

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JULIO DE MESQUITA FILHO"  
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

GERMAN ENRIQUE RAMOS ZAMBRANO

FORMULAÇÃO CANÔNICA NO PLANO NULO

São Paulo  
2009



**IFT**

Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.007/09

**Formulação Canônica no Plano Nulo**

German Enrique Ramos Zambrano

Orientador

*Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar*



Julho de 2009

## Agradecimentos

A Deus, que escutou minhas preces, cuidando das pessoas que mais amo e que permitiu converter em realidade o que inicialmente foi um sonho.

Ao Prof. Pimentel, por seus valiosos ensinamentos, pela paciência em me entender e, em especial pela amizade e fortaleza que me proporcionou no momento mais difícil da minha vida.

A minha mãe que sempre confiou em mim e continua acreditando em que eu poderei alcançar todas as minhas metas. A senhora não imagina quanta força e valor deu para mim durante todo este tempo.

A meus irmãos que evitaram que *el rancho* desabasse durante estes anos: muito obrigado por cuidarem e nunca abandonarem a *mi mamita* nos momentos difíceis.

A minha esposa, que tornou-se para mim o mais forte apoio, mas também no meu calcanhar de Aquiles: obrigado por me ensinar o significado do verdadeiro amor e da amizade.

À Dra. Nilce Pedro Bom pela ajuda e a amizade que deu à minha esposa e a mim durante vários anos.

Ao Rodolfo, Mario, Bufalo, Bonin e Carlos, pelas agradáveis discussões que nos levaram a interessantes resultados. Vocês me permitiram compreender a importância de trabalhar em grupo.

Ao Camilo, pela sua amizade e, sobretudo por me escutar em momentos de desabafo: muito obrigado.

À equipe de pós-graduação Luzinete, Meire, Rosane e Vilma pela competência com que realizam o seu trabalho.

Ao IFT pelo ensino durante estes anos.

Ao povo brasileiro que por meio do CNPq financiou meus estudos.

---

## Resumo

Nesta tese desenvolveremos a formulação canônica nas coordenadas do plano nulo de alguns modelos em teoria de campos em duas dimensões: modelo de Schwinger, eletrodinâmica escalar e interação de um campo de Duffin-Kemmer-Petiau com um campo eletromagnético, e de teoria de campos em quatro dimensões: eletrodinâmica escalar e espinorial, Yang-Mills, Cromodinâmica escalar e a eletrodinâmica generalizada de Podolsky.

Do fato de que nas coordenadas do plano nulo todas as Lagrangianas que descrevem os campos mencionados acima são de caráter singular, estudaremos a estrutura de vínculos segundo à abordagem de Dirac para sistemas vinculados. Ressaltaremos as principais diferenças que existem nos mesmos modelos entre as coordenadas do plano nulo e da forma instantânea.

### Palavras Chaves:

Coordenadas do plano nulo, sistemas vinculados, parênteses de Dirac.

### Áreas do conhecimento:

Teoria de Campos (1.05.03.01-3).

## Abstract

In this work, we will develop a canonical formulation on the null-plane coordinates of some models in two dimensions field theory: Schwinger model, scalar electrodynamics and Duffin-Kemmer-Petiau field interacting with an electromagnetic field, and for dimensions field theory: scalar and spinor electrodynamics, Yang-Mills, scalar Chromodynamics and Podolsky generalized electrodynamics.

Using the fact, on the null-plane coordinates, all lagrangians which describe the above fields are singular, we will study the constraint structure using the Dirac method for constrained systems. We will emphasize the principal differences between the null-plane coordinate and the instant form.

### Keywords:

Null-plane coordinates, constraint systems, Dirac brackets.

### Knowledge areas :

Field Theory (1.05.03.01-3).

# Conteúdo

## Introdução

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
	Bibliografia . . . . .	3
<b>2</b>	<b>O Plano Nulo</b>	<b>7</b>
	2.1 Álgebra de Poincaré . . . . .	11
	2.2 Problema de Valores Iniciais sobre o Plano Nulo . . . . .	12
	Bibliografia . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Formalismo hamiltoniano para sistemas singulares</b>	<b>19</b>
	3.1 Estrutura de Vínculos . . . . .	19
	3.2 Condições de Consistência . . . . .	23
	3.3 Vínculos de primeira e segunda classe . . . . .	25
	3.4 Parênteses de Dirac . . . . .	26
	3.5 Condições de Gauge . . . . .	28
	Bibliografia . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Modelos em Duas Dimensões</b>	<b>33</b>
	Bibliografia . . . . .	33
	4.1 O modelo de Schwinger no plano nulo . . . . .	35
	4.2 $SQED_2$ no plano nulo . . . . .	41
	4.3 $SQED_2$ de primeira ordem no plano nulo . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Modelos em Quatro Dimensões</b>	<b>49</b>
	Bibliografia . . . . .	49
	5.1 $SQED_4$ e $QED_4$ no plano nulo . . . . .	51
	5.2 $QCD_4$ escalar no plano nulo . . . . .	70
	5.3 Eletrodinâmica Generalizada de Podolsky no plano nulo . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>93</b>
	Bibliografia . . . . .	95



# Capítulo 1

## Introdução

Na Mecânica Clássica equações diferenciais são usadas para descrever a evolução de um sistema físico e um problema bem definido deve então incluir um conjunto de valores iniciais (posição e velocidade num instante de tempo). Na Mecânica Quântica, no entanto, a informação correspondente aos dados iniciais é fornecida quando os comutadores quânticos são especificados. No caso não relativista, as condições iniciais são determinadas sobre uma superfície de tempos iguais, onde tal superfície é única e a trajetória de cada partícula atravessa exatamente uma vez. No caso relativista alguma hiper-superfície que contenha direções tipo espaço pode ser usada para estabelecer as condições iniciais (comutadores canônicos) e é útil tentar encontrar hiper-superfícies com todas as possíveis simetrias. Dirac [2] propôs três diferentes formas dinâmicas relativistas dependentes sobre o tipo de superfícies em que os modos independentes deveriam ser estabelecidos. A primeira consiste em especificar os dados iniciais (posição e a velocidade inicial) sobre a superfície  $x^0 = cte$ . A formulação seguinte proposta por Dirac consiste em estabelecer condições iniciais sobre uma superfície tridimensional no espaço-tempo formada por um frente de onda plana avançando com a velocidade da luz, a qual Dirac denominou "frente", definida por  $x^0 + x^3 \equiv x^+$  e a dinâmica correspondente denominou como "dinâmica do frente forma". A terceira formulação consistia em estabelecer os dados iniciais sobre o ramal de um hiperboloide. Uma nota sobre nomenclatura: Em lugar de teoria de campos na frente forma encontramos também na literatura com a denominação de teoria de campos no momento infinito, teoria de campos no plano nulo, teoria de campos no cone de luz. Preferimos a denominação de teoria de campos no plano nulo.

No formalismo do plano nulo  $x^+$  é o parâmetro de evolução temporal e o problema de valores iniciais de Cauchy torna-se em um problema de valores iniciais característicos [3, 3] onde dados iniciais devem ser estabelecidos sobre um par de planos nulos que se interceptam. Este tipo de problema tem sido estudado com profundidade na relatividade geral [6]. Contudo, é possível tomar o limite de um dos planos nulos para o infinito, fato possível para espaços com  $D > 2$  enquanto que os campos vão para zero quando  $x^- \rightarrow \pm\infty$  e nenhuma derivada temporal esteja presente no termo de interação [3]. Uma importante vantagem no plano nulo é que sete dos dez geradores de Poincaré são cinemáticos enquanto que na teoria convencional só seis têm esta propriedade. Além disso, é possível verificar que as transformações das coordenadas usuais para as coordenadas do plano

nulo não são uma transformação de Lorentz e a estrutura do espaço de fase é diferente quando é comparada com o espaço de fase tradicional [7]. Uma notável característica de uma teoria relativista sobre o plano nulo é que ela dá origem a lagrangianas singulares, sistemas dinâmicos com vínculos [6] e, em geral, isto conduz a uma redução no número de operadores de campo independentes.

A dinâmica no plano nulo é historicamente relacionada a sistemas de referência de momento infinito. Fubini e Furlan [8] foram os primeiros a usar este conceito, em que o sistema de momento infinito não é um sistema de Lorentz, mas sim o limite de um sistema de referência movendo-se quase com a velocidade da luz. Foi demonstrado por eles que a álgebra de correntes era simplificada neste tipo de coordenadas. Posteriormente Weinberg [8] considerou o limite de momento-infinito dos diagramas perturbativos para teoria de mésons escalares e mostrou que a estrutura do vácuo dessas teorias é simplificada nesse limite.

Logo, Susskind [10] mostrou que os infinitos ocorridos nos geradores de Poincaré, quando eles sofrem boosts para um sistema de referência em movimento rápido, podem ser subtraídos de maneira consistente. O resultado é essencialmente uma mudança de variáveis. Susskind utiliza estas novas variáveis e chamou a atenção para o subgrupo Galileano (bi-dimensional) do grupo de Poincaré, indicando que a estrutura simples do vácuo e a cinemática não relativista da teoria no momento infinito poderia oferecer um intuitivo potencial teórico em mecânica quântica relativista. Por outro lado, também Bardakci e Halpern [12] analisaram a estrutura das teorias de momento infinito e observaram o limite de momento infinito como uma mudança de variáveis do tempo de laboratório  $t$  e coordenada espacial  $z$  para um novo "tempo"  $\tau = \frac{t+z}{\sqrt{2}}$  e um novo "espaço"  $\zeta = \frac{t-z}{\sqrt{2}}$ .

Sawicki [11] mostrou que as transformações da teoria de perturbações a tempos iguais para teoria de perturbações no plano nulo podem ser obtidas com uma simples transformação de coordenadas, sem fazer referência a um sistema de momento infinito. Kogut e Soper [12] examinaram a formulação da eletrodinâmica quântica no sistema de momento-infinito e interpretaram o seu limite como uma mudança de variáveis evitando assim o procedimento de limite. Deveu-se a eles [13], a série de perturbações ordenada temporalmente da matriz  $S$ . Drell, Levy, e Yan [14] reconheceram que o formalismo poderia servir como uma ferramenta natural para formular os modelos de quark-partons.

Por outro lado, de forma independente e quase simultaneamente com o sistema de momento-infinito, apareceram os trabalhos sobre a quantização no plano nulo propostos por Leutwyler [15], Klauder, Leutwyler e Streit [16], e por Rohrlich [17]. Em particular, eles investigaram a estabilidade do chamado "grupo pequeno" entre os geradores de Poincaré [18]. Leutwyler reconheceu a utilidade ao definir a função de onda do quark e dar um significado não ambíguo ao conceito usado no modelo de partons. Os últimos desenvolvimentos, usando o sistema de momento-infinito, mostraram que este nome é um tanto infeliz devido a que o momento total é finito e que o plano nulo é um sistema independente e covariante, assim o nome Quantização no Cone de Luz ou Plano Nulo parece ser o mais apropriado.

Chang, Root, e Yan [19] demonstraram a equivalência entre a quantização no cone de luz e a análise (padrão) covariante de Feynman. Brodsky, Roskies e Suaya [20] calcularam as correções radiativas a um-loop e demonstraram a renormalizabilidade. O método de Fock no cone de luz foi usado por Lepage e Brodsky para estudar os processos exclusivos em QCD [21]. No seus trabalhos,



Pauli e Brodsky [22], diagonalizaram explicitamente um Hamiltoniano no cone de luz usando o método de *quantização no cone de luz discreto*. Revisões detalhadas que fornecem importantes contribuições para a quantização no cone de luz podem ser encontradas em [23].

No presente trabalho usaremos as ferramentas de teoria de vínculos fornecidas por Dirac [24] para estudar a estrutura singular de algumas teorias de campos em duas e quatro dimensões nas coordenadas do plano nulo.

No capítulo 1 apresentaremos as idéias principais para desenvolver uma teoria de campos no plano nulo, deduziremos os geradores do grupo de Poincaré que deixam invariante a frente de luz, estudamos algumas características da álgebra de Poincaré e finalmente estudaremos o problema de valores iniciais característicos sobre o plano nulo.

No capítulo 2 desenvolveremos a formulação hamiltoniana para sistemas com vínculos, estudaremos suas condições de consistência e sua classificação segundo o método de Dirac. Finalmente, estudaremos os requerimentos necessários para estabelecer as condições de gauge para uma teoria que contém vínculos de primeira classe e definiremos os parênteses de Dirac entre os graus de liberdade da teoria.

No capítulo 3 realizaremos um estudo de teoria de campos em duas dimensões. Em primeiro lugar, estudaremos o modelo de Schwinger massivo [6], onde observaremos que as matrizes  $\gamma$  nas coordenadas do plano nulo tornam-se singulares e como conseqüência isto implicará na existência de vínculos adicionais de segunda classe na teoria. Condições de gauge do plano nulo serão impostas para determinar a álgebra de Lie graduada da teoria. Posteriormente, analisaremos a eletrodinâmica escalar em 2D [25], mostraremos como um dos vínculos de primeira classe da teoria é modificado devido a uma contribuição do setor escalar, deduziremos os parênteses de Dirac da teoria. Finalmente, estudaremos a interação de um campo de Duffin-Kemmer-Petiau com um campo eletromagnético ou também chamada de eletrodinâmica escalar de primeiro ordem e determinaremos a estrutura dos vínculos e os parênteses de Dirac entre os graus de liberdade da teoria [26].

No capítulo 4 estudaremos a teoria de campos em quatro dimensões. Em primeiro lugar analisaremos a eletrodinâmica escalar e espinorial [6], mostraremos que a unicidade e a eliminação das transformações de gauge impróprias dependem da imposição de condições apropriadas de contorno sobre os campos. Usando a condição de gauge do plano nulo deduzimos os parênteses de Dirac entre os graus de liberdade da teoria. Posteriormente, estudaremos a estrutura hamiltoniana do campo de Yang-Mills e da Cromodinâmica escalar [6], onde mostraremos que os comutadores para os campos de Yang-Mills obtidos são aqueles reportados na literatura. Seguindo o procedimento de Dirac determinaremos a estrutura de vínculos da Cromodinâmica escalar. Os parênteses de Dirac serão calculados no gauge do plano nulo. Finalmente, desenvolveremos o formalismo canônico para a teoria eletromagnética de Podolsky [27], onde calcularemos os vínculos e deduziremos condições apropriadas de gauge que permitem determinar os correspondentes parênteses de Dirac.

E, finalmente apresentaremos as nossas perspectivas e conclusões.

# Bibliografia

- [1] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949).
- [2] A. Neville and F. Rohrlich, *Nuov. Cim.*, **A1**, 625 (1971).
- [3] T. Heinzl and E. Werner, *Z. Phys.* **C62**, 521 (1994).  
G. Domokos, in *Boulder Lectures*, Vol. XIV, 1971. Eds. A. O. Barut and W. E. Brittin, Boulder: Colorado University Press, 1972.  
P. J. Steinhardt, *Ann. Phys* **128**, 425 (1980).
- [4] R. K. Sachs, *J. Math. Phys.*, **128**, 425 (1980).
- [5] P. P. Srivastava, *Light-Front Quantization of Field Theory*, in *Topics in Theoretical Physics*, pp. 206 - 207, eds, C. C. Aguilera-Navarro, D. Galetti, B. M. Pimentel and L. Tomio, IFT - São Paulo, SP, 1995.  
P. P. Srivastava, *Light-Front Quantized of Field Theory: (an Introduction) Spontaneous Symmetry Breking, Phase Transitions in  $\phi^4$  Theory*. Lecture delivered at XIV Encontro Nacional de Partículas e Campos, Caxambu, MG, September 1993, CBPF-NF-075/93.
- [6] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Int. J. Mod. Phys.*, **E16**, 2993 (2007).  
R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *SQED<sub>4</sub> and QED<sub>4</sub> on the null-plane*, hep-th 0803.2677.  
R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Scalar QCD<sub>4</sub> on the null-plane*, hep-th 0808.2217.  
M. Huszar, *J. Phys. A: Math. Gen.* **9**, 1359(1976).  
A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1976.
- [7] S. Fubini and G. Furlan, *Physics* **1**, 229 (1965).
- [8] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **150**, 1313 (1966).
- [9] L. Susskind and G. Frye, *Phys. Rev.* **164**, 2003 (1967).  
L. Susskind, *Phys. Rev.* **165**, 1535 (1968).

- [10] K. Bardakci and M.B. Halpern, Phys. Rev. **176**, 1786 (1968).
- [11] M. Sawicki, Phys. Rev. **D44**, 2 (1991).
- [12] J. B. Kogut and D. E. Soper, Phys. Rev. **D1**, 2901 (1970).
- [13] J. D. Bjørken, J. B. Kogut, D. E. Soper, Phys. Rev. **D3**, 1382 (1971).  
D.E. Soper, Ph.D Thesis (1971), SLAC Report No. 137, 1971.  
J. B. Kogut and L. Susskind, Phys. Rep. **C8**, 75(1973).
- [14] S. D. Drell, D. Levy and T. M. Yan, Phys. Rev. **187**, 2159 (1969).  
S. D. Drell, D. Levy and T. M. Yan, Phys. Rev. **D1**, 1035 (1970).  
S. D. Drell, D. Levy and T. M. Yan, Phys. Rev. **D1**, 1617 (1970).  
S.D. Drell and T.M. Yan, Phys. Rev. Lett. **24**, 181(1970).
- [15] H. Leutwyler, Acta Phys. Austriaca, Suppl. **5** , 320 (1968).  
H. Leutwyler, in Springer Tracts in Modern Physics, No. 50, (Springer, New York), p. 29 (1969).
- [16] J. R. Klauder, H. Leutwyler, and L. Streit, Nuovo Cimento **59**, 315 (1969).
- [17] F. Rohrlich, Acta Phys. Austriaca, Suppl. VIII, 2777 (1971).
- [18] H. Leutwyler, Phys. Lett. **B48**, 45 (1974).  
H. Leutwyler, Phys. Lett. **B48**, 431 (1974).  
H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B76**, 413 (1974).  
H. Leutwyler and J. Stern, Ann. Phys. **112**, 94 (1978).
- [19] S. J. Chang, Phys. Rev. **D13**, 2778 (1976).  
S.J. Chang and T.M. Yan, Phys. Rev. **D7**, 1147 (1973).  
S.J. Chang, R.G. Root, and T.M. Yan, Phys. Rev. **D7**, 1133 (1973).  
S.J. Chang, R.G. Root, and T.M. Yan, Phys. Rev. **D7**, 1133 (1973).
- [20] S.J. Brodsky, R. Roskies and R. Suaya, Phys. Rev. **D8**, 4574 (1973).
- [21] S. J. Brodsky and G. P. Lepage, in *Perturbative Quantum Chromodynamics*, Eds. A. H. Mueller, World Scientific, Singapore, 1989.  
G.P. Lepage and S.J. Brodsky, Phys. Lett. **87B**, 359 (1979)  
G. P. Lepage and S. J. Brodsky, Phys. Rev. Lett. **43**, 545, 1625(E) (1979).  
G.P. Lepage and S.J. Brodsky, Phys. Rev. **D22**, 2157 (1980).

- G. P. Lepage, S. J. Brodsky, T. Huang and P.B.Mackenzie, in *Particles and Fields*, Eds. A. Z. Capri and A.N.Kamal, PlenumPress, New York, 1983.
- J. M. Namyslowski, *Prog. Part. Nuc. Phys.* **74**, 1(1984)
- [22] H. C. Pauli and S. J. Brodsky, *Phys. Rev.* **D32**, 2001 (1985).  
H.C. Pauli, *Nucl. Phys.* **A560**, 501 (1993).
- [23] S. J. Brodsky and G. P. Lepage, in *Perturbative Quantum Chromodynamics*, Eds. A. H. Mueller, World Scientific, Singapore, 1989.
- S.J. Brodsky and H.C. Pauli, in *Recent Aspect of Quantum Fields*, Eds. H. Mitter and H. Gausterer; *Lecture Notes in Physics*, Vol. 396, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- S.J. Brodsky, F. Schlumpf, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **34**, 69 (1995).
- M. Burkardt, *Adv. Nucl. Phys.* **23**, 1 (1996).
- M. Burkardt, *Theory of Hadrons and Light-front QCD*, Ed. S. Glazek, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1995.
- X.D. Ji, *Comments Nucl. Part. Phys.* **21**, 123 (1993).
- M. Burkardt, *Light Front Quantization*, hep-th/9505259.
- A. Harindranath, *An Introduction to Light-Front Dynamics for Pedestrians*, <http://202.41.94.71/hari/light/lecture.pdf>.
- S. J. Brodsky, H. C. Pauli and S. S. Pinsky, *Quantum Chromodynamics and Other Field Theories on the Light Cone*, hep-th/9705477.
- [24] P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950).  
P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **3**, 1 (1951).  
P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 236 (1958).  
P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 333 (1958).  
P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964.
- [25] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Revista Colombiana de Física*, Vol. **41**, No 1, 220 (2009).
- [26] RR. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Revista Colombiana de Física*, Vol. **41**, No 1, 206 (2009).
- [27] M. C. Bertin, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *The canonical structure of Podolsky's generalized electrodynamics on the Null-Plane*, in preparation.



## Capítulo 2

# O Plano Nulo

Dirac formulou dois requisitos para um sistema relativista [1]: A relatividade geral exige que as leis da física se expresse em termos de sistemas coordenadas curvilíneas no espaço tempo; têm que ser invariantes sob transformações de um sistema de coordenadas para um outro. Um segundo requisito é imposto pelo descobrimento da mecânica quântica por Heisenberg e Schrödinger, segundo o qual as equações de movimento têm que ser expressas em forma hamiltoniana. Estas condições não definem um sistema dinâmico, mas limitam as possíveis formas que este possa ter. Uma apropriada determinação da dinâmica implica na especificação de todas as interações. Assim, chega a ser importante estabelecer novos sistemas dinâmicos e verificar se eles descrevem melhor o mundo atômico [1], contudo estes novos sistemas dinâmicos deverão cumprir com os requisitos da relatividade geral e as equações Hamiltonianas de movimento. Por outro lado, a dinâmica não relativista tem uma única forma possível já que as interações devem estar incluídas no Hamiltoniano e todos os outros geradores do grupo de Galileu, neste caso, são independentes da interação.

Segundo Dirac, o problema central para uma formulação Hamiltoniana geral é proporcionar uma realização particular dos dez geradores do grupo de Poincaré que são definidos pelas relações de parênteses de Poisson

$$\begin{aligned} \{P^\mu, P^\nu\} &= 0 \\ \{M^{\mu\nu}, P^\rho\} &= g^{\nu\rho} P^\mu - g^{\mu\rho} P^\nu \\ \{M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\} &= g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} + g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

em termos de um conjunto de variáveis dinâmicas independentes, tais como, as coordenadas, momentos, spin, etc.

Uma realização elementar de (2.1) é: Escolhendo o ponto de espaço tempo  $x^\mu$  e seu momento canônico conjugado  $p^\nu$  como variáveis canônicas, então adotamos

$$\{x^\mu, p^\nu\} = -g^{\mu\nu}, \quad \{x^\mu, x^\nu\} = 0, \quad \{p^\mu, p^\nu\} = 0, \quad (2.2)$$

e os geradores de Poincaré são então determinados para serem

$$P^\mu = p^\mu, \quad M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, \quad (2.3)$$



onde é possível demonstrar (2.1) usando (2.2). Mas, sendo (2.3) uma realização covariante, esta não descreve nenhuma interação, já que para várias partículas os geradores são simplesmente a soma dos geradores de uma simples partícula. A solução do problema é o marco da Teoria Quântica de Campos local [2]. O mais importante é o fato de que a realização (2.3) não leva em consideração a condição de camada de massa  $p^2 = m^2$ , que garante causalidade relativista.

A causalidade sugere uma escolha natural das variáveis que são dinamicamente independentes [3]: as variáveis associadas com uma hiper-superfície  $\Sigma$  no espaço de Minkowski não contém direções tipo-espaço. Em física clássica, variáveis apropriadas sobre  $\Sigma$  constituem um conjunto completo dinamicamente independente. Se se assume que isto é válido em Teoria Quântica de Campos, assim, existe um conjunto completo de medidas realizadas num instante  $\Sigma$  que vai permitir caracterizar o sistema sem ambigüidade e onde não se requer que  $\Sigma$  seja tipo-espaço, este pode conter direções tipo luz. O exemplo mais familiar de uma superfície com as propriedades anteriores é o instante do tempo  $x^0 = 0$ , contudo, existem outras alternativas.

Os geradores de Poincaré expressos em termos de variáveis dinâmicas determinam completamente a dinâmica do sistema. O subgrupo do grupo de Poincaré que mapeia  $\Sigma$  em si mesma é chamado de grupo de estabilidade. A construção de uma teoria dinâmica realiza-se em dois passos: o primeiro consiste em especificar os geradores do grupo de estabilidade, ou seja, determinar a cinemática dentro da superfície  $\Sigma$ . A característica destes geradores é sua independência da interação; as variáveis dinâmicas e os estados físicos transformam-se, de uma maneira simples, sob o subgrupo de estabilidade. A seguir, consideramos os geradores de Poincaré que não pertencem ao grupo de estabilidade, mas que transformam a superfície  $\Sigma$  em alguma outra superfície  $\Sigma'$ . Em particular, estes geradores descreverão a evolução do sistema como uma função do tempo. Estes geradores contêm toda a informação da dinâmica do sistema, denominados formas Hamiltonianas por Dirac.

O mesmo procedimento pode ser aplicado para dinâmica não relativista, em que é suficiente substituir o grupo de Poincaré pelo grupo de Galileu. Neste caso existe só uma única superfície inicial com a propriedade de interceptar cada linha de mundo uma e só uma vez; esta é a superfície  $x^0 = cte$ . Assim, há uma maneira possível de dividir o grupo de Galileu em uma parte cinemática e outra dinâmica. O subgrupo de Galileu cinemático que deixa invariante o instante  $x^0 = cte$  tem nove parâmetros e, além disso, há um simples Hamiltoniano que gera deslocamentos no tempo. Dirac estabeleceu que a unicidade do Hamiltoniano não relativista é perdida no caso relativista. A razão é que a causalidade restringe a família de linhas de mundo e permite uma grande classe de superfícies  $\Sigma$ [1, 3]. Em princípio, alguma superfície que não contém direções tipo-tempo pode ser usada.

Se uma superfície não tem simetrias, o grupo de estabilidade é nulo, neste caso a descrição não contém parte cinemática e cada um dos dez geradores do grupo de Poincaré é um Hamiltoniano. Portanto, consideram-se superfícies  $\Sigma$  para as quais o grupo de estabilidade pode pelo menos ser transitivo: Se  $\Sigma$  tem a propriedade que  $\forall x, y \in \Sigma : g \in G_\Sigma \rightarrow x = gy$ , então  $G_\Sigma$  é dito ser transitivo e todos os pontos em  $\Sigma$  são equivalentes.

Dirac determinou três classes equivalentes de superfícies com estas propriedades: (i) O instante

de tempo  $\tau \equiv x^0 = 0$ , **forma instantânea**; (ii) uma folha de um hiperbolóide  $\tau \equiv x^2 = a^2 > 0$ ,  $x^0 > 0$ , **ponto forma**; (iii) **plano nulo**  $\tau \equiv x^0 + x^3 = 0$ . Uma recente classificação estabelecida de todos os subgrupos do grupo de Poincaré adiciona duas classes possíveis de superfícies iniciais com seus respectivos grupos de estabilidade [5]. Uma das folhas do hiperbolóide (iv)  $\tau \equiv x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = a^2 > 0$ ,  $x^0 > 0$  e  $\tau \equiv x_0^2 - x_3^2 = a^2 > 0$ ,  $x^0 > 0$ . Assim, a unicidade da descrição Hamiltoniana não relativista chega a ser cinco vezes ambígua no caso relativista.

Para determinar quais dos geradores de Poincaré são cinemáticos, usamos o fato de que a ação do grupo de Poincaré sobre alguma função  $F(x)$  é dada por

$$\delta F(x) = \{F(x), \delta G\} = \partial^\mu F \delta a_\mu - \frac{1}{2} (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) F \delta \omega_{\mu\nu} , \quad (2.4)$$

onde  $\delta G = P^\mu \delta a_\mu - \frac{1}{2} M^{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu}$ , é o gerador de uma transformação infinitesimal de Poincaré. Considerando que  $\Sigma$  é dada na forma  $\Sigma : \tau = F(x)$ , se  $P^\mu$  e  $M^{\mu\nu}$  são geradores cinemáticos para algum  $\mu$  ou  $\nu$ , então, para isso índices particulares deve-se ter

$$\partial^\mu F = 0 \quad , \quad (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) F = 0 \quad , \quad (2.5)$$

assim, o gradiente e a derivada "angular" de  $F(x)$  devem ser nulos.

Segundo Dirac [1] as dez quantidades fundamentais para um sistema dinâmico são tais que algumas delas são especialmente simples e outras complicadas. As complicadas serão chamadas de Hamiltonianas. Elas têm o papel do simples Hamiltoniano na dinâmica não relativista. Aquelas quantidades simples serão associadas a um grupo de Poincaré. Vamos usar as equações (2.5) e construir os geradores do grupo de Poincaré sobre a hiper-superfície  $\Sigma : t = 0$ . A idéia é usar o vínculo  $p^2 = m^2$  para eliminar a variável conjugada a  $t$  que é  $p^0 = N \cdot p = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ , sendo  $N$  um vetor normal ao hiper-plano e, fazendo  $x^0 = 0$  em (2.3). Seguindo Dirac [1], adicionamos o vínculo da camada de massa aos geradores de Poincaré (2.3) via multiplicadores de Lagrange ,

$$P^\mu = p^\mu + \lambda^\mu (p^2 - m^2) \quad (2.6)$$

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu + \lambda^{\mu\nu} (p^2 - m^2) . \quad (2.7)$$

Exigiremos agora que o lado direito seja independente de  $p^0$ . Derivando o lado direito de (2.6) e (2.7) com respeito a  $p^0$  encontramos os seguintes valores para os multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda^0 = -\frac{1}{2p^0} \quad , \quad \lambda^i = 0 \quad , \quad \lambda^{0i} = -\frac{x^i}{2p^0} \quad , \quad \lambda^{ij} = 0 \quad , \quad (2.8)$$

Assim, os geradores de Poincaré de caráter cinemático são

$$P^i = p^i \quad , \quad M^{ij} = x^i p^j - x^j p^i \quad (2.9)$$

e os de caráter dinâmico

$$P^0 = \omega_p \quad , \quad M^{i0} = x^i \omega_p \quad , \quad (2.10)$$

com  $\omega_p \equiv (p^i p^i + m^2)^{\frac{1}{2}}$ . Comparando com (2.3),  $p^0$  foi substituído por  $\omega_p$  e  $x^0$  torna-se nulo. Como regra podemos observar que só aqueles geradores que contêm  $p^0$  na representação (2.6, 2.7) levam

a multiplicadores de Lagrange que não desaparecem. Eles são os geradores dinâmicos que, para a forma instantânea, são dados pelo Hamiltoniano  $P^0$  e os geradores de boosts  $M^{i0}$ . De acordo com (2.5), para  $\Sigma : \tau = G(x) = t = cte$ , temos

$$\partial^i G(x) = 0 \quad , \quad (x^i \partial^j - x^j \partial^i)G = 0 \quad , \quad (2.11)$$

assim que  $\Sigma : t = cte$  é invariante sob rotações e translações, então o grupo de estabilidade tem dimensão seis. De outra maneira

$$\partial^0 G(x) = 1 \neq 0 \quad , \quad (x^0 \partial^j - x^j \partial^0)G = -x^j \neq 0 \quad , \quad (2.12)$$

a parte do Hamiltoniano e os boosts são dinâmicos, assim,  $\Sigma : t = cte$  não é invariante sob boosts. O último resulta do fato de que os boosts misturam as coordenadas de espaço e tempo. As representações (2.9) e (2.10) fazem com que a álgebra de Poincaré seja compatível com o vínculo  $x^0 = 0$ . Usando a relação  $\{x^i, p^j\} = \delta^{ij}$  é possível mostrar que (2.9) e (2.10) obedecem às relações (2.1).

Tal como acontece na forma instantânea, vamos construir a representação associada dos geradores de Poincaré sobre o plano  $\Sigma : \tau = x^+ \equiv x^0 + x^3 = 0$ . A idéia consiste em usar novamente o vínculo de camada de massa,  $p^2 = m^2$ , para eliminar a variável canônica conjugada a  $x^+$  que é  $p^-$  e depois escolher  $x^+ = 0$  em (2.3). Consideramos agora que o lado direito das equações (2.6, 2.7) sejam independentes de  $p^-$ . Assim, encontramos os seguintes valores para os multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \lambda^+ = \lambda^i = 0 \quad , \quad \lambda^- = -\frac{1}{2p^+} \\ \lambda^{+-} = -\frac{x^+}{2p^+} = 0 \quad , \quad \lambda^{i-} = -\frac{x^i}{2p^+} \quad , \quad \lambda^{+i} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Assim, obtemos a seguinte representação (3 + 1) dos geradores de Poincaré de caráter cinemático

$$P^i = p^i \quad , \quad P^+ = p^+ \quad , \quad M^{+i} = -x^i p^+ \quad , \quad M^{+-} = -x^- p^+ \quad , \quad M^{12} = x^1 p^2 - x^2 p^1 \quad . \quad (2.14)$$

E, os geradores de caráter dinâmico são dados por

$$P^- = \frac{p^i p^i + m^2}{p^+} \quad , \quad M^{-i} = x^- p^i - x^i p^- \quad i = 1, 2 \quad . \quad (2.15)$$

É importante observar que para um valor positivo de  $p^+$  o sinal do Hamiltoniano  $P^-$  é também positivo, assim, não se tem ambigüidade no sinal da energia na formulação do plano nulo. Mas, para uma partícula de massa zero e  $p^i = 0$ , o valor de  $p^+ = 0$  conduz para um valor indeterminado de  $P^-$ . Ainda, para partículas massivas, deve-se dar uma prescrição para deslocar-se ao redor da singularidade  $p^+ = 0$ .

