





Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

141

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.001/00

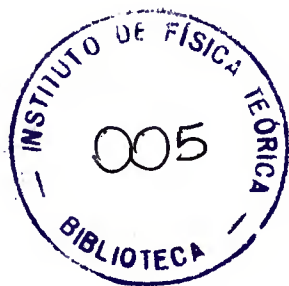
05

CÁLCULO DA AUTO-ENERGIA DE UM QUARK NUM MODELO  
DE QCD COM GLÚONS CONFINANTES

Mickel A. de Ponte

Orientador

*Prof. Dr. Adriano A. Natale*



Março de 2000

A Jesus, meus amigos e família.

---

## Resumo

Calculamos o comportamento assintótico da auto-energia do quark ( $\Sigma(p)$ ) num modelo de QCD, onde o propagador do glúon tem um comportamento infravermelho dado por uma função delta de Dirac. Usando a técnica da Expansão do Produto de Operadores verificamos que o comportamento de  $\Sigma(p)$  é diferente daquele obtido através da solução da equação de Schwinger-Dyson.

**Palavras Chaves:** QCD; Expansão do Produto de Operadores; Quebra de Simetria Quiral

**Áreas do conhecimento:** Fenomenologia de Partículas Elementares; Teoria de Campos

## Abstract

The asymptotic behaviour of the quark self-energy ( $\Sigma(p)$ ) is calculated in a QCD model where the infrared gluon propagator is described by a delta Dirac function. Using the Operator Product Expansion technique we verified that the behaviour of  $\Sigma(p)$  is different from the one obtained solving the Schwinger-Dyson equation.

“Deus não joga dados. Mas nós, humanos, não jogamos?”

Mickel A. de Ponte

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>“Technicolor”</b>	<b>4</b>
2.1	Por que “Technicolor”? . . . . .	4
2.1.1	A importância da quebra de simetria eletrofraca . . . . .	4
2.1.2	Problemas com o bóson de Higgs elementar . . . . .	5
2.1.3	Eliminação do modelo do bóson de Higgs elementar . . . . .	6
2.1.4	“Technicolor” . . . . .	7
2.1.5	“Extended Technicolor” . . . . .	8
<b>3</b>	<b>“Global Color Model”</b>	<b>10</b>
3.1	O que é “Global Color Model”? . . . . .	10
3.1.1	O funcional gerador do GCM . . . . .	11
3.2	Propagadores vestidos do quark e glúon . . . . .	13
3.2.1	Modelos para o propagador do glúon na região infravermelha . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Expansão do Produto de Operadores</b>	<b>19</b>
4.1	Produtos de operadores . . . . .	19
4.1.1	Propriedades gerais . . . . .	20
4.1.2	Funções do propagador do campo livre . . . . .	21
4.2	Expansão do Produto de Operadores em Teoria de Campos Livre . . . . .	23
4.2.1	O produto de campos de glúons e férmions e o gauge de Fock-Schwinger . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Cálculo da auto-energia de um quark</b>	<b>29</b>
5.1	O propagador do quark . . . . .	29

5.1.1	O propagador do quark perturbativo não-renormalizado, regularizado- $\epsilon$ , na aproximação de 1 loop . . . . .	30
5.1.2	O propagador do quark não-perturbativo na aproximação de 1 loop . . . . .	31
5.1.3	O propagador do quark não-perturbativo na aproximação de 1 loop com a função delta do propagador do glúon . . . . .	33
5.1.4	O propagador do quark não-perturbativo na aproximação de 1 loop com a função gaussiana do propagador do glúon . . . . .	36
<b>6</b>	<b>O grupo de renormalização</b>	<b>37</b>
6.1	A equação de Callan-Symanzik . . . . .	37
6.1.1	Cálculo da dimensão anômala do operador $\bar{\psi}\psi$ . . . . .	41
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>43</b>
<b>A</b>	<b>Notações e convenções</b>	<b>46</b>
A.1	Unidades . . . . .	46
A.2	Notações e convenções . . . . .	46
A.3	Matrizes . . . . .	47
A.4	Propriedades do traço das matrizes $\gamma$ . . . . .	49
<b>B</b>	<b>Notações no espaço Euclidiano</b>	<b>50</b>
B.1	Notações . . . . .	50
B.2	Continuação analítica para o espaço Euclidiano . . . . .	51
<b>C</b>	<b>Cálculo das equações referidas no texto</b>	<b>52</b>
C.1	Cálculo da eq.(4.29) . . . . .	52
C.2	Cálculo da eq.(4.31) . . . . .	52
C.3	Cálculo da eq.(6.23) . . . . .	53
	<b>Referências</b>	<b>55</b>



# Capítulo 1

## Introdução

O comportamento assintótico de uma série de quantidades (que possam ser representadas por produtos de operadores) na Cromodinâmica Quântica (QCD) pode ser calculado através de uma técnica conhecida como Expansão do Produto de Operadores (OPE) [1]. Quando calculamos o valor esperado no vácuo dos produtos de campos, vemos que, através da OPE, as quantidades físicas são obtidas em função dos condensados de quarks e glúons e dos coeficientes de Wilson. Acredita-se que os condensados envolvam todo o comportamento não-perturbativo da teoria, embora os coeficientes desta expansão possam ser obtidos através da teoria de perturbação. Um exemplo deste procedimento é dado pelo comportamento assintótico da auto-energia dos quarks no limite quiral, obtido por Politzer [2], Pascual e de Rafael [3]:

$$\Sigma(p) \propto \langle \bar{\psi}\psi \rangle / p^2. \quad (1.1)$$

O fato da auto-energia dos férmions, em teorias de gauge não-abelianas, decrescerem assintoticamente na forma  $1/p^2$ , tem fortes implicações fenomenológicas para os modelos denominados “Technicolor” [4], como veremos no Capítulo 2. “Technicolor” é uma teoria não-abeliana, similar a QCD, que forma bósons escalares compostos. Estes fazem o papel do bóson de Higgs no Modelo Padrão. Porém, o espectro de massas fermiônico não pode ser explicado via “Technicolor”, e então um modelo mais elaborado foi criado com o intuito de explicar isto, este modelo é comumente chamado “Extended Technicolor” (ETC) [5].

O mecanismo de geração de massa dos férmions envolve a determinação das

massas dos bósons de gauge de ETC e o comportamento da auto-energia dos techniférmions. Segundo ETC, verifica-se que para obter as massas dos férmions mais pesados é preciso ter bósons de ETC leves. Infelizmente, estes bósons violam sabor a um nível incompatível com os dados experimentais [6]. Devido a este problema, não foi possível até hoje a construção de um modelo realista de “Technicolor”. As principais tentativas de solução para este problema tratam de modificar o comportamento da auto-energia dos techniférmions (para uma revisão, vide ref.[7]), já que variações em sua forma podem levar a uma fenomenologia totalmente diferente [8]. No entanto, o comportamento da auto-energia dos techniférmions é deduzido a partir da auto-energia dos quarks, que não é bem conhecida na região não-perturbativa. Logo, só entenderemos estes modelos que levam à quebra de simetria quiral e conseqüentemente à geração de massa, quando compreendermos bem o comportamento não-perturbativo da QCD.

Nos últimos anos, houve grandes progressos no cálculo dos parâmetros hadrônicos para baixas energias, culminando num modelo semi-fenomenológico da QCD, denominado “Global Color Model” (GCM) e que foi revisto recentemente por Tandy [9]. Este modelo utiliza as equações de Schwinger-Dyson (ESD) e Bethe-Salpeter (EBS), da QCD, em função dos propagadores de quarks e glúons para calcular várias quantidades observáveis na QCD, tais como: o espectro hadrônico, o fator de forma eletromagnético do pión, parâmetros do espalhamento  $\pi - \pi$ , etc ... [9].

O modelo citado acima obteve tanto sucesso, que um trabalho recente [10] consegue descrever um conjunto extenso de propriedades dos mésons  $\pi$  e  $\rho$ , baseado na QCD e num modelo de um único parâmetro  $m_t$  para o propagador do glúon. Tanto quanto sabemos, nenhum outro método não-perturbativo, exceto teoria de gauge na rede, conseguiu ir tão longe na descrição das propriedades hadrônicas para baixas energias. Neste modelo, o efeito do confinamento dos quarks é introduzido através de um termo  $\delta^4(k)$ , colocado à mão, no propagador do glúon [11]. Ora, uma vez que tal modelo descreve tão bem a quebra de simetria quiral na QCD e que o efeito deste termo *confinante* é crucial para este resultado, é natural que se pergunte como ele irá alterar o comportamento assintótico da auto-energia dos quarks, quando calculado

através da OPE.

Este trabalho tem por objetivo reproduzir os cálculos da ref.[2] em um modelo onde o propagador do glúon é dado por um termo  $\delta^4(k)$  citado acima.

Para isto, iniciamos o trabalho no Capítulo 2 fazendo uma revisão da teoria de “Technicolor”, enquanto que no Capítulo 3 apresentamos a idéia do GCM. No Capítulo 4, damos uma rápida revisão sobre algumas propriedades do produto de dois campos e em seguida falamos sobre a técnica da OPE, que foi usada para reproduzir os cálculos da ref.[2]. Já no Capítulo 5, realizamos os cálculos sem nos preocupar com as correções de ordens superiores e no Capítulo 6, comentamos e utilizamos correções a estes resultados, empregando o método do Grupo de Renormalização. Por fim, apresentamos as conclusões dos resultados obtidos. No Apêndice A, expomos as convenções e notações adotadas por todo este trabalho, salvo quando mencionado no texto. No Apêndice B, mostramos as regras para se fazer a continuação analítica para o espaço Euclidiano, usado no Capítulo 3. No Apêndice C, encontram-se todas as passagens que achamos importantes para um bom entendimento.

Gostaríamos de ressaltar, desde já, que existe uma inconsistência na nossa proposta, da qual temos plena consciência. O uso da OPE na QCD só tem sentido para grandes momentos, onde os coeficientes são calculados perturbativamente e a expansão é obtida em potências dos momentos, ou seja, quanto maior a dimensão do operador na expansão, mais os coeficientes serão suprimidos por estas potências. Note que o cálculo da OPE envolvendo um termo  $\delta^4(k)$ , o qual depende do momento somente para  $k = 0$ , não faz sentido e quebrará a existência de uma expansão em termos do tipo  $(1/p)^n$  (Seção 5.1.3), levando a algo como  $(1/m_t^2)^n$ . No entanto, a idéia é exatamente a de quantificar isto e verificar como algo que se acredita estar ligado ao confinamento, pode danificar a expansão do produto de operadores, mesmo que isto tenha sentido apenas matemático.

## Capítulo 2

### “Technicolor”

Neste Capítulo, discutimos porque o conhecimento do comportamento assintótico da auto-energia dos quarks, que se calcula neste trabalho, é importante para modelos de quebra dinâmica de simetria. Estes modelos surgiram na tentativa de substituir o modelo do bóson de Higgs (que apresenta quebra espontânea de simetria), pois este apresenta problemas como trivialidade e não-naturalidade. Um destes modelos é o “Technicolor”; no entanto, ele não quebra a simetria quiral dos quarks e léptons, o que não lhes permite ganharem massa. Para resolver este problema, este modelo foi estendido para o chamado “Extended Technicolor”, que ainda assim, não é capaz de explicar o espectro de massas para os férmions mais pesados. O intuito deste Capítulo é justificar o grande interesse fenomenológico no conhecimento de  $\Sigma(p)$ .

### 2.1 Por que “Technicolor”?

#### 2.1.1 A importância da quebra de simetria eletrofraca

Os elementos teóricos do modelo padrão  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ , das interações fortes e fracas, foram colocadas em prova por mais de 20 anos [12]. Durante este tempo, o modelo padrão resistiu a testes extremamente rigorosos [13]. Abaixo das distâncias de  $10^{-16}$  cm, os constituintes básicos da matéria são os quarks e léptons de spin 1/2. Estes interagem via a troca de bósons de gauge de spin 1: os glúons, sem massa, da QCD e os fótons, também sem massa, junto com os bósons massivos  $W^\pm$  e  $Z^0$  da interação eletrofraca. Existem seis sabores para cada par quark-lépton (idênticos exceto pelas massas, carga e cor) agrupados em três gerações.

Embora os bósons apareçam sem massa na lagrangeana, as interações podem torná-los massivos. Isto é o que acontece, por exemplo, com os bósons  $W^\pm$  e  $Z^0$ : a simetria de gauge eletrofraca é quebrada espontaneamente no estado fundamental da teoria, um processo conhecido como *mecanismo de Higgs* [14]. Da mesma forma, os férmions no modelo padrão devem começar sem massa. Portanto, para tornar os quarks e léptons massivos é necessário introduzir uma nova interação, além das interações de gauge  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ . Estas interações adicionais quebram explicitamente a simetria de sabor dos férmions.

A escala de energia característica da quebra de simetria eletrofraca é de 1 TeV. Esta escala é fixada pela constante de decaimento dos três bósons de Goldstone transformados via o mecanismo de Higgs em componentes longitudinais,  $W_L^\pm$  e  $Z_L^0$ , do bóson de gauge fraco:

$$F_\pi \equiv 2^{-1/4} G_F^{-1/2} = 246 \text{ GeV}. \quad (2.1)$$

As dificuldades resumidas na próxima Seção induz a crença que nenhuma das descrições conhecidas de quebra de simetria de sabor e eletrofraca está inteiramente correta.

### 2.1.2 Problemas com o bóson de Higgs elementar

Nos modelos do bóson de Higgs elementar (o modelo mínimo), que não são supersimétricos, não existe nenhuma explicação de por que a quebra de simetria eletrofraca existe e nem o motivo desta ocorrer na escala de  $F_\pi$ .

O potencial de auto-interação do dubleto de Higgs é dado por  $V(\phi) = \lambda(\phi^\dagger\phi - v^2)^2$ , onde  $v$  é o valor esperado no vácuo do campo de Higgs  $\phi$  quando  $v^2 \geq 0$ . Mas o que faz  $v^2 > 0$ ? De onde o valor  $v \sim F_\pi = 246 \text{ GeV}$  vem?

O modelo do bóson de Higgs elementar não é natural\*, pois, levando-se em conta as correções radioativas, a massa do bóson de Higgs  $M_H = \sqrt{2\lambda}v$  e o próprio valor esperado no vácuo são quadraticamente instáveis [15]. Deste modo, não existe

---

\*Uma teoria é denominada natural se parâmetros macroscópicos podem ser derivados das propriedades microscópicas da teoria, contanto que pequenas variações nas variáveis microscópicas não afetem os parâmetros macroscópicos.



nenhuma razão natural desses dois parâmetros serem muito menores do que a escala de energia na qual a física essencial do modelo muda, isto é, uma escala de unificação ou a escala de Planck.

Um problema adicional dos modelos de bósons de Higgs elementar é que eles são *triviais*<sup>†</sup> [16]. Isto pode ser visto, com boa aproximação, pelo auto-acoplamento  $\lambda(\mu)$  do bóson de Higgs (segundo o modelo um-dublete mínimo) na escala de energia  $\mu$ , que é dado por [7]

$$\lambda(\mu) \cong \frac{\lambda(\Lambda)}{1 + (24/16\pi^2)\lambda(\Lambda) \log(\Lambda/\mu)}. \quad (2.2)$$

Veja que essa constante desaparece para todos  $\mu$  quando o corte  $\Lambda$  é levado ao infinito, e portanto a teoria é denominada *trivial*. Este aspecto foi mostrado como verdadeiro em uma classe geral de modelos com dubletos de bósons de Higgs [17], e é provavelmente verdadeiro para todos os modelos de Higgs.

Finalmente, o modelo de Higgs elementar não proporciona nenhum indício ao significado da simetria de sabor e a origem de sua quebra.

