



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Estabilidade de pontos de equilíbrio e existência de soluções periódicas em alguns modelos bidimensionais

Salvador Tavares de Oliveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-  
Graduação em Matemática - Mestrado Profis-  
sional, como requisito parcial para a obtenção  
do grau de Mestre

Orientadora  
Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

2015

517.38 Oliveira, Salvador Tavares de  
O48e Estabilidade de pontos de equilíbrio e existência de soluções pe-  
riódicas em alguns modelos bidimensionais/ Salvador Tavares de  
Oliveira- Rio Claro: [s.n.], 2015.  
77 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Insti-  
tuto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientadora: Renata Zotin Gomes de Oliveira

1. Sistemas de equações diferenciais ordinárias. 2. Ponto de  
equilíbrio. 3. Estabilidade. 4. Função de Lyapunov. 5. Solução  
periódica. I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Salvador Tavares de Oliveira

ESTABILIDADE DE PONTOS DE EQUILÍBRIO E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES  
PERIÓDICAS EM ALGUNS MODELOS BIDIMENSIONAIS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira  
Orientadora

Prof. Dra. Suzinei Ap Siqueira Marconato  
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão  
Universidade Federal de São Carlos/Araras (SP)

**Rio Claro, 21 de Agosto de 2015**

*Dedico este trabalho aos meus pais e aos meus amigos que contribuíram de alguma forma durante minha trajetória até chegar aqui.*

# Agradecimentos

Agradeço em especial minha orientadora Renata Zotin pela dedicação e comprometimento e aos professores que se dedicaram a corrigir e sugerir melhorias a este trabalho. Agradeço minha família pelo apoio e por serem os grandes responsáveis pelos meus resultados.

*Se A é o sucesso, então A é igual a X mais Y mais Z.*

*O trabalho é X;*

*Y é o lazer;*

*e Z é manter a boca fechada.*

*Albert Einstein*

# Resumo

Neste trabalho apresentamos critérios de estabilidade para pontos de equilíbrio de sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares, em particular os métodos de Lyapunov (direto e indireto). Analisamos também alguns critérios que nos possibilitam, às vezes, determinar a existência ou não de soluções periódicas. Em particular, uma variação do modelo presa-predador clássico é analisada quanto à existência de solução periódica.

**Palavras-chave:** Sistemas de equações diferenciais ordinárias, Ponto de equilíbrio, Estabilidade, Função de Lyapunov, Solução periódica.

# Abstract

This work presents stability criteria for equilibrium points of nonlinear systems of ordinary differential equations, in particular the Lyapunov methods (direct and indirect). We also look at some criteria that enable us sometimes determine the existence of periodic solutions. In particular, a variation of the classic predator-prey model is analyzed for the existence of periodic solution.

**Keywords:** System of ordinary differential equations, Equilibrium Point, Stability, Lyapunov Function, Periodic Solution.



# Lista de Figuras

3.1	Campo de direções para o sistema (3.2). . . . .	36
3.2	Os quatro casos para duas espécies em competição (3.1). . . . .	39
3.3	Pontos de equilíbrio e campo de direções para o sistema (3.14). . . . .	42
3.4	Retrato de fase para o sistema (3.14). . . . .	44
3.5	Variações nas populações de presas e de predadores em relação ao tempo para o sistema (3.14). . . . .	44
4.1	Ciclos limites. . . . .	47
4.2	Trajectoria $C$ confinada em $R$ . . . . .	51
4.3	Região de atração. . . . .	51
4.4	Plano de fase para o sistema (4.3). . . . .	54

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Sistemas quase lineares</b>	<b>19</b>
2.1	Algumas definições . . . . .	19
2.2	O segundo método de Lyapunov . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Modelos Populacionais</b>	<b>35</b>
3.1	Espécies em competição . . . . .	35
3.2	Modelo presa-predador . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Alguns critérios para a existência de soluções periódicas</b>	<b>47</b>
<b>5</b>	<b>Variações do modelo clássico presa-predador</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>65</b>
	<b>Referências</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes</b>	<b>69</b>
A.1	Autovalores reais e distintos . . . . .	70
A.2	Autovalores complexos . . . . .	71
A.3	Autovalores Repetidos . . . . .	73
<b>B</b>	<b>Fórmula da Variação das Constantes</b>	<b>75</b>
<b>C</b>	<b>Desigualdade de Gronwall</b>	<b>77</b>

# 1 Introdução

Periodicidade é um comportamento importante que aparece em muitos fenômenos físicos e biológicos. Depois de soluções constantes (oriundas de pontos de equilíbrios), as soluções mais importantes são as órbitas periódicas, cujas trajetórias são curvas fechadas no plano de fase. A presença de um único movimento periódico que atrai todas as soluções (próximas), isto é, de um ciclo limite estável, é um dos fenômenos característicos associados às equações diferenciais não-lineares [1].

Periodicidade e comportamentos oscilatórios estão presentes em modelos populacionais onde algum parâmetro envolvido varia periodicamente, como por exemplo, a capacidade de suporte do meio. Em modelos epidemiológicos a periodicidade pode estar relacionada com a sazonalidade de alguns fatores, como por exemplo a taxa de contato entre indivíduos suscetíveis e infectados ou até mesmo, devido à própria estrutura do modelo. [2]

Nesse trabalho, apresentamos critérios de estabilidade para pontos de equilíbrio de sistemas não-lineares, em particular os métodos de Lyapunov (direto e indireto). Motivados pela existência de solução periódica no modelo clássico presa-predador, analisamos alguns critérios que nos possibilitam, às vezes, determinar a existência ou não de soluções periódicas. Em particular, analisamos uma variação do modelo presa-predador proposto em [3] que, diferentemente do modelo clássico, não possui solução periódica.

No primeiro capítulo apresentamos as principais definições utilizadas neste trabalho bem como um teorema que nos fornece uma condição suficiente para um sistema ser quase linear. Apresentamos um teorema que caracteriza, por meio de um sistema linear correspondente, a estabilidade assintótica ou a instabilidade para sistemas quase lineares. Apresentamos também um estudo qualitativo de um sistema via uma função de Lyapunov, que é conhecido como o Segundo Método de Lyapunov.

No capítulo 3 analisamos a estabilidade de pontos de equilíbrio dos modelos clássicos de competição entre duas espécies e o modelo presa-predador. No capítulo 4 apresentamos alguns critérios para determinarmos a existência ou não de trajetórias fechadas (soluções periódicas).

No capítulo 5 apresentamos o modelo proposto em [3] que apresenta uma variação do modelo presa-predador de Lotka-Volterra e utiliza o critério de Dulac para mostrar a não existência de soluções periódicas.

Por fim apresentamos uma conclusão e um apêndice com alguns resultados que foram utilizados no texto.

Para a confecção das figuras presentes neste trabalho utilizamos os softwares Winplot 1.3 e wxMaxima 2.0.

## 2 Sistemas quase lineares

Apresentamos neste capítulo definições e resultados sobre estabilidade de pontos de equilíbrio para sistemas de equações diferenciais quase lineares, que são os mais comuns em termos de aplicações às mais diversas áreas. As definições apresentadas neste capítulo são baseadas em [1] e [4].

### 2.1 Algumas definições

Seja  $t$  um escalar real,  $D$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  com um elemento de  $D$  descrito por  $(t, x)$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua, com  $x' = dx/dt$ . Uma equação diferencial é uma relação da forma

$$x'(t) = f(t, x(t)) \text{ ou, simplesmente } x' = f(t, x). \quad (2.1)$$

**Definição 2.1.** Dizemos que  $x$  é uma solução de (2.1) no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  se  $x$  é uma função continuamente diferenciável definida em  $I$ ,  $(t, x(t)) \in D$ ,  $t \in I$  e  $x$  satisfaz (2.1) em  $I$ . Nos referimos a  $f$  como campo vetorial de  $D$ .

**Definição 2.2.** Suponha  $(t_0, x_0) \in D$  dado. Um problema de valor inicial para a equação (2.1) consiste em encontrar um intervalo  $I$  contendo  $t_0$  e uma solução  $x$  de (2.1) satisfazendo  $x(t_0) = x_0$ . Escrevemos este problema simbolicamente como

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0, t \in I. \quad (2.2)$$

Se existe um intervalo  $I$  contendo  $t_0$  e uma função  $x(t)$  satisfazendo (2.2), dizemos que  $x$  é uma solução de (2.1) passando por  $(t_0, x_0)$ .

Se  $f(t, x)$  é contínua em um domínio  $D$ , então o teorema de existência para equações diferenciais implica na existência, de no mínimo, uma solução de (2.1) passando por um dado ponto  $(t_0, x_0)$  em  $D$ . Para qualquer  $(t_0, x_0) \in D$ , seja  $(a(t_0, x_0), b(t_0, x_0))$  o intervalo máximo de existência de  $x(t, t_0, x_0)$  e seja  $E \subset \mathbb{R}^{n+2}$  definido como

$$E = \{(t, t_0, x_0) : a(t_0, x_0) < t < b(t_0, x_0), (t_0, x_0) \in D\}.$$

**Definição 2.3.** Uma trajetória através de  $(t_0, x_0)$  é um conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $(t, x(t, t_0, x_0))$  para  $t$  variando entre todos os valores possíveis nos quais  $(t, t_0, x_0)$  pertence a  $E$ . O conjunto  $E$  é chamado de domínio de definição de  $x(t, t_0, x_0)$ .

**Definição 2.4.** Órbita de uma trajetória é a projeção de uma trajetória em  $\mathbb{R}^n$ , o espaço das variáveis dependentes em (2.1). O espaço das variáveis dependentes é normalmente chamado de espaço de estado ou espaço de fase. As coordenadas de fase para uma equação escalar de ordem  $n$  em  $x$  é o vetor  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Definição 2.5.** Um sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem é chamado de autônomo quando as funções  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  não dependem explicitamente da variável independente  $t$ , mas apenas das variáveis  $x_1, \dots, x_n$ , isto é,

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.3)$$

Nem sempre é possível determinar uma solução explícita para um problema de valor inicial. Dessa forma, procura-se determinar o comportamento do sistema, analisando se as soluções se aproximam ou não de soluções constantes.

**Definição 2.6.** Os pontos onde  $f(x) = 0$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  se existirem, são chamados de pontos de equilíbrio (ou pontos críticos) do sistema autônomo (2.3).

Observe que os pontos de equilíbrio dão origem às soluções constantes de um sistema do tipo (2.3).

**Definição 2.7.** Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  do sistema (2.3) é dito estável se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que toda solução  $x = \varphi(t)$  do sistema, que satisfaz, em  $t = 0$ ,

$$\|\varphi(0) - \bar{x}\| < \delta, \quad (2.4)$$

existe para todo  $t$  positivo e satisfaz

$$\|\varphi(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \quad (2.5)$$

para todo  $t \geq 0$ . Aqui  $\|\ \|\$  denota a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ .

Vamos considerar o tempo inicial como  $t_0 = 0$  pois o sistema é autônomo. [1]

**Definição 2.8.** Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é dito assintoticamente estável se é estável e se existe  $\delta_0$  ( $\delta_0 > 0$ ) tal que, se uma solução  $x = \varphi(t)$  satisfazendo

$$\|\varphi(0) - \bar{x}\| < \delta_0, \quad (2.6)$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \bar{x}. \quad (2.7)$$

Seja o sistema de  $n$  equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Vamos considerar  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  como componentes de um vetor  $x = x(t)$ . Analogamente,  $g_1(t), \dots, g_n(t)$  são componentes de um vetor  $g(t)$  e  $p_{11}(t), \dots, p_{nn}(t)$  são elementos de uma matriz  $n \times n$ ,  $P(t)$ . Assim, o sistema (2.8) é escrito em notação matricial como

$$x' = P(t)x + g(t). \quad (2.9)$$

**Definição 2.9.** *Se todas as funções  $g_1(t), \dots, g_n(t)$  forem identicamente nulas no intervalo  $I = \{t \in \mathbb{R}, \alpha < t < \beta\}$ , dizemos que o sistema (2.8) é homogêneo; caso contrário, ele é não-homogêneo.*

**Definição 2.10.** *Dizemos que as funções*

$$x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t) \quad (2.10)$$

*formam uma solução do sistema (2.8) no intervalo  $I$  se elas:*

- (i) *são diferenciáveis em todos os pontos do intervalo  $I$  e*
- (ii) *satisfazem o sistema (2.8) em todo  $t \in I$ .*

Um dos sistemas mais simples, a saber, um sistema linear homogêneo de primeira ordem com coeficientes constantes, de dimensão dois, tem a forma

$$x' = Ax, \quad (2.11)$$

onde  $A$  é uma matriz constante  $2 \times 2$  e  $x$  é um vetor  $2 \times 1$ .

No Apêndice A mostramos que as soluções para sistemas de equações diferenciais lineares homogêneos são da forma  $x = \xi e^{rt}$ , onde  $r$  é um autovalor de  $A$  e  $\xi$  o autovetor associado. Então, substituindo  $x = \xi e^{rt}$  na equação (2.11), obtemos

$$(A - rI)\xi = 0. \quad (2.12)$$

Os autovalores são as raízes da equação polinomial

$$\det(A - rI) = 0 \quad (2.13)$$

e os autovetores são determinados pela equação (2.12), a menos de uma constante multiplicativa.

Como já definido anteriormente, os pontos tais que  $Ax = 0$  são chamados de pontos de equilíbrio. Vamos supor que  $A$  seja invertível ( $\det A \neq 0$ ) e portanto  $x = 0$  é o único ponto de equilíbrio do sistema (2.11).

As soluções, que são funções vetoriais que satisfazem a equação diferencial, podem ser vistas como uma representação paramétrica de uma curva no plano  $x_1x_2$ . Observamos essa curva como uma trajetória ou um caminho percorrido por um objeto cuja velocidade  $dx/dt$  é determinada pela equação diferencial. O plano  $x_1x_2$  recebe o nome de plano de fase e o conjunto representativo de trajetórias é chamado de retrato de fase.

Para uma análise completa das soluções e plano de fase do sistema (2.11) consulte Apêndice A.

Vamos agora considerar um sistema bidimensional não linear

$$x' = f(x). \quad (2.14)$$

Nosso objetivo é investigar o comportamento das trajetórias do sistema (2.14) em uma vizinhança do ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ . Para isso vamos analisar quando é possível aproximar o sistema não linear (2.14) por um sistema linear apropriado cujas trajetórias sejam fáceis de descrever.

Algumas perguntas podem surgir como: as trajetórias do sistema linear são boas aproximações das trajetórias do sistema não linear? Como encontrar o sistema linear apropriado? Para responder a essas perguntas vamos primeiramente definir o que é estar próximo em um sentido apropriado. Sem perda de generalidade, vamos convenientemente escolher o ponto de equilíbrio como sendo a origem, pois se  $\bar{x} \neq 0$ , sempre pode-se fazer a substituição,  $u = x - \bar{x}$  na equação (2.14).

Seja o sistema não linear

$$x' = Ax + g(x) \quad (2.15)$$

onde  $A$  é uma matriz real  $2 \times 2$  e  $g(x)$  contínua é dada por um vetor coluna  $2 \times 1$ . Suponha que  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio isolado, ou seja, existe um círculo em torno da origem dentro do qual não existe qualquer outro ponto de equilíbrio. Admitindo que  $\det(A) \neq 0$  e assim  $x = 0$  é o único ponto de equilíbrio isolado do sistema linear  $x' = Ax$ .

