



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias

**Gabrielle Maioli**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática - como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora  
**Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso**

**2015**

517.38 Maioli, Gabrielle  
M227m Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias  
/ Gabrielle Maioli. - Rio Claro, 2015  
67 f. : il., figs., gráfs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientadora: Suzete Maria Silva Afonso

1. Equações diferenciais. 2. Soluções equações  
diferenciais ordinárias. 3. Soluções aproximadas. I. Título.

# TERMO DE APROVAÇÃO

Gabrielle Maioli

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso  
Orientadora

Prof. Dra. Ligia Laís Fêmina  
Faculdade de Matemática / UFU - Uberlândia/MG

Prof. Dra. Marta Cilene Gadotti  
IGCE / UNESP - Rio Claro/SP

**Rio Claro, 09 de outubro de 2015**

# Agradecimentos

No dia em que decidi que gostaria de estudar matemática, nem todos ao meu redor me apoiaram. Quando se é adolescente não é fácil decidir o que se vai fazer na vida. Estudar matemática sempre foi uma diversão e me pareceu natural escolher esse caminho. Correr atrás desse sonho só foi possível por conta de duas pessoas muito importantes. Não existem palavras para agradecer todo o incentivo que minha mãe e meu pai me deram. Sacrificaram muito para que eu estivesse em uma escola e me preparasse para o vestibular. Trabalharam aos fins de semana para que eu pudesse morar em outra cidade e cursar com “mordomias” minha faculdade. Por tudo isso, e muito mais, sou grata. Muito obrigada por serem esses pais que me apoiam e me incentivam todos os dias a ser uma pessoa melhor.

Ao longo de toda minha trajetória acadêmica tive a oportunidade de ter cruzado com pessoas incríveis que colaboraram para que eu me tornasse o ser humano que sou hoje. Quero agradecer um dos primeiros professores que tive, Professor Gerson Petronilho, um educador excepcional que me motivou no momento que mais precisei logo no início da graduação em Matemática. Se hoje cheguei até aqui, foi por conta dos conselhos que este professor sempre me proporcionou. Obrigada Gerson que mesmo com a distância nunca se esquece de seus alunos.

Em especial, meu muito obrigada a Professora Suzete Maria Silva Afonso, por toda orientação, dedicação e zelo durante a elaboração do trabalho, pelas dúvidas solucionadas com todo seu conhecimento e experiência. E por fim, pela amizade construída no decorrer destes quase dois anos.

Agradeço também àqueles que de alguma forma me motivaram em momentos de desânimo, me deram suas opiniões e me ajudaram no decorrer deste mestrado. Agradeço ao meu noivo Adelino, por suas palavras de estímulos e compreensão ao longo de toda essa trajetória. Agradeço também a comissão examinadora que dispôs parte de seu tempo para compor essa avaliação, além de todas as sugestões que me foram apresentadas.

# Resumo

O propósito deste trabalho é explorar os métodos numéricos de passo único, denominados métodos de Euler e Runge - Kutta, e os métodos de passos múltiplos, denominados métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton, para encontrar soluções aproximadas de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

**Palavras-chave:** métodos numéricos, equações diferenciais ordinárias, soluções equações diferenciais ordinárias, soluções aproximadas.

# Abstract

The goal of this work is to explore the one-step numerical methods, called methods of Euler and Runge - Kutta, and the multistep numerical methods, called methods of Adams-Bashforth and Adams Moulton, for finding approximate solutions of initial value problems for first-order ordinary differential equations.

**Keywords:** numerical methods, ordinary differential equations, solution of ordinary differential equation, approximate solutions.

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introdução</b>  | <b>8</b>  |
| <b>1 Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem</b>            | <b>10</b> |
| 1.1 Existência e unicidade de soluções . . . . .                       | 11        |
| 1.2 Alguns tipos especiais de EDOs de primeira ordem . . . . .         | 17        |
| 1.2.1 Equação com separação de variáveis . . . . .                     | 17        |
| 1.2.2 Equações lineares de primeira ordem . . . . .                    | 18        |
| <b>2 Métodos numéricos de um passo</b>                                 | <b>21</b> |
| 2.1 Polinômio de Taylor e a reta tangente . . . . .                    | 21        |
| 2.2 Método de Euler . . . . .  | 23        |
| 2.2.1 Erros e arredondamento . . . . .                                 | 30        |
| 2.3 Método de Euler melhorado . . . . .                                | 33        |
| 2.4 Método de Runge-Kutta . . . . .                                    | 37        |
| 2.4.1 Runge-Kutta de primeiro grau . . . . .                           | 37        |
| 2.4.2 Runge-Kutta de segundo grau . . . . .                            | 37        |
| 2.4.3 Runge-Kutta de terceiro grau . . . . .                           | 39        |
| 2.4.4 Runge-Kutta de quarto grau . . . . .                             | 41        |
| 2.5 Analisando os métodos . . . . .                                    | 43        |
| <b>3 Métodos de passos múltiplos</b>                                   | <b>45</b> |
| 3.1 Métodos de Adams . . . . .   | 45        |
| 3.1.1 Método de Adams - Bashforth . . . . .                            | 45        |
| 3.1.2 Método de Adams - Moulton . . . . .                              | 48        |
| 3.2 Método de previsão e correção . . . . .                            | 50        |
| <b>4 Convergência</b>  | <b>51</b> |
| <b>5 Aplicação em um modelo matemático</b>                             | <b>54</b> |
| 5.1 Estudo da decomposição de matéria orgânica antropogênica em um rio | 54        |
| 5.2 Utilizando os métodos numéricos . . . . .                          | 56        |
| 5.2.1 Método de Euler . . . . .  | 56        |
| 5.2.2 Método de Euler melhorado . . . . .                              | 57        |

|       |  |           |
|-------|--|-----------|
| 5.2.3 | Método de Runge-Kutta de quarto grau . . . . . | 57        |
| 5.2.4 | Método de previsão e correção . . . . .        | 58        |
| 5.2.5 | Conclusões . . . . .                           | 59        |
| 5.3   | Considerações Finais . . . . .                 | 61        |
|       | <b>Referências</b>                             | <b>63</b> |



# Introdução

A teoria das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) é objeto de intensa atividade de pesquisa, pois além da utilidade de tais equações na modelagem de diversos fenômenos que ocorrem nas mais diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, dinâmica populacional, engenharia, física, química, economia e medicina, o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias é motivado pelo interesse intrinsecamente matemático que estas equações possuem. As equações diferenciais ordinárias são poderosas representações teóricas de processos de evolução em que a taxa de variação do estado do processo em cada instante  $t$  depende do processo nesse instante.

Há métodos que resolvem analiticamente uma Equação Diferencial Ordinária, todavia nem sempre é possível obter uma solução analítica. Neste caso, os métodos numéricos são uma ferramenta eficaz para se encontrar uma solução aproximada.

Os métodos numéricos que solucionam equações diferenciais são objetos de estudos por matemáticos desde o século XVII. Podemos citar alguns nomes famosos que tiveram suas participações na teoria dos métodos numéricos por conta de seus avanços no cálculo, como Isaac Newton (1643-1729) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1643-1716). Porém, foi Leonhard Euler (1707-1783) que conduziu os estudos dos métodos que utilizamos até os dias atuais.

Euler deduziu um método iterativo que aproximava a solução da equação diferencial desde que seja dada uma condição inicial. A prova rigorosa para esse método iterativo só foi apresentada anos mais tarde por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e reescrita de forma melhorada por Rudolf Lipschitz (1832-1908).

Naquela época não existia uma real necessidade do uso dos métodos numéricos, e o método desenvolvido por Euler só foi se tornar usual quando da física, no final do século XIX - início do século XX, se desenvolveram alguns estudos como, por exemplo, a teoria de calor por Fourier, a mecânica celeste por Adams, entre outros.

Em meados de 1900, vieram os sucessores Carl Runge (1856-1927) e Martin Wilhelm Kutta (1867-1944) que apresentaram generalizações eficientes do método numérico de Euler. Assim, os métodos de Euler e Runge-Kutta fecham o bloco dos procedimentos de *passo único*, isto é, métodos em que apenas uma condição inicial é necessária para poder dar início às iterações e encontrar uma solução numérica aproximada de um problema de valor inicial para uma equação diferencial ordinária.

O bloco formado por aqueles processos numéricos conhecidos como *métodos de*

*passos múltiplos* começou a ser formado com os estudos de John Couch Adams (1819-1892) que, utilizando a proposta de Euler e a equação de Bashforth, apresentou uma técnica nova, mais conhecida como Adams-Bashforth. A primeira contribuição para uma melhoria do método de Adams-Bashforth veio em 1925, pelo matemático Forest Ray Moulton (1872-1952), originando assim o conhecido método de Adams-Moulton.

Somente depois da Segunda Guerra Mundial, com o aparecimento do primeiro computador, que os métodos numéricos começaram a ter um uso constante de forma sistemática. E assim foi possível calcular precisão, erros e instabilidade numérica de cada procedimento.

Este trabalho destinar-se-á ao estudo dos métodos numéricos de Euler e de Runge - Kutta, com suas respectivas variações, que se enquadram no grupo dos métodos de passo único para investigar soluções de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Outros métodos numéricos, mais conhecidos como métodos de passos múltiplos de Adams, terão suas teorias contempladas também nesse trabalho. Os métodos numéricos serão abordados nos Capítulos 2 e 3.

No Capítulo 1 faremos uma breve exposição sobre equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. No decorrer do Capítulo 2, abordaremos os métodos numéricos para solucionar equações diferenciais de primeira ordem. Este capítulo será devotado exclusivamente para os métodos denominados de passo único, sendo eles, Euler e Runge Kutta. É no Capítulo 3 que os métodos de numéricos de passos múltiplos terão vez: Adams-Bashforth e Adams-Moulton. No Capítulo 4, estudaremos, de forma sucinta, a convergência dos métodos numéricos abordados nos capítulos anteriores. No Capítulo 5, aplicaremos as técnicas e os métodos numéricos em um modelo matemático criado por Harold Warner Streeter e Earle Bernard Phelps (1876-1953) em 1925 a partir da análise do processo de oxidação e aeração no Rio Ohio, que fica nos Estados Unidos, com base em dados obtidos entre 1914 e 1915. Earle Bernard Phelps foi o precursor de estudos sobre qualidade da água.

Informamos que os cálculos e os gráficos foram feitos com o auxílio do software *MATLAB*®. Caso o leitor tenha interesse, a programação utilizada para cada gráfico encontra-se no Apêndice deste trabalho.

# 1 Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto do espaço  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  onde  $\mathbb{R}$  é a reta real e  $\mathbb{R}^n$  é o espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Um ponto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  será denotado por  $(t, x)$ , com  $t \in \mathbb{R}$  e  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ; salvo menção em contrário adotaremos em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  a norma:  $|(t, x)| = \max\{|t|, |x|\}$  onde  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  ou  $|x| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$  ou ainda  $|x| = |x_1| + \dots + |x_n|$ .

Consideremos o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função dada e  $(t_0, x_0) \in \Omega$ . Sobre este problema surgem algumas questões:

1. Como é possível saber que este problema de valor inicial tem solução?
2. Se soubermos que ele tem solução, como saber que essa solução é única?
3. Se soubermos que tem solução e ela é única, será possível exibí-la explicitamente?

Este primeiro capítulo trará respostas para as duas primeiras perguntas. A resposta da terceira pergunta se encontra no fato que para a maioria dos problemas de valor inicial não conseguimos exibir uma solução. Todavia, existem métodos numéricos que nos auxiliam a encontrar uma solução aproximada para tais problemas. Sendo assim, se soubermos que a solução de (1.1) existe e que ela é a única, então poderemos gastar esforços computacionais para buscar uma solução aproximada desta. Os métodos numéricos aos quais nos referimos serão apresentados em capítulos posteriores.

Ainda neste capítulo apresentaremos, brevemente, métodos analíticos para solucionar alguns tipos especiais de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que nos auxiliarão nos próximos capítulos.

## 1.1 Existência e unicidade de soluções

Seja  $I$  um intervalo não degenerado da reta, isto é, um subconjunto conexo de  $\mathbb{R}$  não reduzido a um ponto. O intervalo  $I$  pode ser aberto, fechado ou semifechado, finito ou infinito.

**Definição 1.1.** *Uma função diferenciável  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  será dita solução da equação*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

no intervalo  $I$  se:

- i) o gráfico de  $\psi$  em  $I$ , ou seja,  $\{(t, \psi(t)), t \in I\}$  estiver contido em  $\Omega$  e
- ii)  $\frac{d\psi}{dt}(t) = f(t, \psi(t))$  para todo  $t \in I$ . Se  $t$  for um ponto extremo do intervalo, a derivada será a derivada lateral respectiva.

O lema e o corolário a seguir serão utilizados na demonstração do resultado que garante existência e unicidade de solução para (1.1), a saber o Teorema de Picard.

**Lema 1.1** (Lema da Contração). *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $F : X \rightarrow X$  uma contração<sup>1</sup>. Existe um único ponto fixo  $p$  de  $F$ , ou seja, existe um único ponto  $p \in X$  tal que  $F(p) = p$ . Mais ainda, esse ponto  $p$  é um atrator, isto é,  $F^n(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ , para todo  $x \in X$ , onde  $F^n(x) := F(F^{n-1}(x))$ .*

*Demonstração.* Provaremos, inicialmente, a existência de um ponto fixo de  $F$ . Fixemos  $x \in X$  e consideremos a sequência  $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ , dada por  $a_n = F^n(x)$  e  $a_0 = x$ , para cada  $n \in \mathbb{N}^*$ . Afirmamos que  $(a_n)$  é uma sequência de Cauchy. Com efeito, utilizando o Princípio de Indução Finita, constatamos, sem dificuldades, que

$$d(a_{n+1}, a_n) \leq K^n d(a_1, a_0), \quad (1.2)$$

para  $n \in \mathbb{N}^*$ , onde  $0 \leq K < 1$  é a constante de contração.

Utilizando a desigualdade (1.2) e novamente o Princípio de Indução Finita, concluímos que

$$d(a_{n+r}, a_n) \leq K^n d(a_r, a_0), \quad (1.3)$$

para  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Agora, utilizando a desigualdade triangular e (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} d(a_r, a_0) &\leq d(a_r, a_{r-1}) + d(a_{r-1}, a_{r-2}) + \cdots + d(a_2, a_1) + d(a_1, a_0) \\ &\leq (K^{r-1} + K^{r-2} + \cdots + K + 1) d(a_1, a_0). \end{aligned}$$

Desta última desigualdade e de (1.3) segue que

---

<sup>1</sup>Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Uma aplicação  $F : X \rightarrow X$  será dita uma *contração* se existir  $0 \leq K < 1$  tal que  $d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y)$ , para  $x, y \in X$ .

$$\begin{aligned} d(a_{n+r}, a_n) &\leq K^n(1 + K + K^2 + \cdots + K^{r-1})d(a_1, a_0) \\ &\leq K^n \sum_{j=0}^{\infty} K^j d(a_1, a_0) = \frac{K^n}{1-K} d(a_1, a_0), \end{aligned}$$

o que caracteriza  $(a_n)$  como uma sequência de Cauchy, pois  $d(a_{n+r}, a_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , uma vez que  $0 \leq K < 1$ . Como  $X$  é completo, então  $(a_n)$  é convergente em  $X$ , ou seja, existe  $p \in X$  tal que  $p = \lim a_n = \lim F^n(x)$ .

Afirmamos que  $p$  é ponto fixo de  $F$ . De fato, como  $F$  é, em particular, contínua, temos que:

$$F(p) = F(\lim a_n) = \lim F(a_n) = \lim F(F^n(x)) = \lim F^{n+1}(x) = \lim a_{n+1} = p.$$

A fim de provar a unicidade de tal ponto fixo, suponhamos que  $p_1$  e  $p_2$  sejam pontos fixos de  $F$ . Notemos que

$$d(p_1, p_2) = d(F(p_1), F(p_2)) \leq Kd(p_1, p_2).$$

Daí,  $(1 - K)d(p_1, p_2) \leq 0$  e, como  $0 \leq K < 1$ , devemos ter  $d(p_1, p_2) = 0$  e, por conseguinte,  $p_1 = p_2$ . □

**Corolário 1.1.** *Seja  $X$  um espaço métrico completo. Se  $F : X \rightarrow X$  é contínua e, para algum  $m$ ,  $F^m$  é uma contração, então existe um único ponto  $p$  fixo de  $F$ . Além disso,  $p$  é atrator de  $F$ .*

*Demonstração.* Considere que  $p$  é o ponto fixo e atrator de  $F^m$  dado pelo Lema da Contração (Lema 1.1). Seja  $n = mk + l$  com  $0 \leq l < m$ . Dado  $x \in X$ ,  $F^l(x)$  é um ponto de  $X$ . Como  $p$  é atrator de  $F^m$ , temos que

$$(F^m)^k[F^l(x)] \longrightarrow p,$$

quando  $k \rightarrow \infty$ .

Da relação:  $F^n(x) = (F^m)^k[F^l(x)]$  e do fato que, quando  $n \rightarrow \infty$  tem-se  $k \rightarrow \infty$ , segue que  $F^n(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Ou seja,  $p$  é um ponto atrator de  $F$ .

Resta apenas mostrar que  $p$  é ponto fixo de  $F$ . Pois bem, usufruindo da continuidade da  $F$ , obtemos

$$p = \lim F^n(F(p)) = \lim F^{n+1}(p) = \lim F(F^n(p)) = F(\lim F^n(p)) = F(p),$$

como desejávamos. □

A seguir, exibiremos um resultado que garante existência e unicidade local de solução para um dado problema de valor inicial. Antes disso, observamos que se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  for uma função contínua, encontrar uma solução para o problema de valor inicial (1.1) é equivalente a encontrar uma solução para a equação integral:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

**Teorema 1.1** (Teorema de Picard). *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e lipschitziana<sup>2</sup> com relação a segunda variável, com  $\Omega = I_a \times B_b$ ,  $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$  e  $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$ . Se  $\sup_{(t,x) \in \Omega} |f(t, x)| \leq M$ , então existirá uma única solução de*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

no intervalo  $I_\alpha$ , sendo  $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ .

*Demonstração.* Considere  $X = C(I_\alpha, B_b)$  o espaço métrico completo das funções contínuas  $\psi : I_\alpha \rightarrow B_b$ , com a métrica uniforme  $d(\psi_1, \psi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\psi_1(t) - \psi_2(t)|$ .

Para  $\psi \in X$ , considere a aplicação  $F(\psi) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por:

$$F(\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds, \quad \text{para } t \in I_\alpha.$$

Destacamos as seguintes propriedades de  $F$ :

- i)  $F(X) \subseteq X$ ;
- ii)  $F^n$  é uma contração para  $n$  suficientemente grande.

Com efeito, para todo  $t \in I_\alpha$ ,

$$\begin{aligned} |F(\psi)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \psi(s))| ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| = M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b. \end{aligned}$$

Além disso, claramente,  $F(\psi)$  é uma função contínua de  $I_\alpha$  em  $B_b$ , para cada  $\psi \in X$ . Isto prova i). Quanto a ii), afirmamos que, para todo par  $\psi_1, \psi_2 \in X$  e todo  $n \geq 0$ ,

$$|F^n(\psi_1)(t) - F^n(\psi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\psi_1, \psi_2), \quad t \in I_\alpha. \quad (1.4)$$

<sup>2</sup>Uma aplicação  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  será dita *lipschitziana* em  $\Omega$  com relação a segunda variável se existir uma constante positiva  $K$  tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|,$$

para quaisquer  $(t, x), (t, y) \in \Omega$ .

