





Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

TESE DE DOUTORADO

IFT - T.002/99

Cenário de emissão contínua de partículas em  
colisões nucleares relativísticas

Otávio Socolowski Junior



Orientadora

Frédérique Grassi

013-4167

Abril 1999

*À Evelise*

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- à Frédérique, por todas as oportunidades e pelos ensinamentos que me proporcionou. Serei eternamente grato.
- ao Yogiro e à Sandra, pelo tanto que aprendi com eles no “nosso” Journal Club;
- ao U. Ornik, por gentilmente ter cedido alguns de seus códigos numéricos que me foram muito úteis no início do meu trabalho;
- à família Gausmann, nas pessoas do Sr. Elcyr e Sra. Vaneila, que me receberam como a um filho;
- à Evelise, pelo amor e companheirismo nesses anos.
- à minha mãe e aos meus irmãos, por sempre terem me apoiado com muito amor;
- à CAPES e à FAPESP pelo auxílio financeiro.

## Resumo

Utilizamos o modelo hidrodinâmico de emissão contínua de partículas para estudar vários dados experimentais do SPS/CERN. Dados sobre razões de partículas estranhas das colaborações WA85 e WA97 são usados para determinar um conjunto de condições iniciais para o fluxo hidrodinâmico. Testamos a autoconsistência do modelo estudando outros dados experimentais com as mesmas condições iniciais que reproduziram as razões de partículas estranhas. Mostramos que os espectros em massa transversal de NA35, WA85, NA49 e WA97 podem ser bem reproduzidas. A grande vantagem dessa abordagem (além de ser corroborada pelos modelos microscópicos) é que ela pode resolver, de um modo natural, alguns dos problemas enfrentados pelo modelo usual de freeze-out: possíveis altas densidades de partículas, pequena abundância de píons e temperatura incorreta do  $\Omega$ .

**Palavras Chaves:** Modelo Hidrodinâmico, Plasma de Quarks e Gluons, Emissão de Partículas, Colisões Nucleares Relativísticas

**Áreas do Conhecimento:** 1.05.04.00.1

## Abstract

We use the hydrodynamical model of continuous particle emission to study several experimental data from SPS/CERN. Data on strange particle ratios from WA85 and WA97 Collaborations are used to determine a set of initial conditions for the hydrodynamical flow. We test the self-consistency of the model by studying several other experimental data by using the same initial conditions that reproduce strange particle ratios. We show that the transverse mass spectra from WA35, WA85, NA49 and WA97 can be well reproduced. We also reproduce particle abundances, including the  $\pi$  one. The big advantage of this approach (in addition to being corroborated by microscopical models) is that it may solve, in a natural way, some of the problems met by the standard hydrodynamical approach with sudden freeze-out: possible too high densities, too small pion abundance and wrong  $\Omega$  temperature.

**Key Words:** Hydrodynamical Model, Quark-Gluon Plasma, Particle Emission, Relativistic Nuclear Collisions

# Índice

<b>1</b>	<b>Considerações iniciais</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Sinais do QGP</b>	<b>4</b>
2.1	Fótons e pares leptônicos . . . . .	4
2.2	Variáveis termodinâmicas . . . . .	6
2.3	Interferometria e correlações Bose-Einstein . . . . .	6
2.4	Supressão do $J/\psi$ . . . . .	7
2.5	Aumento na produção de partículas estranhas . . . . .	8
2.5.1	Idéias básicas . . . . .	8
2.5.2	Experimentos sobre partículas estranhas . . . . .	11
<b>3</b>	<b>O modelo hidrodinâmico de emissão contínua de partículas</b>	<b>15</b>
3.1	Emissão de partículas . . . . .	15
3.2	Equações de conservação . . . . .	18
3.2.1	Equações da hidrodinâmica na aproximação de Bjorken . . . . .	19
3.2.2	Solução numérica das equações da hidrodinâmica com emissão contínua	23
3.3	Espectros de partículas . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Comparações com dados experimentais. Projéteis leves</b>	<b>31</b>
4.1	Razões de partículas estranhas . . . . .	31
4.1.1	Problema enfrentado pelo freeze-out . . . . .	31
4.1.2	Razões no modelo de emissão contínua . . . . .	34
4.2	Espectros . . . . .	39

---

4.3	Abundâncias . . . . .	41
5	Comparações com dados experimentais. Projéteis pesados	47
5.1	Hidrodinâmica com expansão transversal . . . . .	47
5.2	Fórmula para o espectro . . . . .	51
5.3	Razões de partículas . . . . .	52
5.4	Predições para a temperatura aparente . . . . .	53
5.5	Predições para os espectros . . . . .	54
6	Considerações finais	62
A	Equação de conservação de momento-energia com emissão contínua	66
B	Equilíbrio químico relativo	69
C	Correção de volume termodinamicamente consistente [45, 46]	73
D	Espectro em emissão contínua	76
E	Esquema de Lax-Wendroff de dois passos	79
	Bibliografia	82



## Lista de Figuras

- 2.1 *Comportamento esquemático do momento transversal médio com função da distribuição de rapidez hadrônica. Figura baseada em [11]. . . . . 7*
- 2.2 *Estimativa numérica para a proporção entre (anti)quark estranho e (anti)quark leve em um gás hadrônico. . . . . 10*
- 2.3 *Razão  $\langle K + \bar{K} \rangle / \langle \pi \rangle$  vs. número de participantes, mostrando a tendência no aumento de estranheza [74]. . . . . 12*
- 2.4 *Razões (a)  $K^+ / \pi^+$  e (b)  $K^- / \pi^-$  como função da rapidez no sistema de laboratório para vários sistemas. Retirado de [68]. . . . . 13*
- 2.5 *Razões  $\langle \Lambda \rangle / \langle h^- \rangle$ ,  $\langle K_s^0 \rangle / \langle h^- \rangle$  e  $\langle \bar{\Lambda} \rangle / \langle h^- \rangle$  para vários sistemas [68]. . . . . 14*
- 3.1 *(a) Superfícies e (b) elemento de volume usado da dedução das equações da emissão contínua . . . . . 17*
- 3.2 *Representação pictórica do modelo de Bjorken. Extraído da Ref. [48]. . . . . 20*
- 3.3 *Temperatura como função do raio para vários tempos. A linha tracejada representa o modelo sem emissão contínua; a linha cheia é o modelo com emissão contínua de partículas.  $T_0 = 200 \text{ MeV}$ ,  $\mu_{B0} = 200 \text{ MeV}$ ,  $t_0 = 1 \text{ fm}$ ,  $R = 3.6 \text{ fm}$  e  $\langle \sigma v_{rel} \rangle \sim 2 \text{ fm}^2$ . . . . . 25*
- 3.4 *Potencial químico bariônico como função do raio para vários tempos. As linhas e os parâmetros são os mesmos da figura 3.3. . . . . 26*

- 3.5 *Espectro de massa transversal para píons. A linha cheia representa o modelo de emissão contínua para  $T_0 = 200 \text{ MeV}$ ,  $\mu_{B0} = 200 \text{ MeV}$ ,  $t_0 = 1 \text{ fm}$ ,  $R = 3.6 \text{ fm}$  e  $\langle \sigma v_{rel} \rangle \sim 2 \text{ fm}^2$ . As linhas tracejadas são distribuições térmicas para a temperatura de freeze-out de  $T_{fo} = 150 \text{ MeV}$  e  $T_{fo} = 200 \text{ MeV}$ . . . . . 29*
- 3.6 *O mesmo que a Fig. 3.5 para lambda. . . . . 30*
- 3.7 *O mesmo que a Fig. 3.5 para antilambda. . . . . 30*
- 4.1 *Região no plano  $\mu_{Bfo} - T_{fo}$  para dados de razões de partículas estranhas usando o modelo de freeze-out. À esquerda: sem a inclusão do parâmetro de saturação de estranheza  $\gamma_S$ ; não há uma região que permita reproduzir os dados. À direita:  $\gamma_S$  incluso; a região existe. Retirado de [44]. . . . . 34*
- 4.2 *Região no plano  $\mu_{B0} - T_0$  que permite reproduzir os dados sobre razões de partículas estranhas do experimento WA85. Aqui não há correção de volume. 36*
- 4.3 *O mesmo que a Fig. 4.2 com correção de volume. . . . . 38*
- 4.4 *Espectros em massa transversal calculado com o modelo de emissão contínua para  $T_0 = 200 \text{ MeV}$ ,  $\mu_{B0} = 200 \text{ MeV}$ ,  $R = 3.6 \text{ fm}$  e  $\langle \sigma v_{rel} \rangle \sim 1 \text{ fm}^2$ . Os dados experimentais são para colisões S-S (NA35), para todo o intervalo de rapidez. . . . . 43*
- 4.5 *Espectros em massa transversal calculado com o modelo de emissão contínua para  $T_0 = 200 \text{ MeV}$ ,  $\mu_{B0} = 200 \text{ MeV}$ ,  $R = 3.6 \text{ fm}$  e  $\langle \sigma v_{rel} \rangle \sim 1 \text{ fm}^2$ . Os dados experimentais são para colisões S-S (WA85), em rapidez média. . . . 44*
- 4.6 *Espectros em massa transversal calculado com o modelo de emissão contínua para  $T_0 = 200 \text{ MeV}$ ,  $\mu_{B0} = 200 \text{ MeV}$ ,  $R = 3.6 \text{ fm}$  e  $\langle \sigma v_{rel} \rangle \sim 1 \text{ fm}^2$ . Os dados experimentais são para colisões S-W (WA85), em rapidez média. . . 45*

- 4.7 *Resultado do modelo RQMD para colisões Pb-Pb Diferença entre o número de quarks estranhos e anti-estranhos ( $s - \bar{s}$ ) como função da rapidez. Extraído de [72] . . . . . 46*
- 5.1 *(a) Densidade de energia, (b) densidade bariônica, (c) temperatura, (d) potencial químico bariônico e (e) velocidade transversal como função da coordenada radial para vários tempos. Os números rotulando cada curva correspondem aos valores do tempo em fm. . . . . 55*
- 5.2 *Região no plano  $T_0 - \mu_{B0}$  que reproduz os dados de colisões Pb-Pb do experimento WA97. Não há correção de volume nesse caso. . . . . 56*
- 5.3 *Dados experimentais sobre a temperatura aparente de diversas partículas. Retirado de [83]. . . . . 57*
- 5.4 *Predições do modelo RQMD para as temperaturas aparentes. Extraído da Ref. [65]. . . . . 58*
- 5.5 *Predição da emissão contínua para a dependência da temperatura aparente com a massa da partícula. (a) Utilizando  $\langle \sigma v_{rel} \rangle_{\pi\pi} = 1 \text{ fm}^2$  para todas as partículas; (b) utilizando:  $\langle \sigma v_{rel} \rangle_{\pi p} = \frac{3}{2} \langle \sigma v_{rel} \rangle_{\pi\pi}$  para  $p$ ,  $\langle \sigma v_{rel} \rangle_{\pi\Omega} = \frac{1}{2} \langle \sigma v_{rel} \rangle_{\pi p}$  para  $\Omega$ ,  $\langle \sigma v_{rel} \rangle_{\pi\Lambda} = 1.2 \langle \sigma v_{rel} \rangle_{\pi\pi}$  para  $\Lambda$  e  $1 \text{ fm}^2$  para as partículas restantes. . . . . 59*
- 5.6 *Espectro para  $\Lambda$  e  $\bar{\Lambda}$  usando  $T_0 = 200 \text{ MeV}$  e  $\mu_{B0} = 200 \text{ MeV}$  como condições iniciais. Dados de NA49 [64] . . . . . 60*
- 5.7 *Espectro para  $\Xi$  e  $\bar{\Xi}$  usando  $T_0 = 200 \text{ MeV}$  e  $\mu_{B0} = 200 \text{ MeV}$  como condições iniciais. Dados de WA97 [61]. . . . . 61*

## Lista de Tabelas

2.1	<i>Abundâncias de partículas em colisões <math>p - p</math> com energia de 100 GeV no sistema de laboratório (<math>\sqrt{s} \sim 14</math> GeV) [14]</i> . . . . .	8
3.1	<i>Esquema da equação de estado usada para a solução das equações da hidrodinâmica no modelo de emissão contínua.</i> . . . . .	24
4.1	<i>Valores experimentais para razões de partículas estranhas em colisões S-W (experimento WA85) [38].</i> . . . . .	33
4.2	<i>Comparação entre os valores preditos pelo modelo de emissão contínua com razões do experimento WA85.</i> . . . . .	39
4.3	<i>Comparação dos resultados de emissão contínua com dados experimentais para colisões S-S da colaboração NA35. Condições iniciais usadas: <math>T_0 = 184</math> MeV e <math>\mu_{B0} = 90</math> MeV, <math>\gamma_S = 1.3</math>.</i> . . . . .	42
5.1	<i>Tempertura efetiva em MeV para vários tipos de partículas em colisões centrais S-S e Pb-Pb (experimentos NA35, NA44 e NA49).</i> . . . . .	48
5.2	<i>Valores experimentais para razões de partículas estranhas em colisões Pb-Pb (experimento WA97) [61].</i> . . . . .	52

## Considerações iniciais

A cromodinâmica quântica (QCD) é a teoria aceita como fundamental na interação entre quarks e gluons. Essa teoria de gauge não-abeliana apresenta duas características marcantes, a saber: i) ela aproxima-se de uma teoria de campo livre não-interagente no limite de altas energias (curtas distâncias), caracterizando o que é chamado de “liberdade assintótica”, onde quarks e gluons interagem fracamente; ii) ela torna-se uma teoria de campo não-perturbativa em baixas energias (grandes distâncias), caracterizando o chamado “confinamento de cor”, no qual todos os estados passíveis de observação são singletos de cor.

No entanto, em altas temperaturas e densidades, onde temos um acoplamento fraco entre os quarks e gluons, as interações de longo alcance são inoperantes por causa de efeitos de blindagem. Nesse estágio, os quarks e gluons não estão mais confinados dentro dos hádrons (singletos de cor). Essa fase é denominada *plasma de quarks e gluons* (QGP como designaremos daqui para frente). Estudos da QCD na rede indicam que essa transição ocorreria para uma temperatura da ordem de  $T \simeq 150 - 200 \text{ MeV}^*$ .

Colisões entre íons pesados relativísticos oferecem a melhor oportunidade de se observar a formação do QGP no laboratório. Para isso, uma série de experimentos no Brookhaven Alternating Gradient Synchrotron (AGS) e no CERN Super Proton Synchrotron (SPS) tem sido realizados. Neles, buscam-se possíveis sinais que possam identificar inequivocamente a formação do plasma. Até o presente momento (com as energias

---

\*Durante todo o trabalho estaremos adotando  $\hbar = c = k_B = 1$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann.



atuais) essa formação é uma questão em aberto. Talvez com a entrada em funcionamento de novos aceleradores como o Brookhaven Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) e o CERN Large Hadron Collider (LHC) <sup>†</sup>, esse problema possa ser solucionado.

Entre as possíveis sugestões para se observar o QGP, uma bastante interessante é a produção de partículas estranhas, cujo aumento é esperado se uma transição de fase ocorrer. Esse aumento tem sido observado para vários sistemas em colisões núcleo-núcleo quando comparado às colisões próton-próton e próton-núcleo.

Vários modelos têm tentado explicar esse fenômeno. O aumento de hádrons estranhos, principalmente kaons e  $\Lambda$  em colisões núcleo-núcleo, podem ser descritos por interações puramente hadrônicas. Por outro lado o aumento de  $\bar{\Lambda}$ ,  $\bar{\Xi}$ ,  $\Omega$  e  $\bar{\Omega}$  observados no SPS, só podem ser explicados (dentro do contexto dos modelos microscópicos) postulando-se mecanismos pouco convencionais como: a formação de "colour rope" no modelo RQMD e fragmentação de múltiplas cordas no código VENUS.

Modelos térmicos e hidrodinâmicos também têm sido usados para interpretar uma série de dados. Por exemplo, razões de partículas estranhas do AGS e do SPS têm sido estudadas utilizando-se um gás hadrônico em equilíbrio ou um QGP hadronizando e decaindo instantaneamente. Apesar do sucesso desses modelos macroscópicos em interpretar alguns dados experimentais, eles também apresentam problemas por causa da suposição da emissão de partículas no momento de freeze-out.<sup>‡</sup>

Recentemente, Grassi, Hama e Kodama desenvolveram uma descrição mais realística para a emissão de partículas. Nesse novo modelo, incorpora-se o fato de que as partículas têm, em cada ponto do espaço-tempo, alguma probabilidade de escapar da matéria formada na colisão sem interagir. Como consequência, as partículas carregam informações

---

<sup>†</sup>O RHIC provavelmente entrará em funcionamento em 1999 e o LHC está previsto para 2005. Energia por nucleon no centro de massa comparada entre os aceleradores: AGS ( $\sim 5\text{GeV}$ ); SPS ( $\sim 20\text{GeV}$ ), RHIC ( $\sim 200\text{GeV}$ ) e LHC ( $\sim 5.4\text{TeV}$ ).

<sup>‡</sup>Um dos problemas que será discutido nesta tese são as altas densidades de partículas, no momento do freeze-out, encontrado por esses modelos mais usuais.

(contidas nas observáveis) sobre toda a evolução da matéria, uma vez que elas são continuamente emitidas no decorrer do tempo. Isso altera a forma como os dados experimentais são interpretados. Inicialmente, esse modelo foi formulado para um gás de píons sem massa (número bariônico nulo) incluindo somente expansão longitudinal. O objetivo dessa tese é estender o modelo, considerando um gás hadrônico com número bariônico não-nulo descrito hidrodinamicamente de uma forma menos simplificada e estudar vários dados experimentais do SPS.

Esta tese está organizada como segue:

- No capítulo 2, apresenta-se uma breve introdução aos possíveis sinais utilizados para a identificação do QGP, dando especial atenção à produção de estranheza.
- No capítulo 3, introduz-se o modelo de emissão contínua.
- No capítulo 4, analisa-se dados de colisões entre núcleos leves . Dados de razões de partículas estranhas do experimento WA85 (sistema S-W) são utilizados para fixar as condições iniciais da colisão. Espectros de S-W e S-S (WA85 e NA35) são mostrados. Estuda-se, também, as abundâncias de partículas (NA35), onde mostramos que o modelo de emissão contínua pode reproduzir simultaneamente dados sobre estranheza e o número de píons.
- No capítulo 5, analisa-se dados sobre colisões entre núcleos pesados. Razões de partículas estranhas do experimento WA97 e dados sobre temperatura aparente (NA49 e WA97) são estudados.

## Sinais do QGP

Um dos grandes problemas em colisões de íons pesados relativísticos é a busca de evidências da formação do QGP, o que daria meios para deduzir as energias, entropias e temperaturas do sistema formado nas colisões centrais. Como a matéria densa e quente é formada por um breve intervalo de tempo (talvez 5 a 10 fm/c) em uma região de uns poucos fermis de diâmetro, ela expande e se esfria substancialmente passando por uma fase hadrônica antes das partículas deixarem o sistema e serem detectadas. Assim, a observação do plasma requer a distinção entre os sinais originados do QGP e da matéria hadrônica quente.

Não há ainda um sinal claro da formação do plasma; o que se tem são muitas propostas interessantes. Aqui apresentaremos brevemente algumas delas.

### 2.1 Fótons e pares leptônicos

Fótons e pares leptônicos são sinais promissores da formação do QGP [1] pois eles são produzidos por interações dos constituintes nos estágios iniciais da colisão, e como só interagem eletromagneticamente eles não são afetados pela hadronização do sistema, ou seja, eles são capazes de atravessar a matéria adjacente sem sofrerem quaisquer alterações em suas distribuições de momento. Assim, podem levar aos detectores informações do lugar onde foram formados.

Fótons diretos, ou seja, fótons formados no QGP principalmente pelo espalhamento



Compton  $gq \rightarrow \gamma q$  e pela aniquilação  $q\bar{q} \rightarrow \gamma q$ , competem fortemente com fótons vindos da radiação do gás hadrônico (cujas fontes dominantes são o espalhamento Compton  $\pi\rho \rightarrow \gamma\rho$  e a aniquilação de píons  $\pi\pi \rightarrow \gamma\rho$ ) e com fótons vindos de decaimentos hadrônicos, principalmente de  $\pi^0$  em  $2\gamma$  e dos  $\eta$  em  $2\gamma$  ou  $3\gamma$ . A grande dificuldade desse sinal surge do fato que, próximo a temperatura de transição, o espectro em momento transversal dos fótons originários do gás hadrônico são bastante similares ao dos fótons vindos de um plasma. Assim, um claro sinal vindo dos fótons diretos só seria possível se um plasma muito quente fosse formado; nesse caso os fótons seriam visíveis na região de grande  $p_{\perp}$  (2-5 GeV).

Experimentos que tentam medir fótons diretos são feitos no CERN pelas colaborações WA80 (colisões S-Au), WA98 (Pb-Pb) e NA45 (Pb-Pb).

O principal canal para a produção de pares leptônicos no QGP é pela aniquilação de um par quark-antiquark. Na fase hadrônica a produção de pares leptônicos ocorre principalmente pela aniquilação de píons (formando um méson  $\rho$  que decairá em um par leptônico), pela interação entre  $\pi$  e  $\rho$  (gerando diléptons de pequena massa invariante) e pelo processo Drell-Yan\* (grandes massas invariantes).

Inicialmente, cálculos sobre diléptons como um sinal do QGP detiveram-se na massa invariante do par leptônico abaixo da massa do méson  $\rho$ . No entanto, verificou-se que nesse domínio os diléptons vindos do QGP seriam totalmente obscurecidos pelos diléptons originários da fase hadrônica [3, 4, 5, 6]. Espera-se que os pares leptônicos vindos do QGP só sejam detectados para massas invariantes da ordem de 1 a 1.5 GeV [7, 8]. Para massas maiores o processo Drell-Yan domina.

Diléptons podem ser medidos no CERN como  $\mu^+\mu^-$  pelas colaborações HELIOS3, NA38 e NA50 e como  $e^+e^-$  pela colaboração CERES. Para uma região de massa invariante  $0.2 < m < 2.5$  GeV, foi observado um excesso de dimuons em colisões A-A (núcleo-núcleo)

---

\*No processo Drell-Yan um quark de um hádron aniquila um antiquark de outro hádron, resultando em um fóton virtual que decai em um dilépton.

quando comparado às colisões p-p e p-A. O mesmo acontece para pares  $e^+e^-$  na região de massa  $0.2 < m < 1.5$  GeV, onde um aumento é observado em A-A em comparação à p-p e p-A.

## 2.2 Variáveis termodinâmicas

A idéia desse sinal é medir a equação de estado da matéria hadrônica, isto é, determinar a dependência da densidade de energia  $\varepsilon$ , pressão  $p$  e densidade de entropia  $s$  como função da temperatura  $T$  e do potencial químico bariônico  $\mu_B$ . O que se deseja é encontrar um aumento no número de graus de liberdade efetivos (representados pelas razões  $\varepsilon/T^4$  ou  $s/T^3$ ) com uma pequena variação da temperatura.

Experimentalmente deve-se associar as variáveis  $T$ ,  $s$  e  $\varepsilon$  com quantidades mensuráveis. Normalmente associam-se essas variáveis com o momento transversal médio  $\langle p_\perp \rangle$ , com a distribuição em rapidez da multiplicidade de hádrons  $dN/dy$  e com a distribuição em rapidez da energia transversal  $dE_\perp/dy$ , respectivamente. Em princípio, pode-se construir um diagrama mostrando  $\langle p_\perp \rangle$  como uma função de  $dN/dy$  ou  $dE_\perp/dy$ . Se ocorrer um rápido aumento no número de graus de liberdade, ou seja, se ocorrer uma transição de fase para um QGP, espera-se como resultado uma curva monotônica crescente interrompida por um “plateau”, que representaria a saturação de  $\langle p_\perp \rangle$  durante uma fase mista de quarks, glúons e hádrons. A isso seguir-se-ia um aumento de  $\langle p_\perp \rangle$  quando a fase de QGP fosse completamente atingida. A figura 2.1 mostra esquematicamente o que se esperaria obter. No entanto, esse “plateau” pode não ser visível por causa de efeitos vindos de um fluxo transversal coletivo. Para maiores detalhes, ver por exemplo [2].

## 2.3 Interferometria e correlações Bose-Einstein

A interferometria de partículas idênticas (como  $\pi\pi$ , KK, pp), baseada no método Hanbury-Brown e Twiss (HBT) usado em astronomia [10], é uma ferramenta bem conhecida para

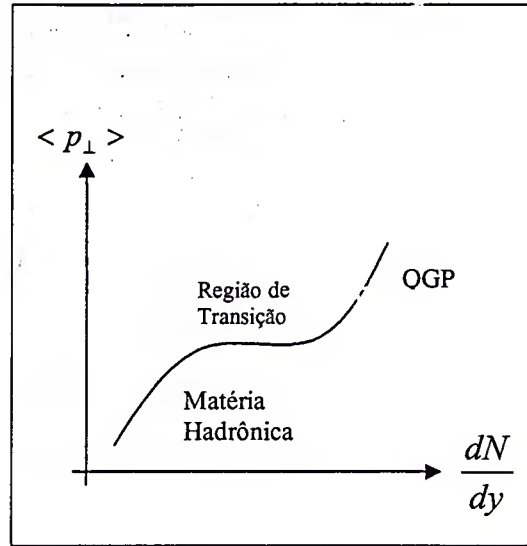


Figura 2.1: Comportamento esquemático do momento transversal médio com função da distribuição de rapidez hadrônica. Figura baseada em [11].

analisar a extensão espaço-temporal de fontes emissoras. O método HBT baseia-se na interferência surgida entre funções de ondas de duas partículas idênticas quando há duas possíveis trajetórias entre a região emissora e os detectores. O quadrado da soma das amplitudes de ondas é sensível a separação das regiões emissoras. Assim a função de correlação para duas partículas idênticas mede a distribuição espaço-temporal das partículas no momento da emissão. Acredita-se que uma possível transição de fase para um QGP nos estágios iniciais da colisão modificaria a dinâmica da expansão, e assim a correlação entre as partículas idênticas também mudaria. Detalhes em [12].

## 2.4 Supressão do $J/\psi$

Um outro possível sinal da formação do QGP, proposto por Matsui e Satz [13], é a supressão da produção do  $J/\psi$  (um estado ligado de um quark  $c$  e um antiquark  $\bar{c}$ ). O  $J/\psi$  é produzido nos instantes iniciais da colisão através de interações parton-parton. Se um QGP é formado, o par  $c\bar{c}$  não será capaz de formar um estado ligado por causa de

efeitos de blindagem<sup>†</sup>. Quando isso acontece, o sistema  $c\bar{c}$  dissocia-se em um quark  $c$  e um antiquark  $\bar{c}$  no plasma. Posteriormente, esses quarks combinar-se-ão com quarks ou antiquarks leves ( $u(\bar{u})$  e  $d(\bar{d})$ ) aumentando, assim, a produção de mésons charmosos abertos como  $D(c\bar{u}$  e  $c\bar{d})$  e  $\bar{D}(\bar{c}u$  e  $\bar{c}d)$  e diminuindo a produção do  $J/\psi$ .