### 2.1.3 Eliminação do modelo do bóson de Higgs elementar

Segundo o modelo padrão, as interações de todas as partículas fundamentais podem ser descritas pela lagrangeana padrão  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  com bósons de gauge e contendo  $n_G = 3$  gerações de quarks e léptons,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{pad} = & \sum_{i=1}^{n_G} (\bar{q}_{i\alpha L} i\gamma_\mu \mathcal{D}_{\alpha\beta}^\mu q_{i\beta L} + \bar{u}_{i\alpha R} i\gamma_\mu \mathcal{D}_{\alpha\beta}^\mu u_{i\beta R} + \bar{d}_{i\alpha R} i\gamma_\mu \mathcal{D}_{\alpha\beta}^\mu d_{i\beta R} + \bar{L}_{iL} i\gamma_\mu \mathcal{D}^\mu L_{iL} \\ & + \bar{l}_{iR} i\gamma_\mu \mathcal{D}^\mu l_{iR}) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^A W^{A\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^0 W^{0\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os índices de cor de  $SU(3)$  para os quarks. Os  $W^{A=1,2,3}$  e  $W^0$  são, respectivamente, os bósons de gauge de  $SU(2)$  e  $U(1)$  eletrofracos. Os acoplamentos de gauge para  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  e  $U(1)$  são, respectivamente,  $g_s$ ,  $g$  e  $g'$ ; o tensor intensidade do campo para os glúons é dado por  $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ ; a derivada covariante é dada por  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^\mu = (\partial^\mu - ig/2\tau^A W^{A\mu} - ig'/6W^{0\mu})\delta_{\alpha\beta} - ig_s(\lambda^a/2)_{\alpha\beta} A^{a\mu}$ .

<sup>†</sup>Quando a constante de acoplamento vai a zero quando o corte é tomado no infinito, a teoria é denominada trivial.

Note que a natureza quiral das leis de transformação do quark e lépton, sob o grupo de gauge eletrofraco, proíbe termos de massa para esses férmions.

Infelizmente, segundo este modelo [18], a quebra de simetria eletrofraca é fenomenologicamente inaceitável, pois para as três gerações de quarks e léptons, a teoria encontra valores de  $M_W \cong 52,7$  MeV para a massa do bóson  $W^\pm$  e  $M_Z \cong 59,6$  MeV para a massa do bóson  $Z^0$ , enquanto que os valores experimentais medidos das massas são 1500 vezes maiores [19]:

$$\begin{aligned} M_W &= 80,22 \pm 0,26 \text{ GeV}; \\ M_Z &= 91,173 \pm 0,020 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

#### 2.1.4 “Technicolor”

A solução para o problema de uma quebra de escala muito pequena para  $SU(2) \otimes U(1)$  acima é simples [4]: basta assumir que exista uma nova interação de gauge assintoticamente livre, chamada “technicolor”, com grupo de gauge  $G_{TC}$ , e acoplamento de gauge  $\alpha_{TC}$  que se torne forte na vizinhança de 100 GeV.

Em “Technicolor”, temos techniquarks  $(U_i)_{L,R}$  e  $(D_i)_{L,R}$  que se condensam da forma:

$$\langle \Omega | \bar{U}_{iL} U_{jR} | \Omega \rangle = \langle \Omega | \bar{D}_{iL} D_{jR} | \Omega \rangle = -\delta_{ij} \Delta_T. \quad (2.5)$$

O condensado se relaciona com a constante de decaimento  $F_\pi$ , como na QCD. Daqui por diante, assumiremos que  $\Delta_T \simeq 4\pi F_\pi^3$  [20]. Pode-se mostrar que alguns dos bósons de Goldstone, que aparecem na quebra de “Technicolor”, são absorvidos pelas componentes longitudinais dos bósons fracos  $W^\pm$  e  $Z^0$ , que adquirem uma massa [4]

$$M_W = \frac{1}{2} g F_\pi \quad \text{e} \quad (2.6)$$

$$M_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} F_\pi = M_W / \cos \theta_W. \quad (2.7)$$

Deste modo, a escala  $\Lambda_{TC}$ , na qual as interações “technicolor” tornam-se fortes é determinada pela escala fraca  $F_\pi = 246$  GeV:

$$\Lambda_{TC} \propto F_\pi. \quad (2.8)$$

Note que encontramos uma explicação dinâmica para a quebra de simetria eletrofraca. Este é o mesmo fenômeno que causa a quebra de simetria quiral na QCD.

O que não achamos é uma explicação da simetria de sabor quark e lépton, muito menos uma teoria de quebra de simetria de sabor. Os modelos de “Technicolor” descritos até agora são inaceitáveis, pois os quarks e léptons ainda estão sem massas. Isto porque nada quebra explicitamente suas simetrias quirais.

### 2.1.5 “Extended Technicolor”

Vimos que uma teoria como a “Technicolor” não quebra a simetria quiral dos quarks e léptons. Como consequência, quarks e léptons não adquirem massas. Quarks adquirem uma massa dinâmica  $M_q \simeq 300 \text{ MeV}$  da QCD, mas o que isto quer dizer? Os píons, káons e eta são sem massa. Léptons são estritamente sem massa. Os techniférmions também não adquirem massas.

Uma vez que o problema é posto nesta forma, a solução é intuitiva: introduzem-se novas interações que quebrem as simetrias não desejáveis. Suponha que estas novas interações ocorram em energias bem abaixo da escala de Planck. Então, no espírito da quebra dinâmica de simetria eletrofraca, elas devem ser interações de gauge, envolvendo férmions como o único campo material. Para quebrar a simetria de sabor do quark, lépton e techniférmion, deve-se calibrar todos ou parte destas simetrias. Isto significa pôr os quarks, léptons e techniférmions juntos na mesma representação irredutível do novo grupo de gauge. Este novo grupo de gauge deve então conter ambos, “technicolor” e sabor. A interação é agora chamada “Extended Technicolor” [5, 6].

Em altas escalas  $\Lambda_{ETC} \gg \Lambda_{TC}$ , a simetria de gauge ETC quebra para  $G_{TC} \otimes SU(3) \otimes \dots$ . Depois da quebra, existem bósons de gauge ETC massivos, com massa  $M_{ETC} \sim g_{ETC} \Lambda_{ETC}$ , onde  $g_{ETC}$  é um acoplamento de gauge de ETC genérico renormalizado em  $\Lambda_{ETC}$ . Vamos supor que  $g_{ETC}$  não seja muito menor que um.

As massas dos quarks e léptons são geradas na ordem  $g_{ETC}^2$  por uma transformação de férmions leves (q,l) em um techniférmion (Q,L) que volta em um férmion leve, possivelmente diferente, enquanto emite e reabsorve um bóson de gauge ETC



massivo ( $X_{ETC}$ ). A mudança requerida da quiralidade do férmion leve é induzida pela massa gerada dinamicamente do techniférmion. Os gráficos da auto-energia para  $q$  ( $l$ ), mostrados na Fig.[1], podem ser estimados usando a OPE (análogo ao cálculo realizado no Capítulo 5).

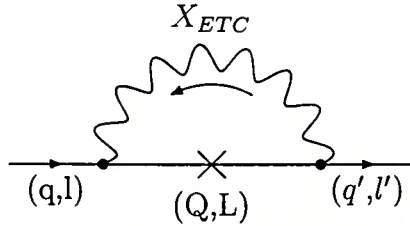


Fig.[1] Diagrama não-perturbativo para o cálculo da massa  $m_q$  ( $m_l$ ).

O momento típico variando em torno da auto-energia do loop é  $M_{ETC}$ . O resultado genérico, ignorando ângulos de mistura e o fato que diferentes acoplamentos e bósons de ETC podem contribuir para  $m_q$  ( $m_l$ ) é

$$m_q(M_{ETC}) \simeq m_l(M_{ETC}) \simeq \frac{g_{ETC}^2}{M_{ETC}^2} \langle \bar{T}T \rangle_{ETC}, \quad (2.9)$$

onde a eq.(1.1) foi usada explicitamente.

Note que para obter uma massa de 173 GeV para o quark top, segundo a eq.(2.9) devemos ter uma massa  $M_{ETC}$  de cerca de 367 GeV, usando  $g_{ETC} \sim 1$  e  $\langle \bar{T}T \rangle_{ETC} \sim 23,4 \times 10^6 \text{ GeV}^3$ . Porém, com esta massa tão pequena, os efeitos dos bósons de ETC já deveriam ter sido descobertos. Com isto, vemos que a teoria do modelo ETC não é capaz de cobrir massas para quarks tão pesados, pois isto implica em massas dos bósons ETC cada vez menores; isto é uma consequência do comportamento assintótico da auto-energia dos quarks, que será estudado propriamente no Capítulo 5.

Além de não explicar as massas de quarks tão pesados como o top, o modelo de ETC tem outro problema adicional, ele viola sabor! Uma análise desse problema pode ser encontrado em [18].

## Capítulo 3

### “Global Color Model”

Neste Capítulo, mostramos as idéias básicas do “Global Color Model”, no intuito de justificar a utilização do propagador do glúon que usamos no decorrer do trabalho. O GCM é uma das teorias que visam explicar os resultados de baixas energias, que na QCD só é possível descrever perturbativamente na região de grandes momentos, utilizando um propagador semi-fenomenológico para o glúon. Este propagador é obtido através de um truncamento da QCD, impondo algumas informações adicionais que são conseguidas através de análises detalhadas dos resultados experimentais de baixas energias. O sucesso deste propagador se confirma com as predições obtidas pelo modelo, estando em excelente acordo experimental [9, 10].

#### 3.1 O que é “Global Color Model”?

Para se estudar a física dos hádrons da perspectiva da QCD não-perturbativa e de outros modelos baseados na QCD, são usualmente empregados uma grande variedade de métodos. Dentro destes métodos, podemos citar: o método computacional de teoria de campos de gauge na rede, o método de quantização do cone de luz, regras de soma da QCD e teoria de perturbação quiral.

O GCM, que é baseado na QCD, é uma teoria de campos quânticos de quarks e glúons, semi-fenomenológica, destinada à descrição dos processos hadrônicos de baixas energias (onde está localizada a região não-perturbativa da QCD). Neste modelo, uma função de dois pontos (ou propagador) do glúon efetiva media a interação entre correntes de quarks, que experimentalmente se sabe que são confi-

nados. Segundo este modelo, o confinamento dos quarks aparece via o critério da ausência de polos reais no propagador [9, 21], conforme se discute na Seção 3.2. Este confinamento é conseguido, por exemplo, com um propagador do glúon efetivo que tenha uma singularidade infravermelha do tipo  $\delta^4(k)$ . O mais interessante nos modelos deste tipo não é esse fato, mas sim que com apenas essa modificação (dentro do chamado GCM [9]) chega-se a uma fenomenologia de interações fortes muito superior a outros modelos da literatura (vide por exemplo a ref.[9]). Existem muitos cálculos, feitos recentemente, que exemplificam o notável sucesso deste modelo [9, 10].

O GCM determina os observáveis hadrônicos (a parte fenomenológica) através das funções de Schwinger de quarks e glúons. Portanto, quando comparamos as predições teóricas com alguns dados experimentais de baixa energia, como por exemplo as massas dos mésons pseudo-escalares, as constantes de decaimento e parâmetros da quebra de simetria quiral, aprendemos como é o comportamento infravermelho dos propagadores do quark e glúon. Porém, a questão para o mecanismo que leva à singularidade infravermelha, apresentada no propagador do glúon destes cálculos, permanece aberta.

### 3.1.1 O funcional gerador do GCM

O funcional gerador\* na QCD para os propagadores dos quarks é da forma

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = N \int D\bar{q}DqDA \exp \left\{ -S_{QCD}[\bar{q}, q, A] + \int d^4x (\bar{\eta}q + \bar{q}\eta) \right\}, \quad (3.1)$$

onde

$$S_{QCD}[\bar{q}, q, A] = \int d^4x \left\{ \bar{q} \left( \not{\partial} + m - ig \frac{\lambda^a}{2} A^a \right) q + \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right\}, \quad (3.2)$$

com  $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  sendo o tensor do campo do glúon<sup>†</sup>; lembrando que  $\bar{\eta}$  e  $\eta$  são, respectivamente, os termos de fonte dos campos  $q$  e  $\bar{q}$  e  $\lambda^a/2$  os

\*Em todo este Capítulo, estaremos trabalhando no espaço Euclidiano. As regras para se fazer esta continuação analítica podem ser vistas no Apêndice B.

<sup>†</sup>Ao contrário do Capítulo anterior, aqui vamos expressar  $g$ , em vez de  $g_s$ , como sendo a constante de acoplamento das interações fortes.

geradores de  $SU(3)$ . Na eq.(3.2) está implícito o termo de fixação de gauge e o termo do campo fantasma. Se introduzirmos

$$\exp\{W[J]\} = \int DA \exp \left\{ - \int d^4x \left( \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - J_\mu^a A^{a\mu} \right) \right\}, \quad (3.3)$$

onde  $J_\nu^a(x) = igj_\nu^a$  com  $j_\nu^a = \bar{q}(x) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu q(x)$  sendo a corrente formada por quarks, o funcional gerador, eq.(3.1), pode ser escrito como

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = N \int D\bar{q}Dq \exp \left\{ \int d^4x (-\bar{q}(\not{\partial} + m)q + \bar{\eta}q + \bar{q}\eta) \right\} \exp \{W[J]\}. \quad (3.4)$$

Note que o funcional  $W[J]$  é o gerador das funções de n-pontos do glúon conectadas, sem levar em conta as contribuições de loops de quarks, que são caracterizadas pelas integrais em  $q$  e  $\bar{q}$ . Este funcional pode ainda ser escrito como [22]

$$W[J] = \frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y J_\mu^a(x) D^{\mu\nu}(x-y) J_\nu^a(y) + W_R[J]. \quad (3.5)$$

Se substituirmos as variáveis do campo dos quarks, que aparecem no argumento de  $W_R$ , pelas derivadas da fonte correspondente, podemos escrever a eq.(3.4) na forma

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \exp \left( W_R \left[ ig \frac{\delta}{\delta\eta} \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} \right] \right) Z_{GCM}[\bar{\eta}, \eta]. \quad (3.6)$$

O modelo do GCM é então gerado por

$$Z_{GCM}[\bar{\eta}, \eta] = N \int D\bar{q}Dq \exp(-S_{GCM}[\bar{q}, q] + \bar{\eta}q + \bar{q}\eta), \quad (3.7)$$

onde  $S_{GCM}[\bar{q}, q]$  é dado por

$$S_{GCM}[\bar{q}, q] = \int d^4x \bar{q}(x) (\not{\partial} + m_0) q(x) - \frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y J_\mu^a(x) D^{\mu\nu}(x-y) J_\nu^a(y), \quad (3.8)$$

onde  $m_0$  é uma matriz diagonal da massa nua do quark.

Observe que o GCM corresponde à retenção do primeiro termo da eq.(3.5), envolvendo a função de dois pontos do glúon, excluindo as contribuições da polarização do vácuo  $\bar{q}q$ , implícitas no termo  $W_R[J]$ . O termo desprezado  $W_R$  envolve as funções de n-pontos,  $n \geq 3$ , do setor de gauge puro, isto é, termos que na QCD possuiriam

acoplamentos entre os próprios glúons. Só saberemos se isto pode ou não modelar adequadamente a física dos hádrons para baixas energias, se levarmos em consideração os resultados que seguem de uma análise fenomenológica consistente para o propagador do glúon  $D_{\mu\nu}(x - y)$ .

Embora o modelo da eq.(3.8) se pareça abeliano, a natureza não-abeliana do setor de campo de gauge não foi totalmente ignorada, pois os aspectos não-abelianos, que contribuem para a função de dois pontos do glúon vestido (ou completo) na QCD, podem ser implementados através do elemento fenomenológico do GCM, que é o próprio propagador. É neste contexto que dizemos que o GCM pode ser visto como um truncamento da QCD impondo algumas informações adicionais na função de dois pontos do glúon.