Verifiquemos a validade desta desigualdade fazendo indução em  $n$ . Para  $n = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} |F(\psi_1)(t) - F(\psi_2)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t K |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds \\ &\leq K \int_{t_0}^t d(\psi_1, \psi_2) ds \\ &\leq K \cdot d(\psi_1, \psi_2) |t - t_0|. \end{aligned}$$

Através da desigualdade acima, vemos que  $F$  é contínua, pois dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \frac{\varepsilon}{K \cdot \alpha}$  tal que

$$\psi_1, \psi_2 \in X, d(\psi_1, \psi_2) < \delta \Rightarrow d(F(\psi_1) - F(\psi_2)) < K \cdot \alpha \frac{\varepsilon}{K \cdot \alpha} = \varepsilon.$$

Suponha que a desigualdade (1.4) seja válida para algum  $r$  natural. Então, para  $t \in I_\alpha$ ,

$$\begin{aligned} |F^{r+1}(\psi_1)(t) - F^{r+1}(\psi_2)(t)| &= |F(F^r(\psi_1))(t) - F(F^r(\psi_2))(t)| \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(s, F^r(\psi_1(s))) - f(s, F^r(\psi_2(s))) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t K |F^r(\psi_1(s)) - F^r(\psi_2(s))| ds \right| \\ &\leq K \left| \int_{t_0}^t K^r \frac{|s - t_0|^r}{r!} d(\psi_1, \psi_2) ds \right| \\ &= K^{r+1} \frac{|t - t_0|^{r+1}}{(r+1)!} d(\psi_1, \psi_2). \end{aligned}$$

Portanto,  $d(F^n(\psi_1), F^n(\psi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\psi_1, \psi_2)$  e, para  $n$  grande, podemos afirmar que  $\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1$ , pois sendo este o termo geral de uma série convergente, segue que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K^n \alpha^n}{n!} = 0$ . Logo, pelo Lema da Contração, existe uma única  $\psi \in X$  tal que  $F(\psi) = \psi$ , o que completa a prova.  $\square$

Observamos que se  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  admitir derivada parcial em relação à segunda variável, a qual será denotada por  $D_2 f$ , e esta for limitada, ou seja,  $|D_2 f| \leq K$  em  $\Omega$ , e  $\Omega_t = \{x; (t, x) \in \Omega\}$  for um conjunto convexo, então  $f$  será lipschitziana em  $\Omega$  e  $K$  será sua constante de Lipschitz. De fato, dados  $t \in \mathbb{R}$  e  $x, y \in \Omega_t$ , pela Desigualdade do Valor Médio, temos

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \sup_{0 < \theta < 1} |D_2 f(t, \theta x + (1 - \theta)y)| |x - y| \leq K |x - y|.$$

Em virtude deste fato, temos o seguinte resultado:

**Corolário 1.2.** *Seja  $\Omega$  um conjunto aberto em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua com  $D_2f$  também contínua. Para todo ponto  $(t_0, x_0) \in \Omega$  existe uma vizinhança  $V = I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0)$  do ponto  $(t_0, x_0)$  em  $\Omega$  tal que*

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

*tem uma única solução em  $I_\alpha(t_0)$ , onde  $I_\alpha(t_0) = \{t; |t - t_0| \leq \alpha\}$  e  $B_b(x_0) = \{x; |x - x_0| \leq b\}$ . Além disso, o gráfico desta solução está contido em  $V$ .*

*Demonstração.* Seja  $U$  uma vizinhança de  $(t_0, x_0)$  tal que  $|(D_2f)|_U| \leq K$  e  $|f|_U| \leq M$ , com  $K$  e  $M$  constantes positivas. A existência dessa vizinhança é garantida pela continuidade de  $f$  e  $D_2f$ .

Seja  $\alpha > 0$  suficientemente pequeno para que  $V = I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0) \subseteq U$ , onde  $b = \alpha M$ . Conclui-se a prova aplicando o Teorema de Picard.  $\square$

Se retirarmos a hipótese de  $f$  ser lipschitziana em relação a segunda variável, ainda poderemos garantir a existência local de soluções. Isto é o que afirma o Teorema de Peano. Para provarmos este resultado, precisaremos do Teorema de Arzelà-Ascoli que será apenas enunciado a seguir. Para ter acesso a uma demonstração do Teorema de Arzelà - Ascoli, o leitor interessado pode consultar a referência [11].

**Teorema 1.2** (Teorema de Arzelà - Ascoli). *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico compacto. Seja  $F$  uma família equicontínua de funções  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Isto é, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, se  $d(x, y) < \delta$ , então  $|\psi(x) - \psi(y)| < \epsilon$ , para toda  $\psi \in F$ . Se  $F$  é uniformemente limitada (ou seja, existe  $M > 0$  tal que  $|\psi| \leq M$  para toda  $\psi \in F$ ), então toda sequência  $\{\psi_n\}$  de elementos de  $F$  tem uma subsequência  $\{\psi_{n_k}\}$  uniformemente convergente em  $X$ .*

**Teorema 1.3** (Teorema de Peano). *Seja  $f$  contínua em  $\Omega = I_a \times B_b$  definido no Teorema de Picard (Teorema 1.1). Se  $\sup_{(t,x) \in \Omega} |f(t, x)| \leq M$ , então existirá pelo menos uma solução de*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

*em  $I_\alpha$ , sendo  $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema de Weierstrass,<sup>3</sup> podemos concluir que existe uma sequência  $(f_n)$  de funções definidas em  $\Omega$ , cujas componentes são polinômios, que converge para  $f$  uniformemente em  $\Omega$ .

---

<sup>3</sup>**Teorema de Weierstrass.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$ . Então, para todo  $\epsilon > 0$ , existe um polinômio  $p$  tal que  $|f(t) - p(t)| < \epsilon$ , para todo  $t \in [a, b]$ .



Para  $n$  suficientemente grande,  $f_n$  satisfaz as hipóteses do Teorema 1.1. De fato,  $f_n$  é contínua para todo  $n$  por ter polinômios como componentes. Além disso, para cada  $(t, x) \in [a, b] \times \Omega$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, x)$ . Daí, para  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(t, x)| - |f(t, x)| \leq |f_n(t, x) - f(t, x)| < \epsilon \text{ para todo } (t, x) \in [a, b] \times \Omega,$$

de onde segue que  $|f_n(t, x)| < \epsilon + |f(t, x)| < \epsilon + M$ , para  $n > n_0$  e  $(t, x) \in [a, b] \times \Omega$ . Sendo  $\epsilon$  arbitrário, concluímos que, para cada  $(t, x) \in [a, b] \times \Omega$ ,  $|f_n(t, x)| \leq M$  para  $n$  suficientemente grande.

Então, para  $n$  suficientemente grande, o Teorema 1.1 garante que existe uma única solução  $\psi_n$  de  $x' = f_n(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , em  $I_\alpha$ .

Considerando  $n$  suficientemente grande, a família  $\{\psi_n\}$  é equicontínua e uniformemente limitada, pois:

$$|\psi_n(t) - \psi_n(t')| = \left| \int_t^{t'} f_n(s, \psi_n(s)) ds \right| \leq M|t - t'|,$$

para  $t, t' \in I_\alpha$ , e

$$|\psi_n(t)| \leq |\psi_n(t) - x_0| + |x_0| \leq \left| \int_{t_0}^t f_n(s, \psi_n(s)) ds \right| + |x_0| \leq M|t - t_0| + |x_0| < M\alpha + |x_0|,$$

para  $t \in I_\alpha$ .

Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência, a qual denotaremos por  $\{\psi_{n_k}\}$ , que converge uniformemente em  $I_\alpha$  para uma função  $\psi$ .

Provaremos que essa  $\psi$  é a solução procurada do problema de valor inicial em questão. Para  $t$  arbitrário, temos:

$$\begin{aligned} |\psi_n(t) - \psi(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f_n(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f_n(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi(s))| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f_n - f\| ds, \end{aligned}$$

onde  $\|f_n - f\| = \sup_{(t,x) \in \Omega} |f_n(t, x) - f(t, x)|$ .

Como  $f_n \rightarrow f$  uniformemente, segue que  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$  e, portanto,

$$|\psi_n(t) - \psi(t)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Como

$$\psi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_n(s, \psi_n(s)) ds,$$

para todo  $t \in I_\alpha$ , tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds,$$

concluindo o desejado. □

**Corolário 1.3.** *Seja  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua. Se  $C \subseteq \Omega$  é um conjunto tal que  $|f| < M$  em  $\Omega_0$ , onde  $C \subseteq \Omega_0 \subseteq \Omega$  com  $\text{dist}(C, \Omega - \Omega_0) > 0$ <sup>4</sup>, então existe  $\alpha > 0$  tal que, para todo ponto  $(t_0, x_0) \in C$ , existe uma solução de*

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

em  $I_\alpha(t_0) = \{t; |t - t_0| \leq \alpha\}$ .

*Demonstração.* Seja  $0 < a < \text{dist}(C, \Omega - \Omega_0)$ . Para concluir a prova basta tomar  $\alpha = \min \left\{ a, \frac{a}{M} \right\}$  e aplicar o Teorema de Peano. □

## 1.2 Alguns tipos especiais de EDOs de primeira ordem

### 1.2.1 Equação com separação de variáveis

Dizemos que uma EDO de primeira ordem é *separável* ou com *variáveis separáveis* quando pode ser escrita na forma

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x), \tag{1.5}$$

onde  $g$  e  $h$  são funções reais contínuas em intervalos reais abertos  $I$  e  $J$ , respectivamente.

Se  $h$  não se anula em  $J$ , a equação (1.5) é equivalente a:

$$p(x) \frac{dx}{dt} = g(t),$$

onde  $p(x) = \frac{1}{h(x)}$  para  $x \in J$ , a qual ainda é equivalente a:

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = g(t), \tag{1.6}$$

onde  $x = x(t)$  é solução da equação (1.5) e  $F(x) = \int p(x)dx$ . Com efeito, note que

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = g(t) \Leftrightarrow F'(x) \cdot \frac{dx}{dt} = g(t).$$

Assim,  $F'(x) = p(x)$  e, portanto,  $F(x) = \int p(x)dx$ .

Agora, integrando (1.6) com respeito a  $t$ , obtemos:

$$F(x(t)) = G(t) + c, \tag{1.7}$$

onde  $G(t) = \int g(t)dt$  e  $c$  é uma constante de integração. A solução  $x = x(t)$  desta é equação é dada por

---

<sup>4</sup>Dados  $A$  e  $B$  conjuntos não vazios em  $\mathbb{R}^n$ , a distância entre  $A$  e  $B$  é dada pelo ínfimo das distâncias entre pontos do conjunto  $A$  e pontos do conjunto  $B$ , isto é:  $\text{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ .

$$x(t) = F^{-1}(G(t) + c),$$

onde  $F^{-1}$  é a inversa da  $F$ .

Note que a existência de  $F^{-1}$  nos é garantida pelo Teorema da Função Inversa<sup>5</sup>, já que  $F' = p$ ,  $p \neq 0$  e  $p$  é contínua em  $J$ .

A expressão em (1.7) é equivalente a

$$\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt + c,$$

o que nos deixa a vontade para dizer que encontramos as soluções de uma equação com variáveis separáveis separando as variáveis e integrando ambos os lados da equação com respeito às respectivas variáveis.

**Exemplo 1.1.** Seja  $k$  uma constante positiva. Na equação

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

temos  $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $h(x) = x$  e  $g(t) = k$ , para  $x \in (0, +\infty)$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Claramente,  $h$  e  $g$  são funções contínuas em seus respectivos domínios e  $h$  é não-nula. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} &= k \\ \frac{d}{dt} [\ln x(t)] &= k \\ \int \frac{d}{dt} [\ln x(t)] dt &= \int k dt \\ \ln x(t) &= kt + c. \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação (1.1) é dada pela família de funções  $x(t) = \ln^{-1}(kt + c) = c_1 e^{kt}$ , com  $c_1 = e^c$ . Para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx \\ x(0) = 2, \end{cases}$$

$x(t) = 2e^{kt}$  é a solução, uma vez que  $c_1 = 2$ .

## 1.2.2 Equações lineares de primeira ordem

Sejam  $a$  e  $b$  funções reais e contínuas num intervalo real aberto  $I$ . A equação

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = b(t) \tag{1.8}$$

---

<sup>5</sup>**Teorema da Função Inversa:** Se  $F$  é uma função real de classe  $C^1$  num intervalo  $I$  com  $F'(x) \neq 0$ , para todo  $x \in I$ , então  $F$  é invertível e sua inversa,  $F^{-1}$ , é derivável.

é dita *linear* porque a operação efetuada sobre  $x(t)$ ,

$$\left[ \frac{d}{dt} + a(t) \right] x(t) \tag{1.9}$$

é uma operação linear, isto é,

$$\left[ \frac{d}{dt} + a(t) \right] (\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \left[ \frac{d}{dt} + a(t) \right] x_1 + \beta \left[ \frac{d}{dt} + a(t) \right] x_2,$$

para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Reparemos que a expressão  $\frac{dx}{dt} + a(t)x$  é “quase” a derivação de um produto de funções. Se assim fosse, a solução da equação (1.8) seria facilmente encontrada através de uma integração.

Suponhamos que exista uma função não nula  $\lambda(t)$  contínua em um intervalo real que ao ser multiplicada pela expressão (1.9) nos dê:

$$\lambda(t) \frac{dx}{dt} + \lambda(t)a(t)x = \frac{d}{dt}(\lambda(t)x(t)). \tag{1.10}$$

Neste caso, deveríamos ter

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda(t)a(t). \tag{1.11}$$

A equação (1.11) é separável (veja Exemplo 1.1) e  $\lambda(t) = e^{\int_{t_0}^t a(z)dz}$  é uma solução para tal, a qual chamamos de fator de integração da equação linear (1.8).

Resolver a equação (1.8) é, então, equivalente a resolver a equação

$$\frac{d}{dt}(xe^{\int_{t_0}^t a(z)dz}) = e^{\int_{t_0}^t a(z)dz}b(t).$$

Para resolver esta última equação basta integrar ambos os lados com respeito a  $t$ . Portanto, a solução geral de (1.8) é dada por

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(z)dz} \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^t a(z)dz} b(s)ds + ce^{-\int_{t_0}^t a(z)dz}, \text{ com } t_0 \in I$$

onde  $c$  é uma constante real.

**Exemplo 1.2.** Consideremos a equação linear

$$\frac{dx}{dt} + 2x = e^{-t}, \tag{1.12}$$

sujeita a condição inicial

$$x(0) = 3. \tag{1.13}$$

Na equação (1.12),  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $b : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  são as funções dadas por  $a(t) = 2$  e  $b(t) = e^{-t}$ . Claramente,  $a$  e  $b$  são funções contínuas em  $\mathbb{R}$ .

O fator de integração da equação (1.12) é dado por  $\lambda(t) = e^{\int_0^t 2dz} = e^{2t}$ . Pelo que vimos acima, resolver a equação (1.12) é equivalente a resolver a equação

$$\frac{d}{dt}(xe^{2t}) = e^{2t}e^{-t} = e^t.$$

Mas a solução desta última é dada por

$$x(t) = e^{-t} + ce^{-2t},$$

onde  $c$  é uma constante real.

Considerando a condição inicial  $x(0) = 3$ , obtemos  $c = 2$ . Logo, a solução do problema de valor inicial (1.12)-(1.13) é  $x(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$ .

Existem outros tipos especiais de EDOs de primeira ordem cujas soluções podem ser obtidas analiticamente, tais como Equações de Bernoulli, Equações de Clairaut, Equações Homogêneas e Equações Exatas. Todavia, para o estudo dos métodos numéricos, objetivo central do trabalho, os tipos apresentados na presente seção serão suficientes. Para uma análise dos tipos de equações citados, recomendamos que o leitor consulte as referências [2] e [3].

## 2 Métodos numéricos de um passo

Consideremos o problema de valor inicial de primeira ordem

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dada,  $\Omega$  é aberto e  $(t_0, x_0) \in \Omega$ .

Vimos no capítulo anterior que se  $f$  e  $D_2f$  forem contínuas então o problema de valor inicial (2.1) tem uma única solução  $x = \psi(t)$  em algum intervalo contendo o ponto inicial  $t_0$  (Corolário 1.2). Atentamos aqui para o fato de que não é possível, em geral, encontrar a solução  $\psi$  por manipulações simbólicas da equação diferencial. Consideramos, na segunda seção do capítulo anterior, exceções dessa afirmação, a saber equações diferenciais que são separáveis ou lineares. Todavia é verdade que, para a vasta maioria dos problemas de valor inicial de primeira ordem, as soluções não podem ser encontradas por meio analíticos como os supramencionados. Uma maneira de superar essa dificuldade é calcular valores aproximados da solução  $x = \psi(t)$  do problema de valor inicial (2.1) para valores selecionados de  $t$ . Os valores aproximados da solução serão acompanhados de cotas para os erros que garantem um nível de precisão para as aproximações.

Existem vários métodos que fornecem aproximações numéricas de soluções de equações diferenciais. Este capítulo será devotado a uma discussão de alguns deles, que são de um passo só. O primeiro método a ser abordado será o mais velho e o mais simples de todos, o chamado método da reta tangente ou método de Euler, desenvolvido por Euler por volta de 1768. Depois, apresentaremos o método de Euler melhorado e, por fim, discutiremos o método desenvolvido, originalmente, por Runge e Kutta.

Iniciaremos o capítulo com uma seção de caráter preliminar na qual dissertaremos sobre o Polinômio de Taylor, que está inteiramente relacionado aos métodos numéricos que aparecerão no trabalho.

### 2.1 Polinômio de Taylor e a reta tangente

Sejam  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo e  $t_0 \in I$ . A reta que melhor aproxima o gráfico de uma função  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em uma vizinhança de um ponto  $t_0$  é a *reta tangente* ao

gráfico de  $x$  no ponto  $t_0$ :

$$l(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0). \quad (2.2)$$

Esta é a única reta que satisfaz  $l(t_0) = x(t_0)$  e  $l'(t_0) = x'(t_0)$  ou, equivalentemente, é a única reta que satisfaz a condição:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R(t)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - l(t)}{t - t_0} = 0,$$

onde  $R(t)$  é o resto da aproximação de  $x$  por  $l$ . A equação da reta acima define o *Polinômio de Taylor de grau 1 no ponto  $t_0$* :

$$p_1(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0). \quad (2.3)$$

Se  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  for  $n$ -vezes derivável no ponto  $t_0$ , o polinômio de grau menor do que ou igual a  $n$

$$p_n(h) = x(t_0) + x'(t_0)h + \frac{h^2}{2!}x''(t_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}x^{(n)}(t_0)$$

será denominado o *Polinômio de Taylor de grau  $n$  no ponto  $t_0$* , onde  $x^{(n)}(t_0)$  é a derivada de ordem  $n$  de  $x$  no ponto  $t_0$ . Convencionamos que  $x^0 = x$ .