As primeiras indicações dessa supressão foram encontradas pelo experimento NA38 em colisões de íons leves. Vários modelos teóricos foram propostos: alguns assumem a formação do plasma, enquanto outros assumem que o QGP não é formado e o  $J/\psi$  é suprimido por causa das interações inelásticas com a matéria hadrônica formada na colisão .

Em sistemas pesados (Pb-Pb) a supressão do  $J/\psi$  é estudada pela colaboração NA50.

## 2.5 Aumento na produção de partículas estranhas

### 2.5.1 Idéias básicas

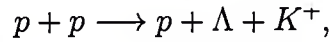
O aumento no número de estranheza foi proposto por Rafelski e Müller [15, 16] como um possível sinal da formação do QGP . A produção de hádrons contendo quarks estranhos é usualmente suprimida nas reações hadrônicas quando comparada à produção de hádrons contendo quarks leves ( $u$  e  $d$ ). Pode-se notar a dificuldade de se produzir estranheza olhando os produtos da colisão p-p mostrados na tabela 2.1.

partícula	$p$	$n$	$\pi^+$	$\pi^0$	$\pi^-$	$\Lambda$	$K^+$	$K^-$	$K^0$	$\bar{K}^0$	$\bar{p}$
abundância	1.4	0.5	2.3	2.0	1.76	0.11	0.17	0.10	0.14	0.10	0.01

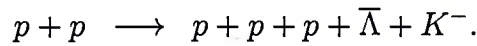
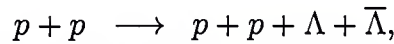
Tabela 2.1: Abundâncias de partículas em colisões p-p com energia de 100 GeV no sistema de laboratório ( $\sqrt{s} \sim 14$  GeV) [14]

<sup>†</sup>Para distâncias maiores que um certo valor  $\lambda_D \propto 1/T$  ( $T$ : temperatura), a força forte que une o par  $c\bar{c}$  torna-se inoperante (blindagem de cor de Debye), não havendo, então, interação forte entre  $c$  e  $\bar{c}$ . Assim, o  $J/\psi$  só será formado se seu raio for menor que  $\lambda_D$  [13]

Essa dificuldade ocorre em razão do grande limiar de energia necessário para se produzir hádrons estranhos. Normalmente os quarks estranhos são produzidos em associação com um kaon, como na reação :



cujo limiar de energia é  $\sim 700$  MeV no sistema de centro de massa. A produção de antibárions é muito mais difícil por causa das grandes energias envolvidas. Por exemplo, para a formação de antibárions estranhos, como  $\bar{\Lambda}$ , podemos considerar as reações



Em ambos os casos o limiar de energia é maior do que 2 GeV no centro de massa. Em um plasma a energia necessária para a criação de um par  $s\bar{s}$  é dado aproximadamente por  $2m_s \sim 300$  MeV. Espera-se, assim, que em um plasma a estranheza seja mais facilmente criada do que nas colisões p-p.

Para um QGP em equilíbrio térmico e químico as densidades de quarks podem ser expressas como

$$\begin{aligned} n_s &= n_{\bar{s}} = \frac{g_s}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{\exp(\sqrt{p^2 + m_s^2}/T) + 1} \\ n_q &= \frac{g_q}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{\exp[(p - \mu_q)/T] + 1} \\ n_{\bar{q}} &= \frac{g_{\bar{q}}}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{\exp[(p - \mu_{\bar{q}})/T] + 1}, \end{aligned}$$

onde  $g_s$  é a degenerescência para o quark estranho,  $g_q (= g_{\bar{q}})$  é a degenerescência para o quark leve,  $m_s$  é a massa do quark  $s$  e  $\mu_q$  ( $\mu_{\bar{q}}$ ) é o potencial químico para o quark (antiquark) leve. Como ilustração, considere nas equações acima  $m_s = 150$  MeV,  $T = 200$  MeV ( $\sim$  temperatura crítica da transição hádron-quark),  $\mu_q = -\mu_{\bar{q}} = 300$  MeV,  $g_s = 2(\text{spin}) \times 3(\text{cor}) = 6$  e  $g_q = 2(\text{spin}) \times 3(\text{cor}) \times 2(\text{sabor}) = 12$ . Assim, podemos



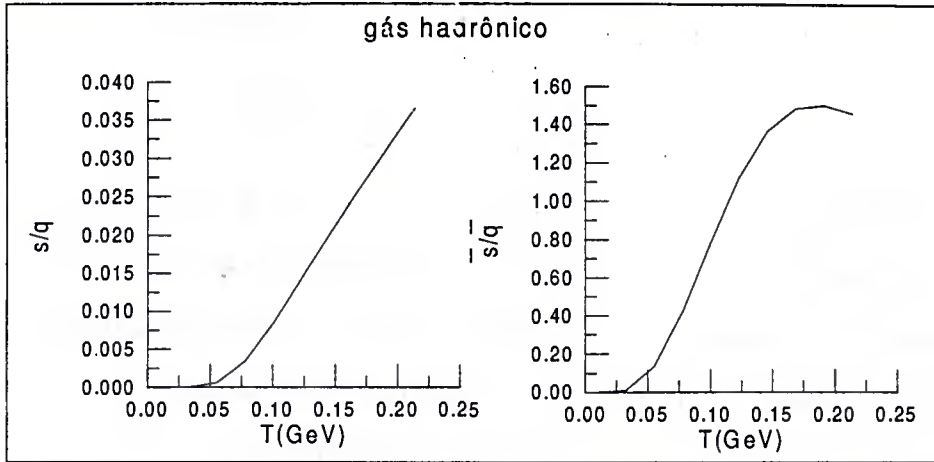


Figura 2.2: Estimativa numérica para a proporção entre (anti)quark estranho e (anti)quark leve em um gás hadrônico.

estimar numericamente as seguintes razões :

$$\left(\frac{n_s}{n_q}\right)_{QGP} \approx 0.13,$$

$$\left(\frac{n_{\bar{s}}}{n_{\bar{q}}}\right)_{QGP} \approx 1.84.$$

Se olharmos as mesmas razões obtidas da tabela 2.1 decompondo os hádrons em quarks, teremos

$$\left(\frac{n_s}{n_q}\right)_{pp} \approx 0.025,$$

$$\left(\frac{n_{\bar{s}}}{n_{\bar{q}}}\right)_{pp} \approx 0.05.$$

Comparando os números de p-p e QGP, nota-se que há um aumento significativo de quarks estranhos supondo-se a formação do plasma. Conseqüentemente, espera-se também um aumento na produção de bárions e antibárions estranhos.

Podemos, também, calcular essas razões para um gás hadrônico em equilíbrio químico e térmico. Nesse caso, devemos determinar a densidade de todos os hádrons contendo o

quark  $s(\bar{s})$  e  $u(\bar{u})$  ou  $d(\bar{d})$  usando

$$n_h = \frac{g_h}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{\exp \left[ \left( \sqrt{p^2 + m_h^2} - \mu_h \right) / T \right] \pm 1}$$

com  $\mu_h = \nu_h^q \mu_q + \nu_h^s \mu_s$ , onde  $\nu_h^q$  e  $\nu_h^s$  são, respectivamente, o número de quarks leves e estranhos no hádron  $h$  (antiquarks devem ser contados com um sinal negativo). A figura 2.2 mostra o resultado numérico, após a decomposição em quarks, das densidades. Ela é mostrada para um gás hadrônico composto de partículas de massa  $\leq 2$  GeV, com a escolha de  $\mu_q = 300$  MeV e estranheza total nula. Notamos que, num gás hadrônico, a estranheza também é maior do que nas colisões p-p. Contudo, acredita-se que somente com a formação de um gás hadrônico não haja tempo suficiente para as partículas estranhas atingirem o equilíbrio químico. Assim, o aumento de estranheza permanece como um possível sinal da formação do QGP.

Uma medida do aumento da produção de estranheza, comumente usada, é a razão  $\langle K + \bar{K} \rangle / \langle \pi \rangle$ . Na figura 2.3, mostra-se essa razão para vários sistemas. Claramente, pode-se ver o aumento na quantidade de estranheza por píons indo do sistema p-p ao sistema núcleo-núcleo. No entanto, não se verifica um aumento dessa razão do sistema S-S (200 A GeV) ao Pb-Pb (158 A GeV).

### 2.5.2 Experimentos sobre partículas estranhas

Muitos experimentos de íons pesados, tanto no AGS como no SPS, têm estudado a produção de estranheza. Apresentaremos aqui, de forma bastante resumida, alguns deles. Uma excelente lista de publicações experimentais organizada pelo tipo de partícula e pelo número do experimento pode ser encontrado em [17].

#### AGS

- Colaboração E802: (p+Be, p+Au e Si+Au, 14.6 A GeV).

Verificou-se um aumento na produção da razão  $K/\pi$  com o aumento da massa dos projéteis envolvidos na colisão [18].  $K^+$  aumenta mais rapidamente que  $\pi^+$ ,

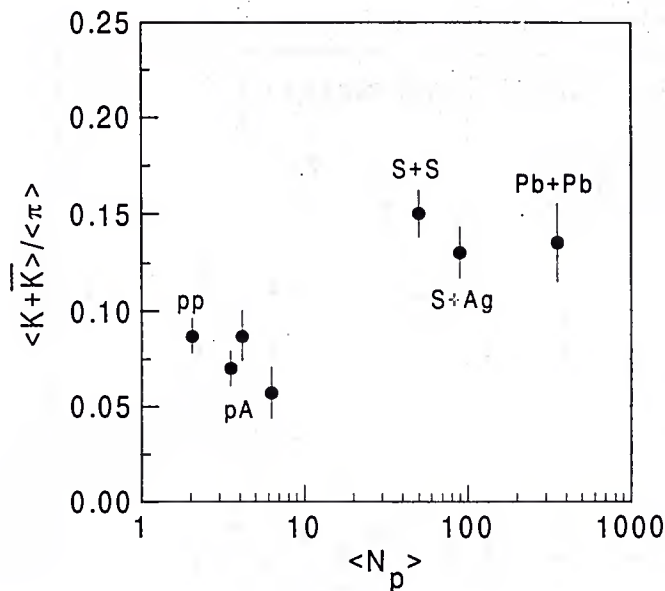


Figura 2.3: Razão  $\langle \bar{K} + K \rangle / \langle \pi \rangle$  vs. número de participantes, mostrando a tendência no aumento de estranheza [74].

enquanto  $K^-$  sofre um aumento mais lento em relação a  $\pi^-$ . E802 mostra isso para os sistemas p+Be, p+Au e Si+Au em um grande intervalo de rapidez, conforme mostrado na figura 2.4.

## SPS

- Colaboração NA35: (S+S, 200 A GeV).

Mostrou-se um aumento do número de  $K_S^0$ ,  $\Lambda$  e  $\bar{\Lambda}$  em relação ao número de hádrons negativos ( $\equiv \pi^- + K^- + \bar{p}$ ) no sistema S+S em comparação ao sistema p+p (Fig. 2.5) [19].

- Colaboração NA49: (Pb+Pb, 158 A GeV).

Aumento nas razões  $\bar{\Lambda}/\bar{p}$  [20],  $\Xi/\Lambda$  e  $\Xi/\bar{\Lambda}$  [21] em comparação às colisões p+p e p+A.

- Colaboração WA85: (S+W, 200 A GeV).



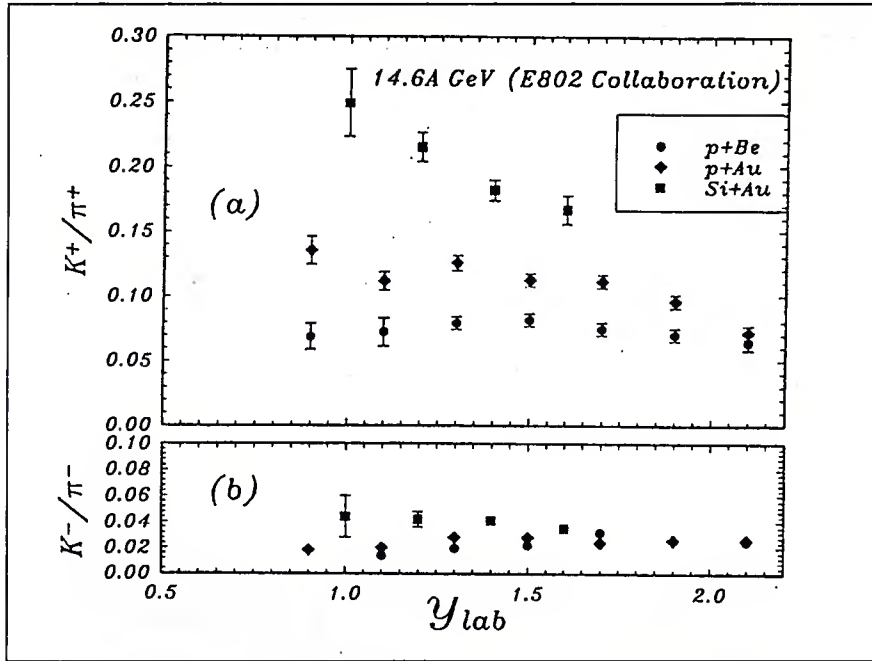


Figura 2.4: Razões (a)  $K^+/\pi^+$  e (b)  $K^-/\pi^-$  como função da rapidez no sistema de laboratório para vários sistemas. Retirado de [68].

Razões de partículas estranhas:  $\bar{\Lambda}/\Lambda$ ,  $\bar{\Xi}/\Xi$ ,  $\bar{\Xi}^-/\bar{\Lambda}$  e  $\Xi^-/\Lambda$  [38]. Verificou-se que a razão  $\bar{\Xi}/\Xi$  em S+W é maior do que em razões p+W. O mesmo acontece para  $\bar{\Xi}^-/\bar{\Lambda}$ .

- Colaboração WA97: (Pb-Pb, 158 A GeV).

Razões de partículas estranhas:  $\bar{\Lambda}/\Lambda$ ,  $\bar{\Xi}/\Xi$ ,  $\bar{\Xi}^-/\bar{\Lambda}$  e  $\Xi^-/\Lambda$  e temperatura aparente do  $\Omega$  [61], que mostrou-se mais baixa do que o esperado.

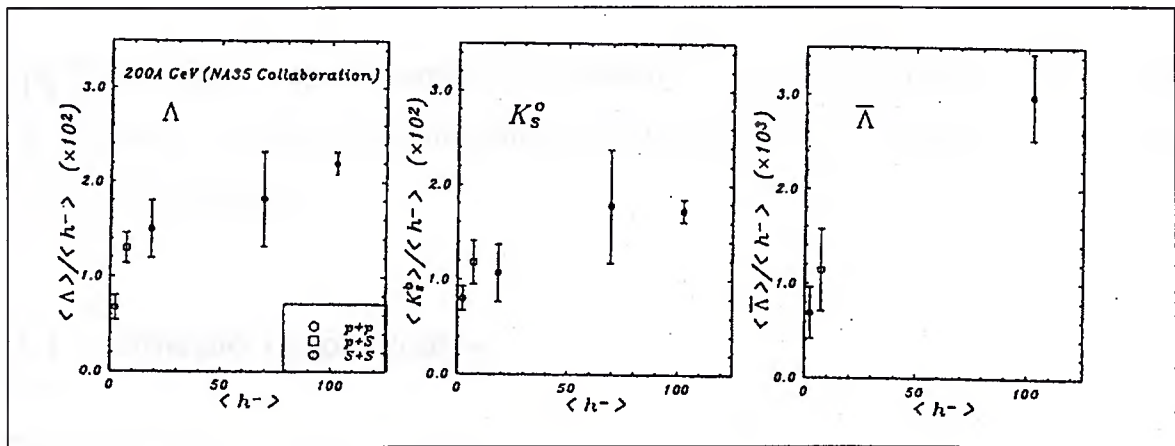


Figura 2.5: Razões  $\langle \Lambda \rangle / \langle h^- \rangle$ ,  $\langle K_S^0 \rangle / \langle h^- \rangle$  e  $\langle \bar{\Lambda} \rangle / \langle h^- \rangle$  para vários sistemas [68].

## O modelo hidrodinâmico de emissão contínua de partículas

Neste capítulo, apresentaremos o formalismo de emissão contínua proposto por Grassi, Hama e Kodama [24, 25] como uma alternativa para a emissão de partículas em modelos hidrodinâmicos.

### 3.1 Emissão de partículas

#### Freeze-out

Usualmente o tratamento hidrodinâmico das colisões nucleares relativísticas faz uso do conceito de freeze-out. O freeze-out é a transição da matéria que se encontra no estado de equilíbrio termodinâmico ao estado de partículas livres. Quando a matéria se expande (tão logo o fluxo hidrodinâmico se inicie), a densidade decresce e o livre caminho médio das partículas aumenta até atingir (ou mesmo superar) o tamanho do sistema. Nesse ponto, as partículas não mais interagem através de colisões elásticas ou inelásticas e, com boa aproximação, pode-se considerar a matéria como sendo composta de partículas livres. A descrição detalhada desse desacoplamento é complicada. Na prática, isso é obtido assumindo-se que o freeze-out ocorre repentinamente quando uma certa condição é atingida; por exemplo quando um dado valor de temperatura e/ou potencial químico é alcançado. Os pontos no espaço-tempo onde essas condições são atingidas definem uma

superfície tridimensional de freeze-out, na qual antes de atravessá-la as partículas apresentam um comportamento hidrodinâmico e após, elas se dirigem livremente ao detector. Assim, os dados experimentais refletirão, nesse caso, somente as condições de freeze-out.

O número de partículas com momento entre  $p$  e  $p + d^3p$  que atravessa a superfície de freeze-out  $\sigma$  é dado por:

$$\Delta N = \int_{\sigma} f(x, p) \frac{p^{\nu}}{p^0} d\sigma_{\nu} d^3p, \quad (3.1)$$

onde  $d\sigma_{\nu}$  é um elemento de superfície normal a  $\sigma$ ,  $f(x, p)$  é a função de distribuição na superfície para o tipo de partícula considerado e  $p^{\nu} = (E, \mathbf{p})$  é o 4-vetor momento-energia. A distribuição de momento invariante de um gás termalizado é escrita então como:

$$E \frac{d^3N}{dp^3} = \int_{\sigma} f(x, p) p^{\nu} d\sigma_{\nu}. \quad (3.2)$$

Essa é a fórmula de Cooper e Frye [23] freqüentemente usada para calcular o espectro hadrônico no caso de freeze-out.

### Emissão contínua

O cenário de emissão contínua propõe uma descrição mais realística para a emissão de partículas do que aquela apresentada acima. Nessa nova formulação, uma partícula pode escapar do gás hadrônico sem interagir, mesmo que ela se encontre em uma região bastante densa. Agora, a função de distribuição total  $f(x, p)$  levará em conta tanto as partículas que escaparam do gás como aquelas que ainda interagem. Assim, escreveremos

$$f(x, p) = f_{livre}(x, p) + f_{int}(x, p). \quad (3.3)$$

Aqui,  $f_{livre}(x, p)$  conta todas as partículas que estão no ponto espaço-temporal  $x$  ( $x^{\nu} = (t, \mathbf{x})$ ) com 4-momento  $p$  e não mais interagem e  $f_{int}(x, p)$  leva em conta as partículas que estão em  $x$  com 4-momento  $p$  e ainda sofrerão colisões em tempos maiores que  $x^0$ .

Para determinarmos a distribuição de momento invariante no caso de emissão contínua, considere duas superfícies tridimensionais,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , infinitesimalmente próximas. A variação no número de partículas livres com momento entre  $p$  e  $p + d^3p$  entre essas duas superfícies

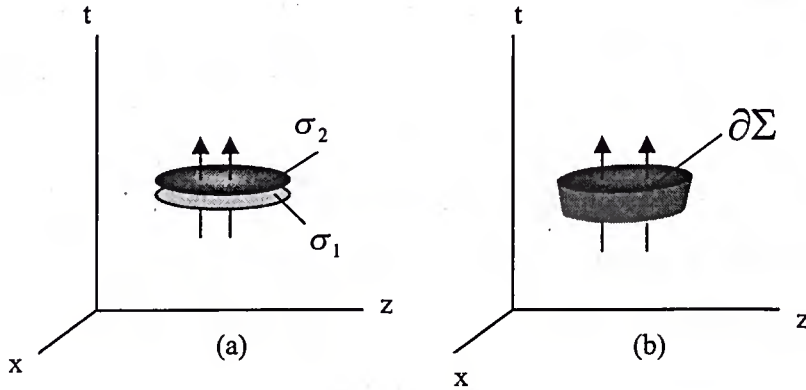


Figura 3.1: (a) Superfícies e (b) elemento de volume usado da dedução das equações da emissão contínua

pode ser escrita como (ver figura 3.1.a)

$$\Delta N = \int_{\sigma_2} f_{livre}(x, p) \frac{p^\nu}{p^0} d\sigma_\nu d^3p - \int_{\sigma_1} f_{livre}(x, p) \frac{p^\nu}{p^0} d\sigma_\nu d^3p, \quad (3.4)$$

que corresponde a diferença no fluxo de corrente de partículas entre as superfícies  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

Como essas superfícies estão infinitesimalmente próximas, podemos desconsiderar as bordas no 4-volume infinitesimal formado por  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  e escrever a equação (3.4) como

$$\Delta N \simeq \oint_{\partial\Sigma} f_{livre}(x, p) \frac{p^\nu}{p^0} d\sigma_\nu \Delta^3 p, \quad (3.5)$$

onde agora a integral é sobre a superfície fechada  $\partial\Sigma$  formada pelas superfícies  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  (ver figura 3.1.b)

Utilizando o teorema da divergência, temos

$$\Delta N \simeq \int_{\Omega} d^4x D_\nu \left[ \frac{p^\nu}{p^0} f_{livre} \right] \Delta^3 p, \quad (3.6)$$

onde  $D_\nu$  está indicando a 4-divergência. Em coordenadas generalizadas, essa 4-divergência é

$$D_\nu \left[ \frac{p^\nu}{p^0} f_{livre} \right] = \frac{1}{\sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|}} \partial_\nu \left[ \sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|} \frac{p^\nu}{p^0} f_{livre} \right], \quad (3.7)$$

onde  $g_{\alpha\beta}$  é o tensor métrico do sistema de coordenadas. Deve-se notar que  $d^4x$  é o elemento de volume invariante, ou seja, deve conter o jacobiano apropriado. A integração é sobre o volume  $\Omega$  encerrado pela superfície  $\partial\Sigma$ . Repetindo-se o processo para todas as superfícies, podemos escrever

$$\Delta N = \int d^4x D_\nu \left[ f_{livre}(x, p) \frac{p^\nu}{p^0} \right] d^3p. \quad (3.8)$$

onde a integração é agora sobre todo o espaço-tempo. Assim, o número de partículas detectadas com momento no intervalo  $p$  e  $p + d^3p$  é dado somando-se todo o aumento da corrente de partículas livres com momento naquele intervalo. De (3.8) temos que a distribuição de momento invariante é dada por:

$$E \frac{d^3N}{dp^3} = \int d^4x D_\nu [p^\nu f_{livre}(x, p)]. \quad (3.9)$$

A distribuição para o freeze-out, mostrada na equação (3.2), é um caso particular da equação (3.9) como mostrado na referência [25].

### 3.2 Equações de conservação

No modelo de emissão contínua, uma fração da energia é carregada pelas partículas livres e outra fração permanece interagindo no gás. Assim, a equação de conservação de momento-energia deve ser escrita na forma:

$$D_\nu T_{livre}^{0\nu} + D_\nu T_{int}^{0\nu} = 0, \quad (3.10)$$

onde  $T_{livre}^{\mu\nu}$  e  $T_{int}^{\mu\nu}$  são os tensores momento-energia da parte livre e interagente, respectivamente.

Como as partículas livres são uma fração do total de partículas, vamos escrever

$$f_{livre}(x, p) = \mathcal{P} f(x, p), \quad (3.11)$$

onde  $\mathcal{P}$  é a proporção de partículas livres com 4-momento  $p$  no ponto do espaço-tempo  $x$ .  $\mathcal{P}$  também pode ser interpretado como a probabilidade que uma partícula com 4-momento



$p$  escape do ponto  $x$  sem fazer colisões. Essa probabilidade dependerá da densidade de partículas no fluido, do tipo de partícula, de sua posição em um dado tempo e da direção do seu movimento. De (3.11) e (3.3) vemos ainda que

$$f_{livre}(x, p) = \frac{\mathcal{P}}{1 - \mathcal{P}} f_{int}(x, p). \quad (3.12)$$

Assumiremos que a parte interagente da função de distribuição seja dada aproximadamente pela distribuição da matéria em equilíbrio termodinâmico local, ou seja,

$$f_{int}(x, p) \equiv f_{térmico}(x, p) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\{[p \cdot u(x) - \mu(x)]/T(x)\} + \Theta}, \quad (3.13)$$

onde:  $g$  é a degenerescência spin-isospin para o tipo de partícula considerado;  $u^\mu(x)$  é a 4-velocidade do fluido;  $T$  é a temperatura;  $\Theta = +1$  para bárions e  $\Theta = -1$  para mésons. Em (3.13)

$$\mu(x) = B\mu_B(x) + S\mu_S(x), \quad (3.14)$$

no qual  $\mu_B$  é o potencial químico bariônico,  $\mu_S$  é o potencial químico relacionado a estranheza e  $B$  e  $S$  são, respectivamente, o número bariônico e de estranheza.

### 3.2.1 Equações da hidrodinâmica na aproximação de Bjorken

As equações de conservação podem ser simplificadas usando o modelo de Bjorken [22], que pode ser descrito da seguinte forma: assume-se que dois núcleos relativísticos ( $v \sim c$ ) colidem, no sistema de centro de massa, na posição  $z = 0$  e no tempo  $t = 0$ . Após colidirem, os núcleos se afastam um do outro depositando uma alta densidade de energia em torno do ponto de colisão  $z = 0$ . Essa densidade de energia pode ser suficientemente alta para criar (no nosso caso) um gás hadrônico\* que está inicialmente fora do equilíbrio térmico. Após um tempo próprio  $\tau_0$ , esse gás pode atingir o equilíbrio local e evoluir segundo as leis da hidrodinâmica. A figura 3.2 mostra esquematicamente essa situação. As quantidades físicas nesse estágio podem ser escritas em função da rapidez  $\eta (\equiv \arctan(z/t))$  e

\*Nas considerações finais (capítulo 6) discutiremos o que se esperaria com a formação de um QGP.