Da relação (2.14) observamos que o plano nulo tem sete geradores cinemáticos, portanto, este é o grupo de estabilidade maior. A dimensão dos grupos de estabilidades para as hiper-superfícies (i), (ii), (iv) e (v) são 6, 6, 4, 4, respectivamente. Além disto, os grupos de estabilidade das superfícies



(i) até (v) não são isomórficos, assim, eles não podem ser deformados um em outro por contrações [2]. Por conseguinte das teorias Hamiltonianas invariantes de Poincaré baseadas sobre superfícies inequivalentes iniciais em um sistema de referencia diferem na maneira pela qual os dez geradores de Poincaré são divididos em cinemáticos e dinâmicos [3]. A questão que se coloca é se a diferença é só formal ou se há conseqüências físicas. Até o momento não existe resposta desde o trabalho de Dirac [1]. Não é claro se cada teoria baseada sobre uma dada superfície  $\Sigma$  encontra equivalentes contrapartes física entre teorias Hamiltonianas baseadas sobre uma superfície inequivalente  $\Sigma'$ , já que a invariância de Poincaré não requer tal equivalência. Ainda, se este fosse o caso, diferentes formas de dinâmica Hamiltoniana poderiam enfatizar diferentes propriedades do sistema físico; assim, em ausência de um argumento físico definitivo em favor de uma das cinco possíveis formas Hamiltonianas, todas elas merecem nossa atenção.

## 2.1 Álgebra de Poincaré

Consideremos um boost na direção  $z$  com rapidez  $\omega$ . Escrito nas coordenadas na forma instantânea, o boost se expressa da seguinte maneira

$$t' = t \cosh \omega + z \sinh \omega \quad , \quad z' = z \cosh \omega + t \sinh \omega \quad . \quad (2.16)$$

Como é do conhecimento, o boost mistura coordenadas espaciais e temporais e da relação (2.16) podemos determinar que a ação do boost no plano nulo tem a forma

$$x'^+ = e^\omega x^+ \quad , \quad x'^- = e^{-\omega} x^- \quad . \quad (2.17)$$

Então, as transformações de Lorentz tem uma forma simples neste sistema de coordenadas, onde a característica mais notável é que as variáveis  $x^+$  e  $x^-$  não chegam a ser misturadas sob esta transformação [5]. Elas simplesmente sofrem uma transformação de escala mantendo o produto  $x^+x^-$  invariante. As coordenadas do plano nulo diagonalizam o boost na direção  $z$ . Deve-se notar que os pontos sobre a hiper-superfície  $\Sigma : x^+ = 0$  são mapeados sobre eles mesmos, assim o gerador relevante,  $M^{+-} = 2M^{30} = -2K^3$ , é cinemático. No entanto, os outros geradores cinemáticos  $M^{+i}$  atuam sobre as coordenadas transversas mantendo-as inalteradas [2, 3].

As relações de parênteses de Poisson não nulos dos sete geradores de Poincaré são

$$\begin{aligned} \{M^{12}, M^{+-}\} &= \epsilon^{ij} M^{+j} \\ \{M^{12}, P^i\} &= \epsilon^{ij} P^j \\ \{M^{+i}, P^-\} &= -2P^i \\ \{M^{+i}, P^j\} &= -\delta^{ij} P^+ \quad , \end{aligned} \quad (2.18)$$

(com  $i = 1, 2$ ), onde todos os outros parênteses dos sete geradores são nulos.

É interessante, considerar o grupo de Galileo bidimensional cujos geradores são (para uma partícula livre de massa  $m$ ) : dois momentos  $k^i$ , um momento angular  $L = \epsilon^{ij} x^i p^j$ , dois boosts de Galileo  $G^i = m x^i$ , um Hamiltoniano  $H = \frac{k^i k^i}{2m}$  e a massa  $m$  que é o operador de Casimir. Usando

$\{x^i, k^j\} = \delta^{ij}$  e identificando  $P^i \leftrightarrow k^i$ ,  $M^{12} \leftrightarrow L$ ,  $M^{+i} \leftrightarrow -2G^i$ ,  $P^+ \leftrightarrow 2m$  e  $P^- \leftrightarrow H$ , pode-se mostrar que (2.18) é uma sub-álgebra da álgebra de Poincaré, isomorfa à álgebra de Lie do grupo de Galileo bidimensional [6]. As primeiras duas relações em (2.18) estabelecem que  $M^{+i}$  e  $P^i$  transformam-se em vetores bidimensionais. Espera-se assim que a cinemática no plano nulo mostre um comportamento não relativista que é associado à dimensão transversa e governada pelo grupo de Galileo bidimensional [7]

É importante destacar algumas características fundamentais das coordenadas do plano nulo:

- As coordenadas do plano nulo  $x^\mu : (x^+, x^\perp, x^-)$ , onde  $x^\pm = \frac{x^0 \pm x^3}{\sqrt{2}}$  e  $x^\perp = (x^1, x^2)$ , não estão relacionadas por uma transformação de Lorentz finita [8] às coordenadas usuais  $x^\mu : (x^0 = t, x^1, x^2, x^3)$ , então a descrição do mesmo conteúdo físico em uma teoria dinâmica sobre o plano nulo, que estuda a evolução do sistema em  $x^+$  em lugar de  $x^0$ , poderia ser diferente daquele determinado pelo tratamento convencional. Este é o caso da descrição do mecanismo de quebra de simetria e do estudo de modelos de teorias de gauge em duas dimensões, em que foi demonstrado que a quantização sobre o plano nulo é apropriada para a exibição dos relevantes graus de liberdade, conduzindo a um espaço de Hilber físico [9, 10].
- Em geral, é bem conhecido que dois pontos que pertençam ao hiperplano  $x^0 = cte$  são separados por distâncias tipo-espaço  $(x - y)^2 = (x^0 - y^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 = -(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 < 0$  e a separação se torna tipo-luz quando os dois pontos coincidem. Os pontos no hiperplano  $x^+ = cte$ , também tem uma separação tipo-espaço quando  $x^i \neq y^i$ ,  $(x - y)^2 = (x^+ - y^+)(x^- - y^-) - (x^i - y^i)^2 = -(x^i - y^i)^2 < 0$  e se tornam tipo luz quando  $x^i = y^i$ , embora com a diferença de que os pontos não precisam ser coincidentes, pois  $(x^- - y^-)$  não precisa ser nulo. Esta observação, quando combinada com o princípio de micro-causalidade, conduz ao resultado que a dinâmica no plano nulo pode chegar a ser não local com respeito às coordenadas longitudinais  $x^-$  [11].
- Uma teoria dinâmica nas coordenadas do plano nulo tem uma característica geral pelo fato de que esta é sempre uma teoria dinâmica descrita por lagrangianos singulares [12] e a construção de uma formulação hamiltoniana não é simples. O procedimento de Dirac [13] ou métodos análogos para o estudo de sistemas dinâmicos com vínculos devem ser utilizados para trabalhar com estas teorias. Uma formulação Hamiltoniana clássica autoconsistente é a mais conveniente para quantizar a teoria via princípio de correspondência dos parênteses de Dirac com os comutadores/anti-comutadores dos correspondentes operadores.

## 2.2 Problema de Valores Iniciais sobre o Plano Nulo

Para iniciar nossa discussão consideremos um campo escalar livre de massa  $m$

$$(\square_x + m^2)\phi(x) = 0, \quad (2.19)$$

e restringimos nossa atenção por agora em um campo clássico. É conhecido que sobre uma superfície tipo espaço  $\Sigma$ , um conjunto completo de dados iniciais é dado, especificando o campo e suas



derivadas sobre esta superfície. A questão seria: Qual é o valor do campo num ponto arbitrário  $y$  fora da superfície? A solução deste problema se obtém a partir da solução covariante do campo livre. O seguinte teorema é válido [14]

*Teorema:* Num ponto  $y$  fora da superfície tipo espaço  $\Sigma$  o campo é dado por

$$\phi(y) = \int_{\Sigma} d^4x [\Delta(y-x) \partial_{\mu}^x \phi(x) - \phi(x) \partial_{\mu}^x \Delta(y-x)] = \int_{\Sigma} d^4x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu}^x \phi(x) \quad (2.20)$$

onde  $\Delta(y-x)$  é a função de Schwinger que tem as propriedades: é solução da equação homogênea de Klein-Gordon-Fock (KGF), é real, nula fora do cone de luz e é antisimétrica. O campo assim determinado corresponde à propagação causal ou seja,  $\phi(y)$  é só influenciada por pontos  $x \in \Sigma$  que ficam atrás (adiante) do cone de luz de  $y$ , dependendo se  $y$  está depois (antes) de  $\Sigma$  (ver figura 2.1)

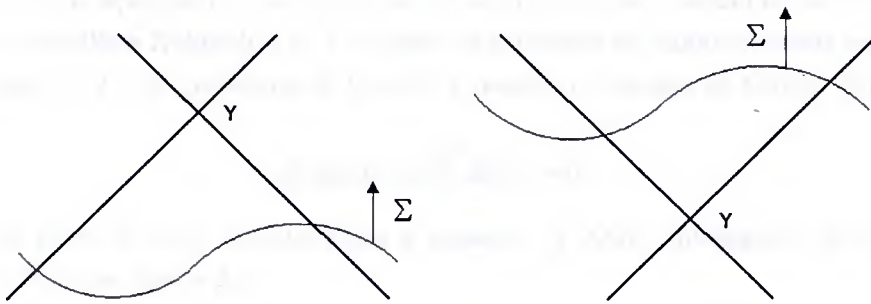


Figura 2.1: Na primeira figura o ponto  $y$  é influenciado causalmente por pontos que ficam em  $\Sigma$ . Na segunda figura  $y$  influencia causalmente aqueles pontos que ficam dentro de seu cone de luz em  $\Sigma$ .

Se escolhêssemos  $\Sigma$  como sendo uma superfície plana com tempo constante  $x^0 = cte.$  a solução apropriada do problema de valores iniciais se escreveria como

$$\phi(y) = \int_{\Sigma} d^3x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_t^x \phi(x) \quad (2.21)$$

A formulação usual da Teoria de Campos é baseada na bem entendida teoria de Cauchy-Kowalewski de equações hiperbólicas [15], que proporciona teoremas para a existência e unicidade de soluções quando o campo e suas derivadas temporais são conhecidas sobre uma hiper-superfície tipo-espaço. Agora, surge a questão das condições para a existência e unicidade das soluções para dados impostos sobre o plano nulo. Para responder a esta pergunta reescrevemos a equação diferencial (2.19) em termos das coordenadas do plano \*

$$(\partial^+ \partial^- + m^2) \phi = 0 . \quad (2.22)$$

Em termos de estas coordenadas, a equação de KGF é expressa na forma canônica da equação diferencial hiperbólica [15] e  $x^{\pm}$  são chamadas as superfícies características da equação diferencial.

\*Consideramos o caso bidimensional por simplicidade

Na teoria de equações diferenciais parciais se demonstra que a especificação do campo e um número finito de derivadas sobre uma única característica não determina uma solução única da equação diferencial [16]. Assim que tratamos com um problema de valores iniciais característicos quando se deseja resolver esta equação, o que implica que se deve especificar dados sobre ambas características  $x^\pm = cte$ . O problema de valores iniciais característicos é formulado da seguinte maneira: Determinar uma solução  $\phi(x^+, x^-)$  que satisfaça as seguintes condições iniciais

$$\phi(x^+, x_0^-) = f(x^+) , \quad \phi(x_0^+, x^-) = g(x^-) \tag{2.23}$$

e a condição de continuidade

$$\phi(x_0^+, x_0^-) = f(x_0^+) = g(x_0^-) \tag{2.24}$$

as funções  $f$  e  $g$  que especificam  $\phi$  sobre ambas características são chamadas dados característicos. De acordo com Neville e Rohrlich [17], a solução do problema de valores iniciais característicos se obtém da relação (2.21) do problema de Cauchy e usando o teorema de Gauss. Então, é possível mostrar que

$$\partial_x^\mu [\Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow x}{\partial}_\mu \phi(x)] = 0 , \tag{2.25}$$

lembrando que tanto  $\phi$  como  $\Delta$  satisfazem a equação de KGF. Integrando (2.25) pelo volume limitado por  $ABC$  (ver figura 2.2),

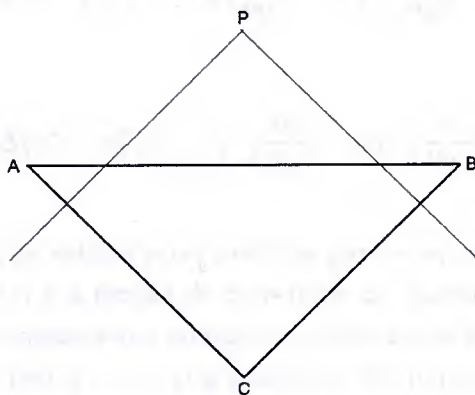


Figura 2.2: Contorno de integração usado na derivação de (2.26).

onde o plano  $x^0 = 0$  intercepta a parte detrás do cone de luz do ponto  $P$ ,  $AB : x^0 = 0$ ,  $BC : x^+ = x_0^+$  e  $AC : x^- = x_0^-$ . Pelo teorema de Gauss temos que

$$\int d^4x \partial_x^\mu [\Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow x}{\partial}_\mu \phi(x)] = 0$$

ou, explicitamente

$$\left( \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \right) d\Sigma(x) n^\mu [\Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow x}{\partial}_\mu \phi(x)] = 0 \tag{2.26}$$

onde  $d\Sigma$  é o elemento de superfície apropriado e  $n^\mu$  é um vetor normal à superfície. De (2.21) obtemos que

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \int d^3x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\ &= \int_{CB} dy^+ \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_+ \phi(x) + \int_{CA} dy^- \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_- \phi(x)\end{aligned}\quad (2.27)$$

devido a que a normal ao plano nulo fica no mesmo plano, o conhecimento do campo  $\phi$  sobre o plano nulo implica sua derivada normal. Obtém-se o seguinte teorema [17]:

*Teorema:* A solução da equação de KGF (2.22) para  $m \geq 0$  é unicamente determinada por (2.26) na região conexa limitada pela cunha formada pelos planos nulos  $x^\pm = cte$  se  $\phi$  é especificada sobre esses planos.

Usando o fato de que  $\Delta$  desaparece para argumentos do tipo espaço,  $(x-y)^2 < 0$ , as integrais em (2.26) se estendem da borda da cunha (ponto C na Fig. 1.2) até  $+\infty$ , porém, essas partes que ficam fora do cone característico de  $P$  não contribuem para a integral. Se compararmos (2.26) com (2.21) temos que o lado direito é a solução do problema de Cauchy, que em termos dos dados iniciais (2.23) se escreve como

$$\begin{aligned}\phi(x^+, x^-) &= \int_{x_0^+}^{\infty} dy^+ [\Delta(x^+ - y^+, x^- - x_0^-) \frac{\partial f}{\partial y^+} - f(y^+) \frac{\partial}{\partial y^+} \Delta(x^+ - y^+, x^- - x_0^-)] \\ &+ \int_{x_0^+}^{\infty} dy^- [\Delta(x^+ - x_0^+, x^- - y^-) \frac{\partial g}{\partial y^-} - g(y^-) \frac{\partial}{\partial y^-} \Delta(x^+ - x_0^+, x^- - y^-)].\end{aligned}\quad (2.28)$$

Esta é a solução do problema de valores característicos para a equação de KGF no plano nulo em termos dos dados iniciais  $f$  e  $g$  e a função de Schwinger  $\Delta$ . Então, a fim de termos uma única solução são necessários dados iniciais sobre ambas as características e não somente sobre uma delas.

Para uma teoria quântica (em  $d = 1 + 1$ ) a relação (2.28) implica que se deve quantizar sobre o plano nulo [18]. Para entender melhor este resultado, sabe-se que o comutador de dois campos escalares livres pode ser expresso em termos da função de Schwinger [19]

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x-y). \quad (2.29)$$

da qual se pode determinar os seguintes comutadores a tempos iguais entre os campos nas coordenadas usuais

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = 0, \quad [\dot{\phi}(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = -i\delta(x-y) \quad (2.30)$$

Da relação (2.21) podemos determinar que

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int dz \{ [\dot{\phi}(z), \phi(y)] \Delta(x-z) - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^0} \Delta(x-z) \}_{x^0=z^0} \quad (2.31)$$

e inserindo aqui (2.30) se obtém a identidade (2.29). Assim, a equação (2.31) é uma condição de consistência que expressa o comutador para tempos arbitrários diferentes  $x^0 > y^0$  através de dados de Cauchy a tempo  $x^0 = y^0$  [20].

A fim de derivar uma condição de consistência análoga a (2.31), escolheremos  $x_0^\pm = 0$ ; então, usando (2.28) encontramos que o comutador entre dois campos a tempos diferentes é dado por

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] = & \int_0^\infty dz^+ [\Delta(x-z) \frac{\partial}{\partial z^+} [\phi(z), \phi(y)] - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^+} \Delta(x-z)]_{x^- = z^-} \\ & + \int_0^\infty dz^- [\Delta(x-z) \frac{\partial}{\partial z^-} [\phi(z), \phi(y)] - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^-} \Delta(x-z)]_{x^+ = z^+}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

o que implica que para todo  $x^\pm$  dois comutadores independentes têm de ser especificados

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^\pm = y^\pm} = -\frac{i}{4} \epsilon(x^\mp - y^\mp) \quad (2.33)$$

i.e. o problema de valores iniciais característicos corresponde a quantizar no plano nulo. Na literatura os comutadores são especificados sobre uma só característica, usualmente  $x^+ = 0$ , indispensável se desejamos uma formulação Hamiltoniana com um só parâmetro de evolução  $x^+$ , o que estaria em contradição com os resultados obtidos. Assim, quantização sobre uma só característica é possível se dados sobre a segunda característica são impostos [17, 20]. Um caso de interesse é obtido movendo o plano nulo  $x^- = cte$  para o passado distante e sobre este fazer  $\phi = 0$ ; explicitamente

$$\lim_{x^- \rightarrow -\infty} \phi = 0, \quad \forall x, \quad x^+ \geq x_0^+ \quad (2.34)$$

obtendo-se de (2.28) a solução

$$\phi(x) = \int_{x^+ = x_0^+} dy^- \Delta(x-y) \overset{\leftrightarrow x}{\partial}_- \phi(y). \quad (2.35)$$

Consequentemente, obtém-se o seguinte teorema,

*Teorema:* dado  $\phi$  sobre o plano  $x^+ = x_0^+$  e a condição assintótica (2.34), a equação de KGF, para  $m \geq 0$ , terá uma única solução dada por (2.35) no plano  $x^+ \geq x_0^+$  [17].

*Corolário:* qualquer solução da equação de KGF que satisfaça (2.34) e que se anule sobre o plano nulo definido por  $x^+ = x_0^+$ , também se anula para  $x^+ \geq x_0^+$ .

Em (2.35) a integração sobre  $y^-$  se estende de  $-\infty$  até  $+\infty$ , embora o conjunto aberto  $y^- \in (x^-, \infty)$  não contribua, uma vez que  $\Delta$  desaparece para argumentos tipo-espaço. Os pontos do cone característico devem ser todos pontos interiores do domínio de integração,  $\phi$  será corretamente dada por esta equação para algum  $x^+ > x_0^+$ , mas no limite quando  $x^+$  se aproxima de  $x_0^+$  uma condição de convergência para  $x^- \rightarrow +\infty$  sobre a integral (2.35) se faz necessária. Assim, impomos a seguinte restrição adicional

$$\lim_{x^- \rightarrow \infty} \phi = 0, \quad \text{sobre } x^+ = x_0^+ \quad (2.36)$$

e, com isso verificamos a consistência de (2.35) tomando  $P$  sobre o plano nulo  $x_0^+$  [17].



# Bibliografia

- [1] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
- [2] T. Heinzl, *Light-Cone Dynamics of Particles and Field*, hep-th/9812190.  
T. Heinzl, *Light-Cone Quantization: Fundamentation and Applications*, hep-th/0008096.
- [3] H. Leutwyler and J. Stern, Ann. Phys., **112**, 94 (1978).
- [4] H. Bacry, P. Combe and P. Sorba, Rep. Math. Phys. **5**, 145 (1974); **5**, 361 (1974).  
J. Patera, P. Winternitz and H Zassenhaus, J. Math. Phys. **16**, 1597 (1975).  
J. Patera, R. Sharp, P. Winternitz and H Zassenhaus, J. Math. Phys. **17**, 977 (1976);
- [5] L. Parker and G. Schmieg, Am. J. Phys. **38**, 218 (1970).  
Y. S. Kim and M. E. Noz, Am. J. Phys. **50**, 721 (1982).  
E. N. Glass, Am. J. Phys. **43**, 1013 (1975).
- [6] P. P. Srivastava, *Light-Front Quantization of Field Theory*, Topics in Theoretical Physics, pp. 206 - 217, eds, V.C. Aguilera-Navarro, D. Galetti, B. M. Pimentel and L. Tomio, IFT - São Paulo, SP, 1995.
- [7] P. E. Soper, *Field Theories in the Infinite Momentum Frame*, SLAC-137, UC-34, Sep. 1971.  
J. B. Kogut and D. E. Soper, *Quantum Electrodynamics in the Infinite Momentum Frame*, SLAC-PUB-680, Oct. 1969.
- [8] P. P. Srivastava, *Perspectives of Light Front Quantized Field Theory: Some New Results*. Saga of Field Theory, From Points to Strings, ed., A.N. Mitra, Indian National Science Academy (INSA), New Delhi, India. hep-ph/9908492.
- [9] P. P. Srivastava, *Theta Vacua in the Light Front Quantized Schwinger Model*. Brazil Workshop on Topology, Geometry, and Physics, UNICAMP, Campinas, Brazil, Jul 1996. hep-th/9610149.
- [10] Th. Heinzl, St. Krusche and E. Werner, Phys. Lett., **B272**, 54 (1991); **B256**, 55 (1991).
- [11] P. P. Srivastava, *Light-Front Quantized Field Theory: (an introduction) Spontaneous Symmetry Breaking. Phase transition in  $\phi^4$  Theory*, XIV Encontro Nacional de Partículas e Campos, Caxambu, MG, September 1993, CBPF-NF-075/93.



- [12] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, Vol. 169, Springer, New York, 1982.
- [13] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964.  
P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950).  
P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **3**, 1 (1951).  
P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 236 (1958).  
P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 333 (1958).
- [14] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1969.
- [15] J. Mathews and R. Walker, *Mathematical Method of Physics*, Benjamin, New York, 1965.  
J. Irving and N. Mullineux, *Mathematical in Physics and Engineering*, Academic Press, New York, 1962.  
T. Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier, New York, 1973.
- [16] N. E. Ligterink and B. L. G. Bakker, Vrije Universiteit Amsterdam, preprint 1993.
- [17] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Nuovo Cimento*, **A1**, 625 (1971).
- [18] G. Domokos, in *Boulder Lectures*, Vol. XIV, 1971. Eds. A. O. Barut and W. E. Brittin, Boulder: Colorado University Press, 1972.
- [19] J. W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Germany, 1986.
- [20] T. Heinzl and E. Werner, *Z. Phys.* **C62**, 521 (1994).
- [21] G. McCartor, *Z. Phys.* **C41**, 271 (1988).
- [22] J. W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Germany, 1986.

## Capítulo 3

# Formalismo hamiltoniano para sistemas singulares

Na física, toda teoria de campos fundamental é invariante sob algum grupo local de transformações de simetria. Estas teorias são chamadas de teorias gauge ou de sistemas singulares pelo fato que a simetria local relaciona diferentes soluções das equações de campo derivadas das mesmas condições iniciais, assim, a solução geral das equações de movimento dependeram de funções arbitrárias do tempo. Portanto, existe um conjunto contínuo de acelerações que pertencem à mesma posição e velocidade inicial, onde este conjunto é definido pelos vínculos lagrangianos, então, todas as teorias de gauge são sistemas com vínculos. No formalismo Hamiltoniano isto significa que se tem condições sobre os momentos e posições iniciais. Estas condições devem ser conservadas pela evolução temporal do sistema e este requerimento pode conduzir a futuros vínculos.

Um intento para trabalhar com sistemas com vínculos se remonta às publicações de Dirac, onde se estabelece um formalismo para tratar esta classe de sistemas em forma consistente [1]. Posteriormente, Bergman e colaboradores demonstram, numa serie de trabalhos, a relação que existem entre os vínculos da teoria e a invariância do sistema sob um grupo contínuo de transformações [2]. Depois da introdução das variáveis de Grassmann para descrever férmions [3], o formalismo se utilizo para incluir campos de spin semi-inteiro [3, 4].

Neste capítulo introduziremos e revisaremos o formalismo para sistemas clássicos com vínculos e em particular teorias gauge.

### 3.1 Estrutura de Vínculos

Vamos considerar um sistema com um número finito de graus de liberdade, em que a dinâmica pode ser derivada da ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^k, \dot{q}^k, t) \quad , \quad (3.1)$$

$L$  é a função lagrangiana que depende das coordenadas generalizadas  $q^k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), velocidades generalizadas  $\dot{q}^k = \frac{d}{dt}q^k$  y do tempo. A lagrangiana é chamada de regular se o determinante da matriz Hessiana

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \quad (3.2)$$

não é identicamente nulo como uma função de  $q^k$ ,  $\dot{q}^k$  e  $t$ . A regularidade é uma propriedade da lagrangiana e não do sistema que ele descreve [5]. A ação é um funcional das coordenadas  $q^k$ , e os princípios da mecânica clássica dizem que as trajetórias clássicas  $q_c^k$  são pontos estacionários de ação. Uma condição necessária para sua existência é que a primeira variação da ação  $\delta S$  seja zero, o que conduz às equações de Euler-Lagrange (EL), (para  $t_1 \leq t \leq t_2$ )

$$L_k \equiv \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = 0 \quad \text{para} \quad q^k = q_c^k \quad . \quad (3.3)$$

$L_k$  é chamada a derivada de Euler de  $L$  com respeito a  $q^k$ . As equações de EL podem ser escritas na seguinte forma

$$L_i = V_i(q^k, \dot{q}^k, t) - W_{ij}(q^k, \dot{q}^k, t) \ddot{q}^j = 0 \quad (3.4)$$

onde  $W_{ij}$  é a Hessiana definida anteriormente e

$$V_i(q^k, \dot{q}^k, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j \quad (3.5)$$

No caso regular onde  $\det |W_{ij}| \neq 0$  todas as equações são de segunda ordem e funcionalmente independentes. Sob estas condições existem soluções no intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$ , elas são únicas depois que  $2N$  constantes de integração ( $q^k(t_1), \dot{q}^k(t_1)$ ) são fixadas.

Além do formalismo lagrangiano da mecânica clássica existe o formalismo hamiltoniano. Na passagem do formalismo lagrangiano para o Hamiltoniano, primeiro se define os momentos canônicos conjugados às coordenadas  $q^k$

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \quad , \quad (3.6)$$

e o Hamiltoniano é definido por

$$H \equiv p_k \dot{q}^k - L \quad , \quad (3.7)$$

o qual será uma função dos argumentos  $(q, p, t)$  em lugar de  $(q, \dot{q}, t)$ . Mas, só no caso regular, as equações que definem os momentos canônicos (3.6) podem ser resolvidas unicamente para as  $\dot{q}^k$ , isto surge do fato que

$$W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} \quad , \quad (3.8)$$

e se  $\det |W_{ij}| \neq 0$  o Teorema da Função Inversa garante que existe uma única solução  $\dot{q}^k = \dot{q}^k(q, p, t)$  [6]. Só neste caso, se pode mudar de um conjunto de variáveis  $(q, p, t)$  para  $(q, \dot{q}, t)$  de maneira um a um.

Se a lagrangiana que descreve o sistema é singular,  $\det |W_{ij}| = 0$ , as equações que definem os momentos canônicos não podem ser resolvidas de modo a expressar todas as velocidades em termos

de  $(q, p, t)$ , uma vez que  $\det |W_{ij}|$  é justamente o jacobiano da transformação (3.8), onde as  $q$ 's fazem o papel de parâmetros.

A formulação canônica da dinâmica dos sistemas singulares foi desenvolvida por Dirac [1]. Subseqüentemente Bergmann, Goldberg e colaboradores refinaram o método original [2]. No caso em que a lagrangiana é singular, se  $(N - M)$  é o posto da matriz Hessiana, isto determina que apenas  $(N - M)$  velocidades podem ser expressas como funções independentes dos  $q$ 's e dos  $p$ 's e das  $M$  velocidades restantes indeterminadas. Existem, portanto,  $M$  relações independentes entre os  $q$ 's e os  $p$ 's. Estas relações que são uma consequência direta das equações (3.6) podem ser escritas como

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M < N \quad . \quad (3.9)$$

Elas mostram que das  $2N$  variáveis hamiltoniana  $q^k$  e  $p_k$ , apenas  $2N - M$  são realmente independentes. As relações (3.9) foram chamadas de vínculos primários do formalismo hamiltoniano por Bergmann [2], a palavra primário denotando o fato de que elas são obtidas diretamente da definição (3.6), sem fazer uso das equações de movimento.

O hamiltoniano canônico do sistema é definido de maneira usual

$$H_c(q, p) \equiv p_k \dot{q}^k - L \quad ; \quad (3.10)$$

onde é possível demonstrar que  $H_c$  sempre pode ser expresso com função dos  $q$ 's e dos  $p$ 's,  $H_c = H_c(q, p)$ , a despeito do fato das velocidades não poderem ser completamente eliminadas em favor dos momentos [7, 8]. Devido à presença dos vínculos primários (3.9) o Hamiltoniano canônico (3.10) não fica determinado unicamente como uma função dos  $q$ 's e dos  $p$ 's. As predições da teoria devem manter-se inalteradas se adicionarmos ao Hamiltoniano canônico uma combinação linear dos vínculos primários, i.e.

$$H_c(q, p) \quad \rightarrow \quad H_c(q, p) + c^m(q, p) \phi_m(q, p) \quad , \quad (3.11)$$

onde  $c^m(q, p)$  são funções arbitrárias e regulares dos  $q$ 's e dos  $p$ 's.

O princípio variacional pode ser escrito em termos do Hamiltoniano canônico como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ p_k \dot{q}^k - H_c(q, p) \right] = 0 \quad (3.12)$$

com as variações dos  $q$ 's e dos  $p$ 's sujeita às condições

$$\delta q^k(t_1) = \delta q^k(t_2) = 0 \quad , \quad \phi_m(q, p) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad . \quad (3.13)$$

As restrições (3.13) podem ser levadas em conta introduzindo os multiplicadores de Lagrange  $\lambda^m(t)$  que devem ser variados independentemente dos  $q$ 's e dos  $p$ 's, e substituindo (3.12) por

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ p_k \dot{q}^k - H_c(q, p) - \lambda^m(t) \phi_m(q, p) \right] = 0 \quad (3.14)$$



com as restrições (3.13).

As equações de movimento no formalismo hamiltoniana, obtidas a partir de (3.14), se escrevem

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H_c}{\partial p_k} + \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_k} \quad , \quad \dot{p}^k = -\frac{\partial H_c}{\partial q^k} - \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^k} \quad . \quad (3.15)$$

Onde é possível demonstrar que os multiplicadores de Lagrange,  $\lambda^m$  coincidem com as  $M$  restantes velocidades indeterminadas [5, 7]. As equações (3.15) valem quando considera-se em conjunto com os vínculos primários. Por este motivo é conveniente denominar por  $\Gamma$  o espaço de fase de  $2N$  dimensões cujas coordenadas independentes são  $(q^k, p_k)$  e definimos a "hiper-superfície de vínculos"  $\Sigma$  como sendo um subespaço de  $\Gamma$  de dimensão  $2N - M$ , no qual são válidos os vínculos primários. As equações (3.15) só valem em  $\Sigma$ , o que implica que as derivadas que nelas aparecem devem ser primeiro realizadas em  $\Gamma$  e depois ter seu valor tomado em  $\Sigma$ . Por isso as equações de movimento serão escritas da seguinte forma

$$\dot{q}^k \Big|_{\Sigma} = \frac{\partial H_c}{\partial p_k} \Big|_{\Sigma} + \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_k} \Big|_{\Sigma} \quad , \quad \dot{p}^k \Big|_{\Sigma} = -\frac{\partial H_c}{\partial q^k} \Big|_{\Sigma} - \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^k} \Big|_{\Sigma} \quad . \quad (3.16)$$

As equações de movimento no formalismo hamiltoniano, obtidas a partir de (3.14), para uma variável dinâmica  $g(q, p)$  se escrevem

$$\begin{aligned} \dot{g}(q, p) &= \{g(q, p), H_c\} + \lambda^m \{g(q, p), \phi_m(q, p)\} \quad , \\ \phi_m(q, p) &= 0 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad ; \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde os parênteses de Poisson (PP) para duas variáveis dinâmicas  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$  são definidas da seguinte maneira:

$$\{f(q, p), g(q, p)\} \equiv \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q^k} \quad . \quad (3.18)$$

É conveniente definir o Hamiltoniano primário do sistema como

$$H_p \equiv H_c + \lambda^m \phi_m \quad , \quad (3.19)$$

onde é possível verificar [1, 10] que as equações de movimento (3.16) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\dot{q}^k \Big|_{\Sigma} = \{q^k, H_p\} \Big|_{\Sigma} \quad , \quad \dot{p}^k \Big|_{\Sigma} = \{p_k, H_p\} \Big|_{\Sigma} \quad . \quad (3.20)$$

Embora os PP dos multiplicadores de Lagrange com funções do espaço de fase não sejam definidos, o fato de que eles estejam multiplicados pelos vínculos, os quais se anulam em  $\Sigma$ , dá sentido às equações de movimento (3.17). Para uma função qualquer do espaço de fase  $g(q, p)$  podemos escrever

$$\dot{g}(q, p) \Big|_{\Sigma} = \{g(q, p), H_p\} \Big|_{\Sigma} \quad . \quad (3.21)$$

Como as equações de movimento ficam restritas para a hipersuperfície de vínculos  $\Sigma$ , podemos dizer que se uma função  $g(q, p)$  se anula em  $\Sigma$ , ela é "fracamente" igual a zero,  $g(q, p) \approx 0$ , para denotar que seu PP com outras variáveis dinâmicas quaisquer, em geral, não se anula em  $\Sigma$  [1].



Usa-se o símbolo "  $\approx$  " para diferenciar as igualdades "fracas" das igualdades usuais ou "fortes". Daqui por diante, se escreverá os vínculos como.

$$\phi_m(q, p) \approx 0 \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (3.22)$$

para lembrar que em equações como (3.17), os PP devem ser computados antes de fazer-se uso das equações de vínculos. Suponhamos que (3.22) constitua um conjunto completo de equações independentes, onde a condição de independência significa que nenhum dos vínculos  $\phi_m(q, p)$  pode ser expresso como uma combinação linear dos demais, com funções regulares dos  $q$ 's e dos  $p$ 's como coeficientes. A condição de irredutibilidade [5, 7] significa que qualquer função  $g(q, p)$  que se anule fracamente é fortemente uma combinação linear dos vínculos i.e.

$$g(q, p) \approx 0 \quad , \quad g(q, p) = c^m(q, p) \phi_m(q, p) \quad . \quad (3.23)$$

Esta condição equivale a exigir que os gradientes dos vínculos sejam bem definidos e linearmente independentes em  $\Sigma$ , isto é, que a matriz  $2N \times J$

$$\left\| \begin{array}{c} -\frac{\partial \phi_m}{\partial q^k} \Big|_{\Sigma} \\ -\frac{\partial \phi_m}{\partial p_l} \Big|_{\Sigma} \end{array} \right\| \quad , \quad (3.24)$$

seja finita e de posto  $J$  [5, 7].