Para que o sistema não linear (2.15) seja próximo ao sistema linear (2.11) é preciso que  $g$  satisfaça a condição

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

ou seja,  $\|g(x)\|$  é pequeno comparado ao  $\|x\|$  próximo à origem.

**Definição 2.11.** *Um sistema de equações diferenciais da forma (2.15) que satisfaz (2.16)*



é chamado de sistema quase linear na vizinhança do ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$ .

**Exemplo 2.1.** Vamos mostrar que o sistema abaixo é quase linear na vizinhança do ponto de equilíbrio  $\bar{x} = (0, 0)$ . Considere

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 + x_2^2 \\ dx_2/dt = x_1 + x_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

que na forma da equação (2.15) nos dá

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Encontrando os pontos de equilíbrio:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 \quad (2.18)$$

$$x_1 + x_2^2 = 0 \quad (2.19)$$

Substituindo (2.18) em (2.19) temos

$$x_2^2 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2(x_2 - 1) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ ou } x_2 = 1.$$

Então, se  $x_2 = 0$  temos  $x_1 = 0$ . Analogamente se  $x_2 = 1$  então  $x_1 = -1$ . Os pontos de equilíbrio do sistema (2.17) são:  $(-1, 1)$  e  $(0, 0)$ . Como  $\det(A) = 1 \neq 0$ ,  $x = (0, 0)$  é um ponto de equilíbrio isolado.

Notemos que as componentes de  $g$  têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{(0)^2 + (x_2^2)^2}}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}} = \frac{x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Fazendo uma mudança para coordenadas polares,

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.20)$$

obtemos

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = \frac{r^2 \sin^2(\theta)}{r}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \sin^2 \theta = 0.$$

Logo, o sistema (2.17) é quase linear em uma vizinhança da origem.

Nem sempre calcular o limite (2.16) é uma tarefa fácil e por isso o teorema a seguir nos dá uma condição suficiente para que um sistema bidimensional seja considerado quase linear.

Para facilitar os cálculos, vamos escrever o sistema (2.15) em forma escalar, resultando em

$$x' = F(x, y), \quad y' = G(x, y). \quad (2.21)$$

**Definição 2.12.** [5] Dizemos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^n$ , e escrevemos  $f \in C^n$ , quando  $f$  é  $n$  vezes derivável e, além disso, a função  $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Quando  $f \in C^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , dizemos que  $f$  é de classe  $C^\infty$  e escrevemos  $f \in C^\infty$ . É conveniente considerar  $f$  como sua própria “derivada de ordem zero” e escrever  $f^{(0)} = f$ . Assim,  $f \in C^0$  significa que  $f$  é uma função contínua.

**Teorema 2.1.** [1] O sistema (2.21) será quase linear em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio  $\bar{x} = (x_0, y_0)$  sempre que as funções  $F$  e  $G$  tiverem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem.

*Demonstração.* Para demonstrar essa afirmação, usamos o desenvolvimento de Taylor em torno do ponto  $(x_0, y_0)$  para escrever  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$  na forma:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1(x, y)$$

$$G(x, y) = G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_2(x, y),$$

onde  $\eta_1(x, y)/[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$  quando  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ . Analogamente para  $\eta_2$ .

Observemos que  $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ , e que  $dx/dt = d(x - x_0)/dt$  e  $dy/dt = d(y - y_0)/dt$ . Então o sistema (2.21) se reduz a

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

ou, em notação vetorial,

$$\frac{du}{dt} = \frac{Df}{dx}(x_0, y_0)u + \eta(x), \quad (2.23)$$

onde  $u = (x - x_0, y - y_0)^T$  e  $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$ . Então, o sistema (2.21) satisfaz a condição (2.16).

Como consequência deste resultado, podemos observar primeiramente que se as funções  $F$  e  $G$  forem de classe  $C^2$ , então o sistema (2.21) é quase linear, ou seja, não é necessário calcular o limite como no exemplo (2.1). Também observamos que o sistema linear que aproxima o sistema não linear (2.21) em uma vizinhança do ponto de equilíbrio  $(x_0, y_0)$  é dado pela parte linear das equações (2.22) ou (2.23).

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

onde  $u_1 = x - x_0$  e  $u_2 = y - y_0$ . Para encontrarmos o sistema linear correspondente a um sistema quase linear na vizinhança de um ponto de equilíbrio  $(x_0, y_0)$  basta utilizarmos a

equação (2.24). A matriz  $Df(x_0, y_0)$  é chamada matriz jacobiana de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  onde  $f(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$ .  $\square$

**Teorema 2.2.** *Se todos os autovalores da matriz de coeficientes  $A$  no sistema linear  $x' = Ax$  tem partes reais negativas, então seu ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  é assintoticamente estável. Ainda mais, existem constantes positivas  $k$  e  $\alpha$  tais que*

$$\|e^{At}x^0\| \leq ke^{-\alpha t}\|x^0\| \text{ para todo } t \geq 0, x^0 \in \mathbb{R}^2. \quad (2.25)$$

*Se um dos autovalores da matriz de coeficientes  $A$  tem parte real positiva, então o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  é instável.*

A matriz  $e^{At}$  é apresentada no Apêndice [B].

**Teorema 2.3.** *Linearização: [6] Seja  $\bar{x} = 0$  um ponto de equilíbrio dos sistemas quase lineares (2.21) e do sistema linear (2.24) correspondente, onde  $f$  é uma função  $C^1$ . Então:*

- (1) *Se todos os autovalores da matriz jacobiana  $Df(\bar{x})$  tem partes reais negativas, então o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  da equação diferencial  $x' = f(x)$  é assintoticamente estável;*
- (2) *Se pelo menos um dos autovalores da matriz Jacobiana  $Df(\bar{x})$  tem parte real positiva, então o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  da equação diferencial  $x' = f(x)$  é instável.*

*Demonstração.* (1) Para analisarmos as propriedades de estabilidade de  $\bar{x}$  vamos primeiramente fazer uma mudança de variável  $y(t) = x - \bar{x}(t)$ , de modo que o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  de  $x' = f(x)$  corresponda ao ponto de equilíbrio  $y = (0, 0)$  do sistema

$$y' = f(y(t) + \bar{x}). \quad (2.26)$$

Como o sistema (2.21) é quase linear, temos que  $f$  é de classe  $C^1$ . Aplicando a expansão de Taylor na função  $f(y(t) + \bar{x})$  em torno do ponto  $\bar{x}$  obtemos:

$$f(y(t) + \bar{x}) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})y + g(y) \quad (2.27)$$

onde  $g(y)$  satisfaz

$$g(0, 0) = 0 \text{ e } Dg(0, 0) = 0. \quad (2.28)$$

Então, como  $f(\bar{x}) = 0$ , a equação diferencial  $y' = f(y(t) + \bar{x})$  pode ser escrita na forma

$$y' = Df(\bar{x})y + g(y). \quad (2.29)$$

Vamos mostrar que o ponto de equilíbrio nulo da equação (2.29) é assintoticamente estável.

Notemos que as propriedades (2.28) de  $g(y)$  implicam que próximo à origem  $g(y)$  é “pequeno” comparado a  $y$ . Segue pelo Teorema do Valor Médio que para algum  $m > 0$ , existe um  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\|g(y)\| \leq m\|y\| \text{ se } \|y\| < \varepsilon. \quad (2.30)$$

Retornando à equação (2.29), suponha que  $y$  seja uma solução da equação (2.29) satisfazendo a condição inicial  $y = (0, 0) = y^0$ . Se olharmos para  $g(y(t))$  como uma função de  $t$  então, usando a fórmula da variação das constantes (ver Apêndice [B]) temos:

$$y(t) = e^{At}y^0(t) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(y(s))ds. \quad (2.31)$$

Embora a função  $y(t)$  apareça em ambos os membros da equação (2.31), vamos usar essa equação integral para estimar  $\|y(t)\|$  em termos de  $\|y^0\|$  como uma função de  $t$ .

Suponha que as constantes  $k$  e  $\alpha$  são dadas como no Teorema 2.2,  $m > 0$  tal que  $mk < \alpha$  e  $B_\varepsilon(0, 0) = \{y \in \mathbb{R}^2; \|y\| \leq \varepsilon\}$  tal que a equação (2.30) é satisfeita. Segue do Teorema 2.2 que

$$\|y(t)\| \leq ke^{-\alpha t}\|y^0(t)\| + \int_0^t k e^{-\alpha(t-s)}m\|y(s)\|ds. \quad (2.32)$$

com  $\|y(s)\| < \varepsilon$  e  $0 \leq s \leq t$ . Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.32) por  $e^{\alpha t}$ , temos:

$$e^{\alpha t}\|y(t)\| \leq k\|y^0(t)\| + \int_0^t km e^{\alpha s}\|y(s)\|ds. \quad (2.33)$$

Se aplicarmos a desigualdade de Gronwall (ver Apêndice [C]) em (2.33), obtemos:

$$e^{\alpha t}\|y(t)\| \leq k\|y^0(t)\|e^{kmt}. \quad (2.34)$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por  $e^{-\alpha t}$  segue que a estimativa que estamos procurando é:

$$\|y(t)\| \leq k\|y^0(t)\|e^{-(\alpha-km)t}, \text{ para } \|y(t)\| \leq \varepsilon. \quad (2.35)$$

Para concluir a demonstração, seja  $\delta > 0$  tal que  $k\delta < \varepsilon$ . Assim,  $\|y(t)\| < \varepsilon$  sempre que  $\alpha - km > 0$ , o que prova a estabilidade de  $y(t)$ . Ainda pela equação (2.35), concluímos que  $\|y(t)\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Logo, o ponto de equilíbrio  $y = (0, 0)$  é assintoticamente estável.

(2) A demonstração deste resultado é também extensa e pode ser encontrada em [6].

□

O Teorema de Linearização é também conhecido como primeiro método de Lyapunov ou método indireto.

**Exemplo 2.2.** A equação de movimento de um pêndulo sem amortecimento é  $d^2\theta/dt^2 + \omega^2 \sin \theta = 0$ , com  $\omega^2 = g/L$ , onde  $g$  é a constante gravitacional e  $L$  o comprimento do pêndulo. Fazendo  $x = \theta$ ,  $y = d\theta/dt$  obtemos o sistema

$$\begin{cases} dx/dt = y \\ dy/dt = -\omega^2 \sin x \end{cases} \quad (2.36)$$

Mostremos que o sistema não linear acima é quase linear, obtendo o sistema linear correspondente para cada um dos pontos de equilíbrio.

Primeiramente vamos encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (2.36).

$$\begin{cases} y = 0 \\ -\omega^2 \sin x = 0 \end{cases}$$

Mas  $\sin x = 0$  para  $x = \pm n\pi$  com  $n = 0, 1, 2, \dots$ , ou seja, os pontos de equilíbrio do sistema (2.36) são  $(\pm n\pi, 0)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

O sistema (2.36) será quase linear em uma vizinhança do ponto de equilíbrio  $(x_0, y_0)$  sempre que as funções  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$  tiverem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem.

Como  $F(x, y) = y$ ,  $G(x, y) = -\omega^2 \sin x$  são diferenciáveis, o sistema é quase linear em uma vizinhança de cada ponto de equilíbrio.

As derivadas parciais são dadas por

$$F_x(x, y) = 0, F_y(x, y) = 1, G_x(x, y) = -\omega^2 \cos x, G_y(x, y) = 0,$$

e o sistema linear correspondente

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos(\pm n\pi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

**Exemplo 2.3.** Uma generalização da equação do pêndulo amortecido, ou de um sistema massa-mola é a equação de Liénard

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0. \quad (2.38)$$

Se  $c(x)$  for constante e  $g(x) = kx$ , então esta equação tem a forma da equação linear do pêndulo. Suponhamos agora que  $c$  é de classe  $C^1$ ,  $g$  é de classe  $C^2$  e  $g(0) = 0$ .

Vamos escrever a equação de Liénard como um sistema de duas equações de primeira ordem e em seguida mostrar que o sistema é quase linear em uma vizinhança do ponto de

equilíbrio  $(0, 0)$ . Assim, fazendo a substituição  $y = dx/dt$ , temos:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + c(x)y + g(x) = 0 \\ \frac{dx}{dt} - y = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Agora, vamos mostrar que  $(0, 0)$  é ponto de equilíbrio do sistema (2.39) resolvendo

$$\begin{cases} -c(x)y - g(x) = 0 (*) \\ y = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Substituindo  $x = 0$  e  $y = 0$  em  $(*)$  e usando o fato que  $g(0) = 0$  temos que  $(0, 0)$  satisfaz (2.39) e portanto é ponto de equilíbrio.

As derivadas parciais de  $F(x, y) = y$  e  $G(x, y) = -c(x)y - g(x)$ , são

$$F_x(x, y) = 0, F_y(x, y) = 1, G_x(x, y) = -c'(x)y - g'(x), G_y(x, y) = -c(x),$$

que são contínuas.

Logo o sistema é quase linear e o sistema linear correspondente próximo à origem é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & -c(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Os autovalores deste sistema linear são:

$$r_{1,2} = \frac{-c(0) \pm \sqrt{[c(0)]^2 - 4g'(0)}}{2}.$$

A parte real para ambos autovalores é negativa se  $c(0) > 0$  e  $g'(0) > 0$ . Para verificar esse fato, vamos supor primeiramente que  $[c(0)]^2 > 4g'(0)$ . Assim,

$$r_1 = -\frac{c(0)}{2} - \frac{\sqrt{[c(0)]^2 - 4g'(0)}}{2} < 0$$

$$\text{e } r_2 = -\frac{c(0)}{2} + \frac{\sqrt{[c(0)]^2 - 4g'(0)}}{2} < -\frac{c(0)}{2} + \frac{\sqrt{[c(0)]^2}}{2} = 0.$$

Analogamente, supondo agora que  $[c(0)]^2 < 4g'(0)$ , temos

$$r_1 = -\frac{c(0)}{2} - \frac{\lambda i}{2} \text{ e } r_2 = -\frac{c(0)}{2} + \frac{\lambda i}{2}, \text{ onde } \lambda = \sqrt{4g'(0) - [c(0)]^2}.$$

Se  $[c(0)]^2 = 4g'(0)$  o autovalor de multiplicidade dois é negativo.

Então pelo Teorema (2.3), o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  da equação não linear (2.39) é assintoticamente estável.

Vamos supor agora que  $c(0) < 0$ . Como

$$r_1 = -\frac{c(0)}{2} + \frac{\sqrt{[c(0)]^2 - 4g'(0)}}{2} \text{ e } r_2 = -\frac{c(0)}{2} - \frac{\sqrt{[c(0)]^2 - 4g'(0)}}{2} \text{ temos:}$$

- (i) Se  $[c(0)]^2 > 4g'(0)$  temos  $r_1 > 0$ . Se também  $g'(0) < 0$  temos  $[c(0)]^2 - 4g'(0) > [c(0)]^2$  e portanto  $r_2 < 0$ . No entanto, se  $g'(0) > 0$  temos  $r_2 > 0$ .
- (ii) Se  $[c(0)]^2 < 4g'(0)$  então  $Re(r_{1,2}) > 0$ , onde  $Re(r_{1,2})$  indica a parte real dos autovalores.
- (iii) Se  $[c(0)]^2 - 4g'(0) = 0$  então  $r_{1,2} = -\frac{c(0)}{2} > 0$ , que tem multiplicidade dois.