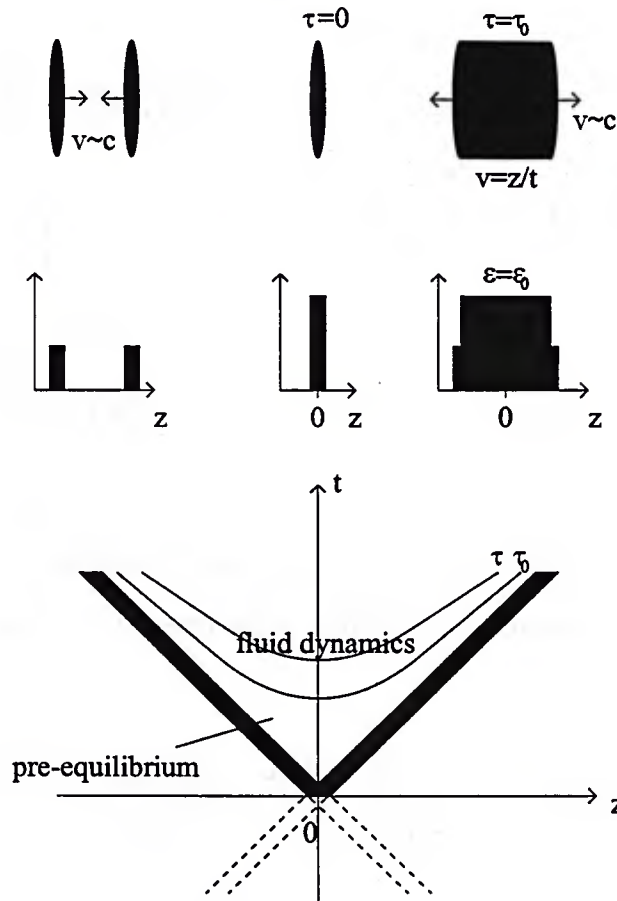


Figura 3.2: Representação pictórica do modelo de Bjorken. Extraído da Ref. [48].

do tempo próprio  $\tau$  ( $\equiv \sqrt{t^2 - z^2}$ ), como por exemplo a densidade de energia  $\varepsilon(\tau, \rho, \eta)$ . Baseado na observação que a distribuição de rapidez de partículas carregadas em colisões  $p+p$  é constante, isto é, invariante por boost de Lorentz, na região de rapidez média, assume-se que todas as quantidades físicas tenham essa propriedade, como por exemplo a densidade de energia  $\varepsilon(\tau, \rho, \eta) = \varepsilon(\tau, \rho)$ . Nesse modelo, a 4-velocidade do fluido pode ser escrita como:  $u^\mu = \gamma(1, 0, 0, v_z) = (t/\tau, 0, 0, z/\tau)$ .

Vamos agora considerar as equações de conservação de momento-energia (3.10) nessa aproximação. Para isso note que o tensor momento-energia da parte livre e interagente



pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} T_{int}^{0\mu} &= \sum_i \int d^3p p_i^\mu f_{int}^i(x, p) \\ &= \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p_i^\mu}{\exp\{[p_i \cdot u(x) - \mu_i(x)]/T(x)\} + \Theta_i}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} T_{livre}^{0\mu} &= \sum_i \int d^3p p_i^\mu f_{livre}^i(x, p) \\ &= \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p_i^\mu}{\exp\{[p_i \cdot u(x) - \mu_i(x)]/T(x)\} + \Theta_i} \frac{\mathcal{P}_i}{1 - \mathcal{P}_i}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde usamos (3.12) e (3.13). As somatórias nas equações (3.15) e (3.16) são sobre todos os tipos de partículas que compõem o gás hadrônico formado na colisão. Em  $z = 0$ , a parte interagente da equação de conservação (3.10) tem a seguinte forma em coordenadas cilíndricas †

$$\begin{aligned} D_\nu T_{int}^{0\nu} \Big|_{z=0} &= D_0 T_{int}^{00} \Big|_{z=0} + D_\rho T_{int}^{0\rho} \Big|_{z=0} + D_z T_{int}^{0z} \Big|_{z=0} \\ &= \partial_t T_{int}^{00} \Big|_{z=0} + \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho T_{int}^{0\rho}) \Big|_{z=0} + \partial_z T_{int}^{0z} \Big|_{z=0} \\ &= \partial_t \varepsilon_{int} + \frac{1}{t} (\varepsilon_{int} + P_{int}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde

$$\varepsilon_{int} = \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{E_i}{\exp\{[E_i - \mu_i(t, \rho)]/T(t, \rho)\} + \Theta_i}, \quad (3.18)$$

$$P_{int} = \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p^2 \cos^2 \theta / E_i}{\exp\{[E_i - \mu_i(t, \rho)]/T(t, \rho)\} + \Theta_i}, \quad (3.19)$$

são a densidade de energia e pressão da parte interagente. Para a parte livre de (3.10), temos:

$$\begin{aligned} D_\nu T_{livre}^{0\nu} \Big|_{z=0} &= D_0 T_{livre}^{00} \Big|_{z=0} + D_\rho T_{livre}^{0\rho} \Big|_{z=0} + D_z T_{livre}^{0z} \Big|_{z=0} \\ &= \partial_t T_{livre}^{00} \Big|_{z=0} + \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho T_{livre}^{0\rho}) \Big|_{z=0} + \partial_z T_{livre}^{0z} \Big|_{z=0} \\ &= \partial_t \varepsilon_{livre} + \frac{1}{t} (\varepsilon_{livre} + P_{livre}) + \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \mathcal{F}), \end{aligned} \quad (3.20)$$

†Note que devido a simetria cilíndrica, não há termos envolvendo coordenadas angulares

onde

$$\varepsilon_{livre} = \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{E_i}{\exp\{[E_i - \mu_i(t, \rho)]/T(t, \rho)\} + \Theta_i} \frac{\mathcal{P}_i}{1 - \mathcal{P}_i} \Big|_{z=0}, \quad (3.21)$$

$$P_{livre} = \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p^2 \cos^2 \theta / E_i}{\exp\{[E_i - \mu_i(t, \rho)]/T(t, \rho)\} + \Theta_i} \frac{\mathcal{P}_i}{1 - \mathcal{P}_i} \Big|_{z=0}, \quad (3.22)$$

$$\mathcal{F} = \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p \sin \theta \cos \phi}{\exp\{[E_i - \mu_i(t, \rho)]/T(t, \rho)\} + \Theta_i} \frac{\mathcal{P}_i}{1 - \mathcal{P}_i} \Big|_{z=0}, \quad (3.23)$$

Aqui  $\varepsilon_{livre}$  e  $P_{livre}$  são, respectivamente, a densidade de energia e pressão para a parte livre. Assim, usando (3.17) e (3.20) podemos escrever a equação de conservação de energia-momento como:

$$\partial_t \varepsilon + \frac{1}{t} (\varepsilon + P) + \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \mathcal{F}) = 0, \quad (3.24)$$

onde  $\varepsilon = \varepsilon_{int} + \varepsilon_{livre}$  e  $P = P_{int} + P_{livre}$ .

Juntamente com a equação (3.24), devemos considerar também a equação de conservação do número bariônico:

$$D_\nu (n_B^{int} u^\nu) \Big|_{z=0} + D_\nu (n_B^{livre} u^\nu) \Big|_{z=0} = 0, \quad (3.25)$$

onde

$$n_B^{int} = \sum_i B_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{\exp\{[E_i - \mu_i(x)]/T(x)\} + \Theta_i}, \quad (3.26)$$

$$n_B^{livre} = \sum_i B_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{\exp\{[E_i - \mu_i(x)]/T(x)\} + \Theta_i} \frac{\mathcal{P}_i}{1 - \mathcal{P}_i}. \quad (3.27)$$

Assim, obtemos para (3.25)

$$\partial_t n_B + \frac{n_B}{t} = 0, \quad (3.28)$$

com  $n_B = n_B^{int} + n_B^{livre}$ . Temos, então, as equações da hidrodinâmica no modelo de emissão contínua:

$$\partial_t \varepsilon + \frac{1}{t} (\varepsilon + P) + \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \mathcal{F}) = 0, \quad (3.29)$$

$$\partial_t n_B + \frac{n_B}{t} = 0 \Rightarrow n_B(t, \rho) = n_B(t_0, \rho) \frac{t_0}{t}. \quad (3.30)$$

Essas equações deverão ser resolvidas para se obter o comportamento do fluido representado pela temperatura  $T$  e pelo potencial químico  $\mu_B$ . A probabilidade  $\mathcal{P}$  necessária para a solução dessas equações será calculada usando a fórmula de Glauber:

$$\mathcal{P}(t, z, \rho, v_z = v \cos \theta_p, v_\perp = v \sin \theta_p, \phi_p - \phi) = \exp \left[ - \int_\tau^{\tau_{out}} \langle \sigma v_{rel} \rangle n(x') d\tau' \right], \quad (3.31)$$

onde  $\tau_{out}$  é o tempo próprio quando a partícula atinge a superfície  $\rho = R$  da matéria densa e é dado por

$$\tau_{out} = \sqrt{t_{out}^2 - z_{out}^2}, \quad (3.32)$$

com  $t_{out} = t + \left[ -\rho \cos(\phi_p - \phi) + \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2(\phi_p - \phi)} \right] / v_\perp$  e  $z_{out} = z + v_z(t_{out} - t)$ .  $\theta_p$  e  $\phi_p$  são, respectivamente, o ângulo polar e o ângulo azimutal relacionados ao momento da partícula e  $\phi$  é o ângulo azimutal relacionado à posição da partícula. Em (3.31),  $n(x)$  é a densidade total de partículas (livres e interagentes). Com essa escolha de  $n(x)$  temos, em princípio, um problema autoconsistente em  $\varepsilon$ ,  $P$ ,  $n_B$ ,  $\mathcal{P}$  (via Eqs. (3.29), (3.30) e (3.31)) e a equação de estado, o que torna a solução do problema inviável. Para contornar essa dificuldade, aproximamos  $n(x)$  em (3.31) pela solução para um fluido sem emissão contínua de partículas. Essa aproximação é razoável para tempos próprios próximos a  $\tau_0$ , onde a emissão de partículas livres não altera significativamente a densidade de partículas (exceto próximo a  $R$ ), deixando-a próxima ao caso sem emissão.

### 3.2.2 Solução numérica das equações da hidrodinâmica com emissão contínua

Para podermos resolver as equações (3.29) e (3.30) necessitamos de uma equação de estado. Inicialmente consideramos um gás hadrônico ideal composto por todas as partículas de massa  $\lesssim 2$  GeV [47]. Assim, construímos a equação de estado como mostrado esquematicamente na tabela 3.1<sup>†</sup>, onde impomos a condição de estranheza nula

<sup>†</sup>Deve-se notar que esse caso é mais complicado do que o caso mais usual de freeze-out, onde necessita-se de uma equação de estado mais simples:  $\mu_B, T \rightarrow \mu_S, n_B, P, \varepsilon$  (onde as quantidades não dependem de  $\mathcal{P}$ )

$t$	$\rho$	$\mu_B$	$T$	$\rightarrow$	$\mu_S$	$n_B$	$P$	$\varepsilon$	$\mathcal{F}$
$:$	$:$	$:$	$:$		$:$	$:$	$:$	$:$	$:$

Tabela 3.1: Esquema da equação de estado usada para a solução das equações da hidrodinâmica no modelo de emissão contínua.

$$\sum_i S_i n_i = 0, \quad (3.33)$$

para determinar  $\mu_S$  a partir de  $\mu_B$  e  $T$ . As outras quantidades são construídas a partir de:

$$n_B = \sum_i B_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{\exp\{[E_i - \mu_i]/T\} + \Theta_i} \frac{1}{1 - \mathcal{P}_i} \Big|_{z=0}, \quad (3.34)$$

$$P = \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p^2 \cos^2 \theta / E_i}{\exp\{[E_i - \mu_i]/T\} + \Theta_i} \frac{1}{1 - \mathcal{P}_i} \Big|_{z=0}, \quad (3.35)$$

$$\varepsilon = \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{E_i}{\exp\{[E_i - \mu_i]/T\} + \Theta_i} \frac{1}{1 - \mathcal{P}_i} \Big|_{z=0}, \quad (3.36)$$

$$\mathcal{F} = \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p \sin \theta \cos \phi}{\exp\{[E_i - \mu_i]/T\} + \Theta_i} \frac{1}{1 - \mathcal{P}_i} \Big|_{z=0}. \quad (3.37)$$

Resolvendo-se (3.29) e (3.30), obtemos  $n_B(t, \rho)$  e  $\varepsilon(t, \rho)$ . Então, invertemos a equação de estado (tabela 3.1) para se conseguir  $T(t, \rho)$  e  $\mu_B(t, \rho)$ . As figuras 3.3 e 3.4 mostram o comportamento da temperatura e do potencial químico bariônico (sem e com emissão contínua) como uma função do raio para vários tempos. Para essas figuras as condições iniciais foram escolhidas de tal forma que:  $T(t_0 = 1fm) = 200MeV$  e  $\mu_B(t_0 = 1fm) = 200MeV$ . Os parâmetros são :  $R = 3.6$  ( $\sim$  raio do núcleo de enxofre) e  $\langle \sigma v_{rel} \rangle \sim 2fm^2$ . Como esperado, o gás “esfria” mais rapidamente no caso com emissão do que no caso padrão sem a emissão contínua, desde que as partículas desacopladas diminuem a energia disponível para a componente interagente.

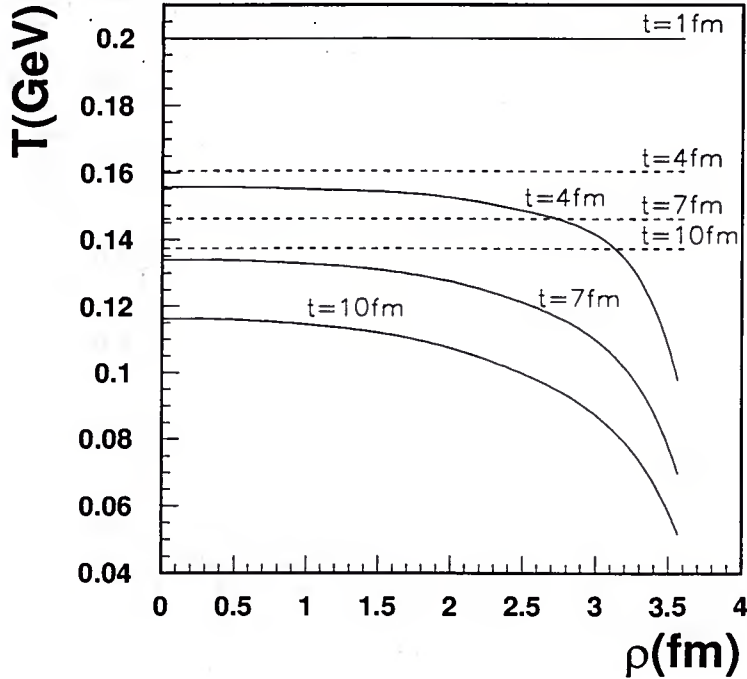


Figura 3.3: Temperatura como função do raio para vários tempos. A linha tracejada representa o modelo sem emissão contínua; a linha cheia é o modelo com emissão contínua de partículas.  $T_0 = 200$  MeV,  $\mu_{B0} = 200$  MeV,  $t_0 = 1$  fm,  $R = 3.6$  fm e  $\langle \sigma v_{rel} \rangle \sim 2$  fm<sup>2</sup>.

### 3.3 Espectros de partículas

Para posteriores comparações do modelo de emissão contínua com dados experimentais é necessário calcular o espectro de partículas. Assim, vamos reescrever a equação (3.9) em uma forma mais conveniente para nossos cálculos. Note, inicialmente, que:

$$E \frac{d^3 N}{dp^3} = E \frac{d^3 N}{dp_L p_\perp dp_\perp d\phi_p} = \frac{d^3 N}{dy p_\perp dp_\perp d\phi_p}, \quad (3.38)$$

onde  $p_L$  é a componente do momento ao longo do eixo de colisão  $z$ ,  $p_\perp$  é a componente transversal e  $y = \frac{1}{2} \ln[(E + p_L)/(E - p_L)]$  ( $dy = dp_L/E$ ) é a rapidez longitudinal da partícula. Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^3 N}{dy p_\perp dp_\perp d\phi_p} &= \int d^4 x D_\nu [p^\nu f_{livre}(x, p)] \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{\tau_0}^{\infty} \tau d\tau \int_0^R \rho d\rho \left\{ \frac{1}{\tau} \partial_\tau [\tau m_\perp \cosh(\eta - y) f_{livre}] \right\} \end{aligned}$$

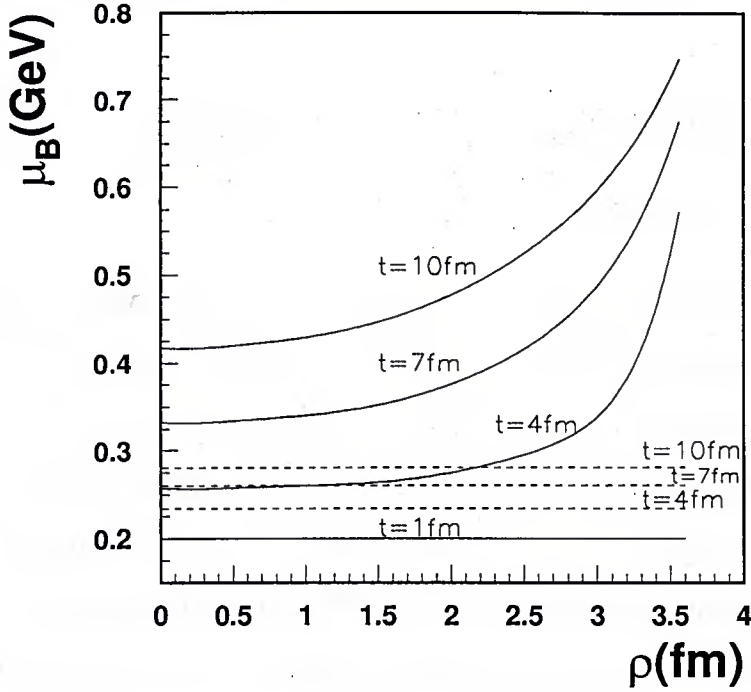


Figura 3.4: Potencial químico bariônico como função do raio para vários tempos. As linhas e os parâmetros são os mesmos da figura 3.3.

$$+ \frac{1}{\rho} \partial_\rho [\rho p_\perp \cos(\phi_p - \phi) f_{livre}] \}, \quad (3.39)$$

onde  $m_\perp = \sqrt{m^2 + p_\perp^2}$  e  $\eta = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{t+z}{t-z} \right)$  é a rapidez do fluido.  $f_{livre}$  é escrito como:

$$f_{livre} = \left\{ \frac{g}{(2\pi)^3} \exp \left[ \frac{m_\perp \cosh(\eta - y) - B\mu_B(t, \rho) - S\mu_S(t, \rho)}{T(t, \rho)} \right] + \Theta \right\}^{-1} \frac{\mathcal{P}}{1 - \mathcal{P}}. \quad (3.40)$$

O apêndice D mostra os detalhes para se chegar a equação (3.39). Integrando o primeiro termo em  $\tau$  e o segundo em  $\rho$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dy p_\perp dp_\perp} &= 2\pi \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^R d\rho \rho m_\perp \cosh(\eta - y) (\tau f_{livre}) \Big|_{\tau=\tau_0}^{\tau=\infty} \\ &+ 2\pi \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \tau p_\perp \cos(\phi) (\rho f_{livre}) \Big|_{\rho=0}^{\rho=R}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde também efetuamos a integração em  $\phi_p$ , por isso o fator  $2\pi$ . Para levarmos em conta as partículas livres presentes em  $\tau = \tau_0$ , devemos descontar o termo em  $\tau_0$  em (3.41).



Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dyp_{\perp} dp_{\perp}} &= 2\pi \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^R d\rho \rho m_{\perp} \cosh(\eta - y) (\tau f_{livre})_{\tau=\infty} \\ &+ 2\pi \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \tau p_{\perp} \cos(\phi) (\rho f_{livre})_{\rho=R}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

A suposição feita anteriormente de usar para a parte interagente da função de distribuição  $f_{int}$  uma distribuição térmica (equação (3.13)) deverá valer somente enquanto a proporção de partículas livres não é suficientemente grande. Caso contrário, não se justificaria a utilização de uma distribuição térmica para uma densidade pequena de partículas interagindo. Para contornar esse problema, consideramos nas integrais acima somente aqueles pontos no espaço-tempo no qual  $\mathcal{P} \leq 0.5$ . Precisamente, a integral em  $\tau$  será cortada em  $\tau_F$  e a integral em  $\rho$  em  $\rho_F$ , ambos satisfazendo  $\mathcal{P} = 0.5$ . Assim, reescreveremos (3.42) como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dyp_{\perp} dp_{\perp}} &\simeq \frac{g}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \left\{ \int_0^R d\rho \rho m_{\perp} \cosh(\eta - y) \tau_F \mathcal{F}[T(\tau_F, \rho), \mu_B(\tau_F, \rho)] \right. \\ &\left. + \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \tau p_{\perp} \cos(\phi) \rho_F \mathcal{F}[T(\tau, \rho_F), \mu_B(\tau, \rho_F)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde

$$\mathcal{F}[T(\tau, \rho), \mu_B(\tau, \rho)] = \left\{ \exp \left[ \frac{m_{\perp} \cosh(\eta - y) - B\mu_B(\tau, \rho) - S\mu_S(\tau, \rho)}{T(\tau, \rho)} \right] + \Theta \right\}^{-1}. \quad (3.44)$$

Aqui,  $\tau_F = \tau_F(\rho, \eta, \phi, p_{\perp}/m_{\perp})$  e  $\rho_F = \rho_F(\tau, \eta, \phi, p_{\perp}/m_{\perp})$  são o tempo próprio e a posição radial no qual  $\mathcal{P} = 0.5$  é atingido. Essas quantidades são encontradas resolvendo-se as equações

$$\mathcal{P}(\tau_F, \rho, \eta, \phi, v_{\perp} = p_{\perp}/m_{\perp}) = 0.5, \quad (3.45)$$

$$\mathcal{P}(\tau, \rho_F, \eta, \phi, v_{\perp} = p_{\perp}/m_{\perp}) = 0.5, \quad (3.46)$$

com  $\mathcal{P}$  dado pela fórmula de Glauber, Eq. (3.31). Com esse corte, contamos todas as partículas que se tornaram livres sobre a superfície  $\mathcal{P} = 0.5$ . Devemos agora levar em conta as partículas que ainda estão interagindo. Como a partir de  $\mathcal{P} = 0.5$  poucas partículas

interagem, não se tem mudanças significativas no espectro em massa transversal. Assim, podemos tratar essa superfície ( $\mathcal{P} = 0.5$ ) como uma superfície de freeze-out. Então, as partículas que ainda estavam interagindo sobre a superfície  $\mathcal{P} = 0.5$  se desacoplam ali e a equação (3.43) deve ser corrigida pela fórmula de Cooper-Frye para que isso seja levado em conta. Temos, então

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dy p_{\perp} dp_{\perp}} &= \frac{g}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \left\{ \int_0^R d\rho \rho m_{\perp} \cosh(\eta - y) \tau_F \mathcal{F}[T(\tau_F, \rho), \mu_B(\tau_F, \rho)] \right. \\ &+ \left. \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \tau p_{\perp} \cos(\phi) \rho_F \mathcal{F}[T(\tau, \rho_F), \mu_B(\tau, \rho_F)] \right\} \\ &+ 2\pi \underbrace{\int_{\sigma_{\mathcal{P}=0.5}} f(x, p) p^{\nu} d\sigma_{\nu}}_{\text{Cooper-Frye}}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Pode-se mostrar que o segundo termo da equação (3.47) é idêntico ao primeiro, resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dy p_{\perp} dp_{\perp}} &= \frac{2g}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \left\{ \int_0^R d\rho \rho m_{\perp} \cosh(\eta - y) \tau_F \mathcal{F}[T(\tau_F, \rho), \mu_B(\tau_F, \rho)] \right. \\ &+ \left. \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \tau p_{\perp} \cos(\phi) \rho_F \mathcal{F}[T(\tau, \rho_F), \mu_B(\tau, \rho_F)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Exemplos de espectros são mostrados na figura 3.5, onde usamos uma equação de estado para um gás de partículas com massa  $\lesssim 2$  GeV. Esses espectros são obtidos de (3.48) usando  $T(t, \rho)$  e  $\mu_B(t, \rho)$  (e também  $\mu_S(t, \rho)$  impondo a condição de estranheza nula) que são soluções das equações da hidrodinâmica com emissão contínua (3.29) e (3.30) tendo como condições iniciais  $T_0 = 200$  MeV e  $\mu_{B0} = 200$  MeV. Na figura 3.5 mostramos a distribuição em massa transversal para píons, comparando-a com duas distribuições térmicas com temperaturas de freeze-out de  $T_{fo} = 150$  MeV e  $T_{fo} = T_0 = 200$  MeV. A característica interessante do espectro no cenário de emissão contínua é sua forma côncava. A curva para grandes  $p_{\perp}$  tem uma inclinação próxima daquela da distribuição térmica em  $T_0$ . Para pequenos  $p_{\perp}$  o espectro tem uma inclinação refletindo as baixas temperaturas e é mais similar a distribuição térmica em  $T_{fo} = 150$  MeV. Isso corresponde ao fato que partículas com pequenos  $p_{\perp}$  ficam presas e só se tornam livres quando a matéria torna-se



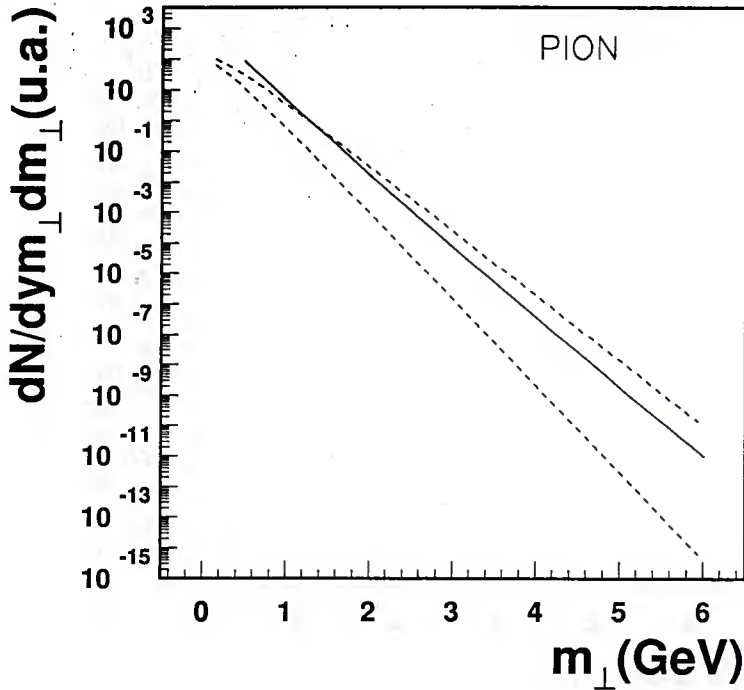


Figura 3.5: Espectro de massa transversal para píons. A linha cheia representa o modelo de emissão contínua para  $T_0 = 200$  MeV,  $\mu_{B0} = 200$  MeV,  $t_0 = 1$  fm,  $R = 3.6$  fm e  $\langle \sigma v_{rel} \rangle \sim 2$  fm<sup>2</sup>. As linhas tracejadas são distribuições térmicas para a temperatura de freeze-out de  $T_{fo} = 150$  MeV e  $T_{fo} = 200$  MeV.

diluída. As figuras 3.6 e 3.7 mostram as mesmas distribuições que a figura 3.5 mas para lambdas e antilambdas. Vemos que os espectros refletem principalmente as temperaturas mais altas, quando um grande número de partículas (mas uma pequena porcentagem da densidade) tornam-se livres.