### 3.2 Propagadores vestidos do quark e glúon

Na QCD, o propagador renormalizado e vestido do quark é dado pela equação de Schwinger-Dyson [23]

$$S^{-1}(p) = Z_2[i\gamma \cdot p + m_0(\Lambda)] + Z_1 \frac{4}{3} \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} g^2 D^{\mu\nu}(p - k) \gamma_{\mu} S(k) \Gamma_{\nu}^g(k, p), \quad (3.9)$$

onde  $m_0(\Lambda)$  é a massa nua e  $\Lambda$  o parâmetro de regularização, que pode ser tomado como sendo um corte para a integral, que de outro modo é divergente. Aqui, a constante de acoplamento  $g$ , o propagador do glúon vestido  $D_{\mu\nu}(q)$  e o vértice quark-glúon vestido  $\Gamma_{\mu}^g(k, p)$  são as quantidades renormalizadas, sendo que estes dois últimos satisfazem suas próprias ESD. O significado das constantes de renormalização é dado pelas seguintes relações:

$$\Gamma_{\nu}^g = Z_1 \Gamma_{\nu\Lambda}^g; \quad (3.10)$$

$$S^{-1}(p) = Z_2 S_{\Lambda}^{-1}(p); \quad (3.11)$$

$$D_{\mu\nu}^{-1}(q) = Z_3 D_{\mu\nu\Lambda}^{-1}(q); \quad (3.12)$$

$$g = \frac{Z_2 \sqrt{Z_3}}{Z_1} g_{\Lambda}, \quad (3.13)$$

onde  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  são, respectivamente, as constantes de renormalização para o vértice do quark-glúon e para os campos do quark e do glúon.

É válido lembrar que, na Eletrodinâmica Quântica (QED), a identidade de Ward exige que  $Z_1 = Z_2$ , já na QCD podemos fazer uso dessa igualdade por meio de aproximações, conhecidas como aproximações abelianas, modelando  $D_{\mu\nu}(q)$  em função de uma constante de acoplamento variável.

No ponto de renormalização escolhido  $\mu$ , a condição

$$S^{-1}(p)|_{p^2=\mu^2} = i\gamma \cdot p + m \quad (3.14)$$

define  $Z_2(\Lambda, \mu)$  e a massa do quark renormalizada  $m(\Lambda)$ . Em geral, o corte  $\Lambda$  é diferente do ponto de renormalização  $\mu$ . Para  $\mu$  e  $\Lambda$  suficientemente grandes, as quantidades renormalizadas, para  $\mu$  fixo, tornam-se independentes de  $\Lambda$ , quando  $\Lambda \rightarrow \infty$ . É comum escolher  $\mu = \Lambda$ , visto que para  $\Lambda$  suficientemente grande pode-se tomar  $Z_2$  como sendo igual a 1.

Para nossos propósitos, é suficiente lembrar que a eq.(3.9) passou por várias investigações, muito bem detalhadas, sob uma variedade de aproximações e esquemas de renormalização. Uma revisão destas investigações pode ser encontrada em Roberts e Williams (1994) [9].

Não existe no momento conhecimento suficiente do comportamento infravermelho da função de n-pontos da QCD para que se obtenham soluções numéricas das ESD do quark com o propósito de investigar se uma ampla seleção da física dos hádrons possa ser reproduzida. Na verdade, é útil tomar o ponto de vista que observáveis hadrônicos, bem selecionados, possam proporcionar uma restrição valiosa sobre o comportamento infravermelho permitido. Desse modo, obtemos um ponto de referência para ser confrontado com métodos mais diretos, tal como a QCD na rede.

### 3.2.1 Modelos para o propagador do glúon na região infravermelha

Para se discutir os principais modelos da função de dois pontos do glúon vestido, que recentemente foram usados dentro do formato GCM/ESD, devemos lembrar do comportamento assintótico dos propagadores do quark e glúon na QCD. Um tratamento mais detalhado deste tópico e a relação para produzir a renormalização pode ser encontrado em trabalhos realizados por Roberts e Williams (1994) [9].



Na métrica Euclidiana, o propagador do glúon, no gauge de Landau, é dado por

$$g^2 D_{\mu\nu}(q) = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{g^2}{q^2 [1 + \Pi(q^2)]}, \quad (3.15)$$

onde  $\Pi(q^2)$  é a polarização do vácuo do glúon.

Se as contribuições do campo fantasma não forem relevantes para a física dos hádrons leves, a constante de acoplamento efetiva, que aparece na eq.(3.15), satisfaz a mesma equação do grupo de renormalização que a constante de acoplamento variável  $\alpha(q^2)$  satisfaz na QCD. Isto leva à forma aproximada [9]

$$g^2 D_{\mu\nu}(q) = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{4\pi\alpha(q^2)}{q^2} \quad (3.16)$$

para o propagador do glúon vestido. Esta forma *abeliana* acompanhada da relação  $Z_1 = Z_2$  (como na QED) é uma aproximação usual, da qual muitos estudos das ESD para os quarks começam. É razoável iniciar as investigações do modelamento da física dos hádrons, na QCD, com esta aproximação *abeliana*, pois foi mostrado que as contribuições do campo fantasma no estudo das ESD, no gauge de Landau, não modificam qualitativamente os propagadores do quark e glúon e quantitativamente, o campo fantasma proporciona um efeito pequeno ( $< 10\%$ ).

No gauge de Landau, a expressão do grupo de renormalização, a 2-loops para a constante de acoplamento variável, recebe somente correções pequenas (cerca de 10%) das ordens mais altas para  $q^2$ -tipo espaço  $> 1 \text{ GeV}^2$  e, portanto, pode-se dizer que proporciona uma representação precisa sobre este domínio (Brown e Pennington, 1989 [24]). Porém, para  $q^2 < 1 \text{ GeV}^2$ ,  $\alpha(q^2)$  só pode ser calculado não-perturbativamente, o que ainda não se sabe.

A presença fenomenológica nas ESD para o quark está sobre o “ansatz” para  $\alpha(q^2) < 1 \text{ GeV}^2$ , que foi motivado pelos estudos das ESD do glúon.

Para  $q^2$ -tipo espaço  $\gg \Lambda_{QCD}^2$ , a constante de acoplamento variável é dado pelo grupo de renormalização, em nível de 1 loop, por

$$\alpha(q^2) = \frac{\pi d}{\log(q^2/\Lambda_{QCD}^2)}, \quad (3.17)$$

onde  $d = 12/(33 - 2N_f)$ ,  $N_f$  é o número de sabores de quarks e  $\Lambda_{QCD} \approx 0,20 \text{ GeV}$  o parâmetro de escala da QCD.

A forma geral do propagador do quark vestido é dado por

$$S(p) = -i\gamma \cdot p\sigma_V(p^2) + \sigma_S(p^2) = \frac{1}{i\gamma \cdot pA(p^2) + B(p^2) + m_0}. \quad (3.18)$$

Quando  $B \neq 0$ , com  $m_0 = 0$ , existe quebra dinâmica de simetria quiral (QDSQ).

O comportamento da amplitude acima é bem conhecida na região perturbativa pelo grupo de renormalização da QCD, pela OPE e regras de soma da QCD (Politzer, 1976, 1982; Gasser e Leutwyler, 1982; Reinders et al, 1985) [2, 25]. Para  $q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$ , o resultado para a massa variável  $M = (B + m_0)/A = \sigma_S/\sigma_V$  é

$$M(q^2) = \frac{\hat{m}}{[\frac{1}{2} \log(q^2/\Lambda_{QCD}^2)]^d}, \quad (3.19)$$

onde  $\hat{m}$  é um parâmetro invariante de escala, a ser eliminado em prol da massa do quark renormalizada  $m = M(\mu^2)$ , que foi escolhida satisfazendo a condição imposta pela eq.(3.14). Isto é válido quando  $m_0 \neq 0$ , ou seja, quando há quebra explícita de simetria quiral (QESQ). Quando não existe QESQ ( $m_0 = 0$ ), a simetria quiral é exata e a conservação da corrente vetor-axial leva a (no gauge de Landau) [9]

$$M(q^2) \underset{q^2 \rightarrow \infty}{=} \frac{\kappa}{q^2 [\log(q^2/\Lambda_{QCD}^2)]^{1-d}}, \quad (3.20)$$

onde  $\kappa$  é uma constante independente de  $\mu$  que é dado por

$$\kappa \cong -\frac{4\pi^2 d}{3} \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{[\log(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2)]^d}. \quad (3.21)$$

Veja que a equação acima nos mostra que esta constante envolve, portanto, o comportamento de escala  $\langle \bar{q}q \rangle \sim [\log(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2)]^d$  para o condensado de quarks; com isto,  $m \langle \bar{q}q \rangle$  é uma quantidade invariante da escala de renormalização. O condensado de quarks  $\langle \bar{q}q \rangle$  é uma medida da quebra dinâmica de simetria quiral. Na ausência da QESQ, o condensado para cada sabor é da forma

$$\langle \bar{q}q \rangle_\mu = -\lim_{x \rightarrow 0^+} Tr_{sc} S_0(x) = -12 \int^\mu \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{B_0(p^2)}{p^2 A_0^2(p^2) + B_0^2(p^2)}, \quad (3.22)$$

onde  $S_0(x)$  é o propagador do quark no limite quiral e o traço  $Tr_{sc}$  é tomado sob os índices de spin e cor.

As primeiras investigações com o GCM [22] empregavam um modelo simples de confinamento para o propagador do quark, proposto por Munczek e Nemirousky



(1983) [11]. Este modelo era definido, no gauge de Feynman, pelo uso da função delta em

$$D_{\mu\nu}(q) = \delta_{\mu\nu}(2\pi)^4 \delta^4(q) \frac{3\alpha^2}{16} \quad (3.23)$$

na aproximação “rainbow” das ESD<sup>†</sup>. Equivalentemente, se usarmos o gauge de Landau, chegamos aos mesmos resultados obtidos, substituindo  $\delta_{\mu\nu}$  acima por

$$\delta_{\mu\nu} \rightarrow \frac{4}{3} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right). \quad (3.24)$$

Este “ansatz” para o propagador do glúon vestido modela o comportamento infravermelho da interação quark-quark na QCD via uma singularidade infravermelha integrável.

O limite quiral das ESD simplifica as equações algébricas não-lineares e a solução, que apresenta QDSQ, também minimiza a densidade de energia do vácuo. Esta solução é

$$A(p^2) = \begin{cases} 2, & p^2 \leq \frac{\alpha^2}{4} \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{2\alpha^2}{p^2} \right)^{1/2} \right], & p^2 \geq \frac{\alpha^2}{4} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$B(p^2) = \begin{cases} (\alpha^2 - 4p^2)^{1/2}, & p^2 \leq \frac{\alpha^2}{4} \\ 0, & p^2 \geq \frac{\alpha^2}{4}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Para  $p^2 \leq \alpha^2/4$  esta solução dá à função da massa o valor

$$M^2(p^2) = \frac{\alpha^2}{4} - p^2. \quad (3.27)$$

Note que não existe nenhuma camada de massa, isto é,  $p^2 + M^2(p^2) \neq 0$  para qualquer  $p^2$ , e, portanto, existe confinamento dos quarks, já que a existência de uma camada de massa implica na existência de um limite crítico em que a partícula é criada.

Nas investigações do modelo, o comportamento acima foi corrigido para levar em conta a influência de uma parte ultravioleta para a função de dois pontos do

---

<sup>†</sup>A aproximação “rainbow” é obtida quando se toma a expressão do vértice completo ao nível de árvore, ou seja,  $\Gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu$ .

glúon, visto que nos estudos das ESD para esta função o “ansatz” acima é mais representativo para baixos  $p^2$ .

Um grande número de trabalhos detalhados dos mésons, diquarks e núcleons, dentro do GCM, foram realizados com a aproximação “rainbow” da ESD para os quarks, utilizando  $g^2 D_{\mu\nu}(q) = \delta_{\mu\nu} D(q)$ , [26] com

$$D(q) = \frac{3\pi^2\chi^2}{\Delta^2} \exp(-q^2/\Delta) + \frac{16\pi^2}{11q^2 \ln(1 + \epsilon + q^2/\Lambda^2)}, \quad (3.28)$$

onde  $\Lambda = 0,19 \text{ GeV}$ ,  $\Delta = 0,002 \text{ GeV}^2$ ,  $\chi = 1,14 \text{ GeV}$  e  $\epsilon = 2$ . O primeiro termo simula a intensificação infravermelha e o confinamento, enquanto que o segundo termo corresponde ao resultado obtido pelo grupo de renormalização na região ultravioleta. O parâmetro  $\epsilon$  pode ser variado de 1 a 250 sem que haja mudança significativa no resultado. Esse propagador mostrou ser capaz de descrever muito bem mésons leves ( $\pi, \rho/\omega, f_1$ ), várias correlações de diquarks e o núcleon [9].

## Capítulo 4

### Expansão do Produto de Operadores

Neste capítulo, discutimos a estrutura geral dos produtos de operadores, que aparecem em teoria de campos, utilizando uma expansão para pequenas distâncias (ou em grandes momentos). Essa expansão foi verificada para modelos mais simples de teoria de campos e estendida para modelos mais realistas, onde ela é uma aplicação fenomenológica dentro de certos limites.

#### 4.1 Produtos de operadores

Todas as grandezas físicas mensuráveis podem ser entendidas como produtos de campos das mais variadas formas possíveis. Dentre todas estas possibilidades, vamos estudar, nesta Seção, o produto mais simples: o produto de dois campos. Para isto, escrevemos na Seção 4.1.1 algumas propriedades gerais das funções singulares que esperamos que apareçam na expansão do produto de operadores e discutimos, em alguns detalhes, a função propagador (ou função de dois pontos) da teoria de campos escalar livre.

Produtos de operadores, a curtas distâncias (ou também perto do cone de luz) em teoria de campos [1], podem ser expandidos em uma série de outros operadores, estando estes multiplicados sucessivamente por funções singulares, ou seja, para uma expansão a curtas distâncias, podemos escrever o produto de operadores  $M(x)N(0)$  como

$$M(x)N(0) \underset{x_\mu \rightarrow 0}{\sim} \sum_i C_i(x)O_i(0), \quad (4.1)$$

e para a expansão perto do cone de luz como

$$M(x)N(0) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} \sum_i C'_i(x)O'_i(x | 0), \quad (4.2)$$

onde  $M$ ,  $N$ ,  $O_i$  e  $O'_i$  são operadores e os  $C_i$  e  $C'_i$  são os coeficientes das expansões (coeficientes de Wilson).

Alguns comentários importantes decorrem das eqs.(4.1) e (4.2), como por exemplo:

- a) As singularidades, os coeficientes  $C_i$  e  $C'_i$ , não são operadores;
- b) Os operadores que aparecem na expansão a curtas distâncias, os  $O_i$ , são locais e geralmente incluem objetos familiares, medidos diretamente, como por exemplo correntes;
- c) Os operadores bilocais que aparecem na expansão no cone de luz, os  $O'_i(x | 0)$ , são analíticos quando  $x_\mu \rightarrow 0$  e os primeiros termos em sua expansão são dados pelos principais termos que aparecem na expansão a curtas distâncias.

Neste trabalho, utilizaremos apenas a expansão a curtas distâncias.

#### 4.1.1 Propriedades gerais

A finalidade desta Seção é apenas didática, ou seja, apresentar ao leitor alguns dos produtos de campos que comumente aparecem nos livros textos, os quais podem ser considerados como simples exemplos da OPE.

As funções singulares que aparecem na expansão do produto de operadores são geralmente da forma  $(1/x^2)^n$  mais algumas condições de contorno, que nos dizem como tratar a singularidade quando  $x^2 = 0$ . As condições de contorno são convenientemente postas na própria expressão singular através da adição de uma pequena parte imaginária  $i\xi$  a  $x^2$ .

Freqüentemente encontramos três tipos diferentes de produto de campos:

- a do produto simples

$$\langle 0 | \varphi(x)\varphi(0) | 0 \rangle \sim \frac{1}{(-x^2 + i\xi x_0)^n}; \quad (4.3)$$

- a do comutador

$$\langle 0 | [\varphi(x), \varphi(0)] | 0 \rangle \sim \frac{1}{(-x^2 + i\xi x_0)^n} - \frac{1}{(-x^2 - i\xi x_0)^n}; \quad (4.4)$$

- e a do produto ordenado temporalmente (função de dois pontos)

$$\langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(0)) | 0 \rangle \sim \frac{1}{(x^2 - i\xi)^n}. \quad (4.5)$$

Alguns comentários adicionais serão feitos à medida que estes produtos aparecerem neste trabalho.

