



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Um estudo da Geometria Projetiva Elíptica

**Andrea Ferreira Faccioni de Andrade**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Matemática como requi-  
sito parcial para a obtenção do grau de Mes-  
tre

Orientadora  
**Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi**

**2015**

516.5 Andrade, Andrea Ferreira Faccioni de  
A553e Um estudo da geometria projetiva elíptica / Andrea  
Ferreira Faccioni de Andrade. - Rio Claro, 2015  
127 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Alice Kimie Miwa Libardi

1. Geometria projetiva. 2. Geometria. 3. Geometria não  
euclidiana. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP  
Campus de Rio Claro/SP

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

Andrea Ferreira Faccioni de Andrade  
UM ESTUDO DA GEOMETRIA PROJETIVA ELÍPTICA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dra. Eliris Cristina Rizzioli  
Departamento de Matemática - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Prof. Dra. Marta Cilene Gadotti  
Departamento de Matemática - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Prof. Dr. Northon Canevari Leme Penteado  
Pós-doutorando, bolsista Capes.

**Rio Claro, 5 de Outubro**



# Agradecimentos

“... E aprendi que se depende sempre  
De tanta, muita, diferente gente  
Toda pessoa sempre é as marcas  
das lições diárias de outras tantas pessoas.  
É tão bonito quando a gente entende  
Que a gente é tanta gente  
Onde quer que a gente vá.  
É tão bonito quando a gente sente  
Que nunca está sozinho  
Por mais que pense estar...”

**(Caminhos do coração: Autoria de Gonzaguinha)**

Este trecho diz muito sobre como me sinto. Sei que se cheguei até aqui foi porque tive a ajuda de muitos anjos enviados por Deus, em especial o meu marido Allan Edley Ramos de Andrade e os meus pais Francisco Assis Faccioni e Maria Christina Ferreira Faccioni.

Agradeço aos meus pais por terem me dado educação, estudo e valores que jamais teria sem eles e por me apoiarem e incentivarem em todos os momentos de minha vida. Ao meu marido, companheiro e amigo Allan Edley Ramos de Andrade, que com muito amor, carinho e compreensão me completa e incentiva, se alegra com minhas conquistas e me ajuda a enfrentar todos os obstáculos e dificuldades do dia a dia. Dedico então esta dissertação a vocês, por sempre me animarem e me ajudarem nos momentos de correria, desânimo e dificuldades.

Sou imensamente grata à minha orientadora profa. Dra Alice Kimie Miwa Libardi por todo apoio e carinho e aos professores doutores Eliris Cristina Rizziolli, Marta Cilene Gadotti e Northon Canevari Leme Penteado por aceitarem participar da minha banca e por terem enriquecido este trabalho com seus comentários e sugestões.

Agradeço ao meu irmão Leandro Ferreira Faccioni que sempre me ajudou nos estudos e na vida. À minha irmã Erica Ferreira Faccioni que torce por mim e me presenteou com meus sobrinhos Leticia e Cauê que tanto amo. Agradeço também a todos os meus familiares, primos, tios e avós.

Agradeço à minha grande amiga Thauana Alves que sempre esteve ao meu lado desde a infância. À minha família unespiana: Vinicius Wasques, Lucas Mazzi, Erica

Rosa, Bárbara Maia, Glalco Silva, Valterlan Souza e Lucas Cárita pela amizade, apoio, pelos estudos até de madrugada, pelas risadas e conversas, enfim por todo amor, carinho e companheirismo. Agradeço também aos amigos Monica Mine, Juliana Scudilio, Gislaine Gobbo, Givanildo Melo, Adriano Cirilo e Amanda por todo carinho e amizade.

Não posso deixar de agradecer a todos os meus professores de colégio e de faculdade sem os quais não seria possível realizar este sonho. Agradeço especialmente às professoras de matemática Esmeralda Proença e Márcia Reis e ao professor de psicologia Florindo Stella, nos quais me espelho como profissional. Agradeço ainda aos meus alunos e ex-alunos que muito contribuíram para esta caminhada.

Quero agradecer também às secretárias de graduação Elisa e Ana e, em especial, à secretária de pós graduação Inajara Federson que sempre com grande carinho e competência respondeu minhas dúvidas e me ajudou a solucionar os problemas burocráticos acadêmicos.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação acadêmica.

*Aos meus pais  
Francisco e  
Christina  
e ao meu marido  
Allan ...*





# Resumo

Neste trabalho realizamos o estudo da Geometria Elíptica baseado no livro “Introdução à Geometria Projetiva” de Abdênago Alves de Barros e Plácido Francisco de Assis Andrade.

A fim de apresentar este tema de forma didática, desenvolvemos alguns tópicos da álgebra linear e da geometria analítica que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

A Geometria Projetiva Elíptica é dividida em duas frentes: a Geometria Elíptica Dupla e a Geometria Elíptica Simples.

A Geometria Elíptica Dupla tem como modelo a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  e a Geometria Elíptica Simples tem como modelo o plano projetivo  $\mathbb{RP}^2$  que pode ser visto como a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  com a relação de equivalência que identifica os pontos antípodas.

**Palavras-chave:** Geometria, Geometria não Euclidiana, Geometria Projetiva Elíptica.



# Abstract

We have made a study of projective elliptic geometry based on the book “Introdução à Geometria Projetiva” of Abdênago Alves de Barros and Plácido Francisco de Assis Andrade.

In order to introduce this theme in a didactic way, we developed some topics of the linear algebra and of the analytic geometry, that will be used in this work.

The projective elliptic geometry is divided in two approaches the double elliptic geometry and the simple elliptic geometry.

The double elliptic geometry has as model the unit sphere  $\mathbb{S}^2$  and the simple elliptic geometry has as model the real projective plane  $\mathbb{RP}^2$ , that is, the unit sphere  $\mathbb{S}^2$  with the equivalence relation that identifies antipodal points.