Como em todos os casos pelo menos um dos autovalores tem parte real positiva, pelo Teorema 2.3, o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  da equação não linear (2.39) é instável.

## 2.2 O segundo método de Lyapunov

O segundo método de Lyapunov, também conhecido como método direto, por não ser necessário conhecer algo sobre as soluções do sistema de equações diferenciais, é utilizado para chegarmos às conclusões sobre a estabilidade ou instabilidade de um ponto de equilíbrio através da chamada função de Lyapunov, que é uma função auxiliar apropriada.

O segundo método de Lyapunov é uma generalização da teoria de sistemas de equações diferenciais ordinárias de dois princípios físicos básicos [1]:

- Um ponto de um sistema conservativo é estável se e somente se sua energia potencial tem um mínimo local neste ponto;
- A energia total de um sistema conservativo é constante durante a evolução do sistema.

Em geral o método de Lyapunov é utilizado quando não conseguimos usar o teorema de linearização, no caso em que os autovalores são imaginários puros.

Consideremos a equação diferencial que governa o pêndulo não amortecido (apresentada no exemplo 2.2)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, \text{ com } \omega^2 = \frac{g}{L}.$$

Usando a mudança de variável

$$x = \theta, \quad y = \frac{d\theta}{dt},$$

obtemos o sistema de primeira ordem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{g}{L} \sin x. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Os pontos de equilíbrio para este sistema são

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ -\frac{g}{L} \operatorname{sen} x &= 0 \\ \Rightarrow y &= 0, \quad x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots \end{aligned}$$

Para a origem, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

onde seus autovalores são

$$r = \pm i \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Como os autovalores são imaginários puros, não podemos concluir sobre a estabilidade da origem usando o teorema da linearização.

No entanto, como não existe atrito atuando no sistema, sabemos que a energia total é constante. Temos então

$$\begin{aligned} \text{Energia total} &= (\text{Energia cinética}) + (\text{Energia potencial}) = EC + EP \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + mgh \end{aligned}$$

A velocidade do peso no final do pêndulo é  $L \frac{d\theta}{dt}$  e portanto

$$EC = \frac{1}{2}mL^2y^2.$$

Como a altura do peso do pêndulo é dada por  $h = L(1 - \cos \theta)$  temos

$$EP = mgL(1 - \cos \theta).$$

Então, a energia total é dada por

$$E = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos \theta).$$

Como a energia é conservada

$$0 = \frac{dE}{dt} = mL^2y \frac{dy}{dt} + mgL \operatorname{sen} \theta \frac{dx}{dt}. \quad (2.43)$$



Substituindo (2.42) em (2.43) obtemos

$$\frac{dE}{dt} = mL^2y \left( -\frac{g}{L} \operatorname{sen} x \right) + mgL \operatorname{sen} \theta(y) = 0.$$

Próximo ao ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  onde  $x, y$  são pequenos temos

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos x) \approx \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL \left( 1 - \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \right) \right) \\ &\approx \frac{1}{2}mL^2y^2 + \frac{1}{2}mgLx^2. \end{aligned}$$

A condição que  $E$  é constante então requer que  $x$  e  $y$  satisfazem a equação da elipse

$$\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{g} = \frac{2E}{mgL^2}.$$

Podemos deduzir que as trajetórias que passam próximas ao ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  não irão se afastar do mesmo. Então, o ponto de equilíbrio em  $(0, 0)$  é estável (mas não necessariamente assintoticamente estável).

A ideia principal por trás do método de Lyapunov é determinar como certas funções especiais (Funções de Lyapunov) variam ao longo das soluções do sistema de equações diferenciais  $X' = f(X)$ . Vamos começar definindo essas funções.

**Definição 2.13.** *Seja  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  contendo a origem. Uma função  $V$  de classe  $C^1$*

$$V : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } X \mapsto V(X);$$

*é positiva definida em  $U$  se*

$$(i) \ V(0) = 0;$$

$$(ii) \ V(X) > 0 \text{ para todo } X \in U \text{ com } X \neq 0.$$

*Uma função  $V$  real e de classe  $C^1$  é negativa definida se  $-V$  é positiva definida.*

**Exemplo 2.4.** A função  $V(x, y) = x^2 + y^2$  é positiva definida, pois  $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$  e  $x^2 + y^2 > 0 \ \forall (x, y) \in U$  com  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Já a função  $V(x, y) = x + y^2$  não é positiva definida em qualquer vizinhança aberta da origem pois  $V(x, y) > 0$  não ocorre quando  $y^2 = -x$  ( $x < 0$ ) com  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Para analisar a estabilidade ou não de um ponto de equilíbrio pelo método de Lyapunov nos baseamos no comportamento da função  $V$  ao longo das soluções do sistema. Seja  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  uma solução do sistema

$$X' = f(X), \tag{2.44}$$

$$\text{onde } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } f(X) = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix}.$$

Então, pela regra da cadeia temos,

$$V'(\varphi(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}(\varphi(t))x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(\varphi(t))y'(t)$$

ou ainda,

$$V'(\varphi(t)) = \nabla V(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t))$$

onde  $f(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$ , ou seja,  $V'$  é o produto interno do vetor  $f(x, y)$  com o vetor gradiente  $\nabla V(\varphi(t))$  de  $V$  em  $\varphi(t)$ :

$$V'(\varphi(t)) = f(x, y) \cdot \nabla V(X) = \|f(x, y)\| \cdot \|\nabla V(X)\| \cos \theta, \quad (2.45)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $f(x, y)$  e  $\nabla V(\varphi(t))$ .

Com o teorema a seguir podemos analisar as possibilidades de estabilidade para o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = (0, 0)$ .

**Teorema 2.4.** (Lyapunov) *Seja  $\bar{x} = (0, 0)$  um ponto de equilíbrio de  $X' = f(X)$  e  $V$  uma função de classe  $C^1$ , positiva definida em uma vizinhança  $U$  de  $(0, 0)$ .*

- (i) *Se  $V'(X) \leq 0$  para  $X \in U - \{(0, 0)\}$ , então  $(0, 0)$  é estável.*
- (ii) *Se  $V'(X) < 0$  para  $X \in U - \{(0, 0)\}$ , então  $(0, 0)$  é assintoticamente estável.*
- (iii) *Se  $V'(X) > 0$  para  $X \in U - \{(0, 0)\}$ , então  $(0, 0)$  é instável.*

*Demonstração.* (i) Seja  $V$  uma função positiva definida. Vamos tomar  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno de modo que  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(x, y)\| < \varepsilon\} \subset U$  e seja  $k = \min\{V(x, y); \|(x, y)\| = \varepsilon\}$ , que é positivo pois  $V$  é positiva definida. Pela continuidade de  $V$ , existe  $\delta$  com  $0 < \delta < \varepsilon$  tal que  $B_\delta(\bar{x}) \subset B$  e  $V(x, y) < k$ ,  $\forall (x, y) \in B_\delta(\bar{x})$ . Vamos mostrar que a solução constante  $x(t) = \bar{x}$  iniciada na bola de raio  $\delta$  é estável, isto é,

$$\|\varphi(t_0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall t > 0. \quad (2.46)$$

Seja  $\bar{t} = \min\{s \in (0, t]; \|\varphi(s) - \bar{x}\| \geq \varepsilon\}$ , assim temos  $V(x(\bar{t})) \geq k$ . Por hipótese  $V' \leq 0$ , ou seja,  $V$  é não crescente ao longo das soluções, logo,  $V(x(\bar{t})) \leq V(x(t_0)) \leq k \Rightarrow V(x(\bar{t})) < k$ , o que é uma contradição. Assim, o ponto  $\bar{x}$  é estável.

Os demais itens decorrem da geometria do vetor  $\nabla V(X)$  ([6]).

□

**Definição 2.14.** *Uma função positiva definida  $V$  em uma vizinhança aberta  $U$  da origem é dita uma função de Lyapunov para  $X' = f(X)$  se  $V'(X) \leq 0$  para todo  $X \in U - \{(0, 0)\}$ .*

Quando  $V'(X) < 0$  para todo  $x \in U - \{(0,0)\}$ , a função  $V$  é chamada uma função de Lyapunov estrita.

**Exemplo 2.5.** Um caso particular da equação de Liénard do Exemplo (2.3) é

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + g(u) = 0,$$

onde  $g(0) = 0$ ,  $g(u) > 0$  para  $0 < u < k$  e  $g(u) < 0$  para  $-k < u < 0$ , isto é,  $ug(u) > 0$  para  $x \neq 0$ ,  $-k < u < k$ .

Essa equação pode ser interpretada como descrevendo o movimento de um sistema massa-mola com amortecimento proporcional à velocidade e uma força restauradora não linear.

Fazendo  $x = u$ ,  $y = du/dt$ , mostremos que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema resultante.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + y + g(x) = 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Determinando os pontos de equilíbrio temos

$$\begin{cases} y = 0 \\ -y - g(x) = 0. \end{cases}$$

Como  $g(0) = 0$ , substituindo  $x = 0$  e  $y = 0$  no sistema anterior temos que a origem é um ponto de equilíbrio.

Usando a função de Lyapunov abaixo, vamos mostrar que a origem é um ponto de equilíbrio estável:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)ds, \quad -k < x < k.$$

Calculando  $V'(x, y)$ ,

$$\begin{aligned} V'(x, y) &= V_x \frac{dx}{dt} + V_y \frac{dy}{dt} = y(g(x) - g(0)) + y(-y - g(x)) = \\ &= g(x)y - y^2 - g(x)y = -y^2 \leq 0, \forall (x, y) \in U \setminus \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema (2.4), a origem é um ponto de equilíbrio estável.

Mesmo com o amortecimento, não podemos concluir a estabilidade assintótica com essa função de Lyapunov. A estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  pode ser estabelecida construindo-se uma função de Lyapunov melhor. No entanto, a análise para uma função  $g$  geral é um pouco mais sofisticada e vamos mencionar apenas que uma forma apropriada para  $V$  é:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + Ayg(x) + \int_0^x g(s)ds,$$

---

onde  $A$  é uma constante positiva a ser escolhida de modo que  $V$  seja positiva definida e  $V'$  seja negativa definida. Para o problema do pêndulo [ $g(x) = \sin x$ ], usamos  $V$  como na equação precedente com  $A = \frac{1}{2}$  para mostrar que a origem é assintoticamente estável (mais detalhes podem ser encontrados em [1]).

No capítulo seguinte apresentamos dois modelos clássicos de dinâmica populacional que utilizam os resultados apresentados neste capítulo na análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio existentes.

## 3 Modelos Populacionais

Modelos de Dinâmica Populacional são bons exemplos para ilustrarmos os resultados sobre análise de estabilidade apresentados no capítulo anterior. Apresentaremos os modelos clássicos de competição entre espécies e presa predador.

### 3.1 Espécies em competição

O entendimento das interações entre populações é de fundamental importância para a previsão de extinção de uma ou mais populações ou até mesmo, sob que condições essas populações podem coexistir. Apresentamos primeiramente, o modelo de competição entre duas espécies, que foi proposto inicialmente por Lotka-Volterra [1], [7], introduzindo modificações na equação logística que incluiu os efeitos inibidores de cada espécie em relação à outra.

Considerando  $x$  e  $y$  as duas populações que estão em competição, o modelo de Lotka-Volterra é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Os valores das constantes positivas  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  irão depender das espécies em questão e têm que ser determinados, em geral, através de observações.

**Exemplo 3.1.** Vamos discutir o comportamento qualitativo das soluções do sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \left( \frac{3}{2} - x - \frac{1}{2}y \right) \\ \frac{dy}{dt} &= y \left( 2 - y - \frac{3}{4}x \right),\end{aligned}\tag{3.2}$$

que é um caso particular do sistema (3.1).

Os pontos de equilíbrio são obtidos resolvendo o sistema de equações algébricas

$$x \left( \frac{3}{2} - x - \frac{1}{2}y \right) = 0 \quad \text{e} \quad y \left( 2 - y - \frac{3}{4}x \right) = 0.\tag{3.3}$$

São eles:  $(0, 0)$ ,  $(\frac{3}{2}, 0)$ ,  $(0, 2)$  e  $(\frac{4}{5}, \frac{7}{5})$ .

Baseados no campo de direções na figura (3.1), parece que o ponto  $(\frac{4}{5}, \frac{7}{5})$  atrai outras soluções e é, portanto, assintoticamente estável, enquanto os outros três pontos de equilíbrio são instáveis. Para confirmar essa observação, iremos analisar as aproximações lineares perto de cada ponto de equilíbrio.

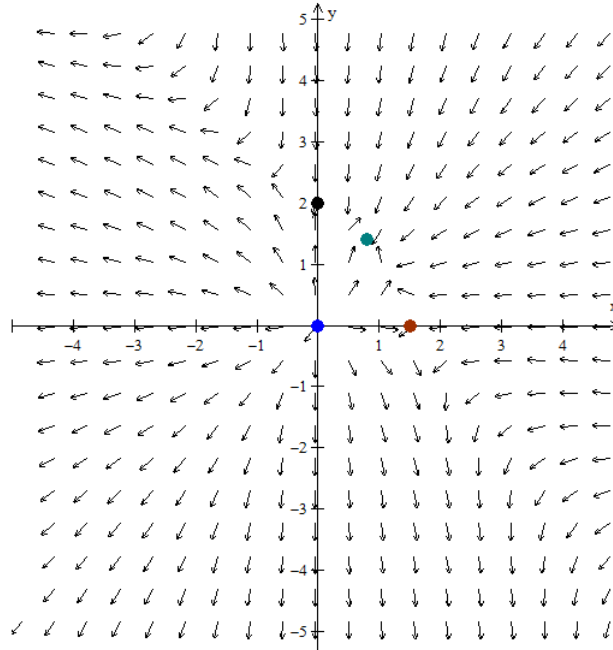


Figura 3.1: Campo de direções para o sistema (3.2).

O sistema (3.2) é quase linear numa vizinhança de cada ponto de equilíbrio. Vamos obter o sistema linear próximo de cada ponto de equilíbrio  $(x_0, y_0)$ . Para o sistema (3.2) temos:

$$F(x, y) = -x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{3}{2}x, \quad G(x, y) = -y^2 - \frac{3}{4}xy + 2y, \text{ onde}$$

$$F_x(x, y) = -2x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}, \quad F_y(x, y) = -\frac{1}{2}x$$

$$G_x(x, y) = -\frac{3}{4}y, \quad G_y(x, y) = -\frac{3}{4}x - 2y + 2.$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2x_0 - \frac{1}{2}y_0 + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}x_0 \\ -\frac{3}{4}y_0 & -\frac{3}{4}x_0 - 2y_0 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

- $(0, 0)$ . Esse ponto de equilíbrio corresponde ao estado em que ambas as espécies são extintas, como resultado da competição. Substituindo  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  em (3.4),

obtemos o sistema correspondente:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Supondo que  $u_1 = \xi e^{rt}$  e substituindo em (3.5) temos

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - r & 0 \\ 0 & 2 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O sistema de equações algébricas tem uma solução não-trivial se e somente se o determinante da matriz dos coeficientes é zero. Calculando seu determinante encontramos que  $r_1 = 3$  e  $r_2 = \frac{3}{2}$  são autovalores da matriz de coeficientes de (3.5) e os autovetores são  $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Assim, a solução geral é  $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{3}{2}t}$ .

