



# Agosto

1950

1. O dia 1 de Agosto foi dedicado ao Senhor Jesus Cristo, nosso Senhor e Salvador.

2. O dia 2 de Agosto foi dedicado ao Senhor Jesus Cristo, nosso Senhor e Salvador.

3. O dia 3 de Agosto foi dedicado ao Senhor Jesus Cristo, nosso Senhor e Salvador.

4. O dia 4 de Agosto foi dedicado ao Senhor Jesus Cristo, nosso Senhor e Salvador.

5. O dia 5 de Agosto foi dedicado ao Senhor Jesus Cristo, nosso Senhor e Salvador.

6. O dia 6 de Agosto foi dedicado ao Senhor Jesus Cristo, nosso Senhor e Salvador.

7. O dia 7 de Agosto foi dedicado ao Senhor Jesus Cristo, nosso Senhor e Salvador.

8. O dia 8 de Agosto foi dedicado ao Senhor Jesus Cristo, nosso Senhor e Salvador.

Dedico à Ana e ao Filipe.

# Agradecimentos

Aproveito este espaço para agradecer:

-Ao Dr. G.E.A. Matsas pela confiança que depositou em mim, por tudo o que me ensinou e sobretudo pelo companheirismo na elaboração deste trabalho.

-Ao Prof. G. Francisco, que me acolheu no instituto, pela paciência nas discussões de trabalho e por tudo que me tem ajudado.

-Aos Profs. V. Pleitez, A. Natale e R. Kraenkel pelas muitas sugestões de trabalho e de vida e pelo constante apoio.

-Aos amigos Felice, Silvio, Orlando e Luiz Augusto pelo entusiasmo nas discussões , pelos ensinamentos e pela camaradagem nos momentos difíceis.

-A Maria pela bondade que transmite e ao Alexandre pela amizade.

-Aos meus pais Cleber e Nara, meus padrinhos Asthon e Hélia, meus avós Mário e Clélia<sup>†</sup>, meu irmão Dario e minha tia Célia<sup>†</sup> pela bondade que os caracteriza, pelo amor que dispensam a mim e pelo que me tem ensinado sobre a vida.

-A todos os funcionários, professores e colegas que à seu modo contribuíram para a conclusão deste trabalho.

-Em especial a minha esposa Ana e ao meu filho Filipe pela energia, amor e carinho que me emprestam a cada novo dia.

<sup>†</sup> (*in memoriam*)

## Resumo

Estudamos o conceito de radiação em dois contextos aparentemente distintos: radiação proveniente de uma carga clássica, pontual, e radiação proveniente de um detetor de Unruh-DeWitt. Rederivamos os campos de uma carga em movimento hiperbólico e mostramos através deste exemplo que radiação não é geralmente covariante. Calculamos as taxas de emissão para detetores em movimento uniformemente acelerado e movimento uniforme através do vácuo de Minkowski. Concentramos em detetores ligados por tempo finito.

**Palavras Chaves:** radiação , detetores, banho térmico, aceleração .

**Áreas de conhecimento:** 1.05.01.03-7, 1.05.02.01-7, 1.05.03.01-3.

## Abstract

We study the concept of radiation in two apparently distinct contexts: radiation coming from a classical pointlike charge, and radiation coming from an Unruh-DeWitt detector. We rederive the fields for a charge in hyperbolic motion and use this example to show that the concept of radiation is not a generally covariant one. We calculate the emission rates for uniformly accelerated and inertial detectors going through the Minkowski vacuum. We concentrate on finite-time detectors.

**Key Words:** radiation, detectors, thermal bath, acceleration.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Radiação e cargas</b>	<b>5</b>
2.1	Carga elétrica em um campo externo . . . . .	5
2.2	Movimento hiperbólico . . . . .	10
2.2.1	Análise inercial . . . . .	11
2.2.2	Análise não inercial . . . . .	15
2.3	Discussões . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Radiação e detetores</b>	<b>21</b>
3.1	Banho térmico de Fulling-Davies-Unruh (FDU) . . . . .	21
3.2	Detetores uniformemente acelerados por tempo finito . . . . .	25
3.2.1	Quantização no espaço de Rindler . . . . .	26
3.2.2	Probabilidade de transição . . . . .	27
3.3	Detetores inerciais por tempo finito . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Comentários finais</b>	<b>35</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo de (2.14)</b>	<b>38</b>
<b>B</b>	<b>Prova de <math>M\mathcal{P} = {}^R\mathcal{P}_{em}^{exc} + {}^R\mathcal{P}_{abs}^{exc}</math></b>	<b>39</b>
<b>C</b>	<b>Cálculo de (3.43)</b>	<b>42</b>
	<b>Referências</b>	<b>44</b>

# 1 Introdução

Em um trabalho intitulado “Particle Creation by Black Holes”, Hawking [1] mostrou que buracos negros evaporam emitindo partículas em um espectro térmico caracterizado pela temperatura:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B GM} = \frac{\hbar \kappa}{2\pi k_B c}, \quad (1.1)$$

onde:

·  $M$  = massa do buraco negro,

·  $\kappa$  = gravidade superficial.<sup>1</sup>

Este artigo aparece como o pai oficial da “Gravitação Semi-Clássica” (GSC) ou “Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos” (TQCEC) principalmente pela miríade de trabalhos que tem continuamente motivado até os dias de hoje.

Contudo, justiça seja feita, Fulling já alertara, em [2] e em [3] sobre a fragilidade do processo de quantização em variedades Riemannianas gerais. Fulling mostrou que a ambigüidade na definição de partículas (presente na evaporação Hawking) ocorria mesmo em um espaço-tempo de Minkowski frente a trocas gerais de coordenadas.

Seguindo esta linha Unruh [4] e Davies [5], quase que concomitantemente, investigaram sobre a possibilidade de criação de partículas em um *background flat*, e.g. espaço-tempo de Minkowski. Unruh estudou o comportamento de dois tipos de detetores de partículas quando acelerados neste espaço-tempo. Acoplou o detetor<sup>2</sup> a um campo físico e notou que, ao acelerá-lo uniformemente através do vácuo de Minkowski associado a este campo, o detetor se excitava e emitia um espectro térmico de partículas para um observador inercial. A temperatura obtida por Unruh tinha a mesma forma daquela obtida

---

<sup>1</sup>A gravidade superficial é de fato definida por:

$$\kappa = \frac{GM}{r_g^2} = \frac{c^4}{4GM},$$

onde  $r_g$  é o raio de Schwarzschild do buraco. Um estudo mais detalhado do fenômeno de evaporação de buracos negros foge ao escopo desta dissertação e pode ser encontrado em [1].

<sup>2</sup>Usaremos nesta dissertação detetores de Unruh-DeWitt. A definição usada aqui é dada no início do capítulo 3. Seguimos, com poucas modificações, as definições encontradas em [4] ou [6].



por Hawking (1.1) apenas trocando-se  $\kappa$ (gravidade superficial) por  $a$ (aceleração do detector).<sup>3</sup> Unruh mostrou que o vácuo de um observador inercial é descrito como um estado térmico de partículas vistas por um observador uniformemente acelerado. Apreendemos, pois, com os trabalhos de Fulling, Davies e Unruh que o *conceito de partícula elementar é fortemente dependente do referencial que usamos para defini-la*.

Surpreendente é, contudo nos darmos conta de que Rohrlich já adiantara este resultado em uma série de trabalhos no início dos anos 60 [7]-[9]. Estes trabalhos versavam sobre a definição de radiação e sua existência no movimento hiperbólico de uma carga elétrica.<sup>4</sup> A solução dada por Rohrlich pode ser entendida em sua frase [9]: “Since radiation is not a generally covariant concept the question whether a charge *really* radiates is meaningless, unless it is referred to a particular coordinate system”.

A íntima relação entre o efeito FDU e a radiação de cargas aceleradas fica evidente em uma série de trabalhos [11]-[14], antigos e recentes.<sup>5</sup>

O objetivo desta dissertação é portanto dissecar cada um destes tópicos separadamente. Para tanto dividimo-la em duas partes distintas: na primeira parte estudamos o problema clássico da radiação, i.e. uma carga pontual clássica (elétron clássico) interagindo com um campo externo. Na segunda substituímos o elétron por um detector de Unruh-DeWitt e calculamos probabilidades de excitação em casos fisicamente realistas. Ao final comentamos sobre alguns pontos em que o estudo de detectores é iluminador em problemas envolvendo o conceito de radiação.

Mais especificamente estruturamos o texto da seguinte forma:

O capítulo 2 trata do problema clássico da radiação e possui três seções. A primeira

---

<sup>3</sup>Estudaremos este fenômeno em detalhe no segundo capítulo desta dissertação. Chama-lo-emos de agora em diante de efeito Fulling-Davies-Unruh (FDU).

<sup>4</sup>A questão foi levantada em 1909 por Born [10] ao calcular os campos gerados por uma carga descrevendo este movimento. Born obteve um campo de radiação mas constatou que o vetor de Abraham  $\Gamma^\mu = \ddot{z}^\mu + \dot{z}^\mu \ddot{z}^\nu \ddot{z}_\nu$ , usualmente associado à reação da radiação (ou radiação de frenagem) se anulava. Ainda mais, se transformarmos os campos para o referencial coacelerado com a carga anularemos as componentes magnéticas, i.e. o observador coacelerado com a carga não deteta radiação proveniente da mesma. Referir-nos-emos a este paradoxo como: “Problema da Radiação” (PR).

<sup>5</sup>Em [12] encontramos: “The understanding that has been gained of the accelerated vacua sheds new light on the classical issue of the self-force suffered by a uniformly accelerated charge”.

seção contém a solução geral para o sistema carga elétrica interagindo com um campo externo. As equações de movimento para o campo e para a carga são obtidas levando em conta o termo de reação da radiação. Concentramos sobre o Movimento Hiperbólico (MH) de uma carga na seção 2 onde fica evidente a não covariância do conceito de radiação. Reservamos a última seção para discussões.

O capítulo 3 trata do efeito FDU.<sup>6</sup> Na primeira seção deduzimos o efeito de uma maneira usual e discutimos sua interpretação física. As duas seções subsequentes analisam “detetores físicos”, i.e. detetores que podem ser ligados e/ou desligados. (Dito de outra forma, detetores acoplados a um campo por um tempo finito.) Através de um tratamento adequado mostramos que divergências ultravioletas não aparecem. As conclusões e discussões aparecem no último capítulo.

Ressaltamos que neste trabalho utilizaremos a eletrodinâmica de Maxwell. Não abordaremos formalismos alternativos como as eletrodinâmicas de Feynman-Wheeler [15] ou de Podolsky [16].

A assinatura da métrica é  $(+ - - -)$  na primeira e  $(- + + +)$  na segunda seções do segundo capítulo. Quando nada for dito em contrário usaremos unidades naturais, i.e.  $k_B = \hbar = c = G = 1$ . Por fim alertamos que “.” significa derivação com relação ao tempo próprio da partícula.

---

<sup>6</sup>Utilizamos um campo escalar real e não massivo neste capítulo. Queremos, ao estudar detetores ligados por um tempo finito, evitar problemas de violação de carga, que apareceriam se usássemos um campo eletromagnético.

## 2 Radiação e cargas

### 2.1 Carga elétrica em um campo externo

Uma carga pontual clássica interagindo com um dado campo representa o sistema mais simples na teoria de campos com interação, i.e., interação de um campo com um *c-number*. Apresenta, pois, solução Lagrangeana completa. A ação de interação para o sistema carga pontual em um campo elétrico será escrita como <sup>7 8</sup>

$$I = I_{em} + I_p + I_{int}, \quad (2.1)$$

onde

$$I_{em} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \quad (2.2)$$

$$I_p = m_0 \int d\tau (\dot{z}_\mu \dot{z}^\mu)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3)$$

$$I_{int} = \int d^4x A_\mu(x) j^\mu(x), \quad (2.4)$$

e

$$j^\mu(x) = e \int d\tau \dot{z}^\mu \delta^4(x - z(\tau)), \quad (2.5)$$

onde  $z^\mu$  é a trajetória da carga,  $\tau$  seu tempo próprio e  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . As equações de movimento para a partícula bem como a expressão para o campo gerado saem respectivamente de

$$\frac{\delta I}{\delta z^\mu} = 0, \quad \frac{\delta I}{\delta A^\mu} = 0, \quad (2.6)$$

e são de fato

$$m_0 \ddot{z}_\mu = e(\partial_\mu A_\eta - \partial_\eta A_\mu) \dot{z}^\eta = e F_{\mu\eta} \dot{z}^\eta, \quad (2.7)$$

$$\square A_\mu = j_\mu. \quad (2.8)$$

Fica evidente que (2.8) admite solução da forma

$$A_\mu(x) = A_\mu^{in}(x) + \int d^4x' D_{ret}(x - x') j_\mu(x'), \quad (2.9)$$

---

<sup>7</sup>Adotaremos aqui o procedimento seguido em [17], colocando as forças externas de uma forma *ad hoc* após a obtenção das equações de movimento. É imediato que isto não causa qualquer transtorno às conclusões. Denotaremos as forças externas por  $F_\mu^{ext}$ .

<sup>8</sup> $m_0$  em (2.3) é a chamada massa nua (*bare mass*) da partícula. Ela adquirirá significado físico após um processo de renormalização, como ficará claro no que segue.

ou

$$A_\mu(x) = A_\mu^{out}(x) + \int d^4x' D_{adv}(x-x') j_\mu(x'), \quad (2.10)$$

onde <sup>9</sup>

$$D_{ret}^{adv}(x-x') = (2\pi)^{-1} \theta[\pm(t-t')] \delta[(x-x')^2] \quad (2.11)$$

é a função de Green usual para o campo eletromagnético (e.g. [19]) <sup>10</sup>. A definição dos potenciais  $A_\mu^{in}$  e  $A_\mu^{out}$  (soluções da equação homogênea  $\square A_\mu = 0$ ) é também familiar [21].

Com os resultados anteriores (2.9)-(2.11) e (2.5), obtemos, fazendo <sup>11</sup>  $A_\mu^{in} = 0$ ,

$$F_{\mu\nu} = e \int d\tau \frac{\partial}{\partial x^\mu} D_{ret}[x-z(\tau)] \dot{z}_\nu(\tau) - (\mu \rightleftharpoons \nu) \quad (2.13)$$

ou ainda (v. ap. A)

$$F_{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{[(x-z)^\sigma \dot{z}_\sigma]} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{(x-z)_\mu \dot{z}_\nu}{(x-z)^\sigma \dot{z}_\sigma} \right] - (\mu \rightleftharpoons \nu). \quad (2.14)$$

Desta última expressão obtemos

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{vel} + F_{\mu\nu}^{acc} \quad (2.15)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^{vel} = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{R^3} [(x-z)_\mu \dot{z}_\nu - (\mu \rightleftharpoons \nu)], \quad (2.16)$$

$$F_{\mu\nu}^{acc} = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{R^3} [(x-z)_\mu \ddot{z}_\nu R - (x-z)_\mu \dot{z}_\nu \dot{Q} - (\mu \rightleftharpoons \nu)], \quad (2.17)$$

e <sup>12</sup>

$$R = (x-z)^\sigma \dot{z}_\sigma, \quad (2.18)$$

<sup>9</sup>Uma revisão clara das funções de Green usuais em teoria de campos pode ser encontrada em [18].