**Keywords:** Geometry, Non-Euclidean Geometry, Elliptical Projective Geometry.



# Lista de Figuras

1.1	Matemáticos	20
1.2	Hilbert	22
4.1	Reta Elíptica determinada por $\Gamma_\eta$	62
4.2	Infinitas retas passando por $u$ e $v$	64
4.3	Interseção de planos euclidianos	65
4.4	Interseção de retas elípticas	66
4.5	Orientação da reta elíptica	71
4.6	Plano elíptico dual	72
4.7	Semiplano positivo	75
4.8	Medida da lua	76
4.9	rotações do Axioma $IV_1$	77
4.10	rotações do Axioma $IV_3$	78
4.11	Luas equivalentes 1	79
4.12	Luas equivalentes 2	80
4.13	Triângulo elíptico I	80
4.14	Rotação 1	81
4.15	Rotação 2	81
4.16	Projeção estereográfica I	82
4.17	Projeção estereográfica II	83
4.18	Triângulo euclidiano I	84
4.19	Triângulo elíptico $II_1$	85
4.20	Triângulo elíptico $II_2$	87
4.21	Cilindro circunscrito à esfera	90
4.22	Planificação da lua	90
4.23	Luas cobrindo $S^2$	91
4.24	Triângulo elíptico $II_3$	94
4.25	Triângulo dual	94
4.26	Triângulo elíptico e seu dual	96
5.1	Ponto de fuga	99
5.2	Representantes de pontos projetivos	101
5.3	Representação do $\mathbb{RP}^2$	103

5.4	Plano Projetivo Dual . . . . .	104
5.5	Bijecção com o círculo . . . . .	110
5.6	Bijecção com a reta . . . . .	110
6.1	Poligonal esférica . . . . .	111
6.2	Ângulo interno . . . . .	112
6.3	Cubo . . . . .	113
6.4	Projeção radial I . . . . .	114
6.5	Projeção radial II . . . . .	115
6.6	Soma dos ângulos internos em cada vértice . . . . .	115
6.7	Poliedro não convexo com gênero 1 . . . . .	116
A.1	Triângulo euclidiano $I_1$ . . . . .	120
A.2	Triângulo euclidiano $I_2$ . . . . .	120
A.3	Triângulo euclidiano $I_3$ . . . . .	121
A.4	Triângulo euclidiano $I_4$ . . . . .	121
B.1	Disco de Poincaré . . . . .	123
B.2	Circunferências Ortogonais . . . . .	123
B.3	Retas no Disco de Poincaré . . . . .	124
B.4	Retas paralelas . . . . .	124
B.5	Plano Afim . . . . .	124
B.6	Retas afins . . . . .	125

# Sumário

<b>1</b>	<b>Contexto histórico</b>	<b>19</b>
1.1	Os “Elementos” de Euclides	20
1.2	Axiomas de Hilbert	21
1.3	A Genealogia da Geometria Projetiva	23
<b>2</b>	<b>Álgebra Linear</b>	<b>25</b>
2.1	Espaços Vetoriais	25
2.1.1	Base	27
2.1.2	Subespaço Vetorial	31
2.2	Produto Interno	33
2.3	Ângulo entre vetores	36
2.4	Produto vetorial em $\mathbb{R}^3$	38
2.5	Transformações Lineares	43
<b>3</b>	<b>Operadores Ortogonais</b>	<b>47</b>
3.1	Operadores Ortogonais	47
3.2	Isometrias do $\mathbb{R}^n$	50
3.3	Translações	51
3.4	Classificação de Isometrias	53
<b>4</b>	<b>Geometria Projetiva Elíptica Dupla</b>	<b>57</b>
4.1	Geometria Projetiva Elíptica Dupla	57
4.1.1	Distância Esférica	58
4.1.2	Retas Elípticas; Axiomas de Incidência e Axioma das Paralelas	61
4.1.3	Retas Elípticas Orientadas	69
4.1.4	Plano Elíptico Dual	71
4.1.5	Isometrias em $\mathbb{S}^2$	72
4.1.6	Axiomas de Congruência e Axioma de Continuidade	74
4.2	Trigonometria Elíptica	84
4.2.1	Lei dos Senos	85
4.2.2	Área de Triângulos	90
4.2.3	Triângulo Dual	93

<b>5</b>	<b>Geometria Projetiva Elíptica Simples</b>	<b>99</b>
5.1	Geometria Projetiva Elíptica Simples . . . . .	99
5.2	O Plano Projetivo $\mathbb{RP}^2$ . . . . .	100
5.3	Relação entre $\mathbb{RP}^2$ e $S^2$ . . . . .	101
5.4	Retas Projetivas . . . . .	103
5.5	Plano Projetivo Dual . . . . .	104
5.6	Axiomas de Incidência e o Axioma das Paralelas . . . . .	104
5.7	Axioma de Continuidade . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Aplicação: Teorema de Euler para poliedros convexos</b>	<b>111</b>
<b>7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>117</b>
<b>A</b>	<b>Unicidade das Paralelas</b>	<b>119</b>
<b>B</b>	<b>Modelos da Geometria Hiperbólica e Afim</b>	<b>123</b>
B.1	Geometria Projetiva Hiperbólica . . . . .	123
B.2	Geometria Projetiva Afim . . . . .	124
	<b>Referências</b>	<b>127</b>



# Introdução

A Geometria Euclidiana estudada no colégio parece a priori ser suficiente para resolver as questões relacionados ao nosso cotidiano, no entanto não é difícil perceber que tal geometria é insatisfatória em relação à alguns problemas. Por exemplo: Como saber a distância percorrida por um navio entre dois pontos no oceano? Para responder essa pergunta é preciso lembrar que o navio acompanha a curvatura da terra, assim a menor trajetória descrita entre esses pontos será um arco, diferente do que ocorre na Geometria Euclidiana, cuja menor distância entre dois pontos é um segmento de reta.

Assim, na navegação marítima, ou mesmo na confecção de mapas mais precisos, é necessário levar em consideração a curvatura da terra. Logo, é natural nos perguntar se existe uma geometria que seja capaz de resolver esses ou outros problemas que envolve superfícies esféricas.

Estudaremos nesta dissertação uma geometria intitulada “Geometria Projetiva Elíptica”, a qual nos fornece ferramentas para solucionar esses e outros problemas.