### 3.2 Condições de Consistência

A exigência que os vínculos primários se mantenham durante a evolução temporal do sistema conduz através de (3.17) às seguintes condições de consistência

$$\dot{\phi}_m(q, p) = \left\{ \phi_m(q, p), H_c \right\} + \lambda^n \left\{ \phi_m(q, p), \phi_n(q, p) \right\} \approx 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots, M \quad . \quad (3.25)$$

Estas equações podem ser classificadas em três categorias:

1. As que são identicamente satisfeitas em  $\Sigma$ .
2. As que não dependem dos  $\lambda$ 's.
3. As que impõem restrições sobre alguns dos (ou todos)  $\lambda$ 's.

As equações do tipo (2) são independentes dos vínculos primários, do contrário seriam do tipo (1). Elas constituem portanto, em novos vínculos entre as variáveis dinâmicas Hamiltoniana. Estes vínculos são chamados de "vínculos secundários" para ressaltar que, diferentemente dos primários, eles só emergem após o uso das equações de movimento, restringindo o movimento do sistema no espaço de fase a uma hipersuperfície  $\Sigma'$  de menor dimensionalidade que  $\Sigma$ . Representaremos os vínculos secundários por

$$\chi_s(q, p) \approx 0 \quad , \quad s = 1, 2, \dots, R' \quad . \quad (3.26)$$

Com os vínculos secundários, volta-se a exigir consistência, repetindo o procedimento anterior, e assim sucessivamente até que não apareçam mais vínculos independentes. Ao se esgotar o algoritmo, teremos um total de  $S$  vínculos que designaremos por

$$\chi_r(q, p) \approx 0 \quad , \quad r = M + 1, M + 2, \dots, M + S \quad . \quad (3.27)$$

O conjunto de todos os vínculos será denotado por

$$\phi_j(q, p) \approx 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, M + S \equiv J \quad . \quad (3.28)$$

Após exigir consistência de todos os vínculos secundários, ficamos com um certo número de equações tipo (c). Estas equações são da forma geral

$$\left\{ \phi_j(q, p), H_c \right\} + \lambda^n(t) \left\{ \phi_j(q, p), \phi_n(q, p) \right\} \approx 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots, M \quad . \quad (3.29)$$

Elas podem ser vistas como um sistema não-homogêneo de equações lineares em  $\lambda^m(t)$ , com coeficientes que dependem de  $(q, p)$ . A solução geral de (3.29) será da forma

$$\lambda^m(t) = \varphi^m(q, p) + \xi^a(t) \psi_a^m(q, p) \quad , \quad (3.30)$$

onde  $\varphi^m(q, p)$  é qualquer solução particular de (3.29) e  $\psi_a^m(q, p)$ ;  $a = 1, 2, \dots, A \leq S$ , é uma base de soluções do sistema homogêneo associado

$$\psi_a^m(q, p) \left\{ \phi_j(q, p), \phi_n(q, p) \right\} \approx 0 \quad , \quad (3.31)$$

e  $\xi^a(t)$  são funções completamente arbitrárias de  $t$ . Com isto, separamos dos  $\lambda^m(t)$  aqueles multiplicadores de Lagrange que ficam determinados pelas condições de consistência dos que permanecem totalmente arbitrários. Usando (3.30) e as seguintes relações

$$H' \equiv H_c + \varphi^m \phi_m \quad , \quad \phi_a \equiv \psi_a^m \phi_m \quad . \quad (3.32)$$

As equações de movimento podem ser escritas na forma

$$\dot{g}(q, p) = \left\{ g(q, p), H' + \xi^a \phi_a \right\} \quad . \quad (3.33)$$

onde podemos considerar as  $\xi^a$  como funções do espaço de fase. A função  $H_T = H' + \xi^a \phi_a$ , foi denominada por Dirac[1] de hamiltoniana total. Em termos de  $H_T$ , as equações de movimento para uma variável dinâmica  $g(q, p)$  assume a forma

$$\dot{g}(q, p) = \left\{ g(q, p), H_T \right\} \quad . \quad (3.34)$$

O conteúdo destas equações é idêntico ao das equações de EL [1, 7, 9].

As equações (3.34) mostram que, em geral após a aplicação de todas as restrições (3.29) aos multiplicadores  $\lambda^m(t)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ), ainda restam funções arbitrárias,  $\xi^a$  ( $a = 1, 2, \dots, A \leq S$ ), na teoria. O fato de que as soluções das equações de movimento dependem de funções arbitrárias do tempo é uma característica geral dos sistemas singulares.

### 3.3 Vínculos de primeira e segunda classe

A presença das funções arbitrárias  $\xi^a(t)$  na solução das equações de movimento (3.34) mostram que os valores dos  $q$ 's e dos  $p$ 's num instante futuro não ficam completamente determinados pelos seus valores num instante inicial. A partir de um mesmo ponto inicial  $(q_0, p_0)$  de  $\Sigma'$ , o sistema pode evoluir segundo diferentes trajetórias, todas em  $\Sigma'$  e uma para cada conjunto de funções  $\{\xi^a(t)\}$ . Na teoria de campos de calibre, dizemos que cada uma destas trajetórias constitui um "calibre" para o sistema e a arbitrariedade na escolha dos  $\xi^a(t)$  é chamada de liberdade de calibre. Todos os pontos de  $\Sigma'$  para os quais pode evoluir o sistema após um determinado intervalo de tempo, a partir de um mesmo estado inicial, seguindo cada um dos possíveis calibres, representa necessariamente o mesmo estado físico. Ainda quando cada ponto de  $\Sigma'$  corresponde apenas a um estado físico, a cada estado físico corresponde uma classe de equivalência de pontos em  $\Sigma'$ .

Consideremos uma função  $g(q, p)$ , de valor inicial  $g_0 \equiv g(q_0, p_0)$ , e calculemos através de (3.33) seu valor após um intervalo infinitesimal de tempo  $\Delta t$ , supondo que o sistema evolua segundo a liberdade de calibre  $\xi^a(t)$

$$g(t + \Delta t) \simeq g_0 + \left\{ g, H' \right\} + \xi^a(t) \left\{ g, \phi_a \right\} \Delta t \quad . \quad (3.35)$$

Fazendo o mesmo cálculo para a liberdade de calibre  $\xi'^a(t)$ , e subtraindo de (3.35), obteremos

$$\delta g \simeq \varepsilon^a(t) \left\{ g, \phi_a \right\} \quad , \quad (3.36)$$

onde  $\varepsilon^a(t) \equiv (\xi^a(t) - \xi'^a(t)) \Delta t$ , são funções infinitesimais e arbitrárias. Transformações do tipo (3.36), que conectam pontos de uma mesma classe de equivalência serão chamadas de "transformações de equivalência", elas não alteram o estado físico do sistema. De (3.36) concluímos que os vínculos  $\phi_a$  são geradores de transformações infinitesimais de equivalência.

As transformações de equivalência são muitas vezes chamadas de transformações de calibre na literatura [1, 8]. Para tratar as transformações de equivalência é conveniente introduzir a seguinte terminologia [5]. Dizemos que uma função  $F(q, p)$  é de primeira classe se

$$\left\{ F(q, p), \phi_j(q, p) \right\} \approx 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, J \quad . \quad (3.37)$$

Se uma função não é de primeira classe diz-se que ela é segunda classe. Usando a irreduzibilidade dos vínculos, (3.23), é possível provar que o PP de duas funções de primeira classe é também de primeira classe. É simples verificar que  $H'$  e  $\phi_a$ , (3.32) são funções de primeira classe [1]. Por conseguinte  $H_T$  é de primeira classe. Além disso, como  $\psi_a^m(q, p)$  é uma base de soluções de (3.31),  $\phi_a(q, p)$  constitui um conjunto completo de vínculos de primeira classe independentes. Ou seja, os vínculos  $\phi_a(q, p) \approx 0$ , que aparecem nas equações de movimento (3.33) multiplicada por funções arbitrárias do tempo, desempenham o papel de geradores de transformações de equivalência.

Em virtude do caráter primeira classe dos  $\phi_a(q, p)$ , a transformação de equivalência preserva os vínculos, i.e.,  $\delta \phi_j(q, p) \approx 0$ , ( $j = 1, 2, \dots, J$ ). Ou seja, as transformações de equivalência não conduzem a pontos fora de  $\Sigma'$  [1, 7]. Propriedade que deve ser satisfeita por qualquer transformação



de equivalência. A questão agora, é saber se, além dos  $\phi_a(q, p)$ , existem outros geradores de transformações de equivalência. Pode-se mostrar [5, 9] que as funções de primeira classe  $\phi_b(q, p)$

$$\left\{ \phi_a(q, p), \phi_b(q, p) \right\} \approx 0 \quad , \quad \left\{ \phi_a(q, p), H' \right\} \approx 0 \quad , \quad a, b = 1, 2, \dots, A \quad , \quad (3.38)$$

também são geradoras de transformações canônicas infinitesimais que não alteram o estado físico do sistema. Porém, as quantidades (3.38) podem incluir tanto vínculos de primeira classe primários e secundários. Concluimos, que podem existir vínculos secundários de primeira classe que geram transformações de equivalência. Este argumento não afirma que todos os vínculos secundários de primeira classe são geradores de transformações de equivalência. Apesar disso, não se conhece nenhum exemplo contendo um vínculo secundário de primeira classe que não gere transformações de equivalência [5, 1]. Por este motivo, Dirac [1, 9] conjecturou que todos os vínculos secundários de primeira classe atuam como geradores independentes de transformações infinitesimais de equivalência. Para sistemas que possuam só vínculos de primeira classe é possível mostrar que a conjectura vale como um teorema [11].

Para relacionar as transformações geradas pelos vínculos de primeira classe com as transformações de equivalência (calibre) é preciso de todos os vínculos de primeira classe e não só dos vínculos primários de primeira classe que originalmente aparecem na definição do Hamiltoniano primário. Dirac [1] não conhecia nenhum caso no qual o gerador de transformações de equivalência dependesse unicamente dos vínculos primários de primeira classe, assim, ele conjecturou em suas leituras [1] ampliar o Hamiltoniano primário para

$$H_E = H_P + \mu^b \phi_b \quad , \quad b = 1, 2, \dots, A \quad (3.39)$$

com multiplicadores arbitrários  $\mu^b$  em frente de todos os vínculos secundários de primeira classe.  $H_E$  é chamado de Hamiltoniano estendido, e é ele o que determinará de agora em diante a dinâmica do sistema. O Hamiltoniano primário descreve a dinâmica, mas este não reflete a completa liberdade de calibre do sistema. Se se deseja ressaltar este conceito, o Hamiltoniano estendido é mais geral que o Hamiltoniano primário.

### 3.4 Parênteses de Dirac

A distinção entre vínculos primários e secundários depende do lagrangiano de partida e em geral não é único, ao contrário, a classificação dos vínculos  $\phi_j(q, p)$  em vínculos de primeira classe

$$\Psi_\alpha(q, p) \approx 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, C \quad , \quad (3.40)$$

e vínculos de segunda classe

$$\Theta_\beta(q, p) \approx 0 \quad , \quad \beta = 1, 2, \dots, D \quad , \quad (3.41)$$

onde ( $C + D = J$ ), é mais importante. Enquanto os vínculos de primeira classe são geradores de transformações infinitesimais que não muda o estado físico do sistema, as transformações geradas



pelos vínculos de segunda classe não tem interesse físico pelo fato de que eles não conservam os vínculos.

Em princípio, a separação em vínculos de primeira e segunda classe é ambígua já que certas combinações lineares de vínculos de segunda classe podem resultar em vínculos de primeira classe. Assim, escolhendo novos vínculos como uma combinação linear dos antigos, podemos passar de vínculos de segunda classe em primeira. Vamos assumir que em (3.40) e (3.41) já passamos o maior número de vínculos de segunda à primeira classe, portanto, nenhuma combinação de vínculos de segunda classe pode ser um vínculo de primeira classe. Isto implica que podemos exigir que a seguinte matriz

$$C_{\beta\gamma}(q, p) \equiv \left\{ \Theta_{\beta}(q, p), \Theta_{\gamma}(q, p) \right\} \quad , \quad \beta, \gamma = 1, 2, \dots, D \quad , \quad (3.42)$$

seja invertível em  $\Sigma'$  [1, 14], i.e.

$$\det \left\| \left\{ \Theta_{\beta}(q, p), \Theta_{\gamma}(q, p) \right\} \right\|_{\Sigma'} \neq 0 \quad . \quad (3.43)$$

Como a matriz  $C$  é anti-simétrica, a condição (3.43) garante que o número de vínculos de segunda classe é sempre par ( $D = 2L$ ). A presença de vínculos de segunda classe implica na existência de coordenadas que não são independentes e que podem ser suprimidas da teoria expressando-as em termos das coordenadas independentes, para isto, eliminamos os vínculos de segunda classe construindo novos parênteses que atuem só nos graus de liberdade da teoria.

Para eliminar sistematicamente os vínculos de segunda classe, Dirac introduziu os seguintes parênteses para duas variáveis dinâmicas  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$  [1]

$$\left\{ f, g \right\}_D \equiv \left\{ f, g \right\} - \left\{ f, \Theta_{\beta} \right\} D^{\beta\gamma} \left\{ \Theta_{\gamma}, g \right\} \quad , \quad (3.44)$$

onde  $D$  é a inversa da matriz  $C$ . Os parênteses (3.44) são conhecidos na literatura como parênteses de Dirac (PD) [5, 7, 8]. Mostra-se que os PD tem as propriedades gerais dos PP [1, 2, 7], i.e.

$$\begin{aligned} \left\{ f, g \right\}_D &= - \left\{ g, f \right\}_D \\ \left\{ f, c_1 g + c_2 h \right\}_D &= c_1 \left\{ f, g \right\}_D + c_2 \left\{ f, h \right\}_D \\ \left\{ f, gh \right\}_D &= g \left\{ f, h \right\}_D + \left\{ f, g \right\}_D h \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\left\{ f, \left\{ g, h \right\}_D \right\}_D + \left\{ g, \left\{ h, f \right\}_D \right\}_D + \left\{ h, \left\{ f, g \right\}_D \right\}_D = 0 \quad ,$$

se  $f(q, p)$  ou  $g(q, p)$  é de primeira classe, é possível verificar a seguinte propriedade

$$\left\{ f, g \right\}_D \approx - \left\{ f, g \right\} \quad , \quad (3.46)$$

e qualquer que seja  $f(q, p)$

$$\left\{ f, \Theta_{\beta} \right\}_D = 0 \quad , \quad \beta = 1, 2, \dots, D \quad . \quad (3.47)$$

Assim, podemos fazer todos os vínculos de segunda classe fortemente nulos, porque, segundo (3.47), o PD de alguma variável dinâmica com um vínculo de segunda classe é nulo. A propriedade (3.46) permite escrever as equações de movimento (3.34) em termos dos PD

$$\dot{g}(q, p) \approx \left\{ g(q, p), H_T \right\}_D . \quad (3.48)$$

Pela propriedade (3.47) as equações fracas podem ser convertidas em equações fortes

$$\Theta_\beta(q, p) = 0 \quad , \quad \beta = 1, 2, \dots, D \quad , \quad (3.49)$$

portanto, podemos usar (3.49) para eliminar totalmente  $2L$  dos  $q$ 's e dos  $p$ 's, expressando-os como funções das restantes variáveis canônicas. Assim, as equações de movimento (3.48) envolvem apenas  $2(N - L)$   $q$ 's e dos  $p$ 's independentes e os únicos vínculos que se mantêm na teoria são os vínculos de primeira classe. O símbolo de igualdade fraca em (3.48) refere-se aos vínculos de primeira classe, mas, no caso especial em que o sistema só possui vínculos de segunda classe, (3.48) pode ser considerada como uma equação forte e útil para quantizar sistemas vinculados.

Um estudo sistemático da estrutura de vínculos pode ser realizado para um sistema mecânico clássico descrito por variáveis de Grassmann [12]. Esta mecânica foi denominada de Pseudomecânica [3] e é o limite clássico de uma teoria quântica fermiônica com operadores de Fermi. Uma característica do lagrangiano que descreve um sistema relativista usando variáveis de Grassmann é que ele é singular [5, 13].

### 3.5 Condições de Gauge

Se o número de vínculos de segunda classe é demasiado grande, existe um método iterativo para calcular os PD evitando-se inverter a matriz do subconjunto total de vínculos de segunda classe. O método consiste em tomar um subconjunto de vínculos de segunda classe,  $\{\Theta'_\beta\} \subset \{\Theta_\beta\}$ ,  $C'_{\beta\gamma} \equiv \{\Theta'_\beta, \Theta'_\gamma\}$ , com  $\det C' \neq 0$ , e definimos os PP por

$$\{f, g\}_{D(C')} \equiv \{f, g\} - \{f, \Theta'_\beta\} D'^{\beta\gamma} \{\Theta'_\gamma, g\} . \quad (3.50)$$

Depois escolhemos um outro subconjunto dos vínculos restantes,  $\{\Theta''_\beta\} \subset \{\Theta_\beta\}$ ,  $C''_{\beta\gamma} \equiv \{\Theta''_\beta, \Theta''_\gamma\}_{D(C'')}$ , com  $\det C'' \neq 0$ , e definimos agora

$$\{f, g\}_{D(C'')} \equiv \{f, g\}_{D(C')} - \{f, \Theta'_\beta\}_{D(C')} D''^{\beta\gamma} \{\Theta'_\gamma, g\}_{D(C')} . \quad (3.51)$$

E, continuamos o procedimento até que todos os vínculos de segunda classe do conjunto  $\{\Theta_\beta\}$  sejam considerados. O resultado é como calcular os PD num só passo [5, 8].

Os vínculos de segunda classe podem ser eliminados da teoria usando os DB, mas ainda temos os vínculos de primeira classe. Os vínculos de primeira classe e a liberdade de calibre associada a eles indica que temos um conjunto de variáveis canônicas correspondentes ao mesmo estado físico. Esta ambigüidade se elimina impondo restrições adicionais sobre as variáveis canônicas

(condições de gauge canônicas), assim obteremos a correspondência um a um entre estados físicos e os valores das variáveis canônicas que são deixados independentes depois que as condições adicionais são impostas. Estas condições de calibre não são uma consequência da teoria, mas sim equações externas introduzidas à teoria para evitar a "múltipla contagem de estados" [15]. Essas condições adicionais removem os elementos arbitrários da teoria e não afetam as propriedades dos observáveis (invariantes de calibre). Assumindo que todos os vínculos de primeira classe são independentes, as propriedades [5, 15, 16] que um conjunto de condições de gauge

$$\Omega_\beta(q, p) \approx 0 \quad (3.52)$$

devem satisfazer são

1. As condições de calibre devem ser atingidas; isso significa que, dado um conjunto de variáveis canônicas, deverá existir uma transformação de calibre que transporta um conjunto de  $q$ 's e  $p$ 's que não satisfaz a condição de calibre num conjunto que as cumpre. Esta transformação deve ser obtida por iteração de transformações infinitesimais da forma  $\delta u^\beta \{F, \Psi_\alpha\}$ . O número de parâmetros independentes  $\delta u^\beta$  é igual ao número de vínculos de primeira classe independentes  $\Psi_\alpha$ , assim o número de condições de gauge independentes (3.52) não pode ser maior que o número de independentes  $\Psi_\alpha$ .
2. As condições (3.52) devem fixar o calibre completamente, isto quer dizer, uma vez que (3.52) seja estabelecido não existe nenhuma transformação de calibre que leve para algum outro  $\tilde{\Omega}_\beta(q, p)$  que cumpra a mesma condição, exceto a identidade. Em outras palavras, a equação

$$\delta u^\beta \{ \Omega_\alpha, \Psi_\beta \} \approx 0 \quad (3.53)$$

deve implicar que

$$\delta u^\beta = 0. \quad (3.54)$$

(3.53) implica (3.54) só se o número de equações independentes for igual ou maior que os  $\delta u^\beta$  desconhecidos. As condições (1) e (2) implicam em que para poder fixar o calibre completamente o número de condições de calibre independentes deve ser igual ao número de vínculos de primeira classe independentes. Assim que  $\{ \Omega_\alpha, \Psi_\beta \}$  implicará (3.53) que formará uma matriz quadrada e inversível; assim, teremos a condição

$$\det \{ \Omega_\alpha, \Psi_\beta \} \neq 0. \quad (3.55)$$

Essa condição expressa que o conjunto de vínculos  $\Omega_\alpha$  e  $\Psi_\beta$  é agora de segunda classe. Conseqüentemente, depois de fixar o gauge completamente já não existem vínculos de primeira classe na teoria.

3. As condições de calibre devem ser preservadas pela evolução dinâmica do sistema (equações de movimento mais condições iniciais).
4. A invariância de Lorentz da teoria não deve ser destruída pelas condições de calibre.

Concluimos que para cada vínculo independente de primeira classe uma condição de calibre deve ser introduzida. Todos os vínculos da teoria, incluindo as condições de calibre, são de segunda classe. Podemos organizar todos os vínculos num vetor  $\{\Phi_r\} = \{\Theta_\gamma, \Psi_\beta, \Omega_\alpha\}$  e definir a matriz não singular formada pelos PP entre as diferentes componentes do vetor

$$G_{rs} \equiv \left\{ \Phi_r, \Phi_s \right\} \quad (3.56)$$

e como tal as equações de movimento terão a forma

$$\dot{g} = \left\{ g, H_C \right\}_{D(G)}, \quad (3.57)$$

e usando a propriedade iterativa para calcular PD, (3.50) e (3.51), teremos que

$$\left\{ g, H_C \right\}_{D(G)} = \left\{ g, H_C \right\}_{D(C)} - \left\{ g, \Lambda_I \right\}_{D(C)} G_{IJ}^{-1} \left\{ \Lambda_J, H_C \right\}_{D(C)} \quad (3.58)$$

com  $\Lambda_I$  representando um elemento do conjunto  $\{\Psi_\beta, \Omega_\alpha\}$  formado pelos vínculos de primeira classe e as condições de calibre. E sendo

$$G_{IJ}^{-1} \equiv \left\{ \Lambda_I, \Lambda_J \right\}_{D(\Delta)} \quad (3.59)$$

a inversa da matriz de vínculos definida em termos dos PD formados só pelos vínculos de segunda classe. Agora sob a definição destes PD todos os vínculos da teoria, incluindo as condições de calibre, são fortemente nulas.

Os graus físicos de liberdade serão determinados pela seguinte relação

$$K = 2N - L - M - M = 2N - L - 2M. \quad (3.60)$$

$K$  = número de variáveis canônicas independentes (Espaço de fase reduzido).

$2N$  = número total de variáveis canônicas.

$L$  = número de vínculos de segunda classe.

$M$  = número de vínculos de primeira classe.

$M$  = número de condições de gauge.

Embora a escolha de condições de calibre (chamado também de método implícito) permita escrever em termos dos PD, em geral, não é possível encontrar uma representação para o espaço de fase reduzido. Na maioria dos sistemas de interesse físico não se pode isolar e identificar as coordenadas deste espaço, contudo, a dimensão do espaço reduzido é determinada por (3.60). O método, apresentado nas referências [5, 17], de redução de gauge explícito tenta isolar e identificar os pares canônicos do espaço de fase reduzido.



# Bibliografia

- [1] P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950).  
P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **3**, 1 (1951).  
P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 236 (1958).  
P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 333 (1958).  
P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964.  
C. A. P. Galvão, *Introdução à Quantização de Teorias Gauge*, a ser publicado.
- [2] P. G. Bergmann and J. H. M. Brunnings, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 480 (1949).  
P. G. Bergmann, R. Penfield, R. Schiller and H. Zatzkis, *Phys. Rev.*, **80**, 81 (1950).  
P. G. Bergmann and R. Schiller, *Phys. Rev.*, **89**, 4 (1953).  
P. G. Bergmann and I. Goldberg, *Phys. Rev.*, **98**, 531 (1955).  
P. G. Bergmann, *Nuovo Cim.*, **3**, 1177 (1956).  
P. G. Bergmann, I. Goldberg, A. Janis and E. Newman, *Phys. Rev.*, **103**, 807 (1956).  
P. G. Bergmann, *Rev. Mod. Phys.*, **33**, 510 (1961).  
P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, **144**, 1078 (1966).
- [3] R. Casalbouni, *Nuovo Cim.* **33A**, 115 (1976).  
R. Casalbouni, *Nuovo Cim.* **33A**, 389 (1976).
- [4] I. Batalin and G. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **69**, 309 (1977).
- [5] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, Vol. 169, Springer, New York, 1982.
- [6] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover Publications, New York, 1975.
- [7] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective*, Wiley, New York, 1974.
- [8] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1976.

- [9] C. Teitelboim, *Ann. of Phys.*, **79**, 542 (1973).
- [10] H. O. Girotti, *V<sup>th</sup> Summer School Jorge Andre Swieca, Section: Particles and Fields. Campos de Jordão, SP, Brazil, (1989)*, pp. 1.
- [11] M. E. V. Costa, H. Girotti and T. J. S. Simões, *Phys. Rev.*, **D32**, 405 (1985).
- [12] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966.  
F. A. Berezin, *Introduction to Superanalysis*, Series Mathematical Physics and Applied Mathematics, Vol. D, Reidel Publishing Company, 1987.
- [13] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag, 1990.
- [14] P. Senjanovic, *Ann. of Phys.*, **100**, 227 (1976).
- [15] M. Henneux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, New Jersey, 1992.
- [16] C. A. Galvão and B. M. Pimentel, *Can. J. Phys.* **66**, 460 (1988).
- [17] S. A. Gogilidze, A. M. Khvedelidze and V. N. Pervushin, hep-th/9504154.

## Capítulo 4

# Modelos em Duas Dimensões

A idéia básica deste capítulo é realizar um estudo da teoria de campos em duas dimensões nas coordenadas do plano nulo e ressaltar as principais diferenças que existem com a formulação da teoria de campos nas coordenadas da forma instantânea.

Em primeiro lugar, vamos estudar o modelo de Schwinger massivo [1], onde observaremos que a natureza singular das matrizes  $\gamma$  implicará na existência de vínculos adicionais no setor fermiônico, sendo demonstrado que estes são puramente de segunda classe. Vínculos de primeira classe são encontrados exclusivamente no setor bosônico. Apropriadas condições de gauge são impostas as quais determinam a álgebra de Lie graduada da teoria. Posteriormente estudaremos a eletrodinâmica escalar em duas dimensões ( $SQED_2$ ) [2], onde poderemos determinar que um dos vínculos de primeira classe da teoria recebe uma contribuição do setor escalar, característica não apresentada nas coordenadas usuais. Utilizando o método de Dirac para sistemas singulares, determinaremos os parênteses de Dirac (PD). Finalmente, estudaremos a interação de um campo de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) com o campo eletromagnético [3], onde determinaremos a estrutura de vínculos e os PD entre os graus de liberdade da teoria serão calculados. Mostraremos a equivalência desta teoria com a  $SQED_2$  quando a representação física do campo DKP for considerada.

# Bibliografía

- [1] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Int. J. Mod. Phys.*, **E16**, 2993 (2007).
- [2] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Revista Colombiana de Física*, Vol. **41**, No 1, 220 (2009).
- [3] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Revista Colombiana de Física*, Vol. **41**, No 1, 206 (2009).



## 4.1 O modelo de Schwinger no plano nulo

Estudaremos o modelo de Schwinger no plano nulo usando o método de Dirac para sistemas com vínculos. O campo fermiônico será analisado utilizando sua projeção natural sobre plano nulo, que surge da álgebra das matrizes  $\gamma$ . É mostrado que o setor fermiônico do modelo de Schwinger tem unicamente vínculos de segunda classe, e os vínculos de primeira classe são exclusivos do setor bosônico. Finalmente, estabelecemos a álgebra de Lie graduada entre as variáveis dinâmicas, via parênteses de Dirac generalizados no gauge de plano nulo, que é consistente com todos os vínculos da teoria.

## THE SCHWINGER MODEL ON THE NULL-PLANE

R. CASANA

*Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão (UFMA)  
Campus Universitário do Bacanga, CEP 65085-580, São Luís, MA, Brazil  
casana@ufma.br*

B. M. PIMENTEL\* and G. E. R. ZAMBRANO†,‡

*Instituto de Física Teórica (IFT/UNESP), UNESP - São Paulo State University  
Rua Pamplona 145, CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brazil*

*\* pimentel@ift.unesp.br*

*† gramos@ift.unesp.br*

Received 17 May 2007

Revised 25 July 2007

Accepted 31 July 2007

We study the Schwinger Model on the null-plane using the Dirac method for constrained systems. The fermion field is analyzed using the natural null-plane projections coming from the  $\gamma$ -algebra and it is shown that the fermionic sector of the Schwinger Model has only second class constraints. However, the first class constraints are exclusively of the bosonic sector. Finally, we establish the graded Lie algebra between the dynamical variables, via generalized Dirac bracket in the null-plane gauge, which is consistent with every constraint of the theory.

*Keywords:* null-plane; Hamiltonian method; Schwinger model.

PACS numbers: 11.10.Ef, 11.15.-q, 04.20.Fy

### 1. Introduction

Half the of last century Dirac<sup>1</sup> proposed three different forms of relativistic dynamics depending on the types of surfaces where independent modes were initiated. One of them is the *front form*, which is a surface of a single light wave, commonly referred to as *null-plane (light-front or light-cone)* formalism. A notable feature of a relativistic theory on the null-plane is that it gives rises to a constrained dynamical system.<sup>2</sup> Srivastava<sup>3</sup> studied the light-front quantization of the bosonized version of the Schwinger model in the continuum formalism, the propose of his work was to show that the quantization of the massless Schwinger model on the light-front

‡On leave of absence from Departamento de Física, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Nariño, Colombia.

leads in a straightforward way to the  $\theta$ -vacua structure. Eller and Pauli<sup>4</sup> applied the method of discretized light-cone quantization to the case of massive and massless electrons, obtaining the correct mass for the Schwinger particle and reproducing correctly many known features of the spectrum.

The aim of the present work is to construct the Hamiltonian formulation of the Schwinger model in the null-plane description and to obtain a graded algebra among the fundamental dynamical variables of the theory. The constraint analysis shows the existence of hidden first class constraints<sup>5</sup> and we are going to show that when we impose the appropriate boundary conditions<sup>6</sup> on the fields we eliminate this hidden first class constraints<sup>7</sup>; showing that the constraint analysis in Ref. 8 is wrong. The work is organized as follow. In the Sec. 2 we are going to do the constraint analysis, next we classify the constraints and we impose the corresponding gauge fixing conditions. Finally, we invert the constraints by imposing appropriate boundary conditions and the Dirac brackets (*DB*) of the theory are calculated. In the last section, we summarize the results obtained by us.

## 2. Massive Schwinger Model

The gauge theory we are considering is defined by the following Lagrangian density

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\varphi}_+\gamma^+\partial_+\varphi_+ - \frac{i}{2}\partial_+\bar{\varphi}_+\gamma^+\varphi_+ + \frac{i}{2}\bar{\varphi}_-\gamma^-\partial_-\varphi_- - \frac{i}{2}\partial_-\bar{\varphi}_-\gamma^-\varphi_- + m\bar{\varphi}_+\varphi_- - m\bar{\varphi}_-\varphi_+ - gA_+\bar{\varphi}_+\gamma^+\varphi_+ - gA_-\bar{\varphi}_-\gamma^-\varphi_- - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1)$$

the coordinate  $x^+$  will be our time variable and  $\varphi_{\pm}$ ,  $\bar{\varphi}_{\pm}$  are the fermionic projections in the light-cone system (For notations see Ref. 8).

From the relations defining the conjugate momenta we obtain the following primary constraints

$$C \equiv \pi^+ \approx 0, \quad \Gamma_+ \equiv p_+ + \frac{i}{2}\gamma^+\psi_+ \approx 0, \quad \Gamma_- \equiv p_- \approx 0 \quad (2)$$

$$\bar{\Gamma}_+ \equiv \bar{p}_+ + \frac{i}{2}\bar{\psi}_+\gamma^+ \approx 0, \quad \bar{\Gamma}_- \equiv \bar{p}_- \approx 0. \quad (3)$$

Also we get the dynamical relation  $\pi^- = \partial_+A_- - \partial_-A_+$ . Also,  $\pi^{\pm}$  is the momentum conjugate to  $A_{\pm}$ ,  $\bar{p}_{\pm}$  to  $\varphi_{\pm}$  and  $p_{\pm}$  to  $\bar{\varphi}_{\pm}$ , respectively.

The canonical Hamiltonian density is

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}(\pi^-)^2 + \pi^-\partial_-A_+ - \frac{i}{2}\bar{\varphi}_-\gamma^-\partial_-\varphi_- + \frac{i}{2}\partial_-\bar{\varphi}_-\gamma^-\varphi_- + gA_-\bar{\varphi}_-\gamma^-\varphi_- + gA_+\bar{\varphi}_+\gamma^+\varphi_+ + m\bar{\varphi}_+\varphi_- + m\bar{\varphi}_-\varphi_+ \quad (4)$$

and,  $H_P = H_c + \int dy^- [uC + \bar{\Gamma}_+v_1 + \bar{\Gamma}_-v_2 - \bar{v}_1\Gamma_+ - \bar{v}_2\Gamma_-]$ , is the primary Hamiltonian.  $u$  is a bosonic Lagrange multiplier and  $v_1, v_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2$  are fermionic multipliers.

The consistence condition on the fermionic constraints yields the following set of secondary constraints

$$\chi = \Delta^+ \psi_- \approx 0, \quad \Omega_- = \gamma^- (i\partial_- - gA_-) \psi_- - m\psi_+ \approx 0 \quad (5)$$

$$\bar{\chi} = \bar{\psi}_- \Delta^- \approx 0, \quad \bar{\Omega}_- = (i\partial_- + gA_-) \bar{\psi}_- \gamma^- + m\bar{\psi}_+ \approx 0, \quad (6)$$

and equations for some components of the fermionic multipliers. The preservation under time evolution of the secondary fermionic constraints time results in additional conditions on the fermionic multipliers being they determined completely. In the similar way the consistence of the bosonic primary constraints yields  $\dot{C} = \partial_- \pi^- - g\bar{\varphi}\gamma^+\varphi \equiv G \approx 0$ , which is a secondary constraint, named as Gauss's law, where its consistence condition shows that it is automatically conserved in time, then no more constraints in the theory are generated.