<sup>10</sup>Precisaremos mais adiante da função de Green para o campo massivo. Uma breve consulta em [18] ou [20] mostra que a mesma vale

$$\Delta_{ret}(r, m) = (2\pi)^{-1} \delta(x^2) - \theta(t-t') (4\pi)^{-1} m \frac{J_1[m(x^2)^{1/2}]}{(x^2)^{1/2}}. \quad (2.12)$$

<sup>11</sup>A relação entre esta hipótese e a causalidade na eletrodinâmica de Maxwell é bem discutida em [22]. Esta hipótese só é abandonada em casos específicos como espalhamento Compton.

<sup>12</sup>R é de fato uma distância invariante. Compreendemos isto melhor indo para o referencial inercial instantaneamente em repouso em relação à carga.

$$Q = (x - z)^\sigma \ddot{z}_\sigma. \quad (2.19)$$

Notemos que  $F_{\mu\nu}^{vel}$  e  $F_{\mu\nu}^{ace}$  são, respectivamente, os termos independente e dependente da aceleração.  $F_{\mu\nu}^{vel}$  é chamado *velocity*-, ou *near-field*, enquanto que  $F_{\mu\nu}^{ace}$  é chamado de *acceleration*-, ou *far-field*. As equações (2.15)-(2.17) representam o campo gerado pela carga puntiforme. O passo seguinte seria portanto o de introduzir esta solução em (2.7) afim de obter a equação de movimento para a carga. Contudo, fica claro que as expressões (2.16) e (2.17) divergem sobre a linha de mundo da partícula carregada, i.e. quando  $x^\mu \rightarrow z^\mu$ . Há a necessidade de um processo de renormalização.<sup>13</sup> Usamos aqui o processo de regularização de Pauli-Villars para explicitar a divergência a ser subtraída<sup>14</sup> (v. apêndice de [17]). A expressão (2.13) pode ser modificada, obtendo-se:

$$F_{\mu\nu}^M = e \int d\tau \frac{\partial}{\partial x^\mu} D_M[x - z(\tau)] \dot{z}_\nu(\tau) - (\mu \rightleftharpoons \nu), \quad (2.20)$$

onde

$$D_M(r) = D_{ret}(r) - \Delta_{ret}(r, M). \quad (2.21)$$

Isto é, usando (2.12) encontramos

$$D_M(r) = \frac{M}{4\pi} \frac{J_1(Mr)}{r}. \quad (2.22)$$

Transformando a expressão (2.21) para o *espaço dos momenta* (onde  $M$  é facilmente entendido como o regulador de Pauli-Villars)<sup>15</sup> vemos que, de fato

$$D_M(r) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} D_{ret}(r). \quad (2.23)$$

---

<sup>13</sup>Dirac foi quem primeiro usou semelhante técnica [23]. Não havia, contudo, no procedimento de Dirac a explicitação da divergência (regularização) e sua subtração (renormalização).

<sup>14</sup>Outros métodos poderiam ter sido usados. A dedução desta equação de uma forma pedagógica, usando o método de *point-splitting*, pode ser encontrada em [24].

<sup>15</sup>Se denotarmos a transformada de Fourier de  $D_M$  por  $\hat{D}_M(k)$  obteremos

$$\hat{D}_M(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \left[ \frac{1}{k^2 - (\omega - i\epsilon)^2} - \frac{1}{k^2 + M^2 - (\omega - i\epsilon)^2} \right].$$

Desta última expressão fica claro que

$$\hat{D}_M(k) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \hat{D}_{ret}(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{k^2 - (\omega - i\epsilon)^2}.$$

Com isso podemos adotar o seguinte procedimento: calculamos o autocampo com a função  $D_M$  e ao final dos cálculos removemos o regulador, i.e.  $M \rightarrow +\infty$ . Partindo de (2.20) e trocando a variável de integração por

$$r = [(x - z(\tau))_\sigma (x - z(\tau))^\sigma]^{\frac{1}{2}} \quad (2.24)$$

obtemos

$$F_{\mu\nu}^M(x) = e \int_0^\infty dr \frac{d\tau}{dr} \frac{\partial D_M(r)}{\partial x^\mu} \dot{z}_\nu(\tau) - (\mu \rightleftharpoons \nu). \quad (2.25)$$

Procedemos com o cálculo seguindo os passos de [17], i.e., colocando a partícula na origem do sistema de coordenadas ( $z_\mu = 0$ ) em  $\tau = 0$  e computando a contribuição do autocampo ( $x_\mu = 0$ ). Os processos de limite sugeridos acima são delicados e por isso são mostrados no que segue. Podemos escrever a equação (2.25) como

$$F_{\mu\nu}^M(0) = -e \int_0^\infty dr \frac{dz_\nu}{dr} \frac{z_\mu(\tau)}{r} \frac{d}{dr} D_M(r) - (\mu \rightleftharpoons \nu), \quad (2.26)$$

pois

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_{x^\mu=0} = \left. \frac{[x_\mu - z_\mu(\tau)]}{r} \right|_{x^\mu=0} \frac{d}{dr} = -\frac{z_\mu(\tau)}{r} \frac{d}{dr}. \quad (2.27)$$

Com isto obtemos, após uma integração por partes:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^M(0) &= -e \int_0^\infty dr D_M(r) \frac{d}{dr} \left[ \frac{z_\mu}{r} \frac{dz_\nu}{dr} \right] - (\mu \rightleftharpoons \nu) \\ &= -\frac{eM}{4\pi} \int_0^\infty dr \frac{J_1(Mr)}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{dz_\mu}{dr} \frac{dz_\nu}{dr} - \frac{z_\mu}{r^2} \frac{dz_\nu}{dr} + \frac{z_\mu}{r} \frac{d^2 z_\nu}{dr^2} \right] - (\mu \rightleftharpoons \nu) \\ &= -\frac{eM}{4\pi} \int_0^\infty dr J_1(Mr) \left[ \frac{z_\mu}{r^2} \frac{d^2 z_\nu}{dr^2} - \frac{z_\mu}{r^3} \frac{dz_\nu}{dr} \right] - (\mu \rightleftharpoons \nu). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Notemos que o primeiro termo na segunda igualdade não contribui por ser simétrico em  $\mu\nu$ . Expandindo  $z_\mu$  e suas derivadas em torno de  $r = 0$  obtemos<sup>16</sup>

$$F_{\mu\nu}^M(0) = -\frac{eM}{4\pi} \int_0^\infty dr J_1(Mr) \left[ \left( \frac{z_\nu'''}{2} z_\mu' - \frac{z_\nu' z_\mu'''}{6} \right) - \frac{z_\nu' z_\mu''}{2r} \right] - (\mu \rightleftharpoons \nu) + \mathcal{O}(r). \quad (2.29)$$

Usando a seguinte propriedade:

$$M \int_0^\infty J_1(Mr) r^n dr = M^{-n}, \quad (2.30)$$

---

<sup>16</sup> "''" significa derivada com respeito à  $r$  avaliada em  $r = 0$ . Notemos que isto significa  $z_\mu \rightarrow 0$ .

obtemos

$$F_{\mu\nu}^M(0) = \frac{eM}{8\pi} z'_\nu z''_\mu - \frac{2e}{3} (4\pi)^{-1} z'''_\nu z'_\mu - (\mu \rightleftharpoons \nu) + \mathcal{O}(M^{-1}). \quad (2.31)$$

Da equação (2.24) vemos que

$$\eta^{\mu\nu} z'_\mu z'_\nu = 1, \quad (2.32)$$

e portanto o uso da regra da cadeia aliada à condição  $\dot{z}_\mu \dot{z}^\mu = 1$  fornece<sup>17</sup>

$$\left. \frac{d\tau}{dr} \right|_{r=0} = -1. \quad (2.33)$$

O resultado da utilização de (2.33) em (2.31) é finalmente:

$$F_{\mu\nu}^M(0) = -\frac{eM}{8\pi} (\dot{z}_\nu \ddot{z}_\mu - \dot{z}_\mu \ddot{z}_\nu) + \frac{2e}{3} (4\pi)^{-1} (\dot{z}_\nu \ddot{z}_\mu - \dot{z}_\mu \ddot{z}_\nu) + \mathcal{O}(M^{-1}) \quad (2.34)$$

e portanto

$$m_0 \ddot{z}_\mu = -\frac{e^2 M}{8\pi} \ddot{z}_\mu + \frac{2e^2}{3} (4\pi)^{-1} (\dot{z}_\mu \ddot{z}_\nu \ddot{z}^\nu + \ddot{z}_\mu) + \mathcal{O}(M^{-1}). \quad (2.35)$$

(Note que usamos  $\dot{z}_\mu \dot{z}^\mu = 0$ .) Como ato final fazemos

$$m \ddot{z}_\mu = \frac{2e^2}{3} (4\pi)^{-1} (\dot{z}_\mu \ddot{z}_\nu \ddot{z}^\nu + \ddot{z}_\mu) + F_\mu^{ext}, \quad (2.36)$$

onde:

- $m = m_0 + \frac{e^2 M}{8\pi}$
- O limite  $M \rightarrow \infty$  foi tomado.
- Uma força externa  $F_\mu^{ext}$  foi introduzida (v. nota de rodapé 07).

A equação (2.36) é chamada de equação de Lorentz-Dirac para o elétron clássico e contém explicitamente o vetor de Abraham-Lorentz  $\Gamma_\mu$ . Notemos que o termo  $\Gamma_\nu = \frac{2e^2}{3} (4\pi)^{-1} (\dot{z}_\nu \ddot{z}_\mu \ddot{z}^\mu + \ddot{z}_\nu)$  desempenha o papel de uma força e não está associado à força externa que age sobre a partícula. Verificamos ainda que a massa nua ( $m_0$ ) deve ser infinitamente negativa afim de conferir à massa observada ( $m$ ) um valor finito e positivo. Coleman [17] mostra que o fato de  $m_0$  ser negativa é fundamental na existência de “runaway solutions”. Não levaremos esta questão mais adiante.

<sup>17</sup>De fato obtemos  $(\tau')^2 = 1$ , mas a condição de causalidade impõe  $\tau' = -1$ . Dito de outra forma: como utilizamos  $D_{ret}$ , os únicos valores de  $\tau$  relevantes para o cômputo de  $F_{\mu\nu}^M(0)$  em  $\tau = 0$  assumem valores negativos.

## 2.2 Movimento hiperbólico

Nesta seção estaremos interessados em analisar o MH de um elétron clássico. Este movimento é de fundamental importância para entendermos a não covariância do conceito de radiação .

O movimento com aceleração uniforme se caracteriza por<sup>18</sup>:

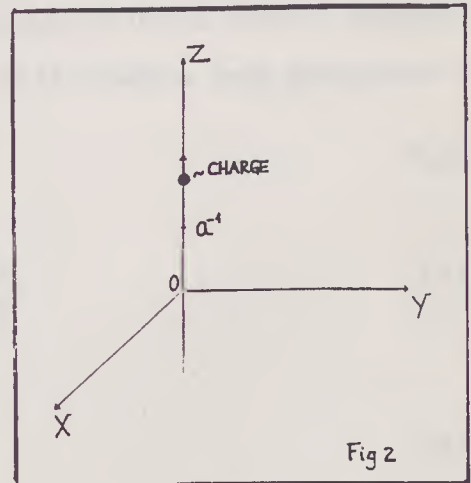
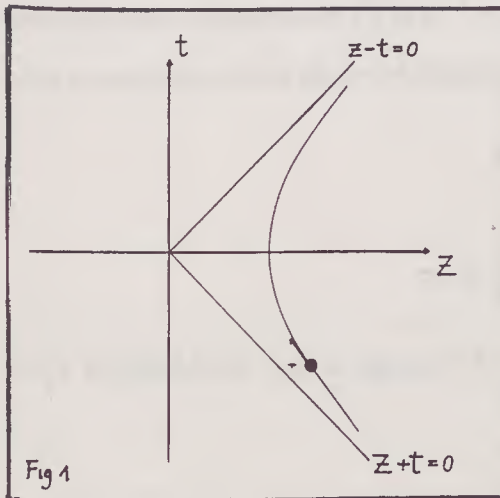
$$\ddot{z}_\mu \ddot{z}^\mu = a^2, \quad (2.37)$$

$$\ddot{\ddot{z}}_\mu = a^2 \dot{z}_\mu, \quad (2.38)$$

i.e. aceleração própria constante.

O MH é um caso particular deste movimento onde a carga está restrita ao plano  $tz$  como mostram as figuras abaixo. Nesta seção usaremos a métrica com assinatura  $(- + ++)$ . Neste caso  $\Gamma^\mu$  assume a seguinte forma:

$$\Gamma^\mu = \dot{\ddot{z}}^\mu - \dot{z}^\mu \ddot{z}^\nu \ddot{z}_\nu. \quad (2.39)$$



<sup>18</sup>Sabemos que, independentemente do tipo de movimento, valem:

$$\dot{z}_\mu \dot{z}^\mu = -1,$$

$$\dot{z}_\mu \ddot{z}^\mu = 0, \quad \dot{z}_\mu \dot{\ddot{z}}^\mu + \ddot{z}_\mu \ddot{z}^\mu = 0.$$



### 2.2.1 Análise inercial

Uma vez que as equações (2.37) e (2.38) descrevem o movimento hiperbólico como visto por um observador inercial concluímos que não há reação da radiação para uma carga em MH, pois  $\Gamma^\mu = 0$  neste caso. Dito de outra forma: embora a carga sujeita a este tipo de movimento realmente *irradie para observadores inerciais* (como ficará evidente mais adiante nesta subsecção ) ela não sofre “*slow-down*”.

Já sabemos que  $\Gamma^\mu = 0$  para este movimento. Não calculamos, porém, os campos gerados por uma carga em MH. Quanto a este respeito o MH de uma carga puntiforme também se mostra peculiar. Isto ocorre porque os limites  $t \rightarrow \pm\infty, z \rightarrow +\infty$  exigem que a solução de Lienard-Wiechert seja completada para abranger todo o domínio de causalidade deste movimento. Apenas comentaremos brevemente sobre este ponto ao final desta subsecção . Passaremos ao cálculo do campo gerado pela carga em MH como visto pelo observador inercial.