O Polinômio de Taylor de grau  $n$  de  $x$  no ponto  $t_0$  é o único polinômio  $p$  de grau menor do que ou igual a  $n$  cujas derivadas  $p(0), p'(0), \dots, p^{(n)}(0)$  no ponto 0 coincidem com as derivadas correspondentes de  $x$  no ponto  $t_0$ , pois, nesse caso, o coeficiente de ordem  $j$  de  $p$  é  $\frac{p^{(j)}(0)}{j!} = \frac{x^{(j)}(t_0)}{j!}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

O próximo resultado, cuja prova pode ser encontrada em [10], nos diz que o Polinômio de Taylor de grau  $n$  para  $x$  no ponto  $t_0$  aproxima  $x$ , numa vizinhança do ponto  $t_0$ , a menos de um infinitésimo de ordem superior a  $n$ .

**Teorema 2.1** (Fórmula de Taylor Infinitesimal). *Seja  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $n$ -vezes derivável no ponto  $t_0 \in I$ . Então, para todo  $h$  tal que  $t_0 + h \in I$ , tem-se:*

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + x'(t_0)h + \frac{h^2}{2!}x''(t_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}x^{(n)}(t_0) + R_n(h),$$

com  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_n(h)}{h^n} = 0$ .

Além disso,  $p(h) = \sum_{j=0}^n \frac{x^{(j)}(t_0)}{j!}h^j$  é o único polinômio de grau menor do que ou igual a  $n$  tal que

$$x(t_0 + h) = p(h) + R_n(h),$$

com  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_n(h)}{h^n} = 0$ .

Vejam agora outra fórmula de Taylor, que nos proporciona uma estimativa da diferença  $x(t_0 + h) - x(t_0)$  para um valor fixo de  $h$ , isto é, sem supor  $h \rightarrow 0$ . Esta fórmula nos fornece uma generalização do Teorema do Valor Médio para funções  $n$ -vezes derivável.

**Teorema 2.2** (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange). *Seja  $x : [t_0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^{n-1}$ ,  $n$ -vezes derivável no aberto  $(t_0, b)$ . Então, existe  $\xi \in (t_0, b)$  tal que*

$$x(b) = x(t_0) + x'(t_0)(b - t_0) + \cdots + \frac{(b - t_0)^{n-1}}{n - 1!} x^{(n-1)}(t_0) + \frac{(b - t_0)^n}{n!} x^{(n)}(\xi). \quad (2.4)$$

Pondo  $b = t_0 + h$ , isto equivale a dizer que existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + x'(t_0)h + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n - 1!} x^{(n-1)}(t_0) + \frac{h^n}{n!} x^{(n)}(t_0 + \theta h).$$

A prova do resultado acima também pode ser encontrada em [10].

A parcela  $R_n(b) = \frac{x^{(n)}(\xi)}{n!}(b - t_0)^n$  em (2.4) é denominada Resto de Lagrange. Em 2.2 temos que  $R(t) = R_1(t)$ .

## 2.2 Método de Euler

Consideremos o problema de valor inicial (2.1) e suponhamos que  $f$  seja de classe  $C^1$  (dessa forma  $f$  é contínua e  $D_2f$  é contínua). Seja  $x = \psi(t)$  a solução exata deste problema num intervalo  $[t_0, b]$ . Tal solução existe e é única em virtude do Corolário 1.2. Além disso, a solução  $x = \psi(t)$  é de classe  $C^2$  já que  $f$  é de classe  $C^1$ . Queremos encontrar uma aproximação para a solução  $x = \psi(t)$  no intervalo  $[t_0, b]$ . Como  $x : [t_0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$ , consideremos a aproximação de  $x$  pelo polinômio de Taylor de grau 1:

$$x(t + h) = x(t) + hx'(t) + R_2(t), \quad (2.5)$$

para  $t \in [t_0, b)$ , onde  $h > 0$  é tal que  $t + h \leq b$  e é denominado *tamanho do passo*.

Como  $x'(t) = f(t, x(t))$ , a relação (2.5) é equivalente a:

$$x(t + h) = x(t) + hf(t, x(t)) + R_2(t). \quad (2.6)$$

Seja  $t = t_n$ , com  $t_n = t_0 + nh$  e  $n \in \mathbb{N}$  variando de 0 até  $N$ .  $N$  é o número de passos necessários para chegar até o fim do intervalo ao qual se quer aproximar a solução;  $N$  tem que ser um número natural. Como  $t_0 \leq t \leq b$ , tomemos  $N$  o maior natural menor do que  $D$ , onde  $D$  é dado por:

$$D = \frac{b - t_0}{h}.$$

Reescrevendo (2.6) com  $t = t_n$  e  $n \in \{0, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$ , temos:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n)) + R_2(t_n).$$

Temos, assim, um processo de iteração a partir do dado inicial,  $x(t_0) = x_0$ , do problema. Para cada  $n \in \{0, \dots, N\}$ ,  $x(t_n)$  aproxima o valor da solução  $\psi(t)$  no ponto  $t_n$ . Esse processo é denominado *método de Euler* ou *método da reta tangente*, o segundo nome vem da interpretação geométrica do método. Observe a Figura 2.1:



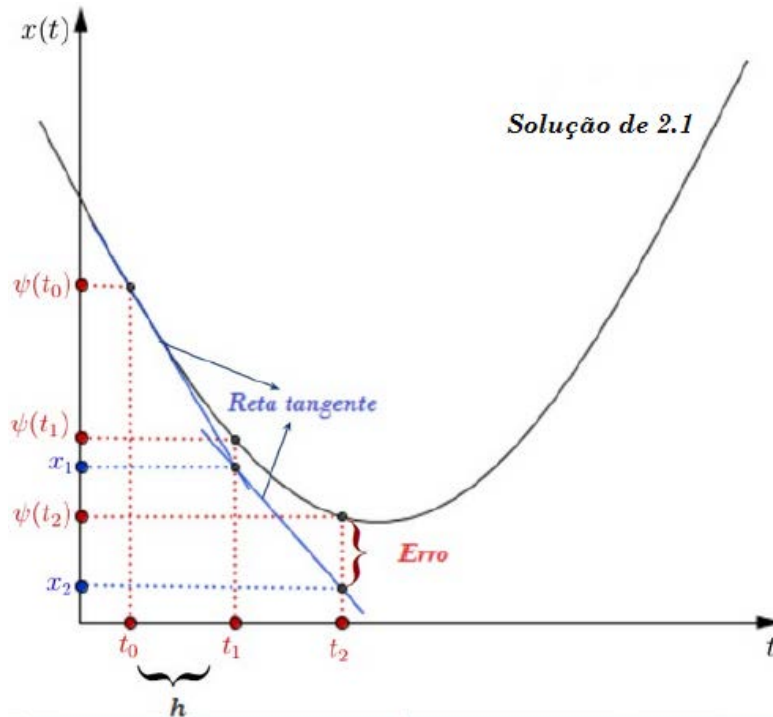


Figura 2.1: Interpretação geométrica do método de Euler.

Em vermelho, ilustramos os pontos da solução exata  $\psi(t)$  de (2.1). Dando início ao método pela condição inicial  $(t_0, \psi(t_0)) = (t_0, x_0)$ , é traçada a reta tangente ao gráfico de  $\psi$  por este ponto com inclinação dada pela derivada informada no problema de valor inicial,  $x'(t_0) = f(t_0, x_0)$ . Na Figura 2.1, a reta tangente está em azul. Essa primeira reta tangente nos fornecerá o valor  $x(t_1)$ , onde  $t_1 = t_0 + h$ . Em seguida é traçada a reta tangente pelo ponto  $(t_1, x_1)$  com inclinação  $x'(t_1) = f(t_1, x_1)$ , que também está representada em azul, e essa nova reta nos fornecerá o valor de  $x(t_2)$ , onde  $t_2 = t_0 + 2h$ . E assim o método segue sucessivamente. Essa interpretação geométrica serve para enfatizar que o erro vai se acumulando durante o processo. Para o método de Euler ser aplicado é preciso tomar um passo  $h$  e saber o tempo final  $t$  para dar início às iterações utilizando a fórmula abaixo:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \quad (2.7)$$

sendo  $x_n = x(t_n)$  e  $t_n = t_0 + nh$ .

Com uma pequena dose de programação é possível desenvolver um algoritmo que nos auxilie a visualizar o processo feito nas iterações. Um exemplo de algoritmo segue abaixo:

1. Entre com a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ ;
2. Coloque o número de iterações desejadas  $n$ ;
3. Entre com o tempo final  $t_f$ ;

4. Faça  $h = (t_f - t_0)/n$ ;
5. Para  $i = 1 : n$  faça:
 
$$f(i) = x(i);$$

$$t(i+1) = t(i) + h;$$

$$x(i+1) = x(i) + h * f(i);$$
 fim
6. Imprima os pontos  $(t(i), x(i))$ .

Vamos, agora, aplicar o método de Euler aos problemas de valor inicial dos Exemplos 1.1 e 1.2. Veremos como o tamanho do passo  $h$  interfere no erro de aproximação da solução exata pela numérica.

**Exemplo 2.1.** No Exemplo 1.1, estudamos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = kx(t) \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

com  $k$  sendo uma constante positiva. Vimos que a solução exata deste problema é a função  $\psi(t) = 2e^{kt}$ . Consideremos  $k = 1$  e calculemos os valores aproximados  $x(t)$  de  $\psi(t)$  para  $t \in [0, 0.9]$ , utilizando o método de Euler (fórmula (2.7)). Para aplicarmos o método, tomemos  $h = 0.3$ . Pelo que foi visto anteriormente, o número de passos necessários para chegar até  $t = 0.9$  é 3. Para  $n = 0$ , temos

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ x_0 &= 2. \end{aligned}$$

Para  $n = 1$ , temos

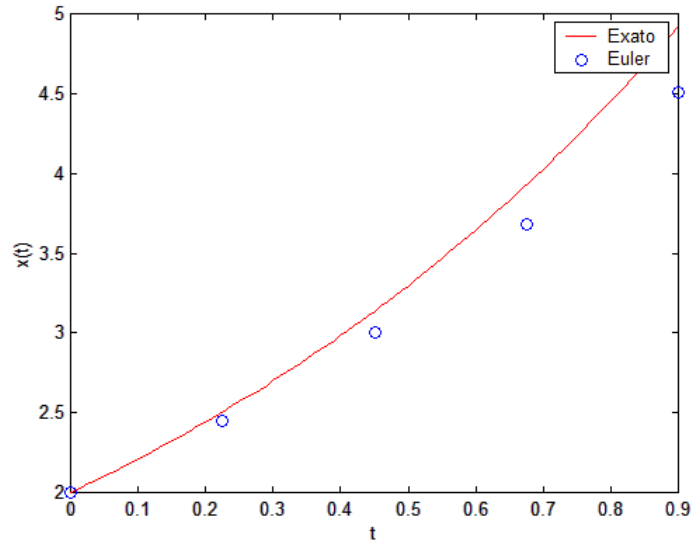
$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + h = 0.3 \\ x_1 &= x_0 + hf(t_0, x_0) = 2 + 0.3 * 2 = 2.6. \end{aligned}$$

Para  $n = 2$ , temos

$$\begin{aligned} t_2 &= t_0 + 2h = 0.6 \\ x_2 &= x_1 + hf(t_1, x_1) = 2.6 + 0.3 * 2.6 = 3.38. \end{aligned}$$

A tabela a seguir contém as iterações e o valor do erro de aproximação em cada iteração.

| $n$ | $t_n$ | $x_n = x_{n-1} + hx'_{n-1}$ | $\psi(t_n) = 2e^{t_n}$ | Erro = $\psi_n - x_n$ |
|-----|-------|-----------------------------|------------------------|-----------------------|
| 0   | 0     | 2                           | 2                      | 0                     |
| 1   | 0.3   | 2.6                         | 2.6997                 | 0.0997                |
| 2   | 0.6   | 3.38                        | 3.6442                 | 0.2642                |
| 3   | 0.9   | 4.394                       | 4.9192                 | 0.5252                |

Tabela 2.1: Método de Euler - Exemplo 2.1, com  $h = 0.3$ .Figura 2.2: Gráfico dos pontos da tabela do Exemplo 2.1, com  $h = 0.3$ .

Observando o gráfico ilustrado na Figura 2.2 vemos que os pontos calculados no Exemplo 2.1 ficaram distantes da solução exata. Assim, o processo nos forneceu uma aproximação com um erro excessivo. Isso ocorreu por conta da escolha do passo  $h$ , que foi relativamente grande. Aplicando o método para  $h = 0.1$ , temos:

| $n$ | $t_n$ | $x_n = x_{n-1} + hx'_{n-1}$ | $\psi(t_n) = 2e^{t_n}$ | Erro = $\psi_n - x_n$ |
|-----|-------|-----------------------------|------------------------|-----------------------|
| 0   | 0     | 2                           | 2                      | 0                     |
| 1   | 0.1   | 2.2                         | 2.2103                 | 0.0103                |
| 2   | 0.2   | 2.42                        | 2.4428                 | 0.0228                |
| 3   | 0.3   | 2.662                       | 2.6997                 | 0.0377                |
| 4   | 0.4   | 2.9282                      | 2.9836                 | 0.0554                |
| 5   | 0.5   | 3.2210                      | 3.2974                 | 0.0764                |
| 6   | 0.6   | 3.5431                      | 3.6442                 | 0.1011                |
| 7   | 0.7   | 3.8974                      | 4.0275                 | 0.1300                |
| 8   | 0.8   | 4.2871                      | 4.4510                 | 0.1639                |
| 9   | 0.9   | 4.7158                      | 4.9192                 | 0.2033                |

Tabela 2.2: Método de Euler, com  $h = 0.1$ .

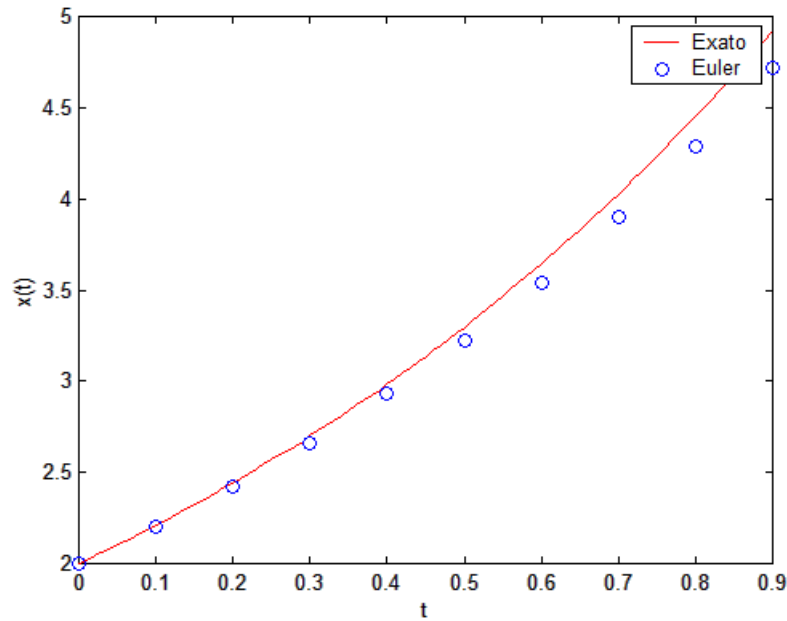


Figura 2.3: Gráfico dos pontos da Tabela 2.4, com  $h = 0.1$ .

Observando essa nova tabela e a Figura 2.3, vemos que quanto menor  $h$ , mais a solução numérica se aproxima da solução exata, já que o erro diminui consideravelmente. O gráfico com este novo  $h$  ficou muito mais parecido com uma exponencial do que na Figura 2.2. Note que, tomando um  $h$  três vezes menor do que o anterior, o erro de uma tabela para outra no mesmo  $t$  diminuiu proporcionalmente a  $h$ . Porém, o esforço computacional aumentou, pois precisamos de mais passos para chegar a  $t = 0.9$ .

**Exemplo 2.2.** Vamos resolver o problema de valor inicial estudado no Exemplo 1.2 utilizando o Método de Euler com  $h = 0.1$  e, posteriormente, com  $h = 0.05$  para compararmos os resultados. Consideraremos o tempo final  $t = 1$ .

Vimos que a solução exata do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t} - 2x \\ x(0) = 3 \end{cases} \quad (2.8)$$

é a função  $\psi(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$ . Para encontrar a solução numérica, começaremos as iterações utilizando a fórmula (2.7). Para  $n = 0$ , temos

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ x_0 &= 3. \end{aligned}$$

Para  $n = 1$ , temos

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + h = 0.1 \\ x_1 &= x_0 + hf(t_0, x_0) = 3 + 0.1(e^{-0} - 2 * 3) = 2.5. \end{aligned}$$

Para  $n = 2$ , temos

$$t_2 = t_0 + 2h = 0.2$$

$$x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1) = 2.5 + 0,1(e^{-0.1} - 2 * 2.5) = 2.0904.$$

Desse modo continuamos o processo até  $t_{10} = 1$ . Veja a Tabela 2.3 com os valores resultantes das iterações do método de Euler, utilizando  $h = 0.1$ . Na última coluna, temos o *erro absoluto* que é dado pelo módulo da diferença entre a solução exata  $\psi(t)$  e a aproximação  $x_n$ .

| <b>n</b> | <b>t<sub>n</sub></b> | <b>x<sub>n</sub></b> | <b>EXATA</b> | <b>Erro Absoluto</b> |
|----------|----------------------|----------------------|--------------|----------------------|
| 0        | 0                    | 3                    | 3            | 0                    |
| 1        | 0.1                  | 2.5                  | 2.5422       | 0.0422               |
| 2        | 0.2                  | 2.0904               | 2.1593       | 0.0688               |
| 3        | 0.3                  | 1.7542               | 1.8384       | 0.0841               |
| 4        | 0.4                  | 1.4774               | 1.5689       | 0.0914               |
| 5        | 0.5                  | 1.2490               | 1.3422       | 0.0932               |
| 6        | 0.6                  | 1.0598               | 1.1512       | 0.0913               |
| 7        | 0.7                  | 0.9027               | 0.9897       | 0.087                |
| 8        | 0.8                  | 0.7719               | 0.8531       | 0.0812               |
| 9        | 0.9                  | 0.6624               | 0.7371       | 0.0747               |
| 10       | 1                    | 0.5706               | 0.6385       | 0.0679               |

Tabela 2.3: Método de Euler, com  $h = 0.1$ .

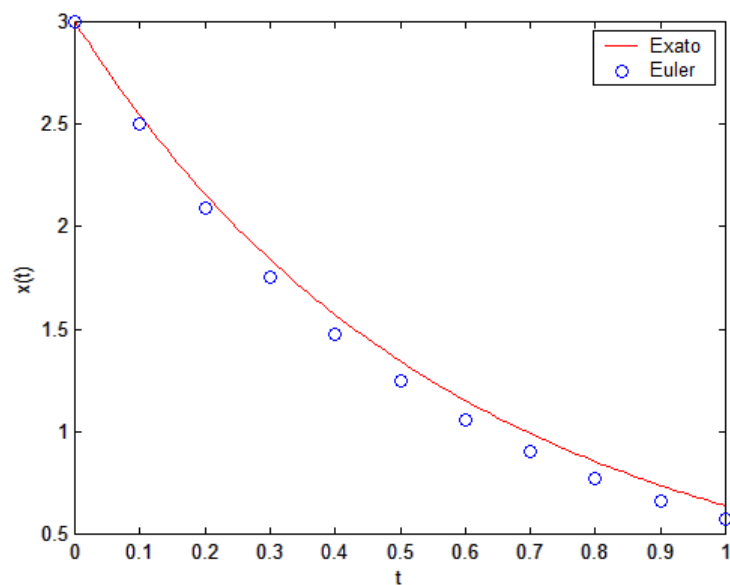


Figura 2.4: Gráfico dos pontos da Tabela 2.3, com  $h = 0.1$ .