#### 4.1.2 Funções do propagador do campo livre

O propagador de Feynman para um campo escalar livre, no espaço dos momentos, é dado por

$$\Delta_F(k, m^2) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\xi}. \quad (4.6)$$

No espaço das coordenadas, o propagador é definido pela transformada de Fourier da eq.(4.6). Deste modo, encontramos que

$$\begin{aligned} \Delta_F(x, m^2) &\equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\xi} \\ &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \theta(-x_0) \frac{e^{ikx}}{2\omega_k} + \theta(x_0) \frac{e^{-ikx}}{2\omega_k} \right] \\ &= -i \langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(0)) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $\omega_k \equiv (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$  e  $\theta(x)$  é a função escada, que é definida da seguinte forma:

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Em certos casos, usamos a função comutador do campo livre

$$\begin{aligned} \Delta(x, m^2) &\equiv i \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(0)] | 0 \rangle \\ &= -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k_0) \\ &= -2\varepsilon(x_0) \text{Re}\{\Delta_F(x, m^2)\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde  $\varepsilon(k_0) \equiv \theta(k_0) - \theta(-k_0)$  e  $\varepsilon(x)$  é definida por

$$\varepsilon(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Vale notar que  $\Delta(x, m^2)$  obedece as seguintes propriedades:

1.  $\Delta(x, m^2) = -\Delta(-x, m^2)$  (usando a eq.(4.10) e a propriedade da função  $\varepsilon$ );
2.  $\Delta(x, m^2)|_{x_0=0} = 0$ ;
3.  $\Delta(x, m^2) = 0$  para  $x^2 < 0$  (segue da propriedade 1 e da invariância de Lorentz);
4.  $\Delta(x, m^2) = \Delta^+(x, m^2) + \Delta^-(x, m^2)$  e  
 $\Delta_F(x, m^2) = \theta(x_0)\Delta^+(x, m^2) - \theta(-x_0)\Delta^-(x, m^2)$ ,

onde  $\Delta^\pm(x, m^2)$  é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta^\pm(x, m^2) &\equiv \mp i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \theta(\pm k_0) 2\pi \delta(k^2 - m^2) \\ &= [\Delta^\mp(x, m^2)]^*. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para uma melhor compreensão destas funções, devemos construir uma representação em termos de funções mais familiares. Assim, é suficiente considerarmos somente  $\Delta^+(x, m^2)$ . Primeiro realizamos as integrais na parte da energia e na parte angular da eq.(4.11), obtendo

$$\Delta^+(x, m^2) = \frac{1}{4\pi r} \frac{i}{2\pi \omega_k} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i\omega_k x_0} \frac{\partial}{\partial r} (e^{ikr}), \quad (4.12)$$

onde  $k = |\mathbf{k}|$  e  $\omega_k = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$ .

Podemos reescrever esta equação na forma

$$\Delta^+(x, m^2) = \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} f(x), \quad (4.13)$$

onde

$$f(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\omega_k} e^{i(\omega_k x_0 + kr)}. \quad (4.14)$$

Partindo da eq.(4.13) e eq.(4.14), observamos que  $\Delta^+(x, m^2)$  é singular quando  $x_0 = r$ , pois a derivada  $(\partial/\partial r)$  da integral na eq.(4.14) diverge.

Definindo as variáveis  $k = m \sinh \theta$ ,  $\omega_k = m \cosh \theta$ ,  $x_0 = \sqrt{x^2} \cosh \theta_0$ ,  $r = \sqrt{x^2} \sinh \theta_0$  e considerando  $x_0 < r$  na eq.(4.14), obtemos

$$f(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \exp\{im\sqrt{x^2} \cosh(\theta + \theta_0)\}, \quad (4.15)$$

que é uma representação familiar de uma função de Bessel [27]:

$$f(x) = -\frac{1}{2}J_0(m\sqrt{x^2}) - \frac{i}{2}Y_0(m\sqrt{x^2}). \quad (4.16)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para  $\Delta^-(x, m^2)$ , [28] pg. 149, podemos escrever a eq.(4.10) na forma

$$\Delta(x, m^2) = \frac{1}{2\pi}\varepsilon(x_0)\delta(x^2) - \frac{m^2}{4\pi}\varepsilon(x_0)\theta(x^2)\frac{J_1(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}}. \quad (4.17)$$

Tendo conhecimento destas propriedades, passamos, então, ao estudo da técnica da OPE, que é discutida na próxima Seção.

## 4.2 Expansão do Produto de Operadores em Teoria de Campos Livre

Para dar um exemplo de como a expansão do produto de operadores, do tipo da eq.(4.1) e eq.(4.2), ocorre em teoria de campos, consideraremos o caso mais simples: o de um campo escalar livre. Estudemos, então, operadores compostos formados de produtos dos campos constituintes: objetos do tipo  $\theta(x) \equiv \phi(x)\phi(x)$ . Na verdade, a forma da qual foi definida  $\theta(x)$  não é muito boa, pois este operador tem um valor esperado no vácuo que é diferente de zero. Isto decorre do fato que as partes de  $\phi(x)$  com frequência negativa, que contêm operadores de criação  $a^+(k)$ , não aniquilam o vácuo. Portanto, se desejamos que o valor esperado no vácuo, deste produto de operadores, seja nulo, devemos redefinir  $\theta(x)$  de modo que as partes de frequência positiva de  $\phi(x)$ ,

$$\phi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{2E} a(k)e^{-ikx}, \quad (4.18)$$

sempre permaneçam à direita com relação às de frequência negativa. Deste modo

$$\begin{aligned} \theta(x) &= : \phi(x)\phi(x) : \\ &\equiv \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(x) + 2\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(x) \end{aligned} \quad (4.19)$$



é uma definição mais adequada para este objeto. Este procedimento é chamado *ordenamento normal*.

Considere agora um produto mais complexo, por exemplo o produto

$$\theta(x)\theta(0) = : \phi(x)\phi(x) :: \phi(0)\phi(0) : . \quad (4.20)$$

Certamente o produto dos quatros campos que aparecem na equação acima não está ordenado normalmente e então se tornará infinito quando  $x \sim 0$  (novamente, termos de frequência negativa de  $\theta(0)$  irão aparecer à direita dos de frequência positiva, que vêm da parte de  $\theta(x)$ , se tomarmos o valor esperado no vácuo quando  $x \sim 0$ , isto divergirá). Para ver como isto acontece, reescrevamos  $\theta(x)\theta(0)$  usando as relações de comutação canônica, utilizada em teoria de campos livres, para trocar as partes de frequência negativa e positiva de  $\phi(x)$  e  $\phi(0)$ , a saber:

$$\begin{aligned} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(0)] &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} 2\pi\delta(q^2 - m^2)\theta(q_0) \\ &= -i\Delta^-(x, m^2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Usando o Teorema de Wick\*, vemos que

$$T(\theta(x)\theta(0)) = -2(\Delta^-(x, m^2))^2 - 4i\Delta^-(x, m^2) : \phi(x)\phi(0) : + : \theta(x)\theta(0) : . \quad (4.23)$$

Os produtos ordenados normalmente do lado direito da eq.(4.23) não são singulares quando  $x_\mu \rightarrow 0$ . Note que todas as singularidades foram absorvidas nas quantidades  $\Delta^-(x, m^2)$ , que são da forma

$$\Delta^-(x, m^2) \sim \frac{-i}{4\pi^2} \frac{1}{(x^2 - i\xi x_0)} \text{ quando } x^2 \rightarrow 0. \quad (4.24)$$

Podemos ainda expandir em Taylor o termo  $: \phi(x)\phi(0) :$  no limite em que  $x \sim 0$ , ou seja:

$$: \phi(x)\phi(0) : = : \phi(0)\phi(0) : + x_\mu : \partial^\mu \phi(0)\phi(0) : + \dots \quad (4.25)$$

---

\*Na verdade, para se utilizar o Teorema de Wick, devemos adicionar à eq.(4.20) o fato de que o produto esteja ordenado temporalmente, isto é:

$$T(\theta(x)\theta(0)) = \begin{cases} \theta(x)\theta(0) & \text{se } x_0 > 0 \\ \theta(0)\theta(x) & \text{se } x_0 < 0. \end{cases} \quad (4.22)$$



Introduzindo  $J^\mu(x) \equiv: \partial^\mu \phi(x) \phi(x) :$ , podemos escrever a eq.(4.23) como

$$T(\theta(x)\theta(0)) \approx \frac{1}{8\pi^4(x^2 - i\xi x_0)^2} - \frac{\theta(0)}{\pi^2(x^2 - i\xi x_0)} - \frac{x_\mu J^\mu(0)}{\pi^2(x^2 - i\xi x_0)} + \dots \quad (4.26)$$

Note que as expansões que aparecem nas eqs. (4.23) e (4.26) são da forma prometida<sup>†</sup>.

Dado este exemplo em teoria de campos escalar livre, vejamos agora o que ocorre em teorias não-abelianas, onde os campos não são mais escalares, mas sim tensoriais ou espinoriais.

#### 4.2.1 O produto de campos de glúons e férmions e o gauge de Fock-Schwinger

Esta Seção contém uma técnica elaborada por uma série de pesquisadores [29, 30] que permite calcular a expansão de produtos do tipo  $\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle$  e  $\langle \bar{\psi}(x) \psi(y) \rangle$  necessárias para o cálculo dos coeficientes de Wilson (os  $C_i(x)$  da eq.(4.1)).

As funções de correlação, de fontes sem cor, são invariantes de gauge e, portanto, qualquer que seja a condição de gauge imposta sobre o campo do glúon no vácuo, leva, eventualmente, a mesma resposta final. Então, a escolha do gauge é, primeiro de tudo, uma questão de conveniência. Um gauge proposto na Eletrodinâmica Quântica por Fock [31] e, independentemente, por Schwinger [32] foi o seguinte:

$$(x - x_0)^\mu A_\mu^a(x) = 0, \quad (4.27)$$

onde  $A_\mu^a(x)$  é o 4-potencial e  $x_0$  um ponto arbitrário no espaço-tempo, representando o papel de um parâmetro de gauge. Este gauge foi redescoberto várias vezes na QCD e suas virtudes foram reveladas em trabalhos subseqüentes [33].

Notamos, desde já, que a eq.(4.27) é invariante sob a transformação de escala e inversão de coordenadas, mas quebra a simetria translacional. A última se restaura nas quantidades invariantes de gauge. Em outras palavras, o parâmetro  $x_0$  deve

---

<sup>†</sup>A expansão do produto de operadores mais geral possível consiste da expansão de Wick, utilizada na eq.(4.23), da expansão em Taylor, utilizada na eq.(4.26), e, para o caso de tensores (ou espinores), uma expansão em uma base adequada (se for o caso de uma matriz, expandimo-la em termos de suas matrizes bases).

se cancelar em todas as funções de correlação induzidas por fontes sem cor. Este fato (o cancelamento da dependência em  $x_0$ ) pode servir como uma checagem adicional da exatidão dos cálculos. Não estaremos preocupados em explorar aqui esta propriedade, porém, deveremos assumir  $x_0 = 0$  em todas as considerações deste trabalho. Sendo assim, a eq.(4.27) se torna

$$x^\mu A_\mu^a(x) = 0. \quad (4.28)$$

Com esta simplificação, obteremos, como recompensa, uma fórmula compacta para os propagadores do quark e do glúon, como se verá adiante.

A consequência mais importante da eq.(4.28) é que o potencial  $A_\mu^a(x)$  pode ser expresso diretamente em termos do tensor intensidade do campo do glúon,  $G_{\rho\mu}^a = \partial_\rho A_\mu^a - \partial_\mu A_\rho^a + g_s f^{abc} A_\rho^b A_\mu^c$  (conforme é demonstrado no Apêndice C), a saber:

$$A_\mu^a(x) = \int_0^1 d\alpha G_{\rho\mu}^a(\alpha x) \alpha x^\rho. \quad (4.29)$$

Para nossos propósitos (estamos interessados aqui na expansão em operadores locais), é mais conveniente trabalharmos com uma outra expressão para  $A_\mu^a$ , que provém da expansão em Taylor de  $G_{\rho\mu}^a$  na eq.(4.29). Fazendo isto, obtemos:

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) &= \int_0^1 d\alpha [G_{\rho\mu}^a(0) + \alpha x^\sigma \partial_\sigma G_{\rho\mu}^a(0) + (1/2)\alpha^2 x^{\sigma_1} x^{\sigma_2} \partial_{\sigma_1} \partial_{\sigma_2} G_{\rho\mu}^a(0) + \dots] \alpha x^\rho \\ &= \frac{1}{2} x^\rho G_{\rho\mu}^a(0) + \frac{1}{3 \cdot 1!} x^\rho x^{\sigma_1} \partial_{\sigma_1} G_{\rho\mu}^a(0) + \frac{1}{4 \cdot 2!} x^\rho x^{\sigma_1} x^{\sigma_2} \partial_{\sigma_1} \partial_{\sigma_2} G_{\rho\mu}^a(0) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)n!} x^\rho x^{\sigma_1} x^{\sigma_2} \dots x^{\sigma_n} \partial_{\sigma_1} \partial_{\sigma_2} \dots \partial_{\sigma_n} G_{\rho\mu}^a(0). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Usando o gauge da eq.(4.28), encontramos uma relação entre as derivadas ordinárias e as covariantes ( $D_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{2} i g_s \lambda^a A_\mu^a$ , onde  $\lambda_a$  é a matriz de Gell-Mann  $3 \times 3$ ) na origem, ou seja<sup>†</sup>:

$$x^{\sigma_1} \dots x^{\sigma_n} D_{\sigma_1}(0) \dots D_{\sigma_n}(0) G_{\rho\mu}^a(0) = x^{\sigma_1} \dots x^{\sigma_n} \partial_{\sigma_1} \dots \partial_{\sigma_n} G_{\rho\mu}^a(0). \quad (4.31)$$

Com esta relação, podemos reescrever a eq.(4.30) como

$$A_\mu^a(x) = \sum_n \frac{1}{(n+2)n!} x^\rho x^{\sigma_1} \dots x^{\sigma_n} D_{\sigma_1}(0) \dots D_{\sigma_n}(0) G_{\rho\mu}^a(0). \quad (4.32)$$

<sup>†</sup>Esta demonstração se encontra no Apêndice C.

A eq.(4.32) mostra que  $A_\mu^a(x)$  é expresso diretamente em termos do tensor intensidade do campo gluônico na origem e de suas derivadas covariantes.

