



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

São Paulo - SP

Brasil

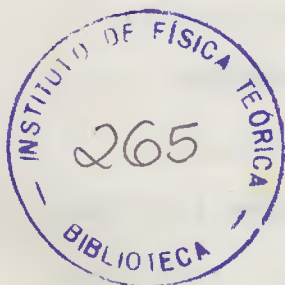
EFEITO TÚNEL MULTIDIMENSIONAL EM REAÇÕES NUCLEARES

145

DEISE AMARO AGRELLO

Tese submetida ao Instituto de Física Teórica -  
UNESP, São Paulo, para obtenção do Título de  
Doutor em Física.

Orientador: Valdir Casaca Aguilera-Navarro



São PAULO, 1992



IFT/TE  
D-33

SECRETARIA DE ESTADO DE ECONOMIA  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA  
Rio de Janeiro - RJ  
Brasil

PROVA DE LICENCIATURA EM ECONOMIA

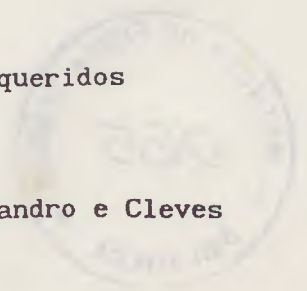
PROVA DE ECONOMIA

QUESTÃO 1 - (10 pontos) - Analise o seguinte texto e responda:  
"O Brasil é um país desenvolvido e rico em recursos naturais."  
Justifique sua resposta.

Resposta: O Brasil é um país em desenvolvimento, com uma economia baseada em commodities e serviços. Embora possua recursos naturais abundantes, a distribuição é desigual e a infraestrutura é precária.

Aos queridos

Paula, Sandro e Cleves



## AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos vão, em especial, para o Prof. Dr. Valdir Casaca Aguilera-Navarro, professor e amigo, por sua supervisão durante meu tempo de doutorado no Instituto de Física Teórica. Ele foi uma constante fonte de idéias e sugestões, e principalmente, pela sua amizade e companheirismo durante todo este tempo.

Gostaria também de agradecer à todo o pessoal do Instituto de Física Teórica, que direta ou indiretamente colaborou com este trabalho, professores, funcionários, colegas, em especial aos meus velhos amigos desde o tempo de Mestrado, Maria Caballero Tijero e Dr. José Noboru Maki.

Ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro. À Luzinete, pela sua ajuda em datilografar o manuscrito e preparar o material para a impressão. Também à Kwok Sau Fa por sua ajuda com os gráficos.

Ao Dr. D.M. Brink pelas sugestões dadas para este trabalho, e pelas discussões que tivemos no início desta tese, começada durante o tempo que estive no Departamento de Física Teórica, em Oxford, Inglaterra.

Finalmente, gostaria de agradecer aos meus pais pelo apoio moral, e ao Cleves, meu marido, não somente pela paciência e entendimento, mas também pela sua ajuda durante todo este tempo.

# EFEITO TÚNEL MULTIDIMENSIONAL EM REAÇÕES NUCLEARES

DEISE AMARO AGRELLO

Instituto de Física Teórica - UNESP

São Paulo - Brasil

## RESUMO

Discutimos nesta tese o efeito túnel através de uma barreira de potencial em várias dimensões e aplicamos a três problemas diferentes.

Primeiramente estudamos o problema de tunelamento através de barreiras em duas dimensões usando métodos quânticos. Consideramos a colisão de dois isótopos de Ni à energias em torno da altura da barreira na região de 100 MeV. Encontramos os coeficientes de reflexão e transmissão fazendo um cálculo de canais acoplados. Nos cálculos numéricos consideramos até cinco canais abertos e encontramos que se o número de canais é aumentado, os resultados variam apenas ligeiramente. Propomos neste trabalho um tipo de acoplamento entre os graus de liberdade diferente daqueles existentes na literatura e estudamos o efeito deste acoplamento na região da barreira. Calculamos também a secção de choque de fusão

e comparamos os nossos resultados com os experimentais e com outros encontrados na literatura.

O segundo problema considerado é a emissão espontânea de núcleos mais pesados que a partícula alfa. Discutimos a emissão de  $^{14}\text{C}$  do  $^{223}\text{Ra}$  que foi recentemente observada e calculamos os fatores de pré-formação. Estudamos a razão dos fatores de pré-formação para a emissão de  $^{14}\text{C}$  relativa à emissão da partícula alfa do  $^{223}\text{Ra}$ . Consideramos uma barreira de potencial realística, comparamos nossos resultados para os fatores de penetrabilidade e os fatores de pré-formação com outros encontrados recentemente na literatura. À seguir fazemos um estudo do tamanho do raio nuclear na teoria de decaimento exóticos, considerando as várias reações onde decaimentos de núcleos mais pesados que a partícula alfa já foram observados.

Finalmente, consideramos a formação de aglomerados alfa em núcleos. Usando um modelo de "cluster" simples, estudamos algumas propriedades nucleares do  $^{44}\text{Ti}$ , como por exemplo, as funções de onda, os esquemas de níveis de energia e as larguras de decaimento. Consideramos também, dois tipos diferentes de aproximações semiclássicas para estudar as funções de onda e comparamos os resultados obtidos quântica e semiclasticamente.



## ABSTRACT

The quantum tunneling through a potential barrier in several dimensions is discussed and three different problems are studied.

Firstly the tunneling problem through two dimensional barriers is studied using quantum mechanical methods. We consider the collision of two Ni isotopes at energies near the top of the barrier of 100 Mev. The reflection and transmission coefficients are found through a coupled channel calculation. We have considered up to five open channels in the numerical calculations and have found that if the number of channels is increased further the results change only slightly. A different kind of coupling between the degrees of freedom from those found in the literature is proposed and the effect of this coupling in the barrier region is studied. The sub-barrier fusion reaction cross section is also calculated and our results are compared with the data and other results found in the literature.

The second problem is the spontaneous emission of nuclei heavier than the  $\alpha$ -particle. The emission of  $^{14}\text{C}$  from  $^{223}\text{Ra}$  recently observed is discussed and the penetrability factors are calculated. The ratio of the preformation factor for the  $^{14}\text{C}$  emission relative to the emission of the  $\alpha$ -particles by the  $^{223}\text{Ra}$  is studied. Considering a realistic potential barrier we compare our results for penetrability factors and preformation factors

with other recently found in the literature. Then, the size of the nuclear radius in the exotic decay theory is studied, considering several reactions where decays of nuclei heavier than the  $\alpha$ -particle have been observed.

Finally the  $\alpha$ -clustering in nuclei is considered. Using a simple cluster model some nuclear properties of the  $^{44}\text{Ti}$  are studied, as wave functions, energy level schemes and decay widths. Two different kinds of semiclassical approximations are considered to study the wave functions and the quantum mechanical and semiclassical results are compared.



## INDICE

Resumo	4
Abstract	6
Introdução	11
<b>Capítulo 1: Aspectos Básicos</b>	<b>48</b>
1.a Alguns conceitos básicos na descrição de reações nucleares.	48
1.b Efeito túnel através de uma barreira de potencial: sistemas multidimensionais.	52
1.b.1 Penetração de barreira usando o método WKB em uma dimensão.	53
1.b.2 O método de canais acoplados	73
1.b.3 O modelo de dois canais.	75
<b>Capítulo 2: Barreira de fusão do sistema <math>^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}</math> em um modelo à duas dimensões.</b>	<b>82</b>
2.a Introdução	82
2.b Fusão abaixo da barreira	86
2.c A influência dos graus de liberdade intrínsecos	91
2.d O modelo	94
2.e Solução quântica	97

2.f Resultados e discussões	108
2.g Conclusões	124
<u>Capítulo 3:</u> Emissão espontânea de núcleos mais pesados que a partícula alfa	126
3.a Introdução	126
3.b Fissão espontânea	127
3.c A análise de Rose e Jones	129
3.d A barreira de Christensen-Winther	134
3.e Variação do parâmetro de massa	138
3.f O potencial de proximidade	140
3.g Comparação entre as várias aproximações	146
3.h Conclusões	151
<u>Capítulo 4:</u> Estudos do tamanho nuclear na Teoria de decaimentos exóticos	153
4.a Introdução	153
4.b O modelo	158
4.c Fissão ou emissão de um "cluster" pré-formado?	
Resultados	161
4.d Comparação com outros modelos	166
4.e Conclusões	179

<u>Capítulo 5:</u> Formação de "cluster" alfa no $^{44}\text{Ti}$	182
5.a Introdução	182
5.b Alguns resultados experimentais	184
5.c Probabilidade de formação de "cluster" alfa na superfície nuclear	186
5.d Um modelo simples	192
5.e Resultados	200
<u>Capítulo 6:</u> Aproximação semi-clássica para a função de onda e níveis de energia do $^{44}\text{Ti}$	206
6.a Introdução	206
6.b Aproximações semi-clássicas	206
1. Aproximação de Airy	207
2. Aproximação de Berry e Mount.	209
6.c Regra de quantização de Bohr e Sommerfeld	220
6.d Larguras de decaimento	223
6.e Conclusões	227
<u>Conclusões</u>	228
<u>Referências</u>	234

## INTRODUÇÃO

O assunto desta tese é bastante extenso, mas a idéia central é o efeito túnel através de uma barreira de potencial em várias dimensões.

Inicialmente daremos alguns conceitos básicos usados neste trabalho, isto é, discutiremos alguns tipos de reações de ions pesados e faremos um resumo de algumas expressões da aproximação W.K.B. e do método de canais acoplados. (Cap. 1)

O resto deste trabalho pode ser dividido em três partes principais. Na primeira parte (cap. 2) utilizamos modelos multidimensionais para o estudo da fusão, considerando cálculo de canais acoplados.

Os capítulos finais (do 3 ao 6) tratam de estudos em que podem ser utilizados as expressões do efeito túnel unidimensional, basicamente o método W.K.B.. Nos capítulos 3 e 4 estudamos os decaimentos exóticos de núcleos mais pesados que a partícula alfa. A seguir, nos capítulos 5 e 6 estudamos o  $^{44}\text{Ti}$  usando um modelo de "cluster" e também aproximações semi-clássicas.

No começo de cada uma destas partes temos a justificativa para tais estudos, mas gostaríamos de dar aqui, uma noção das razões existentes por detrás destes cálculos.

Primeiramente, como já foi mencionado, fazemos um estudo

sobre reações de fusão considerando cálculos de canais acoplados, em um modelo bi-dimensional. Pretendemos nos deter um pouco mais neste assunto nesta introdução, o que faremos logo abaixo.

A segunda parte desta tese é um estudo da emissão espontânea de núcleos mais pesados que a partícula alfa. Recentemente, a emissão de  $^{14}\text{C}$  pelo  $^{223}\text{Ra}$  foi observada por H.J. Rose e G.A. Jones<sup>[1]</sup>. Esta descoberta imediatamente estimulou outros grupos em todo o mundo e atualmente conhecemos, pelo menos, quinze outros núcleos que emitem  $^{14}\text{C}$  ou mesmo núcleos mais pesados como o Ne, o Si e o Mg. Em 1979, A. Sandulescu e companheiros<sup>[2]</sup> predisseram que núcleos mais pesados que o chumbo poderiam decair por emissão de ions mais pesados que a partícula alfa.

Na referência<sup>[1]</sup> foi observado que uma vez em aproximadamente  $10^9$  vezes o  $^{223}\text{Ra}$  decaia por emissão de um núcleo de  $^{14}\text{C}$  de 31 MeV, em vez da partícula alfa normal de 5 MeV. Eles concluíram que o núcleo de  $^{14}\text{C}$  tem um fator de probabilidade de pré-formação no intervalo de  $7 \times 10^{-5}$  a  $4 \times 10^{-7}$  vezes a probabilidade de pré-formação para a partícula alfa no mesmo núcleo. Nessas investigações foi considerada uma barreira coulombiana pura.

Usando uma barreira mais realista que a de Rose e Jones, investigamos este caso de emissão espontânea para ver se suas conclusões eram sensíveis a escolha da barreira, tentando entender aqueles valores dos fatores de pré-formação. Também comparamos nossos cálculos e resultados com outros resultados encontrados



recentemente na literatura.

À seguir, no capítulo 4, fazemos um estudo do tamanho do raio nuclear na teoria de decaimentos exóticos. No capítulo 3 concluímos que a penetrabilidade e as razões de ramificação entre as emissões de partículas mais pesadas relativas às emissões de partículas alfa são muito sensíveis a forma do potencial. Então resolvemos verificar como variam estas duas quantidades quando variamos os raios dos núcleos nos processos de emissão espontânea.

Na última parte desta tese (cap. 5) estudamos os esquemas de níveis de energia e a função de onda do  $^{44}\text{Ti}$  usando um modelo de "clusters" simples. O objetivo destes estudos foi entender o comportamento da função de onda, principalmente na cauda, já que o aglomeramento alfa é um fenômeno superficial. Também estudamos as propriedades nucleares citadas acima usando uma aproximação semi-clássica e comparamos os resultados. (Cap. 6)

Gostaríamos, nesta introdução, de fazer uma discussão mais detalhada sobre os estudos já feitos no caso das reações de fusão abaixo da barreira (Cap. 2). Faremos aqui um breve histórico dos estudos feitos até o início dos anos 80, quando verificações experimentais mostram a necessidade da introdução de novos graus de liberdade e o uso de cálculos de canais acoplados. Nos outros capítulos subsequentes, este histórico é feito no início, e cada um deles contém também nossos cálculos, justificativas e conclusões. Gostaríamos também, de dar agora uma idéia sobre as



magnitudes de alguns parâmetros que serão usados mais tarde, em nossos cálculos. É o que faremos à seguir.

Como já dissemos, no capítulo 2 fazemos um estudo sobre reações de fusão considerando cálculos de canais acoplados em um modelo bi-dimensional. Muitas pessoas tem trabalhado em reações de fusão à energias próximas e abaixo da barreira, tentando reproduzir os resultados experimentais. Inicialmente se usou a aproximação W.K.B. unidimensional simples. Os resultados não foram muito bons, mostrando uma diferença de duas ou três ordens de magnitude menores que aqueles observados experimentalmente. Esses resultados pioravam à medida que os núcleos se tornavam mais pesados. Este fato tem sido considerado como uma evidência de que reações de fusão abaixo da barreira são influenciadas por outros graus de liberdade intrínsecos dos núcleos que estão colidindo. Os graus de liberdade internos do sistema que colide, evidentemente tem um papel importante à grandes separações associadas com a fusão abaixo da barreira. Foram feitas várias propostas, na literatura, para estes graus de liberdade, à fim de melhorar os resultados, tais como deformações estáticas<sup>[3]</sup>, movimento do ponto-zero de vibrações superficiais coletivas<sup>[4]</sup>, deformações dinâmicas<sup>[5]</sup>, transferência de partículas, etc..

A nossa proposta não é considerar um novo candidato para estes graus de liberdade, mas sim, um tipo diferente de acoplamento daqueles obtidos da literatura, e investigar os

efeitos deste acoplamento nos coeficientes de transmissão.

Os estudos de fusão abaixo da barreira tem sido feitos durante os últimos 30 anos, mas os trabalhos mais recentes com ions pesados trouxeram muitas informações novas sobre o processo em que dois núcleos se fundem. Descobriu-se que haviam profundas variações entre as funções de excitação por fusão de núcleos vizinhos, e que há muito mais fusão abaixo da barreira que podia ser considerada em termos de penetração de barreiras simples. Tornou-se claro que o processo físico é um tunelamento quântico em um espaço de configuração multidimensional representando um sistema di-nuclear. Em estudos teóricos recentes de canais acoplados, começou-se à tentar isolar os mais importantes graus de liberdade, e mostrar como o fenômeno observado deve acontecer.

Uma boa revisão deste assunto pode ser encontrada na referência [6]. Muitos dos mais recentes trabalhos são apresentados na referência [7], onde vários dos mais importantes graus de liberdade são discutidos.

Em alguns estudos de deformações dinâmicas de núcleos, mostrou-se que quando dois núcleos se aproximam, rotações, vibrações e ressonâncias gigantes são mutuamente excitadas por causa do longo alcance da interação coulombiana. Isto leva, efetivamente, à um aumento da barreira coulombiana, que é de importância em quase todos os processos de ions pesados. [8,9]

Em 1966, G.H. Rawitscher<sup>[10]</sup>, aproximou a barreira formada

pelas interações nuclear, centrífuga e coulombiana, para cada onda parcial, à uma combinação de duas parábolas, desenvolvendo um procedimento similar àquele empregado por Hill e Wheeler em 1953<sup>[11]</sup>. Na referência [11] é encontrada uma fórmula simples para os coeficientes de transmissão, que pode ser vista no capítulo 1, eq. (1.67).

Em 1973, C.Y. Wong<sup>[12]</sup> obteve uma fórmula fechada para a secção de choque de fusão partindo da expressão encontrada por Hill e Wheeler, fazendo uso de algumas aproximações. Ele chegou a uma expressão bastante simples para a secção de choque total de reação em termos da barreira de interação para ondas S. Esta fórmula tem sido muito usada até hoje, por sua simplicidade.

Em 1974, H. Hofmann<sup>[13]</sup> fez talvez o primeiro tratamento realmente dinâmico multidimensional do processo de fissão. Os cálculos são feitos analiticamente, considerando a aproximação adiabática e os componentes do tensor inercial como não sendo constantes. O tratamento dado é muito similar àquele usado para a descrição de reações químicas entre dois ou mais átomos<sup>[14]</sup>. Hofmann introduziu uma aproximação harmônica para o potencial perpendicular ao caminho de fissão. Adicionando a energia do ponto-zero deste movimento ao potencial ao longo do caminho de fissão, ele decompôs o Hamiltoniano em uma parte, adiabática e uma outra restante. A parte adiabática corresponde à um problema de penetração de barreira uni-dimensional. O método usado por ele é

certamente aplicável à transições do estado fundamental do núcleo que fissiona para o estado fundamental do sistema separado, mas não para transições entre estados excitados, onde o acoplamento à outras transições é muito forte.

Uma outra solução analítica foi proposta por H. Massmann, K. Möhring e P. Ring em 1977<sup>[15]</sup>. Eles consideraram um modelo bi-dimensional e fizeram um tratamento quântico e semi-clássico do problema. Ele usaram a aproximação de "sudden limit", a barreira é do tipo Eckart para um dos graus de liberdade e o segundo apenas permite um movimento ligado em estados quântico discretos.

No mesmo ano, P.R. Christensen e Z.E. Switkowski<sup>[16]</sup>, calcularam o espalhamento elástico e as secções de choque de fusão para as reações  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ ,  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  e  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$  para energias próximas e abaixo da barreira coulombiana. Os cálculos foram feitos usando as condições de contorno de ondas entrantes (IWBC - Incoming Wave Boundary Conditions) e um potencial de interação ion-ion real (Woods-Saxon).

Um tratamento do modelo de fissão bi-dimensional foi apresentado por P. Ring, H. Massmann e J.O. Rasmussen em 1978<sup>[17]</sup>. Eles consideraram naquele trabalho, um método que foi originalmente proposto no campo de química teórica por Miller<sup>[18]</sup> e por Marcus<sup>[19]</sup>, e que fornece uma descrição semi-clássica consistente do problema de penetração de barreira multidimensional. Eles calcularam as probabilidades de transição,



não somente do estado fundamental do núcleo fissionando para o estado fundamental do sistema separado, mas também para os estados excitados, como também outras probabilidades de transição partindo de estados excitados. Nesse trabalho eles também deram um método para encontrar a solução quântica exata. Nós usamos este método em nosso trabalho, nesta tese. Este método pode se tornar complicado quando aplicado à barreiras de fissão realísticas, como discutiremos depois. Mas o método é bastante geral para ser estendido à problemas mais complicados; entretanto, podem surgir dificuldades nos casos em que muitos canais tem que ser incluídos. Eles fizeram os cálculos usando uma barreira do tipo Eckart [ $f(z) = \cosh^{-2}z$ ], considerando os parâmetros inerciais constantes. A concordância entre as probabilidades de transição calculadas quântica e semiclassicamente é muito boa.

As medidas da secção de choque de fusão de ions pesados à baixas energias fornecem informações da altura da barreira de interação e da sua curvatura próximo do ponto onde os dois núcleos começam a se encontrar. Estas quantidades podem ser extraídas da análise da secção de choque de fusão em termos da penetrabilidade para uma barreira de interação uni-dimensional. A forma desta barreira é frequentemente assumida como parabólica, o que leva à uma expressão analítica simples para a penetrabilidade. Se o alvo ou o projétil é deformado no estado fundamental, a altura da barreira depende da orientação angular dos núcleos deformados.

Este efeito é usualmente considerado, fazendo-se uma média sobre as orientações<sup>[12]</sup> ou de alguma outra maneira como na referência [20]. Tais procedimentos são boas aproximações nos casos em que um projétil incidente é relativamente leve, contudo, quando a massa do projétil aumenta, pode se tornar muito importante se considerar a possibilidade do núcleo se deformar durante a colisão.

Ainda em 1978, T. Kodama, R.A.M.S. Nazareth, P. Möller e J.R. Mix<sup>[21]</sup> calcularam exatamente a penetrabilidade para uma barreira bi-dimensional simples  $V(r,\sigma)$ , estudando o efeito das oscilações do ponto-zero quântico de núcleos na sua secção de choque de fusão à baixas energias. Eles consideraram a reação  $^{100}\text{Mo} + ^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{200}\text{Po}$ , e verificaram que a penetrabilidade era substancialmente diferente daquela calculada para uma barreira parabólica uni-dimensional correspondente. No potencial  $V(r,\sigma)$ ,  $r$  é a distância entre os centros de massa dos dois núcleos, e  $\sigma$  é a soma das raízes quadráticas médias das extensões ao longo do eixo de simetria da distribuição de matéria de cada núcleo em torno do seu centro de massa.

Em 1980, R.G. Stokstad et al<sup>[22]</sup> mediram a secção de choque de fusão de  $^{16}\text{O}$  com  $^{148,150,152,154}\text{Sm}$ . Eles mostraram que à altas energias, a secções de choque de fusão para todos os isótopos são similares, e que para energias mais baixas, as secções de choque para alvos mais deformados são maiores que aquelas para alvos esféricos.



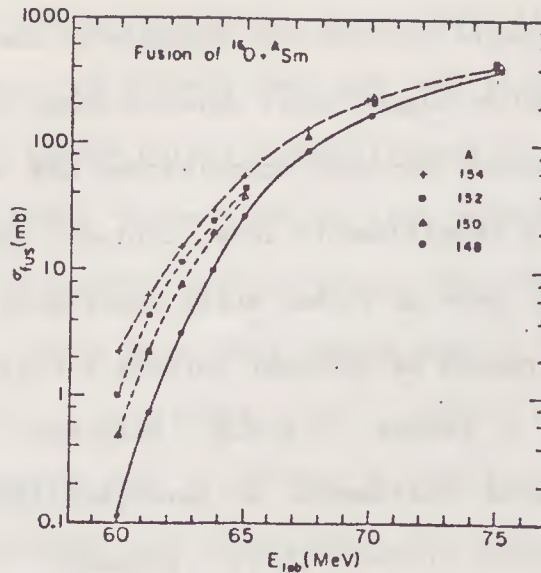


FIGURA I.1: Secções de choque de fusão. São similares para energias acima da barreira, mas variam bastante à baixas energias. As linhas são apenas guias, Ref. [22].

Em um trabalho seguinte (1981), R.G. Stockstad e E.E. Gross<sup>[3]</sup> analisaram os resultados obtidos em suas pesquisas experimentais anteriores em termos de modelos de reações estáticas e dinâmicos. Eles não conseguiram um bom ajuste dos resultados experimentais obtidos anteriormente considerando apenas o efeito das deformações estáticas, como haviam suposto inicialmente. Mas, este trabalho sugeriu que deveria ser considerado o efeito da inclusão do movimento do ponto zero com deformações estáticas na secção de choque da fusão, assim como também os efeitos dinâmicos. Para isso o uso do método de canais acoplados seria o indicado para resolver adequadamente o problema da transmissão através da barreira com mais de uma dimensão.

No mesmo ano, H. Esbensen<sup>[23]</sup> calculou as secções de choque

de fusão para as reações  $^{16}\text{O} + \text{Sm}$  e  $^{40}\text{Ar} + \text{Sm}$  em um modelo simples baseado na penetração de barreira, considerando deformações estáticas e movimento do ponto-zero de vibrações superficiais coletivas. Uma boa concordância é obtida com as secções de choque de fusão medidas para energias abaixo da barreira coulombiana, quando se introduz o efeito dos estados mais baixos ligados  $2^+$  e  $3^-$  nos isotopos de samarium. Ele usou a aproximação W.K.B. para o cálculo das penetrabilidades e fez uma média em relação as deformações estáticas e/ou deformações de movimento do ponto zero de quadrupolo e octopolo.

M. Beckerman et al<sup>[24]</sup> mediram a secção de choque de fusão para a reação  $^{58}\text{Ni} + ^{58}\text{Ni}$  e observaram que esta era surpreendentemente maior, para energias abaixo da barreira, quando era comparada àquela obtida por considerações de penetrabilidade simples. Eles apontaram que as secções de choque para fusão completa de núcleos massivos à energias abaixo da barreira eram sensíveis ao entendimento da estrutura nuclear, à dinâmica do processo de fusão, e a interligação entre os dois aspectos.

Em 1982, M. Beckerman e colaboradores<sup>[29]</sup> mediram a secção de choque de fusão do  $^{58,64}\text{Ni}$  com  $^{64}\text{Ni}$  e  $^{74}\text{Ge}$ . Novamente eles concluíram, empregando o métodos W.K.B. em seus cálculos, para comparação com os dados experimentais, que os modelos unidimensionais não eram capazes de descrever bem as reações para energias abaixo da barreira.

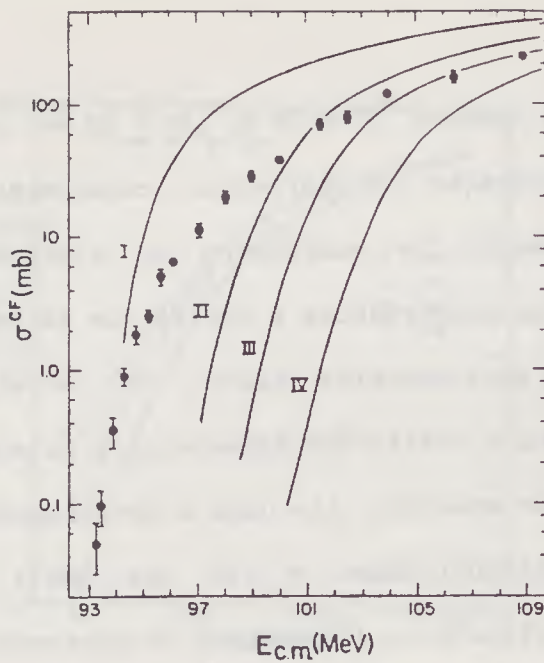


FIGURA I.2: Função de excitação para a reação  $^{58}\text{Ni} + ^{58}\text{Ni}$ . As curvas mostram os cálculos usando os potenciais: I : S-W (Ref. [25]), II: Bass (Ref. [26]), III: KNS (Ref. [27]), IV: potencial de proximidade(Ref. [28])

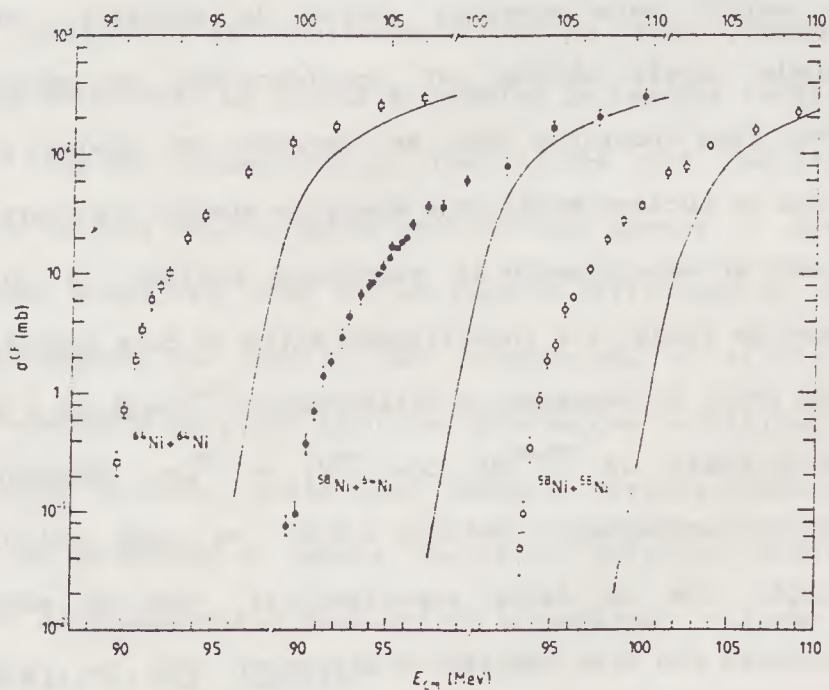


FIGURA I.3: Funções de excitação para fusão completa do  $^{58}\text{Ni} + ^{58}\text{Ni}$ ,  $^{58}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$  e  $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$ . As curvas mostram os resultados das previsões de tunelamento quântico feitos usando método W.K.B.

Outros trabalhos foram feitos nesta época<sup>[5,30]</sup> considerando o movimento do ponto zero e médias das deformações dinâmicas. Os resultados foram melhorados, mas não conseguiram explicar os resultados experimentais. Estes trabalhos consideram aproximações que fazem com que o cálculo do fator de penetração utilize barreiras unidimensionais. Eles propõem a inclusão da formação de um pescoço e a subsequente fusão através de uma sequência de formas mais complicadas.

Uma interpretação completa do fenômeno de fusão abaixo da barreira em termos de canais acoplados foi apresentada por Dasso e colaboradores, usando modelos analíticos simples e elegantes em um par de trabalhos<sup>[31,32]</sup>. Eles estão resumidos no capítulo 1 desta tese, onde se considera também o caso de dois canais que podem ser desacoplados, como exemplo.

Vários modelos foram desenvolvidos durante o período de 1983-5, e servem para ilustrar as características salientes da penetração de barreira com acoplamento de canais. A influência que os processos de reações de transferência tem na fusão foram introduzidos em um conjunto de artigos por Broglia e companheiros<sup>[33,34]</sup> e tratamentos exatos do processo de acoplamento inelástico foram apresentados por Landowne e Pieper<sup>[35]</sup>, por Rhoades-Brown e Braun-Munzinger<sup>[36]</sup> e Rhoades-Brown et al<sup>[37]</sup>.

Em adição aos estudos teóricos de 1983-4, vários trabalhos



experimentais foram então realizados. Nesses trabalhos experimentais muitas informações sobre as características globais do fenômeno foram estabelecidas assim como informações sobre a natureza das variações entre as secções de choque de fusão de diferentes isótopos de um mesmo elemento foram obtidos, como por exemplo, nas referências [24,29,38,39].

Várias explicações possíveis para as observações foram apontadas nessas investigações, entre estas foram a transferência/troca de neutrons de valência, formação de pescoço, polarização dinâmica, movimento do ponto zero e deformações estáticas. No tratamento de tunelamento com canais acoplados, os graus de liberdade que tunelam (canal de entrada ou o elástico) acomplam-se aos graus de liberdade intrínsecos (transferência ou canais inelásticos) do sistema quântico de muitos corpos (os dois núcleos). As barreiras são largas e não são facilmente penetráveis. Contudo, os núcleos são capazes de explorar estes graus de liberdade adicionais durante os primeiros estágios do processo de fusão, dando origem aos efeitos dramáticos vistos nos dados experimentais. Verificamos que o acoplamento dos graus de liberdade de tunelamento aos graus de liberdade intrínsecos, produz um espectro de barreiras, que, por sua vez, dá origem à um aumento na fusão abaixo da barreira.

Antes de discutir as novas tentativas usando canais acoplados para fusão, vale a pena ressaltar que as deficiências dos cálculos

de tunelamento simples não são devidas ao uso de barreiras incorretas. Esta possibilidade surge porque (a) secções de choque seriam maiores se por alguma razão as barreiras fossem mais estreitas que as previstas; (b) os valores precisos para o potencial nuclear para as várias separações radiais não são bem estabelecidos. Este aspecto foi examinado por Balantekin, Koonin e Negele em 1984<sup>[40]</sup> usando um procedimento de inversão para deduzir a aparente largura da barreira das secções de choque abaixo da barreira, observadas. Eles concluíram que o problema de entender os resultados experimentais não era devido ao uso incorreto dos potenciais nucleares, mas que simplesmente, o modelo de penetração simples falha para sistemas mais massivos.

Agora discutiremos brevemente algumas das aproximações que tem sido mais estudadas.

Considerando-se o método de canais acoplados, uma das mais importantes idéias introduzidas na série de trabalhos de Dasso et al<sup>[31,32]</sup> e Broglia et al<sup>[33,34]</sup> foi que os acoplamentos à canais de reação de não-fusão tais como transferências explicariam as variações isotópicas complexas na fusão. Nesses estudos, as dependências das secções de choque de fusão nos valores  $Q$  da reação para espalhamento inelástico e transferência foram examinadas. Enquanto os processos de acoplamento inelástico são razoavelmente bem entendidos, não podemos dizer o mesmo dos acoplamentos de transferência, embora algum progresso tenha sido



conseguido por Udagawa e Tamura (1984)<sup>[41]</sup>. Como consequência, argumentos simples e correlações indiretas, embora aproximadas, tem tido um papel importante nas discussões de acoplamentos de transferência.

Como já dissemos, alguns modelos analíticos foram introduzidos. O primeiro e o mais simples modelo a ser considerado foi aquele onde há somente dois canais acoplados - o canal de entrada e um canal que pode representar um estado excitado de um dos participantes da colisão, o qual acopla-se ao canal de entrada por uma quantidade  $F(x)$  (para detalhes veja cap. 1). Uma generalização do modelo de dois canais foi dada por Dasso et al<sup>[32]</sup> considerando os valores  $Q$  não desprezíveis, isto é, diferentes de zero. Em uma outra generalização, ainda considera o acoplamento constante, o chamado modelo de acoplamento constante. A suposição primária feita neste modelo, a fim de se obter resultados analíticos simples é que o acoplamento não varia espacialmente.

Um outro modelo utilizado é o chamado modelo adiabático. O comportamento das secções de choque de fusão preditos por estes modelos analíticos foi estudado por Balantekin e Takigawa (1985)<sup>[42]</sup>. Eles encontraram que a magnitude e o carácter dos "shifts" de energia são sensíveis à dependência radial da interação de acoplamento. Eles estudaram interações de acoplamentos lineares e quadráticas. Os aumentos produzidos pelas interações de acoplamento tendo uma dependência quadrática na

posição radial eram menores que aquelas tendo uma dependência linear.

Mais geralmente ainda, Tanimura (1985) observou que a interação de acoplamento pode decrescer rapidamente com a distância nas vizinhanças da barreira devido a interferência nuclear/coulombiana. Tanimura et al<sup>[41]</sup> então introduziram um modelo que é apropriado para energia abaixo da barreira, e que incorpora acoplamentos de multicanais sem uma suposição explícita sobre a dependência radial da interação de acoplamento. Seu modelo é baseado no método de estados estacionários perturbados, e foi chamado de modelo adiabático. Os aumentos na secção de choque de fusão devido à acoplamentos são menores no modelo adiabático que na aproximação de acoplamento constante. Eles enfatizam que a aproximação de acoplamento constante pode superpredizer significativamente a secção de choque de fusão à baixas energias nos casos onde os efeitos de acoplamento são fortes e os fatores de forma associados variam rapidamente.

Em adição à aproximações adiabáticas, de acoplamento constante e outras aproximações analíticas, há duas aproximações geométricas que são muito usadas para o tratamento exato de acoplamentos inelásticos. Uma destas é a parametrização do movimento do ponto zero desenvolvida por Esbensen em 1981<sup>[23]</sup>; e a outra é a aproximação de deformação estática introduzida por Rasmussen (1971) e por Wong (1973)<sup>[12]</sup>. O ponto de partida no

caso de deformações estáticas é a expansão do raio nuclear em termos de harmônicos esféricos. O momento de quadrupolo estático é tipicamente tratado usando o método de esferas equivalentes. Neste caso não se integra a equação de Schrödinger radial para um núcleo deformado. Em vez disso,  $R(\theta)$  define o raio de um núcleo esférico equivalente. Faz-se, então, a média sobre todas as orientações dos dois núcleos em relação ao seu eixo de colisão. Rasmussen e Wong usaram a fórmula dos coeficientes de transmissão de Hill-Wheeler em seus estudos.

Stockstad e Gross<sup>[3]</sup> usaram o método de esferas equivalentes nas análises das reações de  $^{16}\text{O}$  com  $^{148-154}\text{Sm}$ . Eles encontraram que a dependência isotópica observada foi superestimada considerando deformações estáticas. A tendência de modelos geométricos para superestimar os aumentos na fusão, devido a se desprezar a energia de excitação do ponto zero no estado inelástico, foi apontada por Jacobs e Smilansky (1983)<sup>[44]</sup>

Em um estudo teórico de Lindsay e Rowley (1984)<sup>[45]</sup>, a fusão abaixo da barreira de núcleos rotacionais foi examinada em uma aproximação "adiabática". Eles trataram a álgebra do momento angular completa e desenvolveram seu formalismo em termos de elementos da matriz-S da fórmula de Wong.

Estados coletivos associados com vibrações da superfície nuclear são muito comuns em núcleos. Eles são bem descritos pelo modelo de Bohr e Mottelson que parametriza a forma do núcleo

fazendo uso de umas poucas variáveis coletivas e assume que as vibrações são harmônicas. Os parâmetros do modelo são calculados em termos dos acoplamentos da superfície nuclear ao movimento de partícula independente.

As flutuações do ponto-zero associadas com estas vibrações podem ter uma influência significativa nas reações entre ions pesados onde o potencial ion-ion depende da posição instantânea das superfícies nucleares<sup>[23]</sup>.

Um estudo detalhado das interpretações geométricas de vários modelos adiabáticos foi feito por Nagarajan et al (1986)<sup>[46]</sup>. Eles introduzem modelos menos extremos que aqueles discutidos acima, mas ainda encontram uma tendência para os modelos exagerarem os aumentos da fusão para núcleos vibracionais. O problema das superestimativas em relação ao modelo de acoplamento constante foi discutido por Dasso e Landowne em 1987<sup>[47]</sup>.

Em 1982, H.J. Krappe et al<sup>[48]</sup> propuseram um modelo que inclui a formação de um "pescoço" entre os núcleos durante o processo de fusão. Nesse trabalho eles estudam o porquê dos desvios entre os valores medidos e os valores calculados com modelos unidimensionais. Eles fazem cálculos sistemáticos para vários sistemas, estudam as influências de alguns graus de liberdade e propoem que a formação de pescoço seja um provável grau de liberdade que afete o comportamento da secção de choque de fusão.



Em 1985, Aguiar, Canto e Donangelo<sup>[49]</sup> consideram o efeito da formação de pescoço para a reação  $^{58}\text{Ni} + ^{58}\text{Ni}$ . Eles usam a fórmula de Hill-Wheeler e a aproximação W.K.B. para calcular os coeficientes de transmissão. Seus resultados mostram um aumento na secção de choque de fusão, mas não explicam completamente os resultados experimentais. Eles sugerem um tratamento completo bi-dimensional.

Em 1987, Iwamoto e Harada<sup>[50]</sup> formularam um modelo semi-clássico simples para reações de fusão abaixo da barreira baseado na formação de pescoço. A idéia é que a barreira de fusão é abaixada pela formação do pescoço entre os dois núcleos, e que a quantidade do "abaixamento" calculada pelo modelo de Krappe é suficiente para explicar os dados experimentais. Para os núcleos mais leves como  $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$  eles conseguem resultados razoáveis, mas para núcleos maiores, os resultados não são bons. Esse modelo contém vários parâmetros fenomenológicos que não são bem entendidos.

Como já foi dito, um novo empurrão para o problema foi dado quando os resultados experimentais para os sistemas Ni + Ni foram publicados por Beckerman em 1981-82<sup>[24,29]</sup>. Em 1986, J. Thomas e companheiros<sup>[51]</sup> mediram a secção de choque para o  $^{16,17,18}\text{O}$  com o  $^{16}\text{O}$ . Eles usaram modelos uni e bi-dimensionais, e concluíram ser necessário o uso de modelos multidimensionais para descrever corretamente o fenômeno.

Os cálculos usando canais acoplados feitos recentemente, em geral utilizam algumas aproximações e suposições; uma delas é a aproximação chamada de "sudden limit", isto é, as frequências dos modos incluídos na descrição são assumidas ser muito mais baixas que a frequência associada com a passagem através da barreira, de modo que o núcleo tenha, digamos, formas congeladas durante o processo. A suposição é válida para estados rotacionais baixo ligados, visto que é parcialmente verdadeira quando estão presentes estados vibracionais típicos de 1-2 MeV de energia de excitação. Aquelas energias tem, de fato, que ser comparadas com as frequências associadas com as barreiras coulombianas de 3-4 MeV, para uma grande quantidade de sistemas, como apontado por Krappe et al<sup>[48]</sup>. Isto foi considerado por H. Esbensen, J.Q. Wu e G.F. Bertsch<sup>[52]</sup> em 1983, que levaram em conta o efeito de deformações dinâmicas associadas com a excitação nuclear de vibrações superficiais coletivas na secção de choque de fusão. Eles utilizaram a aproximação "sudden" e observaram que os resultados são bastante razoáveis comparados com cálculos unidimensionais, isto é, mostraram um grande aumento nas secções de choque. Eles sugeriram também que ressonâncias gigantes podem dar uma contribuição significativa para o aumento da secção de choque de fusão.

Em 1986, Stafanini, Pengo e etc<sup>[53]</sup> mediram a secção de choque de fusão para 12 sistemas, isto é,  $^{28,30}\text{Si} + ^{58,62,64}\text{Ni}$  e



$^{32,34,36}\text{Si} + ^{58,64}\text{Ni}$ . Para comparar os resultados, eles usaram o potencial de proximidade e a aproximação "sudden" em seus cálculos teóricos. Incluíram as excitações inelásticas mais baixas  $2^+$  e  $3^-$  de cada núcleo sem nenhum acoplamento entre elas, considerando também a transferência de 2-neutrons. Foi encontrada uma concordância razoável para muitos sistemas, embora se verifiquem superestimativas para vários sistemas quando a transferência de 2 nucleons é incluída.

Alguns dos trabalhos experimentais recentes são, por exemplo, o do grupo de Di Gregorio e R.G. Stockstad (1986) que mediu a fusão do  $^{16}\text{O} + ^{144}\text{Sm}^{[54]}$ . J.R. Leigh e colaboradores<sup>[55]</sup> mediram a fusão do  $^{16}\text{O} + ^{176,180}\text{Hf}$  e  $^{16}\text{O} + ^{182,184,186}\text{W}$  em 1988. Eles consideram um modelo teórico que leva em conta deformações de quadrupolo  $\beta_2$ , que falha para este tratamento sistemático e estima os valores da secção de choque de fusão abaixo da barreira dramaticamente abaixo dos valores experimentais para estas reações. Os núcleos de Hf e W tem  $\beta_4$  negativo grande (deformação de hexadecapolo) e eles acreditam que considerar tais deformações pode levar a um aumento na secção de choque nesses casos.

No trabalho teórico de Esbensen e Landowne<sup>[56]</sup> (1987) supõe-se que, o momento de hexadecapolo tem um papel importante em certas reações. Nele se considera somente excitações inelásticas fortes, sem a necessidade de incluir canais de transferência.

Em 1990, A.M. Stefanini, H. Esbensen, S. Landowne e

outros<sup>[57]</sup> mediram o espalhamento elástico para o  $^{58}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$  à energias em torno da barreira coulombiana e obtiveram a secção de choque de fusão usando novas técnicas de coincidência cinemática. A comparação teórica feita por eles é baseada no trabalho da ref. [56], no trabalho de H. Esbensen e F. Videback em 1989<sup>[58]</sup>, e no artigo de H. Esbensen e Landowne de 1989<sup>[59]</sup>.

Na referência [58] são consideradas as reações com  $^{16}\text{O} + ^{58}\text{Ni}$ ,  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$ . É feito um tratamento de canais acoplados e se incluem as excitações inelásticas  $2^+$  e  $3^-$  de ambos os núcleos alvo e projétil, sem incluir canais de transferência de partícula. Na referência [59], se considera a reação  $^{58}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$ , incluindo a transferência de um neutrom.

Os cálculos para a reação  $^{58}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$  da referência [57] diferem dos anteriores da ref. [59] pelo uso de parâmetros de deformação maiores. Esta mudança não foi introduzida para ajustar seus dados de espalhamento elástico. Eles se basearam numa análise recente dos dados de espalhamento elástico e inelástico do  $^{16}\text{O} + ^{58,64}\text{Ni}$  feita na referência [58] depois dos cálculos do  $^{16}\text{O} + ^{64}\text{Ni}$  da referência [59]. Foi encontrado que os parâmetros de deformação inelástica tinham que ser aumentados um pouco para concordar com as medidas das reações  $^{16}\text{O} + ^{58,64}\text{Ni}$ . Os cálculos das referências [56] e [59] para os sistemas  $^{58}\text{Ni} + ^{58,64}\text{Ni}$  e  $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$  foram repetidos com as novas deformações e uma melhora foi obtida para a secção de choque de fusão à baixas energias.

Novas experiências foram feitas por Tighe, Esbensen, Landowne e outros em 1990<sup>[60]</sup> para as reações  $^{32}\text{S} + ^{58,64}\text{Ni}$  e  $^{34}\text{S} + ^{64}\text{Ni}$ . Suas medidas também diferem das anteriores encontradas na literatura e os cálculos teóricos feitos no mesmo trabalho considerando os estados mais baixos  $3^-$  e  $2^+$  concordam bem com os resultados experimentais. Eles também incluem a transferência de um neutron. Eles encontraram algumas dificuldades nos detalhes dos resultados do modelo, que tende a mostrar pouca secção de choque de fusão para o  $^{32}\text{S} + \text{Ni}$  a baixas energias, muito pouca transferência de um neutron para  $^{32}\text{S} + ^{64}\text{Ni}$  a altas energias e superestimativas para prever dados de fusão as mais altas energias medidas nos três sistemas.

Outro trabalho deste mesmo tipo é o de Landowne, Pieper e Videbaeck (1987)<sup>[61]</sup> que considera as excitações  $2^+$  e  $3^-$  e a transferência de 1 e 2 nucleons. Observa-se a tendência de superestimar a secção de choque de fusão à altas energias.

Outras tentativas foram feitas teoricamente para ajustar os dados experimentais como o modelo de Takigawa e Bertsch (1984)<sup>[62]</sup> que usa métodos semiclássicos ("path integral method") para facilitar os cálculos ou o modelo de T. Udagawa, Kim e Tamura (1985)<sup>[63]</sup> baseado na descrição de reações diretas, usando o potencial óptico; ou ainda o modelo usado por Q. Haider e F.B. Malik (1986)<sup>[64]</sup> que calcula a penetração de barreira baseado na matriz R. Ele faz um cálculo sistemático para várias reações, mas

usa muitos parâmetros ajustáveis. Mais recentemente, A.K. Mohanty e outros (1990)<sup>[65]</sup>, usam barreiras dependentes da energia, para tentar mostrar que ainda se pode considerar cálculos unidimensionais, sem muito sucesso.

O que podemos verificar até agora é que a inclusão das excitações inelásticas  $2^+$  e  $3^-$  traz uma contribuição significativa para o aumento da secção de choque de fusão à baixas energias, para sistemas mais massivos. Mas, somente esta inclusão não ajusta exatamente os dados experimentais. Tem se tentado incluir a transferência de 1 e 2 nucleons para melhorar os resultados. Em alguns casos esta inclusão não é necessária, em outros, considerar canais de transferência de um neutron descreve razoavelmente bem os dados. Nota-se uma tendência em alguns casos de superestimar os valores da secção de choque para as energias mais altas, principalmente quando se inclui a transferência de 2 nucleons. Como não existem dados experimentais para a maioria das reações de transferência de 1 e 2 nucleons, algumas tentativas de aproximações e estimativas tem sido feitas nos cálculos teóricos.



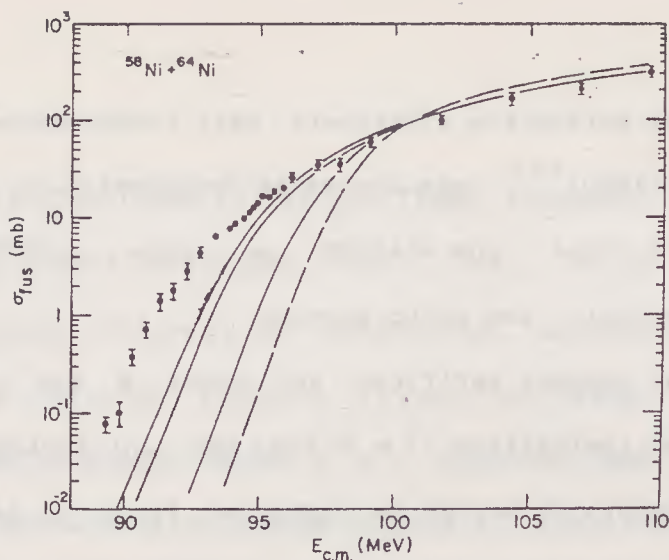


FIGURA I.4: Cálculos de canais acoplados das seções de choque de fusão comparados com os dados da ref. 29. A curva tracejada mais baixa mostra o limite onde não existe o acoplamento. As três curvas sólidas mostram, da direita para a esquerda, o resultado de incluir somente os acoplamentos de transferência de um nêutron, de excitações vibracionais somente, e os efeitos combinados de ambos os processos. Figura da referência [56]

Muitas questões no campo dos fenômenos da fusão abaixo da barreira ainda permanecem sem resposta, e o entendimento total deste fenômeno ainda não é completo. Muitas pesquisas, experimentais (medidas detalhadas) e teóricas, ainda precisam ser feitas para que se possa descrever completamente o processo.

A nossa tentativa, como já dissemos, é incluir um acoplamento diferente daqueles existentes na literatura. A idéia é calcular o efeito deste acoplamento nos coeficientes de transmissão e portanto na seção de choque de fusão.



No capítulo 2, consideramos a fusão do  $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$  usando o cálculo de canais acoplados que, como se sabe, é a melhor maneira de estudar o problema.

O acoplamento entre os graus de liberdade  $x$  e  $y$  (que serão explicados no cap. 2) considerado por nós tem a forma de  $1/2 (y + g(x))^2$ . Ele tem que ter a forma de um oscilador harmônico para reproduzir as vibrações de quadrupolo e octopolo. Para termos o acoplamento entre os canais, deve aparecer o produto cruzado. Na literatura já foram considerados acoplamentos do tipo  $f(y)x$ ,  $f(y)x^2$ ,  $1/2 Cy^2 + \alpha f(y) g(x)$ ,  $1/2 C (1 + \alpha f(x))y^2$ , por exemplo. Incluímos em nossos cálculos as excitações inelásticas  $2^+$  e  $3^-$  e ressonâncias gigantes, como proposto por Esbensen e companheiros na ref. [52].