### 2.1. Constraint classification

Now, we are going to classify the constraints. It is clear to shows that  $\pi^+$  is a first-class constraint. The remaining subset  $\{G, \Gamma_+, \Gamma_-, \chi, \Omega_-, \bar{\Gamma}_+, \bar{\Gamma}_-, \bar{\chi}, \bar{\Omega}_-\}$  has a singular constraint matrix and therefore it can be shown that it has only one zero mode whose eigenvector gives a following first class constraint,<sup>9</sup>

$$\Sigma = G - ig [\bar{\psi}_+ \Gamma_+ + \bar{\Gamma}_+ \psi_+ + \bar{\psi}_- \Gamma_- + \bar{\Gamma}_- \psi_-]. \quad (7)$$

Then, the subset of first class constraints is  $\pi^+$  and  $\Sigma$  and the subset of fermionic second-class constraints is  $\{\Gamma_+, \Gamma_-, \chi, \Omega_-, \bar{\Gamma}_+, \bar{\Gamma}_-, \bar{\chi}, \bar{\Omega}_-\}$ . Our result clarifies and it corrects the result found in Ref. 8, where the constraint analysis affirms the existence of proper first class constraints in the fermionic sector, but, as we have just shown such a statement it is not true when a careful analysis is carried out. However, it is possible to show that the first class nature in the fermionic sector is related to the hidden subset of first-class constraints which generate improper gauge transformations<sup>5</sup> associated with the insufficiency of the initial value data.

Now the next step is to impose gauge conditions, one for every first class constraint such that the set of gauge fixing conditions and first class constraints turns on a second class set. The choosing of the appropriate set of gauge conditions is a careful procedure, because they should be compatible with the Euler-Lagrange equations of motion. Thus, we choose a set of gauge conditions known as the null-plane gauge and it is defined by the following relations  $B = A_- \approx 0, K \equiv \pi^- + \partial_- A_+ \approx 0$ , which are standard in the pure gauge theory.<sup>10</sup>

### 2.2. Dirac brackets

To obtain the Dirac brackets is necessary the explicit evaluation of the inverse of the matrix of second class constraints; but this inverse is not unique, it involves an arbitrary function which is related to the hidden first class constraints mentioned previously. However, this hidden first class subset can be fixed by considering appropriated boundary conditions<sup>6</sup> on the fields  $(\varphi, \bar{\varphi}, A_\mu)$ , and then a unique inverse for



the constraint matrix is obtained. Thus, the DB among the fundamental variables of the theory are

$$\{\varphi_a(x), \bar{\varphi}_b(y)\}_D = \frac{im^2}{8} \gamma_{ab}^+ |x-y| - \frac{m}{4} \mathbb{I}_{ab} \epsilon(x-y) - \frac{i}{2} \gamma_{ab}^- \delta(x-y) \quad (8)$$

$$\{\varphi(x), A_+(y)\}_D = i\frac{g}{2} \varphi(x) |x-y| - i\frac{g}{4} \int dv \epsilon(x-v) \Delta^- \varphi(v) \epsilon(v-y) \quad (9)$$

$$\{\bar{\varphi}(x), A_+(y)\}_D = -\frac{ig}{2} \bar{\varphi}(x) |x-y| + i\frac{g}{4} \int dv \epsilon(x-v) \bar{\varphi}(v) \Delta^+ \epsilon(v-y) \quad (10)$$

### 3. Remarks and Conclusion

We have performed the constraint analysis of the (1+1) dimensional massive QED and the careful analysis of the fermionic sector shows that it has only second class constraints and, the first class constraints are exclusive of the electromagnetic sector. The fermionic second class constraints allow to show the fermionic fields are fully described by only one of their two components.

In the Ref. 8, the constraints analysis follows an erroneous procedure and it gets to show the existence of proper first class constraint in the fermionic sector. Such affirmations can be easily drop down by considering that the Dirac equation is a linear equation of first order in time in the front form formalism where the fermionic sector presents a second class structure. When we pass to the null-plane formalism the Dirac equation remains of first order in time, therefore, the constraint classification must be second class, too. As we show, the first class constraints for the fermionic sector reported in Ref. 8 do not exist in the sense of proper ones, however, a type of improper first class constraint is related to the ambiguity in the definition of the inverse of the operator  $\partial_-$ , or in other words, they are related to the zero modes of the operator. Such ambiguities are eliminated by fixing the necessary boundary conditions. Then, our contribution presents a correct use of the Dirac procedure applied to null-plane field theories.

Finally, choosing the light-cone gauge we fix the bosonic first class constraints and the graded Lie algebra for the canonical variables is given via generalized Dirac brackets. The graded algebra for massless Schwinger model can be obtained from the massive case doing the limit when  $m \rightarrow 0$  in Eqs. (8)–(10).

The obtained graded algebra via the correspondence principle reproduce the canonical (anti)-commutation relations obtained at quantum level in Ref. 6.

### Acknowledgments

BMP thanks CNPq and FAPESP (grant 02/00222-9) for partial support. GERZ thanks CNPq (grant 142695/2005-0) for full support.

### References

1. P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 392.

2. P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics* (Benjamin, New York, 1964).
3. P. P. Srivastava, in *Quantum Field Theory: A 20th Century Profile*, ed. A. N. Mitra (New Delhi: Indian National Science Academy, 2000), p. 437.
4. T. Eller, H. C. Pauli and S. Brodsky, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 1493.
5. R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboin, *Nucl. Phys. B* **122** (1976) 61.
6. F. Rohrlich, *Acta Phys. Austriaca, Suppl.* **VIII** (1971) 277.
7. P. J. Steinhardt, *Ann. Phys.* **128** (1980) 425.
8. D. Mustaki, *Phys. Rev. D* **42** (1990) 1184.
9. R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *in preparation* (2007).
10. E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **8** (1971) 2736.

## 4.2 $SQED_2$ no plano nulo

Neste trabalho vamos estudar a eletrodinâmica escalar em duas dimensões ( $SQED_2$ ) no plano nulo. Mostra-se que um dos vínculos de primeira classe da teoria tem uma contribuição do setor escalar, além disso, neste setor manifestam-se vínculos ainda no caso livre, os quais não estão presentes quando estudamos o modelo nas coordenadas usuais. O método de Dirac para sistemas com vínculos será aplicado para calcular os parênteses de Dirac da teoria.



## $SQED_2$ on the null-plane

R. Casana<sup>a</sup>, B. M. Pimentel<sup>b</sup> and G. E. R. Zambrano<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Universidade Federal do Maranhão (UFMA), Departamento de Física, Campus Universitário do Bacanga, CEP 65085-580, São Luís - MA, Brazil.

<sup>b</sup>Instituto de Física Teórica (IFT/UNESP), UNESP - São Paulo State University, Rua Pamplona 145, CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brazil

Recibido 22 de Oct. 2007; Aceptado 15 de Oct. 2008; Publicado en línea 5 de Ene. 2009

### Resumen

En este trabajo se estudia la electrodinámica escalar en 2 dimensiones ( $SQED_2$ ) sobre el plano nulo. Se muestra que una de las ligaduras de primera clase de la teoría tiene una contribución proveniente del sector escalar, además en este sector se manifiestan ligaduras aun en el caso libre que no están presentes cuando estudiamos el modelo en las coordenadas usuales. El método de Dirac para sistemas con ligaduras es aplicado para calcular los corchetes de Poisson generalizados de la teoría.

**Palabras Clave:** electrodinámica escalar, método hamiltoniano, Plano nulo

### Abstract

In this paper we study the scalar electrodynamics ( $SQED_2$ ) on the null-plane in a 2-dimensional space-time. It is shown that one first class constraints has a contribution provided by the scalar sector and, in addition, this sector has a second class constraint which is also manifested in the free case. Such constraint structure in the scalar sector is not present in the instant form formalism. The Dirac's method for constrained system is applied to calculate the Dirac brackets (DB) of the theory.

**Keywords:** Scalar electrodynamics, Hamiltonian method, null-plane

©2009. Revista Colombiana de Física. Todos los derechos reservados.

### 1. Introduction

Dirac [1] formulated two requirements on relativistic dynamical systems: the special relativity and that the equation of motion shall be expressible in the hamiltonian form. These conditions do not define a dynamical system but limit the possible forms that it may be taken and, a complete description of the dynamics implies to specify all the interactions of the system. The evolution of a system in non-relativistic mechanics is determined by the hamiltonian: the state of the system at some time  $t = cte$  permits to calculate its state at any other later time. The state specified at surface  $t = cte$  represents the initial conditions of the system. In Minkowski space any hyper-surface that does not contain time-like directions can be used to establish the initial conditions

and it is useful to try find hyper-surface with all possible symmetries, then, we can consider the subgroup of the Poincaré group that maps the hyper-surface onto itself (kinematical generators). If an hyper-surface has the property to be transitive all its points are equivalents and if we limit our initial hyper-surface to transitive one, there are five different possibilities, corresponding to five subgroups of the Poincaré group. Dirac found three initial hyper-surfaces: Instant form ( $x^0 = 0$ ), Front form or *null-plane* ( $x^0 + x^3 = 0$ ) and Point form ( $x^2 = a^2, x^0 > 0$ ). The null-plane has the feature that a relativistic theory on it gives rise to a constrained system [2] and it leads in general to a reduction in the number of independent field operators in the phase space. The present work is addressed to the study of the constrained structure of  $SQED_2$  on the null-plane fol-



lowing the Dirac's formalism for constrained systems. This work is organized as follows: In the section 2 we analyze the constrained structure in detail and after its classification the maximal set number of first class constraints is obtained. By imposing the null-plane gauge conditions the set of first class constraints is turned on in a second class set. In the section 3 by imposing appropriated boundary conditions on the fields the DB's are calculated. In the last section we give our remarks and conclusions.

## 2. Constraint Structure and Classification

The scalar electrodynamics is defined by the following lagrangian density

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(D_\mu\phi)(D_\nu\phi)^* - m^2\phi\phi^*, \quad (1)$$

where  $\phi$  is a complex scalar field,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  and  $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu$  is the covariant derivative. The theory is invariant under the  $U(1)$  local gauge symmetry

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi, \quad \phi^* \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\phi^*, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha \quad (2)$$

The Euler-Lagrange field equations are

$$\begin{aligned} \partial_\mu^x F^{\mu\alpha} + j^\alpha &= 0, \\ D_\mu D^\mu\phi + m^2\phi &= 0, \\ (D_\mu D^\mu\phi)^* + m^2\phi^* &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

where  $j^\mu \equiv ig[\phi(D^\mu\phi)^* - \phi^*(D^\mu\phi)]$  is the conserved current.

The canonical conjugate momenta of the fields ( $A_\mu, \phi, \phi^*$ ) are

$$\begin{aligned} \pi^\mu &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_+A_\mu)} = -F^{+\mu}, \\ \pi^* &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_+\phi)} = (D_-\phi)^*, \\ \pi &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_+\phi^*)} = D_-\phi, \end{aligned} \quad (4)$$

respectively, and from them we found the following set of primary constraints

$$\begin{aligned} C &\equiv \pi^+ \approx 0, \\ \Gamma &\equiv \pi - D_-\phi \approx 0, \\ \Gamma^* &\equiv \pi^* - (D_-\phi)^* \approx 0; \end{aligned} \quad (5)$$

and the dynamical relation:  $\pi^- = \partial_+A_- - \partial_-A_+$ .

The canonical hamiltonian,  $H_C$ , is

$$H_C = \int dy^- \left[ \frac{1}{2}(\pi^-)^2 + (\pi^- \partial_- - j^+) A_+ + m^2\phi\phi^* \right] \quad (6)$$

Following the Dirac's procedure we define the primary hamiltonian,  $H_P$ , by adding to the canonical hamiltonian the primary constraints with their respective Lagrange multipliers

$$H_P = \int dy^- \left[ \frac{1}{2}(\pi^-)^2 + (\pi^- \partial_- - j^+) A_+ + m^2\phi\phi^* + uC + v^*\Gamma + \Gamma^*v \right] \quad (7)$$

where  $u$  is the multiplier associated to the electromagnetic constraint while that  $v^*$  and  $v$  are the respective multipliers for the scalar constraints.

The primary constraints must be preserved under time evolution generated by the primary hamiltonian (consistence condition) by requiring a weakly vanishing Poisson bracket (PB) with the  $H_P$ , *i. e.*,  $\{\cdot, H_P\} \approx 0$ . Thus, the consistence conditions of the primary constraints yield

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &= \{\Gamma(x), H_P\} = \\ &= -ig[\phi\pi^- + 2D_-(\phi A_+)] - m^2\phi - 2D_-v \approx 0, \\ \dot{\Gamma}^* &= \{\Gamma^*(x), H_P\} = \\ &= ig[\phi\pi^- + 2D_-(A_+\phi)]^* - m^2\phi^* - 2(D_-v)^* \approx 0, \\ \dot{C} &= \{C(x), H_P\} = \partial_-^x\pi^- + j^+ \equiv G \approx 0, \end{aligned}$$

The two first equations determine the scalar Lagrange multipliers  $v$  and  $v^*$ . The last relation is a secondary constraint and it is simply the Gauss's law. It is easy to verify that no further constraints are obtained from the consistence condition of the Gauss' law because it is automatically conserved, *i. e.*,  $\dot{G} = \{G, H_P\} = 0$ . Therefore, there are not additional constraints.

The constraint  $\pi^+$  has vanishing PB's with all the constraints, for that reason it is a first class constraint. The remaining set  $\Phi^a = \{G, \Gamma, \Gamma^*\}$  has a singular constraint matrix and it is shown that has only one zero mode whose eigenvector gives the following first class constraint [3]

$$\Sigma \equiv G - ig(\phi^*\Gamma - \phi\Gamma^*). \quad (8)$$

Then, the subset of first class constraints is given by  $\pi^+$  and  $\Sigma$  and the second class constraints are  $\{\Gamma, \Gamma^*\}$ . The subset of first class constraints is the maximal number of first class constraints since the time independence of the second class constraints determine relations to their respective Lagrange multipliers. The functional

form of the second first class constraint given in (8) is different of its counterpart in the *instant form* analysis [4] where this constraint is not a linear combination of the electromagnetic and scalar constraints because in this formalism the scalar sector does not have any constraint.

Now, the next step is to impose two gauge conditions such that the set of first class constraints turns on a second class one. We choose the null-plane gauge conditions [5] which are defined by the following relations:  $A_- \approx 0$  and  $\pi^- + \partial_- A_+ \approx 0$ .

### 3. Dirac Brackets

To obtain the DB is necessary the explicit evaluation of the inverse of the second class constraints but this inverse is not unique due to its computation involves an arbitrary function which is related to hidden first class constraints [6] which generated improper gauge transformations [7]. However, this kind of constraints can be fixed by considering appropriated boundary conditions [8] on the fields  $(A_\mu, \phi, \phi^*)$ . Under its considerations, a unique inverse is obtained for the constraint matrix and the DB's among the fundamental variables of the theory can be computed to be

$$\begin{aligned} \{\phi(x), \phi^*(y)\}_D &= -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-); \\ \{\phi(x), A_+(y)\}_D &= \frac{ig}{2} \\ \left[ \phi(x) \left| x^- - y^- \right| - \frac{1}{4} \int dv \epsilon(x^- - v^-) \phi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right]; \\ \{\phi^*(x), A_+(y)\}_D &= -\frac{ig}{2} \\ \left[ \phi^*(x) \left| x^- - y^- \right| - \frac{1}{4} \int dv (v) \epsilon(x^- - v^-) \phi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \right] \end{aligned}$$

### 4. Remarks and conclusions

We have studied the constraint structure of the scalar electrodynamics in a 2-dimensional null-plane. It was shown that it has a first class constraint that is a linear combination of electromagnetic and scalar constraints which is given by the zero mode eigenvector of the constraint matrix. This is a consequence of the existence of constraints associated to the scalar sector.

Correspondingly, the analysis of  $SQED_2$  in the instant form shows that the second first class constraint, the Gauss's law, does not have contributions coming from scalar constraints because in this formalism the scalar sector is free of constraints.

Our study shows that  $(A_+, \phi, \phi^*)$  are the independent canonical variables of the theory and the relations (??) determine the fundamental DB's among them. Then, the canonical quantization of the model can be performed via the correspondence principle and these relations determine the commutators between the field operators for equal times.

**Acknowledgements:** BMP thanks CNPq and FAPESP (grant 02/00222-9) for partial support. GERZ thanks CNPq (grant 142695/2005-0) for full support.

### Referencias

- [1] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
- [2] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics* (Benjamin, New York, 1964).
- [3] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *in preparation* (2007).
- [4] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, Vol. 169, Springer, New York, 1982.
- [5] E. Tomboulis, Phys. Rev. **D8**, 2736 (1971).
- [6] P. J. Steinhardt, Ann. Phys. **128**, 425 (1980).
- [7] R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboim, Nucl. Phys. **B122**, 61 (1976).
- [8] F. Rohrlich, Acta Phys. Austriaca, Suppl. **VIII**, 277 (1971).

### 4.3 $SQED_2$ de primeira ordem no plano nulo

Estudaremos a interação de um campo escalar com um campo eletromagnético no plano nulo usando o formalismo de primeira ordem para o setor escalar proporcionado pela teoria de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Seguindo o formalismo de Dirac para sistemas com vínculos, calculamos os parênteses de Dirac (PD) entre as variáveis dinâmicas independentes da teoria e mostramos a equivalência com os PP obtidos seguindo o formalismo de segunda ordem.



## First Order $SQED_2$ on the null-plane

R. Casana<sup>a</sup>, B.M. Pimentel<sup>b</sup> G. E.R. Zambrano<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Universidade Federal do Maranhão (UFMA), Departamento de Física, Campus Universitário do Bacanga,  
CEP 65085-580, São Luís - MA, Brazil

<sup>b</sup>Instituto de Física Teórica (IFT/UNESP), UNESP - São Paulo State University,  
Rua Pamplona 145, CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brazil

Recibido 22 de Oct. 2007; Aceptado 15 de Oct. 2008; Publicado en línea 5 de Ene. 2009

---

### Resumen

Estudiamos en el plano-nulo la interacción de un campo escalar con un campo electromagnético via el formalismo de primera orden para el sector escalar proporcionado por la teoría de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Siguiendo el formalismo de Dirac para sistemas con ligaduras calculamos los corchetes de Dirac (DB) entre las variables dinámicas independientes de la teoría y mostramos la equivalencia con los DB obtenidos siguiendo el formalismo de segundo orden.

**Palabras Clave:** teoría de Duffin-Kemmer-Petiau, método Hamiltoniano, plano nulo

### Abstract

We study the Hamiltonian structure of the scalar electrodynamics ( $SQED_2$ ) in the null-plane via the first order formalism given by the Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) theory. Following the Dirac's procedure for constrained systems we give the Dirac's brackets (DB) for the independent dynamical variables and we show the equivalence with those obtained via the second order formalism.

**Keywords:** Duffin-Kemmer-Petiau theory, Hamiltonian method, null-plane

©2009. Revista Colombiana de Física. Todos los derechos reservados.

---

### 1. Introduction

The success of the Dirac's equation in describing relativistic particles of spin  $\frac{1}{2}$  inspired some people to find first order wave equations for spin 0 and spin 1 particles. Thus, G. Petiau [1], R. Duffin [2], and N. Kemmer [3] proposed a first order equation to describe spin 0 and spin 1 particles in an unified formulation following the ideas proposed in the de Broglie's work [4]. Such first order equation is known as the DKP theory and it is very similar to the Dirac one but the  $\beta^\mu$  matrices satisfy a different algebra. The fundamental characteristic of the theory is that its representations, in a (1+3)-dimensional space-time, can be decomposed in three ir-

reducible representations: the  $5 \times 5$  representation (spin 0), one  $10 \times 10$  representation (spin 1) and one  $1 \times 1$  trivial representation which has not physical meaning. During the period from 1939 until approximately 1970 the majority of the works about the DKP equation was directed to the development of the formalism and to the investigation of DKP charged particles in interaction with electromagnetic field. Calculations to different processes based on DKP and Klein-Gordon (KG) equations yield identical results including one-loop corrections [5]. An important contribution to understanding these questions was made for A. Wightman in [6], where it is shown that when the DKP field is minimally coupled with the electromagnetic field, one gets to



show that DKP equation for spin 0 particle is stable under smooth local perturbation of external field.

It is known that for free fields it is possible to show the equivalence between the DKP formulation and the KG and Proca equations, however when some interaction is present, as, for example the electromagnetic one arises certain doubts about this equivalence. In this context, in the paper [7] has been shown that the presence of the anomalous term in the hamiltonian of the theory [3] and the apparent difference among the descriptions given by the DKP and the KG theories do not exist if we determine carefully the physical components of the DKP field. In [8] has been proven that the physical S-matrix elements in DKP and KG theories coincide in the case of spin-0 particles interacting with external or quantized abelian and non-abelian gauge fields including the gravitational field.

The aim of this paper is the study of the canonical structure of the DKP field interacting with the electromagnetic field in a 2-dimensional null-plane formalism [9]. The section 2 is devoted to analyze the constraint structure and due to presence of first class constraints, the null-plane gauge conditions are imposed to fix them. In section 3, after considering appropriated boundary conditions on the fields we compute the DB's among the independent variables of the theory. In the last section we give our remarks and conclusions.

## 2. Constraint Structure and Classification

The theory is described by the following lagrangian density

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - g A_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (1)$$

where  $\psi$  is the DKP-field, its adjoint field  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \eta_0$ , with  $\eta_0 = (2\beta_0^2 - 1)$ . The  $\beta^\mu$  are singular square matrices satisfying the following DKP-algebra

$$\beta^\mu \beta^\alpha \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\alpha \beta^\mu = \beta^\mu g^{\alpha\nu} + \beta^\nu g^{\alpha\mu}. \quad (2)$$

whose representation in a 2-dimensional space-time are  $3 \times 3$  matrices. The Euler-Lagrange field equations are

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} - g \bar{\psi} \beta^\nu \psi &= 0, \\ \bar{\psi} (\beta^\mu \bar{D}_\mu + m) &= 0, \\ (\beta^\mu D_\mu - m) \psi &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

where we have defined the covariant derivatives  $D_\mu \equiv i\partial_\mu - gA_\mu$  and  $\bar{D}_\mu \equiv i\partial_\mu + gA_\mu$ .

The canonical conjugate momentum for the fields  $A_\mu$ ,  $\psi$  and  $\bar{\psi}$  are  $\pi^\mu = -F^{+\mu}$ ,  $\bar{p} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+$  and

$p = -\frac{i}{2} \beta^+ \psi$ , respectively. From which we get the following set of primary constraints [11]

$$\begin{aligned} \pi^+ &\approx 0, \\ \theta &= p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0, \\ \bar{\theta} &= \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0, \end{aligned} \quad (4)$$

and one dynamical relation  $\pi^- = \partial_+ A_- - \partial_- A_+$ . The canonical hamiltonian,  $H_C$ , is

$$\begin{aligned} H_C &= \int dy^- \left[ \frac{1}{2} \pi^{-2} + (\pi^- \partial_- + g \bar{\psi} \beta^+ \psi) A_+ \right] + \\ &\int dy^- \left[ \bar{\psi} \left( \frac{i}{2} \beta^- \overleftarrow{\partial}_- + g A_- \beta^- + m \right) \psi \lambda \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

The primary hamiltonian,  $H_P$ , which determines the system dynamics is obtained adding to the canonical hamiltonian the primary constraints

$$H_P = H_C + \int dy^- [u \pi^+ + \bar{\lambda} \theta + \bar{\theta} \lambda], \quad (6)$$

where  $u$  is the Lagrange multiplier associated to the electromagnetic constraint, while  $\lambda$  and  $\bar{\lambda}$  are the multipliers associated to the DKP constraints. The consistence condition of the DKP constraints  $\theta$  and  $\bar{\theta}$  yield the following set of secondary constraints

$$\begin{aligned} \omega &= (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- D_- \psi - m \psi), \\ \bar{\omega} &= -(\bar{D}_- \bar{\psi} \beta^- + m \bar{\psi}) (1 - \beta^- \beta^+), \end{aligned} \quad (7)$$

respectively, and we also get relations to determine two components as for  $\lambda$  as for  $\bar{\lambda}$ . The preservation under time evolution of this set of secondary constraints results in two tertiary constraints

$$\begin{aligned} \Omega &= (\beta^-)^2 \beta^+ [-i2m \beta^- D_- \psi + im^2 \psi - g \pi^- \psi], \\ \bar{\Omega} &= [-i2m \bar{D}_- \bar{\psi} \beta^- - im^2 m \bar{\psi} - g \bar{\psi} \pi^-] \beta^+ (\beta^-)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

and two relations which determine the third component as for  $\lambda$  as for  $\bar{\lambda}$ . Therefore, the DKP multipliers are determined completely. Next, the consistence condition of the electromagnetic constraint yields:  $\dot{\pi}^+ = \{\pi^+, H_P\} \approx 0$  gives a secondary constraint  $G = \partial_- \pi^- - g \bar{\psi} \beta^+ \psi \approx 0$ , the Gauss's law which is automatically conserved in time. Then, no more constraints in the theory are generated.

The full set of constraints has a singular constraint matrix with only two non-trivial zero modes whose eigenvectors give the following set of first class constraints

$$\pi^+ \approx 0, \quad \Sigma = G - ig (\bar{\psi} \theta - \bar{\theta} \psi) \approx 0, \quad (9)$$

and the subset  $\Phi_a = \{\theta, \bar{\theta}, \omega, \bar{\omega}, \Omega, \bar{\Omega}\}$  is second class. Now, the next step is to impose gauge conditions, one for every first class constraint such that the set of gauge fixing and the first class constraints turn on a second class one. The choice of the gauge condition should be compatible with the Euler-Lagrange equations. Thus, we choose the null-plane gauge which is defined by the following relations  $A_- \approx 0$  and  $\pi^- + \partial_- A_+ \approx 0$ .

### 3. Dirac Brackets

To obtain a unique inverse of full second class constraint matrix we must impose appropriated boundary conditions on the fields  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  and  $A_\mu$  [12], thus, the hidden first class constraints related to the zero modes of the operator  $\partial_-$  can be fixed [13]. Using the representation of the  $\beta^\pm$  matrix given in [10], where the DKP fields are defined as  $\psi = (\varphi, \psi^+, \psi^-)^T$  and  $\bar{\psi} = (\varphi^*, \bar{\psi}^+, \bar{\psi}^-)$ , it is possible to show that the independent fields of the theory are  $\varphi$ ,  $\varphi^*$  and  $A_+$ , then, the non-null Dirac brackets among these variables are

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_D &= -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) \\ \left\{ \varphi(x), A_+(y) \right\}_D &= \frac{ig}{2} \\ \left[ \varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv \epsilon(x^- - v^-) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right] \\ \left\{ \varphi^*(x), A_+(y) \right\}_D &= -\frac{ig}{2} \\ \left[ \varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv \epsilon(x^- - v^-) \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \right] \end{aligned}$$

### 4. Remarks and conclusions

We performed the constraint analysis of the DKP theory interacting with the electromagnetic field in a 2-dimensional null-plane. We have shown that the first class structure of the electromagnetic sector is maintained, however the second class structure of the DKP sector describing the scalar field is different of those obtained via the second order formalism of the scalar electrodynamics [14]. The second first class is related to one zero mode eigenvector of the full constraint matrix

being a linear combination of the Gauss's law and the primary DKP constraints. The constraint analysis has shown that the DKP fields  $\psi$  and  $\bar{\psi}$  have as independent components the fields  $\varphi$  and  $\varphi^*$ , respectively, *i. e.*, the scalars components; in the electromagnetic sector the only independent field is  $A_+$ . Following, we have computed their DB's [10] and we have seen that are equivalents to those calculated in the second order formalism for  $SQED_2$  in [14]. The fact important is that although the constraints structure of the first and second order formalisms are different in the second class set, the dynamics of the theory or physical content are the same given by the equal set of DB's of its independent variables. This result allows us to conclude the equivalence of both theories at classical level.

**Acknowledgements:** BMP thanks CNPq and FAPESP (grant 02/00222-9) for partial support. GERZ thanks CNPq (grant 142695/2005-0) for full support.

### Referencias

- [1] G. Petiau, Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect. **16** (1936).
- [2] R. Y. Duffin, Phys. Rev. **54**, 1114 (1938).
- [3] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. **A173**, 91 (1939).
- [4] L. de Broglie, Compt. Rend. **199**, 445 (1934).
- [5] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetski, *Quantum Electrodynamics*, 2<sup>nd</sup> ed. Inter., New Yory, 1965.
- [6] A. Wightman, *Aspects of Quantum Theory*, p. 95. Edited by A. Salam and E. P. Wigner, Cambridge, University Press (1972).
- [7] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira and J. S. Valverde, Phys. Lett **A268**, 165 (2000).
- [8] V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, Phys. Lett. **A271**, 16 (2000). V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, Theor. Math. Phys. **124**, 1234 (2000).
- [9] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
- [10] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Scalar Field on the null-plane: a new view*, XXVII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, September 27 to 28, Aguas de Lindóia, SP, Brazil.
- [11] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics* (Benjamin, New York, 1964).
- [12] F. Rohrlich, *Acta Phys. Austriaca, Suppl.* **VIII** (1971) 277.
- [13] P. J. Steinhardt, *Ann. Phys.* **128** (1980) 425.
- [14] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *SQED<sub>2</sub> on the null-plane*, Congreso Nacional de Física, October 22 to 26. Ibaguè, Tolima - Colombia, 2007.

## Capítulo 5

# Modelos em Quatro Dimensões

Neste capítulo vamos estudar a teoria de campos nas coordenadas do plano nulo em quatro dimensões. Em primeiro lugar, analisaremos a eletrodinâmica escalar e espinorial utilizando a teoria de Dirac para determinar a estrutura de vínculos da teoria [1]. Observaremos que a unicidade da matriz de vínculos de segunda classe e a eliminação das transformações de gauge impróprias é garantida quando apropriadas condições de contorno são impostas nos campos. Da condição de gauge de plano nulo, calculamos os parênteses de Dirac entre as variáveis canônicas independentes da teoria.

Posteriormente, estudaremos a estrutura canônica do campo de Yang-Mills e da Cromodinâmica escalar [2]. Determinamos, de forma consistente, a estrutura de vínculos das teorias e calculamos os parênteses de Dirac entre os graus de liberdade no gauge do plano nulo. Mostraremos que os comutadores para os campos de Yang-Mills são aqueles reportados na literatura. Finalmente, desenvolveremos o formalismo canônico para a eletrodinâmica generalizada de Podolsky [3] onde determinamos a estrutura de vínculos da teoria e deduzimos as condições de gauge apropriadas que permitem calcular os correspondentes parênteses de Dirac.

# Bibliografia

- [1] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *SQED<sub>4</sub> and QED<sub>4</sub> on the null-plane*, hep-th 0803.2677.
- [2] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Scalar QCD<sub>4</sub> on the null-plane*, hep-th 0808.2217.
- [3] M. C. Bertin, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *The canonical structure of Podolsky's generalized electrodynamics on the Null-Plane*, submitted Eur. Phys. J. C.



## 5.1 $SQED_4$ e $QED_4$ no plano nulo

Estudaremos a eletrodinâmica escalar  $SQED_4$  e a eletrodinâmica espinorial  $QED_4$  no formalismo do plano nulo. Seguiremos a técnica de Dirac para sistemas singulares para realizar uma detalhada análise da estrutura de vínculos de ambas as teorias. Impondo condições apropriadas de contorno sobre os campos, fixamos o subconjunto oculto de vínculos de primeira classe, os quais geram transformações de gauge impróprias, e obteremos uma única inversa da matriz de vínculos de segunda classe. Finalmente, escolhendo a condição de gauge de plano nulo, determinamos os parênteses de Dirac generalizados das variáveis dinâmicas independentes, os quais, via princípio de correspondência, determinam os (anti)-comutadores.

# $SQED_4$ and $QED_4$ on the null-plane

R. Casana<sup>1\*</sup>, B.M. Pimentel<sup>2†</sup> and G. E. R. Zambrano<sup>2‡§</sup>

<sup>1</sup> *Universidade Federal do Maranhão (UFMA), Departamento de Física,  
Campus Universitário do Bacanga, CEP 65085-580, São Luís - MA, Brasil.*

<sup>2</sup> *Instituto de Física Teórica (IFT/UNESP), UNESP - São Paulo State University  
Rua Pamplona 145, CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brazil*

## Abstract

We studied the scalar electrodynamics ( $SQED_4$ ) and the spinor electrodynamics ( $QED_4$ ) in the null-plane formalism. We followed the Dirac's technique for constrained systems to perform a detailed analysis of the constraint structure in both theories. We imposed the appropriated boundary conditions on the fields to fix the hidden subset first class constraints which generate improper gauge transformations and obtain an unique inverse of the second class constraint matrix. Finally, choosing the null-plane gauge condition, we determined the generalized Dirac brackets of the independent dynamical variables which via the correspondence principle give the (anti)-commutators for posterior quantization.

## 1 Introduction

Half the of last century Dirac [1] proposed three different forms of relativistic dynamics depending on the types of surfaces where the independent degree of freedom was initiated. The first one, named the *instant form*, is when a space-like surface is chosen to establish the fundamental Poisson brackets or commutations relations. It has been used most frequently so far and is usually called equal-time quantization. The second form, the *point form*, is to take a branch of hyperbolic surface  $x^\mu x_\mu = \kappa^2$  with  $x^0 > 0$ . And, the third form, *front form or light front*, is when we choose the surface of a single light wave to study the field dynamics; it is commonly referred as the *null-plane formalism* and it took almost 30 years for Dirac's idea was applied in physical phenomena. An important advantage pointed out by Dirac is that seven of the ten Poincaré generators are kinematical on the null-plane while in the conventional theory constructed on the instant form only six have this property. Other notable feature of a relativistic theory on the null-plane is that it gives origin to singular Lagrangians, e.g. constrained dynamical systems, thus, Dirac's procedure [2] can be employed to analyze the constraint structure of a given theory. In general, it leads to a reduction in the number of independent field operators in the respective phase space.

At equal-time, any two different points are space-like separated and therefore the fields defined at these points are naturally independent quantities. In a null-plane surface the situation is different

---

\*casana@ufma.br

†pimentel@ift.unesp.br

‡gramos@ift.unesp.br

§On leave of absence from Departamento de Física, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Nariño, Colombia

because the micro-causality principle leads to locality requirement in which only the transversal components are and the longitudinal component becomes non-local in the theory, although, such situation would not be unexpected [3]. It is possible to verify that the transformation from the usual coordinates to the null-plane coordinates is not a Lorentz transformation and the structure of the phase space is different when we compare with the conventional one. As such, the description of a physical system in the null-plane formalism could give additional information from those provided by the conventional formalism [3].

It was observed that the quantization in the null-plane means to perform the quantization on the characteristic surfaces of the classical field equations. Thus, it implies that one has to specify the Cauchy data on both characteristics,  $x^+ = cte$  and  $x^- = cte$ , and not only on one simple null-plane [4]. In this context, the light cone quantization of free massless fermions in  $(1 + 1)$ -dimensions on both characteristics shows that the procedure leads to the correct physical descriptions [5].