Admita que uma carga puntiforme descreva MH de aceleração própria com valor absoluto  $a$  em um espaço-tempo de Minkowski, tal que sua posição e velocidade em  $t_Q = 0$  valham respectivamente  $z_Q^0 = a^{-1}$  e  $v_Q^0 = 0$ . Constitui-se então de um exercício elementar dos cursos de relatividade/eletromagnetismo encontrar as equações deste movimento:<sup>19</sup>

$$z_Q^2 - t_Q^2 = a^{-2}, \quad (2.40)$$

$$v_Q = \frac{t_Q}{(a^{-2} + t_Q^2)^{1/2}} = \frac{t_Q}{z_Q}, \quad (2.41)$$

cuja 4-velocidade tem a seguinte forma:

$$\dot{z}_Q^\mu = (\gamma, \gamma \mathbf{v}_Q). \quad (2.42)$$

Chamaremos de  $R^\mu$  ao 4-vetor *lightlike* correspondente a separação entre o “ponto-fonte” Q (de coordenadas  $z_Q^\mu$ ) e o “ponto campo” P (de coordenadas  $x^\mu$ ):

$$R^\mu = (t - t_Q, \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q). \quad (2.43)$$

---

<sup>19</sup>Notemos que  $t_Q$  não é o tempo próprio da partícula, mas sim o tempo atribuído ao seu movimento por um observador inercial. Subentendemos sempre (v. Fig. 2) que o movimento se dá ao longo do eixo  $Oz$ .

As fórmulas para os potenciais de Lienard-Wiechert (2.9) e (2.10) podem ser postas de forma mais conveniente após uma integração parcial (v. [20] ou [19]) dando

$$A_\mu(x) = e \frac{\dot{z}_\mu^Q}{R_\nu \dot{z}_Q^\nu}. \quad (2.44)$$

Por outro lado [v. Eq.(2.18)]:

$$\begin{aligned} R_\nu \dot{z}_Q^\nu = R &= -\gamma(t - t_Q) + \gamma \mathbf{v}_Q \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \\ &= -\gamma(t - t_Q) + \gamma v_Q (z - z_Q). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Usando (2.41) encontramos

$$R_\nu \dot{z}_Q^\nu = -\gamma \left( t - \frac{t_Q}{z_Q} \right). \quad (2.46)$$

O problema de calcular os potenciais  $A_\mu(x)$ , como função das coordenadas do “ponto campo” P fica, com a ajuda da fórmula (2.46), reduzido ao cálculo de  $t_Q/z_Q$  nestas coordenadas, i.e.

$$t_Q = t_Q(x^\mu), z_Q = z_Q(x^\mu). \quad (2.47)$$

Essas relações são obtidas explicitamente resolvendo-se o seguinte sistema algébrico:

$$\begin{aligned} z_Q^2 - t_Q^2 &= a^{-2}, \\ \rho^2 + (z - z_Q)^2 - (t - t_Q)^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde a segunda equação representa a condição  $R^\mu R_\mu = 0$  (P e Q estão sobre um cone de luz). Notemos ainda que  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , pois  $x_Q = y_Q = 0$  (v. Fig. 2). O sistema (2.48) tem como solução

$$t_Q = \frac{\eta t - \xi z}{2(z^2 - t^2)}, \quad (2.49)$$

$$z_Q = \frac{\eta z - \xi t}{2(z^2 - t^2)}, \quad (2.50)$$

onde

$$\eta = \rho^2 + z^2 + a^2 - t^2, \quad (2.51)$$

$$\xi = [(-\rho^2 - z^2 + a^{-2} + t^2)^2 + 4a^{-2}\rho^2]^{1/2}, \quad (2.52)$$

e portanto os potenciais tem as seguintes expressões :

$$A_t = -\phi = -e \frac{\eta z - \xi t}{\xi(z^2 - t^2)} \theta(z + t), \quad (2.53)$$

$$A_z = e \frac{\eta t - \xi z}{\xi(z^2 - t^2)} \theta(z + t), \quad (2.54)$$

$$A_\rho = A_\phi = 0. \quad (2.55)$$

É importante lembrarmos que estas soluções são válidas apenas na região aberta  $z + t > 0$ ; portanto nesta abordagem, tivemos que colocar as funções  $\theta(t + z)$  das fórmulas acima à mão . Uma derivação mais elegante [partindo das formas integrais (2.9) e (2.10)], onde a condição de causalidade aparece desde o início, pode ser encontrada em [25]<sup>20</sup>.

Aos potenciais (2.53) - (2.55) acima correspondem os seguintes campos:

$$F_{tz} = -E_z = -\frac{4ea^{-2}}{\xi^3} (z^2 - t^2 - a^2 - \rho^2) \theta(t + z), \quad (2.56)$$

$$F_{t\rho} = -E_\rho = -\frac{8ea^{-2}\rho z}{\xi^3} \theta(t + z), \quad (2.57)$$

$$F_{\rho z} = B_\phi = \frac{8ea^{-2}\rho t}{\xi^3} \theta(t + z), \quad (2.58)$$

$$E_\phi = B_\rho = B_z = 0. \quad (2.59)$$

(Notemos que não há contribuições tipo  $\delta(t + z)$  nos campos. A única que poderia aparecer em  $F_{tz}$  se anula.)

Até onde sabemos, Bondi e Gold [26] foram os primeiros a notar que as soluções de (2.56) - (2.59) não satisfaziam as equações de Maxwell para  $z + t = 0$  (i.e., sobre o cone de luz assintótico ao movimento da carga). De fato usando as equações anteriores em<sup>21</sup>

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x) \quad (2.60)$$

<sup>20</sup>Adotamos o procedimento acima pela sua simplicidade e apelo geométrico.

<sup>21</sup> $\nabla_\mu$  é a derivada covariante para o sistema de coordenadas cilíndrico.

obtemos, quando  $x$  é tal que  $z + t = 0$ :

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu} F^{t\mu}\Big|_{z+t=0} &= -\frac{4ea^{-2}(a^{-2} + \rho^2)}{\xi^3}\Big|_{z+t=0} \delta(z+t) \\ &= -\frac{4ea^2}{(1 + a^2\rho^2)^2} \delta(z+t),\end{aligned}\quad (2.61)$$

$$\nabla_{\mu} F^{z\mu}\Big|_{z+t=0} = -\nabla_{\mu} F^{t\mu}, \quad (2.62)$$

$$\nabla_{\mu} F^{\rho\mu}\Big|_{z+t=0} = 0. \quad (2.63)$$

Os passos intermediários na dedução dos campos corrigidos  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  (para que os campos eletromagnéticos satisfaçam as equações de Maxwell também sobre o horizonte  $z + t = 0$ ) não nos interessam, uma vez que não modificam o resultado qualitativo final desta subseção, qual seja: “Um observador inercial vê radiação proveniente de uma carga em MH”. Daremos, apenas por motivo de completeza, a forma final dos campos gerados por uma eletron clássico em MH vistos por um observador inercial. Sua forma segue:

$$\mathcal{F}^{tz} = \frac{ea^{-2}(z^2 - t^2 - a^{-2} - \rho^2)}{\xi^3} \theta(t+z), \quad (2.64)$$

$$\mathcal{F}^{t\rho} = \frac{8ea^{-2}\rho z}{\xi^3} \theta(t+z) + \frac{2ea^2\rho}{(1 + a^2\rho^2)} \delta(t+z), \quad (2.65)$$

$$\mathcal{F}^{z\rho} = \frac{8ea^{-2}\rho t}{\xi^3} \theta(t+z) - \frac{2ea^2\rho}{(1 + a^2\rho^2)} \delta(t+z). \quad (2.66)$$

Observemos que existe uma componente magnética ( $\mathcal{F}_{z\rho}$ ), dependente do tempo, no campo visto por um observador inercial, i.e., o observador inercial deteta um campo de radiação. De fato o cálculo do tensor de energia-momentum ( $T_{\mu\nu}$ ) para os campos (2.64) - (2.66) fornece [25]<sup>22</sup>:

$$T^{tz} = e^2\rho^2 \left[ \frac{64a^{-4}tz}{\xi^6} \theta(z+t) - \frac{16a^6z}{(1 + a^2\rho^2)^4} \delta(z+t) - \frac{4a^4}{(1 + a^2\rho^2)^2} \delta(0)\delta(z+t) \right], \quad (2.67)$$

<sup>22</sup>Lembremos que as componentes cruzadas no tensor de energia-momentum constituem as componentes do vetor de Poynting, i.e.  $S^i = T^{0i}$ .

$$T^{t\rho} = e^2 \rho \left[ \frac{8a^{-4}(\rho^2 + a^{-2} - z^2 + t^2)t}{\xi^6} \theta(z+t) - \frac{a^4}{(1 + a^2 \rho^2)^3} \delta(z+t) \right], \quad (2.68)$$

onde usamos<sup>23</sup>:

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{F}^{\mu\sigma} \mathcal{F}_\sigma^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \mathcal{F}^{\lambda\sigma} \mathcal{F}_{\lambda\sigma}. \quad (2.69)$$

### 2.2.2 Análise não inercial

Já sabemos que uma carga puntiforme em MH irradia para um observador inercial. (Ainda que não haja reação da radiação,  $\Gamma^\mu = 0$ .)

Perguntemo-nos agora se um observador coacelerado com a carga também detecta radiação. Para responder a esta questão devemos calcular os campos de uma carga em MH vistos por um observador coacelerado. Com este objetivo em mente podemos tomar dois caminhos equivalentes:

1. Resolver as equações de Maxwell-Lorentz para o sistema de referência acelerado, i.e.<sup>24</sup>:

$$g_{ab} \nabla^a \nabla^b A_\mu(x) = j_\mu(x), \quad (2.70)$$

$$\nabla^\mu A_\mu(x) = 0, \quad (2.71)$$

e ao final calcular  $F_{\mu\nu}$ .

2. Transformar os campos vistos em um sistema inercial, (2.64) - (2.66), para aqueles vistos no sistema coacelerado com a carga.

Optamos pelo segundo caminho uma vez que já calculamos, na seção anterior, as expressões para os campos gerados por uma carga em MH visto por um observador inercial. Precisamos, contudo, conhecer a transformação de coordenadas entre observadores

<sup>23</sup>O termo  $\delta(0)\delta(z+t)$  em (2.67) representa o produto  $\delta(z+t)\delta(z+t)$ . Esta divergência era esperada sobre o horizonte [25]. Usamos também a seguinte convenção :

$$\theta(z+t)\delta(z+t) = \frac{1}{2}\delta(z+t).$$

<sup>24</sup>Aqui  $g_{\mu\nu}$  é a métrica para observadores acelerados e  $j_\mu$ ,  $A_\mu$  e  $\nabla_\mu$  estão escritos nas coordenadas apropriadas a estes observadores. (As formas explícitas de  $g_{\mu\nu}$  e das coordenadas segue mais adiante.)

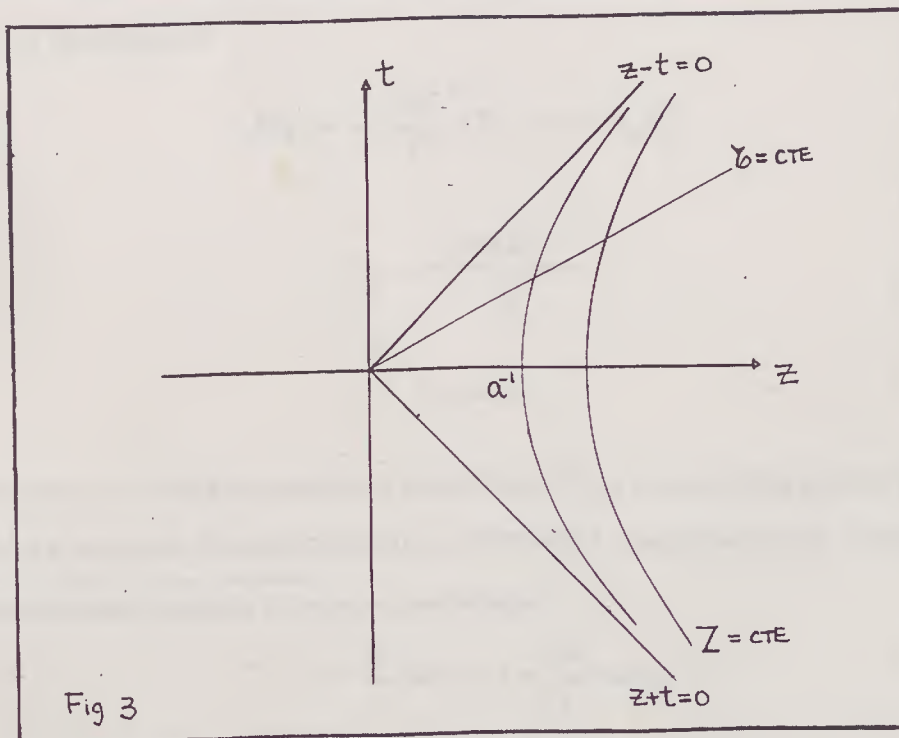
inerciais e observadores uniformemente acelerados, a fim de encontrar a correspondente transformação induzida nos campos.

Notemos que partindo da expressão (2.40) podemos construir uma família de hipérboles  $H_\lambda$  dadas por

$$H_\lambda : z^2 - t^2 = \lambda^2 a^{-2}, \quad (2.72)$$

onde  $\lambda \in (0, +\infty)$ . Cada uma dessas hipérboles representa um observador com aceleração  $a\lambda^{-1}$  e a família  $H_\lambda$  cobre toda a porção  $z > |t|$  do espaço-tempo de Minkowski.

Podemos, portanto, construir um “bom” sistema de coordenadas sincronizando a família de trajetórias  $H_\lambda$ . Notemos que retas do tipo  $z = \alpha t$  ( $|\alpha| < 1$ ) selecionam um ponto em cada hipérbole. A identificação destes pontos como simultâneos e designados pelo tempo próprio da trajetória  $H_{\lambda=1}$  sincroniza a família de hipérboles (v. Fig 3). Definimos com isso um sistema de coordenadas caracterizado pela aceleração  $a$  e portanto coacelerado com a carga.



Designaremos as coordenadas para este sistema, como de praxe, por  $(\tau, Z, x, y)$ , onde

•  $\tau$  = tempo próprio da trajetória  $H_{\lambda=1}$ .

•  $Z = \lambda a^{-1}$ .

A lei de transformação para coordenadas de Minkowski  $(t, x, y, z)$  e vice-versa é<sup>25</sup>:

$$t = Z \sinh a\tau, z = Z \cosh a\tau. \quad (2.73)$$

Com esta mudança de coordenadas o elemento de linha  $ds^2$  que em Minkowski assume a seguinte forma:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.74)$$

em  $z > |t|$  passa a ser

$$ds^2 = -a^2 Z^2 d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dZ^2. \quad (2.75)$$

À porção  $z > |t|$  do espaço-tempo munido da métrica dada por (2.75) chamamos de “espaço-tempo de Rindler”, ou “Rindler wedge”.<sup>26</sup>

Como já conhecemos a lei de transformação de coordenadas entre observadores inerciais e uniformemente acelerados, (2.73), podemos transformar os campos (2.64) - (2.66)<sup>27</sup>. O resultado é:

$$F_{\tau Z} = -e \frac{Z a^{-1}}{\xi^3} (Z^2 - a^{-2} - \rho^2), \quad (2.76)$$

$$F_{\tau\rho} = -\frac{8e\rho Z^2 a^{-1}}{\xi^3}, \quad (2.77)$$

$$F_{Z\rho} = 0. \quad (2.78)$$

Notemos que a única componente magnética ( $F_{Z\rho}$ ) que poderia aparecer neste sistema de referência se anula, ficando claro que o observador coacelerado com a carga em MH não

---

<sup>25</sup>É também usual o seguinte sistema de coordenadas

$$t = \frac{e^{a\xi}}{a} \sinh a\tau, z = \frac{e^{a\xi}}{a} \cosh a\tau.$$

No capítulo 3 usaremos basicamente este conjunto de coordenadas  $(\tau, \xi, x, y)$ .

