



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Daniele Alessandra Reghini Gazetta

Conjuntos minimais e caóticos em campos de vetores planares suaves por partes

São José do Rio Preto

2016

Daniele Alessandra Reghini Gazetta

Conjuntos minimais e caóticos em campos de vetores planares suaves por partes

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Tiago de Carvalho

São José do Rio Preto

2016

Gazetta, Daniele Alessandra Reghini.

Conjuntos minimais e caóticos em campos de vetores planares suaves por partes / Daniele Alessandra Reghini Gazetta. -- São José do Rio Preto, 2016

51 f. : il.

Orientador: Tiago de Carvalho

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Sistemas dinâmicos diferenciais. 3. Poincaré-Bendixson, Teorema de. 4. Comportamento caótico nos sistemas. 5. Campos vetoriais. I. Carvalho, Tiago de. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Daniele Alessandra Reghini Gazetta

Conjuntos minimais e caóticos em campos de vetores planares suaves por partes

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Tiago de Carvalho

Professor Doutor

UNESP - Bauru

Orientador

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

Professor Doutor

UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin

Professor Doutor

UNESP - Ilha Solteira

São José do Rio Preto, 6 de janeiro de 2016.

À minha família
dedico.

Agradecimentos

Gostaria de lembrar aqui todos aqueles que tornaram possível a realização deste trabalho.

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Dércio e Teresa, e a toda minha família pelo apoio e incentivo durante a realização deste trabalho.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas pelo companherismo e todo auxílio durante esses anos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Tiago de Carvalho, pela confiança e orientação durante o mestrado, como também a todos os demais professores que contribuíram para minha formação.

Aos membros da banca examinadora pela disponibilidade de participar e pelas contribuições acerca deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O principal resultado dessa dissertação é o Teorema de Poincaré-Bendixson para campos de vetores planares suaves por partes, que nos diz quais são os tipos de conjuntos limite. Estudaremos também detalhes a respeito dos conceitos de conjuntos minimais e caóticos em campos de vetores planares suaves por partes.

Palavras-chaves: Campos de vetores planares suaves por partes. Teorema de Poincaré-Bendixson. Conjuntos limite. Minimalidade. Caoticidade. Invariância.

Abstract

The main result of this work is the Poincaré - Bendixson Theorem for planar piecewise smooth vector fields, which tell us what kind of limit sets arise in this context. We will also study details about the concepts of minimal and chaotic sets in planar piecewise smooth vector fields.

Keywords: *Planar piecewise smooth vector fields. Poincaré-Bendixson theorem. Limit sets. Minimality. Chaotic behavior. Invariance.*

Conteúdo

1	Introdução	10
2	Preliminares	13
3	Teorema de Poincaré-Bendixson e conjuntos minimais não-triviais em CVSPs	21
4	Conjuntos caóticos em CVSPs	33
	Índice	51

Introdução

Sistemas dinâmicos buscam entender o comportamento futuro ou passado dos estados de um sistema para o qual existe uma regra determinística de evolução. Por vezes o entendimento do comportamento destes sistemas não passa pela resolução algébrica das equações diferenciais envolvidas, mas sim pela análise qualitativa e geométrica das suas soluções. Este é o objetivo da Teoria Qualitativa das equações diferenciais ordinárias. Toda essa teoria está abordada em vários livros como [3], [5] e [6], entre outros. Esta teoria se baseia em alguns resultados clássicos importantes, tais como o Teorema de Existência e Unicidade, o Teorema de Grobman-Hartman, o Teorema de Poincaré-Bendixson, o Teorema de Peixoto, entre outros.

Recentemente uma nova classe de sistemas ganhou notoriedade, são os chamados *campos de vetores suaves por partes* (CVSPs). Nestes admite-se que exista uma subvariedade Σ de codimensão 1 onde o campo de vetores deixa de ser suave e em alguns casos deixa inclusive de ser contínuo. Como os CVSPs estudados nesta dissertação serão planares, a esta variedade damos o nome de *curva de descontinuidade*.

Os CVSPs tornaram-se uma classe de sistemas comuns em modelagem de problemas de Matemática, Física ou Engenharia, alguns exemplos dessa aplicação pode ser vista em [7], como o modelo de circuitos elétricos em dispositivos mecânicos, em problemas de fricção entre outros.

Esta dissertação foi baseada nos artigos [1] e [2]. Um fato importante a respeito da teoria de CVSPs é que muitos dos teoremas clássicos para campos suaves não valem neste

contexto, por exemplo, notamos que o Teorema de Poincaré-Bendixson para campos de vetores suaves no plano não é válido quando considerado sob o cenário de CVSPs, e como em [2], iremos discutir quais serão as hipóteses deste teorema para que ele continue sendo verdadeiro em CVSPs. O Exemplo 3 de um CVSPs sem movimento de deslize em Σ ilustra o Teorema 2 (**Poincaré-Bendixson para CVSPs**). Mas, como não existe unicidade da trajetória passando por p , os conjuntos ω e α -limite podem ser desconexos.

Ao longo desta dissertação, chegamos à conclusão de que no Teorema 2 só podemos admitir região de costura e pontos de tangência, pois a presença da região de deslize ou de escape permitem que apareçam conjuntos estranhos que não conseguimos caracterizar, um exemplo deste fato é o Exemplo 1.

Um aspecto estudado atualmente é a ocorrência de caos em CVSPs, e também a ocorrência de conjuntos minimais não-triviais como apresentado em [1]. Apresentaremos a definição de conjuntos minimais para CVSPs e exibiremos conjuntos minimais não-triviais possuindo região de deslize como mostrado em [2]. Observaremos que um conjunto minimal trivial é um ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica fechada. A ocorrência de caos não-determinístico é observada e dos conceitos de minimalidade e minimalidade orientável são introduzidos como em [1].

Ainda, como em [1] definiremos conjuntos positivamente-minimais (negativamente-minimais) para CVSPs e estudaremos algumas relações entre eles e com a definição de conjunto minimal dada em [1]. Investigamos também a existência de conjuntos minimais não-triviais e CVSPs caóticos.

Nesta dissertação apresentaremos dois exemplos de conjuntos minimais não-triviais, que são os Exemplos 2 e 5. Estes dois exemplos serão os mais estudados neste trabalho. Faremos uma análise detalhada dos seus retratos de fase e verificaremos se estes são invariantes, minimais, topologicamente transitivos, exibem dependência sensível e caóticos.

Além disso, corrigimos a demonstração da Proposição 1 do artigo [1]. Esta proposição se refere ao Exemplo 5 deste trabalho. Nesta proposição, temos o conjunto $\Lambda_1 = \{(x, y); -3 \leq x \leq 4 \text{ e } (-4+x)(-2+x)^2(3+x) \leq y \leq -(-4+x)(3+x)\}$ e queremos provar que este conjunto é minimal. Durante a demonstração os autores afirmaram que existia um tempo $t_u > 0$ tal que dado um ponto arbitrário $u \in \Lambda_1$ e uma trajetória positiva passando por u , então ela passa por q e pertence a um subconjunto compacto e invariante de Λ_1 . Entretanto, depois de uma análise

mais completa do retrato de fase do sistema Z_1 , dado no Exemplo 5 e considerando o conjunto compacto Λ_1 verificamos a existência de mais dois pontos de pseudo-equilíbrio, denotados por a e b , e portanto, precisamos modificar essa demonstração e para isso utilizamos os Lemas 3 e 4. O diferencial dessa nova demonstração foi que tivemos que considerar estes novos pontos a e b , aumentando assim a possibilidade de trajetórias. Essa nova demonstração se encontra no Capítulo 4, na Proposição 3.

Para finalizar este trabalho, apresentaremos o Teorema 6 que nos dá uma relação entre conjuntos positivamente-minimais e negativamente-minimais com conjuntos caóticos. Note que não podemos alterar as hipóteses do Teorema 6, pois na Observação 9 apresentamos o exemplo do conjunto Λ_1 definido na Proposição 3, e temos que ele é minimal, mas não é positivamente minimal nem negativamente-minimal. Então nesta observação verificamos que Λ_1 não é topologicamente transitivo e portanto, o sistema não é caótico em Λ_1 .

Concluimos que para um conjunto ser caótico, ele deve ter medida positiva e ser positivamente-minimal e negativamente-minimal simultaneamente.

Preliminares

Seja V uma vizinhança arbitrária da origem em \mathbb{R}^2 e Σ uma curva de \mathbb{R}^2 dada por $\Sigma = f^{-1}(0)$, onde $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave que possui $0 \in \mathbb{R}$ como valor regular, isto é, $\nabla f(p) \neq 0$ para todo $p \in f^{-1}(0)$. Essa curva de descontinuidade separa o plano em duas regiões: $\Sigma^+ = \{q \in V; f(q) \geq 0\}$ e $\Sigma^- = \{q \in V; f(q) \leq 0\}$. Vamos assumir também que localmente ao redor da origem $f(x, y) = y$.

Observação 1. *Em casos mais gerais a curva Σ pode apresentar quinas e então f não seria suave. Mas não iremos tratar aqui deste tipo de comportamento.*

Denotemos por χ o espaço de campos de vetores \mathcal{C}^r , $r \geq 1$ e Ω o espaço de campos de vetores $Z : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & \text{para } (x, y) \in \Sigma^+ \\ Y(x, y), & \text{para } (x, y) \in \Sigma^- \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2) \in \chi$ e as trajetórias de Z são soluções de $\dot{q} = Z(q)$.

Considere o produto interno usual em \mathbb{R}^2 , dado por

$$Xf(p) = \langle \nabla f(p), X(p) \rangle = \|\nabla f(p)\| \|X(p)\| \cos \Theta$$

onde Θ é o ângulo entre os vetores $X(p)$ e $\nabla f(p)$. Desta forma se $\cos \Theta > 0$ então o ângulo entre os dois vetores $X(p)$ e $\nabla f(p)$ é menor que 90° , mas se $\cos \Theta < 0$ então o ângulo entre

os dois vetores $X(p)$ e $\nabla f(p)$ é maior que 90° . A partir do ângulo entre os vetores $X(p)$ e $\nabla f(p)$ como também entre $Y(p)$ e $\nabla f(p)$, iremos distinguir as seguintes partições da região de descontinuidade:

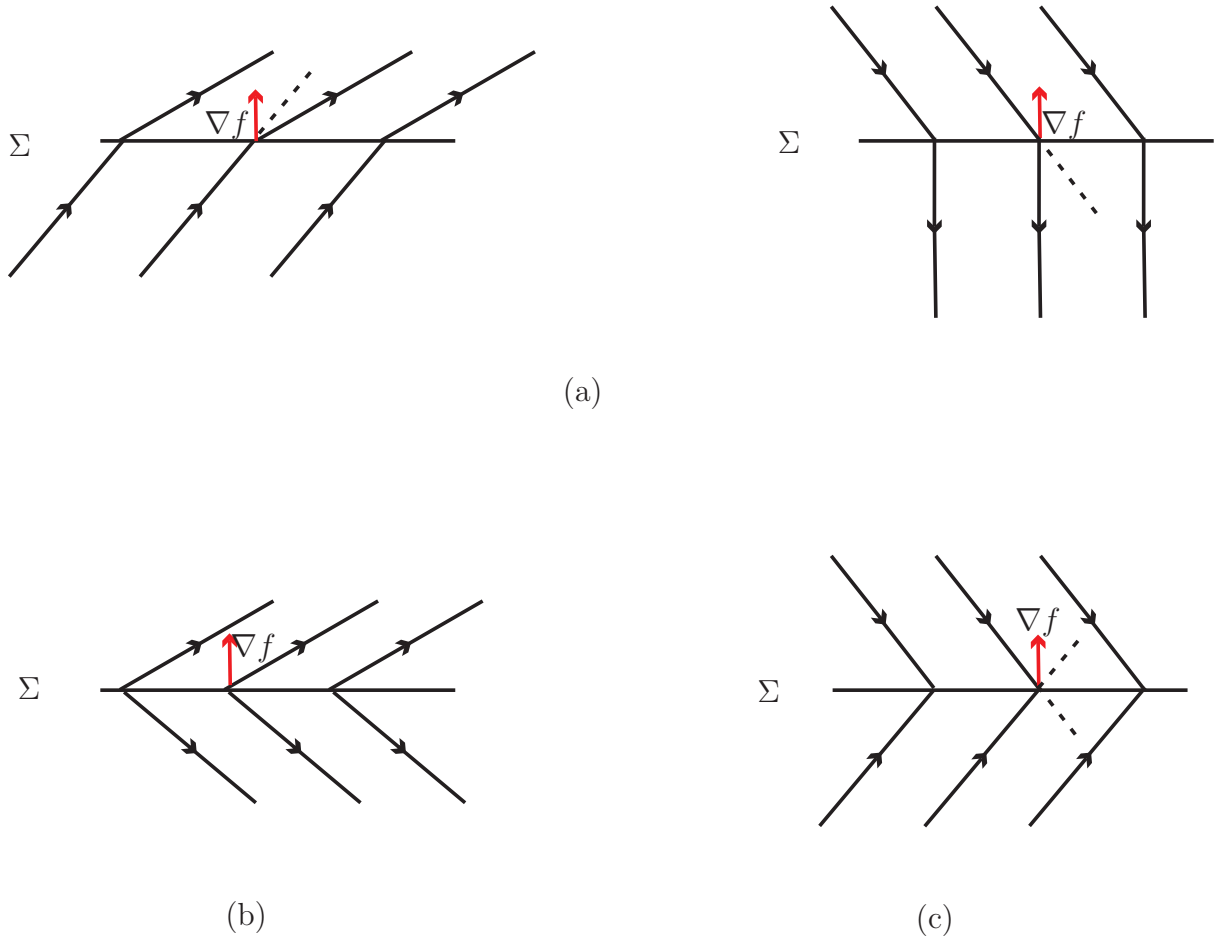


Figura 2.1: (a) Região de Costura, (b) Região de Escape e (c) Região de Deslize

(i) $p \in \Sigma$ está na **região de costura** Σ^c se $(Xf(p))(Yf(p)) > 0$.

Em particular,

- se $Xf(p) = \langle \nabla f(p), X(p) \rangle > 0$ e $Yf(p) = \langle \nabla f(p), Y(p) \rangle > 0$ então $p \in \Sigma^{c+}$
- se $Xf(p) = \langle \nabla f(p), X(p) \rangle < 0$ e $Yf(p) = \langle \nabla f(p), Y(p) \rangle < 0$ então $p \in \Sigma^{c-}$

A partir dessas considerações podemos fazer os retratos de fase, como segue na Figura 2.1 (a).