Na Figura 2.4, podemos notar o quão próximo da solução exata estão os pontos da solução aproximada pelo método de Euler. Iterando agora com  $h = 0.05$ , pela forma que o método foi deduzido, o erro sofrerá uma redução. Neste caso, teremos ao todo 20 iterações. Na Tabela 2.4 a seguir, pularemos as iterações ímpares para diminuir o tamanho da tabela e colocar em destaque os resultados que nos interessam para comparação.

| <b>n</b> | <b>t<sub>n</sub></b> | <b>x<sub>n</sub></b> | <b>EXATA</b> | <b>Erro Absoluto</b> |
|----------|----------------------|----------------------|--------------|----------------------|
| 0        | 0                    | 3                    | 3            | 0                    |
| 2        | 0.1                  | 2.5225               | 2.5423       | 0.0197               |
| 4        | 0.2                  | 2.1270               | 2.1593       | 0.0323               |
| 6        | 0.3                  | 1.7986               | 1.8384       | 0.0397               |
| 8        | 0.4                  | 1.5255               | 1.5689       | 0.0435               |
| 10       | 0.5                  | 1.2977               | 1.3423       | 0.0446               |
| 12       | 0.6                  | 1.1072               | 1.1512       | 0.0439               |
| 14       | 0.7                  | 0.9477               | 0.9898       | 0.0421               |
| 16       | 0.8                  | 0.8136               | 0.8531       | 0.0395               |
| 18       | 0.9                  | 0.7006               | 0.7371       | 0.0365               |
| 20       | 1                    | 0.6051               | 0.6385       | 0.0334               |

Tabela 2.4: Método de Euler - Exemplo 2.2, com  $h = 0.05$ .

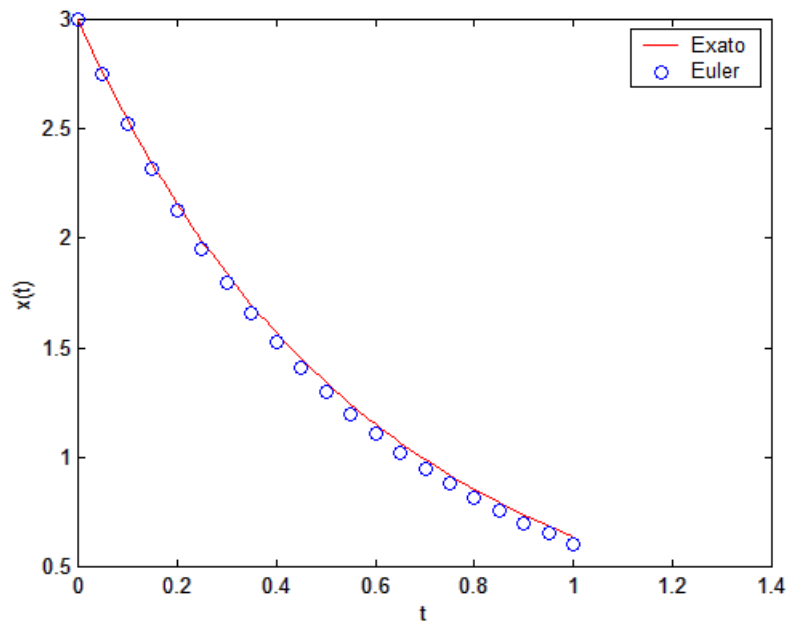


Figura 2.5: Gráfico dos pontos da tabela do Exemplo 2.2, com  $h = 0.05$ .

Podemos, então, visualizar como o tamanho do passo  $h$  tem influência sobre o erro. Ao diminuirmos  $h$  vemos que o erro também diminui. Veja as últimas colunas das

Tabelas 2.3 e 2.4. Entretanto, alertamos que ao diminuirmos o tamanho do passo  $h$ , o número de cálculos pode aumentar substancialmente. Para este exemplo específico a quantidade de passos foi dobrada.

### 2.2.1 Erros e arredondamento

Em uma situação real não teremos a solução exata para termos a noção de que a solução numérica estará próxima da solução do problema. Quão pequeno deve ser o passo  $h$  para garantir uma precisão necessária e ao mesmo tempo não gerar uma quantidade excessiva de cálculos e deixar o método com um esforço computacional desnecessário? Exploraremos, nesta subseção, um pouco dos erros obtidos no método de Euler. Este estudo nos dará uma ideia geral sobre o melhor tamanho de  $h$  a se escolher para obter uma melhor precisão.

#### Erro de truncamento global - $E_n$

Suponhamos que nosso computador é tal que podemos efetuar todos os cálculos com precisão absoluta, isto é, mantendo um número infinito de casas decimais. A diferença  $E_n$  entre a solução exata  $\psi(t_n)$  do problema de valor inicial (2.1) e seu valor numérico  $x_n$ , com todas as casas decimais, é chamada de *erro de truncamento global*. Temos, pois,

$$E_n = \psi(t_n) - x_n.$$

Para calcular este erro é necessário conhecer a solução exata e ainda não ter casas decimais arredondadas. Este erro tem duas causas: primeiro, em cada passo usamos uma fórmula aproximada para determinar  $x_{n+1}$ ; segundo, os dados de entrada em cada etapa estão aproximadamente corretos, já que, em geral,  $\psi(t_n)$  não é igual a  $x_n$ .

#### Erro de truncamento local - $e_n$

A única diferença do *erro de truncamento local* para o anterior é que tanto  $\psi(t_n)$  quanto  $x_n$  são usados com valores arredondados com um número finito de casas decimais, chamemos então de  $\tilde{\psi}(t_n)$  e  $\tilde{x}_n$  os valores com casas decimais arredondadas. Este erro é o mais viável e utilizado em nossas contas quando sabemos a solução exata, assim:

$$e_n = \tilde{\psi}(t_n) - \tilde{x}_n.$$

#### Erro de arredondamento - $A_n$

Como em todas as iterações temos um número finito de casas decimais, em certo momento começará a acontecer arredondamentos feitos pelos computadores. Então, se  $x_n$  for o valor numérico de fato, com todas as casas decimais, e  $X_n$  for o valor com

arredondamento, o erro de arredondamento  $A_n$  será dado por:

$$A_n = x_n - X_n,$$

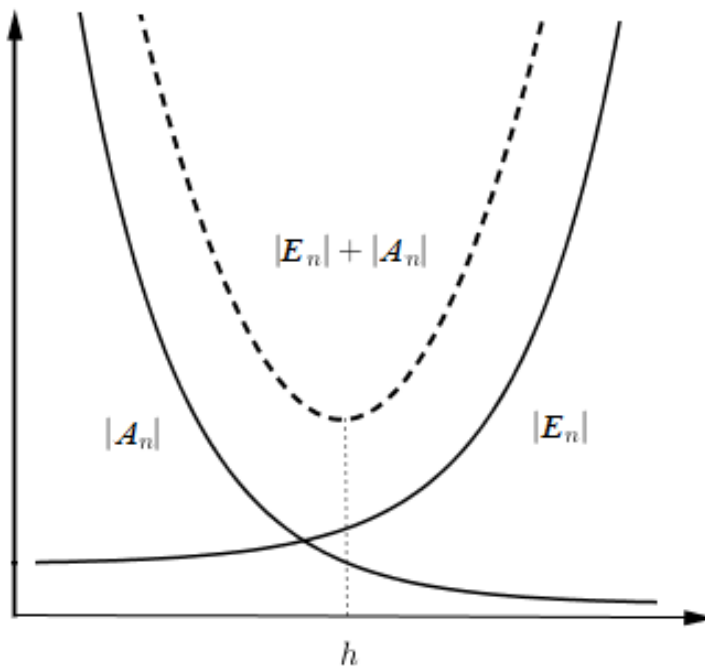
o qual só é possível calcular possuindo um super computador sem limites de casas decimais.

### Valor absoluto do erro total

Considerando os erros introduzidos anteriormente, o *valor absoluto do erro total* em um ponto  $t_n$  em questão será dado por:

$$|\psi(t_n) - x_n| = |\psi(t_n) - X_n + X_n - x_n| \leq |\psi(t_n) - X_n| + |X_n - x_n| = |E_n| + |A_n|.$$

Logo, o erro total é limitado pela soma dos valores absolutos dos erros de truncamento e de arredondamento. Pelo método de Euler já deu para perceber que, quanto maior o tamanho do passo  $h$ , maior será o erro de truncamento. Porém se maior for o  $h$ , teremos bem menos passos e, assim, menor será o erro de arredondamento. Com o mesmo raciocínio, quanto menor o  $h$ , menor será  $E_n$ , mas com um maior número de iterações, maior será  $A_n$ . O gráfico a seguir ilustra o que foi discutido.



Como se pode reparar, existirá um valor  $h$  ideal, que não poderá ser muito pequeno, nem muito grande por conta dos erros de truncamento e arredondamento que são limitados pelo erro absoluto total. O  $h$  ideal é abscissa do vértice da parábola com concavidade para cima que representa o gráfico do erro absoluto.

Utilizando o problema de valor inicial do Exemplo 2.2 e variando o  $h$ , construímos a tabela 2.5 a fim de encontrar o melhor  $h$  para este problema.



| <b>h</b> | <b>n</b> | <b><math>x_{n/2}</math></b> | <b>Erro <math>e_{n/2}</math></b> | <b><math>x_n</math></b> | <b>Erro <math>e_n</math></b> |
|----------|----------|-----------------------------|----------------------------------|-------------------------|------------------------------|
| 0.05     | 20       | 1.2976                      | 0.0044                           | 0.6051                  | 0.0334                       |
| 0.025    | 40       | 1.3204                      | 0.0218                           | 0.6219                  | 0.0165                       |
| 0.001    | 1000     | 1.3414                      | 0.0008                           | 0.6378                  | 0.0006                       |
| 0.0005   | 2000     | 1.3449                      | 0.0004                           | 0.6382                  | 0.0003                       |
| 0.00025  | 4000     | 1.342                       | 0.0002                           | 0.6383                  | 0.0001                       |
| 0.0001   | 10 000   | 1.3422                      | 1.3422                           | 0.6384                  | 0.6382                       |

Tabela 2.5: Investigando o melhor  $h$  para o Exemplo 2.2.

A coluna do  $n$  nos diz quantos passos serão necessários para chegar até  $t = 1$ . Na terceira coluna se encontra o valor de  $x_n$ , na ‘metade do caminho’, isto é, em  $t = 0.5$ . Como podemos perceber, o melhor  $h$  a ser tomado para este problema de valor inicial está entre 0.00025 e 0.0001. Note que, quando tomamos o passo  $h = 0.0001$ , o erro tornou a aumentar.

É claro que o intervalo onde se encontra o melhor  $h$  varia de problema para problema. E varia também dependendo do método a ser escolhido. Veremos outros métodos numéricos e em todos eles os erros estarão presentes.

Como já dissemos, em uma situação problemática real, não teremos a solução exata nem para calcularmos o erro de truncamento local. Por isso, faz-se necessário estimar o erro em cada método numérico utilizado. Para o método de Euler, tomemos a aproximação pelo polinômio de Taylor com resto de Lagrange (2.2) da solução exata do problema de valor inicial (2.1), que é dada por  $\psi(t)$ , ou seja:

$$\psi(t_{n+1}) = \psi(t_n) + h\psi'(t_n) + h^2 \frac{1}{2!} \psi''(t'_n), \quad (2.9)$$

com  $t_n < t'_n < t_{n+1}$ . Subtraindo dessa equação acima  $x_{n+1} = x_n + hx'_n$ , temos:

$$\psi(t_{n+1}) - x_{n+1} = [\psi(t_n) - x_n] + h[\psi'(t_n) - x'_n] + h^2 \frac{1}{2!} \psi''(t'_n).$$

Se fizermos  $\psi(t_n) = x_n$ , encontraremos o erro de truncamento local

$$e_{n+1} = \psi(t_{n+1}) - x_{n+1} = h^2 \frac{1}{2!} \psi''(t'_n), \quad (2.10)$$

que é proporcional ao quadrado do passo  $h$  e depende da segunda derivada da solução exata. Se estivermos calculando o valor da solução em um intervalo limitado, ou seja, para  $t \in [t_0, b]$ , então teremos  $|\psi''(t)| \leq C$ , já que  $\psi$  é de classe  $C^2$ , e assim:

$$e_{n+1} \leq C \frac{h^2}{2}. \quad (2.11)$$

Então, conseguimos estimar um intervalo de tolerância para o  $h$ , quando se é dado um valor máximo para o erro  $e_{n+1}$ . Como a estimativa (2.11) é baseada no maior valor possível de  $|\psi''(t)|$ , esta nos auxiliará na escolha do tamanho  $h$ , para que o erro de

truncamento local não ultrapasse um valor de tolerância dado. Por exemplo, supondo que este valor de tolerância seja  $\varepsilon$ , teremos:

$$e_{n+1} \leq C \frac{h^2}{2} \leq \varepsilon \Rightarrow h \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{C}}. \quad (2.12)$$

A maior dificuldade reside no fato que, na maioria dos casos, não conhecemos a solução exata, pois o valor  $C$  provém da estimativa de  $\psi''(t)$ .

**Exemplo 2.3.** Consideremos o problema de valor inicial resolvido no Exemplo 1.1, que tem como solução exata  $\psi(t) = 2e^t$ :

$$\begin{cases} x'(t) = x \\ x(0) = 2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Pela igualdade (2.10), temos

$$e_{n+1} = \frac{2e^{t_n^*} h^2}{2}, \text{ com } t_n < t_n^* < t_n + h.$$

Assim, para o passo  $h = 0.1$ , o primeiro erro é:

$$e_1 = \frac{2e^{t_0^*} 0.1^2}{2} = 0.01e^{t_0^*}, \quad 0 < t_0^* < 0.1.$$

Como  $e_1$  é positivo e  $e^{t_0^*} < e^{0.1}$ , segue que

$$e_1 \leq 0.01e^{t_0^*} \leq 0.01e^{0.1} = 0.011051709.$$

Como  $t_0^* > 0$ , é claro que  $e^{t_0^*} > e^0 = 1$ , donde  $e_1 > 0.01$ . Assim, o erro neste primeiro passo está estimado em  $0.01 < e_1 < 0.011051709$ .

Se quiséssemos ter um erro local em  $0 < t < 0.1$  menor que  $\varepsilon = 0.001$ , utilizando (2.12), deveríamos ter:

$$e_1 \leq \frac{2e^t h^2}{2} \leq 0.001,$$

ou seja,

$$h \leq \sqrt{\frac{0.001}{e^{t_0^*}}} \leq 0.000904837.$$

Portanto, se desejamos ter um erro de truncamento local menor que 0.001, precisamos considerar  $h < 0.0009$ .

## 2.3 Método de Euler melhorado

É possível notar que o erro no método de Euler é grande. Com o objetivo de diminuir este erro de aproximação, podemos utilizar o *método de Euler melhorado* ou *método do Trapézio*.

Ao invés de avançarmos ao longo da reta tangente ao ponto  $(t_0, x_0)$  com inclinação dada por  $f(t_0, x_0)$  até o ponto  $(t_1, x_1)$  e assim por diante, o método de Euler melhorado consiste em avançarmos ao longo da reta que passa por  $(t_0, x_0)$  com inclinação dada pela média entre  $f(t_0, x_0)$  e  $f(t_1, x_1)$ , para calcularmos  $x_1$ . Assim, teremos:

$$x_1 = x_0 + h \frac{f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1)}{2}.$$

O valor de  $f(t_1, x_1)$  é calculado pelo método de Euler. Observando a Figura 2.6 vemos a interpretação geométrica do que acabamos de explicar. Mantemos em azul os passos do método de Euler e, em preto, ilustramos os passos do método de Euler melhorado. As inclinações das *retas medianas* são dados por:

$$\frac{f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x'_{n+1})}{2},$$

onde o ponto  $x'_n$  é calculado usando o método de Euler.

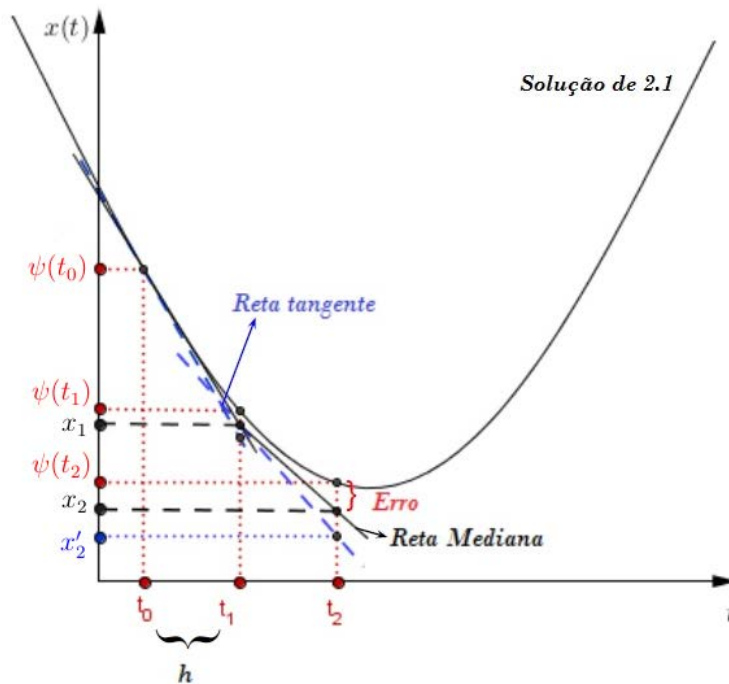


Figura 2.6: Interpretação geométrica do método de Euler melhorado.