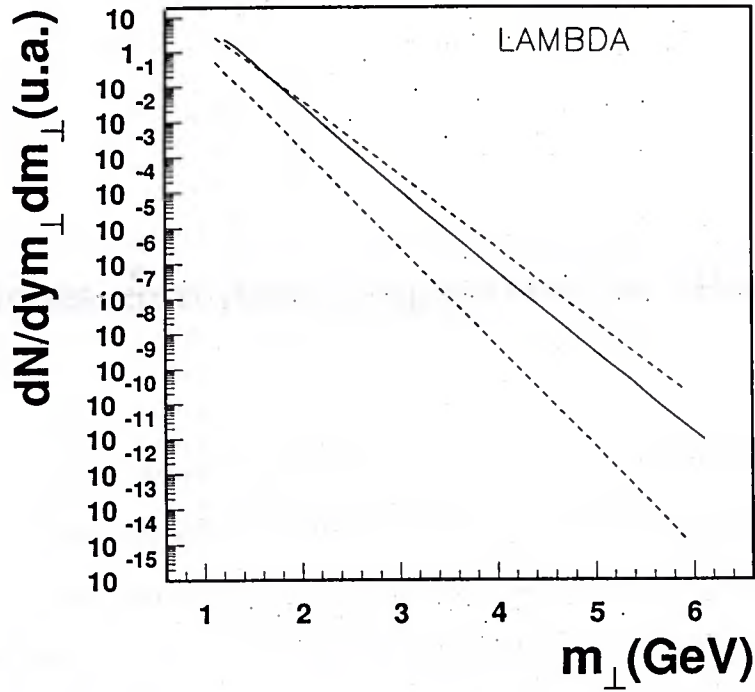


Figura 3.6: O mesmo que a Fig. 3.5 para lambda.

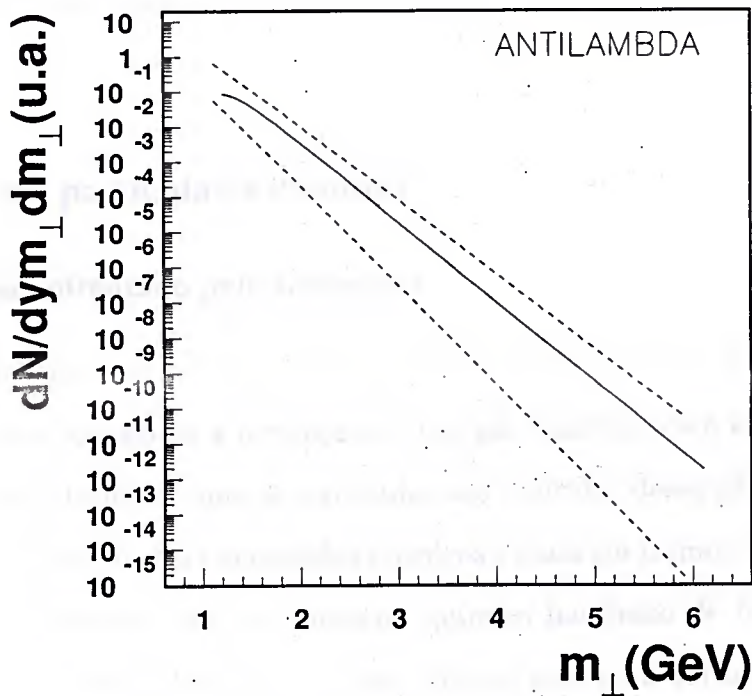


Figura 3.7: O mesmo que a Fig. 3.5 para antilambda.

## Comparações com dados experimentais. Projéteis leves

A partir do modelo de emissão contínua apresentado no capítulo anterior, analisamos vários dados sobre colisões entre núcleos leves (S-S e S-W) dos experimentos WA85 e NA35 do CERN. Começamos estudando razões de partículas estranhas objetivando determinar as condições iniciais apropriadas para reproduzir os dados experimentais. Uma vez obtido essas condições iniciais testamos a autoconsistência do modelo analisando espectros e abundâncias.

Os resultados apresentados neste capítulo fazem parte das referências [26, 27, 28, 29, 30, 31].

### 4.1 Razões de partículas estranhas

#### 4.1.1 Problema enfrentado pelo freeze-out

Para vermos o problema enfrentado pelos modelos de freeze-out ao lidar com razões de partículas estranhas, considere a formação de um gás hadrônico em equilíbrio térmico e químico. Considere, também, que as partículas são emitidas desse gás no freeze-out. A taxa de produção de partículas em modelos térmicos é dada em termos de três parâmetros: a temperatura de freeze-out  $T_{fo}$ , o potencial químico bariônico de freeze-out  $\mu_{Bfo}$  e o potencial químico de estranheza  $\mu_{Sfo}$ . Esse último pode, na verdade, ser escrito em termos dos outros dois parâmetros se impormos a condição de estranheza nula. Usando a distribuição de Boltzmann (válida para partículas pesadas como  $\Lambda$ 's e  $\Xi$ 's), podemos

escrever o número de partículas para o hádron  $i$  como

$$N_i = n_i V = g_i V (\lambda_B)^{B_i} (\lambda_S)^{S_i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \exp\left(-\frac{E_i}{T_{fo}}\right), \quad (4.1)$$

onde  $\lambda_B \equiv \exp(\mu_{Bfo}/T_{fo})$ ,  $\lambda_S \equiv \exp(\mu_{Sfo}/T_{fo})$ ,  $g_i$  denota a degenerescência do hádron  $i$ ,  $m_i$  sua massa,  $V$  o volume do sistema,  $B_i$  o número bariônico,  $S_i$  a estranheza e  $E_i = \sqrt{m_i^2 + p^2}$ . Integrando nos ângulos a Eq. (4.1) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{g_i V}{2\pi^2} (\lambda_B)^{B_i} (\lambda_S)^{S_i} \underbrace{\int_0^\infty dp p^2 \exp\left(-\frac{\sqrt{m_i^2 + p^2}}{T_{fo}}\right)}_{T_{fo} m_i^2 K_2(m_i/T_{fo})} \\ &= \frac{g_i V T_{fo} m_i^2}{2\pi^2} (\lambda_B)^{B_i} (\lambda_S)^{S_i} K_2\left(\frac{m_i}{T_{fo}}\right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

no qual  $K_2$  é a função de Bessel modificada de ordem 2. Se levarmos em conta a contribuição de decaimentos, a multiplicidade total é escrita como

$$N_i^{tot} = N_i + \sum_j \Gamma_{ij} N_j, \quad (4.3)$$

onde  $\Gamma_{ij}$  é a taxa de decaimento do hádron  $j$  no hádron  $i$ .

A razão de partículas dependerá, então, de  $T_{fo}$  e  $\mu_{Bfo}$ . Analisando dados de WA85 (Tab. 4.1) para colisões S-W, pode-se procurar uma região no plano  $\mu_{Bfo} - T_{fo}$  que seja capaz de reproduzir esses dados. Como mostrado na Fig. 4.1 (gráfico à esquerda), somente com os parâmetros acima não é possível encontrar uma região que permita reproduzir todos os dados simultaneamente. Na comparação desse modelo térmico com o experimento WA85 assumiu-se, contudo, um completo equilíbrio químico para a produção de estranheza. No entanto, o tempo para os hádrons estranhos atingirem o equilíbrio químico pode ser muito maior que o tempo de vida da colisão. Para levar em conta esse fato, pode-se introduzir um outro parâmetro: o fator de saturação de estranheza\*  $\gamma_S$  [49, 50]

---

\*Essa quantidade com valor usualmente entre 0 e 1, mede o quão distante as partículas estranhas estão do equilíbrio químico

(apêndice B). Ele é introduzido multiplicando  $(\lambda_S)^{S_i}$  em (4.2) por  $(\gamma_S)^{|S_i|}$ . Assim, temos

$$N_i = \frac{g_i V T_{fo} m_i^2}{2\pi^2} (\lambda_B)^{B_i} (\gamma_S)^{|S_i|} (\lambda_S)^{S_i} K_2 \left( \frac{m_i}{T_{fo}} \right). \quad (4.4)$$

Agora com uma escolha apropriada do valor de  $\gamma_S$ , é possível encontrar uma região em  $\mu_{Bfo} - T_{fo}$  que reproduza simultaneamente os dados experimentais, como mostrado na Fig. 4.1 para  $\gamma_S = 0.7$  [44].

Razões	$2.3 < y < 2.8$ $1.0 < p_{\perp} < 3.0 \text{ GeV}$
$\bar{\Lambda}/\Lambda$	$0.20 \pm 0.01$
$\bar{\Xi}^-/\Xi^-$	$0.41 \pm 0.05$
$\Xi^-/\Lambda$	$0.09 \pm 0.01$
$\bar{\Xi}^-/\bar{\Lambda}$	$0.20 \pm 0.03$

Tabela 4.1: Valores experimentais para razões de partículas estranhas em colisões S-W (experimento WA85) [38].

Porém, a temperatura ( $\sim 200$  MeV) e o potencial químico bariônico ( $\sim 200$  MeV) encontrados correspondem a altas densidades de partículas (maiores que o valor da densidade da matéria nuclear), o que é inconsistente com a noção de freeze-out que, por definição, é o momento no qual as partículas deixam de interagir devido a diluição da matéria. Essa é uma das dificuldades que os modelos de freeze-out enfrentam. Uma proposta para superar essa dificuldade foi apresentada por G. D. Yen *et al.* [75], onde é considerado um modelo de gás hadrônico com interação entre as partículas simulada por uma correção de volume.

Esse problema também pode ser eliminado utilizando-se o modelo de emissão contínua, como veremos a seguir.

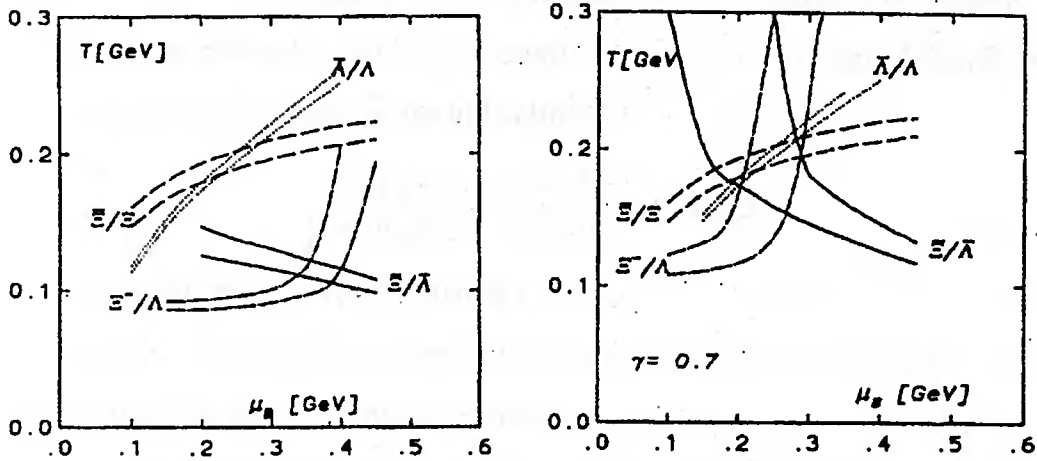


Figura 4.1: Região no plano  $\mu_B f_0 - T_{f_0}$  para dados de razões de partículas estranhas usando o modelo de freeze-out. À esquerda: sem a inclusão do parâmetro de saturação de estranheza  $\gamma_S$ ; não há uma região que permita reproduzir os dados. À direita:  $\gamma_S$  incluso; a região existe. Retirado de [44].

#### 4.1.2 Razões no modelo de emissão contínua

Nosso ponto de partida para estudar as razões de partículas estranhas usando a emissão contínua são as equações da hidrodinâmica mostradas no capítulo anterior, Eqs. (3.29) e (3.30).

$$\begin{aligned} \partial_t \varepsilon + \frac{1}{t} (\varepsilon + P) + \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \mathcal{F}) &= 0, \\ \partial_t n_B + \frac{n_B}{t} &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

EQUAÇÃO DE ESTADO

Como vimos, essas equações junto com uma equação de estado nos proporcionam a evolução do fluido representado pelo comportamento da temperatura  $T(t, \rho)$  e do potencial químico bariônico  $\mu_B(t, \rho)$ . Essas quantidades são necessárias para o cálculo do espectro de partículas Eq. (3.48)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dy p_\perp dp_\perp} &= \frac{2g}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \left\{ \int_0^R d\rho \rho m_\perp \cosh(\eta - y) \tau_F \mathcal{F}[T(\tau_F, \rho), \mu_B(\tau_F, \rho)] \right. \\ &+ \left. \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \tau p_\perp \cos(\phi) \rho_F \mathcal{F}[T(\tau, \rho_F), \mu_B(\tau, \rho_F)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$



Uma vez que o espectro depende dessas soluções, e como para cada diferente condição inicial temos uma diferente solução, podemos dizer que o espectro depende, então, da condição inicial para as equações da hidrodinâmica, ou seja,

$$\frac{d^2 N}{dy p_{\perp} dp_{\perp}} = \frac{d^2 N}{dy p_{\perp} dp_{\perp}}(T_0, \mu_{B0}), \quad (4.7)$$

onde  $T_0$  e  $\mu_{B0}$  são as condições iniciais para (4.5). Conseqüentemente, o número de partículas (que é a integral do espectro) também dependerá das condições iniciais.

Analogamente ao feito no caso de freeze-out, procuramos por uma região, agora no plano  $T_0$ - $\mu_{B0}$ , que permita reproduzir os dados de WA85 sobre bárions estranhos (tabela 4.1). Para isso, usamos inicialmente uma equação de estado para um gás ideal composto de todas as partículas com massa  $\lesssim 2$  GeV. Para cada conjunto de condições iniciais  $\{T_0, \mu_{B0}\}$  ou, equivalentemente,  $\{\varepsilon_0, n_{B0}\}$  segue-se o procedimento:

- resolve-se as equações da hidrodinâmica obtendo como solução  $\varepsilon(t, \rho)$  e  $n_B(t, \rho)$ ;
- inverte-se a equação de estado para ter  $T(t, \rho)$  e  $\mu_B(t, \rho)$  e usa-se essas soluções como “input” no cálculo do espectro da partícula desejada. O espectro é calculado na região de rapidez média, ou seja, em  $y = 0$ .
- uma vez que o espectro foi obtido, pôde-se integrá-lo levando-se em conta os cortes experimentais (conforme tabela 4.1) e os eventuais decaimentos, obtendo-se assim o número de partículas.

Com várias condições iniciais, podemos então construir as razões de partículas como funções de  $T_0$  e  $\mu_{B0}$ :

$$R_{\bar{\Lambda} \Lambda} = R_{\bar{\Lambda} \Lambda}(T_0, \mu_{B0}), \quad (4.8)$$

$$R_{\bar{\Xi}^- \Xi^-} = R_{\bar{\Xi}^- \Xi^-}(T_0, \mu_{B0}), \quad (4.9)$$

$$R_{\bar{\Xi}^- \Lambda} = R_{\bar{\Xi}^- \Lambda}(T_0, \mu_{B0}), \quad (4.10)$$

$$R_{\bar{\Xi}^- \bar{\Lambda}} = R_{\bar{\Xi}^- \bar{\Lambda}}(T_0, \mu_{B0}), \quad (4.11)$$

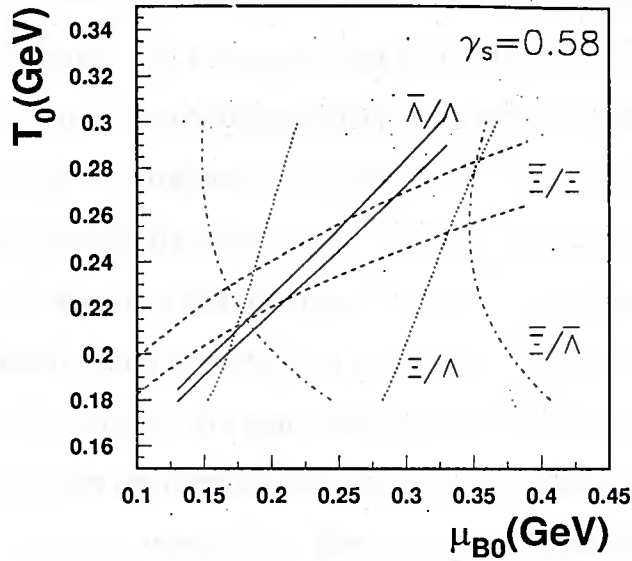


Figura 4.2: Região no plano  $\mu_{B0}-T_0$  que permite reproduzir os dados sobre razões de partículas estranhas do experimento WA85. Aqui não há correção de volume.

onde  $R_{XY}$  está indicando a razão  $X/Y$ . A busca das condições iniciais que reproduzem as razões é conseguida projetando no plano  $\mu_{B0}-T_0$  as curvas de níveis correspondentes aos limites inferior e superior dos dados experimentais. Assim, projetamos as curvas de níveis:  $R_{\bar{\Lambda}/\Lambda}(T_0, \mu_{B0}) = 0.19$ ,  $R_{\bar{\Lambda}/\Lambda}(T_0, \mu_{B0}) = 0.21$ ,  $R_{\Xi^-/\Xi^-}(T_0, \mu_{B0}) = 0.36$ ,  $R_{\Xi^-/\Xi^-}(T_0, \mu_{B0}) = 0.46$ ,  $R_{\Xi^-/\Lambda}(T_0, \mu_{B0}) = 0.08$ ,  $R_{\Xi^-/\Lambda}(T_0, \mu_{B0}) = 0.10$ ,  $R_{\Xi^-/\bar{\Lambda}}(T_0, \mu_{B0}) = 0.17$ ,  $R_{\Xi^-/\bar{\Lambda}}(T_0, \mu_{B0}) = 0.23$ . No entanto, sem levar em conta o fator de saturação de estanhiza não somos capazes de estabelecer uma única região que reproduza todas as razões simultaneamente, exatamente como acontece no modelo de freeze-out. Em nosso caso, a priori,  $\gamma_S$  depende da localização no espaço-tempo  $x$ . Contudo, como as condições iniciais dominam a forma e normalização do espectro de partículas pesadas em virtude da forte supressão térmica (particularmente para grandes  $m_{\perp}$ ), assumimos

$$\left. \frac{d^2 N}{dy p_{\perp} dp_{\perp}} \right|_{y=0} = \gamma_S^{|\lambda|}(\tau_0) \left. \frac{d^2 N_{eq}}{dy p_{\perp} dp_{\perp}} \right|_{y=0}, \quad (4.12)$$

com  $d^2 N_{eq}/(dy p_{\perp} dp_{\perp})$  dado por (4.6).

Como resultado, para  $\gamma_S(\tau_0) = 0.58$  obtemos uma região no plano  $\mu_{B0}-T_0$  onde todas

as razões são reproduzidas. Isso é mostrado na figura 4.2. Note, no entanto, que no caso de emissão contínua buscamos condições iniciais que reproduzem as razões, enquanto no caso anterior buscou-se os parâmetros no freeze-out. No nosso caso,  $\mu_{B0}$  e  $T_0$  também correspondem a altas densidades de partículas. Porém, nesse caso, isso é bastante razoável, pois esses são valores quando o gás hadrônico começou sua expansão hidrodinâmica.

Embora o resultado acima permita uma comparação com os resultados do freeze-out, ele não é fisicamente completo: até aqui negligenciamos o fato de que as partículas têm interações que não podem ser desprezadas quando a densidade é alta, como próximo das condições iniciais. Isso é incorporado, aqui, de modo fenomenológico via correção de volume.

Usamos o modelo de correção de volume termodinamicamente consistente das referências [45, 46], onde as interações entre hádrons são modeladas atribuindo-se um volume a essas partículas. A densidade de partículas corrigida tem a forma

$$n_i^{vol}(T, \mu_i) = \frac{n_i(T, \tilde{\mu}_i)}{1 + \sum_j v_j n_j(T, \tilde{\mu}_j)}, \quad (4.13)$$

onde  $n_i$  são as densidades de partículas para o gás ideal e  $v_j$  são parâmetros fenomenológicos correspondentes aos volumes dos hádrons. No nosso caso, assumimos um mesmo volume para todas as partículas. Os potenciais químicos modificam-se de acordo com

$$\tilde{\mu}_i = \mu_i - v_i P^{vol}, \quad (4.14)$$

onde  $P^{vol} = P^{vol}(T, \mu_B)$  é a pressão total do sistema hadrônico calculado pela equação

$$P^{vol}(T, \mu_B) = \sum_i P_i(T, \tilde{\mu}_i) \quad (4.15)$$

em termos da pressão parcial  $P_i$  do gás ideal calculado no potencial químico modificado pela equação (4.14). No apêndice C mostramos esse modelo de correção de volume em mais detalhes.

Para o freeze-out essas correções se cancelam entre numerador e denominador nas razões de partículas podendo, então, serem ignoradas [37]. Mas no caso de emissão

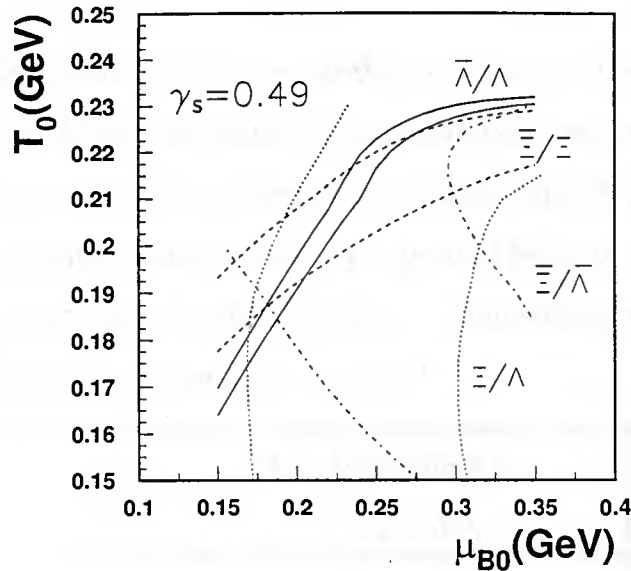


Figura 4.3: O mesmo que a Fig. 4.2 com correção de volume.

contínua, como estamos considerando toda a história do fluido para obter o número de partículas (e então as razões), essa correção deve ser incluída.

Usando essa correção de volume conseguimos valores menores para a temperatura inicial:  $T_0 \sim 190$  MeV; contra  $T_0 \sim 210$  MeV para o caso sem correção de volume<sup>†</sup>.  $\mu_{B0}$ , no entanto, não sofre mudanças significativas. O valor da temperatura para a transição de fase quark-hádron previsto pelas simulações da QCD na rede encontram-se ao redor de 150 – 200 MeV. Porém, essa temperatura corresponde a um gás em completo equilíbrio térmico e químico, o que não é necessariamente verdadeiro nem nas colisões nucleares de altas energias, nem no nosso caso onde  $\gamma_s \neq 1$ .

Usando como condições iniciais valores da região de superposição na Fig. 4.3 (em particular o valor  $T_0 = 190$  MeV e  $\mu_{B0} = 190$  MeV) analisamos, ainda, outras razões do experimento WA85 [51]. A razão  $\bar{\Omega}^-/\Omega^-$  está de acordo com a barra de erro experimental; na verdade, em razão da grande incerteza experimental sobre essa razão, quaisquer valores da região na Fig. 4.3 são capazes de reproduzi-la. O valor para  $\Omega/\Xi$  margea

<sup>†</sup>Esses são valores mais baixos da temperatura nas regiões encontradas em ambos os casos

o valor experimental inferior. As razões envolvendo kaons, com exceção de  $K^-/K^+$  cuja concordância é razoável, não apresentam bons resultados. Isso pode ser consequência do fato de que os kaons, por não terem massa muito grande, dependem da história do fluido (e não somente das condições iniciais). Assim, a suposição feita em (4.12),  $\gamma_S(x) \simeq \gamma_S(\tau_0) =$  constante, pode não ser uma boa aproximação. A comparação entre o modelo teórico e os valores experimentais é mostrada na tabela 4.2.

Razão	Valor Experimental ( $2.5 < y < 3.0$ )	Valor Teórico (Emissão Contínua)
$\overline{\Omega}^-/\Omega^-$	$0.57 \pm 0.41$ , ( $m_\perp > 2.3$ GeV)	0.67
$(\Omega^- + \overline{\Omega}^-) / (\Xi^- + \overline{\Xi}^-)$	$1.7 \pm 0.9$ , ( $m_\perp > 2.3$ GeV)	0.70
$K_S^0/\Lambda$	$1.4 \pm 0.1$ , ( $1.0 < p_\perp < 2.5$ GeV)	0.51
$K_S^0/\overline{\Lambda}$	$6.4 \pm 0.4$ , ( $1.0 < p_\perp < 2.5$ GeV)	2.45
$K^-/K^+$	$0.60 \pm 0.05$ , ( $p_\perp > 0.9$ GeV)	0.70

Tabela 4.2: Comparação entre os valores preditos pelo modelo de emissão contínua com razões do experimento WA85.

## 4.2 Espectros

Podemos uma vez mais utilizar as condições iniciais fixadas pelas razões de partículas estranhas e realizar comparações com outros dados; por exemplo, dados sobre o espectro de massa transversal, que têm sido obtidos por diversos experimentos. Algumas conclusões mencionadas no capítulo 3 a respeito dos espectros são qualitativamente corroboradas por esses experimentos, a saber: NA34, NA35 e EMU05 parecem concordar sobre a concavidade do espectro do pión [52]; NA35, NA36 e WA85 obtiveram, para o espectro de partículas pesadas, uma inclinação aproximadamente constante [53]. Nas figuras 4.4, 4.5 e 4.6 vê-se que o resultado obtido pelo modelo é razoavelmente bom. Na figura 4.4,



mostramos dados de colisões S-S (NA35) e o resultado do modelo de emissão contínua para  $T_0 = 200$  MeV e  $\mu_{B0} = 200$  MeV<sup>†</sup>. Os espectros para  $K_S^0$ ,  $\Lambda$ , “ $p$ ” e  $\pi$ , esse último na região de grandes  $p_\perp$ , são bem reproduzidos. Na região de pequenos  $p_\perp$  o espectro para píons está abaixo dos dados. Isso poderia ser melhorado se levássemos em conta os decaimentos de partículas que contribuiriam com mais píons nessa região por causa dos decaimentos de partículas pesadas em píons de pequeno  $p_\perp$ , como mostrado por Sollfrank *et al.* [77]. Na figura 4.5 e 4.6 mostramos a comparação com dados de S-S e S-W, respectivamente, do experimento WA85 para  $T_0 = 200$  MeV e  $\mu_{B0} = 200$  MeV. A predição para os dados de S-S é razoável, mas para S-W a inclinação deveria ser menor, o que se obteria com uma temperatura um pouco maior (porém ainda dentro da região que reproduz as razões). Em outras palavras, as condições iniciais para S-S e S-W deveriam ser ligeiramente diferentes.