(ii) $p \in \Sigma$ está na **região de escape** Σ^e se $Xf(p) > 0$ e $Yf(p) < 0$.

Ver Figura 2.1 (b).

(iii) $p \in \Sigma$ está na **região de deslize** Σ^d se $Xf(p) < 0$ e $Yf(p) > 0$.

Ver Figura 2.1 (c).

Note que na região de costura temos, por exemplo, $(Xf(p)) > 0$ e $(Yf(p)) > 0$. Neste caso o ângulo entre os vetores $X(p)$ e $\nabla f(p)$ é menor que 90° . Analogamente, o ângulo entre $Y(p)$ e $\nabla f(p)$ é menor que 90° , daí resulta a Figura 2.1 (a) do lado esquerdo.

Já em uma região de escape o ângulo entre os vetores $X(p)$ e $\nabla f(p)$ é menor que 90° e o ângulo entre $Y(p)$ e $\nabla f(p)$ é maior que 90° , por isso obtemos o retrato de fase da Figura 2.1 (b). E caso contrário, teremos uma região de deslize.

Definição 1. O **campo vetorial deslizante** associado a $Z \in \Omega$ é um campo vetorial Z^d tangente a Σ^d e definido com $p \in \Sigma^d$ por $Z^d(p) = m - p$ com m sendo o ponto do segmento que une $p + X(p)$ e $p + Y(p)$ tal que $m - p$ é tangente a Σ^d .

Se $p \in \Sigma^d$, então $p \in \Sigma^e$ para $-Z$ e podemos definir o campo vetorial de escape associado a Z por $Z^e = -(-Z)^d$. Usaremos a notação Z^Σ para ambos os casos. Nas figuras representaremos a dinâmica por setas duplas.

Observação 2. Nesta observação iremos encontrar o campo deslizante, seguindo a Convenção de Filippov, ver [4].

Considere o seguinte caso, como apresentado na Figura 2.2, onde $p = (p_1, 0)$, o vetor $X(p) + p$ tem coordenadas $(x_1 + p_1, x_2)$ e o vetor $Y(p) + p$ tem coordenadas $(y_1 + p_1, y_2)$ no qual $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$. Podemos encontrar a equação geral da reta r que passa pelos pontos $(x_1 + p_1, x_2)$ e $(y_1 + p_1, y_2)$ através do seguinte determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 + p_1 & x_2 & 1 \\ y_1 + p_1 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e concluir que a equação geral é dada por

$$y = \frac{(y_2 - x_2)x - x_1y_2 - y_2p_1 + x_2y_1 + x_2p_1}{y_1 - x_1}.$$

Analogamente encontramos a equação da reta s que passa pelos pontos $(p_1, 0)$ e tem como vetor diretor $(1, 0)$, logo a equação geral da reta s é $y = 0$.

Se fizermos a intersecção dessas duas retas encontramos o ponto

$$\bar{p} = \left(p_1 + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - x_2}, 0 \right).$$

Logo, o campo deslizante é dado por

$$Z^\Sigma(p) = \bar{p} - p = \left(p_1 + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - x_2}, 0 \right) - (p_1, 0) = \frac{Yf \cdot X(p) - Xf \cdot Y(p)}{Yf(p) - Xf(p)}, \quad (2.2)$$

onde $f(x, y) = y$.

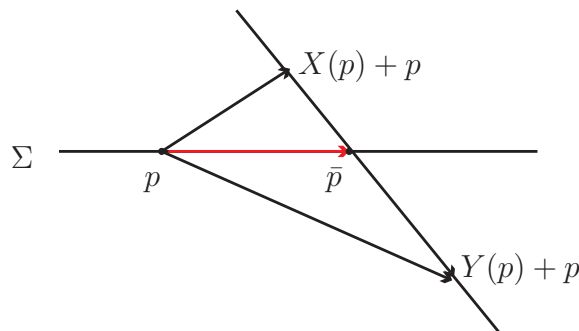


Figura 2.2: Convenção de Filippov.

Definição 2. Dizemos que $p \in \Sigma$ é um ponto Σ -regular se $(Xf(p))(Yf(p)) > 0$ (isto é, $p \in \Sigma^c$) ou $(Xf(p))(Yf(p)) < 0$ e $Z^\Sigma(p) \neq 0$ (isto é, $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^d$ e não é ponto de equilíbrio de Z^Σ)

Os pontos de Σ que não são Σ -regulares são chamados de Σ -singulares.

Observação 3. Se p é Σ -singular podemos classificar este ponto em dois tipos:

(i) $p \in \Sigma^t$ é chamado de uma **singularidade tangencial** se $(Xf(p))(Yf(p)) = 0$ (isto é, p é um ponto de tangência entre X e/ou Y com Σ).

(ii) $p \in \Sigma^p$ é chamado de **pseudo-equilíbrio** de Z se $Z^\Sigma(p) = 0$

Dado $W \in \chi$, denotaremos por r a ordem de contato da trajetória Γ_W de W com Σ no ponto p se $W^k f(p) = 0$ para todo $k = 0, \dots, r - 1$ e $W^r f(p) \neq 0$. Se $W = X$ (respectivamente, Y) dizemos que $p \in \Sigma$ é uma **tangência invisível** se a ordem de contato r de Γ_X (respectivamente, de Γ_Y) passando por p é par e $X^r f(p) < 0$ (respectivamente, $Y^r f(p) > 0$). Analogamente, se $W = X$ (respectivamente, Y) dizemos que $p \in \Sigma$ é uma **tangência visível** se a ordem de contato r de Γ_X (respectivamente, de Γ_Y) passando por p é par e $X^r f(p) > 0$ (respectivamente, $Y^r f(p) < 0$).

Definição 3. Um ponto de tangência $p \in \Sigma^t$ é **singular** se p é invisível para ambos os campos X e Y . Se ele não é singular então $p \in \Sigma^t$ é **regular**.

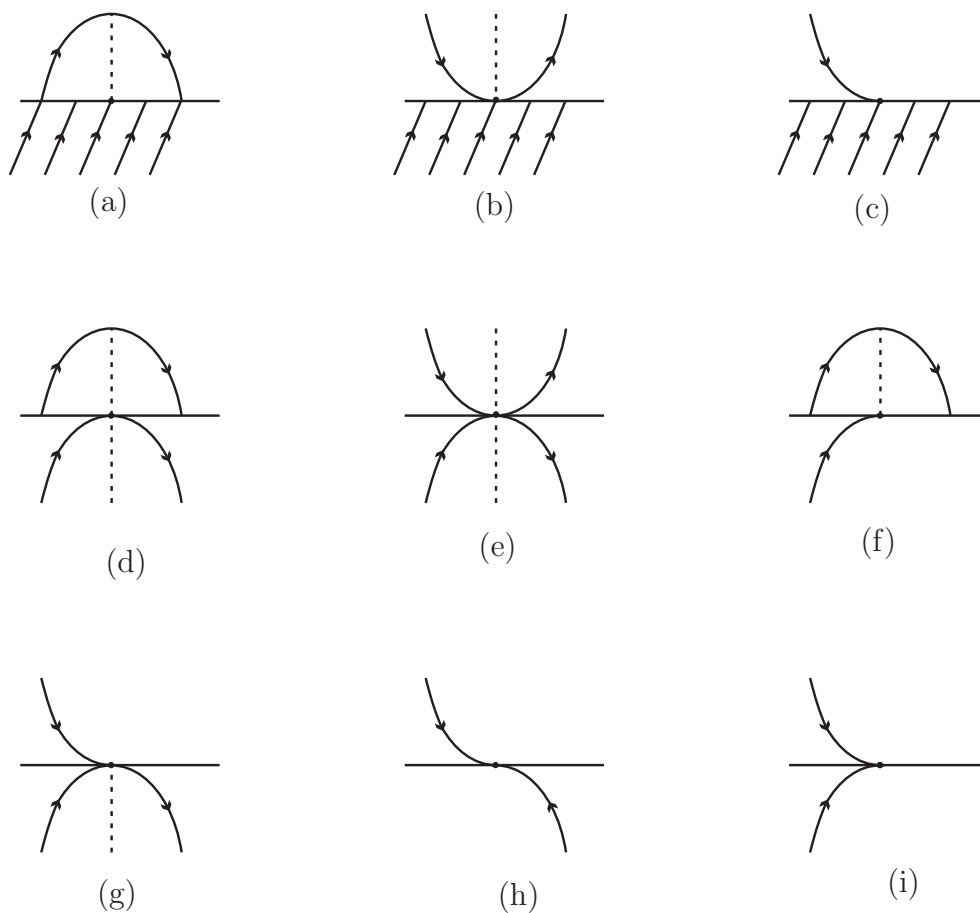


Figura 2.3: Casos onde ocorre pontos de tangência regulares.

Observação 4. Sejam $p \in \Sigma$ e Γ_X, Γ_Y as trajetória de X e Y passando por p , respectivamente. Considere que $V_p = V_p^- \cup \{p\} \cup V_p^+$, onde $V_p^- = \{x \in \Sigma; x < p\}$ e $V_p^+ = \{x \in \Sigma; x > p\}$. Seja m a soma da ordem do contato das trajetórias Γ_X e Γ_Y com Σ em p . Podemos caracterizar o comportamento do campo $Z \in \Omega$ em uma vizinhança de V_p em termos de m :

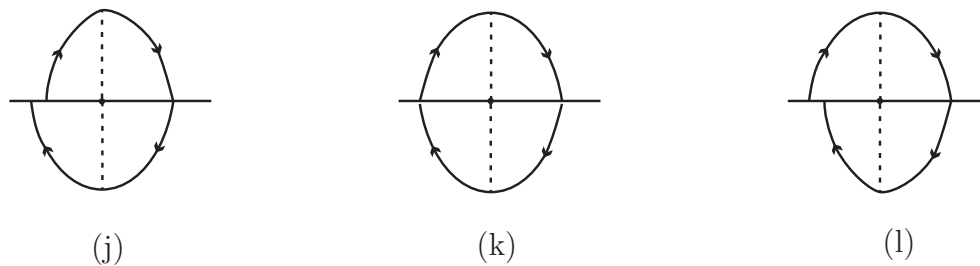


Figura 2.4: Casos onde ocorre pontos de tangência singulares.

- (1) Se m é ímpar, então $V_p^- \subset \Sigma^c$ e $V_p^+ \subset \Sigma^d \cup \Sigma^e$ ou vice versa, os gráficos (a), (b), (f) e (g) da Figura 2.3 são exemplos;
- (2) Se m é par, então
- (i) $(V_p \setminus \{p\}) \subset \Sigma^c$, os gráficos (j), (k) e (l) da Figura 2.4 e (d) da Figura 2.3 são exemplos;
 - (ii) $(V_p \setminus \{p\})$ está contido em Σ^d ou Σ^e , os gráficos (c), (h) e (i) da Figura 2.3 são exemplos;
 - (iii) $V_p^- \subset \Sigma^d$ e $V_p^+ \subset \Sigma^e$, o gráfico (e) da Figura 2.3 é um exemplo.

Seja $W \in \chi$. Denotaremos o fluxo de W por $\phi_W(t, p)$, assim,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_W(t, p) = W(\phi_W(t, p)) \\ \phi_W(0, p) = p \end{cases}$$

onde $t \in I \subset \mathbb{R}$ (intervalo maximal), com $p \in W$.

Definição 4. A **trajetória local** $\phi_Z(t, p)$ de CVSP dada por (2.1) é definida como segue:

- (i) Se $p \in \Sigma^+ \setminus \Sigma$ ou $p \in \Sigma^- \setminus \Sigma$, a trajetória é dada por $\phi_Z(t, p) = \phi_X(t, p)$ ou $\phi_Z(t, p) = \phi_Y(t, p)$, respectivamente.
- (ii) Se $p \in \Sigma^c$ é tal que $Xf(p) > 0$ e $Yf(p) > 0$, a trajetória é definida como $\phi_Z(t, p) = \phi_Y(t, p); t \in I \cap \{t \leq 0\}$ e $\phi_Z(t, p) = \phi_X(t, p); t \in I \cap \{t \geq 0\}$. Se $Xf(p) < 0$ e $Yf(p) < 0$, a trajetória é definida como $\phi_Z(t, p) = \phi_X(t, p); t \in I \cap \{t \leq 0\}$ e $\phi_Z(t, p) = \phi_Y(t, p); t \in I \cap \{t \geq 0\}$.
- (iii) Se $p \in \Sigma^e$, a trajetória é definida como $\phi_Z(t, p) = \phi_{Z^\Sigma}(t, p)$ para $t \in I \cap \{t \leq 0\}$ e $\phi_Z(t, p)$ é ou $\phi_X(t, p)$ ou $\phi_Y(t, p)$ ou $\phi_{Z^\Sigma}(t, p)$ para $t \in I \cap \{t \geq 0\}$. Para $p \in \Sigma^d$ a definição é a mesma, mas revertendo o tempo.
- (iv) Para p um ponto de tangência regular então a trajetória é definida por $\phi_Z(t, p) = \phi_1(t, p); t \in I \cap \{t \leq 0\}$ e $\phi_Z(t, p) = \phi_2(t, p); t \in I \cap \{t \geq 0\}$, onde ϕ_1, ϕ_2 pode ser em ϕ_X ou ϕ_Y ou ϕ_{Z^Σ} .
- (v) Para p um ponto de tangência singular então $\phi_Z(t, p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 5. A **trajetória global** $\Gamma_Z(t, p_0)$ de $Z \in \Omega$ passando através de p_0 é uma união $\Gamma_Z(t, p_0) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \{\sigma_i(t, p_i); t_i \leq t \leq t_{i+1}\}$ de trajetórias locais preservando a orientação, $\sigma_i(t, p_i)$ satisfazendo $\sigma_i(t_{i+1}, p_i) = \sigma_{i+1}(t_{i+1}, p_{i+1}) = p_{i+1}$ e $t_i \rightarrow \pm\infty$ com $i \rightarrow \pm\infty$.

Definição 6. Dada a trajetória global $\Gamma_Z(t, p_0)$, o conjunto $\omega(\Gamma_Z(t, p_0)) = \{q \in V; \exists(t_n) \text{ que satisfaz } \Gamma_Z(t_n, p_0) \rightarrow q \text{ quando } t_n \rightarrow +\infty\}$ é chamado conjunto ω -**limite** de $\Gamma_Z(t, p_0)$. Analogamente, $\alpha(\Gamma_Z(t, p_0)) = \{q \in V; \exists(t_n) \text{ que satisfaz } \Gamma_Z(t_n, p_0) \rightarrow q \text{ quando } t_n \rightarrow -\infty\}$ é chamado conjunto α -**limite** de $\Gamma_Z(t, p_0)$. O conjunto ω -limite (respectivamente, α -limite) de um ponto p é a união dos conjuntos ω -limite (respectivamente, α -limite) de todas as trajetórias globais passando por p .