On the other hand, in [6] it was showed an important problem associated with the quantization on the null-plane: After establishing the gauge fixing condition for the first class constraints and the second class constraints have been handled through the Dirac's procedure, no more proper gauge transformations can be performed; however, it still remains in the analysis a species of improper gauge transformations related with the zero mode of the longitudinal derivative  $\partial_-$  and appears due the lack of appropriate boundary conditions over the fields [7]. This fact does not allow to define a unique inverse for the second class constraint matrix that is used to define consistent Dirac brackets, therefore, the improper gauge transformations must be fixed by imposing appropriate boundary conditions.

The present work is addressed to study the constraints structure of the scalar and the spinor electrodynamics on the null-plane following the Dirac's formalism for constrained systems. The paper is organized as follow: In the section 2 we study the  $SQED_4$ , its constraints structure is analyzed in detail and the appropriate equations of motion of the dynamical variables is determined using the extended Hamiltonian. We classify the set of constraints and find that one of the first class constraints is a linear combination of scalar and electromagnetic constraints which is a null vector of the respective constraint matrix. We invert the first class constraints with the corresponding gauge conditions and a unique inverse of the matrix of second class constraints is getting by imposing appropriate boundary conditions on the fields which eliminate the hidden first class constraints and next we calculate the Dirac's brackets among the fundamental dynamical variables. In section 3 we study the  $QED_4$ , showing that the use of the projection of the fermionic fields allows to observe the existence of only second class constraints and the first class constraints in the fermionic sector are associated with the hidden subset of first class constraints which generate improper gauge transformations. We also show that the fermionic constraints determine that the electron field is fully described by only two of the four components. We use the null-plane gauge to transform the set of first class constraints in second class and we obtain a graded algebra imposing boundary conditions on the independent components. In the last section we give our remarks and conclusions.

## 2 Scalar Electrodynamics ( $SQED_4$ ): Constraint structure

The gauge theory we are considering is defined by the following Lagrangian density in 4-dimensional space-time

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}D_\mu\phi(D_\nu\phi)^* - m^2\phi\phi^*, \quad (1)$$

here  $\phi$  is a one-component complex scalar field,  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  and  $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu$  is the covariant derivative. The model is invariant under the following local  $U(1)$  gauge symmetry

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi \quad , \quad \phi^* \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\phi^* \quad , \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha. \quad (2)$$

The field equations are given for

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha} + j^\alpha = 0 \quad (3)$$

and

$$(D_\mu^* D^{*\mu} + m^2)\phi^* = 0 \quad , \quad (D_\mu D^\mu + m^2)\phi = 0 \quad (4)$$

where  $j^\alpha$  is the current defined by

$$j^\mu \equiv ig[\phi(\partial^\mu\phi^* - igA^\mu\phi^*) - \phi^*(\partial^\mu\phi + igA^\mu\phi)]. \quad (5)$$

The canonical conjugate momenta of the fields  $A_\mu$ ,  $\phi$  and  $\phi^*$  are

$$\pi^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_+A_\mu)} = F^{\mu+}, \quad (6)$$

$$\pi^* \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_+\phi)} = (D_-\phi)^* \quad , \quad \pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_+\phi^*)} = D_-\phi \quad (7)$$

respectively. Then, from (6) and (7) we get one dynamical relation

$$\pi^- = \partial_+A_- - \partial_-A_+ \quad (8)$$

and five primary constraints, three for the electromagnetic sector

$$C \equiv \pi^+ \approx 0 \quad , \quad \chi^k \equiv \pi^k - \partial_-A_k + \partial_kA_- \approx 0 \quad (9)$$

and, two for the scalar sector

$$\Gamma \equiv \pi - D_-\phi \approx 0 \quad , \quad \Gamma^* \equiv \pi^* - (D_-\phi)^* \approx 0. \quad (10)$$

Following the Dirac's procedure [2], we define the canonical Hamiltonian density which is given by

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2}(\pi^-)^2 + (\pi^-\partial_- + \pi^k\partial_k - j^+)A_+ - D_k\phi(D^k\phi)^* + m^2\phi\phi^* + \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl}, \quad (11)$$

consequently, the canonical Hamiltonian is  $H_C = \int d^3y \mathcal{H}_C$ , with  $\int d^3y = \int dy^1 dy^2 dy^-$ .

We also define the primary Hamiltonian  $H_P$  adding to the canonical Hamiltonian the primary constraints with their respective Lagrange multipliers

$$H_P = H_C + \int d^3y (w_1 C + u_k \chi^k + v^* \Gamma + \Gamma^* v), \quad (12)$$

where  $w_1$ ,  $u_k$  are the multipliers related to the electromagnetic constraints and,  $v$  and  $v^*$  are the respective multipliers for the scalar constraints.

The fundamental Poisson brackets (PB) between the fields are

$$\{A_\mu(x), \pi^\mu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \quad (13)$$

$$\{\phi(x), \pi^*(y)\} = \delta^3(x-y) \quad , \quad \{\phi^*(x), \pi(y)\} = \delta^3(x-y). \quad (14)$$



The Dirac's procedure tell us that the primary constraints must be preserved in time (consistence condition) under time evolution generated by the primary Hamiltonian by requiring that they have a weakly vanishing PB with  $H_P$ . Thus, such requirement on the scalar constraints yields

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma} &= -ig [\phi\pi^- + 2D_-(A_+\phi)] - D^k D_k \phi - m^2 \phi - 2D_- v \approx 0, \\ \dot{\Gamma}^* &= ig [\phi^* \pi^- + 2D_-^* (A_+ \phi^*)] - (D_k D^k \phi)^* - m^2 \phi^* - 2(D_- v)^* \approx 0.\end{aligned}\tag{15}$$

These relations determine the multipliers  $v$  and  $v$ , respectively, and there are not more constraints associate with the scalar sector.

In the electromagnetic sector, the consistence condition of  $\chi^k$  yields

$$\dot{\chi}^k = \partial_k \pi^- + j^k + \partial_j F_{jk} - 2\partial_- u_k \approx 0,\tag{16}$$

an equation for its associated multiplier  $u_k$ .

Finally, the consistence condition of  $\pi^+$  gives a secondary constraint  $G$

$$\dot{C} = G = \partial_- \pi^- + \partial_k \pi^k + j^+ \approx 0,\tag{17}$$

which is simply the Gauss's law. It is easy to verify that there are not further constraints generate from the consistence condition of the Gauss's law because it is automatically conserved

$$\dot{G} \equiv ig [\phi^* \dot{\Gamma} - \phi \dot{\Gamma}^*] \approx 0.\tag{18}$$

Then, there are not more constraints in the theory and the full set of constraints given by (9), (10) and (17).

## 2.1 Constraint classification

The constraint  $\pi^+$  has vanishing PB with all the other constraints therefore it is a first class constraint. The remaining set  $\Phi^a = \{\Gamma, \Gamma^*, G, \chi^k\}$  is apparently a second class set, however, the determinant of its constraint matrix  $\{\Phi^a(x), \Phi^b(y)\}$  is zero (see Appendix C) because the matrix has a zero mode whose eigenvector gives a linear combination of constraints which is one more first class constraint. Alternately, there is an additional argument, the constraint  $G$ , the Gauss's law, is the second first class constraint for zero coupling constant: the free Maxwell's field theory. On the other hand, if  $G$  belongs to a minimal set of second class constraints, the limit for zero coupling constant would no longer be possible because the DB would become undefined. Remembering that the DB is defined with respect to a non-singular matrix, however, it could become singular when we go back to the free theory. In conclusion, there is a linear combination which is independent of  $\pi^+$  and it is a first class constraint. Such that linear combination is

$$\Sigma \equiv G - ig (\phi^* \Gamma - \phi \Gamma^*).\tag{19}$$

Thus, we have the following set of second class constraints

$$\Gamma \equiv \pi - D_- \phi \approx 0 \quad , \quad \Gamma^* \equiv \pi^* - (D_- \phi)^* \approx 0 \quad , \quad \chi^k \equiv \pi^k - \partial_- A_k + \partial_k A_- \approx 0\tag{20}$$

and the set of first class constraints

$$C = \pi^+ \approx 0 \quad , \quad \Sigma = G - ig (\phi^* \Gamma - \phi \Gamma^*) \approx 0.\tag{21}$$

We can be sure that is the maximal number of first class constraints since the quest for time independence of  $(\Gamma, \Gamma^*, \chi^k)$  leads to equations that determine their respective Lagrange multipliers. The second first class constraint in (19), must be contrasted with the *instant form* analysis [8] where the second first class constraint is not a linear combination of electromagnetic and scalar constraints because in this formalism the scalar sector does not have any constraint.

## 2.2 Equations of motion and gauge fixing conditions

At this point we need to check that we have the correct (Euler-Lagrange) equations of motion. Thus, the time derivative of the fields is calculated by computing their PB with the so called extended Hamiltonian ( $H_E$ ) what now it generates the time translations or temporal evolutions. The  $H_E$  is obtained by adding to the primary Hamiltonian  $H_P$  all the first class constraints, thus, we get

$$H_E = \int d^3y \left[ \frac{1}{2} (\pi^-)^2 + (\pi^- \partial_- + \pi^k \partial_k - j^+) A_+ - D_k \phi (D^k \phi)^* + m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \right] + \int d^3y \left[ w_1 C + u_k \chi^k + v^* \Gamma + \Gamma^* v + w_2 \Sigma \right]. \quad (22)$$

Thus we have that the time evolution of the dynamical variables of the electromagnetic field are

$$\begin{aligned} \dot{A}_+ &= w_1, & \dot{\pi}^+ &= G \approx 0 \\ \dot{A}_- &= \pi^- + \partial_- A_+ - \partial_- w_2, & \dot{\pi}^- &= 2g^2 \phi \phi^* A_+ + \partial_k u_k + ig v^* \phi - ig \phi^* v \\ \dot{A}_k &= \partial_k A_+ + u_k - \partial_k w_2, & \dot{\pi}^k &= ig \phi (D^k \phi)^* - ig \phi^* D^k \phi + \partial_j F_{jk} - \partial_- u_k \end{aligned} \quad (23)$$

and for the scalar fields are given by

$$\dot{\phi} = v + ig w_2 \phi, \quad \dot{\phi}^* = v^* - ig w_2 \phi^* \quad (24)$$

$$\dot{\pi}^* = -(D_- D_+ \phi)^* + ig A_+ (D_- \phi)^* - (D_k D^k \phi)^* - m^2 \phi^* - ig \phi^* D_-^* w_2 - 2ig w_2 (D_- \phi)^* \quad (25)$$

$$\dot{\pi} = -D_- D_+ \phi - ig A_+ D_- \phi - D^k D_k \phi - m^2 \phi + ig \phi D_- w_2 + 2ig w_2 D_- \phi.$$

From which it is easy to obtain

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu \phi + m^2 \phi &\approx ig \phi D_- w_2 + 2ig w_2 D_- \phi, \\ (D_\mu D^\mu \phi)^* + m^2 \phi^* &\approx -ig \phi^* D_-^* w_2 - 2ig w_2 (D_- \phi)^*, \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu &\approx 0, \end{aligned} \quad (26)$$

thus, the equation of motions are consistent with its Lagrangian form if we choose  $w_2 = 0$ .

The Dirac's algorithm requires as many gauge conditions as first class constraints there are. However, such gauge fixing conditions must be compatible with the Euler-Lagrange equations and therefore they must fix the Lagrangian multiplier  $w_2$  to zero and together with the first class constraints must be a second class set. One set of gauge conditions satisfying such requirements is

$$A_- \approx 0, \quad \pi^- + \partial_- A_+ \approx 0 \quad (27)$$

which are standard in the pure gauge theory, the so-called null-plane gauge [6, 9].

### 2.3 Dirac's brackets (DB)

We follow the iterative method to calculate the Dirac's brackets, thus, we first consider the set of the first class constraints (21) and their gauge fixing conditions (27)

$$\begin{aligned}\Phi_1 &\equiv \pi^+ & , & & \Phi_3 &\equiv A_- \\ \Phi_2 &\equiv \Sigma = G - ig(\phi^*\Gamma - \phi\Gamma^*) & , & & \Phi_4 &\equiv \pi^- + \partial_- A_+, \end{aligned}\quad (28)$$

whose constraint matrix  $C_{ij}(x, y) \equiv \{\Phi_i(x), \Phi_j(y)\}$  is:

$$C_{ij}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_-^x \\ 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & -\partial_-^x & 0 & 1 \\ \partial_-^x & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (29)$$

In order to solve the inverse of the constraint matrix we require a suitable inverse for the longitudinal derivative  $\partial_-$ . In general, we have

$$(\partial_-)^{-1} f(x^-) = \frac{1}{2} \int dy^- \epsilon(x^- - y^-) f(y^-, x^+, x^\perp) + F(x^+, x^\perp), \quad (30)$$

where the function  $\epsilon(x)$  is

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (31)$$

and  $F(x^+, x^\perp)$  is a  $x^-$  independent function. The presence of  $F$  is associated with the insufficiency of the initial value data. This ambiguity implies that constraint matrix does not have a unique inverse. Dirac has proved that the matrix formed by a complete set of second class constraints must have an unique inverse, thus, the set of second class constraints in (28) is not purely second class. The inverse matrix of (29) is not unique because among the second class constraints there are a hidden subset first class constraints [7]. Moreover, the presence of the hidden constraints can be determined by observing that the consistence conditions, (15) and (16), have as general solutions

$$\begin{aligned}v(x) &= \hat{v}(x) + s(x^+, x^\perp), \\ v^*(x) &= \hat{v}^*(x) + s^*(x^+, x^\perp), \\ u_k(x) &= \hat{u}_k(x) + s_k(x^+, x^\perp), \end{aligned}\quad (32)$$

where  $s(x^+, x^\perp)$ ,  $s^*(x^+, x^\perp)$  and  $s_k(x^+, x^\perp)$  are arbitrary functions of  $(x^+, x^\perp)$ , and  $\hat{v}(x)$ ,  $\hat{v}^*(x)$  and  $\hat{u}_k(x)$  represent the "unambiguous" solutions, thus, the total Hamiltonian can be written as

$$\begin{aligned}H'_E &= \int d^3y \left[ \frac{1}{2} (\pi^-)^2 + (\pi^- \partial_- + \pi^k \partial_k - j^+) A_+ - D_k \phi (D^k \phi)^* + m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \right] \\ &+ \int d^3y \left[ w_1 C + \hat{u}_k \chi^k + \hat{v}^* \Gamma + \Gamma^* \hat{v} + w_2 \Sigma \right] + \int d^3y \left[ s_k \chi^k + s^* \Gamma + \Gamma^* s \right]. \end{aligned}\quad (33)$$

But Dirac has shown that the contribution from homogeneous solution for  $v$ ,  $v^*$  and  $u_k$  given in (32) is always associated with first class constraints (hidden constraints), however, Steinhardt [6] shown

that this hidden subset of first class constraints is associated with improper gauge transformations [7], which change the physical state of the system mapping one solution of the equations of motion onto a physically different one. Therefore, it is not possible to eliminate the improper gauge transformations by means of gauge conditions since such procedure would exclude configurations physically allowed to the system. This hidden constraints can be eliminated by fixing appropriated boundary conditions on the fields in order to the total Hamiltonian be a true generator of time evolution of the physical system.

Thus, the explicit evaluation of the inverse of the matrix of second class constraints involves the determination of an arbitrary function of  $(x^+, x^\perp)$ . This function can be evaluated by considering appropriate boundary conditions on the variations in the canonical coordinates generated by the constraints. Then, we impose the boundary conditions on the fields  $(\phi, \phi^*, A_k)$  given in [4] and under such boundary conditions, the inverse of the operator  $\partial_-$  is defined on all integrable functions  $f(x^-)$  which are less singular than  $\frac{1}{x^-}$  and vanish faster than  $\frac{1}{x^-}$  for large  $x^-$  by

$$(\partial_-)^{-1} f(x^-) = \frac{1}{2} \int dy^- \epsilon(x^- - y^-) f(y^-), \quad (34)$$

with this we get a unique inverse which is given as

$$C_{ij}^{-1}(x, y) \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -|x^- - y^-| & 0 & \epsilon(x^- - y^-) \\ |x^- - y^-| & 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 \\ 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 \\ \epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x^\perp - y^\perp). \quad (35)$$

Alternatively, we can determine the inverse by insisting that the DB satisfy Jacobi identities [10], given the same result.

Using the inverse defined by equation (35), the first set of DB,  $\{\cdot, \cdot\}_{D1}$ , for given two dynamical variables  $\mathbf{A}(x)$  and  $\mathbf{B}(y)$  are calculate by

$$\{\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y)\}_{D1} = \{\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y)\} - \int d^3u d^3v \{\mathbf{A}(x), \Phi_i(u)\} C_{ij}^{-1}(u, v) \{\Phi_j(v), \mathbf{B}(y)\}. \quad (36)$$

Thus, the no null  $DB_1$  are

$$\begin{aligned} \{\phi(x), A_+(y)\}_{D1} &= \frac{ig}{2} \phi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp), \\ \{\phi^*(x), A_+(y)\}_{D1} &= -\frac{ig}{2} \phi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp), \\ \{A_k(x), A_+(y)\}_{D1} &= -\frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x^\perp - y^\perp). \end{aligned} \quad (37)$$

Now, we consider the subset of the remaining second class constraints that under the brackets  $DB_1$  are given as

$$\Psi_1 \equiv \Gamma = \pi - \partial_- \phi, \quad \Psi_2 \equiv \Gamma^* = \pi^* - \partial_- \phi^* \quad (38)$$

$$\Psi_3 \equiv \chi^1, \quad \Psi_4 \equiv \chi^2$$

where  $\chi^k = \pi^k - \partial_- A_k$ . Next, the constraint matrix  $D$  of this set is defines as

$$D_{ij}(x, y) \equiv \{\Psi_i(x), \Psi_j(y)\}_{D1}, \quad (39)$$



using appropriate boundary conditions on the fields, we compute the inverse  $D^{-1}$  and thus we define the second set of DB,  $\{\cdot, \cdot\}_{D_2}$ ,

$$\{\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y)\}_{D_2} = \{\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y)\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \{\mathbf{A}(x), \Psi_i(u)\}_{D_1} D_{ij}^{-1}(u, v) \{\Psi_j(v), \mathbf{B}(y)\}_{D_1}. \quad (40)$$

Then, we obtain the final DB among the fundamental dynamical variables of the theory

$$\{A_k(x), A_l(y)\}_{D_2} = -\frac{1}{4} \delta_l^k \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp), \quad (41)$$

$$\{\phi(x), \phi^*(y)\}_{D_2} = -\frac{1}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp),$$

$$\begin{aligned} \{\phi(x), A_+(y)\}_{D_2} &= \frac{i}{2} g \phi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad - \frac{i}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \{\phi^*(x), A_+(y)\}_{D_2} &= -\frac{i}{2} g \phi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad + \frac{i}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi^*(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned} \quad (43)$$

From the correspondence principle we obtain the following commutators among the fields

$$[A_k(x), A_l(y)] = -\frac{i}{4} \delta_l^k \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp), \quad (44)$$

$$[\phi(x), \phi^*(y)] = -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp),$$

$$\begin{aligned} [\phi(x), A_+(y)] &= -\frac{1}{2} g \phi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad + \frac{1}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} [\phi^*(x), A_+(y)] &= \frac{1}{2} g \phi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad - \frac{1}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi^*(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned} \quad (46)$$

The first two relations were specified by Neville and Rohrlich [11]. They derived this expressions starting from the free field operators commutation relations for unequal times  $x^+$ ,  $y^+$  and then, they calculated the commutators on the null-plane at equal time, *i. e.*,  $x^+ = y^+$ . The commutation relations involving the field operator  $\hat{A}_+(x)$  were not obtained in [11] but it was affirmed that they must be derived solving a quantum constraint. However, we get to show that it is possible to obtain these last commutation relations at classical level following a carefully Dirac's analysis of the constraint structure of the model.

### 3 Spinor Electrodynamics ( $QED_4$ ): Constraint structure

The Lagrangian density of the spinor Electrodynamics written in terms of the light cone projections<sup>1</sup> of the fermionic fields is

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}_+ \left( \frac{i}{2} \gamma^+ \overleftrightarrow{\partial}_+ - gA_+ \gamma^+ \right) \psi_+ + \bar{\psi}_- \left( \frac{i}{2} \gamma^- \overleftrightarrow{\partial}_- - gA_- \gamma^- \right) \psi_- + \bar{\psi}_+ \left( \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial} - g\mathcal{A} - m \right) \psi_- \\ & + \bar{\psi}_- \left( \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial} - g\mathcal{A} - m \right) \psi_+ - \frac{1}{2} (F_{12})^2 + \frac{1}{2} (F_{+-})^2 + F_{+k} F_{-k} , \end{aligned} \quad (47)$$

where we have defined  $\gamma^k A_k = \mathcal{A}$  for  $k = 1, 2$ . The corresponding field equations are:

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\nu\mu} - g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= 0 \\ (i\partial_+ - gA_+) \gamma^+ \psi_+ + [i\overleftrightarrow{\partial} - g\mathcal{A} - m] \psi_- &= 0 \\ (i\partial_- - gA_-) \gamma^- \psi_- + [i\overleftrightarrow{\partial} - g\mathcal{A} - m] \psi_+ &= 0 \\ (i\partial_+ + gA_+) \bar{\psi}_+ \gamma^+ + \bar{\psi}_- [i\overleftrightarrow{\partial} + g\mathcal{A} + m] &= 0 \\ (i\partial_- + gA_-) \bar{\psi}_- \gamma^- + \bar{\psi}_+ [i\overleftrightarrow{\partial} + g\mathcal{A} + m] &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

The canonical momenta for the fields are

$$\pi^\mu = F^{\mu+} = \partial^\mu A^+ - \partial^+ A^\mu \quad (49)$$

and

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{+a} = -\frac{i}{2} \bar{\psi}_{+b} (\gamma^+)_{ba} \quad , \quad \phi_{+a} = -\frac{i}{2} (\gamma^+)_{ab} \psi_{+b} , \\ \bar{\phi}_{-a} = 0 \quad , \quad \phi_{-a} = 0 , \end{aligned} \quad (50)$$

where  $a, b = 1, 2, 3, 4$ .

From the canonical momenta equations, we observe that the only one equation in (49) is dynamical

$$\pi^- = F^{-+} = \partial_+ A_- - \partial_- A_+ , \quad (51)$$

and all the other equations coming from (49) and (50) give a set of primary constrains composite by three bosonic constraints

$$C \equiv \pi^+ \approx 0 \quad , \quad C^k \equiv \pi^k + \partial_k A_- - \partial_- A_k \approx 0 \quad , \quad k = 1, 2 \quad (52)$$

and four fermionic constraints

$$\begin{aligned} \Gamma_{+a} \equiv \phi_{+a} + \frac{i}{2} (\gamma^+)_{ab} \psi_{+b} \approx 0 \quad , \quad \bar{\Gamma}_{+a} \equiv \bar{\phi}_{+a} + \frac{i}{2} \bar{\psi}_{+b} (\gamma^+)_{ba} \approx 0 \\ \Gamma_{-a} \equiv \phi_{-a} \approx 0 \quad , \quad \bar{\Gamma}_{-a} \equiv \bar{\phi}_{-a} \approx 0 . \end{aligned} \quad (53)$$

The canonical Hamiltonian density is [12]

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & \frac{1}{2} (\pi^-)^2 + \left[ \pi^- \partial_- + \pi^k \partial_k + g\bar{\psi}_+ \gamma^+ \psi_+ \right] A_+ + \frac{1}{2} (F_{12})^2 \\ & - \bar{\psi}_- \left[ \frac{i}{2} \gamma^- \overleftrightarrow{\partial}_- - gA_- \gamma^- \right] \psi_- - \bar{\psi}_+ \left[ \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial} - g\mathcal{A} - m \right] \psi_- - \bar{\psi}_- \left[ \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial} - g\mathcal{A} - m \right] \psi_+ , \end{aligned} \quad (54)$$

<sup>1</sup>See the definitions in the Appendix A.

and the primary Hamiltonian takes the form

$$H_P = H_c + \int dy^3 \left[ uC + u_k C^k + \bar{\Gamma}_{+a} v_{1a} + \bar{\Gamma}_{-a} v_{2a} - \bar{v}_{1a} \Gamma_{+a} - \bar{v}_{2a} \Gamma_{-a} \right], \quad (55)$$

where  $u$  and  $u_k$  are bosonic Lagrange multipliers and,  $v_1, v_2, \bar{v}_1$  and  $\bar{v}_2$  are fermionic multipliers.

The fundamental Poisson brackets are

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} &= \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \\ \{\psi_{+a}(x), \bar{\phi}_{+b}(y)\} &= -\delta_{ab} \delta^3(x-y) \quad , \quad \{\bar{\psi}_{+a}(x), \phi_{+b}(y)\} = -\delta_{ab} \delta^3(x-y), \\ \{\psi_{-a}(x), \bar{\phi}_{-b}(y)\} &= -\delta_{ab} \delta^3(x-y) \quad , \quad \{\bar{\psi}_{-a}(x), \phi_{-b}(y)\} = -\delta_{ab} \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (56)$$

Next, we give the non null PB's between the primary constraints

$$\{\Gamma_{+a}(x), \bar{\Gamma}_{+b}(y)\} = -i(\gamma^+)_{ab} \delta^3(x-y) \quad , \quad \{\bar{\Gamma}_{+a}(x), \Gamma_{+b}(y)\} = -i(\gamma^+)_{ba} \delta^3(x-y) \quad (57)$$

$$\{C^k(x), C^j(y)\} = -2\delta_j^k \partial_x^x \delta^3(x-y) = 2g^{kj} \partial_x^x \delta^3(x-y). \quad (58)$$

### 3.1 The fermionic sector

In order to the primary constraints be preserved in the time, we compute the consistence condition of the fermionic constraints (53). For  $\Gamma_+$  we obtain

$$\dot{\Gamma}_+ = (i\bar{\partial} - g\mathcal{A} - m)\psi_- - gA_+ \gamma^+ \psi_+ - i\gamma^+ v_1 \approx 0, \quad (59)$$

from this equation we can get two relations by using the null-plane  $\gamma$ -algebra. First we do  $\frac{i}{2}\gamma^- \dot{\Gamma}_+$  then we get one component of the multiplier  $v_1$

$$\Delta^+ v_1 = -\frac{i}{2}\gamma^- (i\bar{\partial} - g\mathcal{A} - m)\psi_- + igA_+ \psi_+. \quad (60)$$

The second relation is obtained by the projection  $\Delta^+ \dot{\Gamma}_+$  getting a secondary constraint

$$\Delta^+ \dot{\Gamma}_+ = (i\bar{\partial} - g\mathcal{A} - m)\Delta^+ \psi_- \approx 0, \quad (61)$$

due to  $(i\bar{\partial} - g\mathcal{A} - m)$  is an invertible operator we can set the secondary constraint as being

$$\Phi = \Delta^+ \psi_- \approx 0. \quad (62)$$

For  $\bar{\Gamma}_+$ , we get

$$\dot{\bar{\Gamma}}_+ = \bar{\psi}_- \left( i\overleftarrow{\partial} + g\mathcal{A} + m \right) + gA_+ \bar{\psi}_+ \gamma^+ - i\bar{v}_1 \gamma^+ \approx 0. \quad (63)$$

From  $\frac{i}{2}\dot{\bar{\Gamma}}_+ \gamma^-$  we get one component of the multiplier  $\bar{v}_1$

$$\bar{v}_1 \Delta^- = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_- \left( i\overleftarrow{\partial} + g\mathcal{A} + m \right) \gamma^- - igA_+ \bar{\psi}_+, \quad (64)$$

and from  $\dot{\bar{\Gamma}}_+ \Delta^-$  we get another secondary constraint

$$\dot{\bar{\Gamma}}_+ \Delta^- = \bar{\psi}_- \Delta^- \left( i\overleftarrow{\partial} + g\mathcal{A} + m \right) \approx 0, \quad (65)$$

similarly,  $(i\overleftarrow{\not{\partial}} + g\mathcal{A} + m)$  is an invertible operator, thus, we set this secondary constraint to be

$$\bar{\Phi} = \bar{\psi}_- \Delta^- \approx 0. \quad (66)$$

The consistence condition of the constraints  $\Gamma_-$  and  $\bar{\Gamma}_-$  we get more two secondary constraints

$$\Omega_- = \dot{\Gamma}_- = \gamma^- (i\partial_- - gA_-) \psi_- + (i\overleftarrow{\not{\partial}} - g\mathcal{A} - m) \psi_+ \approx 0 \quad (67)$$

and

$$\bar{\Omega}_- = \dot{\bar{\Gamma}}_- = (i\partial_- + gA_-) \bar{\psi}_- \gamma^- + \bar{\psi}_+ (i\overleftarrow{\not{\partial}} + g\mathcal{A} + m) \approx 0 \quad (68)$$

The consistence condition of the secondary constraints  $\Phi$ ,  $\bar{\Phi}$ ,  $\Omega_-$  and  $\bar{\Omega}_-$  gives relations for some components of the fermionic multipliers, as we will show. Thus, the conservation in time of  $\Phi$  and  $\bar{\Phi}$  fixes one projection for each multiplier  $v_2$  and  $\bar{v}_2$

$$\dot{\Phi} = -\Delta^+ v_2 \approx 0 \quad , \quad \dot{\bar{\Phi}} = -\bar{v}_2 \Delta^- \approx 0. \quad (69)$$

And the conservation in time of  $\Omega_-$  and  $\bar{\Omega}_-$  gives two equations relating the multipliers  $v_2$ ,  $v_1$  and  $\bar{v}_2$ , respectively,

$$\dot{\Omega}_- = -\gamma^- (i\partial_- - gA_-) v_2 - (i\overleftarrow{\not{\partial}} - g\mathcal{A} - m) v_1 \approx 0, \quad (70)$$

and,

$$\dot{\bar{\Omega}}_- = -(i\partial_- + gA_-) \bar{v}_2 \gamma^- - \bar{v}_1 (i\overleftarrow{\not{\partial}} + g\mathcal{A} + m) \approx 0. \quad (71)$$

At once, we will show that the set of equation (60), (64), (69), (70) and (71) allows to define completely all the fermionic Lagrange multipliers. Thus, doing  $\Delta^- \dot{\Omega}_-$  we get the other component for  $v_1$

$$\Delta^- v_1 = 0, \quad (72)$$

then using that  $\Delta^+ v_1 + \Delta^- v_1 = v_1$ , we determine the multiplier  $v_1$

$$v_1 = -\frac{i}{2} \gamma^- (i\overleftarrow{\not{\partial}} - g\mathcal{A} - m) \psi_- + igA_+ \psi_+. \quad (73)$$

Also in (70) doing  $\frac{1}{2} \gamma^+ \dot{\Omega}_-$  we determinate the component  $\Delta^- v_2$  by the equation

$$(i\partial_- - gA_-) (\Delta^- v_2) = \frac{i}{2} \left[ - (i\overleftarrow{\not{\partial}} - g\mathcal{A})^2 + m^2 \right] \psi_- - \frac{i}{2} gA_+ \gamma^+ (i\overleftarrow{\not{\partial}} - g\mathcal{A} - m) \psi_+ \quad (74)$$

the joined to component  $\Delta^+ v_2$  in (69) gives

$$(i\partial_- - gA_-) v_2 = \frac{i}{2} \left[ - (i\overleftarrow{\not{\partial}} - g\mathcal{A})^2 + m^2 \right] \psi_- - \frac{i}{2} gA_+ \gamma^+ (i\overleftarrow{\not{\partial}} - g\mathcal{A} - m) \psi_+. \quad (75)$$

A similar procedure allows determinate the multipliers  $\bar{v}_1$  and  $\bar{v}_2$

$$\bar{v}_1 = -\frac{i}{2} \bar{\psi}_- (i\overleftarrow{\not{\partial}} + g\mathcal{A} + m) \gamma^- - igA_+ \bar{\psi}_+, \quad (76)$$

and

$$(i\partial_- + gA_-) \bar{v}_2 = \frac{i}{2} \bar{\psi}_- \left[ - (i\overleftarrow{\not{\partial}} + g\mathcal{A})^2 + m^2 \right] + \frac{i}{2} gA_+ \bar{\psi}_+ (i\overleftarrow{\not{\partial}} + g\mathcal{A} + m) \gamma^+, \quad (77)$$

respectively. Therefore, all the fermionic Lagrange multipliers were determined, then, the set of primary and secondary fermionic constraints are second class according to Dirac's procedure [8]. The use of the projection of the fermionic fields permitted to observe clearly the existence of fermionic secondary constraints which show that the field is fully describe by only two of their four components.



### 3.2 The electromagnetic sector

The consistent condition of  $C^k$  gives

$$\dot{C}^k = \left( \delta_2^k \partial_1 - \delta_1^k \partial_2 \right) F_{12} - g \left( \bar{\psi}_+ \gamma^k \psi_- + g \bar{\psi}_- \gamma^k \psi_+ \right) + \partial_k \pi^- - 2 \partial_- u_k \approx 0, \quad (78)$$

it is a differential equation for the  $u_k$  Lagrange multipliers.

The consistence condition of  $\pi^+$  produces the following secondary constraint

$$G \equiv \dot{\pi}^+ = \partial_- \pi^- + \partial_k \pi^k - g \bar{\psi}_+ \gamma^+ \psi_+ \approx 0, \quad (79)$$

which is the Gauss's law, and its consistence condition shows that

$$\dot{G} = ig \left( \dot{\bar{\Gamma}}_+ \psi_+ + \bar{\psi}_+ \dot{\Gamma}_+ + \bar{\psi}_- \dot{\Gamma}_- + \dot{\bar{\Gamma}}_- \psi_- \right) \approx 0, \quad (80)$$

what is automatically conserved in time. Then, no more constraints in the theory are generated and the multiplier  $u$  relative to  $\pi^+$  remains undetermined.

