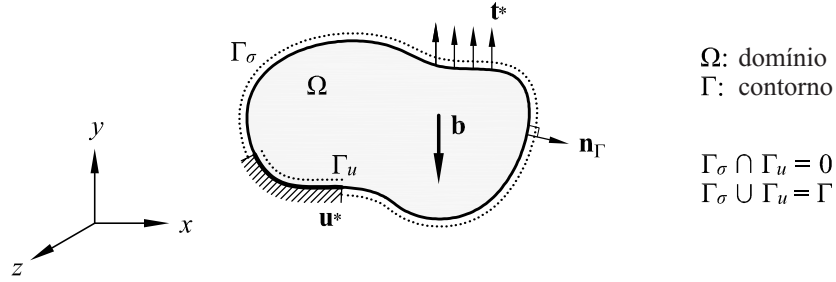
$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_v \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}_d, \quad \boldsymbol{\epsilon}_v = \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.21})$$

onde  $\epsilon_d$  e  $\epsilon_v$  são as partes desviadora e volumétrica do tensor de deformações, respectivamente.

O contorno é denominado essencial e denotado por  $\Gamma_u$  quando há deslocamentos prescritos; e é contorno natural e denotado por  $\Gamma_\sigma$  quando há tensões da superfície prescritas (Fig. A.2). Os valores prescritos são identificados por um asterisco. Portanto, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \text{ em } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\Gamma &= \mathbf{t}^* \text{ em } \Gamma_\sigma \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Finalmente, o modelo de dano à tração proposto no capítulo 2 é utilizado para simular o comportamento mecânico do material que pode sofrer degradação.



**Figura A.2:** Condições de contorno mecânicas de um meio contínuo

### A.2.6 Modelo de placas paralelas

De acordo com Sarkar, Toksoz e Burns (2004), o único modelo de fratura capaz de calcular a condutividade hidráulica é o modelo de placas paralelas (HUITT, 1956; SNOW, 1965). Esta formulação é bastante simples e permite modelar o fraturamento hidráulico adequadamente. Neste modelo, as paredes da fratura são representadas por duas placas paralelas, separadas por uma abertura  $[[u]]_n$ , conforme Fig. A.3. Como é possível observar, o fluxo ocorre no espaço entre as paredes dessas placas. A largura da fratura e o seu comprimento são denotados por  $b$  e  $l$ , respectivamente. Desse modo, este modelo cria um gradiente de pressões uniforme no plano da fratura, levando a um fluxo unidirecional. Neste caso, o fluxo está na direção  $x$  e dessa forma somente a componente  $x$  da velocidade,  $\dot{u}$ , existe (SARKAR; TOKSOZ; BURNS, 2004). Desse modo, a solução analítica para a velocidade é

$$\dot{u}(z) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{p_i - p_0}{l} \right) z ([[u]]_n - z) \quad (\text{A.23})$$

onde  $p_0$  e  $p_i$  são as pressões na entrada e saída, respectivamente.

O fluxo total que passa pela fratura é determinado integrando a velocidade sobre a fratura de  $z = 0$  a  $z = h$ . Assim, para uma largura  $b$

$$q_x = \int_0^{[[u]]_n} \frac{b}{2\mu} \left( \frac{p_i - p_0}{l} \right) z ([[u]]_n - z) dz = -\frac{b [[u]]_n^3}{12\mu} \left( \frac{p_0 - p_i}{l} \right) \quad (\text{A.24})$$

Para o caso unidirecional, a lei de Darcy pode ser expressa pela seguinte equação

$$q_x = -\frac{k_s A}{\mu} \left( \frac{p_0 - p_i}{l} \right) \quad (\text{A.25})$$

onde  $k_s$  é a permeabilidade da fratura e  $A = b \llbracket u \rrbracket_n$  é a área da seção transversal. Substituindo a Eq. (A.24) na Eq. (A.25), obtém-se:

$$k_s = \frac{\llbracket u \rrbracket_n^2}{12} \quad (\text{A.26})$$

A Eq. (A.26) estabelece a relação entre a permeabilidade da fratura e a sua abertura. Nota-se que a fratura aumenta a permeabilidade do meio.