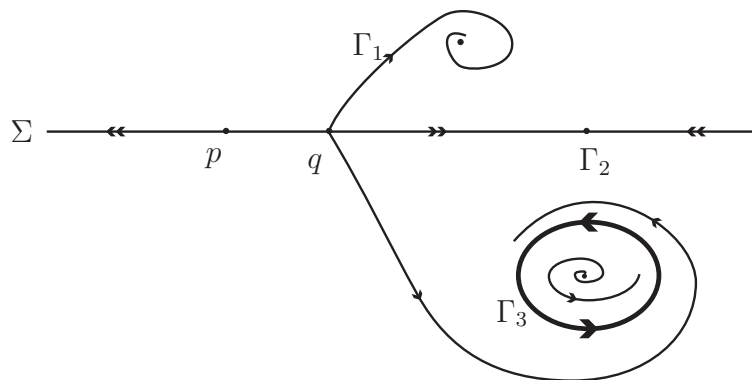


Figura 2.5: Exemplo de não unicidade da trajetória e de (conexidade do) conjunto limite.

Exemplo 1. Neste exemplo da Figura 2.5 podemos observar que o Teorema de Existência e Unicidade não é válido para campos de vetores suaves por partes. Podemos notar também que o conjunto ω -limite de q é a união dos conjuntos ω -limite de cada trajetória Γ_i , $i = 1, 2, 3$. No qual Γ_1 é um foco, Γ_2 é um ponto de pseudo-equilíbrio e Γ_3 é um ciclo limite, que por sua vez são desconexos. E o conjunto α -limite é composto pelo ponto de pseudo-equilíbrio p .

Definição 7. Considere $Z = (X, Y) \in \Omega$ e uma órbita global fechada Δ de Z . Dizemos que Γ é um:

- (i) **pseudo-ciclo** se $\Delta \cap \Sigma \neq \emptyset$ e não contém nenhum ponto de equilíbrio ou pseudo-equilíbrio.
- (ii) **pseudo-gráfico** se $\Delta \cap \Sigma \neq \emptyset$ e é uma união de pontos de equilíbrio, pseudo-equilíbrio e arcos de órbitas de Z conectando esses pontos.

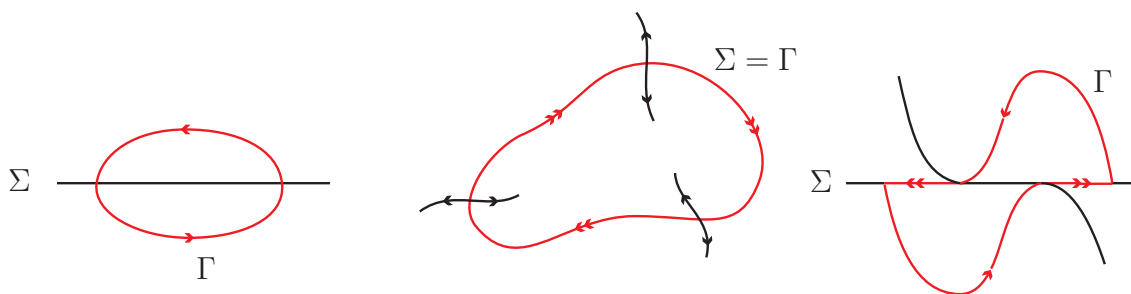


Figura 2.6: Algumas possibilidades de pseudo-ciclos.

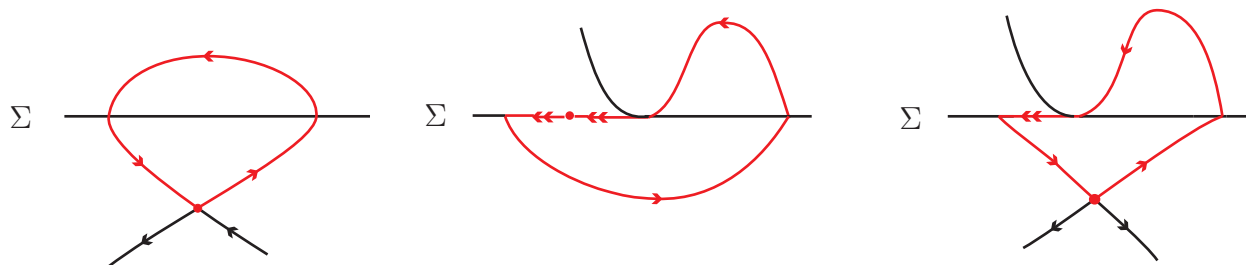


Figura 2.7: Algumas possibilidades de pseudo-gráficos.

Definição 8. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é **Z-invariante** se para cada $p \in A$ e toda trajetória $\Gamma_Z(t, p)$ passando por p , temos que $\Gamma_Z(t, p) \subset A$.

Definição 9. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ é **minimal** para $Z \in \Omega$ se

- (i) $M \neq \emptyset$;
- (ii) M é compacto;
- (iii) M é Z-invariante;
- (iv) M não contém nenhum subconjunto próprio que possui as características acima.

Observação 5. Observe que o pseudo-ciclo Γ do lado direito da Figura 2.6 é o conjunto α -limite de toda as trajetórias globais em um vizinhança dele. Contudo, Γ não é Z-invariante de acordo com a Definição 8, pois existe ponto de tangência visível. Este fenômeno apresenta um aspecto distinto não previsto na teoria clássica sobre campos de vetores suaves onde os conjuntos α e ω -limite são conjuntos invariantes, pois neste caso o conjunto α -limite não é invariante.

Teorema de Poincaré-Bendixson e conjuntos minimais não-triviais em CVSPs

Neste tópico iremos estudar especificamente o Teorema de Poincaré-Bendixson para CVSPs. Este teorema nos diz qual é o tipo de conjunto limite que pode surgir em uma região compacta do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 . Iremos nos preocupar com conjuntos minimais não-triviais e conjuntos limite em CVSPs, como apresentado em [2].

Vamos apresentar um exemplo de conjunto minimal não-trivial.

Exemplo 2. Considere $Z = (X, Y) \in \Omega$ onde

$$X(x, y) = (1, -2x)$$

$$Y(x, y) = (-2, 2x - 4x^3)$$

A região de descontinuidade é dada por: $\Sigma = f^{-1}(0) = \{(x, y); y = 0\}$. Assim, se $y > 0$ temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

e se $y < 0$ temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2 \\ \dot{y} = 2x - 4x^3 \end{cases}$$

Considerando a condição inicial no campo X no qual $(x(0), y(0)) = (0, k_+)$, onde k_+ é uma constante positiva, podemos descrever a solução algébrica deste campo, que é dada por $y = -x^2 + k_+$.

Já para o campo Y , consideremos a condição inicial $(x(0), y(0)) = (0, k_-)$, onde k_- é uma constante negativa, podemos descrever a solução algébrica para este campo, que é dada por $y = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + k_-$.

Portanto, fazendo alguns cálculos para realizar uma análise do retrato de fase, temos que

$$\nabla f(x, y) = (0, 1)$$

$$Xf(x, y) = (1, -2x) \cdot (0, 1) = -2x$$

$$Yf(x, y) = (-2, 2x - 4x^3) \cdot (0, 1) = 2x - 4x^3$$

$$X^2f(x, y) = X \cdot \nabla Xf(x, y) = (1, -2x) \cdot (-2, 0) = -2$$

$$Y^2f(x, y) = Y \cdot \nabla Yf(x, y) = (-2, 2x - 4x^3) \cdot (2 - 12x^2, 0) = -4 + 24x^2$$

Verifiquemos agora onde existe região de costura:

$$(Xf(x, y)) \cdot (Yf(x, y)) = 8x^4 - 4x^2 > 0$$

$$4x^2(2x^2 - 1) > 0$$

$$|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} > x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Verifiquemos agora onde existe região de escape:

$$Xf(x, y) > 0 \Rightarrow -2x > 0 \Rightarrow x < 0$$

$$Yf(x, y) < 0 \Rightarrow 2x - 4x^3 < 0 \Rightarrow x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Verifiquemos agora onde existe região de deslize:

$$Xf(x, y) < 0 \Rightarrow -2x < 0 \Rightarrow x > 0$$

$$Yf(x, y) > 0 \Rightarrow 2x - 4x^3 > 0 \Rightarrow x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vamos encontrar os pontos de tangência no campo X :

$Xf(x, y) = 0 \Rightarrow x = 0$. Portanto, a origem é um ponto de tangência e como $X^2f(0, 0) = -2 < 0$, logo a origem é uma tangência invisível.

Vamos encontrar os pontos de tangência no campo Y :

$Yf(x, y) = 0 \Rightarrow 2x - 4x^3 = 0$, ou seja, $x = 0$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, os pontos de tangência são $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Como $Y^2f(0, 0) = -4$ então a origem é uma tangência visível e $Y^2f(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = Y^2f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = 8 > 0$ então os pontos $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ são de tangência invisível.

Vamos agora encontrar a orientação do campo deslizando:

O campo deslizando é dado pela Equação (2.2):

$$Z^\Sigma(x, y) = \frac{Yf \cdot X(x, y) - Xf \cdot Y(x, y)}{Yf(x, y) - Xf(x, y)} = \frac{(-4x^3 - 2x, 0)}{-4x^3 + 4x}.$$

Verificando o sinal do polinômio $-4x^3 - 2x$ sobre o polinômio $-4x^2 + 4x$, observamos que o vetor deslizando aponta para a esquerda no intervalo aberto (p_-, p^+) e não existe ponto de pseudo-equilíbrio.

Portanto, segue na Figura 3.1 o retrato de fase do campo Z , denotaremos a origem por p , $p_+ = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $p_- = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

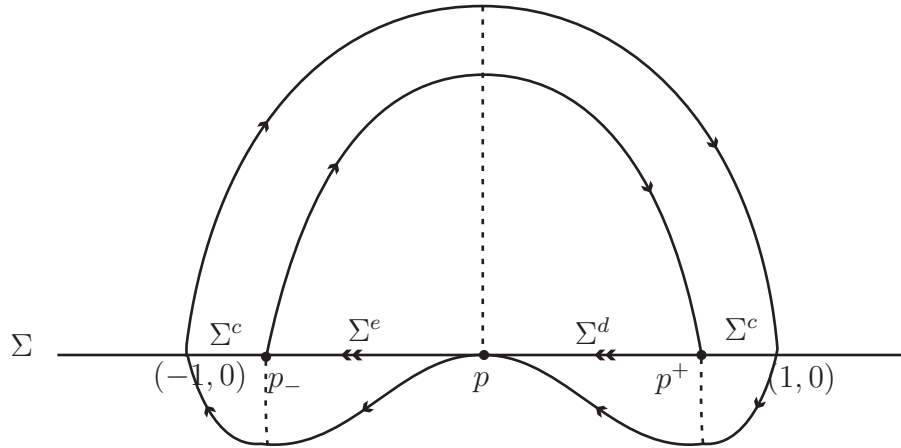


Figura 3.1: Curvas integrais e pontos de tangência.

Proposição 1. Considere $Z = (X, Y) \in \Omega$ onde

$$X(x, y) = (1, -2x)$$

$$Y(x, y) = (-2, 2x - 4x^3)$$

e $\Sigma = f^{-1}(0) = \{(x, y); y = 0\}$. O conjunto $\Lambda = \{(x, y); -1 \leq x \leq 1 \text{ e } \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} \leq y \leq 1 - x^2\}$ é um conjunto minimal para Z .

Demonstração. Temos que $\Lambda \neq \emptyset$ e é compacto, pois é fechado e limitado. Vamos mostrar que Λ é Z -invariante.

Pela Definição 4, temos que em $\partial\Lambda \setminus \{p\}$ existe unicidade da trajetória e que a trajetória global de qualquer ponto em Λ passa por p para algum tempo t^* .

Como p é um ponto de tangência visível para o campo Y e $(0, 0) \in \partial\Sigma^e \cap \partial\Sigma^d$ então pela Definição 4 qualquer trajetória passando por p fica em Λ e portanto Λ é Z -invariante.

Agora vamos mostrar que Λ não contém nenhum subconjunto próprio que possui as características dos itens (i), (ii) e (iii) da Definição 9.

Observemos que se tomarmos $p_1, p_2 \in \Lambda$, a trajetória global positiva por p_1 chega em uma região de deslize entre p e p_+ e desliza para p . E a trajetória global negativa por p_2 chega em uma região de escape entre p_- e p e desliza para p , logo concluímos que existe uma trajetória conectando p_1 e p_2 .

Seja $\Lambda' \subset \Lambda$ um conjunto Z -invariante. Dado $q_1 \in \Lambda'$ e $q_2 \in \Lambda$, sabemos que existe uma trajetória conectando esses dois pontos e como Λ' é Z -invariante então $q_2 \in \Lambda'$. E portanto $\Lambda' = \Lambda$. Logo, Λ é um conjunto minimal. \square

Proposição 2. *Seja Λ como definido na Proposição 1. Se $q \in \Lambda$ então existe uma trajetória passando por q que não é densa em Λ .*

Demonstração. Pela Definição 4, existe uma trajetória Γ_0 de Z que coincide com a curva fechada $\partial\Lambda$, que é a fronteira de Λ .

Além disso, como mostramos na Proposição 1, dado um ponto arbitrário $q \in \Lambda$, cada órbita global passando por q atinge a origem em algum tempo finito, lembremos que a origem foi denotada por p . Seja Γ_1 um arco da trajetória de Z que conecta p e q . Assim, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ é uma trajetória não densa de Z em Λ passando por $q \in \Lambda$. \square

Um outro exemplo de conjunto minimal não-trivial com interior não-vazio é ilustrado na Figura 3.2.