De uma forma mais sucinta, o método de Euler melhorado consiste nas fórmulas:

$$x'_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \quad (2.14)$$

$$x_{n+1} = x_n + h \left[ \frac{f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x'_{n+1})}{2} \right]. \quad (2.15)$$

Na Seção 2.2, no Exemplo 2.2, encontramos a solução aproximada do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t} - 2x \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

aplicando o método de Euler. Agora, resolveremos o mesmo problema utilizando o método de Euler melhorado, para compararmos os métodos. Tomaremos  $h = 0.1$ . Sabemos que  $x_0 = 3$ . Utilizaremos (2.14) para as primeiras iterações. Para  $n = 0$ , temos:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_0 + h \cdot f(t_0, x_0) \\x'_1 &= 3 + 0.1 \cdot (e^{-0} - 2 \cdot 3) \\x'_1 &= 2.5.\end{aligned}$$

Colocando este valor encontrado de  $x'_1$  na fórmula (2.15), temos:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + h \frac{f(t_0, x_0) + f(t_1, x'_1)}{2} \\x_1 &= 3 + 0.1 \cdot \frac{(e^{-0} - 2 \cdot 3) + (e^{-0,1} - 2 \cdot 2.5)}{2} \\x_1 &= 2.5452.\end{aligned}$$

Para  $n = 1$ , utilizando (2.14), calculamos  $x'_2 = 2.5814$ . Agora, colocando este valor em (2.15), obtemos  $x_2 = 2.1678$ . Prosseguindo desta forma, construímos a Tabela 2.6:

| <b>n</b> | <b>t<sub>n</sub></b> | <b>x<sub>n</sub></b> | <b>EXATA</b> | <b>Erro Euler Melhorado</b> | <b>Erro Euler</b> |
|----------|----------------------|----------------------|--------------|-----------------------------|-------------------|
| 0        | 0                    | 3                    | 3            | 0                           | 0                 |
| 1        | 0.1                  | 2.5                  | 2.5423       | 0.0029                      | 0.0423            |
| 2        | 0.2                  | 2.0905               | 2.1594       | 0.0085                      | 0.0689            |
| 3        | 0.3                  | 1.7543               | 1.8384       | 0.0152                      | 0.0842            |
| 4        | 0.4                  | 1.4775               | 1.5690       | 0.0221                      | 0.0915            |
| 5        | 0.5                  | 1.2490               | 1.3423       | 0.0286                      | 0.0933            |
| 6        | 0.6                  | 1.0599               | 1.1512       | 0.0344                      | 0.0913            |
| 7        | 0.7                  | 0.9028               | 0.9898       | 0.0392                      | 0.0870            |
| 8        | 0.8                  | 0.7719               | 0.8531       | 0.0431                      | 0.0812            |
| 9        | 0.9                  | 0.6624               | 0.7372       | 0.0460                      | 0.0747            |
| 10       | 1                    | 0.5706               | 0.6386       | 0.0479                      | 0.0679            |

Tabela 2.6: Método de Euler melhorado - Exemplo 2.2, com  $h = 0.1$ .

A última coluna da Tabela 2.3 foi colocada na última coluna da Tabela 2.6 para podermos comparar os erros em cada um dos métodos. É notável como o erro nos primeiros passos diminui de um método para o outro. Porém, na décima iteração, já temos um acúmulo de erros até no Euler melhorado. Na Figura 2.7, fica visível o quão mais próxima da solução exata a solução aproximada por este método fica.

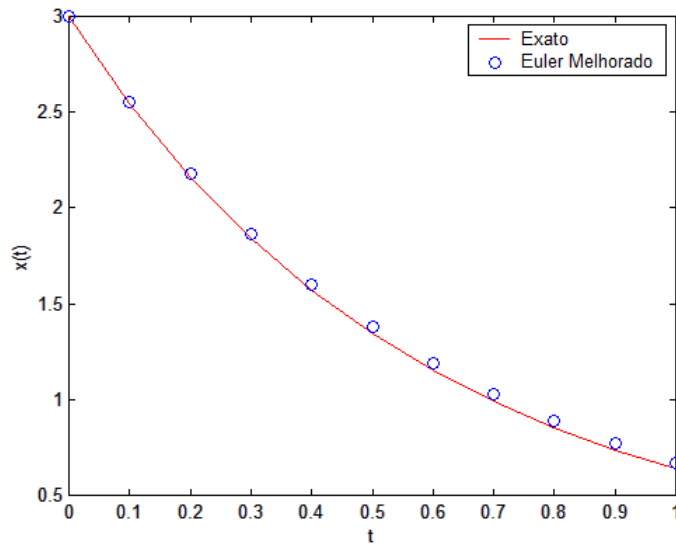


Figura 2.7: Esboço que ilustra o método de Euler melhorado.

Reduzindo o passo  $h$  à metade, isto é, considerando  $h = 0.05$ , dobramos as iterações, porém adquirimos um resultado com um erro menor. Observe a Tabela 2.7, com os valores das iterações, com a última coluna extraída da Tabela 2.4 para facilitar a comparação entre os métodos.

| $n$ | $t_n$ | $x_n$  | EXATA  | Erro Euler Melhorado | Erro Euler |
|-----|-------|--------|--------|----------------------|------------|
| 0   | 0     | 3      | 3      | 0                    | 0          |
| 2   | 0.1   | 2.5226 | 2.5423 | 0.0012               | 0.0197     |
| 4   | 0.2   | 2.1270 | 2.1594 | 0.0037               | 0.0323     |
| 6   | 0.3   | 1.7987 | 1.8384 | 0.0069               | 0.0398     |
| 8   | 0.4   | 1.5255 | 1.5690 | 0.0102               | 0.0435     |
| 10  | 0.5   | 1.2977 | 1.3423 | 0.0134               | 0.0446     |
| 12  | 0.6   | 1.1073 | 1.1512 | 0.0163               | 0.0439     |
| 14  | 0.7   | 0.9477 | 0.9898 | 0.0187               | 0.0421     |
| 16  | 0.8   | 0.8136 | 0.8531 | 0.0207               | 0.0395     |
| 18  | 0.9   | 0.7006 | 0.7372 | 0.0223               | 0.0366     |
| 20  | 1     | 0.6051 | 0.6386 | 0.0234               | 0.0334     |

Tabela 2.7: Método de Euler melhorado - Exemplo 2.2, com  $h = 0.05$ .

Toda vez que diminuirmos o tamanho do passo  $h$ , estaremos mais próximos da solução exata? Na prática é o que gostaríamos de ter, porém nem sempre será verdade, já que temos também o erro de arredondamento a considerar toda vez que diminuimos o passo  $h$ .

## 2.4 Método de Runge-Kutta

Nesta seção trataremos do método mais famoso: o *método de Runge-Kutta*. Ele nasce do método de Euler, sendo o Runge-Kutta de primeiro grau o próprio método de Euler. O Runge-Kutta de segundo grau é o método de Euler melhorado, como veremos a seguir. Concluiremos a seção com o Runge-Kutta de quarto grau, que é o método mais preciso para a obtenção de soluções aproximadas para um problema de valor inicial.

Cada método do Runge-Kutta é uma comparação com um polinômio de Taylor conveniente, daí que surgem os graus em seus nomes. Quando comparado a um polinômio de grau 1, teremos o Runge-Kutta de primeiro grau. Ao fazermos essa comparação, o cálculo da derivada é eliminado, fazendo-se assim avaliações da função  $f$  em cada iteração.

Pelo Teorema 2.2, se  $x$  for uma função de classe  $C^k$ ,  $(k+1)$ -vezes derivável em um intervalo contendo  $t_0$  e  $t$ , então existirá  $\xi \in (t_0, t)$  tal que

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + \cdots + \frac{(t - t_0)^k}{k!} x^{(k)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^{k+1}}{(k+1)!} x^{(k+1)}(\xi). \quad (2.16)$$

A fórmula (2.16) será utilizada para descrever os métodos a seguir.

### 2.4.1 Runge-Kutta de primeiro grau

Se substituirmos  $t_0$  por  $t_n$  e  $t$  por  $t_{n+1} = t_n + h$ , a fórmula (2.16) equivale a:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + x'(t_n)h + \cdots + \frac{h^k}{k!} x^{(k)}(t_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} x^{(k+1)}(\xi), \quad (2.17)$$

onde  $\xi$  é algum número entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ .

Se  $k = 1$  na equação (2.17) e se o resto  $\frac{x''(\xi)}{2}h^2$  for pequeno, obtemos a fórmula de Euler:

$$x_{n+1} = x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) = x_n + hf(t_n, x_n).$$

Então, podemos concluir que o procedimento de Runge-Kutta de primeiro grau é o método de Euler básico, sendo o erro de truncamento local igual a  $e_{n+1} = \frac{h^2}{2!} x''(\xi)$ .

### 2.4.2 Runge-Kutta de segundo grau

Fazendo  $k = 2$  na equação (2.17), temos:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{h^2}{2!} x''(t_n) + \frac{h^3}{3!} x^{(3)}(\xi), \quad (2.18)$$

com  $\xi \in (t_n, t_{n+1})$ .

Vamos buscar uma função  $\varphi$  de forma que a equação (2.18) seja escrita da seguinte forma:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\varphi(t_n, x_n) \quad (2.19)$$

com  $\varphi = ak_1 + bk_2$ . Devemos encontrar  $a, b, k_1$  e  $k_2$  de modo que  $x(t_n) + h\varphi(t_n, x_n)$  seja igual ao polinômio de Taylor de  $x$  de grau 2, ou seja,

$$\begin{aligned} x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{h^2}{2!}x''(t_n) &= x(t_n) + h\varphi(t_n, x_n) \\ h[x'(t_n) + \frac{h}{2!}x''(t_n)] &= h(ak_1 + bk_2) \\ [x'(t_n) + \frac{h}{2!}x''(t_n)] &= ak_1 + bk_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Consideremos  $k_1 = x'(t_n) = f(t_n, x_n)$  e  $k_2 = f(t_n + \alpha h, x_n + \beta h k_1)$ . Vamos expandir  $k_2$  com o seu polinômio de Taylor de grau 1, centrado em  $(t_n, x_n)$  (ou seja, com  $h = 0$ ):

$$k_2 = f(t_n, x_n) + \alpha h \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + \beta h f(t_n, x_n) \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x} + R_2(t_n).$$

Lembrando que  $R_2(t_n)$  é o resto de Lagrange para um polinômio de grau 1. Vamos calcular  $ak_1 + bk_2$  e simplificar as contas, desprezando o resto  $R_2(t_n)$ , pois desejamos que ele seja suficientemente pequeno para ser desconsiderado.

$$\begin{aligned} ak_1 + bk_2 &= a(f(t_n, x_n)) + b \left[ f(t_n, x_n) + \alpha h \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + \beta h f(t_n, x_n) \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x} \right] \\ &= (a + b)f(t_n, x_n) + b\alpha h \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + b\beta h f(t_n, x_n) \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Por (2.20) e pelas contas até aqui feitas, a igualdade

$$x'(t_n) + \frac{h}{2}x''(t_n) = f(t_n, x_n) + \frac{h}{2} \left[ \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + f(t_n, x_n) \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x} \right]$$

só acontece se

$$\begin{cases} a + b &= 1 \\ b\alpha &= \frac{1}{2} \\ b\beta &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Este sistema tem infinitas soluções, considere a solução em que  $a = b = \frac{1}{2}$  e  $\alpha = \beta = 1$ . Assim, por (2.19), temos

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= x(t_n) + h\varphi(t_n, x_n) \\ x_{n+1} &= x_n + h \left[ \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right]. \end{aligned}$$

Com  $k_1 = f(t_n, x_n)$ ,  $k_2 = f(t_n + \alpha h, x_n + \beta k_1)$ ,  $\alpha = \beta = 1$ , obtemos:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}h[f(t_n, x_n)] + \frac{1}{2}h[f(t_n + h, x_n + f(t_n, x_n))].$$

Como  $t_n + h = t_{n+1}$ , obtemos

$$x_{n+1} = x_n + h \left[ \frac{f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_n + f(t_n, x_n))}{2} \right],$$

que é a fórmula de Euler melhorada.

### 2.4.3 Runge-Kutta de terceiro grau

Os métodos de Runge-Kutta de graus mais elevados são obtidos de modo semelhante aos de segundo grau.

Fazendo  $k = 3$  na equação (2.17), temos:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{h^2}{2!}x''(t_n) + \frac{h^3}{3!}x'''(t_n) + \frac{h^4}{4!}x^{(4)}(\xi), \quad (2.21)$$

com  $\xi \in (t_n, t_{n+1})$ . Novamente, buscaremos uma função  $\varphi$  tal que  $x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\varphi(t_n, x_n)$ , porém, neste caso,

$$\varphi = ak_1 + bk_2 + ck_3,$$

onde  $k_1, k_2$  e  $k_3$  aproximam derivadas em vários pontos do intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$ . Aqui faz-se

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, x_n), \\ k_2 = f(t_n + \alpha_1 h, x_n + \beta_1 h k_1), \\ k_3 = f(t_n + \alpha_2 h, x_n + \beta_2 h k_2 + (\alpha_2 - \beta_2) h k_1). \end{cases}$$

Teremos um sistema com mais incógnitas do que equações, que também terá infinitas soluções. Como o Runge-Kutta de terceiro grau não nos fornece uma boa precisão, não nos atentaremos a resolução de tal sistema de equações. Porém, informamos ao leitor interessado que os cálculos desta resolução podem ser encontrados em [6], páginas 125-131. A solução mais conhecida do Runge-Kutta de terceira ordem é:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6} [k_1 + 4k_2 + k_3],$$

onde

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, x_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_n + h, x_n + 2hk_2 - hk_1). \end{cases}$$

**Exemplo 2.4.** Calculemos a solução numérica do Exemplo 2.8, utilizando Runge-Kutta de terceira ordem. O resultado está na Tabela 2.8 a seguir:



| <b>n</b> | <b>t<sub>n</sub></b> | <b>EXATA</b> | <b>Erro R-K 3° grau</b> | <b>Erro Euler Melhorado</b> |
|----------|----------------------|--------------|-------------------------|-----------------------------|
| 0        | 0                    | 3.0000       | 0.0000                  | 0.0000                      |
| 1        | 0.1                  | 2.5423       | 0.0421                  | 0.0029                      |
| 2        | 0.2                  | 2.1594       | 0.0690                  | 0.0085                      |
| 3        | 0.3                  | 1.8384       | 0.0849                  | 0.0152                      |
| 4        | 0.4                  | 1.5690       | 0.0929                  | 0.0221                      |
| 5        | 0.5                  | 1.3423       | 0.0953                  | 0.0286                      |
| 6        | 0.6                  | 1.1512       | 0.0940                  | 0.0344                      |
| 7        | 0.7                  | 0.9898       | 0.0902                  | 0.0392                      |
| 8        | 0.8                  | 0.8531       | 0.0849                  | 0.0431                      |
| 9        | 0.9                  | 0.7372       | 0.0788                  | 0.0460                      |
| 10       | 1                    | 0.6386       | 0.0722                  | 0.0479                      |

Tabela 2.8: Método de Runge-Kutta de terceiro grau - Exemplo 2.2, com  $h = 0.1$ .

Observemos que apesar de ser um método diferenciado e com erro de truncamento de ordem 4, ainda não superamos o método de Euler melhorado neste exemplo. É claro que considerando longas distâncias, o Runge-Kutta de terceiro grau será a melhor escolha pelo simples fato de que os erros não se acumulam nas iterações, diferentemente do que ocorre em Euler.

| <b>n</b> | <b>t<sub>n</sub></b> | <b>EXATA</b> | <b>ERRO R-K 3° grau</b> | <b>ERRO Euler Melhorado</b> |
|----------|----------------------|--------------|-------------------------|-----------------------------|
| 0        | 0                    | 3.00000      | 0.00000                 | 0.00000                     |
| 2        | 0.1                  | 2.52142      | 0.02088                 | 0.00119                     |
| 4        | 0.2                  | 2.12498      | 0.03439                 | 0.00371                     |
| 6        | 0.3                  | 1.79593      | 0.04251                 | 0.00686                     |
| 8        | 0.4                  | 1.52224      | 0.04674                 | 0.01018                     |
| 10       | 0.5                  | 1.29407      | 0.04822                 | 0.01338                     |
| 12       | 0.6                  | 1.10341      | 0.04779                 | 0.01626                     |
| 14       | 0.7                  | 0.94369      | 0.04609                 | 0.01873                     |
| 16       | 0.8                  | 0.80954      | 0.04358                 | 0.02074                     |
| 18       | 0.9                  | 0.69656      | 0.04060                 | 0.02229                     |
| 20       | 1                    | 0.60115      | 0.03740                 | 0.02339                     |

Tabela 2.9: Método de Runge-Kutta de terceiro grau - Exemplo 2.2, com  $h = 0.05$ .

Vejamos o método de Runge Kutta de quarto grau, que apesar do esforço computacional ser um pouco maior, ele ganha em eficácia, diminuindo os erros, com erro de truncamento de quinta ordem.

### 2.4.4 Runge-Kutta de quarto grau

O método mais preciso e mais utilizado é o método de Runge-Kutta de quarto grau.

Como nas ordens anteriores, fazemos  $k = 4$  na equação (2.17):

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{h^2}{2!}x''(t_n) + \frac{h^3}{3!}x^{(3)}(t_n) + \frac{h^4}{4!}x^{(4)}(t_n) + \frac{h^5}{5!}x^{(5)}(\xi) \quad (2.22)$$

com  $\xi \in (t_n, t_{n+1})$ , e precisamos encontrar as constantes apropriadas para que

$$x_{n+1} = x_n + h \underbrace{(ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4)}_{\varphi(t_n, x_n)},$$

sendo as constantes  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  dadas por:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, x_n) \\ k_2 = f(t_n + \alpha_1 h, x_n + \beta_1 h k_1) \\ k_3 = f(t_n + \alpha_2 h, x_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 h k_2) \\ k_4 = f(t_n + \alpha_3 h, x_n + \beta_4 k_1 + \beta_4 k_2 + \beta_5 h k_3). \end{cases}$$

Novamente, teremos um sistema com mais incógnitas do que equações e, consequentemente, infinitas soluções. A solução mais conhecida deste método, de acordo com Boyce & DiPrima [3], é dada por:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4],$$

com

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, x_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3). \end{cases}$$

Neste caso, o erro de truncamento global será de ordem 5, e dado por:

$$\frac{h^5}{5!}x^{(5)}(\xi).$$

**Exemplo 2.5.** Vamos encontrar uma solução numérica para o problema de valor inicial do Exemplo 2.2:

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t} - 2x \\ x(0) = 3, \end{cases}$$

para o passo  $h = 0.1$ , utilizando o método de Runge-Kutta de quarto grau.