Da eq.(4.32), podemos formar o produto de dois campos  $A_\mu^a(x)A_\nu^b(y)$  e verificar que, em primeira ordem, após tomarmos o valor esperado no vácuo, este produto de campos é proporcional ao condensado de glúons, ou seja:

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(x)A_\nu^b(y) \rangle &= (1/4)x^\rho y^\xi \langle G_{\rho\mu}^a(0)G_{\xi\nu}^b(0) \rangle + \dots \\ &\simeq \frac{\delta^{ab}}{32d(d-1)}x^\rho y^\xi (g_{\rho\xi}g_{\mu\nu} - g_{\rho\nu}g_{\mu\xi}) \langle G^{c\alpha\beta}(0)G_{\alpha\beta}^c(0) \rangle, \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde usamos o fato que

$$\langle G_{\rho\mu}^a(0)G_{\xi\nu}^b(0) \rangle = \frac{\delta^{ab}}{N^2 - 1} \frac{(g_{\rho\xi}g_{\mu\nu} - g_{\rho\nu}g_{\mu\xi})}{d(d-1)} \langle G^{c\alpha\beta}(0)G_{\alpha\beta}^c(0) \rangle, \quad (4.34)$$

$d$  é a dimensão do espaço-tempo e  $N$  o número de cores. Fazendo  $a = b$  na eq.(4.33), chegamos na seguinte expressão para o produto de dois campos:

$$\langle A_\mu^a(x)A_\nu^a(y) \rangle \simeq \frac{1}{4d(d-1)}x^\rho y^\xi (g_{\rho\xi}g_{\mu\nu} - g_{\rho\nu}g_{\mu\xi}) \langle G^{c\alpha\beta}(0)G_{\alpha\beta}^c(0) \rangle. \quad (4.35)$$

Para obter o produto de dois campos de quarks, primeiramente usamos a relação mostrada na eq.(4.31) na expansão em Taylor para os campos dos quarks, chegando que

$$\psi(x) = \sum_n \frac{1}{n!} x^{\sigma_1} x^{\sigma_2} \dots x^{\sigma_n} D_{\sigma_1}(0) D_{\sigma_2}(0) \dots D_{\sigma_n}(0) \psi(0) \quad \text{e} \quad (4.36)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_n \frac{1}{n!} x^{\sigma_1} x^{\sigma_2} \dots x^{\sigma_n} \bar{\psi}(0) D_{\sigma_n}^\dagger(0) \dots D_{\sigma_2}^\dagger(0) D_{\sigma_1}^\dagger(0). \quad (4.37)$$

Agora, tomando o condensado de quarks para  $SU(N)$ , por meio da eq.(4.36) e eq.(4.37), chegamos a

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_{i\alpha}(x)\psi_{j\beta}(0) \rangle &= \sum_n \frac{1}{n!} x^{\sigma_1} x^{\sigma_2} \dots x^{\sigma_n} \langle \bar{\psi}_{i\alpha}(0) D_{\sigma_n}^\dagger(0) \dots D_{\sigma_2}^\dagger(0) D_{\sigma_1}^\dagger(0) \psi_{j\beta}(0) \rangle \\ &= \langle \bar{\psi}_{i\alpha}(0)\psi_{j\beta}(0) \rangle + x^\mu \langle \bar{\psi}_{i\alpha}(0) D_\mu^\dagger(0) \psi_{j\beta}(0) \rangle + \dots \\ &= \frac{1}{4N} \delta_{ij} \left\{ \left[ \delta_{\alpha\beta} + i\frac{1}{4} m x^\mu (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \right] \langle \bar{\psi}(0)\psi(0) \rangle + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde usamos o fato que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_{i\alpha}(x) D_\mu^\dagger(0) \psi_{j\beta}(0) \rangle &= \delta_{ij} \frac{1}{16N} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \langle \bar{\psi} \gamma^\nu D_\nu \psi \rangle \\ &= im \delta_{ij} \frac{1}{16N} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \langle \bar{\psi} \psi \rangle. \end{aligned} \quad (4.39)$$

A eq.(4.38) será de fundamental importância para os futuros cálculos realizados neste trabalho.

## Capítulo 5

### Cálculo da auto-energia de um quark

No Capítulo anterior, estudamos a Expansão do Produto de Operadores. Neste Capítulo, ficará mais claro como esta expansão é utilizada para reproduzir os cálculos da ref.[2]. Além de reproduzir estes cálculos, calcularemos também a auto-energia do quark, usando o modelo estudado no Capítulo 3, onde o propagador do glúon apresenta uma singularidade infravermelha tipo  $\delta^4(p)$ . Na tentativa de encontrar uma resposta mais suave, fazemos ainda o mesmo cálculo da auto-energia do quark, só que usando uma função gaussiana para o propagador do glúon.

#### 5.1 O propagador do quark

Como queremos calcular o comportamento do propagador do quark (com e sem massa), iremos discutir o produto ordenado temporalmente de dois campos que possui a seguinte expansão:

$$-iT(\psi_{\chi\alpha}(x)\bar{\psi}_{\beta}^{\varrho}(0)) = \delta_{\chi}^{\varrho}[C_{\alpha\beta}^0(x) + C_{\alpha\beta}^1(x)\bar{\psi}(0)\psi(0) + \dots], \quad (5.1)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são índices de cor e  $\chi$  e  $\varrho$  índices de Dirac.

Existem outros termos, em uma expansão mais geral, que não aparecem aqui, devido ao fato que quando se toma o valor esperado no vácuo, eles se tornam nulos. Um exemplo disto é o termo proporcional a  $\langle\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi\rangle$ , que não é invariante de Lorentz.

Se tomarmos o valor esperado no vácuo da eq.(5.1), vemos que no lado direito sobra apenas o primeiro coeficiente, que representa o conhecido propagador vestido; portanto, a contribuição do primeiro termo corresponde à soma de diagramas apresentado na Fig.[2].

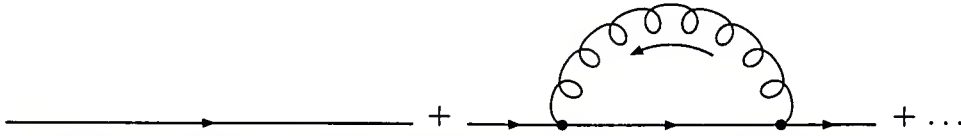


Fig.[2] Diagramas utilizados para o cálculo do coeficiente  $C_{\alpha\beta}^0$ .

Já o segundo termo é obtido depois de multiplicarmos os dois lados da eq.(5.1) por  $\psi_{\alpha\gamma}(y)\bar{\psi}_{\delta}^{\sigma}(z)$  e tomarmos o valor esperado no vácuo. O condensado  $\langle\bar{\psi}(0)\psi(0)\rangle$  é denotado graficamente por um  $\times$ . Com isto o segundo coeficiente da eq.(5.1) gera uma série que está representada na Fig.[3].

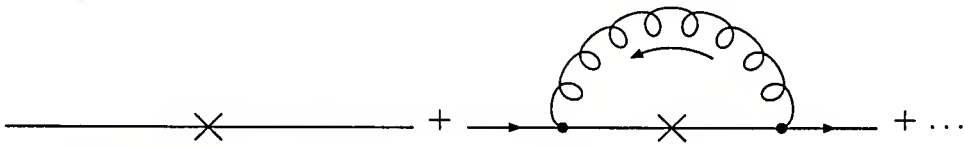


Fig.[3] Diagramas utilizados para o cálculo do coeficiente  $C_{\alpha\beta}^1$ .

Iremos começar este Capítulo esquematizando o cálculo da série perturbativa (o primeiro diagrama de 1 loop correspondente ao coeficiente  $C_{\alpha\beta}^0$ ). O cálculo do coeficiente  $C_{\alpha\beta}^1$  será o mesmo, porém, ao invés de usarmos o propagador do férmion, como irá aparecer na eq.(5.2), usaremos a transformada de Fourier da eq.(4.38), como ficará claro na Seção 5.1.2.

### 5.1.1 O propagador do quark perturbativo não-renormalizado, regularizado- $\epsilon$ , na aproximação de 1 loop

A expressão geral para o propagador do férmion vestido, não-renormalizado, é

$$S_F(\not{p}, m_0) = \frac{i}{\not{p} - (m_0 + \Sigma_{UR}) + i\xi}, \quad (5.2)$$

sendo  $-i\Sigma_{UR}$  a auto-energia do férmion.  $\Sigma_{UR}$  sempre pode ser posto na forma

$$\Sigma_{UR}(\not{p}) \equiv \Sigma_{1UR}(p^2) + (\not{p} - m_0)\Sigma_{2UR}(p^2). \quad (5.3)$$

Para a ordem mais baixa na constante de acoplamento  $g_s^0$ ,  $-i\Sigma_{UR}(p)$  é dada pelo diagrama de Feynman abaixo:

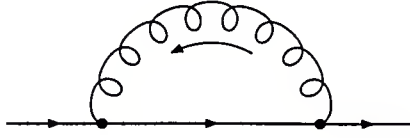


Fig.[4] Diagrama da auto-energia do quark.

Deste diagrama, tiramos que

$$-i\Sigma_{UR} = (g_s^0)^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu \frac{-1}{\not{p} + \not{k} - m_0 + i\xi} \gamma^\nu \frac{\Gamma^a \delta^{ab} \Gamma^b}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \zeta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (5.4)$$

onde  $\zeta$  é o parâmetro de fixação de gauge.

O cálculo desta equação é um cálculo padrão que pode ser encontrado em vários livros texto [34]. Segue então que

$$\Sigma_{1UR} = \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{(g_s^0 \mu^{-\epsilon/2})^2}{(16\pi^2)^{1-\epsilon/4}} \int_0^1 dx \left\{ \Gamma(\epsilon/2) \left( \frac{\mu^2}{\mathfrak{R}^2} \right)^{-\epsilon/2} [(1 - \zeta)(1 - 2x) - \epsilon(1 - x) + 2(2 - x)] + (1 - \zeta)2x(1 - x) \frac{p^2}{(m_0^2 - p^2 x)} \right\} m_0, \quad (5.5)$$

onde  $N$  é o numero de cores,  $\mu$  é a escala de renormalização,  $\epsilon$  é o parâmetro de regularização dimensional,  $\mathfrak{R}^2 \equiv (1 - x)(m_0^2 - p^2 x)$  e  $x$  é o parâmetro de Feynman.

Já para  $\Sigma_{2UR}$ , temos:

$$\Sigma_{2UR}(p^2) = \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{(g_s \mu^{-\epsilon/2})^2}{(16\pi^2)^{1-\epsilon/4}} \int_0^1 dx \left\{ \Gamma(\epsilon/2) \left( \frac{\mu^2}{\mathfrak{R}^2} \right)^{-\epsilon/2} [(1 - \zeta)2(1 - x) - 2x \epsilon x] - (1 - \zeta)2x(1 - x) \frac{p^2}{(m_0^2 - p^2 x)} \right\}. \quad (5.6)$$

Pode-se notar que  $\Sigma_{1UR}$  é nulo quando a massa nua  $m_0 = 0$ .

A proposta do nosso trabalho é o cálculo da eq.(5.4), onde o propagador do férmion é substituído pela transformada de Fourier da eq.(4.38). Esse é o cálculo que nos levará ao propagador do quark na presença de um condensado (e em particular no limite quiral).

### 5.1.2 O propagador do quark não-perturbativo na aproximação de 1 loop

Nesta Seção, iremos calcular o diagrama que aparece na Fig.[5] quando  $m_0 = 0$ . Este diagrama é análogo ao diagrama perturbativo, calculado na Seção anterior,



porém, trocamos o propagador do quark, na linha interna do diagrama, por um condensado de quarks (assumindo sua existência).

O produto de campos, na presença de um condensado de quarks, foi deduzido na eq.(4.38) nas coordenadas espaciais. Passando para o espaço dos momentos, obtemos:

$$\langle \bar{\psi}_{\chi\alpha}(p)\psi_{\rho\beta}(0) \rangle = \int d^n x e^{i(p+k)x} \frac{1}{4N} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \delta_{\chi\rho} \delta_{\alpha\beta} \quad (5.7)$$

$$= \frac{1}{4N} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \delta_{\chi\rho} \delta_{\alpha\beta} (2\pi)^n \delta^n(p+k). \quad (5.8)$$

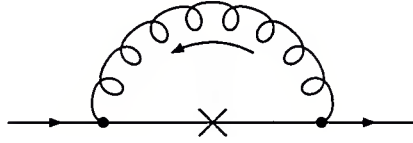


Fig.[5] Diagrama não-perturbativo para a auto-energia do quark.

Com esta expressão, passamos ao cálculo de  $-i\Sigma_{UR}$ .

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{UR} &= -i(g_s^0)^2 \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{4N} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu T^a (2\pi)^d \delta^d(p+k) \gamma^\nu T^b \frac{\delta^{ab}}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1-\zeta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \\ &= -i(g_s^0)^2 (T^a \delta^{ab} T^b) \frac{1}{4N} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \int d^d k \delta^d(p+k) \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1-\zeta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \\ &= -i(g_s^0)^2 \frac{N^2-1}{2N} \frac{1}{4N} \langle \bar{\psi}\psi \rangle (d-1+\zeta) \frac{1}{p^2}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde usamos o fato que  $(T^a \delta^{ab} T^b) = (N^2-1)/2N$  e  $d$  a dimensão do espaço-tempo.

Portanto

$$\Sigma_{UR} = \frac{N^2-1}{2N} \frac{\pi\alpha_s}{N} (d-1+\zeta) \frac{1}{p^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle, \quad (5.10)$$

com  $\alpha_s = (g_s^0)^2/4\pi$ .

Com isto, vemos que a massa não-perturbativa pode ser escrita como

$$\begin{aligned} m_{N.P.}(-p^2) &\equiv \Sigma_{UR} \\ &= -\frac{N^2-1}{2N} \frac{\pi\alpha_s}{N} (d-1+\zeta) \frac{1}{-p^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Este resultado está em acordo com o trabalho de Pascual e de Rafael [3], que corrige a expressão de Politzer [2].



Tendo obtido o resultado, a primeira ordem da constante de acoplamento  $g_s^0$ , vejamos o que ocorre, quando calculamos apenas um dos gráficos de segunda ordem, mostrado abaixo.

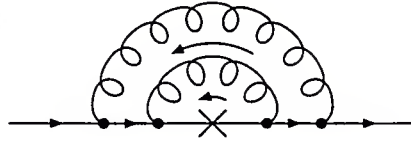


Fig.[6] Diagrama não-perturbativo, a 2 loops, para a auto-energia do quark.

Do gráfico da Fig.[6], obtemos que

$$-i\Sigma'_{UR} = (g_s^0)^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma^\rho T^c \frac{\Sigma_{UR}}{(p+k)^2} \gamma^\zeta T^d \frac{\delta^{cd}}{p^2} \left( g_{\rho\zeta} - (1-\zeta) \frac{p_\rho p_\zeta}{p^2} \right), \quad (5.12)$$

onde  $\Sigma_{UR}(p+k)$  é dado pela eq.(5.11). Portanto

$$\begin{aligned} -i\Sigma'_{UR} &= \left( (g_s^0)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} (d - 1 + \zeta) \right)^2 \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{4N} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 (p+k)^4} \\ &= \left( (g_s^0)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} (d - 1 + \zeta) \right)^2 \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{4N} \int \frac{d\Omega_4}{(2\pi)^4} dp \frac{p}{p^2 (p+k)^4} \\ &= \left( (g_s^0)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} (d - 1 + \zeta) \right)^2 \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{4N} \left( \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \right) \int_0^\infty dp \frac{p}{(p+k)^4} \\ &\stackrel{p'=\underline{p+k}}{=} \left( (g_s^0)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} (d - 1 + \zeta) \right)^2 \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{4N} \left( \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \right) \int_k^\infty dp' \frac{(p'-k)}{p'^4} \\ &= \left( (g_s^0)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} (d - 1 + \zeta) \right)^2 \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{4N} \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{-1}{2p^2} + \frac{k}{3p^3} \right) \Big|_{p=k}^\infty. \quad (5.13) \end{aligned}$$

Chegando que

$$\Sigma'_{UR} = -i \left( (g_s^0)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} (d - 1 + \zeta) \right)^2 \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{k^2} \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{24N}. \quad (5.14)$$

Este resultado serve apenas para nos dar uma idéia do comportamento dos diagramas de ordem mais alta. Um cálculo completo envolveria, não só o diagrama da Fig.[6], mas todos os diagramas da Fig.[7], o que vai além do escopo do nosso trabalho.

### 5.1.3 O propagador do quark não-perturbativo na aproximação de 1 loop com a função delta do propagador do glúon

Análogo ao que fizemos na última Seção, aqui iremos repetir o cálculo da auto-energia do quark, com a mudança do propagador do glúon conforme o modelo GCM,

citado no Capítulo 3, isto é, substituiremos

$$\frac{-i}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \zeta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab} \longrightarrow -i\beta^2 \delta^4(k) \left( g_{\mu\nu} - (1 - \zeta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab}, \quad (5.15)$$

onde  $\beta$  é uma constante a ser ajustada fenomenologicamente [10, 11].