<sup>26</sup>Estas coordenadas foram primeiramente propostas por W. Rindler [27].

<sup>27</sup>Não consideramos as contribuições  $\delta(z+t)$  uma vez que  $z = |t|$  está fora do “Rindler wedge”. A lei de transformação de coordenadas é “singular” nestas fronteiras.

deteta radiação proveniente deste movimento. Ainda mais: procedendo com o cálculo das componentes relevantes do tensor de energia-momentum  $T_{\mu\nu}$  obtemos

$$T_{\tau\rho} = T_{\tau Z} = 0, \quad (2.79)$$

confirmando a inexistência de fluxo de energia para o observador coacelerado<sup>28</sup>.

## 2.3 Discussões

Aproveitamos esta seção para discutir o conteúdo físico por trás da equação de Lorentz-Dirac (2.36). Uma vez que esta equação descreve o movimento da carga em interação com um campo externo, sua interpretação remonta no entendimento das trocas de energia e momentum entre estes elementos. A análise fica facilitada se colocarmos a equação (2.36) sob a forma [28]

$$\frac{d}{d\tau}(\mathcal{P}_I^\mu + P_{II}^\mu) = F_{ext}^\mu, \quad (2.80)$$

onde

$$P_I^\mu = \frac{e^2 M}{8\pi} \dot{z}^\mu(\tau) - \frac{2e^2}{3} (4\pi)^{-1} \ddot{z}^\mu(\tau), \quad (2.81)$$

$$P_{II}^\mu = - \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \left[ \frac{2e^2}{3} (4\pi)^{-1} \ddot{z}^2(\tau') \dot{z}^\mu(\tau') \right], \quad (2.82)$$

$$\mathcal{P}_I^\mu = P_I^\mu + m_0 \dot{z}^\mu. \quad (2.83)$$

O termo  $P_I^\mu$  é chamado *4-momentum ligado* (*bound 4-momentum*), pois é o 4-momentum de origem eletromagnética carregado pela carga. O primeiro termo em (2.81) está presente mesmo quando a carga executa movimento retilíneo e uniforme. Podemos designá-lo “parte de Coulomb” do 4-momentum ligado. O segundo termo é chamado “termo de Schott”. Ambos são oriundos da porção  $F_{\mu\nu}^{vel}$  [v. Eq. (2.16)] e da interferência entre as porções  $F_{\mu\nu}^{vel}$  e  $F_{\mu\nu}^{ace}$  do campo (retardado) gerado por uma carga em movimento. A

---

<sup>28</sup>De forma heurística podíamos esperar tal resultado, pois ambos - carga e observador - são estáticos no Rindler wedge, i.e. seguem a trajetória do vetor de Killing temporal deste espaço-tempo.



porção  $F_{\mu\nu}^{ace}$  [v. Eq. (2.17)] dá origem a  $P_{II}^\mu$ , dito *4-momentum irradiado*.  $m_0 z^\mu$  é o chamado *4-momentum mecânico*.

Teitelboim [28] mostra como a separação de  $F_{\mu\nu}$  em (2.16) e (2.17) induz uma separação no tensor de energia-momentum associado a  $F_{\mu\nu}$  :

$$T^{\mu\nu} = T_I^{\mu\nu} + T_{II}^{\mu\nu}, \quad (2.84)$$

e com isto:

$$P_{I,II}^\mu = \int_\sigma T_{I,II}^{\mu\nu} n_\nu d^3\sigma, \quad (2.85)$$

onde  $\sigma$  é uma hipersuperfície *spacelike* com normal  $n_\nu$ .

Atentemos agora para a não-localidade introduzida por (2.82). Ao contrário de (2.81), (2.82) mostra que o 4-momentum irradiado depende de toda a trajetória da partícula. Este fato garante que o MH seja o único movimento acelerado com reação da radiação nula<sup>29</sup>, pois a qualquer instante de tempo próprio  $\tau$  vale

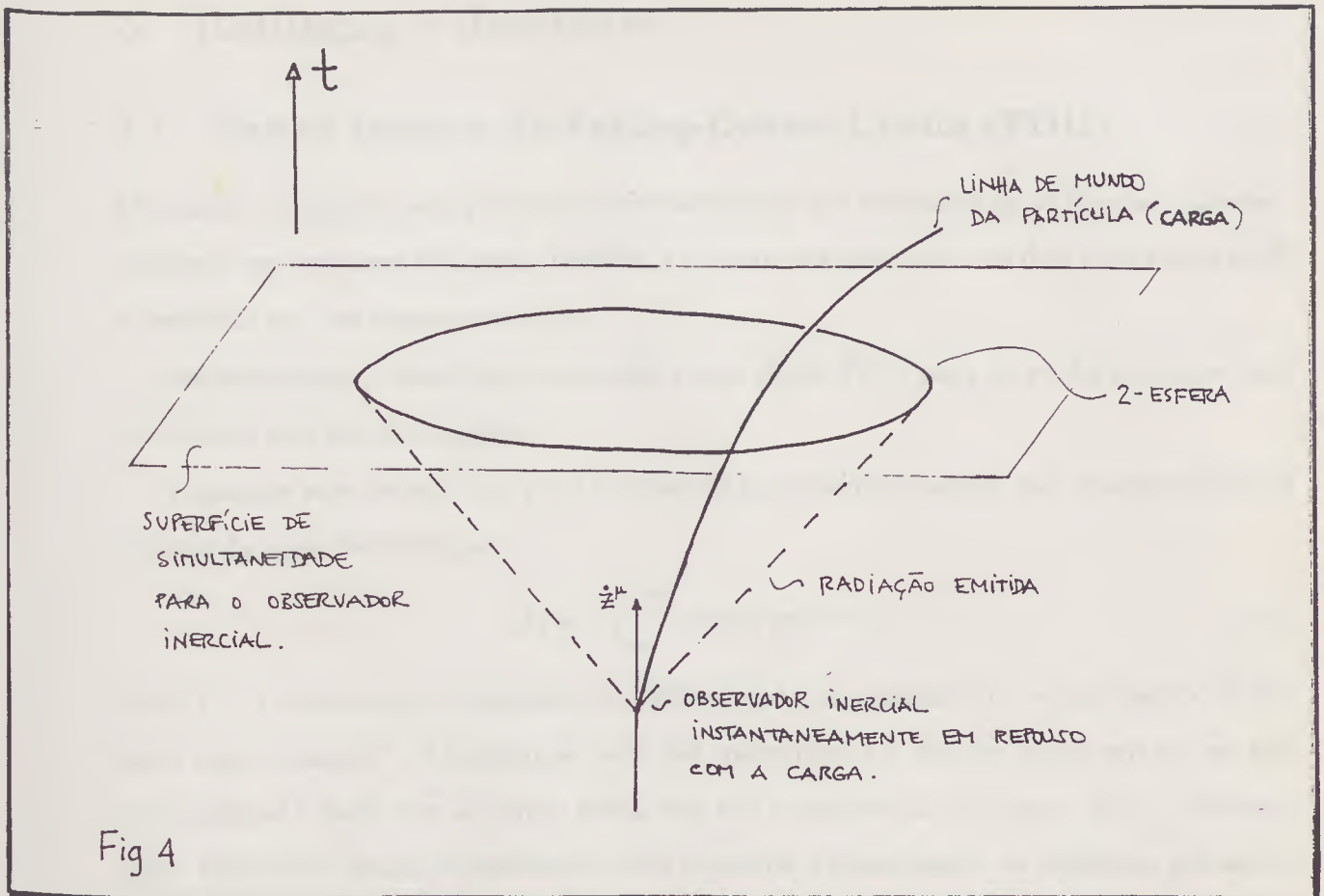
$$\ddot{z}^\mu(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \ddot{z}(\tau') = \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \ddot{z}^2(\tau') \dot{z}^\mu(\tau'). \quad (2.86)$$

Nas palavras de Teitelboim: “*hyperbolic motion can be pictured as being only a source of radiated four-momentum and a sink of bound four-momentum.*”

Podemo-nos convencer, de pelo menos dois modos diferentes, da não-localidade presente em processos envolvendo radiação . Primeiramente lembremo-nos de como um observador inercial mede radiação proveniente de uma carga acelerada. (Detalhes na Fig. 4.) De forma breve: devemos “construir” uma esfera centrada na carga e contar o fluxo eletromagnético que cruza sua superfície. Rohrlich [8] mostra que não há necessidade de levarmos esta esfera ao infinito para obtermos uma definição consistente de radiação . Não obstante a simples necessidade de construção da esfera já revela o caráter não-local de um processo de medida como este.

---

<sup>29</sup>De fato isto vale para todo movimento uniformemente acelerado de  $t = -\infty$  a  $t = +\infty$ , do qual o MH é um caso particular.



Por outro lado lembremo-nos da “hipótese de localidade” [29]. Nas palavras de Mashoon:

“An accelerated observer is locally equivalent to a hypothetical inertial observer which has the same velocity at the given point in space-time”.

Tomemos agora emprestado o nosso exemplo do MH. Neste caso o observador coacelerado com a carga não deteta campo de radiação . Enquanto isto um observador inercial instantaneamente em repouso em relação a mesma deteta tal campo. A hipótese de localidade é portanto, junto à covariância do conceito de partícula, mais um preconceito a ser abandonado quando tratamos de problemas envolvendo o conceito de radiação .

## 3 Radiação e detetores

### 3.1 Banho térmico de Fulling-Davies-Unruh (FDU)

Deixemos a carga de lado por ora e interessemo-nos por detetores de partículas. Concentraremos em detetores de Unruh-DeWitt, i.e., sistemas pontuais com dois níveis internos<sup>30</sup> e descritos por um monopolo  $\hat{m}(\tau)$ .

Anteciparemos o resultado conhecido como efeito FDU para só então proceder com os cálculos que lhe dão suporte.

Tomamos este detetor  $\hat{m}(\tau)$  e o acoplamos a um campo escalar não massivo  $\hat{\phi}[x^\mu(\tau)]$  através da ação de interação :

$$\mathcal{S}_I = c \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \hat{m}(\tau) \hat{\phi}[x^\mu(\tau)]. \quad (3.1)$$

Aqui  $x^\mu(\tau)$  representa a trajetória do detetor e  $c$  é a constante de acoplamento do detetor com o campo<sup>31</sup>. Arranjamos para que inicialmente o detetor esteja em seu estado fundamental e para que o campo esteja em sua configuração de vácuo,  $|0\rangle_M$ . Notemos que o sub-índice indica o referencial onde o campo é quantizado.  $M$  significa, portanto, que o referencial de interesse é *inercial*, ou *de Minkowski*.

Suponhamos agora que o nosso detetor  $\hat{m}(\tau)$  é acelerado em MH neste espaço-tempo de Minkowski como mostra o esquema na Fig 1.

Sob estas condições verificamos que o detetor pode se excitar e ainda emitir uma partícula associada ao campo  $\hat{\phi}$  com a seguinte probabilidade:

$$\frac{\mathcal{P}^M}{T^{tot}} = \frac{c^2}{2\pi} |\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2 \frac{\Delta E}{e^{2\pi\Delta E/a} - 1}. \quad (3.2)$$

Nesta expressão  $\Delta E$  representa o *gap* de energia do detetor,  $a$  representa sua aceleração própria e  $c$  sua constante de acoplamento. O termo envolvendo o monopolo é conhecido

---

<sup>30</sup>De fato não há restrições sobre o número de níveis. Não há contudo fatos físicos novos ao considerarmos mais que dois níveis.

<sup>31</sup>Nesta seção estaremos interessados somente em constantes de acoplamento do tipo  $c(\tau) = c = cte$  e que portanto aparecem fatoradas em ações de interação como a da expressão (3.1). Detetores com este tipo de acoplamento serão designados como “detetores por tempo infinito”, ou “constantemente ligados”. Nas próximas seções estudaremos o caso de “detetores por tempo finito”, onde permitiremos um acoplamento variável com o tempo, i.e.,  $c(\tau) \neq cte$ .

por *seletividade* (*selectivity*), pois determina o papel desempenhado por características específicas do detetor em (3.2).  $T^{tot}$  é o tempo total em que o detetor permanece ligado. Neste caso como de praxe [30]:  $T^{tot} = 2\pi\delta(0)$ . Notemos que o espectro destas excitações/emissões é térmico e caracterizado pela temperatura

$$T = \frac{a}{2\pi}. \quad (3.3)$$

O observador coacelerado com o detetor mede a mesma probabilidade de transição<sup>32</sup> (transições do detetor são eventos.), i.e.:

$${}^M\mathcal{P} = {}^R\mathcal{P}. \quad (3.4)$$

Contudo a interpretação dada pelo observador coacelerado é distinta. Ele realmente enxerga um estado térmico de partículas oriundas de sua quantização e associa a cada transição do detetor a absorção de uma partícula deste “banho térmico” à temperatura  $T$ . Passemos ao cálculo da probabilidade de excitação (3.2).

A ação de interação entre o detetor e o campo a que se acopla é dada por (3.1). Portanto a probabilidade de transição do detetor para um estado excitado, acompanhada da emissão de um quantum do campo se escreve<sup>33</sup>:

$${}^M\mathcal{P} = \int d^3\mathbf{k} |{}^M\mathcal{A}_{em}^{exc}|^2, \quad (3.5)$$

onde

$${}^M\mathcal{A}_{em}^{exc} = {}_M\langle \mathbf{k} | \otimes \langle E | \mathcal{S}_I | E_0 \rangle \otimes | 0 \rangle_M \quad (3.6)$$

é a amplitude de transição (a nível de árvore) correspondente. Lembrando que o monopolo evolui no tempo da seguinte forma

$$\hat{m}(\tau) = e^{iH_0\tau} \hat{m}(0) e^{-iH_0\tau}, \quad (3.7)$$

obtemos

$${}^M\mathcal{P} = c^2 |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \int d^3\mathbf{k} |\Omega(\mathbf{k}, \Delta E)|^2, \quad (3.8)$$

---

<sup>32</sup>O sub-índice  $R$  designa “referencial de Rindler”. Aprendemos sobre este referencial no capítulo anterior.