Conhecendo a condição inicial, encontraremos as constantes para  $n = 0$ . Com efeito,

$$k_1 = f(t_0, x_0) = e^{-t_0} - 2x_0 = -5,$$

$$k_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}k_1) = e^{-(t_0+\frac{h}{2})} - 2(x_0 + \frac{h}{2}k_1) = -4.5488,$$

$$k_3 = f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}k_2) = e^{-(t_0+\frac{h}{2})} - 2(x_0 + \frac{h}{2}k_2) = -4.5939,$$

$$k_4 = f(t_0 + h, x_0 + k_3h) = e^{-(t_0+h)} - 2(x_0 + hk_3) = -4.1764.$$

Assim,

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 2.5423.$$

A solução exata é dada pela função  $\psi(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$  e, neste caso,  $\psi(0.1) = 2.5423$ , ou seja, nas quatro casas decimais em que fixamos, este método tem uma ótima precisão. Observe a Tabela 2.10 para  $h = 0.1$ :

| <b>n</b> | <b>t<sub>n</sub></b> | <b>x<sub>n</sub></b> | <b>EXATA</b> | <b>ERRO R-K 4° grau</b> | <b>ERRO Euler Melhorado</b> |
|----------|----------------------|----------------------|--------------|-------------------------|-----------------------------|
| 0        | 0                    | 3                    | 3            | 0.000000                | 0                           |
| 1        | 0.1                  | 2.500000             | 2.542299     | 0.000006                | 0.002943                    |
| 2        | 0.2                  | 2.090484             | 2.159371     | 0.000010                | 0.008477                    |
| 3        | 0.3                  | 1.754260             | 1.838441     | 0.000012                | 0.015173                    |
| 4        | 0.4                  | 1.477490             | 1.568978     | 0.000013                | 0.022083                    |
| 5        | 0.5                  | 1.249024             | 1.342290     | 0.000014                | 0.028605                    |
| 6        | 0.6                  | 1.059872             | 1.151200     | 0.000013                | 0.034385                    |
| 7        | 0.7                  | 0.902779             | 0.989779     | 0.000013                | 0.039240                    |
| 8        | 0.8                  | 0.771882             | 0.853122     | 0.000012                | 0.043102                    |
| 9        | 0.9                  | 0.662438             | 0.737167     | 0.000011                | 0.045986                    |
| 10       | 1                    | 0.570608             | 0.638550     | 0.000010                | 0.047949                    |

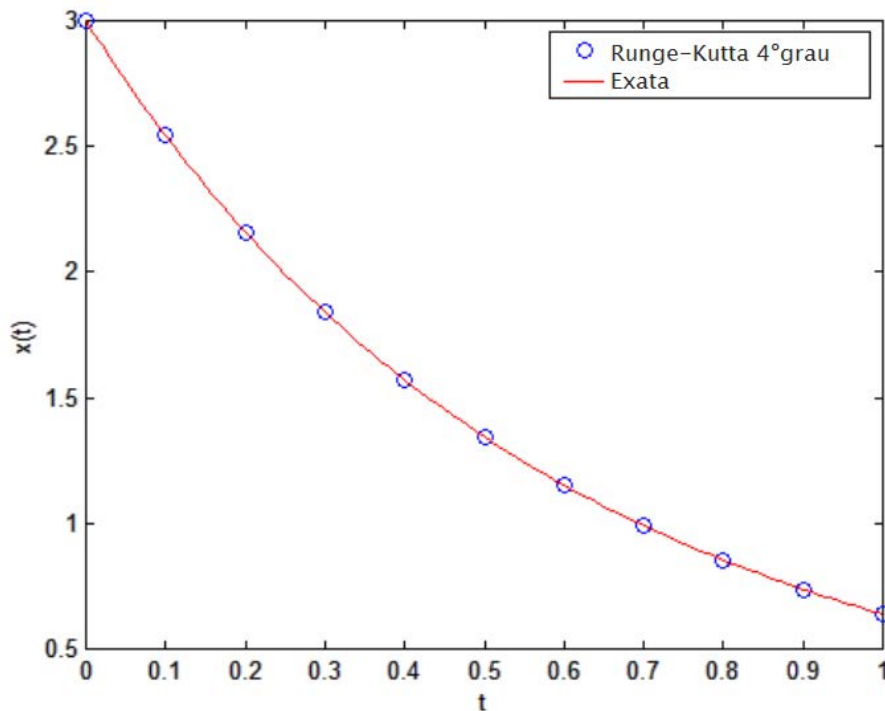
Tabela 2.10: Método de Runge-Kutta de quarto grau - Exemplo 2.2, com  $h = 0.1$ .

Na última coluna, colocamos o erro do método de Euler Melhorado e fica nítido o quanto o Runge - Kutta de quarto grau é mais eficaz.

Observemos, abaixo, como o método age quando o passo  $h$  vai para  $h = 0.05$ . Na próxima tabela (Tabela 2.11) , colocamos seis casas decimais de aproximação, para observamos o erro.

É claro que aqui temos uma precisão muito boa. Com um passo  $h$  menor, teríamos um erro menor ainda. Observe a Figura 2.8 com os pontos da Tabela 2.10 plotados, e compare com os gráficos anteriores. O método de Runge-Kutta de 4° grau tem uma eficácia maior.

| $n$ | $t_n$ | $x_n$     | EXATA     | ERRO R-K 4° grau | ERRO Euler Melhorado |
|-----|-------|-----------|-----------|------------------|----------------------|
| 0   | 0     | 3.0000000 | 3.0000000 | 0.00000000       | 0                    |
| 2   | 0.1   | 2.5422993 | 2.5422989 | 0.00000034       | 0.00119137           |
| 4   | 0.2   | 2.1593714 | 2.1593708 | 0.00000056       | 0.00370693           |
| 6   | 0.3   | 1.8384422 | 1.8384415 | 0.00000069       | 0.00685934           |
| 8   | 0.4   | 1.5689787 | 1.5689780 | 0.00000076       | 0.01018427           |
| 10  | 0.5   | 1.3422903 | 1.3422895 | 0.00000078       | 0.01338008           |
| 12  | 0.6   | 1.1512008 | 1.1512001 | 0.00000077       | 0.01626241           |
| 14  | 0.7   | 0.9897800 | 0.9897792 | 0.00000075       | 0.01873003           |
| 16  | 0.8   | 0.8531227 | 0.8531220 | 0.00000071       | 0.02073946           |
| 18  | 0.9   | 0.7371681 | 0.7371674 | 0.00000066       | 0.02228619           |
| 20  | 1     | 0.6385506 | 0.6385500 | 0.00000060       | 0.02339102           |

Tabela 2.11: Método de Runge-Kutta de quarto grau - Exemplo 2.2, com  $h = 0.05$ .Figura 2.8: Gráfico dos pontos obtidos pelo método de Runge-Kutta de quarto grau, com  $h = 0.1$ .

## 2.5 Analisando os métodos

Até o momento estudamos os métodos numéricos conhecidos como *métodos de um passo só*. Todos eles derivam do método de Euler. Para ilustrar, na tabela abaixo, descrevemos os erros obtidos pelos métodos de: Euler, Euler Melhorado e Runge-Kutta de quarto grau para aproximar a solução do problema de valor inicial do Exemplo (2.2), com  $h = 0.05$ .

| <b>n</b> | <b>Euler</b> | <b>Euler Melhorado</b> | <b>R-K 4° grau</b> |
|----------|--------------|------------------------|--------------------|
| 0        | 0.0000000    | 0.0000000              | 0.0000000          |
| 2        | 0.0197375    | 0.0011914              | 0.0000003          |
| 4        | 0.0323430    | 0.0037069              | 0.0000005          |
| 6        | 0.0397660    | 0.0068593              | 0.0000006          |
| 8        | 0.0434796    | 0.0101843              | 0.0000007          |
| 10       | 0.0445900    | 0.0133801              | 0.0000007          |
| 12       | 0.0439221    | 0.0162624              | 0.0000007          |
| 14       | 0.0420853    | 0.0187300              | 0.0000007          |
| 16       | 0.0395252    | 0.0207395              | 0.0000007          |
| 18       | 0.0365635    | 0.0222862              | 0.0000006          |
| 20       | 0.0334281    | 0.0233910              | 0.0000006          |

Tabela 2.12: Comparação entre os erros dos métodos, com  $h = 0.05$ , utilizando o problema de valor inicial do Exemplo (2.2).

Observando a Tabela 2.12 vemos que, quanto maior o grau de um método, melhor será a precisão obtida comparando com a solução exata. Euler é um método de rápidas iterações, sem grande esforço computacional. Runge-Kutta de quarto grau é um método que agrega uma quantidade maior de cálculos, mas que conta com uma precisão maior do que a do método de Euler. No Capítulo 4, falaremos sobre convergência dos métodos numéricos e estas afirmações feitas acima farão mais sentido do ponto de vista matemático.

## 3 Métodos de passos múltiplos

No capítulo anterior, vimos somente métodos de passos únicos. Os métodos que veremos aqui, chamados de passos múltiplos, são bem precisos, porém eles necessitam de conhecimento prévio de alguns pontos da solução. Assim, os métodos de passos múltiplos são apropriados para os casos em que já se conhece alguns pontos do problema, digamos  $(t_1, x_1), (t_2, x_2), \dots, (t_n, x_n)$ , e se deseja estimar o valor de  $(t_{n+1}, x_{n+1})$ . Todos aqueles que precisam de mais de uma informação, ou seja, mais um ponto além da condição inicial, são chamados *métodos de passos múltiplos*.

### 3.1 Métodos de Adams

Nesta seção, veremos os dois métodos de Adams: a fórmula de *Adams-Bashforth* e a fórmula de *Adams-Moulton*. Ambas são de passos múltiplos, mas a diferença é que a primeira é uma fórmula explícita e a segunda implícita. O *método de previsão e correção* é a combinação desses dois métodos.

#### 3.1.1 Método de Adams - Bashforth

Relembremos que

$$\psi(t_{n+1}) - \psi(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, \psi(s)) ds, \quad (3.1)$$

com  $\psi(t)$  sendo a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

quando  $f$  é uma função contínua.

A ideia é aproximar a derivada  $\psi'$  por um polinômio  $P_k$  de grau  $k$  e usar esse polinômio para calcular a integral em (3.1). Vejamos um exemplo simples em que gostaríamos de aproximar  $\psi'$  por um polinômio  $P_k$  de grau 1. Para isso serão necessários conhecer a priori dois pontos, além da condição inicial, digamos:  $(t_{n-1}, x_{n-1})$  e  $(t_n, x_n)$ . Como  $P_1$  deve ser uma aproximação de  $\psi'$ , precisamos ter:

$$\begin{cases} P_1(t_{n-1}) = f(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ P_1(t_n) = f(t_n, x_n). \end{cases}$$

Para simplificar, trocaremos a notação  $f(t_i, x_i)$  por  $f_i$ . Seja  $P_1(t) = \alpha t + \beta$ . É preciso resolver o sistema abaixo encontrando os valores  $\alpha$  e  $\beta$  que satisfaçam:

$$\begin{cases} \alpha t_{n-1} + \beta = f_{n-1} \text{ (I),} \\ \alpha t_n + \beta = f_n \text{ (II).} \end{cases} \quad (3.2)$$

De (I) segue que

$$\beta = f_{n-1} - \alpha t_{n-1} \text{ (III).}$$

Substituindo (III) em (II), temos:

$$\begin{aligned} \alpha t_n + (f_{n-1} - \alpha t_{n-1}) &= f_n \\ \alpha(t_n - t_{n-1}) &= f_n - f_{n-1}. \end{aligned}$$

Como  $t_n - t_{n-1} = h$ , segue que:

$$\alpha = \frac{f_n - f_{n-1}}{h}.$$

Agora, substituindo esse  $\alpha$  na equação (III), obtemos

$$\begin{aligned} \beta &= f_{n-1} - \left( \frac{f_n - f_{n-1}}{h} \right) t_{n-1} \\ \beta &= \frac{f_{n-1}(t_n - t_{n-1}) - f_n t_{n-1} + f_{n-1} t_{n-1}}{h} \\ \beta &= \frac{f_{n-1} t_n - f_n t_{n-1}}{h}. \end{aligned}$$

Trocando  $\psi'(t)$  por  $P_1(t)$  em (3.1), temos:

$$\psi(t_{n+1}) - \psi(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\alpha s + \beta) ds = \frac{\alpha}{2} (t_{n+1}^2 - t_n^2) + \beta(t_{n+1} - t_n).$$

Como este é um método para estimar a solução que ainda não conhecemos, então substituímos  $\psi(t_i)$  por  $x_i$  e assim:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{\alpha(t_{n+1}^2 - t_n^2)}{2} + \beta(t_{n+1} - t_n) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{(f_n - f_{n-1})(t_{n+1}^2 - t_n^2)}{2h} + \frac{(f_{n-1} t_n - f_n t_{n-1})(t_{n+1} - t_n)}{h} \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{(f_n - f_{n-1})(t_{n+1} + t_n)}{2} + (f_{n-1} t_n - f_n t_{n-1}) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{(f_n - f_{n-1})(2t_n + h) + 2f_{n-1} t_n - 2f_n t_{n-1}}{2} \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{2f_n t_n + f_n h - 2f_{n-1} t_n - f_{n-1} h + 2f_{n-1} t_n - 2f_n t_{n-1}}{2} \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{3f_n t_n - 3f_n t_{n-1} - f_{n-1} h}{2} \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{3f_n(t_n - t_{n-1}) - f_{n-1} h}{2}, \end{aligned}$$

donde:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{3f_n h - f_{n-1} h}{2}. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) é a fórmula de *Adams-Bashforth* de segundo grau. Ela tem erro de truncamento de ordem  $O(h^3)$  e é explícita; para deduzí-la tomamos um polinômio de segundo grau. Para deduzir Adams-Bashforth de graus maiores basta seguir o esquema acima, porém será necessário conhecer mais pontos. Para obter a fórmula de Adams-Bashforth de quarto grau, que é a mais precisa e conhecida, é necessário conhecer quatro pontos. Aproximando  $\psi'$  por um polinômio de grau 3,  $P_3(t)$ , e fazendo as devidas simplificações algébricas, obtemos:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 32f_{n-2} - 9f_{n-3}). \quad (3.4)$$

Para resolvê-la, portanto, é necessário conhecer  $(t_{n-3}, x_{n-3})$ ,  $(t_{n-2}, x_{n-2})$ ,  $(t_{n-1}, x_{n-1})$  e  $(t_n, x_n)$ . Para conseguir esses pontos, basta utilizar qualquer método de passo único, visto no capítulo anterior. Como o Runge-Kutta de quarto grau é o mais preciso entre eles, utilizaremos ele no exemplo a seguir.

**Exemplo 3.1.** Resolveremos o problema de valor inicial (2.8) (Exemplo 2.2), utilizando o método de Adams-Bashforth para ver como ele se comporta comparado aos métodos de passo único. O problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t} - 2x \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

tem como solução exata  $\psi(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$ . Este exemplo foi utilizado no estudo dos métodos vistos até agora. Em todos eles, estamos iterando até  $t = 1$ , fixando  $h = 0.1$ . Por conta disso, iremos estimar o valor de  $x(t)$  para  $t = 1$ , utilizando Adams-Bashforth. Para o Runge-Kutta, foi necessário 10 iterações até chegar neste ponto. Consideremos então as quatro últimas iterações, ou seja,  $n = 6, 7, 8$  e  $9$ , pois precisamos calcular:

$$x_{10} = x_9 + \frac{h}{24}(55f_9 - 59f_8 + 32f_7 - 9f_6).$$

Da Tabela 2.10, temos:

| $\mathbf{n}$ | $\mathbf{t_n}$ | $\mathbf{x_n}$ | $\mathbf{f(t_n, x_n) = f_n}$ |
|--------------|----------------|----------------|------------------------------|
| 6            | 0.6            | 1.1512         | -1.7536                      |
| 7            | 0.7            | 0.9898         | -1.4830                      |
| 8            | 0.8            | 0.8531         | -1.2569                      |
| 9            | 0.9            | 0.7372         | -1.0678                      |

Tabela 3.1: Valores retirados do método de Runge-Kutta, para  $h = 0.1$ .



Colocando os valores na fórmula, concluímos que  $x_{10} = 0.63860$ . Note que o erro absoluto neste método é 0.00005, já que o valor exato é  $\psi(1) = 0.63855$ . No Runge-Kutta, para o mesmo  $h = 0.1$ , o erro absoluto é 0.00001. Portanto, ainda não vale a pena utilizar o método de *Adams-Bashforth*, já que ele não é tão eficaz quanto o Runge-Kutta. E por conta dessa eficácia não tão boa, que o *Adams-Moulton* surge para corrigir, Adams-Bashforth prevê e Adams-Moulton corrige, juntos eles formam o método de *previsão e correção*.

### 3.1.2 Método de Adams - Moulton

A fórmula de *Adams-Moulton* é uma variação da fórmula de *Adams-Bashforth*, com a diferença de que essa é do tipo implícita. Para a dedução, utilizamos um método bem parecido. Faremos para o polinômio de grau 1 e, para polinômios de maiores graus, as contas serão análogas. Consideremos

$$P_1(t) = \alpha t + \beta, \quad (3.5)$$

mas agora, para acharmos  $\alpha$  e  $\beta$  tomemos os pontos  $(t_n, x_n)$  e  $(t_{n+1}, x_{n+1})$ . Assim,

$$\begin{cases} \alpha t_n + \beta = f_n & \text{(I)} \\ \alpha t_{n+1} + \beta = f_{n+1} & \text{(II)}. \end{cases}$$

De (I) segue que

$$\beta = f_n - \alpha t_n \quad \text{(III)}.$$

Substituindo este valor em (II), concluímos que

$$\begin{aligned} \alpha t_{n+1} + \beta &= f_{n+1} \\ \alpha t_{n+1} + f_n - \alpha t_n &= f_{n+1} \\ \alpha(t_{n+1} - t_n) &= f_{n+1} - f_n \\ \alpha &= \frac{f_{n+1} - f_n}{h}. \quad \text{(IV)} \end{aligned}$$

Substituindo (IV) em (III), obtemos:

$$\begin{aligned} \beta &= f_n - \alpha t_n \\ \beta &= f_n - \left( \frac{f_{n+1} - f_n}{h} \right) t_n \\ \beta &= \frac{f_n(t_{n+1} - t_n) - f_{n+1}t_n + f_n t_n}{h} \\ \beta &= \frac{f_n t_{n+1} - f_{n+1} t_n}{h}. \end{aligned}$$

Agora, trocando  $\psi'(t)$  da equação (3.1) pelo polinômio (3.5) e calculando a integral, temos:

$$\begin{aligned} \psi(t_{n+1}) - \psi(t_n) &= \frac{\alpha(t_{n+1}^2 - t_n^2)}{2} + \beta(t_{n+1} - t_n) \\ \psi(t_{n+1}) - \psi(t_n) &= \frac{(f_{n+1} - f_n)(t_{n+1} - t_n)(t_{n+1} + t_n)}{2h} + \frac{(f_n t_{n+1} - f_{n+1} t_n)(t_{n+1} - t_n)}{h} \\ \psi(t_{n+1}) - \psi(t_n) &= \frac{(f_{n+1} - f_n)(t_{n+1} + t_n)}{2} + f_n t_{n+1} - f_{n+1} t_n \\ \psi(t_{n+1}) - \psi(t_n) &= \frac{1}{2}(f_{n+1} t_{n+1} + f_{n+1} t_n - f_n t_{n+1} - f_n t_n) + f_n t_{n+1} - f_{n+1} t_n \\ \psi(t_{n+1}) - \psi(t_n) &= \frac{1}{2}(f_{n+1} t_{n+1} - f_{n+1} t_n + f_n t_{n+1} - f_n t_n) \\ \psi(t_{n+1}) - \psi(t_n) &= \frac{1}{2} f_{n+1} (t_{n+1} - t_n) + \frac{1}{2} f_n (t_{n+1} - t_n) \\ \psi(t_{n+1}) - \psi(t_n) &= \frac{1}{2} f_{n+1} h + \frac{1}{2} f_n h. \end{aligned}$$

Ao substituir  $\psi(t_i)$  por  $x_i$ , obtemos a fórmula de Adams-Moulton de segundo grau:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n). \quad (3.6)$$

Como se pode observar, essa fórmula é implícita tendo em ambos os lados da igualdade uma incógnita  $x_{n+1}$ . De forma análoga se obtém o método de quinto grau, que é o mais conhecido e preciso por ter um erro de truncamento de quinta ordem, proporcional a  $h^5$ . Sua fórmula é dada por:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}). \quad (3.7)$$

**Exemplo 3.2.** Utilizaremos a fórmula (3.7) para resolver o mesmo problema de valor inicial tratado no Exemplo (3.1), utilizando um passo  $h = 0.1$  e calculando o valor de  $x_n$  até  $t = 1$ .