Por simplicidade consideramos uma barreira parabólica ajustada a um potencial realístico para ions pesados, no topo da barreira. Os resultados e conclusões podem ser vistos no Cap. 2.

À seguir, gostaríamos de dar uma idéia sobre as magnitudes de alguns parâmetros que serão usados mais tarde.

Um potencial realístico entre ions pesados que pode ser considerado é o potencial de Christensen-Winther<sup>[66]</sup>, para as reações de fissão e fusão. É um potencial fenomenológico, ajustado a partir de dados do espalhamento de ions pesados. Este potencial é dado por

$$U_N = - 50 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \exp \left[ - \frac{r - R_1 - R_2}{\alpha} \right] \quad (\text{MeV}) \quad (\text{I.1})$$

onde

$$R_1 = 1.233 A_1^{1/3} - 0.978 A_1^{-1/3} \quad (\text{fm}) \quad (\text{I.2})$$

e  $\alpha = 0.63 \text{ fm}$ .

Os índices 1 e 2 se referem aos dois núcleos envolvidos. Em nosso estudo sobre reações de fusão, por exemplo, escolhemos a barreira dada pelo potencial coulombiano mais este potencial nuclear da equação (I.1). No capítulo 2 daremos mais detalhes a este respeito. Nos cálculos relativos à emissão de núcleos mais pesados que a partícula alfa, ele também é utilizado (capítulo 3).

Considerando o potencial da equação (I.1) mais o potencial coulombiano, podemos encontrar os valores da altura da barreira  $V_B$  e o correspondente raio  $R_B$  para vários núcleos. Eles podem ser vistos nas Tabelas (I.1) e (I.2), respectivamente.

	$^{16}\text{O}$	$^{64}\text{Ni}$	$^{120}\text{Sn}$	$^{208}\text{Pb}$
$^{16}\text{O}$	10.401	31.010	50.570	75.655
$^{64}\text{Ni}$		94.403	155.670	235.334
$^{120}\text{Sn}$			258.199	392.540
$^{208}\text{Pb}$				599.990

TABELA I.1: Altura da barreira  $V_B$  usando potencial de Christensen-Winther mais o potencial coulombiano (em MeV)

	$^{16}\text{O}$	$^{64}\text{Ni}$	$^{120}\text{Sn}$	$^{208}\text{Pb}$
$^{16}\text{O}$	8.2	9.7	10.7	11.8
$^{64}\text{Ni}$		11.3	12.3	13.4
$^{120}\text{Sn}$			13.3	14.4
$^{208}\text{Pb}$				15.5

TABELA I.2:  $R_B$  usando potencial de Christensen - Winther + coulombiano (fm)

Podemos fazer algumas estimativas simples destes valores considerando a derivada do potencial no topo da barreira, isto é,

$$\frac{d}{dr} (V_N(r) + V_C(r)) = 0 \quad (\text{I.3})$$

com o potencial nuclear tendo a forma

$$V_N(r) = A e^{-r/\alpha} \quad (\text{I.4})$$

e o potencial coulombiano,

$$V_C(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (\text{I.4})$$

As derivadas para estes potenciais são

$$\frac{d}{dr} V_N(r) = -\frac{1}{\alpha} A e^{-r/\alpha} = -\frac{1}{\alpha} V_N(r) \quad (I.5)$$

e

$$\frac{d}{dr} V_C(r) = -\frac{1}{r} V_C(r) . \quad (I.6)$$

Em  $r = R_B$ , a equação (I.3) é dada por

$$-\frac{1}{\alpha} V_N(R_B) - \frac{1}{R_B} V_C(R_B) = 0 , \quad (I.7)$$

ou

$$V_N(R_B) = -\frac{\alpha}{R_B} V_C(R_B) . \quad (I.8)$$

Portanto,  $V_B$  é dado por

$$V_B = V_C(R_B) + V_N(R_B) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_B} \left[ 1 - \frac{\alpha}{R_B} \right] . \quad (I.9)$$

Tipicamente,  $r \sim 12$  fm e  $\alpha \sim 0.6$  fm. Naquele ponto temos  $V_N(R_B) \ll V_C(R_B)$  e  $\alpha \ll R_B$ . Podemos estimar  $V_B$ , usando  $R_B \sim 1.5 [A_1^{1/3} + A_2^{1/3}]$ , mas os valores de  $V_B$  não serão bons. Estes valores de  $R_B$  podem ser vistos na Tabela (I.3) e podem ser comparados com aqueles encontrados na Tabela (I.2), calculados usando o potencial de Christensen - Winther (C-W) mais o potencial

coulombiano.

	$^{16}\text{O}$	$^{64}\text{Ni}$	$^{120}\text{Sn}$	$^{208}\text{Pb}$
$^{16}\text{O}$	7.552	9.768	11.174	12.662
$^{64}\text{Ni}$		11.983	13.389	14.877
$^{120}\text{Sn}$			14.774	16.273
$^{208}\text{Pb}$				17.743

TABELA I.3:  $R_B = 1.5 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$  fm

Usando os valores de  $R_B$  da Tabela (I.2) e a equação (I.9) encontramos os valores de  $V_B$  que estão na Tabela (I.4), que concordam muito bem com aqueles da Tabela (I.1)

	$^{16}\text{O}$	$^{64}\text{Ni}$	$^{120}\text{Sn}$	$^{208}\text{Pb}$
$^{16}\text{O}$	10.38	31.09	50.66	75.78
$^{64}\text{Ni}$		94.34	155.51	235.13
$^{120}\text{Sn}$			257.86	392.063
$^{208}\text{Pb}$				599.29

TABELA I.4:  $V_B$  (MeV), usando a eq. (I.9) e  $R_B$  do potencial de C - W + coulombiano ( $\alpha = 0.63$  fm)



Agora, a segunda derivada do potencial dá

$$\begin{aligned}
 V_B'' &= \left[ V_N''(r) + V_C''(r) \right]_{r=R_B} \\
 &= \left[ \frac{1}{\alpha^2} V_N(r) + \frac{2}{r^2} V_C(r) \right]_{r=R_B} \\
 &= - \frac{V_C}{\alpha R_B} \left( 1 - \frac{2\alpha}{R_B} \right) \quad . \quad (I.10)
 \end{aligned}$$

Nos cálculos do capítulo 2 fazemos uso realmente de um potencial de Eckart em vez dos potenciais de Christensen-Winther e o coulombiano. Nós fizemos isso por duas razões. Uma delas é que o potencial de Eckart tem uma forma analítica simples. A outra é que fazemos algumas comparações com outras ondas usando o potencial de Eckart. Para que o potencial fosse o mais realístico possível, ajustamos os parâmetros do potencial de Eckart, tal que coincida com o potencial de Christensen-Winther mais o coulombiano, tão bem quanto possível próximo ao topo da barreira.

No capítulo 2 introduzimos a energia  $\hbar\omega_0$  que caracteriza a curvatura do topo da barreira com  $\omega_0 = [V''(0)/\mu]^{1/2}$ , onde  $\mu$  é a massa reduzida e  $V''(0)$  é a segunda derivada no topo da barreira. Para obter  $\hbar\omega_0$  invertamos a parábola e obtemos um oscilador harmônico, com frequência  $\omega_0$ , que corresponde à frequência do topo da barreira. Para fazer este ajuste, notamos que para pequenos valores de  $x$ , o potencial de Eckart pode ser aproximado à uma

parábola, isto é,

$$V = \frac{V_0}{\cosh^2(x/a)} \approx V_0 / (1 + 1/2 x^2/a^2)^2 \quad (I.11)$$

$$\approx V_0 (1 - x^2/a^2) \quad \text{para } (x/a) \ll 1$$

No nosso caso  $\hbar\omega_0 = 2 V_0/\Gamma$  e  $\Gamma \left[ \frac{2\mu a^2 V_0}{\hbar^2} \right]$ . Nas Tabelas (I.5) e (I.6) são dados alguns, valores de  $\hbar\omega_0$  e  $\underline{a}$ , respectivamente, para vários núcleos.  $\hbar\omega_0$  tem um valor que é sempre em torno de 4 MeV. Naturalmente, este valor depende da escolha do parâmetro  $\underline{a}$  de "diffuseness" de superfície. Os nossos ajustes foram feitos graficamente, portanto, os valores de  $\underline{a}$  não são muito precisos. Podemos ver que os valores de  $\underline{a}$  também são aproximadamente constantes, em torno de 4 fm.

	$^{16}\text{O}$	$^{64}\text{Ni}$	$^{120}\text{Sn}$	$^{208}\text{Pb}$
$^{16}\text{O}$	3.97	4.05	4.10	5.01
$^{64}\text{Ni}$		5.2	4.29	5.55
$^{120}\text{Sn}$			4.72	4.66
$^{208}\text{Pb}$				5.34

TABELA I.5: Valores de  $\hbar\omega_0$  para vários núcleos (MeV)

Em nosso estudo da fusão do  $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$  usamos  $a = 3.0$  fm.

	$^{16}\text{O}$	$^{64}\text{Ni}$	$^{120}\text{Sn}$	$^{208}\text{Pb}$
$^{16}\text{O}$	4.2	4.1	4.2	4.1
$^{64}\text{Ni}$		3.0	4.1	3.9
$^{120}\text{Sn}$			4.0	3.8
$^{208}\text{Pb}$				4.1

TABELA I.6: Valores do parâmetro  $a$  para vários núcleos (em fm)

Os valores de  $V''_B$  foram obtidos ajustando o potencial de Eckart ao potencial de C - W no topo da barreira.

Podemos estimar o valor do parâmetro  $a$ , usando a equação (I.11). Tomando a segunda derivada,

$$V \approx V_0 (1 - x^2/a^2) \rightarrow V'' = -2 V_0/a^2, \quad (x/a) \ll 1 \quad (\text{I.12})$$

e considerando que, no topo da barreira  $V_C \approx V_0$  e  $(a/R_B) \ll 1$ ,

$$\frac{a^2}{2} \sim \alpha R_B$$

ou

$$a = \sqrt{2\alpha R_B} \approx 3.4 \text{ fm} \quad (\text{I.13})$$

para valores típicos de  $\alpha \sim 0.6$  fm e  $R_p \sim 10$  fm. Este valor estimativo concorda com os valores da Tabela (I.6).

No capítulo 2 consideramos algumas energias de excitação  $\hbar\omega$  que são as energias de um modo vibracional coletivo. Eles seriam um estado de quadrupolo  $2^+$ , um estado de octopolo  $3^-$  ou uma ressonância gigante E2. Na tabela (I.7) damos alguns valores experimentais da energia de excitação  $\hbar\omega$  para os estados mais baixos ligados de quadrupolo e octopolo para vários núcleos. Também incluímos os valores para as ressonâncias gigantes. Estes valores são tirados das referências [67] e [68].

Consideramos para o caso do  $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$ ,  $\hbar\omega$  como 1 MeV, 2 MeV e 4 MeV.

	$^{16}\text{O}$	$^{64}\text{Ni}$	$^{120}\text{Sn}$	$^{208}\text{Pb}$
$2^+$	6.919	1.348	1.18	4.085
$3^-$	6.130	3.550	-	2.614
Ressonância gigante E2	$\sim 22$	$\sim 16$	$13.03 \pm 03$	$10.9 \pm 03$

TABELA I.7: Valores das energias dos estados mais baixos ligados  $2^+$  e  $3^-$  e ressonâncias gigantes E2 (MeV).  
Ref. [67] e [68]

O último parâmetro que gostaríamos de discutir é o "strength"

do acoplamento da variável de tunelamento para uma coordenada de deformação nuclear. Este é determinado pela variação da altura da barreira com a deformação.

A altura da barreira é dada em primeira aproximação pela equação (I.9), onde  $R_B$  é a separação entre os centros do núcleo na posição da barreira. Se os núcleos são deformados então a posição da barreira muda isto é,  $R_B \rightarrow R_B + \Delta R_B$  e

$$\Delta V_B \sim - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_B^2} \Delta R_B = - V_B \left( \frac{\Delta R_B}{R_B} \right) \quad (I.14)$$

Vamos considerar inicialmente uma gota esférica de raio  $R_0$ . Quando distorcida, sua superfície é convenientemente parametrizada pela expressão

$$R = R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\Theta, \phi) \right] \quad (I.15)$$

onde  $\Theta$  e  $\phi$  são os ângulos polares em relação a um eixo fixo arbitrário e  $\alpha_{\lambda\mu}$  são os parâmetros de deformação. A variação em  $R$  é dada por

$$\Delta R = R - R_0 = R_0 \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\Theta, \phi) \quad (I.16)$$

e expandindo a energia potencial, em primeira ordem, temos



$$V(R + \Delta R) = V(R_0) + \Delta R \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{R = R_0} \quad (I.17)$$

a variação do potencial será dada por

$$\Delta V = - R_0 \frac{\partial V}{\partial r} \sum_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \alpha_{\lambda\mu} \quad (I.18)$$

Considerando agora que os dois núcleos em  $R = R_B$ , a variação da altura da barreira, quando eles são deformados é

$$\begin{aligned} \Delta V_B &= \Delta R_B \frac{\partial V}{\partial R} = - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_B} \left( \frac{\Delta R_B}{R_B} \right) = - V_B \left( \frac{\Delta R_B}{R_B} \right) \\ &= - V_B (1/2\beta) \quad , \end{aligned} \quad (I.19)$$

Considerando que o potencial  $V + \Delta V$  seja obtido aproximadamente por uma deformação do potencial estático médio e que  $\sum_{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 = \beta^2$ , onde  $\beta$  é o parâmetro de deformação que tem um valor típico em torno de 0.1, temos a variação  $V_B$  em torno de  $0.05 V_B$ .

Em nossos cálculos para a fusão do  $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$ , consideramos  $\Delta V_B = 4 \text{ MeV}$  onde  $V_B \sim 94 \text{ MeV}$ .

# CAPÍTULO 1

## 1. Aspectos Básicos

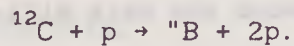
Neste capítulo damos uma pequena introdução a alguns conceitos importantes usados através deste trabalho. Inicialmente discutimos algumas idéias básicas para a descrição de reações nucleares e a seguir o problema de tunelamento através de uma barreira de potencial.

### **1.a. Alguns Conceitos Básicos na Descrição de Reações Nucleares**

A descrição do espalhamento de um nucleon por um núcleo ocorre quando um nucleon incidente colide primeiramente com um nucleon do núcleo alvo perdendo parte de sua energia cinética nesta colisão. Se o nucleon incidente escapa imediatamente depois disso, três casos podem ocorrer:

1. O núcleo alvo é simplesmente deixado no seu estado fundamental ou em um estado excitado.
2. O nucleon atingido do alvo tem energia suficiente e abandona o núcleo podendo ligar-se a outras partículas no

estado final, um processo chamado de reação de "knock-out". O núcleo residual, em geral fica em um estado excitado. Um exemplo é a reação (p, 2p), onde prótons de energia entre 50 e 400 MeV são usados para bombardear, por exemplo, o  $^{12}\text{C}$ , produzindo a reação.



Aqui a partícula transferida não forma um estado ligado com o potencial.

3. Reações do tipo A(a,b)B em que a partícula a é incidente sobre o núcleo A e a partícula b é emitida deixando um núcleo residual B. Elas são de dois tipos, dependendo se a é maior ou menor que b. Se a é maior então ela se "quebra" e a partícula x ( $a \rightarrow b + x$ ) é adicionada à A para formar o núcleo B; esta é chamada de reação de "stripping". Se a é menor que b, é chamada de reação de "pick-up".

Os processos onde ocorre a transferência de uma ou mais partículas entre o projétil e o alvo são chamadas de reações de transferência.

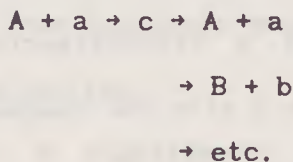
Os processos descritos acima são chamados de "reações diretas".

Reações de transferência em que a e b são partículas leves

tem sido muito estudadas e geralmente é possível entender estes processos com razoável detalhe. As mesmas teorias podem ser, essencialmente, aplicadas à reações de transferência entre ions pesados, com a diferença prática importante, que várias aproximações matemáticas que são comumente feitas na análise de reações de ions leves, não são confiáveis para ions pesados. Em geral, reações de ions pesados são mais difíceis de analisar.

Se o nucleon incidente continua a colidir com os nucleons do núcleo, perdendo a cada colisão uma fração de sua energia, pode eventualmente ser capturado pelo núcleo alvo e dividir sua energia cinética inicial com muitos nucleons do alvo. Nesta situação dizemos que um "núcleo composto" de longa vida se formou. Depois de um certo tempo, devido a uma flutuação de energia ocasional do nucleon, ele pode escapar do núcleo, decaindo do sistema composto. Se a vida média é longa o suficiente, não haverá memória do modo de formação.

Uma reação de núcleo composto ocorre em dois estágios:



e a hipótese de independência acima implica na seguinte estrutura para as secções de choque

$$\sigma_{Aa \rightarrow Bb} \quad ; \quad \sigma_{Aa \rightarrow c} \quad ; \quad \frac{\Gamma_{c \rightarrow Bb}}{\Gamma}$$

onde  $\sigma_{Aa \rightarrow c}$  é a secção de choque para a formação do núcleo composto do canal inicial (Aa),  $\Gamma_{c \rightarrow Bb} / \Gamma$  é a probabilidade de decair do núcleo composto nos fragmentos (Bb) e é independente do canal inicial (Aa).  $\Gamma_{c \rightarrow Bb}$  é a chamada largura parcial para decair no canal (Bb) e  $\Gamma$  é a largura total

$$\Gamma = \sum_{\gamma}^{\text{abertos}} \Gamma_{c \rightarrow \gamma}$$

onde a soma se estende sobre todos os canais abertos.

As reações direta e composta consideradas acima são casos extremos. Uma reação pode ser a superposição de um modo direto e um modo composto. Em geral o modo composto é dominante à baixas energias, onde as reações diretas dão uma pequena contribuição. Quando a energia aumenta, o modo direto compete com, e eventualmente prevalece sobre o modo composto.

Reações nucleares podem ser produzidas também quando o projétil incidente é um outro núcleo em vez de um nucleon. Tais reações são usualmente chamadas de reações de ions pesados. Processos muito periféricos com grandes parâmetros de impacto onde o núcleo interage fracamente quando passa pelos outros são do tipo direto. Interações com pequenos parâmetros de impacto levam geralmente a fusão dos núcleos e a formação de um núcleo composto



altamente excitado que subsequentemente decai estatisticamente. A energia do núcleo composto é distribuída entre todos os nucleons até que toda memória da maneira como foi formado é perdida, exceto aquela requerida pelas leis de conservação.

No caso de colisões de ions pesados ocorrem processos que são intermediários entre as reações diretas e compostas. Estas são frequentemente chamadas de colisões profundamente inelásticas. Os núcleos se combinam para formar um sistema composto mas que dura somente por um curto tempo.

Reações de ions pesados são úteis particularmente para estudar os processos de transferência de partículas  $\alpha$ , que podem ser feitas em muitas maneiras diferentes. Estas reações fornecem informações valiosas da estrutura de cluster dos núcleos e ligam-se com processos familiares de decaimento alfa.

#### **1.b. Efeito Túnel através de uma Barreira de Potencial:**

##### **Sistemas Multidimensionais**

A descrição do efeito túnel multidimensional é um problema importante e fundamental em muitas áreas da física. Em física nuclear, alguns exemplos são: fusão a energias abaixo da barreira; fissão; a transferência de nucleons entre núcleos. Aqui, neste capítulo discutiremos algumas aproximações para o problema de

tunelamento em várias dimensões. Primeiramente consideramos o método WKB em uma dimensão. À seguir discutiremos o método de canais acoplados, para dois canais e para vários canais.

### 1.b.1 Penetração de Barreira usando o Método WKB em uma Dimensão

A penetração de uma partícula através de uma barreira pode ser calculada aproximadamente usando-se o método WKB (ou aproximação Wentzel-Kramers-Brillouin). O método é baseado na expansão da função de onda em potências de  $\hbar$ .

Uma barreira típica é mostrada na figura (1.1) abaixo.

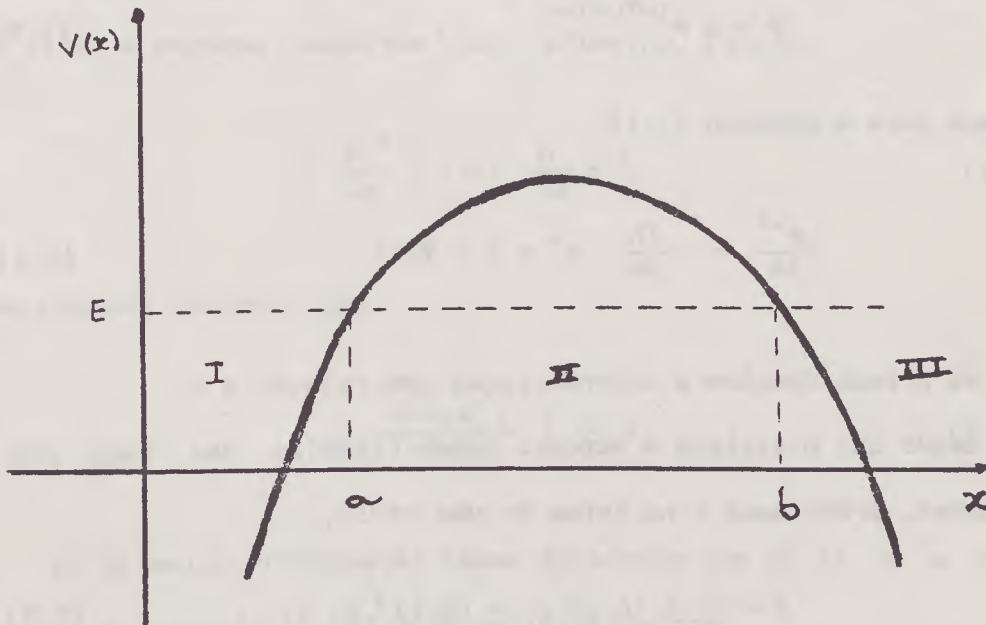


FIGURA 1.1: Barreira de potencial com "turning points" clássicos em  $x = a$  e  $x = b$

Para pequenos comprimentos de onda, como os encontrados em uma colisão de ions pesados, por exemplo, obtemos a solução WKB escrevendo a equação de Schrödinger como

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x) \psi = E\psi, \quad (1.1)$$

para uma partícula de massa  $m$ , e energia total  $E$ , penetrando através de uma barreira de potencial. Na equação acima, substituindo o número de onda local  $k(x) = \sqrt{(2m/\hbar^2) (E - V(x))}$ , obtemos

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [k(x)]^2\psi = 0. \quad (1.2)$$

Fazendo a seguinte substituição para a função de onda

$$\psi = A e^{(i/\hbar)\sigma(x)}, \quad (1.3)$$

obtemos para a equação (1.1)

$$\frac{\sigma'^2}{2m} - \frac{i\hbar}{2m} \sigma'' = E - V(x) \quad (1.4)$$

onde os primas denotam a diferenciação com relação a  $x$ .

Desde que o sistema é suposto quase clássico nas suas propriedades, procuramos  $\sigma$  na forma de uma série,

$$\sigma = \sigma_0 + (\hbar/1) \sigma_1 + (\hbar/1)^2 \sigma_2 + \dots \quad (1.5)$$

expandida em potências de  $\hbar$ . Em primeira aproximação, omitindo-se os termos em  $\hbar$  obtemos

$$\sigma'_0 = \left[ 2m (E - V(x)) \right]^{1/2} . \quad (1.6)$$

Encontramos então

$$\sigma_0 = \pm \int \left[ 2m (E - V(x)) \right]^{1/2} dx \quad (1.7)$$

onde o integrando é simplesmente o momento clássico  $p(x)$  da partícula, e  $\sigma_0$  ser escrito como função de  $k(x)$ , como

$$\sigma_0 = \pm \hbar \int^x k(x') dx' . \quad (1.8)$$

A aproximação só é válida se o segundo termo do lado esquerdo de (1.4) é pequeno comparado com o primeiro, isto é,

$$\left| \frac{\sigma'^2}{2m} \right| \gg \left| \frac{\hbar}{2m} \sigma'' \right| , \quad (1.9)$$

que podemos escrever como

$$\left| \frac{d(\hbar/\sigma')}{dx} \right| \ll 1 . \quad (1.10)$$

Em primeira aproximação temos de acordo com (1.8),  $\sigma = \hbar k$ , tal que a condição (1.10) pode ser escrita como

$$\left| \frac{d}{dx} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right) \right| \ll 1 \quad (1.11)$$

onde  $\lambda(x) = 2\pi/k$  é o comprimento de onda de de Broglie, expresso como uma função de  $x$  através de  $p(x)$ . Isto significa que a variação do comprimento de onda deve ser muito pequena.

Para os termos de primeira ordem em  $\hbar$  na equação (1.4) obtemos

$$\sigma_1' = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_0''}{\sigma_0'} = -\frac{p'}{2p} \quad (1.12)$$

Integrando, temos

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2} \int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2} \ln p \quad (1.13)$$

omitindo-se a constante de integração. As constantes arbitrárias de integração podem ser absorvidas no coeficiente  $A$  abaixo. Então, obtemos para a função de onda

$$\psi(x) = A p^{-1/2} \exp \left( \pm i \int^x k(x') dx' \right), \quad (1.14)$$

$$p = \hbar k,$$

para  $V(x) < E$ . E similarmente, na região onde  $V(x) > E$ ,

$$\psi(x) = B p^{-1/2} \exp \left( \pm i \int^x k(x') dx' \right) \quad (1.15)$$

$$p = \hbar k$$



sendo

$$k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V-E)} \quad (1.16)$$

Na região classicamente inacessível onde  $E < V(x)$ , a função  $p(x)$  é puramente imaginária, de modo que os expoentes são reais.

A forma geral da solução da equação de onda nesta região será

$$\psi(x) = B_1 p^{-1/2} \exp \left[ - \int_a^x k(x') dx' \right] + B_2 p^{-1/2} \exp \left[ \int_a^x k(x') dx' \right]. \quad (1.17)$$

O primeiro termo em (1.17) decresce exponencialmente com o aumento de  $x$ , mas o segundo termo cresce exponencialmente.

Na região onde  $E > V(x)$ , a chamada região classicamente permitida,  $k(x)$  é uma função real e  $\hbar k(x)$  é o momento da partícula expresso como função das coordenadas. Nesta região, podemos reescrever a função de onda (1.14), isto é,

$$\psi(x) = A_1 p^{-1/2} \exp \left[ - i \int_x^a k(x') dx' \right] + A_2 p^{-1/2} \exp \left[ i \int_x^a k(x') dx' \right] \quad (1.18)$$

como dependente de duas constantes,  $A$  e  $\alpha$ , da seguinte forma

$$\psi(x) = A p^{-1/2} \text{sen} \left[ \int_x^a k(x') dx' + \alpha \right]. \quad (1.19)$$

Podemos usar estas funções semi-clássicas somente se conhecermos a conexão entre as soluções oscilante e exponencial quando nos aproximamos dos "turning points". Num pequeno intervalo em torno dos "turning points" não podemos usar as aproximações semi-clássicas e devemos resolver a equação de Schrödinger unidimensional.

A conexão entre as soluções exponencial e oscilante é encontrada à partir da condição de continuidade quando mudamos da solução exponencial para a exata em  $x = a$  e da exata para a solução oscilante em  $x = b$ .

Outra maneira de se verificar a validade da solução WKB é comparar as magnitudes dos termos  $\sigma_0$  e  $\hbar \sigma_1$ , na série para  $\sigma$ . Desde que  $\sigma_0$  é uma função monotonicamente crescente de  $x$ , tanto quanto  $p(x)$ , não deve ir a zero, e espera-se que a razão  $\hbar \sigma_1/\sigma_0$  seja pequena se  $\hbar \sigma_1'/\sigma_0'$  é pequena. Então esperamos que (1.15) seja útil naquela parte do domínio de  $x$  onde

$$\left| \frac{\hbar \sigma_1'}{\sigma_0'} \right| = \left| \frac{k'}{2k^2} \right| \ll 1 \quad (1.20)$$

O comprimento de onda local de de Broglie  $\lambda$  é  $2\pi/k$ , então, (1.20) pode ser escrita como

$$\frac{\lambda}{4\pi} \left| \frac{dk}{dx} \right| \ll k \quad (1.21)$$

que significa que a variação fracional em  $k$  (ou no comprimento de onda) na distância  $\lambda/4\pi$  é pequena comparada à unidade. Então as soluções WKB são úteis quando a energia potencial varia muito lentamente tal que o momento da partícula é praticamente constante sobre muitos comprimentos de onda.

Nota-se que a condição (1.20) é violada próximo aos "turning points" do movimento clássico, onde  $V(x) = E$ ,  $k(x)$ ,  $\kappa(x)$  são zero, e o comprimento de onda é infinito. As soluções (1.17) e (1.19) são soluções assintóticas e são úteis se conhecermos as fórmulas de conexão através dos "turning points". É desta maneira que, por exemplo, aplicamos as condições de contorno e obtemos auto-valores de energia. A derivação de tais fórmulas de conexão, que consideraremos a seguir, é de interesse por essa razão. Contudo, devemos notar que muitas aplicações WKB não dependem criticamente da maneira precisa na qual as conexões são feitas.

Consideraremos agora o caso de uma barreira de potencial, como aquela mostrada na Figura 1.1. Em mecânica clássica, uma barreira de potencial é impenetrável para uma partícula. Em mecânica quântica, contudo, a partícula tem uma probabilidade diferente de zero de passar através da barreira. O fenômeno é chamado de efeito túnel. Se o campo  $V(x)$  satisfaz as condições semiclássicas, o coeficiente de transmissão para a barreira pode ser calculado na forma geral.

A função de onda na região I (veja Figura 1.1), que é a

composição da onda incidente e da refletida, tem a forma

$$\psi(x) = p^{-1/2} \left[ \exp \left( i \int_a^x k(x') dx' \right) + R \exp \left( -i \int_a^x k(x') dx' \right) \right] \quad \text{para } x < a \quad (1.22)$$

e na região III, a onda transmitida tem a forma

$$\psi(x) = p^{-1/2} t \exp \left( i \int_b^x k(x') dx' \right) \quad \text{para } x > b \quad (1.23)$$

Na região  $E > V(x)$ , a solução oscilante, como já foi visto em (1.19), pode ser escrita como

$$\psi(x) = A p^{-1/2} \operatorname{sen} \left( \int_x^a k(x') dx' + \alpha \right) \quad \text{p/ } x < a \quad (1.24)$$

e

$$\psi(x) = A' p^{-1/2} \operatorname{sen} \left( \int_b^x k(x') dx' + \alpha' \right) \quad \text{p/ } x > b \quad (1.25)$$

Na região interna,  $a < x < b$ , a função de onda é uma superposição de componentes exponenciais crescentes e decrescentes, como em (1.17),

$$\Psi(x) = p^{-1/2} \left[ B_1 \exp \left( - \int_a^x k(x') dx' \right) + B_2 \exp \left( \int_a^x k(x') dx' \right) \right] \quad \text{p/ } a < x < b \quad (1.26)$$

Para  $x > a$ , próximo do "turning point", consideramos a função de onda como exponencialmente decrescente, isto é,

$$\psi(x) = C p^{-1/2} \exp \left[ - \int_a^x k(x') dx' \right] \quad p/ x > a \quad (1.27)$$

e consequentemente para  $x < b$

$$\psi(x) = C p^{-1/2} \exp \left[ \int_x^b k(x') dx' \right] \quad p/ x < b . \quad (1.28)$$

Próximo aos "turning points" devemos resolver a equação de Schrödinger. Para isso, expandimos o potencial naquela região em série de potências e retemos os dois primeiros termos da expansão,

$$V(x) = V(a) + (x - a) V'(a) \quad (1.29)$$

com

$$V' = \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=a} \quad \text{e} \quad V(a) = E . \quad (1.30)$$

Substituindo (1.29) em (1.1), para  $x$  próximo de  $a$ , a equação de Schrödinger torna-se

$$\left[ - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V'(x - a) \right] \psi(x - a) = 0 \quad (1.31)$$

A solução desta equação pode ser expressa em termos da função de Airy<sup>[69]</sup>



$$\psi(x - a) = \phi(\xi) \quad (1.32)$$

onde

$$\xi = \left( \frac{2mV'}{\hbar^2} \right)^{1/3} (a - x) . \quad (1.33)$$

As formas assintóticas da função de Airy são

$$\psi(\xi) = 1/2 \xi^{-1/4} \exp \left[ -2/3 \xi^{3/2} \right] \quad \text{se } \xi \gg 1 \quad (1.34)$$

$$\psi(\xi) = |\xi|^{-1/4} \text{sen} \left[ 2/3 \xi^{3/2} + \pi/4 \right] \quad \text{se } \xi \ll 1 \quad (1.35)$$

Para  $x < a$ , temos que

$$k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V)} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V' (a - x)} \quad (1.36)$$

e

$$2/3 |\xi|^{3/2} = 2/3 \sqrt{\frac{2mV'}{\hbar^2}} (a - x)^{3/2} = \int_x^a k(y) dy ; \quad (1.37)$$

e para  $x > a$

$$k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V - E)} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V' (x - a)} \quad (1.38)$$

e

$$\frac{2}{3} |\xi|^{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2m V'}{\hbar^2}} (x - a)^{3/2} = \int_a^x k(y) dy . \quad (1.39)$$

As soluções nas vizinhanças de  $a$  podem ser escritas como

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{B}{\sqrt{p}} \operatorname{sen} \left[ \int_x^a k(y) dy + \pi/4 \right] & x < a & (1.40) \\ \frac{B}{\sqrt{p}} \exp \left[ -\int_a^x k(y) dy \right] & x > a & (1.41) \end{cases}$$

Há ainda uma outra fórmula de conexão vinculando uma função cosseno com a exponencial crescente, a saber,

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{B'}{\sqrt{p}} \cos \left[ \int_x^a k(y) dy + \frac{\pi}{4} \right] , & x < a & (1.42) \\ \frac{B'}{\sqrt{p}} \exp \left[ \int_a^x k(y) dy \right] , & x > a & (1.43) \end{cases}$$

Comparando (1.40) com (1.24) e (1.41) com (1.27), vemos que a função de onda da região I é contínua na região II, se

$$B = A \quad , \quad 2C_1 = A \quad e \quad \alpha = \pi/4 \quad . \quad (1.44)$$

Similarmente a solução em  $x = b$  será

$$\psi(x) = \begin{cases} D p^{-1/2} \operatorname{sen} \left[ \int_b^x k(x') dx' + \pi/4 \right] , & x > b & (1.45) \\ 1/2 D p^{-1/2} \exp \left[ - \int_x^b k(x') dx' \right] , & x < b & (1.46) \end{cases}$$

E, considerando as fórmulas do cosseno, temos analogamente

$$\left[ \begin{array}{l} \psi(x) = D' p^{-1/2} \exp \left[ \int_x^b k(x') dx' \right] , \quad x < b \quad (1.47) \\ \psi(x) = D' p^{-1/2} \cos \left[ \int_b^x k(x') dx' + \pi/4 \right] \quad x > b \quad (1.48) \end{array} \right.$$

Para calcular R, igualamos (1.22) a (1.40), isto é,

$$\begin{aligned} p^{-1/2} \exp \left[ i \int_a^x k(x') dx' \right] + p^{-1/2} R \exp \left[ -i \int_a^x k(x') dx' \right] \\ = B p^{-1/2} \operatorname{sen} \left[ \int_x^a k(y) dy + \pi/4 \right] \\ = - p^{-1/2} B 2^{-1} i \exp \left[ -i \int_a^x k(x') dx' + \pi/4 i \right] \\ + p^{-1/2} B 2^{-1} i \exp \left[ i \int_a^x k(x') dx' - \pi/4 i \right] \end{aligned}$$

portanto,

$$B = -2i \exp(i\pi/4)$$

e

(1.49)

$$R \approx -1 = -\exp(i\pi/2)$$

Para se obter o coeficiente de transmissão, comparamos a expressão (1.23) com a solução em  $x < b$  (1.47).

Considerando-se a expressão para  $x < b$ , temos

$$\psi(x) = D' p^{-1/2} \exp \left[ \int_x^b k(x') dx' \right] \quad p/x < b$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \psi(x) &= D' p^{-1/2} \exp \left[ \int_x^b k(x') dx' \right] \\ &= D' p^{-1/2} \exp \left[ - \int_b^a k(x') dx' + \int_x^a k(x') dx' \right] \\ &= D' p^{-1/2} \exp \left[ \int_a^b k(x') dx' - \int_a^x k(x') dx' \right] \end{aligned}$$

e que deve ser igual a função de onda para  $x > a$ , (1.41), isto é

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 1/2 B p^{-1/2} \exp \left[ - \int_a^x k(x') dx' \right] = \\ &= -i \exp(i\pi/4) \exp \left[ - \int_a^x k(x') dx' \right] \quad p/x > a \end{aligned}$$

Para que isto aconteça

$$D' = \exp \left[ - \int_a^x \kappa(x') dx' \right] (-1) \exp (i\pi/4) \quad (1.50)$$

Como  $D' \exp (i\pi/4) = \exp \left[ - \int_a^b \kappa(x') dx' \right]$ , comparando-se (1.48) com a expressão da função de onda em (1.23), temos que

$$P = |t|^2 = |D'|^2 = \exp \left[ - 2 \int_a^b \kappa(x') dx' \right] \quad (1.51)$$

Em (1.23) foi desprezado o termo

$$p^{-1/2} t \exp (i\pi/4) \operatorname{sen} \left( \int_b^x K(x') dx' + \pi/4 \right)$$

que leva a contribuições pequenas como será mostrado no exemplo adiante.

As funções de onda WKB e a fórmula de conexão tem sido muito usada para o cálculo aproximado dos coeficientes de transmissão e reflexão para o efeito tunel. As funções aproximadas são particularmente bem adaptadas ao caso de um potencial parabólico.

Deve-se contudo levar em conta o fato de que se obtemos a função de onda na esquerda de um "turning point" e através das fórmulas de conexão a função de onda à direita, considerar o sentido inverso pode não ser verdadeiro.

Um caso que pode ser facilmente resolvido é aquele em que consideramos uma barreira como aquela mostrada abaixo



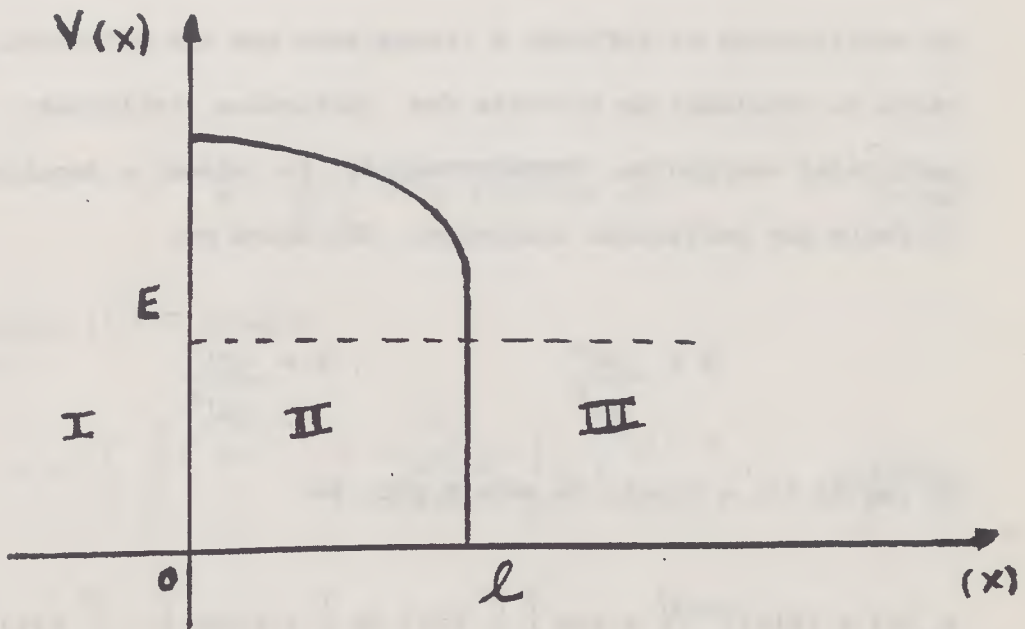


FIGURA 1.2

Neste caso, considerando-se somente as condições de continuidade da função e das derivadas em  $x = 0$  e  $x = l$ , obtêm-se facilmente os coeficientes de reflexão e transmissão. Seja a função de onda na região I, do mesmo tipo de (1.22), isto é,

$$\psi_I(x) = A e^{ik_0 x} + B e^{-ik_0 x} \quad (1.52)$$

Na região III, a função de onda tem a forma

$$\psi_{\text{III}}(x) = C e^{ik_0 x} \quad (1.53)$$

Os coeficientes de reflexão e transmissão que são definidos como a razão de densidade de corrente das partículas refletidas e das partículas emergentes, respectivamente, em relação a densidade de corrente das partículas incidentes, são dados por

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}, \quad P = \frac{|C|^2}{|A|^2} \quad (1.54)$$

Na região II, a função de onda é dada por

$$\psi_{\text{II}}(x) = [k(x)]^{-1/2} \left\{ \alpha \exp \left[ \int_0^x k(y) dy \right] + \beta \exp \left[ - \int_0^x k(y) dy \right] \right\} \quad (1.55)$$

Usando a condição que  $\psi$  e  $d\psi/dx$  sejam contínuas em  $x = 0$  e  $x = l$ , (Ver Figura 1.2) obtemos quatro relações para os 5 coeficientes,  $A, B, C, \alpha, \beta$ . Em  $x = 0$

$$\begin{cases} \sqrt{k(0)} (A + B) = \alpha + \beta \\ ik_0 (A - B) = \sqrt{k(0)} (\alpha - \beta) \end{cases} \quad (1.56)$$

em  $x = l$

$$\begin{cases} \alpha e^{\gamma} + \beta e^{-\gamma} = C \sqrt{k(l)} e^{ik_0 l} \\ \sqrt{k(l)} [\alpha e^{\gamma} - \beta e^{-\gamma}] = ik_0 C e^{ik_0 l} \end{cases} \quad (1.57)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_0^l \sqrt{2m(V(x)-E)} dx \quad (1.58)$$

Da equação (1.57) obtemos

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{k(l)} + \frac{ik_0}{\sqrt{k(l)}} \right] C e^{ik_0 l - \gamma} \quad (1.59)$$

e

$$\beta = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{k(l)} - \frac{ik_0}{\sqrt{k(l)}} \right] C e^{ik_0 l + \gamma} \quad (1.60)$$

Como a aproximação semiclássica é aplicável somente para barreiras suficientemente largas quando  $\gamma \gg 1$ , temos  $\alpha \ll \beta$ , como tinha sido mencionado abaixo da expressão (1.51). Podemos desprezar  $\alpha$  quando calculamos  $C/A$  e então encontrar para o coeficiente de transmissão

$$P = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{16 e^{-2\gamma}}{\left[ \frac{k(\ell)}{k(0)} + \frac{k(\ell) k(0)}{k_0^2} - \frac{k_0^2}{k(\ell) k(0)} - \frac{k(0)}{k(\ell)} \right]}$$

$$\approx \exp \left[ -2/\hbar \int_0^\ell [2m (V(x) - E)]^{1/2} dx \right] \quad (1.61)$$

Se  $V(x < 0) = 0$  e  $V(x > \ell) = V_1 \neq 0$ ,

$$\psi_{II} = C e^{ik_2 x}, \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \left[ 2m (E - V_1) \right]^{1/2}, \quad k_0 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

(1.62)

a fórmula do coeficiente de transmissão é alterada para

$$P = \frac{k_2}{k_0} \left| \frac{C}{A} \right|^2 \quad (1.63)$$

e obtemos para  $P$ , considerando-se barreiras largas, a mesma expressão anterior (1.61). Esta expressão também é válida para o caso da barreira na forma mais geral, como já foi visto. O coeficiente de reflexão é obtido da relação

$$P + R = 1 \quad (1.64)$$

isto é, a densidade de corrente de partículas incidentes deve ser igual a soma das densidades de corrente das partículas refletidas e emergentes.

A fórmula (1.51) para o coeficiente de transmissão é válida se a energia incidente está abaixo do topo da barreira. Há uma outra fórmula mais precisa que é válida em ambos os casos, acima e abaixo da barreira<sup>[70]</sup>, a saber,

$$P = \left[ 1 + \exp \left( 2 \int_a^b \kappa(x) dx \right) \right]^{-1} \quad (1.65)$$

Esta fórmula é razoavelmente correta na aproximação W.K.B., mas a maneira de Kemble<sup>[70]</sup> obtê-la não é satisfatória. A fórmula acima pode ser usada também quando a energia cinética da partícula incidente está bem acima do topo da barreira, mas neste caso, o termo 1 não é somente muito pequeno quando comparado à contribuição exponencial, mas em geral é insignificante. Um caso especial é o da barreira parabólica, em que a fórmula é exata. Pode-se considerar que a barreira é um oscilador invertido, e obtem-se

$$2 \int_a^b \kappa(x) dx = 2\pi (V_B - E)/\hbar\omega_B \quad (1.66)$$

onde  $V_B$  é a altura da barreira. Esta é conhecida como a fórmula de Hill-Wheeler<sup>[11]</sup>, isto é,



$$P = \left\{ 1 + \exp \left[ \frac{2\pi}{\hbar w_B} (V_B - E) \right] \right\}^{-1} \quad (1.67)$$

Quando  $E = V_B$ ,  $\int k(x) dx = 0$  e  $P = 1/2$ . Para

$$\int k(x) dx \gg 1, \quad E \ll V_B$$

temos

$$P = \frac{1}{1+e^{2Q}} = \frac{1}{e^{2Q}} = e^{-2Q}$$

que é a expressão (1.51) anterior, onde  $Q = \int_a^b k(x) dx$ . Considerando-se a expressão de Kemble para  $P$ , obtemos para o coeficiente de reflexão

$$|R|^2 = 1 - P = 1 - \frac{1}{1 + e^{2Q}} = \frac{1}{1 + e^{-2Q}} \quad (1.68)$$

Landau e Lifshitz<sup>[71]</sup> obtêm os mesmos resultados que Kemble<sup>[70]</sup> baseados em estudos de continuação analítica.

O problema de calcular o coeficiente de reflexão para o caso em que a energia cinética da partícula incidente está acima do topo da barreira de potencial tem sido muito discutido recentemente na literatura. É um problema bastante vasto, e não entraremos em detalhes aqui. As fórmulas obtidas por Kemble são derivadas por N. Fröman e P.O. Fröman na referência [72].

### 1.b.2 O Método de Canais Acoplados

Consideraremos agora os efeitos dos graus de liberdade intrínsecos no tunelamento quântico de uma variável coletiva pelo método de canais acoplados. Iniciaremos com o usual formalismo de canais acoplados para os processos de reações diretas como é dado, por exemplo, por Austern<sup>[73]</sup>. Consideramos um hamiltoniano da forma,

$$H = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V_0(r) + H_I(r, \xi) \quad (1.69)$$

onde

$$H_I(r, \xi) = H_0(\xi) + V(r, \xi) \quad (1.70)$$

sendo  $H_0(\xi)$  o hamiltoniano para os graus de liberdade intrínsecos,  $V_0(r)$  é a energia de interação que é modificada pelo acoplamento ao grau de liberdade intrínseco  $\xi$  e  $V(r, \xi)$  representa o acoplamento.

A função de onda total pode ser expandida como

$$\psi(r, \xi) = \sum_{\beta} \chi_{\beta}(r) \phi_{\beta}(\xi) \quad (1.71)$$

sendo  $H_0 \phi_{\beta}(\xi) = \epsilon_{\beta} \phi_{\beta}$ , isto é,  $\phi_{\beta}$  são os autoestados de  $H_0(\xi)$ . A função de onda  $\psi(r, \xi)$  satisfaz a equação de Schrödinger,

$$H\psi = E\psi \quad (1.72)$$

isto é,

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V_0(r) + H_0(\xi) + V(r, \xi) - E \right] \sum_{\beta'} \chi_{\beta'}(r) \phi_{\beta'}(\xi) = 0. \quad (1.73)$$

Multiplicando-se a equação (1.73) pela esquerda por  $\phi_{\beta}^*(\xi)$  e integrando-se sobre  $\xi$ , encontramos um conjunto de equações acopladas

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V_0(r) - E \right] \chi_{\beta}(r) + \sum_{\beta'} k_{\beta\beta'} \chi_{\beta'}(r) = 0, \quad (1.74)$$

onde

$$k_{\beta\beta'} = \int \phi_{\beta}^*(\xi) [H_0(\xi) + V(r, \xi)] \phi_{\beta'}(\xi) d\xi. \quad (1.75)$$

As soluções para as equações acopladas são geralmente obtidas requerendo-se a condição regular  $\chi_{\beta} \rightarrow 0$  na origem e combinando a forma assintótica de uma onda incidente de norma unitária no canal de entrada e ondas emergentes em todos os canais. Os coeficientes das ondas saindo, então, determinam as várias secções de choque de reação.

Em geral, as equações acopladas podem somente ser resolvidas numericamente mas há alguns casos especiais simples que podem ser resolvidos por métodos analíticos. Uma generalização direta do problema de penetração de barreira unidimensional é o caso em que o sistema tem dois níveis com um acoplamento entre eles. Este problema de dois canais foi primeiro considerado por Dasso e colaboradores<sup>[31]</sup>, e será considerado por nós à seguir, na próxima secção.

### 1.b.3 O Modelo de Dois Canais

Usaremos aqui as equações do modelo de canais acoplados encontrados na secção anterior, com algumas simplificações. Como já dissemos anteriormente, os cálculos usando o método de canais acoplados são muitos complicados e tomam muito tempo do computador. A idéia aqui é tentar simplificar os cálculos considerando problemas mais simples, nem sempre reais, com soluções analíticas. É portanto, útil estudar problemas simples que isolam as principais características físicas de tais cálculos.