Para um melhor entendimento desta teoria, serão desenvolvidos alguns tópicos da álgebra linear e da geometria analítica, os quais serão usados no decorrer deste trabalho.

Iniciaremos essa dissertação com uma breve apresentação da parte histórica da geometria e de alguns matemáticos que contribuíram para a sua evolução. O tema estudado é “Geometria Projetiva Elíptica” e, para um melhor entendimento desta teoria, serão desenvolvidos alguns tópicos da álgebra linear e da geometria analítica, os quais serão usados no decorrer deste trabalho.

Utilizaremos o livro “Elementos” de Euclides e discutiremos como Hilbert deu continuidade a essa obra monumental, apresentando os axiomas de Hilbert, os quais tiveram grande importância para a organização dos fundamentos da Geometria.

Veremos que o sistema axiomático de Hilbert é dividido em cinco grupos:

1. Incidência;
2. Ordem;
3. Congruência;
4. Paralelismo;
5. Continuidade.

Com pequenas modificações dos axiomas de Hilbert podemos criar três modelos de Geometria Projetiva, a saber: a Geometria Elíptica, a Geometria Afim e a Geometria Hiperbólica. A Geometria Projetiva Elíptica é dividida em Geometria Elíptica Dupla e Geometria Elíptica Simples.

Na Geometria Projetiva Elíptica Dupla o modelo é a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  e são considerados todos os grupos do sistema axiomático de Hilbert, exceto o de ordem. Nesta

geometria nega-se a existência do paralelismo, pois em  $\mathbb{S}^2$  veremos que por um ponto fora de uma reta não passam retas paralelas a ela. Além disso, não é exigida a unicidade da interseção de retas e diferentemente da geometria Euclidiana, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é maior que  $180^\circ$ .

Na Geometria Projetiva Elíptica Simples o modelo a ser considerado é o plano projetivo  $\mathbb{RP}^2$  o qual pode ser visto como a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  com a relação de equivalência que identifica os pontos antípodas.

A divisão deste trabalho é feita da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentaremos um contexto histórico da geometria, fazendo referência a alguns matemáticos relevantes para o seu desenvolvimento, dentre eles destacamos Euclides e Hilbert.

No capítulo 2 introduziremos alguns conceitos básicos da álgebra linear e da geometria analítica, os quais serão importantes para um melhor entendimento e desenvolvimento da teoria apresentada neste trabalho.

No capítulo 3 faremos a classificação de todos os operadores ortogonais em  $\mathbb{R}^n$ . Tal classificação será importante para a classificação de isometrias em  $\mathbb{S}^2$  (vide seção 4.1.5).

No capítulo 4 abordaremos alguns tópicos da teoria de Geometria Projetiva Elíptica Dupla, apresentando os conceitos de distância esférica, plano elíptico, retas elípticas orientadas, plano elíptico dual e congruências. Além disso, será feita a classificação das isometrias em  $\mathbb{S}^2$  e serão desenvolvidos alguns tópicos da trigonometria elíptica com destaque para o Teorema de Girard feito na seção 4.2.2.

No capítulo 5 apresentaremos um modelo da Geometria Projetiva Elíptica Simples. Veremos que tal modelo é o plano projetivo  $\mathbb{RP}^2$  e faremos algumas considerações sobre a relação entre  $\mathbb{RP}^2$  e  $\mathbb{S}^2$ .

No capítulo 6 apresentaremos uma demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos, sendo que para esta demonstração utilizaremos a teoria de triângulos elípticos desenvolvida no capítulo 4.

Finalmente no apêndice A verificaremos que o fator determinante para que a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano seja  $\pi$  é o fato de ser válido a seguinte afirmação conhecida como axioma das paralelas: Se  $r$  é uma reta euclidiana e  $A$  um ponto que não está em  $r$ , então existe uma única reta  $s$  paralela à  $r$  com  $P$  pertencente à  $s$ . Por fim no Apêndice B ilustraremos modelos, um para a Geometria Hiperbólica e o outro para a Geometria Afim (vide seção 1.3).

# Capítulo 1

## Contexto histórico

Baseado nos livros [1] e [2] faremos uma abordagem histórica da geometria, fazendo referência a alguns matemáticos importantes para o seu desenvolvimento, com destaque para Euclides e Hilbert.

A palavra grega “Geometria” significa “medição de terras”. Tanto no antigo Egito como na antiga Mesopotâmia, o conhecimento geométrico era aplicado na agricultura e tinha como base o emprego de fórmulas de áreas, comprimentos e volumes. A transformação da geometria de um conhecimento rudimentar e prático para um ramo da matemática pura foi devida aos gregos. Foi deles a iniciativa de abstrair as ideias do contexto físico para o contexto abstrato.

O pioneiro desta iniciativa foi o filósofo Tales de Mileto, um grande matemático e cientista grego da época. Tales deu origem a uma escola que sobreviveu por 100 anos. Um possível aluno desta escola foi o grande filósofo Pitágoras de Samos o qual estabeleceu uma sociedade filosófica e religiosa que muito contribuiu para a formalização da Geometria com trabalhos nas Teorias de paralelas.

Outro grande avanço na Geometria foi com o professor Hipócrates de Chios, ao escrever o livro “Elementos de Geometria”, no qual cada teorema era provado utilizando um teorema anterior. Tudo indica que esta obra está contida nos livros I e II dos Elementos de Euclides. Hipócrates de Chios contribuiu bastante sobre os teoremas que se referem à circunferência.

Nesta mesma época, o filósofo Platão fundou em Atenas uma famosa Academia, que congregava os maiores sábios da época. Tais sábios conheciam muita geometria e não se preocupavam com a aplicação dos conhecimentos adquiridos nos seus trabalhos, dando ênfase ao desenvolvimento do pensamento matemático. Entre esses sábios podemos destacar o filósofo Aristóteles da Macedônia, que muito contribuiu para a geometria ao construir uma teoria que começava com noções comuns, definições e um estudo sobre filosofia e lógica, e o também filósofo grego Eudoxo de Cnido, o qual sistematizou formalmente o método axiomático inspirado no trabalho de Aristóteles.