O modelo de freeze-out também pode reproduzir esses dados: Lee *et al.* [54] utilizam-se de um modelo com expansão esférica e Ornik *et al.* [55] usam um modelo com expansão longitudinal e transversal, além de incluírem decaimentos. Em ambas as descrições um fluxo transversal é necessário para reproduzir os dados, diferentemente do caso de emissão contínua. Em nosso caso, o valor mínimo da temperatura inicial  $T_0$  ( $\sim 200$  MeV) já se encontra próximo da temperatura efetiva extraída dos espectros. Se houver expansão transversal,  $T_0$  deve ser escolhido com um valor menor. Enquanto para dados de razões de partículas o cenário de emissão contínua possa ser preferível (já que ele evita a dificuldade de se ter altas densidades de partículas no momento de freeze-out), para dados de espectro em massa transversal não parece ser possível dizer qual mecanismo proporciona a melhor descrição.

---

<sup>†</sup>Os dados de NA35 são apresentados em um grande intervalo de rapidez, enquanto nossos cálculos são realizados na rapidez média; assim devemos ser cuidadosos com essa comparação



### 4.3 Abundâncias

O modelo de emissão contínua pode ainda proporcionar uma solução para outro problema, a saber: a impossibilidade dos modelos de freeze-out com gás hadrônico de reproduzirem simultaneamente a quantidade de píons e dados sobre estranheza [69, 41, 43]; esses modelos predizem um número menor de píons do que o observado experimentalmente. Vários mecanismos foram sugeridos para contornar essa dificuldade: Cleymans *et al.* [70] sugeriram um freeze-out seqüencial, onde hádrons estranhos deixam de interagir antes do que os hádrons não-estranhos; Letessier *et al.* [42] sugeriram a formação de um plasma hadronizando repentinamente; Rafelski [71] introduziu a noção de equilíbrio relativo para os quarks não-estranhos (além daquele para os quarks estranhos); Gorenstein *et al.* [75, 76] consideraram uma correção de volume para píons menor do que das outras partículas; outra possibilidade é a inclusão de um potencial químico para os píons.

Verificamos que no cenário de emissão contínua podemos ter uma produção de píons maior do que no caso de freeze-out. Isso acontece pois a temperatura inicial no nosso caso é similar a temperatura de freeze-out, ou seja,  $T_0 \sim T_{fo}$ . Isso significa que as abundâncias de partículas pesadas (que são emitidas nos estágios iniciais da colisão), serão parecidas nos dois modelos. Para os píons, teremos, além daqueles emitidos em  $T_0$  (similar ao caso de freeze-out), uma fonte adicional emitida para  $T < T_0$  (o que não acontece no freeze-out) já que eles não são suprimidos termicamente.

Comparamos os resultados da emissão contínua com dados experimentais de NA35 (colisão S-S) em rapidez média. Isso é mostrado na tabela 4.3 para as condições iniciais  $T_0 = 184$  MeV,  $\mu_{B0} = 90$  MeV e  $\gamma_S = 1.3$ . Nota-se que as condições iniciais necessárias para reproduzir esses dados são bastante diferente daquelas que reproduzem as razões de WA85, em particular o valor  $\gamma_S = 1.3$ . Uma situação similar de  $\gamma_S > 1$  foi encontrado por Sollfrank *et al.* [41], embora não fossem capazes de dar conta do número de píons. Nesse trabalho, argumentou-se que  $\gamma_S > 1$  poderia ser resultado da imposição da condição

	Valor experimental	Emissão contínua	
$\Lambda$	$1.26 \pm 0.22$	0.96	$(p_{\perp} > 0.5 \text{ GeV})$
$\bar{\Lambda}$	$0.44 \pm 0.16$	0.29	$(p_{\perp} > 0.5 \text{ GeV})$
$p - \bar{p}$	$3.2 \pm 1.0$	3.12	$(p_{\perp} > 0 \text{ GeV})$
$h^{-}$	$26 \pm 1$	27	$(p_{\perp} > 0 \text{ GeV})$
$K_S^0$	$1.3 \pm 0.22$	1.23	$(p_{\perp} > 0.62 \text{ GeV})$

Tabela 4.3: Comparação dos resultados de emissão contínua com dados experimentais para colisões S-S da colaboração NA35. Condições iniciais usadas:  $T_0 = 184 \text{ MeV}$  e  $\mu_{B0} = 90 \text{ MeV}$ ,  $\gamma_S = 1.3$

de estranheza nula, que pode não ser válida para rapidez média. Isso de fato tem sido sugerido por N. Xu usando modelos microscópicos (RQMD) para colisões Pb-Pb (ver Fig. 4.7).

O fato do modelo de emissão contínua poder reproduzir a abundância de píons é importante, pois, usualmente atribui-se o excesso de píons a uma maior entropia, que seria um sinal da formação do QGP [42].

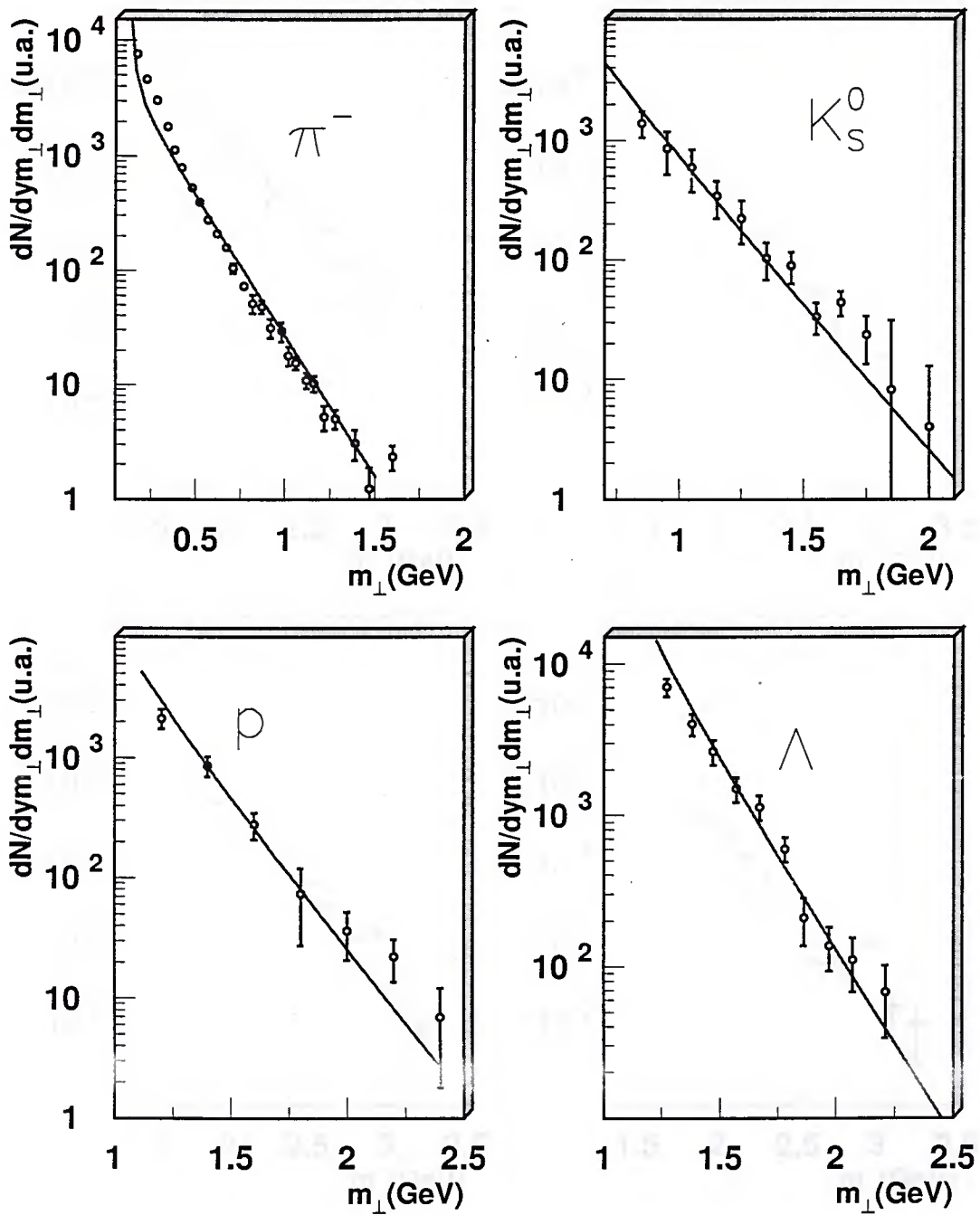


Figura 4.4: Espectros em massa transversal calculado com o modelo de emissão contínua para  $T_0 = 200$  MeV,  $\mu_{B0} = 200$  MeV,  $R = 3.6$  fm e  $\langle \sigma_{v_{rel}} \rangle \sim 1$  fm<sup>2</sup>. Os dados experimentais são para colisões S-S (NA35), para todo o intervalo de rapidez.

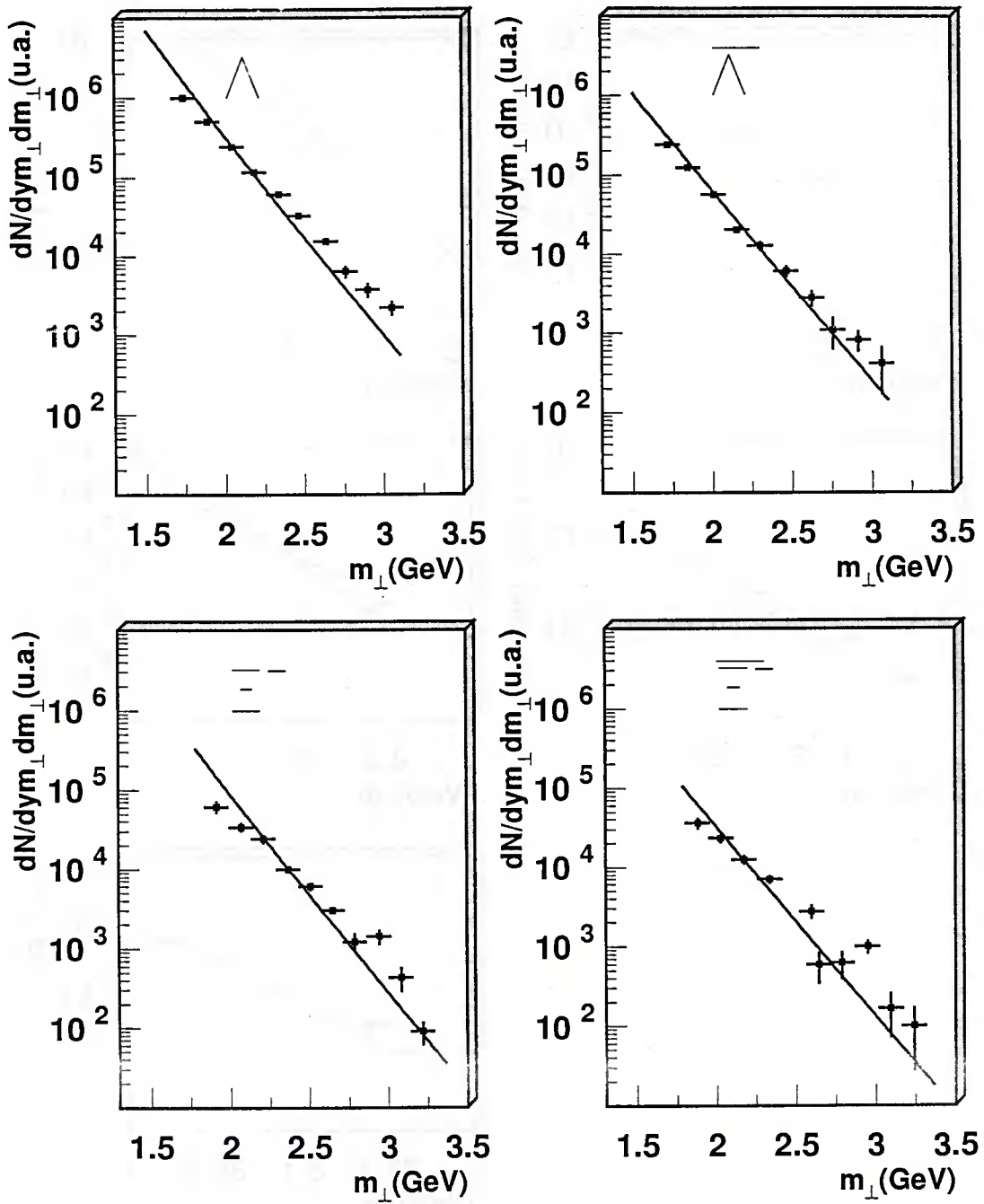


Figura 4.5: Espectros em massa transversal calculado com o modelo de emissão contínua para  $T_0 = 200$  MeV,  $\mu_{B0} = 200$  MeV,  $R = 3.6$  fm e  $\langle \sigma v_{rel} \rangle \sim 1$  fm<sup>2</sup>. Os dados experimentais são para colisões S-S (WA85), em rapidez média.

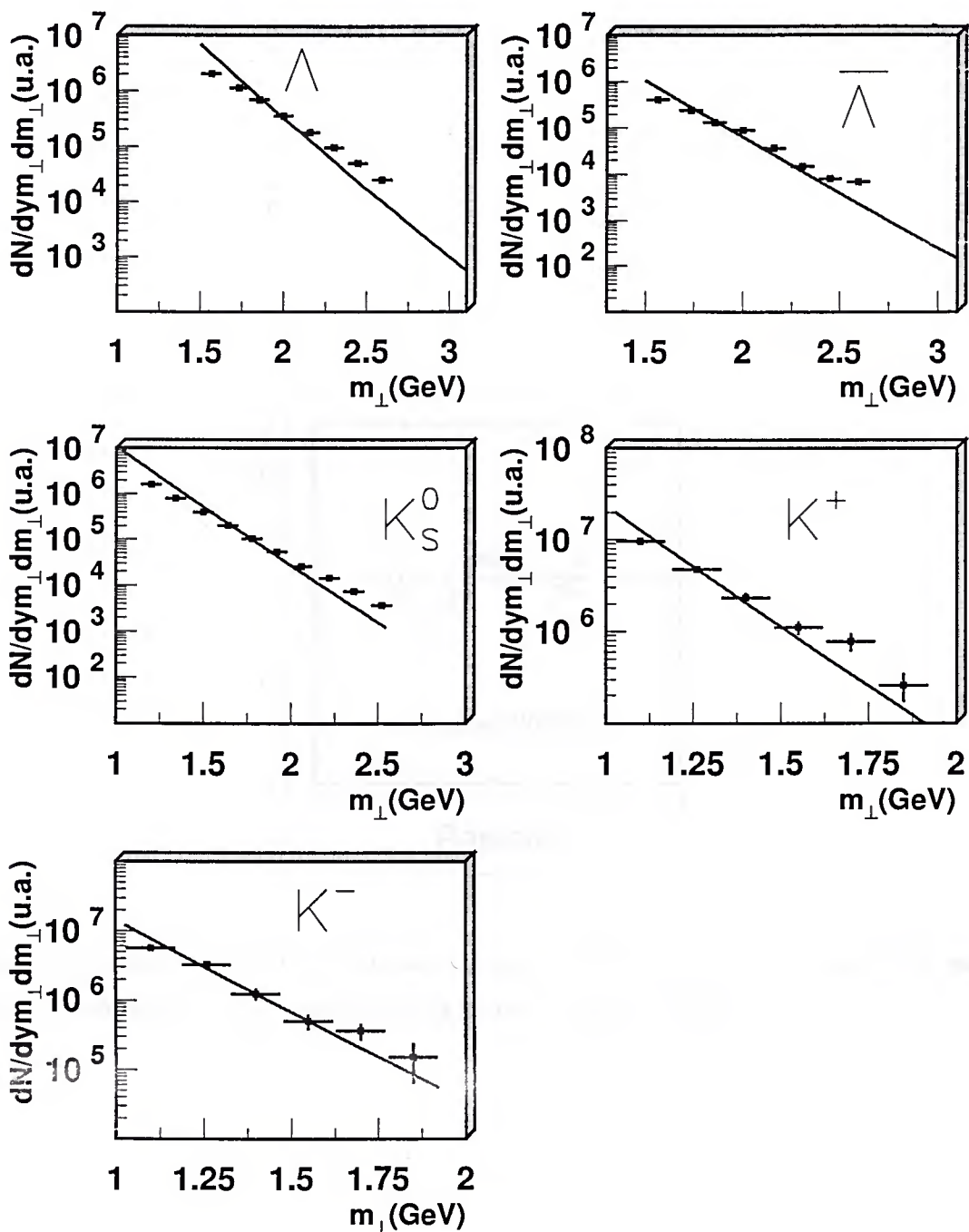


Figura 4.6: Espectros em massa transversal calculado com o modelo de emissão contínua para  $T_0 = 200$  MeV,  $\mu_{B0} = 200$  MeV,  $R = 3.6$  fm e  $\langle \sigma v_{rel} \rangle \sim 1$  fm<sup>2</sup>. Os dados experimentais são para colisões S-W (WA85), em rapidez média.

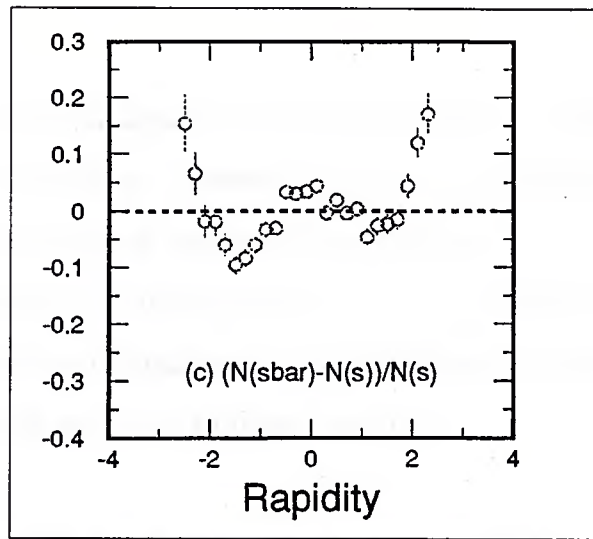


Figura 4.7: Resultado do modelo RQMD para colisões Pb-Pb. Diferença entre o número de quarks estranhos e anti-estranhos ( $s - \bar{s}$ ) como função da rapidez. Extraído de [72]



## Comparações com dados experimentais. Projéteis pesados

Neste capítulo, compararemos os resultados obtidos usando o modelo de emissão contínua com dados de colisões Pb-Pb. Determinaremos as condições iniciais necessárias para reproduzir as razões de partículas estranhas (experimento WA97) de forma análoga ao feito no capítulo anterior, e com os resultados obtidos, estudaremos a dependência da temperatura aparente com a massa da partícula. Mostraremos, também, alguns espectros. Parte deste capítulo está em [32].

### 5.1 Hidrodinâmica com expansão transversal

No cenário hidrodinâmico os efeitos da expansão transversal do fluido podem ser vistos através dos espectros em massa transversal. Supondo a existência de tal fluxo transversal, todas as partículas estão sujeitas a uma mesma velocidade coletiva em um ponto dado e, como resultado, partículas com massas maiores adquirirão um momento transversal maior do que aquelas com massas menores. Assim, as partículas mais massivas mostram-se mais sensíveis à existência de um fluxo transversal.

Uma maneira conveniente de observar esse efeito é examinar a temperatura aparente\* como função da massa da partícula. Na tabela 5.1 mostra-se essa temperatura para

---

\*Temperatura aparente é o inverso da inclinação do espectro em massa transversal. Ela contém informações tanto da contribuição térmica como da contribuição coletiva

Partícula	Pb-Pb		S-S	
	NA49 (preliminar)	NA44 [56]	NA35	NA44 [56]
$\pi^+$	188±6	156±6		148±4
$\pi^-$	193±3	154±8	197±14 [57]	148±4
$K^+$	225±13	234±6	227±15 [58]	180±8
$K^-$	213±6	235±7	190±22 [59]	180±7
$K_s^0$	223±13		210±16 [58]	
$p$	302±18	289±7	180±14 [57]	208±8
$\bar{p}$	293±24	278±9	184±14 [60]	190±7
$\Lambda$	293±11		204±17 [58]	
$\bar{\Lambda}$	289±15		180±24 [60]	

Tabela 5.1: Temperatura efetiva em MeV para vários tipos de partículas em colisões centrais S-S e Pb-Pb (experimentos NA35, NA44 e NA49).

vários tipos de partículas em colisões centrais S-S e Pb-Pb dos experimentos NA35, NA44 e NA49. Pode-se observar que a tendência no aumento da temperatura aparente com a massa é mais acentuada no sistema Pb-Pb do que no sistema S-S, indicando uma maior influência do fluxo transversal em sistemas pesados.

Assim, no nosso estudo sobre dados de sistema pesados (Pb-Pb), levamos em conta a expansão transversal do fluido. Usamos, no entanto, a seguinte aproximação : não consideramos emissão contínua nas equações da hidrodinâmica. Isso se deve a observações feitas no caso de sistemas leves, S-S e S-W, onde as soluções das equações da hidrodinâmica com e sem emissão contínua levam a poucas diferenças, principalmente em se tratando

de razões de partículas<sup>†</sup>. Essa simplificação, no entanto, refere-se somente as equações da hidrodinâmica; o espectro deverá ainda ser calculado de acordo com o proposto pela emissão contínua.

Novamente usamos a descrição de invariância por boost, de forma que a 4-velocidade do fluido será agora [78, 79]

$$u^\mu = \gamma_\perp \left( \frac{t}{\tau}, \mathbf{v}_\perp, \frac{z}{\tau} \right), \quad (5.1)$$

onde  $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$ ,  $\gamma_\perp = (1 - \mathbf{v}_\perp^2)^{-1/2}$ , e  $\mathbf{v}_\perp$  é a velocidade transversal. Assim, usando para o tensor momento-energia  $T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P$ , as equações de conservação

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (5.2)$$

$$D_\mu (n_B u^\mu) = 0, \quad (5.3)$$

são escritas, na região de rapidez média ( $z = 0$ ), como

$$\partial_t E + \partial_\rho [v_\perp (E + P)] + (E + P) \left( \frac{v_\perp}{\rho} + \frac{1}{t} \right) = 0, \quad (5.4)$$

$$\partial_t M + \partial_\rho (M v_\perp + P) + M \left( \frac{v_\perp}{\rho} + \frac{1}{t} \right) = 0, \quad (5.5)$$

$$\partial_t R + \partial_\rho (R v_\perp) + R \left( \frac{v_\perp}{\rho} + \frac{1}{t} \right) = 0, \quad (5.6)$$

onde definimos as quantidades

$$E = (\varepsilon + P)\gamma_\perp^2 - P, \quad (5.7)$$

$$M = (\varepsilon + P)\gamma_\perp^2 v_\perp, \quad (5.8)$$

$$R = \gamma_\perp n_B. \quad (5.9)$$

Para resolvermos essas equações para  $E$ ,  $M$  e  $R$  devemos conhecer um perfil inicial para a velocidade  $v_\perp$  e uma equação de estado de onde tiramos a pressão  $P(n_B, \varepsilon)$ . Como a equação de estado depende de  $n_B$  e  $\varepsilon$  temos que, a cada passo na solução numérica das

<sup>†</sup>A rigor, não há nenhum indicativo de que esse comportamento se repita na presença de expansão transversal. Essa verificação deverá ser efetuada em futuros estudos.

equações diferenciais, realizar transformações para obter  $n_B$ ,  $\varepsilon$  e  $v_\perp$  de  $E$ ,  $M$  e  $R$ . Essas transformações são obtidas de (5.7)-(5.9), notando-se que

$$\varepsilon = E - Mv_\perp, \quad (5.10)$$

$$n_B = R\sqrt{1 - v_\perp^2}. \quad (5.11)$$

Com essas equações,  $\varepsilon$  e  $n_B$  podem ser expressos em termos de  $E$ ,  $M$ ,  $R$  e  $v_\perp$ . Para se obter a velocidade transversal para um dado conjunto de valores  $E$ ,  $M$  e  $R$ , usamos a definição de  $M$ , Eq. (5.8), escrita na forma

$$M = (E + P)v_\perp. \quad (5.12)$$

Usando a equação de estado devemos, então, resolver a seguinte equação não linear para  $v_\perp$ :

$$v_\perp = \frac{M}{E + P(E - Mv_\perp, R\sqrt{1 - v_\perp^2})}. \quad (5.13)$$

Resolvemos as equações (5.4), (5.5) e (5.6) numericamente usando o esquema de Lax-Wendroff de dois passos (ver apêndice E), que tem a vantagem de ser um método explícito e de ordem dois no tempo e no espaço. A figura 5.1 mostra o resultado da solução numérica dessas equações para uma equação de estado de um gás ideal com partículas com massa  $\approx 2$  GeV. Como condições iniciais usamos as distribuições

$$\varepsilon(\rho) = \frac{\varepsilon_0}{e^{(\rho-R)/\delta} + 1}, \quad (5.14)$$

$$n_B(\rho) = \frac{n_B^0}{e^{(\rho-R)/\delta} + 1}, \quad (5.15)$$

$$\frac{v_\perp(\rho)}{c} = 1 - \frac{1}{e^{(\rho-R)/\delta} + 1}, \quad (5.16)$$

onde  $R$  é o raio do núcleo considerado (no nosso caso Pb) e  $\delta$  é a espessura da superfície ( $\delta \sim 0.5$  fm foi usado nesse exemplo).  $\varepsilon_0$  e  $n_B^0$  foram calculados com  $T_0 = 200$  MeV e  $\mu_{B0} = 200$  MeV.

A figura mostra o comportamento da densidade de energia, densidade bariônica, temperatura, potencial químico bariônico e velocidade transversal como função da coordenada radial para vários tempos. São essas soluções  $T$ ,  $\mu_B$  e  $v_\perp$ , que serão necessárias para o cálculo do espectro.