### 3.3 Constraint classification and gauge fixing conditions

The full set of primary and secondary constraints is given by the equations (52), (53), (62), (66), (67), (68) and (79)

$$C, C^k, \Gamma_+, \Gamma_-, \bar{\Gamma}_+, \bar{\Gamma}_-, \Omega_-, \Phi, \bar{\Omega}_-, \bar{\Phi}, G. \quad (81)$$

The  $C = \pi^+$  has a vanishing PB with each one of the constraints and therefore it is a first class constraint. Apparently, the remaining subset of constraints is second class, but they form a singular constraint matrix with an zero mode whose respective eigenvector gives a linear combination what is one more first class constraint (see Appendix C). Alternately, we must observe that as the fermionic case, the electromagnetic sector must maintain its free constraint structure due that the interaction term is not allowed to change the first class structure of the free theory into second class ones, because the DB would not be defined any longer in the limit of zero coupling constant. Thus, such combination, which is independent of  $\pi^+$  and it is a first class constraint, is

$$\Sigma \equiv G - ig \left[ \bar{\psi}_+ \Gamma_+ + \bar{\Gamma}_+ \psi_+ + \bar{\psi}_- \Gamma_- + \bar{\Gamma}_- \psi_- \right]. \quad (82)$$

Thus, we have the following set of second class constraints

$$\Gamma_+, \Gamma_-, \Omega_-, \Phi, \bar{\Gamma}_-, \bar{\Gamma}_+, \bar{\Omega}_-, \bar{\Phi}, C^k \quad (83)$$

and the set of first class constraints

$$C, \Sigma. \quad (84)$$

This is the maximal number of first class constraints and the consistence condition on the second class constraints led to expressions for their respective Lagrange multipliers.

Now, the next step is to impose gauge conditions one for every first class constraint, such that the set of gauge fixing conditions and first class constraints turn on a second class set. The choosing of the appropriate set of gauge conditions is a careful procedure, because they should be compatible with the Euler-Lagrange equations of motion. Thus, we choose a set of gauge conditions known as the null-plane gauge and it is defined by the following relations

$$B = A_- \approx 0, \quad K \equiv \pi^- + \partial_- A_+ \approx 0 \quad (85)$$

then, the set of first class constraints and gauge fixing conditions now is a second class set.

It is worthwhile to note that when the photon field is couple with the fermion field, we would consider  $A_+$  as a possible gauge condition but in this case it is not possible to find a second gauge condition to be compatible with the equations of motion. It is similar what happen with the radiation gauge in the instant form formalism, *i. e.*,  $x^0 = cte.$  plane [8].

### 3.4 The Dirac's brackets

The explicit evaluation of the inverse of the full matrix of second class constraint involves an arbitrary function, which can be determined considering appropriated boundary conditions on the fields [4], thus, the inverse of the operator  $\partial_-$  is defined as in (34).

After a laborious work, we obtain the graded Lie algebra for the dynamical variables of the spinor electrodynamics

$$\{A_k(x), A_j(y)\}_D = -\frac{1}{4}\delta_j^k \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp), \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_D &= -\frac{i}{2} (\gamma^-)_{ab} \delta^3(x-y) - \frac{1}{4} \epsilon(x^- - y^-) (i\mathcal{D}_\perp^x + m)_{ab} \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad + \frac{i}{8} |x^- - y^-| \left\{ \gamma^+ [(\mathcal{D}_\perp^x)^2 + m^2] \right\}_{ab} \delta^2(x^\perp - y^\perp), \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \{A_+(x), \psi(y)\}_D &= -\frac{i}{2} g |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \psi(y) \\ &\quad + \frac{i}{4} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dz^- \epsilon(x^- - z^-) \epsilon(z^- - y^-) \Delta^- \psi(x^\perp, z^-) \\ &\quad + \frac{i}{16} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dz^- |x^- - z^-| \epsilon(z^- - y^-) \left[ \gamma^+ \gamma^k \partial_k^x \psi(x^\perp, z^-) \right] \\ &\quad + \frac{i}{16} g \left[ \partial_k^x \delta^2(x^\perp - y^\perp) \right] \int dz^- |x^- - z^-| \epsilon(z^- - y^-) \left[ \gamma^+ \gamma^k \psi(x^\perp, z^-) \right], \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \{A_+(x), \bar{\psi}(y)\}_D &= \frac{i}{2} g |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \bar{\psi}(y) \\ &\quad - \frac{i}{4} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dz^- \epsilon(x^- - z^-) \epsilon(z^- - y^-) \bar{\psi}(x^\perp, z^-) \Delta^+ \\ &\quad - \frac{i}{16} g \left[ \partial_j^x \delta^2(x^\perp - y^\perp) \right] \int dz^- |x^- - z^-| \epsilon(z^- - y^-) \left[ \bar{\psi}(x^\perp, z^-) \gamma^j \gamma^+ \right] \\ &\quad - \frac{i}{16} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dz^- |x^- - z^-| \epsilon(z^- - y^-) \left[ \partial_k^x \bar{\psi}(x^\perp, z^-) \gamma^k \gamma^+ \right]. \end{aligned} \quad (89)$$

Our two first expressions, equations (86) and (87), are in accord with the result obtained by Rohrlich [4] and Kogut and Soper [13] when the correspondence principle is applied. In [4] these relations are determined from the (anti)-commutator between the field operators for unequal times while in [13] the authors postulated the (anti)-commutators for the annihilation and creation operators for the quanta fields, and transforming these relations back to coordinate space, they obtained the equal-time (anti)-commutators.

The relations (88) and (89) associated with the field  $A_+$  were derived following a careful application of the Dirac's procedure to the null-plane. Using the correspondence principle these relations are equivalent with the expressions derived by Kogut and Soper [13].

## 4 Remarks and conclusions

We have performed the constraint analysis of the scalar and spinor electrodynamics on the null-plane and several characteristics or features are in contrast with the customary space-like hyper-surface formulation.

We have shown that the  $SQED_4$  has a first class constraint, the Gauss's law, which result of a linear combination of electromagnetic and scalar constraints which is given by the zero mode eigenvector of the constraint matrix. This fact is a consequence of the constraints associated with the scalar sector. On the other hand, in the instant form analysis the second first class constraint does not have contributions coming from scalar constraints because in this formalism the scalar sector is free of constraints.

After select the null-plane gauge conditions to transform the first class constraints in second class one, we need to impose appropriated boundary conditions on the fields to fix a hidden subset of first class constraints which allows to get an unique inverse of the second class constraints matrix. Then, we obtain the DB's of the theory and can quantize it via the correspondence principle. The commutation relations among fields (44) obtained by us are consistent with those results reported in the literature [11]. The relations (46) involving the field operator  $A_+$  were not obtained in [11] but it was affirmed that they could be derived solving a quantum constraint. However, these commutators were calculated by us by quantizing the DB's derived at classical level following a careful analysis of the constraints structure of the  $SQED_4$ .

In  $QED_4$  case, the careful analysis the constraints structure of the fermionic sector shows that it has only second class constraints. However, there exists a hidden subset of first class constraints [6] which generate improper gauge transformations [7]. Such first class subset are associated with the impossibility of define an unique inverse for the operator  $\partial_-$  related to the insufficiency of boundary conditions to solve the Cauchy data problem. The uniqueness of the inverse is guaranteed by imposing appropriated boundary conditions on the fields.

The first class set of the  $QED_4$  are fixed choosing the null-plane gauge conditions and following the Dirac's procedure we obtain graded algebra (86)-(89) for the canonical variables. Via the correspondence principle (86) and (87) reproduce the canonical (anti)-commutation relations for the quantum fields derived in [4, 13]. Also the relations (88) and (89) associated with the field  $A_+$ , derived following a careful application of the Dirac's procedure, reproduce the expressions derived by Kogut and Soper [13] at quantum level.

Recently [16] the null-plane Hamiltonian structure of the (1+1)-dimensional electrodynamics, the Schwinger model, has been studied by following the Dirac's procedure [2] and dealing carefully the hidden first class constraints [6, 7]. The study shows that the fermionic sector has only second class constraints such as happened in the instant formalism. And as we can be shown the fermionic sector of the  $QED_4$  in the null-plane also presents only second class constraints structure. It can be conclude that fermionic fields satisfying a first order Dirac's equation in the null-plane or instant form formalisms have only second class constraints structure.

In advanced, we are studying the constraints structure analysis of the pure Yang-Mills fields and also the Hamiltonian structure of the theory resulting of the interaction between the Yang-Mils fields with complex scalar fields. Reports on this research will be communicated elsewhere.

## Acknowledgements

RC thanks CNPq for partial support, BMP thanks CNPq for partial support. GERZ thanks CNPq (grant 142695/2005-0) for full support.

## A Notation

The null plane time  $x^+$  and longitudinal coordinate  $x^-$  are defined, respectively, as

$$x^+ \equiv \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}} \quad x^- \equiv \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}}, \quad (90)$$

with the transverse coordinates  $x^\perp \equiv (x^1, x^2)$  kept unchanged.

Hence, in the space of four-vectors  $x = (x^+, x^1, x^2, x^-)$ , the metric is

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Explicitly,

$$x^+ = x_-, \quad x^- = x_+, \quad x \cdot y = x^+ y^- + x^- y^+ - x^\perp \cdot y^\perp, \quad (92)$$

where the derivatives with respect to  $x^+$  e  $x^-$  are defined as

$$\partial_+ \equiv \frac{\partial}{\partial x^+}, \quad \partial_- \equiv \frac{\partial}{\partial x^-} \quad (93)$$

with  $\partial^+ = \partial_-$ . Here, we have used the following relations

$$\begin{aligned} \delta^4(x - y) &= \delta(x^+ - y^+) \delta^2(x^\perp - y^\perp) \delta(x^- - y^-). \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dx^-} \epsilon(x^- - y^-) &= \delta(x^- - y^-) \quad , \quad \frac{1}{2} \int dy^- \epsilon(x^- - y^-) \epsilon(y^- - z^-) = |x^- - y^-| \end{aligned} \quad (94)$$

The same orthogonal transformation is applied to Dirac matrices that still obey

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (95)$$

this makes  $\gamma^+$  and  $\gamma^-$  singular matrices.

Since

$$(\gamma^+)^\dagger = \gamma^-, \quad (\gamma^-)^\dagger = \gamma^+ \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \quad k = 1, 2. \quad (96)$$

we define the Hermitian matrices

$$\Delta^\pm = \frac{1}{2} \gamma^\mp \gamma^\pm, \quad (97)$$

which are projection operators,

$$(\Delta^\pm)^2 = \Delta^\pm, \quad \Delta^\pm \Delta^\mp = 0, \quad \Delta^+ + \Delta^- = 1. \quad (98)$$

Their action on Dirac spinors yields

$$\psi_\pm = \Delta^\pm \psi, \quad \bar{\psi}_\pm = \bar{\psi} \Delta^\mp, \quad (99)$$



## B The second first class constraint for $SQED_4$ and $QED_4$

Now, we compute the second first class constraint for  $SQED_4$ . The set of the remaining constraints is  $\Phi^a = \{\Gamma, \Gamma^*, G, \chi^k\}$ , its constraint matrix  $C_{ab}(x, y) = \{\Phi^a(x), \Phi^a(y)\} = \Delta(x) \delta^3(x - y)$ , where the  $\Delta(x)$  matrix is

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} 0 & -2(D_-^x)^* & 2ig[(D_-^x)^* \phi(x)] + 2ig\phi(x)\partial_-^x & 0 \\ -2D_-^x & 0 & -2ig[D_-^x \phi^*(x)] - 2ig\phi^*(x)\partial_-^x & 0 \\ 2ig\phi(x)D_-^x & -2ig\phi^*(x)(D_-^x)^* & F(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\delta_t^k \partial_-^x \end{pmatrix} \quad (100)$$

where the operator  $F$  is

$$F \equiv -2g^2 \partial_- (\phi\phi^*) - 4g^2 \phi\phi^* \partial_- . \quad (101)$$

The matrix  $C(x, y)$  has determinant zero. It is due to this matrix has a zero eigenvalue and its respective eigenvector gives a linear combination of the constraints which is a first class constraint. The eigenvector is calculated using the following equation

$$\int d^3y C_{ab}(x, y) U_b(y) = 0, \quad (102)$$

thus, the eigenvector is  $U = (-ig\phi^*, ig\phi, 1, 0, 0)^T$  and the linear combination given the second first class is

$$\Sigma = \Phi^a U_a = G - ig(\phi^* \Gamma - \phi \Gamma^*). \quad (103)$$

For the  $QED_4$ , the remaining set of constraints is

$$G, \Gamma_+, \Gamma_-, \bar{\Gamma}_+, \bar{\Gamma}_-, \Omega_-, \Phi, \bar{\Omega}_-, \bar{\Phi}, C^k. \quad (104)$$

Its constraint matrix has a sole zero mode and the respective eigenvector is

$$U = (1, ig\bar{\psi}_+, ig\bar{\psi}_-, -ig\psi_+, -ig\psi_-, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \quad (105)$$

it gives the second first class

$$\Sigma = G - ig[\bar{\psi}_+ \Gamma_+ + \bar{\Gamma}_+ \psi_+ + \bar{\psi}_- \Gamma_- + \bar{\Gamma}_- \psi_-]. \quad (106)$$

## C Grassmann Algebras

A Grassmann algebra contains bosonic (self-commuting) and fermionic (self-anticommuting) variables [14]:

$$FB = (-1)^{n_A n_B} BF, \quad (107)$$

where  $n = 0$  for a bosonic, and  $n = 1$  for a fermionic variable. Note that the product of two fermionic variables is bosonic, and the product of a fermionic and a bosonic variables is fermionic.

The left derivative of a  $\psi_\alpha$  fermionic variable is defined as

$$\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} \{ \psi_{\alpha_1} \psi_{\alpha_2} \cdots \psi_{\alpha_n} \} = -\delta_{\alpha\alpha_1} \psi_{\alpha_2} \cdots \psi_{\alpha_n} + \delta_{\alpha\alpha_2} \psi_{\alpha_1} \psi_{\alpha_3} \cdots \psi_{\alpha_n} + \cdots + (-1)^n \delta_{\alpha\alpha_n} \psi_{\alpha_1} \psi_{\alpha_2} \cdots \psi_{\alpha_{n-1}}. \quad (108)$$

The Poisson Brackets can be defined similar to ordinary mechanics [15]. The phase space is spanned by  $q_i, p^i$  which are bosons and  $\psi_\alpha$  and  $\pi^\alpha$ , fermions. Denote by  $B(F)$  a bosonic (Fermionic) element of the Grassmann algebra, then

$$\begin{aligned}
\{B_1, B_2\} = -\{B_2, B_1\} &= \left\{ \frac{\partial B_1}{\partial q_i} \frac{\partial B_2}{\partial p^i} - \frac{\partial B_2}{\partial q_i} \frac{\partial B_1}{\partial p^i} \right\} + \left\{ \frac{\partial B_1}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial B_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial B_2}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial B_1}{\partial \pi^\alpha} \right\} \\
\{F, B\} = -\{B, F\} &= \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p^i} \right\} - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial F}{\partial \pi^\alpha} \right\} \\
\{F_1, F_2\} = \{F_2, F_1\} &= \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \frac{\partial F_2}{\partial p^i} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \frac{\partial F_1}{\partial p^i} \right\} - \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F_2}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial \pi^\alpha} \right\} .
\end{aligned} \tag{109}$$

It follow from its definition that the Poisson brackets has the properties

$$\begin{aligned}
\{A, B\} &= -(-1)^{n_A n_B} \{B, A\} \\
\{A, B + C\} &= \{A, B\} + \{A, C\} \\
\{A, BC\} &= (-1)^{n_A n_B} B \{A, C\} + \{A, B\} C \\
\{AB, C\} &= (-1)^{n_B n_C} \{A, C\} B + A \{B, C\} \\
(-1)^{n_A n_C} \{A, \{B, C\}\} &+ (-1)^{n_B n_A} \{B, \{C, A\}\} + (-1)^{n_C n_B} \{C, \{A, B\}\} = 0 .
\end{aligned} \tag{110}$$

## References

- [1] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
- [2] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964.  
A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1976.
- [3] P. P. Srivastava, in *Quantum Field Theory: A 20th Century Profile*, ed. A. N. Mitra (New Delhi: Indian National Science Academy, 2000), p. 437.
- [4] F. Rohrlich, Acta Phys. Austriaca, Suppl. VIII, 277(1971).  
R. A. Neville and F. Rohrlich, Nuovo Cimento **A1** , 625 (1971).
- [5] G. McCartor, Z. Phys, **C41**, 271 (1988).
- [6] P. J. Steinhardt, Ann. Phys **128**, 425 (1980).
- [7] R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboim, Nucl. Phys. **B122**, 61 (1976).
- [8] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, Vol. **169**, Springer, New York, 1982.
- [9] E. Tomboulis, Phys. Rev. **D8**, 2736 (1971).
- [10] S. B. Pereslegin and V. A. Franke, Theor. Math. Phys. **59**, 365 (1984).
- [11] R. A. Neville and F. Rohrlich, Phys. Rev. **D3**, 1692(1971).

- [12] P. N. Pyatov, A. V. Ruzanov and G. N. Rybkin, *Classical Mechanics on Superspace*, IFVE-88-212, 1988.
- [13] J. B. Kogut and D. E. Soper, *Phys. Rev.* **D1**, 2901 (1970).
- [14] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966.  
F. A. Berezin, *Introduction to Superanalysis*, Serie Mathematical Physics and Applied Mathematics, Vol. 9, edited by A. A. Kirillov, Reidel Publishing Company, 1987.
- [15] R. Casalbouni, *Nuovo Cim.* **33A**, 115 (1976).  
R. Casalbouni, *Nuovo Cim.* **33A**, 389 (1976).
- [16] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Int. J. Mod. Phys.* **E16**, 2993 (2007).

## 5.2 $QCD_4$ escalar no plano nulo

Estudaremos a estrutura hamiltoniana sobre o plano nulo do campo de Yang-Mills e a Cromodinâmica escalar  $QCD_4$ . Seguindo o procedimento de Dirac para sistemas com vínculos, realizaremos uma análise detalhada da estrutura de vínculos de ambos os modelos e determinaremos os parênteses de Dirac generalizados para as variáveis físicas. No caso livre de Yang-Mills, usando o princípio de correspondência nos parênteses de Dirac, obteremos os mesmos comutadores apresentados na literatura.



# Scalar $QCD_4$ on the null-plane

R. Casana<sup>1\*</sup>, B.M. Pimentel<sup>2†</sup> and G. E. R. Zambrano<sup>2‡§</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão (UFMA),  
Campus Universitário do Bacanga, CEP 65080-040, São Luís - MA, Brasil.*

<sup>2</sup> *Instituto de Física Teórica (IFT/UNESP), UNESP - São Paulo State University  
Rua Pamplona 145, CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brazil*

## Abstract

We have studied the null-plane hamiltonian structure of the free Yang-Mills fields and the scalar chromodynamics ( $SQCD_4$ ). Following the Dirac's procedure for constrained systems we have performed a detailed analysis of the constraint structure of both models and we give the generalized Dirac brackets for the physical variables. In the free Yang-Mills case, using the correspondence principle in the Dirac's brackets we obtain the same commutators present in the literature.

## 1 Introduction

To quantize the theory on the null-plane, initial conditions on the hyperplane  $x^+ = cte$  and equal  $x^+$ -commutation relations must be given and the hamiltonian must describe the time evolution from an initial value surface to other parallel surface that intersects the  $x^+$ -axis at some later time. Although the prescription has a lot of similarities with the conventional approach there are significant differences when we perform the quantization of the theory. Inside the null-plane framework, the lagrangian which describes a given field theory is singular and at least second class constraints appear, these can be eliminated by constructing Dirac's brackets (DB) and the theory can be quantized, via correspondence principle, in terms of a reduced number of independent fields, the physical ones. Thus, the Dirac's method [1] allows built the null-plane hamiltonian and the canonical commutation relations in terms of the independent fields of the theory.

The quantization of relativistic field theory at the null plane time, proposed by Dirac [2], has found important applications [3] in both gauge theories and string theory [4]. It is interesting to observe that the null-plane quantization of a non-abelian gauge theory using the null-plane gauge condition,  $A_-$ , identified the transverse components of the gauge field as the degrees of freedom of the theory and, therefore, the ghost fields can be eliminated of the quantum action [5].

In [6], Tomboulis has quantized the massless Yang-Mills field in the null-plane gauge  $A_- = 0$  and derived the Feynman rules. However, in [7], McKeon has shown that the null-plane quantization of this theory leads a set of second-class constraints in addition to the usual first-class constraints, characteristics of the usual instant form quantization, what implies in the introduction of additional

---

\*casana@ufma.br

†pimentel@ift.unesp.br

‡gramos@ift.unesp.br

§On leave of absence from Departamento de Física, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Nariño, Colombia

ghost fields in the effective lagrangian. Moreover, in [8], Morara, Soldati and McCartor have quantized the theory in the framework of the standard perturbation approach and they have explained that the difficulties appearing in the null-plane gauge are overcome using the gauge  $A_+^a = 0$ , such gauge provides a generating functional for the renormalized Green's functions that takes to the Mandelstam-Leibbrandt's prescription for the free gluon propagator.

On the other hand, in [9], Neville and Rohlich have studied the scalar electrodynamics and have obtained the commutation relations between free fields from the commutations relations of the free field operators at unequal times but the commutation relation representing the interaction was not computed but they affirmed to be derived solving a quantum constraint. This last commutation relation was determined in [10], Casana, Pimentel and Zambrano have calculated all the commutation relations following a careful analysis of the constraint structure of the theory and the results obtained are consistent with the specified in the literature [9].

In this paper we will discuss firstly the null-plane structure of the pure Yang-Mills fields and after its interaction with a scalar complex field ( $SQCD_4$ ) following the Dirac's formalism for constrained systems. The Hamiltonian analysis follows the spirit outlined in [10]. The work is organized as follow: In the section 2, we study the free Yang-Mills field, being its constrained structure analyzed in detail, thus, we classify the constraints and the appropriated equations of motion of the dynamical variables are determined by using the extended hamiltonian. The null-plane gauge is imposed to transform the set of first class constraints in second class one and, the Diracs's brackets (DB) among the independent fields are obtained by choosing appropriate boundary conditions on the fields. In the section 3, the constraint structure of the scalar chromodynamics ( $SQCD_4$ ) is analyzed, the set of constraints is classified and the correct equations of motion are checked by using extended hamiltonian as the generator of temporal evolution. Next, we invert the second class matrix by imposing appropriated boundary conditions on the fields and we calculate the DB among the fundamental dynamical variables. Finally, we give our conclusions and remarks.

## 2 Free Yang-Mills field

For any semi-simple Lie group with structure constant  $f_{bc}^a$  the Yang-Mill lagrangian density is

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a, \quad (1)$$

with  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$ , the gauge index  $a, b, c$  runs from 1 to  $n$ . Such lagrangian is invariant under the following infinitesimal gauge transformations

$$\delta A_a^\mu(x) = f_{bc}^a \Lambda^b(x) A_c^\mu(x) + \frac{1}{g} \partial^\mu \Lambda_a(x). \quad (2)$$

with  $\Lambda_a(x)$  a infinitesimal function.

In the present work, we specialize for convenience to the  $SU(2)$  gauge group that only has three generators and  $f_{bc}^a = \varepsilon_{abc}$ , where  $\varepsilon_{abc}$  is the Levi-Civita totally antisymmetric tensor in three dimensions, thus, we can define everything in such way that we can forget about raising and lowering group indexes. From (1) we find the Euler-Lagrange equations

$$(D_\nu)^{ab} F_b^{\nu\mu} = 0, \quad (3)$$

where we have defined the covariant derivative  $(D_\nu)^{ab} \equiv \delta_b^a \partial_\nu - g\varepsilon_{abc} A_\nu^c$ .

## 2.1 Structure Constraints and Classification

In the null-plane dynamics, the canonical conjugate momenta are

$$\pi_a^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ A_\mu^a)} = -F_a^{+\mu}, \quad (4)$$

this equation gives the following set of primary constraints

$$\phi_a \equiv \pi_a^+ \approx 0, \quad \phi_a^k \equiv \pi_a^k - \partial_- A_k^a + \partial_k A_-^a - g\varepsilon_{abc} A_-^b A_k^c \approx 0. \quad (5)$$

and the dynamical relation for  $A_-^a$

$$\pi_a^- = \partial_+ A_-^a - \partial_- A_+^a - g\varepsilon_{abc} A_+^b A_-^c, \quad (6)$$

At once, the canonical hamiltonian is given by

$$H_C = \int d^3 y \mathcal{H}_C = \int d^3 y \left\{ \frac{1}{2} (\pi_a^-)^2 + \pi_a^- (D_-^x)^{ab} A_+^b + \pi_a^i (D_i^x)^{ab} A_+^b + \frac{1}{4} (F_{ij}^a)^2 \right\}. \quad (7)$$

Following the Dirac procedure [1], we define the primary hamiltonian adding to the canonical hamiltonian the primary constraints

$$H_P = \int d^3 y \left\{ \frac{1}{2} (\pi_a^-)^2 + \pi_a^- (D_-^x)^{ab} A_+^b + \pi_a^i (D_i^x)^{ab} A_+^b + \frac{1}{4} (F_{ij}^a)^2 + u^b \phi_b + \lambda_i^b \phi_b^i \right\} \quad (8)$$

where  $u^b$  and  $\lambda_i^b$  are their respective Lagrange multipliers.

The fundamental Poisson brackets (PB) among fields are

$$\{A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta_b^a \delta^3(x-y). \quad (9)$$

Requiring that  $H_P$  is the generator of temporal evolutions, the consistency condition of the primary constraints, i.e.  $\{\phi, H_P\} = 0$ , give us for  $\phi_a$

$$\{\phi_a(x), H_P\} = (D_-^x)^{ab} \pi_b^- + (D_i^x)^{ab} \pi_b^i \equiv G_a(x) \approx 0, \quad (10)$$

a genuine secondary constraint, which is the Gauss's law. Also, for  $\phi_a^k$  we obtain

$$\{\phi_a^k(x), H_P\} = (D_k^x)^{ab} F_{+-}^b + (D_i^x)^{ab} F_{ik}^b - 2(D_-^x)^{ab} \lambda_k^b \approx 0, \quad (11)$$

a differential equation which allows to compute  $\lambda_k^b$  after imposition of appropriated boundary conditions. The consistency condition of the secondary constraint yields

$$\{G_a(x), H_P\} = g\varepsilon_{acb} A_+^c(x) G_b(x) \approx 0, \quad (12)$$

the Gauss's law is automatically conserved. Then, there are not more constraints and the equations (5) and (10) give the full set of constraints.

The set of first class constraints is  $\{\pi_a^+, G_a\}$  and the set of second class constraints is  $\{\phi_a^k\}$  whose PB's are

$$\{\phi_a^k(x), \phi_b^l(y)\} = -2\delta_k^l (D_-^x)^{ab} \delta^3(x-y) \quad (13)$$

## 2.2 Equations of motion

Now we check the equations of motion. The time evolution of the fields is determined by computing their PB's with the so called extended hamiltonian  $H_E$ , which is obtained by adding to the primary hamiltonian all the first class constraints of the theory:

$$H_E = \int d^3y \left\{ \frac{1}{2} (\pi_b^-)^2 + \pi_b^- (D_-^y)^{bc} A_+^c + \pi_b^i (D_i^y)^{bc} A_+^c + \frac{1}{4} (F_{ij}^b)^2 + \lambda_l^b \phi_l^b + u^b \phi_b + v^b G_b \right\}, \quad (14)$$

thus, we have the time evolution of the dynamical variables, i.e,  $\dot{\phi} = \{\phi, H_E\}$ , gives

$$\dot{A}_+^a = u^a \quad (15)$$

$$\dot{A}_-^a = \pi_a^- + (D_-^x)^{ac} A_+^c - (D_-^x)^{ab} v^b \quad (16)$$

$$\dot{A}_k^a = (D_k^x)^{ac} A_+^c + \lambda_k^a - (D_k^x)^{ab} v^b \quad (17)$$

$$\dot{\pi}_a^+ = G_a \quad (18)$$

$$\dot{\pi}_a^- = -g\varepsilon_{abc} \pi_b^- A_+^c + (D_l^x)^{ab} \lambda_l^b - g\varepsilon_{bca} v^b \pi_c^- \quad (19)$$

$$\dot{\pi}_a^k = -g\varepsilon_{bca} \pi_b^k A_+^c + (D_j^x)^{ab} F_{kj}^b - (D_-^x)^{ab} \lambda_k^b - g\varepsilon_{abc} \pi_c^k v^b, \quad (20)$$

if we demand consistence with the Euler-Lagrange equation of motion (3) we must to choose  $v^b = 0$ , however, the multiplier  $u^a$  remains indeterminate.

The Dirac's algorithm requires of as many gauge conditions as first class constraints there are, nevertheless these conditions should be compatible with the Euler-Lagrange equations and together with the first class set they should form a second class set, in such way that the Lagrange multipliers, corresponding to the first class set, are determined. Under such considerations, we choose as the first gauge condition

$$A_-^a \approx 0, \quad (21)$$

whose consistency condition  $\dot{A}_-^a = \{A_-^a, H_E\} \approx 0$  must be compatible with the dynamical equation (6) thus we see that if we choose  $v^b = 0$  in (16) then the Eq.(21) will hold for all times only if

$$\pi_a^- + \partial_-^x A_+^a \approx 0, \quad (22)$$

therefore, the equations (21) and (22) constitute our gauge conditions on the null-plane and they are known as the null-plane gauge.

## 2.3 Dirac Brackets

The gauge fixing conditions transform the first class set into second class one, the following stage in the Dirac's procedure is to transform the second class constraints in strong identities. This demands an alteration of the canonical brackets (PB) to form a new brackets set, the Dirac's brackets (DB), with which the second class constraints are automatically satisfied. Thus, the prescription for determine the DB implies in calculating the inverse of the second class matrix, for this purpose, we rename the second class constraints as

$$\begin{aligned} \Theta_1 &\equiv \pi_a^+ & , & & \Theta_2 &\equiv (D_-^x)^{ab} \pi_b^- + (D_i^x)^{ab} \pi_b^i \\ \Theta_3 &\equiv A_-^a & , & & \Theta_4 &\equiv \pi_a^- + \partial_-^x A_+^a \\ \Theta_5 &\equiv \pi_a^k - \partial_-^x A_k^a + \partial_k^x A_-^a - g\varepsilon_{abc} A_-^b A_k^c, \end{aligned} \quad (23)$$



and we define the elements of the second class matrix as  $F_{ab}(x, y) \equiv \{\Theta_a(x), \Theta_b(y)\}$ . With these considerations, the Dirac's bracket of two dynamical variables,  $\mathbf{A}_a(x)$  and  $\mathbf{B}_b(y)$ , is then defined as

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D = \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_c(u) \right\} (F^{-1})^{cd}(u, v) \left\{ \Theta_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}, \quad (24)$$

where  $F^{-1}$  is the inverse of the constraint matrix.

The explicit evaluation of  $F^{-1}$  involve the determination of an arbitrary function of the variables  $x^+$  and  $x^\perp$  [10] which can be fixed by considering appropriate boundary conditions [11] on the fields  $A_\mu^a$  eliminating the ambiguity in the definition of the inverse of the operator  $\partial_-$  related to their zero modes that give origin to hidden subset of first class constraints which generate improper gauge transformations [12] what is characteristic of the null-plane constraint structure [13]. Thus, from (24) we obtain the DB among the independent variables of the theory

$$\begin{aligned} \left\{ A_k^a(x), A_l^b(y) \right\}_D &= -\frac{1}{4} \delta_b^a \delta_k^l \epsilon(x-y) \delta^2(x^\top - y^\top) \\ \left\{ A_k^a(x), A_+^b(y) \right\}_D &= \frac{1}{4} |x-y| (D_k^x)^{ab} \delta^2(x^\top - y^\top). \end{aligned} \quad (25)$$

At once, via the correspondence principle we obtain the commutators among the fields

$$\left[ A_k^a(x), A_l^b(y) \right] = -\frac{i}{4} \delta_b^a \delta_k^l \epsilon(x-y) \delta^2(x^\top - y^\top), \quad (26)$$

$$\left[ A_k^a(x), A_+^b(y) \right] = \frac{i}{4} |x-y| (D_k^x)^{ab} \delta^2(x^\top - y^\top). \quad (27)$$

The first relationship is exactly that obtained by Tomboulis [6] and starting from it is possible to calculate the other two expressions determined by him, meanwhile the equation (27) is our contribution to the commutation relations.

### 3 Scalar chromodynamics $SQCD_4$

The model describing the interaction of Yang-Mills and complex scalar field is given the following lagrangian density

$$\mathcal{L} = \eta^{\mu\nu} (D_\mu)^{ab} \Phi_b^\dagger (D_\nu)^{ac} \Phi_c - m^2 \Phi_a^\dagger \Phi_a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (28)$$

where the field strength  $F_{\mu\nu}^a$  and the covariant derivative  $(D_\mu)^{ab}$  are defined in the  $SU(2)$  adjoint representation by

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (D_\mu)^{ab} \equiv \delta_a^b \partial_\mu - g \varepsilon_{abc} A_\mu^c, \quad (29)$$

respectively.  $\Phi_c$  is the complex scalar field which has three components in an internal space and the gauge transformation are rotations in this space what gives a conserved vector quantity named *isospin*. The field equations are given for

$$\begin{aligned} (D_\nu)^{ab} F_b^{\nu\mu} &= J_a^\mu \\ (D_\mu)^{ab} (D^\mu)^{bc} \Phi_c + m^2 \Phi_a &= 0 \\ (D^\mu)^{ab} (D_\mu)^{bc} \Phi_c^\dagger + m^2 \Phi_a^\dagger &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

where  $J_h^\beta$  is the current density defined by

$$J_a^\mu \equiv g \varepsilon_{abc} \left\{ \left[ (D^\mu)^{bd} \Phi_d^\dagger \right] \Phi_c + \Phi_c^\dagger \left[ (D^\mu)^{bd} \Phi_d \right] \right\}. \quad (31)$$

### 3.1 Structure Constraints and Classification

The canonical conjugate momenta of the gauge field is

$$\pi_a^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ A_\mu^a)} = -F_a^{+\mu}, \quad (32)$$

and for the fields  $\Phi_a$ ,  $\Phi_a^\dagger$  are

$$\Pi_a^\dagger \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ \Phi_a)} = (D_-)^{ab} \Phi_b^\dagger, \quad \Pi_a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ \Phi_a^\dagger)} = (D_-)^{ab} \Phi_b, \quad (33)$$

respectively.