Outra grande escola de sábios foi o Museu de Alexandria, fundada pelo general Ptolomeu I, o qual convidou para ser professor um importante matemático grego da

época, Euclides, cuja biografia é praticamente desconhecida.

Euclides deu origem a mais importante obra, intitulada “Os Elementos”, em que está registrada toda construção da matemática abstrata feita pelos gregos ao longo de 300 anos. Tal obra expõe de forma didática toda matemática básica da época.

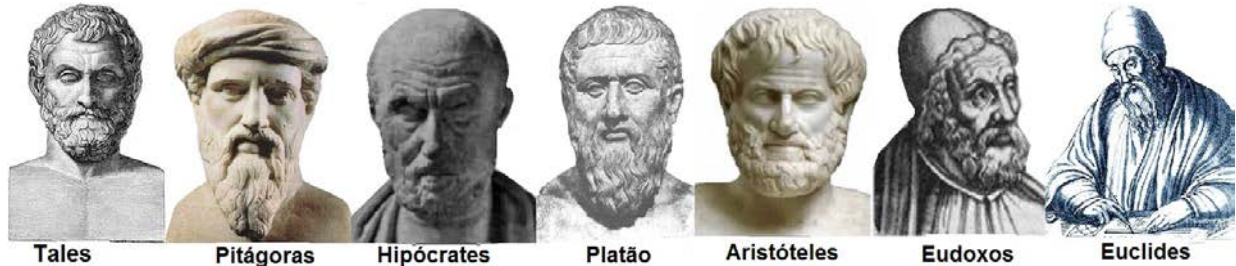


Figura 1.1: Matemáticos  
(Retirada do livro [1]-modificado)

## 1.1 Os “Elementos” de Euclides

No livro Elementos está registrada, pelo grande filósofo Euclides, toda matemática básica da época, assim como mencionado anteriormente. Esta obra é constituída de 13 capítulos, com um total de 465 proposições demonstradas de forma didática em um sistema axiomático dedutivo. Acredita-se que várias proposições e provas contidas no livro “Elementos” são de Euclides, mas possivelmente muitas dessas obras foram acrescentadas posteriormente. O sistema axiomático adotado por Euclides foi:

### 1. *Noções Comuns:*

- \* Coisas que são iguais a uma mesma coisa também são iguais.
- \* Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
- \* Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- \* Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
- \* O todo é maior que qualquer uma de suas partes.

### 2. *Axiomas da Geometria Euclidiana Plana:*

- \* Incidência: Pode-se traçar uma reta ligando quaisquer dois pontos.
- \* Pode-se continuar qualquer reta finita continuamente em uma reta.
- \* Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
- \* Todos os ângulos retos são iguais.

- \* Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

### 3. Definições:

- \* 23 definições que dizem respeito a ponto, reta, ângulo, círculo, triângulo e quadrilátero.

### 4. Termos Indefinidos:

- \* Conjunto, subconjunto, elementos, etc.

## 1.2 Axiomas de Hilbert

Dezoito séculos depois da publicação dos “Elementos”, começaram a surgir as primeiras traduções para a língua europeia moderna do livro de Euclides. Uma tradução para o português feita por Irineu Bicudo pode ser encontrada na referência [3].

Esta obra passou a ser estudada minuciosamente pelos interessados da época, surgindo assim vários resultados surpreendentes. O tópico mais instigante para os que estudavam “Elementos” foi o postulado das paralelas. Estudiosos perguntavam-se se este postulado era ou não um axioma independente dos demais. Muitos acreditavam que este postulado poderia ser um teorema e ao longo da história muitas demonstrações erradas foram feitas, inclusive por grandes matemáticos da época.

Na metade do século XIX, foram feitas várias argumentações sobre as hipóteses assumidas por Euclides sem que tivessem sido demonstradas ou axiomatizadas. Seguem abaixo algumas delas:

- As retas são conjuntos ilimitados.
- Vale o postulado de Dedekind: as retas são contínuas.
- *Axioma I*: A reta que podemos traçar ligando dois pontos é única.
- *Axioma II*: Pode-se continuar uma reta de uma única maneira.
- *Axioma de Pasch*: Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  três pontos não colineares e  $r$  uma reta que não contém nenhum destes pontos. Se  $r$  corta o segmento  $AB$ , então ela também corta o segmento  $BC$  ou o segmento  $AC$ .

Uma importante contribuição do matemático alemão David Hilbert (veja figura 1.2) para a Geometria Euclidiana plana e espacial foi a apresentação de um sistema de axiomas em que permaneciam válidos todos os resultados dos “Elementos” assumindo seus postulados. Os axiomas da geometria plana adotados por Hilbert foram:



Figura 1.2: Hilbert  
(retirada do livro [1])

I. *Termos Indefinidos:*

$I_1$  Ponto, reta, plano, pertence, estar entre, congruência.

II. *Axiomas de Incidência:*

$II_1$ : Para quaisquer dois pontos existe uma única reta que contém estes pontos.

$II_2$ : Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.

$II_3$ : Toda reta contém pelo menos dois pontos.

III. *Axiomas de Ordem:*

São estabelecidos quatro axiomas que dizem respeito à ordenação dos pontos de uma reta. São eles:

$III_1$ : Se um ponto  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então os três pontos pertencem a uma mesma reta e  $B$  está entre  $C$  e  $A$ .

$III_2$ : Para quaisquer dois pontos distintos  $A$  e  $C$ , existe pelo menos um ponto  $B$  pertencente à reta  $\overline{AC}$  tal que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ .

$III_3$ : Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.

$III_4$ : Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja  $l$  uma reta do plano que não contém nenhum dos três pontos. Então, se  $l$  intersecta o segmento  $\overline{AB}$ , ela também intersecta o segmento  $\overline{AC}$  ou o segmento  $\overline{BC}$ .

IV. *Axiomas de Congruência:*

São estabelecidos cinco axiomas que dizem respeito à congruência de ângulos, segmentos e triângulos. São eles:

$IV_1$ : Se  $A$  e  $B$  são dois pontos numa reta  $l$  e  $A'$  é um outro ponto de uma reta  $l'$ , não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar

um ponto  $B'$  em (um dado lado da reta)  $l'$  tais que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  são congruentes.