## 5.2 Fórmula para o espectro

Com a inclusão da expansão transversal, a fórmula para o espectro apresentada na equação (3.48) sofre duas modificações : a primeira é na distribuição  $f_{int}$  e é causada pela nova forma da velocidade do fluido dada em (5.1); a segunda é na probabilidade, que agora será dada por

$$\mathcal{P}_\perp(\tau, \rho, \eta, \phi_p - \phi, v_\perp = v \sin \theta_p, v_z = v \cos \theta_p) = \exp \left[ - \int_\tau^\infty \langle \sigma v_{rel} \rangle n(\tau', \varrho(\tau')) d\tau' \right], \quad (5.17)$$

onde  $n(\tau', \varrho(\tau'))$  é a densidade total de partículas obtida da solução das equações da hidrodinâmica, e

$$\varrho(\tau') = \sqrt{v_\perp^2 (t' - t)^2 + 2v_\perp (t' - t) \rho \cos(\phi_p - \phi) + \rho^2}, \quad (5.18)$$

com

$$t' = \frac{\tau v_z (v_z \cosh \eta - \sinh \eta) - \sqrt{\tau'^2 (1 - v_z^2) + \tau^2 (v_z \cosh \eta - \sinh \eta)^2}}{-1 + v_z^2}, \quad (5.19)$$

$$t = \tau \cosh \eta. \quad (5.20)$$

Assim, temos agora para o espectro:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dy p_\perp dp_\perp} &= \frac{2g}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \\ &\times \left\{ \int_0^R d\rho \rho m_\perp \cosh(\eta - y) \tau_F \mathcal{F}_\perp [T(\tau_F, \rho), \mu_B(\tau_F, \rho), v_\perp(\tau_F, \rho)] \right. \\ &\left. + \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \tau p_\perp \cos(\phi) \rho_F \mathcal{F}_\perp [T(\tau, \rho_F), \mu_B(\tau, \rho_F), v_\perp(\tau, \rho_F)] \right\}. \quad (5.21) \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{F}_\perp [T(\tau, \rho), \mu_B(\tau, \rho), v_\perp(\tau, \rho)] = \left\{ \exp [(m_\perp \gamma_\perp(\tau, \rho) \cosh(\eta - y) - p_\perp v_\perp(\tau, \rho) \gamma_\perp(\tau, \rho) \cos(\phi) - B\mu_B(\tau, \rho) - S\mu_S(\tau, \rho)) / T(\tau, \rho)] + \Theta \right\}^{-1}, \quad (5.22)$$

sendo  $\tau_F$  e  $\rho_F$  definido como antes

$$\mathcal{P}_\perp(\tau_F, \rho, \eta, \phi_p - \phi, v_\perp = v \sin \theta_p, v_z = v \cos \theta_p) = 0.5 \quad (5.23)$$

$$\mathcal{P}_\perp(\tau, \rho_F, \eta, \phi_p - \phi, v_\perp = v \sin \theta_p, v_z = v \cos \theta_p) = 0.5 \quad (5.24)$$

### 5.3 Razões de partículas

Analogamente ao feito para projéteis leves, podemos buscar conjuntos de condições iniciais capazes de reproduzir as razões de partículas estranhas do experimento WA97 (colisões Pb-Pb) mostradas na tabela 5.2. A figura 5.2 mostra que para  $\gamma_S(\tau_0) \simeq 0.7$  encontramos

Razões	$2.4 < y < 3.4$ $p_\perp > 0 \text{ GeV}$
$\bar{\Lambda}/\Lambda$	$0.128 \pm 0.012$
$\bar{\Xi}^-/\Xi^-$	$0.266 \pm 0.028$
$\Xi^-/\Lambda$	$0.093 \pm 0.007$
$\bar{\Xi}^-/\bar{\Lambda}$	$0.195 \pm 0.023$

Tabela 5.2: Valores experimentais para razões de partículas estranhas em colisões Pb-Pb (experimento WA97) [61].

uma região no plano  $T_0 - \mu_{B0}$  a saber,  $220 < T_0 < 260 \text{ MeV}$  e  $175 < \mu_{B0} < 275 \text{ MeV}$ , onde reproduzimos os dados. A temperatura inicial obtida é, no entanto, alta. Podemos obter um resultado mais razoável se usarmos uma equação de estado com correção de volume, como feito no caso de projéteis leves.



## 5.4 Predições para a temperatura aparente

Os dados anunciados pelo experimento NA49 sobre a temperatura aparente de partículas como  $\pi^+$ ,  $K^+$ ,  $p$ ,  $\phi$ ,  $\Lambda$  e até mesmo  $\Xi^-$  [62, 63, 64] mostram que ela aumenta, de forma aproximadamente linear, com a massa da partícula. Medições do experimento WA97 para  $\Omega$  [61] mostraram, no entanto, que essa partícula não segue o mesmo comportamento que as demais, ou seja, a correspondente temperatura aparente para o  $\Omega$  ( $T \sim 250$  MeV) é mais baixa do que seria esperado, como mostrado na figura 5.3.

Cenários hidrodinâmicos com freeze-out apresentam dificuldades em reproduzir essa temperatura baixa do  $\Omega$ , sendo capazes apenas de predizerem um aumento linear da temperatura com a massa da partícula [65]. Já modelos microscópicos como o RQMD<sup>†</sup> são capazes de reproduzir corretamente esses dados (ver figura 5.4) baseando-se no fato de que partículas multi-estranhas, como o  $\Omega$ , desacoplam-se nos estágios iniciais da colisão em altas densidades de energia [65].

Testamos a predição do modelo de emissão contínua para a temperatura aparente como função da massa escolhendo como condições iniciais os valores  $T_0 = 200$  MeV e  $\mu_{B0} = 200$  MeV. Com essas condições iniciais resolvemos as equações da hidrodinâmica (5.4)-(5.6) e com as soluções calculamos os espectros em massa transversal  $[dN/(m_{\perp} dm_{\perp})]_{y=0}$  para as diferentes espécies hadrônicas  $\pi^+$ ,  $K^+$ ,  $p$ ,  $\phi$ ,  $\Lambda$ ,  $\Xi^-$  e  $\Omega + \bar{\Omega}$ . Uma vez tendo os espectros, ajustamos as curvas pela função

$$\frac{dN}{m_{\perp} dm_{\perp}} \propto \exp\left(-\frac{m_{\perp}}{T_{ap}}\right), \quad (5.25)$$

onde  $T_{ap}$  é a temperatura aparente (parâmetro a ser ajustado).

Primeiramente, fizemos os cálculos com a escolha  $\langle\sigma v_{rel}\rangle \equiv \langle\sigma v_{rel}\rangle_{\pi\pi} = 1$  fm<sup>2</sup> para todas as partículas. O resultado desse procedimento é mostrado na figura 5.5.a. Notamos que  $\Lambda$  e, principalmente,  $p$  e  $\Omega$  não têm suas temperaturas aparentes reproduzidas. Tentamos melhorar nosso resultado estimando a seção de choque para prótons usando

<sup>†</sup>Relativistic Quantum Molecular Dynamics [66].

o modelo de contagem de quarks [80] onde pode-se estimar a seção de choque em interações hádron-hádron em altas energias considerando aditivamente as contribuições dos quarks constituintes. Assim,  $\sigma(\pi p) = 6\sigma(qq)$  e  $\sigma(\pi\pi) = 4\sigma(qq)$ , de modo que escrevemos  $\sigma_{\pi p} = \frac{3}{2}\sigma_{\pi\pi}$ . Para  $\Omega$  utilizamos  $\sigma_{\pi\Omega} = \frac{1}{2}\sigma_{\pi p}$  conforme afirmado em [82], e para  $\Lambda$  fazemos a escolha  $\sigma_{\Lambda\pi} = 1.2\sigma_{\pi\pi}$ . Utilizando esses novos valores como aproximação para os  $\langle\sigma v_{rel}\rangle$ , conseguimos reproduzir todos os dados, como mostrado na figura 5.5.b

Queremos ressaltar, porém, que é necessário fazer um tratamento mais cuidadoso da velocidade relativa  $v_{rel}$ , dos valores médios  $\langle\sigma v_{rel}\rangle$  e, também, incluir uma dependência na seção de choque da energia no centro de massa.

## 5.5 Predições para os espectros

Podemos continuar nosso teste de autoconsistência do modelo de emissão contínua usando as mesmas condições iniciais de antes ( $T_0 = 200$  MeV,  $\mu_{B0} = 200$  MeV e as seções de choque mencionadas acima) e comparar o espectro em massa transversal calculado com a equação (5.21) com dados experimentais. Na figura 5.6, mostramos os espectros para  $\Lambda$  e  $\bar{\Lambda}$  e os dados do experimento NA49 [64]. A figura 5.7 mostra os espectros para  $\Xi$  e  $\bar{\Xi}$  com dados experimentais de WA97 [61]. A concordância é razoável, exceto para  $\bar{\Xi}$ . Note que isso não é um ajuste de mínimos quadrados.

Isso é um fato importante, pois, embora se esperasse uma forte supressão térmica para  $\Lambda$ ,  $\bar{\Lambda}$ ,  $\Xi$  e  $\bar{\Xi}$ , isto é, que essas partículas fossem emitidas nos estágios iniciais da colisão com  $T_{ap} \sim T_0$ , a expansão transversal consegue impulsionar as partículas de  $p_{\perp}$  pequeno até regiões de  $p_{\perp}$  grande, levando a uma temperatura aparente alta. Porém, para certas partículas como  $\bar{\Xi}$ , o espectro não é tão bom. Isso talvez assinala a necessidade de um tratamento hidrodinâmico mais elaborado, ou melhorar outros pontos do modelo, como por exemplo as seções de choque.

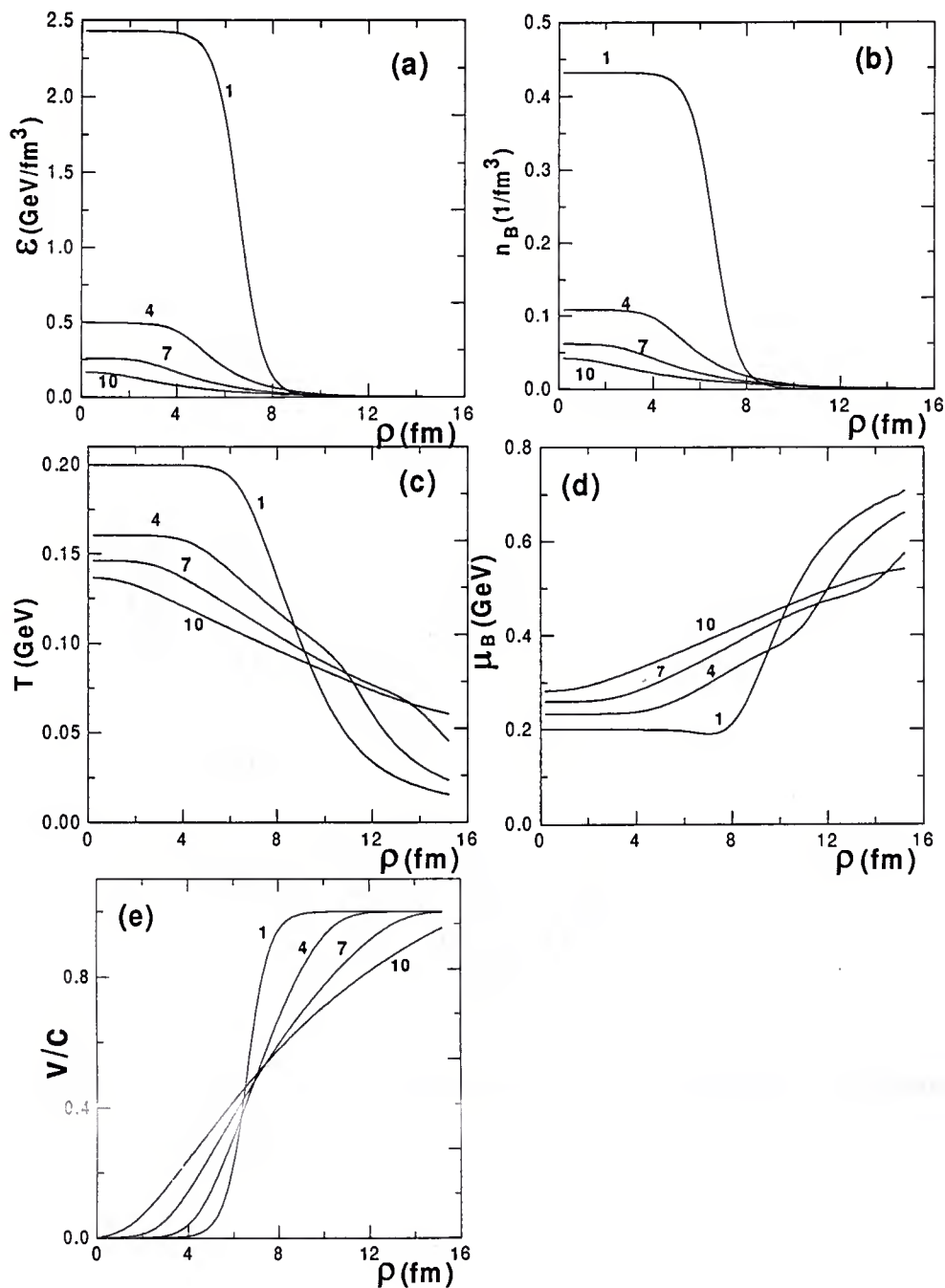


Figura 5.1: (a) Densidade de energia, (b) densidade bariônica, (c) temperatura, (d) potencial químico bariônico e (e) velocidade transversal como função da coordenada radial para vários tempos. Os números rotulando cada curva correspondem aos valores do tempo em fm.

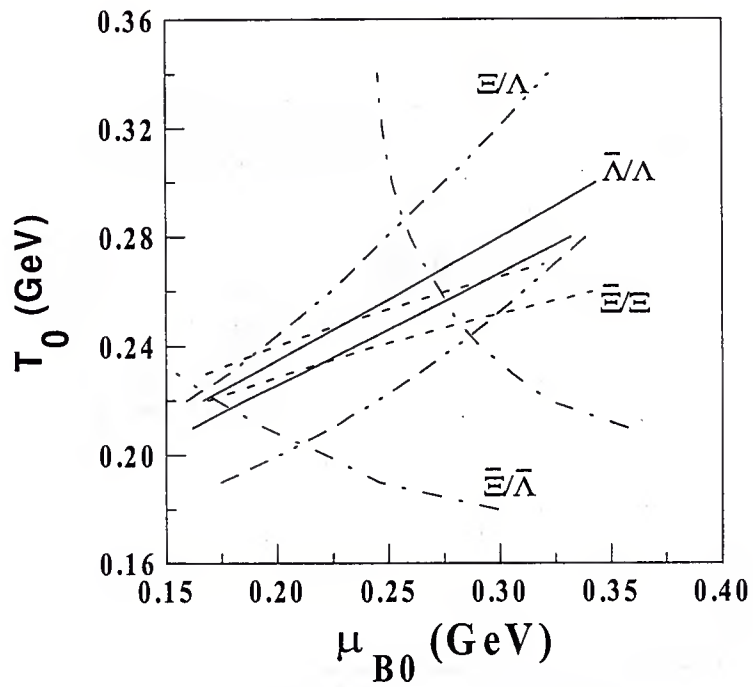


Figura 5.2: Região no plano  $T_0 - \mu_{B0}$  que reproduz os dados de colisões Pb-Pb do experimento WA97.

Não há correção de volume nesse caso.

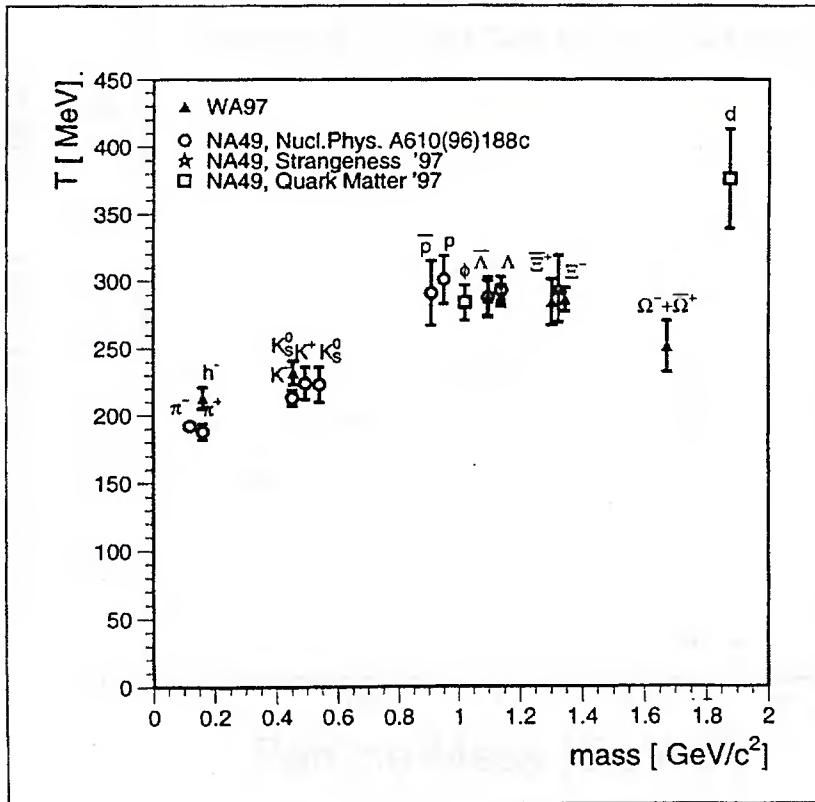


Figura 5.3: Dados experimentais sobre a temperatura aparente de diversas partículas. Retirado de [83].

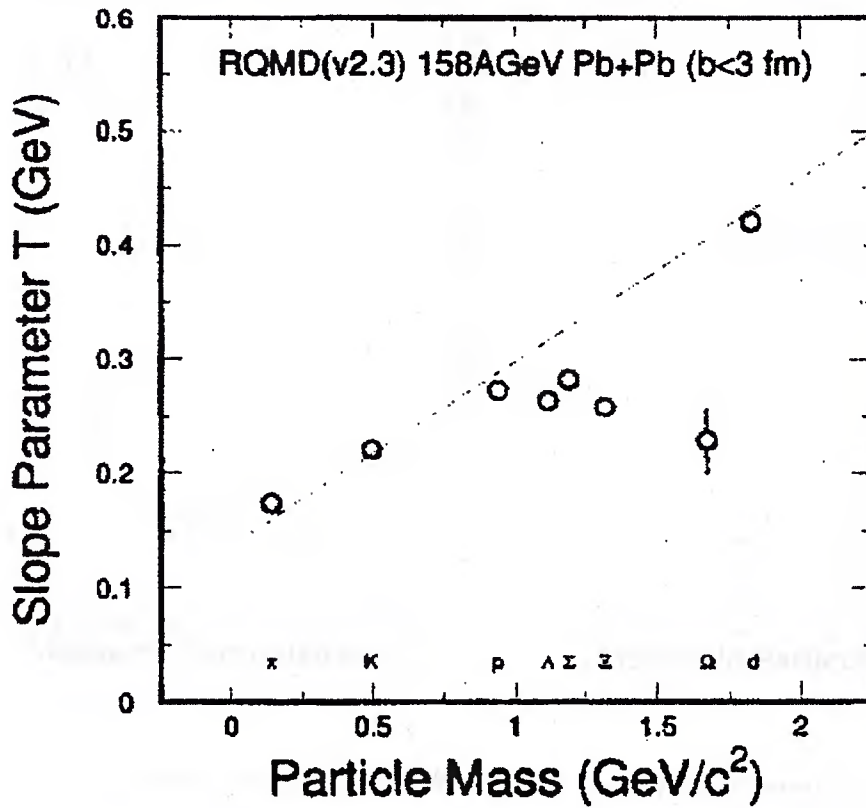


Figura 5.4: Predições do modelo RQMD para as temperaturas aparentes. Extração da Ref. [65].



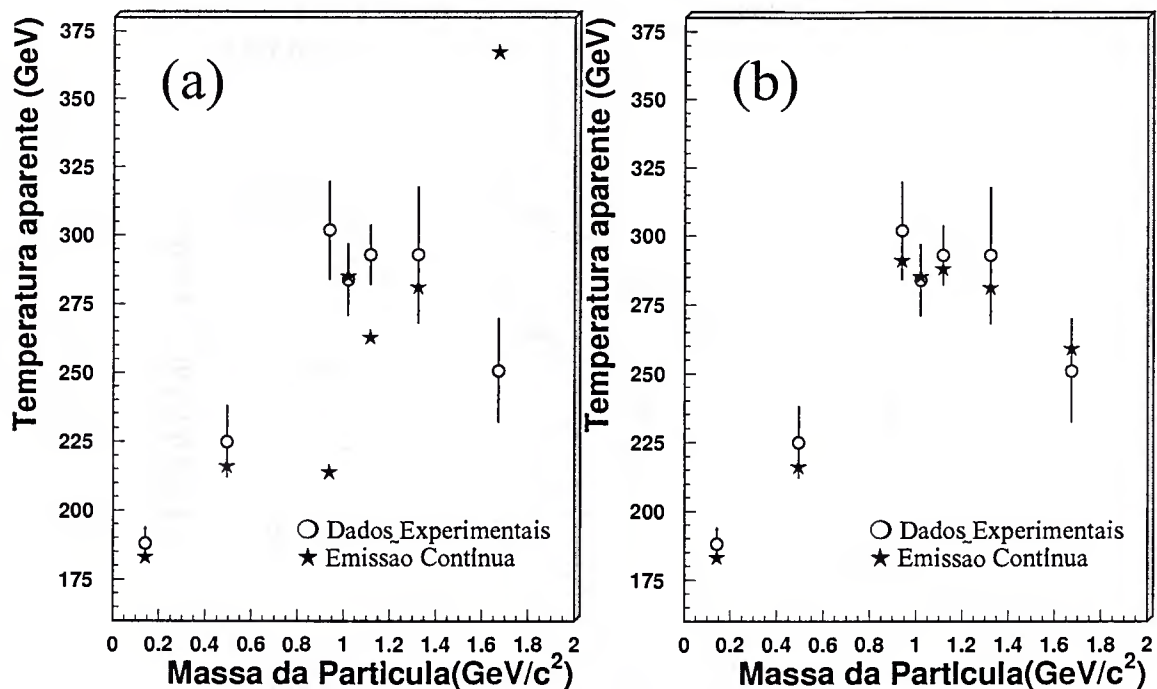


Figura 5.5: Predição da emissão contínua para a dependência da temperatura aparente com a massa da partícula. (a) Utilizando  $\langle\sigma v_{rel}\rangle_{\pi\pi} = 1 \text{ fm}^2$  para todas as partículas; (b) utilizando:  $\langle\sigma v_{rel}\rangle_{\pi p} = \frac{3}{2}\langle\sigma v_{rel}\rangle_{\pi\pi}$  para  $p$ ,  $\langle\sigma v_{rel}\rangle_{\pi\Omega} = \frac{1}{2}\langle\sigma v_{rel}\rangle_{\pi p}$  para  $\Omega$ ,  $\langle\sigma v_{rel}\rangle_{\pi\Lambda} = 1.2\langle\sigma v_{rel}\rangle_{\pi\pi}$  para  $\Lambda$  e  $1 \text{ fm}^2$  para as partículas restantes.

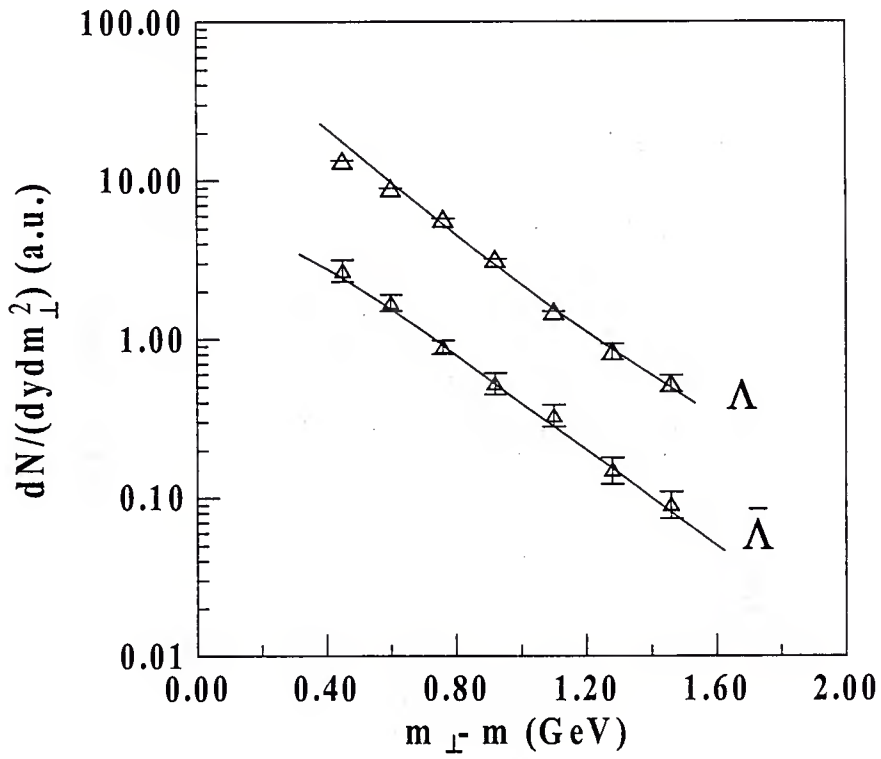
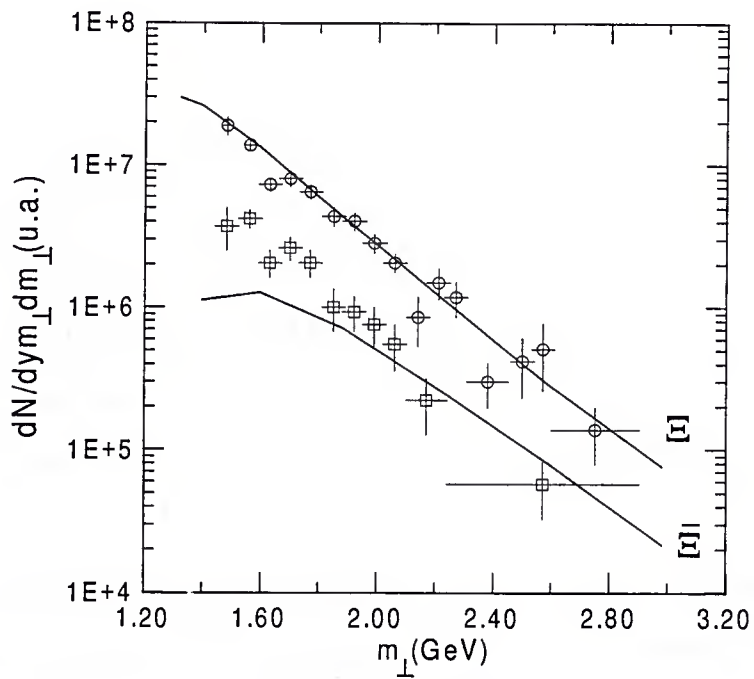


Figura 5.6: Espectro para  $\Lambda$  e  $\bar{\Lambda}$  usando  $T_0 = 200$  MeV e  $\mu_{B0} = 200$  MeV como condições iniciais. Dados de NA49 [64]



**Figura 5.7:** Espectro para  $\Xi$  e  $\Xi$  usando  $T_0 = 200$  MeV e  $\mu_{B0} = 200$  MeV como condições iniciais. Dados de WA97 [61]

## Considerações finais

Utilizamos, neste trabalho, o modelo hidrodinâmico de emissão contínua de partículas no estudo de diversos dados experimentais de colisões de íons pesados relativísticos. O modelo de emissão contínua foi inicialmente formulado por F. Grassi, Y. Hama e T. Kodama para um gás hadrônico composto somente de píons sem massa. Contudo, para comparações realísticas com os dados experimentais foi necessário estendê-lo para considerar o caso de número bariônico total não-nulo para o fluido. Isso foi feito nessa tese considerando uma equação de estado para um gás hadrônico composto de todas as partículas com massa até, aproximadamente, 2 GeV.