Uma generalização direta do problema, como já foi dito, é considerar um sistema de dois canais e um acoplamento entre eles. Despreza-se a diferença de energia entre os canais, isto é,  $E_1 = E_2 = E$ . Em uma dimensão, as equações acopladas são:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi_1}{dx^2} - [E_1 - V_0(x)] \chi_1(x) = -F(x) \chi_2(x) \quad (1.76)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi_2}{dx^2} - [E_2 - V_0(x)] \chi_2(x) = -F(x) \chi_1(x) . \quad (1.77)$$

Aqui  $m$  é a massa que corresponde ao movimento na direção  $x$  na qual  $V_0(x)$  representa a barreira do potencial,  $E_\beta$  é a energia do canal e  $F(x)$  é a interação de acoplamento. A condição de contorno que estamos interessados tem uma onda "entrando" de amplitude igual a 1 no canal 1 incidente sobre a direita da barreira, ondas refletidas em ambos os canais para a direita e onda transmitidas em ambos os canais para a esquerda (IWBC - Incoming Wave Boundary Conditions). Isto é,

$$\chi_\beta = \begin{cases} \delta_{\beta,1} e^{-ik_\beta x} + R_\beta e^{ik_\beta x} & x \rightarrow +\infty \\ T_\beta e^{-ik_\beta x} & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (1.78)$$

onde  $\hbar^2 k_\beta^2 / 2m = E - \epsilon_\beta$ ,  $\epsilon_\beta$  são os outros valores de  $H_0$ , e portanto

$$E_\beta = E - \epsilon_\beta .$$

Fazendo



$$T = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

e  $E_1 = E_2 = E$ , podemos escrever

$$\begin{cases} [T + V_0(x) - E] \chi_1(x) = F(x) \chi_2(x) \\ [T + V_0(x) - E] \chi_2(x) = F(x) \chi_1(x) \end{cases} \quad (1.79)$$

Para desacoplar as equações (1.79) somamos e subtraímos as equações,

$$(T + V_0(x) - E) (\chi_1(x) \pm \chi_2(x)) = F(x) (\chi_1(x) \pm \chi_2(x)) \quad (1.80)$$

Introduzindo-se as funções

$$\chi_{\pm}(x) = \chi_1(x) \pm \chi_2(x) \quad (1.81)$$

teremos as equações desacopladas

$$[T + V_0(x) - E \mp F(x)] \chi_{\pm}(x) = 0 \quad (1.82)$$

As condições de contorno para as funções  $\chi_{\pm}$  são,

$$\chi_{\pm} = \begin{cases} e^{-ikx} + R_{\pm} e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \\ T_{\pm} e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (1.83)$$

O efeito observado na barreira para  $\chi_+$  será um abaixamento na barreira  $V_0(x)$ .

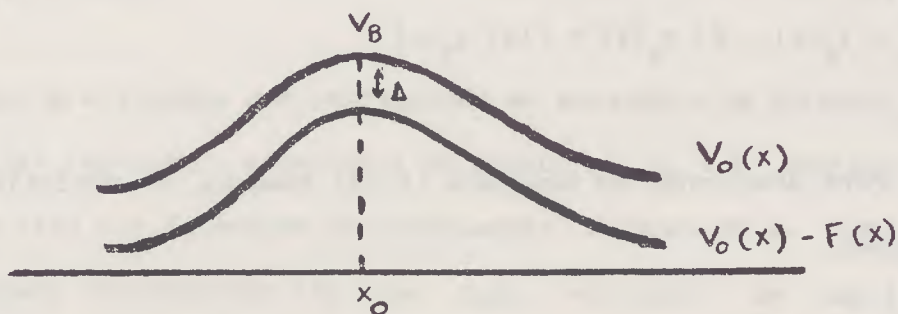


FIGURA 1.3

E para  $\chi_-$  observa-se um levantamento na barreira, isto é,  $\chi_{\pm}$  correspondem as barreiras de altura  $V_B \pm \Delta$ .

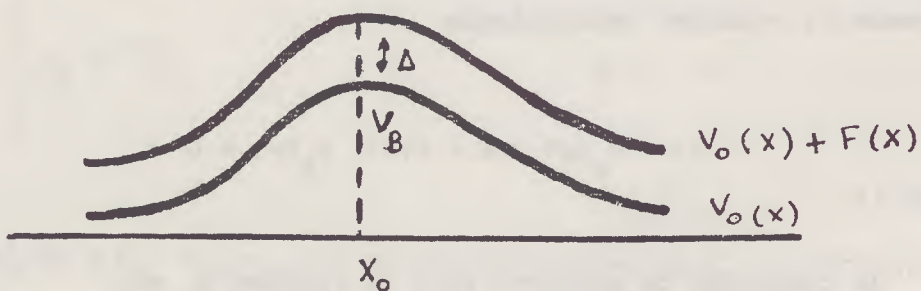


FIGURA 1.4

Encontra-se que o coeficiente de penetração  $P_1$  para uma onda incidente no alvo no estado fundamental  $\chi_1$  é,

$$P_1 = 1/2 [ P_+ + P_- ] \quad (1.84)$$

e que

$$P_2 = 1/2 [ P_+ - P_- ] \quad (1.85)$$

onde  $P_{\pm}$  são os coeficientes de penetração para as barreiras  $V_0(x) \pm F(x)$ . Isto mostra que a transmissão total é dada pela metade da transmissão para o potencial  $V_0(x) + F(x)$  e metade para aquele que corresponde a  $V_0(x) - F(x)$ .

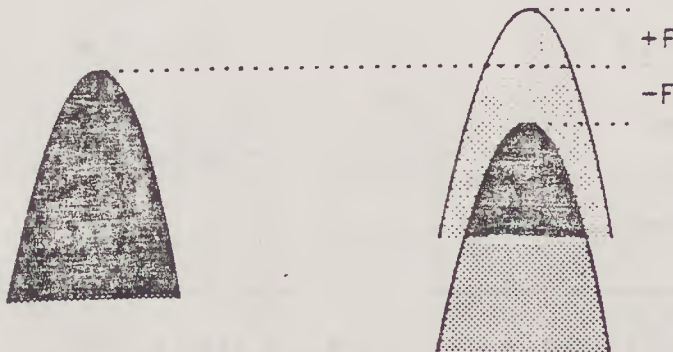


FIGURA 1.5: A barreira se divide em duas pelo acoplamento

Mais explicitamente, temos as condições de contorno para  $\chi_\beta$

$$\left[ \begin{array}{l} \chi_1 = e^{-ikx} - A_{11} e^{ikx} \quad x \longrightarrow + \infty \\ \chi_1 = B_{11} e^{ikx} \quad x \longrightarrow - \infty \end{array} \right. \quad (1.86)$$

e

$$\left[ \begin{array}{l} \chi_2 = A_{12} e^{ikx} \quad x \longrightarrow + \infty \\ \chi_2 = B_{12} e^{-ikx} \quad x \longrightarrow - \infty \end{array} \right. \quad (1.87)$$

As equações (1.79) são desacopladas introduzindo-se

$$\chi_\pm = \chi_1 \pm \chi_2$$

sendo

$$\left[ \begin{array}{l} \chi_\pm = e^{-ikx} + A_\pm e^{ikx} \quad x \longrightarrow + \infty \\ \chi_\pm = B_\pm e^{-ikx} \quad x \longrightarrow - \infty \end{array} \right. \quad (1.88)$$

então

$$A_{11} = 1/2 (A_+ + A_-) \quad ; \quad A_{12} = 1/2 (A_+ - A_-)$$

$$B_{11} = 1/2 (B_+ + B_-) \quad ; \quad B_{12} = 1/2 (B_+ - B_-)$$

A transmissão total será

$$\begin{aligned}
 P &= |B_{11}|^2 + |B_{12}|^2 = 1/4 [ |B_+ + B_-|^2 + |B_+ - B_-|^2 ] \\
 &= 1/2 |B_+|^2 + 1/2 |B_-|^2
 \end{aligned}
 \tag{1.89}$$

Portanto,

$$P = 1/2 [P_+ + P_-] .
 \tag{1.90}$$

O efeito no coeficiente de transmissão é ilustrado na figura abaixo<sup>[31]</sup>. O lado esquerdo da figura mostra  $P(E)$  sem o acoplamento e o lado direito mostra o efeito do acoplamento. Vemos que o efeito do acoplamento é aumentar o coeficiente de transmissão abaixo da barreira e reduzi-lo acima da barreira.

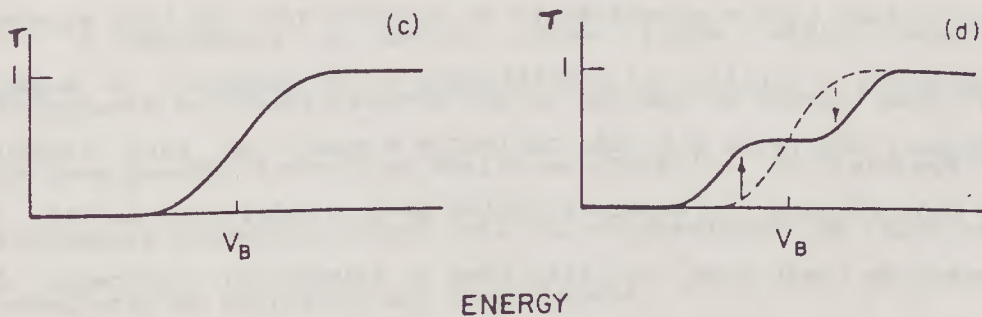


FIGURA 1.6: "Efeito do acoplamento no coeficiente de penetração"



## CAPÍTULO 2

### BARREIRA DE FUSÃO DO SISTEMA $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$

#### EM UM MODELO A DUAS DIMENSÕES

##### 2.a. Introdução

Neste capítulo consideramos um modelo de canais acoplados para reações de fusão onde uma condição de contorno de onda entrante permite o efeito de acoplamento na região da barreira à ser estudada. O problema de tunelamento através de uma barreira multidimensional é considerado em um modelo simples à duas dimensões. Os coeficientes de transmissão e reflexão são encontrados usando-se um cálculo quântico exato.

Fissão é um dos mais antigos problemas estudados em física nuclear e um processo bastante complicado. Os vários modelos desenvolvidos para o entendimento do processo não têm tido sucesso em descrever e explicar as propriedades deste fenômeno. O modelo usado para descrever a fissão nuclear é o modelo de gota líquida numa generalização do modelo coletivo para grandes deformações. O processo de fusão pode ser visto como o inverso do processo de fissão.

Por outro lado, um dos fenômenos mais fascinantes observados

em sistemas quânticos é a penetração de barreiras. Este efeito tem implicações em várias áreas da física. Supercondutores separados por uma camada de dióxido e sujeitos à uma diferença constante de potencial apresentam correntes alternadas associadas com o tunelamento de pares de elétrons. Taxas de tunelamento para decaimento alfa e para fissão espontânea estabelecem limites para as espécies nucleares encontradas na natureza. A transmutação de elementos induzida em colisões de dois núcleos à baixas energias de bombardeamento é controlada pela habilidade do sistema dinuclear de tunelar através de uma barreira gerada pela repulsão coulombiana mais a atração nuclear e a barreira centrífuga. Esta representação simples do processo de fusão vinha funcionando bem até que resultados experimentais trouxeram uma grande surpresa. Para energias abaixo da barreira coulombiana os modelos de penetração de barreira "standards" prediziam secções de choque que eram duas ou três ordens de magnitude menores que aquelas observadas experimentalmente<sup>[74,29]</sup>

A abundância de dados sobre fusão abaixo-da-barreira atualmente existentes mostra que as secções de choque para fusão de ions pesados à energias abaixo da barreira de interação são fortemente aumentadas comparadas com as predições de modelos de penetração de barreiras uni-dimensionais.

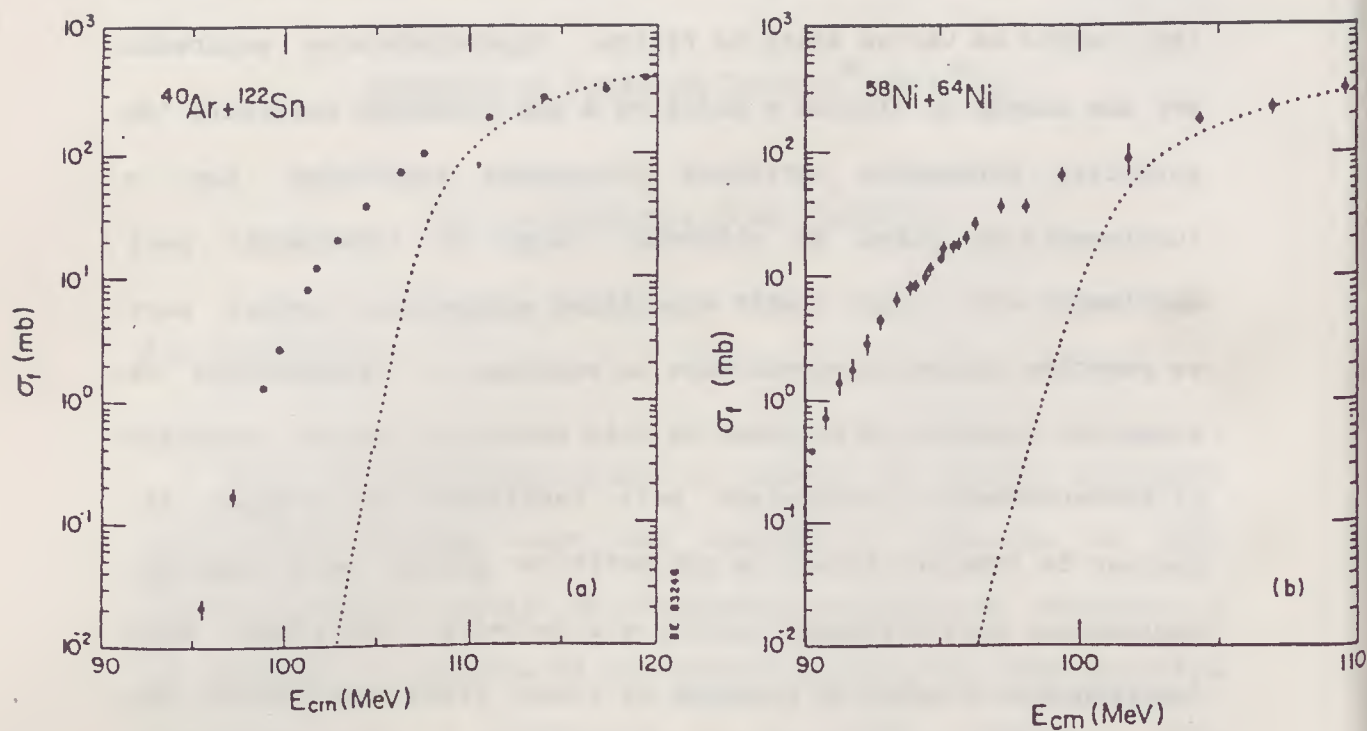


FIGURA 2.1: Secção de choque de fusão associada com as reações: (a)  $^{40}\text{Ar} + ^{122}\text{Sn}$  e (b)  $^{58}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$ . As linhas pontilhadas são os resultados dos cálculos de penetrabilidade. Os dados são das referências 74 e 29.

Esta não adequação dos modelos unidimensionais tem sido considerada como evidência de que as reações de fusão abaixo da barreira são fortemente influenciadas por outros graus de liberdade intrínsecos dos núcleos que estão colidindo.

A natureza dos graus de liberdade que são relevantes é ainda muito debatida. Vários candidatos têm sido propostos na

literatura. Entre eles estão as rotações de núcleos deformados<sup>[3]</sup>, vibrações superficiais<sup>[4]</sup>, formação de pescoço<sup>[48]</sup> e modos de transferência de nucleons<sup>[75]</sup>. Broglia e colaboradores<sup>[75,76]</sup> mostraram que reações de transferência de uma ou duas partículas com valor  $Q$  positivo aumentam a secção de choque de fusão se estão fortemente acoplados ao canal de entrada. Ebensen<sup>[4]</sup> tem explorado a idéia de movimentos das superfícies nucleares. Até recentemente a influência da deformação estática ou do movimento de ponto zero resultou de cálculos de penetração de barreira à uma dimensão após, feita a média nas orientações sobre uma seleção de distâncias intersuperficiais. Este procedimento médio adiabático despreza a energia de excitação interna<sup>[4,74]</sup> e, em geral leva à uma predição acima do aumento esperado<sup>[77]</sup>.

Alternativamente, dentro do modelo de canais acoplados é possível calcular probabilidades de penetração de barreiras multidimensionais que explicitamente levam em conta energias de excitação interna do projétil e do alvo.

O objetivo deste trabalho não é propor um novo candidato para um grau de liberdade, mas apresentar um modelo de cálculo usando um tipo de acoplamento diferente daqueles encontrados na literatura. Usando este acoplamento em um cálculo bi-dimensional, onde os graus de liberdade podem ser escolhidos como sendo qualquer um dos graus de liberdade relevantes, estudamos o efeito deste acoplamento nos coeficientes de transmissão.



Aqui consideramos a colisão de dois isotopos de Ni à energias em torno da região da barreira de 100 MeV. Calculamos os coeficientes de transmissão para a fusão do  $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$ . Seguimos o mesmo método usado por Ring e outros<sup>[77]</sup>, usando um modelo simples de fissão bi-dimensional, consistindo de um oscilador harmônico acoplado a uma barreira de potencial simétrica, assumindo um tensor inercial diagonal constante.

A organização deste capítulo é a seguinte. Na secção 2.b resumimos algumas das fórmulas usadas para calcular a secção de choque de fusão abaixo da barreira. Na secção 2.c discutimos a influência dos graus de liberdade intrínsecos. Na secção 2.d discutimos o modelo utilizado. Apresentamos na secção 2.e o método para encontrar a solução quântica exata. Alguns resultados estão na secção 2.f e finalmente as conclusões se encontram na secção 2.g.

## **2.b. Fusão abaixo da Barreira**

Até recentemente, por falta de aceleradores adequados, a maioria dos estudos experimentais de fusão abaixo da barreira eram feitos com sistemas leves. Agora, aceleradores de mais alta energia são utilizados e novas técnicas têm sido desenvolvidas para detectar resíduos de evaporação e a faixa de pares de núcleos



investigados está sendo estendida. O modelo óptico teve sucesso em descrever secções de choque de fusão para sistemas leves. Nestas aplicações os coeficientes de transmissão são os do modelo óptico e a secção de choque de fusão é identificada com a secção de choque total de reação. Esta suposição é justificada para a maioria dos sistemas leves exceto para casos especiais como  $^{14}\text{N} + ^{14}\text{N}$  à baixas energias onde a transferência de neutrons é grande. Muitos potenciais ópticos têm sido usados e em particular o potencial de Wood-Saxon deduzido por Reeves<sup>[78]</sup> reproduz a secção de choque de fusão muito bem para muitos sistemas leves.

O significado físico da parte imaginária do potencial óptico para grandes separações não é claro para cálculos de fusão. Modelos alternativos têm sido propostos que usam um potencial real e assumem que a fusão ocorre quando as distribuições de densidade nucleares começam a se sobrepor. As condições de contorno de onda entrante do modelo de Christensen e Switkowski<sup>[16]</sup> usam a condição de que a função de onda tem um caracter entrante à uma escolha razoável do raio de contato. O comportamento não-ressonante médio de muitas secções de choque de fusão pode ser bem reproduzido com potenciais reais que ajustam os dados de espalhamento elástico.

A fórmula quântica para a secção de choque de fusão é

$$\sigma_f = (\pi/k^2) \sum_{\ell} (2\ell + 1) P_{\ell} \quad (2.1)$$

onde o coeficiente de transmissão  $P_l$  é a probabilidade de fusão para uma onda parcial  $l$  incidente. A equação (2.1) é exata se os núcleos iniciais são diferentes e têm spin zero. É válida também para spins diferentes de zero se a interação alvo-projétil é independente de spin.

Considerando a simplificação

$$\begin{aligned} P_l &= 1 & l \leq l_f \\ P_l &= 0 & l > l_f \end{aligned}$$

a secção de choque dá

$$\sigma_f = (\pi/k^2) (l_f + 1)^2 \quad (2.2)$$

Esta equação é equivalente a fórmula clássica para a secção de choque de fusão quando  $l_f$  é grande. A fusão é esperada ser associada com as ondas parciais mais baixas. Na teoria clássica mais simples há um momento angular crítico  $l_f$  para cada energia. A probabilidade de fusão é a unidade para o momento angular  $l < l_f$  e zero para  $l > l_f$ . Neste modelo clássico a secção de choque de fusão é dada por  $\sigma_f = \pi l_f^2/k^2$ .

A equação (2.1) deve ser modificada se o alvo e o projétil são idênticos, desde que as funções de onda com simetria de troca apropriadas sejam usadas. Se os núcleos são idênticos e têm spin  $I$  no estado fundamental, então, (2.1) é trocada por

$$\sigma_f = (\pi/k^2) \sum_{\ell} (2\ell + 1) P_{\ell} (1 + (-1)^{2\ell+1}) / (2I + 1) \quad (2.3)$$

onde  $P_{\ell}$  é assumido independente de spin.

Cujec e Barnes<sup>[79]</sup> usaram uma aproximação simples para o cálculo dos coeficientes de transmissão. Eles aproximaram a barreira coulombiana à uma parábola invertida e usaram a fórmula de Hill e Wheller<sup>[11]</sup> para o coeficiente de transmissão,

$$P_{\ell} = \frac{1}{1 + \exp((V_{B\ell} - E) / \Delta E)} \quad (2.4)$$

Na equação acima

$$\Delta E = \hbar \omega_B / 2\pi \quad (2.5)$$

$$\omega_B^2 = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right]$$

$$V_{B\ell} = V(r_B) + \frac{\hbar^2 \ell (\ell + 1)}{2\mu r_B^2} \quad (2.6)$$

onde  $V(r)$  é o potencial coulombiano mais o nuclear. A quantidade  $V_{B\ell}$  é a altura da barreira na onda parcial  $\ell$  e  $\Delta E$  é a medida de largura da barreira. A equação (2.4) contém algumas simplificações porque o raio da barreira  $r_B$  e  $\Delta E$  são assumidos independentes de  $\ell$ . Com estas suposições a soma em (2.1) pode ser calculada com boa aproximação usando-se o termo líder de fórmula de soma de Poisson

dando uma fórmula fechada para a secção de choque de fusão<sup>[12]</sup>

$$\sigma_f = \pi r_B^2 (\Delta E/E) \ln [1 + \exp((E - V_B)/\Delta E)] \quad (2.7)$$

onde  $V_B = V(r)$ . A tabela (2.1) mostra alguns valores típicos dos parâmetros  $r_B$ ,  $V_B$  e  $\Delta E$  para vários sistemas que têm sido estudados experimentalmente. Eles foram calculados usando-se o potencial de Christensen e Winther<sup>[66]</sup>. Nota-se que  $\Delta E$  não varia muito de sistema para sistema. A aproximação parabólica e a equação (2.7) não são boas quando  $E \ll V_B$ .

Núcleo	$r_B$ (fm)	$V_B$ (MeV)	$\Delta E$	$l_B$
$^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$	8.1	10.4	0.51	1.0
$^{58}\text{Ni} + ^{58}\text{Ni}$	10.8	98.0	0.72	5.0
$^{16}\text{O} + ^{148}\text{Sm}$	11.0	61.0	0.80	3.6
$^{40}\text{Ar} + ^{122}\text{Sn}$	11.6	105.0	0.72	5.4
$^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$	11.3	94.4	0.72	4.2

TABELA 2.1: Parâmetros típicos para barreira de fusão. Raio da barreira ( $r_B$ ), altura ( $V_B$ ),  $\Delta E = \hbar\omega/2\pi$ , número de ondas parciais que contribuem ( $l_B$ ).

O número  $l_B$  de ondas parciais que contribuem significativamente para a secção de choque de fusão abaixo da barreira pode ser

estimado a partir de

$$\hbar^2 l_B (l_B + 1) / (2\mu r_B^2) = \Delta E \quad (2.8)$$

Este número pode ser bastante grande para sistemas mais pesados.

Quando a energia incidente está bem acima do topo da barreira coulombiana ( $E - V_B \geq \Delta E$ ) a equação (2.7) torna-se

$$\sigma_f \approx \pi r_B^2 (1 - V_B/E) \quad (2.9)$$

Para energias bem abaixo da barreira ( $V_B - E \geq 2\Delta E$ )

$$\sigma_f \approx \pi r_B^2 (\Delta E/E) \exp((E - V_B) / \Delta E) \quad (2.10)$$

e a secção de choque de fusão decresce exponencialmente. De fato, a aproximação parabólica não é apropriada quando  $E \ll V_B$  e (2.10) super estima a secção de choque de fusão.

## 2.c A Influência dos graus de Liberdade Intrínsecos

Experiências recentes em fusão com alvos e projéteis pesados mostram que o modelo de penetração de barreira simples discutido na secção anterior não pode ser considerado para energias próximas



e abaixo do topo da barreira coulombiana em tais sistemas. Stokstad e colaboradores<sup>[22]</sup> estudaram a função de excitação para a fusão do  $^{16}\text{O}$  com diferentes isotopos de samarium. Esses resultados mostram uma grande variação da secção de choque com o número de massa às energias mais baixas investigadas. Acima da barreira, por outro lado, as secções de choque se tornam quase idênticas. Esse comportamento mostra clara evidência de uma influência direta da deformação nuclear. O efeito pode ser entendido qualitativamente notando-se que a interação nuclear é mais forte e a barreira coulombiana mais baixa quando um núcleo deformado prolato é atingido por um projétil esférico próximo de seus polos que quando é atingido próximo do seu equador. A secção de choque total de fusão corresponde à uma média sobre todas as orientações do eixo de simetria nuclear. À energias abaixo da barreira, a relação entre a altura da barreira efetiva e a secção de choque é não-linear e a secção de choque será dominada pelas contribuições daquelas orientações que dão o maior coeficiente de transmissão. O efeito líquido é um forte aumento na secção de choque de fusão com o aumento da deformação.

Por outro lado, Broglia e colaboradores<sup>[76]</sup> têm mostrado que efeitos de transferência de neutrons podem ajustar melhor a função de excitação com os resultados experimentais.

A característica comum destes exemplos é que eles mostram os efeitos de graus de liberdade intrínsecos no tunelamento quântico

de uma variável coletiva. Vários autores têm discutido este problema, como por exemplo, Carlson e Hussein<sup>[80]</sup>, Broglia e colaboradores<sup>[76]</sup>, Dasso e colaboradores<sup>[31,32]</sup>, Jacob e Smilansky,<sup>[44]</sup> Lindsay e Rowley<sup>[45]</sup>. A conclusão geral destes autores é que a secção de choque de fusão para ions pesados é dada por

$$\sigma_f(E) = \sum_i q_i \sigma_w(E - \epsilon_i) \quad (2.11)$$

onde  $\sum_i q_i = 1$  e  $\sigma_w(E - \epsilon_i)$  são secções de choque de fusão calculadas de uma fórmula simples de penetração de barreira, tal como a fórmula de Wong<sup>[12]</sup>. A interpretação de (2.11) é que a fusão ocorre através de certos canais ou estados de transição rotulados por  $i$ . O estado de transição  $i$  tem uma energia  $\epsilon_i$  e a altura da barreira efetiva naquele canal é  $V_B + \epsilon_i$ . A quantidade  $q_i$  é a probabilidade de chegar à barreira no canal  $i$  e  $\sigma_w(E - \epsilon_i)$  é a probabilidade de fusão naquele canal. Para fusão abaixo da barreira o termo na equação (2.11) com a energia mais baixa  $\epsilon_0$  dá a contribuição dominante e

$$\sigma_f(E) \approx q_0 \sigma_w(E - \epsilon_0) \quad (2.12)$$

A equação (2.11) pode ser derivada de vários pontos de partida. A maneira mais direta para o problema de fusão é

considerar o cálculo de canais acoplados quântico completo. Broglia et al<sup>[76]</sup> e Dasso et al<sup>[31,32]</sup> usaram um modelo de canais acoplados muito simplificado (Veja cap. 1) no qual os estados intrínsecos são degenerados e o acoplamento pode ser removido por uma transformação unitária. Lindsay e Rowley<sup>[45]</sup> também usaram este tipo de modelo mas discutiram os efeitos de acoplamento de momento angular explicitamente. Jacob e Smilanky<sup>[44]</sup> usaram o método de integrais de trajetória.

Nas próximas secções consideraremos o método de canais acoplados e o modelo introduzido por Ring e colaboradores<sup>[17]</sup> para o cálculo dos coeficientes de transmissão.

## 2.d. O Modelo

Consideremos o seguinte hamiltoniano à duas dimensões

$$H = - \frac{\hbar^2}{2m_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m_y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + V(x,y) \quad (2.13)$$

onde

$$\begin{aligned} V(x,y) &= V(x) + 1/2 C (y - g(x))^2 \\ &= \frac{V_0}{\cosh^2(x/a)} + \frac{1}{2} C (y - g(x))^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

é a energia potencial. Os primeiros dois termos em (2.13) são as energias cinéticas para os graus de liberdade  $x$  e  $y$ . O tensor inercial é assumido constante. Esta suposição não é realista, mas será considerada por simplicidade, pois não sabemos como as massas variam durante o processo de fusão, e estamos interessados em um cálculo de modelo para resolver o problema de penetração de barreira. O primeiro termo em (2.14) representa uma barreira tipo Eckart na direção  $x$  e o segundo termo acopla os dois graus de liberdade, onde  $g(x)$  tem a mesma forma de  $V(x)$ , isto é,  $g(x) = g_0 / \cosh^2(x/a)$ . Não haverá acoplamento entre os dois graus de liberdade para  $|x| \rightarrow \infty$ . Se não há acoplamento ( $g_0 = 0$ ),  $a$  é a largura da barreira e  $C$  é a constante do oscilador, para um oscilador harmônico na direção  $y$ .

Para a fusão de  $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$  consideramos os seguintes parâmetros (Veja Introdução da tese):

$$V_0 = 94.403 \text{ MeV}$$

$$a = 3.0 \text{ fm}$$

$$\hbar\omega_0 = 5.214 \text{ MeV}$$

$$m_x = m_y = 32 m_N$$

$$m_N = 938.858 \text{ MeV}/c^2$$

$$\hbar\omega_y = 1 \text{ MeV}$$

$$C = 0.772 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^{-2}$$

$$g_0 = 3.219 \text{ fm}$$

Quando consideramos vibrações superficiais, a altura da barreira varia com as deformações. Esta variação na altura é dada em nosso caso por  $\Delta V_B = 0.05 V_B$  ou  $\Delta V_B = 4 \text{ MeV}$ . Tomando em conta



a variação de altura da barreira, obtemos o parâmetro  $g_0$  de  $1/2 Cg_0^2 = 4 \text{ MeV}$ . (Veja Introdução).

Para obter estas constantes ajustamos a barreira ao potencial de Coulomb mais o potencial de Christensen e Winther<sup>[66]</sup>. A parte nuclear é dada por

$$U(r) = - 50 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \exp \left[ - \frac{r - R_1 - R_2}{\alpha} \right] \text{ MeV} \quad (2.15)$$

com

$$R_1 = 1.233 A_1^{1/3} - 0.978 A_1^{-1/3} \text{ fm} \quad (2.16)$$

e  $\alpha = 0.63 \text{ fm}$ .

Os índices 1 e 2 se referem aos dois núcleos envolvidos. A Figura (2.2) mostra este ajuste. Escolhemos uma energia próxima do topo da barreira e determinamos o melhor valor da largura  $a$ . Introduzimos uma energia  $\hbar\omega_0$  caracterizando a curvatura do topo da barreira para  $g_0 = 0$ , onde  $\omega_0 = \left[ \frac{|V''(0)|}{m_x} \right]^{1/2}$ . Escolhemos  $V''(0)$  que corresponde ao valor na barreira encontrada usando o potencial coulombiano mais o potencial de Christensen-Winther. Em nosso caso  $\hbar\omega_0 = 2 V_0 / \Gamma_0$  e  $\Gamma_0 = \left[ \frac{2m_x a V_0}{\hbar} \right]^{1/2} = 36.21$ . A constante  $\Gamma_0$  é chamada de constante de tunelamento. Para a aproximação WKB ser válida impomos que a barreira seja suficientemente estreita, isto é  $\hbar\omega_0 \ll V_0$  ou  $\Gamma_0 \gg 1$ . Para  $m_x$  usamos a massa reduzida e o mesmo



valor para  $m_y$  como  $m_y$  é constante pode ser escolhido igual à  $m_x$  mudando o fator de escala da variável  $y$ . Para se obter  $g_0$ , consideramos  $1/2 Cg_0^2 = 4$  MeV e a escolha de  $m_y$  e  $C$  dão uma frequência  $\hbar\omega_y$  de 1 MeV.

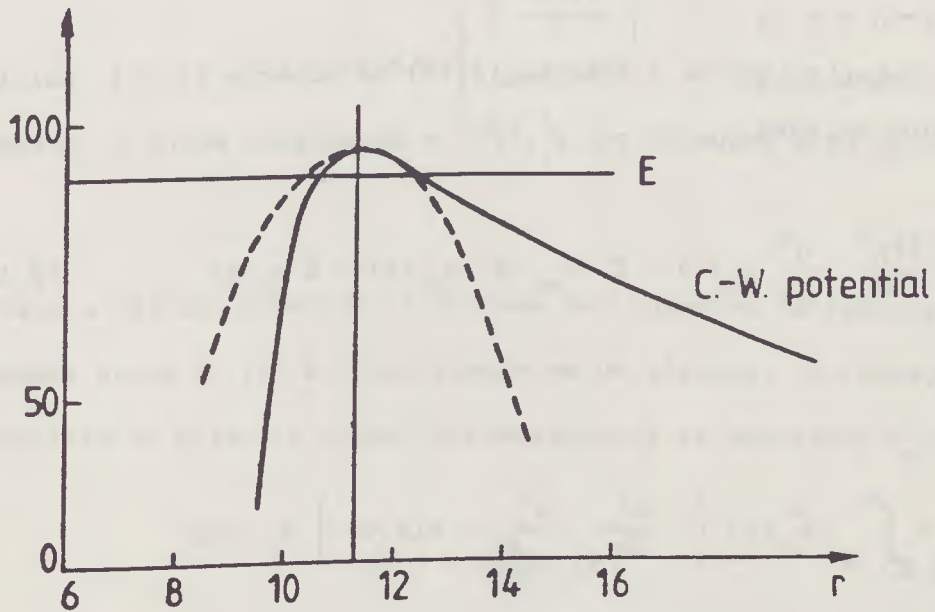


FIGURA 2.2: "Ajuste do potencial" (Veja texto)

### 2.e. Solução Quântica

A equação de Schrödinger para o problema pode ser escrita como

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m_y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + V(x,y) - E \right] \psi(x,y) = 0 . \quad (2.17)$$

Expandimos a função de onda em termos de um conjunto completo de funções ortogonais na coordenada  $y$  (funções de oscilador harmônico).

$$\psi(x,y) = \sum_n \mu_n(x) \phi_n(y) . \quad (2.18)$$

Substituindo-se a equação (2.18) na equação (2.17), multiplicando-se pela esquerda por  $\phi_n^*(y)$ , e integrando sobre  $y$ , obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m_x} \frac{d^2}{dx^2} \mu_n(x) + \sum_{n'} H_{nn'}(x) \mu_{n'}(x) = E \mu_n(x) \quad (2.19)$$

com

$$\begin{aligned} H_{nn'} &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(y) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_y} \frac{d^2}{dy^2} + V(x,y) \right] \phi_{n'}(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(y) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_y} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2} Cy^2 + \right. \\ &\quad \left. - Cy g(x) + \frac{1}{2} Cg(x)^2 + V(x) \right] \phi_{n'}(y) dy \end{aligned} \quad (2.20)$$

Os primeiros dois termos em (2.20) dão a energia do oscilador harmônico  $\hbar \omega_y(n + 1/2)$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(y) \frac{1}{2} C g(x)^2 \phi_n(y) dy = \frac{1}{2} C g(x)^2 \delta_{nn}, \quad (2.21)$$

O terceiro termo na integral é dado por [81]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n'}^*(y) \{-C y g(x)\} \phi_n(y) dy =$$

$$= -C g(x) \begin{cases} \left(\frac{n'+1}{2}\right)^{1/2} & p/n = n' + 1 \\ (n'/2)^{1/2} & p/n = n' - 1 \\ 0 & \text{para os outros} \end{cases}$$

(2.22)

Para o cálculo numérico, o sistema de equações diferenciais de segunda ordem (2.19) é transformado em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem introduzindo-se as derivadas  $v_n(x)$ ,

$$v_n(x) = \frac{d}{dx} \mu_n(x) \quad (2.23)$$

e,

$$\frac{d}{dx} v(x) = \frac{2m x}{\hbar^2} \sum_{n'} H_{nn'}(x) \mu_{n'}(x) - \frac{2m E}{\hbar^2} \mu_n(x) \quad (2.24)$$

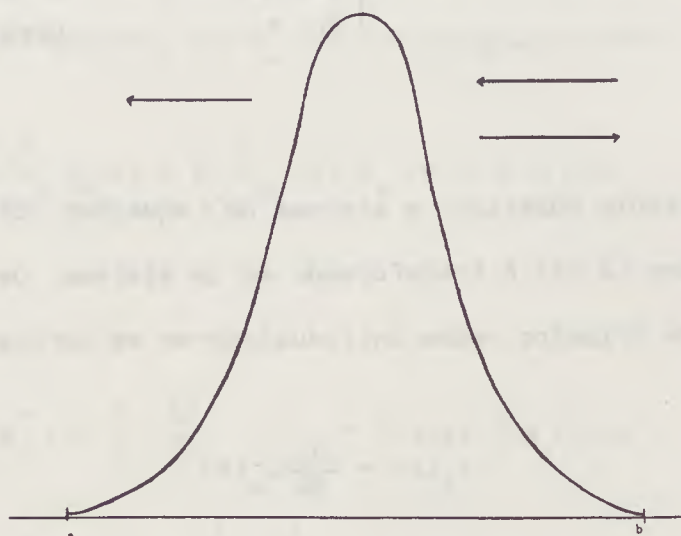
Para satisfazer as condições de contorno para a função de onda  $\psi(x,y)$ , requeremos

$$\mu_n(x) = A_n e^{-ik_n(x-b)} + B_n e^{ik_n(x-b)}, \quad (2.25)$$

para  $x$  próximo de  $b$  e

$$\mu_n(x) = C_n e^{-ik_n(x-a)} \quad (2.26)$$

para  $x$  próximo de  $a$ . (ver figura abaixo)



**FIGURA 2.3:** Diagrama da barreira mostrando as ondas incidentes refletidas e transmitidas. Os pontos  $a$  e  $b$  estão nos lados opostos da barreira e são escolhidos de modo que  $V(a)$  e  $V(b)$  sejam muito pequenos.

A onda incide pela direita e em todos os canais abertos temos somente ondas saintes, exceto em um deles onde temos onda entrante com amplitude 1. Para  $x \rightarrow \pm \infty$  temos nos canais abertos somente ondas saintes.

Procuramos por conjuntos de  $n$  soluções com as seguintes condições de contorno em  $a$ ,

$$\begin{aligned} \mu_{nm}(a) &= \delta_{nm} & \bar{\mu}_{nm} &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} v_{nm}(a) &= 0 & \bar{v}_{nm} &= \delta_{nm} \end{aligned}$$

sendo

$$\left[ \begin{aligned} \mu_n(x) &= \sum_m (\mu_{nm}(x) a_m + \bar{\mu}_{nm} b_m) \\ v_n(x) &= \sum_m (v_{nm}(x) a_m + \bar{v}_{nm}(x) b_m) \end{aligned} \right. \quad (2.28)$$

uma solução geral das equações acopladas. Então, em  $x = a$ , temos

$$\left[ \begin{aligned} \mu_n(a) &= C_n \\ v_n(a) &= -i k_n C_n \end{aligned} \right. \quad (2.29)$$

e em  $x = b$

$$\left[ \begin{aligned} \mu_n(b) &= A_n + B_n \\ v_n(b) &= -i K_n A_n + i K_n B_n \end{aligned} \right. \quad (2.30)$$

Portanto, das equações (2.30), obtemos



$$\begin{cases} 2A_n = \mu_n(b) - \frac{1}{ik_n} v_n(b) \\ 2B_n = \mu_n(b) + \frac{1}{ik_n} v_n(b) \end{cases} \quad (2.31)$$

Usando as condições (2.27) em (2.28) encontramos, em  $x = a$  de (2.29),

$$\begin{cases} \mu_n(a) = C_n = a_n \\ v_n(a) = -ik_n c_n = b_n \end{cases} \quad (2.32)$$

ou

$$b_n = -ik_n a_n \quad (2.33)$$

e em  $x = b$ , substituindo (2.33) em (2.28),

$$\begin{cases} \mu_n(b) = \sum_m (\mu_{nm}(b) - ik_m \bar{\mu}_{nm}(b)) a_m \\ v_n(b) = \sum_m (v_{nm}(b) - ik_m \bar{v}_{nm}(b)) a_m \end{cases} \quad (2.34)$$

Agora, introduzindo (2.34) em (2.31), obtemos,

$$\begin{cases} 2A_n = \sum_m [(\mu_{nm}(b) + \frac{k_m}{k_n} \bar{v}_{nm}(b)) + i(-k_m \bar{\mu}_{nm}(b) + \frac{v_{nm}(b)}{k_n})] a_m \\ 2B_n = \sum_m [(\mu_{nm}(b) - \frac{k_m}{k_n} \bar{v}_{nm}(b)) + i(-k_m \bar{\mu}_{nm}(b) - \frac{v_{nm}(b)}{k_n})] a_m \end{cases} \quad (2.35)$$

ou

$$\begin{cases} A_n = \sum_m [X_{nm} + i Y_{nm}] a_m \\ B_n = \sum_m [W_{nm} + i Z_{nm}] a_m \end{cases} \quad (2.36)$$

Podemos obter os coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$  e  $C_n$  numericamente por uma inversão de matriz complexa. A probabilidade de transmissão então será dada por

$$T_n = |C_n|^2, \quad (2.37)$$

e a probabilidade de reflexão será

$$R_n = |B_n|^2 \quad (2.38)$$

em cada caso, isto é, começando por um canal de entrada de cada vez. A probabilidade de transmissão em cada caso será

$$T = \sum_n \frac{k_n}{k_m} T_n.$$

Nos cálculos numéricos consideramos até  $n = 4$ , isto é, cinco canais ( $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ).

Fizemos vários testes para os programas usados. Primeiramente, para verificar o programa, examinamos o caso em que não há acoplamento e comparamos com os valores da penetrabilidade obtidos

usando a fórmula de Hill-Wheeler (1.67),

$$P = \frac{1}{1 + \exp[2\pi/\hbar\omega (V_B - E)]} \quad (2.39)$$

A comparação pode ser vista na tabela (2.2). Usando a fórmula de Hill-Wheeler podemos ver que no topo da barreira, quando temos  $E = V_B$ ,  $P = 1/2$ . Isto também é bem reproduzido usando nosso programa

E	P (Hill-Wheeler)	P (nossos resultados)
90.403	0.0080	0.0077
91.403	0.0262	0.0262
92.403	0.0824	0.0832
93.403	0.2305	0.2318
94.403	0.5000	0.5077
95.403	0.7694	0.7739
96.403	0.9176	0.9157
97.403	0.9734	0.9741

**TABELA 2.2:** Comparação para o Coeficiente de Penetrabilidade, usando a fórmula de Hill-Wheeler e usando nosso programa para cálculo de canais acoplados.

Uma outra verificação feita foi para a Conservação de

Probabilidade. Se temos uma função de onda escrita como

$$\psi = C_1 e^{i\phi(x)}, \quad (2.40)$$

podemos escrever a densidade de corrente como<sup>[69]</sup>

$$\gamma = |C_1|^2 \text{grad } \phi. \quad (2.41)$$

Em nosso caso,  $\psi$  tem a forma

$$\psi_1 = C_1 e^{ik_1 x} \quad (2.42)$$

e

$$\gamma = |C_1|^2 k_1. \quad (2.43)$$

Devemos ter a conservação de fluxo, isto é, usando a função de onda em (2.25) e (2.26) temos

$$\sum_1 |A_1|^2 k_1 - |B_1|^2 k_1 = \sum_1 |C_1|^2 \quad (2.44)$$

e, quando o canal de entrada é o estado fundamental,

$$\sum_1 |C_1|^2 k_1 + |B_1|^2 k_1 = \sum_1 |A_1|^2 k_1 = |A_0|^2 k_0 \quad (2.45)$$

ou

$$\sum_1 |C_1|^2 \frac{k_1}{k_0} + |B_1|^2 \frac{k_1}{k_0} = |A_0|^2 = 1 \quad (2.46)$$

O mesmo tipo de solução é válido quando consideramos qualquer outro canal como canal de entrada. Obtivemos sempre bons valores. Claro que tivemos desvios, mas, desprezíveis.

Se desprezamos o acoplamento não há mistura entre os canais. Para cada canal temos um problema uni-dimensional. A forma da barreira é então modificada pela energia do oscilador  $\hbar\omega_y (n + 1/2)$ , como se pode ver na figura 2.4. Nela vemos as barreiras para os estados de  $n = 0$  e  $n = 4$ , como casos extremos. A curva mais baixa é o potencial de Eckart com os parâmetros que estão no texto, mais a energia de oscilador mencionada acima. Para obter as curvas pontilhadas, adicionamos a contribuição do acoplamento para  $n = n'$ . Em todos os nossos cálculos usamos os valores da energia total que estão entre as setas, isto é, 92.403 MeV e 104.403 MeV.

O programa utilizado para resolver o sistema equações diferenciais encontrado, foi tirado do artigo "Integrating Stiff Ordinary Diferencial Equations" de W.H. Press e S.A. Teukolsky<sup>[138]</sup>. Vários outros métodos foram tentados, mas sem sucesso.



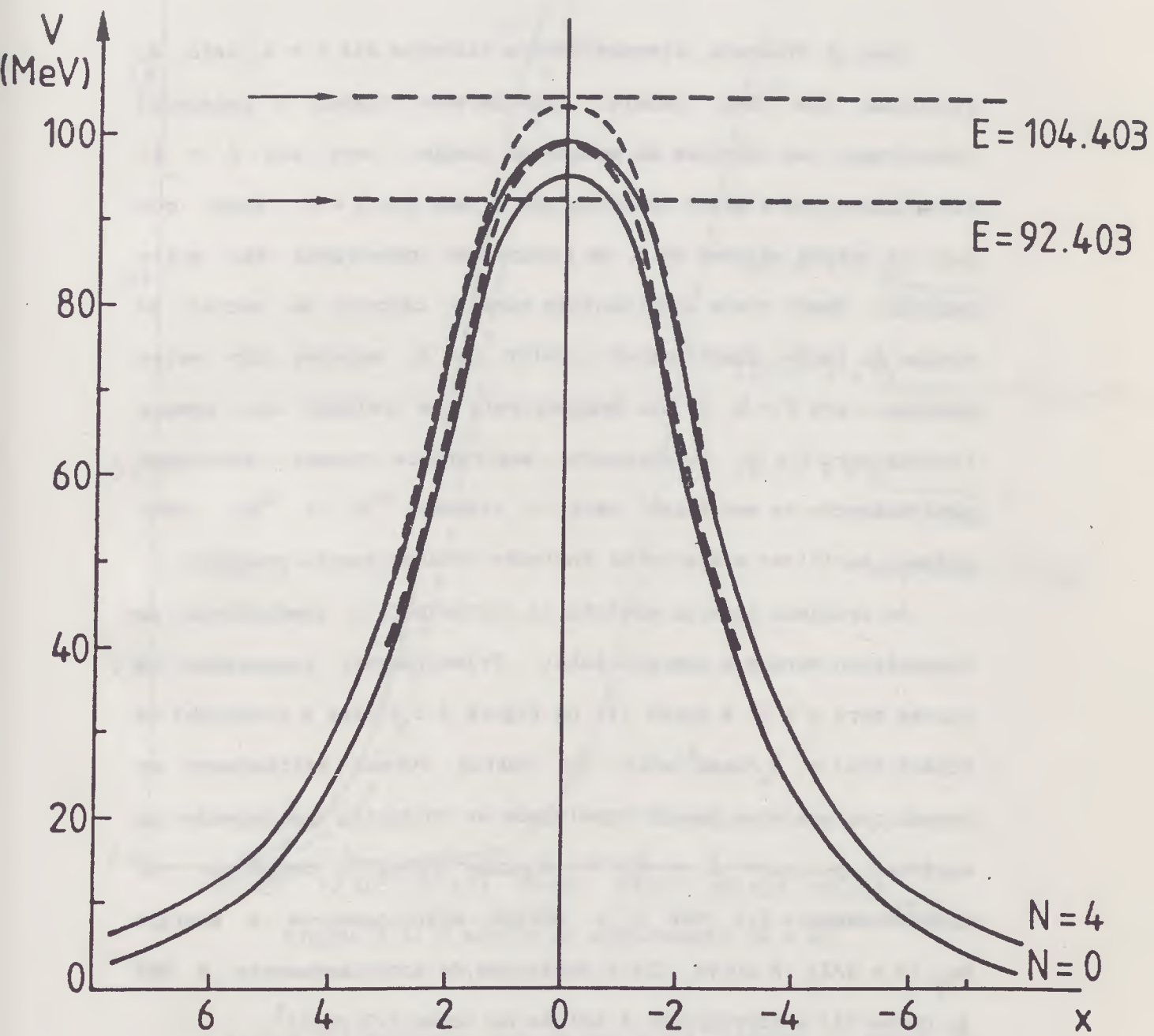


FIGURA 2.4: A barreira efetiva para os estados  $n = 0$  e  $n = 4$

(Veja texto)

## 2.f. Resultados e Discussões

Como já dissemos, fizemos nossos cálculos até  $n = 4$ , isto é, incluindo até cinco canais. Consideramos também o potencial centrífugo, nos cálculos da secção de choque, para até  $l = 4$ . Verificamos que a maior contribuição é dada por  $l = 0$ , sendo que para os outros valores de  $l$ , os fatores de penetração são muito pequenos, dando pouca contribuição para o cálculo da secção de choque de fusão. Quanto maior o valor de  $l$ , menores são estes valores. Para  $l = 4$ , já são desprezíveis em relação aos mesmos fatores para  $l = 0$ . Inicialmente mostraremos nossos resultados para a função de excitação para o sistema  ${}^{64}\text{Ni} + {}^{64}\text{Ni}$ , onde podemos verificar o efeito da inclusão do acoplamento proposto.

As próximas figuras mostram as curvas para o coeficiente de transmissão versus a energia total. Primeiramente comparamos as curvas para  $n = 0$ . A curva (1) na figura 2.5 é para o potencial de Eckart  $V(x) = V_0/\cosh^2(x/a)$ . Às outras curvas adicionamos os termos que aparecem quando resolvemos as integrais que dependem da variável  $y$ , para  $l = 4$ . A segunda curva é deslocada de aproximadamente  $1/2$  MeV e é obtida adicionando-se a energia  $\hbar\omega_y (n + 1/2)$ . A curva (3) é deslocada de aproximadamente 4 MeV da curva (2) e corresponde à adição do termo  $1/2 cg(x)^2$ .