$IV_2$ : Se um segmento  $\overline{A'B'}$  e um segmento  $\overline{A''B''}$  são congruentes a um mesmo segmento  $\overline{AB}$  então os segmentos  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  são congruentes entre si.

$IV_3$ : Sobre uma reta  $l$ , sejam  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  dois segmentos da mesma que, exceto por  $B$  não têm pontos em comum. Além disto, sobre uma outra ou a mesma reta  $l'$ , sejam  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$  dois segmentos que, exceto por  $B'$  não tem pontos em comum. Neste caso, se  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  e  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ , então  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ .

$IV_4$ : Se  $\angle ABC$  é um ângulo e se  $\overrightarrow{B'C'}$  é uma semirreta, então existe exatamente uma semirreta  $\overrightarrow{B'A'}$  em cada lado de  $\overrightarrow{B'C'}$  tal que  $\angle A'B'C' = \angle ABC$ . Além disto, cada ângulo é congruente a si mesmo.

$IV_5$ : Se para dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  as congruências

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} = \overline{A'C'} \quad \text{e} \quad \angle BAC = \angle B'A'C'$$

são válidas, então a congruência  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$  é satisfeita.

#### V. Axioma das Paralelas:

$V_1$ : Seja  $l$  uma reta e  $A$  um ponto não pertencente a  $l$ . Então, existe uma única reta no plano que passa por  $A$  e não intersecta  $l$ .

#### VI. Axiomas de Continuidade:

$VI_1$  Axioma de Arquimedes: Se  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são segmentos, então existe um número natural  $n$  tal que  $n$  cópias de  $\overline{CD}$  construídas continuamente de  $A$  ao longo da semirreta  $\overline{AB}$  passará além do ponto  $B$ .

$VI_2$  Axioma da Completude da Reta: Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma reta com suas relações de congruência e ordem que poderiam preservar as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de congruência e ordem que seguem dos axiomas acima (menos o das paralelas), é impossível.

## 1.3 A Genealogia da Geometria Projetiva

Vimos que os axiomas de David Hilbert estão organizados em cinco grupos.

*1. Incidência; 2. Ordem; 3. Congruência; 4. Paralelismo; 5. Continuidade.*

Na Geometria Projetiva são considerados os grupos axiomáticos de incidência e continuidade. Dentro da geometria projetiva, temos a geometria afim, hiperbólica e a elíptica.

Na *Geometria Afim*, são válidos todos os axiomas de Hilbert com exceção do grupo 3. Um modelo para essa geometria é o plano afim, denotado por  $\mathbb{A}\mathbb{P}^2$ , obtido pelo

plano projetivo  $\mathbb{RP}^2$  menos os seus pontos ideais (para a definição de  $\mathbb{RP}^2$  e pontos ideais (vide seções 5.2 e 5.3). Uma reta em  $\mathbb{AP}^2$  é definida pela interseção da reta projetiva com o plano afim (para mais detalhes vide Apêndice B).

Na *Geometria Hiperbólica*, são válidos todos os grupos de axiomas de Hilbert exceto do paralelismo, pois nesta geometria, dada uma reta e um ponto fora dela, existem infinitas retas paralelas a reta dada passando por este ponto. Um modelo para essa geometria é o plano hiperbólico, denotado por  $\mathbb{D}^2$ , conhecido também como disco de Poincaré, obtido pela região limitada por uma circunferência.

Nessa geometria as retas são obtidas pela interseção de circunferências ortogonais à  $\mathbb{D}^2$ , ou pela interseção de uma reta euclidiana passando pela origem, com o plano hiperbólico (para mais detalhes vide Apêndice B).

Na *Geometria Elíptica Dupla* são satisfeitos os axiomas de incidência, congruência, além do axioma de continuidade a menos de adaptações. Nega-se a existência do paralelismo e não é exigida a unicidade de interseção de retas. Um modelo para essa geometria é a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  (vide seção 4).

Na *Elíptica Elíptica Simples* são satisfeitos os axiomas de incidência, além do axioma de continuidade a menos de adaptações. Nega-se a existência do paralelismo. Um modelo para essa geometria é a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  com a relação de equivalência que identifica os pontos antípodas (vide seção 5).



# Capítulo 2

## Álgebra Linear

Com base nos livros [4] e [5], introduziremos neste capítulo algumas noções básicas no que se refere às ferramentas algébricas as quais serão utilizadas no decorrer da dissertação.

### 2.1 Espaços Vetoriais

**Definição 2.1.** Dado um conjunto não vazio  $\mathbb{K}$ , uma operação binária em  $\mathbb{K}$  é uma aplicação  $\varphi : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  que associa a cada par de elementos de  $\mathbb{K}$  um único elemento de  $\mathbb{K}$ .

**Definição 2.2.** Sejam  $\mathbb{K}$  um conjunto não vazio e  $+$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  duas aplicações binárias em  $\mathbb{K}$ . Dizemos que a tripla  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  é um corpo se as aplicações  $+$  e  $\cdot$  satisfazem:

**A<sub>1</sub>:**  $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{K}$  (Propriedade comutativa da soma);

**A<sub>2</sub>:**  $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{K}$  (Propriedade associativa da soma);

**A<sub>3</sub>:** Existe um elemento  $0$  em  $\mathbb{K}$ , chamado elemento neutro da soma, tal que  $a + 0 = a = 0 + a, \forall a \in \mathbb{K}$ ;

**A<sub>4</sub>:** Para cada elemento  $a \in \mathbb{K}$ , existe o elemento  $-a \in \mathbb{K}$ , chamado elemento oposto, satisfazendo:  $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ ;

**M<sub>1</sub>:**  $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{K}$  (Propriedade comutativa da multiplicação);

**M<sub>2</sub>:**  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{K}$  (Propriedade associativa da multiplicação);

**M<sub>3</sub>:** Existe um elemento  $1$  em  $\mathbb{K}$ , chamado elemento neutro da multiplicação, tal que para todo  $a \in \mathbb{K}$ ,  $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ ;

**M<sub>4</sub>:** Para cada elemento  $a \in \mathbb{K}$ , com  $a \neq 0$ , existe o elemento  $a^{-1} \in \mathbb{K}$ , chamado elemento inverso, satisfazendo:  $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$ ;

**D:**  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot a, \forall a, b, c \in \mathbb{K}$  (Propriedade distributiva).