From (32) we get one dynamical relation for  $A_-^a$

$$\pi_a^- = \partial_+ A_-^a - \partial_- A_+^a - g\varepsilon_{abc} A_+^b A_-^c, \quad (34)$$

and the following set of primary constraints for the gauge sector

$$\phi_a \equiv \pi_a^+ \approx 0, \quad \phi_a^k \equiv \pi_a^k - \partial_- A_k^a + \partial_k A_-^a - g\varepsilon_{abc} A_-^b A_k^c \approx 0, \quad (35)$$

and from (33) we obtain a set of primary constraints of the scalar sector

$$\Theta_a \equiv \Pi_a - (D_-)^{ab} \Phi_b \approx 0, \quad \Theta_a^\dagger \equiv \Pi_a^\dagger - (D_-)^{ab} \Phi_b^\dagger \approx 0. \quad (36)$$

The canonical hamiltonian is

$$\begin{aligned} H_C = & \int d^3y \left\{ \frac{1}{2} (\pi_b^-)^2 + \pi_b^- (D_-)^{bc} A_+^c + \pi_b^k (D_k)^{bc} A_+^c + J_c^+ A_+^c \right\} \\ & + \int d^3y \left\{ [(D_k^x)^{ab} \Phi_b^\dagger] [(D_k^x)^{ad} \Phi_d] + m^2 \Phi_b \Phi_b + \frac{1}{4} (F_{jk}^b)^2 \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

and the primary hamiltonian is

$$H_P = H_C + \int d^3y \left\{ u^b \phi_b + \lambda_k^b \phi_b^k + U_b^\dagger \Theta_b + \Theta_b^\dagger U_b \right\}, \quad (38)$$

where  $u^b$  and  $\lambda_k^b$  are the Lagrange multipliers associated to the vector constraints and  $U_b^\dagger$  and  $U_b$  are the multipliers associated with the scalar ones.

The fundamental Poisson brackets are

$$\{A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta_b^a \delta^3(x-y) \quad (39)$$

$$\{\Phi_a(x), \Pi_b^\dagger(y)\} = \delta_a^b \delta^3(x-y), \quad \{\Phi_a^\dagger(x), \Pi_b(y)\} = \delta_a^b \delta^3(x-y), \quad (40)$$

and the non null PB's among the primary constraints

$$\begin{aligned} \{\phi_a^k(x), \phi_b^l(y)\} &= -2\delta_k^l (D_-^x)^{ab} \delta^3(x-y), \\ \{\Theta_a(x), \Theta_b^\dagger(y)\} &= -2(D_-^x)^{ab} \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (41)$$

Following the Dirac's procedure, we compute the consistence condition of every primary constraint.

Thus, the consistence condition of the scalar constraints yields:

$$\dot{\Theta}_a = -g\varepsilon_{abc} \pi_b^- \Phi_c - 2g\varepsilon_{bcd} (D_-)^{ab} [\Phi_d A_+^c] + (D_k)^{ab} (D_k)^{bc} \Phi_c - m^2 \Phi_a - 2(D_-)^{ab} U_b \quad (42)$$

$$\dot{\Theta}_a^\dagger = -g\varepsilon_{abc} \pi_b^- \Phi_c^\dagger - 2g\varepsilon_{bcd} (D_-)^{ab} [\Phi_d^\dagger A_+^c] + (D_k)^{ab} (D_k)^{bc} \Phi_c^\dagger - m^2 \Phi_a^\dagger - 2(D_-)^{ab} U_b^\dagger,$$

these relations allow to determine the multipliers  $U_b$  and  $U_b^\dagger$ , respectively. In this way, there are not more constraints associated with the scalar sector.

In the gauge sector, the consistency condition of  $\phi_a^k$  provides

$$\dot{\phi}_a^k = (D_k)^{ab} \pi_b^- + (D_j)^{ab} F_{jk}^b - J_a^k - 2(D_-)^{ab} \lambda_k^b \approx 0 \quad (43)$$

that is an equation which determines the multiplier  $\lambda_k^b$ . Finally, the consistence condition of  $\pi_a^+$  contributes with a secondary constraint

$$\dot{\phi}_a = (D_-)^{ab} \pi_b^- + (D_i)^{ab} \pi_b^i - J_a^+ \equiv G_a \approx 0, \quad (44)$$

which is the Gauss's law for the scalar chromodynamics. After a laborious work, it is possible to verify that no more further constraints are generated from the consistence condition of the Gauss' law because it is automatically conserved

$$\dot{G}_a = g\varepsilon_{abc} [\Phi_c^\dagger \dot{\Theta}_b + \Phi_c \dot{\Theta}_b^\dagger] \approx 0. \quad (45)$$

Therefore, the equation (35), (36) and (44) constitute the full set of constraints of the theory.

The non null PB's among the constraints of the theory are

$$\begin{aligned} \left\{ \phi_a^k(x), \phi_b^l(y) \right\} &= -2\delta_k^l (D_-^x)^{ab} \delta^3(x-y), \\ \left\{ \Theta_a^\dagger(x), \Theta_b(y) \right\} &= -2(D_-^x)^{ab} \delta^3(x-y), \\ \left\{ G_a(x), \Theta_b^\dagger(y) \right\} &= -2g\varepsilon_{acf} \Phi_f^\dagger(x) (D_-^x)^{cb} \delta^3(x-y), \\ \left\{ G_a(x), \Theta_b(y) \right\} &= -2g\varepsilon_{acf} \Phi_f(x) (D_-^x)^{cb} \delta^3(x-y), \end{aligned} \quad (46)$$

thus, it is easy to note that  $\pi_a^+$  is vanishing PB with all the other constraints, therefore, it is a first class constraint. The remaining set,  $\{\phi_a^k, \Theta_a, \Theta_a^\dagger, G_a\}$ , is apparently a second class set, however, it is possible to show that their constraint matrix is singular and its zero mode eigenvector provides a linear combination of constraints which is a first class constraint [10]. Such second first class constraint is

$$\Sigma_a \equiv G_a - g\varepsilon_{abc} [\Phi_c^\dagger \Theta_b + \Phi_c \Theta_b^\dagger]. \quad (47)$$

Then, the first class constraints set is

$$\phi_a = \pi_a^+ \quad , \quad \Sigma_a = G_a - g\varepsilon_{abc} [\Phi_c^\dagger \Theta_b + \Phi_c \Theta_b^\dagger]. \quad (48)$$

it is the maximal number of first class constraints and, the second class set is

$$\begin{aligned} \phi_a^k &= \pi_a^k - \partial_- A_k^a + \partial_k A_-^a - g\varepsilon_{abc} A_-^b A_k^c, \\ \Theta_a &= \Pi_a - (D_-)^{ab} \Phi_b, \\ \Theta_a^\dagger &= \Pi_a^\dagger - (D_-)^{ab} \Phi_b^\dagger. \end{aligned} \quad (49)$$

### 3.2 Equations of Motion

At this point we need to check that we have the correct equation of motion. The time evolution of the fields is determined by computing their PB with the extended hamiltonian which is defined as

$$H_E = H_C + \int d^3y \left\{ u^b \phi_b + \lambda_i^b \phi_b^i + U_b^\dagger \Theta_b + \Theta_b^\dagger U_b + w_b \Sigma_b \right\} \quad (50)$$

Thus, the time evolution of the gauge field yields

$$\begin{aligned}
\dot{A}_+^a &= u^a \\
\dot{A}_-^a &= \pi_a^- + (D_-)^{ac} A_+^c - (D_-)^{ab} w_b \\
\dot{A}_k^a &= (D_k)^{ab} A_+^b + \lambda_k^a - (D_k)^{ab} w_b \\
\dot{\pi}_a^+ &= G_a \\
\dot{\pi}_a^- &= g\varepsilon_{abc} \pi_b^- A_+^c + 2g^2 A_+^a \Phi_b^\dagger \Phi_b - g^2 A_+^b \Phi_a^\dagger \Phi_b - g^2 A_+^b \Phi_b^\dagger \Phi_a \\
&\quad + (D_k)^{ab} \lambda_k^b - g\varepsilon_{abc} U_b^\dagger \Phi_c - g\varepsilon_{abc} \Phi_c^\dagger U_b + g\varepsilon_{bca} w_b \pi_c^- \\
\dot{\pi}_a^k &= g\varepsilon_{abc} \pi_b^k A_+^c - J_a^k + (D_j)^{ab} F_{jk}^b - (D_-)^{ab} \lambda_k^b + g\varepsilon_{abc} w_b \pi_c^k
\end{aligned} \tag{51}$$

and for the scalar fields the dynamics is given for

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_a &= U_a + g\varepsilon_{abc} w_b \Phi_c, \\
\dot{\Phi}_a^\dagger &= U_a^\dagger + g\varepsilon_{abc} w_b \Phi_c^\dagger, \\
\dot{\Pi}_a &= g\varepsilon_{cde} (D_-)^{ad} [A_+^c \Phi_e] - g\varepsilon_{abc} A_+^b \left[ (D_-)^{cd} \Phi_d \right] + (D_k)^{ab} \left[ (D_k)^{bc} \Phi_c \right] \\
&\quad - m^2 \Phi_a - (D_-)^{ab} U_b - g\varepsilon_{abc} w_b \Phi_c^\dagger, \\
\dot{\Pi}_a^\dagger &= -g\varepsilon_{abc} A_+^b \left[ (D_-)^{cd} \Phi_d^\dagger \right] + g\varepsilon_{bcd} (D_-)^{ac} \left[ A_+^b \Phi_d^\dagger \right] + (D_k)^{ab} \left[ (D_k)^{bc} \Phi_c^\dagger \right] \\
&\quad - m^2 \Phi_a^\dagger - (D_-)^{ab} U_b^\dagger + g\varepsilon_{abd} w_b \Pi_d^\dagger,
\end{aligned} \tag{52}$$

We can note that the set of equation (51) and (52) only will be compatible with the Euler-Lagrange equations (30) if we set  $w_b = 0$  however the multiplier  $u^a$  still remains undetermined in this way the Dirac's formalism tell us to impose one set of gauge conditions, one for every first class constraint. The gauge conditions are chosen in such a way that they are compatible with the Euler-Lagrange equations of motion, thus one such set is the null-plane gauge conditions is given by relations (21) and (22).

### 3.3 Dirac Brackets

We have the following set of second class constraints:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &\equiv \pi_a^+ \quad , \quad \Psi_2 \equiv G_a - g\varepsilon_{abc} \left( \Phi_c^\dagger \Theta_b + \Phi_c \Theta_b^\dagger \right) \\
\Psi_3 &\equiv A_-^a \quad , \quad \Psi_4 \equiv \pi_a^- + \partial_- A_+^a \\
\Psi_5 &\equiv \pi_a^k - \partial_- A_k^a + \partial_k A_-^a - g\varepsilon_{abc} A_k^c A_-^b \\
\Psi_6 &\equiv \Pi_a - (D_-)^{ab} \Phi_b \quad , \quad \Psi_7 \equiv \Pi_a^\dagger - (D_-)^{ab} \Phi_b^\dagger,
\end{aligned} \tag{53}$$

with these, we define the following constraint matrix  $M_{ab}(x, y) \equiv \{\Psi_a(x), \Psi_b(y)\}$ , from where the DB for the dynamical variables are determined via evaluation of the inverse of this matrix. Then, by considering appropriate boundary conditions on the fields, [10, 11], a unique inverse of the constraint matrix is obtained and after a laborious work we obtain the DB for the independent dynamical



variables of scalar chromodynamics:

$$\begin{aligned}
\left\{ A_k^a(x), A_l^b(y) \right\}_D &= -\frac{1}{4} \delta_b^a \delta_k^l \epsilon(x-y) \delta^2(x^\top - y^\top) \\
\left\{ \Phi_a(x), \Phi_b^\dagger(y) \right\}_D &= -\frac{1}{4} \delta_a^b \epsilon(x-y) \delta^2(x^\top - y^\top) \\
\left\{ \Phi_a(x), A_+^b(y) \right\}_D &= \frac{g}{2} \epsilon_{abc} \delta^2(x^\top - y^\top) \left\{ \Phi_c(x) |x-y| - \frac{1}{4} \int dv \Phi_c(v) \epsilon(x-v) \epsilon(v-y) \right\} \\
\left\{ \Phi_a^\dagger(x), A_+^b(y) \right\}_D &= \frac{g}{2} \epsilon_{abc} \delta^2(x^\top - y^\top) \left\{ \Phi_c^\dagger(x) |x-y| - \frac{1}{4} \int dv \Phi_c^\dagger(v) \epsilon(x-v) \epsilon(v-y) \right\}
\end{aligned} \tag{54}$$

## 4 Remarks and conclusions

In this work we have studied the null plane Hamiltonian structure of the free Yang-Mills field and its interaction with a complex scalar that we named as scalar chromodynamics ( $SQCD_4$ ).

Performing a careful analysis of the constraint structure of Yang-Mills field, we have determined in addition of the usual first class constraints set a second class ones set, which is a characteristic of the null-plane dynamics [10]. The imposition of appropriated boundary conditions on the fields fixes the hidden subset of first class constraints [13] and eliminates the ambiguity on the operator  $\partial_-$ , that allows to get a unique inverse for the second class constraint matrix [10]. The Dirac's brackets of the theory are quantized via correspondence principle; the commutators obtained are the same derived by Tomboulis [6].

The scalar chromodynamics  $SQCD_4$  hamiltonian analysis has shown further of the free Yang-Mill structure, a contribution of the scalar sector with an additional constraints set. However, as a consequence of the constraint associated with the scalar part, one of the first class constraints is a linear combination of the Gauss' law with the scalar constraints, in a similar way to the scalar electrodynamics case [10], such first class constraint is given by the zero mode eigenvector of the constraint matrix. Finally, choosing the null-plane gauge condition, which transforms first class constraints in second class ones and imposing appropriated boundary conditions on the fields to get a unique inverse of the second class constraints matrix and following the Dirac' procedure we obtain the Dirac' brackets of the canonical variables of the theory. Our results are consistent with those reported in the literature [9, 10] when the abelian case is considered.

As the null-plane hamiltonian structure is well-defined, the null-plane quantization, of the models reported here and [10], via the path-integral formalism are now in advanced and whose result will be reported elsewhere.

## Acknowledgements

RC thanks to CNPq for partial support, BMP thanks CNPq for partial support and GERZ thanks CNPq (grant 142695/2005-0) for full support.

## References

- [1] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964.
- A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1976.

- [2] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
- [3] Stanley J. Brodsky, Hans-Christian Pauli and Stephen S. Pinsky, Phys. Rep. **301**, 299 (1988).  
P. P. Srivastava, Nuovo Cimento **A107** , 549 (1994).
- [4] D. Biatti and L. Susskind, Phys. Lett. **B425**, 351 (1998).
- [5] G. L Lapage and S. J. Brodsky. Phys. Rev. **D22**, 2157 (1980).  
A. Bassetto, M. Dalbosco and R. Soldati, Phys. Rev. **D36**, 3138 (1987).  
A. Bassetto, G. Heinrich, Z. Kunszt and W. Volgelsang, Phys. Rev. **D58**, 94020 (1998)
- [6] E. Tomboulis, Phys. Rev. **D8**, 2736 (1971).
- [7] G. McKeon, Can. J. Phys. **64**, 549 (1986).
- [8] M. Marara, R. Soldati and G. McCartor. IAP Conf. Proc. **494**, 284 (199).
- [9] R. A. Neville and F. Rohrlich, Phys. Rev. **D3**, 1692(1971).
- [10] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *SQED<sub>4</sub> and QED<sub>4</sub> on the null-plane*, arXiv:0803.2677 [hep-th].
- [11] F. Rohrlich, Acta Phys. Austriaca, Suppl. VIII, 277(1971).  
R. A. Neville and F. Rohrlich, Nuovo Cimento **A1** , 625 (1971).
- [12] R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboim, Nucl. Phys. **B122**, 61 (1976).
- [13] P. J. Steinhardt, Ann. Phys **128**, 425 (1980).

### 5.3 Eletrodinâmica Generalizada de Podolsky no plano nulo

Neste trabalho desenvolveremos a estrutura canônica para a eletrodinâmica generalizada de Podolsky nas coordenadas do plano nulo. A teoria tem derivadas de segunda ordem na função Lagrangiana e requer um minucioso estudo na definição do momento e do Hamiltoniano canônico do sistema. No plano nulo, as equações de campo precisam de um análises diferente no problema de valores iniciais e condições de contorno apropriadas devem ser escolhidas. Mostraremos que a estrutura de vínculos, baseada no formalismo de Dirac, apresenta um conjunto de vínculos de segunda classe, os quais são exclusivos do análises sobre o plano nulo, e um conjunto de vínculos de primeira classe que são geradores de um grupo  $U(1)$  de transformações de gauge. Uma vistoria nas equações de campo conduziram a uma generalização do gauge de radiação nas coordenadas do plano nulo. Os parênteses de Dirac serão calculados tendo em conta o seu problema de unicidade sob as condições de contorno escolhidas para a teoria.

# The canonical structure of Podolsky's generalized electrodynamics on the Null-Plane

M. C. Bertin<sup>a\*</sup>, B. M. Pimentel<sup>a†</sup>, G. E. R. Zambrano<sup>a‡§</sup>

<sup>a</sup>Instituto de Física Teórica - São Paulo State University. Rua Pamplona 145, 01405-000, São Paulo, SP, Brasil.

In this work we will develop the canonical structure of Podolsky's generalized electrodynamics on the null-plane. This theory has second-order derivatives in the Lagrangian function and requires a closer study for the definition of the momenta and canonical Hamiltonian of the system. On the null-plane the field equations also demand a different analysis of the initial-boundary value problem and proper conditions must be chosen on the null-planes. We will show that the constraint structure, based on Dirac formalism, presents a set of second-class constraints, which are exclusive of the analysis on the null-plane, and an expected set of first-class constraints that are generators of a  $U(1)$  group of gauge transformations. An inspection on the field equations will lead us to the generalized radiation gauge on the null-plane, and Dirac Brackets will be introduced considering the problem of uniqueness of these brackets under the chosen initial-boundary condition of the theory.

## 1. Introduction

Most physical systems, including fundamental fields in quantum field theory, are described by Lagrangians that depend at most on first-order derivatives. However, there is a continuous interest on theories with higher-order derivatives, either do accomplish generalizations or to get rid of some undesirable properties of first-order theories. This interest had begun in the half of the 19th century, when Ostrogradski [1] developed the Hamiltonian formalism for this kind of system in classical mechanics.

As examples of systems treated by higher-order Lagrangians we mention the attempts to solve the problem of renormalization of the gravitational field by inserting quadratic terms of the Riemann tensor and its contractions [2–4] on the Einstein-Hilbert Action. Recent developments in this direction has been made by Cuzinatto *et al.* [5] where the construction of high-order Lagrangians for gravity is made with invariants of the Riemann tensor taking account the local Lorentz invariance. This attempt turns out to be a natural generalization of the Utiyama's Theory of General Gauge Fields [6] applied to second-order theories [7].

Higher-order Lagrangians have also emerged as effective theories on the infrared sector of the QCD [8], where it enforces a good asymptotic behavior of the gluon propagator. It is also important to remark that the inclusion of higher-order derivatives in field theory of supersymmetric fields has shown to be a powerful regularization mechanism [9,10]. We noted that a very attractive property of quantum field theories with higher-order terms is the fact that it improves the convergence of the corresponding Feynman diagrams[11,12].

The first model of a higher-order derivative field theory is a generalization of the electromagnetic field proposed in the works of Podolsky, Schwed and Bopp [13,14], which culminated in the Podolsky's generalized electrodynamics. It is suggested to modify the Maxwell-Lorentz theory in order to avoid divergences such as the electron self-energy and the vacuum polarization current. These difficulties can be traced to the fact that the classical electrodynamics involve an  $r^{-1}$  singularity that results in an infinite value of the electron self-energy. The Lagrangian density is, therefore, modified by a second-order derivative term:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}a^2\partial_\lambda F^{\mu\lambda}\partial^\gamma F_{\mu\gamma}, \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1)$$

---

\* mcbertin@ift.unesp.br.

† pimentel@ift.unesp.br.

‡ gramos@ift.unesp.br.

§ On leave of absence from Departamento de Física, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Nariño, Colombia.



Podolsky's theory already has many interesting features at the classical level. It solves the problem of infinite energy in the electrostatic case and also gives the correct expression for the self-force of charged particles at short distances, as showed by Frenkel [15], solving the problem of the singularity at  $\mathbf{r} \rightarrow 0$ . It has been shown by Cuzinatto *et al.* [16] that the above Lagrangian density is the only possible generalization of the electromagnetic field that preserves invariance under  $U(1)$ . Besides, the theory yields field equations that are still linear in the fields.

Another important prediction of the model is the existence of massive photons, whose mass is proportional to the inverse of the Podolsky's parameter  $a$ . This feature allows experiments that may test the generalized electrodynamics as a viable effective theory. The determination of an upper bound value for the mass of the photon is actually a current concern in the theoretical framework [16].

The canonical quantization of the field was tried in the work of Podolsky and Schwed [13]. However, Podolsky's theory inherits the same difficulties from the standard electromagnetic field, the presence of a degenerate variable, which forced them to use a Fermi-like Lagrangian. However, the chosen gauge fixing condition, the usual Lorenz condition, does not fulfill the requirements for a good choice of gauge in the context of Podolsky's theory. The first consistent approach to the quantization of the field was given by Galvão and Pimentel [17], where Dirac canonical formalism [18–20] is used with the correct choice of gauge.

The first attempts of quantization of Podolsky's field was made in instant-form, where the "laboratory time"  $t = x^0$  is the evolution parameter of the theory. Dirac [21] was the first to notice that this choice is not the only possible parametrization for field theories. Actually it is possible to define five different forms of Hamiltonian dynamics, each one related to different sub-groups of the Poincaré group [22]. In this work we intend to proceed with the canonical analysis in front-form dynamics, also called the null-plane parametrization, where the coordinate  $x^+ \equiv 1/\sqrt{2}(x^0 + x^3)$  is chosen to be the evolution parameter. This parameter choice was mistaken, for some time, to the so called infinite-momentum frame [23], which is a limit process to analyze field theories in a frame near to the speed of light. It is a choice of coordinate system rather than a physical reference frame, and implies the definition of the null-plane which is the 3-surface  $x^+ = 0$ . The classical evolution of the system is then given by the definition of appropriate brackets plus a set of initial data, which are the configuration of the fields at the above 3-surface.

The paper is organized as follows. In section two we discuss the null-plane coordinates, which are the natural coordinate system for the front-form dynamics, and we review the initial-boundary value problem for the fields and establish appropriate conditions to achieve a unique solution of the dynamic equations on the null-plane. Section three will be devoted to a review on the Hamiltonian formalism for higher-order Lagrangians. In Section four the canonical approach is applied for the generalized electromagnetic field in null-plane coordinates. In section five we establish a set of consistent gauge conditions and corresponding Dirac Brackets to describe the physical dynamics of the theory. Section six will be devoted for the final remarks.

## 2. The null-plane coordinates

As the start-point for the analysis of a field theory we have the Action

$$S[\phi] \equiv \int_{\Omega} d\omega \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) ,$$

where  $\mathcal{L}$  is a Lagrangian density, and  $d\omega$  is a four-volume element of a finite (or usually infinite) four-volume  $\Omega$  of the space-time. For relativistic theories the Lagrangian density must be chosen to be invariant under any particular parameter choice. However, although the Lagrangian formalism preserves this invariance, the same does not occur in the Hamiltonian formalism, which requires a parametrization in order to be fully carried out.

Dirac has shown [21] that the usual dynamics, the instant-form, where the galilean time  $x^0 = t$  is the parameter that defines the evolution of the system from a given initial 3-surface  $\Gamma_{t=t_0}$  to a later surface  $\Gamma_{t=t_1}$ , is not the only possible choice of parametrization. He calls attention for two other forms of Hamiltonian dynamics: the punctual-form and the front-form. Later, two other forms were discovered [24].

An important advantage pointed out by Dirac is the fact that seven of the ten Poincaré generators are kinematical on the null-plane while the conventional theory constructed in instant-form has only six of these generators. Therefore, the structure of the phase space is distinct in both cases. As such, a description of the physical systems on the null-plane could give additional information from those provided by the conventional formalism [25]. Another remarkable feature is that regular theories become constrained when analyzed on the

null-plane. In general, it leads to a reduction in the number of independent field operators in the respective phase space due to the presence of second-class constraints.

The natural coordinate system of instant-form dynamics is the rectangular system  $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ . We can pass to null-plane coordinates with the linear transformation  $x' = \Sigma x$  where the transformation matrix and its inverse are given by

$$\Sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \cdot \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \cdot \mathbf{I} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

where  $\mathbf{I}$  is the  $2 \times 2$  identity matrix and  $x'^\mu \equiv (x^+, x^-, x^1, x^2)$ .

Lorentz tensors are also covariant under this transformation, but the transformation itself is not of Lorentz type [25]: if in usual coordinates we define the Minkowski metric as  $\eta \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , the metric in null-plane coordinates will be given by

$$\eta' = \Sigma \eta \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Using this metric (from now on we will ignore the comma) we can see that the norm of a vector is not a quadratic form, but will be linear in the longitudinal components.

Of special interest is the D'Alembertian operator

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = 2\partial_- \partial_+ + \partial_i \partial^i. \quad (2)$$

Since the evolution parameter is  $x^+$  a field equation like  $(\square + m^2)\phi = 0$  will be linear on the velocity  $\partial_+ \phi$ , which does not occur in instant-form. Therefore, the analysis of initial-boundary value problem is changed from a Cauchy to a characteristics initial-boundary value problem. This is due to the fact that a quadratic Lagrangian on  $\partial_0 \phi$  is actually of first-order on  $\partial_+ \phi$ . In the case of the scalar field on the null-plane it is sufficient to fix the values of the fields on both characteristics surfaces to solve the field equations [26–28].

This can be seen in Podolsky's case by the Euler-Lagrange (EL) equations of the Lagrangian (1):

$$(1 + a^2 \square) \square A_\mu - \partial_\mu (1 + a^2 \square) \partial^\nu A_\nu = 0. \quad (3)$$

This equation is fourth-order in  $\partial_0 A_\mu$  but only second-order in  $\partial_+ A_\mu$ . Therefore, in instant-form it is necessary to specify four conditions, the values of the field and of its derivatives until third-order on an initial surface  $x^0 = 0$  to uniquely write a solution.

On the null-plane the equation is just of second-order, but the existence of two characteristics surfaces demands the knowledge of four initial-boundary conditions as well. The normal vector of a null-plane lies in the same plane, therefore, the knowledge of the value  $A_\mu$  on a null-plane implies in its normal derivative  $\partial_+ A_\mu$ . Thus, the solution of the field equations is uniquely determined if  $A$  is specified on the null-plane  $x^+ = cte$  and three boundary conditions are imposed on  $x^- = cte$ , which in our case consists on the value of the derivatives of the field up to third-order.

In the canonical framework, it was Steinhardt [30] who showed that to linear Lagrangians the initial condition on  $x^+ = cte$  plus a Hamiltonian function are insufficient to predict uniquely all physical process. Boundary conditions along the  $x^- = cte$  plane must also be determined. He also observed that the matrix formed by the Poisson Brackets (PB) of the second-class constraints does not have a unique inverse and that the presence of arbitrary functions is associated with the insufficiency of the initial value data. It is also responsible for the existence of a hidden subset of first-class constraints which is associated with improper gauge transformations [29]. By imposing appropriate initial-boundary conditions on the fields, the hidden first-class constraints can be eliminated in order to the total Hamiltonian be a true generator of the physical evolution. It will also determine an unique inverse of the second class constraint matrix which allows to obtain the correct Dirac Brackets among the fundamental variables. Thus, in the study of the Podolsky's theory we follow the same tune outlined in [31–33].

### 3. Second-order derivatives on the null-plane

Let us consider a generic Lagrangian density  $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi)$  dependent of a number  $n$  of fields  $\phi^a(x)$  and its first and second derivatives. The application of Hamilton's Action principle yields the following EL equations

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^a} - \partial_\mu \left[ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi^a)} \right] + \partial_\mu\partial_\nu \left[ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\partial_\nu\phi^a)} \right] = 0 ,$$

which are the equations that originates (3) from (1). On the solutions, the vanishing of the variation of the action yields the conserved symmetric energy-momentum tensor

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} \equiv & \partial_\mu\phi^a \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^\nu\phi^a)} - \mathcal{L}\eta_{\mu\nu} \\ & - 2\partial_\mu\phi^a\partial_\lambda \left[ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^\nu\partial_\lambda\phi^a)} \right] + \partial_\lambda \left[ \partial_\mu\phi^a \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^\nu\partial_\lambda\phi^a)} \right] - \partial^\lambda (\Xi_{\mu\lambda\nu} + \Pi_{\mu\lambda\nu}) , \end{aligned} \quad (4)$$

where

$$\Xi_{\mu\lambda\nu} \equiv \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu\phi^a)} - \partial_\nu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu\partial_\nu\phi^a)} \right) \right] (\mathbf{I}_{\lambda\nu})^a_b \phi^b ,$$

$$\Pi_{\mu\lambda\nu} \equiv \frac{1}{2} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu\partial^\alpha\phi^a)} (\mathbf{I}_{\lambda\nu})^a_b \partial^\alpha\phi^b .$$

$(\mathbf{I}_{\lambda\nu})^a_b$  are the infinitesimal generators of the Poincaré group.

The conserved charge is given by the expression

$$G \equiv -a^\mu P_\mu - \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}$$

with generators

$$P_\mu \equiv \int_\sigma d\sigma^\nu T_{\mu\nu} ,$$

$$M_{\mu\nu} \equiv \int_\sigma d\sigma^\alpha (T_{\alpha\mu}x_\nu - T_{\alpha\nu}x_\mu) .$$

In the above expressions  $\sigma$  is a 3-surface orthogonal to the parametrization axis.

If we choose the null-plane, we will be interested in the dynamical generator  $P_+$ , which is given by

$$P_+ \equiv \int d^3x T_{+-}$$

where we adopt  $d^3x \equiv dx^- dx^1 dx^2$ . Here we have the canonical Hamiltonian density

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c \equiv T_{+-} = & \left[ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_+\phi^a)} - \partial_+ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_+\partial_+\phi^a)} - 2\partial_- \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_-\partial_+\phi^a)} - 2\partial_i \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_i\partial_+\phi^a)} \right] \partial_+\phi^a \\ & + \partial_+\partial_+\phi^a \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_+\partial_+\phi^a)} - \mathcal{L} . \end{aligned} \quad (5)$$

This result suggests the following definition for the canonical momenta:

$$p_a \equiv \int d^3x \left[ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_+\phi^a)} - \partial_+ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_+\partial_+\phi^a)} - 2\partial_- \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_-\partial_+\phi^a)} - 2\partial_i \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_i\partial_+\phi^a)} \right] , \quad (6a)$$

$$\pi_a \equiv \int d^3x \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_+\partial_+\phi^a)} , \quad (6b)$$

where the fields  $\phi$  and  $\partial_+\phi$  are treated as independent canonical fields.

It is straightforward to show that the EL equations can be written by

$$W_{ab}(\partial_+)^4 \phi^b = F_a(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi, \partial^3\phi)$$



where the generalized Hessian matrix is

$$W_{ab} \equiv \frac{\delta \pi_a}{\delta (\partial_+ \partial_+ \phi^b)} = \int d^3 x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_+ \partial_+ \phi^a) \delta (\partial_+ \partial_+ \phi^b)}. \quad (7)$$

It is the regularity or the singularity of this matrix that determines the regularity or the singularity of the system.

In this analysis we have ignored the boundary conditions of the fields, which is a quite misleading attitude, since the null-plane dynamics requires a different analysis of initial-boundary conditions than the instant-form dynamics. The discussion about the initial-boundary value problem in this case will be made properly during the canonical procedure, so at this point we just make sure that the conditions of the fields are equivalent of those in instant-form, in other words, that the fields and all required derivatives go to zero at the boundary of the 3-surface.

#### 4. The Hamiltonian analysis

From the Lagrangian density (1) and the definitions (6) follows the canonical momenta for the Podolsky's field

$$p^\mu = F^{\mu+} - a^2 (\eta^{\mu-} \partial_- \partial_\lambda F^{+\lambda} + \eta^{\mu i} \partial_i \partial_\lambda F^{+\lambda} - 2 \partial_- \partial_\lambda F^{\mu\lambda}), \quad (8a)$$

$$\pi^\mu = a^2 \eta^{\mu+} \partial_\lambda F^{+\lambda}. \quad (8b)$$

The Hessian matrix of this system is

$$W^{\mu\nu} = \frac{\delta \pi^\mu}{\delta (\partial_+ \partial_+ A_\nu)} = -a^2 \eta^{\mu+} \delta_-^\nu \eta^{++} = 0.$$

As we saw in the earlier section the fields  $A_\mu$  and  $\partial_+ A_\mu$  should be treated as independent variables. Therefore we will use the notation  $\bar{A}_\mu \equiv \partial_+ A_\mu$ , being  $A_\mu$  and  $\bar{A}_\mu$  independent fields. Then we are able to define the primary constraints

$$\phi_1 = \pi^+ \approx 0, \quad (9a)$$

$$\phi_2^i = \pi^i \approx 0, \quad (9b)$$

$$\phi_3 = p^+ - \partial_- \pi^- \approx 0, \quad (9c)$$

$$\phi_4^i = p^i - \partial_i \pi^- + F_{i-} + 2a^2 \partial_- [\partial_i \bar{A}_- - 2 \partial_- \bar{A}_i + \partial_i \partial_- A_+ - \partial_j F_{ij}] \approx 0. \quad (9d)$$

The canonical Hamiltonian density can be expressed by

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & p^\mu \bar{A}_\mu + \pi^- (\partial_- \bar{A}_+ - \partial^i \bar{A}_i + \partial^i \partial_i A_+) - \frac{1}{2} (\bar{A}_- - \partial_- A_+)^2 - (\bar{A}_i - \partial_i A_+) F_{-i} \\ & + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} a^2 (\partial_i \bar{A}_- - 2 \partial_- \bar{A}_i + \partial_i \partial_- A_+ - \partial_j F_{ij})^2. \end{aligned} \quad (10)$$

With the canonical Hamiltonian  $H_c = \int d^3 x \mathcal{H}_c(x)$  and the primary constraints (9) we build the primary Hamiltonian

$$H_P \equiv H_c + \int d^3 x u^a(x) \phi_a(x), \quad \{a\} = \{1, 2, 3, 4\}. \quad (11)$$

To proceed with the calculus of the consistency conditions we use the primary Hamiltonian as generator of the  $x^+$  evolution and define the fundamental equal  $x^+$  Poisson Brackets with the expressions

$$\{A_\mu(x), p^\nu(y)\}_{x^+=y^+} = \{\bar{A}_\mu(x), \pi^\nu(y)\}_{x^+=y^+} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \quad (12)$$

where  $\delta^3(x-y) \equiv \delta(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . We verify that the condition  $\dot{\phi}_1 \approx 0$  gives just the constraint  $\phi_3 \approx 0$ , which is already satisfied. The consistency for the remaining constraints gives equations for some Lagrange multipliers. Notice that the conditions for  $\dot{\phi}_2^i$  and  $\phi_3$ ,

$$\dot{\phi}_2^i = -\phi_4^i + 4a^2 \partial_- \partial_- u_i^4 \approx 0,$$

$$\dot{\phi}_3 = \partial_- p^- + \partial_i p^i + 4a^2 \partial_i \partial_- \partial_- u_i^4 \approx 0,$$



give equations for the same parameters  $u_i^4$ . These equations must be consistent to each other. From the first we have  $\partial_- \partial_- u_i^4 \approx 0$  and, applying this result on the second condition, a secondary constraints appears:

$$\chi \equiv \partial_- p^- + \partial_i p^i \approx 0 .$$

For this secondary constraint,  $\dot{\chi} = 0$ , and no more constraints can be found.