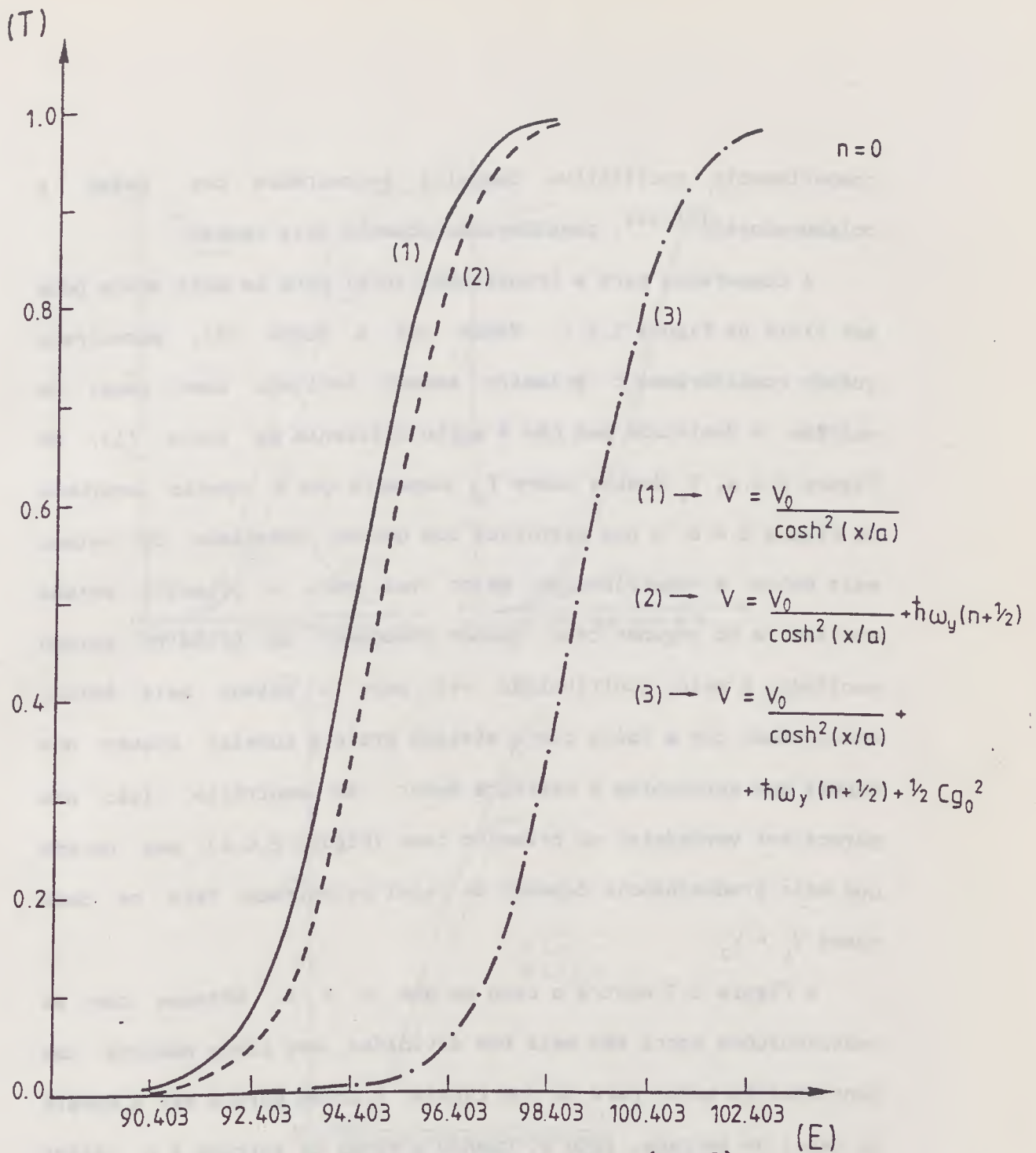


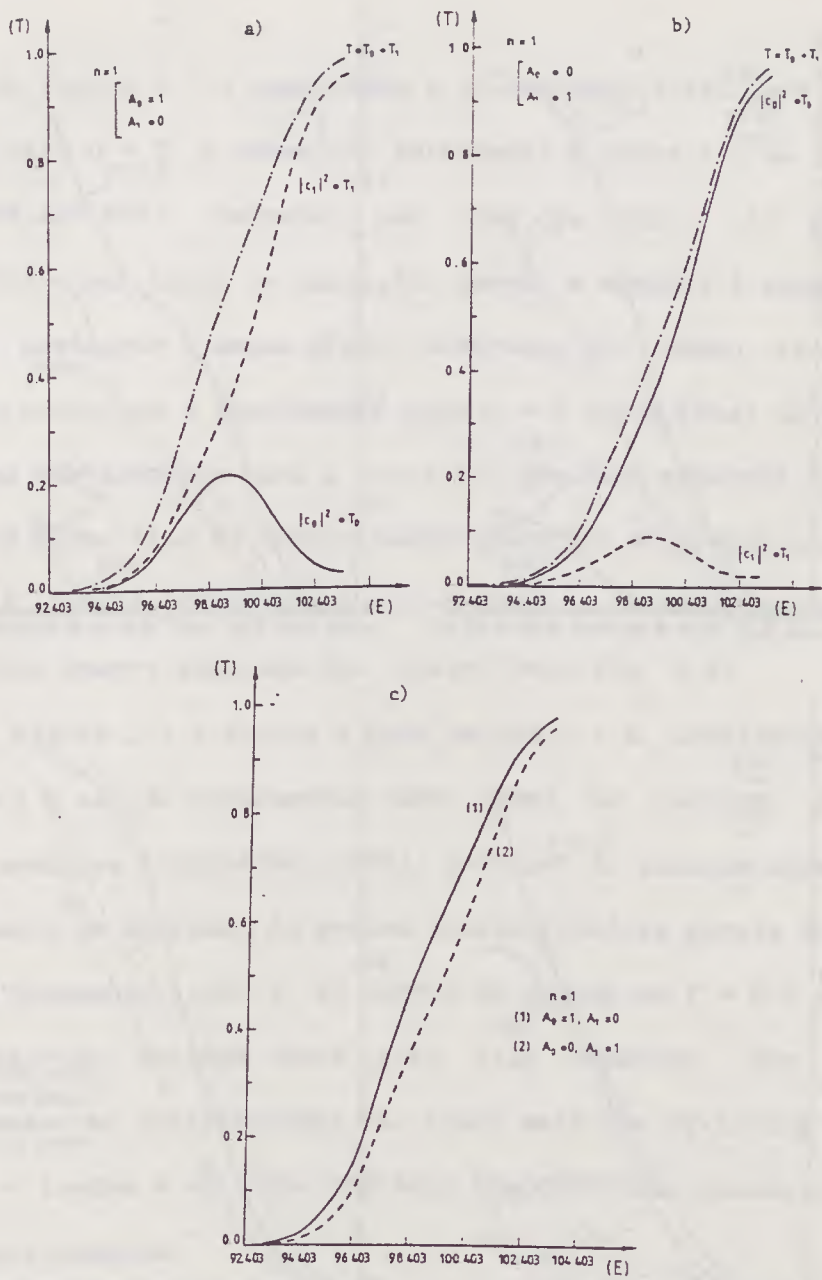
FIGURA 2.5: O efeito do acoplamento (n = 0)

A Figura 2.6 mostra o caso em que  $n = 1$ , quando o canal de entrada é o estado mais baixo e o primeiro estado excitado, respectivamente (veja Figuras 2.6.a e 2.6.b). Elas tem o mesmo

comportamento qualitativo daquelas encontradas por Dasso e colaboradores<sup>[31,32]</sup>, considerando somente dois canais.

A comparação para a transmissão total para os dois casos pode ser vista na Figura 2.6.c. Vemos que a curva (2), encontrada quando consideramos o primeiro estado excitado como canal de entrada, é deslocada mas não é muito diferente da curva (1). Na Figura 2.6.a,  $T_1$  domina sobre  $T_0$ , enquanto que o oposto acontece na Figura 2.6.b, o que significa que quando começamos do estado mais baixo a contribuição maior vai para o primeiro estado excitado e no segundo caso, quando começamos do primeiro estado excitado, a maior contribuição vai para o estado mais baixo, concordando com a idéia que o sistema prefere tunelar através dos canais que apresentam a barreira menor. Ao contrário, isto não parece ser verdadeiro no primeiro caso (Figura 2.6.a), mas parece que esta predominância depende do canal de entrada. Para os dois casos  $V_1 > V_0$ .

A Figura 2.7 mostra o caso em que  $n = 2$ . Notamos que as contribuições agora são mais bem divididas, mas ainda mostram uma contribuição maior para um dos canais. A ordem parece ser a oposta do canal de entrada, isto é, quando o canal de entrada é o estado fundamental  $T_2$  domina, quando é o primeiro estado excitado  $T_1$  domina e finalmente se o canal de entrada é o segundo estado excitado,  $T_0$  domina. Esta tendência parece ser mantida quando aumentamos o número de canais, embora, menos aparente.



**FIGURA 2.6:** Coeficiente de transmissão x Energia para  $n = 1$ . A Figura 2.6.a mostra o caso em que o canal de entrada é o estado fundamental e 2.6.b quando o canal de entrada é o primeiro estado excitado. A Figura 2.6.c compara a transmissão total para os dois casos.



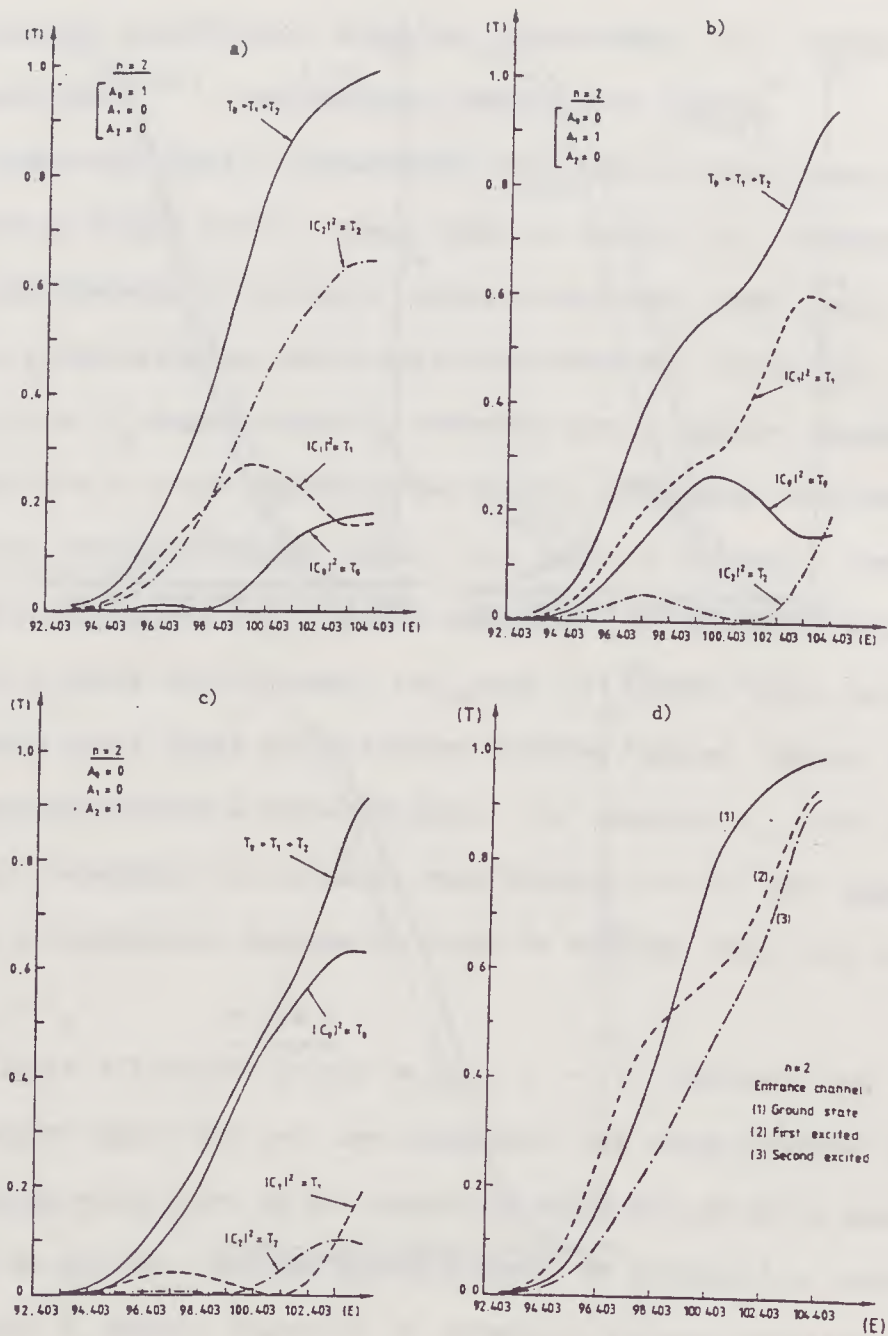


FIGURA 2.7: Transmissão total x Energia para  $n = 2$ . Na Figura 2.7.a o canal de entrada é o estado fundamental, na Figura 2.7.b é o primeiro estado excitado e na Figura 2.7.c é o segundo estado excitado. A Figura 2.7.d mostra a comparação para a transmissão total para os tres casos.

Na Figura 2.7.d comparamos a transmissão total para os três casos para  $n = 2$ . A curva (2) intercepta a curva (1) em  $T \approx 0.55$  ( $E = 98.403$  MeV), passando por cima da curva (1) abaixo da barreira e por baixo da curva (2) quando a energia é acima da barreira, mostrando o mesmo efeito observado por Dasso et al.<sup>[31,32]</sup> quando incluímos o acoplamento para  $n = 2$  (veja final do Cap. 1). O mesmo não acontece para a curva (3) que fica separada das outras duas. O mesmo tipo de comportamento pode ser observado para  $n = 3$  e  $n = 4$ , isto é, a curva que corresponde ao canal de entrada mais alto fica sempre separada das outras (veja Fig. 2.8).

A Figura 2.8.a mostra o caso em que  $n = 4$ , considerando cinco canais e o estado fundamental como canal de entrada. A Figura 2.8.b mostra a transmissão total, para  $n = 4$ , considerando cada um dos canais de entrada. As mesmas características gerais podem ser vistas novamente, isto é, as curvas se cruzam em  $T \approx 0.5$  e a curva do canal de entrada mais alto fica separada das outras. Obviamente, as contribuições são agora mais bem divididas entre os canais e tendem a ser cada vez mais bem divididas quando o número de canais aumentar.

A Figura 2.9.a compara os cinco casos de transmissão total, quando o canal de entrada é o estado mais baixo e temos um canal, dois canais e assim por diante. A curva para  $n = 0$  é um pouco separada das outras, mas as curvas com  $n > 0$  são muito similares.

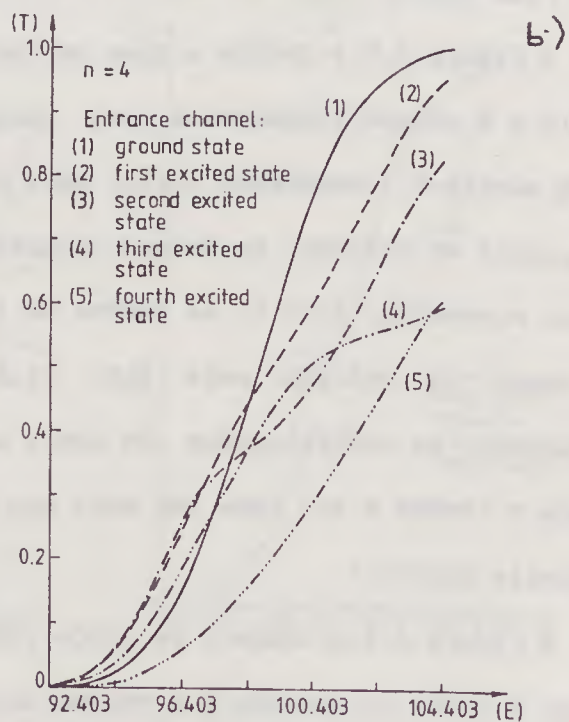
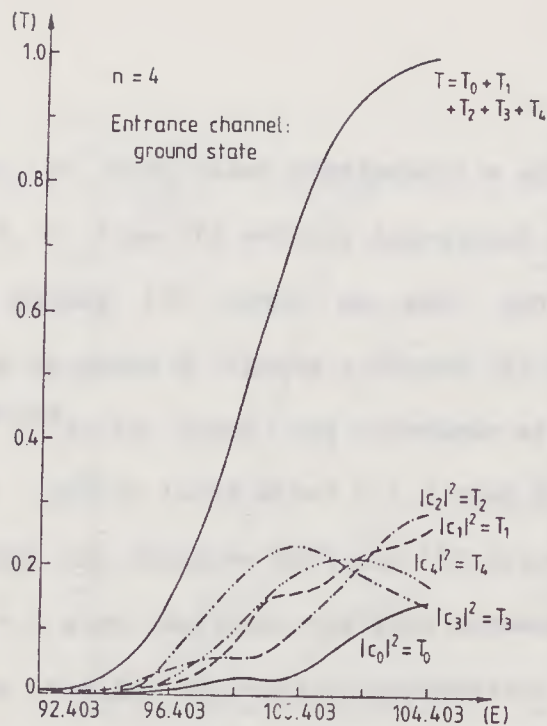


FIGURA 2.8: a) Coeficiente de transmissão x energia para  $n = 4$ , quando o canal de entrada é o estado fundamental. b) compara os casos para  $n = 4$  em que os diferentes canais são os canais de entrada (transmissão total)

Quando aumentamos o número canais de um para dois, temos uma mudança maior na curva, mas este efeito é pequeno quando continuamos a aumentar o número de canais (e a altura da barreira) no cálculo da transmissão total, considerando o estado mais baixo como canal de entrada. As Figuras 2.9.b e 2.9.c mostram as características quando o canal de entrada é o primeiro ou o segundo estado excitado, respectivamente. Podemos ver aqui uma mudança maior que aquela na Figura 2.9.a, para o estado mais baixo.

Finalmente a Figura 2.10 mostra a transmissão total quando aumentamos o número de canais em escala logarítmica. Podemos ver mais claramente que o efeito maior é quando aumentamos o número de canais de um para dois. O efeito depois disto é muito pequeno. Isto significa que se considerarmos um número grande de canais, somente gastaremos mais tempo de computação sem ter uma contribuição sensível para a transmissão total. Também mostramos neste gráfico a curva da penetrabilidade correspondente ao potencial de Eckart puro. Podemos notar que o efeito de incluir o acoplamento é razoável, qualquer que seja o número de canais.

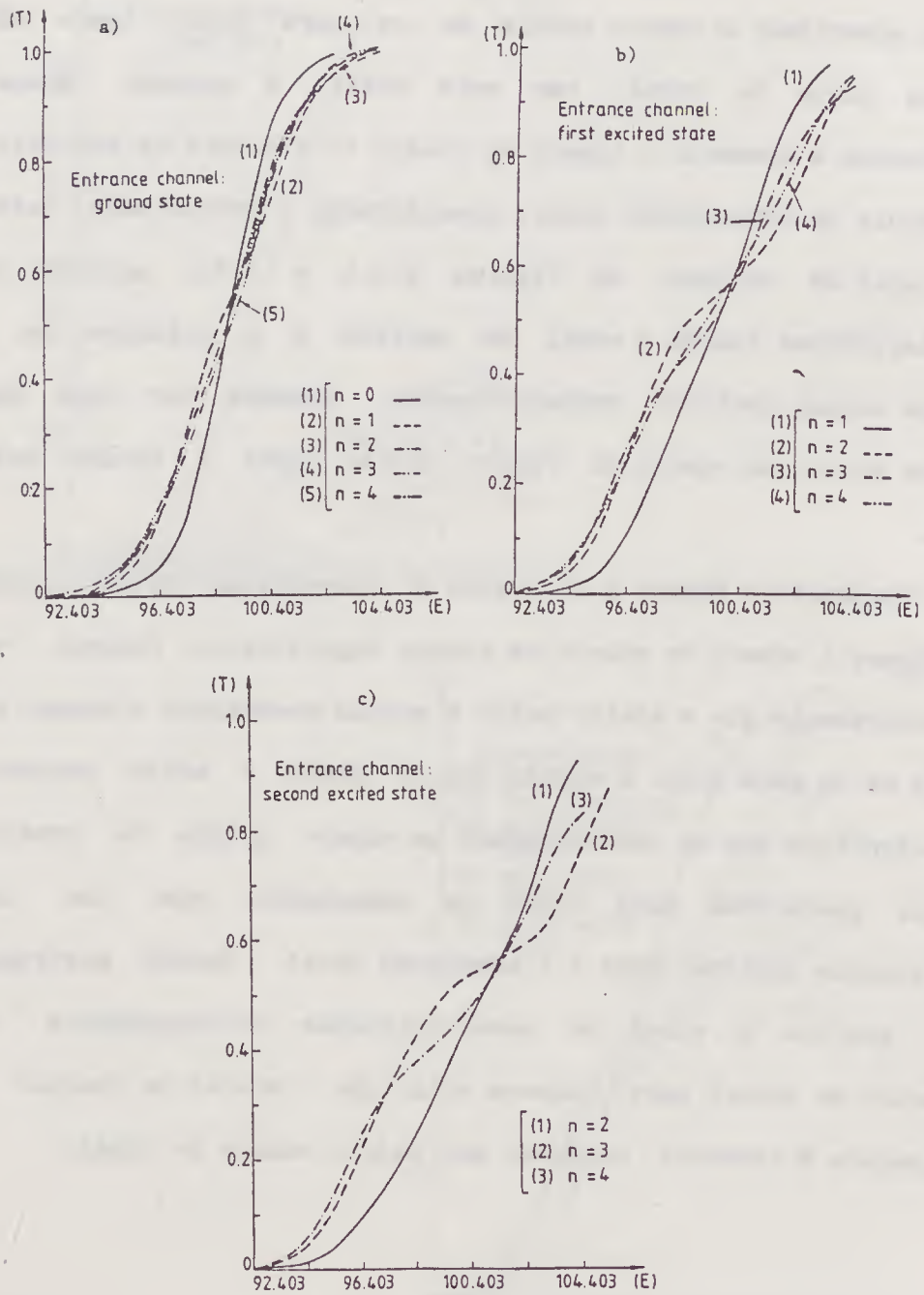
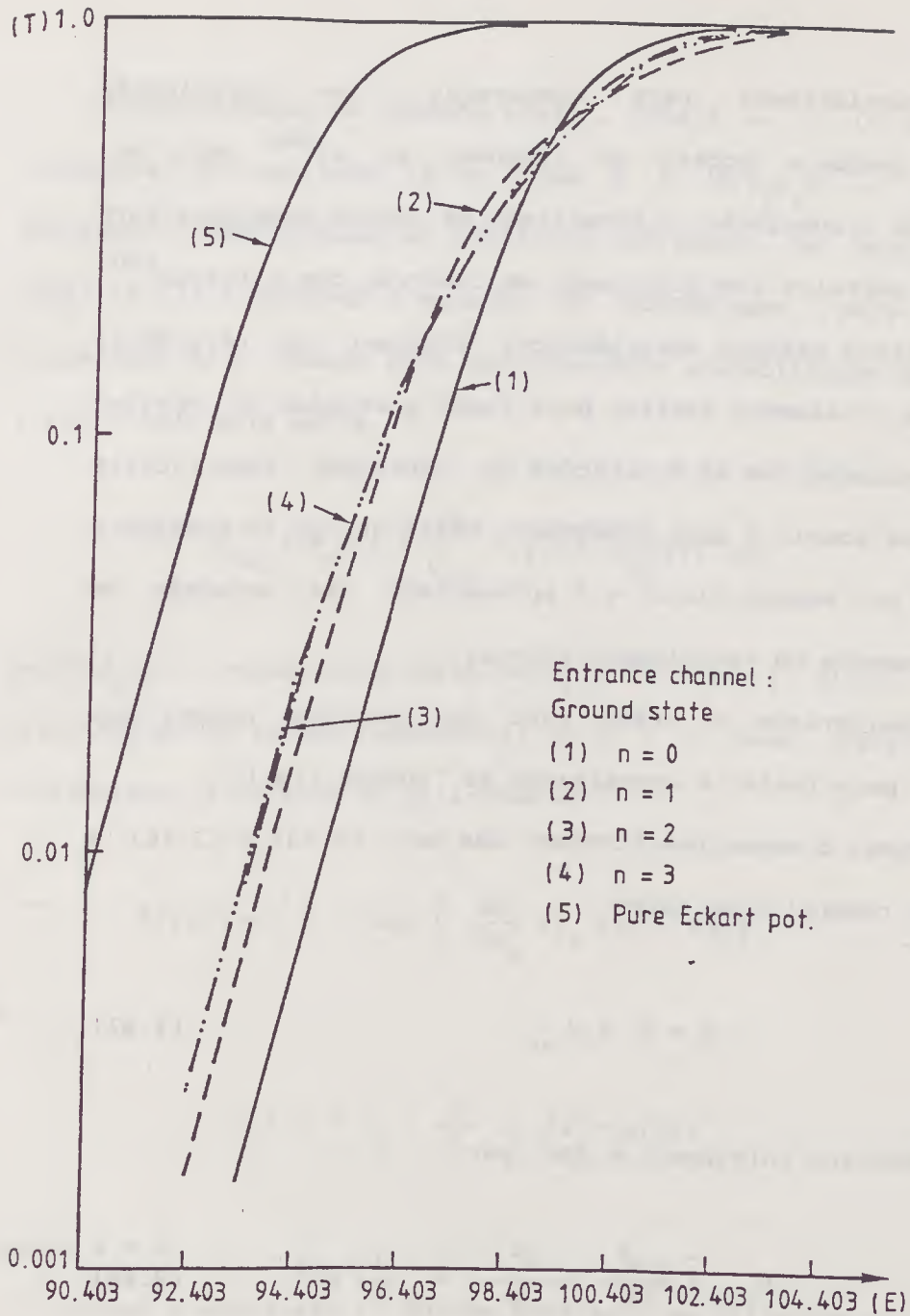


FIGURA 2.9: Comparação para a transmissão total para os diferentes canais de entrada e diferentes valores de  $n$ .





**FIGURA 2.10:** A transmissão total quando aumentamos o número de canais. A curva (5) mostra o caso quando temos o potencial de Eckart puro.

Também consideramos, para comparação, uma aproximação semiclássica, usando o modelo de Esbensen et al<sup>[52]</sup> para os coeficientes de transmissão. O formalismo de canais acoplados para penetração de barreira tem sido usado em conexão com a fissão<sup>[17]</sup> para testar vários métodos semiclássicos. Esbensen na referência [52] adotou um tratamento similar para fusão e estudou os efeitos dinâmicos associados com as excitações de vibrações superficiais coletivos em um modelo à duas dimensões. Neste artigo se considera a aproximação de "sudden limit" e é apresentada uma expansão de perturbação baseada na aproximação eikonal.

Aqui consideramos o mesmo tipo de cálculos usados por Esbensen<sup>[52,4]</sup> para testar a aproximação de "sudden limit".

Consideramos o mesmo hamiltoniano das eqs. (2.13) e (2.14), e este pode ser reescrito na forma

$$H = H_1 + H_{int} \quad (2.47)$$

onde o hamiltoniano intrínseco é dado por

$$H_{int} = -\frac{\hbar^2}{2m_y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} Cy^2 \quad (2.48)$$

e

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + \frac{1}{2} Cg(x)^2 - Cy g(x) \quad (2.49)$$

Na aproximação de "sudden limit", isto é,  $\omega_y \rightarrow 0$  e com a constante do oscilador fixa como  $b = [\hbar/m \omega_y]^{1/2}$ , podemos desprezar o hamiltoniano de oscilador intrínseco no hamiltoniano total (2.13) e resolver a equação de Schrödinger, para valores congelados de  $y$ . Usando esta aproximação a probabilidade de fusão total é dada pela média.

$$P_{fus} = P_0(E) = \int_{-\infty}^{\infty} P(y,E) (\phi_0(y))^2 dy \quad (2.50)$$

sendo  $\phi_0(y)$  o estado mais baixo de  $H_{int}$ ,  $P(y,E) = |T(y)|^2$ , e a distribuição do estado fundamental de  $y$  é o peso. Para  $P(y,E)$  consideramos a fórmula de Hill-Wheeler<sup>[11]</sup>

$$P(y,E) = \left\{ 1 + \exp \left[ \frac{2\pi}{\hbar\omega_0} (V_B(y) - E) \right] \right\}^{-1} \quad (2.51)$$

e

$$V_B(y) = V_0 + \frac{1}{2} C (y - g(0))^2 \quad (2.52)$$

quando  $l = 0$ .

Usando a expressão (2.50) com a fórmula de Hill-Wheeler (2.51) para  $P(y,E)$ ,  $l = 0$  e os mesmos parâmetros para o potencial usados no cálculo de canais acoplados quântico anterior, calculamos a penetrabilidade para os dois primeiros casos, isto é, quando o

canal de entrada é o estado fundamental, como em (2.50) e quando é o primeiro estado excitado.

A Figura (2.11) compara os resultados semiclássicos usando as equações (2.50) e (2.51) com aqueles usando cálculos de canais acoplados considerando 5 canais.

A Figura (2.11a) mostra o caso quando o canal de entrada é o estado fundamental e a figura (2.11b) quando é o primeiro estado excitado<sup>[139]</sup>. Neste caso, usamos para o cálculo semiclássico a equação (2.50) mudando  $\phi_0$  para o primeiro estado  $\phi_1$ . Na Figura (2.11.a) incluímos os resultados considerando o potencial de Eckart somente, mostrando mais claramente o efeito do acoplamento. Podemos ver que os resultados estão em muito boa concordância para  $\hbar\omega_y = 1$  MeV. A expressão (2.51) é obtida considerando o "sudden limit", isto é, quando  $\omega_y = 0$ . Quando aumentamos  $\hbar\omega_y$  nos cálculos de canais acoplados, estamos nos afastando do "sudden limit", portanto, para comparar os resultados,  $\hbar\omega_y$  deve ser pequeno. Esbensen<sup>[52]</sup> mostrou, usando a aproximação eikonal para calcular  $P_{fus}$  com  $\omega_y$  finito, que há uma boa concordância para pequenos valores de  $\hbar\omega_y$  e que há alguns desvios dos resultados de canais acoplados quando  $\hbar\omega_y$  aumenta e os valores de  $\sigma = (\hbar/2m_y \omega_y)^{1/2}$  são grandes. Para grandes valores de  $\hbar\omega_y$  a aproximação eikonal falha drasticamente.

Atualmente estamos estudando o problema de penetração para valores maiores de  $\hbar\omega_y$ , onde a aproximação de "sudden limit" é

menos satisfatória. No momento estamos tentando melhorar nossos resultados e estão sendo feitos novos cálculos para outros valores diferentes de constante  $\hbar\omega_y$ .

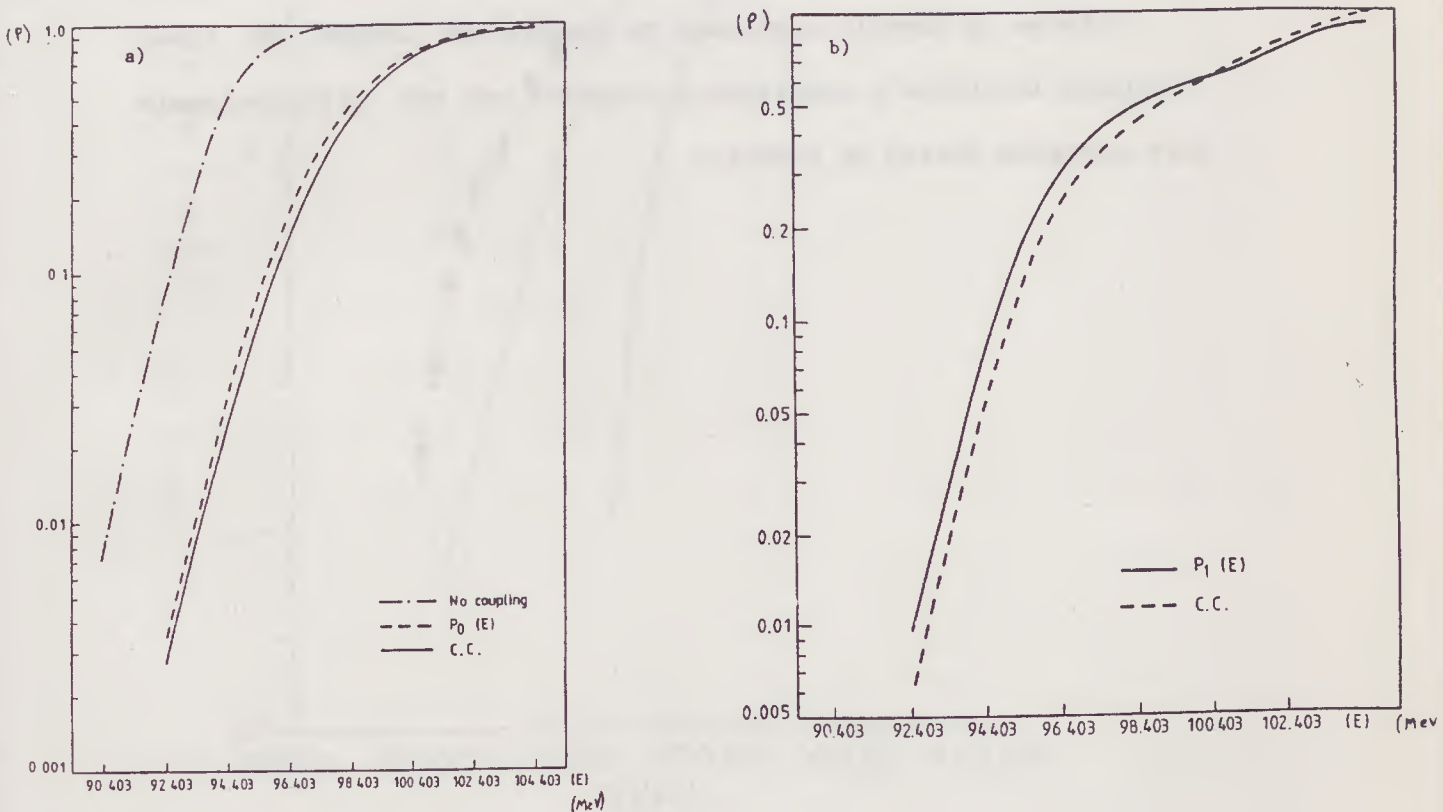


FIGURA 2.11: Transmissão total X Energia total. Comparação dos cálculos semiclássicos e de canais acoplados. (Veja Texto acima) Ref. [139].



A Figura 2.12 mostra o gráfico para secção de choque de fusão total para o  $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$ . Os pontos experimentais da referência [29] estão incluídos para comparação. A curva marcada com \* mostra o nosso cálculo de canais acoplados usando 5 canais e a curva da direita mostra os resultados calculados usando o método WKB em uma dimensão.

Nota-se um aumento acentuado na secção de choque de fusão calculada incluindo o acoplamento proposto por nós, principalmente para energias abaixo da barreira.

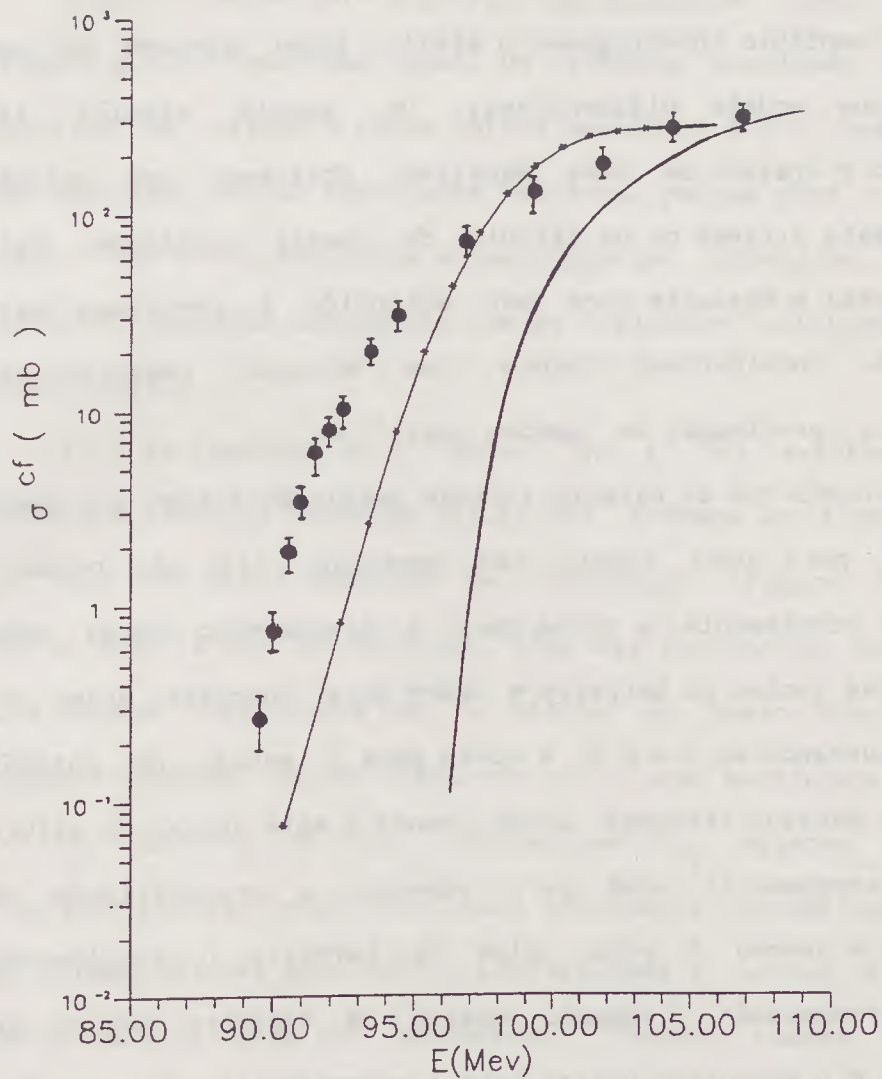


FIGURA 2.12: Secção de choque de fusão para  $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$ . Os pontos experimentais são da ref. [29]. A curva marcada com \* mostra os resultados calculados usando c - c e a curva da direita mostra aqueles usando WKB.

## 2.g. Conclusões

Neste capítulo investigamos o efeito túnel através de uma barreira num modelo bidimensional. Um modelo simples foi introduzido e tratado de duas maneiras. Obtivemos uma solução quântica exata através de um cálculo de canais acoplados. Este método é geral o bastante para ser estendido à problemas mais complicados. Consideramos também uma solução semiclássica, utilizando a aproximação de "sudden limit".

Encontramos que as características gerais mostradas por Dasso et al.<sup>[31,32]</sup> para dois canais são mantidas, isto é, quando incluímos o acoplamento, a curva para a transmissão total sobe para energias abaixo da barreira e desce para energias acima da barreira, cruzando em  $T \approx 0.5$ , a curva para o estado de entrada mais alto é mantida afastada. Então quando  $E$  está abaixo da altura de  $V$ , o acoplamento atua para aumentar a probabilidade de transmissão e quando  $E$  está acima da barreira o acoplamento diminui a transmissão. O aumento abaixo da barreira devido ao acoplamento é o mecanismo básico para o entendimento das secções de choque de fusão a baixas energias.

Como vimos o efeito do acoplamento neste caso é bem razoável. Quando aumentamos o número de canais, o maior efeito é quando o número de canais muda de um para dois. O efeito depois disto é muito pequeno. O mesmo acontece quando aumentamos  $\ell$ ; para  $\ell = 3$ , a

contribuição para a secção de choque de fusão já é desprezível.

Quando olhamos para o gráfico da secção de choque de fusão (Figura 2.12), vemos que temos um aumento acentuado abaixo da barreira, em relação a curva obtida usando W.K.B.. Neste gráfico não incluímos outros resultados teóricos, porque para o caso da reação  $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$  não foram encontrados na literatura. Podemos, portanto, comparar unicamente com os cálculos unidimensionais e experimentais.

Para as reações  $^{64}\text{Ni} + ^{58}\text{Ni}$  e  $^{58}\text{Ni} + ^{58}\text{Ni}$  existem outros trabalhos teóricos recentes [57,58,59]. Podemos verificar o caso do  $^{58}\text{Ni} + ^{58}\text{Ni}$  que é mostrado na Introdução (Figura I.4). Lá, outros efeitos são introduzidos, além das excitações dos estados mais baixos. Verificamos que o efeito do nosso acoplamento é bastante razoável quando comparado com o caso mencionado acima.

Os cálculos em que consideramos  $\hbar\omega_y$  maiores já foram iniciados e estão sendo realizados atualmente. Acreditamos que se incluirmos valores mais altos, equivalentes a outras excitações, nossos valores devem ser melhorados. Podemos também incluir o efeito de transferência de 1 ou 2 nucleons. Estes estudos estão em andamento. Verificamos também que o efeito do acoplamento é bastante sensível mesmo no cálculo semiclássico, onde uma aproximação bem simples é considerada.

## CAPÍTULO 3

### EMIÇÃO ESPONTÂNEA DE NÚCLEOS MAIS PESADOS QUE A PARTÍCULA ALFA

#### 3.a. Introdução

Recentemente H.J. Rose e G.A. Jones<sup>[1]</sup> observaram o decaimento radiativo por emissão de uma partícula mais pesada que a partícula  $\alpha$ , precisamente a emissão de  $^{14}\text{C}$  pelo  $^{223}\text{Ra}$ , decaindo para o  $^{209}\text{Pb}$  com valor  $Q$  de 31.8 MeV. A razão de ramificação medida para emissão de  $^{14}\text{C}$  relativa à emissão de partícula alfa do  $^{223}\text{Ra}$  é  $(8.5 \pm 2.5) \times 10^{-10}$ . Comparando esta razão com a razão dos fatores de Gamow de  $1 \times 10^{-5}$  à  $2 \times 10^{-3}$  (ver tabela 3.1), eles concluíram que a emissão de  $^{14}\text{C}$  do  $^{223}\text{Ra}$  tem uma probabilidade de preformação na faixa de  $7 \times 10^{-5}$  a  $4 \times 10^{-7}$  vezes aquela para emissão alfa do mesmo núcleo.

A descoberta da emissão de  $^{14}\text{C}$  confirmou a predição de Sandulescu e outros<sup>[82]</sup> de modos raros de decaimento radiativo. Gales et al<sup>[83]</sup> e Price e outros<sup>[84]</sup> confirmaram as medidas de Rose e Jones. Price e seus colaboradores na referência [84] descobriram dois casos adicionais de emissão de  $^{14}\text{C}$  pelo  $^{222}\text{Ra}$  e  $^{224}\text{Ra}$ . As razões das taxas destes modos de decaimento exóticos para as correspondentes taxas de emissão de partícula alfa foram encontradas como sendo  $(3.7 \pm 0.6) \times 10^{-10}$  e  $(4.3 \pm 1.2) \times 10^{-11}$ ,



para o  $^{222}\text{Ra}$  e o  $^{224}\text{Ra}$ , respectivamente. Na referência [1] estas razões de ramificação experimentais foram comparadas somente com as razões dos fatores de Gamow para barreiras coulombianas puras, com "cut off" a uma curta distância (contato), os valores de R parametrizados como  $r_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$ , onde  $A_1$  e  $A_2$  são os números de massa dos dois fragmentos. Os valores de  $r_0$  na faixa de 1.15 a 1.25 fm foram tentados, tendo como resultado que os fatores de Gamow, levariam à razões de ramificação de várias ordens de magnitude mais altas que os valores observados. A conclusão da referência é que a taxa de emissão do  $^{14}\text{C}$  pode ser entendida como um fenômeno de penetração de barreira suavizado por um fator de probabilidade de preformação na faixa de  $7 \times 10^{-5}$  a  $4 \times 10^{-7}$  vezes a probabilidade de preformação para a emissão de partícula alfa do mesmo núcleo.

### 3.b. Fissão Espontânea

Fissão nuclear é uma reação extremamente complexa. No processo de fissão estamos lidando com um rearranjo cataclísmico de um único núcleo em dois núcleos. Mais de quatro décadas se passaram desde a descoberta da fissão e um enorme número de artigos têm sido publicados sobre aspectos teóricos e experimentais da fissão.

Uma das mais importantes características do processo de fissão é a distribuição de massa. Embora uma grande quantidade de dados experimentais sobre a distribuição de massa durante o processo de fissão para vários núcleos sob uma variedade de condições tenha sido obtida durante muitos anos, não existe ainda nenhuma teoria razoável que explique todas as observações. É bem conhecido experimentalmente, por exemplo, que a distribuição de massa para um sistema particular varia com a energia de excitação e que a distribuição de massa depende do número de massa  $A$  do sistema que está fissionando. Vários modelos teóricos têm sido sugeridos para explicar estes dados sem um completo sucesso.

Por outro lado, sabe-se que é possível um núcleo no seu estado fundamental tunelar através da barreira de fissão e espera-se que a probabilidade de tunelar através de uma barreira com uma determinada largura dependa exponencialmente da raiz quadrada da altura da barreira. Para os elementos mais pesados conhecidos, a fissão espontânea é um dos mais prováveis modos de decaimento.

Além da altura da barreira, outras propriedades da barreira de interesse na fissão são a curvatura da barreira no ponto de sela e a largura total da barreira. A curvatura é importante na determinação da penetração quântica e das propriedades de reflexão que determinam a taxa na qual a barreira pode ser superada como uma função da energia. A largura total da barreira, ou mais

especificamente, sua forma total, é de interesse para determinar as taxas de penetração de barreira que determinam as meias vidas da fissão espontânea.

Neste capítulo, estudamos o caso de emissão espontânea de  $^{14}\text{C}$  pelo  $^{223}\text{Ra}$  considerando três potenciais diferentes. Primeiramente mostramos os cálculos desenvolvidos por Rose e Jones<sup>[1]</sup> usando o potencial coulombiano somente. Depois estudamos os fatores de penetração considerando o potencial de Christensen e Winther<sup>[66]</sup>. Finalmente, consideramos o potencial de proximidade de Blocki e colaboradores<sup>[28,85]</sup> e comparamos os três casos.

### 3.c. A Análise de Rose e Jones

Escrevemos a largura de decaimento  $\Gamma$  para a emissão de  $\alpha$  ou  $^{14}\text{C}$  como

$$\Gamma = \frac{\hbar g}{T} P \quad (3.1)$$

onde  $P$  é o fator de penetração de barreira,  $T$  é o período do movimento radial do "cluster" na região interna e  $g$  é um fator de preformação para o "cluster".

Rose e Jones calcularam o coeficiente de penetração para a barreira coulombiana pura como é mostrada na Figura 3.1.

Para emissão de onda  $S$  a amplitude de onda é uma solução da

equação de Schrödinger

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2m_c}{\hbar^2} \left( E_c - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \right) \psi = 0 \quad , \quad (3.2)$$

onde  $m_c$  é a massa do "cluster" e  $E_c$  sua energia cinética à uma grande distância do núcleo, isto é,  $E_c = 1/2 m_c v^2$ , onde  $v$  é a velocidade com a qual o cluster é observado quando ele deixa o núcleo.

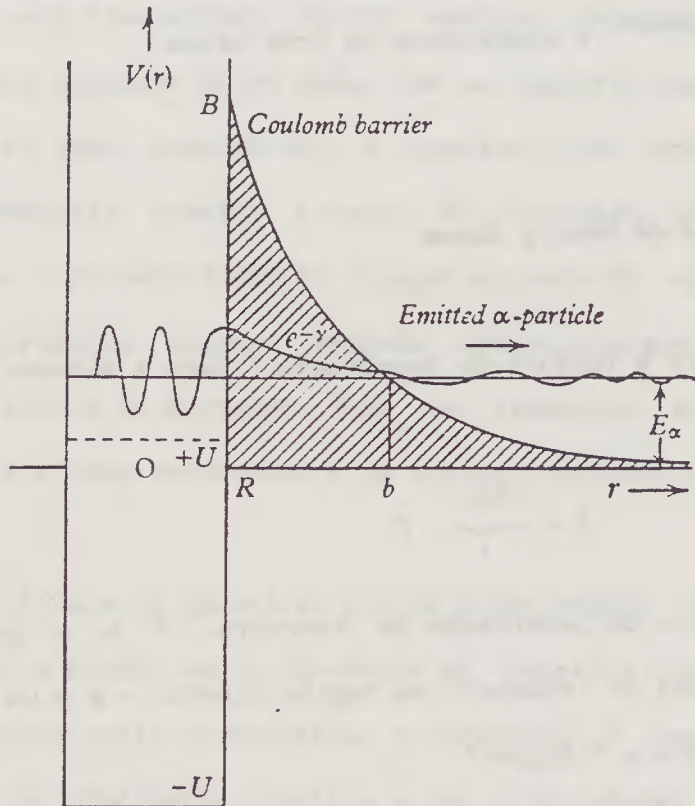


FIGURA 3.1: Teoria do Decaimento  $\alpha$

Como  $E_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{b}$ , a equação (3.2) pode também ser escrita como

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + 2 \frac{m_c Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right) \psi = 0 \quad (3.3)$$

Para  $R \leq r \leq b$  o coeficiente de  $\psi$  é negativo. Assumimos, portanto, uma solução da forma

$$\psi \approx e^{-\gamma(r)} \quad (3.4)$$

onde  $\gamma(r)$  é uma função de  $r$  que varia lentamente tal que  $d^2\gamma/dr^2$  pode ser desprezado. Da natureza física do problema, esperamos que  $d\gamma/dr$  seja positivo. Substituindo em (3.3) obtemos

$$\frac{d\gamma}{dr} = \sqrt{\frac{m_c Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)^{1/2}} \quad (3.5)$$

e fazendo a integração entre os limites  $b$  e  $R$  (usando a substituição  $\cos^2 x = r/b$  e os valores limites  $\gamma(b) = \gamma$ ,  $\gamma(R) = 0$ ), encontramos

$$\gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \left[ \cos^{-1} \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} (1 - R/b)} \right] \quad (3.6)$$

ou, em termos de energias

$$\gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \left[ \cos^{-1} \sqrt{\frac{Ec}{B}} - \sqrt{\frac{Ec}{B} \left( 1 - \frac{Ec}{B} \right)} \right] \quad (3.7)$$



onde  $B = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R}$  é a altura da barreira. O fator de penetração de barreira é dado por

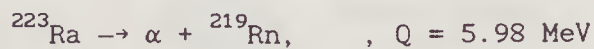
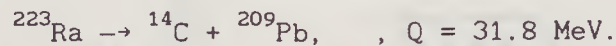
$$P = e^{-2\gamma} \quad (3.8)$$

e, no limite de barreiras altas,  $R \rightarrow 0$  e  $B \rightarrow \infty$ , temos que

$$\gamma \longrightarrow \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (3.9)$$

A energia  $E_c$  na equação (3.7) é o valor  $Q$  para o decaimento.

Para



Usando a equação (3.7) Rose e Jones calcularam os fatores de penetração dados na Tabela 3.1. O raio  $R$  é obtido de

$$R = r_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) \quad (3.10)$$

e eles usaram o mesmo valor de  $r_0$  para os decaimentos  $\alpha$  e  ${}^{14}\text{C}$ .

Eles usaram três valores do parametro  $r_0$ , mostrados na Tabela.