**Definição 2.3.** *Sejam  $V$  um conjunto não vazio,  $\mathbb{K}$  corpo e duas operações*

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V & \cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (u, v) &\mapsto u + v & (\alpha, u) &\mapsto \alpha \cdot u. \end{aligned}$$

*Dizemos que a tripla  $(V, +, \cdot)$  é um Espaço Vetorial sobre  $\mathbb{K}$  se as operações  $+$ ,  $\cdot$  satisfazem as seguintes propriedades:*

**A<sub>1</sub>:**  $\forall u, v \in V, u + v = v + u$  (propriedade comutativa);

**A<sub>2</sub>:**  $\forall u, v, w \in V, (u + v) + w = u + (v + w)$  (propriedade associativa);

**A<sub>3</sub>:** Existe um vetor em  $V$ , denominado vetor nulo, o qual denotamos por  $0$ , tal que  $u + 0 = u, \forall u \in V$ ;

**A<sub>4</sub>:** Para cada vetor  $u \in V$ , existe um vetor  $-u \in V$ , denominado vetor oposto, satisfazendo:  $u + (-u) = 0$ ;

**M<sub>1</sub>:**  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e  $\forall u \in V, (\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$  (propriedade associativa);

**M<sub>2</sub>:**  $\forall u \in V, 1 \cdot u = u$ , onde  $1$  é o elemento neutro da multiplicação de  $\mathbb{K}$ ;

**D<sub>1</sub>:**  $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall \alpha \in \mathbb{K}$  e  $\forall u, v \in V$ ;

**D<sub>2</sub>:**  $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e  $\forall u \in V$ .

**Observação 2.1.** Embora não é exigida a unicidade do vetor nulo e do vetor oposto mencionados em  $A_3$  e  $A_4$  respectivamente, é simples verificarmos tais unicidades. De fato, se  $0'$  é um vetor que também satisfaz a igualdade  $0' + u = u, \forall u \in V$ , então  $0' = 0' + 0 = 0$ . Além disso, dado  $u \in V$ , se  $w \in V$  satisfaz a igualdade  $u + w = 0$ , operando com  $-u$  de ambos os lados temos  $(-u) + (u + w) = 0 + (-u)$ , de onde segue que  $w = 0 + w = ((-u) + u) + w = (-u) + (u + w) = 0 + (-u) = -u$ .

**Exemplo 2.1.** (1) Se  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  é um corpo, então  $\mathbb{K}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ .

(2)  $(\mathbb{K}^n, +', \cdot')$  onde  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  é um corpo e

$$\begin{aligned} +' : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) &\longmapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot' : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (\alpha, (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\longmapsto (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n) \end{aligned}$$

**Exemplo 2.2.** Sejam  $X$  um conjunto qualquer não vazio e  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  um corpo. Defina em  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ , conjunto das funções  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ , as seguintes operações

$$\begin{aligned} + : \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) \times \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) \\ (f, g) &\longmapsto f + g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) \\ (\alpha, f) &\longmapsto \alpha \cdot f \end{aligned}$$

onde  $f + g : X \rightarrow \mathbb{K}$  e  $\alpha \cdot f : X \rightarrow \mathbb{K}$  são dadas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad e \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

### 2.1.1 Base

**Definição 2.4.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ .*

- (1) *Um vetor  $v \in V$  é uma combinação linear dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ , se existem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tais que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- (2) *Seja  $\mathcal{B}$  um subconjunto de  $V$ . Dizemos que  $\mathcal{B}$  é um conjunto gerador de  $V$ , ou que  $\mathcal{B}$  gera  $V$ , se todo elemento de  $V$  for uma combinação linear de um número finito de elementos de  $\mathcal{B}$ .*

**Definição 2.5.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e  $\mathcal{B}$  um subconjunto de  $V$ .*

- (a) *Dizemos que  $\mathcal{B}$  é linearmente independente (L.I) se valer a seguinte implicação:*

*Se existirem  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ , tais que*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0,$$

*então  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ , para quaisquer  $v_i \in \mathcal{B}$ .*

- (b) *O conjunto  $\mathcal{B}$  é chamado de linearmente dependente (L.D) se não for linearmente independente.*

**Definição 2.6.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Dizemos que  $\mathcal{B} \subset V$  é uma base de  $V$  se :*

- (i)  *$\mathcal{B}$  for um conjunto gerador de  $V$ ;*  
(ii)  *$\mathcal{B}$  for linearmente independente.*

**Exemplo 2.3.** (1) O conjunto  $\mathcal{B} = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$  é uma base para  $\mathbb{K}^n$  sobre  $\mathbb{K}$ .

De fato, se  $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ , então podemos reescrever  $u$  da seguinte maneira

$$u = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1),$$

assim,  $\mathcal{B}$  é um conjunto gerador para  $\mathbb{K}^n$ .

Além disso, dados  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tal que

$$\begin{aligned} \alpha_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + \alpha_n(0, \dots, 1) = (0, \dots, 0) &\Leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0) \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0. \end{aligned}$$

Esta base é chamada de base canônica de  $\mathbb{K}^n$ .

(2) Pelo exemplo acima podemos afirmar que se considerarmos  $\mathbb{C}^2$  espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  então

$$\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

é um base para  $\mathbb{C}^2$ .

No entanto a afirmação é falsa se considerarmos  $\mathbb{C}^2$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . De fato, neste caso apesar de  $\mathcal{B}$  ser linearmente independente,  $\mathcal{B}$  não é um conjunto gerador. Por exemplo  $(i, 0)$  não pode ser obtido como combinação linear  $\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1)$  com  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.7.** Dizemos que um espaço vetorial  $V$  sobre  $\mathbb{K}$  é finitamente gerado se possuir um conjunto gerador finito.