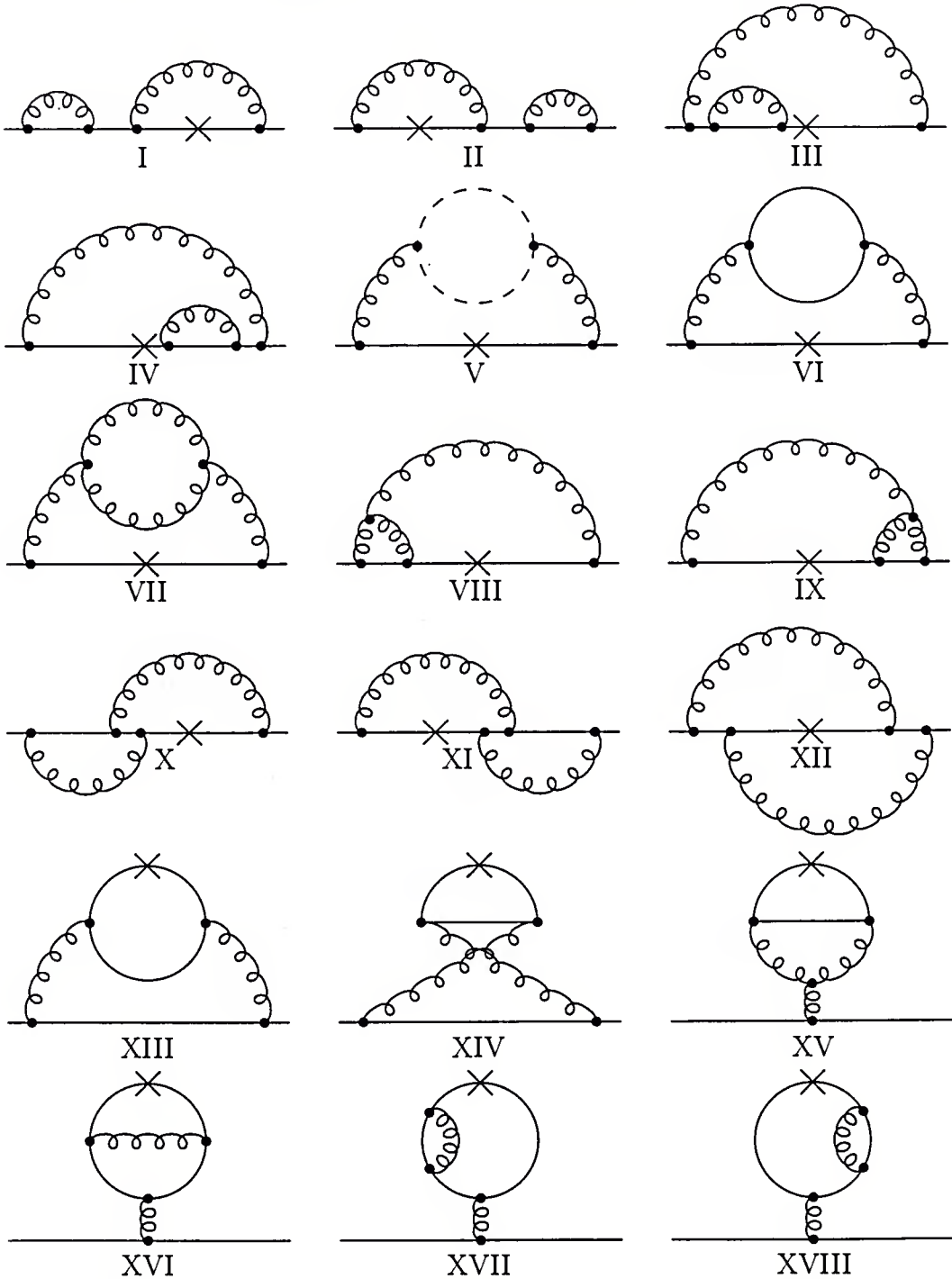


Fig.[7] Diagramas que contribuem para o cálculo completo, a 2 loops, da auto-energia do quark não-perturbativo.

Partindo da eq.(5.9), com a mudança mencionada acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma_{UR} &= i(g_s^0)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{-1}{4N} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \int d^4k \delta^4(p+k) \beta^2 \delta^4(k) \gamma^\mu \gamma^\nu \left( g_{\mu\nu} - (1-\zeta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \\
 &= -i(g_s^0)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{4N} \langle \bar{\psi}\psi \rangle (d-1+\zeta) \beta^2 \delta^4(p),
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

e, portanto, chegamos ao nosso principal resultado:

$$\Sigma_{UR}(p) = (g_s^0)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{4N} \langle \bar{\psi}\psi \rangle (d-1+\zeta) \beta^2 \delta^4(p). \tag{5.17}$$

Note que o coeficiente de  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  da eq.(5.17) não é mais da forma  $1/p^2$ , mas sim uma constante multiplicada por um termo dependendo do momento, da forma  $\delta^4(p)$ . Como prevíamos, a existência de um propagador do glúon da forma de uma função  $\delta^4(k)$  (conforme o modelo da ref.[10, 11]), destrói a idéia de uma expansão do produto de operadores bem comportada, já que os coeficientes da expansão não mais decrescem com potências de  $1/p^2$ , mas sim com potências de uma constante, que necessariamente não é desprezível e que, portanto, anula o efeito da expansão. É importante salientar que o resultado da OPE é contraditório com a solução da ESD dada pela eq.(3.25) e eq.(3.26).

Novamente, vejamos o que acontece quando calculamos a auto-energia, à segunda ordem da constante de acoplamento\*. Apenas iremos calcular o diagrama da Fig.[8] abaixo.

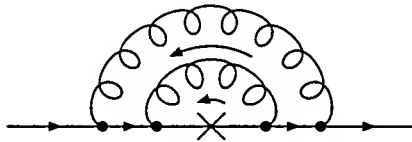


Fig.[8] Diagrama não-perturbativo, a 2 loops, para a auto-energia do quark.

Pelo diagrama acima, temos que:

$$-i\Sigma'_{UR} = A^2 \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{4N} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta^4(p+k) \delta^4(p) \frac{1}{(p+k)^2}, \tag{5.18}$$

onde  $A = \left( (g_s^0)^2 \frac{N^2-1}{2N} (d-1+\zeta) \beta^2 \right)$ , logo obtemos:

$$\Sigma'_{UR} = iA^2 \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{4N} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\delta^4(k)}{k^2}. \tag{5.19}$$

---

\*Note que, como estamos usando o GCM, os diagramas VII, VIII, IX e XV, que aparecem na Fig.[7], não contribuem, já que possuem acoplamentos triplos entre glúons. Estes acoplamentos são gerados pelo termo desprezado  $W_R[J]$ , que aparece na eq.(3.5).

### 5.1.4 O propagador do quark não-perturbativo na aproximação de 1 loop com a função gaussiana do propagador do glúon

Seguindo o mesmo raciocínio, iremos calcular nesta Seção a auto-energia do quark em um modelo onde o propagador do glúon é substituído por

$$\frac{-i}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \zeta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab} \longrightarrow -i \frac{\beta^2}{(B\pi)^{1/2}} e^{-\frac{k^2}{B^2}} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \zeta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab}, \quad (5.20)$$

onde  $B$  é a largura da gaussiana.

Partindo da eq.(5.9), com a mudança citada acima, temos

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{UR} &= -iA' \langle \bar{\psi}\psi \rangle \int d^4k \delta^4(p+k) \frac{\beta^2}{(B\pi)^{1/2}} e^{-\frac{k^2}{B^2}} \gamma^\mu \gamma^\nu \left( g_{\mu\nu} - (1 - \zeta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \\ &= -iA' \langle \bar{\psi}\psi \rangle (d-1+\zeta) \frac{\beta^2}{(B\pi)^{1/2}} e^{-\frac{p^2}{B^2}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde  $A' = (g_s^0)^2 \frac{N^2-1}{2N} \frac{1}{4N}$ , portanto, obtemos que

$$\Sigma_{UR}(p^2) = (g_s^0)^2 \frac{N^2-1}{2N} \frac{1}{4N} \langle \bar{\psi}\psi \rangle (d-1+\zeta) \frac{\beta^2}{(B\pi)^{1/2}} e^{-\frac{p^2}{B^2}}. \quad (5.22)$$

Note que, para esse modelo, recuperamos o resultado da eq.(5.17) se fizermos o limite de  $B$  tendendo a zero, isto é:

$$\lim_{B \rightarrow 0} \frac{\beta^2}{(B\pi)^{1/2}} e^{-p^2/B^2} = \beta^2 \delta^4(p), \quad (5.23)$$

que recai na eq.(5.17). Note que nenhum dos dois modelos reproduz o resultado obtido através da ESD.

Além da inconsistência entre a OPE e as ESD para o propagadores citados acima, podemos salientar que, infelizmente, nenhuma dessas formas resolve o problema da massa dos férmions em “Extended Technicolor” [35].

## Capítulo 6

### O grupo de renormalização

Todos os cálculos concluídos até o momento foram apenas para a primeira ordem da constante de acoplamento  $\alpha_s$  (exceto nossa estimativa de um dos diagramas de dois loops). No entanto, queremos saber como o resultado obtido é modificado quando se leva em conta os diagramas de Feynman de ordens superiores a  $\alpha_s$ . Uma maneira de analisar isto seria calcular propriamente os diagramas de ordens cada vez maiores. Porém, como estamos apenas interessados em estudar o comportamento da auto-energia do quark no GCM pela OPE, podemos utilizar o método do Grupo de Renormalização, que incrementa o nosso resultado, levando em consideração contribuições logarítmicas de ordens maiores da função de Green, de acordo com a escala de renormalização requerida.

Neste Capítulo, mostramos, portanto, os efeitos do Grupo de Renormalização sobre os resultados obtidos no Capítulo anterior.

#### 6.1 A equação de Callan-Symanzik

O estudo do comportamento de escala em teoria de campos, motivada pelas observações experimentais da escala de Bjorken, no espalhamento inelástico elétron-próton, deram origem às equações de Callan-Symanzik, que expressam a invariância do modo em que a renormalização das funções de Green, a curtas distâncias, são feitas. Novos métodos, que se aplicam a funções de Green arbitrárias, foram formuladas por 't Hooft [36] e Weinberg [37]. Nós apenas damos uma breve descrição aqui.

A idéia central dos métodos de 't Hooft e Weinberg é tratar a renormalização da constante de acoplamento, da massa e do gauge na mesma *linguagem*, ou seja, todas elas serão tratadas como constantes de acoplamento dos vários termos de interação que aparecem na lagrangeana efetiva.

O ponto de partida, para se obter uma expressão em que as funções de Green sejam invariantes pela maneira a qual a renormalização foi feita, é relacionar as funções de Green nua ( $\Gamma_0$ ) com as renormalizadas ( $\Gamma$ )\*. Deste modo, escrevemos

$$\Gamma(p_1, \dots, p_N; \alpha_s, \zeta, m_i; \mu) = \mathcal{Z}_r(\mu, \epsilon) \Gamma_0(p_1, \dots, p_N; \alpha_s^0, \zeta_0, m_i^0; \epsilon), \quad (6.1)$$

onde  $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ ,  $\zeta$  é o parâmetro de gauge,  $\mu$  é a escala de renormalização,  $\mathcal{Z}_r$  é o produto das renormalizações dos campos ( $\mathcal{Z}_r = \mathcal{Z}_{3YM}^{-n_{YM}/2} \mathcal{Z}_{2F}^{-n_F/2} \mathcal{Z}_3^{-\tilde{n}/2}$ ) e  $\epsilon$  o fator de regularização, sendo  $\tilde{n}$ ,  $n_{YM}$  e  $n_F$ , respectivamente, o número de linhas externas do campo fantasma, glúon e quark, associados com uma escolha específica das funções de Green. Veja que tanto o  $\Gamma$  renormalizado como  $\mathcal{Z}_r$  dependem de  $\mu$ . No entanto, o  $\Gamma_0$  não tem uma dependência neste parâmetro de escala  $\mu$ . Sendo assim, podemos escrever que

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_0(p_1, \dots, p_N; \alpha_s^0, \zeta_0, m_i^0; \epsilon) = 0. \quad (6.2)$$

Depois de diferenciar a eq.(6.1) com relação a  $\mu$  e multiplicá-la por  $\mu$ , chegamos à seguinte equação:

$$\mu \left( \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{d\alpha_s}{d\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + \frac{d\zeta}{d\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \sum_i m_i \frac{1}{m_i} \frac{dm_i}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m_i} \right) \Gamma = \frac{\mu}{\mathcal{Z}_r} \frac{d\mathcal{Z}_r}{d\mu} \Gamma. \quad (6.3)$$

Introduzindo um conjunto de funções universais<sup>†</sup>, em princípio funções de  $\alpha_s$ ,  $\zeta$ ,

---

\*É importante salientar aqui que a constante de proporcionalidade destas funções gama não é a mesma que aparece na teoria de perturbação renormalizada, que utiliza a condição específica que o polo do propagador é a massa física descrita pelo campo, enquanto que neste Capítulo utilizaremos um parâmetro de escala  $\mu$  arbitrário.

<sup>†</sup>Essas funções são universais no sentido que a eq.(6.3) é válida para uma função de Green  $\Gamma(p_1, \dots, p_N; \alpha_s, \zeta, m_i; \mu)$  arbitrária, que tenha as mesmas funções coeficientes das derivadas parciais de  $\Gamma$ .

$x_i = m_i/\mu$  e  $\epsilon$ , expressas por:

$$\mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} = \alpha_s \beta(\alpha_s, x_i, \zeta; \epsilon); \quad (6.4)$$

$$\frac{\mu}{m_i} \frac{dm_i}{d\mu} = -\gamma_i(\alpha_s, x_j, \zeta; \epsilon); \quad (6.5)$$

$$\mu \frac{d\zeta}{d\mu} = \beta_\zeta(\alpha_s, x_i, \zeta; \epsilon); \quad (6.6)$$

$$\frac{\mu}{\mathcal{Z}_{3YM}} \frac{d\mathcal{Z}_{3YM}}{d\mu} = \gamma_{YM}(\alpha_s, x_i, \zeta; \epsilon); \quad (6.7)$$

$$\frac{\mu}{\mathcal{Z}_{2F}} \frac{d\mathcal{Z}_{2F}}{d\mu} = \gamma_F(\alpha_s, x_i, \zeta; \epsilon); \quad (6.8)$$

$$\frac{\mu}{\mathcal{Z}_3} \frac{d\mathcal{Z}_3}{d\mu} = \tilde{\gamma}(\alpha_s, x_i, \zeta; \epsilon), \quad (6.9)$$

podemos reescrever a eq.(6.3) como

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \alpha_s \beta \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + \beta_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \sum_i m_i \gamma_i \frac{\partial}{\partial m_i} - \gamma_r \right) \Gamma = 0, \quad (6.10)$$

onde  $-2\gamma_r = n_{YM}\gamma_{YM} + n_F\gamma_F + \tilde{n}\tilde{\gamma}$ .

Sabe-se da renormalização da teoria que estas funções universais  $\alpha_s\beta$ ,  $\beta_\zeta$ ,  $\gamma_i$ ,  $\gamma_{YM}$ ,  $\gamma_F$  e  $\tilde{\gamma}$ , não podem ser singulares quando tomamos  $\epsilon \rightarrow 0$ , e a forma explícita destas funções (nas variáveis  $\alpha_s$ ,  $x_i$  e  $\zeta$ ) depende do esquema de renormalização utilizado.

Além da relação satisfeita por  $\Gamma$  na eq.(6.10), existe uma outra, que vem da análise dimensional. Se reescalarmos todos os momentos  $p_1, \dots, p_N$  que aparecem em  $\Gamma(p_1, \dots, p_N; \alpha_s, \zeta, m_i; \mu)$  com um fator adimensional  $\lambda$  e chamarmos  $D$  a dimensão de  $\Gamma$ , em unidades de massa, certamente

$$\Gamma(\lambda p_j; \alpha_s, \zeta, m_i; \mu) \equiv \mu^D F \left( \lambda^2 \frac{p_k p_l}{\mu^2}; \alpha_s, \zeta, \frac{m_i}{\mu} \right), \quad (6.11)$$

onde  $F$  é agora uma função de variáveis adimensionais, com os índices da equação acima,  $(j, k, l)$ , variando de 1 a  $N$ . Do Teorema de Euler de funções homogêneas [38], tiramos que

$$\left( \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \sum_i m_i \frac{\partial}{\partial m_i} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - D \right) \Gamma(\lambda p_i; \alpha_s, \zeta, m_j; \mu) = 0. \quad (6.12)$$

De fato, na ausência de uma teoria dinâmica para as funções de Green, a equação acima deveria dar toda a informação sobre o comportamento de escala



destas funções. Porém, como não é o nosso caso, devemos combinar esta equação com a eq.(6.10), chegando à seguinte expressão:

$$\left( \beta(\alpha_s) \alpha_s \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + \beta_\zeta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \zeta} - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \sum_i (1 + \gamma_i(\alpha_s)) x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + D - \gamma_r(\alpha_s) \right) \Gamma_R = 0, \quad (6.13)$$

onde  $\Gamma_R = \Gamma(\lambda p_i; \alpha_s, \zeta, m_j; \mu)$ . A eq.(6.13), conhecida como equação do grupo de renormalização ou Callan-Symanzik, dá o comportamento das funções de Green quando todos os momentos são escalados por um fator comum, para um  $\mu$  fixo.