The analysis leaves us with the following set:

$$\begin{aligned} \chi &= \partial_- p^- + \partial_i p^i \approx 0 , \\ \phi_1 &= \pi^+ \approx 0 , \\ \phi_2^i &= \pi^i \approx 0 , \\ \phi_3 &= p^+ - \partial_- \pi^- \approx 0 , \\ \phi_4^i &= p^i - \partial_i \pi^- + F_{i-} + 2a^2 \partial_- [\partial_i \bar{A}_- - 2\partial_- \bar{A}_i + \partial_i \partial_- A_+ - \partial_j F_{ij}] \approx 0 . \end{aligned}$$

It happens that  $\chi$  and  $\phi_1$  are first-class constraints, while  $\phi_2^i$ ,  $\phi_3$  and  $\phi_4^i$  are second-class ones. However, constructing the matrix of the second-class constraints we found that it is singular of rank four, which indicates that there must exist a first-class constraint, associated with the zero mode of this matrix, and its construction is made from the corresponding eigenvector which gives a linear combination of second-class constraints. The combination happens to be just  $\Sigma_2 \equiv \phi_3 - \partial_i \phi_2^i$  and it is independent of  $\chi$  and  $\phi_1$ . Therefore, we have the renamed set of first-class constraints

$$\Sigma_1 \equiv \pi^+ \approx 0 , \quad (13a)$$

$$\Sigma_2 \equiv p^+ - \partial_- \pi^- - \partial_k \pi^k \approx 0 , \quad (13b)$$

$$\Sigma_3 \equiv \partial_- p^- + \partial_i p^i \approx 0 , \quad (13c)$$

and a set of irreducible second-class constraints

$$\Phi_1^i \equiv \pi^i \approx 0 , \quad (14a)$$

$$\Phi_2^i \equiv p^i - \partial_i \pi^- + F_{i-} + 2a^2 \partial_- [\partial_i \bar{A}_- - 2\partial_- \bar{A}_i + \partial_i \partial_- A_+ - \partial_j F_{ij}] \approx 0 . \quad (14b)$$

The second-class constraints do not appear in the instant-form dynamics for this theory: they are a common effect of the null-plane dynamics.

Here we are in position to write the total Hamiltonian

$$H_T \equiv H_c + \int d^3 x u^\alpha(x) \Sigma_\alpha(x) + \int d^3 x \lambda_i^j(x) \Phi_1^i(x) , \quad (15)$$

with which we are able to calculate the canonical equations of the system for the variables  $A_\mu$ ,  $\bar{A}_\mu$ ,  $p^\mu$  and  $\pi^\mu$ .

For  $A_\mu$  we have the equations

$$\partial_+ A_\mu = \bar{A}_\mu + \delta_\mu^+ u^2 - \delta_\mu^- \partial_- u^3 - \delta_\mu^i [\partial_i u^3 - \lambda_i^2] , \quad (16)$$

which just means that the canonical variable  $\bar{A}_\mu$  is defined as  $\partial_+ A_\mu$  plus a linear combination of the still arbitrary Lagrange multipliers. The equations for  $\bar{A}_\mu$  give

$$\partial_+ \bar{A}_\mu \approx \delta_\mu^+ u^1 + \delta_\mu^- [\partial_- \bar{A}_+ + \partial_i \bar{A}_i - \partial_i \partial_i A_+ + \partial_- u^2 + \partial_i \lambda_i^2] + \delta_\mu^i [\partial_i u^2 + \lambda_i^1] . \quad (17)$$

The equation for  $\bar{A}_+$  is just  $\partial_+ \bar{A}_+ \approx u^1$ , which is expected since  $\bar{A}_+$  is a degenerate variable. The expression for  $\bar{A}_-$  can be written, using (16), as

$$\partial_\mu F^{-\mu} \approx -[\partial^i \partial_i + \partial^+ \partial_+] u^3 . \quad (18)$$

The Hamiltonian equations for the momenta  $p^\mu$  are given, with (16) and  $\pi^- = a^2 \partial_\lambda F^{+\lambda}$ , by

$$\partial_+ p^+ \approx \partial_\lambda F^{\lambda+} - a^2 \partial_i \partial_i \partial_\lambda F^{\lambda i} - a^2 \partial_i \partial_i \partial_\lambda F^{\lambda+} + (1 + a^2 \partial_i \partial_i) \partial_- \partial_- u^3 ,$$

$$\partial_+ p^- \approx \partial_i F^{i-} + \partial_i \partial_i u^3 ,$$

$$\partial_+ p^i \approx \partial_- F^{-i} + \partial_j F^{ji} - a^2 \partial_\mu \partial^\mu \partial_j F^{ij} - \partial_- \partial_i u^3 .$$

The equations for  $\pi^\mu$  are, using the fact that  $\pi^+$  and  $\pi^i$  are weakly zero,

$$\begin{aligned} p^+ &\approx a^2 \partial_- \partial_\lambda F^{+\lambda} , \\ p^- &\approx F^{-+} + a^2 \partial_- \partial_\lambda F^{-\lambda} + \partial_- u^3 - a^2 \partial_- \partial_i \partial_i u^3 , \\ p^i &\approx F^{i+} - a^2 (\partial^i \partial_\lambda F^{+\lambda} - 2 \partial_- \partial_\lambda F^{i\lambda}) + 2a^2 \partial_- \partial_- \partial_i u^3 . \end{aligned}$$

The last equations reproduce the definition of the canonical momenta  $p$  with some combination of the Lagrange multipliers. If we use these equation on the earlier equations for  $\partial_+ p^\mu$ , and also using (18), we have

$$(1 + a^2 \square) \partial_\lambda F^{\lambda+} + (1 + a^2 \partial_i \partial_i) \partial_- \partial_- u^3 \approx 0 , \quad (19a)$$

$$(1 + a^2 \square) \partial_\lambda F^{\lambda-} + a^2 \partial_+ \partial_- \partial_i \partial_i u^3 \approx 0 , \quad (19b)$$

$$(1 + a^2 \square) \partial_\lambda F^{\lambda i} - (1 + 2a^2 \partial_+ \partial_-) \partial_- \partial_i u^3 \approx 0 . \quad (19c)$$

These equations are compatible with the Lagrangian field equations (3) only if suitable gauge conditions are chosen in order to eliminate the Lagrange multiplier  $u^3$ .

## 5. Gauge fixing and Dirac Brackets

At this stage we have a set of first-class constraints, the relations (13), that must be considered as generators of gauge transformations. The problem of choosing proper gauge conditions has to be solved to fully eliminate the redundant variables of the theory at the classical level and, therefore, to proceed with a consistent quantization of the Podolsky's field.

As it has already stated in the introduction section, the first attempt to find gauge conditions in the instant-form of the theory was made by using the Lorenz gauge  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . However, as showed in [17], the Lorenz condition is not a good gauge choice for the Podolsky's field, since it does not fulfill the necessary requirements for a consistent gauge: it does not fix the gauge, it is not preserved by the equations of motion and it is not attainable. Moreover, it is also clear that the solutions of the field equations (3) cannot consist only by transverse fields.

The analysis of the correct gauge fixing on the null-plane can be made by closely inspect the EL equations of the system. If we look for the  $\mu = +$  equation, it produces the explicit solution for  $A_+$

$$A_+ = - \frac{1}{(1 + a^2 \square) \nabla^2} \partial_+ (1 + a^2 \square) (\partial^- A_- + \partial^i A_i) , \quad (20)$$

where  $\nabla^2 \equiv \partial_i \partial_i$ . The remaining equations of motion can be written, eliminating the  $A_+$  variable, by

$$(1 + a^2 \square) \square A_- = 0 , \quad (1 + a^2 \square) \square A_i = 0 ,$$

with

$$\mathbf{A}_- \equiv A_- + \partial_- \frac{1}{(1 + a^2 \square) \nabla^2} (1 + a^2 \square) (\partial^- A_- + \partial^i A_i) ,$$

$$\mathbf{A}_i \equiv A_i + \partial_i \frac{1}{(1 + a^2 \square) \nabla^2} (1 + a^2 \square) (\partial^- A_- + \partial^j A_j) .$$

Therefore, we can achieve the variables  $\mathbf{A}$  through a gauge transformation such that the gauge function is

$$\Delta = \frac{1}{(1 + a^2 \square) \nabla^2} (1 + a^2 \square) (\partial^- A_- + \partial^i A_i) .$$

In addition, these fields satisfy the condition

$$(1 + a^2 \square) (\partial^- \mathbf{A}_- + \partial^i \mathbf{A}_i) = 0 , \quad (21)$$

which is the generalized Coulomb condition on the null-plane.

For that reason, the most natural gauge choice that is compatible with the field equations is given by

$$(1 + a^2 \square) (\bar{A}_- + \partial^i A_i) \approx 0 . \quad (22)$$

Back to (20) we see that the time preservation of this relation is guaranteed if we set  $A_+ \approx 0$ . Whereas, consistency requires  $\bar{A}_+ \approx 0$  as well.

In this gauge the field equations are written by

$$(1 + a^2 \square) \square A_B = 0 ,$$

which is a generalized wave equation on the null-plane for the variables  $A_B \equiv (A_-, A_i)$ .

Back to the Hamiltonian framework, this analysis leads to the gauge conditions

$$\Omega_1 \equiv \bar{A}_+ \approx 0 , \quad (23a)$$

$$\Omega_2 \equiv A_+ \approx 0 , \quad (23b)$$

$$\Omega_3 \equiv (1 + a^2 \square) (\bar{A}_- + \partial^i A_i) \approx 0 , \quad (23c)$$

which is the generalized radiation gauge on the null-plane. The next step is to calculate Dirac Brackets for the set of ten constraints of the theory, but due to the present of the second-class constraints (14) it is more convenient to evaluate the reduced dynamics for these constraints first. Taking the matrix of the Poisson Brackets of the second-class constraints we have

$$M^{ij} \equiv 2\eta^{ij} \partial_-^x \begin{pmatrix} 0 & -2a^2 \partial_-^x \\ 2a^2 \partial_-^x & 1 - 2a^2 \nabla_x^2 \end{pmatrix} \delta^3(x-y) . \quad (24)$$

The explicit evaluation of the inverse involves the knowledge of the inverse of the operators  $(\partial_-^x)^{-1}$ ,  $(\partial_-^x)^{-2}$ , and  $(\partial_-^x)^{-3}$ , which are Green's functions of the operators  $\partial_-^x$ ,  $(\partial_-^x)^2$ , and  $(\partial_-^x)^3$ . To achieve a unique solution it is necessary and sufficient to impose  $\partial_-^x A_\mu = 0$ ,  $\partial_-^x \partial_-^x A_\mu = 0$ , and  $\partial_-^x \partial_-^x \partial_-^x A_\mu = 0$  on  $x^+ \rightarrow -\infty$  as the appropriate initial conditions of the theory. This choice is also consistent with the definition of momenta (6), since their definition are also dependent on initial-boundary conditions. Therefore, we write the unique inverse

$$N_{ij}(x, y) \equiv \frac{1}{2} \eta_{ij} \begin{pmatrix} \alpha(x, y) & \beta(x, y) \\ \gamma(x, y) & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

with the coefficients

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{4a^4} (x^- - y^-)^2 \epsilon(x^- - y^-) (1 - 2a^2 \nabla_x^2) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \quad (26a)$$

$$\beta(x, y) = -\gamma(x, y) = \frac{1}{a^2} |x^- - y^-| \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (26b)$$

With this inverse we are able to define the first Dirac Brackets for two observables  $A(x)$  and  $B(y)$ ,

$$\{A(x), B(y)\}^* = \{A(x), B(y)\} - \iint d^3z d^3w \{A(x), \Phi_I^i(z)\} N_{ij}^{IJ}(z, w) \{\Phi_J^j(w), B(y)\} , \quad (27)$$

where  $\{I, J\} = \{1, 2\}$ . This definition implies elimination of the second-class constraints and the definition of an extended Hamiltonian where  $\Phi_I$  are strongly zero. Thus, we are left with the first-class constraints  $\Sigma$  and the gauge conditions  $\Omega$ . To proceed with the evaluation of the complete Dirac Brackets we should calculate the matrix of the first Dirac Brackets of these constraints. It is given by

$$C(x, y) \equiv \{\chi_A(x), \chi_B(y)\}^* = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{O}(x, y) \\ -\mathcal{O}^T(x, y) & 0 \end{pmatrix}$$

with  $\chi_A \equiv (\Sigma_a, \Omega_a)$ . If we write  $\mathcal{D}_x \equiv (1 - a^2 \nabla_x^2)$  the matrix  $\mathcal{O}$  follows:

$$\mathcal{O}(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \mathcal{D}_x \partial_-^x \\ 0 & 0 & -\mathcal{D}_x \nabla_x^2 \end{pmatrix} \delta^3(x-y) .$$

The inverse is given by

$$C^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -(\mathcal{O}^{-1})^T(x, y) \\ \mathcal{O}^{-1}(x, y) & 0 \end{pmatrix} , \quad (28)$$

in which

$$\mathcal{O}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} -\delta^3(x-y) & 0 & 0 \\ 0 & -\delta^3(x-y) & \gamma(x, y) \\ 0 & 0 & \rho(x, y) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Under the considered boundary conditions the coefficients are given by

$$\gamma(x, y) = -\partial_x^x (\nabla_x^2)^{-1} \delta^3(x-y), \quad (30a)$$

$$\rho(x, y) = -\mathcal{D}_x^{-1} (\nabla_x^2)^{-1} \delta^3(x-y), \quad (30b)$$

where

$$(\nabla_x^2)^{-1} \delta^3(x-y) = \frac{1}{4\pi} \ln(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2.$$

Then, we are able to define the complete Dirac Brackets of the generalized radiation gauge:

$$\begin{aligned} \{A(x), B(y)\}^{**} &\equiv \{A(x), B(y)\}^* + \int d^3z d^3w \{A(x), \Sigma_a(z)\}^* \left[ (\mathcal{O}^{-1})^T \right]^{ab}(z, w) \{\Omega_b(w), B(y)\}^* \\ &\quad - \int d^3z d^3w \{A(x), \Omega_a(z)\}^* [\mathcal{O}^{-1}]^{ab}(z, w) \{\Sigma_b(w), B(y)\}^*. \end{aligned} \quad (31)$$

The complete set of fundamental DB follows:

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x), \bar{A}_\nu(y)\}^{**} &= -\frac{1}{8a^2} \delta_\mu^i \delta_\nu^j \eta_{ij} |x^- - y^-| \delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ \{A_\mu(x), p^\nu(y)\}^{**} &= \left[ \delta_\mu^\nu - \delta_\mu^+ \delta_+^\nu + (\delta_\mu^- \partial_- + \delta_\mu^i \partial_i) (\delta_+^\nu \partial_- + \delta_+^j \partial_j) \frac{1}{\nabla^2} \right] \delta^3(x-y), \\ \{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\}^{**} &= \delta_\mu^\nu \left[ \delta_\mu^- \partial_- + \delta_\mu^i \partial_i \right] \frac{1}{\nabla^2} \delta^3(x-y), \\ \{\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(y)\}^{**} &= \frac{1}{64a^4} \delta_\mu^i \delta_\nu^j \eta_{ij} (x^- - y^-)^2 \epsilon(x^- - y^-) [1 - 2a^2 \nabla^2] \delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ &\quad - \frac{1}{8a^2} \eta_{ij} |x^- - y^-| \left[ \delta_\mu^i \delta_\nu^- + \delta_\mu^- \delta_\nu^i \right] \partial_j \delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ \{\bar{A}_\mu(x), p^\nu(y)\}^{**} &= \frac{1}{8a^2} \delta_\mu^i \delta_-^\nu |x^- - y^-| \partial_i \delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \delta_\mu^i \epsilon(x^- - y^-) \left[ \delta_k^\nu \partial_k \partial_i + \frac{1}{2a^2} \delta_i^\nu (1 - 2a^2 \nabla^2) \right] \delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ &\quad - \delta_+^\nu \left[ \delta_\mu^- \partial_- + \delta_\mu^i \partial_i \right] - \frac{1}{2} \delta_\mu^i \partial_i \delta^3(x-y), \\ \{\bar{A}_\mu(x), \pi^\nu(y)\}^{**} &= \left[ \delta_\mu^\nu - \delta_\mu^+ \delta_+^\nu + \eta_{\mu j} \delta_j^\nu \right] \delta^3(x-y) - \frac{1}{4} \eta_{\mu j} \delta_-^\nu \epsilon(x^- - y^-) \partial_j \delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \end{aligned}$$

With these brackets we can deduce the fundamental ones that will lead, through the correspondence principle, to a consistent quantization of the field. The physical degrees of freedom can be found with the analysis of the constraints as strong relations. Of course, the fields  $A_+$ ,  $\bar{A}_+$ ,  $\pi^+$  and  $\pi^i$  are not independent, since they are strongly zero in the formalism. Thus,  $p^i$ ,  $p^+$  and  $p^-$  can be written in function of  $\pi^-$  and other variables. The gauge condition (23c) also eliminates  $\bar{A}_-$ . Therefore, the only independent variables are actually given by  $A_-$ ,  $A_i$ ,  $\bar{A}_i$ ,  $p^i$  and  $\pi^-$ . They are eight independent fields, less than the dynamics in instant-form [17], which can be seen as a good feature, but the structure of the phase space comes out to be quite more complicate.

Considering, for example, the brackets

$$\{A_-(x), p^i(y)\}^{**} = \frac{\partial_- \partial^i}{\nabla^2} \delta^3(x-y), \quad (32)$$

we can see that the longitudinal field acquires a non-local character. This is expected for every system analyzed on the null-plane, since this component lies on the light-cone and no criterium of causality can be employed



for this field. The non-locality is due to the second-class constraints, which does not appear in instant-form dynamics of the system.

For the transverse fields the brackets

$$\{A_i(x), p^j(y)\}^{**} = \left[ \delta_i^j - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right] \delta^3(x - y) \quad (33)$$

indicates that a Coulomb-type interaction is present, this case in two dimensions, what justifies to call the gauge condition (22) the generalized Coulomb condition. This is also expected, since these brackets depends exclusively on the first-class constraints plus gauge conditions, just like in the instant-form.

## 6. Final remarks

We have analyzed the canonical structure of Podolsky's electrodynamics on the null-plane. The theory has high-order derivatives in the Lagrangian function, so we followed the procedure outlined in [17] for the definition of the Hamiltonian density (5) and of the canonical momenta associated to the fields  $A_\mu$  and  $\bar{A}_\mu$  (6), which result from the definition of the conserved energy-momentum tensor. Of course, the choice of boundary conditions was a necessary step to get to the field equations of the system and, as consequence, to the conserved current associated to the Poincaré invariance: if we want the theory on the null-plane to be physically equivalent to the same system in instant-form, we should guarantee the fields to obey the same asymptotic conditions.

We have observed in the study of the initial-boundary problem of Podolsky's equation that, because it is a second-order equation, the uniqueness of the solution is obtained when the field  $A_\mu$  is specified on the null-plane  $x^+ = cte$  and three boundary conditions are imposed on  $x^- = cte$ . These conditions were chosen to be  $\partial_- A_\mu = 0$ ,  $(\partial_-)^2 A_\mu = 0$ , and  $(\partial_-)^3 A_\mu = 0$  on  $x^+ \rightarrow -\infty$ , and were fully compatible with the definition of the energy-momentum tensor.

In the canonical analysis of the Podolsky's theory we found a set of three first-class constraints (13), and a set of four second-class ones (14). The first-class constraints are responsible for the  $U(1)$  invariance of the Action, which is expected since the gauge character of the field should not be destroyed by the choice of parametrization. The form of this set is analogous to the set found in instant-form [17], which is also expected.

The new feature on the null-plane is the second-class constraints, which are not present in the conventional instant-form dynamics [17]. The appearance of second-class constraints is a common effect of the null-plane dynamics [30–33], and they are responsible to the fact that the analysis on the null-plane requires a lesser number of degrees of freedom. Because of the second-class constraints the longitudinal components of the fields turned out to be non-local.

To evaluate the physical degrees of freedom it was necessary to choose proper gauge conditions for the theory, which was a subject that needed closer inspection. Gauge conditions must obey a set of requirements to be consistent with the formalism: they must fix completely the gauge, they must be consistent with the field equations, they must not affect Lorentz covariance and, last but not least, they must be attainable. Therefore, we followed the procedure outlined in [17] and found that the generalized radiation gauge (23) on the null-plane fulfill all these requirements. Of course, this gauge choice is not the only consistent possible choice. There is, for example, the so called null-plane gauge, which will be studied in a future work concerning the Podolsky's field coupled with scalar and spinor fields.

Since the first and second-class constraints, together with the gauge conditions were known, we calculated the Dirac Brackets that had clarified the physical fields of the system. However, these brackets are not unique unless we specify all the information about the initial-boundary value problem of the theory. By imposing the value of the field on the null-plane  $x^+ = cte$ , and the considered boundary conditions on  $x^- = cte$ , we have fixed the hidden subset of the first-class constraints [30,29] and got a unique inverse for the second-class constraints matrix when the ambiguity on the operators  $(\partial_-^x)^{-1}$ ,  $(\partial_-^x)^{-2}$ , and  $(\partial_-^x)^{-3}$  was eliminated.

Finally, an analysis of the physical fields results in the true degrees of freedom, which are given by  $A_-$ ,  $A_i$ ,  $\bar{A}_i$ ,  $p^i$  and  $\pi^-$ . The complete Dirac Brackets of these fields implicated the non-locality of the longitudinal component  $A_-$  and a Coulomb-type interaction in the electrostatic case, in two dimensions. Moreover, the longitudinal component  $A_-$  was clearly related to the massive mode of the Podolsky's field, which is a good reason to use the null-plane; the fact that the front-form dynamics is able to separate massless and massive modes of the field.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to thank Professor C.A.P. Galvão for reading the manuscript and to contribute with the improvement of our work. M.C. Bertin was supported by Capes. B.M. Pimentel was partially supported by CNPq. G.E.R. Zambrano was supported by CNPq.

## REFERENCES

1. M. Ostrogradski, Mem. Ac. St. Petersbourg **1**; 385 (1850).
2. K. S. Stelle, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).
3. K. S. Stelle, Gen. Rel. Grav. **9**, 353 (1978).
4. L. Querella, Variational Principles and Cosmological Models in Higher-Order Gravity, gr-qc/9902044 (1998), and references therein.
5. R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo, L. G. Medeiros, P. J. Pompeia, Eur. Phys. J. **C53**, 99 (2008).
6. R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).
7. R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo, P. J. Pompeia, Ann. Phys. **322**, 1211 (2007).
8. A. I. Alekseev, B. A. Arbozov, V. A. Baikov, Theor. Math. Phys. **52**, 739 (1982).
9. J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press (1984).
10. A. A. Slavnov, Theor. Math. Phys. **13**, 174 (1972); **33**, 210 (1977).
11. V. V. Nesterenko, J. Phys. **A22**, 1672 (1989).
12. L. Alvares-Gaume, L. Labastida, J. M. F. Ramallo, Nucl. Phys. **B334**, 103 (1990).
13. B. Podolsky, P. Schwed, Rev. Mod. Phys. **20**, 40 (1948).
14. F. Bopp, Ann. Phys. **38**, 345 (1940).
15. J. Frenkel, Phys. Rev. **E54**, 5859 (1996).
16. R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo, L. G. Medeiros, P. J. Pompeia, Preprint IFT-P.021/2008 (2008).
17. C. A. P. Galvão, B. M. Pimentel, Can. J. Phys. **66**, 460 (1988).
18. P. A. M. Dirac, Canad. J. Math. **2**, 129 (1950); **3**, 1 (1951).
19. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A246**, 326 (1958).
20. P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, (1964).
21. P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
22. B. L. G. Bekker, *Form of Relativistic Dynamics*, Lecture Notes in Physics, **572**, Springer, New York (2001).
23. K. Bardakci, M. B. Halpern, Phys. Rev. **176**, 1686 (1968).
24. H. Leutwyler, J. Stern, Ann. Phys. **112**, 94 (1978).
25. P. P. Srivastava, in *Quantum Field Theory: A 20th Century Profile*, ed. A. N. Mitra, New Delhi (2000), p. 437.
26. R. A. Neville and F. Rohrlich, Nuov. Cim. **A1**, 625 (1971).
27. F. Rohrlich, Acta Physica Austriaca, Supple. **VIII**, 277 (1971).
28. T. Heinzl and E. Werner, Z. Phys. **C62**, 521 (1994).
29. R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboim, Nucl. Phys., **B122**, 61 (1976).
30. P. J. Steinhardt, Ann. Phys. **128**, 425 (1980).
31. R. Casana, B. M. Pimentel, G. E. R. Zambrano, Int. J. Mod. Phys. **E16**, 2993 (2007).
32. R. Casana, B. M. Pimentel, G. E. R. Zambrano, *SQED<sub>4</sub> and QED<sub>4</sub> on the null-plane*, arXiv: 0803-2677 [hep-th].
33. R. Casana, B. M. Pimentel, G. E. R. Zambrano, *Scalar QCD<sub>4</sub> on the null-plane*, arXiv: 0808-2217 [hep-th].



## Capítulo 6

# Conclusões e perspectivas

Na presente tese consideramos alguns aspectos da teoria clássica de campos em duas e quatro dimensões nas coordenadas do plano nulo e, devido ao caráter singular das lagrangianas, a abordagem desenvolvida por Dirac para estudar sistemas vinculados foi usado.

No primeiro capítulo, introduzimos as bases da dinâmica no plano nulo, onde discutimos algumas características do grupo de Poincaré. Mostramos a relação que existe entre os comutadores a tempos iguais, as equações de campo e suas soluções com as condições de contorno. Observamos que as teorias de campo no plano nulo são geralmente sistemas com vínculos e requer um tratamento especial. No capítulo 2, estudamos a estrutura Hamiltoniana para sistemas com vínculos, a classificação e a consistência dos vínculos segundo o método de Dirac. Esclarecemos os requerimentos necessários para estabelecer condições de gauge apropriadas no formalismo Hamiltoniano, para uma teoria que possui vínculos de primeira classe. Finalmente, definimos os parênteses de Dirac entre os graus de liberdade da teoria.

A idéia básica do capítulo 3 foi realizar um estudo de teoria de campos em 2D e ressaltar as principais diferenças existentes com a formulação das mesmas teorias nas coordenadas da forma instantânea. Em primeiro lugar, estudamos o modelo de Schwinger massivo [1], onde mostramos que os vínculos de primeira classe associados ao setor fermiônico e reportados por Mustaki [2] são vínculos de primeira classe impróprios e eles estão relacionados com a ambigüidade na definição do operador  $\partial_-$ , ou seja, os modos nulos do operador. A ambigüidade é eliminada fixando condições de fronteira às componentes independentes dos campos. Os vínculos de primeira classe próprios bosônicos foram fixados quando escolhemos a condição de gauge de plano-nulo, a qual permitiu obter a álgebra graduada para as variáveis canônicas, que é representada pelos parênteses de Dirac. Via princípio de correspondência, reproduzimos as relações canônicas de (anti)-comutação reportadas na literatura [2]. Finalmente, observamos que a álgebra graduada para o modelo de Schwinger sem massa pode ser obtida do caso massivo simplesmente tomando o limite  $m \rightarrow 0$ .

Posteriormente, estudamos a estrutura de vínculos da  $SQED_2$  [3], em que mostramos que um dos vínculos de primeira classe da teoria resulta de uma combinação linear de vínculos escalares e eletromagnéticos e que é determinado pelo autovetor de autovalor nulo da matriz de vínculos. A razão desta combinação linear é a existência de vínculos de segunda classe associados ao setor

escalar. Mostramos que o conjunto  $(A_+, \phi, \phi^*)$  constitui as variáveis canônicas independentes da teoria e o estudo determinou os parênteses de Dirac entre elas. A quantização canônica do modelo pode ser realizada via princípio de correspondência e as relações determinam os comutadores entre operadores a tempos iguais.

Finalmente, estudamos a interação de um campo  $DKP$  com um campo eletromagnético [4], ou chamada também de eletrodinâmica escalar de primeira ordem, em que mostramos que a estrutura de vínculos do setor eletromagnético é mantida. Porém, a associada ao setor  $DKP$ , que descreve o campo escalar, é completamente diferente da obtida via formalismo de segunda ordem da  $SQED_2$ . Mostramos que um dos vínculos de primeira classe da teoria é uma combinação linear da lei de Gauss e dos vínculos primários  $DKP$ . A análise mostrou que os campos  $DKP$   $(\psi, \bar{\psi})$  têm como componentes independentes  $(\varphi, \varphi^*)$ , respectivamente, enquanto que para o setor eletromagnético a componente independente é  $A_+$ . Deduzimos os parênteses de Dirac entre as variáveis independentes e mostramos a equivalência com os resultados obtidos no formalismo de segunda ordem, quando a representação física do campo  $DKP$  é levada em conta.

Logo após, estudamos alguns modelos de teoria de campos em  $4D$ , em que o primeiro problema que abordamos foi a eletrodinâmica escalar e espinorial [5]. O estudo da estrutura de vínculos da  $SQED_4$  determinou que um dos vínculos de primeira classe associado ao autovetor de autovalor nulo da matriz de vínculos é uma combinação linear de vínculos associadas ao setor escalar e eletromagnético, característica não apresentada nas coordenadas usuais. Posteriormente, tornamos os vínculos de primeira em segunda classe quando a condição de gauge de plano nulo é utilizada, enquanto o conjunto de vínculos impróprios de primeira classe são fixados quando impomos condições de contorno apropriadas sobre os campos, os quais garantem unicidade na inversa da matriz de vínculos. Os parênteses de Dirac foram calculados e, via princípio de correspondência, a teoria foi quantizada. As relações de comutação deduzidas entre os campos são consistentes com os resultados reportados na literatura [6]. Os comutadores associadas ao operador  $A_+$  foram calculados quantizando os parênteses de Dirac, derivados em nível clássico, seguindo uma cuidadosa análise da estrutura da  $SQED_4$ . Na literatura, afirma-se que este resultado é derivado resolvendo um vínculo quântico [6]. No caso da  $QED_4$ , observou-se que no setor fermiônico existe um subconjunto de vínculos impróprios de primeira classe, geradores de transformações gauge impróprias [7], em que tal subconjunto é associado com a impossibilidade de se definir uma única inversa para o operador  $\partial_-$  e relacionado à insuficiência de condições de fronteira [1]. Garantimos a unicidade da inversa da matriz de vínculos de segunda classe impondo condições apropriadas de contorno sobre os campos independentes da teoria. A álgebra graduada das variáveis dinâmicas foi obtida na condição de gauge plano nulo. Via princípio de correspondência, reproduzimos as relações de (anti)-comutação para os campos quânticos reportadas por Kogut e Soper [8].

Posteriormente, estudamos a estrutura canônica do campo de Yang-Mills e a Cromodinâmica escalar ( $SQCD_4$ ) [9]. O estudo cuidadoso da estrutura de vínculos do campo de Yang-Mills determinou, além dos usuais vínculos de primeira classe, um conjunto de segunda classe característico da dinâmica do plano nulo [5]. Impondo condições de contorno apropriadas nos campos, os vínculos impróprios de primeira classe da teoria [1, 5, 7] são eliminados e garantimos unicidade na matriz



de vínculos de segunda classe. Os parênteses de Dirac foram calculados e quantizados via princípio de correspondência, obtendo os resultados deduzidos por Tomboulis [10]. No estudo canônico da  $SQCD_4$ , além da estrutura livre de Yang-Mills, encontramos uma contribuição do setor escalar, com um conjunto adicional de vínculos de segunda classe; isto resulta numa modificação da lei de Gauss da teoria, similar ao acontecido com  $SQED_4$ . Impondo a condição de gauge do plano nulo e as correspondentes condições de contorno sobre os campos independentes, obtivemos os correspondentes parênteses de Dirac da teoria [9].

Finalmente, abordamos o problema da teoria eletromagnética de Podolsky [11], em que uma cuidadosa análise da estrutura hamiltoniana da teoria mostra a existência de dois vínculos adicionais de segunda classe na teoria, característica não apresentada nas coordenadas usuais [12]. Condições de contorno consistentes na especificação da derivada  $\partial_-$  nos campos até terceiro ordem foram necessários para garantir unicidade na inversa da matriz de vínculos de segunda classe da teoria e eliminar os vínculos impróprios de primeira classe. O problema da condição de gauge foi estudado em detalhe e derivado apropriadamente das equações de movimento. Os parênteses de Dirac fundamentais para as variáveis dinâmicas neste gauge foram construídos e são compatíveis com os vínculos [11].

Como perspectiva futura seria possível estudar a estrutura de vínculos para a eletrodinâmica escalar de primeira ordem em  $4D$  para um grupo de gauge abeliano e não abeliano. De igual maneira estamos interessados na estrutura canônica da teoria  $DKP$  livre não massiva para estes mesmos grupos de simetria. Desejamos continuar com o estudo da teoria eletromagnética de Podolsky para uma condição de gauge de plano-nulo estendida para uma teoria de ordem superior e de igual maneira considerar o problema de interação do campo de Podolsky com um campo escalar carregado e um espinorial.

Como a estrutura hamiltoniana é bem definida para os modelos apresentados neste trabalho, pretendemos estudar a quantização no plano nulo destas teorias via integração funcional à temperatura zero e a sua extensão à temperatura finita.

# Bibliografia

- [1] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Int. J. Mod. Phys.*, **E16**, 2993 (2007).
- [2] D. Mustaki, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 1184.
- [3] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Revista Colombiana de Física*, Vol. **41**, No 1, 220 (2009).
- [4] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Revista Colombiana de Física*, Vol. **41**, No 1, 206 (2009).
- [5] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *SQED<sub>4</sub> and QED<sub>4</sub> on the null-plane*, hep-th 0803.2677.
- [6] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Phys. Rev.* **D3**, 1692(1971).
- [7] P. J. Steinhardt, *Ann. Phys* **128**, 425 (1980).  
R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboim, *Nucl. Phys.* **B122**, 61 (1976).
- [8] J. B. Kogut and D. E. Soper, *Phys. Rev.* **D1**, 2901 (1970).
- [9] R. Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Scalar QCD<sub>4</sub> on the null-plane*, hep-th 0808.2217.
- [10] E. Tomboulis, *Phys. Rev.* **D8**, 2736 (1971).
- [11] M. C. Bertin, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *The canonical structure of Podolsky's generalized electrodynamics on the Null-Plane*, in preparation.
- [12] C. A. P. Galvão, B. M. Pimentel, *Can. J. Phys.* **66** 460 (1988).