Estudamos dados sobre projéteis leves, onde mostramos que a emissão contínua pode resolver alguns dos problemas enfrentados pelos modelos de freeze-out. As razões de partículas estranhas (WA85), que nos cenários de freeze-out fixam as condições no momento do freeze-out e levam a altas densidades de partículas (indo de encontro com a noção de partículas deixando de interagir), permitem que as condições iniciais para o fluxo hidrodinâmico sejam determinadas no cenário de emissão contínua (nesse caso as altas densidades conseguidas são consistentes com os estágios iniciais da colisão). Vimos, também, como essas mesmas condições iniciais podem ser usadas para reproduzir, razoavelmente, dados sobre espectros em massa transversal dos experimentos WA85 e NA35. Algumas abundâncias (NA35) também foram olhados. Mostramos que, ao contrário dos modelos com freeze-out que são incapazes de reproduzir a multiplicidade de píons, a in-

clusão da emissão contínua de partículas permite que tanto píons como outras abundâncias sejam razoavelmente bem reproduzidas. Nesse caso, no entanto, as condições iniciais necessárias para reproduzir as abundâncias são diferentes daquelas das razões, em particular o valor de  $\gamma_S > 1$ . Deve-se notar que as duas experiências (WA85 e NA35) diferem na maneira como a centralidade das colisões é tratada; NA35, por exemplo, considera os eventos mais centrais.  $\gamma_S > 1$  pode, ainda, dar indicações da possível formação do QGP. Uma outra hipótese, é a não validade de um argumento usado nesse trabalho: a condição de estranheza nula na região de rapidez média.

Nas comparações com dados experimentais de colisões Pb-Pb, consideramos um fluido com expansão transversal, embora, nesse caso, não incluímos a emissão contínua dentro do código hidrodinâmico. A justificativa é que em nossos estudos de um fluido sem expansão transversal, notamos que os espectros em massa transversal apresentavam pouca diferença se usássemos as soluções da hidrodinâmica com ou sem emissão contínua. Obviamente, tal suposição deverá ter sua validade comprovada (ou não) em estudos posteriores. Verificamos, mais uma vez, que a inclusão da emissão contínua na descrição hidrodinâmica das colisões pode ser fundamental para explicar alguns dados experimentais, como o comportamento da temperatura aparente com a massa da partícula (discutido no capítulo 5).

Uma série de melhoramentos podem e devem ser feitos no modelo apresentado nesta tese, entre eles a inclusão da emissão contínua nas equações da hidrodinâmica com expansão transversal, como mencionado acima. Um outro ponto que deve ser abordado com bastante cuidado é a questão da seção de choque usada no cálculo da probabilidade de escape. Usamos durante todo esse trabalho uma seção de choque constante (e arbitrária) para todos os tipos de partícula. Uma dependência da seção de choque com a energia da colisão deverá ser estudado no futuro.

Uma consideração importante é que, apesar do modelo ainda não ser capaz de interpretar todos os dados, parece claro, com esse trabalho, que deve-se pensar seriamente

na inclusão de emissão contínua de partículas ao se trabalhar com modelos hidrodinâmicos. Vale notar que modelos microscópicos como o Quark Gluon String Model prediz que a emissão de partículas ocorre em todo o espaço-tempo disponível para a evolução do sistema, e não de uma única superfície de freeze-out como adotado pelos modelos hidrodinâmicos [73]. Isso corrobora o cenário de emissão contínua. Além disso, modelos microscópicos têm sido usados para estudar e reforçar a hipótese de equilíbrio térmico e químico nas colisões nucleares de altas energias [82].

Mesmo sendo capaz de reproduzir boa parte dos dados usando somente um gás hadrônico, isso não descarta a possibilidade de um plasma de quarks e gluons ter sido formado. Um cenário de transição quark-hádron, onde um QGP em equilíbrio evolui em um gás hadrônico com emissão contínua, poderia ser considerado. Como os quarks são objetos coloridos, eles têm que se juntar a outros quarks e/ou antiquarks para poderem escapar da fase de plasma sem carregar cor, o que, em princípio, modificaria a emissão na fase de plasma em comparação ao que é feito para o gás hadrônico.

Com o início do funcionamento de novos aceleradores (RHIC, LHC) com energias muito maiores que as atuais, a formação de QGP será bastante provável. Assim, seria desejável saber como uma fase de plasma alteraria as predições para espectros, abundâncias, etc., no cenário de emissão contínua.



Appendice A

100 - 1000

1000 - 10000

## Apêndices

100

1000

10000

# Apêndice A

## Equação de conservação de momento-energia com emissão contínua

Vamos calcular explicitamente a equação de conservação (3.29). Para a parte interagente, temos:

$$D_\nu T_{int}^{0\nu}|_{z=0} = \partial_t T_{int}^{00}|_{z=0} + \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho T_{int}^{0\rho})|_{z=0} + \partial_z T_{int}^{0z}|_{z=0}, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$T_{int}^{0\nu} = \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p_i^\nu}{\exp\{[p_i \cdot u_i(x) - \mu_i(x)]/T(x)\} + \Theta_i}. \quad (\text{A.2})$$

Vamos calcular os três termos do lado direito da equação (A.1).

$$\spadesuit \partial_t T_{int}^{00}|_{z=0}$$

$$\begin{aligned} \partial_t T_{int}^{00}|_{z=0} &= \partial_t \left[ \underbrace{\sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{E_i}{\exp\{[E_i - \mu_i(t, \rho)]/T(t, \rho)\} + \Theta_i}}_{\equiv \varepsilon_{int}} \right] \\ &= \partial_t \varepsilon_{int}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde usamos o fato que  $(p_i \cdot u_i)|_{z=0} = E_i$ .

$$\spadesuit \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho T_{int}^{0\rho})|_{z=0}$$

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho T_{int}^{0\rho})|_{z=0} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho \left[ \rho \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p^\rho}{\exp\{[E_i - \mu_i(t, \rho)]/T(t, \rho)\} + \Theta_i} \right]. \quad (\text{A.4})$$

Como, utilizando simetria cilíndrica, podemos escrever  $p^\rho = p \cos \phi \sin \theta$ , temos que a integração sobre o ângulo  $\phi$ ,  $\int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi$ , anula-se. Assim

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho T_{int}^{0\rho})|_{z=0} = 0. \quad (\text{A.5})$$

$$\spadesuit \partial_z T_{int}^{0z} \Big|_{z=0}$$

$$\partial_z T_{int}^{0z} \Big|_{z=0} = \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p p^z \partial_z \left[ \frac{1}{\exp \{ [p_i \cdot u_i(x) - \mu_i(x)] / T(x) \} + \Theta_i} \right]_{z=0} \quad (A.6)$$

Usando o fato que

$$\frac{\partial()}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{E}{t} \frac{\partial()}{\partial p^z} \Big|_{z=0}, \quad (A.7)$$

que é verdadeiro para uma função invariante por boost [67], temos

$$\begin{aligned} \partial_z T_{int}^{0z} \Big|_{z=0} &= \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \left( -\frac{E_i}{t} \right) p^z \partial_{p^z} \left[ \frac{1}{\exp \{ [E_i - \mu_i(t, \rho)] / T(t, \rho) \} + \Theta_i} \right] \\ &= -\frac{1}{t} \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \underbrace{\partial_{p^z} \left[ \frac{p^z E_i}{\exp \{ [E_i - \mu_i(t, \rho)] / T(t, \rho) \} + \Theta_i} \right]}_{=0} \\ &+ \frac{1}{t} \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{\partial_{p^z} (p^z E_i)}{\exp \{ [E_i - \mu_i(t, \rho)] / T(t, \rho) \} + \Theta_i}. \end{aligned} \quad (A.8)$$

Como

$$\partial_{p^z} (p^z E_i) = E_i + \frac{(p^z)^2}{E_i} = E_i + \frac{p^2 \cos^2 \theta}{E_i}, \quad (A.9)$$

temos

$$\begin{aligned} \partial_z T_{int}^{0z} \Big|_{z=0} &= \frac{\varepsilon_{int}}{t} + \frac{1}{t} \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \underbrace{\frac{p^2 \cos^2 \theta / E_i}{\exp \{ [E_i - \mu_i(t, \rho)] / T(t, \rho) \} + \Theta_i}}_{\equiv P_{int}} \\ &= \frac{\varepsilon_{int} + P_{int}}{t}. \end{aligned} \quad (A.10)$$

Assim, juntando (A.3), (A.5) e (A.10) em (A.1), temos

$$D_\nu T_{int}^{0\nu} \Big|_{z=0} = \partial_t \varepsilon_{int} + \frac{\varepsilon_{int} + P_{int}}{t} \quad (A.11)$$

Para a parte livre temos:

$$D_\nu T_{livre}^{0\nu} \Big|_{z=0} = \partial_t T_{livre}^{00} \Big|_{z=0} + \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho T_{livre}^{0\rho}) \Big|_{z=0} + \partial_z T_{livre}^{0z} \Big|_{z=0}, \quad (A.12)$$

com

$$T_{livre}^{0\nu} = \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p_i^\nu}{\exp \{ [p_i \cdot u_i(x) - \mu_i(x)] / T(x) \} + \Theta_i} \frac{P_i}{1 - P_i}. \quad (A.13)$$

Os três termos em (A.12) ficam agora

$$\begin{aligned} \clubsuit \partial_t T_{livre}^{00} \Big|_{z=0} \\ \partial_t T_{livre}^{00} \Big|_{z=0} &= \partial_t \left[ \underbrace{\sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{E_i}{\exp \{ [E_i - \mu_i(t, \rho)] / T(t, \rho) \} + \Theta_i} \frac{\mathcal{P}_i}{1 - \mathcal{P}_i}}_{\equiv \varepsilon_{livre}} \right] \\ &= \partial_t \varepsilon_{livre}, \end{aligned} \quad (A.14)$$

$$\begin{aligned} \clubsuit \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho T_{livre}^{0\rho}) \Big|_{z=0} \\ \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho T_{livre}^{0\rho}) \Big|_{z=0} &= \frac{1}{\rho} \partial_\rho \left[ \underbrace{\rho \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p \cos \phi \sin \theta}{\exp \{ [E_i - \mu_i(t, \rho)] / T(t, \rho) \} + \Theta_i} \frac{\mathcal{P}_i}{1 - \mathcal{P}_i}}_{\equiv \mathcal{F}} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \mathcal{F}), \end{aligned} \quad (A.15)$$

onde usamos novamente  $p^\rho = p \cos \phi \sin \theta$ .

$$\begin{aligned} \clubsuit \partial_z T_{livre}^{0z} \Big|_{z=0} \\ \partial_z T_{livre}^{0z} \Big|_{z=0} &= \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \left( -\frac{E_i}{t} \right) p^z \partial_{p^z} \left[ \frac{1}{\exp \{ [E_i - \mu_i(t, \rho)] / T(t, \rho) \} + \Theta_i} \frac{\mathcal{P}_i}{1 - \mathcal{P}_i} \right] \\ &= -\frac{1}{t} \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \partial_{p^z} \left[ \underbrace{\frac{p^z E_i}{\exp \{ [E_i - \mu_i(t, \rho)] / T(t, \rho) \} + \Theta_i} \frac{\mathcal{P}_i}{1 - \mathcal{P}_i}}_{=0} \right] \\ &\quad + \frac{1}{t} \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{\partial_{p^z} (p^z E_i)}{\exp \{ [E_i - \mu_i(t, \rho)] / T(t, \rho) \} + \Theta_i} \frac{\mathcal{P}_i}{1 - \mathcal{P}_i} \\ &= \frac{\varepsilon_{livre}}{t} + \frac{1}{t} \sum_i \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \underbrace{\frac{p^2 \cos^2 \theta / E_i}{\exp \{ [E_i - \mu_i(t, \rho)] / T(t, \rho) \} + \Theta_i} \frac{\mathcal{P}_i}{1 - \mathcal{P}_i}}_{\equiv P_{livre}} \\ &= \frac{\varepsilon_{livre} + P_{livre}}{t}, \end{aligned} \quad (A.16)$$

onde usamos (A.7). Juntando as equações (A.12), (A.14) e (A.16), temos

$$D_\nu T_{livre}^{0\nu} \Big|_{z=0} = \partial_t \varepsilon_{livre} + \frac{\varepsilon_{livre} + P_{livre}}{t} + \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \mathcal{F}). \quad (A.17)$$

Finalmente, usando (A.11) e (A.17), temos

$$D_\nu T_{int}^{0\nu} \Big|_{z=0} + D_\nu T_{livre}^{0\nu} \Big|_{z=0} = 0 \Rightarrow \partial_t \varepsilon + \frac{\varepsilon + P}{t} + \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \mathcal{F}) = 0, \quad (A.18)$$

onde  $\varepsilon = \varepsilon_{int} + \varepsilon_{livre}$  e  $P = P_{int} + P_{livre}$ .

# Apêndice B

## Equilíbrio químico relativo

Se um QGP é inicialmente formado na colisão, os processos de produção de estranheza (principalmente processos gluônicos gerando um par  $s\bar{s}$ ) acontecem de forma bastante rápida. Estima-se [16] que o equilíbrio químico para a estranheza seja atingida em tempos ( $\sim 5-10$  fm) menores que o tempo de vida da colisão. No caso de um gás hadrônico, onde a produção de estranheza (e sua redistribuição entre os hádrons) se dá via colisões hadrônicas, o equilíbrio químico para a estranheza é atingido muito mais lentamente do que no caso do QGP ( $\sim 100$  fm) [16]. Assim, acredita-se que, no tempo de duração de uma colisão nuclear, o setor de estranheza não alcance o equilíbrio químico total. A idéia de um equilíbrio químico relativo foi introduzido por Rafelski [49] com a utilização do parâmetro de saturação de estranheza  $\gamma_S$  ( $0 < \gamma_S \leq 1$ ). Inicialmente, esse parâmetro foi introduzido heurísticamente, fazendo a substituição  $\exp(S\mu_S) \rightarrow \gamma_S \exp(S\mu_S)$  na aproximação de Boltzmann. Recentemente, C. Slotta [50] apresentou uma formulação termodinâmica rigorosa da parametrização proposta por Rafelski. Apresentamos, aqui, essa formulação.

Considere uma mistura de gases ideais contendo  $M$  diferentes componentes. A função de distribuição de uma partícula

$$f_k \equiv f_k(x, p), \quad k = 1, \dots, M, \quad (\text{B.1})$$

contém toda a informação do sistema. Após um certo tempo, essa distribuição evoluirá para a solução de equilíbrio local, cuja forma pode ser derivada maximizando a entropia sujeito a vínculos de leis de conservação. Para o caso de equilíbrio térmico e

equilíbrio químico absoluto, os únicos vínculos são devidos a conservação de energia, número bariônico e (na escala temporal das colisões nucleares) estranheza. No entanto, se diferentes processos químicos ocorrem em diferentes escalas de tempo, um equilíbrio químico relativo pode surgir em escalas de tempo intermediárias, no qual os processos mais rápidos já se equilibraram mas os mais lentos ainda estão longe do equilíbrio. Esses estados intermediários podem ser caracterizados por vínculos adicionais sobre a composição química, que ao serem implementadas no processo de maximização da entropia, geram a distribuição de equilíbrio local para o equilíbrio químico relativo.

Considere uma pequena célula do fluido no seu próprio sistema de repouso. A entropia nesse caso pode ser escrita como

$$S = - \sum_k \int d\omega [f_k \ln f_k + \Theta_k (1 - \Theta_k f_k) \ln (1 - \Theta_k f_k)], \quad (\text{B.2})$$

onde a integral é sobre o espaço de fase  $\int d\omega \equiv \int_{\Delta V} d^3x \int d^3p / (2\pi)^3$  e, para o hádron  $k$ ,  $\Theta_k = 1$  para bárions e  $\Theta_k = -1$  para mésons. A conservação de energia e de sabor leva aos vínculos

$$\langle E \rangle = \int d\omega \sum_k E_k f_k, \quad (\text{B.3})$$

$$\langle Q \rangle = \int d\omega \sum_k q_k f_k, \quad (\text{B.4})$$

$$-\langle S \rangle = \int d\omega \sum_k s_k f_k, \quad (\text{B.5})$$

onde  $\langle E \rangle$  denota a energia térmica média na célula,  $\langle Q \rangle$  representa a média no número de quarks leves e  $\langle S \rangle$  a média no número de estranheza.  $q_k$  representa o número de quarks leves de valência no hádron  $k$  e  $s_k$  o número de quarks estranhos.

A idéia de espaço de fase estranho parcialmente saturado pode ser implementada impondo a condição

$$\langle | S | \rangle = \int d\omega \sum_k |s_k| f_k. \quad (\text{B.6})$$

Pode-se ainda parametrizar

$$\langle | S | \rangle = \sum_k \xi_k \langle | S | \rangle_k^{eq}, \quad (\text{B.7})$$



onde  $\langle |S| \rangle_k^{eq}$  é a contribuição do hádron  $k$  para a estranheza total no equilíbrio químico absoluto. Os fatores  $\xi_k$  representam o grau de população do espaço de fase estranho em cada setor hadrônico, que pode diferir do seu valor de equilíbrio  $\xi_k = 1$ . O caso onde  $0 < \xi_k < 1$  corresponde à supressão de estranheza.

A função de distribuição  $f_k$  mais provável pode ser encontrada extremizando o funcional  $\mathcal{S}[f_k]$ , sujeito aos vínculos (B.3), (B.4), (B.5) e (B.6), ou seja, calculando:

$$\frac{\delta \mathcal{S}'}{\delta f_k} = 0, \quad (\text{B.8})$$

para

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' &= \mathcal{S} + \beta \left[ \langle E \rangle - \int d\omega \sum_k E_k f_k \right] \\ &+ \nu_q \left[ \langle Q \rangle - \int d\omega \sum_k q_k f_k \right] + \nu_s \left[ -\langle S \rangle - \int d\omega \sum_k s_k f_k \right] \\ &+ \sigma \left[ \langle |S| \rangle - \int d\omega \sum_k |s_k| f_k \right], \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde  $\beta$ ,  $\nu_q$ ,  $\nu_s$  e  $\sigma$  são multiplicadores de Lagrange. Lembrando que

$$\frac{\delta f_{k'}(x', p')}{\delta f_k(x, p)} = \delta_{k'k} \delta(x' - x) \delta(p' - p),$$

obtemos:

$$f_k = \frac{1}{\exp(\beta E_k + \nu_q q_k + \nu_s s_k + \sigma |s_k|) + \Theta_k}. \quad (\text{B.10})$$

Substituindo (B.10) em (B.2), temos

$$\mathcal{S} = \beta \langle E \rangle + \sum_k (\nu_q q_k + \nu_s s_k) \langle N_k \rangle + \ln \Xi + \sum_k \sigma |s_k| \langle N_k \rangle, \quad (\text{B.11})$$

onde  $\langle N_k \rangle = \int d\omega f_k$  é o número médio de partículas da espécie  $k$  e

$$\ln \Xi = \sum_k \Theta_k \int d\omega \ln \{ 1 + \Theta_k \exp [ -(\beta E_k + \nu_q q_k + \nu_s s_k + \sigma |s_k|) ] \}. \quad (\text{B.12})$$

O limite  $\sigma \rightarrow 0$  corresponde a negligenciar o vínculo (B.6). Nesse caso a equação (B.12) seria a função de partição macrocanônica em equilíbrio químico absoluto.  $\ln \Xi$  gera as

quantidades termodinâmicas:

$$-\left. \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta} \right|_{\alpha_k, V} = \langle E \rangle, \quad (\text{B.13})$$

$$-\left. \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \alpha_k} \right|_{\beta, V} = \langle N_k \rangle, \quad (\text{B.14})$$

$$T \left. \frac{\partial \ln \Xi}{\partial V} \right|_{\alpha_k, T} = P. \quad (\text{B.15})$$

onde  $\alpha_k \equiv \nu_q q_k + \nu_s s_k + \sigma |s_k|$ , sendo assim, um potencial termodinâmico. Da maneira usual identifica-se  $\beta = 1/T$  e  $\alpha_k = -\mu_k/T$ . Podemos, então, escrever

$$\mu_k = -T\alpha_k = \underbrace{\mu_k^{eq}}_{-T(\nu_q q_k + \nu_s s_k)} - T\sigma |s_k|. \quad (\text{B.16})$$

onde  $\mu_k^{eq}$  é o potencial químico para o equilíbrio químico absoluto.

Podemos determinar o fator de supressão  $\xi_k$  comparando (B.6) e (B.7) usando a aproximação de Boltzmann. Daí obtemos  $\xi_k = \exp(-\sigma |s_k|)$ . Sua relação com  $\gamma_s$  se dá via  $\xi_k = \gamma_s^{|s_k|}$ . Assim,

$$0 < \gamma_s^{|s_k|} = \xi_k = \left(e^{-\sigma}\right)^{|s_k|} \leq 1. \quad (\text{B.17})$$

Então na aproximação de Boltzmann, temos

$$f_k = \gamma_s^{|s_k|} \exp(-\beta E_k + \beta \mu_k^{eq}). \quad (\text{B.18})$$

# Apêndice C

## Correção de volume termodinamicamente consistente

[45, 46]

Considere a função de partição macrocanônica para uma espécie de partícula

$$\mathcal{Z}(T, \mu, V) = \sum_{N=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\mu N}{T}\right) Z(T, N, V), \quad (\text{C.1})$$

onde  $\mu$  é o potencial químico e  $V$  é o volume do sistema. Para introduzirmos a correção de volume, substituiremos a função de partição canônica  $Z$  em (C.1) por\*

$$\mathcal{Z}^{vol}(T, N, V) = Z(T, N, V - v_0 N) \theta(V - v_0 N), \quad (\text{C.2})$$

onde estamos considerando  $N$  partículas com volume intrínseco  $v_0$  em um volume  $V$  como  $N$  partículas pontuais em um volume disponível  $V - v_0 N$ . Com essa suposição, a função de partição macrocanônica com correção de volume torna-se:

$$\mathcal{Z}^{vol}(T, \mu, V) = \sum_{N=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\mu N}{T}\right) Z(T, N, V - v_0 N) \theta(V - v_0 N). \quad (\text{C.3})$$

Podemos fazer uma transformada de Laplace sobre (C.3) para eliminarmos a dependência em  $N$  do volume disponível:

$$\hat{\mathcal{Z}}^{vol}(T, \mu, \xi) = \int_0^{\infty} dV \exp(-\xi V) \mathcal{Z}^{vol}(T, \mu, V). \quad (\text{C.4})$$

Mudando a variável de integração de  $V$  para  $\hat{V} = V - v_0 N$ , temos

$$\hat{\mathcal{Z}}^{vol}(T, \mu, \xi) = \int_{-v_0 N}^{\infty} d\hat{V} \exp(-\xi \hat{V}) \sum_{N=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\hat{\mu} N}{T}\right) Z(T, N, \hat{V}) \theta(\hat{V})$$

---

\*O rótulo *vol* indica a quantidade com correção de volume

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty d\hat{V} \exp(-\xi\hat{V}) \sum_{N=0}^\infty \exp\left(\frac{\hat{\mu}N}{T}\right) Z(T, N, \hat{V}) \\
&= \int_0^\infty d\hat{V} \exp(-\xi\hat{V}) Z(T, \hat{\mu}, \hat{V}),
\end{aligned} \tag{C.5}$$

onde  $\hat{\mu} = \mu - v_0 T \xi$ .

Da definição de pressão

$$P^{vol}(T, \mu) \equiv T \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\ln Z^{vol}(T, \mu, V)}{V}, \tag{C.6}$$

podemos tirar o comportamento da função de partição macrocanônica para  $V \rightarrow \infty$ :

$$Z^{vol}(T, \mu, V) \Big|_{V \rightarrow \infty} \sim \exp\left[\frac{P^{vol}(T, \mu)V}{T}\right]. \tag{C.7}$$

Com esse comportamento exponencial da função de partição macrocanônica,  $\hat{Z}^{vol}$  (Eq. (C.4)) convergirá somente para  $\xi > P^{vol}/T$ . A singularidade de  $\hat{Z}^{vol}(T, \mu, \xi)$  em  $\xi^* = P^{vol}/T$  nos dá a pressão do sistema

$$P^{vol}(T, \mu) = T \xi^*(T, \mu). \tag{C.8}$$

Analogamente, usando (C.5) podemos escrever

$$P(T, \tilde{\mu}) \equiv T \lim_{\hat{V} \rightarrow \infty} \frac{\ln Z(T, \tilde{\mu}, \hat{V})}{\hat{V}} = T \xi^*(T, \mu), \tag{C.9}$$

com  $\tilde{\mu} = \mu - v_0 T \xi^*$ . Comparando (C.8) e (C.9) podemos eliminar  $\xi^*$  resultando em

$$P^{vol}(T, \mu) = P(T, \tilde{\mu}); \quad \tilde{\mu} = \mu - v_0 P^{vol}(T, \mu), \tag{C.10}$$

que é uma função implícita para  $P^{vol}$ .