A solução geral da eq.(6.13) pode ser obtida pelo método das características para solução de equações diferenciais parciais lineares [38]. Resolve-se, então, o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d\bar{\alpha}_s(\ln \lambda, \alpha_s)}{d \ln \lambda} = \bar{\alpha}_s \beta(\bar{\alpha}_s), \text{ onde } \bar{\alpha}_s(0, \alpha_s) = \alpha_s; \quad (6.14)$$

$$\frac{d\bar{x}_i(\ln \lambda, \alpha_s)}{d \ln \lambda} = -(1 + \gamma_i(\bar{\alpha}_s)) \bar{x}_i, \text{ onde } \bar{x}_i(0, \alpha_s) = x_i; \quad (6.15)$$

$$\frac{d\bar{\zeta}(\ln \lambda, \alpha_s)}{d \ln \lambda} = \beta_\zeta(\bar{\alpha}_s), \text{ onde } \bar{\zeta}(0, \alpha_s) = \zeta, \quad (6.16)$$

e a solução geral da eq.(6.13) pode ser expressa em termos da solução das equações acima, que é

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda p_i; \zeta, x_i; \mu) &= \lambda^D \Gamma(p_i; \bar{\alpha}_s, \bar{\zeta}, \bar{x}_i; \mu) \exp \left\{ - \int_0^{\ln \lambda} d(\ln \lambda') \gamma_r(\ln \lambda', \alpha_s) \right\} \\ &= \Gamma(p_i; \bar{\alpha}_s, \bar{\zeta}, \bar{x}_i; \mu) \exp \left\{ \int_0^{\ln \lambda} d(\ln \lambda') (D - \gamma_r) \right\}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Veja que as equações do grupo de renormalização mudam os coeficientes da OPE, eq.(5.1), por um fator  $\exp\{-\int_0^{\ln \lambda} d(\ln \lambda') (D - \gamma_r(\ln \lambda', \alpha_s))\}$  que depende da dimensão anômala do operador da teoria<sup>†</sup>,  $\gamma_r$ . Portanto, no cálculo da auto-energia do quark, o coeficiente da expansão é modificado por

$$C_r(q) \rightarrow C_r(q; g_s^2(\mu)) = C_r(q) \exp \left\{ - \int_0^{\ln \lambda} d(\ln \lambda') (D + \gamma_c(\ln \lambda', \alpha_s)) \right\}, \quad (6.18)$$

<sup>†</sup>Pois, segundo a eq.(6.17) temos que o  $\Gamma$  de variáveis efetivas é dado pelo antigo  $\Gamma$  multiplicado por  $\exp\{\int_0^{\ln \lambda} d(\ln \lambda') (\gamma_r(\ln \lambda', \alpha_s) - D)\}$ . Portanto, se queremos levar em conta contribuições das funções de Green de ordens superiores, devemos modificar todos os coeficientes que aparecem na eq.(5.1) por este fator.

que é similar ao obtido por Politzer [2] ( $\gamma_c$  é a dimensão anômala do operador  $\bar{\psi}\psi$ , que usamos nos nossos cálculos não-perturbativos).

### 6.1.1 Cálculo da dimensão anômala do operador $\bar{\psi}\psi$

Para encontrarmos a expressão para a dimensão anômala de  $\bar{\psi}\psi$ , usaremos um argumento muito comum, isto é:

“A dimensão anômala de operadores conservados, como por exemplo correntes ou o tensor energia-momento, é nula” [39].

Fisicamente, deve-se esperar isto, pois tanto a carga como a energia de tais operadores devem ser independentes do parâmetro da escala de renormalização  $\mu$ .

De acordo com o que vimos no Capítulo 3, além do fato que  $m\bar{\psi}\psi$  é parte do tensor energia-momento, segue que  $m\bar{\psi}\psi$  é um invariante do grupo de renormalização<sup>§</sup> e a dimensão anômala de  $\bar{\psi}\psi$  é a mesma que a da massa com sinal trocado.

Lembramos que, no nosso caso, estamos interessados apenas na QCD com massas iguais a zero. No entanto, obteremos  $\gamma_{\bar{\psi}\psi}$ <sup>¶</sup> a partir do cálculo de  $\gamma_m$ , que definimos como sendo a dimensão anômala da massa, assumindo  $m_0 \neq 0$ .

Da eq.(6.5), temos que:

$$-\gamma_m(\alpha_s) = \frac{\mu}{m} \frac{dm}{d\mu}. \quad (6.19)$$

No esquema de regularização- $\epsilon$

$$m_0 = \mathcal{Z}_m m, \quad (6.20)$$

onde  $\mathcal{Z}_m$  é a constante de renormalização da massa e, assim, podemos escrever que

$$-\gamma_m(\alpha_s) = \frac{\mu}{m} \frac{d\mathcal{Z}_m^{-1}}{d\mu} m_0 = \mathcal{Z}_m \mu \frac{d\mathcal{Z}_m^{-1}}{d\mu}. \quad (6.21)$$

Para a ordem mais baixa, a única dependência de  $\mathcal{Z}_m^{-1}$  em  $\mu$  é via a constante de acoplamento e, então,

$$\mu \frac{d\mathcal{Z}_m^{-1}}{d\mu} = \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\alpha_s, \epsilon) \alpha_s \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right) \mathcal{Z}_m^{-1}, \quad (6.22)$$

<sup>§</sup>Na prática, já havíamos discutido isto no Capítulo 3 (vide eq.(3.19) à eq.(3.21)).

<sup>¶</sup>O cálculo desta dimensão anômala é feita propriamente por Peskin e Schroeder [34].

onde usamos a eq.(6.4). Agora, usando o fato que a ordem mais baixa (veja no Apêndice C a prova desta afirmação)  $\beta$  é dado por

$$\beta(\alpha_s, \epsilon)\alpha_s = -\epsilon\alpha_s + \alpha_s\beta(\alpha_s), \quad (6.23)$$

temos

$$\mu \frac{d\mathcal{Z}_m^{-1}}{d\mu} = \left( -\alpha_s \epsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + \beta(\alpha_s) \alpha_s \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right) \mathcal{Z}_m^{-1}. \quad (6.24)$$

Usando a definição que  $\beta(\alpha_s) \equiv 2\alpha_s \frac{\partial \mathcal{Z}^{(1)}}{\partial \alpha_s}$ , onde  $\mathcal{Z}^{(1)}$  é o primeiro termo da expansão de  $\mathcal{Z}_m$  e combinando as eqs.(6.20)-(6.22), temos

$$-\gamma(\alpha_s) \mathcal{Z}_m^{-1} = -\epsilon \alpha_s \frac{\partial \mathcal{Z}_m^{-1}}{\partial \alpha_s} + \beta(\alpha_s) \alpha_s \frac{\partial \mathcal{Z}_m^{-1}}{\partial \alpha_s}, \quad (6.25)$$

mas como  $\mathcal{Z}_m = 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{\epsilon} \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{N^2-1}{2N} + \dots$ , então

$$\begin{aligned} -\gamma_m(\alpha_s) &= \epsilon \alpha_s \mathcal{Z}_m^{-1} \frac{\partial \mathcal{Z}_m}{\partial \alpha_s} - \beta(\alpha_s) \alpha_s \mathcal{Z}_m^{-1} \frac{\partial \mathcal{Z}_m}{\partial \alpha_s} \\ &= -\frac{3}{2} \mathcal{Z}_m^{-1} \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{N^2-1}{2N} + \frac{3}{2} \mathcal{Z}_m^{-1} \frac{\beta(\alpha_s)}{\epsilon} \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{N^2-1}{2N} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{N^2-1}{2N} + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Portanto,

$$\gamma_m(\alpha_s) = \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{N^2-1}{2N} \frac{3}{2} \stackrel{N=3}{=} \frac{2\alpha_s}{\pi} = \frac{g_s^2}{2\pi^2}. \quad (6.27)$$

Este resultado, com o sinal trocado, introduzido na eq.(6.18), leva à modificação do coeficiente de Wilson quando são considerados os efeitos de ordem superior, ou seja, o resultado final de nosso cálculo será

$$\begin{aligned} \Sigma_{UR}(p^2) &= A \delta^4(p) \exp \left\{ - \int_0^{\ln \lambda} d(\ln \lambda') \left( -2 - \frac{g_s^2}{2\pi^2} \right) \right\} \\ &= A \delta^4(p) \exp \left\{ - \int_0^t dt' \left( -2 - \frac{g_s^2}{2\pi^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

onde  $t = \ln \lambda$  e  $A = (g_s^0)^2 \frac{N^2-1}{2N} \frac{1}{4N} \langle \bar{\psi} \psi \rangle (d-1+\zeta) \beta^2$ , o que não altera fundamentalmente o resultado anterior.

## Capítulo 7

### Conclusões

Vimos no Capítulo 2 que o modelo padrão não consegue explicar as massas tão pesadas (cerca de 1500 vezes maior), quando não temos o mecanismo de Higgs, dos bósons  $W^\pm$  e  $Z^0$ . Com isto, novas teorias com quebra dinâmica de simetria foram propostas para explicar as massas dos férmions obtidas em laboratório. No entanto, teorias que contenham quebra dinâmica de simetria dependem do conhecimento do comportamento assintótico dos quarks que, no caso do modelo de “Technicolor” e sua extensão “Extended Technicolor”, encontra uma massa para os férmions dada pela eq.(7.1)

$$m_q(M_{ETC}) \simeq m_l(M_{ETC}) \simeq \frac{g_{ETC}^2}{M_{ETC}^2} \langle \bar{T}T \rangle_{ETC}. \quad (7.1)$$

Devido a isto, vimos que para obter as massas mais pesadas dos férmions, precisamos de massas cada vez mais leves dos bósons de ETC; como consequência, para o quark top, deveríamos ter uma massa de 367 GeV para este bóson, e certamente já teríamos observado seus efeitos, se tal bóson existisse.

As principais tentativas para solucionar este problema tratam de modificar o comportamento da auto-energia dos techniférmions, porém esta auto-energia é deduzida do que se conhece da auto-energia dos quarks, que não é bem conhecida na região não-perturbativa. No Capítulo 2, estudamos o modelo do GCM, que tenta explicar a fenomenologia da QCD para baixos momentos, ou seja na região não-perturbativa. Vimos que este modelo pode ser visto como um truncamento da QCD, impondo condições extras que vêm de uma análise experimental dos dados obtidos em laboratório. Com isto, um dos modelos propostos para o propagador do

glúon foi

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i\beta^2\delta^4(k) \left( g_{\mu\nu} - (1 - \zeta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab}, \quad (7.2)$$

que apresenta um singularidade infravermelha  $\delta^4(k)$ . Com este propagador para o glúon, calculamos no Capítulo 5 a auto-energia de um quark, utilizando a técnica da OPE, estudada no Capítulo 4, encontrando

$$\Sigma_{UR}(p) = (g_s^0)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{4N} \langle \bar{\psi}\psi \rangle (d - 1 + \zeta) \beta^2 \delta^4(p). \quad (7.3)$$

Para sabermos o que está acontecendo ao certo, próximo da singularidade do propagador tipo  $\delta^4(k)$  utilizado, usamos uma versão mais suave para este modelo: um propagador gaussiano da forma

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i \frac{\beta^2}{(B\pi)^{1/2}} e^{-\frac{k^2}{B}} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \zeta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab}. \quad (7.4)$$

Com este propagador, obtemos a expressão para a auto-energia do quark da forma

$$\Sigma_{UR}(p^2) = (g_s^0)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{4N} \langle \bar{\psi}\psi \rangle (d - 1 + \zeta) \frac{\beta^2}{(B\pi)^{1/2}} e^{-\frac{p^2}{B}}. \quad (7.5)$$

Foi observado que, se fizermos o limite de  $B$  tender a zero, recuperamos o resultado obtido pela auto-energia quando utilizado o propagador tipo  $\delta^4(k)$  para o propagador do glúon.

Com estes resultados mostrados aqui, vemos que nenhum destes modelos consegue reproduzir o resultado obtido através das ESD dada pelas eq.(7.6) e eq.(7.7)

$$A(p^2) = \begin{cases} 2, & p^2 \leq \frac{\alpha^2}{4} \\ \frac{1}{2}[1 + (1 + \frac{2\alpha^2}{p^2})^{1/2}], & p^2 \geq \frac{\alpha^2}{4} \end{cases} \quad (7.6)$$

$$B(p^2) = \begin{cases} (\alpha^2 - 4p^2)^{1/2}, & p^2 \leq \frac{\alpha^2}{4} \\ 0, & p^2 \geq \frac{\alpha^2}{4}, \end{cases} \quad (7.7)$$

onde  $\Sigma(p^2) = B(p^2)/A(p^2)$ .

No intuito de verificar se as equações do Grupo de Renormalização modificam expressivamente estes resultados, vimos que os coeficientes da OPE e conseqüentemente nosso resultado, no caso do cálculo utilizando o propagador tipo

$\delta^4(k)$  para o glúon, é modificado para

$$\Sigma_{UR}(p^2) = (g_s^0)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{4N} \langle \bar{\psi}\psi \rangle (d - 1 + \zeta) \beta^2 \delta^4(p) \exp \left\{ - \int_0^t dt' \left( -2 - \frac{g_s^2}{2\pi^2} \right) \right\}. \quad (7.8)$$

Em suma, conhecer o comportamento assintótico da auto-energia do quark é importante para teorias com quebra dinâmica de simetria. Devido a isso, calculamos essa auto-energia através da OPE no caso do propagador do glúon apresentar uma singularidade da forma  $\delta^4(k)$ , pois esse propagador obteve bastante sucesso ao explicar a física hadrônica no contexto do GCM. No entanto, verificamos que o resultado da OPE é inconsistente com as soluções das ESD para esse propagador, e acreditamos que esse resultado seja uma limitação própria da OPE.

# Apêndice A

## Notações e convenções

A convenção adotada por todo este trabalho é a mesma utilizada por Bjorken e Drell [23].

### A.1 Unidades

As unidades adotadas pelos Físicos de Partículas são conhecidas como unidades naturais, onde os valores das constantes  $\hbar$  e  $c$  são

$$\hbar = c = 1. \tag{A.1}$$

Neste sistema,

$$[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}. \tag{A.2}$$

Veja que, neste sistema, a massa  $m$  de uma partícula é, portanto, igual à sua energia de repouso  $mc^2 \stackrel{c=1}{=} m$ , e é também igual ao inverso do comprimento de onda de Compton,  $mc/\hbar \stackrel{\hbar=c=1}{=} m$ .

### A.2 Notações e convenções

Convenciona-se que os índices gregos, que variam de 0 a 3, denotam as componentes de Lorentz ou Dirac, enquanto que os índices romanos  $i, j$  e  $k$  denotam as três componentes espaciais de um vetor de Lorentz. Já os índices  $\alpha$  e  $\beta$ , que variam de 1 a 3, denotam as componentes de cor e os índices  $a, b$  e  $c$  denotam os geradores do grupo  $SU(3)$  de cor. Seguindo a convenção de Einstein, índices repetidos devem ser somados. Trivetores são denotados em negrito.