Agora iremos discutir o Teorema de Poincaré-Bendixson para campo de vetores suaves por partes e através dos exemplos anteriores notamos que a presença da região de deslize ou de escape destrói a unicidade das trajetórias globais pois aparecem conjuntos estranhos que não conseguimos caracterizar, um exemplo deste fato é o Exemplo 1. Então para analisarmos o

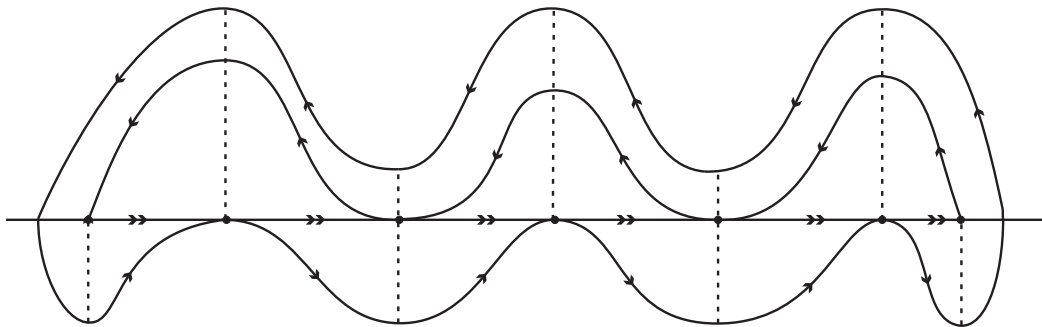


Figura 3.2: Conjunto minimal não-trivial com interior não-vazio.

conjunto ω -limite iremos considerar que a região de descontinuidade possui somente pontos de costura ou de tangência.

Seja Δ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e X um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$ em Δ . Denotaremos a semiórbita positiva passando por $p \in \Delta$ por $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}$. Para o caso de campos de vetores suaves no plano o teorema, é o seguinte:

Teorema 1 (Teorema de Poincaré-Bendixson para campos suaves no plano). *Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma curva integral de X , definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+ esteja contida num compacto $K \subset \Delta$. Suponha que o campo X possua um número finito de singularidades em $\omega(p)$. Têm-se as seguintes alternativas:*

- (i) *Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*
- (ii) *Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando $t \rightarrow \pm\infty$.*
- (iii) *Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.*

Este Teorema, como também sua demonstração podem ser encontrados em [6].

Para o caso de campos suaves por partes sua versão é:

Teorema 2 (Teorema de Poincaré-Bendixson para CVSPs). *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Assuma que Z não tem movimento de deslize ou de escape e que tem trajetória global $\Gamma_Z(t, p)$ cuja trajetória positiva $\Gamma_Z^+(t, p)$ está contida em um subconjunto compacto $K \subset V$. Suponha também que X e Y tem um número finito de pontos críticos em K , e um número finito de pontos de tangência em Σ . Então, o conjunto ω -limite $\omega(\Gamma_Z(t, p))$ de $\Gamma_Z(t, p)$ é um dos casos abaixo:*

- (i) um ponto de equilíbrio de X ou Y ;
- (ii) uma órbita periódica de X ou Y ;
- (iii) um gráfico de X ou Y ;
- (iv) um pseudo-gráfico;
- (v) um pseudo-ciclo;
- (vi) um ponto de tangência singular.

Demonstração. Considere $p \in K \subset V$, se existir um $t_0 > 0$ tal que a trajetória global $\Gamma_Z(t, p)$ não atinge Σ para $t > t_0$, então pelo Teorema de Poincaré-Bendixson para campos suaves no plano concluímos que ocorrem um dos três primeiros casos. Caso contrário, irá existir uma sequência $t_i \subset \mathbb{R}$ cujo $t_i \rightarrow +\infty, i \rightarrow +\infty$ tal que $\Gamma_Z(t_i, p) = p_i \in \Sigma$.

A hipótese de que não existe movimento de deslize e nem de escape implica que $Xf(p_i) \cdot Yf(p_i) \geq 0$. Observamos que se $Xf(p_i) = 0$ e $Yf(p_i) \neq 0$ então a trajetória de X que passa por p_i tem contato de ordem ímpar com Σ , e se $Xf(p_i) \neq 0$ e $Yf(p_i) = 0$ a trajetória de Y que passa por p_i tem contato de ordem ímpar com Σ , pois se o contato fosse de ordem par apareceria movimento de deslize.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, dizemos que $p_i \in T_p$ se um dos casos abaixo acontecem:

- (i) $Xf(p_i) \cdot Yf(p_i) > 0$
- (ii) $Xf(p_i) = 0$ e $Yf(p_i) \neq 0$
- (iii) $Xf(p_i) \neq 0$ e $Yf(p_i) = 0$
- (iv) $Xf(p_i) = Yf(p_i) = 0$ e em ambos os casos os campos tem contato de ordem ímpar com Σ .

Se $Xf(p_i) = Yf(p_i) = 0$ e a tangência é invisível em ambos os campos ou se p_i é um ponto de equilíbrio, dizemos que $p_i \in S_p$. Para o caso em que $Xf(p_i) = Yf(p_i) = 0$ e a ordem de contato com Σ de um campo é par e a outra é ímpar aparece uma região de deslize ou escape, por isso não consideramos este caso.

Ou seja,

$$S_p = \{p_i; p_i \text{ é um ponto de tangência singular ou de equilíbrio de } X \text{ ou } Y\},$$

$T_p = \{p_i; \text{ se não existe qualquer ambiguidade sobre a escolha da trajetória local passando por } p_i \text{ e } p_i \notin S_p\}$,

$$N_p = \{p_i; p_i \notin S_p \cup T_p\}$$

Observe que, S_p tem no máximo um elemento p_1 e por hipótese, N_p é um conjunto finito. Se $S_p \neq \emptyset$, então $p = \Gamma_Z(t, p) = p_1 = \omega(p)$.

Separamos a prova em dois casos: T_p é finito e T_p é infinito.

Suponhamos que o conjunto T_p é finito e denotemos por n_p o número de elementos do conjunto N_p e por t_p o número de elementos do conjunto T_p . Denotemos também por Γ_m um arco de $\Gamma_Z(t, p)$ conectando dois pontos consecutivos p_i e p_{i+1} no qual cada $p_i \in \Sigma$. Como só existe região de costura e pontos de tangência há no máximo $2^{n_p} + t_p$ arcos Γ_m de $\Gamma_Z(t, p)$, pois um ponto na região de tangência tem duas possibilidades de caminhos e um ponto na região de costura só tem uma possibilidade.

Assim, existe um subconjunto $\Upsilon \subset \{1, 2, \dots, 2^{n_p} + t_p\}$ tal que $\Gamma = \bigcup_{j \in \Upsilon} \Gamma_j$. Temos que Γ é uma órbita fechada, pois o conjunto de pontos N_p é finito e como o tempo converge para infinito então em algum momento irá repetir e portanto a órbita é fechada. Se por acaso, o arco não voltasse a bater em Σ , então poderíamos aplicar o Teorema de Poincaré-Bendixson e encontraríamos quem seria o ω -limite. Mas como o arco volta a bater em Σ , então segue o que foi dito anteriormente.

Provemos agora que $\omega(\Gamma_Z(t, p)) = \Gamma$. De fato, tomemos $q \in \Gamma$ então existe uma sequência (t_n) tal que $\Gamma(t_n, p) = q$ e $t_n \rightarrow +\infty$, logo $q \in \omega(\Gamma_Z(t, p))$.

Por outro lado, se $q \in \omega(\Gamma_Z(t, p))$ então existe uma sequência s_k , em que $s_k \rightarrow +\infty$ tal que $\Gamma_Z(s_k, p) = x_k \rightarrow q$. Cada arco Γ_m é um arco de Γ_Z , como existem finitos arcos Γ_m e infinitos pontos x_k , então irá existir um arco Γ_j que contém infinitos pontos, e como Γ_j é compacto, então existe um subsequência em Γ_j que é convergente e converge para x_0 , pela unicidade do limite, temos que $x_0 = q$. Portanto, $q \in \Gamma$.

Daí, provamos que o ω -limite é uma órbita fechada interseccionando Σ , e como por hipótese não temos pontos de equilíbrio, então ω -limite é um pseudo-ciclo.

Agora, assumimos que T_p é um conjunto infinito.

Neste caso, existe um ponto $q \in \Sigma$ e uma subsequência $(t_{i_j}) = (s_j)$ de t_i tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Gamma_Z(s_j, p) = q \quad (3.1)$$

visto que $\Gamma_Z^+(t, p) \subset K$ e K é um compacto.

Observamos que $q \in \omega(\Gamma_Z(t, p)) \cap \Sigma \neq \emptyset$.

Como não há movimento de deslize em K , temos $\{q\} = S_q$ ou $q \in T_q$ ou $q \in N_q$.

Se $\{q\} = S_q$ então q ou é ponto de tangência singular ou um ponto de equilíbrio. Se q é ponto de tangência singular então $\omega(\Gamma_Z(t, p)) = \{q\}$. De fato, como ambos os campos X e Y tem pontos de tangência invisível e se $x_0 \in \omega(\Gamma_Z(t, p))$ então existe uma sequência $s_k \subset \mathbb{R}, s_k \rightarrow +\infty$ tal que $\Gamma_Z(s_k, p) = x_k \rightarrow q$. Logo, existirá uma vizinhança V_q de q em V tal que toda trajetória de Z converge para q . Portanto, $\omega(\Gamma_Z(t, p)) = \{q\}$, pois o limite é único. Portanto, concluímos que o ω -limite é um ponto de tangência singular.

Se q é ponto de equilíbrio então segue que o ω -limite é o primeiro caso do Teorema 2.

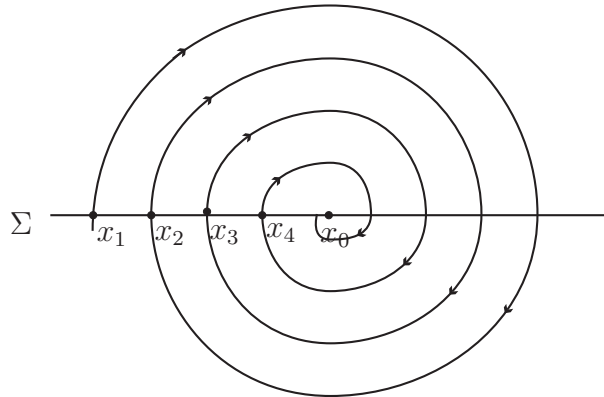


Figura 3.3: Caso onde existe pontos de tangência singular em $\omega(\Gamma_Z(t, p)) \cap \Sigma$.

Na sequência vamos separar a análise em dois casos: se $\omega(\Gamma_Z(t, q))$ contém pontos de equilíbrio ou se $\omega(\Gamma_Z(t, q))$ não contém pontos de equilíbrio.

Vejamos o segundo caso, se $\omega(\Gamma_Z(t, q))$ não contém pontos de equilíbrio.

Se $q \in N_q$ e como q não é uma tangência singular então q é uma tangência visível para ambos os campos X e Y . Assim, pela Definição 4 há duas possibilidades de escolha para a trajetória local positiva de Z passando por q e pelo menos uma delas está contida em $\omega(\Gamma_Z(t, p))$. Por continuidade, a trajetória global $\Gamma(t, q)$ de Z está contida no $\omega(\Gamma_Z(t, p))$ e deve voltar numa vizinhança V_q de q em Σ , pois $q \in \omega(\Gamma_Z(t, p))$ e como a trajetória que passa por p deve voltar numa vizinhança de q infinitas vezes então por continuidade a trajetória que passa

por q também deve voltar numa vizinhança dela, pois as trajetórias que passam por p e q estão próximas uma da outra.

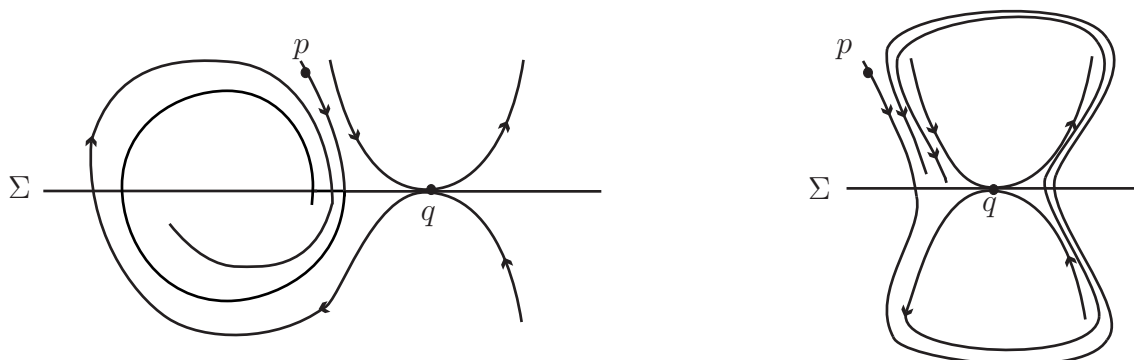


Figura 3.4: Exemplos que $q \in N_q$.

Para mostrar que a curva $\Gamma_Z(t, q)$ é fechada, suponhamos que a trajetória que passa por q não volta em q , seja q_1 esse ponto. Tomamos como exemplo, o primeiro gráfico da Figura 3.4 e considere a curva fechada a seguir:

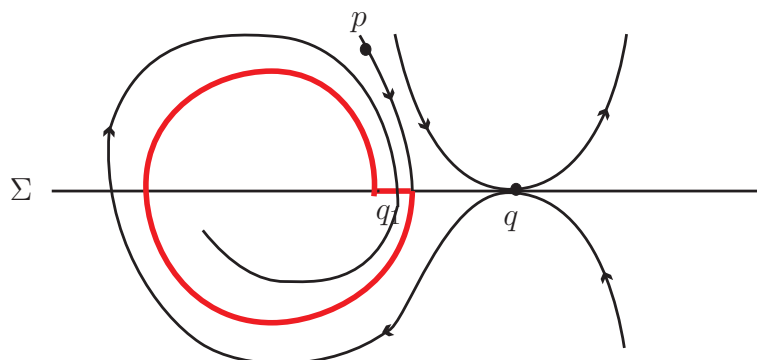


Figura 3.5: Exemplo que $q \in N_q$ e a curva fechada.

Daí, pelo Teorema da Curva de Jordan temos que toda trajetória que estiver dentro da curva fechada não escapa dela, logo criamos uma caixa de fluxo contendo as trajetórias $\Gamma_Z(t, q)$ e $\Gamma_Z(t, p)$ na qual q não pertence. Assim, as trajetórias que passam por p e q não voltam numa vizinhança de q , isso gera uma contradição, portanto $\Gamma_Z(t, q) \cap V_q = \{q\}$, ou seja, a curva que passa por q é fechada. Como por hipótese, $\omega(\Gamma_Z(t, q))$ não contém pontos de equilíbrio, então $\omega(\Gamma_Z(t, p)) = \Gamma_Z(t, q)$ é um pseudo-ciclo.

Considere ainda q como na Equação (3.1).

Se $q \in T_q$ então a trajetória local passando por q é única e $\Gamma_Z(\epsilon, q) \in \omega(\Gamma_Z(t, p))$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

De fato, temos que $q \in \omega(\Gamma_Z(t, p))$ então existe $(t_n), (t_n) \rightarrow +\infty$ tal que $\Gamma_Z(t_n, p) = x_n \rightarrow q$.