Como os autovalores são positivos a origem é chamada de nó instável do sistema linear (3.5) e, também, do sistema não linear (3.2).

- $(\frac{3}{2}, 0)$ . Esse ponto corresponde a um estado em que a espécie  $x$  sobrevive à competição, mas a espécie  $y$  não. O sistema linear correspondente é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Os autovalores e autovetores são

$$r_1 = -\frac{3}{2}, r_2 = \frac{7}{8}, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -6 \\ 19 \end{pmatrix},$$

e sua solução geral é

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{3}{2}t} + c_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 19 \end{pmatrix} e^{\frac{7}{8}t}.$$

Como os autovalores têm sinais opostos, o ponto  $(\frac{3}{2}, 0)$  é chamado de ponto de sela e, portanto, é um ponto de equilíbrio instável do sistema linear (3.6) e do sistema não linear (3.2).

- $(0, 2)$ . Nesse caso, somente a espécie  $y$  sobrevive. A análise é semelhante à análise para o ponto  $(\frac{3}{2}, 0)$ . O sistema linear correspondente é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Os autovalores e autovetores são

$$r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -2, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e sua solução geral é

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Logo, o ponto  $(0, 2)$  também é um ponto de sela.

- $(\frac{4}{5}, \frac{7}{5})$ . Esse ponto de equilíbrio corresponde a um estado de coexistência das duas espécies. Os autovalores e autovetores do sistema linear correspondente

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{21}{20} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

são

$$r_1 = \frac{-110 + \sqrt{5100}}{100}, r_2 = \frac{-110 - \sqrt{5100}}{100}, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \end{pmatrix}, \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução geral da equação (3.8) é

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \end{pmatrix} e^{\frac{-110 + \sqrt{5100}}{100}t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} e^{\frac{-110 - \sqrt{5100}}{100}t}.$$

Como ambos os autovalores são negativos, o ponto de equilíbrio  $(\frac{4}{5}, \frac{7}{5})$  é chamado de nó assintoticamente estável do sistema (3.8) e do sistema não linear (3.2). Todas as trajetórias se aproximam do ponto de equilíbrio quando  $t \rightarrow \infty$ .

Podemos ver no exemplo (3.1) que em alguns casos, a competição entre as duas espécies leva a um estado de equilíbrio de coexistência, enquanto em outros casos a competição pode resultar na extinção de uma das espécies. Analisando o sistema geral (3.1) encontramos quatro possibilidades para pontos de equilíbrio a partir da posição relativa entre as retas  $r$  e  $s$ , que são obtidas a partir de  $dx/dt = dy/dt = 0$ . (ver figura (3.2)).

$$r: \epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y = 0 \text{ e } s: \epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x = 0 \quad (3.9)$$



Denotando por  $(X, Y)$  um ponto de equilíbrio em qualquer um dos quatro casos, temos que o sistema (3.1) é quase linear em uma vizinhança de cada ponto crítico, conforme o teorema (2.1).

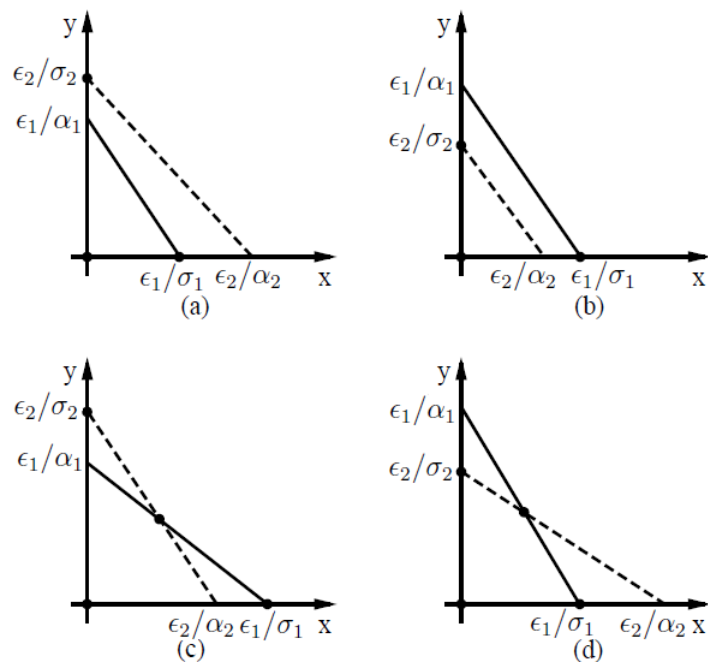


Figura 3.2: Os quatro casos para duas espécies em competição (3.1).

Dentre os quatro casos possíveis (veja [1]), ilustrados na figura (3.2), a coexistência só será possível em (c) e (d). Para esses casos, encontramos os valores não-nulos de  $X$  e  $Y$  resolvendo as equações algébricas (3.9), onde obtemos:

$$X = \frac{\epsilon_1\sigma_2 - \epsilon_2\alpha_1}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2}, Y = \frac{\epsilon_2\sigma_1 - \epsilon_1\alpha_2}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2}. \quad (3.10)$$

Ainda mais, como  $\epsilon_1 - \sigma_1X - \alpha_1Y = 0$  e  $\epsilon_2 - \sigma_2Y - \alpha_2X = 0$ , o sistema linearizado correspondente é dado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon_1X & -\alpha_1X \\ -\alpha_2Y & -\sigma_2Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

cujos autovalores são dados por:

$$r_{1,2} = \frac{-(\sigma_1X + \sigma_2Y) \pm \sqrt{(\sigma_1X + \sigma_2Y)^2 - 4(\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2)XY}}{2}. \quad (3.12)$$

Se  $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 < 0$  a expressão dentro da raiz quadrada na equação (3.12) é positiva e  $(\sigma_1X + \sigma_2Y)^2 - 4(\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2)XY$  é maior do que  $(\sigma_1X + \sigma_2Y)^2$ , e então os autovalores são reais e de sinais opostos. Conseqüentemente, o ponto de equilíbrio  $(X, Y)$  é um ponto de sela (instável) e a coexistência das espécies não é possível.

No entanto, se  $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 > 0$ , então a expressão dentro da raiz quadrada na equação (3.12) é menor do que  $(\sigma_1X + \sigma_2Y)^2$ . Os autovalores são reais e distintos, ou complexos

conjugados com parte real negativa. Observamos que:

$$\begin{aligned}
& (\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2 - 4(\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2)XY = \\
& = (\sigma_1 X)^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 XY + (\sigma_2 Y)^2 - 4\sigma_1 \sigma_2 XY + 4\alpha_1 \alpha_2 XY = \\
& = (\sigma_1 X)^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 XY + (\sigma_2 Y)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 XY = \\
& = (\sigma_1 X - \sigma_2 Y)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 XY > 0.
\end{aligned}$$

Assim, como a raiz de  $(\sigma_1 X - \sigma_2 Y)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 XY$  é sempre positiva, os autovalores nunca podem ser complexos. Portanto, o ponto de equilíbrio é um nó assintoticamente estável e uma coexistência sustentável é possível.

Vamos agora, relacionar esse resultado com as figuras (3.2)c e (3.2)d. Na figura (3.2)c, da posição relativa entre as retas temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} &> \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} (\epsilon_1 \alpha_2 > \epsilon_2 \sigma_1) \text{ e} \\
\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} &> \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} (\epsilon_2 \alpha_1 > \epsilon_1 \sigma_2).
\end{aligned}$$

Usando essas desigualdades junto com o fato que  $X$  e  $Y$  dados pela equação (3.10) são positivos, somos levados à desigualdade  $\sigma_1 \sigma_2 < \alpha_1 \alpha_2$ . Assim, para este caso, o ponto de equilíbrio de coexistência das espécies é um ponto de sela.

Na figura (3.2)d, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} &< \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} (\epsilon_1 \alpha_2 < \epsilon_2 \sigma_1) \text{ e} \\
\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} &< \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} (\epsilon_2 \alpha_1 < \epsilon_1 \sigma_2).
\end{aligned}$$

Novamente, usando a condição de que  $X$  e  $Y$  são positivos, nos leva à desigualdade  $\sigma_1 \sigma_2 > \alpha_1 \alpha_2$ . Então, o ponto de equilíbrio de coexistência é assintoticamente estável. Para esse caso, podemos mostrar, também, que os outros pontos de equilíbrio  $(0, 0)$ ,  $\left(\frac{\epsilon_1}{\alpha_1}, 0\right)$  e  $\left(0, \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}\right)$  são instáveis. Portanto, para quaisquer valores iniciais positivos para  $x$  e  $y$ , as duas populações vão tender ao estado de equilíbrio de coexistência dado pela equação (3.10). Mais detalhes sobre esse modelo podem ser encontrados em [1] e [7].

## 3.2 Modelo presa-predador

A predação é um outro tipo de interação entre populações em que a população predadora usa a outra população (presa) como alimento. Assim, essa interação é benéfica para o predador e prejudicial para a presa, diferentemente do que ocorre para a competição.

O primeiro modelo proposto para interação presa-predador é atribuído a Volterra

(1926), e considera que, na ausência do predador, a presa cresce exponencialmente e, na ausência da presa, o predador tende à extinção.

Denotando por  $x$  e  $y$  as populações de presa e de predador, respectivamente, o modelo é dado por

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(a - \alpha y), \\ dy/dt &= y(-c + \gamma x). \end{aligned} \tag{3.13}$$

As constantes  $a$ ,  $c$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$  são positivas onde  $a$  e  $c$  são as taxas de crescimento de presas e de mortalidade de predadores, respectivamente, e  $\alpha$  e  $\gamma$  descrevem o efeito da interação entre as populações.

Na sequência, temos por objetivo determinar o comportamento qualitativo das soluções de (3.13), dada uma condição inicial  $(x_0, y_0)$ .

**Exemplo 3.2.** Iremos analisar as soluções do sistema

$$\begin{aligned} dx/dt &= x \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y \right) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}xy, \\ dy/dt &= y \left( -\frac{1}{2} + x \right) = -\frac{1}{2}y + xy \end{aligned} \tag{3.14}$$

para  $x$  e  $y$  positivos.

Os pontos de equilíbrio desse sistema são obtidos resolvendo o sistema

$$x \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y \right) = 0, \quad y \left( -\frac{1}{2} + x \right) = 0.$$

Obtemos como pontos de equilíbrio  $(0, 0)$  e  $(\frac{1}{2}, 3)$ . A figura (3.3) mostra os pontos de equilíbrio e o campo de direções para o sistema (3.14). Podemos observar que as trajetórias no primeiro quadrante podem ser curvas fechadas em torno do ponto de equilíbrio  $(\frac{1}{2}, 3)$ .

A seguir vamos examinar o comportamento local das soluções próximas a cada ponto de equilíbrio. Primeiramente vamos encontrar o sistema linear correspondente, próximo à origem. As funções

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}xy, \\ G(x, y) &= -\frac{1}{2}y + xy, \end{aligned}$$

possuem derivadas parciais contínuas até segunda ordem. São elas:

$$F_x(x, y) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y; \quad G_x(x, y) = y; \quad F_y(x, y) = -\frac{1}{2}x; \quad G_y(x, y) = -\frac{1}{2} + x.$$

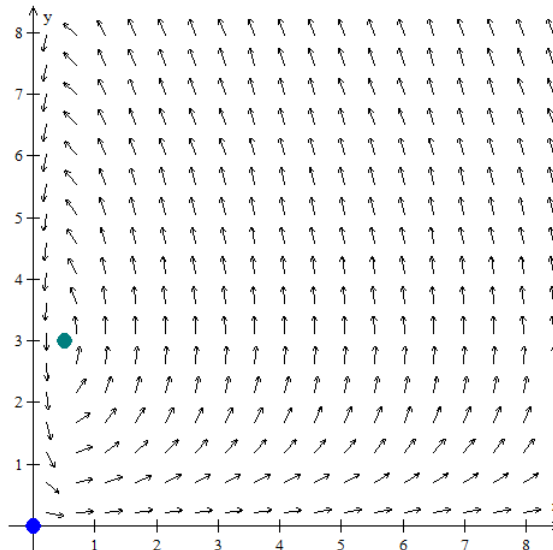


Figura 3.3: Pontos de equilíbrio e campo de direções para o sistema (3.14).

Assim, o sistema correspondente é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Os autovalores e autovetores da equação (3.15) são

$$r_1 = \frac{3}{2}, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$r_2 = -\frac{1}{2}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{3}{2}t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Assim a origem é um ponto de sela para ambos os sistemas, o linear (3.15) e o não linear (3.14), e portanto, instável.

Agora, vamos analisar o sistema (3.15) próximo ao ponto de equilíbrio  $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ , onde o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Os autovalores e autovetores da equação (3.15) são

$$r_1 = \sqrt{\frac{3}{4}}i, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{3}{4}}i \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix};$$

$$r_2 = -\sqrt{\frac{3}{4}}i, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{3}{4}}i \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

Como os autovalores são imaginários, o ponto de equilíbrio  $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$  é um centro do sistema linear (3.16) e, portanto, é um ponto de equilíbrio estável para esse sistema. Observamos que o comportamento do sistema linear pode ser o mesmo, ou não, do sistema não linear, de modo que a natureza do ponto  $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$  para o sistema não linear não pode ser determinada por essa informação.

Voltando para o sistema não linear (3.14) e dividindo-se a segunda das equações (3.14) pela primeira, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left(-\frac{1}{2} + x\right)}{x\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}y\right)}. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) é separável e pode ser colocada na forma

$$\int \frac{1}{y} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}y\right) dy = \int \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{2} + x\right) dx$$

$$\frac{3}{2} \ln y + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2}y - x = k, \quad (3.18)$$

onde  $k$  é uma constante de integração e  $x$  e  $y$  são positivos.

Embora não possamos obter  $y$  como função de  $x$ , explicitamente, através da equação (3.18), é possível mostrar que o gráfico de (3.18) para um valor fixo de  $k$  é uma curva fechada em torno do ponto  $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ . Logo, o ponto de equilíbrio também é centro para o sistema não linear (3.14).

A figura (3.4) mostra um retrato de fase para o sistema (3.14). Para certas condições iniciais, a trajetória é uma curva fechada em torno do ponto de equilíbrio, parecida com uma elipse. A figura 3.5 mostra a dependência de  $x$  e  $y$  em  $t$  para um conjunto típico de condições iniciais, onde observamos que  $x$  e  $y$  são funções periódicas de  $t$  (as trajetórias são curvas fechadas). Além disso, a oscilação da população predadora vem depois da oscilação de presas.