<sup>33</sup>Ao considerarmos um detetor com mais que dois níveis deveríamos incluir uma soma do tipo  $\sum_E$  na expressão (3.5).

onde

$$\Omega(\mathbf{k}, \Delta E) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau {}_M \langle \mathbf{k} | \hat{\phi}[x^\mu(\tau)] | 0 \rangle_M e^{i\Delta E \tau}. \quad (3.9)$$

Usando a relação de completeza

$$\int d^3\mathbf{k} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| = 1, \quad (3.10)$$

colocamos (3.8) na forma

$${}^M \mathcal{P} = c^2 |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\Delta E(\tau-\tau')} D^+(x', x), \quad (3.11)$$

onde

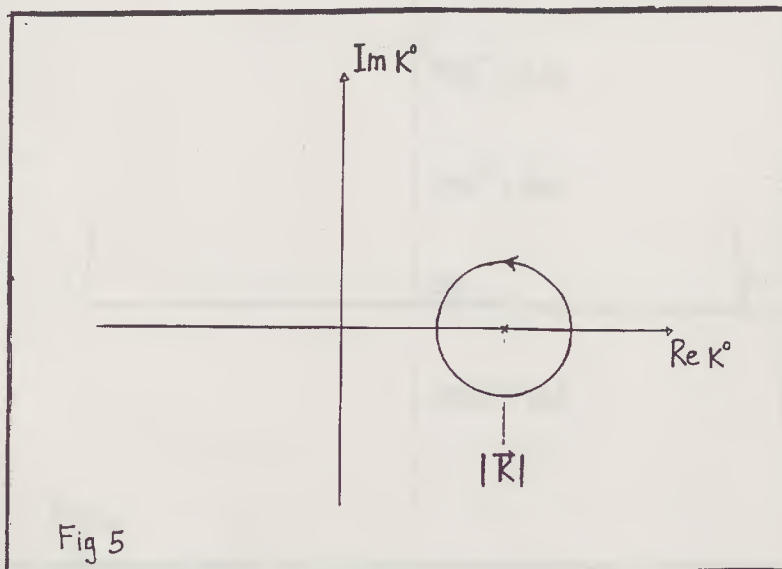
$$D^+(x', x) = {}_M \langle 0 | \hat{\phi}[x^\mu(\tau')] \hat{\phi}[x^\mu(\tau)] | 0 \rangle_M \quad (3.12)$$

é a função de Wightman para o campo escalar sem massa (v., p.ex., p.21 de [30]).

A expansão do campo em modos de Minkowski, i.e.

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(16\pi^3 k)^{1/2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^M e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - kt)} + \text{H.c.}), \quad (3.13)$$

e a avaliação da integral implícita em (3.12) com o seguinte contorno:



fornecem:

$$D^+(x', x) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{[(t-t' - i\epsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2]}. \quad (3.14)$$

Admitamos (2.40) como a equação que descreve o MH do detetor. Logo a relação entre seu tempo próprio e as coordenadas atribuídas pelo observador inercial é<sup>34</sup>:

$$t = a^{-1} \sinh a\tau, z = a^{-1} \cosh a\tau. \quad (3.15)$$

Estas relações permitem-nos reescrever

$$D^+(x', x) = D^+(\Delta\tau) = -\frac{a^2}{16\pi^2} \operatorname{cosech}^2 \left( \frac{a\Delta\tau}{2} - ia\epsilon \right), \quad (3.16)$$

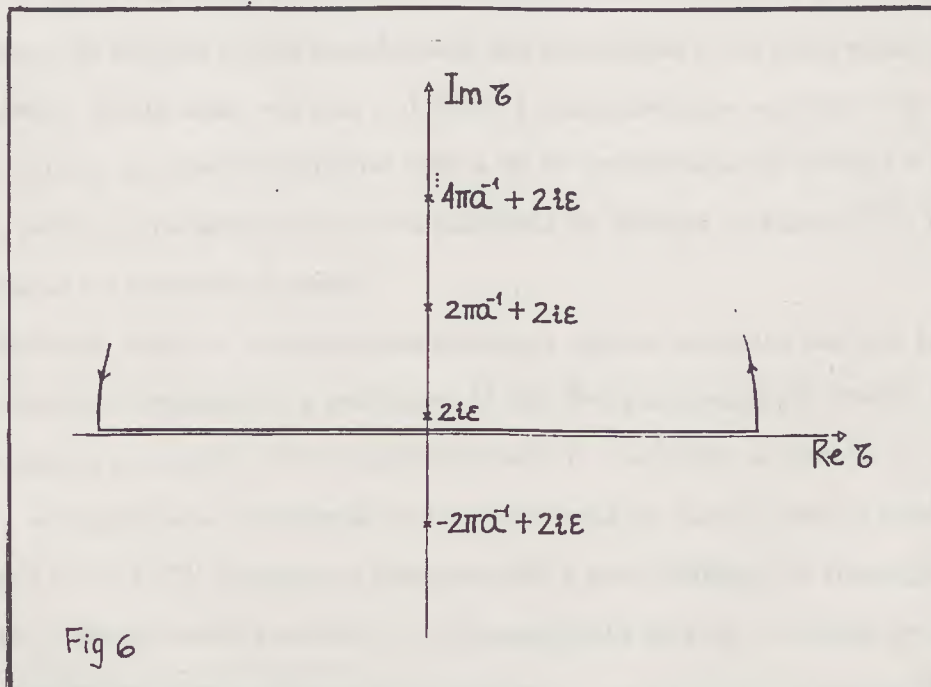
ou ainda (v., p.ex., p. 187 de [31])

$$D^+(\Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\Delta\tau - 2i\epsilon + 2\pi ia^{-1}k)^{-2}. \quad (3.17)$$

Ao reintroduzirmos esta última relação em (3.11) obtemos

$$M\mathcal{P} = -\frac{c^2 |\langle E|m(0)|E_0 \rangle|^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{e^{i\Delta E(\Delta\tau)}}{(\Delta\tau - 2i\epsilon + 2\pi ia^{-1}k)^2}. \quad (3.18)$$

Os pólos e o contorno escolhido para a resolução da integral em  $\tau$  são mostrados abaixo,



de onde, finalmente obtemos (3.2).

<sup>34</sup>Fizemos  $Z = a^{-1}$  em (2.73).

Notemos que

$$M\mathcal{P} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0.$$

Interpretamos este resultado do seguinte modo: “Um detetor em movimento uniforme (inercial) através do vácuo de Minkowski não se excita.<sup>35</sup>” De fato considerações energéticas já nos teriam levado a semelhante resultado. Um detetor inercial é estático no espaço-tempo de Minkowski, portanto não há fontes de energia para os processos de excitação / emissão.<sup>36</sup>

### 3.2 Detetores uniformemente acelerados por tempo finito

Faz-se necessário ressaltar que a análise anterior é a de um observador inercial. A análise feita por um observador não inercial será levada a cabo nesta seção simultaneamente com o estudo de detetores uniformemente acelerados por tempo finito. Este último tópico está claramente expresso no título da seção, uma vez que, dentre as muitas maneiras de acelerar-se um detetor por tempo finito, selecionamos acelerá-lo em MH.

Como já vimos nas seções precedentes, um objeto constantemente em MH é estático no espaço-tempo de Rindler (cujas coordenadas são adequadas a um observador coacelerado com o objeto). Neste caso, em que o detetor é uniformemente acelerado de  $\tau = -\infty$  a  $\tau = +\infty$ , o único processo condizente com a lei de conservação de energia é a excitação do detetor por meio da absorção de uma partícula de Rindler do banho [32]. Provaremos esta afirmação no decorrer da seção.

Não obstante, quando consideramos detetores ligados somente por um tempo finito esta situação não corresponde a realidade. O ato de ligar/desligar o detetor abre a possibilidade para a ocorrência do seguinte processo: o observador acelerado vê a excitação do detetor acompanhada da emissão de uma partícula de Rindler para o banho térmico.

Svaiter e Svaiter [33] calcularam recentemente a probabilidade de transição associada a detetores uniformemente acelerados por tempo finito através do vácuo de Minkowski.

---

<sup>35</sup>É importante frisar que o movimento se estende de  $t = -\infty$  a  $t = +\infty$ . A omissão desta hipótese será analisada nas seções subsequentes.

<sup>36</sup>Esta última consideração não leva em conta o estado de vácuo usado. Sciama [12] denomina esta liberdade de “*quantum equivalence principle*”.

Encontrando uma expressão divergente aplicaram um procedimento de “renormalização”, sem com isso garantir a positividade da expressão final. Higuchi *et al.* [34] mostraram, sem qualquer procedimento de renormalização, que não há divergências na probabilidade de excitação desde que os detetores sejam ligados e desligados de forma contínua. Os detalhes se encontram a seguir.

### 3.2.1 Quantização no espaço de Rindler

A fim de analisar o comportamento de detetores uniformemente acelerados por tempo finito em seu referencial de repouso vamos quantizar o campo escalar e não massivo no *Rindler wedge*. Usaremos as coordenadas de Rindler  $(\tau, \xi, x, y)$  cuja lei de transformação com relação as de Minkowski  $(t, z, x, y)$  foi explicitada na nota de rodapé 25.<sup>37</sup>

Nestas coordenadas o elemento de linha de Minkowski, restrito ao espaço de Rindler fica

$$ds^2 = e^{2a\xi}(d\tau^2 - d\xi^2) - dx^2 - dy^2. \quad (3.19)$$

O vetor de Killing temporal com respeito ao qual os campos são quantizados é de fato um *boost* no espaço de Minkowski,  $\partial_\tau$ . A fronteira  $z = |t|$  ( $\xi = -\infty$ ) é um horizonte de Killing com respeito a  $\partial_\tau$ .

A quantização dos campos no espaço de Rindler procede da forma usual [35]. Consideremos um campo escalar não massivo satisfazendo a equação de Klein-Gordon

$$\square\phi = 0. \quad (3.20)$$

Um conjunto completo de modos normais satisfazendo (3.20) no “Rindler wedge” (e assintoticamente bem comportados em  $\xi \rightarrow +\infty$ ) tem a forma

$$u_{\omega k_\perp}(x^\mu) = \left[ \frac{\sinh(\pi\omega/a)}{4\pi^4 a} \right]^{\frac{1}{2}} K_{i\omega/a} \left( \frac{k_\perp}{a} e^{a\xi} \right) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp - i\omega\tau}. \quad (3.21)$$

Os modos de Rindler são caracterizados por sua frequência  $\omega$  e momentum transversal  $\mathbf{k}_\perp \equiv (k_x, k_y)$ .  $K_{i\nu}(x)$  é função de MacDonald [36],  $k_\perp \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  e  $\mathbf{x}_\perp \equiv (x, y)$ . Note-mos ainda que os modos dados em (3.21) com  $\omega > 0$  são modos de frequência positiva

---

<sup>37</sup>Lembramos que o detetor segue a trajetória  $x = y = \xi = 0$  em coordenadas de Rindler.



com relação a  $\partial_\tau$ , i.e

$$\mathcal{L}_{\partial_\tau} u_{\omega \mathbf{k}_\perp}(x^\mu) = -i\omega u_{\omega \mathbf{k}_\perp}(x^\mu), \quad (3.22)$$

onde  $\mathcal{L}_{\partial_\tau}$  é a derivada de Lie com respeito ao campo de Killing  $\partial_\tau$ .

Decompondo o campo escalar em termos destes modos obtemos

$$\hat{\phi}(x^\nu) = \int d^2 \mathbf{k}_\perp \int_0^{+\infty} d\omega \left\{ \hat{a}_{\omega \mathbf{k}_\perp}^R u_{\omega \mathbf{k}_\perp}(x^\nu) + \text{H.c.} \right\}, \quad (3.23)$$

onde  $\hat{a}_{\omega \mathbf{k}_\perp}^R$  e  $\hat{a}_{\omega \mathbf{k}_\perp}^{R\dagger}$  são, respectivamente, operadores de aniquilação e criação de modos de Rindler. A normalização dos modos (3.21) é feita com relação ao produto interno de Klein-Gordon, i.e.

$$(u_{\omega \mathbf{k}_\perp}, u_{\omega' \mathbf{k}'_\perp}) = \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp), \quad (3.24)$$

sendo que

$$(u_{\omega \mathbf{k}_\perp}, u_{\omega' \mathbf{k}'_\perp}) \equiv i \int_\Sigma d\Sigma^\mu \sqrt{-g_\Sigma} u_{\omega \mathbf{k}_\perp}^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu u_{\omega' \mathbf{k}'_\perp}. \quad (3.25)$$

Nesta expressão  $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$ , onde  $n^\mu$  é o vetor unitário (orientado para o futuro) normal à superfície de Cauchy  $\Sigma$ .<sup>38</sup> Admitindo o produto interno acima definido e as relações usuais de comutação para os campos, i.e.

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.26)$$

(os outros comutadores se anulam) obtemos

$$[\hat{a}_{\omega \mathbf{k}_\perp}^R, \hat{a}_{\omega' \mathbf{k}'_\perp}^{R\dagger}] = \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp). \quad (3.27)$$

(Os outros comutadores se anulam.) O vácuo de Rindler  $|0\rangle_R$  fica definido como o estado de “nenhuma partícula” com respeito ao observador coacelerado, i.e.  $\hat{a}_{\omega \mathbf{k}_\perp}^R |0\rangle_R = 0$ .

### 3.2.2 Probabilidade de transição

O primeiro passo no sentido de estudarmos o comportamento de detetores por tempo finito consiste na modificação da equação (3.1) para

$$\mathcal{S}_I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau c(\tau) \hat{m}(\tau) \hat{\phi}[x^\mu(\tau)], \quad (3.28)$$

---

<sup>38</sup>No nosso caso a superfície de Cauchy conveniente é  $\tau = \text{const.}$

A função  $c(\tau)$ , ou “constante” de acoplamento, tem o papel de chave (*switch*) usada para ligar/desligar o detetor.

Podemos desconfiar, devido a simetria do problema, que o cálculo da probabilidade de transição para um detetor uniformemente acelerado por tempo finito fica facilitado quando realizado no referencial coacelerado. Sabemos que esta probabilidade deve ser a mesma vista por um observador inercial, i.e.

$$M\mathcal{P} = {}^R\mathcal{P}_{em}^{exc} + {}^R\mathcal{P}_{abs}^{exc}, \quad (3.29)$$

sendo

$${}^R\mathcal{P}_{em}^{exc} = \int_0^\infty d\omega \int d^2\mathbf{k}_\perp |{}^R\mathcal{A}_{em}^{exc}|^2 \left(1 + \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}\right), \quad (3.30)$$

e

$${}^R\mathcal{P}_{abs}^{exc} = \int_0^\infty d\omega \int d^2\mathbf{k}_\perp |{}^R\mathcal{A}_{abs}^{exc}|^2 \left(\frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}\right), \quad (3.31)$$

onde

$${}^R\mathcal{A}_{em}^{exc} = {}_R\langle \omega\mathbf{k}_\perp | \otimes \langle E | \mathcal{S}_I | E_0 \rangle \otimes |0\rangle_R, \quad (3.32)$$

e

$${}^R\mathcal{A}_{abs}^{exc} = {}_R\langle 0 | \otimes \langle E | \mathcal{S}_I | E_0 \rangle \otimes |\omega\mathbf{k}_\perp\rangle_R. \quad (3.33)$$

são , respectivamente, as amplitudes de emissão e absorção de quanta de Rindler. A soma entre parênteses em (3.30) indica a contribuição de dois termos distintos: emissões espontânea e estimulada respectivamente.