Definimos, agora a seguinte sequência $s_n = t_n + \epsilon$, com $(s_n) \rightarrow +\infty$ tal que $\Gamma_Z(s_n, p) = \Gamma_Z(t_n + \epsilon, p) = \Gamma_Z(\epsilon, \Gamma_Z(t_n, p))$. Daí, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_Z(\epsilon, \Gamma_Z(t_n, p)) = \Gamma_Z(\epsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_Z(t_n, p)) = \Gamma_Z(\epsilon, q)$, pois Γ_Z é contínua.

Assim, por continuidade a trajetória global $\Gamma(t, q)$ de Z está contida no $\omega(\Gamma_Z(t, p))$ e deve voltar numa vizinhança de q , já que $q \in \omega(\Gamma_Z(t, p))$. Como a trajetória deve voltar numa vizinhança de q infinitas vezes então por continuidade a trajetória que passa por q também deve voltar, já que as trajetórias estão próximas uma da outra.

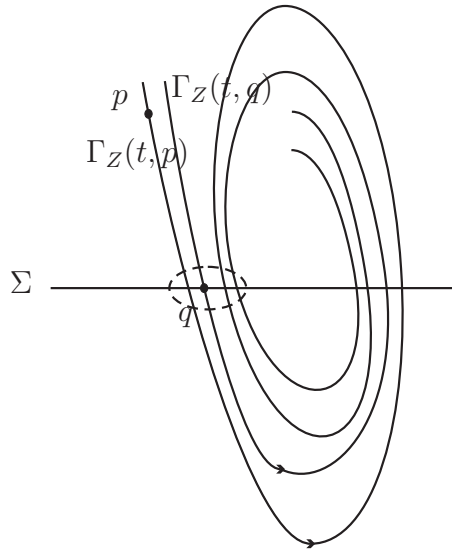


Figura 3.6: Exemplo que $q \in T_q$.

Para mostrar que a curva $\Gamma_Z(t, q)$ é fechada, suponhamos que a trajetória que passa por q não volte em q , seja q_1 esse ponto. Considere a curva fechada como na Figura 3.7.

Pelo Teorema da Curva de Jordan, temos que a trajetória que estiver dentro da curva fechada não escapa dela, logo criamos uma caixa de fluxo contendo as trajetórias $\Gamma_Z(t, q)$ e $\Gamma_Z(t, p)$ na qual q não pertence. Assim, as trajetórias que passam por p e q não voltam numa vizinhança de q , o que gera uma contradição. Logo, $\Gamma_Z(t, q)$ é fechada e segue que $\omega(\Gamma_Z(t, p)) = \Gamma_Z(t, q)$ é um pseudo-ciclo.

Vejamos o primeiro caso, se $\omega(\Gamma_Z(t, q))$ contém pontos de equilíbrio.

Então suponhamos que exista algum ponto \tilde{q} que não é de equilíbrio e considere a órbita local $\Gamma_Z(t, \tilde{q})$ que está contida em $\omega(\Gamma_Z(t, p))$. Temos que o conjunto $\omega(\Gamma_Z(t, \tilde{q}))$ não pode ser

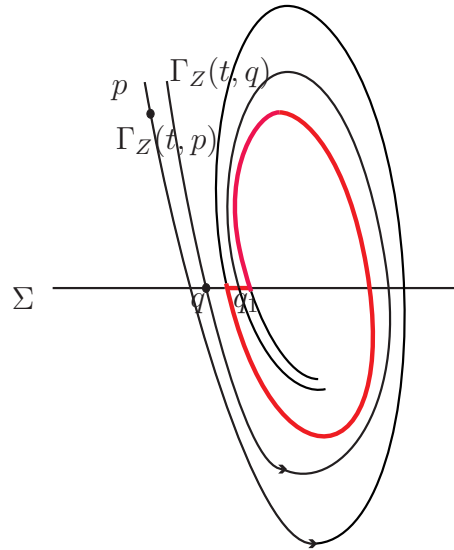


Figura 3.7: Exemplo que $q \in T_q$ e a curva fechada.

uma órbita periódica e nem um gráfico em Σ^+ ou em Σ^- , pois a órbita $\Gamma_Z(t, p)$ deve visitar uma vizinhança de q infinitas vezes. Como $\omega(\Gamma_Z(t, q))$ contém pontos de equilíbrio então a única opção é que $\omega(\Gamma_Z(t, \tilde{q})) = \{z_i\}$ onde z_i é um ponto de equilíbrio de X ou Y . Analogamente, o conjunto α -limite, $\alpha(\Gamma_Z(t, \tilde{q})) = \{z_j\}$ onde z_j é um ponto de equilíbrio de X ou Y .

Logo, com uma ordem apropriada dos pontos de equilíbrio $z_k, k = 1, \dots, m$ e órbitas regulares $\Gamma_k \subset \omega(\Gamma_Z(t, p)), k = 1, \dots, m$ temos que $\alpha(\Gamma_k) = z_k$ e $\omega(\Gamma_k) = z_{k+1}$ para $k = 1, \dots, m$. Daí segue que a trajetória global $\Gamma_Z(t, p)$ ou converge espiralando ou para a direção do $\omega(\Gamma_Z(t, p))$ com $t \rightarrow +\infty$. Isso significa que neste caso, $\omega(\Gamma_Z(t, p))$ é um pseudo-gráfico composto por pontos de equilíbrio z_k e por arcos Γ_k conectando eles.

Portanto, concluímos a demonstração do Teorema 2. □

Corolário 1. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema anterior, o conjunto ω -limite $\omega(p)$ de um ponto $p \in V$ é um dos casos descritos nos itens (i), (ii), (iii), (iv), (v) e (vi) ou uma união deles.*

O mesmo vale para o conjunto α -limite, revertendo o tempo.

Demonstração. Pela definição do conjunto ω -limite de um ponto, temos que este é a união do conjunto ω -limite de todas as trajetórias passando por p , daí concluímos o resultado. □

Exemplo 3. *Considere a Figura 3.8. Neste campo de vetores suaves por partes sem movimento de deslize em Σ , podemos concluir que o conjunto ω -limite é exatamente um dos casos do*

Teorema 2, pois as hipóteses do Teorema estão satisfeitas. Como não existe unicidade da trajetória passando por p tanto os conjuntos ω e α -limite podem ser desconexos. O α -limite de p é composto pelo foco α_1 e o ponto de tangência singular α_2 . O ω -limite de p é composto pela sela ω_1 e pela órbita periódica Γ_1 .

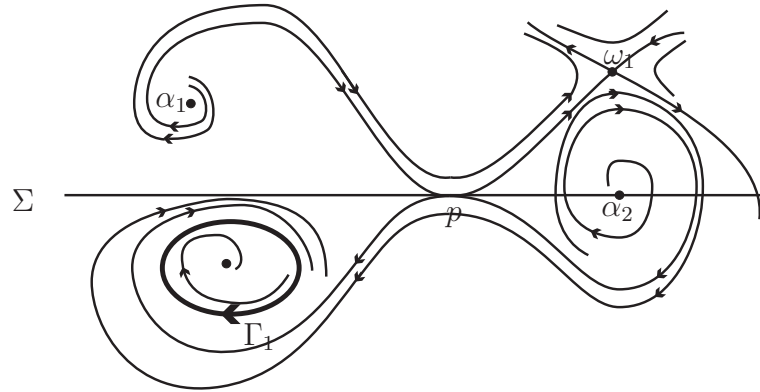


Figura 3.8: Tanto o conjunto ω -limite $\{\omega_1, \Gamma_1\}$ e o conjunto α -limite $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ do ponto p são desconexos.

Quando consideramos região de escape ou de deslize em Σ , cada subconjunto $N \subset \Sigma^e \cup \Sigma^d$ é necessariamente não invariante, pois nestas regiões não existe unicidade da solução. Por isso, se tomamos um ponto $q \in N$, percebemos que existem infinitas soluções passando por q (ver, por exemplo, Exemplo 1 e Observação 5) e por esta razão é possível que ocorra fenômenos interessantes onde as propriedades clássicas tanto dos conjuntos limite quanto dos conjuntos minimais não são observadas. Por isso, não trabalharemos com esses casos e portanto não estabeleceremos uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para este cenário.

Conjuntos caóticos em CVSPs

Neste tópico iremos apresentar alguns aspectos de comportamento caótico e de minimalidade em campos de vetores suaves por partes no plano, como dado em [1]. A ocorrência do caos não-determinístico é observado, como também o conceito de minimalidade orientável.

Abordagem será geométrica e envolve técnicas comuns utilizadas em campos de vetores suaves por partes.

Definição 10. *O sistema (2.1) é **topologicamente transitivo** em um conjunto invariante W se para cada par de conjuntos abertos não-vazios U e V em W , existem $q \in U$, $\Gamma_Z^+(t, q)$ uma trajetória global positiva e $t_0 > 0$ tal que $\Gamma_Z^+(t_0, q) \in V$.*

Um exemplo simples de conjunto que não é topologicamente transitivo é um ponto de equilíbrio.

Definição 11. *O sistema (2.1) exibe **dependência sensível** (ou sensibilidade em relação às condições iniciais) em um conjunto compacto W se existe $r > 0$ satisfazendo que $r < \text{diam}(W)$ tal que para cada $x \in W$ e $\epsilon > 0$ existe um $y \in B_\epsilon(x) \cap W$ e as trajetórias globais positivas Γ_x^+ e Γ_y^+ passando por x e y , respectivamente, satisfazendo*

$$d_H(\Gamma_x^+(\bar{t}), \Gamma_y^+(\bar{t})) > r$$

para algum tempo $\bar{t} > 0$, onde o $\text{diam}(W)$ é o diâmetro de W e d_H é a distância Euclidiana.

Definição 12. O sistema (2.1) é **caótico** em um conjunto compacto invariante W se ele é topologicamente transitivo e se exibe dependência sensível.

Observação 6. Embora essa seja a definição mais popular de conjunto caótico existem várias definições para o caos, mas nesta dissertação iremos considerar a definição acima.

Teorema 3. Considere $Z = (X, Y) \in \Omega$ o sistema dado no Exemplo 2, onde $X(x, y) = (1, -2x)$, $Y(x, y) = (-2, 2x - 4x^3)$ e $\Sigma = f^{-1} = \{(x, y); y = 0\}$. Então o campo Z é caótico no conjunto compacto invariante $\Lambda = \{(x, y); -1 \leq x \leq 1 \text{ e } \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} \leq y \leq 1 - x^2\}$.

Para demonstrar este teorema iremos apresentar o seguinte Lema.

Lema 1. Considere o conjunto Λ definido no teorema acima. Então, para qualquer $x, y \in \Lambda$, existe uma trajetória global positiva $\Gamma^+(t, x)$ passando por x e $t_0 > 0$ tal que $\Gamma^+(t_0, x) = y$.

Demonstração. Basta notar que a trajetória global de qualquer ponto em Λ encontra p em algum tempo t^* . Então quaisquer dois pontos $x, y \in \Lambda$, considere a trajetória positiva passando por x até o ponto p e considere a trajetória negativa passando por y até o ponto p . Então, conseguimos formar uma trajetória global positiva passando por x tal que $\Gamma^+(t_0, x) = y$, para $t_0 > 0$. \square

Agora, provaremos o Teorema 3.

Demonstração. Primeiramente provaremos que o campo Z é topologicamente transitivo.

Observe que $\Lambda \neq \emptyset$ e considere os conjuntos abertos não-vazios U e V em Λ . Como U e V são não-vazios, existe pelo menos um elemento α_1 em U e outro α_2 em V . Pelo Lema 1, existe uma trajetória global positiva $\Gamma^+(t, \alpha_1)$ passando por α_1 e $t_0 > 0$ tal que $\Gamma^+(t_0, \alpha_1) = \alpha_2 \in V$. Portanto, o campo Z é topologicamente transitivo no conjunto invariante Λ .

Agora, provemos que Z exibe dependência sensível em Λ .

De fato, tomemos $m = \text{diam}(\Lambda)$. Como $r < m$, existem dois elementos a e b em Λ tal que $d(a, b) > r$.

Agora, considere $x \in \Lambda$, $\epsilon > 0$ e um $y \in B_\epsilon(x) \cap \Lambda$ fixo. Pelo Lema 1, existe uma trajetória global positiva $\Gamma^+(t, x)$ de x e $\Gamma^+(t, y)$ de y e os números $t_1, t_2 > 0$ tal que $\Gamma^+(t_1, x) = a$ e $\Gamma^+(t_2, y) = b$. Sem perda de generalidade assumamos que $t_2 > t_1$ e que ambas as trajetórias passam pelo ponto de dobra-dobra na origem. À trajetória por x , insira um laço homoclinico

que demora tempo $t_2 - t_1$ para retornar à origem. Chame esta nova trajetória de Γ_a . Então, $d_H(\Gamma_a(t_2), \Gamma^+(t_2, y)) = d(a, b) > r$ e conseqüentemente Z exibe dependência sensível em Λ .

Portanto, o campo Z é caótico no conjunto Λ . \square

Definição 13. *Seja $\Gamma_Z(t, q)$ uma trajetória global de $Z = (X, Y)$. Dizemos que Γ_Z é **periódica** se Γ_Z é periódica na variável t , isto é, se existe $T > 0$ tal que $\Gamma_Z(t + T, q) = \Gamma_Z(t, q)$, para todo $t \in \mathbb{R}$,*

Teorema 4. *Considere Z e Λ como mencionado no Teorema 3. As trajetórias periódicas de Z são densas em Λ .*

Demonstração. Se mostrarmos que para cada ponto $x \in \Lambda$ passa uma órbita periódica então a prova está completa. Pelo Lema 1, existe σ_0 um arco fechado conectando o ponto x com ele mesmo. Então, consideramos a trajetória global $\Gamma_Z(t, x) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \{\sigma_i(t, x); t_i \leq t \leq t_{i+1}\}$ satisfazendo que $\sigma_i = \sigma_0$ é t_1 -periódica e passa por x para todo $i \in \mathbb{Z}$, ou seja, iremos considerar todas as trajetórias t_1 -periódicas que passam por x , mas não iremos considerar a trajetória $\sigma_0 = \{x\}$.