Podemos analisar o sistema geral (3.13) de maneira análoga ao exemplo anterior, onde os pontos de equilíbrio são  $(0, 0)$  e  $(c/\gamma, a/\alpha)$ . Vamos agora analisar as soluções do sistema

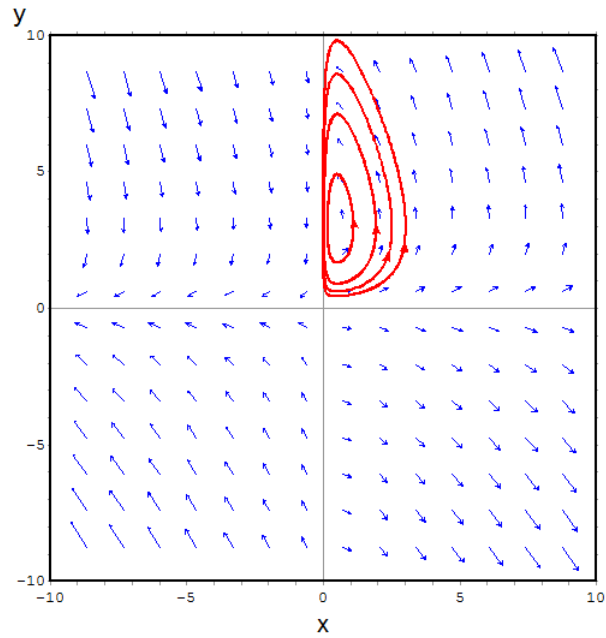


Figura 3.4: Retrato de fase para o sistema (3.14).

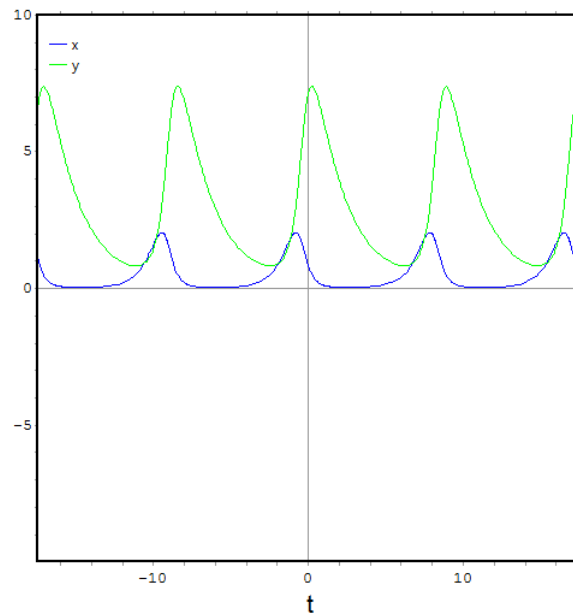


Figura 3.5: Variações nas populações de presas e de predadores em relação ao tempo para o sistema (3.14).

linear correspondente perto de cada ponto de equilíbrio.

O sistema linear correspondente próximo à origem:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Os autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned} r_1 &= a, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ r_2 &= -c, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação (3.19) é:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct}.$$

Portanto, a origem é um ponto de sela e portanto, instável.

Considerando agora, o ponto de equilíbrio  $(c/\gamma, a/\alpha)$  e fazendo a mudança de variável  $x = (c/\gamma) + u$  e  $y = (a/\gamma) + v$ , temos o sistema linear correspondente:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ \gamma a/\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Os autovalores do sistema (3.20) são  $r = \pm i\sqrt{ac}$ . Então, o ponto de equilíbrio é um centro estável para o sistema linear. Vamos dividir a segunda equação pela primeira para encontrar as trajetórias do sistema (3.20). Assim

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{dv/dt}{du/dt} = -\frac{(\gamma a/\alpha)u}{(\alpha c/\gamma)v} \Rightarrow \\ \frac{\alpha c}{\gamma} v dv + \frac{\gamma a}{\alpha} u du &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$\alpha^2 cv dv + \gamma^2 au du = 0. \quad (3.21)$$

Consequentemente,

$$\gamma^2 au^2 + \alpha^2 cv^2 = k, \quad (3.22)$$

onde  $k$  é uma constante de integração não-negativa. Assim, as trajetórias do sistema linear são elipses.

Note que o sistema (3.13) pode ser reduzido a uma única equação,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y(-c + \gamma x)}{x(a - \alpha y)}. \quad (3.23)$$

A equação (3.23) é separável e assim temos:

$$\begin{aligned} x(a - \alpha y) dy &= y(-c + \gamma x) dx \Rightarrow \frac{a - \alpha y}{y} dy = \frac{-c + \gamma x}{x} dx, \\ \left(\frac{a}{y} - \alpha\right) dy &= \left(-\frac{c}{x} + \gamma\right) dx, \\ \left(\frac{a}{y} - \alpha\right) dy + \left(\frac{c}{x} - \gamma\right) dx &= 0. \end{aligned}$$

Integrando temos

$$a \ln y - \alpha y + c \ln x - \gamma x = C, \quad (3.24)$$

onde  $C$  é uma constante de integração. É possível mostrar que o gráfico da equação (3.24) é uma curva fechada, para  $C$  fixo, em torno do ponto de equilíbrio  $(c/\gamma, a/\alpha)$ . Para uma demonstração, ver pág. 55 de [8]. Portanto, o ponto de equilíbrio também é um centro para o sistema geral não linear (3.13).

Na análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo de presa-predador do sistema geral (3.13) vimos que temos um centro estável como ponto de equilíbrio para o sistema linear e portanto nada podemos concluir sobre a estabilidade deste ponto de equilíbrio para o sistema não linear. No entanto, como podemos ver em [8], após manipulações algébricas é possível mostrar que o ponto de equilíbrio que é centro estável para o sistema linear é também um centro para o sistema não linear.

Em [3] é apresentada a função  $V(x, y)$  abaixo para o estudo do equilíbrio não trivial.

$$V(x, y) = \int_{x^*}^x \frac{\eta - x^*}{\eta} d\eta + \frac{\alpha}{\gamma} \int_{y^*}^y \frac{\xi - y^*}{\xi} d\xi,$$

onde  $x^* = \frac{c}{\gamma}$  e  $y^* = \frac{a}{\alpha}$ .

Usando (3.13) temos

$$\frac{x - x^*}{x} dx + \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{y - y^*}{y}\right) dy = 0$$

e assim

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= V'(x, y) = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \\ &= \frac{x - x^*}{x} \frac{dx}{dt} + \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{y - y^*}{y}\right) \frac{dy}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Então,  $V(x(t), y(t)) \equiv V(x(0), y(0)) = c$  e a solução de (3.13) para  $V(x(0), y(0))$  é uma solução periódica de (3.13).

Hsu [3] também apresenta exemplos de funções de Lyapunov para alguns modelos em Ecologia e em particular, para algumas variações do modelo presa-predador clássico.



## 4 Alguns critérios para a existência de soluções periódicas

Periodicidade é um fenômeno presente nos seres vivos, desde o ciclo celular, que governa a taxa e o ritmo da divisão celular até o ir e vir de populações em seu meio natural. As trajetórias de sistemas bidimensionais podem ser trajetórias fechadas no plano de fase. Mas, em muitas situações, uma solução periódica é uma situação final do processo, ou seja, soluções próximas tendem à essa solução periódica. ([1]).

No entanto, um ciclo limite é uma trajetória fechada e isolada. Isolada significa que trajetórias vizinhas não são fechadas, ou seja, elas espiralam em direção ao ciclo limite ou afastam-se do mesmo. Em um plano de fase, um ciclo limite é qualquer trajetória fechada orientada e simples que não contém pontos singulares (pontos onde não há fluxo). A curva deve ser fechada para que o ponto ao longo do ciclo retorne a sua posição inicial em intervalos de tempo fixo e então execute o movimento periódico. A trajetória também deve ser simples, ou seja, não pode se cruzar pela propriedade de unicidade das equações diferenciais.

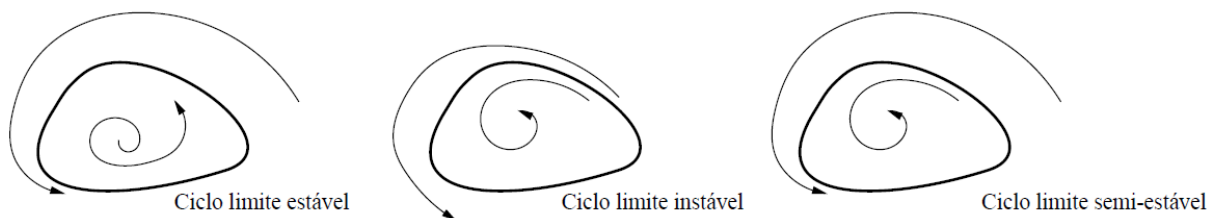


Figura 4.1: Ciclos limites.

O que diferencia um ciclo limite de ciclos que circulam um centro é o fato que em um ciclo limite as trajetórias adjacentes tendem para uma trajetória fechada, ou seja, pontos da vizinhança irão se aproximar do ciclo limite se  $t \rightarrow +\infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ . Se isto acontecer, (para todas as trajetórias adjacentes), o ciclo limite é estável. Caso contrário dizemos que é instável. Em alguns casos diremos que é semi-estável, como na figura 4.1.

Consideremos um sistema autônomo não linear

$$\begin{cases} x' &= F(x, y) \\ y' &= G(x, y). \end{cases} \quad (4.1)$$

Em geral não há muitos métodos que podemos utilizar para concluirmos se há ou não ciclos limites para o sistema (4.1). Procuramos ciclos limites em sistemas que fisicamente nos dão sugestões que algo está se repetindo, como por exemplo, a divisão celular. Primeiramente vamos estabelecer critérios para a não existência de ciclos limites.

Os dois critérios que seguem são úteis para podermos excluir a presença de um ciclo limite, e por essa razão são chamados de critérios negativos.

**Teorema 4.1.** *Critério de Bendixson.* Suponhamos que  $D$  é uma região simplesmente conexa do plano (ou seja,  $D$  é uma região sem buracos). Se a expressão  $\partial F/\partial x + \partial G/\partial y$  é não identicamente nula (isto é, é diferente de zero para todo  $(x, y)$  em  $D$ ) e não muda de sinal em  $D$ , então não existem órbitas fechadas nessa região.

*Demonstração.* Suponhamos que exista uma órbita fechada  $C$  na região  $D$ . Pelo Teorema de Green:

$$\int_C F(x, y)dy - G(x, y)dx = \iint_S \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy, \quad (4.2)$$

onde  $S$  é a região delimitada pela curva  $C$ .

Pelo nosso sistema

$$\frac{dx/dy}{dy/dt} = \frac{dx}{dy} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)} \Rightarrow G(x, y)dx = F(x, y)dy.$$

Logo, a integral de linha é zero e concluimos que

$$\iint_S \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Mas, isto contraria a hipótese de que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0 \text{ e não muda de sinal.}$$

Portanto, não existem órbitas fechadas [7]. □

**Exemplo 4.1.** Usaremos o Critério de Bendixson para concluir que não há ciclo limite para o sistema

$$\begin{cases} x' &= x^3 + y^3 \\ y' &= 3x + y^3 + 2y. \end{cases}$$

Calculando  $F_x + G_y$  temos:

$$F_x + G_y = 3x^2 + 3y^2 + 2 > 0,$$

para quaisquer  $x, y$  do plano. Assim, não há trajetórias fechadas no plano  $xy$ .

**Teorema 4.2.** *Critério de Dulac.* Suponhamos que  $D$  é uma região simplesmente conexa do plano, e suponha que existe uma função  $B(x, y)$ , continuamente diferenciável em  $D$ ,

tal que a expressão

$$\frac{\partial(BF)}{\partial x} + \frac{\partial(BG)}{\partial y}$$

é não identicamente nula e não muda de sinal em  $D$ . Então não há órbitas fechadas nesta região.

O critério de Bendixson é um caso particular do critério de Dulac, tomando  $B(x, y) = 1$ .

**Exemplo 4.2.** O sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y + x^2 + y^2, \end{cases}$$

não possui órbitas fechadas no plano. Aplicando o critério de Bendixson temos:

$$F_x + G_y = -1 + 2y.$$

Assim, não existem soluções periódicas acima ou abaixo da reta  $y = \frac{1}{2}$ , onde  $F_x + G_y$  tem sinal definido. Talvez possa existir uma órbita fechada que corte a reta  $y = \frac{1}{2}$ .

Aplicando agora o critério de Dulac com  $B(x, y) = e^{-2x}$  temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(BF)}{\partial x} + \frac{\partial(BG)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{-2x}y) + \frac{\partial}{\partial y}[e^{-2x}(-x - y + x^2 + y^2)] \\ &= -2e^{-2x}y - e^{-2x} + 2e^{-2x}y \\ &= -e^{-2x} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Como  $-e^{-2x}$  tem sinal definido em  $\mathbb{R}^2$ , podemos assegurar que não existem órbitas fechadas em todo o plano.

Existe uma grande flexibilidade para a escolha da função  $B(x, y)$ , porém a única condição indispensável é que ela seja contínua. Ainda que o enunciado do critério de Dulac em [9] não exija que a função  $B(x, y)$  seja positiva definida, as funções nesta referência tem seus sinais definidos. O exemplo a seguir mostra que esta propriedade em geral é desejada.

**Exemplo 4.3.** (Exemplo 3.3.19, p.70 de [10]) Para o sistema

$$\begin{cases} x' = y + xy^2, \\ y' = -x + x^2y, \end{cases}$$

temos  $\frac{\partial(F)}{\partial x} + \frac{\partial(G)}{\partial y} = x^2 + y^2 > 0$ ,  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$  e o critério de Bendixson permite descartar a existência de soluções periódicas. Se aplicamos o critério de Dulac com

$B(x, y) = x^2 - y^2$ , que não tem sinal definido, já que se anula ao longo das retas  $y = \pm x$ , obtemos:

$$\frac{\partial(BF)}{\partial x} + \frac{\partial(BG)}{\partial y} = x^4 + 4xy - y^4,$$

que também não tem sinal definido. Então, não podemos afirmar a ausência de soluções periódicas. Se, ao contrário, tomarmos  $B(x, y) = x^2 + y^2$  (que é positiva definida) temos  $\frac{\partial(BF)}{\partial x} + \frac{\partial(BG)}{\partial y} = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 > 0$  para todo  $x, y > 0$ , e portanto não existem soluções periódicas segundo o critério de Dulac.

Devemos ressaltar que:

- Nem toda função de sinal definido funciona como  $B(x, y)$ . No exemplo anterior se  $B(x, y) = x^2y^2$  temos que  $\frac{\partial(BF)}{\partial x} + \frac{\partial(BG)}{\partial y} = -2xy(x^2 - y^2) + 3x^2y^2(x^2 + y^2)$  que é de sinal indefinido.

Encontrar a função adequada pode demandar grandes doses de intuição e criatividade.

Agora que sabemos como excluir órbitas fechadas, iremos nos voltar para a tarefa oposta: encontrar métodos para definir que existam órbitas fechadas em um sistema particular. O teorema a seguir é um dos poucos nesta direção.