Para aplicarmos a fórmula, é necessário conhecer a priori três valores. Sejam eles:  $f_7, f_8$  e  $f_9$ . Para conhecê-los, usaremos o método de Runge-Kutta de quarto grau. Consultando a Tabela 3.1, temos os valores procurados. Então, colocando-os na fórmula, obtemos:

$$\begin{aligned} x_{10} &= 0.737179 + \frac{0,1}{24}(9f_{10} + 19(-1.067788) - 5(-1.256940) + (-1.482999)) \\ x_{10} &= 0.672652 + 0.0375f_{10} \\ x_{10} &= 0.672652 + 0.0375(e^{-1} - 2x_{10}) \\ x_{10} &= 0.686448 - 0.075x_{10} \\ 1.075 \cdot x_{10} &= 0.686448 \\ x_{10} &= 0.638556 \end{aligned}$$

Este método é mais preciso que o Adams-Bashforth. Levando em consideração que a solução exata  $\psi(1) = 0.638550$ , temos que o erro absoluto para Adams-Moulton nesse

passo é 0.000006, enquanto o erro obtido pelo método de Adams-Bashforth é 0.000056 e o obtido pelo método de Runge-Kutta é 0.000010. Tanta precisão vem acompanhada de um esforço, já que temos a inconveniência de resolver uma equação a cada passo. É preciso decidir se vale a pena o esforço perante a precisão que se obterá. Diante disso, foi implementado o método de *previsão e correção* que basicamente tentou combinar precisão e menos esforço computacional. As generalizações dos métodos de Adams-Moulton e Adams-Bashforth podem ser consultadas em [13].

## 3.2 Método de previsão e correção

Este método é uma combinação da fórmula de Adams-Bashforth e Adams-Moulton de quarto grau. Portanto, é necessário conhecer a priori quatro pontos:

$$(t_{n-3}, x_{n-3}), (t_{n-2}, x_{n-2}), (t_{n-1}, x_{n-1}) \text{ e } (t_n, x_n).$$

Com estes pontos conhecidos é possível calcular  $f_{n-3}, f_{n-2}, f_{n-1}$  e  $f_n$ . Utilizando a fórmula de Adams-Bashforth (3.4), conseguimos estimar o valor de  $x_{n+1}$ . Usando este valor encontrado, calculamos  $f_{n+1}$  e colocamos no método de Adams-Moulton (3.7), corrigindo o valor de  $x_{n+1}$ . Dessa forma não teremos mais um método implícito. Vejamos tal método sendo utilizado em um exemplo prático, o Exemplo 3.1.

**Exemplo 3.3.** No Exemplo 3.1 calculamos  $x_{10} = 0.6386$  para  $h = 0.1$ , utilizando Adams-Bashforth 3.4. Assim,  $f_{10} = e^{-1} - 2 * 0.6386 = -0.9093$ . Tomando os valores da Tabela 3.1 e o valor de  $f_{10}$ , colocamos na fórmula de Adams-Moulton (3.7) para a correção e obtemos:

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_{10} + \frac{0.1}{24}(9f_{10} + 19f_9 - 5f_8 + f_7) \\ x_{10} &= 0.6386 + \frac{0.1}{24}(9(-0.9093) + 19(-1.0678) - 5(-1.2569) - 1.4830) \\ x_{10} &= 0.63855 \end{aligned}$$

Com relação a equação exata, este método tem um erro absoluto de 0.000002, isto é, para este passo  $h = 0.1$ , o método de previsão e correção fica em torno de 20 vezes mais preciso que o método do Adams-Moulton, e ainda com a vantagem de não ser um método implícito. Outra vantagem deste método é a possibilidade de iterar o mesmo  $x_n$  diversas vezes para conseguir uma melhor precisão no ponto  $t$  desejado.

## 4 Convergência

Uma das propriedades mais básicas de um método numérico para encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais ordinárias é a precisão. Toda vez que calculamos soluções aproximadas, precisamos saber se o método usado é capaz de nos fornecer uma solução mais próxima da exata, caso desejarmos. Vejamos, pois, a definição de convergência.

**Definição 4.1.** (*Convergência*) Um método numérico de passo único é dito convergente se, para qualquer  $t \in [a, b]$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |x_n - \psi(t)| = 0,$$

com  $nh = t - a$ , onde  $x_n$  é a solução obtida pelo método e  $\psi(t)$  é a solução da equação diferencial ordinária.

Intuitivamente podemos dizer que um método numérico é convergente quando a solução  $x_n$  obtida pelo método se aproxima ponto a ponto da solução exata da equação diferencial ordinária  $\psi(t)$ , quando o tamanho do passo  $h$  tende a zero.

**Exemplo 4.1.** Variando o tamanho do passo  $h$ , vamos estimar a solução  $\psi(t)$  para o PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t} - 2x \\ x(0) = 3, \end{cases}$$

utilizando os métodos de Euler e Euler melhorado.

Construímos, então, a Tabela 4.1 para podermos visualizar o erro em cada método para o mesmo ponto. Tomaremos sempre  $t = 1$ .

| h    | n  | Euler    | Euler Melhorado | Erro Euler | Erro Euler Melhorado |
|------|----|----------|-----------------|------------|----------------------|
| 0,5  | 2  | 0.303265 | 0.917786        | 0.335285   | 0.279236             |
| 0,25 | 4  | 0.461333 | 0.767561        | 0.177217   | 0.129010             |
| 0.2  | 5  | 0.498555 | 0.739293        | 0.139995   | 0.100743             |
| 0.1  | 10 | 0.570608 | 0.686499        | 0.067942   | 0.047949             |
| 0.05 | 20 | 0.605122 | 0.661941        | 0.033428   | 0.023391             |

Tabela 4.1: Ordem de convergência.

Note que, à medida que o passo  $h$  diminui, cada método obtém uma melhor aproximação. Além disso, a cada valor menor de  $h$ , o método de Euler melhorado nos fornece uma melhor aproximação. Isto está relacionado com a ordem de convergência de cada método.

**Definição 4.2.** (*Ordem de Convergência*) Considere a solução de uma equação diferencial no ponto  $t = t_n$  e a solução aproximada  $x_n$ , pelo método, neste ponto. Dizemos que a ordem de convergência é  $p$  se existir uma constante  $C$  tal que:

$$|x_n - \psi(t_n)| < Ch^p.$$

A ordem de convergência é uma maneira de quantificar a rapidez com a qual a solução numérica obtida por um método se aproxima da solução exata. Conforme  $h$  tende a zero, o termo  $O(h^p)$ , que na verdade é o erro de truncamento local, tende a zero com a mesma rapidez que  $h^p$ . Por exemplo, o método de Euler tem ordem 2 (veja (2.10)), o método de Euler melhorado tem ordem 3 (veja (2.18)), o método de Runge-Kutta de 3º grau tem ordem 4 (veja (2.21)) e o método de Runge-Kutta de 4º grau tem ordem 5 (veja (2.22)). Assim, o método de Runge-Kutta de 4º grau aproxima mais rápido a solução numérica da solução exata do que os outros métodos supracitados. Para mais detalhes, sugerimos ao leitor que consulte a referência [14].

**Exemplo 4.2.** Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = 0.3x \\ x(0) = 3 \end{cases} \quad (4.1)$$

que tem como solução  $\psi(t) = 3e^{0.3t}$ , para  $t \geq 0$ . Mostraremos que o Método de Euler é convergente utilizando a definição de convergência.

Primeiramente, precisamos deduzir a equação de diferença. Do método de Euler, temos:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n).$$

Assim, para  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h(0.3x_0) \\ x_1 &= x_0(1 + 0.3h). \end{aligned}$$

Para  $n = 2$ :

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + h(0.3x_1) \\x_2 &= x_1(1 + 0.3h) \\x_2 &= x_0(1 + 0.3h)^2.\end{aligned}$$

Dessa forma deduzimos a equação de diferença para o PVI (4.1):  $x_n = 3(1 + 0, 3h)^n$ . Podemos, então, provar a convergência do método para este PVI utilizando a definição de convergência (Definição 4.1), com  $a = 0$  e  $nh = t$  (ou seja,  $n = t/h$ ). Calculemos o limite de  $|x_n|$  quando  $h$  tende a 0:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} |x_n| &= \lim_{h \rightarrow 0} |3(1 + 0, 3h)^n| \\&= \lim_{h \rightarrow 0} |3(1 + 0, 3h)^{\frac{t}{h}}| \\&= 3 \left| \lim_{h \rightarrow 0} (1 + 0, 3h)^{\frac{t}{h}} \right| \\&= 3e^{0.3t}.\end{aligned}$$

Como a solução do PVI é dada também por  $\psi(t) = 3e^{0.3t}$ , obtemos a convergência.

**Observação 4.1.** A definição de convergência para métodos de passos múltiplos é similar a utilizada para métodos de passo único (Definição 4.1).

Observe que, no Exemplo (4.1), para usar a definição de convergência foi preciso conhecer a solução exata do problema de valor inicial e também calcular sua equação de diferença. Isso não é sempre possível. Entretanto, estudando a estabilidade e a consistência de métodos numéricos, conceitos estes não explorados neste trabalho, também é possível investigar a convergência dos mesmos. Indicamos as referências [18] e [12] para este estudo.

# 5 Aplicação em um modelo matemático

Um modelo matemático é uma representação ou interpretação simplificada da realidade. Um modelo apresenta apenas uma visão ou cenário de um fragmento do todo. Normalmente, para estudar um determinado fenômeno complexo, criam-se vários modelos. Os modelos matemáticos são utilizados em várias áreas científicas, como, por exemplo, nas áreas de: biologia, química, física, economia, engenharia e matemática pura.

O ato de modelar, conhecido como modelagem, pode ser aplicado a um grande número de problemas. Por exemplo, o estudo da análise ambiental nas proximidades de um rio, a forma da asa de um avião, um sistema econômico, uma cultura agrícola, um estudo populacional, um estudo físico, e até mesmo um sistema matemático como o conjunto dos números naturais. Neste capítulo não nos atentaremos a modelagem, mas utilizaremos os métodos estudados nos capítulos precedentes em um exemplo real para tirarmos conclusões baseadas na realidade do problema proposto.

## 5.1 Estudo da decomposição de matéria orgânica antropogênica em um rio

Os corpos hídricos são o destino final dos esgotos sanitários e industriais em quase todo o mundo. Além de ser um canal que leva os resíduos para longe, os rios, riachos ou mares contemplam de uma característica natural: capacidade de autodepuração. Isto é, quando se é jogado lixo orgânico em um riacho, uma demanda bioquímica de oxigênio é exercida, isto quer dizer que a decomposição bacteriana do lixo utiliza oxigênio. Esse oxigênio que está dissolvido na água é reabastecido por difusão através da interface ar-água, processo denominado re-aeração. Se existe um ponto de esgoto in natura jogado em um rio com fluxo uniforme estacionário sendo considerado, um padrão de oxigênio dissolvido é observado. Logo abaixo do canal do emissário de resíduos a quantidade de oxigênio dissolvido cai por conta da demanda de bioquímica. Como a decomposição do lixo prossegue, a bioquímica é diminuída pela falta de oxigênio e a

re-aeração atmosférica reabastece a quantidade de oxigênio dissolvido. Assim, com esse processo acontecendo, o oxigênio dissolvido tende a ir diminuindo rio abaixo, até chegar em um valor crítico, mínimo e, em seguida, volta gradualmente às condições ambientais ou não. O processo pode ser modelado e sua forma é de uma equação ordinária.

Basicamente, esta ferramenta fornece a visualização do comportamento do corpo d'água em relação à quantidade de oxigênio dissolvido ao longo de seu curso ou do tempo após a recepção do esgoto. Para essa visualização utiliza-se como referência um limite mínimo de oxigênio dissolvido, para ser feita a análise e poder determinar qual o nível de tratamento é necessário ao esgoto antes deste ser lançado. Caso nenhum atenda as condições legais locais, precisa-se encontrar outro corpo receptor.

A forma inicial deste modelo, conhecido por Streeter-Phelps, foi proposta em 1925 por Harold Warner Streeter e Earle Bernard Phelps a partir de um estudo do processo de oxidação e aeração no Rio Ohio nos Estados Unidos com base em dados obtidos de maio de 1914 a abril de 1915. Outras versões mais complexas já foram desenvolvidas por conta do avanço tecnológico e a possibilidade de realizar contas em computadores, envolvendo variáveis como fotossíntese, respiração e demanda bentônica de oxigênio.

Este é um problema complexo, repleto de variáveis e compostos químicos. Para um maior entendimento, sugerimos a leitura do trabalho de Streeter-Phelps [17].

De acordo com o estudo apresentado em [17], a taxa de mudança no deficit de oxigênio é regida por duas reações independentes. Em primeiro lugar, o deficit aumenta a uma velocidade que pode ser considerada proporcional à exigência de oxigênio da matéria orgânica. Em segundo lugar, diminui o re-arejamento a uma velocidade diretamente proporcional. As duas doses podem ser expressas por:

$$\frac{dD_1}{dt} = K_1 L \quad (5.1)$$

$$\frac{dD_2}{dt} = -K_2 D \quad (5.2)$$

com

$$\frac{-dL}{dt} = K_1 L,$$

donde, pelo Exemplo 1.1, visto na Seção 1.2.1:

$$L = L_0 e^{-K_1 t}.$$

Sendo (5.1) a taxa de desoxigenação em termos do deficit de saturação de oxigênio e (5.2) a taxa de re-aeração, também em termos da diminuição da saturação de oxigênio, representado pela letra  $D$  em partes por milhões. Já  $L$  é a variável da demanda de oxigênio que a matéria orgânica necessita. O tempo  $t$  nessa fórmula é considerado em dias.  $K_1$  e  $K_2$  são constantes que definem a taxa de desoxigenação e re-aeração, respectivamente.

Agora, a equação que modela a concentração  $D$  de oxigênio dissolvido é:



$$\frac{dD}{dt} = \left( \frac{dD_1}{dt} \right) + \left( \frac{dD_2}{dt} \right), \quad (5.3)$$

portanto,

$$\frac{dD}{dt} = K_1 L - K_2 D. \quad (5.4)$$

A equação (5.4) é linear e tem solução exata, a saber:

$$D(t) = \frac{K_1}{K_2} (L_0 e^{-K_1 t}) + C e^{-K_2 t},$$

sendo  $D_0$  a taxa inicial de saturação de oxigênio presente na água, em partes por milhões e  $L_0$  a demanda inicial de oxigênio requisitado pela matéria orgânica, levando em consideração  $t = 0$ .  $C$  é a constante de integração, que dependerá da condição inicial dada. Para podermos conhecer  $C$ , considere os seguintes valores, retirados de Silva, 2004 [15] :

- $K_1 = 0.4$  por dia
- $K_2 = 0.2$  por dia
- $D_0 = 7.6$  mg/L
- $L_0 = 300$  mg/L

De (5.4), obtemos o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dD}{dt} = 120e^{-0.4t} - 0,2D \\ D(0) = 7.6 \end{cases}$$

Como este é um problema com condição inicial, então  $C = 607.6$  e a solução exata sob estas condições é:

$$D(t) = -600e^{-0.4t} + 607.6e^{-0.2t}.$$

## 5.2 Utilizando os métodos numéricos

Utilizando os métodos estudados nos capítulos anteriores, vamos resolver o problema proposto.

Utilizaremos para cada método  $h = 0.1$  e calcularemos a quantidade de oxigênio dissolvido na água para o 5<sup>o</sup> dia.

### 5.2.1 Método de Euler

Para aplicarmos o método de Euler, utilizamos a fórmula:

$$D_{n+1} = D_n + hf(t_n, D_n).$$

Obtemos, então, os valores obtidos na Tabela 5.1:

| <b>n</b> | <b>t<sub>n</sub></b> | <b>D<sub>n</sub></b> | <b>f(t<sub>n</sub>, D<sub>n</sub>)</b> | <b>EXATA</b> | <b>Erro Absoluto</b> |
|----------|----------------------|----------------------|--|--------------|----------------------|
| 0        | 0                    | 7.600000             | 118.480000                             | 7.600000     | 0.000000             |
| 10       | 1                    | 97.879806            | 60.862444                              | 95.268778    | 2.611028             |
| 20       | 2                    | 141.423202           | 25.634835                              | 137.689082   | 3.734121             |
| 30       | 3                    | 156.743063           | 4.794693                               | 152.741423   | 4.001640             |
| 40       | 4                    | 155.680984           | -6.908615                              | 151.874368   | 3.806616             |
| 50       | 5                    | 145.710563           | -12.901879                             | 142.322379   | 3.388184             |

Tabela 5.1: Método de Euler.

### 5.2.2 Método de Euler melhorado

Para aplicarmos o método de Euler melhorado, utilizamos as fórmulas:

$$D'_{n+1} = D_n + hf(t_n, D_n), \quad (5.5)$$

$$D_{n+1} = D_n + h \left[ \frac{f(t_n, D_n) + f(t_{n+1}, D'_{n+1})}{2} \right]. \quad (5.6)$$

Utilizando (2.14) e (2.15), construímos a Tabela 5.2:

| <b>n</b> | <b>t<sub>n</sub></b> | <b>D<sub>n</sub></b> | <b>f(t<sub>n</sub>, D<sub>n</sub>)</b> | <b>EXATA</b> | <b>Erro Absoluto</b> |
|----------|----------------------|----------------------|--|--------------|----------------------|
| 0        | 0                    | 7.600000             | 118.480000                             | 7.600000     | 0.000000             |
| 10       | 1                    | 95.136080            | 61.411190                              | 95.268778    | 0.132698             |
| 20       | 2                    | 137.264670           | 26.466542                              | 137.689082   | 0.424411             |
| 30       | 3                    | 151.990313           | 5.745243                               | 152.741423   | 0.751109             |
| 40       | 4                    | 150.825993           | -5.937616                              | 151.874368   | 1.048375             |
| 50       | 5                    | 141.035016           | -11.966769                             | 142.322379   | 1.287363             |

Tabela 5.2: Método de Euler melhorado.

### 5.2.3 Método de Runge-Kutta de quarto grau

Para aplicarmos o método de Runge-Kutta de quarto grau, utilizamos a fórmula:

$$D_{n+1} = D_n + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4], \quad (5.7)$$

com

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, D_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, D_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, D_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t_n + h, D_n + hk_3) \end{cases}$$

Utilizando (5.7), construímos a Tabela 5.3:

| <b>n</b> | <b>t<sub>n</sub></b> | <b>D<sub>n</sub></b> | <b>f(t<sub>n</sub>, D<sub>n</sub>)</b> | <b>EXATA</b> | <b>Erro Absoluto</b> |
|----------|----------------------|----------------------|--|--------------|----------------------|
| 0        | 0                    | 7.600000             | 118.480000                             | 7.600000     | 0.0000000000         |
| 10       | 1                    | 95.268778            | 61.384650                              | 95.268778    | 0.0000003104         |
| 20       | 2                    | 137.689081           | 26.381659                              | 137.689082   | 0.0000004422         |
| 30       | 3                    | 152.741422           | 5.595021                               | 152.741423   | 0.0000004717         |
| 40       | 4                    | 151.874367           | -6.147291                              | 151.874368   | 0.0000004463         |
| 50       | 5                    | 142.322378           | -12.224242                             | 142.322379   | 0.0000003947         |

Tabela 5.3: Método de Runge-Kutta de quarto grau.