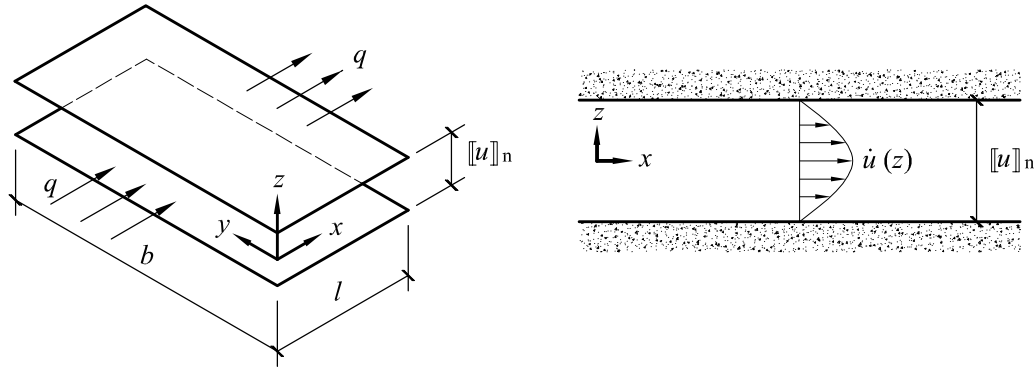


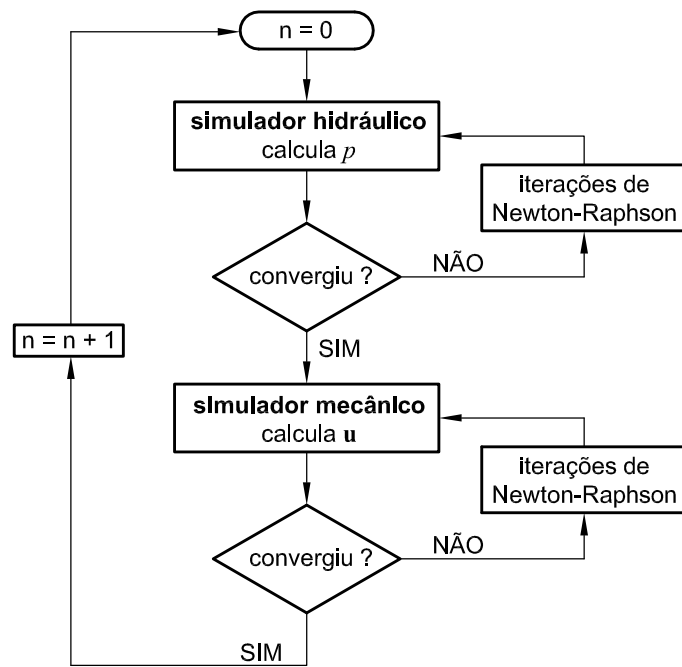
Figura A.3: Condições de contorno mecânicas de um meio contínuo

### A.2.7 Esquema hidromecânico acoplado

Um problema acoplado consiste de dois ou mais sistemas físicos que interagem entre si. Para o caso de reservatórios geomecânicos, a relação existente entre tensão e fluxo caracteriza um problema acoplado. No caso de fraturamento hidráulico, o problema envolve um acoplamento de no mínimo três processos: (1) a deformação mecânica induzida pela pressão fluídica, (2) o fluxo do fluido dentro da fratura e (3) a propagação da fratura (ADACHI et al., 2007).

Dentre os vários métodos existentes para resolver sistemas acoplados, o presente trabalho utilizou o chamado método explícito, no qual a relação entre as equações mecânicas e de fluidos constituem um acoplamento fraco. Nesse caso, mudanças na pressão fluídica provocam deformações no meio, mas alterações no estado de tensões não afetam as poro-pressões.

A Fig. A.4 ilustra um fluxograma para o acoplamento explícito. Como é possível observar, o sistema requer a solução de dois sistemas: um para o fluxo, o qual calcula o campo de pressões  $p$ ; e um outro para resolver a parte de mecânica dos sólidos, o qual computa o campo de deslocamento  $\mathbf{u}$ . Quando o meio exibe um comportamento não-linear, procedimentos Newton-Raphson são usados para resolver o sistema de equações.



**Figura A.4:** Fluxograma do método do acoplamento explícito (adaptado de Yaqueto (2011))