**Teorema 4.3.** *Teorema de Poincaré-Bendixson : Suponhamos que*

- (1)  *$R$  é um subconjunto fechado e limitado do plano;*
- (2)  *$x' = f(x)$  é um campo vetorial continuamente diferenciável em um conjunto aberto contendo  $R$ ;*
- (3)  *$R$  não contém qualquer ponto de equilíbrio; e*
- (4) *Existe uma trajetória  $C$  que está “confinada” em  $R$ , no sentido que  $C$  inicia em  $R$  e permanece em  $R$  para todo tempo futuro (Figura 4.2).*

*Então  $C$  é uma órbita fechada, ou tende para uma órbita fechada quando  $t \rightarrow \infty$ . Em qualquer um dos dois casos,  $R$  contém uma órbita fechada (mostrada na figura 4.2).*

Quando aplicamos o teorema de Poincaré-Bendixson as condições (1)-(3) são mais fáceis de serem verificadas. Para verificar (4), como garantir que a trajetória  $C$  existe? A ideia padrão é construir uma região de atração  $R$ , isto é, um conjunto fechado conexo tal que o campo vetorial aponta “para dentro” em todo lugar na fronteira de  $R$  (Figura 4.3). Então, todas as trajetórias em  $R$  estão confinadas. Se podemos também afirmar que não há pontos de equilíbrio em  $R$ , então o teorema de Poincaré-Bendixson garante que  $R$  contém uma órbita fechada.

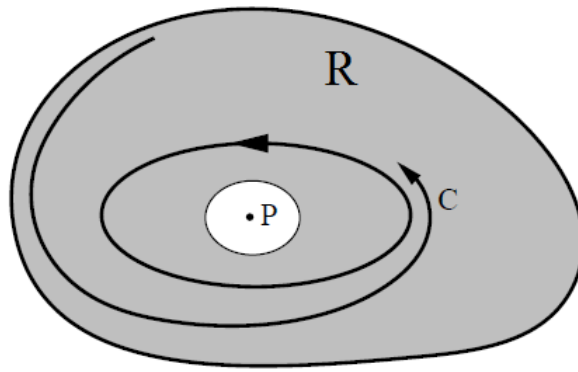


Figura 4.2: Trajetória  $C$  confinada em  $R$

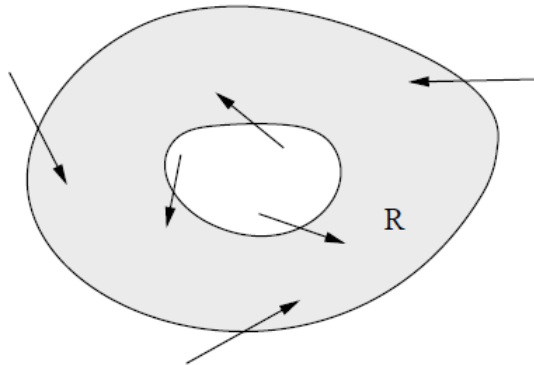


Figura 4.3: Região de atração.

**Exemplo 4.4.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = x - y - x(x^2 + 5y^2), \\ y' = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (4.3)$$

Temos que a origem  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  é um ponto de equilíbrio. Vamos analisar sua estabilidade. Calculando as derivadas parciais temos que o sistema linear correspondente é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3x_0^2 - 5y_0^2 & -1 - 10x_0y_0 \\ 1 - 2x_0y_0 & +1 - x_0^2 - 3y_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Logo, para  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , temos:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Calculando os autovalores deste sistema linear

$$\det \begin{pmatrix} 1 - r & -1 \\ 1 & 1 - r \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow r_{1,2} = +1 \pm i.$$

Como  $Re(r_{1,2}) > 0$ , temos que  $(0, 0)$  é um ponto espiral instável.

Agora vamos escrever o sistema (4.3) em coordenadas polares. Primeiramente vamos mostrar que  $rr' = xx' + yy'$  e  $\theta' = (xy' - x'y)/r^2$ .

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \text{ com } r > 0, \text{ onde } r = r(t) \text{ e } \theta = \theta(t). \quad (4.4)$$

Então temos que

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Derivando  $r$  em relação à  $t$  temos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \left( 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \right) \text{ (pela regra da cadeia)}$$

Logo,

$$r' = \frac{1}{r}(xx' + yy')$$

Portanto,

$$rr' = xx' + yy'. \quad (4.5)$$

De (4.4) obtemos:

$$\frac{dx}{dt} = r' \cos \theta + r(-\sin \theta)\theta' \quad (4.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = r' \sin \theta + r(\cos \theta)\theta' \quad (4.7)$$

Multiplicando (4.6) por  $(r \sin \theta)$  e (4.7) por  $(r \cos \theta)$  vem:

$$(r \sin \theta) \frac{dx}{dt} = rr' \sin \theta \cos \theta - r^2(\sin \theta)^2\theta' \quad (4.8)$$

$$(r \cos \theta) \frac{dy}{dt} = rr' \sin \theta \cos \theta + r^2(\cos \theta)^2\theta' \quad (4.9)$$

Tomando a equação (4.8) menos a equação (4.9), obtemos sucessivamente:

$$x'y - xy' = -r^2(\sin \theta)^2\theta' - r^2(\cos \theta)^2\theta',$$

$$x'y - xy' = -r^2\theta'(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta),$$

$$\theta' = \frac{xy' - x'y}{r^2} \quad (4.10)$$

Usando (4.5) e (4.10) acima demonstradas, o sistema (4.3) em coordenadas polares

fica:

$$xx' + yy' = x^2 - xy - x^2(x^2 + 5y^2) + xy + y^2 - y^2(x^2 + y^2)$$

$$xx' + yy' = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$$

$$rr' = r^2 - r^4 - (2 \cdot r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta)$$

$$rr' = r^2 - r^4 - r^4(2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta)^2$$

$$\frac{dr}{dt} = r - r^3 - r^3(2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta)^2 \quad (\text{usando } \sin(\theta + \theta) = 2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2 - r^2 \sin^2(2\theta))$$

e também:

$$xy' - yx' = x^2 + xy - xy(x^2 + y^2) - xy + y^2 + xy(x^2 + 5y^2)$$

$$xy' - yx' = (x^2 + y^2) - x^3y - xy^3 + x^3y + 5xy^3$$

$$xy' - yx' = (x^2 + y^2) + 4xy^3$$

$$\theta' r^2 = r^2 + 4(r \cos \theta \cdot r^3 \sin^3 \theta)$$

$$\theta' r^2 = r^2 + 4r^4(\cos \theta \cdot \sin^3 \theta)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 + 4r^2(\cos \theta \cdot \sin^3 \theta)$$

Logo, (4.3) em coordenadas polares:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2 - r^2 \sin^2(2\theta)) \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 + 4r^2(\cos \theta \cdot \sin^3 \theta) \end{cases} \quad (4.11)$$

Queremos agora encontrar uma região onde as trajetórias se iniciam e permanecem dentro da mesma. Para isso vamos impor condições para a primeira equação de (4.11). A primeira condição será  $dr/dt > 0$  (e encontramos um  $r_{min}$ ) e depois  $dr/dt < 0$  (para encontrarmos  $r_{max}$ ). Assim vamos determinar uma região entre dois círculos onde se tem uma trajetória fechada.

Temos

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2 - r^2 \sin^2(2\theta)).$$

Impondo a primeira condição  $dr/dt > 0$ , como  $r > 0$  devemos ter

$$1 - r^2 - r^2 \sin^2(2\theta) > 0.$$

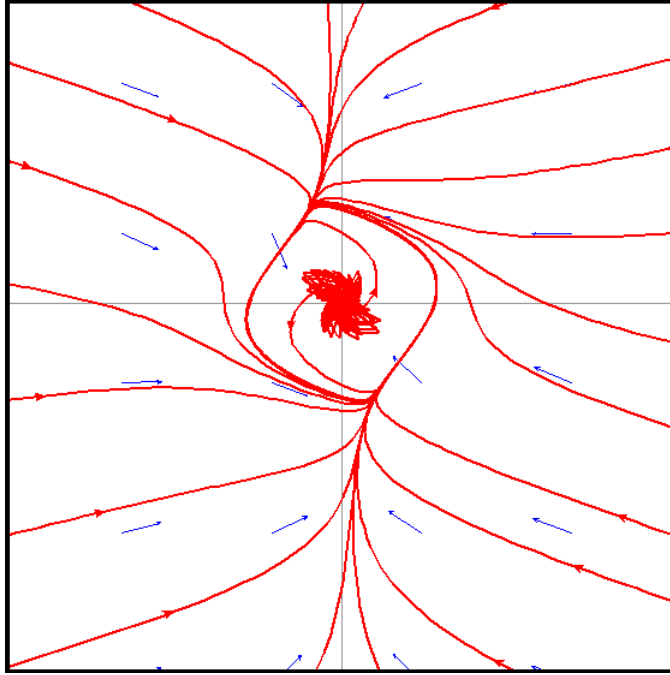


Figura 4.4: Plano de fase para o sistema (4.3).

Como  $1 + \text{sen}^2(2\theta) \leq 2$ , temos

$$r^2 (1 + \text{sen}^2(2\theta)) \leq 2r^2$$

$$-r^2 (1 + \text{sen}^2(2\theta)) \geq -2r^2$$

$$1 - r^2 (1 + \text{sen}^2(2\theta)) \geq 1 - 2r^2$$

Impondo que  $1 - 2r^2 > 0$ , temos  $r_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Vamos agora impor a condição  $dr/dt < 0$ , como  $r > 0$  então devemos ter

$$1 - r^2 - r^2 \text{sen}^2(2\theta) < 0.$$

Usando o fato que  $\text{sen}^2(2\theta) \geq 0$ , temos:

$$\text{sen}^2(2\theta) + 1 \geq 1$$

$$r^2 (\text{sen}^2(2\theta) + 1) \geq r^2$$

$$-r^2 (\text{sen}^2(2\theta) + 1) \leq -r^2$$

$$1 - r^2 (\text{sen}^2(2\theta) + 1) \leq -r^2 + 1$$

Impondo que  $-r^2 + 1 < 0$ , temos  $r_{max} = 1$ .

Assim, encontramos dois círculos concêntricos com  $r_{min}$  e  $r_{max}$ , tais que  $r' < 0$  no



---

círculo exterior e  $r' > 0$  no círculo interior. Então o anel  $0 < r_{min} \leq r \leq r_{max}$  será a nossa região desejada. Note que para essa região não há pontos de equilíbrio no disco encontrado, desde que,  $r_{min} > 0$  e assim o teorema de Poincaré-Bendixson implica na existência de uma órbita fechada.

No capítulo seguinte apresentamos uma variação do modelo presa-predador onde o critério de Dulac é utilizado.

# 5 Variações do modelo clássico presa-predador

O modelo de Lotka-Volterra, embora não seja totalmente realista com as complexas relações que acontecem na natureza, mostra que simples interações de presa-predador podem resultar em comportamento oscilatório das populações. Uma das suposições que não atende a realidade no modelo de Lotka-Volterra (3.13), é a de que o crescimento da presa é ilimitado na ausência de predadores ( $y \equiv 0$ ). No modelo clássico (3.13), os termos que estão entre parênteses são as taxas de crescimento *per capita* dependente das densidades das populações. Para um modelo mais realista essas taxas de crescimento deveriam depender de ambas densidades da presa e do predador como em

$$\begin{aligned} dx/dt &= x\bar{F}(x, y), \\ dy/dt &= y\bar{G}(x, y), \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde  $\bar{F}, \bar{G}$  dependem da interação das espécies, dos tipos de espécies, etc.

Primeiramente, podemos esperar que a presa satisfaça um crescimento logístico na ausência de qualquer predador, como no modelo (3.13), ou que tenha uma dinâmica de crescimento similar e que possui uma capacidade de suporte. Então, por exemplo, uma equação para a população da presa que seja mais realista pode ser da forma

$$dx/dt = x\bar{F}(x, y), \text{ onde } \bar{F}(x, y) = r \left( 1 - \frac{x}{\beta} \right) - yR(x), \tag{5.2}$$

onde  $R(x)$  é um dos termos de predação discutidos abaixo e  $\beta$  é a constante de capacidade de suporte para a presa quando  $y \equiv 0$ .

O termo de predação, é a resposta funcional do predador à mudança na densidade da presa e que geralmente mostra um efeito de saturação. Em vez de uma resposta do predador ( $\alpha xy$ ), como no modelo de Lotka-Volterra (3.13), tomamos  $yxR(x)$  onde  $xR(x)$  satura para um  $x$  suficientemente grande. Alguns exemplos são

$$R(x) = \frac{A}{x+B}, \quad R(x) = \frac{Ax}{x^2+B^2}, \quad R(x) = \frac{A[1-e^{-ax}]}{x}, \tag{5.3}$$

onde  $A$  e  $B$  e  $a$  são constantes positivas.

Uma variação do modelo clássico de Lotka-Volterra é o proposto por Schoener (ver [8]). Neste modelo, o crescimento das presas é limitado e a taxa de crescimento da população de presas, que no modelo de Lotka-Volterra era uma constante, será agora representada por uma função. As equações que descrevem o modelo presa-predador proposto por Schoener são:

$$\begin{aligned} dx/dt &= rx \left( \frac{\beta}{x} - 1 \right) - bxy, \\ dy/dt &= y(-c + \gamma x), \end{aligned} \tag{5.4}$$

onde  $r$  é uma constante real positiva e  $\beta$  é a capacidade de suporte.

Para uma análise dos pontos de equilíbrio do modelo de Schoener ver pág. 69 de Bessa [8].

A equação da população do predador, a segunda de (3.13), pode também ser modificada para ser mais realista do que a do modelo clássico de Lotka-Volterra ( $\bar{G} = (-c + \gamma x)$ ). Possíveis formas são:

$$\bar{G}(x, y) = k \left( 1 - \frac{\delta y}{x} \right), \quad \bar{G}(x, y) = -\lambda + \mu R(x) \tag{5.5}$$

onde  $k$ ,  $\delta$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  são constantes positivas e  $R(x)$  é como em (5.3). A primeira função de (5.5) diz que a capacidade de suporte para o predador é proporcional à densidade da presa.

Os modelos dados por (5.1), (5.4) e (5.5) são apenas alguns exemplos de muitos que já foram propostos e estudados.

Apresentamos a seguir uma variação do modelo clássico presa-predador proposto em [3] e que, diferentemente do clássico, não possui soluções periódicas.

Modelos clássicos como o modelo de Lotka-Volterra podem ser usados em um ambiente homogêneo, porém geralmente, o ambiente é heterogêneo e pode ser representado usando um conjunto discreto de agrupamentos conectados por migração. Na situação mais simples, um grupo de dois agrupamentos é utilizado e o modelo matemático é composto de duas partes, uma descrevendo a interação presa-predador local e um descrevendo a dispersão de um agrupamento para o outro. No modelo a seguir, o objetivo foi estudar o efeito da migração do predador, que é dependente da densidade da presa, na estabilidade do sistema presa-predador, assumindo que presas atraem predadores, isto é, predadores permanecem em um dado agrupamento quando a densidade das presas é grande e deixam esse agrupamento quando a densidade da presa é pequena.

Sejam  $n_1(t)$  e  $n_2(t)$  as densidades das populações das presas, no tempo  $t$ , localizadas em dois agrupamentos. Os predadores são representados pelas densidades da população em seus ambientes  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$  no tempo  $t$ .