A prova da igualdade (3.29) envolvendo as expressões (3.30) e (3.31) será feita no apêndice B. Seu conteúdo físico pode ser resumido na frase:

“O vácuo de Minkowski é indistinguível de um estado térmico construído a partir do vácuo de Rindler”.

Introduzindo (3.28) em (3.32) e (3.33) e lembrando que o detetor segue a trajetória  $x = y = \xi = 0$  obtemos<sup>39</sup>

$$\begin{aligned} {}^R\mathcal{A}_{abs}^{em} &= \langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle \left[ \frac{\sinh(\pi\omega/a)}{4\pi^4 a} \right]^{\frac{1}{2}} K_{i\omega/a} \left( \frac{k_\perp}{a} \right) \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau c(\tau) e^{i(\omega \pm \Delta E)\tau}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

---

<sup>39</sup>Omitimos o índice *exc* no que segue.

Daqui podemos tirar uma primeira conclusão . No caso de detetores ligados por tempo infinito,  $c(\tau) = 1$ . A amplitude de *emissão* se comporta, então como  $\delta(\omega + \Delta E)$ , que é fisicamente zero, pois  $\omega, \Delta E > 0$ . Em palavras diríamos que “um detetor uniformemente acelerado e ligado para sempre se excita unicamente pela *absorção* de partículas de seu banho térmico”. Adiantamos este resultado no início da seção baseando-nos na lei de conservação de energia.

Introduzindo (3.34) em (3.29) e integrando em  $\mathbf{k}_\perp$  conseguimos<sup>40</sup>

$$M\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi^2} |\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2 [I_{sp} + I_{in} + I_{abs}], \quad (3.35)$$

onde

$$I_{sp} = \int_0^{+\infty} d\omega \omega B(\omega), \quad (3.36)$$

$$I_{in} = \int_0^{+\infty} d\omega \omega g(\omega) B(\omega), \quad (3.37)$$

$$I_{abs} = \int_0^{+\infty} d\omega \omega g(\omega) B(-\omega). \quad (3.38)$$

Aqui definimos

$$B(\omega) \equiv \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau c(\tau) e^{i(\omega + \Delta E)\tau} \right|^2, \quad (3.39)$$

e

$$g(\omega) \equiv \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}. \quad (3.40)$$

Concentremos agora sobre a expressão (3.36), responsável pela emissão espontânea do detetor, e analisemos possíveis divergências. Admitindo a integrabilidade de  $c(\tau)$  nos livramos de divergências infravermelhas.<sup>41</sup>

O desaparecimento de divergências ultravioletas exige o uso de hipóteses não tão intuitivas sobre a forma de  $c(\tau)$ . Para evitá-las necessitamos que  $B(\omega)$  se comporte como

$$B(\omega) \stackrel{\omega \text{ grande}}{\approx} \omega^{-2-\epsilon} \quad (3.41)$$

<sup>40</sup>A integração em  $\mathbf{k}_\perp$  de que falamos é

$$\int d^2\mathbf{k}_\perp K_{i\omega/a}^2 \left( \frac{k_\perp}{a} \right) = \frac{\pi^2 a \omega}{\sinh(\pi\omega/a)}.$$

Usamos as fórmulas (6.576.4) ou (6.521.3) de [36].

<sup>41</sup>A continuidade das transformadas de Fourier garante o bom comportamento infravermelho de  $B(\omega)$ .

para  $\epsilon > 0$ . Lembremos que em geral, o comportamento da transformada de Fourier de uma função  $f(x) \in C^n$  para  $\omega$  grande é  $\tilde{f}(\omega) \sim 1/\omega^{2+n}$ . Portanto basta que  $c(\tau) \in C^0$ , i.e.  $c(\tau)$  seja uma função contínua de  $\tau$ , para garantirmos o bom comportamento ultravioleta de (3.36).

Um exemplo, onde

$$c(\tau) \equiv c_0 \begin{cases} e^{\alpha(\tau+T)} & \tau < -T \\ 1 & -T \leq \tau \leq T \\ e^{-\alpha(\tau-T)} & \tau > T \end{cases}, \quad (3.42)$$

pode ser encontrado em [34]. Neste caso, procedendo como especificado anteriormente, obtemos uma expressão para  ${}^M\mathcal{P}$  no limite em que o detector fica ligado por um tempo longo

$${}^M\mathcal{P} \stackrel{T, \alpha \text{ grandes}}{\approx} \frac{c_0^2}{2\pi} |\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2 \frac{\Delta E}{e^{2\pi\Delta E/a} - 1} T^{tot} + \frac{c_0^2}{2\pi^2} |\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2 \times \left\{ \ln \frac{\alpha}{\Delta E} - 1 - \frac{1}{e^{2\pi\Delta E/a} - 1} + \text{Pv} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{g(|\omega|) - g(\Delta E)}{(\omega - \Delta E)^2} \right\} \quad (3.43)$$

Aqui Pv significa “valor principal da integral”. Atenemos para a divergência logarítmica quando fazemos  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Neste limite a função dada em (3.42) se reduz a

$$c(\tau) \equiv c_0 \begin{cases} 0 & \tau < -T \\ 1 & -T \leq \tau \leq T \\ 0 & \tau > T \end{cases}. \quad (3.44)$$

A descontinuidade desta função faz com que sua transformada de Fourier caia com  $\omega^{-1}$  para  $\omega$  grande, dando origem à divergência ultravioleta comentada. A função (3.44) foi usada em [33]. Os cálculos feitos nesta referência foram desenvolvidos em um sistema inercial e semelhante divergência foi encontrada. A associação desta divergência com um *switching instantâneo* só veio em [34].

Terminamos esta seção concluindo que:

“Ao ligarmos/desligarmos um detector de forma contínua evitamos divergências tipo ultravioleta na probabilidade de excitação”.

Ou conforme expresso em [37]:

“It is necessary an infinite amount of energy in order to switch on or off a detector instantaneously”.

### 3.3 Detetores inerciais por tempo finito

A fim de reforçar a conclusão da seção precedente estudaremos mais um caso envolvendo detetores ligados por tempo finito, desta vez inerciais. Embora continuemos usando um campo escalar acoplado ao detetor, utilizaremos este estudo quando retornarmos ao problema da radiação por uma carga pontual, no próximo capítulo.

A quantização do campo no “Rindler wedge” já foi levada a cabo anteriormente e a quantização em Minkowski dispensa comentários adicionais. Passamos, pois ao cálculo da probabilidade de excitação de um detetor inercial acoplado ao campo  $\hat{\phi}[x^\mu(t)]$  por um tempo finito. Usaremos o seguinte “switch”:

$$c(t) \equiv c_0 \begin{cases} 1 + \alpha(t + t_0) & -T \leq t < -t_0 \\ 1 & -t_0 \leq t \leq t_0 \\ 1 - \alpha(t - t_0) & t_0 < t \leq T \end{cases} . \quad (3.45)$$

A expressão para a ação de interação é basicamente (3.28) com a única ressalva de que para detetores inerciais o tempo próprio coincide com a correspondente coordenada de Minkowski  $t$ . Explicitamente temos:

$$S_I = \int_{-\infty}^{+\infty} dt c(t) \hat{m}(t) \hat{\phi}[x^\mu(t)], \quad (3.46)$$

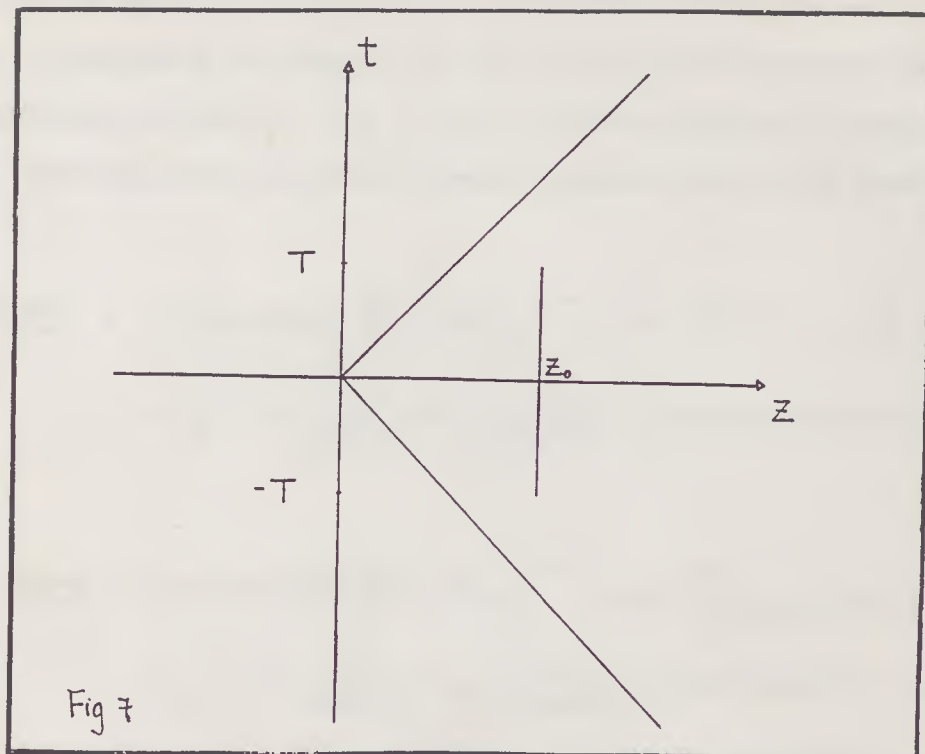
sendo que a evolução temporal de  $\hat{m}(t)$  é dada por

$$\hat{m}(t) = e^{iH_0 t} \hat{m}(0) e^{-iH_0 t}. \quad (3.47)$$

Admitiremos no que segue que a decomposição do campo em ondas planas ocorre conforme (3.23) e que a trajetória do detetor é descrita por

$$x = y = 0, \quad z = z_0 = \text{const}, \quad |t| \leq T = \text{const} \quad (3.48)$$

como mostra a figura abaixo:



Por definição a probabilidade de excitação do detetor inercial por tempo finito é

$${}^M \mathcal{P}_{em}^{exc} = \int d^3\mathbf{k} |{}^M \mathcal{A}_{em}^{exc}|^2, \quad (3.49)$$

onde

$${}^M \mathcal{A}_{em}^{exc} = {}_M \langle \mathbf{k} | \otimes \langle E | S_I | E_0 \rangle \otimes | 0 \rangle_M \quad (3.50)$$

é a amplitude de transição a nível de árvore. Introduzindo (3.45)-(3.48) em (3.49) obtemos após a integração da parte angular de  $d^3\mathbf{k}$ :

$${}^M \mathcal{P}_{em}^{exc} = |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \frac{c_0^2 \alpha^2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dk k \frac{\{\cos[(\Delta E + k)(\alpha^{-1} + t_0)] - \cos[(\Delta E + k)t_0]\}^2}{(\Delta E + k)^4}. \quad (3.51)$$

Notemos que ao fazermos  $\alpha \rightarrow +\infty$ , i.e. ligarmos instantaneamente e após algum tempo desligarmos o detetor, conseguimos uma divergência ultravioleta semelhante a da seção (3.2).<sup>42</sup> De fato (3.45) recai em (3.44) quando  $\alpha \rightarrow +\infty$ .

<sup>42</sup>Neste limite o integrando de (3.51) se comporta como

$$\frac{\alpha^{-2} \sin^2(\Delta E + k)t_0}{(\Delta E + k)^2}.$$

Calculemos agora a expressão para a probabilidade de excitação em um referencial de Rindler. (Descrição de observadores em MH.) Devemos primeiramente reescrever (3.45) em coordenadas de Rindler. Uma vez que já sabemos quantizar o campo no “Rindler wedge” basta seguirmos a receita indicada nas equações (3.29)-(3.33) para encontrarmos [38]

$${}^R\mathcal{P}_{em}^{exc} = |\langle E|\hat{m}(0)|E_0\rangle|^2 \frac{z_0^2 a}{\pi^4} \int d^2\mathbf{k}_\perp \int_0^{+\infty} d\omega \sinh \frac{\pi\omega}{a} \left(1 + \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}\right) \times \left| \int_0^{+\infty} d\tau \frac{c(\tau)}{\cosh^2 a\tau} K_{i\omega/a} \left(\frac{k_\perp z_0}{\cosh a\tau}\right) \cos(\Delta E z_0 \tanh a\tau + \omega\tau) \right|^2, \quad (3.52)$$

e

$${}^R\mathcal{P}_{abs}^{exc} = |\langle E|\hat{m}(0)|E_0\rangle|^2 \frac{z_0^2 a}{\pi^4} \int d^2\mathbf{k}_\perp \int_0^{+\infty} d\omega \sinh \frac{\pi\omega}{a} \left(\frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}\right) \times \left| \int_0^{+\infty} d\tau \frac{c(\tau)}{\cosh^2 a\tau} K_{i\omega/a} \left(\frac{k_\perp z_0}{\cosh a\tau}\right) \cos(\Delta E z_0 \tanh a\tau - \omega\tau) \right|^2, \quad (3.53)$$

onde  $c(\tau)$  é obtido expressando-se (3.45) em coordenadas de Rindler, conforme mencionado.

Mais uma vez a relação (3.29) é verificada. Neste caso verificamo-la numericamente com o objetivo de eliminar erros espúrios na dedução das equações (3.52) e (3.53). Testamo-la supondo  $\alpha^{-1} = 0$ . Evitamos porém a divergência logarítmica não integrando em  $\mathbf{k}_\perp$ . Com isto verificamos equivalentemente

$$M\mathcal{P}(\mathbf{k}_\perp) = {}^R\mathcal{P}_{em}^{exc}(\mathbf{k}_\perp) + {}^R\mathcal{P}_{abs}^{exc}(\mathbf{k}_\perp). \quad (3.54)$$

Nos testes usamos o software “*Mathematica*” com o auxílio do pacote “*NumericalIntegrate*”. Em uma das simulações tomamos os valores  $\Delta E = 1$ ,  $k_\perp = 2$ ,  $a = 3$ ,  $t_0 = 5$ , e  $z_0 = 7$  escolhidos arbitrariamente. Paramos a computação quando a verificação de (3.29) atingiu 1 parte em 100.<sup>43</sup>

---

<sup>43</sup>Com o auxílio do “*Mathematica*” pudemos confirmar que a soma das integrais (3.52) e (3.53) independe de  $a$  e  $z_0$ , como devíamos esperar fisicamente. A dependência em  $a$  é facilmente descartada, ainda analiticamente, com as seguintes trocas de variáveis:

$$\tau \rightarrow t = z_0 \tanh(a\tau), \omega \rightarrow \omega' = \omega/a.$$

É importante frisar que ao longo de todas as simulações sempre utilizamos detetores cujas linhas de mundo estavam completamente contidas no “Rindler wedge”. Entendemos que observadores de Rindler não são *naturalmente* adequados para analisar a excitação de detetores com linhas de mundo cruzando o(s) horizonte(s), i.e.  $z^2 - t^2 = 0$ . Dissemos “naturalmente”, pois não podemos assegurar sobre possíveis condições de fronteira que nos permitam uma análise do ponto de vista do observador coacelerado. Esta condição (se existir) deve ser bastante não trivial.