Observe que $\sigma_i(kt_1, x) = x \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall i \in \mathbb{Z}$. \square

Uma órbita passando por uma região de deslize ou de escape pode sair da reta de descontinuidade quando o tempo vai para o futuro ou passado. Por isso, apresentaremos algumas definições de conjuntos minimais distinguindo invariância para trajetórias globais positivas e negativas. O que chamamos de **minimalidade orientável**. A vantagem, tendo em conta tal abordagem, é considerar alguns conjuntos interessantes que não são somente minimais mas também que apresentam invariância e compacidade.

Verificamos a existência de alguns conjuntos minimais que não possuem uma **estrutura canard**, isto é, coincidência de uma tangência visível e uma tangência invisível que separam uma região de deslize e uma região de escape na reta de descontinuidade, em outras palavras, como foi definido anteriormente, estes conjuntos são chamados de pseudo-ciclos.

Definição 14. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é **positivamente-invariante** (respectivamente, **negativamente-invariante**) se para cada $p \in A$ toda trajetória global positiva $\Gamma_Z^+(t, p)$ (respectivamente, $\Gamma_Z^-(t, p)$) passando por p permanece em $\Gamma_Z^+(t, p) \subset A$ (respectivamente, $\Gamma_Z^-(t, p) \subset A$).*

Observação 7. Um conjunto é invariante se, e somente se, é positivamente-invariante e negativamente-invariante. Esse fato decorre diretamente da definição.

Definição 15. Considere $Z \in \Omega$. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ é **positivamente-minimal** (respectivamente, **negativamente-minimal**) se:

- (i) $M \neq \emptyset$,
- (ii) M é compacto,
- (iii) M é positivamente-invariante (respectivamente, negativamente invariante),
- (iv) M não contém nenhum subconjunto próprio satisfazendo (i) - (iii).

Lema 2. Considere $M \subset \mathbb{R}^2$ e Z um CVSP. Se M é positivamente-minimal e negativamente-minimal, então M é minimal.

Demonstração. De fato, como M é positivamente-minimal e negativamente-minimal, então M é um conjunto compacto não-vazio positivamente e negativamente-invariante, daí pela observação anterior M é invariante. Como M não contém nenhum subconjunto próprio não-vazio compacto e positivamente e negativamente-invariante, então não contém nenhum subconjunto próprio não-vazio compacto e invariante. Portanto, M é minimal. \square

Observe que a recíproca deste lema não é válida, veja a Proposição 3.

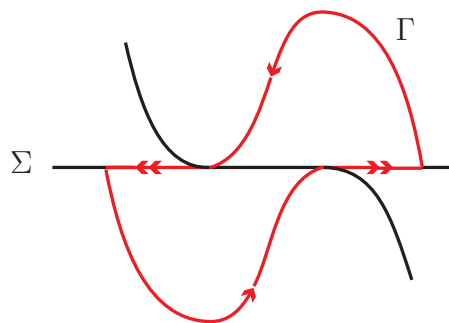


Figura 4.1: Neste exemplo o pseudo-ciclo é negativamente-invariante e não é positivamente-invariante.

Exemplo 4. O pseudo-ciclo é um exemplo de conjunto compacto positivamente-invariante ou negativamente-invariante. Mas ele não é positivamente-invariante e negativamente-invariante

ao mesmo tempo, isso acontece pela Definição 4 de trajetórias locais. Pois se considerarmos, neste caso, um ponto deste conjunto como sendo o de tangência, pela definição de trajetória local, a trajetória positiva deste ponto pode sair do pseudo-ciclo, e portanto não é positivamente-invariante. Ele é positivamente-minimal ou negativamente-minimal dependendo da orientação mas não é minimal, pois não é invariante.

Exemplo 5. Considere $Z_1 = (X, Y) \in \Omega$ onde

$$\begin{aligned} X(x, y) &= (1, -2x + 1) \\ Y(x, y) &= (-1, (2 - x)(-22 + x(-7 + 4x))) \end{aligned}$$

e a região de descontinuidade é dada por $\Sigma = f^{-1}(0) = \{(x, y); y = 0\}$.

Se $y > 0$ temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -2x + 1 \end{cases}$$

e se $y < 0$ temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 \\ \dot{y} = (2 - x)(-22 + x(-7 + 4x)) \end{cases}$$

Com as condições iniciais $(x(0), y(0)) = (0, k_+)$ e $(x(0), y(0)) = (0, k_-)$, respectivamente. A partir dessas condições podemos descrever a solução algébrica do campo X que é dada por $y(x) = -x^2 + x + k_+$ e a solução algébrica do campo Y que é dada por $y(x) = 44x - 4x^2 - 5x^3 + x^4 + k_-$.

Se derivarmos a solução do campo Y , observaremos que 2 é raiz de multiplicidade 1 em y' . Assim, se substituirmos o 2 na solução algébrica e igualarmos a zero, encontramos o valor de k_- , que por sua vez é, -48. Portanto, a solução algébrica que consideraremos do campo Y será dada por $y(x) = (-4 + x)(-2 + x)^2(3 + x) + L_- = -48 + 44x - 4x^2 - 5x^3 + x^4 + L_-$.

Se substituirmos -3 na solução algébrica do campo X e igualar a zero, encontramos o valor de k_+ , que por sua vez é 12. Portanto, a solução algébrica que consideraremos do campo X será dada por $y(x) = -(-4 + x)(3 + x) + L_+ = 12 - x^2 + x + L_+$.

As constantes L_- e L_+ descrevem o comportamento da solução em todo o campo X e Y . Ao variarmos as constantes preenchemos todo o espaço das curvas integrais.

Portanto, fazendo alguns cálculos para realizar uma análise do retrato de fase, temos que

$$\nabla f(x, y) = (0, 1)$$

$$Xf(x, y) = (1, -2x + 1) \cdot (0, 1) = -2x + 1$$

$$Yf(x, y) = (-1, (2 - x)(-22 + x(-7 + 4x))) \cdot (0, 1) = -44 + 8x + 15x^2 - 4x^3$$

$$X^2f(x, y) = X \cdot \nabla Xf(x, y) = (1, -2x + 1) \cdot (-2, 0) = -2$$

$$\begin{aligned} Y^2f(x, y) &= Y \cdot \nabla Yf(x, y) = (-1, (2 - x)(-22 + x(-7 + 4x))) \cdot (8 + 30x - 12x^2, 0) = \\ &= -8 - 30x + 12x^2 \end{aligned}$$

Verifiquemos agora onde existe região de costura:

$$(Xf(x, y)) \cdot (Yf(x, y)) = -(-2x + 1)(-2 + x)(-22 + x(-7 + 4x)) > 0$$

$$(2x^2 - 5x + 2)(4x^2 - 7x - 22) > 0$$

Observando o sinal de cada polinômio, temos que aparece região de costura ocorre para $x < \frac{7 - \sqrt{401}}{8}$, para $\frac{1}{2} < x < 2$ e para $x > \frac{7 + \sqrt{401}}{8}$.

Verifiquemos agora onde existe região de escape:

$$Xf(x, y) > 0 \Rightarrow -2x + 1 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$Yf(x, y) < 0 \Rightarrow (2 - x)(-22 - 7x + 4x^2) < 0 \Rightarrow \frac{7 - \sqrt{401}}{8} < x < \frac{1}{2}$$

Verifiquemos agora onde existe região de deslize:

$$Xf(x, y) < 0 \Rightarrow -2x + 1 < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$Yf(x, y) > 0 \Rightarrow (2 - x)(-22 - 7x + 4x^2) > 0 \Rightarrow 2 < x < \frac{7 + \sqrt{401}}{8}$$

Vamos encontrar os pontos de tangência no campo X :

$Xf(x, y) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Portanto, $(\frac{1}{2}, 0)$ é um ponto de tangência, e denotemos por p este ponto, como $X^2f(p) = -2 < 0$ temos que p é uma tangência invisível.

Vamos encontrar os pontos de tangência no campo Y :

$Yf(x, y) = 0 \Rightarrow (2 - x)(-22 - 7x + 4x^2) = 0$, e portanto os pontos que anulam são $q = (2, 0)$ e $p_{\pm} = (\frac{7 \pm \sqrt{401}}{8}, 0)$.

Assim, $Y^2f(q) = -20 < 0$, o que implica que é um ponto de tangência visível para o campo Y .

Analogamente, $Y^2 f(p_+) = -8 - 30\left(\frac{7 + \sqrt{401}}{8}\right) + 12\left(\frac{7 + \sqrt{401}}{8}\right)^2 > 0$ e $Y^2 f(p_-) = -8 - 30\left(\frac{7 - \sqrt{401}}{8}\right) + 12\left(\frac{7 - \sqrt{401}}{8}\right)^2 > 0$, são pontos de tangência invisível para o campo Y .

Temos também que o campo deslizando é dado pela Equação (2.2):

$$Z^\Sigma(x, y) = \frac{Yf \cdot X(x, y) - Xf \cdot Y(x, y)}{Yf(x, y) - Xf(x, y)} = \frac{(-4x^3 + 15x^2 + 6x - 43, 0)}{-4x^3 + 15x^2 + 10x - 45}.$$

Verificando o sinal dessa divisão de polinômios, observamos que surgem dois pontos de pseudo-equilíbrio na região de Σ^d e um ponto de pseudo-equilíbrio na região de Σ^e , cujas coordenadas são $\tilde{p} \approx (-1.57, 0)$, $a \approx (2.18, 0)$ e $b \approx (3.13, 0)$. Percebemos também que o vetor deslizando aponta para esquerda nos intervalos de (p_-, \tilde{p}) , (q, a) e (b, p^+) e aponta para direita nos intervalos de (\tilde{p}, p) e (a, b) .

Considere em particular as trajetórias de X e Y para os casos quando $L_+ = 0$ e $L_- = 0$, respectivamente. Estas curvas delimitam uma região do plano que denotaremos por Λ_1 , e com base na análise feita podemos fazer o retrato de fase do campo Z_1 , como apresentado na Figura 4.2.

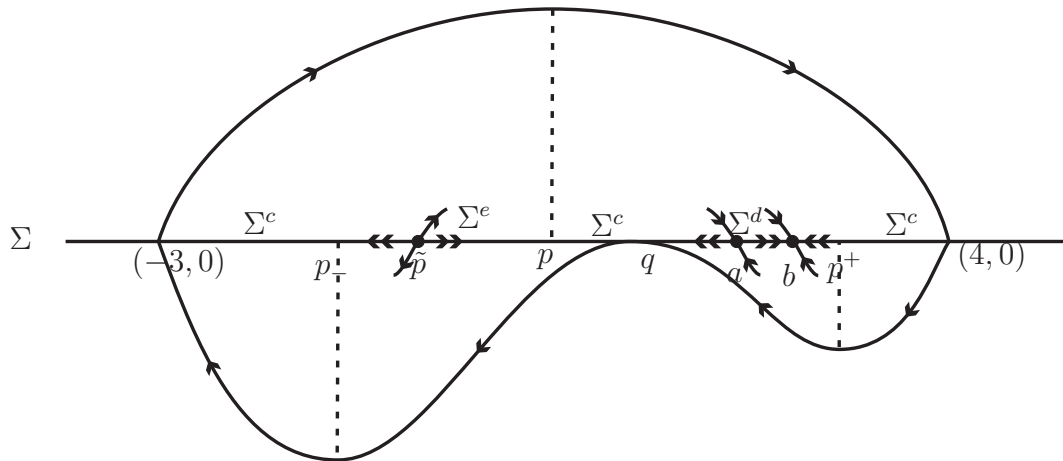


Figura 4.2: Curvas integrais e pontos de tangência.

Proposição 3. *Considere Z_1 do exemplo anterior. O conjunto $\Lambda_1 = \{(x, y); -3 \leq x \leq 4 \text{ e } (-4 + x)(-2 + x)^2(3 + x) \leq y \leq -(-4 + x)(3 + x)\}$ é minimal para Z_1 , mas não é positivamente-minimal e nem negativamente-minimal.*

Observemos que a Proposição 1 do artigo [1] é esta Proposição 3. No artigo [1] os autores afirmaram que existe um tempo $t_u > 0$ tal que dado um ponto arbitrário $u \in \Lambda_1$ e

uma trajetória positiva passando por u temos que $\Gamma^+(t_u, u) = q \in \Lambda'_1$. Entretanto, devido a existência dos pontos de pseudo-equilíbrio a e b obtidos acima tal fato não ocorre. Dessa forma precisamos modificar a demonstração da referida proposição. Isso foi feito através dos Lemas 3 e 4 que constituem em resultados inéditos na literatura.

Antes de demonstrar tal proposição vamos apresentar dois lemas que vão auxiliar na demonstração da Proposição 3.

Lema 3. *Toda trajetória de qualquer ponto de Λ_1 converge para a ou para b ou passa por q .*

Demonstração. De fato, dado $u \in \Lambda_1$ arbitrário, a trajetória global sempre irá cair no intervalo aberto $(q, 4)$. E portanto, temos os seguintes casos:

- (i) Se a trajetória cair no intervalo de (q, a) , então a trajetória desliza até q pelo campo deslizante.
- (ii) Se a trajetória cair no ponto a , logo temos o óbvio.
- (iii) Se a trajetória cair no intervalo de (a, b) , então ela desliza para b pelo campo deslizante.
- (iv) Se a trajetória cair no ponto b , logo temos o óbvio.
- (v) Se a trajetória cair no intervalo de (b, p^+) , então ela desliza para b pelo campo deslizante.
- (vi) Se a trajetória cair no intervalo de $(p^+, 4)$, então a trajetória pode cair em um dos casos citados acima.

Portanto, qualquer trajetória passa por q , converge para a , ou para b . □

No lema seguinte iremos provar que os pontos a, b e q estão contidos em Λ'_1 , para isso usaremos arcos das trajetórias de X e Y . Deixemos claro aqui, que esta demonstração não quer dizer que os três pontos podem ser conectados.

Lema 4. *Se $a \in \Lambda'_1$ então $b \in \Lambda'_1$ e $q \in \Lambda'_1$. Analogamente, se $b \in \Lambda'_1$ então $a \in \Lambda'_1$ e $q \in \Lambda'_1$. Como também, se $q \in \Lambda'_1$ então $a \in \Lambda'_1$ e $b \in \Lambda'_1$.*

Demonstração. De fato, suponhamos que $a \in \Lambda'_1$. Denotemos por Γ_0 um arco da trajetória negativa que parte do ponto a e percorre pelo campo X até essa trajetória atingir Σ , então

existe um $t_{a_1} < 0$ tal que $\Gamma_0(t_{a_1}, a) \approx (-1.17, 0)$, como Λ'_1 é invariante, a trajetória negativa que passa pelo ponto a também está contida em Λ'_1 . Logo, $(-1.17, 0) \in \Lambda'_1$ e portanto, $\Gamma_0 \subset \Lambda'_1$.