Assumimos que migrações e interações bióticas (interações que se podem estabelecer

entre os seres vivos que ocupam o mesmo ecossistema) têm duas diferentes escalas de tempo características: migrações são rápidas e o ritmo de crescimento populacional e o ritmo de mortalidade bem como predação são lentos. Ao longo da escala de tempo rápida, o total da população de presas ( $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$ ) e da população de predadores ( $p(t) = p_1(t) + p_2(t)$ ) são constantes.

Ao longo da escala de tempo lenta, o total da população de presas e o total da população de predadores ( $n$  e  $p$ ) não são constantes. Considerando as equações das presas, sua dinâmica em cada agrupamento, é representada por um termo positivo descrevendo o crescimento natural e um termo negativo representando as presas mortas por predadores. Para as equações do predador, consideramos uma constante de taxa de mortalidade natural e assumimos que crescimento é proporcional à densidade de presas capturadas.

De acordo com as suposições anteriores, o sistema completo, ao longo da escala de tempo rápida  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$  (onde  $t$  é a escala de tempo lenta), proposto em [3] é da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dn_1}{d\tau} = (m'(p_2)n_2 - m(p_1)n_1) + \varepsilon[r_1n_1 - a_1n_1p_1] \\ \frac{dn_2}{d\tau} = (m(p_1)n_1 - m'(p_2)n_2) + \varepsilon[r_2n_2 - a_2n_2p_2] \\ \frac{dp_1}{d\tau} = (k'p_2 - kp_1) + \varepsilon[-m_1p_1 + b_1n_1p_1] \\ \frac{dp_2}{d\tau} = (kp_1 - k'p_2) + \varepsilon[-m_2p_2 + b_2n_2p_2], \end{array} \right. \quad (5.6)$$

onde  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) representa a taxa de crescimento intrínseco da população da presa no agrupamento  $i$ . Como os agrupamentos têm características distintas é assumido que os parâmetros  $r_1$  e  $r_2$  podem ser diferentes. Consideramos o tipo mais simples I de resposta funcional em cada agrupamento:  $a_i$  e  $b_i$  são os parâmetros de predação no agrupamento  $i$ . O termo  $m_i$  é a taxa de mortalidade natural do predador no agrupamento  $i$ . Os parâmetros constantes  $k$  e  $k'$  representam as taxas de migração do predador do agrupamento 1 para o agrupamento 2 e inversamente. As taxas de migração dependem da densidade do predador, como a seguir:

$$m(p_1) = \alpha p_1 + \alpha_0 \text{ e } m'(p_2) = \beta p_2 + \alpha_0.$$

Quanto mais predadores são encontrados em um agrupamento, mais as presas tendem a deixar este ambiente. Em outras palavras, predadores tendem a aumentar a taxa de migração da presa em cada agrupamento. Note que  $\alpha_0$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros positivos e  $\varepsilon$  é um parâmetro sem dimensão, significando que processos bióticos são assumidos como sendo lentos.

A referência [3] constrói um modelo reduzido que é chamado de modelo agregado. Este modelo, que é composto por duas equações, descreve a dinâmica do total de presas e predadores, ao longo da escala de tempo lenta  $t$ . O primeiro passo é desconsiderar a parte lenta das equações e estudar apenas o modelo de dispersão rápida. Primeiramente

é calculado o equilíbrio para a parte do sistema com a escala de tempo rápida. Para isto, define-se

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t) \text{ e } p(t) = p_1(t) + p_2(t)$$

como o total de densidade das presas e dos predadores respectivamente e tomamos  $\varepsilon = 0$  no sistema (5.6). Calcula-se os pontos de equilíbrio do sistema obtido e tem-se o seguinte ponto de equilíbrio para a parte do sistema com escala rápida:

$$\begin{cases} p_1^* = \mu_1 p, & p_2^* = \mu_2 p, \\ n_1^* = \eta_1(p)n, & n_2^* = \eta_2(p)n, \end{cases} \quad (5.7)$$

onde  $\mu_i$  representa o ponto de equilíbrio da proporção da escala rápida do predador no agrupamento  $i$ , enquanto  $\eta_i(p)$  nos dá a mesma interpretação para a população de presas na zona  $i$ . Todas essas proporções são dadas por:

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{k'}{k + k'}, & \mu_2 = \frac{k}{k + k'}, \\ \eta_1(p) = \frac{\alpha_0 + \beta\mu_2 p}{2\alpha_0 + \delta p}, & \eta_2(p) = \frac{\alpha_0 + \alpha\mu_1 p}{2\alpha_0 + \delta p}, \end{cases} \quad (5.8)$$

onde  $\delta = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ .

Utilizando o método de agregação, dado em [3] retorna-se ao sistema inicial completo (5.6), substituindo o ponto de equilíbrio para a parte do sistema com a escala de tempo rápida (5.7) e adicionando as duas equações das densidades locais das populações das presas e predadores. Obtem-se o seguinte sistema, quando usamos a escala de tempo lenta  $t$ :

$$\begin{cases} n'(t) = \frac{1}{\delta p + 2\alpha_0}(rn + anp - \bar{b}np^2) = F(n, p) \\ p'(t) = -Mp + \frac{1}{\delta p + 2\alpha_0}(bnp + cnp^2) = G(n, p), \end{cases} \quad (5.9)$$

onde

$$\begin{cases} r = \alpha_0(r_1 + r_2), \\ a = r_1\beta\mu_2 + r_2\alpha\mu_1 - \alpha_0(a_1\mu_1 + a_2\mu_2), \\ \bar{b} = \mu_1\mu_2(a_1\beta + a_2\alpha), \\ M = m_1\mu_1 + m_2\mu_2, \\ b = \alpha_0(b_1\mu_1 + b_2\mu_2), \\ c = \mu_1\mu_2(b_1\beta + b_2\alpha). \end{cases} \quad (5.10)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (5.9) são dados por

$$n = 0 \text{ e } -\bar{b}p^2 + ap + r = 0,$$

na segunda equação temos uma raiz positiva, dada por

$$p = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4r\bar{b}}}{2\bar{b}}.$$

As p-nuliclinais são dadas por:

$$p = 0 \text{ e } -M\delta p - 2\alpha_0 M + nb + cpn = 0,$$

a segunda p-nuliclinal pode ser escrita como

$$p = \frac{-bn + 2\alpha_0 M}{cn - M\delta} \text{ ou } n = \frac{M(\delta p + 2\alpha_0)}{cp + b}.$$

De acordo com os valores dos parâmetros, existem duas situações:

- (1) Caso 1: Se  $2\alpha_0 c - b\delta < 0$ .
- (2) Caso 2: Se  $2\alpha_0 c - b\delta > 0$ .

Em qualquer um dos casos, temos dois pontos de equilíbrio:  $(0, 0)$  e  $(n^*, p^*)$  onde

$$n^* = \frac{M(\delta p^* + 2\alpha_0)}{cp^* + b} \text{ e } p^* = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4r\bar{b}}}{2\bar{b}}.$$

A matriz Jacobiana do sistema (5.9) é da forma:

$$J(n, p) = \begin{pmatrix} \frac{r + ap - \bar{b}p^2}{\delta p + 2\alpha_0} & n \frac{(a - 2\bar{b}p)(\delta p + 2\alpha_0) - \delta(r + ap - \bar{b}p^2)}{(\delta p + 2\alpha_0)^2} \\ \frac{bp + cp^2}{\delta p + 2\alpha_0} & -M + \frac{n(b + cp)}{\delta p + 2\alpha_0} + np \frac{c(\delta p + 2\alpha_0) - \delta(b + cp)}{(\delta p + 2\alpha_0)^2} \end{pmatrix}$$

- Para o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ , temos

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{r}{2\alpha_0} & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tem dois autovalores reais com sinais opostos:  $\frac{r}{2\alpha_0}$  e  $-M$ , então  $(0, 0)$  é sempre ponto de sela.

- Para o ponto de equilíbrio  $(n^*, p^*)$

$$J(n^*, p^*) = \frac{1}{(b + cp^*)(\delta p^* + 2\alpha_0)} \begin{pmatrix} 0 & M(2\alpha_0 a - \bar{b}\delta p^{*2} - 4\bar{b}\alpha_0 p^* - \delta r) \\ p^*(b + cp^*)^2 & p^* M(2\alpha_0 c - \delta b) \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tem determinante positivo  $C$ :

$$C = \frac{p^* M}{(\delta p^* + 2\alpha_0)^2} (\bar{b}\delta p^{*2} + 4\bar{b}\alpha_0 p^* + \delta r - 2\alpha_0 a), \quad (\bar{b}\delta p^{*2} + 4\bar{b}\alpha_0 p^* + \delta r - 2\alpha_0 a) > 0,$$

porque  $4\bar{b}\alpha_0 p^* - 2\alpha_0 a = 2\alpha_0 \sqrt{a^2 + 2r\bar{b}} > 0$ .

Seja  $B$  o traço da matriz Jacobiana, então

$$B = \frac{p^* M(2\alpha_0 c - \delta b)}{(b + cp^*)(\delta p^* + 2\alpha_0)},$$

e  $\Delta = B^2 - 4C$ . Então, temos dois autovalores para a matriz Jacobiana  $J(n^*, p^*)$  dados por:

$$\lambda_1 = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ se } \Delta > 0$$

ou

$$\lambda_1 = \frac{B - i\sqrt{-\Delta}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{B + i\sqrt{-\Delta}}{2} \text{ se } \Delta < 0.$$

Então, para a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(n^*, p^*)$ , temos as seguintes situações:

- (1) Caso 1: Se  $B < 0$ , temos dois autovalores com parte real negativa (quando  $\Delta > 0$ ) ou dois autovalores complexos com partes reais negativas (quando  $\Delta < 0$ ); e em ambos os casos,  $(n^*, p^*)$  é um ponto de equilíbrio estável (um foco ou um nó).
- (2) Caso 2: Se  $B > 0$ , temos dois autovalores com parte real positiva (quando  $\Delta > 0$ ) ou dois autovalores complexos com partes reais positivas (quando  $\Delta < 0$ ); e em ambos os casos  $(n^*, p^*)$  é um ponto de equilíbrio instável.

O termo  $B$  pode ser igual a zero, e neste caso, a linearização do modelo agregado não é suficiente para concluir qualquer informação sobre a dinâmica do modelo agregado não-linear.

Demonstra-se que, para qualquer  $B \neq 0$ , o modelo agregado não pode ter órbitas fechadas usando o critério de Dulac. Para o caso  $B = 0$ , consultar [3].

Considerando o sistema (5.9), se definirmos

$$\bar{F}(n, p) = \frac{n'}{n.p} \text{ e } \bar{G}(n, p) = \frac{p'}{n.p},$$

então temos:

$$\bar{F}(n, p) = \frac{1}{\delta p + 2\alpha_0} \left( \frac{r}{p} + a - \bar{b}p \right),$$

$$\bar{G}(n, p) = -\frac{M}{n} + \frac{1}{\delta p + 2\alpha_0} (b + cp),$$

assim

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial n} = 0 \text{ e } \frac{\partial \bar{G}}{\partial p} = \frac{2\alpha_0 c - \delta b}{(\delta p + 2\alpha_0)^2}.$$

Como a expressão  $\frac{\partial \bar{F}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial p}$  não muda de sinal para  $n$  e  $p$  positivos e usando o critério de Dulac e o teorema de Poincaré-Bendixon, podemos concluir que quando  $B \neq 0$  então não existe órbita fechada. Mas precisamente, quando  $B > 0$ , o ponto de equilíbrio  $(n^*, p^*)$  torna-se instável enquanto que quando  $B < 0$ , este equilíbrio é globalmente assintoticamente estável.



## 6 Conclusão

Buscamos neste trabalho o estudo de critérios de estabilidade de pontos de equilíbrio de equações diferenciais não lineares, em particular, modelos bidimensionais. Em um exemplo apresentado, o modelo presa-predador, foi possível observar a existência de soluções periódicas mesmo com todos os parâmetros constantes. Apresentamos então, alguns critérios que nos permitem, às vezes, analisar a existência ou não de soluções periódicas para um determinado sistema. O estudo do artigo [3] nos possibilitou observar uma variação do modelo presa-predador que não possui solução periódica, utilizando-se o critério de Dulac.

# Referências

- [1] BOYCE W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno*. 8. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2006.
- [2] ZOTIN, R. *Efeitos abióticos e a periodicidade em dinâmica populacional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 1993.
- [3] HSU, S.-B. A survey of constructing lyapunov functions for mathematical models in population biology. *Taiwanese Journal of Mathematics*, v. 9, n. 2, p. pp-151, 2005.
- [4] HALE, J. K. Ordinary differential equations. *Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York*, 1969.
- [5] LIMA, E. *Análise Real*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.
- [6] HALE J.K.; KOÇAK, H. *Dynamics and bifurcations*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [7] LEAH, E. *Mathematical Models in Biology*. 1. ed. Vancouver: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [8] BESSA, G. R. *Teoria de Estabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações: modelos presa-predador e competição entre espécies*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2011.
- [9] STROGATZ, S. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. 1. ed. Massachussetts: Perseus Books, 1994.
- [10] VIDYASAGAR, M. *Nonlinear Systems Analysis*. 1. ed. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1993.

# A Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes é da forma

$$x' = Ax, \tag{A.1}$$

onde  $A$  é uma matriz constante  $n \times n$ . A menos que se diga o contrário, iremos supor que todos os elementos de  $A$  são números reais.

Se  $n = 1$ , o sistema se reduz a uma única equação de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = ax, \tag{A.2}$$

cuja solução é  $x = ce^{at}$ .

Queremos encontrar soluções de equilíbrio resolvendo  $Ax = 0$ . Suponhamos que  $\det A \neq 0$ , de modo que a única solução de equilíbrio é  $x = 0$ .

Para  $n \geq 2$  vamos supor que a solução do sistema (A.1) seja da forma

$$x = \xi e^{rt}, \tag{A.3}$$

onde o expoente  $r$  e o vetor constante  $\xi$  devem ser determinados. Substituindo  $x$  dado por (A.3) no sistema (A.1), obtemos

$$r\xi e^{rt} = A\xi e^{rt}.$$

Como  $e^{rt} \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , obtemos  $A\xi = r\xi$ , ou

$$(A - rI)\xi = 0, \tag{A.4}$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ . Portanto, o vetor  $x$  dado pela equação (A.3) é uma solução da equação (A.1), desde que  $r$  seja um autovalor e  $\xi$  seja um autovetor associado da matriz de coeficientes  $A$ .

Os autovalores  $r_1, \dots, r_n$  (que não precisam ser distintos) são raízes da equação poli-

nomial de grau  $n$

$$\det(A - rI) = 0. \quad (\text{A.5})$$

A natureza dos autovalores e dos autovetores associados determina a natureza da solução geral do sistema (A.1). Supondo que  $A$  é uma matriz real, existem três possibilidades para os autovalores de  $A$ :

- (1) Todos os autovalores são reais e distintos entre si.
- (2) Alguns autovalores ocorrem em pares conjugados.
- (3) Alguns autovalores são repetidos.