	$r_0 = 1.15 \text{ fm}$	$r_0 = 1.2 \text{ fm}$	$r_0 = 1.25 \text{ fm}$
$P_c$	$5.224 \times 10^{-32}$	$4.697 \times 10^{-30}$	$3.591 \times 10^{-28}$
$P_\alpha$	$4.595 \times 10^{-27}$	$2.751 \times 10^{-26}$	$1.277 \times 10^{-25}$
$P_c/P_\alpha$	$1.2 \times 10^{-5}$	$1.7 \times 10^{-4}$	$2.2 \times 10^{-3}$
$\left(\frac{g_c}{g_\alpha} \cdot \frac{T_\alpha}{T_c}\right)$	$7.08 \times 10^{-5}$	$5.00 \times 10^{-6}$	$4.00 \times 10^{-7}$

TABELA 3.1

De acordo com a equação (3.1) a razão de ramificação para emissão dos núcleos  $^{14}\text{C}$  relativa a partículas  $\alpha$  é

$$\frac{\Gamma_c}{\Gamma_\alpha} = \frac{g_c}{g_\alpha} \frac{T_\alpha}{T_c} \frac{P_c}{P_\alpha} \quad (3.11)$$

Usando as razões dos coeficientes de penetrabilidade  $P_c/P_\alpha$  da Tabela 3.1 e o valor experimental de  $\Gamma_c/\Gamma_\alpha = 8.5 \times 10^{-10}$  podemos calcular  $(g_c/g_\alpha \cdot T_\alpha/T_c)$ . Esta quantidade é mostrada também na Tabela 3.1. Assumindo  $T_\alpha/T_c \approx 1$ , a razão dos fatores de preformação para o decaimento de  $^{14}\text{C}$  em relação à alfa fica na faixa de  $4 \times 10^{-7}$  a  $7 \times 10^{-5}$ .

### 3.d. A barreira de Christensen-Winther

Nesta secção usamos uma barreira mais realista para calcular os coeficientes de penetração para os decaimentos de  $^{14}\text{C}$  e alfa para ver se as conclusões de Jones e Rose são sensíveis à escolha da barreira. Usamos uma aproximação W.K.B. para calcular os coeficientes de penetrabilidade, isto é, a expressão (1.51) do capítulo 1,

$$P = \exp \left[ -2 \int_b^c p(r) dr \right] \quad (3.12)$$

com

$$p(r) = \frac{1}{\hbar} [2m (V(r) - E)]^{1/2}, \quad (3.13)$$

onde  $b$  e  $c$  são os "turning points" interno e externo, respectivamente, isto é,  $V(b) = V(c) = E$ .

Usamos o potencial de Christensen e Winther<sup>[66]</sup> mais o potencial coulombiano em ambos os casos, no decaimento alfa e no do  $^{14}\text{C}$ , portanto, escrevemos o potencial como

$$V(r) = U(r) + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (3.14)$$

com

$$U(r) = -50 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \exp \left[ -\frac{r - R_1 - R_2}{\alpha} \right] \text{ MeV} \quad (3.15)$$

sendo

$$R_1 = 1.233 A_1^{1/3} - 0.978 A_1^{-1/3} \text{ fm} \quad (3.16)$$

e

$$\alpha = 0.63 \text{ fm} \quad (3.17)$$

Os índices 1 e 2 se referem a partícula emitida e ao núcleo filho. Os resultados obtidos se encontram na Tabela 3.2

$P_c$	$P_\alpha$	$P_c/P_\alpha$	$\left( \frac{g_c}{g_\alpha} \frac{T_\alpha}{T_c} \right)$
$3.992 \times 10^{-27}$	$2.135 \times 10^{-25}$	$1.869 \times 10^{-2}$	$4.545 \times 10^{-8}$

**TABELA 3.2:** "Coeficientes de penetrabilidade usando aproximação WKB e o potencial de Christensen-Winther"

Para comparar estes resultados com aqueles da referência [1], o melhor valor de  $r_0$  encontrado é 1.2 fm, como pode ser visto nas figuras 3.2 e 3.3, onde plotamos os potenciais para os dois casos,

precisamente, o potencial de Christensen-Winther e o potencial Coulombiano somente. Das Tabelas 3.1 e 3.2 vemos que a razão  $g_c/g_\alpha$  nos cálculos W.K.B. é uma centena de vezes menor que aquela que usa o potencial coulombiano somente e a expressão (3.7). As Figuras 3.2 e 3.3 ajudam-nos a entender esta diferença. Podemos ver que os valores usados na referência 1 não são os melhores para comparar os resultados. Então, tomamos o valor de  $r_0$  tal que  $r = b$ , o "turning point" interno. Para emissão  $\alpha$ ,  $r_0 = 1.21$  fm e para a emissão de  $^{14}\text{C}$ ,  $r_0 = 1.24$  fm. Com estes valores, as razões  $P_c/P_\alpha$  e  $g_c/g_\alpha$  calculadas usando o potencial coulombiano puro podem ser melhor comparadas com aquelas que usam o potencial de Christensen-Winther. Encontramos  $P_{c_{r_0=1.24}} / P_{\alpha_{r_0=1.21}} = 1.034 \times 10^{-3}$  e  $g_c/g_\alpha = 8.218 \times 10^{-7}$ . Podemos ver que a razão dos coeficientes de penetrabilidade é dez vezes menor que aquele que usa a aproximação W.K.B. com o potencial de Christensen-Winther.

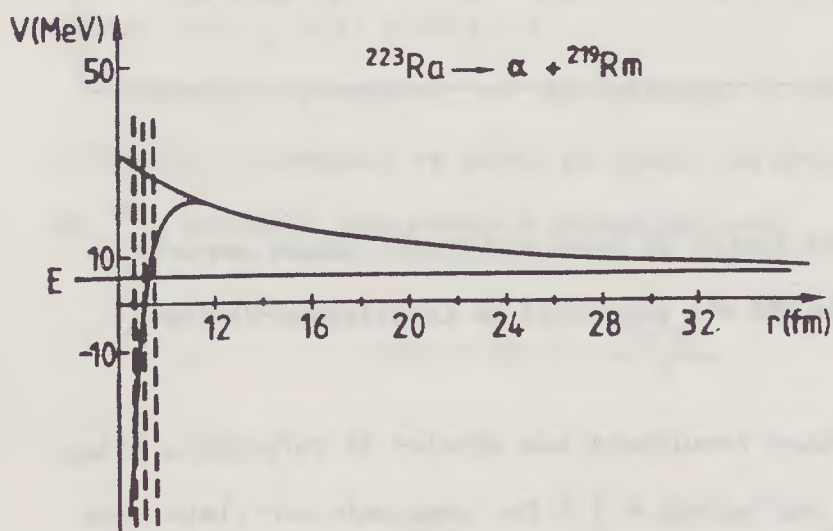


FIGURA 3.2: (Veja texto da Figura 3.3)



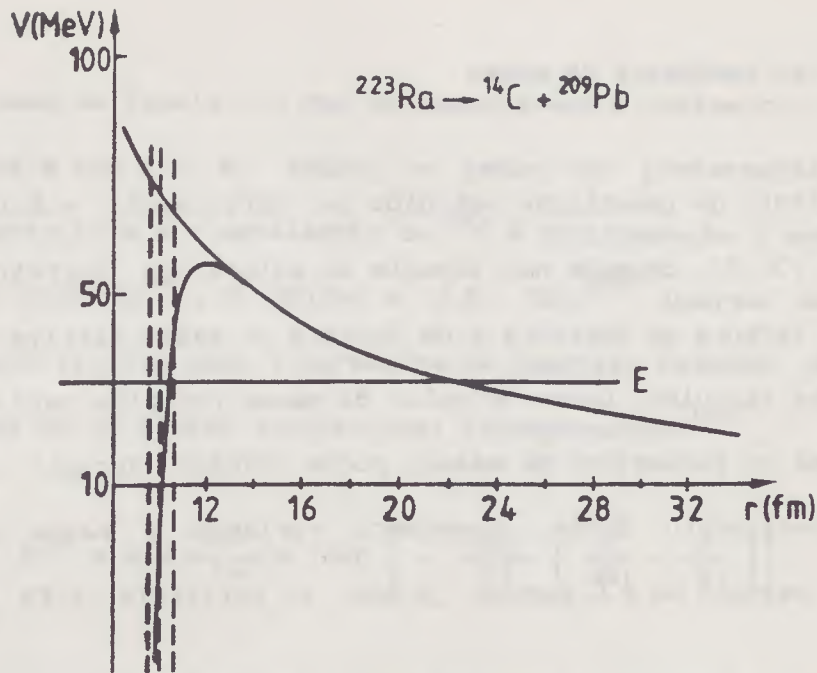


FIGURA 3.3: Comparação entre potencial Coulombiano e C-W.

As linhas pontilhadas indicam os valores de  $r_0$

Isto pode ser explicado olhando-se para as Figuras 3.2 e 3.3. O coeficiente de penetrabilidade na equação (3.12) depende da altura da barreira e para o potencial de Christensen-Winther a barreira é mais baixa que aquela que considera o potencial coulombiano puro. Isto torna os valores dos coeficientes de penetrabilidade no primeiro caso maiores que aqueles no segundo caso, para ambos decaimentos  $\alpha$  e do  $^{14}\text{C}$ . Por outro lado, a barreira para a emissão de  $^{14}\text{C}$  é mais alta que aquela para a emissão alfa, o que pode explicar a diferença encontrada entre os dois resultados.

### 3.e. Variação do parâmetro de massa

O coeficiente de penetração definido na aproximação W.K.B., pela integral (3.12), depende não somente da altura da barreira, mas também da largura da barreira e da inércia ou massa efetiva.

Nos nossos cálculos, usamos o valor da massa reduzida para  $\underline{m}$ , mas sabemos que os parâmetros de massa podem variar durante os processos de decaimento. Então, começamos variando a massa em (3.12) para a emissão de  $^{14}\text{C}$  apenas, já que a partícula alfa é muito estável.

Parametro de Inercia	$P_c$	$P_c/P_\alpha$	$(g_c/g_\alpha \cdot T_\alpha/T_c)$
1.0 m	$3.992 \times 10^{-27}$	$1.869 \times 10^{-2}$	$4.545 \times 10^{-8}$
1.5 m	$4.658 \times 10^{-33}$	$2.181 \times 10^{-8}$	$3.895 \times 10^{-2}$
1.6 m	$4.054 \times 10^{-34}$	$1.898 \times 10^{-9}$	0.447
1.7 m	$3.804 \times 10^{-35}$	$1.781 \times 10^{-10}$	4.771
1.8 m	$3.822 \times 10^{-36}$	$2.173 \times 10^{-13}$	47.478

TABELA 3.3: Razões da penetrabilidade e fatores de pré-formação, variando o parâmetro de inércia. Supomos que  $T_c$  tenha a mesma ordem de magnitude de  $T_\alpha$  ( $T_\alpha \approx T_c$ ).  $P_c$  também está incluído na tabela.

Vemos da Tabela 3.3 que se aumentarmos o parâmetro de massa reduzida  $m$  até 1.6  $m$ , então, o fator de preformação para o decaimento alfa e o decaimento de  $^{14}\text{C}$  é praticamente o mesmo.

G. Schütte<sup>[86]</sup>, P. Möller e J.R. Nix<sup>[87]</sup> usaram um valor constante efetivo para o parâmetro de inércia, fazendo uma média da massa de um fluido irrotacional incompressível<sup>[88]</sup>

$$B^{\text{irr}} = m + \frac{17}{15} m \exp \left[ - \frac{128}{51} \left( \frac{R}{R_0} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (3.18)$$

A distância  $R$  entre as duas metades do núcleo é medida em unidades do raio  $R_0$  do núcleo esférico unido e é tomado como

$$R_0 = (1.175 \text{ fm}) A^{1/3}. \quad (3.19)$$

Para  $R = R_0$ , temos

$$B^{\text{irr}} = 1.61 m$$

em concordância com nosso resultado anterior. Obviamente este resultado depende do valor de  $R$  escolhido. A inércia irrotacional pode variar entre 2.13  $m$  até cerca de 1.05  $m$  durante a deformação da sela até o ponto de cissão. Tomando um valor médio, temos aproximadamente 1.59  $m$ , concordando com os nossos resultados.

### 3.f. O potencial de proximidade

Um pouco depois do trabalho de Rose e Jones<sup>[1]</sup>, Yi-Jin Shi e J. Swiatecki<sup>[89]</sup> usando como barreira um potencial de proximidade para o cálculo de penetrabilidade, mostraram que a razão de ramificação sai razoavelmente próxima ao valor medido, com  $g_c \approx g_\alpha$ . Eles construíram a barreira adicionando à repulsão coulombiana entre os fragmentos a atração de proximidade nuclear de Blocki e seus colaboradores<sup>[28,85]</sup>. Após o contato dos fragmentos, quando a aproximação de dois fragmentos esféricos deixa de ser aplicável, eles usaram para a energia de deformação uma interpolação suave entre a configuração de contato e a configuração do núcleo pai (onde a energia de deformação é zero por definição). A fórmula explícita para a energia de deformação  $V(L)$  é dada como segue\* :

$$V(L) = -Q + \frac{Z_1 Z_2}{r} + V_p(z) \quad p/L > L_c \quad (3.20)$$

$$V(L) = a (L - L_0)^\nu \quad p/L_0 < L < L_c \quad (3.21)$$

onde  $a$  e  $\nu$  são parâmetros determinados pelo requerimento de um

---

\* NOTE QUE POR CAUSA DA DEFINICAO (3.20), V AQUI CORRESPONDE A  $(V-E) = (V-Q)$  NO CALCULO DE CHRISTENSEN-WINTHER. ESTA DIFERENCA APARECE NA EXPRESSAO (3.27) PARA O FATOR DE GAMOW.

ajuste suave em  $L = L_c$ , sendo  $L$  o eixo maior (isto é, comprimento total) da configuração em questão,  $L_c$  se refere ao seu valor de contato (igual a soma dos diâmetros dos fragmentos,  $L_0 = 2C$ , onde  $C$  corresponde ao raio do sistema composto (o núcleo pai));  $Q$  é a energia liberada na desintegração,  $Z_1$  e  $Z_2$  são os números atômicos dos fragmentos,  $r$  é a distância entre os centros dos fragmentos, e  $z$  é a distância entre as superfícies próximas dos fragmentos.  $V_p$  é o potencial de proximidade, dado por

$$V_p(z) = K \phi(z/b), \quad (3.22)$$

onde  $K = 4\pi \bar{R} \gamma b$ ,  $\bar{R}$  é o raio reduzido do sistema, dado por

$$\bar{R} = \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)}, \quad (3.23)$$

$\gamma$  é o coeficiente de tensão superficial nuclear,  $b$  é a largura da superfície nuclear ( $b = 1$  fm) e  $\phi$  é a função de proximidade universal da referência [28]. Para  $\gamma$  Shi e Swiatecki usaram a expressão dada na referência [28]:

$$\gamma = 0.9517 \left[ 1 - 1.7826 \left( \frac{N - Z}{A} \right)^2 \right] \text{ MeV/fm}^2, \quad (3.24)$$

onde  $N$ ,  $Z$ ,  $A$  são os números de neutrons, prótons e o número de massa do núcleo pai, respectivamente. O raio central  $C_i$  ( $C_1$ ,  $C_2$  ou



C) é dado em termos do raio efetivo  $R_1$  por

$$C_1 \approx R_1 - \frac{b^2}{R_1} \quad (3.25)$$

A referência [28] dá a seguinte fórmula semi-empírica para  $R_1$  em termos do número de massa  $A$

$$R_1 = 1.28 A^{1/3} - 0.76 + 0.8 A^{-1/3} \text{ fm} \quad (3.26)$$

O fator de penetração de Gamow  $G$  é dado por

$$\begin{aligned} G &= \exp \left[ \frac{2}{\hbar} \int_{z_0}^{z_{\text{salida}}} \sqrt{2M_r V} \, dz \right] \\ &= \exp \left[ 2 \sqrt{2A_r} \frac{mc^2}{\hbar c} \int_{z_0}^{z_{\text{salida}}} \sqrt{V} \, dz \right] \\ &= \exp \left[ (0.43749 / \sqrt{\text{MeV}}) (b/\text{fm}) \sqrt{A_r} S \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde  $M_r$  é a massa efetiva apropriada ao grau de liberdade de desintegração, o qual Shi e Swiatecki tomaram simplesmente sendo como a massa reduzida dos fragmentos que estão se separando, desde que a maior parte da penetração barreira tem lugar no regime de "pós-cisão". A massa reduzida,  $A_1 A_2 / A$ , é denotada por  $A_r$  e  $mc^2$  é a unidade de massa nuclear, que foi tomada como 931.5 MeV. A

integral de penetração S é dada por

$$S = \int_{\xi_0}^{\xi_{\text{salda}}} \sqrt{V(\xi)} \, d\xi \quad , \quad (3.28)$$

onde  $\xi = z/b$ ,  $\xi_0 = (L_0 - L_c)/b = 2(C - C_1 - C_2)/b$  e  $\xi_{\text{salda}}$  é definido por  $V(\xi_{\text{salda}}) = 0$ . A integral S pode ser calculada analiticamente no intervalo  $\xi_0 < \xi < 0$  como também além do ponto onde o potencial de proximidade é desprezível, digamos  $\xi > 6$ . Na região intermediária,  $0 < \xi < 6$ , é feita a integração numérica. Se a regra de Simpson é usada considerando  $\sqrt{V_0}$ ,  $\sqrt{V_1}$ , ...,  $\sqrt{V_6}$  em  $\xi = 0$ , encontra-se a seguinte aproximação para S

$$\begin{aligned} S = & \sqrt{V_0} \left[ (-\xi_0)^{-1} + 1/2 (V'_0 / V_0) \right]^{-1} \\ & + 1/3 \left[ \left( \sqrt{V_0} + \sqrt{V_6} \right) + 2 \left( \sqrt{V_2} + \sqrt{V_4} \right) + 4 \left( \sqrt{V_1} + \sqrt{V_3} + \sqrt{V_5} \right) \right] \\ & - \rho_6 \sqrt{V_6} + \frac{D}{Q} \tan^{-1} \sqrt{V_6/Q} \quad , \quad (3.29) \end{aligned}$$

onde  $\rho_6 = (r_c/b) + 6$  é a separação central em unidades de b em  $\xi = 6$ ,  $D = Z_1 Z_2 e^2$  e  $Q = M - M_1 - M_2$  é a energia liberada na desintegração. O primeiro termo em S (a contribuição da região  $\xi_0 < \xi < 0$ ) é obtido fazendo-se uso da seguinte expressão para  $v$  e  $a$  (que resulta de aplicar a condição de continuidade para V em  $z = 0$ ):

$$\nu = (V'_0 / V_0) (-\xi_0) = (V'_0 / V_0) (L_c - L_0) , \quad (3.30)$$

$$a = V_0 / (-\xi_0)^\nu = V_0 / (L_c - L_0)^\nu , \quad (3.31)$$

onde

$$\begin{aligned} V'_0 &= \left. \frac{dV}{d\xi} \right|_{\xi=0} = - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_c^2} + K \frac{d}{dz} \phi(0) \\ &= - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_c^2} + 0.9270 K. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Aqui  $r_c$  é a separação central de contato e 0.9270 é a derivada adimensional de  $\phi$  em  $\xi = 0$ .

Para calcular  $\phi(\xi)$  a aproximação dada na referência [85] pode ser usada:

$$\phi(\xi) \approx -4.41 e^{-\xi/0.7176} \quad p/\xi \geq 1.9475 \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \phi(\xi) \approx -1.7817 + 0.9270 \xi + 0.01696 \xi^2 - 0.05148 \xi^3 \\ p/0 \leq \xi \leq 1.9475 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Alternativamente  $\phi(\xi)$  é tabelado na referência [28]. Os sete valores de  $\phi$  requeridos para calcular a equação (3.29) são:

$$\phi(0) = - 1.7817$$

$$\phi(1) = - 0.8594$$

$$\phi(2) = - 0.2689$$

$$\phi(3) = - 0.0674$$

$$\phi(4) = - 0.0167$$

$$\phi(5) = - 0.0042$$

$$\phi(6) = - 0.0010$$

De fato, nas referências [89] e [90], Yi-Jin Shi e W.J. Swiatecki desenvolveram um modelo unificado de emissão de ions pesados e emissão  $\alpha$  como uma forma de fissão. As razões resultantes dos fatores de penetração para emissão  $\alpha$  e de  $^{14}\text{C}$  pelo  $^{222}\text{Ra}$ ,  $^{223}\text{Ra}$  e  $^{224}\text{Ra}$  foram encontradas nas referências [89] e [90] como  $1.678 \times 10^{-9}$ ,  $6.895 \times 10^{-9}$  e  $6.510 \times 10^{-11}$ , respectivamente. As razões destes números relativas as razões de ramificação medidas são 4.5, 11.3 e 1.43. Shi e Swiatecki compararam seus resultados comos valores experimentais dados pelo grupo de Price na referência [84], isto é,  $3.7 \times 10^{-10}$ ,  $6.1 \times 10^{-10}$  e  $4.3 \times 10^{-11}$  para o  $^{222}\text{Ra}$ ,  $^{223}\text{Ra}$  e  $^{224}\text{Ra}$ , respectivamente.

Para testar os valores absolutos das meias vidas  $\tau_{\alpha}$ ,  $\tau_{\text{C}}$ , eles escreveram-nas como o produto de um fator de frequência da ordem das oscilações nucleares coletivas (na faixa de  $10^{-22}$  a  $10^{-21}$  seg) vezes um fator de penetração, ou seja,

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha} &= \tau_0^{\alpha} G_{\alpha} \\ \tau_c &= \tau_0^c G_c\end{aligned}\tag{3.35}$$

Os valores encontrados para o  $^{223}\text{Ra}$  estão na Tabela 3.4.

	G (Calculado)	$\tau$ (experimental)	$\tau_0$ (deduzido)
$\alpha$ -decay	$G_{\alpha} = 4.71 \times 10^{26}$	$\tau_{\alpha} = 0.985 \times 10^6$	$2.09 \times 10^{-21}$
$^{14}\text{C}$ -decay	$G_c = 6.842 \times 10^{34}$	$\tau_c = 1.62 \times 10^{15}$	$2.36 \times 10^{-20}$

TABELA 3.4: Resultados da Referência [90]

A última coluna mostra os valores de  $\tau_0$  deduzidos das meias vidas experimentais e os valores de G calculados são mostrados na tabela. Podemos ver que os valores de  $\tau_0$  são aproximadamente aqueles que se deveria esperar. (Da equação 3.35 vemos que Shi e Swiatecki consideram  $g_{\alpha} \approx g_c$  e  $G = \frac{1}{P}$ ).

### 3.g. Comparação entre as várias aproximações

Olhando-se para as Figuras 3.4 e 3.5 podemos ver que o potencial de proximidade reduz a altura da barreira à ser



penetrada quando se usa o potencial coulombiano puro, mas é mais alto que o potencial de Christensen e Winther. Se esta fosse a única característica importante, os resultados para o fator de penetração usando o potencial de proximidade seriam intermediários entre aqueles considerando o potencial coulombiano puro e o nosso usando o potencial de Christensen-Winther. Mas isto não é verdade. Portanto, o que é realmente importante é a largura da barreira entre os "turning points", isto é, o potencial usado por Swiatecki e Yi-Jin Shi é mais largo que os outros dois e isto é mais pronunciado para o caso do  $^{14}\text{C}$  que para o da partícula alfa. Este fato torna a penetrabilidade menor, principalmente no caso do  $^{14}\text{C}$ , e faz a razão  $P_c/P_\alpha$  tornar-se menor (veja Tabela 3.5)

	Potencial coulombiano	Potencial de Christensen e Winther	Potencial de proximidade
$P_\alpha$	$4.092 \times 10^{-26}$	$2.135 \times 10^{-25}$	$2.119 \times 10^{-27}$
$P_c$	$4.232 \times 10^{-29}$	$3.992 \times 10^{-27}$	$1.461 \times 10^{-35}$
$P_c/P_\alpha$	$1.034 \times 10^{-3}$	$1.869 \times 10^{-2}$	$6.895 \times 10^{-9}$

TABELA 3.5

Uma outra razão para esta diferença nos cálculos da penetrabilidade é o uso do raio nuclear menor nos cálculos de Swiatecki. Antes de tudo, devemos perceber que o raio relevante para localizar as superfícies dos núcleos que estão interagindo é o raio central  $C$  ou ainda o aproximadamente equivalente raio de meia densidade  $C_{1/2}$  (onde a densidade nuclear cai à metade de seu valor central) e não o raio efetivo  $R$ , que é a quantidade aproximadamente proporcional à  $A^{1/3}$  (veja referência [28]). Então o raio central  $C$  (ou  $C_{1/2}$ ) não seria proporcional a  $A^{1/3}$  mesmo se os núcleos fossem incompressíveis e  $R$  fosse exatamente proporcional a  $A^{1/3}$ . Em vez disso,  $C$  está relacionado (aproximadamente) com  $R$  pela equação (3.25). O resultado é que  $C$  é menor que  $R$  por uma quantidade que aumenta com o decréscimo do tamanho dos núcleos. Para o núcleo leve em questão, a diferença pode ser bastante substancial. (veja Tabela 3.6)

$^{223}\text{Ra} \rightarrow ^{14}\text{C} + ^{209}\text{Pb}$	Potencial de Christensen e Winther	Potencial de Proximidade	Potencial coulombiano
R <sub>1</sub>	2.568	2.656	2.890
R <sub>2</sub>	7.152	6.971	7.109
C <sub>1</sub>	-	2.281	-
C <sub>2</sub>	-	6.827	-
$^{223}\text{Ra} \rightarrow \alpha + ^{219}\text{Rn}$			
R <sub>1</sub>	1.341	1.776	1.904
R <sub>2</sub>	7.268	7.086	7.220
C <sub>1</sub>	-	1.213	-
C <sub>2</sub>	-	6.945	-

TABELA 3.6

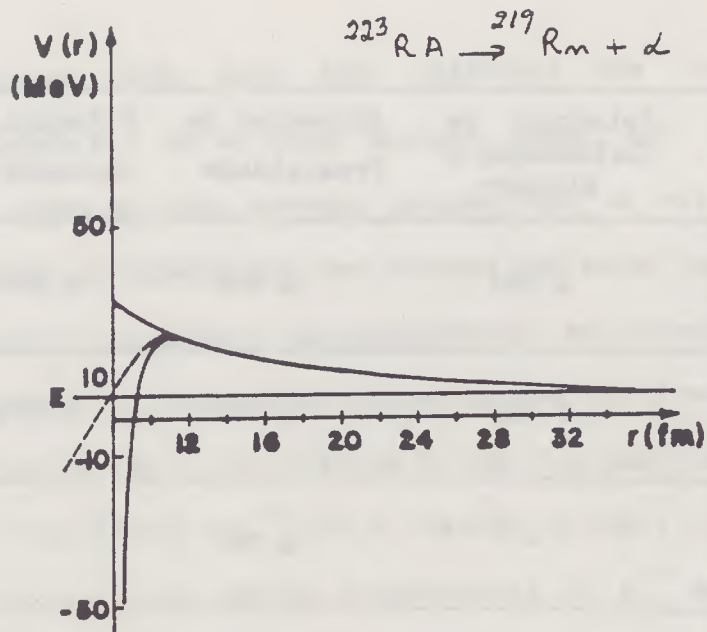


FIGURA 3.4: Comparação entre os potenciais coulombiano, de proximidade (linha pontilhada) e o de Christensen-Winther.

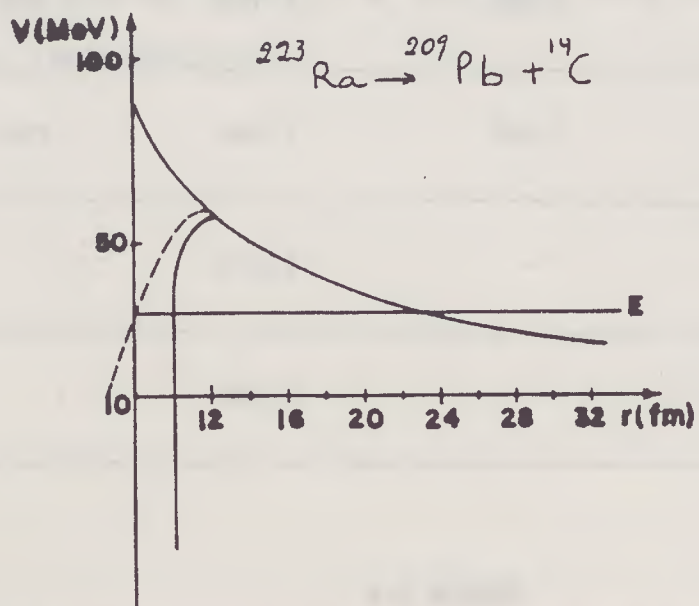


FIGURA 3.5: Comparação entre os potenciais coulombiano, de proximidade (linha pontilhada) e o de Christensen-Winther.

### 3.h. Conclusões

Neste capítulo discutimos dois pontos de vista diferentes sobre o fator de preformação na emissão espontânea do  $^{223}\text{Ra}$ .

Por um lado temos Rose e Jones dizendo que a diferença nas larguras de decaimento para a emissão alfa e de  $^{14}\text{C}$  não pode ser explicada pelos diferentes coeficientes de penetração. Isto é devido à diferença nos fatores de preformação e eles encontraram a razão entre estes fatores de preformação em torno de  $10^{-6}$ , extraída dos valores experimentais.

Por outro lado, Swiatecki e Yi-Jin Shi afirmam que a diferença em  $\Gamma_c$  e  $\Gamma_\alpha$  pode ser explicada pelos diferentes coeficientes de penetração, se uma barreira realista é considerada no cálculo da penetrabilidade. Eles concluem que os fatores de preformação podem ser aproximadamente os mesmos e também que  $g_\alpha = g_c = 1$ .

Consideramos um tipo de barreira diferente, e encontramos valores para a razão dos fatores de preformação diferentes daqueles discutidos acima. Apesar do fato de considerarmos uma forma realística para o potencial, não podemos concluir que a probabilidade de haver um  $^{14}\text{C}$  preformado dentro do núcleo de  $^{223}\text{Ra}$  seja da mesma ordem de magnitude da probabilidade de formação de uma partícula alfa dentro do mesmo núcleo.

A principal conclusão deste estudo é que a penetrabilidade é



altamente dependente da forma da barreira. Mesmo se usarmos barreiras realísticas as diferenças nos valores preditos para os coeficientes de penetração são tão grandes que não podemos confirmar com nossos cálculos qualquer uma das conclusões anteriores obtidas na referência [1] por Rose e Jones ou na referência [89] por Yi-Jin Shi e W.J. Swiatecki.

## CAPÍTULO 4

### ESTUDOS DO TAMANHO NUCLEAR NA TEORIA DE DECAIMENTOS EXÓTICOS

Nos estudos de decaimentos exóticos, verifica-se que a razão de ramificação para emissões espontâneas de fragmentos mais pesados que a partícula alfa é muito sensível à forma da barreira de potencial. Vários casos de decaimento radioativo envolvendo a emissão  $^{14}\text{C}$ , Ne, Mg e Si foram observados desde 1984. Neste capítulo faremos um estudo sobre o tamanho do raio nuclear durante estes processos de decaimento. Inicialmente faremos um breve resumo sobre os estudos e descobertas já feitos.

#### 4.a. Introdução

Todos os núcleos com  $Z > 40$  são metaestáveis em relação a emissão de íons pesados e podem decair em dois fragmentos com massas  $M_1$  e  $M_2$ , com  $Q > 0$ . O caso de  $A_2 = 4$  corresponde ao decaimento alfa; casos em que  $A_1 \approx A_2$  correspondem à fissão espontânea e, aos casos intermediários, em que  $4 < A_2 < A_1$ , chamamos de decaimento de partículas pesadas. Entre os núcleos pesados, há milhares de possíveis decaimentos de dois corpos com  $Q$

positivo. Para a maioria destas combinações de  $A_1Z_1$  e  $A_2Z_2$ , as taxas de decaimento são muito baixas para serem detectáveis, mas para certas combinações correspondendo à fragmentos com camadas quase fechadas, a barreira coulombiana alta (proporcional à  $Z_1Z_2$ ) é parcialmente compensada por um Q alto, e o decaimento pode ser detectável.

Em 1980, um grupo de rumanos (Poenaru, Sandulescu, Ivascu e outros)<sup>[91]</sup> predisseram que núcleos mais pesados que o chumbo poderiam decair por emissão de íons mais pesados que a partícula alfa. O processo chamado por eles de "fissão superassimétrica", combina, de uma maneira unificada, decaimento alfa, fissão espontânea e emissão de núcleos de massa intermediária. Para facilitar os cálculos das taxas de decaimento de aproximadamente um milhão de combinações de núcleos pais e íons pesados emitidos, eles usaram uma aproximação analítica para a energia potencial como uma função da distância de separação entre os centros de um fragmento pesado e de um leve, começando com um par esférico e terminando com dois fragmentos à separação infinita. Neste modelo, fortes efeitos de camadas são impostos em uma gota líquida se deformando. As consequências deste modelo são:

- 1) todos os núcleos com  $Z > 40$  são metaestáveis em relação à emissão de íons pesados.
- 2) o deuteron, o  $^3\text{He}$  e os isotopos de  $^6\text{He}$  ao  $^{10}\text{He}$  são muito

fracamente ligados para serem emitidos.

3) o  $^5\text{He}$  e outros 150 nuclídeos com  $3 < Z < 25$  podem ser emitidos de certos nuclídeos com  $Z > 83$ , com meias vidas, em princípio detectáveis.

4) os efeitos de camadas do núcleo  $^{208}\text{Pb}$  são tão fortes que o maior dos dois fragmentos está sempre próximo ao chumbo e o menor dos dois tem carga e número de massa dados por

$$Z \approx Z_{\text{pai}} - 82$$

$$A \approx A_{\text{pai}} - 208$$

5) a razão de ramificação para a emissão de núcleos pesados em relação ao decaimento alfa é sempre menor que  $\sim 10^{-9}$ .

Em 1984, Rose e Jones de Oxford<sup>[1]</sup>, descobriram que uma vez em  $10^9$  vezes o  $^{223}\text{Ra}$  decai por emissão de um núcleo de  $^{14}\text{C}$  de 30 MeV, em vez da partícula alfa normal de 5 MeV. Danos de radiação no seu detector diodo de silicone os desencorajaram à procurar por outros modos raros de decaimento de núcleos pesados. Sua descoberta imediatamente estimulou outros grupos ao redor do mundo à empregar técnicas menos susceptíveis à danos de radiação e procurar por outros núcleos pesados. Rose e Jones fizeram o experimento durante 383 dias e obtiveram 19 eventos.

Durante o ano de 1984 os grupos de Aleksandrov e Oglobin (Moscou)<sup>[92]</sup> e S. Gales (França)<sup>[83]</sup> confirmaram as descobertas de



Rose e Jones usando outras técnicas experimentais. Em 1985, Price e seu grupo<sup>[84]</sup> observaram a emissão de  $^{14}\text{C}$  pelo  $^{222}\text{Ra}$  e  $^{224}\text{Ra}$  e o decaimento radioativo do  $^{24}\text{Ne}$  pelo  $^{232}\text{U}$ <sup>[93]</sup>.

Ainda em 1984, o grupo de Poenaru<sup>[82]</sup> estimou, usando o seu modelo, as meias vidas de vários núcleos pesados relativas à emissão espontânea de vários "clusters" mais pesados que a partícula alfa. Eles concluíram que existia uma grande probabilidade de se obter combinações de pais e "clusters" pesados, considerando filhos com números mágicos ou quase mágicos.

A regra para se supor qual modo de decaimento deve ter  $Q$  suficientemente alto para ocorrerem taxas de decaimento detectáveis é fazer o fragmento mais pesado estar próximo ao  $^{208}\text{Pb}$ , que tem um grande defeito de massa devido às suas camadas de prótons e nêutrons próximas, e o que leva ao fragmento mais leve deve ser um nuclídeo rico em nêutrons, par-par e fortemente ligado, tal que o pai é suficientemente estável para ser estudado. Um exemplo seria o  $^{232}\text{U} \rightarrow ^{208}\text{Pb} + ^{24}\text{Ne}$ , que tem uma razão de ramificação de  $\sim 10^{-12}$  relativamente ao decaimento alfa. Poucos casos de emissão de fragmentos pesados têm uma razão de ramificação mais alta que esta, o que explica porque partículas radioativas pesadas não foram descobertas por muitas décadas desde a descoberta da radioatividade alfa.

Cerca de quinze casos de decaimentos radioativos diferentes foram observados desde a observação do decaimento do  $^{223}\text{Ra}$  em  $^{14}\text{C}$ .



Os núcleos observados decaem em  $^{14}\text{C}$ ,  $^{24}\text{Ne}$ ,  $^{26}\text{Ne}$ , Si e Mg, basicamente, e espera-se encontrar outros "clusters" mais pesados.

Para se escolher os casos favoráveis para o estudo experimental, necessita-se de um modelo quantitativo para as taxas de decaimento. Todos eles envolvem o tunelamento através de uma barreira de potencial. Eles são divididos em duas classes basicamente: os modelos de "cluster" que descrevem um aglomerado de nucleons como sendo formados dentro do núcleo pai, com uma probabilidade que decresce com o tamanho do cluster, e que então tunela para fora sem mudar de tamanho ou forma; e os modelos unificados que tratam o decaimento alfa, a radioatividade de partículas pesadas e a fissão fria (espontânea) como processos equivalentes, diferindo somente no grau de assimetria de massa, nos quais o núcleo pai se deforma em dois fragmentos, geralmente mantendo constante os volumes que se distorcem em fragmentos separados.

A seguir descreveremos o modelo por nós utilizado e apresentaremos os nossos resultados. Depois, discutiremos outros modelos e faremos a comparação entre os nossos e os resultados obtidos com outros modelos. Finalmente apresentaremos algumas conclusões.

#### 4.b. O Modelo

De acordo com a mecânica clássica, o decaimento não pode ocorrer à menos que  $E$  seja maior que a altura da barreira, o que acontece somente para fissão de núcleos com  $Z^2/A > 49$ , de acordo com o modelo de gota líquida. Em mecânica quântica, a teoria de Gamow e Condon e Gurney de 1928, mostra que a taxa de decaimento é proporcional ao produto de um fator de frequência e um fator de penetração dado na aproximação WKB por

$$P \approx \exp [ -k ], \quad (4.1)$$

onde

$$k = 2 \int_b^c \sqrt{\frac{2m(r)}{h^2} (V(r)-E)} \, dr, \quad (4.2)$$

sendo a integração feita entre os dois "turning points"  $b$  e  $c$ . O parâmetro de massa  $m(r)$  é igual a massa reduzida à distâncias  $r > R_t$  (distância de contato,  $R_t = R_1 + R_2$ ) e depende do modelo específico para distâncias  $r < R_t$ ;  $V(r)$  é a energia da barreira, que inclui o potencial nuclear, o potencial coulombiano, e possivelmente um potencial centrífugo. Nos modelos de "cluster", a taxa de decaimento inclui um fator  $S$  que expressa a probabilidade de preformação de um "cluster" de nucleons particular dentro do

núcleo pai. Em modelos de fissão, o núcleo pai ao se deformar segue um vale em um espaço de configuração de várias variáveis.

É instrutivo considerar o modelo mais simples de um potencial coulombiano puro para fragmentos esféricos em  $r > R_t$  e um poço quadrado em  $r < R_t$ , para o qual a quantidade  $k$  no expoente da penetrabilidade  $P$  é

$$k = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{E}} Z_1 Z_2 e^2 \left[ \cos^{-1} \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} \right] \quad (4.3)$$

onde  $x = E/B$  e  $B = Z_1 Z_2 e^2 / R_t$  é a altura da barreira em  $r = R_t$  (veja eq. 3.7). Até cerca de dez anos atrás, quem olhasse para esta expressão concluiria que somente para o decaimento alfa, o valor de  $k$  seria suficientemente pequeno para se obter taxas de decaimento possíveis de serem medidas. O produto  $Z_1 Z_2$  é, naturalmente, o menor para  $Z_2 \ll Z_1$ . Para o proton, há somente uns poucos nuclídeos ricos em protons para os quais  $Q$  é positivo e as taxas de decaimento competem com a taxa de decaimento beta. Para um grande número de nuclídeos com  $Z > 60$ ,  $Q$  é relativamente grande para o decaimento alfa, devido ao grande defeito de massa do  ${}^4\text{He}$ . Foi somente em 1980 que Sandulescu e outros<sup>[94]</sup> fizeram o cálculo sistemático necessário para descobrir que um grande número de nuclídeos mais pesados que o  ${}^4\text{He}$  teriam um valor  $Q$  suficientemente grande para serem emitidos com uma taxa detectável.

Nossos cálculos foram feitos considerando o potencial de Christensen e Winther<sup>[66]</sup> acrescido do potencial coulombiano, no cálculo da penetrabilidade na expressão (4.1). Este potencial é dado por

$$V(r) = V_N(r) + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (4.4)$$

onde

$$V_N(r) = -50 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \exp \left[ - \frac{r - R_1 - R_2}{\alpha} \right] \text{ MeV} \quad (4.5)$$

com

$$R_1 = 1.233 A_1^{1/3} - 0.978 A_1^{-1/3} \text{ fm} \quad (4.6)$$

e  $\alpha = 0.63 \text{ fm}$ .

Usamos para  $m(r)$  a massa reduzida e  $R_1$  e  $R_2$  são os raios das partículas que estão fissionando.

O potencial de Christensen e Winther é um potencial fenomenológico ajustado à partir de dados do espalhamento elástico de partículas pesadas. Este potencial retém a mesma forma do potencial de proximidade de Blocki et al<sup>[28,85]</sup>, ambos muito usados em reações de ions pesados.

Fizemos nossos cálculos para várias reações já observadas, como pode ser visto nas Tabelas 4a e 4b. As Figuras (4.1) e (4.2) mostram o gráfico do potencial de Christensen-Winther acrescido do potencial coulombiano para os casos do  $^{223}\text{Ra}$  e do  $^{241}\text{Am}$ .

#### 4.c. Fissão ou emissão de um "cluster" pré-formado? Resultados

Desde 1984, quando Rose e Jones<sup>[11]</sup> observaram pela primeira vez o decaimento de partículas mais pesadas que a partícula alfa, muitos pesquisadores tem trabalhado no assunto, tanto experimental quanto teóricamente, tentando descrever os eventos observados, ou ainda prever novos decaimentos exóticos. Cerca de 15 decaimentos diferentes foram observados desde o decaimento do  $^{223}\text{Ra}$  em  $^{14}\text{C}$ .

Os modelos utilizados para descrever estas observações usam a expressão W.K.B. (4.1). Eles variam bastante, considerando desde uma partícula pesada que tunela através de um potencial coulombiano puro<sup>[11]</sup>, até modelos microscópicos bastante sofisticados. Já foram considerados modelos de "cluster"<sup>[95,96]</sup>, cálculos usando método de canais acoplados<sup>[97]</sup>, modelos unificados como o ASAFM<sup>[98]</sup>, e o utilizado por Shi e Swiatecki<sup>[99,90]</sup>, e várias outras tentativas foram feitas para descrever corretamente as reações observadas.

A maioria destes modelos consegue resultados razoáveis com a



diferença em muitos casos de cerca de duas ordens de grandeza para o valor medido experimentalmente da razão de ramificação da partícula pesada em relação à partícula alfa.

Como se pode ver das expressões (4.1) e (4.2), o cálculo da penetrabilidade depende fortemente do potencial. Depende da altura do potencial, da largura e da massa.

O estudo da dependência na massa é difícil, pois não se sabe exatamente como varia a massa durante um processo de fissão ou emissão espontânea. Por isso, na maioria das vezes, utiliza-se a massa reduzida,  $\mu(r)$ . O estudo da dependência na altura do potencial foi considerado, por exemplo, no trabalho de Shanmugan e Kamalaharan, na referência [100].

A idéia aqui é considerar a dependência da penetrabilidade no raio das partículas envolvidas. Sabe-se que estes raios podem variar durante o processo de fissão e muitas vezes se considera um raio aproximado ou efetivo.

A idéia surgiu da seguinte maneira. Inicialmente consideramos um potencial realístico como o de Christensen e Winther acrescido do potencial coulombiano para o caso do  $^{223}\text{Ra}$  (veja o capítulo anterior). Verificamos que os resultados são muito próximos àqueles obtidos considerando apenas o potencial coulombiano. O cálculo das razões das penetrabilidades em cada caso é da ordem de  $10^{-3}$ , enquanto que os valores observados são da ordem de  $10^{-10}$ , para as razões de ramificação. Como a largura de decaimento é

proporcional a penetrabilidade (veja equação (3.1)) e a razão de ramificação é basicamente a razão entre as larguras de decaimento, podemos nos utilizar de um fator de pré-formação das partículas pesadas para explicar essa diferença. Este fator de pré-formação seria, portanto, da ordem de  $10^{-7}$  ou  $10^{-8}$ , para a partícula pesada em relação a partícula alfa, se considerarmos que o período do movimento radial do cluster na região interna (3.1) é da mesma ordem de grandeza em cada um dos casos.

Tentando evitar os fatores de pré-formação, resolvemos considerar a dependência da penetrabilidade no raio.

O potencial de Christensen-Winther é ajustado a partir de dados de espalhamento e é bastante simples de ser manipulado. Por essa razão foi escolhido para o estudo, já que outros potenciais com a mesma forma, como o de proximidade de Blocki<sup>[28,85]</sup>, já foram utilizados<sup>[99,90]</sup> dando resultados próximos aos experimentais, sem a necessidade de um fator de pré-formação. Apesar de o potencial de Christensen-Winther ser realístico, ele não explica os resultados observados.

Nos nossos cálculos, consideramos várias reações diferentes (ver Tabelas 4.a, 4.b, 4.c, 4.d). Inicialmente utilizamos os raios descritos em (4.6) do potencial de Christensen-Winther. Depois, considerando-se o raio proporcional à  $A^{1/3}$  e que pode ser escrito como  $R = r_0 A^{1/3}$ , variamos o valor de  $r_0$  até ajustá-los aos valores experimentais sem a necessidade de um fator de pré-

formação.

As Tabelas 4.a e 4.b mostram os valores das penetrabilidades. Nas primeiras colunas de cada uma das tabelas temos o valor da penetrabilidade para várias reações com núcleos pesados e partícula alfa, respectivamente, usando o potencial de Christensen-Winther e os raios obtidos da expressão (4.6). Verificamos que os valores obtidos são quase da mesma ordem de grandeza que aqueles obtidos utilizando-se o potencial coulombiano puro com raio  $R = r_0 A^{1/3}$  e  $r_0$  da ordem de 1.2 fm. Nas outras colunas fazemos variar os valores de  $r_0$  de 0.98 até 0.92 fm. Na última coluna estão os resultados calculados por Shi e Swiatecki<sup>[90,99]</sup>, para comparação.

Na Tabela 4.c encontramos as razões entre os fatores de penetração para os núcleos mais pesados ( $^{14}\text{C}$ , Ne, Si, Mg) relativos à emissão alfa. Na coluna 1 encontramos os valores calculados utilizando o potencial de Christensen-Winther mais o potencial coulombiano com os raios da expressão (4.6). Verificamos que os resultados obtidos não ajustam corretamente os valores experimentais para as razões de ramificação, à menos que consideremos um fator de pré-formação da ordem de  $10^{-7}$  à  $10^{-10}$ , na maioria dos casos.

Como já dissemos, variamos o valor de  $R_1$  utilizando a expressão  $R_1 = r_0 A^{1/3}$ . A escolha de  $r_0$  fica normalmente entre 1.0 e 1.4 fm. Estes valores levam a valores da razão de ramificação

várias ordens de magnitude maiores que o valor experimental. Escolhemos inicialmente o valor de  $r_0 = 0.98$  fm, simplesmente porque isto leva a uma razão de ramificação bastante próxima da razão medida, sem a necessidade do fator de pré-formação. Este valor de  $r_0$  já foi utilizado em outros cálculos anteriores; veja referências [84,101], por exemplo.

Este valor pequeno de  $r_0$  está qualitativamente dentro do espírito da discussão de Price et al<sup>[84]</sup> e Shi e Swiatecki<sup>[90,99]</sup> sobre o valor apropriado do raio nuclear no cálculo de penetração de barreiras. (Veja também capítulo anterior). Eles mostraram que escolhas mais realísticas do potencial nuclear e do raio nuclear levam à razões de ramificação que concordam em ordem de magnitude com os dados experimentais, sem a necessidade de ajustes de parâmetros.

Nas outras cinco colunas da Tabela (4.c) temos os resultados calculados com os diferentes valores de  $r_0$ . Observamos que os resultados obtidos para as seis primeiras reações concordam razoavelmente bem com os valores experimentais para  $r_0$  entre 0.96 e 0.93 fm e que as outras reações se ajustam melhor para  $r_0$  menores.

Na Tabela (4.c) podem ser vistos ainda os resultados calculados por Shi e Swiatecki<sup>[90,99]</sup> e os resultados experimentais. Na tabela (4.d) podemos ver a comparação entre os resultados calculados nas seis primeiras colunas da Tabela (4.c) e



o valor experimental. E na última a razão entre os resultados obtidos nas refs. [90,99] e os valores experimentais.

#### 4.d. Comparação com outros modelos

A teoria de Gamow do decaimento alfa assume que a partícula alfa é formada na superfície nuclear do núcleo pai, com uma energia positiva. Depois, a partícula escapa tunelando através da barreira coulombiana. Embora essa teoria tivesse tido muito sucesso no início em explicar processos de decaimento alfa relativos, os cálculos microscópicos de larguras de decaimento absolutas dentro dessa teoria, não tem obtido tanto sucesso. Não são raras diferenças de cinco ordens de magnitude entre a teoria e o experimento.

Para tentar resolver este problema, Irondo et al<sup>[101]</sup> consideraram o decaimento de "clusters" pesados como sendo um processo de dois-passos da teoria de Gamow do decaimento  $\alpha$ . O "cluster" pesado é primeiramente formado em um ponto próximo a superfície nuclear do núcleo pai e então tunela através da barreira coulombiana. Dentro desta interpretação é possível estimar as amplitudes de formação dos "clusters". Eles encontraram que estas amplitudes dependem praticamente só do tamanho do "cluster", usando um modelo microscópico detalhado para



calculá-las. Os resultados obtidos por Irondo e seus companheiros estão na quarta coluna da Tabela 4.2. Verificamos que estes resultados dão uma diferença de uma a três ordens de magnitude do valor experimental encontrado na coluna dois da mesma tabela.

Blendowske e Walliser<sup>[96]</sup> usando um modelo de "cluster", consideraram raios nucleares realísticos (tomados como esferas) em um potencial que ajusta dados de espalhamento de íons pesados<sup>[66]</sup>. Eles usaram o potencial de Christensen e Winther somado ao potencial coulombiano. Fizeram cálculos microscópicos do fator de pré-formação para "clusters" até o  $^{16}\text{O}$  em núcleos par-par, usando funções de onda de muitos corpos para calcular os "overlaps" dos estados de nucleon no "cluster" com aqueles nos núcleos pais. Por causa da dificuldade dos cálculos para "clusters" grandes, especialmente para "clusters" em núcleos de A-ímpar (deformados), eles investigaram aproximações semi-empíricas, e encontraram que a expressão, motivada estatisticamente,  $\log S(A2) = \text{const} \times (A2-1)$ , com a escolha de constantes apropriadas, fitava seus fatores de pré-formação calculados e também dava bons ajustes para os dados experimentais. Para "clusters" de partícula  $\alpha$  eles usaram  $S(\alpha) = 6.3 \times 10^{-3}$  (pais pares) e  $S(\alpha) = 3.2 \times 10^{-3}$  (pais ímpares), sendo S a probabilidade de pré-formação do "cluster". O conceito de "clusters" preformados com  $\log S(A2)$  proporcional à  $A2-1$  seguramente falha em algum valor de A2. De fato, é surpreendente que funcione tão bem até o  $^{34}\text{Si}$ , para o qual  $S(A2) = 6 \times 10^{-25}$ . Os

resultados obtidos por Blendowske e Walliser estão na coluna oito da Tabela 4.2, que como pode ser visto mostram uma diferença de duas à três ordens de magnitude, no geral.