Denotemos por Γ_1 um arco da trajetória positiva que sai de $(-1.17, 0)$ e desliza para $(-1.04, 0)$ pelo campo deslizante, então existe $t_{a_2} > 0$ tal que $\Gamma_1(t_{a_2}, (-1.17, 0)) \approx (-1.04, 0)$ como $(-1.17, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $(-1.04, 0) \in \Lambda'_1$ e portanto, temos que $\Gamma_1 \subset \Lambda'_1$.

Denotemos por Γ_2 um arco da trajetória positiva que parte do ponto $(-1.04, 0)$ e percorre pelo campo Y até essa trajetória atingir Σ , então existe um $t_{a_3} > 0$ tal que $\Gamma_2(t_{a_3}, (-1.04, 0)) \approx (-2.12, 0)$ como $(-1.04, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $(-2.12, 0) \in \Lambda'_1$ e portanto, temos que $\Gamma_2 \subset \Lambda'_1$.

Agora, denotemos por Γ_3 um arco da trajetória positiva que parte do ponto $(-2.12, 0)$ e percorre pelo campo X até essa trajetória atingir Σ , então existe um $t_{a_4} > 0$ tal que $\Gamma_3(t_{a_4}, (-2.12, 0)) \approx b$. Como $(-2.12, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $b \in \Lambda'_1$ e portanto, temos que $\Gamma_3 \subset \Lambda'_1$.

Portanto, construímos uma trajetória $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ passando por a , tal que $\Gamma \subset \Lambda'_1$ e $b \in \Lambda'_1$.

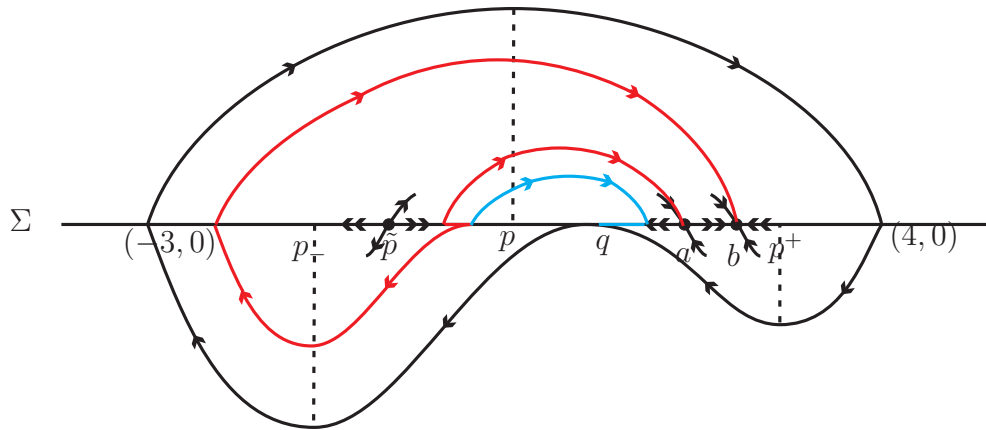


Figura 4.3: Exemplo das trajetórias Γ e Γ' passando por a .

Supondo ainda, considere Γ_0 e Γ_1 como denotados acima. Logo, $\Gamma_0 \subset \Lambda'_1$ e $\Gamma_1 \subset \Lambda'_1$.

Denotemos por Γ'_2 um arco da trajetória positiva que parte do ponto $(-1.04, 0)$ e percorre pelo campo X até essa trajetória atingir Σ , então existe um $t_{a_6} > 0$ tal que $\Gamma'_2(t_{a_6}, (-1.04, 0)) \approx 2.04$. Como $(-1.04, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $(2.04, 0) \in \Lambda'_1$ e portanto, temos que $\Gamma'_2 \subset \Lambda'_1$.

Agora, denotemos por Γ'_3 um arco da trajetória positiva que parte do ponto $(2.04, 0)$ e desliza para q pelo campo deslizante, então existe um $t_{a_7} > 0$ tal que $\Gamma'_3(t_{a_7}, (2.04, 0)) \approx q$. Como $(2.04, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $q \in \Lambda'_1$ e portanto, temos que $\Gamma'_3 \subset \Lambda'_1$.

Portanto, construímos uma trajetória $\Gamma' = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma'_2 \cup \Gamma'_3$ passando por a , tal que $\Gamma' \subset \Lambda'_1$ e $q \in \Lambda'_1$.

Analogamente ao que foi feito para o ponto a faremos para o ponto q .

Se $q \in \Lambda'_1$. Denotemos por Γ_0 um arco da trajetória negativa que parte do ponto q e percorre pelo campo X até essa trajetória atingir Σ , então existe um $t_{a_1} < 0$ tal que $\Gamma_0(t_{a_1}, q) = (-1, 0)$. Como Λ'_1 é invariante, a trajetória negativa que passa pelo ponto q também está contida em Λ'_1 , $\Gamma_0 \subset \Lambda'_1$ e $(-1, 0) \in \Lambda'_1$.

Denotemos por Γ_1 um arco da trajetória negativa que sai de $(-1, 0)$ e desliza para $(-1.17, 0)$ pelo campo deslizante, então existe $t_{a_2} < 0$ tal que $\Gamma_1(t_{a_2}, (-1, 0)) \approx (-1.17, 0)$. Como $(-1, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $\Gamma_1 \subset \Lambda'_1$ e $(-1.17, 0) \in \Lambda'_1$.

Denotemos por Γ_2 um arco da trajetória positiva que parte do ponto $(-1.17, 0)$ e percorre pelo campo X até essa trajetória atingir Σ , então existe um $t_{a_3} > 0$ tal que $\Gamma_2(t_{a_3}, (-1.17, 0)) \approx a$. Como $(-1.17, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $\Gamma_2 \subset \Lambda'_1$ e $a \in \Lambda'_1$.

Portanto, construímos uma trajetória $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ passando por q , tal que $\Gamma \subset \Lambda'_1$ e $a \in \Lambda'_1$.

Se $q \in \Lambda'_1$. Considere Γ_0 como denotado acima. Logo, $(-1, 0) \in \Lambda'_1$ e $\Gamma_0 \subset \Lambda'_1$.

Denotemos por Γ'_1 um arco da trajetória negativa que sai de $(-1, 0)$ e desliza para $(-1.04, 0)$ pelo campo deslizante, então existe $t_{a_4} < 0$ tal que $\Gamma'_1(t_{a_4}, (-1, 0)) \approx (-1.04, 0)$. Como $(-1, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $\Gamma'_1 \subset \Lambda'_1$ e $(-1.04, 0) \in \Lambda'_1$.

Denotemos por Γ'_2 um arco da trajetória positiva que parte do ponto $(-1.04, 0)$ e percorre pelo campo Y até essa trajetória atingir Σ , então existe um $t_{a_5} > 0$ tal que $\Gamma'_2(t_{a_5}, (-1.04, 0)) \approx (-2.12, 0)$. Como $(-1.04, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $\Gamma'_2 \subset \Lambda'_1$ e $(-2.12, 0) \in \Lambda'_1$.

Agora, denotemos por Γ_3 , um arco da trajetória positiva que parte do ponto $(-2.12, 0)$ e percorre pelo campo X até essa trajetória atingir Σ , então existe um $t_{a_6} > 0$ tal que $\Gamma_3(t_{a_6}, (-2.12, 0)) \approx b$, como $(-2.12, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $\Gamma_3 \in \Lambda'_1$ e $b \in \Lambda'_1$.

Portanto, construímos uma trajetória $\Gamma' = \Gamma_0 \cup \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2 \cup \Gamma_3$ passando por q , tal que $\Gamma' \subset \Lambda'_1$ e $b \in \Lambda'_1$.

Analogamente ao que foi feito para os pontos anteriores faremos para o ponto b .

Se $b \in \Lambda'_1$. Denotemos por Γ_0 um arco da trajetória negativa que parte do ponto b e percorre pelo campo X até essa trajetória atingir Σ , então existe um $t_{a_1} < 0$ tal que $\Gamma_0(t_{a_1}, b) \approx (-2.12, 0)$. Como Λ'_1 é invariante, a trajetória negativa que passa pelo ponto b também está contida em Λ'_1 . Logo, $\Gamma_0 \subset \Lambda'_1$ e $(-2.12, 0) \in \Lambda'_1$.

Denotemos por Γ_1 um arco da trajetória negativa que parte do ponto $(-2.12, 0)$ e percorre pelo campo Y até essa trajetória atingir Σ , então existe um $t_{a_2} < 0$ tal que $\Gamma_1(t_{a_2}, (-2.12, 0)) \approx (-1.04, 0)$. Como Λ'_1 é invariante, a trajetória negativa que passa pelo ponto $(-2.12, 0)$ também está contida em Λ'_1 . Logo, $\Gamma_1 \subset \Lambda'_1$ e $(-1.04, 0) \in \Lambda'_1$.

Denotemos por Γ_2 um arco da trajetória positiva que sai de $(-1.04, 0)$ e desliza para $(-1, 0)$ pelo campo deslizante, então existe $t_{a_3} > 0$ tal que $\Gamma_2(t_{a_3}, (-1.04, 0)) \approx (-1, 0)$. Como $(-1.04, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $\Gamma_2 \subset \Lambda'_1$ e $(-1, 0) \in \Lambda'_1$.

Agora, denotemos por Γ_3 um arco da trajetória positiva que parte do ponto $(-1, 0)$ e percorre pelo campo X até essa trajetória atingir Σ , então existe um $t_{a_4} > 0$ tal que $\Gamma_3(t_{a_4}, (-1, 0)) = q$. Como $(-1, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $\Gamma_3 \subset \Lambda'_1$ e $q \in \Lambda'_1$.

Portanto, construímos uma trajetória $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ passando por b , que $\Gamma \subset \Lambda'_1$ e $q \in \Lambda'_1$.

Se $b \in \Lambda'_1$. Considere Γ_0 e Γ_1 como denotados acima. Denotemos por Γ'_2 um arco da trajetória negativa que sai de $(-1.04, 0)$ e desliza para $(-1.17, 0)$ pelo campo deslizante, então existe $t_{a_5} < 0$ tal que $\Gamma'_2(t_{a_5}, (-1.04, 0)) \approx (-1.17, 0)$. Como $(-1.04, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $\Gamma'_2 \subset \Lambda'_1$ e $(-1.17, 0) \in \Lambda'_1$.

Agora, denotemos por Γ'_3 um arco da trajetória positiva que parte do ponto $(-1.17, 0)$ e percorre pelo campo X até essa trajetória atingir Σ , então existe um $t_{a_6} > 0$ tal que $\Gamma'_3(t_{a_6}, (-1.17, 0)) \approx a$. Como $(-1.17, 0) \in \Lambda'_1$ e Λ'_1 é invariante, $\Gamma'_3 \subset \Lambda'_1$ e $a \in \Lambda'_1$.

Portanto, construímos uma trajetória $\Gamma' = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma'_2 \cup \Gamma'_3$ passando por b , tal que $\Gamma' \subset \Lambda'_1$ e $a \in \Lambda'_1$.

□

Vamos agora, para a prova da Proposição 3.

Demonstração. Temos que $\Lambda_1 \neq \emptyset$ e é compacto, pois é fechado e limitado.

Pela Definição 4, para pontos em $\partial\Lambda_1 \setminus \{q\}$ há unicidade da trajetória. Como q é um ponto de tangência visível para o campo Y , de acordo com a Definição 4, qualquer trajetória passando por q fica em Λ_1 . Assim, Λ_1 é invariante.

Vamos mostrar que Λ_1 não tem nenhum subconjunto próprio compacto e invariante. Suponhamos que exista $\Lambda'_1 \subset \Lambda_1$ compacto e invariante. Seja $u \in \Lambda_1$ e considere a trajetória global $\Gamma(t, u)$. Temos que a trajetória converge para a , ou para b ou passa por q , pelo Lema 3. Toda trajetória que passa numa vizinhança de a e b , converge para b ou passa por q .

Em particular, todos os pontos de Λ'_1 também convergem para a ou para b ou passa por q , como Λ'_1 é compacto-invariante, segue que $a \in \Lambda'_1$ ou $b \in \Lambda'_1$ ou $q \in \Lambda'_1$.

Daí pelo Lema 4 mostramos que $\{a, b, q\} \in \Lambda'_1$. Como Λ'_1 é invariante e pelos Lemas 3 e 4 segue que $u \in \Lambda'_1$. Portanto, $\Lambda'_1 = \Lambda_1$ e assim, Λ_1 é minimal para Z_1 .

Além disso, como $\{\tilde{p}\}$ é um compacto negativamente-invariante então Λ_1 não é negativamente-minimal. Analogamente, temos que $\{b\}$ é um compacto positivamente-invariante então Λ_1 não é positivamente-minimal. \square

Proposição 4. *Considere o conjunto minimal da Proposição 1. Ele é positivamente-minimal e negativamente-minimal.*

Demonstração. De fato, $\Lambda \neq \emptyset$ e é compacto, pois é fechado e limitado.

Temos que todo ponto $p_1 \in \Lambda$ e toda trajetória global positiva $\Gamma_Z^+(t, p_1)$ passando por p_1 encontra p em algum tempo t^* . Como qualquer trajetória passando por p fica em Λ , então $\Gamma_Z^+(t, p_1) \subset \Lambda$. Daí, Λ é positivamente-invariante.

Vamos mostrar que Λ não contém nenhum conjunto próprio não-vazio, compacto e invariante. Suponhamos que exista $\Lambda' \subset \Lambda$ um conjunto não-vazio compacto positivamente-invariante, então $p \in \Lambda'$. Agora tomemos $u \in \Lambda$, existe $t_u < 0$ tal que $\Gamma^+(t_u, u) = p \in \Lambda'$. Como Λ' é positivamente-invariante $u \in \Lambda'$.

Portanto, $\Lambda' = \Lambda$ e Λ é positivamente-minimal.

Analogamente, provamos que o conjunto Λ é negativamente-minimal. \square

Exemplo 6. *Considere Z_2 um CVSP cujo retrato de fase é exibido na Figura 4.4. Considere o conjunto compacto Λ_2 delimitado pelas trajetórias de X e Y . Temos que p_1 e p_3 são pontos de tangência invisível de X , p_2 é ponto de tangência visível de X , p_1 e p_3 são pontos de tangência*

visível de Y e p_0, p_2 e p_4 são pontos de tangência invisível de Y . Suponhamos também que exista um ponto de pseudo-equilíbrio \tilde{p} entre p_1 e p_2 .