## A.1 Autovalores reais e distintos

Se os autovalores são reais e distintos, então existe um autovetor real  $\xi^{(i)}$  associado a cada autovalor  $r_i$  e os  $n$  autovetores  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$  são linearmente independentes. Então as soluções que correspondem ao sistema diferencial (A.1) são

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)}e^{r_1 t}, \dots, x^{(n)}(t) = \xi^{(n)}e^{r_n t}. \quad (\text{A.6})$$

Mostremos agora que estas soluções formam um conjunto fundamental, calculando seu wronskiano:

$$\begin{aligned} W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t) &= \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{vmatrix} \\ &= e^{(r_1 + \dots + r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A função exponencial nunca se anula e os autovetores  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$  são linearmente independentes. Como o determinante no último termo da equação (A.7) é diferente de zero, podemos concluir que o wronskiano  $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t)$  nunca se anula. Então,  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$  formam um conjunto fundamental de soluções. Assim, a solução geral da equação (A.1) é da forma

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}. \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Autovalores complexos

Os autovalores complexos aparecem sempre em pares conjugados, ou seja, se  $r_1 = \lambda + i\mu$ , onde  $\lambda$  e  $\mu$  são reais, é um autovalor de  $A$  (a matriz de coeficientes reais da Equação (A.1)), então  $r_2 = \lambda - i\mu$  também é um autovalor. Além disso, os autovetores associados  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  também são complexos conjugados. De fato, suponha que  $r_1$  e  $\xi^{(1)}$  satisfazem

$$(A - r_1 I)\xi^{(1)} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Calculando o conjugado da equação (A.9), obtemos

$$(A - \bar{r}_1 I)\overline{\xi^{(1)}} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Assim,  $r_2 = \bar{r}_1$  é um autovalor e  $\xi^{(2)} = \overline{\xi^{(1)}}$  é um autovetor associado e as soluções correspondentes da equação diferencial (A.1) são

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)}e^{r_1 t}, \quad x^{(2)}(t) = \overline{\xi^{(1)}}e^{\bar{r}_1 t} \quad (\text{A.11})$$

Note que buscamos soluções reais, para isso vamos fazer  $\xi^{(1)} = a + ib$ , onde  $a$  e  $b$  são reais e substituir na primeira equação de (A.11), obtendo assim

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= (a + ib)e^{(\lambda + i\mu)t} \\ &= (a + ib)e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Separando  $x^{(1)}(t)$  em suas partes reais e imaginárias, temos

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= e^{\lambda t}(a \cos \mu t - b \operatorname{sen} \mu t) \\ &\quad + ie^{\lambda t}(a \operatorname{sen} \mu t + b \cos \mu t). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Escrevendo  $x^{(1)}(t) = u(t) + iv(t)$ , temos

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\lambda t}(a \cos \mu t - b \operatorname{sen} \mu t), \\ v(t) &= e^{\lambda t}(a \operatorname{sen} \mu t + b \cos \mu t) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

que são soluções reais da equação (A.1).

Agora vamos mostrar que  $u(t)$  e  $v(t)$ , dados pela equação (A.14) são linearmente independentes.

Sejam  $r_1 = \lambda + i\mu$  e  $\bar{r}_1 = \lambda - i\mu$  um par de autovalores conjugados da matriz de coeficientes  $A$  da equação (A.1): sejam  $\xi^{(1)} = a + ib$  e  $\overline{\xi^{(1)}} = a - ib$  os autovetores correspondentes.

Vamos primeiramente mostrar que  $a$  e  $b$  são linearmente independentes. Considere a

equação  $c_1a + c_2b = 0$ , vamos expressar  $a$  e  $b$  em função de  $\xi^{(1)}$  e de  $\overline{\xi^{(1)}}$ , obtendo:

$$\begin{cases} \xi^{(1)} = a + ib \\ \overline{\xi^{(1)}} = a - ib \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\xi^{(1)} + \overline{\xi^{(1)}}}{2}, \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{cases} \xi^{(1)} = a + ib \\ -\overline{\xi^{(1)}} = -a + ib \end{cases} \Rightarrow b = \frac{-i\xi^{(1)} + i\overline{\xi^{(1)}}}{2}$$

E então substituindo em  $c_1a + c_2b = 0$  temos:

$$c_1 \left( \frac{\xi^{(1)} + \overline{\xi^{(1)}}}{2} \right) + c_2 \left( \frac{-i\xi^{(1)} + i\overline{\xi^{(1)}}}{2} \right) = 0 \Rightarrow (c_1 - ic_2)\xi^{(1)} + (c_1 + ic_2)\overline{\xi^{(1)}} = 0.$$

Note que  $\xi^{(1)}$  e  $\overline{\xi^{(1)}}$  são autovalores linearmente independentes, então, segue que

$$c_1 - ic_2 = 0 \text{ e } c_1 + ic_2 = 0 \Rightarrow c_1 = ic_2 \text{ e } c_1 = -ic_2$$

Assim  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 0$ , conseqüentemente  $a$  e  $b$  são linearmente independentes.

Para mostrar que  $u(t)$  e  $v(t)$  são linearmente independentes, considere a equação  $c_1u(t_0) + c_2v(t_0) = 0$ , onde  $t_0$  é um ponto arbitrário. Substituindo as equações de (A.14) em  $c_1u(t_0) + c_2v(t_0) = 0$ , vem

$$\begin{aligned} c_1 (e^{\lambda t_0} (a \cos \mu t_0 - b \sin \mu t_0)) + c_2 (e^{\lambda t_0} (a \sin \mu t_0 + b \cos \mu t_0)) &= 0 \\ \Rightarrow e^{\lambda t_0} [a(c_1 \cos \mu t_0 + c_2 \sin \mu t_0) + b(-c_1 \sin \mu t_0 + c_2 \cos \mu t_0)] &= 0 \end{aligned}$$

Como  $e^{\lambda t_0} \neq 0$ , segue que,  $a(c_1 \cos \mu t_0 + c_2 \sin \mu t_0) + b(-c_1 \sin \mu t_0 + c_2 \cos \mu t_0) = 0$ . Mas, como  $a$  e  $b$  são linearmente independentes, então

$$\begin{cases} c_1 \cos \mu t_0 + c_2 \sin \mu t_0 = 0 \\ -c_1 \sin \mu t_0 + c_2 \cos \mu t_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \cos \mu t_0 = -c_2 \sin \mu t_0 \\ c_1 \sin \mu t_0 = c_2 \cos \mu t_0 \end{cases}$$

$$c_1c_2 \cos^2 \mu t_0 = -c_1c_2 \sin^2 \mu t_0 \Rightarrow c_1c_2(\cos^2 \mu t_0 + \sin^2 \mu t_0) = 0,$$

$$c_1c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \text{ ou } c_2 = 0.$$

$$\text{Suponha } c_1 = 0, \text{ então } \begin{cases} c_2 \sin \mu t_0 = 0 \\ c_2 \cos \mu t_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 0.$$

Analogamente temos que se  $c_2 = 0$  então  $c_1 = 0$ , ou seja, concluímos que  $u(t)$  e  $v(t)$  são soluções linearmente independentes.

Suponha que  $r_1 = \lambda + i\mu$ ,  $r_2 = \overline{r_1}$  e também que  $r_3, \dots, r_n$  são reais e distintas. Sejam  $\xi^{(1)} = a + ib$ ,  $\xi^{(2)} = a - ib$ ,  $\xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$  os autovalores associados. A solução geral da

equação (A.1) é

$$x = c_1 u(t) + c_2 v(t) + c_3 \xi^{(3)} e^{r_3 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t},$$

onde  $u(t)$  e  $v(t)$  são dadas pela equação (A.14).

### A.3 Autovalores Repetidos

Vamos considerar agora o último caso onde a matriz  $A$  do sistema (A.1) tem autovalores repetidos, com multiplicidade algébrica  $k \geq 2$  e com multiplicidade geométrica menor ou igual do que  $k$ .

Suponha que  $r = \rho$  é uma raiz de multiplicidade  $k$  da equação

$$\det(A - rI) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Então temos duas possibilidades: ou existem  $k$  vetores linearmente independentes associados ao autovalor  $\rho$  ou existem menos do que  $k$  desses vetores.

Para o primeiro caso, sejam  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}$  os  $k$  autovalores linearmente independentes associados ao autovalor  $\rho$  de multiplicidade algébrica  $k$ , então

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{\rho t}, \dots, x^{(k)}(t) = \xi^{(k)} e^{\rho t}, \quad (\text{A.17})$$

são  $k$  soluções linearmente independentes da equação (A.1).

Assim, para este caso, não faz diferença que o autovalor  $r = \rho$  seja repetido, pois ainda existe um conjunto fundamental de soluções da equação (A.1) da forma  $\xi e^{rt}$ . Esse caso sempre ocorre se a matriz de coeficientes for auto-adjunta.

Caso a matriz de coeficientes não for auto-adjunta, então podem existir menos do que  $k$  vetores linearmente independentes associados ao autovalor  $\rho$  de multiplicidade algébrica  $k$  e, assim, haverá menos que  $k$  soluções da equação (A.1) da forma  $\xi e^{\rho t}$  associadas a esse autovalor. Então para construir a solução geral da equação (A.1), é preciso encontrar outras soluções de uma outra forma. Vamos a seguir mostrar como proceder neste caso.

Considere, novamente, o sistema (A.1) e suponha que  $r = \rho$  é um autovalor duplo de  $A$ , mas que existe apenas um autovetor associado independente  $\xi$ . Então uma solução é

$$x^{(1)}(t) = \xi e^{\rho t}, \quad (\text{A.18})$$

onde  $\xi$  satisfaz

$$(A - \rho I)\xi = 0. \quad (\text{A.19})$$

Baseado no procedimento usado para equações lineares de segunda ordem, vamos

tentar encontrar uma segunda solução do sistema da forma

$$x = \delta t e^{\rho t}, \quad (\text{A.20})$$

onde  $\xi$  é um vetor constante a ser determinado. Substituindo  $x$  na equação (A.1), obtemos

$$\rho \delta t e^{\rho t} + \delta e^{\rho t} = A \delta t e^{\rho t}, \quad (\text{A.21})$$

resultando assim que  $\delta = 0$  e portanto  $x = \delta t e^{\rho t}$  não é solução não-nula do sistema (A.1) da forma (A.20).

Como a equação (A.21) contém termos em  $e^{\rho t}$  e  $t e^{\rho t}$ , a segunda solução, além de  $\delta t e^{\rho t}$  deve conter um termo da forma  $\eta e^{\rho t}$ . Vamos supor que a segunda solução tenha a forma de

$$x = \delta t e^{\rho t} + \eta e^{\rho t}, \quad (\text{A.22})$$

onde  $\delta$  e  $\eta$  são vetores constantes. Substituindo (A.22) na equação (A.1) temos

$$\begin{aligned} \rho \delta t e^{\rho t} + \delta e^{\rho t} + \rho \eta e^{\rho t} &= A[\delta t e^{\rho t} + \eta e^{\rho t}] \Rightarrow \\ \rho \delta t e^{\rho t} + e^{\rho t}[\delta + \rho \eta] &= A \delta t e^{\rho t} + A \eta e^{\rho t}. \end{aligned}$$

De onde temos

$$\begin{cases} \rho \delta &= A \delta \\ \delta + \rho \eta &= A \eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A - \rho I) \delta &= 0 \\ (A - \rho I) \eta &= \delta \end{cases}$$

Como  $\delta$  é um autovetor associado ao autovalor  $\rho$ , então,  $\delta = \xi$ . Se as condições acima forem satisfeitas, então a equação (A.22) é uma solução para a equação (A.1) e a solução geral de (A.1) é dada por

$$x = c_1 \xi e^{\rho t} + c_2 [\xi t e^{\rho t} + \eta e^{\rho t}], \quad (\text{A.23})$$

onde  $\eta$  satisfaz  $(A - \rho I)\eta = \xi$ .



## B Fórmula da Variação das Constantes

Seja o sistema de equações diferenciais não autônomo

$$x' = Ax + g(t), \quad (\text{B.1})$$

onde  $g$  é uma função de classe  $C^1$ . Com a intenção de eliminar o termo contendo  $x$ , introduzimos a nova variável  $y(t)$  dada por

$$y(t) = e^{-At}x(t), \quad (\text{B.2})$$

onde  $x(t)$  é uma solução da equação (B.1).

A matriz  $e^{At}$  é definida por  $e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$  e satisfaz algumas propriedades que podem ser encontradas em [1].

Para obter a equação diferencial na nova variável, diferenciamos ambos lados da equação (B.2) com respeito a  $t$ :

$$y' = -Ae^{-At}x + e^{-At}x'. \quad (\text{B.3})$$

Agora, se substituirmos a equação (B.1) na equação acima, obtemos a desejada equação

$$y' = e^{-At}g(t). \quad (\text{B.4})$$

Suponha que especificamos a condição inicial  $x(t_0) = x^0$  para a equação original (B.1). Nas novas coordenadas, isto é o mesmo que especificar a condição inicial  $y(t_0) = e^{-At_0}x^0$  para a equação (B.4). Para obter a solução  $y(t)$  satisfazendo a condição inicial acima, integramos ambos lados da equação (B.4) de  $t_0$  a  $t$  e rearranjamos os termos:

$$y(t) = e^{-At_0}x^0 + \int_{t_0}^t e^{-As}g(s)ds. \quad (\text{B.5})$$

Agora, substituindo a Equação (B.2) em (B.5), temos:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x^0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As}g(s)ds.$$

---

A expressão representada pela equação (B.5) é chamada de Fórmula de Variação das Constantes.

# C Desigualdade de Gronwall

Seja  $K$  uma constante não-negativa e sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas não-negativas em um intervalo  $a \leq t \leq b$  satisfazendo

$$f(t) \leq K + \int_a^t f(s)g(s)ds, \quad a \leq t \leq b,$$

então

$$f(t) \leq Ke^{\int_a^t g(s)ds}, \quad a \leq t \leq b.$$

*Demonstração.* Vamos definir  $h(t) = K + \int_a^t f(s)g(s)ds$ , considerando  $f(t) \leq h(t)$  para  $a \leq t \leq b$ . Observe que  $h(a) = K + \int_a^a f(s)g(s)ds = K$ .

Agora derivando a função  $h(t)$  em relação a  $t$  e pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos:

$$h'(t) = f(t)g(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Como  $g(t)$  é não-negativa e  $f(t) \leq h(t)$ , então

$$h'(t) = f(t)g(t) \leq h(t)g(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Multiplicando a desigualdade acima por  $e^{-\int_a^t g(s)ds}$  temos,

$$h'(t)e^{-\int_a^t g(s)ds} \leq h(t)g(t)e^{-\int_a^t g(s)ds} \Rightarrow \left[ h(t)e^{-\int_a^t g(s)ds} \right]' \leq 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left[ h(t)e^{-\int_a^t g(s)ds} \right] \leq 0. \tag{C.1}$$

Vamos integrar a Equação (C.1) em relação a  $t$  no intervalo  $[a, b]$ , obtendo assim

$$h(t)e^{-\int_a^t g(s)ds} - h(a) \leq 0 \Rightarrow h(t) \leq Ke^{\int_a^t g(s)ds}, \quad a \leq t \leq b.$$

Da desigualdade  $f(t) \leq h(t)$ , concluímos então que

$$f(t) \leq Ke^{\int_a^t g(s)ds}, \quad a \leq t \leq b.$$

□