O modelo de "cluster" de Buck e Merchant<sup>[95]</sup> é conceitualmente diferente: assume um fator de pré-formação unitário e emprega um potencial "cluster"-caroço local e efetivo, e tem descrito com sucesso níveis de — energia, transições eletromagnéticas e larguras de decaimento de certos estados tipo alfa do  $^{16}\text{O}$  e  $^{20}\text{Ne}$ . Este potencial ajusta muito bem taxas de decaimento para o Ne e o C, mas sua forma mais simples subestima as taxas de emissão de alguns dos "clusters" mais pesados. Os resultados obtidos por Buck e Merchant estão na coluna seis da Tabela (4.2).

Como vimos, estudos das razões de ramificação para emissão espontânea de fragmentos pesados são muito sensíveis a forma da barreira do potencial. A fim de fixar o topo da barreira corretamente, Shanmugan e Kanalaharan<sup>[100]</sup> incluem efeitos de alcance finito em seus cálculos. Valores experimentais de Q para diferentes modos de decaimento são escolhidos para incorporar os efeitos de camadas. A forma da barreira na região de "overlap" é aproximada por um polinômio de terceira ordem sugerido por Nix<sup>[102]</sup>. A barreira cúbica é usada próximo a região de penetração. Os resultados obtidos por eles estão na coluna sete da Tabela 4.2.

A motivação para o modelo ASAFM utilizado por Poenaru e companheiros<sup>[98]</sup>, foi usar um modelo unificado que considera igualmente o decaimento alfa, a radioatividade de partículas pesadas e a fissão fria. Esta última se refere a um caminho no espaço de deformação separado daquele tomado em fissão normal. Na fissão fria a forma mais compacta é mantida, com os fragmentos emergendo em seus estados fundamentais com energia cinética aproximadamente igual à  $Q$  e com massas favorecendo fortemente as camadas fechadas. As taxas relativas de fissão fria e fissão convencional variam com o núcleo pai, e os dois processos são distinguíveis experimentalmente pela energia cinética e distribuições de massa<sup>[103]</sup>. A fim de corrigir a altura da barreira, não realisticamente alta em  $R_t$  (distância de contato), os autores do modelo ASAFM adotaram o procedimento de adicionar um parâmetro de energia,  $E_v$ , à  $Q$  dentro da barreira e tirar este parâmetro quando os fragmentos penetram a barreira. O fator de frequência pré-exponencial é igualado a  $2E_v/h$ . Para ajustar os dados, eles ajustam o valor de  $E_v$  dependendo de  $A_2$ ,  $Q$  e da natureza par-ímpar do núcleo pai.

Os resultados obtidos pelo grupo de Poenaru<sup>[98]</sup> estão na coluna cinco da Tabela 4.2.

Shi e Swiatecki<sup>[90,99]</sup> estimaram as meias vidas para o decaimento radioativo de um núcleo pela emissão de partículas alfas ou fragmentos mais pesados, tratando estes processos como

casos extremos de fissão espontânea. Para os decaimentos assimétricos uma aproximação para a barreira é obtida combinando a repulsão coulombiana entre os fragmentos com o potencial de proximidade nuclear (até o contato); entre a configuração de contato e a configuração do núcleo pai faz-se uma interpolação suave. Eles encontraram uma fórmula fechada para o fator de penetrabilidade e, com uma diferença de uma ou duas ordens de grandeza, podiam reproduzir razoavelmente as razões de ramificação.

O modelo do potencial de proximidade originalmente não tem parâmetros livres. Shi e Swiatecki descobriram depois que dois refinamentos — uma integração sobre todas as direções de fissão em relação às deformações de "ground-state" elipsoidal, e correções para a atenuação de efeitos de camadas dos dois fragmentos enquanto próximos — tendem a se cancelar.

Eles afirmaram que não haveria núcleo pré-formado, mas sim um processo de deformação geométrica, não existindo a necessidade de um fator de pré-formação, que seria considerado unitário. Os resultados obtidos por eles estão na coluna três da Tabela 4.2.



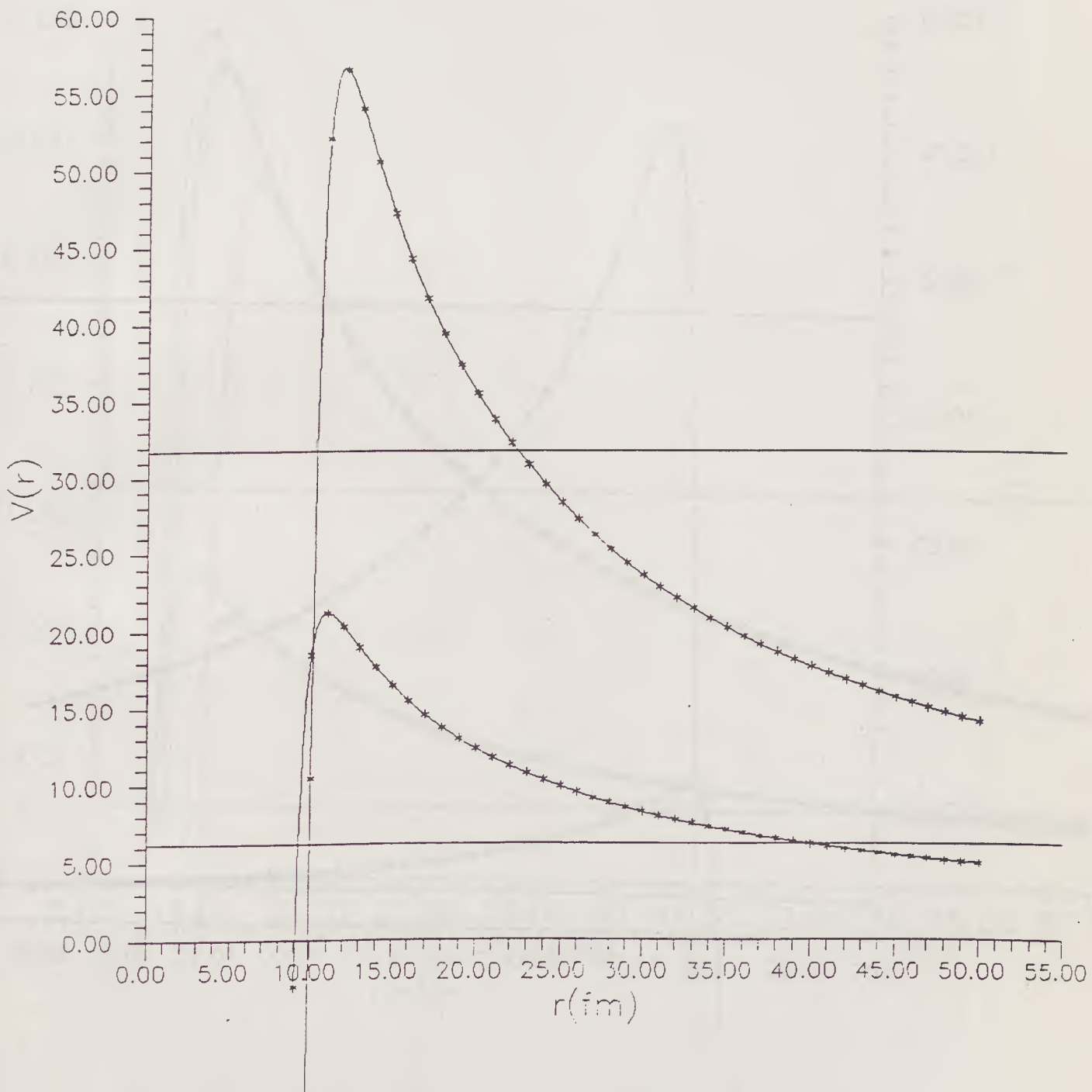


FIGURA 4.1: Gráfico do potencial de Christensen - Winther + coulombiano para as reações:  $^{223}\text{Ra} \rightarrow ^{209}\text{Pb} + ^{14}\text{C}$  (curva de cima) e  $^{223}\text{Ra} \rightarrow ^{219}\text{Rn} + \alpha$  (curva abaixo)



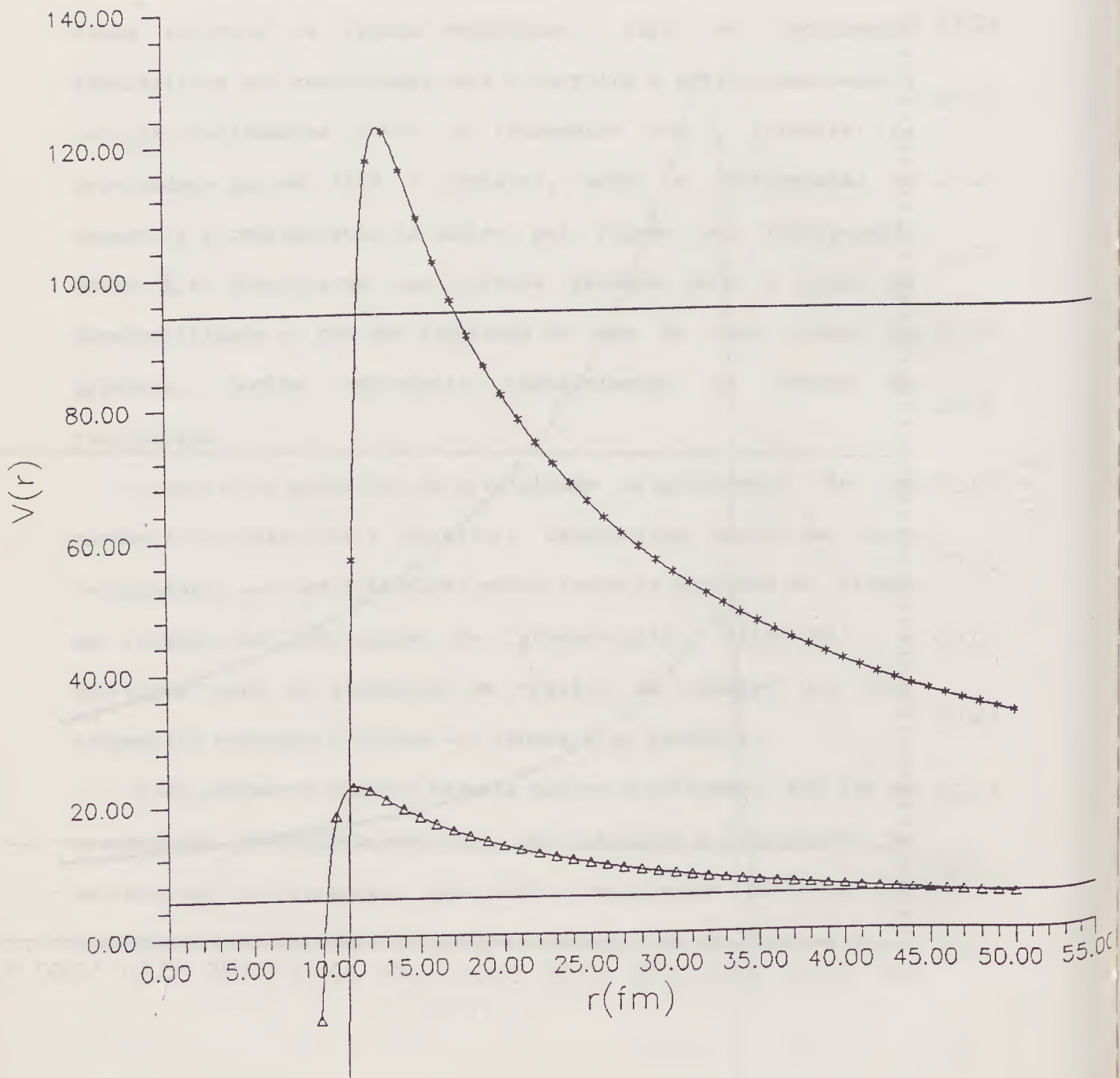


FIGURA 4.2: Gráfico do potencial de Christensen - Winther coulombiano para as reações:  $^{241}\text{Am} \rightarrow ^{207}\text{Tl} + ^{34}\text{Si}$  (acima) e  $^{241}\text{Am} \rightarrow ^{237}\text{Np} + \alpha$  (abaixo)

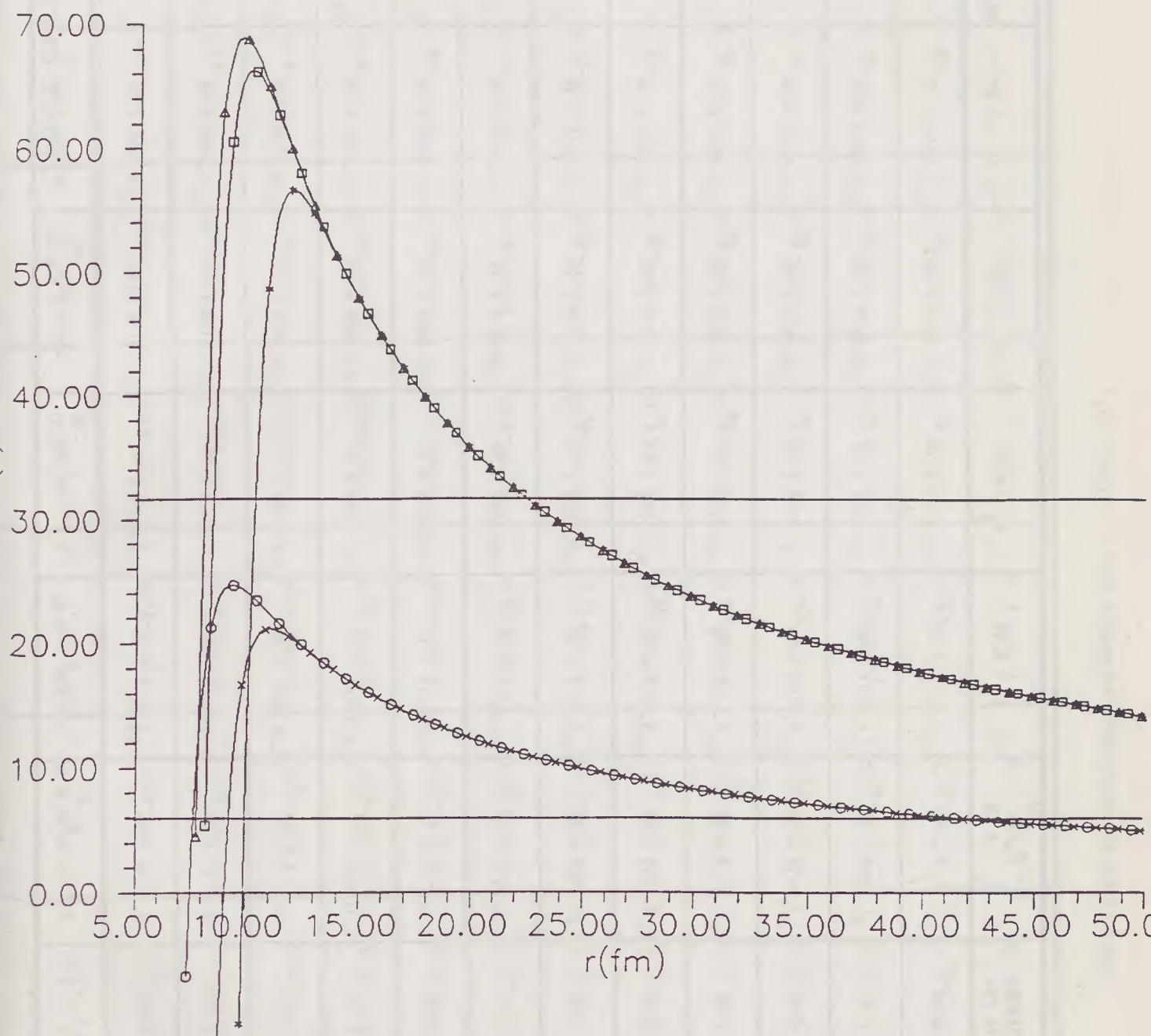


FIGURA 4.3: Variação de  $r_0$  para o  $^{223}\text{Ra}$ . As curvas acima são para emissão de  $^{14}\text{C}$  e as de baixo para a emissão  $\alpha$  (Veja texto)

REAÇÕES	CHRISTENSEN WINTHER POT	$R = R_0 A^{1/3}$ $R_0 = 0.98$	$R_0 = 0.96$	$R_0 = 0.94$	$R_0 = 0.93$	$R_0 = 0.92$	SWIATECKI (CALC.)
$^{221}_{Fr} \rightarrow ^{207}_{Tl} + ^{14}_C$	$2.5579 \times 10^{-27}$	$2.7391 \times 10^{-35}$	$2.8765 \times 10^{-36}$	$2.8734 \times 10^{-37}$	$8.9073 \times 10^{-38}$	$2.7246 \times 10^{-38}$	$9.1827 \times 10^{-36}$
$^{221}_{Ra} \rightarrow ^{207}_{Pb} + ^{14}_C$	$3.1246 \times 10^{-25}$	$4.2074 \times 10^{-33}$	$4.5231 \times 10^{-34}$	$4.6234 \times 10^{-35}$	$1.4495 \times 10^{-35}$	$4.4841 \times 10^{-36}$	$1.8843 \times 10^{-34}$
$^{222}_{Ra} \rightarrow ^{208}_{Pb} + ^{14}_C$	$6.2765 \times 10^{-25}$	$7.7534 \times 10^{-33}$	$8.2453 \times 10^{-34}$	$8.3331 \times 10^{-35}$	$2.5973 \times 10^{-35}$	$7.9869 \times 10^{-36}$	$5.8207 \times 10^{-33}$
$^{223}_{Ra} \rightarrow ^{209}_{Pb} + ^{14}_C$	$4.6911 \times 10^{-27}$	$4.3351 \times 10^{-35}$	$4.4760 \times 10^{-36}$	$4.3932 \times 10^{-37}$	$1.3496 \times 10^{-37}$	$1.0905 \times 10^{-38}$	$1.4615 \times 10^{-35}$
$^{224}_{Ra} \rightarrow ^{210}_{Pb} + ^{14}_C$	$1.5948 \times 10^{-29}$	$1.1615 \times 10^{-37}$	$1.1727 \times 10^{-38}$	$1.1262 \times 10^{-39}$	$3.4229 \times 10^{-40}$	$1.0265 \times 10^{-40}$	$1.4046 \times 10^{-38}$
$^{226}_{Ra} \rightarrow ^{212}_{Pb} + ^{14}_C$	$2.0878 \times 10^{-34}$	$9.3987 \times 10^{-43}$	$9.0512 \times 10^{-44}$	$8.2966 \times 10^{-45}$	$3.5139 \times 10^{-45}$	$7.2234 \times 10^{-46}$	$2.3646 \times 10^{-44}$
$^{225}_{Ac} \rightarrow ^{211}_{Bi} + ^{14}_C$	$1.3631 \times 10^{-29}$	$9.6913 \times 10^{-38}$	$9.7694 \times 10^{-39}$	$9.3674 \times 10^{-40}$	$2.8448 \times 10^{-40}$	$8.5251 \times 10^{-41}$	$6.4683 \times 10^{-40}$
$^{230}_{Th} \rightarrow ^{206}_{Hg} + ^{24}_{Ne}$	$1.1211 \times 10^{-30}$	$2.6131 \times 10^{-44}$	$6.7315 \times 10^{-46}$	$1.5849 \times 10^{-47}$	$2.3492 \times 10^{-48}$	$.4004 \times 10^{-49}$	-----
$^{231}_{Pa} \rightarrow ^{207}_{Tl} + ^{24}_{Ne}$	$4.0395 \times 10^{-28}$	$1.1796 \times 10^{-41}$	$3.0872 \times 10^{-43}$	$7.3771 \times 10^{-45}$	$1.1008 \times 10^{-45}$	$1.6035 \times 10^{-46}$	$1.0206 \times 10^{-44}$
$^{232}_{U} \rightarrow ^{208}_{Pb} + ^{24}_{Ne}$	$1.1113 \times 10^{-26}$	$3.4244 \times 10^{-40}$	$8.9645 \times 10^{-42}$	$2.1401 \times 10^{-43}$	$3.1906 \times 10^{-44}$	$4.6419 \times 10^{-45}$	$6.7340 \times 10^{-43}$
$^{233}_{U} \rightarrow ^{209}_{Pb} + ^{24}_{Ne}$	$1.1257 \times 10^{-28}$	$2.3591 \times 10^{-42}$	$5.9647 \times 10^{-44}$	$1.3761 \times 10^{-45}$	$2.0173 \times 10^{-46}$	$2.8864 \times 10^{-47}$	$2.6681 \times 10^{-46}$
$^{241}_{Am} \rightarrow ^{207}_{Tl} + ^{34}_{Si}$	$8.4480 \times 10^{-24}$	$4.1118 \times 10^{-42}$	$3.1833 \times 10^{-44}$	$2.1528 \times 10^{-46}$	$1.6798 \times 10^{-47}$	$1.2645 \times 10^{-48}$	-----
$^{237}_{Np} \rightarrow ^{207}_{Tl} + ^{30}_{Mg}$	$1.1546 \times 10^{-28}$	$3.6239 \times 10^{-45}$	$4.5591 \times 10^{-47}$	$5.1193 \times 10^{-49}$	$5.1913 \times 10^{-50}$	$5.1082 \times 10^{-51}$	-----

TABELA (4.-A): Penetrabilidade variando o raio - partículas pesadas



REAÇÕES	CHRISTENSEN WINTHER POT	$R = R_0 A^{1/3}$ $R_0 = 0.98$	$R_0 = 0.96$	$R_0 = 0.94$	$R_0 = 0.93$	$R_0 = 0.92$	SWIATECKI (CALC.)
$^{221}_{Fr} \xrightarrow{217} At + \alpha$	$7.8534 \times 10^{-23}$	$6.8067 \times 10^{-25}$	$3.1821 \times 10^{-25}$	$1.4677 \times 10^{-25}$	$9.9154 \times 10^{-26}$	$6.6745 \times 10^{-26}$	$1.1496 \times 10^{-24}$
$^{221}_{Ra} \xrightarrow{217} Rn + \alpha$	$1.5133 \times 10^{-21}$	$1.3235 \times 10^{-23}$	$6.1895 \times 10^{-24}$	$2.8552 \times 10^{-24}$	$1.9289 \times 10^{-24}$	$1.2984 \times 10^{-24}$	$2.3031 \times 10^{-23}$
$^{222}_{Ra} \xrightarrow{218} Rn + \alpha$	$2.3288 \times 10^{-22}$	$2.0447 \times 10^{-24}$	$9.5349 \times 10^{-25}$	$4.3861 \times 10^{-25}$	$2.8606 \times 10^{-25}$	$1.9224 \times 10^{-25}$	$3.4674 \times 10^{-24}$
$^{223}_{Ra} \xrightarrow{219} Rn + \alpha$	$2.1444 \times 10^{-25}$	$1.6791 \times 10^{-27}$	$7.7441 \times 10^{-28}$	$3.5235 \times 10^{-28}$	$2.3735 \times 10^{-28}$	$1.5869 \times 10^{-28}$	$2.1199 \times 10^{-27}$
$^{224}_{Ra} \xrightarrow{220} Rn + \alpha$	$2.5766 \times 10^{-26}$	$1.9648 \times 10^{-28}$	$9.0342 \times 10^{-29}$	$4.0981 \times 10^{-29}$	$2.7572 \times 10^{-29}$	$1.8406 \times 10^{-29}$	$2.2841 \times 10^{-28}$
$^{226}_{Ra} \xrightarrow{222} Rn + \alpha$	$1.2936 \times 10^{-31}$	$8.9021 \times 10^{-34}$	$2.0360 \times 10^{-34}$	$1.8056 \times 10^{-34}$	$1.2014 \times 10^{-34}$	$7.9661 \times 10^{-35}$	$7.6745 \times 10^{-34}$
$^{225}_{Ac} \xrightarrow{221} Fr + \alpha$	$4.3139 \times 10^{-26}$	$3.1896 \times 10^{-28}$	$1.4604 \times 10^{-28}$	$6.5963 \times 10^{-29}$	$4.4097 \times 10^{-29}$	$2.9372 \times 10^{-29}$	$3.9698 \times 10^{-28}$
$^{230}_{Th} \xrightarrow{226} Ra + \alpha$	$2.2956 \times 10^{-33}$	$1.4011 \times 10^{-35}$	$6.2625 \times 10^{-36}$	$2.7614 \times 10^{-36}$	$1.8355 \times 10^{-36}$	$1.2081 \times 10^{-36}$	-----
$^{231}_{Pa} \xrightarrow{227} Ac + \alpha$	$2.2263 \times 10^{-31}$	$1.3496 \times 10^{-33}$	$6.0283 \times 10^{-34}$	$2.6561 \times 10^{-34}$	$1.7632 \times 10^{-34}$	$1.1599 \times 10^{-34}$	$1.0801 \times 10^{-33}$
$^{232}_{U} \xrightarrow{228} Th + \alpha$	$2.6036 \times 10^{-30}$	$1.5502 \times 10^{-32}$	$6.9080 \times 10^{-33}$	$3.0361 \times 10^{-33}$	$2.0120 \times 10^{-33}$	$1.3218 \times 10^{-33}$	$1.3821 \times 10^{-32}$
$^{233}_{U} \xrightarrow{229} Th + \alpha$	$1.7597 \times 10^{-33}$	$9.8911 \times 10^{-36}$	$4.3747 \times 10^{-36}$	$1.9085 \times 10^{-36}$	$1.2615 \times 10^{-36}$	$8.2577 \times 10^{-37}$	$7.1225 \times 10^{-36}$
$^{241}_{Am} \xrightarrow{237} Hp + \alpha$	$2.0029 \times 10^{-30}$	$1.0279 \times 10^{-32}$	$4.5053 \times 10^{-33}$	$1.9470 \times 10^{-33}$	$1.2729 \times 10^{-33}$	$8.2911 \times 10^{-34}$	-----
$^{237}_{Np} \xrightarrow{233} U + \alpha$	$2.9111 \times 10^{-34}$	$1.4908 \times 10^{-36}$	$6.5147 \times 10^{-37}$	$2.8075 \times 10^{-37}$	$1.8331 \times 10^{-37}$	$1.1925 \times 10^{-37}$	-----

TABELA (4.B): Penetrabilidade variando o raio - partícula alfa

TABLEA (4.C): Razões  $P_x/P_\alpha$  para os diversos raios

		CHRISTENSEN- WIRTHER	$R = R_0 A^{1/3}$ $R_0 = 0.98$	$R_0 = 0.96$	$R_0 = 0.94$	$R_0 = 0.93$	$R_0 = 0.92$	(Calc) SWIATECKI	(EXP.) BRANCHING RATIO (BR)
C/ $\alpha$	$^{221}\text{Fr}$	$0.3257 \times 10^{-4}$	$4.0239 \times 10^{-11}$	$9.0394 \times 10^{-12}$	$1.9578 \times 10^{-12}$	$8.9833 \times 10^{-13}$	$4.0822 \times 10^{-13}$	$7.988 \times 10^{-12}$	$7.90 \times 10^{-14a}$
C/ $\alpha$	$^{221}\text{Ra}$	$2.0646 \times 10^{-4}$	$3.1789 \times 10^{-10}$	$7.3076 \times 10^{-11}$	$1.6192 \times 10^{-11}$	$7.5146 \times 10^{-12}$	$3.4535 \times 10^{-12}$	$8.181 \times 10^{-12}$	$4.40 \times 10^{-12a}$
C/ $\alpha$	$^{222}\text{Ra}$	$2.7431 \times 10^{-3}$	$3.7918 \times 10^{-9}$	$8.6474 \times 10^{-10}$	$1.8999 \times 10^{-10}$	$9.0795 \times 10^{-11}$	$4.1546 \times 10^{-11}$	$1.678 \times 10^{-9}$	$3.71 \times 10^{-10b}$
C/ $\alpha$	$^{223}\text{Ra}$	$2.1875 \times 10^{-2}$	$2.5817 \times 10^{-8}$	$0.5780 \times 10^{-8}$	$1.2468 \times 10^{-9}$	$5.6861 \times 10^{-10}$	$2.5776 \times 10^{-10}$	$6.895 \times 10^{-9}$	$6.16 \times 10^{-10c}$
C/ $\alpha$	$^{224}\text{Ra}$	$6.1896 \times 10^{-4}$	$5.9116 \times 10^{-10}$	$1.2981 \times 10^{-10}$	$2.7481 \times 10^{-11}$	$1.2414 \times 10^{-11}$	$5.5769 \times 10^{-12}$	$6.150 \times 10^{-11}$	$4.26 \times 10^{-11d}$
C/ $\alpha$	$^{226}\text{Ra}$	$2.2252 \times 10^{-3}$	$1.0557 \times 10^{-9}$	$2.2426 \times 10^{-10}$	$4.4695 \times 10^{-11}$	$2.0924 \times 10^{-11}$	$9.0676 \times 10^{-12}$	$3.081 \times 10^{-11}$	$2.51 \times 10^{-11e}$
C/ $\alpha$	$^{225}\text{Ac}$	$0.3159 \times 10^{-3}$	$1.5657 \times 10^{-11}$	$6.6894 \times 10^{-11}$	$1.4201 \times 10^{-11}$	$6.4512 \times 10^{-12}$	$2.9023 \times 10^{-12}$	$1.629 \times 10^{-12}$	$3.98 \times 10^{-13f}$
Ne/ $\alpha$	$^{230}\text{Th}$	$4.8832 \times 10^2$	$1.8649 \times 10^{-9}$	$1.0749 \times 10^{-10}$	$5.7396 \times 10^{-12}$	$1.2798 \times 10^{-12}$	$2.8146 \times 10^{-13}$	-----	$5.62 \times 10^{-13g}$
Ne/ $\alpha$	$^{231}\text{Pa}$	$1.9739 \times 10^3$	$8.7405 \times 10^{-9}$	$5.1212 \times 10^{-10}$	$2.7774 \times 10^{-11}$	$6.2432 \times 10^{-12}$	$1.3824 \times 10^{-12}$	$9.448 \times 10^{-12}$	$4.26 \times 10^{-12h}$
Ne/ $\alpha$	$^{232}\text{U}$	$4.2685 \times 10^3$	$2.2089 \times 10^{-8}$	$1.2977 \times 10^{-9}$	$7.0491 \times 10^{-11}$	$1.5858 \times 10^{-11}$	$3.5117 \times 10^{-12}$	$4.872 \times 10^{-11}$	$1.99 \times 10^{-12i}$
Ne/ $\alpha$	$^{233}\text{U}$	$6.3973 \times 10^4$	$2.3851 \times 10^{-7}$	$1.3635 \times 10^{-8}$	$7.2104 \times 10^{-10}$	$1.5991 \times 10^{-10}$	$3.4954 \times 10^{-11}$	$3.747 \times 10^{-11}$	$7.58 \times 10^{-13j}$
Si/ $\alpha$	$^{241}\text{Am}$	$4.2177 \times 10^6$	$4.0001 \times 10^{-10}$	$7.0670 \times 10^{-12}$	$1.1057 \times 10^{-13}$	$1.3196 \times 10^{-14}$	$1.5252 \times 10^{-15}$	-----	$7.94 \times 10^{-15k}$
Mg/ $\alpha$	$^{237}\text{Np}$	$3.9661 \times 10^5$	$2.4308 \times 10^{-9}$	$6.9982 \times 10^{-11}$	$1.8234 \times 10^{-12}$	$2.8319 \times 10^{-13}$	$4.2836 \times 10^{-14}$	-----	$3.98 \times 10^{-14l}$

Referências: a(84,108); b(84,109); c(1,92,83); d(84); e(109,108); f(108); g(110); h(111); i(93); j(112,113); k(110,114); l(110); m(115,116).



		CW/BR	0.98/BR	0.96/BR	0.94/BR	0.93/BR	0.92/BR	SW/BR
C/ $\alpha$	$^{221}_{Fr}$	$4.1 \times 10^8$	509.3	114.4	24.7	11.3	5.2	$1.01 \times 10^2$
C/ $\alpha$	$^{221}_{Ra}$	$4.6 \times 10^7$	72.2	16.6	3.6	1.7	0.78	1.85
C/ $\alpha$	$^{222}_{Ra}$	$7.3 \times 10^6$	10.2	2.3	0.5	0.2	0.1	4.52
C/ $\alpha$	$^{223}_{Ra}$	$3.5 \times 10^7$	41.91	9.3	2.02	0.9	0.4	11.19
C/ $\alpha$	$^{224}_{Ra}$	$1.4 \times 10^7$	13.8	3.04	0.6	0.2	0.1	1.44
C/ $\alpha$	$^{226}_{Ra}$	$8.8 \times 10^7$	42.05	8.9	1.7	0.8	0.3	1.22
C/ $\alpha$	$^{225}_{Ac}$	$7.9 \times 10^8$	393.3	168.2	35.6	16.2	7.2	4.09
Ne/ $\alpha$	$^{230}_{Th}$	$8.6 \times 10^{14}$	$3.3 \times 10^3$	191.2	10.2	2.27	0.5	--
Ne/ $\alpha$	$^{231}_{Pa}$	$4.6 \times 10^{14}$	$2.0 \times 10^3$	120.2	6.5	1.46	0.3	2.21
Ne/ $\alpha$	$^{232}_{U}$	$2.1 \times 10^{15}$	$1.1 \times 10^4$	652.1	35.4	7.9	1.7	24.4
Ne/ $\alpha$	$^{233}_{U}$	$8.4 \times 10^{16}$	$3.1 \times 10^5$	$1.7 \times 10^4$	$9.5 \times 10^2$	210.9	46.1	49.4
Si/ $\alpha$	$^{241}_{Am}$	$5.3 \times 10^{20}$	$5.0 \times 10^4$	890.0	13.9	1.6	0.19	--
Mg/ $\alpha$	$^{237}_{Np}$	$9.9 \times 10^{18}$	$6.1 \times 10^4$	$1.7 \times 10^3$	45.8	7.1	1.07	--

TABELA (4.D): Razões entre os valores da Tabela (4.C)

TABELA (4.2): Razões  $P/P_{\alpha}$  para diversas reações: Comparações

	EXPERIMENT.	SWIATECKI	IRIONDO	POENARU	BUCK	SHAN, E. KAM.	B-WALLISER	MOSSO
(C/ $\alpha$ ) $^{221}\text{Fr}$	$7.9 \times 10^{-14}$	$7.9 \times 10^{-12}$	$6.3 \times 10^{-13}$	$3.1 \times 10^{-13}$	$1.6 \times 10^{-11}$	$1.0 \times 10^{-12}$	$1 \times 10^{-13}$	$8.9 \times 10^{-13}$ (0.93)
(C/ $\alpha$ ) $^{221}\text{Ra}$	$4.4 \times 10^{-12}$	$8.2 \times 10^{-12}$	$7.5 \times 10^{-13}$	$1.2 \times 10^{-12}$	$3.2 \times 10^{-11}$	$1.9 \times 10^{-12}$	$2 \times 10^{-13}$	$7.5 \times 10^{-12}$ (0.93)
(C/ $\alpha$ ) $^{222}\text{Ra}$	$3.7 \times 10^{-10}$	$1.6 \times 10^{-9}$	$7.4 \times 10^{-11}$	$1.0 \times 10^{-11}$	$8.9 \times 10^{-10}$	$6.3 \times 10^{-11}$	$7 \times 10^{-11}$	$1.8 \times 10^{-10}$ (0.94)
(C/ $\alpha$ ) $^{223}\text{Ra}$	$6.2 \times 10^{-10}$	$6.9 \times 10^{-9}$	$5.2 \times 10^{-10}$	$3.1 \times 10^{-9}$	$2.3 \times 10^{-8}$	$6.3 \times 10^{-9}$	$8 \times 10^{-10}$	$5.6 \times 10^{-10}$ (0.93)
(C/ $\alpha$ ) $^{224}\text{Ra}$	$4.2 \times 10^{-11}$	$6.1 \times 10^{-11}$	$1.1 \times 10^{-11}$	$1.5 \times 10^{-12}$	$1.3 \times 10^{-10}$	$2.5 \times 10^{-12}$	$2 \times 10^{-11}$	$1.2 \times 10^{-11}$ (0.93)
(C/ $\alpha$ ) $^{226}\text{Ra}$	$2.5 \times 10^{-11}$	$3.1 \times 10^{-11}$	$2.9 \times 10^{-11}$	$1.9 \times 10^{-12}$	$2.3 \times 10^{-10}$	$1.5 \times 10^{-12}$	$4 \times 10^{-11}$	$2.1 \times 10^{-11}$ (0.93)
(C/ $\alpha$ ) $^{225}\text{Ac}$	$3.9 \times 10^{-13}$	$1.6 \times 10^{-12}$	----	$6.3 \times 10^{-13}$	$5.7 \times 10^{-12}$	$3.9 \times 10^{-13}$	$2 \times 10^{-13}$	$2.9 \times 10^{-12}$ (0.92)
(Ne/ $\alpha$ ) $^{230}\text{Th}$	$5.6 \times 10^{-13}$	----	$6.1 \times 10^{-12}$	----	$8.4 \times 10^{-12}$	----	$4 \times 10^{-13}$	$2.8 \times 10^{-13}$ (0.92)
(Ne/ $\alpha$ ) $^{231}\text{Pa}$	$4.2 \times 10^{-12}$	$9.4 \times 10^{-12}$	$2.5 \times 10^{-11}$	$1.0 \times 10^{-10}$	$1.0 \times 10^{-10}$	$3.1 \times 10^{-11}$	$4 \times 10^{-12}$	$1.3 \times 10^{-12}$ (0.92)
(Ne/ $\alpha$ ) $^{232}\text{U}$	$1.9 \times 10^{-12}$	$4.8 \times 10^{-11}$	$5.8 \times 10^{-11}$	$1.2 \times 10^{-11}$	$1.1 \times 10^{-10}$	$3.2 \times 10^{-12}$	$4 \times 10^{-12}$	$3.5 \times 10^{-12}$ (0.92)
(Ne/ $\alpha$ ) $^{233}\text{U}$	$7.5 \times 10^{-13}$	$3.7 \times 10^{-11}$	$1.4 \times 10^{-11}$	$5.0 \times 10^{-11}$	$3.5 \times 10^{-10}$	$6.3 \times 10^{-12}$	$2 \times 10^{-13}$	$3.4 \times 10^{-11}$ (0.92)
(Si/ $\alpha$ ) $^{241}\text{Am}$	$7.9 \times 10^{-15}$	----	----	$3.9 \times 10^{-13}$	----	----	$2 \times 10^{-19}$	$1.5 \times 10^{-15}$ (0.92)
(Mg/ $\alpha$ ) $^{237}\text{Np}$	$3.98 \times 10^{-14}$	----	$5.2 \times 10^{-12}$	----	----	----	$8 \times 10^{-17}$	$4.2 \times 10^{-14}$ (0.92)

#### 4.e. Conclusões

Na última coluna da Tabela 4.2 encontram-se os resultados obtidos por nós, juntamente com os respectivos valores de  $r_0$  ajustados e escolhidos. Verificamos que estes valores estão entre 0.94 e 0.92fm, que são relativamente pequenos em relação aos valores de  $r_0$  usados frequentemente.

A variação obtida no potencial pode ser observada na Figura (4.3), onde se considera o caso do  $^{223}\text{Ra}$ . Verifica-se que a altura e a largura de barreira são bastante alteradas quando se considera a variação de  $r_0$ .

Na parte de baixo da figura vemos o potencial para o decaimento alfa nos casos em que consideramos os  $R_1$  para o potencial de Christensen-Winther e  $r_0 = 0.94$  fm em  $R = r_0 A^{1/3}$ . As curvas de cima mostram o potencial para o caso da emissão do  $^{14}\text{C}$  considerando os raios  $R_1$  do potencial de Christensen-Winther e para os casos em que  $r_0 = 0.98$  e  $0.94$  fm.

Todos os nossos resultados foram obtidos ajustando apenas um parâmetro, isto é,  $r_0$ .

Os resultados obtidos usando os modelos descritos acima são em geral razoáveis com uma diferença entre uma e três ordens de grandeza dos resultados obtidos experimentalmente. Os modelos em geral ajustam algum parâmetro para se aproximar dos valores experimentais.

Muitos dos modelos não conseguem prever bem as meias vidas parciais para o decaimento alfa e decaimento por fissão espontânea. Para o decaimento alfa, um modelo recente de três parâmetros ajusta alguns dados experimentais, mas não todos, dentro de um fator de dez<sup>[104]</sup>; um modelo semi-empírico com 24 parâmetros (!) ajusta uma razoável quantidade de dados para núcleos par-par, impar-par, par-impar, e impar-impar somente dentro de um fator 3 ou 4<sup>[105]</sup>. Parte do problema é a sensibilidade das taxas de decaimento alfa à barreira centrífuga e a ausência de conhecimentos sobre os "spins" para alguns núcleos pais e filhos. Para fissão espontânea de núcleos par-par a média de erros nas meias-vidas parciais não é menor que um fator de  $10^2$  ou  $10^3$ , mesmo quando ambos os vales (gota líquida e formas de contato ou fissão fria) são levados em conta<sup>[106]</sup>. Para núcleos de A ímpar o erro é muito maior.

As taxas de decaimento calculadas são muito sensíveis a erros na integral de ação, que aparece na expressão exponencial da penetrabilidade. Para pais e filhos com as massas listadas por Wapstra e Audi<sup>[107]</sup>, Q é conhecido dentro de  $\sim 10$  KeV, que dá como resultado um erro desprezível para as taxas de decaimento. Contudo, em muitos casos a massa do núcleo pai ou do filho mais pesado não é conhecida e deve ser estimada através de sistemáticas nucleares. Para alguns casos a incerteza em Q é de  $\sim 1$  MeV, o que leva a uma incerteza de um fator de  $\sim 200$  nas taxas de decaimento.



Todos estes cálculos são passíveis de muitos erros, já que qualquer alteração na integral de ação faz uma diferença muito grande. A vantagem dos nossos cálculos é que além de eles serem bastante simples, não dependem do ajuste de muitos parâmetros (dependem apenas de um) dando uma indicação clara, de que a variação do raio  $R_1$  deve ser considerada.



## CAPÍTULO 5

### FORMAÇÃO DE CLUSTER ALFA NO $^{44}\text{Ti}$

#### 5.a. Introdução

O interesse na formação de "clusters"  $\alpha$  em núcleos data dos primeiros dias da Física Nuclear com a descoberta da emissão espontânea de partículas alfas por núcleos pesados. A existência de partículas alfaS preformadas em núcleos foi sugerida por Gamow<sup>[117]</sup> em 1930 e a idéia de um modelo de partículas  $\alpha$  foi sugerida primeiramente por Hafstad e Teller<sup>[118]</sup> em 1938. Mais recentemente, Morinaga<sup>[119]</sup> interpretou alguns dos estados de núcleos tais como  $^8\text{Be}$ ,  $^{14}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ , etc. em termos de aglomerados de partículas alfa. O conceito de "quartetos" recebeu muita atenção durante os anos 70 e a idéia de uma estrutura de "cluster"  $\alpha$  definida para subconjuntos de excitação nuclear ainda está presente nas nossas mentes.

Estudos de reações de transferência alfa têm sido investigados intensamente com o objetivo de observar possíveis efeitos de "clusters"  $\alpha$ . Se, de fato, nucleons aglomerados são partes preformadas da matéria nuclear, um candidato preferencial seria a partícula alfa por causa de seu arranjo simétrico de dois protons e dois neutrons com grande energia de ligação. Refletindo

a saturação e a grande energia da partícula alfa, todo o trabalho preliminar focalizou-a como "cluster" essencial. De fato, a observação experimental da radiatividade da partícula alfa natural forneceu forte suporte para esta suposição.

Uma grande fração de tudo que sabemos sobre estados de "cluster" de partículas alfas foi obtido em estudos de reações de transferência de partículas  $\alpha$ . Talvez a característica mais marcante destas reações seja sua seletividade. Reações de "pick up" e "stripping" de partículas alfas são uma ferramenta espectroscópica importante. As reações são altamente seletivas, elas podem ser feitas com boa resolução e exibem distribuição angular difrativa.

Por outro lado, é natural assumir que a formação de aglomerados é um fenômeno de superfície. Na superfície nuclear a densidade é relativamente baixa e a formação de "clusters" é favorecida. As colisões de partículas alfas com os nucleons vizinhos mais internos do núcleo levam à idéia de uma muito pouco provável existência de um "cluster" alfa naquela região. Os experimentos de espalhamento  $\alpha$  são descritos usando a parte imaginária do potencial óptico, o que mostra que as partículas alfas são misturadas dentro do núcleo. A grande incompressibilidade da matéria nuclear exclue a presença das inomogeneidades como "clusters"  $\alpha$  muito dentro do núcleo.

Neste capítulo, usando um modelo de "cluster" estudamos

algumas propriedades do  $^{44}\text{Ti}$ . Estávamos interessados em um estudo mais completo da função de onda, principalmente da cauda, desde que a formação de "cluster" é um fenômeno superficial.

Na secção 5b damos algumas evidências experimentais da existência de "clusters"  $\alpha$  na superfície nuclear. Nas secções 5c e 5d, usando um modelo de "cluster" simples, consideramos algumas propriedades nucleares e estudamos a função de onda.

No próximo capítulo consideraremos duas aproximações WKB diferentes, para estudar a função de onda, comparando os resultados com aqueles obtidos aqui.

### 5.b. Alguns Resultados Experimentais

a) A viabilidade de se obter feixes de projéteis pesados como  $^6\text{Li}$ ,  $^7\text{Li}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ , etc. forneceu ferramentas naturais para se tentar a investigação de efeitos de "cluster"  $\alpha$  através da espectroscopia de reações diretas.

Muitas reações diferentes nas quais quatro partículas são transferidas têm sido usadas para estudar efeitos de "cluster"  $\alpha$  no núcleo. Destas, a mais estudada e bem entendida da tabela periódica é a ( $^6\text{Li}$ , d), reação de "stripping" de partícula  $\alpha$ , e a sua inversa, a reação (d,  $^6\text{Li}$ ). Há várias vantagens experimentais nestas reações sobre as outras reações de transferência alfa

possíveis.

Um espectro da reação  $^{16}\text{O} (^6\text{Li}, d) ^{20}\text{Ne}$  à energia de bombardeamento de 32 MeV é mostrado na Figura 5.1. A reação é altamente seletiva mostrando forte população de relativamente poucos níveis, apesar da conhecida complexidade do esquema de níveis do  $^{20}\text{Ne}$  acima de 6 MeV. Particularmente notável é a forte população da banda rotacional do estado fundamental ( $0^+$ , 0.0;  $2^+$ , 1.63;  $4^+$ , 4.25;  $6^+$ , 8.78;  $8^+$ , 11.95 MeV) e a banda  $k^\pi = 0^-$  ( $1^-$ , 5.79;  $3^-$ , 7.17;  $5^-$ , 10.26 MeV) que dominam o espectro. Seletividade semelhante é vista em outros alvos. Podemos ver o espectro do  $^{44}\text{Ti}$  na Figura 5.2.

A reação  $(d, ^6\text{Li})$  tem sido extensivamente estudada por Becchetti, Jänecke e colaboradores. Veja, por exemplo, a referência [122].

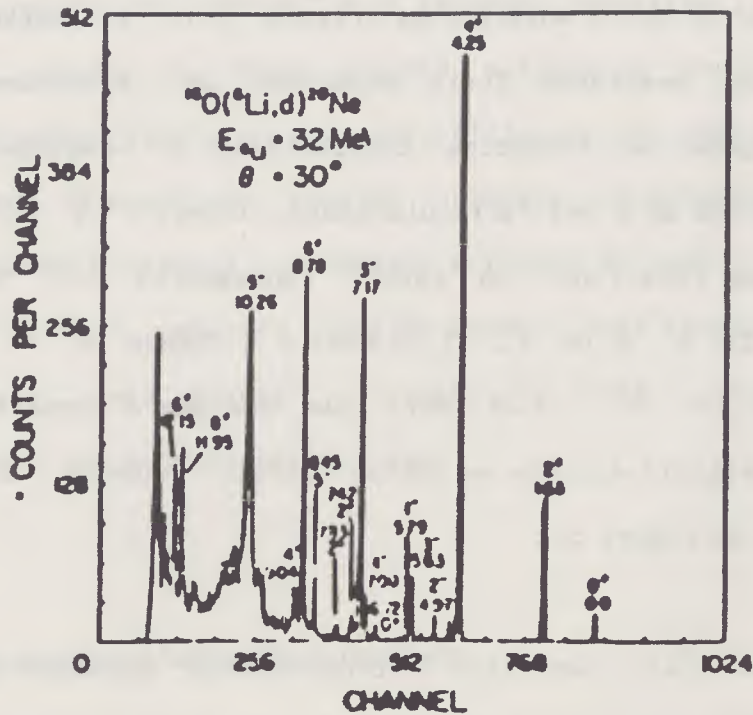


FIGURA 5.1: Espectro da reação  $^{16}\text{O} (^6\text{Li}, d)^{20}\text{Ne}$  (Ref. 120)

### 5.c. Probabilidade de Formação de "Clusters" Alfas na Superfície Nuclear

Jänecke e Becchetti<sup>[122]</sup> concluíram que as reações de transferência de "clusters" alfas são muito úteis para estabelecer a formação de partículas alfas na superfície de núcleos pesados



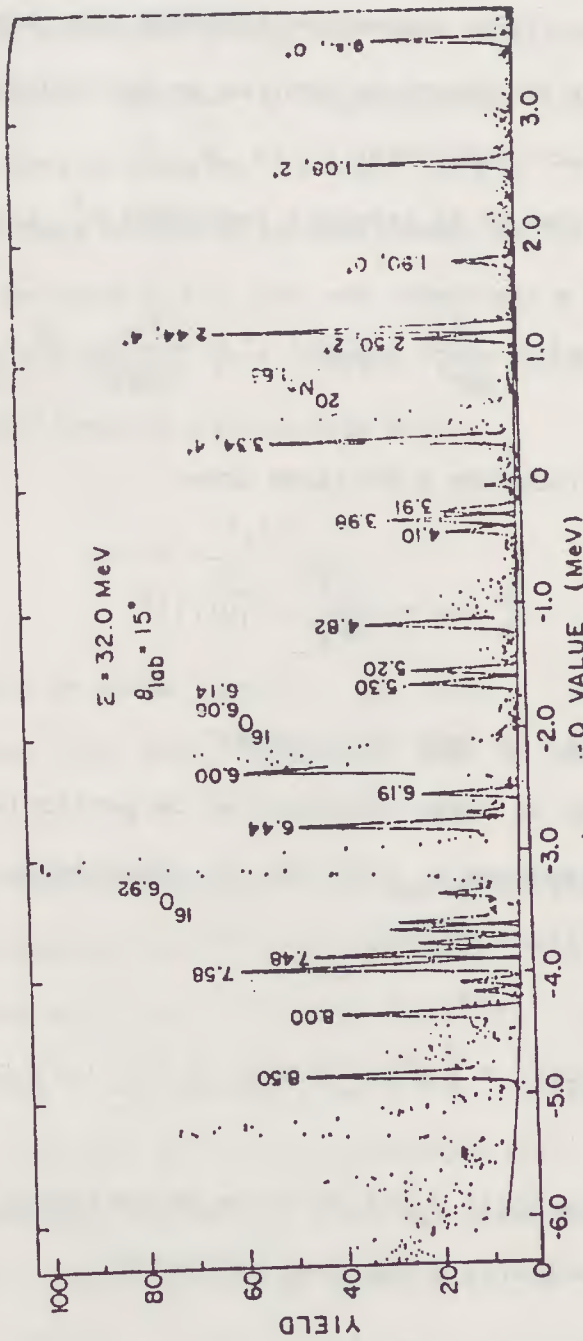


FIG. 5.  $^{24}\text{Mg} + ^{40}\text{Ca}$  (Li, d) spectrum.

e meio pesados. Os dados sugerem que em certas regiões da superfície nuclear, cerca de 25% da carga (matéria) consiste de partículas alfas. Seus argumentos procedem como segue.