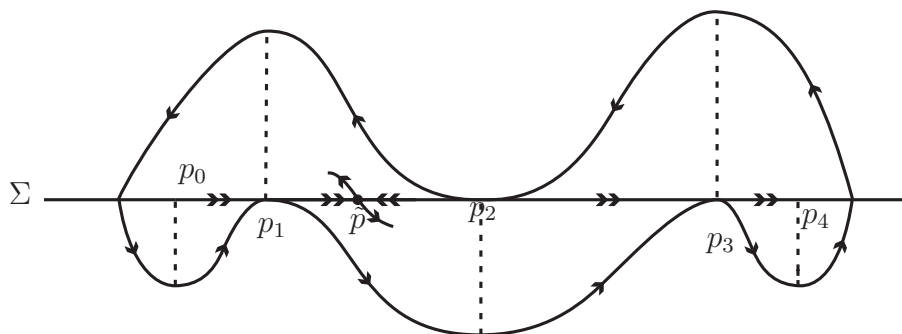


Figura 4.4: Retrato de fase do campo Z_2

Proposição 5. *Considere a notação do exemplo anterior. O conjunto Λ_2 é minimal para Z_2 e também é positivamente-minimal mas não é negativamente minimal para CVSP.*

Demonstração. Mostremos que Λ_2 é minimal.

Temos que $\Lambda_2 \neq \emptyset$ e é compacto. Temos também que Λ_2 é invariante. De fato, pela Definição 4, para pontos em $\partial\Lambda_2 \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ existe unicidade da trajetória. Como p_1 e p_3 são tangências visíveis de Y então qualquer trajetória que passa por eles fica em Λ_2 , e como p_2 é tangência visível de X qualquer trajetória que passa por p_2 fica em Λ_2 . Portanto, Λ_2 é invariante.

Mostremos que Λ_2 não contém nenhum subconjunto não-vazio, compacto e invariante. Seja $\Lambda'_2 \subset \Lambda_2$ compacto e invariante. Observemos que qualquer ponto de Λ_2 passa por p_1 , em particular os pontos de Λ'_2 também irão passar por p_1 , assim $p_1 \in \Lambda'_2$.

Dado $u \in \Lambda_2$, existe uma trajetória e um tempo t_u tal que $\Gamma(t_u, u) = p_1 \in \Lambda'_2$, pois Λ'_2 é compacto. Como Λ'_2 é invariante, $u \in \Lambda'_2$.

Portanto, $\Lambda'_2 = \Lambda_2$ e Λ_2 é minimal para Z_2 .

Segue também que Λ_2 não é negativamente-minimal, pois $\{\tilde{p}\}$ é compacto negativamente-invariante.

Além disso, qualquer trajetória positiva passa por p_1 ou p_2 ou p_3 , então Λ_2 é positivamente-invariante, pois qualquer trajetória que passa por esses pontos permanece no conjunto.

Como não contém nenhum subconjunto compacto positivamente-invariante segue que Λ_2 é positivamente-minimal. De fato, seja $\Lambda'_2 \subset \Lambda_2$ positivamente-invariante. Dado $u \in \Lambda_2$,

existe uma trajetória positiva e um tempo $t_u > 0$ tal que $\Gamma^+(t_u, u) = p_1 \in \Lambda'_2$. Como Λ'_2 é positivamente-invariante, segue que $u \in \Lambda'_2$.

Portanto, $\Lambda'_2 = \Lambda$ e Λ_2 é positivamente-minimal.

□

Observação 8. *Considere um CVSP da Figura 4.4 com a orientação oposta. Observamos que Λ_2 é minimal para Z_2 e negativamente-minimal mas não é positivamente-minimal.*

As proposições, exemplos e observações anteriores nos dizem que conjuntos minimais não-triviais podem ocorrer em conjuntos não-simétricos.

Nos exemplos dados observamos algumas relações entre conjuntos simétricos minimais e sistemas que são positivamente-minimal e negativamente-minimal simultaneamente.

Devemos notar que o caso onde não existe região de escape ou de deslize foram estudados no capítulo anterior e mostramos que neste caso não há conjuntos minimais não-triviais.

Teorema 5. *Considere um CVSP Z_2 como na Proposição 5. Então Z_2 é caótico em Λ_2 .*

Demonstração. Primeiramente provaremos que o campo Z_2 é topologicamente transitivo.

Observe que Λ_2 é minimal e considere os conjuntos abertos não-vazios U e V em Λ_2 . Como U e V são não-vazios, existe pelo menos um elemento α_1 em U e outro α_2 em V . A partir de um resultado análogo ao Lema 1 só que para o conjunto Λ_2 , existe uma trajetória global positiva $\Gamma^+(t, \alpha_1)$ passando por α_1 e $t_0 > 0$ tal que $\Gamma^+(t_0, \alpha_1) = \alpha_2 \in V$. Portanto, o campo Z_2 é topologicamente transitivo no conjunto invariante Λ_2 .

Agora, provemos que Z_2 exibe dependência sensível em Λ_2 .

De fato, tomemos $m = \text{diam}(\Lambda_2)$. Como $r < m$, existem dois elementos a e b em Λ_2 tal que $d(a, b) > r$.

Agora, considere $x \in \Lambda_2, \epsilon > 0$ e um $y \in B_\epsilon(x) \cap \Lambda_2$ fixo. Por um lema análogo ao Lema 1, existe uma trajetória global positiva $\Gamma^+(t, x)$ de x e $\Gamma^+(t, y)$ de y e os números $t_1, t_2 > 0$ tal que $\Gamma^+(t_1, x) = a$ e $\Gamma^+(t_2, y) = b$. Sem perda de generalidade assumamos que $t_2 > t_1$ e que ambas as trajetórias passam pelo ponto de dobra-dobra p_1 . À trajetória por x , insira um laço homoclinico que demora tempo $t_2 - t_1$ para retornar à p_1 . Chame esta nova trajetória de Γ_a . Então, $d_H(\Gamma_a(t_2), \Gamma^+(t_2, y)) = d(a, b) > r$ e conseqüentemente Z exibe dependência sensível em Λ .

Portanto, o campo Z_2 é caótico no conjunto Λ_2 .

□

Teorema 6. *Seja Z um CVSP e $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto invariante. Se Λ é positivamente-minimal e negativamente-minimal satisfazendo que $med(\Lambda) > 0$, então Z é caótico em Λ .*

A medida med utilizada é a medida de Lebesgue. Para demonstrar o Teorema 6 vamos enunciar e provar os dois lemas a seguir.

Lema 5. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 6, para quaisquer $x, y \in \Lambda$ existe uma trajetória global $\Gamma(t, y)$ passando por y e t^* tal que $\Gamma^+(t^*, y) = x$.*

Demonstração. Como $med(\Lambda) > 0$, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson para CVSP existe pelo menos um conjunto $A \subset \Sigma \cap (\Sigma^e \cup \Sigma^d)$. Pois, caso contrário, se $\Sigma \cap \Lambda = \Sigma^e \cup \Sigma^d$ então pelo Teorema de Poincaré-Bendixson teremos $med(\Lambda) = 0$.

Para cada $a \in A$, denotaremos por Π_a^+ o conjunto de todas as trajetórias globais positivas passando por a e por Π_a^- o conjunto de todas as trajetórias globais negativas passando por a .

Considere, os conjuntos

$$A_a^+ = \bigcup_{\Gamma_a \in \Pi_a^+} \Gamma_a(t, a) \subset \Lambda$$

e

$$A_a^- = \bigcup_{\Gamma_a \in \Pi_a^-} \Gamma_a(t, a) \subset \Lambda$$

Note que A_a^+ é positivamente-invariante, pois se tomarmos $p \in A_a^+$ e $\Gamma_p(t, p)$ a trajetória global positiva de p . Como $p \in A_a^+$ existe uma trajetória global positiva $\tilde{\Gamma}_a(t, a)$ passando por a e $t_0 > 0$ tal que $\tilde{\Gamma}_a(t_0, a) = p$. Consequentemente, $\Gamma_p(t, p) \in A_a^+$, pois existe uma trajetória $\hat{\Gamma}_a(t, a)$ tal que $\hat{\Gamma}_a(t, a) = \tilde{\Gamma}_a(t, a) \cup \Gamma_p(t, p) \subset A_a^+$.

Como, por hipótese, Λ é positivamente-invariante então $A_a^+ = \Lambda$.

Analogamente, provamos que A_a^- é negativamente-invariante e $A_a^- = \Lambda$.

Considere, pontos arbitrários $x, y \in \Lambda$. Como $A_a^+ = \Lambda = A_a^-$, existe $\Gamma_a^+(t, a) \in A_a^+$ e $\Gamma_a^-(t, a) \in A_a^-$ e valores $t_x > 0$ e $t_y < 0$ tal que $\Gamma_a^+(t_x, a) = x$ e $\Gamma_a^-(t_y, a) = y$.

Assim, existe uma trajetória global $\Gamma(t, y)$ e $t^* = t_x + |t_y| > 0$ tal que $\Gamma(t^*, y) = x$. \square

Lema 6. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 6, se quaisquer dois pontos de Λ podem ser conectados por um trajetória global de Z , então Z é caótico em Λ .*

Demonstração. Primeiramente provaremos que o campo Z é topologicamente transitivo.

Observe que Λ é compacto invariante e considere os conjuntos abertos não-vazios U e V em Λ . Como U e V são não-vazios, existe pelo menos um elemento α_1 em U e outro α_2 em V . Pelo Lema anterior, existe uma trajetória global $\Gamma(t, \alpha_1)$ passando por α_1 e $t_0 > 0$ tal que $\Gamma(t_0, \alpha_1) = \alpha_2 \in V$. Portanto, o campo Z é topologicamente transitivo no conjunto invariante Λ .

Agora, provemos que Z exibe dependência sensível em Λ .

De fato, tomemos $m = \text{diam}(\Lambda)$. Como $r < m$, existem dois elementos a e b em Λ tal que $d(a, b) > r$.

Agora, considere $x \in \Lambda_2$, $\epsilon > 0$ e um $y \in B_\epsilon(x) \cap \Lambda_2$ fixo. Por um lema análogo ao Lema 1, existe uma trajetória global positiva $\Gamma^+(t, x)$ de x e $\Gamma^+(t, y)$ de y e os números $t_1, t_2 > 0$ tal que $\Gamma^+(t_1, x) = a$ e $\Gamma^+(t_2, y) = b$. Usando um argumento similar ao feito nas demonstrações do Lema 1 e do Teorema 5, concluímos que Z exibe dependência sensível em Λ .

Portanto, o campo Z é caótico no conjunto Λ . □

A prova do Teorema 6 segue diretamente dos dois lemas anteriores.

Por fim, apresentaremos uma observação ressaltando a razão de que não podemos alterar as hipóteses do Teorema 6.

Observação 9. *Note que não podemos mudar as hipóteses do Teorema 6 considerando conjuntos minimais em vez de conjuntos positivamente-minimais e negativamente-minimais simultaneamente.*

De fato, considere Z_1 CVSP e Λ_1 como na Proposição 3.

Mostramos que Λ_1 é minimal para Z_1 , mas Z_1 não é caótico em Λ_1 , pois não é topologicamente transitivo em Λ_1 .

Se considerarmos um conjunto aberto não-vazio U localizado em Σ^+ acima do segmento de deslize S entre q e p^+ , todos os pontos de U alcançam S de Σ^+ a Σ e não encontra $\Sigma^- \setminus \Sigma$.

Considere também, um conjunto aberto não-vazio V abaixo das mesmas condições sobre U , contudo localizado abaixo de S em Σ^- . Então, todos os pontos de U e V alcançam S e desliza para $\partial\Lambda_1$ através de q ou converge para o ponto b . Como $\partial\Lambda_1$ é positivamente-minimal

e b também é positivamente-minimal, segue que as trajetórias de U e V não escapam de $\partial\Lambda_1$ ou de b para um tempo positivo.

Consequentemente, não podemos conectar U e V através de uma trajetória global positiva, e portanto Z_1 não é topologicamente transitivo em Λ_1 .

Observação 10. *Com o resultado do Teorema 6 concluímos que o campo Z dado na Proposição 1 é caótico, pois mostramos que Λ é positivamente-minimal e negativamente-minimal.*

Bibliografia

- [1] Buzzi, C. A.; Carvalho, T.; Euzébio, R. D. *Chaotic Planar Piecewise Smooth Vector Fields With Non Trivial Minimal Sets*, Ergodic Theory of Dynamical Systems, published online: [http : //journals.cambridge.org/abstracts/0143385714000674](http://journals.cambridge.org/abstracts/0143385714000674)(doi : 10.1017/etds.2014.67) (2014).
- [2] Buzzi, C. A.; Carvalho, T.; Euzébio, R. D., *On Poincaré-Bendixson theorem and non-trivial minimal sets in planar nonsmooth vector fields*, submitted (arxiv link: [http : //arxiv.org/pdf/1307.6825v1.pdf](http://arxiv.org/pdf/1307.6825v1.pdf)).
- [3] Doering, C. I.; Lopes. A. O., *Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, 2012.
- [4] Filippov, A. F., *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers-Dordrecht, 1988.
- [5] Hirsch, M. W.; Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, Inc., New York, 1974.
- [6] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [7] Verges, M. C., *Regularização e Análise Qualitativa de Modelos da Teoria do Controle*, Dissertação apresentada em 03/10/2003, IMECC-UNICAMP.

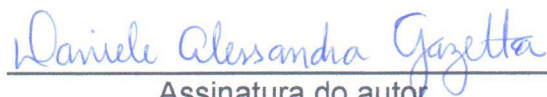
Índice

- órbita periódica, 35
- campo vetorial deslizante, 15
- conjunto
 - α -limite, 19
 - ω -limite, 19
 - minimal, 20
 - negativamente-invariante, 35
 - negativamente-minimal, 36
 - positivamente-invariante, 35
 - positivamente-minimal, 36
 - Z-invariante, 20
- minimalidade orientável, 35
- ponto
 - regular, 16
 - pseudo-equilíbrio, 16
 - singular, 16
 - singularidade tangencial, 16
 - invisível, 16
 - visível, 16
- ponto de tangência
 - regular, 17
 - singular, 17
- pseudo-ciclo, 19
- pseudo-gráfico, 19
- região
 - de costura, 14
 - de deslize, 15
 - de escape, 14
- sistema
 - caótico, 34
 - exibe uma dependência sensível, 33
 - topologicamente transitivo, 33
- Teorema
 - de Poincaré-Bendixson para campos suaves no plano, 25
 - de Poincaré-Bendixson para CVSPs, 25
- trajetória
 - global, 19
 - local, 18

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 15 / 01 / 2016



Assinatura do autor