Para fontes finitas podemos sempre encontrar um *Rindler wedge* adequado a esta análise.<sup>44</sup> Isto não se generaliza para o caso extremo em que a fonte é inercial de  $t = -\infty$  a  $t = +\infty$ . Esta é a trajetória seguida por uma carga elétrica inercial. Comentaremos sobre este ponto na próxima seção .

---

<sup>44</sup>Com isso significamos que a variedade de Rindler não é uma porção privilegiada do espaço de Minkowski.



## 4 Comentários finais

No capítulo 2 vimos que a única saída para o PR consistia no abandono da covariância do conceito de radiação . Por conseguinte abandonamos a covariância do conceito de partícula elementar. (Pensando o campo de radiação como que constituído por fótons.)

O efeito FDU, discutido no capítulo 3 através do estudo de detetores de Unruh-DeWitt, ratifica esta idéia. Aprendemos que o “vácuo de Minkowski é equivalente a um estado térmico de partículas de Rindler”. Heuristicamente, “a inexistência de partículas para um observador (Minkowski) aparece como um conjunto de partículas para outro (Rindler).”

A utilização do efeito FDU na explicação do *bremstrahlung* para cargas elétricas apareceu recentemente [13]. Nestes trabalhos Higuchi *et al.* analisam o *bremstrahlung* de uma carga pontual em MH. No referencial coacelerado a carga fica mergulhada em um banho térmico de quanta de Rindler como vimos nos capítulos anteriores. Estes quanta são *fótons de Rindler* uma vez que o campo acoplado à carga é eletromagnético. <sup>45</sup> Higuchi *et al* mostram, contudo, que para uma carga em MH somente *fótons de Rindler de energia nula* podem ser excitados, i.e., entram no cômputo de<sup>46</sup>

$${}^M\mathcal{P} = {}^R\mathcal{P}.$$

Em palavras:

“A *emissão* de um fóton pela carga vista por um observador inercial pode ser interpretada como a *emissão* ou *absorção* de *fótons de Rindler de energia nula* do banho térmico de FDU”.

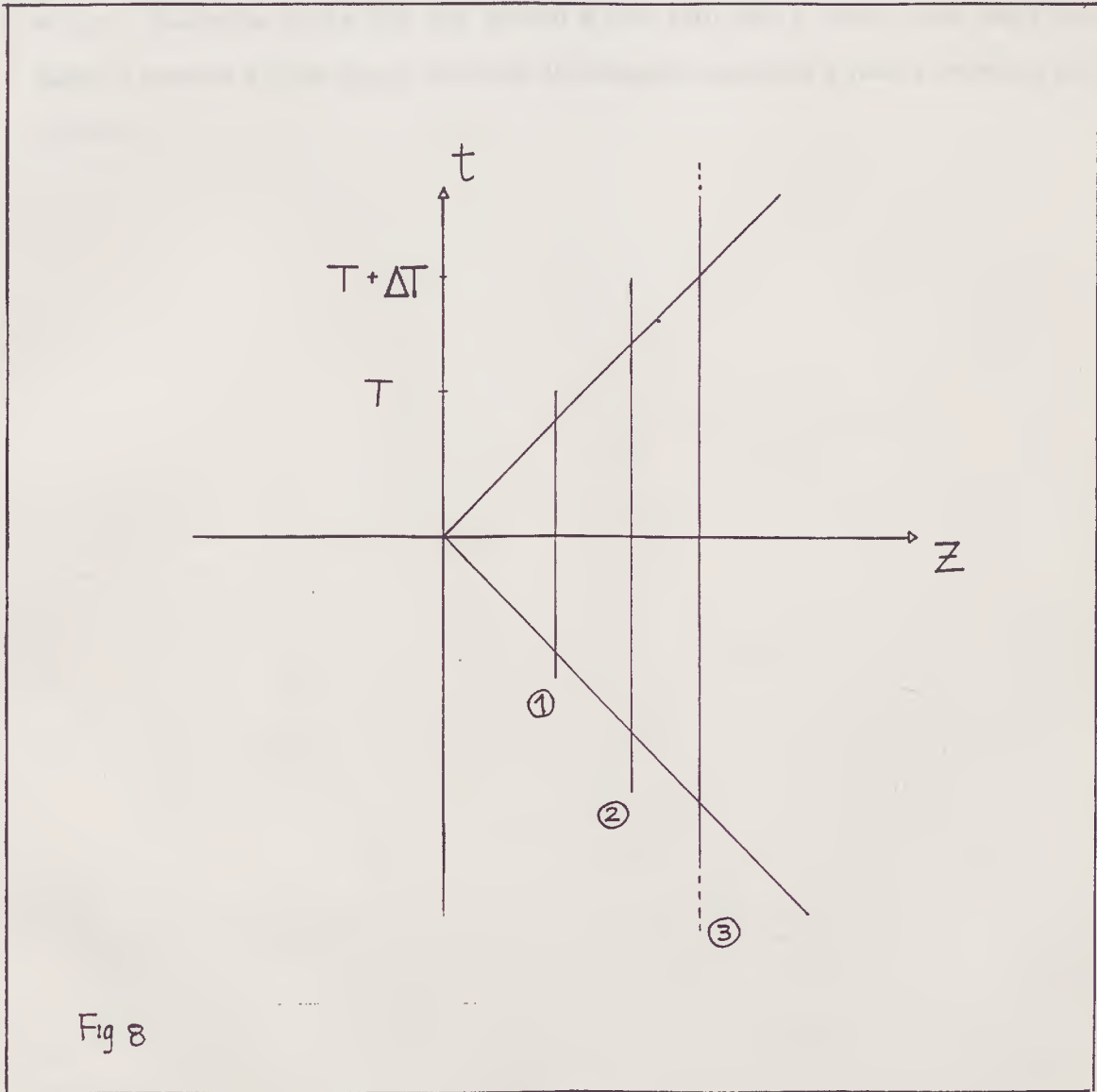
A indetectabilidade dos fótons de Rindler de energia zero não será abordada neste trabalho. Referimos o leitor a última seção de [13]. Notemos todavia que esta indetectabilidade concorda com os resultados clássicos para o MH de uma carga [25].

---

<sup>45</sup>A quantização deste campo no Rindler wedge é análoga àquela mostrada nesta dissertação para o campo escalar.

<sup>46</sup>Apesar de possuírem energia nula estes fótons carregam momentum transversal  $k_{\perp}$ . Este momentum é invariante por *boosts* ao longo do eixo Oz e portanto tem o mesmo valor nos referenciais inercial e acelerado.

Olhemos para mais um ponto aprendido do estudo de detetores. Vimos na seção (3.3) que só podemos dar sentido computacional claro à fórmula (3.29) quando o detetor está inteiramente contido no espaço de Rindler. Lembremos que os observadores de Rindler tem acesso somente à parte da fonte limitada ao Rindler wedge. Desta feita não podem associar inequivocamente probabilidades de transição aos detetores seguindo as três trajetórias mostradas abaixo:



(O tracejado na última trajetória indica que ela é inercial de  $t = -\infty$  a  $t = +\infty$ .) A análise no referencial de Minkowski pode responder sobre a probabilidade de excitação sem equívocos. De modo imediato concluímos, p. ex., que não haveria excitação para um detetor seguindo a terceira trajetória [30] uma vez que ele seria estático no espaço de Minkowski. Semelhante questão surgiu nos trabalhos [7] e [39]. Contrariamente a Rosen [39], Rohrlich [7] afirmava que observadores uniformemente acelerados mediriam radiação proveniente de uma carga elétrica inercial. Rohrlich não deu suficiente importância ao fato que “fontes inerciais por tempo infinito não podem ser contidas em nenhum Rindler wedge”. Sabemos agora [38] que devido a este fato *não é claro como observadores de Rindler possam definir algum conceito de radiação associado a fontes inerciais por tempo infinito*.

## A Cálculo de (2.14)

Começemos com a expressão (2.13)<sup>47</sup>

$$F_{\mu\nu} = e \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial x^\mu} D_{ret}[x - z(\tau)] \dot{z}_\nu(\tau). \quad (\text{A.1})$$

Podemos manipular o integrando como segue:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= e \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{dD}{d\tau} \frac{\partial\tau}{\partial[(x-z)^2]} \frac{\partial[(x-z)^2]}{\partial x^\mu} \dot{z}_\nu(\tau) \\ &= e \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{dD}{d\tau} \frac{\partial\tau}{\partial[(x-z)^2]} 2(x-z)_\mu \dot{z}_\nu(\tau) \\ &= e \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{dD}{d\tau} \frac{(x-z)_\mu \dot{z}_\nu}{2(x-z)^\sigma \dot{z}_\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Na última passagem usamos

$$\frac{\partial[(x-z)^2]}{\partial\tau} = -2(x-z)^\sigma \dot{z}_\sigma. \quad (\text{A.3})$$

Integrando por partes, obtemos

$$F_{\mu\nu} = -eD \left. \frac{(x-z)_\mu \dot{z}_\nu}{(x-z)^\sigma \dot{z}_\sigma} \right|_{-\infty}^{+\infty} + e \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau D \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{(x-z)_\mu \dot{z}_\nu}{(x-z)^\sigma \dot{z}_\sigma} \right]. \quad (\text{A.4})$$

O primeiro termo de (A.4) se anula. A substituição do propagador retardado, dado por (2.11), em (A.4) resulta

$$F_{\mu\nu} = e(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \theta[(x^0 - z^0)] \delta[(x - z(\tau))^2] \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{(x-z)_\mu \dot{z}_\nu}{(x-z)^\sigma \dot{z}_\sigma} \right]. \quad (\text{A.5})$$

Finalmente chegamos a (2.14) lembrando que

$$\delta[(x - z(\tau))^2] = \sum_s \frac{\delta(\tau - s)}{2(x-z)^\sigma \dot{z}_\sigma}, \quad (\text{A.6})$$

e que a função  $\theta$  seleciona a contribuição de tempo retardado na soma em  $s$ .

---

<sup>47</sup>Omitiremos o símbolo  $(\mu \rightleftharpoons \nu)$  nas expressões a seguir.

## B Prova de ${}^M\mathcal{P} = {}^R\mathcal{P}_{em}^{exc} + {}^R\mathcal{P}_{abs}^{exc}$

Seguiremos neste apêndice o procedimento sugerido em [14]. A demonstração tal como aqui se encontra foi sugerida por G.E.A. Matsas.

Calculemos a amplitude de transição do detetor acoplado ao campo  $\hat{\phi}(x^\mu)$  sem prestar atenção ao referencial usado e ao fato de o detetor emitir ou absorver partículas. De forma geral

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{k}' | \otimes \langle E' | \int_{-\infty}^{+\infty} ds c(s) \hat{m}(s) \hat{\phi}[x^\mu(s)] | E \rangle \otimes | \mathbf{k} \rangle, \quad (\text{B.1})$$

onde  $s$  é o tempo próprio do detetor. Lembrando que a evolução do monopolo se dá conforme (3.7), podemos reescrever a expressão acima como

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{k}' | \int d^4x \sqrt{-g} c(s) \langle E' | \hat{m}(0) | E \rangle e^{i\Delta E s} \delta^3[x^\mu - x^\mu(s)] \hat{\phi}[x^\mu(s)] | \mathbf{k} \rangle, \quad (\text{B.2})$$

onde  $\Delta E = E' - E$ . De (B.2) fica claro que podemos associar ao detetor, de forma geral, a seguinte corrente complexa

$$j(x^\mu) = c(s) \langle E' | \hat{m}(0) | E \rangle e^{i\Delta E s} \delta^3[x^\mu - x^\mu(s)] \quad (\text{B.3})$$

de modo a obter

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{k}' | \int d^4x \sqrt{-g} j(x^\mu) \hat{\phi}[x^\mu(s)] | \mathbf{k} \rangle. \quad (\text{B.4})$$

Notemos que a dependência sobre o referencial usado aparece através das coordenadas  $x^\mu$  escolhidas. Começemos calculando  ${}^M\mathcal{P}$ . Neste caso

$$j(x^\mu) = c(s) \langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle e^{i\Delta E s} \delta^3[x^\mu - x^\mu(s)] \quad (\text{B.5})$$

e

$${}^M\mathcal{P} = \int d^3\mathbf{k} |{}^M\mathcal{A}_{em}^{exc}|^2, \quad (\text{B.6})$$

onde

$${}^M\mathcal{A}_{em}^{exc} = {}_M\langle \mathbf{k} | \int d^4x j(x^\mu) \hat{\phi}[x^\mu(s)] | 0 \rangle_M. \quad (\text{B.7})$$

Usando (3.13) em (B.7) e introduzindo o resultado em (B.6) obtemos<sup>48</sup>

$${}^M\mathcal{P} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(16\pi^3k)^{1/2}} \left| \int d^4x j(x^\mu) e^{-ik_\mu x^\mu} \right|^2, \quad (\text{B.8})$$

ou melhor, conforme a Eq. (2.13) de [14]

$${}^M\mathcal{P} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3k} |\tilde{j}_M(k, \mathbf{k})|^2, \quad (\text{B.9})$$

onde

$$\tilde{j}_M(k, \mathbf{k}) \equiv \int d^4x j(x) e^{-ik \cdot x}. \quad (\text{B.10})$$

Notemos que (B.10) é a transformada da corrente com relação aos modos de Minkowski e que

$$\tilde{j}_M(k, \mathbf{k}) = (16\pi^3k)^{1/2} {}^M\mathcal{A}_{em}^{exc}. \quad (\text{B.11})$$

Tentaremos identificar na expressão de  ${}^M\mathcal{P}$  as contribuições  ${}^R\mathcal{P}_{em}^{exc}$  e  ${}^R\mathcal{P}_{em}^{exc}$ . Para isto usaremos a Eq. (2.36) de [14], i.e.

$$\begin{aligned} \tilde{j}_M(k, \mathbf{k}) &= \int_0^{+\infty} d\omega \tilde{j}_R(\omega, \omega, \mathbf{k}_\perp) g(\omega) \left( \frac{k+k_z}{k-k_z} \right)^{-i\omega/2a} \\ &+ \int_0^{+\infty} d\omega \tilde{j}_R(-\omega, \omega, \mathbf{k}_\perp) g(-\omega) \left( \frac{k+k_z}{k-k_z} \right)^{i\omega/2a}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

onde

$$g(\omega) = \left[ \frac{4\pi^3}{a\omega \sinh(\pi\omega/a)} \right]^{1/2} \exp \frac{\pi\omega}{2a}, \quad (\text{B.13})$$

$$\tilde{j}_R(\omega, \omega, \mathbf{k}_\perp) = \int d^4x \sqrt{-g(x)} j(x) \left[ \frac{\omega}{\pi} \right]^{1/2} F_{\omega, \mathbf{k}_\perp}^*(x), \quad (\text{B.14})$$

e

$$\tilde{j}_R(-\omega, \omega, \mathbf{k}_\perp) = \int d^4x \sqrt{-g(x)} j(x) \left[ \frac{\omega}{\pi} \right]^{1/2} F_{\omega, -\mathbf{k}_\perp}(x). \quad (\text{B.15})$$

Aqui mais uma vez seguimos [14] quando usamos

$$F_{\omega, \mathbf{k}_\perp}(x) = u_{\omega \mathbf{k}_\perp} = \left[ \frac{\sinh \frac{\pi\omega}{a}}{4\pi^4 a} \right]^{1/2} K_{i\omega/a} \left( \frac{k_\perp}{a} e^{a\xi} \right) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp - i\omega\tau}. \quad (\text{B.16})$$

---

<sup>48</sup>Aqui  $k = |\mathbf{k}|$ .