A densidade de número de centros de partículas  $\alpha$   $\eta_{\alpha,\Gamma}(r)$  em um estado quântico particular  $\Gamma$  ( $= N, L, \dots$ ) no raio  $r$  é proporcional a função de larguras reduzidas  $\gamma_{\alpha,\Gamma}^2(r)^{[122]}$ , isto é,

$$\eta_{\alpha,\Gamma}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} |u_{\Gamma}(r)|^2 = \frac{\mu_{\alpha}}{2\pi r \hbar^2} \gamma_{\alpha,\Gamma}^2(r) \quad (5.1)$$

onde a largura reduzida é definida como

$$\gamma_{\alpha}^2(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu_{\alpha} r} |u(r)|^2 \quad (5.2)$$

e  $u(r)$  é a função de onda do "cluster".

A densidade de carga (ou matéria) de partículas  $\alpha$   $\rho_{\alpha,\Gamma}(r)$  é derivada integrando-se  $\eta_{\alpha,\Gamma}(r)$  com a distribuição de carga de partícula alfa livre ( $\rho^{\alpha}(r)$ ),

$$\rho_{\alpha,\Gamma}(r) = \int \rho^{\alpha}(r') \eta_{\alpha,\Gamma}(r - r') d^3r' \quad (5.3)$$

A densidade total  $\rho_{\alpha}(r)$  de carga de partícula  $\alpha$  nos estados fundamentais nucleares é uma soma apropriada

$$\rho_{\alpha}(r) = \sum_{\Gamma} \rho_{\alpha,\Gamma}(r) \quad (5.4)$$

Uma estimativa para grandes raios pode ser obtida considerando-se (limite mais baixo) a partícula  $\alpha$  de valência com os maiores números quânticos  $Q = 2N + L$  do oscilador harmônico. Esta soma, portanto, envolve a superposição incoerente dos quadrados das funções de onda do "cluster" para a transição para os estados mais baixos excitados em uma reação de "pickup"- $\alpha$ .

A densidade de carga  $\rho_\alpha(r)$  pode ser comparada a densidade de carga nuclear  $\rho_{\text{nucl}}(r)$  obtida, por exemplo, do espalhamento de eletrons. A probabilidade de aglomeração alfa,

$$A(r) = \frac{\rho_\alpha(r)}{\rho_{\text{nucl}}(r)} \quad (5.5)$$

representa a fração de carga nuclear no raio  $r$  em um estado fundamental nuclear que está associado com a partícula  $\alpha$  de valência.

A Figura 5.3 mostra a probabilidade de aglomeração alfa  $A(r)$  para o estado fundamental do  $^{238}\text{U}$ . Isto inclui a contribuição de todas as transições observadas  $^{238}\text{U} (d, ^6\text{Li})^{234}\text{Th}$ . Também está incluída na figura a densidade de carga nuclear relativa  $\rho_{\text{nucl}}(r)/\rho_{\text{nucl}}(0)$ . A probabilidade de aglomeração  $A(r)$  atinge um valor máximo de cerca de 20% em  $r = 10.65$  fm. O decréscimo de  $A(r)$  após 11 fm é devido a dependência da penetração de barreira na carga e massa. A Tabela 5.1 lista os valores correspondentes para vários outros núcleos. Os valores médios são  $A(r) \approx 26\%$  em

$$r \approx 1.7 A^{1/3} \text{ e } \rho_{\text{nucl}}(r)/\rho_{\text{nucl}}(0) \approx 0.32\%.$$

Sistema	$r(\text{fm})$	$\frac{\rho_{\text{nucl}}(r)}{\rho_{\text{nucl}}(0)}$ (%)	$A(r)$ (%)
$^{140}\text{Ce}+\alpha$	8.95	0.46	29
$^{144}\text{Nd}+\alpha$	9.20	0.32	33
$^{148}\text{Sm}+\alpha$	9.45	0.21	21
$^{204}\text{Hg}+\alpha$	9.35	0.69	40
$^{208}\text{Pb}+\alpha$	9.90	0.23	7
$^{228}\text{Ra}+\alpha$	10.65	0.12	30
$^{234}\text{Th}+\alpha$	10.65	0.18	20
Média		0.32	26

TABELA 5.1: Probabilidades de formação de "cluster"  $\alpha$   
 $A(r)$  na superfície nuclear [124]

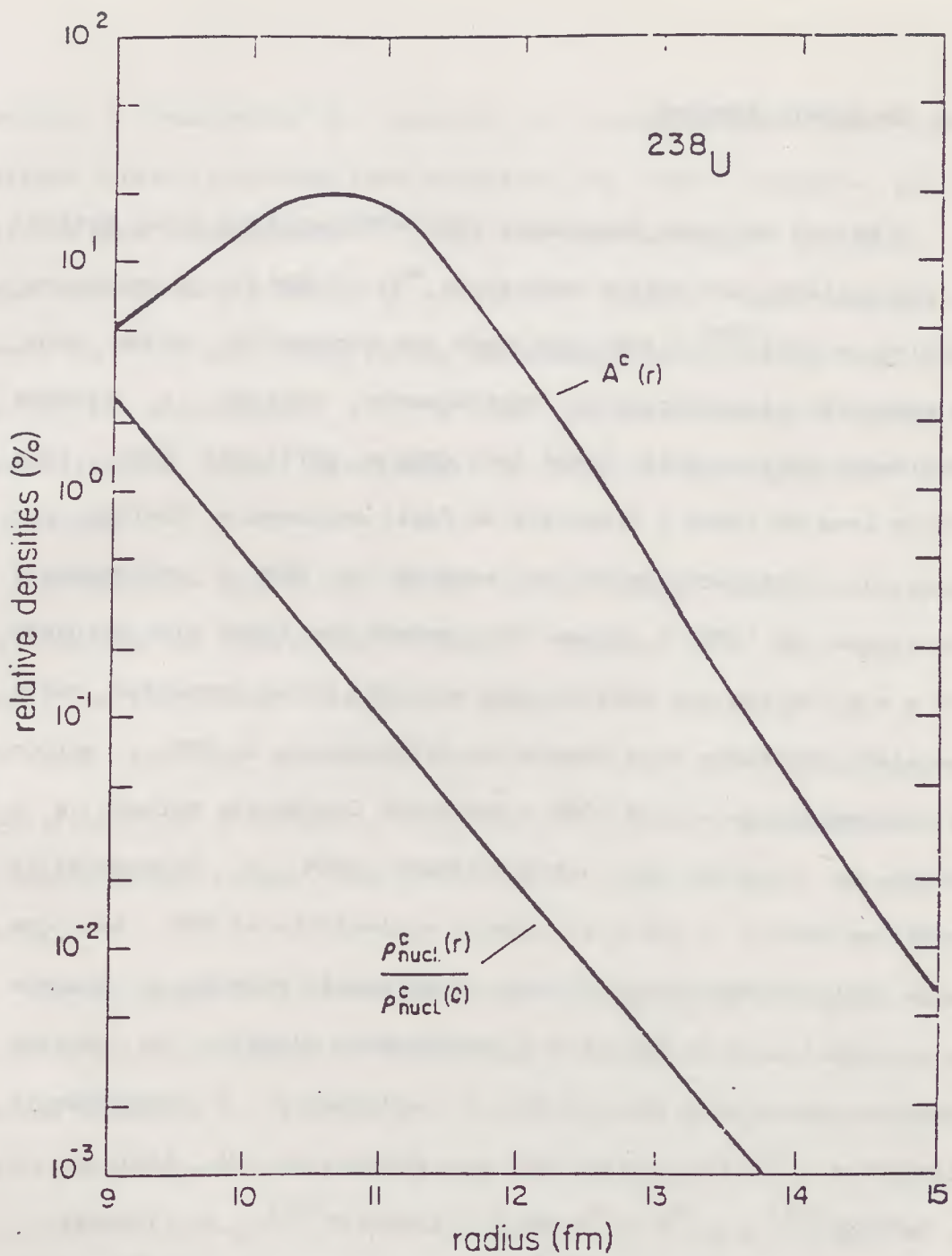


FIGURA 5.3: Probabilidade de aglomeração alfa  $A(r)$  para as partículas  $\alpha$  de valência no estado fundamental do  $^{238}\text{U}$  [123].



#### 5.d. Um Modelo Simples

O Método de Grupo Ressonante (RGM - Resonating Group Method) já foi aplicado por vários autores ao  $^{44}\text{Ti}$ . O RGM foi proposto por Wheeler em 1937<sup>[125]</sup> e tem sido usado com sucesso há vários anos na descrição microscópica de espalhamento nuclear e reações envolvendo núcleos muito leves tais como a partícula alfa. Este método leva em conta o Princípio de Pauli exatamente. Contudo, por causa da antisimetrização, a equação do RGM é extremamente complicada. Em 1970, o sistema mais pesado que tinha sido estudado era  $\alpha + \alpha$ . No fim dos anos 60 duas soluções foram propostas quase que simultaneamente para superar as dificuldades do RGM: o método de coordenadas geradoras (GCM - Generator Coordinate Method) e o modelo de condição de ortogonalidade (OCM - Orthogonality Condition Model). O GCM é exatamente equivalente ao RGM, mas com menos dificuldades computacionais. Este modelo estendeu o alcance de aplicabilidade do RGM para o espalhamento elástico de núcleos apreciavelmente mais pesados que a partícula  $\alpha$ . O espalhamento elástico  $\alpha - ^{16}\text{O}$  foi tratado por tais métodos por M. Kamimura e T. Matsuse<sup>[126]</sup> e o  $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$  por H. Friedrich<sup>[127]</sup>, A. Tohsaki, F. Tanabe e R. Tamagaki<sup>[128]</sup>. O espalhamento  $\alpha - ^{40}\text{Ca}$  foi estudado por H. Friedrich e K. Langanke<sup>[129]</sup> usando o RGM.

Vários sistemas têm sido investigados pelo RGM (ou GCM) e o conhecimento da interação inter-núcleo tem sido acumulado. Devemos

destacar a descoberta da condição de ortogonalidade para os estados (quase) proibidos pelo princípio de Pauli proposta por Saito e seus colaboradores<sup>[130]</sup>, que tem tido um papel decisivo, especialmente para o estudo do modelo de "cluster" para núcleos leves. Em 1969, Saito sugeriu uma aproximação da equação do RGM e aplicou ao espalhamento  $\alpha - \alpha$  com bastante sucesso. Várias generalizações desta aproximação, o OCM, foram sugeridas e discutidas.

Há cerca de quinze anos atrás (1975), Buck, Dover e Vary introduziram um modelo de "cluster" simples<sup>[131]</sup>. Dois anos depois, em 1977, Buck, Friedrich e Wheatley<sup>[132]</sup> mostraram que o RGM pode ser bem aproximado pelo OCM, que pode ainda ser simplificado por um potencial núcleo-núcleo local, descrevendo o movimento de um "cluster" sem estrutura em relação a um caroço inerte.

Na referência [131] eles obtiveram um potencial "cluster"-caroço efetivo integrando as densidades do "cluster" e do caroço com uma interação N - N efetiva, e foram capazes de dar uma boa descrição do espectro, das larguras de decaimento alfa e das transições eletromagnéticas entre os estados de "cluster"  $\alpha$  do  $^{16}\text{O}$  e do  $^{20}\text{Ne}$ . Cálculos para núcleos com massa entre 16 e 20 têm sido feitos.

O potencial "cluster"-caroço efetivo é obtido integrando-se as densidades dos dois componentes com uma interação nucleon-

nucleon efetiva: uma função delta é usualmente empregada para isso, tal que a integração dupla se reduz a uma integração simples e o potencial local "cluster"-caroço efetivo se reduz à,

$$V(r) = \frac{-2\pi\hbar^2}{M} \bar{\gamma} \int d^3 r' \rho_A(r - r') \rho_B(r') \quad (5.6)$$

onde  $M$  é a massa do nucleon,  $\bar{\gamma}$  é um parâmetro real ajustável, e  $\rho_A$  e  $\rho_B$  são as densidades do "cluster" e do caroço, respectivamente.

O "cluster" é então tratado como uma partícula independente com número quântico principal  $N$ , e momento angular  $L$ , que são restritos a obedecer os requerimentos do princípio de exclusão de Pauli, impondo-se a condição de Wildermuth,

$$Q = 2N + L = \sum_{i=1}^{n_c} (2n_i + \ell_i), \quad (5.7)$$

onde  $n_c$  é o número de partículas no "cluster", e  $n_i, \ell_i$  correspondem ao preenchimento dos orbitais do modelo de camadas acima do caroço fechado, assegurando, então, que os nucleons do cluster e os nucleons do caroço não ocupam a mesma camada maior. Os níveis com o mesmo valor de  $Q = 2N + L$  formam uma banda. Os nucleons do "cluster" ocupam os orbitais mais baixos ligados acima da superfície de Fermi do núcleo caroço e a relação acima é sugerida pelo modelo de camadas comum (ordinário).

Os estados podem ser bem descritos como estados ligados ou

estados de ressonância nuclear nos quais o cluster leve orbita em torno do alvo e ambos estão nos seus estados fundamentais.

A equação de Schrödinger da partícula independente pode ser resolvida com o potencial da equação (5.6) mais um potencial coulombiano e um potencial centrífugo para se obter as energias e as funções de onda para o movimento relativo do cluster em torno do caroço para um estado de N e L específicos.

A interação "cluster"-caroço foi originalmente tomada do "folding-model". Este fornece um potencial tipo Gaussiano que mais tarde foi parametrizado com uma forma Saxon-Wood simetrizada

$$U(r) = -V_0 \frac{1 + \cosh(R/a)}{\cosh(R/a) + \cosh(r/a)} \quad (5.8)$$

O potencial total considerado é

$$V(r) = U(r) + V_c + V_\ell \quad (5.9)$$

onde  $V_\ell$  é o potencial centrífugo e  $V_c$ , o potencial coulombiano, é escolhido para corresponder à uma partícula pontual interagindo com um volume esférico uniformemente carregado de raio  $R_c$ , isto é,

$$V_c(r) \begin{cases} \frac{z_1 z_2 z e^2}{r} & \text{para } r \geq R_c \\ \frac{z_1 z_2 e^2}{2R_c} \left[ 3 - \frac{r^2}{R_c^2} \right] & \text{para } r < R_c \end{cases} \quad (5.10)$$

Estes potenciais dão origem a um espectro rotacional quase exato que é necessário para ajustar o esquema de níveis experimental. A justificativa do uso do potencial local foi extensivamente discutida na referência [132].

Pal e Lovas<sup>[133]</sup> aplicaram este modelo ao  $^{44}\text{Ti}$ . Eles ajustaram o potencial acima, tratando o  $^{44}\text{Ti}$  como uma partícula  $\alpha$  orbitando em torno do  $^{40}\text{Ca}$ . Os parâmetros obtidos estão na Tabela 5.2

	$T_1(1)$	$T_1(2)$
$V_0$ (MeV)	241.9	161.9
R (fm)	3	3
a (fm)	0.68	1.4
$R_c$ (fm)	4.1	4.1

TABELA 5.2: Parâmetros encontrados por Pal e Lovas na Ref. [133] para o  $^{44}\text{Ti}$

Eles encontraram dois conjuntos diferentes de parâmetros que dão um bom ajuste para o esquema de níveis. Estes potenciais podem ser vistos na Figura 5.4.

Fizemos os cálculos para o  $^{44}\text{Ti}$  usando os potenciais encontrados por Pal e Lovas. Encontramos que o potencial chamado



Ti(2) é o melhor para nossas propostas. Inicialmente reproduzimos os esquemas de níveis usando ambos os conjuntos de parâmetros. Então estudamos o comportamento da função de onda principalmente na cauda. Usamos este modelo simples para entender como a função de onda na superfície depende do potencial, desde que nosso objetivo é estudar a formação de "clusters" na superfície do núcleo.

No próximo capítulo temos alguns cálculos feitos usando aproximação WKB. Lá comparamos os resultados com os encontrados neste capítulo.

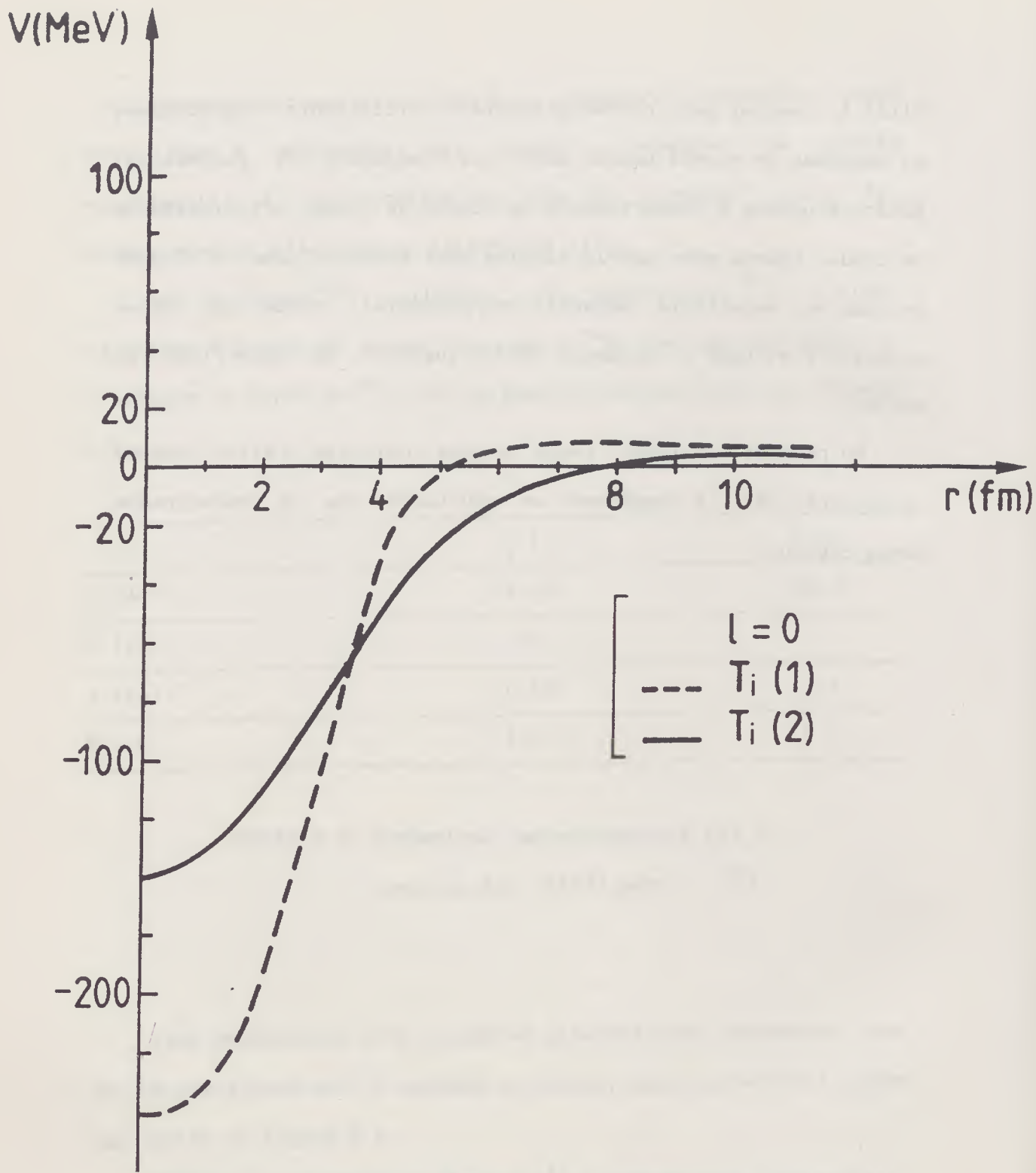
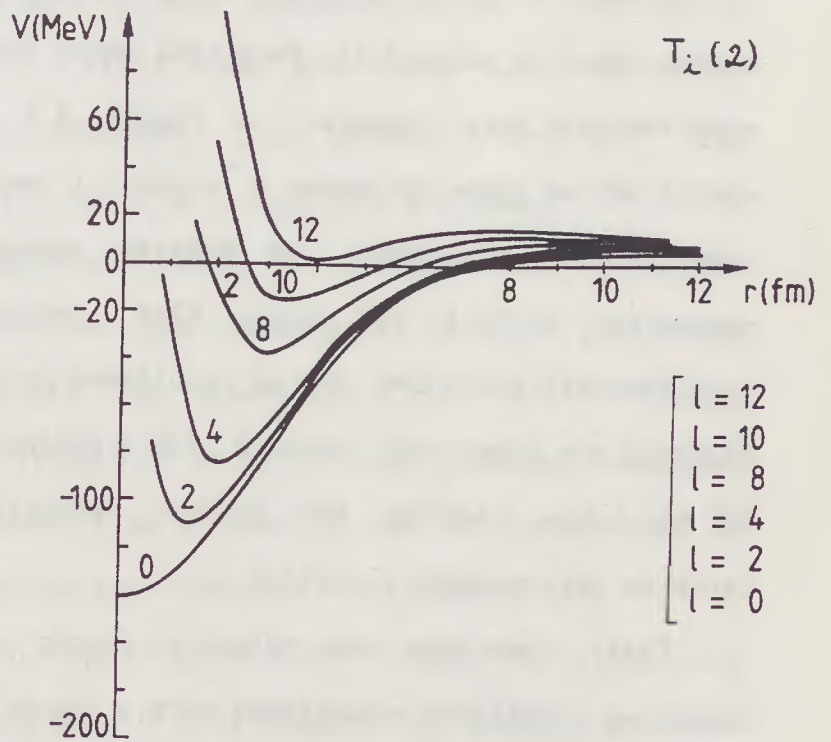
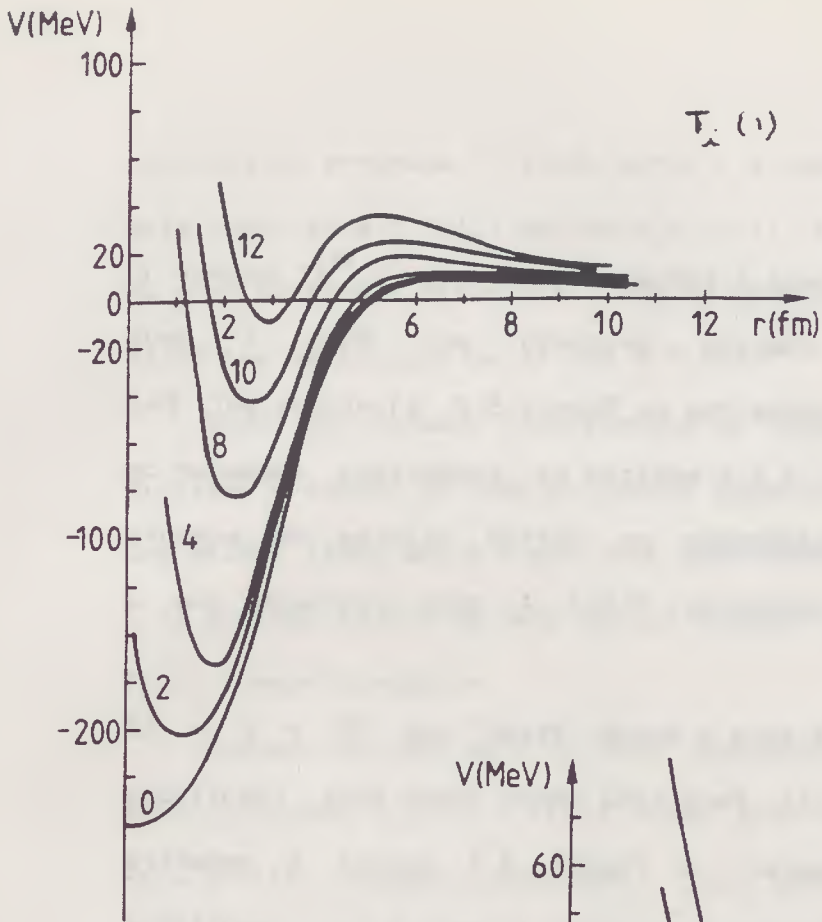


FIGURA 5.4: Comparação dos potenciais denominados  $T_i(1)$  e  $T_i(2)$ , usando os parâmetros da Tabela 5.2.



FIGURAS 5.5 E 5.6: Potenciais  $T_i(1)$  e  $T_i(2)$  considerando os vários valores de  $L$ .

### 5.e. Resultados

Inicialmente estudamos a função de onda para o  $^{44}\text{Ti}$  usando o modelo de "cluster" simples proposto por Buck e seus colaboradores, com os parâmetros da Tabela 5.2, ajustados por Pal e Lovas. As Figuras 5.5. e 5.6 mostram os potenciais chamados de  $Ti(1)$  e  $Ti(2)$ . Lá consideramos os vários valores do momento angular até  $L = 12$ . O potencial  $Ti(1)$  é mais profundo que o potencial  $Ti(2)$ .

Fizemos os cálculos para a banda "Yrast" com  $2N + L = 12$  usando ambos os potenciais. Para esta banda temos bons resultados experimentais para comparar. A Figura 5.7 mostra o espectro encontrado em ambos os casos. A coluna 1 mostra os resultados experimentais comparados com aqueles encontrados usando os parâmetros do  $Ti(1)$  e do  $Ti(2)$ . Eles reproduzem os valores experimentais muito bem, mas os resultados da coluna 3 parecem ser melhores que aqueles da coluna 2. Com o potencial  $Ti(2)$  o estado  $10^+$  não é bem ajustado. Não pudemos calcular o estado  $12^+$  por causa de dificuldades numéricas.

Então, começamos nosso estudo da função de onda. A figura 5.8 mostra os resultados encontrados para a função de onda calculados com  $Ti(1)$  usando os vários valores de  $L$  na banda  $2N + L = 12$ . A Figura 5.9 mostra o mesmo usando os parâmetros de  $Ti(2)$ . O sinal é diferente. Isto é presumivelmente devido a escolha das condições

iniciais no programa. A forma geral é a mesma mas o pico externo é mais largo para o  $Ti(2)$  que para o  $Ti(1)$ . Também a posição radial do pico externo é diferente. Isto se deve ao fato que o potencial  $Ti(2)$  tem um alcance maior que o  $Ti(1)$ .

Desde que estamos interessados na "cauda" da função de onda, plotamos a função de onda em escala logarítmica, à fim de se ter uma melhor visão sobre o que está acontecendo. As Figuras 5.10 e 5.11 mostram as curvas para vários valores de  $L$  para o  $Ti(1)$  e  $Ti(2)$ , respectivamente.

Podemos ver que para valores consecutivos de  $L$  as curvas quase coincidem, e para o  $Ti(2)$ , eles são todos muito próximos. Para o  $Ti(1)$ , quando aumentamos  $L$ , para grandes valores de  $r$ , elas tendem a se separar e o valor de  $L$  mais alto é o menor.

Nos cálculos seguintes usamos os parâmetros do potencial  $Ti(2)$ , somente. Achamos que este potencial dá um melhor ajuste dos resultados experimentais. Na referência [133] Pal e Lovas calcularam as probabilidades de transição quadrupolares reduzidas entre os níveis vizinhos. Eles encontraram que os parâmetros do  $Ti(2)$  reproduzem os dados experimentais razoavelmente bem.

No próximo capítulo continuamos nosso estudo da função de onda do  $^{44}Ti$ . Consideraremos lá dois tipos de aproximação WKB para ajudar a entender o comportamento da função de onda na superfície nuclear.



Ex  
(MeV)

$^{44}\text{Ti}$

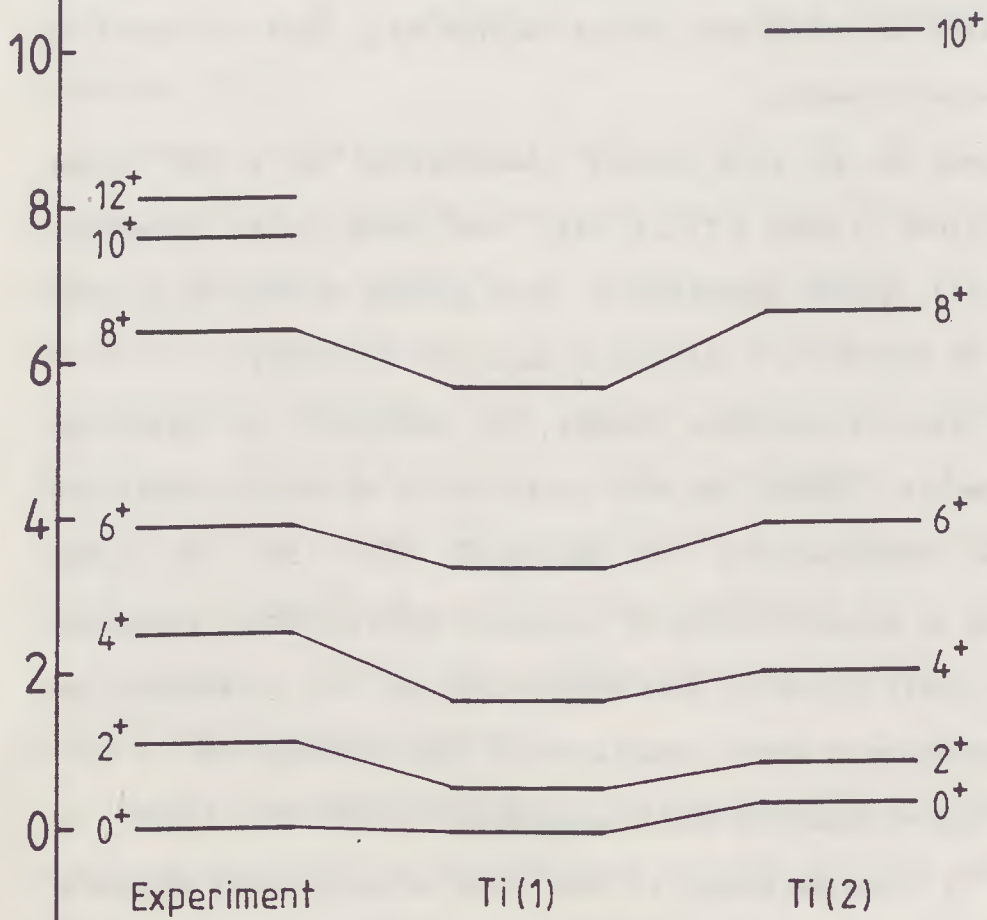
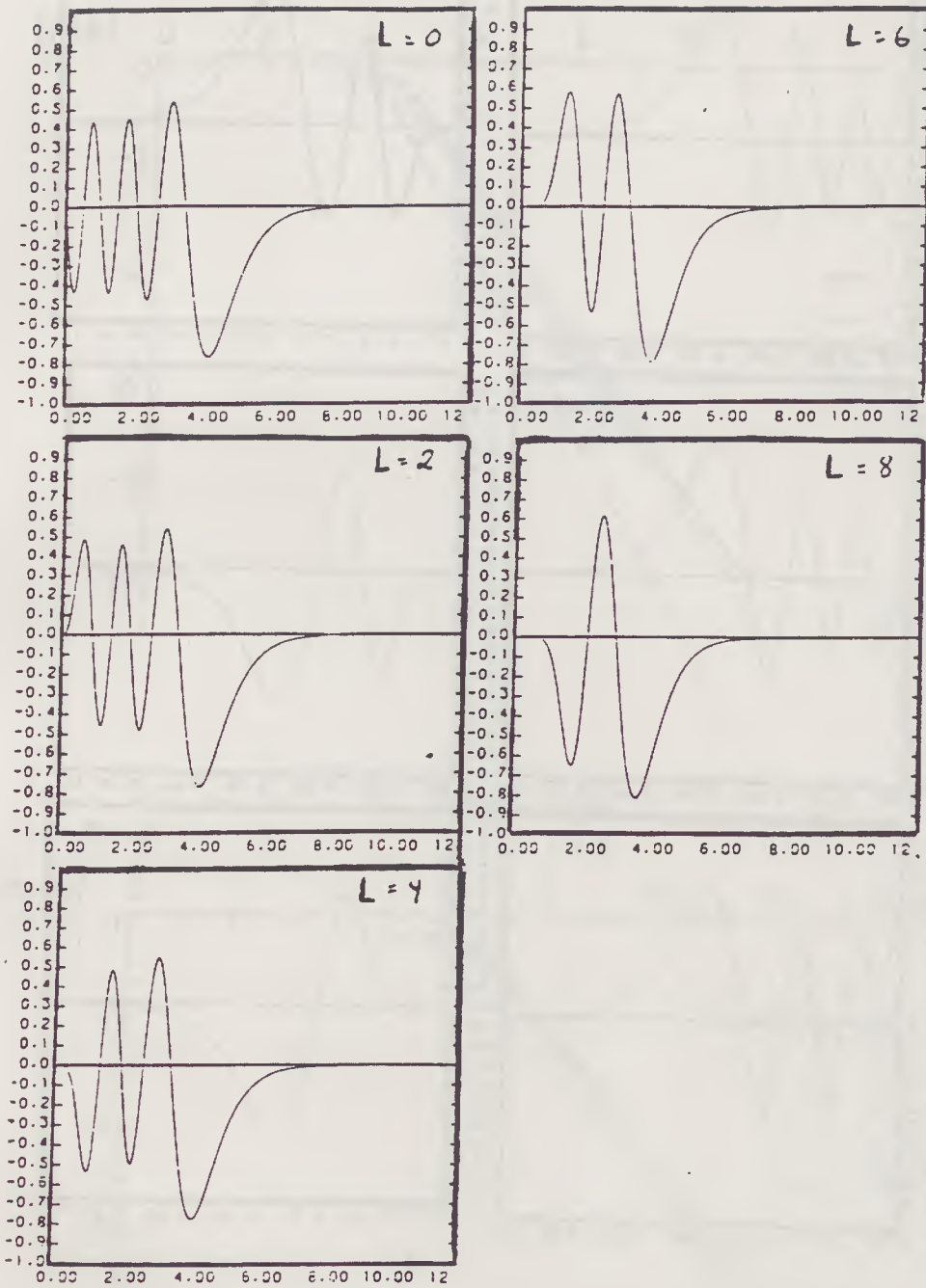


FIGURA 5.7: Espectro do  $^{44}\text{Ti}$ .



$T_i(1)$

FIGURA 5.8: Função de onda considerando vários valores de  $L$  e os parâmetros do potencial  $T_i(1)$ .

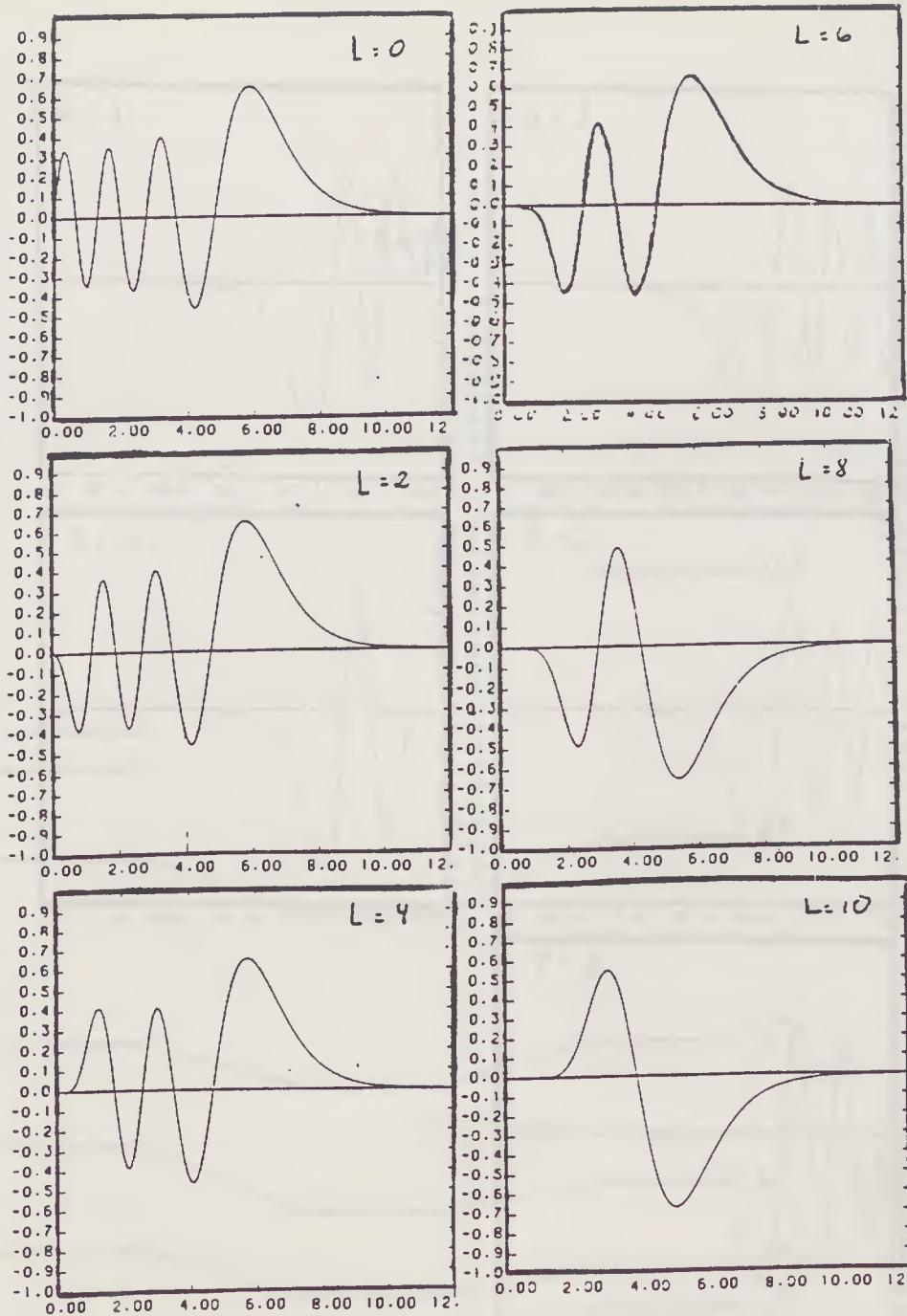


FIGURA 5.9: Função de onda considerando os vários valores de  $L$  para o  $Ti(2)$ .

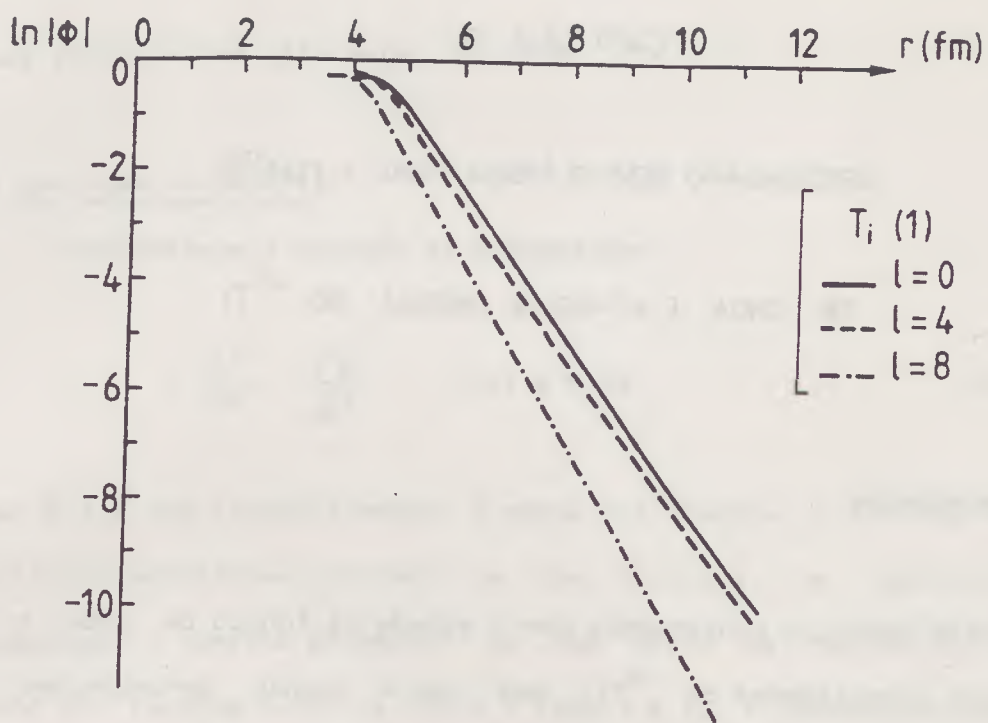


FIGURA 5.10

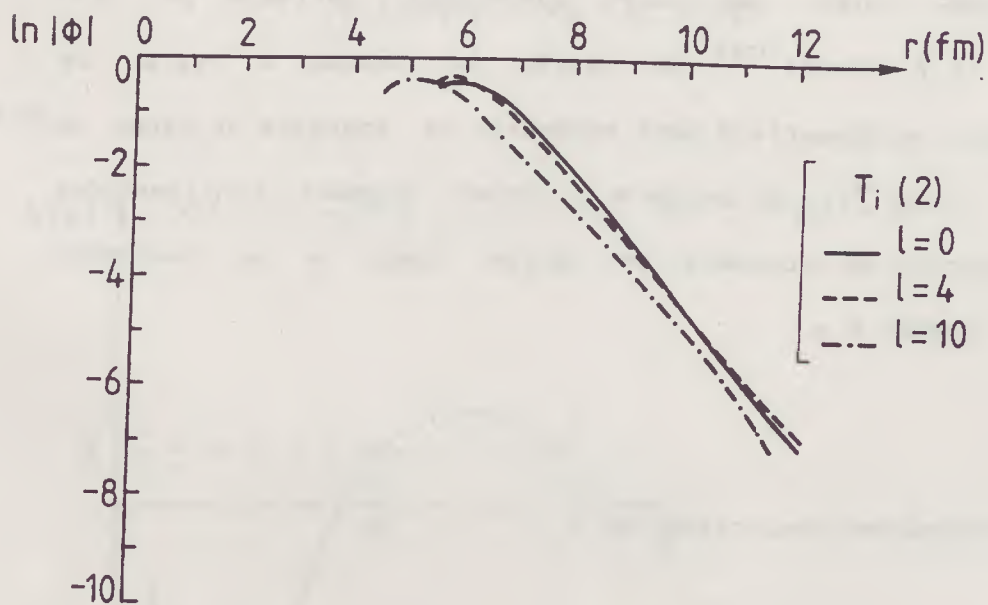


FIGURA 5.11: Ln da cauda da função de onda.

## CAPÍTULO 6

### APROXIMAÇÃO SEMI-CLÁSSICA PARA A FUNÇÃO

### DE ONDA E NÍVEIS DE ENERGIA DO $^{44}\text{Ti}$

#### 6.a. Introdução

Neste capítulo continuamos com o estudo da função de onda e de outras propriedades do  $^{44}\text{Ti}$ , mas agora usando aproximações semi-clássicas. Na secção 6.b consideraremos o método mencionado no Capítulo 1 desta tese, precisamente, a aproximação de Airy. Consideramos, então, uma outra aproximação, derivada por M.V. Berry e K.E. Mount<sup>[134]</sup>. Na secção 6.c usamos a regra de quantização de Sommerfeld para encontrar as energias da banda de  $2N + L = 12$  do  $^{44}\text{Ti}$ . Na secção 6.d fazemos algumas considerações sobre larguras de decaimento em vários casos, e as conclusões estão na secção 6.e.

#### 6.b. Aproximações semi-clássicas

Nesta secção encontramos a função de onda para o  $^{44}\text{Ti}$  usando



duas aproximações diferentes.

### 1) Aproximação de Airy

Consideremos a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (6.1)$$

onde  $m$  e  $E$  são respectivamente a massa e a energia total de uma partícula penetrando através de uma barreira de potencial. Expandindo a energia potencial em uma série de potências, em torno do "turning point"  $a$  (veja a figura 6.1), e retendo os dois primeiros termos da expansão, temos

$$V(x) = V(a) + (x - a) V'(a) \quad (6.2)$$

com

$$V'(a) = \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=a} \quad \text{e} \quad V(a) = E \quad (6.3)$$

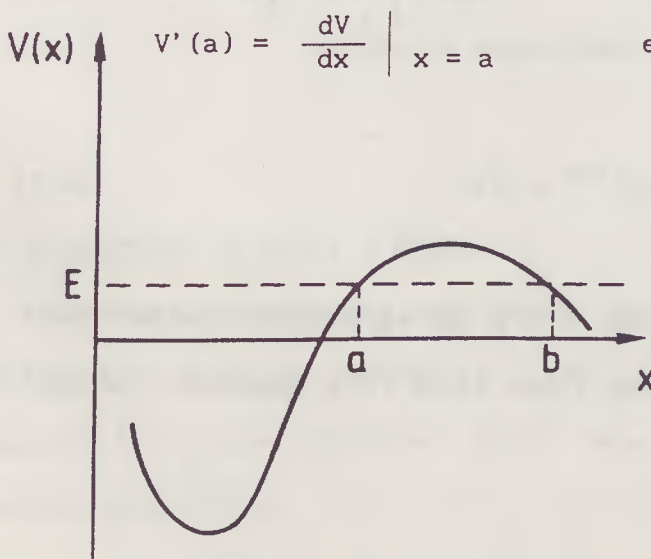


FIGURA 6.1: Uma barreira de potencial com "turning points" clássicos em  $x = a$  e  $x = b$ .

Substituindo a equação (6.2) em (6.1) encontramos a equação de Airy e a solução desta equação é a função de Airy

$$\psi(x) = \text{Ai}(\beta(x-a)) = \text{Ai}(\sigma) \quad (6.4)$$

onde

$$\beta^3 = \frac{2mV'}{\hbar^2} \quad , \quad (6.5)$$

e

$$\sigma = \beta(x-a) \quad , \quad (6.6)$$

como foi visto no Capítulo 1. Para  $x > a$ , de (1.38) e (1.39)

$$\begin{aligned} \int_a^x k(x) dx &= \int_a^x \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(x)-E)} dx = \int_a^x \sqrt{\frac{2mV'}{\hbar^2} (x-a)} dx \\ &\approx \frac{2}{3} \{\beta(x-a)\}^{3/2} = \Gamma(x) \quad . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Podemos ver de (6.2) que esta é uma aproximação muito pobre, pois o potencial é aproximado à uma linha reta passando tangente em  $a$ , como na Figura 6.2.

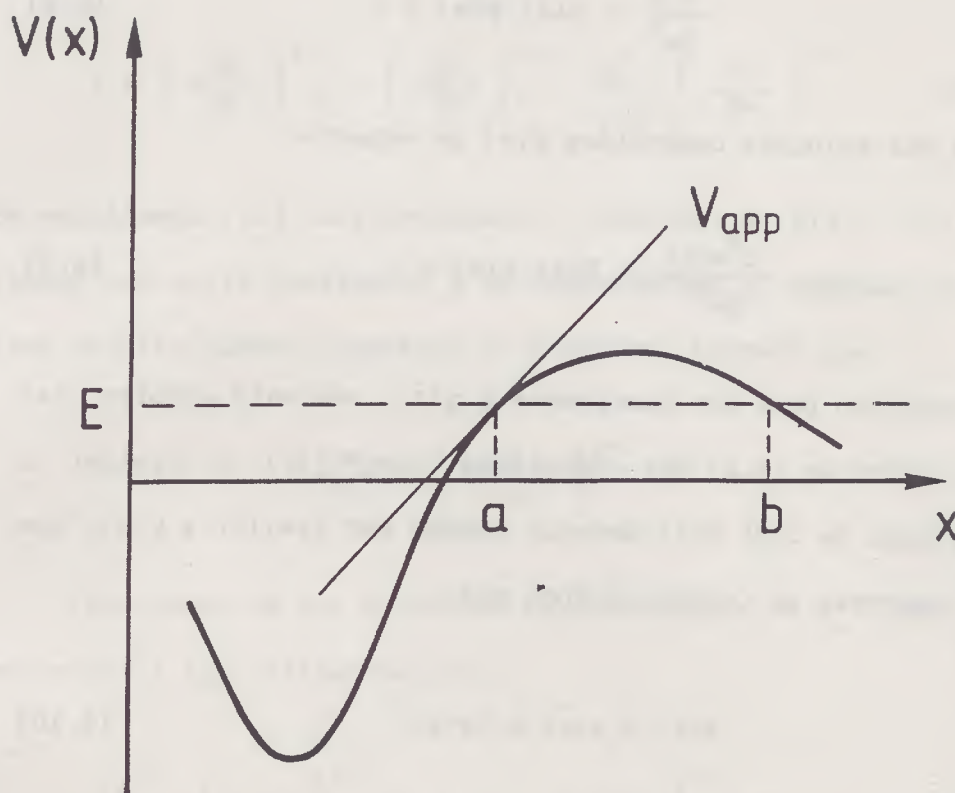


FIGURA 6.2: Comparação da barreira real e do potencial aproximado da equação (6.2).