Para a densidade de partículas com correção de volume, temos:

$$\begin{aligned}
n^{vol}(T, \mu) &\equiv \left[ \frac{\partial P^{vol}(T, \mu)}{\partial \mu} \right]_T \\
&= \underbrace{\left[ \frac{\partial P(T, \tilde{\mu})}{\partial \tilde{\mu}} \right]_T}_{n(T, \tilde{\mu})} \left[ \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \mu} \right]_T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n(T, \tilde{\mu}) \left[ \frac{\partial[\mu - v_0 P^{vol}(T, \mu)]}{\partial \mu} \right]_T \\
&= n(T, \tilde{\mu}) \left\{ 1 - v_0 \underbrace{\left[ \frac{\partial P^{vol}(T, \mu)}{\partial \mu} \right]_T}_{n^{vol}(T, \mu)} \right\} \\
&= n(T, \tilde{\mu}) [1 - v_0 n^{vol}(T, \mu)]. \tag{C.11}
\end{aligned}$$

Assim, resolvendo para  $n^{vol}$  temos

$$n^{vol}(T, \mu) = \frac{n(T, \tilde{\mu})}{1 + v_0 n(T, \tilde{\mu})}. \tag{C.12}$$

A entropia e a densidade de energia são :

$$s^{vol}(T, \mu) \equiv \left[ \frac{\partial P^{vol}(T, \mu)}{\partial T} \right]_{\mu} = \frac{s(T, \tilde{\mu})}{1 + v_0 n(T, \tilde{\mu})}, \tag{C.13}$$

$$\varepsilon^{vol}(T, \mu) \equiv T s^{vol} - p^{vol} + \mu n^{vol} = \frac{\varepsilon(T, \tilde{\mu})}{1 + v_0 n(T, \tilde{\mu})}. \tag{C.14}$$

Generalizando para  $M$  espécies hadrônicas, temos

$$n_i^{vol}(T, \mu_1, \dots, \mu_M) = \frac{n_i(T, \tilde{\mu}_i)}{1 + \sum_{j=1}^M v_j n_j(T, \tilde{\mu}_j)}, \tag{C.15}$$

$$s^{vol}(T, \mu_1, \dots, \mu_M) = \frac{\sum_{i=1}^M s_i(T, \tilde{\mu}_i)}{1 + \sum_{j=1}^M v_j n_j(T, \tilde{\mu}_j)}, \tag{C.16}$$

$$\varepsilon^{vol}(T, \mu_1, \dots, \mu_M) = \frac{\sum_{i=1}^M \varepsilon_i(T, \tilde{\mu}_i)}{1 + \sum_{j=1}^M v_j n_j(T, \tilde{\mu}_j)}, \tag{C.17}$$

onde agora:

$$P^{vol}(T, \mu_1, \dots, \mu_M) = \sum_{i=1}^M P_i(T, \tilde{\mu}_i), \tag{C.18}$$

e

$$\tilde{\mu}_i = \mu_i - v_i P^{vol}(T, \mu_1, \dots, \mu_M). \tag{C.19}$$

# Apêndice D

## Espectro em emissão contínua

Vamos explicitar o cálculo para a fórmula do espectro, dado na sua forma geral como:

$$\frac{d^3 N}{dy p_{\perp} dp_{\perp} d\phi_p} = \int d^4 x D_{\nu} (p^{\nu} f_{livre}). \quad (D.1)$$

Vamos escrever a equação acima no sistema de coordenadas  $(\tau, \rho, \phi, \eta)$ , cuja relação com o sistema de coordenadas  $(t, x, y, z)$  é dada por:

$$t = \tau \cosh \eta, \quad (D.2)$$

$$x = \rho \cos \phi; \quad (D.3)$$

$$y = \rho \sin \phi, \quad (D.4)$$

$$z = \tau \sinh \eta, \quad (D.5)$$

sendo as relações inversas

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad (D.6)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (D.7)$$

$$\phi = \arctan(y/x), \quad (D.8)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{t - z}{t + z} \right]. \quad (D.9)$$

O tensor métrico nesse sistema de coordenadas é:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (g_{\tau\tau} = 1, g_{\rho\rho} = -1, g_{\phi\phi} = -\rho^2, g_{\eta\eta} = -\tau^2). \quad (D.10)$$



Assim, podemos escrever (D.1) como:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 N}{dy p_{\perp} dp_{\perp} d\phi_p} &= \int \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} d\tau d\rho d\phi d\eta \frac{1}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}} \left[ \partial_{\tau} \left( \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} p^{\tau} f \right) \right. \\ &\quad + \partial_{\rho} \left( \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} p^{\rho} f \right) + \partial_{\phi} \left( \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} p^{\phi} f \right) \\ &\quad \left. + \partial_{\eta} \left( \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} p^{\eta} f \right) \right], \end{aligned} \quad (D.11)$$

onde por simplicidade estamos escrevendo  $f$  ao invés de  $f_{livre}$ . As componentes do momento são escritos como:

$$\begin{aligned} p^{\tau} &= \frac{\partial \tau}{\partial t} p^t + \frac{\partial \tau}{\partial x} p^x + \frac{\partial \tau}{\partial y} p^y + \frac{\partial \tau}{\partial z} p^z \\ &= \cosh \eta p^t - \sinh \eta p^z, \end{aligned} \quad (D.12)$$

$$\begin{aligned} p^{\rho} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} p^t + \frac{\partial \rho}{\partial x} p^x + \frac{\partial \rho}{\partial y} p^y + \frac{\partial \rho}{\partial z} p^z \\ &= \cos \phi p^x + \sin \phi p^y, \end{aligned} \quad (D.13)$$

$$\begin{aligned} p^{\phi} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} p^t + \frac{\partial \phi}{\partial x} p^x + \frac{\partial \phi}{\partial y} p^y + \frac{\partial \phi}{\partial z} p^z \\ &= -\frac{\sin \phi}{\rho} p^x + \frac{\cos \phi}{\rho} p^y, \end{aligned} \quad (D.14)$$

$$\begin{aligned} p^{\eta} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} p^t + \frac{\partial \eta}{\partial x} p^x + \frac{\partial \eta}{\partial y} p^y + \frac{\partial \eta}{\partial z} p^z \\ &= \frac{\sin \eta}{\tau} p^t - \frac{\cosh \eta}{\tau} p^z. \end{aligned} \quad (D.15)$$

Uma vez que  $p^{\mu}$  pode ser escrito da forma:

$$p^{\mu} = (p^t, p^x, p^y, p^z) = (m_{\perp} \cosh y, p_{\perp} \cos \phi_p, p_{\perp} \sin \phi_p, m_{\perp} \sinh y), \quad (D.16)$$

podemos escrever as Eqs. (D.12)-(D.15) como

$$p^{\tau} = m_{\perp} \cosh (\eta - y), \quad (D.17)$$

$$p^{\rho} = p_{\perp} \cos (\phi - \phi_p), \quad (D.18)$$

$$p^{\phi} = -\frac{1}{\rho} p_{\perp} \sin (\phi - \phi_p), \quad (D.19)$$

$$p^{\eta} = \frac{1}{\tau} m_{\perp} \sinh (\eta - y). \quad (D.20)$$

Assim a Eq. (D.11) fica

$$\begin{aligned} \frac{d^3 N}{dy p_{\perp} dp_{\perp} d\phi_p} &= \int d\tau d\rho d\phi d\eta \{ \rho \partial_{\tau} [\tau m_{\perp} \cosh(\eta - y) f] \\ &+ \tau \partial_{\rho} [\rho p_{\perp} \cos(\phi - \phi_p) f] - \tau \partial_{\phi} [p_{\perp} \sin(\phi - \phi_p) f] \\ &+ \rho \partial_{\eta} [m_{\perp} \sinh(\eta - y) f] \}. \end{aligned} \quad (D.21)$$

Integrando em  $\phi_p$  e explicitando os limites de integração, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dy p_{\perp} dp_{\perp}} &= \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \{ \rho \partial_{\tau} [\tau m_{\perp} \cosh(\eta - y) f] \\ &+ \tau \partial_{\rho} [\rho p_{\perp} \cos(\phi - \phi_p) f] - \tau \partial_{\phi} [p_{\perp} \sin(\phi - \phi_p) f] \\ &+ \rho \partial_{\eta} [m_{\perp} \sinh(\eta - y) f] \}. \end{aligned} \quad (D.22)$$

Mudando a variável de integração de  $\phi$  para  $\varphi = \phi - \phi_p$  e lembrando que a probabilidade  $\mathcal{P}$  incluída na distribuição de partículas livres  $f_{livre}$  depende somente da diferença  $\phi - \phi_p$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dy p_{\perp} dp_{\perp}} &= \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \int_0^R d\rho \int_{-\phi_p}^{2\pi - \phi_p} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \{ \rho \partial_{\tau} [\tau m_{\perp} \cosh(\eta - y) f] \\ &+ \tau \partial_{\rho} [\rho p_{\perp} \cos(\varphi) f] - \tau \partial_{\varphi} [p_{\perp} \sin(\varphi) f] \\ &+ \rho \partial_{\eta} [m_{\perp} \sinh(\eta - y) f] \}. \end{aligned} \quad (D.23)$$

Podemos substituir  $\int_{-\phi_p}^{2\pi - \phi_p} \rightarrow \int_0^{2\pi}$  e escrever então:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dy p_{\perp} dp_{\perp}} &= 2\pi \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \{ \rho \partial_{\tau} [\tau m_{\perp} \cosh(\eta - y) f] \\ &+ \tau \partial_{\rho} [\rho p_{\perp} \cos(\varphi) f] - \tau \partial_{\varphi} [p_{\perp} \sin(\varphi) f] \\ &+ \rho \partial_{\eta} [m_{\perp} \sinh(\eta - y) f] \}, \end{aligned} \quad (D.24)$$

onde o fator  $2\pi$  vem da integração em  $\phi_p$ . Na equação acima o terceiro e o quarto termo desaparecem após a integração em  $\varphi$  e em  $\eta$ , respectivamente. Assim, resulta

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dy p_{\perp} dp_{\perp}} &= 2\pi \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \{ \rho \partial_{\tau} [\tau m_{\perp} \cosh(\eta - y) f] \\ &+ \tau \partial_{\rho} [\rho p_{\perp} \cos(\varphi) f] \}. \end{aligned} \quad (D.25)$$

# Apêndice E

## Esquema de Lax-Wendroff de dois passos

Vamos apresentar o esquema de Lax-Wendroff de dois passos [84] utilizado para resolver numericamente as equações da hidrodinâmica com expansão transversal, a saber

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho} [(E + P)v] + (E + P) \left( \frac{v}{\rho} + \frac{1}{t} \right) = 0, \quad (\text{E.1})$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho} (Mv + P) + M \left( \frac{v}{\rho} + \frac{1}{t} \right) = 0, \quad (\text{E.2})$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho} (Rv) + R \left( \frac{v}{\rho} + \frac{1}{t} \right) = 0. \quad (\text{E.3})$$

Vamos explicitar o esquema para a equação (E.1).

Seja  $E_i^n = E(t_n, \rho_i)$ , onde assumimos a discretização do tempo e da coordenada radial

$$t_n = t_0 + n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (\text{E.4})$$

$$\rho_i = \rho_0 + i\Delta \rho, \quad i = 0, 1, 2, \dots, I \quad (\text{E.5})$$

O *primeiro passo* do esquema consiste em calcular  $E$  nos tempos intermediários  $t_{n+1/2}$  e nas posições intermediárias  $\rho_{i+1/2}$  e  $\rho_{i-1/2}$ . Isso é conseguido substituindo as derivadas parciais por diferenças finitas, a saber:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{i+1/2}^n \rightarrow \frac{E_{i+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(E_{i+1}^n + E_i^n)}{\Delta t/2}, \quad (\text{E.6})$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \rho} [(E + P)v] \right|_{i+1/2}^n \rightarrow \frac{(E_{i+1}^n + P_{i+1}^n)v_{i+1}^n - (E_i^n + P_i^n)v_i^n}{2(\Delta \rho/2)}, \quad (\text{E.7})$$

e, além disso, fazendo a substituição

$$(E + P) \left( \frac{v}{\rho} + \frac{1}{t} \right) \Big|_{i+1/2}^n \rightarrow \frac{i}{2} \left[ (E_{i+1}^n + P_{i+1}^n) \left( \frac{v_{i+1}^n}{\rho_{i+1}} + \frac{1}{t_n} \right) + (E_i^n + P_i^n) \left( \frac{v_i^n}{\rho_i} + \frac{1}{t_n} \right) \right]; \quad (\text{E.8})$$

Substituindo (E.6), (E.7) e (E.8) em (E.1) e resolvendo para  $E_{i+1/2}^{n+1/2}$ , temos

$$\begin{aligned} E_{i+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (E_{i+1}^n + E_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta\rho} \left[ (E_{i+1}^n + P_{i+1}^n) v_{i+1}^n - (E_i^n + P_i^n) v_i^n \right] \\ &- \frac{\Delta t}{4} \left[ (E_{i+1}^n + P_{i+1}^n) \left( \frac{v_{i+1}^n}{\rho_{i+1}} + \frac{1}{t_n} \right) + (E_i^n + P_i^n) \left( \frac{v_i^n}{\rho_i} + \frac{1}{t_n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Para obtermos  $E_{i-1/2}^{n+1/2}$  fazemos as substituições

$$\frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{i-1/2}^n \rightarrow \frac{E_{i-1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2} (E_i^n + E_{i-1}^n)}{\Delta t/2}, \quad (\text{E.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho} [(E + P)v] \Big|_{i-1/2}^n \rightarrow \frac{(E_i^n + P_i^n) v_i^n - (E_{i-1}^n + P_{i-1}^n) v_{i-1}^n}{2(\Delta\rho/2)}, \quad (\text{E.11})$$

$$(E + P) \left( \frac{v}{\rho} + \frac{1}{t} \right) \Big|_{i-1/2}^n \rightarrow \frac{1}{2} \left[ (E_i^n + P_i^n) \left( \frac{v_i^n}{\rho_i} + \frac{1}{t_n} \right) + (E_{i-1}^n + P_{i-1}^n) \left( \frac{v_{i-1}^n}{\rho_{i-1}} + \frac{1}{t_n} \right) \right]. \quad (\text{E.12})$$

Isso nos leva a

$$\begin{aligned} E_{i-1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (E_i^n + E_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta\rho} \left[ (E_i^n + P_i^n) v_i^n - (E_{i-1}^n + P_{i-1}^n) v_{i-1}^n \right] \\ &- \frac{\Delta t}{4} \left[ (E_i^n + P_i^n) \left( \frac{v_i^n}{\rho_i} + \frac{1}{t_n} \right) + (E_{i-1}^n + P_{i-1}^n) \left( \frac{v_{i-1}^n}{\rho_{i-1}} + \frac{1}{t_n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

O *segundo passo* consiste em usar as quantidades obtidas previamente,  $E_{i+1/2}^{n+1/2}$  e  $E_{i-1/2}^{n+1/2}$ , para se determinar  $E_i^{n+1}$ . Isso é conseguido fazendo as substituições :

$$\frac{\partial E}{\partial t} \Big|_i^{n+1/2} \rightarrow \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{2(\Delta t/2)}, \quad (\text{E.14})$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho} [(E + P)v] \Big|_i^{n+1/2} \rightarrow \frac{(E_{i+1/2}^{n+1/2} + P_{i+1/2}^{n+1/2}) v_{i+1/2}^{n+1/2} - (E_{i-1/2}^{n+1/2} + P_{i-1/2}^{n+1/2}) v_{i-1/2}^{n+1/2}}{2(\Delta\rho/2)}, \quad (\text{E.15})$$

$$(E + P) \left( \frac{v}{\rho} + \frac{1}{t} \right) \Big|_i^{n+1/2} \rightarrow \frac{1}{2} \left[ \left( E_{i+1/2}^{n+1/2} + P_{i+1/2}^{n+1/2} \right) \left( \frac{v_{i+1/2}^{n+1/2}}{\rho_{i+1/2}} + \frac{1}{t_{n+1/2}} \right) + \left( E_{i-1/2}^{n+1/2} + P_{i-1/2}^{n+1/2} \right) \left( \frac{v_{i-1/2}^{n+1/2}}{\rho_{i-1/2}} + \frac{1}{t_{n+1/2}} \right) \right]. \quad (\text{E.16})$$

Substituindo (E.14), (E.15) e (E.16) em (E.1) e resolvendo para  $E_i^{n+1}$ , temos

$$\begin{aligned} E_i^{n+1} &= E_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta \rho} \left[ \left( E_{i+1/2}^{n+1/2} + P_{i+1/2}^{n+1/2} \right) v_{i+1/2}^{n+1/2} - \left( E_{i-1/2}^{n+1/2} + P_{i-1/2}^{n+1/2} \right) v_{i-1/2}^{n+1/2} \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \left[ \left( E_{i+1/2}^{n+1/2} + P_{i+1/2}^{n+1/2} \right) \left( \frac{v_{i+1/2}^{n+1/2}}{\rho_{i+1/2}} + \frac{1}{t_{n+1/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( E_{i-1/2}^{n+1/2} + P_{i-1/2}^{n+1/2} \right) \left( \frac{v_{i-1/2}^{n+1/2}}{\rho_{i-1/2}} + \frac{1}{t_{n+1/2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Assim, temos a quantidade  $E_i^{n+1}$  calculada no tempo  $t_{n+1}$  em termos de quantidades calculadas num tempo anterior  $t_n$ . Isso caracteriza o método como sendo explícito. Sua vantagem é de que ele é de segunda ordem em  $\Delta t$  e  $\Delta \rho$ . O mesmo método é usado para se calcular  $M_i^{n+1}$  e  $R_i^{n+1}$ .

Deve-se notar que para calcular a pressão  $P_i^n$  nas equações acima devemos usar uma equação de estado de forma que\*

$$P_i^n = P(\varepsilon_i^n, (n_B)_i^n), \quad (\text{E.18})$$

onde

$$\varepsilon_i^n = E_i^n - M_i^n v_i^n, \quad (\text{E.19})$$

$$(n_B)_i^n = R_i^n \sqrt{1 - (v_i^n)^2}, \quad (\text{E.20})$$

com a velocidade  $v_i^n$  dada pela solução da equação não linear

$$v_i^n = \frac{M_i^n}{E_i^n + P \left( E_i^n - M_i^n v_i^n, R_i^n \sqrt{1 - (v_i^n)^2} \right)}. \quad (\text{E.21})$$

---

\*Ver texto no capítulo 5 para detalhes.

## Bibliografia

- [1] E. Shuryak, Phys. Lett. B **78**, 150 (1978).
- [2] B. Müller, Rep. Prog. Phys. **58**, 611 (1995).
- [3] J. Cleymans *et al.*, Z. Phys. C **52**, 517 (1991).
- [4] C. Gale & P. Lichard, Phys. Rev. D **49**, 3338 (1994).
- [5] C. Song *et al.*, Phys. Rev. D **50**, R1872 (1994).
- [6] L. A. Winckelmann *et al.*, Phys. Rev. C **51**, R9 (1995).
- [7] P. V. Ruuskanen, Nucl. Phys. A **525**, 255c (1991).
- [8] P. V. Ruuskanen, Nucl. Phys. A **544**, 169c (1992).
- [9] H. v. Gersdorff, Nucl. Phys. A **461**, 251 (1987).
- [10] R. Hanbury-Brown & R. Q. Twiss, Nature **177**, 27 (1957).
- [11] R. A. Salmeron, "An introduction to search for the quark-gluon plasma in ultra-relativistic heavy-ion interactions.", Winter School on Quark-Gluon Plasma, India, 1985.
- [12] C. P. Singh, Phys. Rep. **236**, 147 (1993).
- [13] T. Matsui & H. Satz, Phys. Lett. B **1978**, 416 (1986).
- [14] B. Müller; in "Physics of the quark-gluon plasma", ed.: H. Araki *et al.*. Springer-Verlag (1983).



- [15] J. Rafelski & B. Müller, Phys. Rev. Lett. **48**, 1066 (1982).
- [16] P. Koch, B. Müller & J. Rafelski, Phys. Rep. **142**, 167 (1986).
- [17] J. Sollfrank & U. Heinz in Quark-Gluon Plasma 2, Ed. R. C. Hwa, World Scientific.
- [18] T. Abbott *et al.* (E802), Phys. Rev. Lett. **66**, 1567 (1991); W. A. Zajc *et al.* (E802), Nucl. Phys. A **544**, 237c (1992).
- [19] M. Gaździcki *et al.* (NA35), Nucl. Phys. A **498**, 375c (1989); T. Alber *et al.* (NA35), Z. Phys. C **64**, 195 (1994).
- [20] D. Röhrig (NA49), "Recent results from NA49 experiment on Pb-Pb collisions at 158 GeV per nucleon", Jerusalem 1997, a aparecer no proceedings.
- [21] F. Gabler *et al.* (NA49), J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **25**, (1999).
- [22] J. D. Bjorken. Phys. Rev. D **27**, 140 (1983).
- [23] F. Cooper & G. Frye, Phys. Rev. D **10**, 186 (1974).
- [24] F. Grassi, Y.Hama & T. Kodama, Phys. Lett. B **355**, 9 (1995).
- [25] F. Grassi, Y.Hama & T. Kodama, Z. Phys. C **73**, 153 (1996).
- [26] F. Grassi & O. Socolowski Jr., Phys. Rev. Lett. **80**, 1170 (1998).
- [27] F. Grassi & O. Socolowski Jr., Heavy Ion Physics **4**, 257 (1996).
- [28] F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama & O. Socolowski Jr., Heavy Ion Physics **5**, 417 (1997).
- [29] F. Grassi & O. Socolowski Jr., J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **25**, 331 (1999).
- [30] F. Grassi & O. Socolowski Jr., "Interpretation of data with light projectiles in the hydrodynamical description of relativistic nuclear collisions", em preparação .

- 
- [31] F. Grassi & O. Socolowski Jr., "Entropy increase and pion counting in the hydrodynamical description of relativistic nuclear collisions", em preparação .
- [32] F. Grassi & O. Socolowski Jr., J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **25**, 339 (1999).
- [33] N. J. Davidson *et al.* , Phys. Lett. B **255**, 105 (1991).
- [34] N. J. Davidson *et al.* , Phys. Lett. B **256**, 554 (1991).
- [35] D. W. von Oertzen *et al.* , Phys. Lett. B **274**, 128 (1992).
- [36] N. J. Davidson *et al.* , Z. Phys. C **56**, 319 (1992).
- [37] J. Cleymans & H. Satz, Z. Phys. C **57**, 135 (1993).
- [38] S. Abatzis *et al.* , Nucl. Phys. A **566**, 225c (1994).
- [39] J. Bartke *et al.* , Z. Phys. C **48**, 191 (1990).
- [40] J. Letessier, A. Tounsi & J. Rafelski, Phys. Lett. B **292**, 417 (1992).
- [41] J. Sollfrank *et al.* , Z. Phys. C **61**, 659 (1994).
- [42] J. Letessier *et al.* , Phys. Rev. D **51**, 3408 (1995).
- [43] J. Letessier *et al.* , Phys. Rev. Lett. **70**, 3530 (1993).
- [44] K. Redlich *et al.* , Nucl. Phys. A **566**, 391c (1994).
- [45] D. H. Rischke *et al.* , Z. Phys. C **51**, 485 (1991).
- [46] J. Cleymans *et al.* , Phys. Scr. **48**, 277 (1993).
- [47] Particle Data Group, Phys. Rev. D **45**, (1992).
- [48] D. H. Rischke, preprint nucl-th/9809044.

- [49] J. Rafelski, Phys. Lett. B **262**, 333 (1991).
- [50] C. Slotta, J. Sollfrank & U. Heinz, Proceedings of Strangeness in Hadronic Matter, (Tucson), ed. J. Rafelski, p. 462.
- [51] S. Abatzis *et al.*, Phys. Lett. B **316**, 615 (1993); **347**, 158 (1995); **376**, 251 (1996); **355**, 401 (1995).
- [52] T. Åkesson *et al.* (NA34), Z. Phys. C **46**, 365 (1990); A. Bamberger *et al.* (NA35), Z. Phys. C **38**, 89 (1988); A. Bamberger *et al.* (NA35), Nucl. Phys. A **498**, 133c (1989); Y. Takahashi *et al.* (EMU05), Nucl. Phys. A **525**, 591c (1991).
- [53] A. Bamberger *et al.*, (NA35), Z. Phys. C **43**, 25 (1989); A. Bamberger *et al.*, (NA35), Z. Phys. C **48**, 191 (1990); E. Andersen *et al.*, (NA36), Phys. Lett. B **294**, 127 (1992); S. Abatzis *et al.*, (WA85), Phys. Lett. B **270**, 123 (1991).
- [54] K. S. Lee, U. Heinz & E. Schnerdmann, Z. Phys. C **48**, 525 (1990).
- [55] U. Ornik & R. M. Weiner, Phys. Lett. B **263**, 503 (1991).
- [56] I. G. Bearden *et al.*, (NA44), Nucl. Phys. A **610**, 175c (1996).
- [57] J. Baechler *et al.*, (NA35), Phys. Rev. Lett. **72**, 1419 (1994).
- [58] T. Alber *et al.*, (NA35), Z. Phys. C **64**, 195 (1994).
- [59] S. Margetis *et al.*, Heavy Ion Physics **4**, 63 (1996).
- [60] T. Alber *et al.*, (NA35), Phys. Lett. B **366**, 56 (1996).
- [61] WA97 Collaboration, Quark Matter '97 (Tsukuba, Japan, December 1997). Nucl. Phys. A **638**, (1998).
- [62] NA49 Collaboration, Nucl. Phys. A **610**, 188c (1996).

- [63] NA49 Collaboration, Strangeness '97. J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **23**, (1997).
- [64] NA49 Collaboration, Quark Matter '97 (Tsukuba, Japan, December 1997). Nucl. Phys. A **638**, (1998).
- [65] H. van Hecke *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5764 (1998).
- [66] H. Sorge, Phys. Rev. C **52**, 3291 (1995).
- [67] G. Baym, Phys. Lett. B **138**, 18 (1984).
- [68] C.-Y. Wong, Introduction to High-Energy Heavy-Ion Collisions, World Scientific, (1994).
- [69] N. J. Davidson *et al.*, Z. Phys. C **56**, 319 (1992).
- [70] J. Cleymans *et al.*, Z. Phys. C **58**, 347 (1993).
- [71] J. Letessier & J. Rafelski, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **25**, 295 (1999).
- [72] N. Xu home page. <http://www-rnc.lbl.gov/~nxu>
- [73] L. V. Bravina *et al.*, Phys. Lett. B **354**, 196 (1995).
- [74] J. B. Kinson, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **25**, 143 (1999).
- [75] G. D. Yen *et al.*, Phys. Rev. C **56**, 2210 (1997).
- [76] R. A. Ritchie, M. I. Gorenstein & H. G. Miller, Z. Phys. C **75**, 535 (1997).
- [77] J. Sollfrank, P. Koch & U. Heinz, Phys. Lett. B **252**, 256 (1990).
- [78] G. Baym *et al.*, Nucl. Phys. A **407**, 541 (1983).
- [79] Y. Hama & F. W. Pottag, Rev. Bras. Fis. **15**, 289 (1985).
- [80] D. H. Perkins, Introduction to High Energy Physics, Addison Wesley (1982).

- 
- [81] A. Bass *et al.* , Prog. Part. Nucl. Phys. **41**, 225 (1998).
- [82] L. Bravina *et al.* , J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **25**, 351 (1999).
- [83] R. Caliandro *et al.* , J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **25**, 171 (1999).
- [84] W. H. Press *et al.* , Numerical Recipes in Fortran, 2nd ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