Notemos que semelhantemente a (B.10), as expressões para  $\tilde{j}_R$  dadas por (B.14) e (B.15) representam as transformadas da fonte  $j(x^\mu)$  com relação aos modos de Rindler. Com a ajuda de (3.23) obtemos, à semelhança de (B.11)

$$\tilde{j}_R(\omega, \omega, \mathbf{k}_\perp) = {}_R \langle \omega \mathbf{k}_\perp | \int d^4 x \sqrt{-g} \left[ \frac{\omega}{\pi} \right]^{1/2} j(x^\mu) \hat{\phi}[x^\mu(s)] | 0 \rangle_R = \left[ \frac{\omega}{\pi} \right]^{1/2} {}_R \mathcal{A}_{em}^{exc}, \quad (\text{B.17})$$

$$\tilde{j}_R(-\omega, \omega, \mathbf{k}_\perp) = {}_R \langle 0 | \int d^4 x \sqrt{-g} \left[ \frac{\omega}{\pi} \right]^{1/2} j(x^\mu) \hat{\phi}[x^\mu(s)] | \omega \mathbf{k}_\perp \rangle_R = \left[ \frac{\omega}{\pi} \right]^{1/2} {}_R \mathcal{A}_{abs}^{exc}. \quad (\text{B.18})$$

Quadrando (B.12), introduzindo o resultado em (B.9) e utilizando a seguinte relação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2}} \left[ \frac{k + k_z}{k - k_z} \right]^{-\frac{i(\omega - \omega')}{2a}} = 2\pi a \delta(\omega - \omega') \quad (\text{B.19})$$

obtemos

$${}^M \mathcal{P} = \int \frac{a}{8\pi^2} d^2 \mathbf{k}_\perp \int_0^\infty \left\{ |\tilde{j}_R(\omega, \omega, \mathbf{k}_\perp)|^2 |g(\omega)|^2 + |\tilde{j}_R(-\omega, \omega, \mathbf{k}_\perp)|^2 |g(-\omega)|^2 \right\}. \quad (\text{B.20})$$

Mas como

$$|g(\omega)|^2 = \frac{8\pi^3}{a\omega} \left[ 1 + \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \right] \quad (\text{B.21})$$

e

$$|g(-\omega)|^2 = \frac{8\pi^3}{a\omega} \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}. \quad (\text{B.22})$$

conseguimos finalmente

$${}^M \mathcal{P} = \int \frac{\pi}{\omega} d^2 \mathbf{k}_\perp \int_0^\infty \left\{ |\tilde{j}_R(\omega, \omega, \mathbf{k}_\perp)|^2 \left[ 1 + \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \right] + |\tilde{j}_R(-\omega, \omega, \mathbf{k}_\perp)|^2 \left[ \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \right] \right\}. \quad (\text{B.23})$$

É evidente que esta expressão recai em (3.29) com a ajuda de (B.17) e (B.18).

## C Cálculo de (3.43)

Usaremos neste apêndice duas relações conhecidas

$$\int_a^b d\omega f(\omega) \sin 2(\omega + \Delta E)T \stackrel{T \text{ grande}}{\approx} 0, \quad (\text{C.1})$$

$$\int_a^b d\omega f(\omega) \sin^2(\omega + \Delta E)T \stackrel{T \text{ grande}}{\approx} \frac{1}{2} \int_a^b d\omega f(\omega), \quad (\text{C.2})$$

onde  $f(\omega)$  é qualquer função finita satisfazendo  $\int_a^b |f(\omega)|d\omega < +\infty$ .<sup>49</sup> Estas relações nos permitirão simplificar as integrais que seguem.

Com  $c(\tau)$  definido por (3.42) podemos calcular  $B(\omega)$  [v. Eq. (3.39)]. O resultado é

$$B(\omega) \equiv \frac{4 \sin^2(\omega + \Delta E)T}{(\omega + \Delta E)^2} - \frac{4 \sin^2(\omega + \Delta E)T}{\alpha^2 + (\omega + \Delta E)^2} + \frac{4\alpha^2 \cos 2(\omega + \Delta E)T}{[\alpha^2 + (\omega + \Delta E)^2]^2} + \frac{4\alpha^3 \sin 2(\omega + \Delta E)T}{(\omega + \Delta E)[\alpha^2 + (\omega + \Delta E)^2]^2}. \quad (\text{C.3})$$

Devemos introduzir este resultado em (3.35) e avaliar aquelas integrais no limite “ $T$  grande”. Faremos isto em etapas.

Com o uso de (C.1) é fácil ver que os dois últimos termos de (C.3) não contribuem para (3.36). Usando (C.2) podemos integrar os termos restantes obtendo

$$I_{sp} \stackrel{T \text{ grande}}{\approx} \ln \frac{\alpha^2 + \Delta E^2}{\Delta E^2} - 2 + \frac{\Delta E}{\alpha} \left[ \pi - 2 \arctan \frac{\Delta E}{\alpha} \right]. \quad (\text{C.4})$$

O mesmo acontece para (3.37) que pode ser então posta na forma

$$I_{in} \stackrel{T \text{ grande}}{\approx} 2 \int_0^{+\infty} d\omega \left[ \frac{g(\omega)}{(\omega + \Delta E)^2} - \frac{g(\omega)}{\alpha^2 + (\omega + \Delta E)^2} \right]. \quad (\text{C.5})$$

A avaliação de (3.38) requer um pouco mais de cuidado. A introdução de (C.3) em (3.38) nos dá

$$\begin{aligned} I_{abs} = & \int_0^{+\infty} d\omega \frac{4g(\Delta E)}{(\omega - \Delta E)^2} \sin^2(\omega - \Delta E)T + \int_0^{+\infty} d\omega \frac{4[g(\omega) - g(\Delta E)]}{(\omega - \Delta E)^2} \sin^2(\omega - \Delta E)T \\ & - \int_0^{+\infty} d\omega \frac{4g(\omega)}{\alpha^2 + (\omega - \Delta E)^2} \sin^2(\omega - \Delta E)T \\ & + \int_0^{+\infty} d\omega \frac{4\alpha^2 g(\omega)}{[\alpha^2 + (\omega - \Delta E)^2]^2} \cos 2(\omega - \Delta E)T \\ & + \int_0^{+\infty} d\omega \frac{4\alpha^3}{\omega - \Delta E} \frac{g(\omega)}{[\alpha^2 + (\omega - \Delta E)^2]^2} \sin 2(\omega - \Delta E)T, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

<sup>49</sup>Notemos que as relações (C.1) e (C.2) são exatas para  $T \rightarrow +\infty$ , e que elas são também válidas com ‘sin’ trocado por ‘cos’.



onde introduzimos uma identidade no primeiro termo. Ainda com o intuito de preparar as integrais para o uso das relações (C.1) e (C.2) reescrevemos (C.6) como

$$\begin{aligned}
I_{abs} = & \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{4g(\Delta E)}{(\omega - \Delta E)^2} \sin^2(\omega - \Delta E)T - \int_{-\infty}^0 d\omega \frac{4g(\Delta E)}{(\omega - \Delta E)^2} \sin^2(\omega - \Delta E)T \\
& + \int_0^{+\infty} d\omega \frac{4[g(\omega) - g(\Delta E) - \theta(2\Delta E - \omega)(\omega - \Delta E)g'(\Delta E)]}{(\omega - \Delta E)^2} \sin^2(\omega - \Delta E)T \\
& - \int_0^{+\infty} d\omega \frac{4g(\omega)}{\alpha^2 + (\omega - \Delta E)^2} \sin^2(\omega - \Delta E)T \\
& + \int_0^{+\infty} d\omega \frac{4\alpha^2 g(\omega)}{[\alpha^2 + (\omega - \Delta E)^2]^2} \cos 2(\omega - \Delta E)T \\
& + \int_0^{+\infty} d\omega \frac{4\alpha^3}{\omega - \Delta E} \left[ \frac{g(\omega)}{[\alpha^2 + (\omega - \Delta E)^2]^2} - \frac{g(\Delta E)\theta(2\Delta E - \omega)}{\alpha^4} \right] \sin 2(\omega - \Delta E)T \\
& + \int_0^{+\infty} d\omega \frac{4\alpha^3}{\omega - \Delta E} \frac{g(\Delta E)\theta(2\Delta E - \omega)}{\alpha^4} \sin 2(\omega - \Delta E)T, \tag{C.7}
\end{aligned}$$

onde (') denota derivação com respeito ao argumento. O último termo da terceira integral foi introduzido convenientemente e não contribui para a mesma. Introduzimos outra identidade na última integral.

A primeira e última integrais podem ser avaliadas diretamente [36]. A quinta e sexta integrais se anulam pelo uso de (C.1). As restantes são avaliadas com o uso de (C.2), fornecendo

$$\begin{aligned}
I_{abs} \stackrel{T \text{ grande}}{\approx} & 4g(\Delta E) \left[ \pi T - \frac{1}{2\Delta E} \right] - 2 \int_0^{+\infty} d\omega \frac{g(\omega)}{\alpha^2 + (\omega - \Delta E)^2} \\
& + 2\text{Pv} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{g(\omega) - g(\Delta E)}{(\omega - \Delta E)^2} + \frac{4g(\Delta E)\pi}{\alpha}. \tag{C.8}
\end{aligned}$$

Reunindo (C.4), (C.5) e (C.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^M \stackrel{T \text{ grande}}{\approx} & \frac{c_0^2}{2\pi} |\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2 \frac{\Delta E}{e^{2\pi\Delta E/a} - 1} T^{tot} + \frac{c_0^2}{4\pi^2} |\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2 \\
& \times \left\{ \ln \frac{\alpha^2 + \Delta E^2}{\Delta E^2} - 2 + \frac{\pi\Delta E}{\alpha} - \frac{2\Delta E}{\alpha} \arctan \frac{\Delta E}{\alpha} - \frac{2g(\Delta E)}{\Delta E} + \frac{4\pi g(\Delta E)}{\alpha} \right. \\
& \left. - 2\text{Pv} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{g(|\omega|)}{\alpha^2 + (\omega - \Delta E)^2} + 2\text{Pv} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{g(|\omega|) - g(\Delta E)}{(\omega - \Delta E)^2} \right\}. \tag{C.9}
\end{aligned}$$

No limite de *grande*  $\alpha$  obtemos (3.43).

## Referências

- [1] S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [2] S.A. Fulling, Ph.D. dissertation, Princeton University. (1972).
- [3] S.A. Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973);
- [4] W.G. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [5] P.C.W. Davies, *J. Phys. A: Gen. Phys.* **8**, 609 (1975).
- [6] B. S. DeWitt, *General Relativity*, eds. S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge, 1979).
- [7] T. Fulton and F. Rohrlich, *Ann. Phys. (N.Y.)* **9**, 499 (1960).
- [8] F. Rohrlich, *Nouvo Cimento* **21**, 811 (1961).
- [9] F. Rohrlich, *Ann. Phys. (N.Y.)*, **22**, 169 (1963).
- [10] M. Born, *Ann. Phys. (Leipzig)* **30**, 1 (1909).
- [11] D.W. Sciama, P. Candelas e D. Deutsch, *Adv. in Phys.* **30**, 327 (1981).
- [12] P. Candelas e D.W. Sciama, *Phys. Rev. D* **27**, 1715 (1983).
- [13] A. Higuchi, G.E.A. Matsas e D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **45**, R3308 (1992). A. Higuchi, G.E.A. Matsas e D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **46**, 3450 (1992).
- [14] A. Higuchi e G.E.A. Matsas, *Phys. Rev. D* **48**, 689 (1993).
- [15] J.A. Wheeler and R.P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 157 (1945).
- [16] B. Podolsky and P. Schwed, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 40 (1948).
- [17] S. Coleman, in *Eletromagnetism Paths to Research*, ed. D. C. Teplitz (Plenum, N.Y., 1982).
- [18] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory*, (New York, Wiley, 1969).

- [19] J. D. Jackson, *Classical Eletrodynamics*, the second edition (John Wiley & Sons, New York, 1975).
- [20] A.O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover, 1980).
- [21] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [22] S. Coleman, in *Subnuclear Phenomena*, ed. Zichichi (Academic Press, 1970).
- [23] P.A.M. Dirac, Proc. R. Soc. (London) **A167**, 148 (1938).
- [24] R.A. Kraenkel, *Notas do curso de eletromagnetismo IFT/92* (não publicado).
- [25] D.G. Boulware, Ann. Phys. (N.Y.) **124**, 169 (1980).
- [26] H. Bondi and T. Gold, Proc. R. Soc. **A229**, 416 (1955).
- [27] W. Rindler, Am. J. Phys. **34**, 1174 (1966).
- [28] C. Teitelboim, Phys. Rev. D **1**, 1572 (1970).
- [29] B. Mashhoon, Found. Phys. **16**, 619 (1986).
- [30] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum Field Theory in Curved Space*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [31] M.R. Spiegel, *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas* (MacGraw-Hill).
- [32] W.G. Unruh and R.M. Wald, Phys. Rev. D **29**, 1047 (1984).
- [33] B.F. Svaiter and N.F. Svaiter, Phys. Rev D **46**, 5267 (1992).
- [34] A. Higuchi, G.E.A. Matsas, C.B. Peres, *Uniformly accelerated finite-time detectors*, a ser publicado em Phys. Rev. D15.
- [35] L.N. Pringle, Phys. Rev. D **39**, 2178 (1989).

- [36] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [37] G.E.A. Matsas e C.B. Peres, *Physical detectors and the Fulling-Davies-Unruh effect*, a ser publicado em Proceedings of SILARG VIII Relativity and Gravitation.
- [38] G.E.A. Matsas e C.B. Peres, *Inertial detectors analyzed by uniformly accelerated observers*, submetido a publicação .
- [39] N. Rosen, Ann. Phys. (N.Y.) **17**, 269 (1962).