Informamos que a coluna referente ao erro absoluto, para a Tabela 5.3, está com aproximação de dez casas decimais, para podermos visualizar os pequenos erros deste método.

### 5.2.4 Método de previsão e correção

Vimos que o método da previsão e correção é um método de passos múltiplos explícito, isto é, precisamos conhecer alguns pontos iniciais para darmos início às iterações. Ele é composto por duas fórmulas famosas: Adams-Bashforth e Adams-Moulton, ambas de quarto grau, sendo a primeira explícita e a segunda implícita.

$$\text{Adams-Bashforth} - D_{n+1} = D_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 32f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$$\text{Adams-Moulton} - D_{n+1} = D_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}).$$

Para começarmos as iterações, consideremos quatro pontos conhecidos por já terem sido estimados com o método de Runge-Kutta de quarto grau:

| <b>n</b> | <b>t<sub>n</sub></b> | <b>D<sub>n</sub></b> | <b>f(t<sub>n</sub>, D<sub>n</sub>)</b> |
|----------|----------------------|----------------------|--|
| 0        | 0                    | 7.6                  | 118.48                                 |
| 1        | 0.1                  | 19.09505037          | 111.4757226                            |
| 2        | 0.2                  | 29.90585532          | 104.7927905                            |
| 3        | 0.3                  | 40.06386846          | 98.41767871                            |

Tabela 5.4: Quatro primeiras iterações utilizando o método de Runge-Kutta de quarto grau.

Vamos usar a fórmula de Adams-Bashforth para calcular o valor de  $D$  até o passo 50, que é quando o tempo atinge 5 dias, lembrando que  $h = 0.1$ . Depois corrigiremos os valores encontrados, usando a fórmula de Adams-Moulton. Assim, temos a seguinte tabela:

| $n$ | $t_n$ | $D_n$      | $f(t_n, D_n)$ | EXATA      | Erro Absoluto |
|-----|-------|------------|---------------|------------|---------------|
| 0   | 0     | 7.600000   | 118.480000    | 7.600000   | 0.000000      |
| 10  | 1     | 95.669573  | 61.304491     | 95.268778  | 4.007951      |
| 20  | 2     | 139.307328 | 26.058010     | 137.689082 | 1.618246      |
| 30  | 3     | 155.689708 | 5.005364      | 152.741423 | 2.948285      |
| 40  | 4     | 155.900374 | -6.952493     | 151.874368 | 4.026006      |
| 50  | 5     | 147.037320 | -13.167230    | 142.322379 | 4.714941      |

Tabela 5.5: Método de previsão e correção de quarto grau.

### 5.2.5 Conclusões

Para o método de Euler, com  $h = 0.1$ , tivemos um grau de precisão bom, pelo menos até o tempo de 5 dias. A título de exemplificação, colocaremos apenas este gráfico, já que, nos outros, quase não se nota diferença entre a solução real e a aproximada.

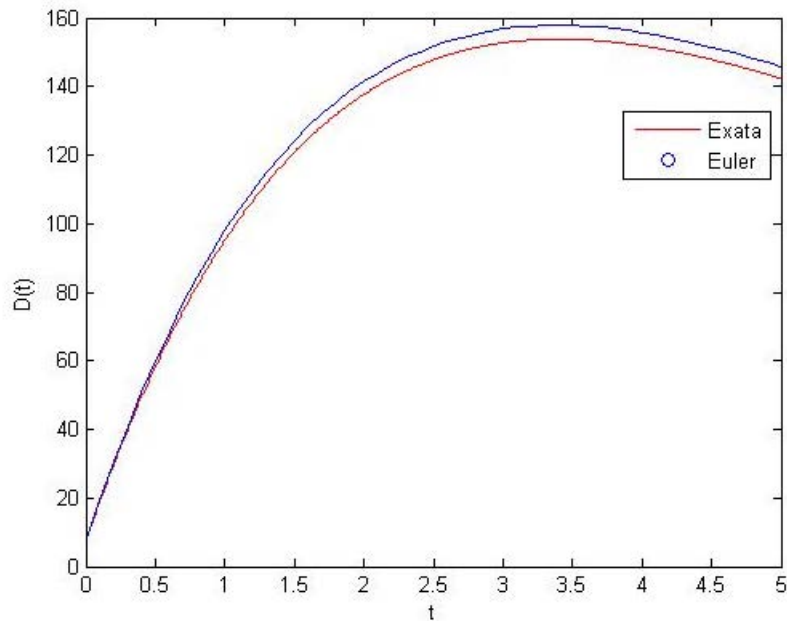


Figura 5.1: Gráfico do problema de demanda bioquímica de oxigênio, usando Euler com  $h = 0.1$ .

Vale a pena tentar interpretar os resultados obtidos com a solução desse problema. A demanda bioquímica de oxigênio para um rio é de essencial importância para a vida do mesmo. Existe um limite permitido, mínimo e máximo, dessa demanda. Antes de colocar uma saída de resíduos em um rio, este estudo é vital. Enfatizando que, para o nosso caso, o problema foi simplificado o suficiente para ser possível encontrar a solução exata. Utilizando o método de Euler e um passo  $h = 1$  fizemos os cálculos para  $t$  igual a 50 dias. Vale ressaltar que uma fonte de resíduos fica em um rio durante anos, justificando a importância do estudo da demanda bioquímica para que o rio consiga se recuperar e continue com vida.

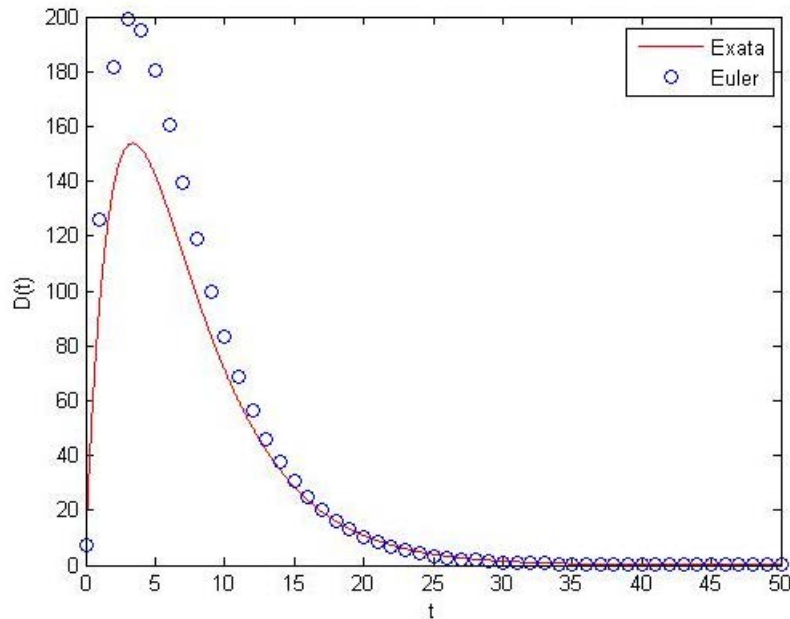


Figura 5.2: Gráfico do problema de demanda bioquímica de oxigênio, usando Euler com  $h = 1$ .

Notemos que a demanda bioquímica de oxigênio começa aumentar muito já que existe matéria orgânica sendo acrescentada na água necessitando de decomposição. Porém, essa demanda atinge um limite máximo, pois cada corpo d'água reage de uma forma diferente que depende de temperatura, tipo e quantidade de resíduos, fator re-aeração entre outros. Depois de atingido esse limite, a demanda bioquímica começa a diminuir e é com essa diminuição que se deve tomar cuidado. Quando a demanda ficar igual zero, significa que o corpo d'água não tem mais microorganismos vivos capazes de praticar decomposição, isto é, o rio está morto. É claro que neste caso estamos levando em conta apenas os fatores de desoxigenação, causado pelo maior uso de oxigênio para decompor os resíduos e a re-aeração, processo de difusão que ocorre entre o ar e a água. É preciso buscar um equilíbrio para que o rio não chegue a níveis críticos.

Exemplificando o parágrafo a cima, consideremos que a constante  $K_1$  referente a desoxigenação diminua em quatro vezes, ou seja,  $K_1 = 0.1$  e a constante responsável pelo fator re-aeração quadruple,  $K_2 = 0.8$ . Vejamos o que acontece com o modelo em 50 dias, no Gráfico 5.3.

Vejamos que, no Gráfico 5.3, a demanda bioquímica de oxigênio teve sua queda mais suave, comparada ao Gráfico 5.2. Neste caso, a vida do riacho foi prolongada em alguns dias.

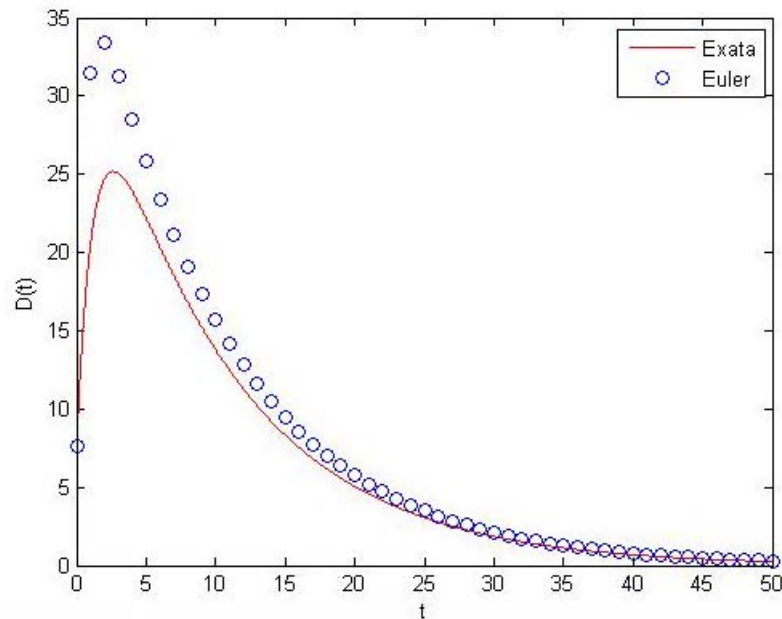


Figura 5.3: Gráfico depois de alteradas as constantes  $K_1$  e  $K_2$  do problema de demanda bioquímica de oxigênio, usando Euler com  $h = 1$ .

### 5.3 Considerações Finais

A grande quantidade de cálculos e a complexidade de problemas de modelagem matemática não podem ser facilmente resolvidos sem a ajuda de processos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias, já que na maioria das vezes a solução exata não é simples de ser encontrada. Depois do aparecimento do primeiro computador, é que estes métodos começaram a ser usados de maneira sistemática.

A escolha do método numérico para resolver um problema matemático depende de vários fatores, entre eles:

- qual precisão se espera;
- quão longe se deseja conhecer a solução;
- esforço computacional necessário.

A obtenção de uma solução numérica para a um problema físico por meio da aplicação de métodos numéricos nem sempre fornece valores que se encaixam dentro de limites razoáveis. Os erros irão acontecer, independente se o método usado é o adequado e os cálculos estão corretos. Temos aqueles erros chamados inerentes, porque, em geral, um modelo matemático é uma adaptação da realidade, em que é necessário impor algumas restrições. Temos os erros de truncamento provenientes do método numérico, e ainda, o erro computacional, já que os computadores atuais utilizam apenas um número finito de dígitos para representar os números reais.

O tamanho do passo  $h$  deve ser cuidadosamente escolhido. Se  $t$  for um número grande, o esforço computacional para chegar até ele será grande e os erros acumulados nesse processo, também. No exemplo que estudamos neste capítulo, foi forçadamente simplificado, para conseguirmos analiticamente uma solução exata e dessa forma calcularmos os erros em cada método. Observe a Tabela 5.6 com a coluna dos erros cometidos em cada método. Vale recordar que o erro absoluto é o módulo da diferença entre a solução exata e a solução encontrada pelo método numérico.

| <b>n</b> | <b>t<sub>n</sub></b> | <b>Euler</b> | <b>Euler melhorado</b> | <b>Runge-Kutta</b> | <b>Previsão e Correção</b> |
|----------|----------------------|--------------|------------------------|--------------------|----------------------------|
| 0        | 0                    | 0            | 0                      | 0                  | 0                          |
| 10       | 1                    | 2.611028     | 0.132698               | 0.0000003104       | 0.400795                   |
| 20       | 2                    | 3.734121     | 0.424411               | 0.0000004422       | 1.618246                   |
| 30       | 3                    | 4.001640     | 0.751109               | 0.0000004717       | 2.948285                   |
| 40       | 4                    | 3.806616     | 1.048375               | 0.0000004463       | 4.026006                   |
| 50       | 5                    | 3.388184     | 1.287363               | 0.0000003947       | 4.714941                   |

Tabela 5.6: Erros obtidos em cada método.

É visível o quanto o método de quarto grau de Runge-Kutta é eficaz. Seu erro não se acumula conforme aumenta as iterações, diferente dos outros métodos estudados. Para um problema com poucas iterações talvez não valha a pena perder tanto tempo com o Runge-Kutta, que precisa de cinco cálculos de valores em cada iteração. O método de previsão e correção precisa de apenas dois, sendo um cálculo referente ao método de Adams-Bashforth e o outro de Adams-Moulton. Os métodos de passos múltiplos acabam ganhando força pelo simples fato de que neles é mais fácil estimar o erro em cada passo e assim ajustar facilmente a ordem da fórmula usada e o tamanho do passo  $h$ .

A escolha do método para resolver um problema de modelagem envolve um equilíbrio nas questões de precisão e o esforço computacional, isto é, o tempo gasto para executar cada iteração. Um método implícito, como o Adams-Moulton, exige um grande esforço em cada passo, em contrapartida é um método estável e preciso, que permite o uso de um tamanho  $h$  maior e, conseqüentemente, um número menor de iterações.

# Referências

- [1] Atkinson, K. E. *An introduction to numerical analysis*. John Wiley e Sons, Canadá, 1978.
- [2] Bassanezi, R. C., Ferreira Jr., W., *Equações Diferenciais com Aplicações*. Editora Harbra Ltda, São Paulo, 1988.
- [3] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8ª edição, LTC Editora , 2002.
- [4] Burden, R. L., Faires, J. D. *Numerical Analysis*. Fifth Edition, 1993.
- [5] Cocô, K. , Gobira A., Reis J. *Estudo de zonas de não conformidade em corpos D'água usando um modelo bidimensional de qualidade de água*. XIX Simpósio Brasileiro de recursos hídricos.
- [6] Griffiths, D. F., Higham, D. J., *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations: Initial Value Problems*, Springer, 2010.
- [7] Hairer, E.; Wanner, G., *Solving Ordinary Differential Equations II*, Second Revised Edition, Springer, 2010.
- [8] Hale, J. K., *Ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, Malabar, Florida, 1969.
- [9] Hirsch, C., *Numerical Computation Of Internal e External Flows, Vol. 1 - Fundamentals of Numerical Discretization*, Second edition. John Wiley & Sons, Brussels, Belgium, 1988.
- [10] Lima, E. L., *Curso de Análise - Volume 1*, Projeto Euclides, IMPA, 7ª edição, 1976.
- [11] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro: IMPA, Col. Proj. Euclides, 1977.
- [12] Richtmyer, R. D., Morton, K. W. *Difference Methods for Initial Value Problems*, Second Edition. John Wiley & Sons, Abingdon, England, 1967.



- 
- [13] Seidu, B. *A Matrix System for Computing the Coefficients of the Adams Bashforth-Moulton Predictor-Corrector formulae*, International Journal of Computational and Applied Mathematics. Volume 6, Number 3 (2011), p. 215-220.
- [14] Seperandio, D., Mendes, J. T., Silva, L. H. M., *Cálculo Numérico - Características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos*. Prentice Hall, São Paulo, 2003.
- [15] Silva, R. C., *Avaliação das constantes cinéticas envolvidas na modelagem das concentrações de oxigênio dissolvido em rios com aplicação da Programação Não-Linear*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Tecnologia em Saneamento Ambiental). Instituto Federal do Espírito Santo, 2004.
- [16] Sotomayor, Jorge, *Equações diferenciais Ordinárias*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2011.
- [17] Streeter, H. W.; Phelps, Earle B., *A Study of the Pollution and Natural Purification of the Ohio River*. U.S. Department of Health, Education & Welfare, Washington, D.C., 1925.
- [18] Strikwerda, J. C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equation*. Second Edition. Siam, 1989.

# Apêndice

Neste capítulo de caráter complementar, exibiremos a programação utilizada para a confecção dos gráficos em todo o trabalho. O software utilizado foi o *MATLAB*®. Informamos que a programação dentro do mesmo método varia as entradas, a equação ordinária a ser usada, bastando mudar apenas a função  $f$  dentro do programa e inserir o número de intervalos desejados para que o programa calcule o tamanho do passo  $h$ .

- Figura 2.4 e Figura 2.5

```
% método Euler para a EDO  $x' = \exp(-t) - 2x$ 
% Condicao Inicial:  $x(0) = 3$ 
% Condicao Inicial
t(1)=0;
x(1)=3;
n = input('Número de intervalos:');
tf = input('Valor máximo de t:');
h=(tf - t(1)) / n;
for i=1:n
    f(i)=exp(-t(i))-2*x(i);
    t(i+1)=t(i) + h;
    x(i+1) = x(i) + h*f(i);
end
% Calculo da solução exata:
te=0:0.01:tf;
xe = exp(-te) +2*exp(-2*te);
% Gráfico comparativo: solução por Euler e a solução exata
plot(te,xe,'-r',t,x,'ob');
```

- Figura 2.7

```
% método Euler Melhorado para a EDO  $x' = \exp(-t) - 2x$ 
% Condicao Inicial:  $x(0) = 3$ 
t(1)=0;
```

```

x(1)=3;
h = input('Numero de intervalos: ');
tf = input('Valor máximo de t:');
n = floor((tf - t(1)) / h + 1);
for i=1:n-1
    t(i+1)=t(i) + h;
    k1 = exp(-t(i))-2*x(i);
    k2 = exp(-t(i) + h)-2*(x(i) + h*k1);
    x(i+1) = x(i) + h/2*(k1 + k2);
end
% Calculo da solução exata:
te=0:0.01:tf;
xe = exp(-te) + 2*exp(-2*te);
% Gráfico comparativo: solução por Euler Melhorado e a solução exata
plot(te,xe,'-r',t,x,'ob');
xlabel('t'); ylabel('x(t)');
legend('Exato', 'Euler Melhorado');

```

• Figura 2.8

```

% método Runge-Kutta 4ª ordem para o PVI  $x' = \exp(-t) - 2x$ ,  $x(0) = 3$ 
t(1)=0;
x(1)=3;
h=0.1;
tf=1;
n=floor((tf-t(1))/h+1);
for i=1:n-1
    t(i+1)=t(i)+h;
    k1=exp(-t(i))-2*x(i);
    k2=exp(-t(i)-h/2)-2*(x(i)+h/2*k1);
    k3=exp(-t(i)-h/2)-2*(x(i)+h/2*k2);
    k4=exp(-t(i)-h)-2*(x(i)+h*k3);
    x(i+1)=x(i)+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end
te=0:0.01:tf;
xe=exp(-te)+2*exp(-2*te);
plot(t,x,'ob',te,xe,'-r');
xlabel('t'); ylabel('x(t)');
legend('Runge-Kutta 4ª ordem', 'Exata');

```