## 2) Aproximação de Berry e Mount

A segunda aproximação considerada aqui, foi derivada por M.V. Berry e K.E. Mount na referência [134]. É uma generalização do método W.K.B., onde tenta-se obter uma solução aproximada da equação diferencial

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \chi(x) \psi(x) = 0 \quad (6.8)$$

em termos das soluções conhecidas  $\phi(\sigma)$  da equação

$$\frac{d^2\phi(\sigma)}{d\sigma^2} + \Gamma(\sigma) \phi(\sigma) = 0 \quad (6.9)$$

$\Gamma(\sigma)$  é escolhido para ser semelhante à  $\chi(x)$ , mas mais simples, tal que as soluções de (6.2) são conhecidas. Como  $\Gamma(\sigma)$  é similar a  $\chi(x)$ , a função de onda  $\phi(\sigma)$  deveria também ser similar a  $\psi(x)$ , que pode ser expressa em termos de  $\phi(\sigma)$  por

$$\psi(x) = \gamma(x) \phi(\sigma(x)) \quad (6.10)$$

Substituindo (6.10) em (6.8) e usando (6.9) temos

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} \phi + \chi\gamma\phi - \gamma \left( \frac{d\sigma}{dx} \right)^2 \Gamma\phi - \frac{d\phi}{dx} \left( 2 \frac{d\gamma}{dx} \frac{d\sigma}{dx} + \gamma \frac{d^2\sigma}{dx^2} \right) = 0. \quad (6.11)$$

Considerando-se  $\phi$  e  $\phi'$  independentes, obtemos

$$\gamma = \left( \frac{d\sigma}{dx} \right)^{1/2}, \quad (6.12)$$

a equação (6.11) se simplifica e encontramos a função  $\sigma(x)$  como

solução de

$$\chi = \left( \frac{d\sigma}{dx} \right)^2 \Gamma - \left( \frac{d\sigma}{dx} \right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d\sigma}{dx} \right)^{-1/2} \quad (6.13)$$

Se escolhermos  $\Gamma(\sigma)$  suficientemente similar a  $\chi(x)$ ,  $\sigma(x)$  será função que varia lentamente e se desprezarmos o segundo termo do lado direito quando comparado ao primeiro, teremos que

$$\frac{d\sigma}{dx} \approx \left( \frac{\chi(x)}{\Gamma(x)} \right)^{1/2} \quad (6.14)$$

Escolhendo um par de pontos equivalentes  $\sigma_0$  e  $x_0$ ,  $\sigma(x)$  pode ser escrita implicitamente como

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \left( \Gamma(\sigma) \right)^{1/2} d\sigma = \int_{x_0}^x \left( \chi(x) \right)^{1/2} dx \quad (6.15)$$

ou

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \left( -\Gamma(\sigma) \right)^{1/2} d\sigma = \int_{x_0}^x \left( -\chi(x) \right)^{1/2} dx \quad (6.16)$$

que é mais conveniente. A solução aproximada é dada por

$$\psi(x) \approx \left[ \frac{\Gamma(\sigma(x))}{\chi(x)} \right]^{1/4} \vartheta(\sigma(x)) \quad (6.17)$$

$\sigma(x)$  sendo dado por (6.15) e (6.16). A condição para  $\Gamma(\sigma)$  e  $\chi(x)$



sejam suficientemente similares para que (6.17) seja uma boa solução é obtida de (6.13),

$$\mathcal{E}(x) = \left| \frac{1}{\chi(x)} \left( \frac{d\sigma}{dx} \right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d\sigma}{dx} \right)^{-1/2} \right| \ll 1 . \quad (6.18)$$

Para a equação de Schrödinger

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2(x) \psi = 0 \quad (6.19)$$

onde

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V - E) \quad (6.20)$$

as soluções são obtidas das soluções "standards"

$$\phi = e^{\pm i\sigma} \quad (6.21)$$

da equação de comparação

$$\frac{d^2\phi}{d\sigma^2} + \phi = 0 . \quad (6.22)$$

A relação equivalente a (6.14) é

$$\frac{d\sigma}{dx} = k(x) \quad (6.23)$$

e caímos na solução familiar

$$\psi(x) \approx b_+ p(x)^{-1/2} \exp \left[ i \int_{x_0}^x k(x') dx' \right] + b_- p(x)^{-1/2} \exp \left[ -i \int_{x_0}^x k(x') dx' \right] \quad (6.24)$$

Esta solução não é válida próximo aos "turning points" onde  $k^2(x)$  é zero. A solução W.K.B. do outro lado do "turning point", na região classicamente proibida, corresponde a escolher  $\Gamma(\sigma) = -1$  e dá

$$\psi(x) \approx C_+ p^{-1/2} \exp \left[ \int_{x_0}^x |k(x')| dx' \right] + C_- p^{-1/2} \exp \left[ - \int_{x_0}^x |k(x')| dx' \right]. \quad (6.25)$$

Estas são soluções bastante distintas, obtidas de funções de comparação diferentes e não nos dão informação sobre o problema de conexão através dos "turning points". A razão é que  $\Gamma(\sigma)$  não é suficientemente igual a  $k^2(x)$ .

Uma função razoável é  $\Gamma(\sigma) = -\sigma$ , e a equação de comparação é

$$\frac{d^2 \phi}{d\sigma^2} - \sigma \phi = 0 \quad (6.26)$$

Esta é a equação de Airy que tem duas soluções independentes,  $Ai(\sigma)$  e  $Bi(\sigma)$ . A função  $\sigma(x)$  é dada por

$$2/3 \sigma^{3/2} = \int_a^x k(x') dx' \quad (6.27)$$

e a solução aproximada da equação de Schrödinger é

$$\psi(x) \approx \left[ \frac{\sigma(x)}{k^2(x)} \right]^{1/4} (\alpha \text{Ai}(\sigma(x)) + \beta \text{Bi}(\sigma(x))) \quad (6.28)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes determinadas pelas condições de contorno. As funções  $\text{Ai}(\sigma)$  e  $\text{Bi}(\sigma)$  são bem entendidas. Em particular, fórmulas de conexão exatas podem ser estabelecidas pela análise direta das expansões em séries convergentes, sem a necessidade de um método complexo. O fato de que  $\text{Ai}(\sigma)$  e  $\text{Bi}(\sigma)$  podem ser aproximadas por expressões tipo W.K.B. para grandes valores de  $|\sigma|$  foi a base das primeiras determinações das fórmulas de conexão por Jeffreys (1923) e Kramers (1926)

No nosso problema,  $\alpha$  na equação (6.28) é uma constante de proporcionalidade que é determinada normalizando-se a função de onda aproximada com a função de onda exata no capítulo anterior, usando-se o modelo de Buck et.al.<sup>[131]</sup>. Fazemos  $\beta = 0$ , pois a função  $\text{Bi}$  vai muito rapidamente para o infinito. A função de onda é, portanto,

$$\psi(x) \approx \left[ \frac{\sigma(x)}{k^2(x)} \right]^{1/4} (\alpha \text{Ai}(\sigma(x))) \quad (6.29)$$

À seguir apresentamos os resultados encontrados usando ambas as aproximações discutidas acima. A primeira aproximação para a função de onda é calculada da equação (6.4) enquanto que a segunda é calculada da equação (6.29).

A Figura (6.3) mostra os resultados obtidos usando a primeira aproximação, precisamente a aproximação de Airy (6.4). Neste "plot" comparamos a função de onda exata obtida anteriormente usando o modelo de Buck e colaboradores para o  $^{44}\text{Ti}$  e  $l = 0$ . A linha pontilhada indica o "turning point" clássico  $a = 6.69$ . Podemos ver que os resultados são razoáveis apesar de a aproximação ser bastante pobre, reproduzindo a cauda da função de onda muito bem. O comportamento da função de onda para valores do raio muito menores que o "turning point" não é bem reproduzido. Isto acontece porque a aproximação (6.4) não é boa.

A Figura 6.4 mostra o mesmo para a aproximação de Berry e Mount. A concordância entre a função de onda exata e a aproximada é muito boa para todos os valores de  $x$

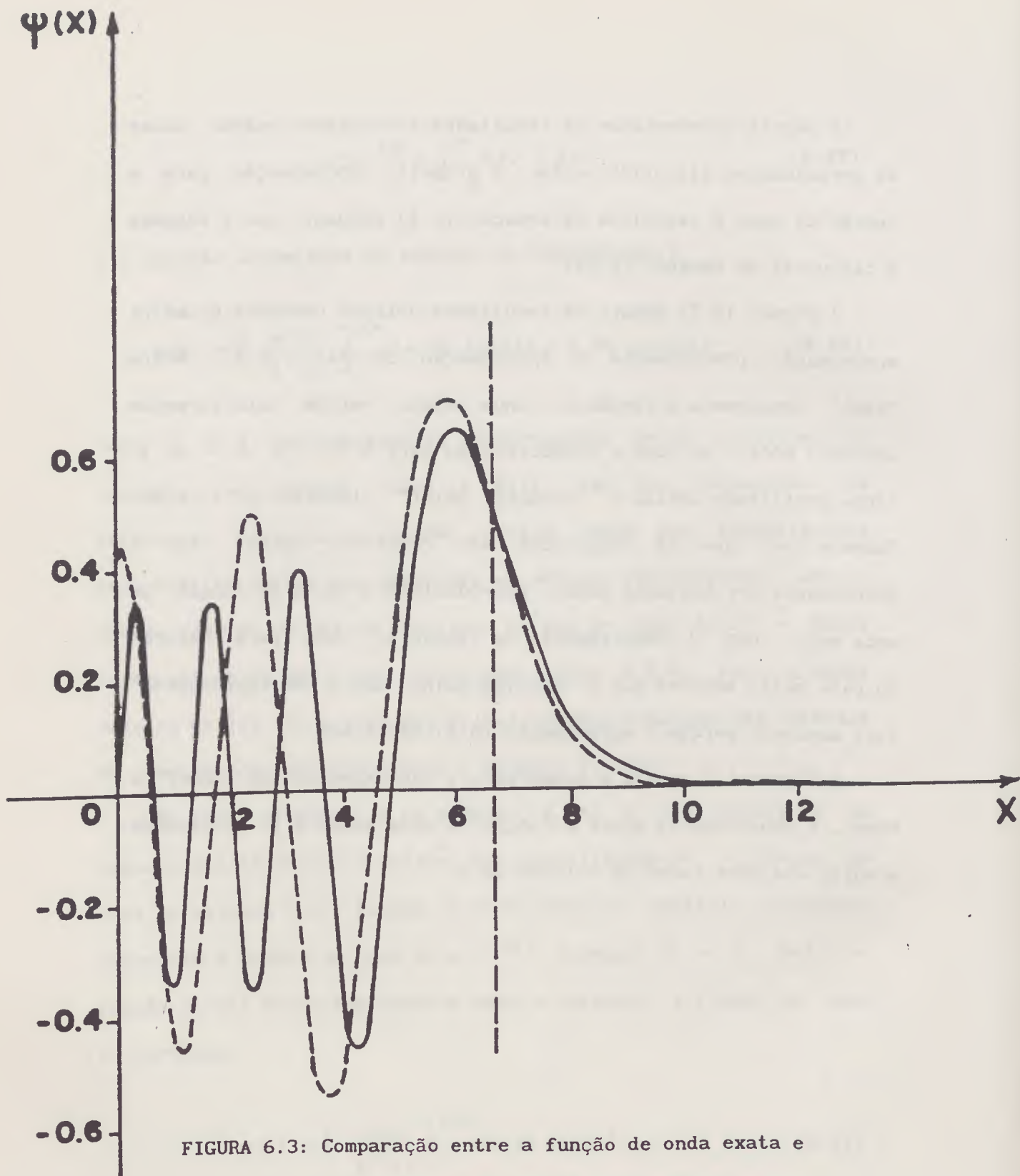


FIGURA 6.3: Comparação entre a função de onda exata e a aproximada usando a aproximação de Airy



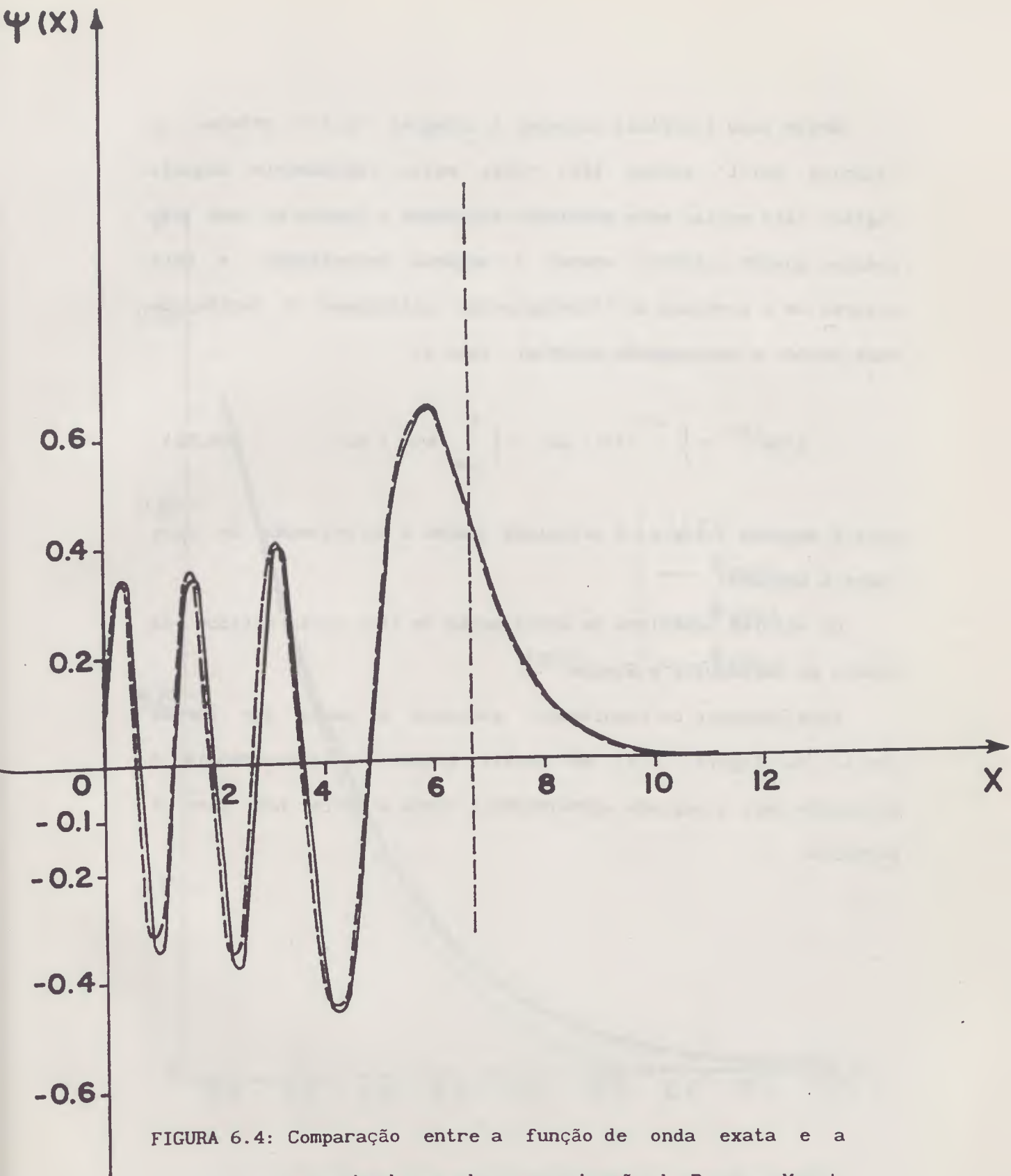


FIGURA 6.4: Comparação entre a função de onda exata e a aproximada usando a aproximação de Berry e Mount.

Neste caso é difícil calcular a integral (6.27) próximo do "turning point" porque  $k(x)$  varia muito rapidamente naquela região. Para evitar este problema calculamos a função de onda tão próximo quando possível usando a segunda aproximação, e para valores de  $x$  próximos do "turning point" calculamos a função de onda usando a aproximação anterior, isto é,

$$2/3\sigma^{-3/2} = \int_x^{a-\epsilon} k(x') dx' + \int_{a-\epsilon}^a k(x') dx' \quad (6.30)$$

onde a segunda integral é calculada usando a aproximação de Airy (para  $\epsilon$  pequeno).

Os valores numéricos da aproximação de Airy foram obtidos da tabela de Abramowitz e Stegun<sup>[135]</sup>.

Para comparar os resultados, plotamos a cauda das curvas juntas na Figura (6.5) em escala grande. A concordância é excelente para a segunda aproximação e ainda é muito boa para a primeira.

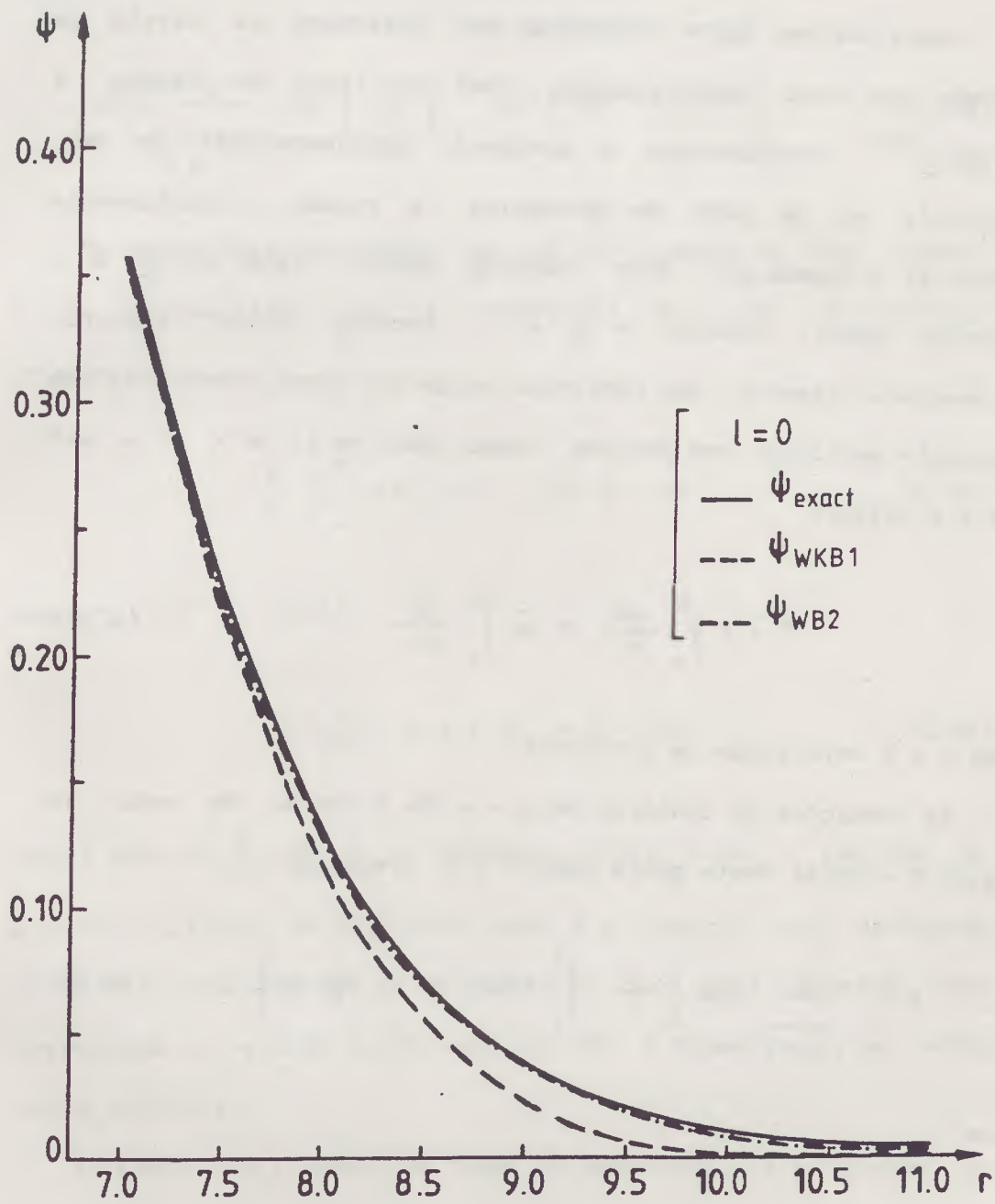


FIGURA 6.5: Comparação para a cauda de função de onda.

### 6.c. Regra de quantização de Bohr e Sommerfeld

Vamos derivar agora a condição que determina os níveis de energia no caso semi-clássico, como no livro de Landau e Lifshitz<sup>[71]</sup>, considerando o movimento unidimensional de uma partícula em um poço de potencial. A região classicamente acessível é ligada por dois "turning point", isto é,  $a$  é o "turning point" interno e  $b$  é o "turning point" externo. Em mecânica clássica, uma partícula em um tal campo executaria um movimento periódico com período (tempo usado em ir de  $x = a$  até  $x = b$  e voltar)

$$T = 2 \int_a^b \frac{dx}{v} = 2m \int_a^b \frac{dx}{p} \quad (6.31)$$

onde  $v$  é a velocidade da partícula.

As condições de contorno em  $x = a$  dão a função de onda, na região à direita deste ponto onde  $V < E$ , (veja Cap. 1),

$$\psi = \frac{c}{\sqrt{\rho}} \cos \left[ \frac{1}{\hbar} \int_a^x \rho(x') dx' - \frac{1}{4} \pi \right], \quad (6.32)$$

onde

$$\rho(x) = 2m [E - V(x)]^{1/2} \quad (6.33)$$

Na região à esquerda do ponto  $x = b$ , usando a mesma regra, obtemos

$$\psi = \frac{c'}{\sqrt{\rho}} \cos \left[ \frac{1}{\hbar} \int_a^x \rho(x') dx' - \frac{1}{4} \pi \right]. \quad (6.34)$$

Se estas duas expressões têm que ser a mesma em toda região, a soma de suas fases (que é constante) deve ser um múltiplo inteiro de

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b \rho(x') dx' - \frac{1}{2} \pi = n\pi \quad (6.35)$$

com  $c = (-1)^n c'$ . Então

$$\oint \frac{1}{2\pi\hbar} \rho(x') dx' = n + \frac{1}{2} \quad (6.36)$$

onde  $\oint \rho dx = 2 \int_a^b \rho dx$  é a integral sobre todo o período do movimento clássico da partícula. Esta é a condição que determina os estados estacionários da partícula no caso semi-clássico. Ela corresponde a regra de quantização de Bohr e Sommerfeld na velha teoria quântica.

O número  $n$  é o número de nodos da autofunção, e é grande no caso semi-clássico. A distância entre nodos adjacentes é igual em ordem de magnitude ao comprimento de onda de de Broglie. Para  $n$  grande, esta distância é pequena, e o comprimento de onda, é



portanto, pequeno em comparação com as dimensões da região do movimento.

Normalizando estas funções de onda, a integração de  $|\psi|^2$  pode ser restrita a  $a \leq x \leq b$ , desde que fora deste intervalo,  $\psi$  decresce exponencialmente. Desde que o argumento do cosseno em (6.32) é uma função que varia rapidamente, podemos trocar, com precisão suficiente, o cosseno quadrado pelo seu valor médio  $1/2$ . Isto dá

$$\int |\psi|^2 dx \approx \frac{1}{2} C^2 \int_a^b \frac{dx}{\rho(x)} = \frac{\pi C^2}{2m\omega} = 1, \quad (6.37)$$

onde  $\omega = 2\pi/T$  é a frequência do movimento periódico clássico. Então, a função de onda semi-clássica normalizada é dada por

$$\psi = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi v}} \cos \left[ \frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx - \frac{1}{4} \pi \right]. \quad (6.38)$$

Deve ser lembrado que a frequência  $\omega$  é em geral diferente para níveis diferentes, sendo uma função de energia.

Usando a expressão (6.36) calculamos os níveis de energia para a banda com  $2N + L = 12$ . Os resultados estão na Tabela 6.1. A energia na Tabela 6.1 chamada de  $E_{\text{exata}}$  é aquela encontrada no Capítulo 5 usando o modelo de Buck e outros<sup>[131]</sup>. Podemos ver que a concordância com aqueles valores é muito boa para todos os valores de  $N$ , para uma aproximação tão simples.

N	L	$E_{\text{exata}}$	$E_{\text{WKB}}$
0	12	-	-9.831
1	10	-5.096	-5.148
2	8	-1.495	-1.505
3	6	1.217	1.245
4	4	3.139	3.215
5	2	4.335	4.535

**TABELA 6.1:** Comparação entre as energias exata e calculada usando o método WKB (Veja texto acima)

#### 6.d. Larguras de decaimento

Nesta secção mostramos uns poucos resultados obtidos para larguras de decaimento usando uma aproximação semi-clássica. Para calcular as larguras de decaimento usamos a expressão

$$\Gamma = \frac{\hbar P}{T} \quad (6.39)$$

onde T é o período do movimento clássico como definido em (6.31) e

P é o coeficiente de penetrabilidade,

$$P = \exp \left[ -2 \int_b^c p(x) dx \right] \quad (6.40)$$

onde

$$p(x) = \frac{1}{\hbar} \left\{ 2m [ V(x) - E ] \right\}^{1/2} \quad (6.41)$$

e  $V(b) = V(c) = E$ .

Para encontrar as larguras usando (6.39) temos

$$\Gamma = \frac{\hbar P}{T} = \frac{\hbar \exp \left[ -2 \int_b^c p(x) dx \right]}{2m \int_a^b \frac{dx}{p'(x)}} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{P}{\int_a^b \frac{dx}{p'(x)}} \quad (6.42)$$

com

$$p' = \left[ \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \right]^{1/2} \quad (6.43)$$

Para calcular a integral em (6.42) usamos uma fórmula de integração do tipo gaussiano (25.4.39) da tabela de Abramowitz e Stegun<sup>[135]</sup>.

Para o fator de penetrabilidade, usando a equação (6.40), obtivemos os resultados da Tabela 6.2, para os estados com  $L = 10$  e  $L = 12$ , no caso do  $^{44}\text{Ti}$ . Na segunda coluna encontramos os valores das energias encontrados usando a regra de quantização de

Bohr e Sommerfeld, e na terceira coluna damos os coeficientes de penetrabilidade encontrados usando aqueles valores da energia. Na coluna quatro estão os valores da energia usando o modelo de Buck e colaboradores<sup>[131]</sup> e os respectivos valores da penetrabilidade usando a equação (6.40) estão na última coluna.

L	E	P	E	P
10	-9.831	$1.757 \times 10^{-5}$	-	-
12	-5.148	$3.865 \times 10^{-8}$	-5.096	$3.086 \times 10^{-8}$

TABELA 6.2: Penetrabilidade para o  $^{44}\text{Ti}$ .

Veja o texto para detalhes

Usando as equações (6.42) e (6.40) encontramos as larguras de decaimento  $\alpha$  dadas na Tabela 6.3

L	E(MeV)	$\Gamma_{\text{WKB}} \text{ (eV)}$	$\Gamma_{\text{Baldock}} \text{ (eV)}$
10	-9.831	0.051	0.050
12	-5.096	29.562	27.300

TABELA 6.3: Larguras de decaimento  $\alpha$  para o  $^{44}\text{Ti}$

Nesta tabela comparamos nossos resultados com aqueles encontrados usando um programa gentilmente cedido pelo Dr. R. Baldock. Naquele programa, quando as ressonâncias eram estreitas o suficiente, as larguras  $\alpha$  eram medidas com o gap de energia sobre o qual o defasamento vai de  $\pi/4$  à  $3\pi/4$ , e os defasamentos são calculados na referência [136].

A fim de testar nossos resultados, calculamos as larguras  $\alpha$  para o  $^{20}\text{Ne}$  usando as equações acima e comparamos com aqueles encontrados na referência [136]. A comparação está na Tabela 6.4

L	$E_{\text{exp}}$ (meV)	$\Gamma_{\text{ref. [136]}}$ (KeV)	$\Gamma_{\text{WKB}}$ (KeV)	$\Gamma_{\text{exp}}$ (KeV)
6	8.77	0.21	0.29	< 3
8	11.95	0.10	0.26	0.035

TABELAL 6.4: Larguras de decaimento  $\alpha$  para o  $^{20}\text{Ne}$ . Valores experimentais são extraídos da referência [137]

Podemos ver das Tabelas (6.3) e (6.4) que os resultados concordam muito bem no caso do  $^{44}\text{Ti}$  mas não tão bem no caso do  $^{20}\text{Ne}$ . Isto pode ser por que a aproximação semi-clássica funciona melhor para o  $^{44}\text{Ti}$ , que é um nucleo mais pesado.



## 6.e Conclusão

Neste capítulo encontramos a função de onda, os níveis de energia e as larguras de decaimento  $\alpha$  para o  $^{44}\text{Ti}$ , usando aproximação tipo WKB simples. Os resultados encontrados são muito bons apesar da simplicidade das aproximações, principalmente para as funções de onda calculadas usando a aproximação de Berry e Mount que reproduz muito bem aquela encontrada usando o modelo de "cluster" da referência [131]. Os níveis de energia são bem reproduzidos também.

Todas as funções de onda de "cluster"  $\alpha$  estudadas nesta secção mostram um pico proeminente na superfície nuclear. A posição deste pico é dada bem precisamente pela aproximação de Airy simples. Ambas, a posição e a forma, são dadas precisamente pela aproximação melhorada de Berry e Mount. Estes resultados mostram que as características deste pico proeminente na função de onda de "cluster"  $\alpha$  são determinadas pelo potencial  $\alpha$ -núcleo nas vizinhanças do "turning point" clássico e não são muito sensíveis ao comportamento do potencial à curtas distâncias.

Os potenciais  $Ti(1)$  e  $Ti(2)$  discutidos no Capítulo 5 fornecem funções de onda  $\alpha$  que são bastante diferentes na superfície. A posição dos "turning points" clássicos diferem por mais de 2fm para o  $Ti(1)$  e o  $Ti(2)$ . (Figura 5.4)

## CONCLUSOES

Estudamos nesta tese o efeito tunel através de uma barreira de potencial em várias dimensões. A penetração de barreira é um dos fenômenos mais fascinantes observados em sistemas quânticos, e é investigada em várias áreas da física. Aqui são estudadas a fusão de dois isótopos de níquel, o decaimento de núcleos mais pesados que a partícula alfa e algumas propriedades nucleares do  $^{44}\text{Ti}$ , usando um modelo de "cluster". Foram feitos cálculos quânticos, considerando modelos simples e também cálculos semiclássicos. Verificamos que a concordância para estes cálculos é muito boa, em todas as partes deste trabalho.

Aqui daremos uma conclusão geral, pois as conclusões detalhadas podem ser vistas nas conclusões de cada uma das partes.

A aproximação semiclássica é muito apropriada para descrever fenômenos físicos em termos de dinâmica clássica, mas ao mesmo tempo preserva os conceitos de amplitude de probabilidade e o princípio da interferência. As reações entre ions pesados, à energias que não excedem muito a barreira coulombiana, são discutidas naturalmente quando se usam aproximações semiclássicas, porque nestas reações observamos alguns fenômenos de interferência e ao mesmo tempo os graus de liberdade internos do sistema que são excitados, são bem definidos em termos clássicos, como as rotações, as vibrações, a transferência de partículas e etc... É

surpreendente como expressões tão simples encontradas usando aproximações semiclássicas podem dar resultados tão bons.

No capítulo 2 investigamos o efeito tunel através de uma barreira num modelo bidimensional. Lá, estudamos a fusão de dois niqueis, examinamos os coeficientes de transmissão, reflexão e a secção de choque de fusão usando um cálculo quântico exato. Consideramos um modelo multidimensional porque os dados experimentais existentes atualmente mostram que para a fusão de ions pesados à energias abaixo da barreira de interação, as secções de choque de fusão são muito aumentadas quando comparadas com as predições de modelos de penetração de barreira unidimensionais. Estas secções de choque calculadas com modelos "standards" são preditas com cerca de três ordens de magnitude menores que aquelas observadas experimentalmente.

Neste trabalho não propusemos um novo candidato para grau de liberdade, mas usamos um tipo de acoplamento diferente daqueles encontrados na literatura e estudamos o efeito deste acoplamento nos coeficientes de transmissão. Fizemos um cálculo de canais acoplados considerando até cinco canais.

Encontramos que as características gerais mostradas anteriormente por Dasso et al<sup>[31,32]</sup> para dois canais são mantidas quando incluímos o acoplamento proposto, isto é, quando  $E$  está abaixo da barreira, o acoplamento atua aumentando a probabilidade de transmissão e quando  $E$  está acima da barreira, o acoplamento

diminui a transmissão. Quando aumentamos o número de canais, o maior efeito é quando o número de canais muda de um para dois. Este efeito é pequeno quando continuamos a aumentar o número de canais. Isto significa que se consideramos um número grande de canais, somente gastaremos mais tempo de computação sem ter uma contribuição sensível para a transmissão total. Porém, podemos notar que o efeito de incluir o acoplamento é bem significativo, qualquer que seja o número de canais considerado.

Também consideramos, para comparação, uma aproximação semiclássica, usando o modelo de Esbensen et al<sup>[52]</sup> para os coeficientes de transmissão. Na referência [52] estudou-se os efeitos dinâmicos associados com excitações superficiais coletivas em um modelo bidimensional, considerando-se a aproximação de "sudden limit". Verificamos também que o efeito do acoplamento é bastante sensível mesmo neste cálculo semiclássico, onde uma aproximação simples é considerada.

A secção de choque de fusão, é aumentada acentualmente, principalmente para energias abaixo da barreira, quando incluimos o acoplamento proposto. Se comparamos nossos resultados com outros calculados recentemente para isótopos de Ni, verificamos que o efeito do acoplamento é bem razoável. Nossos resultados podem ainda ser melhorados, se incluirmos outros graus de liberdade ou mesmo excitações de outros estados. Estes estudos já foram iniciados.



A despeito de não se obter concordâncias precisas com os dados experimentais, verifica-se que uma grande melhora foi obtida em relação aos cálculos anteriores e principalmente aos resultados unidimensionais. Estamos em face com um estimulante problema e a medida que os mecanismos da reação são melhor entendidos, as medidas e os estudos da fusão abaixo da barreira oferecem interessantes possibilidades para a investigação de estrutura nuclear.

Nos Capítulos 3 e 4 estudamos a emissão de núcleos mais pesados e que a partícula alfa e o tamanho nuclear na teoria de decaimentos exóticos. A emissão de  $^{14}\text{C}$  pelo  $^{223}\text{Ra}$  recentemente observada motivou vários pesquisadores em todo o mundo a tentar observar outros decaimentos raros de partículas mais pesados que a partícula alfa usando novas técnicas experimentais e a explicar porque, para várias reações, a teoria de Gamow simples do decaimento alfa não predizia bem os resultados observados.

Basicamente essas reações são descritas usando-se o método W.K.B. Vários modelos tem sido utilizados, que variam bastante em sua essência, mas que conseguem resultados razoáveis com uma diferença, em muitos casos, de cerca de duas ordens de grandeza para o valor medido experimentalmente da razão de ramificação da partícula pesada em relação à partícula alfa. Os modelos em geral ajustam parâmetros para se aproximarem dos valores experimentais.

Fizemos um cálculo simples, utilizando o potencial de



Christensen-Whinter para calcular os coeficientes de penetração. Variamos o raio dos núcleos envolvidos para cerca de quinze reações já observadas, e verificamos que variando apenas um parâmetro podemos obter valores que concordam bem com a razão de ramificação medida, sem a necessidade de introdução de fatores de preformação.

As taxas de decaimento calculadas são muito sensíveis a erros na integral de ação, que aparece na expressão exponencial da penetrabilidade. Todos os cálculos permitem muitos erros, já que qualquer alteração na integral de ação faz muita diferença. A vantagem dos nossos cálculos é que além de serem bastante simples, não dependem do ajuste de muitos parâmetros (dependem apenas de um), dando uma indicação clara, de que a variação do raio deve ser considerada durante o processo.

Nos capítulos 5 e 6 fizemos um estudo sobre a formação de aglomerados alfa no  $^{44}\text{Ti}$ , utilizando um modelo de "cluster" simples e duas aproximações semiclássicas para estudar as propriedades nucleares deste núcleo. No Capítulo 6 encontramos a função de onda, os níveis de energia e as larguras de decaimento alfa para o  $^{44}\text{Ti}$ , usando aproximações tipo W.K.B. simples. Os resultados encontrados são muito bons apesar da simplicidade das aproximações, principalmente para as funções de onda calculadas usando a aproximação de Berry e Mount. Os níveis de energia são bem reproduzidos também.

Esta tese nos dá uma idéia bastante clara de quanta coisa pode ser feita em termos de cálculos de penetração de barreira. Quanto campo ainda está em aberto para ser estudado em física nuclear. Desde cálculos bastantes simples, que nos dão uma boa idéia qualitativa dos fenômenos até cálculos mais sofisticados podem ser considerados. O campo é bastante vasto e ainda exige muito estudo para que muitos fenômenos nucleares sejam bem entendidos e explicados. Muita pesquisa ainda precisa ser feita.

É provável que estes métodos tenham méritos relativos diferentes, e que tais méritos relativos variam de uma aplicação particular para outra. Apesar de que não se pode afirmar qual desses métodos se mostrará conveniente no futuro, há, contudo, uma coisa definitivamente clara. É que, fazer estes cálculos não é tão difícil como se acreditava até recentemente. Portanto, qualquer dado experimental para reações de ions pesados será rapidamente analisado. O acúmulo de tais dados contribuirá significativamente para aumentar nossa informação em estrutura nuclear, muito mais do que foi conseguido pelas reações com ions leves no passado.

## REFERENCIAS

1. H.J. Rose e G.A. Jones, Nature 307 (1984)245
2. A. Sandulescu, D. Poenaru e M. Ivascu, J.Phys. G5 (1979)L169;  
J. Physique Lett. 40 (1979)L465
3. R.G. Stockstad e E.E. Gross, Phys.Rev. C23 (1981)281
4. H. Esbensen, Nucl.Phys. A352 (1984)147
5. S. Landowne e J.R. Nix, Nucl.Phys. A368 (1981)352
6. M. Beckerman, Phys.Reports 129 (1984)145
7. Lecture Notes in Phys. - 219, Fusion Reaction Below the  
Coulomb Barrier, Proceedings, Cambridge, MA 1984, Spring-  
Verlag
8. H. Holm, W. Scheid e W. Greiner, Phys.Lett. 29B (1969)473
9. H. Holm e W. Greiner, Phys.Rev.Lett. 24 (1970)404
10. G.H. Rawitscher, Nucl.Phys. 83 (1966)259
11. D.L. Hill e J.A. Wheeler, Phys.Rev. 89 (1953)1102
12. C.Y. Wong, Phys.Rev.Lett. 31 (1973)766
13. H. Hofmann, Nucl.Phys. A224 (1974)116
14. G.L. Hofacker, Z. Naturf 18a (1963)607;  
S.F. Fischer, G.L. Hofacker e R. Seiler, J.Chem.Phys. 51  
(1969)3951; G.L. Hofacker e R.D. Levine, Chem.Phys.Lett. 9  
(1971)617
15. H. Massmann, K. Möhring e P. Ring, J.Chem.Phys. 66 (1977)5368
16. P.R. Christensen e Z.E. Switkowski, Nucl.Phys. A280 (1977)205

17. P. Ring, H. Massmann e J.O. Rasmussen, Nucl.Phys. A296  
(1978)50
18. W.H. Miller, J.Chem.Phys. 53 (1970)1949; 53 (1970)3578;  
W.H. Miller e T.F. George, J.Chem.Phys. 56 (1972)5668;  
T.F. George e W.H. Miller, J.Chem.Phys. 57 (1972)2458;  
W.H. Miller, Adv.Chem.Phys. 25 (1974)69
19. R.A. Marcus, Chem.Phys.Lett. 7 (1970) 525; J.Chem. Phys. 54  
(1971)3965; J.N.L. Connor e R.A. Marcus, J.Chem.Phys. 55  
(1971)5636
20. L.C. Vaz e Alexander, Phys.Rev. C10 (1974) 464
21. T. Kodama, R.A.M.S. Nazareth, P. Möller e J.R. Nix, Phys.Rev.  
C17 (1978)111
22. R.G. Stockstad, Y. Eisen, S. Kaplanis, D. Pelte, U. Smilansky  
e I. Tserruya, Phys.Rev. C21 (1980)2427
23. H. Esbensen, Nucl.Phys. A352 (1981)147
24. M. Beckerman et al, Phys.Rev. C23 (1981)1581
25. K. Siwek-Wylczynska e J.Wylczynski, Phys.Lett. B74 (1978)313  
J. Wylczynski e K. Siwek-Wylczynska, Phys.Lett. 55B (1975)270
26. R. Bass, Phys.Rev.Lett. 39 (1977) 265
27. H. J. Krappe, J. R. Nix e A. J. Sierk, Phys. Rev. Lett. 42  
(1979)215; Phys.Rev. C20 (1979)992
28. J. Blocki, J. Randrup, W.J. Swiatecki e C.F. Tsang, Ann.Phys.  
(N.Y.) 105 (1977) 427
29. M. Beckerman et al, Phys.Rev. C25 (1982)837



30. U. Jahnke, H.H. Rossner, D. Hilscher e E. Holub, Phys. Rev. Lett. 48 (1982)17
31. C.H. Dasso, S. Landowne e A. Winther, Nucl.Phys. A405 (1983) 381
32. C.H. Dasso, S. Landowne e A. Winther, Nucl.Phys. A407 (1983) 221
33. R.A. Broglia, Nucl.Phys. A409 (1983) 163c
34. R.A. Broglia, C.H. Dasso, S. Landowne e G. Pollarolo, Phys.Lett. B133 (1983) 34
35. S. Landowne e S.C. Pieper, Phys.Rev. C29 (1984) 1352
36. M.J. Rhoades - Brown e P. Braun - Munzinger, Phys.Lett. 136B (1984) 19
37. M.J. Rhoades - Brown et al, 1985 - Lecture Notes in Physics vol. 117, ed. S.G. Steadman (Berlin: Springer) pg 162
38. M. Beckerman, M.K. Salomaa, J. Wiggins e R. Rohe, Phys.Rev. C28 (1983) 1963
39. M. Beckerman, j. Wiggins, H. Aljuwair e M.K. Salomaa, Phys.Rev. C29 (1984) 1938
40. A.B. Balantekin, S.E. Koonin e J.W. Negele, Phys.Rev. C28 (1983) 1565
41. T.U. Udagawa e T. Tamura, Phys.Rev. C29 (1984) 1922
42. A.B. Balantekin e N. Takigawa, Ann.Phys. 160 (1985) 441
43. O. Tanimura et al, Phys.Lett. 163B (1985) 317
44. P.M. Jacobs e U. Smilansky, Phys.Lett. 127B (1983) 313



45. R. Lindsay e N. Rowley, J.Phys. G 10 (1984) 805
46. M.A. Nagarayan, A.B. Balantekin e N. Takigawa, Phys.Rev. C34  
(1986) 894
47. C.H. Dasso e S. Landowne, Phys.Lett. 183B (1987) 141
48. H.J. Krappe, K. Möhring, M.C. Nemes e H. Rossner, Z.Phys.  
A314 (1983) 23
49. C.E. Aguiar, L.F. Canto e R. Donangelo, Phys.Rev. 31C (1985)  
1969
50. A. Iwamoto e K. Harada, Z.Phys. A326 (1987) 201
51. J. Thomas, Y.T. Chen, S. Hinds, D. Meredith e M. Olson,  
Phys.Rev. 33C (1986) 1679
52. H. Esbensen, Jian-Qun Wu e G.F. Bertsch, Nucl.Phys. A411  
(1983) 275
53. A.M. Stefanini et al, Nucl.Phys. A456 (1986) 509
54. D.E. Di Gregorio et al, Phys.Lett. 176B (1986) 322
55. J.R. Leigh, J.J.M. Bokhorst, D.J. Hinde e J.O. Newton,  
J.Phys. G 14 (1988) L55
56. H. Esbensen e S. Landowne, Nucl.Phys. A492 (1989) 473
57. A.M. Stefanini et al, Phys.Lett. 240B (1990) 306
58. H. Esbensen e F. Videbaeck, Phys.Rev. 40C (1989) 126
59. H. Esbensen e S. Landowne, Nucl.Phys. A467 (1987) 136
60. R.J. Tighe et al, Phys.Rev. C42 (1990) 1530
61. S. Landowne, S.C. Pieper e F. Videbaeck, Phys.Rev. C35 (1987)  
597

62. N. Takigawa e G.F. Bertsch, Phys.Rev. C29 (1984) 2358
63. T. Udagawa, B.T. Kim e T. Tamura, Phys.Rev. C32 (1985) 124
64. Q. Haider e F.B. Malik, J. Phys. G 12 (1986) 537
65. A.K. Mohanty, S.V.S. Sastry, S.K. Kataria, V.S. Ramamurthy,  
Phys.Rev.Lett. 65 (1990) 1096
66. P.R. Christensen e A. Winther, Phys.Lett. 65B (1976) 19
67. Nuclear level schemes A = 45 até A = 257 da Nuclear Data  
Sheets (1973)
68. Annual Rev.Nucl.Sci. 26 (1976) 457
69. A.W. Davidov, "Quantum Mechanics", (1968), Addison-Wesley
70. E.C. Kemble, Phys.Rev. 48 (1938) 549
71. L.D. Landau e E.M. Lifshitz, "Quantum Mechanics", (1977) 3<sup>a</sup>  
Ed., Pergamon Press
72. N. Fröman e P.O. Fröman, "J.W.K.B. Approximation", (1965),  
Amsterdam
73. A. Austern, "Direct Nuclear Reactions Theory". Wiley N.Y.  
(1970)
74. W. Reissdorf et al, Phys.Rev.Lett. 49 (1982) 1811
75. R.A. Broghia, Proc. Int. Conf. on Heavy Ions Physics and  
Nuclear Physics, Catania (1983)
76. R.A. Broghia, C.H. Dasso, S. Landowne e A. Winther, Phys.Rev.  
C27 (1983) 2433
77. S.Y. Lee e Takigawa, Phys.Rev. C28 (1983) 1123
78. H. Reeves, Astrophys. J. 146 (1966) 447

79. B. Cujec e C.A. Barnes, Nucl.Phys. A266 (1976) 461
80. B.V. Carlson e M.S. Hussein, Phys.Rev. C26 (1982) 2007
81. L.I. Schiff, "Quantum Mechanics", Mc Graw-Hill, 3<sup>a</sup> Ed. (1968)
82. D.N. Poenaru, M. Ivascu, A. Sandulescu e W. Greiner, J.Phys.  
G: Nucl.Phys. 10 (1984) L183
83. S. Gales et al, Phys.Rev.Lett. 53 (1984) 759
84. P.B. Price et al, Phys.Rev.Lett. 54 (1985) 297
85. J. Blocki e W.J. Swiatecki, Ann.Phys. (N.Y.) 132 (1981) 53
86. G. Schütte, Phys.Rep. 80 (1981) 114
87. P. Möller e J.R. Nix, Phys.Rev.Lett. 37 (1976) 1461
88. H. Lamb, "Hydrodynamics" (6<sup>a</sup> ed., Dover, N.Y. 1945)
89. Yi-Jin Shi e W.J. Swiatecki, Phys.Rev.Lett. 54 (1985) 300
90. Yi-Jin Shi e W.J. Swiatecki, Nucl.Phys. A438 (1985) 450
91. D. N. Poenaru, M. Ivascu e D. Mazilu, J. Physique-Lett, 41  
(1980) L589
92. D.V. Aleksandrov, A.A. Ogloblin, et al, JETP Lett. 40 (1984)  
909
93. S.W. Barwick, P. B. Price, J.D. Stevenson, Phys.Rev. C31  
(1985) 1984
94. A. Sandulescu, D.N. Poenaru e W. Greiner, Sov.J.Part.Nucl. 11  
(1980) 528
95. B. Buck, A.C. Merchant e S.M. Peres, Nucl.Phys. A512 (1990)  
483
96. R. Blendowske e H. Walliser, Phys.Rev.Lett. 61 (1988) 1930

97. S. Landowne e C. H. Dasso, Phys. Rev. C33 (1986) 387, Rapid Communication
98. D. N. Poenaru, M. Ivascu, A. Sandulescu e W. Greiner, Phys.Rev. C32 (1985) 572
99. Yi-Jin Shi e W.J. Swiatecki, Nucl.Phys. A464 (1987) 205
100. G. Shanmugan e B. Kamalaharan, Phys.Rev. C38 (1988) 1377
101. M. Iriondo, D. Jerrestam e R.J. Liotta, Nucl.Phys. A454 (1986) 252
102. J.R. Nix, Ann.Phys. 41 (1967) 52
103. E.K. Hulet et al, Phys.Rev.Lett. 56 (1986) 313
104. B. Buck e A. C. Merchart, Dept. of Theoretical Physics (Oxford, U.K.) preprint 88/88 (1988); also unpublished additional calculations
105. M.S. Ivascu e D.N. Poenaru, Vol. II, Cap. 4, "Particle Emission from Nuclei" (CRC Press, Boca Raton, Florida, (1988)
106. P. Moller, J.R. Nix e W.J.Swiatecki, Nucl.Phys. A409 (1987) 1
107. A.H. Wapstra e G. Audi, Nucl.Phys. A432 (1985) 1
108. S.W. Barwick et al, Phys.Rev. C34 (1986) 362
109. E. Hourani et al, Phys.Lett. 160B (1985) 375
110. S.P. Tretyakova et al, JINR Rapid Commun. 13 (1985) 34
111. A. Sandulescu et al, Iz.Akad.Nauk SSSR (Fiz) 49 (1985) 2104
112. S.P. Tretyakova et al, JINR Rapid Commun. 7 (1985) 23
113. S.W. Barwick, Ph.D.thesis, University of California, Berkeley (1986)



114. K.J. Moody et al, Phys.Rev. C Rapid.Comm. 36 (1987) 2710
115. Schicheng Wang et al, Phys.Rev. C Rapid.Comm. 36 (1987) 2717
116. K.J. Moody, E.K. Hulet, Shicheng Wang e P.B. Price, Phys.Rev. C39 (1989) 2445
117. G. Gamow, Proc.Roy.Soc. A126 (1930) 632
118. L.R. Hafstad e E. Teller, Phys.Rev. 54 (1938) 681
119. H. Morinaga, Phys.Rev. 101 (1956) 254
120. N. Anantarman et al, Nucl.Phys. A313 (1979) 445
121. Strohbush et al, Phys.Rev.Lett. 29 (1972) 735
122. F.D. Becchetti e J. Jänecke, Nucl.Phys., Procced of Nucl. Workshop, I.C.T.P., Trieste, Miramare, Itália (1981) pg. 253, ed.by C.H. Dasso, R.A. Broghia e A. Winther
123. J. Jänecke et al, Phys.Rev. 23 (1981) 101
124. J. Jänecke, F.D. Becchetti e D. Overway, Nucl.Phys. A343 (1980) 161
125. J.A. Wheeler, Phys.Rev. 32 (1937) 1083
126. M. Kamimura e T. Matsuse, Prog.Theor.Phys. 51 (1974) 438
127. H. Friedrich, Nucl.Phys. A224 (1974) 537
128. A. Tohsaki, F. Tanabe e R. Tamagaki, Universidade de Kyoto (outubro de 1974) preprint
129. H. Friedrich e K. Langanke, Nucl.Phys. A252 (1975) 47
130. S. Saito, Prog.Theor.Phys. 41 (1969) 705
131. B. Buck, C. Dover e J.P. Vary, Phys.Rev. C11 (1975) 1803
132. B. Buck, H. Friedrich e C. Wheatley, Nucl.Phys. A275 (1977)



133. K.F. Pal e R.G. Lovas, Phys.Lett. 96B (1980) 19
134. M.V. Berry e K.E. Mount, Rep.Prog.Phys. 35 (1972) 315
135. M. Abramowitz e I.A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", N.Y. Dover Publ.Inc. (1965)
136. J.A. Rubio - D.Phil.Thesis, Oxford (1984)
137. F. Ayzenberg - Selove, Nucl. Phys. A392 (1983) 1
138. W.H. Press e S.A. Teukolsky, Computer in Phys. 3 (1989) 88
139. D.A. Agrello e D.M. Brink, "Proceedings da Int.Conf. on Nucl. Structure, Reactions and Symmetries" Dubrovnik, Yugoslavia (1986)