O espaço é chamado *espaço de Minkowski*, onde a métrica  $g_{\mu\nu}$  é definida da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

As coordenadas deste espaço-tempo  $(t, x, y, z)$  são denotadas por um quadrivetor contravariante

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z). \quad (\text{A.4})$$

O quadrimomento é definido analogamente como

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z), \quad (\text{A.5})$$

O quadrivetor covariante  $x_\mu$  pode ser obtido através da utilização da métrica, isto é

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -x, -y, -z). \quad (\text{A.6})$$

O produto escalar de um quadrivetor é definido por

$$x \cdot y \equiv x_\mu y^\mu = x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad (\text{A.7})$$

Para o caso do produto escalar de um quadrimomento, temos que

$$p_1^\mu \cdot p_{2\mu} = E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2. \quad (\text{A.8})$$

O operador do momento no espaço das coordenadas é denotado por

$$p^\mu = i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \left( i \frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{i} \nabla \right) \equiv i \partial^\mu. \quad (\text{A.9})$$

### A.3 Matrizes

As matrizes de Dirac,  $\gamma^\mu$ , satisfazem a relação de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.10})$$

Elas estão relacionados com  $\alpha$  e  $\beta$  por

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \beta; \\ \gamma^i &= \beta\alpha^i,\end{aligned}\tag{A.11}$$

onde  $(\gamma^0)^2 = 1$  e  $\alpha = \gamma_5\sigma$ .

A representação padrão para essas matrizes é dada por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\tag{A.12}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},\tag{A.13}$$

onde  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ , algumas vezes denotado por  $I$ , e  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli, dadas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} e \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\tag{A.14}$$

A matriz  $\gamma^5$  é definida como

$$\gamma^5 = \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\tag{A.15}$$

e sua representação padrão é dada por

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{A.16}$$

Algumas propriedades destas matrizes gama são:

$$(\gamma^5)^2 = (\gamma^\mu)^2 = 1;\tag{A.17}$$

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0;\tag{A.18}$$

$$\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i;\tag{A.19}$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0.\tag{A.20}$$

O produto escalar de uma matriz  $\gamma_\mu$  por um quadrivetor  $A^\mu$  é dado por

$$\gamma_\mu A^\mu \equiv \not{A} = \gamma_0 A_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}.\tag{A.21}$$

A.4 Propriedades do traço das matrizes  $\gamma$ 

$$\begin{aligned}
Tr(1) &= 4; \\
Tr(AB) &= Tr(BA); \\
Tr(\gamma_\mu) &= 0; \\
Tr(\text{número ímpar de } \gamma's) &= 0; \\
Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= 4g_{\mu\nu}; \\
Tr(a \not{b}) &= 4a \cdot b; \\
Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) &= 4[g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}]; \\
Tr(\gamma_5) &= 0; \\
Tr(\gamma_5 \gamma_\mu) &= 0; \\
Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) &= 0; \\
Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) &= 0; \\
Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) &= 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

## Apêndice B

### Notações no espaço Euclidiano

#### B.1 Notações

No espaço Euclidiano usamos uma métrica definida positiva para os quadrivetores, de modo que

$$a \cdot b = \delta_{\mu\nu} a_\mu b_\nu = \sum_{\mu=1}^4 a_\mu b_\mu, \quad (\text{B.1})$$

onde  $\delta_{\mu\nu}$  é o delta de Kronecker.

Neste espaço, as matrizes  $\gamma$  são definidas por

$$\gamma_0^E = \gamma^0; \quad (\text{B.2})$$

$$\gamma_i^E = -i\gamma^i. \quad (\text{B.3})$$

Note que elas são hermitianas, isto é

$$(\gamma_0^E)^\dagger = \gamma_0^E; \quad (\text{B.4})$$

$$(\gamma_i^E)^\dagger = \gamma_i^E, \quad (\text{B.5})$$

e satisfazem

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (\text{B.6})$$

A matriz  $\gamma_5^E$  é definida por

$$\gamma_5^E = -\gamma_1^E \gamma_2^E \gamma_3^E \gamma_0^E. \quad (\text{B.7})$$

Com estas definições um quadrivetor tipo-espaço,  $p_\mu$ , tem  $p^2 > 0$ .

## B.2 Continuação analítica para o espaço Euclidiano

Para obtermos as expressões, no espaço Euclidiano, para o funcional gerador, para a ação e outros, precisamos fazer uma continuação analítica nas variáveis temporais,  $x^0$ :

$$x^0 \rightarrow -ix_0^E, \quad (\text{B.8})$$

com

$$x^i \rightarrow x_i^E. \quad (\text{B.9})$$

Segue da eq.(B.8) e eq.(B.9) que

$$p^\mu = \left( i \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{1}{i} \nabla \right) \xrightarrow{\text{Euclidiano}} \left( i \left[ i \frac{\partial}{\partial x_0} \right], -[i \nabla] \right) \equiv (ip_0^E, -\mathbf{p}^E). \quad (\text{B.10})$$

Veja que a continuação analítica no espaço dos momentos tem a seguinte regra:

$$p^0 \rightarrow ip_0^E; \quad (\text{B.11})$$

$$p^i \rightarrow -p_i^E. \quad (\text{B.12})$$

Com estas regras, podemos fazer as seguintes transições:

$$\int d^4x \rightarrow -i \int d^4x^E; \quad (\text{B.13})$$

$$A \rightarrow -i\gamma^E \cdot A^E; \quad (\text{B.14})$$

$$A_\mu B^\mu \rightarrow -A^E \cdot B^E; \quad (\text{B.15})$$

$$k_\mu x^\mu \rightarrow k^E \cdot x^E; \quad (\text{B.16})$$

$$k_\mu q^\mu \rightarrow -k^E \cdot q^E; \quad (\text{B.17})$$

$$\not{k} \rightarrow i\gamma^E \cdot k^E; \quad (\text{B.18})$$

$$\not{\partial} \rightarrow i\gamma^E \cdot \partial^E; \quad (\text{B.19})$$

$$\int d^4k \rightarrow i \int d^4k^E. \quad (\text{B.20})$$

## Apêndice C

### Cálculo das equações referidas no texto

#### C.1 Cálculo da eq.(4.29)

Partindo da identidade

$$A_\mu^a(y) = \partial_\mu(y^\rho A_\rho^a(y)) - y^\rho \partial_\mu A_\rho^a(y), \quad (\text{C.1})$$

vemos que o primeiro termo se anula devido ao gauge  $x^\mu A_\mu^a(x) = 0$  e então escrevemos o segundo termo em função de  $G_{\rho\mu}^a$ :

$$-y^\rho \partial_\mu A_\rho^a(y) = -y^\rho \partial_\rho A_\mu^a(y) + y^\rho G_{\rho\mu}^a(y). \quad (\text{C.2})$$

Agora, combinando com a eq.(C.1) obtemos:

$$A_\mu^a(y) + y^\rho \partial_\rho A_\mu^a(y) = y^\rho G_{\rho\mu}^a(y). \quad (\text{C.3})$$

Substituindo  $y = \alpha x$ , vemos imediatamente que o lado esquerdo da eq.(C.3) se reduz a uma derivada total  $\frac{d}{d\alpha}(\alpha A_\mu^a(\alpha x))$ ; depois, integrando em  $\alpha$  de 0 a 1, temos que

$$\int_0^1 d\alpha \frac{d}{d\alpha} [\alpha A_\mu^a(\alpha x)] = \int_0^1 d\alpha \alpha x^\rho G_{\rho\mu}^a(\alpha x), \quad (\text{C.4})$$

chegando à eq.(4.29).

#### C.2 Cálculo da eq.(4.31)

Para chegarmos a esta expressão, expandimos o 4-potencial da eq.(4.28)

$$x^\mu [A_\mu^a(0) + x^{\sigma_1} \partial_{\sigma_1} A_\mu^a(0) + (1/2)x^{\sigma_1} x^{\sigma_2} \partial_{\sigma_1} \partial_{\sigma_2} A_\mu^a(0) + \dots] = 0. \quad (\text{C.5})$$

Agora note que

$$x^\mu A_\mu^a(0) = 0;$$

$$x^\mu x^{\sigma_1} \partial_{\sigma_1} A_\mu^a(0) = 0; \quad (\text{C.6})$$

$$(1/2)x^\mu x^{\sigma_1} x^{\sigma_2} \partial_{\sigma_1} \partial_{\sigma_2} A_\mu^a(0) = 0; \\ \vdots \quad (\text{C.7})$$

o que implica na eq.(4.31), pois, para o primeiro termo,

$$x^{\sigma_1} D_{\sigma_1}(0) G_{\rho\mu}^a(0) = x^{\sigma_1} \partial_{\sigma_1} G_{\rho\mu}^a(0) - (1/2)ig\lambda_a [A_{\sigma_1}^a(0)x^{\sigma_1}] G_{\rho\mu}^a(0) \\ = x^{\sigma_1} \partial_{\sigma_1} G_{\rho\mu}^a(0), \quad (\text{C.8})$$

para o segundo,

$$x^{\sigma_1} x^{\sigma_2} D_{\sigma_1}(0) D_{\sigma_2}(0) G_{\rho\mu}^a(0) = x^{\sigma_1} x^{\sigma_2} D_{\sigma_1}(0) \partial_{\sigma_2} G_{\rho\mu}^a(0) \\ = x^{\sigma_1} x^{\sigma_2} \partial_{\sigma_1} \partial_{\sigma_2} G_{\rho\mu}^a(0), \quad (\text{C.9})$$

e, assim, por indução chegamos à expressão desejada.

### C.3 Cálculo da eq.(6.23)

Lembrando que (no esquema de regularização- $\epsilon$ )

$$\alpha_s^0 = \frac{g_s^{02}}{4\pi} = \mu^\epsilon \alpha_s \mathcal{Z}_g^2 \quad (\text{C.10})$$

e também que

$$\alpha_s \beta(\alpha_s, \epsilon) = \mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} (\alpha_s^0 \mu^{-\epsilon} \mathcal{Z}_g^{-2}), \quad (\text{C.11})$$

temos

$$\alpha_s \beta(\alpha_s, \epsilon) = -\epsilon \alpha_s - 2\alpha_s \frac{1}{\mathcal{Z}_g} \mu \frac{d\mathcal{Z}_g}{d\mu}. \quad (\text{C.12})$$

Multiplicando ambos os lados da eq.(C.12) por  $\mathcal{Z}_g$  ficamos com

$$(\alpha_s \beta(\alpha_s, \epsilon) + \epsilon \alpha_s + 2\alpha_s \mu \frac{d}{d\mu}) \mathcal{Z}_g = 0. \quad (\text{C.13})$$



Mas, o terceiro termo da eq.(C.13) pode ser escrito como  $2\alpha_s^2\beta(\alpha_s, \epsilon)\frac{\partial}{\partial\alpha_s}$  (pois na ordem mais baixa só há dependência em  $\alpha_s$ ). A eq.(C.13) passa a ser, então,

$$\left(\alpha_s\beta(\alpha_s, \epsilon) + \epsilon\alpha_s + 2\alpha_s^2\beta(\alpha_s, \epsilon)\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\right)Z_g = 0, \quad (\text{C.14})$$

que nos dá

$$\begin{aligned} \alpha_s\beta(\alpha_s, \epsilon) &= -\epsilon\alpha_s \frac{1}{1 + \frac{2\alpha_s}{Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial\alpha_s}} \\ &= -\epsilon\alpha_s \frac{1}{1 + 2\alpha_s \frac{\partial \ln Z_g}{\partial\alpha_s}} \\ &\approx -\epsilon\alpha_s \left(1 - 2\alpha_s \frac{\partial \ln Z_g}{\partial\alpha_s}\right) \\ &= -\epsilon\alpha_s + 2\alpha_s^2 \frac{\partial Z^{(1)}}{\partial\alpha_s}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Definindo  $\beta(\alpha_s) \equiv 2\alpha_s \frac{\partial Z^{(1)}}{\partial\alpha_s}$ , temos o resultado requerido.

## Referências

- [1] K. Wilson, *Phys. Rev.* **179**, (1969) 1499;
- [2] H. D. Politzer, *Nucl. Phys.* **B117**, (1976) 397;
- [3] P. Pascual e E. de Rafael, *Z. Phys. C-Particles and Fields* **12**, (1982) 127;
- [4] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D19**, (1979) 1277;  
L. Susskind, *Phys. Rev.* **D20**, (1970) 2619;
- [5] S. Dimopoulos e L. Susskind, *Nucl. Phys.* **B155**, (1979) 237;
- [6] E. Eichten e K. Lane, *Phys. Lett.* **B90**, (1980) 125;
- [7] R. S. Chivukula, *Preprint BUHEP-97-2 e hep-ph/9701322*;
- [8] A. A. Natale, *Z. Phys.* **C21**, (1984) 273;
- [9] P. C. Tandy, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **39**, (1997) 117;  
C. D. Roberts e A. G. Williams, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33**, (1994) 477;
- [10] M. R. Frank e C. D. Roberts, *Phys. Rev.* **C53**, (1996) 390;
- [11] H. J. Munczek e A. M. Nemirovsky, *Phys. Rev.* **D28**, (1983) 181;  
D. W. McKay e H. J. Munczek, *Phys. Rev.* **D55**, (1997) 2455;
- [12] R. Cahn and G. Goldhaber, *The Experimental Foundations of Particle Physics*, Cambridge University Press, (1989);
- [13] P. Langacker, M. X. Luo and A. K. Mann, *Rev. Mod. Phys.* **64**, (1992) 87;
- [14] P. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **12**, (1964) 132;  
Y. Nambu, *Phys. Rev.* **117**, (1959) 648;

- [15] J. F. Donoghue, E. Golowich and B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press, (1994)
- [16] R. Dashen and h. Neuberger, *Phys. Rev. Lett.* **50**, (1983) 1897;
- [17] R. S. Chivukula and D. Kominis, *Phys. Lett.* **B304**, (1993) 152;
- [18] K. Lane, *hep-ph/9401324 v2*, (1994);
- [19] Particle Data Group, K. Hikasa et al., *Phys. Rev.* **D45**, (1992) 51;
- [20] A. Manohar and H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B234**, (1984) 189;  
H. Georgi and L. Randall, *Nucl. Phys.* **B276**, (1986) 241;
- [21] H. Pagels, *Phys. Rev.* **D14**, (1976) 2747;  
H. Pagels, *Phys. Rev.* **D15**, (1977) 2991;
- [22] R. T. Cahill and C. D. Roberts, *Phys. Rev.*, **D32**, (1985) 2419;
- [23] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill Book Company Vol 1 e 2, (1965);
- [24] N. Brown and M. R. Pennington, *Phys. Rev.* **D38**, (1988b) 2266;  
N. Brown and M. R. Pennington, *Phys. Lett.* **B202**, (1988a) 257;  
N. Brown and M. R. Pennington, *Phys. Rev.* **D39**, (1989) 2723;
- [25] H.D. Politzer, *Nucl. Phys.* **B117**, (1982) 397;  
J. Gaisser and H. Leutwyler, *Phys. Rep.* **87**, (1982) 77;  
L. J. Reinders, H. Rubinstein and S. Yazaki, *Phys. Rep.* **127**, (1985) 1;
- [26] M. R. Frank and T. Meissner, *Phys. Rev.* **C53**, (1996) 2410;  
P. Maris and P. C. Tandy, *Phys. Rev.* **C60**, (1999) 5214;
- [27] M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washinton, (1964);
- [28] N. N. Bogoliubov e D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience, New York, (1959);

- [29] C. Cronström, *Phys. Lett.* **90B**, (1980) 267;
- [30] M. S. Dubovikov e A. V. Smilga, *Nucl. Phys.* **B185**, (1981) 109;
- [31] V. A. Fock, *Sovj. Phys.* **12**, (1937) 404;  
V. A. Fock, *Works on Quantum Field Theory*, Leningrad University Press, Leningrad pg.150, (1957);
- [32] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, (1951) 664;  
J. Schwinger, *Particles, Sources and Fields*, Addison-Wesley, Vols. 1 e 2, (1963);
- [33] W. Hubschmid e S. Mallick, *Nucl. Phys.* **B207**, (1982) 29;
- [34] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley P. C., (1996);
- [35] E. G. S. Luna, *Tese de Mestrado*, IFT-UNESP, (2000);
- [36] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B61**, (1973) 455;
- [37] S. Weinberg, *Phys. Rev. D*, (1973) 3497;
- [38] G. Valiron, *Equations Fonctionnelles Applications*, Masson et C<sup>ie</sup> Éditeur, (1945);
- [39] D. J. Gross, *Methods in Field Theory*, eds. R. Balian and J. Zinn-Justin, (1976).