**Proposição 2.1.** Se  $V$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  finitamente gerado e  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é um conjunto gerador de  $V$ , então todo conjunto linearmente independente de vetores em  $V$  tem no máximo  $m$  elementos.

*Demonstração.* Basta mostrarmos que todo conjunto de vetores de  $V$  com mais de  $m$  vetores é linearmente dependente. Seja  $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$  com  $n > m$ . Como  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  é um conjunto gerador de  $V$ , então devem existir  $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}, j = 1, 2, \dots, n$  tais que

$$u_j = \alpha_{1j}v_1 + \dots + \alpha_{mj}v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}v_i.$$

Assim, para quaisquer  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ , temos

$$\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n = \sum_{j=1}^n \beta_j \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} v_i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \beta_j \alpha_{ij} v_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_{ij} \right) v_i. \quad (2.1)$$

Considere agora o seguinte sistema :

$$S : \begin{cases} \alpha_{11}\beta_1 + \dots + \alpha_{1n}\beta_n & = 0 \\ \vdots & \\ \alpha_{m1}\beta_1 + \dots + \alpha_{mn}\beta_n & = 0 \end{cases}$$

Como o número de equações de  $(S)$  é estritamente menor do que o número de incógnitas, segue que  $(S)$  possui uma solução não nula, ou seja, existem escalares  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$  não todos nulos tais que  $\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_{ij} = 0$  com  $i = 1, \dots, m$ .

Portanto, segue de (2.1) que existem escalares  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$  não todos nulos tais que  $\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n = 0$ , implicando que  $\{u_1, \dots, u_n\}$  é linearmente dependente.  $\square$

**Corolário 2.1.** Se  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  finitamente gerado, então duas bases quaisquer de  $V$  têm o mesmo número de elementos.

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  bases de  $V$ . Em particular  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  são subconjuntos linearmente independente de  $V$ , e pela Proposição 2.1 devemos ter que  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  são finitos.

Sendo  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  conjuntos finitos, suponha  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  com  $m_1$  e  $m_2$  elementos respectivamente. Como  $\mathcal{B}_1$  é um conjunto gerador de  $V$  e  $\mathcal{B}_2$  é linearmente independente, então pela Proposição 2.1 temos  $m_2 \leq m_1$ .

Analogamente, sendo  $\mathcal{B}_2$  um conjunto gerador de  $V$  e  $\mathcal{B}_1$  linearmente independente temos  $m_1 \leq m_2$ . Portanto, devemos ter  $m_1 = m_2$ . □

**Definição 2.8.** *Seja  $V$  um espaço vetorial não nulo sobre  $\mathbb{K}$ . Se  $V$  admite uma base finita, então chamamos de dimensão de  $V$  o número de elementos de tal base. Se  $V = \{0\}$ , então dizemos que a dimensão de  $V$  é 0.*

Observe que o Corolário 2.1 garante a boa definição de base de um espaço vetorial finitamente gerado.

No caso em que  $V$  é espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  com dimensão  $n$ , então usamos a notação  $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ .

**Exemplo 2.4.** (1)  $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ , (2)  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$  e  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$ .

**Proposição 2.2.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  um conjunto linearmente independente em  $V$ . Se  $v \in V$  não é combinação linear dos elementos de  $\mathcal{B}$ , então  $\{v_1, v_2, \dots, v_m, v\}$  é linearmente independente.*

*Demonstração.* Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1} \in \mathbb{K}$  com

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v = 0.$$

Se  $\alpha_{m+1} \neq 0$ , então segue da igualdade acima que

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} v_1 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} v_m,$$

contradizendo a hipótese de  $v$  não ser uma combinação linear de elementos de  $\mathcal{B}$ .

Segue que  $\alpha_{m+1} = 0$  e, portanto

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0.$$

Como  $\mathcal{B}$  é linearmente independente, segue que

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0.$$

Logo,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = 0$ .

Portanto,  $\{v_1, \dots, v_m, v\}$  é linearmente independente. □

**Corolário 2.2.** *Se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$  ( $n \geq 1$ ), então todo subconjunto de  $V$  linearmente independente com  $n$  elementos forma uma base para  $V$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  um subconjunto linearmente independente de  $V$ , e suponha por absurdo que  $\mathcal{B}$  não é uma base para  $V$ .

Como  $\mathcal{B}$  é um conjunto L.I que não é base para  $V$ , devemos ter que  $\mathcal{B}$  não gera  $V$ , ou seja, existe um vetor  $v$  que não é combinação linear de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

Segue da Proposição 2.2 que  $\{v_1, \dots, v_n, v\}$  é um conjunto L.I, contradizendo assim a Proposição 2.1, pois  $\mathcal{B}$  possui  $n + 1$  elementos e  $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ .

Portanto,  $\mathcal{B}$  é base para  $V$ . □

**Teorema 2.1.** *Todo espaço vetorial finitamente gerado não nulo possui uma base.*

*Demonstração.* Se  $V$  um espaço vetorial finitamente gerado não nulo sobre  $\mathbb{K}$ , então existe um conjunto  $W = \{w_1, \dots, w_m\} \subseteq V$ , e gerando  $V$ .

Considere  $v_1 \in V$  um vetor não nulo, assim  $B_1 = \{v_1\}$  é linearmente independente. Se  $B_1$  gerar  $V$ , então  $B_1$  é uma base de  $V$ , caso contrário, existe  $v_2 \in V$  que não é um múltiplo de  $v_1$ .

Neste caso, segue da Proposição 2.2 que  $B_2 = \{v_1, v_2\}$  é L.I.

Agora, se  $B_2$  gerar  $V$ , então  $B_2$  será uma base de  $V$ . Caso contrário, existe  $v_3 \in V$  tal que  $\{v_1, v_2, v_3\}$  é L.I.

Proseguindo desta forma, obteremos uma base de  $V$  ou construiremos conjuntos L.I. em  $V$  arbitrariamente grandes.

Pela Proposição 2.1, todo conjunto L.I. neste espaço vetorial deve possuir no máximo  $m$  elementos, assim o processo acima não pode gerar um conjunto L.I com número maior que  $m$  elementos, assim deve ocorrer a primeira opção, ou seja, chegaremos em uma base para  $V$ . □

**Proposição 2.3.** *Se  $V$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão  $n$ , com  $n \geq 1$  e  $\mathcal{B} \subset V$  é uma base de  $V$ , então cada elemento de  $V$  se escreve de maneira única como combinação linear de elementos de  $\mathcal{B}$ .*

*Demonstração.* Seja  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$ .

Como  $B$  é uma base, então  $B$  gera  $V$ , ou seja, todo elemento de  $V$  se escreve como combinação linear de  $v_1, \dots, v_n$ .

Assim, existem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , tal que  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ .

Para mostrar a unicidade suponha que  $v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ , e mostremos que

$$\alpha_i = \beta_i, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Temos que

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0.$$

Como  $B$  é L.I., segue que  $\alpha_i - \beta_i = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ .

Portanto,  $\alpha_i = \beta_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , de onde segue a unicidade.  $\square$

**Definição 2.9.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão  $n \geq 1$  e  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$ . Fixando uma ordem de  $\mathcal{B}$  dizemos que  $\mathcal{B}$  é uma base ordenada de  $V$ , e pela proposição acima podemos afirmar que cada  $v \in V$ , pode ser escrito unicamente como uma soma  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  com  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ . Decorre da unicidade que podemos descrever o elemento  $v$  através dos escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , neste caso denotamos*

$$[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

e dizemos que  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  são as coordenadas de  $v$  com relação à base ordenada  $\mathcal{B}$ .

**Exemplo 2.5.** Considerando  $\mathbb{K}^n$  espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , cada elemento  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  pode ser escrito como

$$\alpha_1(1, 0, \dots, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \alpha_n(0, \dots, 1),$$

assim,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  são as coordenadas de  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  com relação à base canônica.

### 2.1.2 Subespaço Vetorial

Estudaremos agora uma classe de subconjuntos de um espaço vetorial  $(V, +, \cdot)$  sobre  $\mathbb{K}$ , os quais possuem a estrutura de espaço vetorial quando se tomam as restrições das operações de  $V$ .

**Definição 2.10.** *Diz-se que um subconjunto  $W \subset V$  é um subespaço vetorial quando possuir as seguintes propriedades:*

- 1)  $0 \in W$ ;
- 2) Se  $u, v \in W$ , então  $u + v \in W$  (fechamento em relação à soma de vetores);
- 3) Se  $u \in W$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ , então  $\lambda \cdot u \in W$  (fechamento em relação ao produto por escalar).

**Exemplo 2.6.** (1) Se  $(V, +, \cdot)$  é um espaço vetorial, então  $W = \{0\}$  e  $W = V$  são subespaços de  $V$  chamados de triviais.

- (2) Se considerarmos  $V = \mathbb{C}$  como um espaço vetorial sobre  $\mathbb{Q}$ , então  $\mathbb{Q}$  é um subespaço vetorial, mas se  $\mathbb{C}$  é considerado como espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  então  $\mathbb{Q}$  não é subespaço vetorial.

De fato,  $0 \in \mathbb{Q}$  e soma e multiplicação de números racionais é racional, logo  $\mathbb{Q}$  é um subespaço vetorial no primeiro caso.

Para o segundo caso, tomando  $\lambda = \sqrt{2}$  e  $u = 1 \in \mathbb{Q}$  temos  $\alpha u = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , ou seja, o fato de um determinado subconjunto ser subespaço está diretamente ligado ao corpo ao qual o espaço vetorial está sendo considerado.

- (3) Sabemos que  $V = \mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ . Se considerarmos o subconjunto  $W = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) \subset V$  formado pelas funções contínuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ , então  $W$  é um subespaço de  $V$ .

De fato, a função nula  $0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  é contínua, além disso soma de funções contínuas é contínua e se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  é contínua e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , então  $\alpha \cdot f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  dada por  $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$  é contínua.

- (4) Sabemos que  $\mathbb{K}^n$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ . Considerando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , iremos apresentar alguns exemplos de subespaços nos casos  $n = 2$  e  $n = 3$ .

Para  $n = 2$ , considere para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$W_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \alpha x\}$$

Observe que  $W$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^2$ .

De fato,  $(0, 0) \in W_\alpha$  pois  $0 = \alpha 0$ .

Além disso, dados  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $u = (x, \alpha x), v = (y, \alpha y) \in W$

$$\begin{aligned} u + v &= (x + y, \alpha x + \alpha y) = (x + y, \alpha(x + y)) \in W \\ \lambda u &= (\lambda x, \lambda(\alpha x)) = (\lambda x, \alpha(\lambda x)) \in W. \end{aligned}$$

Geometricamente  $W_\alpha$  é a reta no  $\mathbb{R}^2$  passando pela origem com coeficiente angular  $\alpha$ .

Para  $n = 3$ , sendo  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$  defina

$$\Gamma_\eta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0\}.$$

Observe que  $(0, 0, 0) \in \Gamma_\eta$ , pois  $\eta_1 0 + \eta_2 0 + \eta_3 0 = 0$ .

Além disso, dados  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \Gamma_\eta$  temos

$$\eta_1 x_1 + \eta_2 y_1 + \eta_3 z_1 = 0 \quad , \quad \eta_1 x_2 + \eta_2 y_2 + \eta_3 z_2 = 0.$$

Assim,

$$\eta_1(\lambda x_1) + \eta_2(\lambda y_1) + \eta_3(\lambda z_1) = \lambda(\eta_1 x_1 + \eta_2 y_1 + \eta_3 z_1) = \lambda 0 = 0$$



e

$$\eta_1(x_1+x_2)+\eta_2(y_1+y_2)+\eta_3(z_1+z_2) = (\eta_1 x_1+\eta_2 y_1+\eta_3 z_1)+(\eta_1 x_2+\eta_2 y_2+\eta_3 z_2) = 0.$$

segue que  $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \Gamma_\eta$  e  $\lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in \Gamma_\eta$ .

Portanto,  $\Gamma_\eta$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ . Geometricamente  $\Gamma_\eta$  é um plano em  $\mathbb{R}^3$  passando pela origem  $(0, 0, 0)$ .

Os exemplos acima são casos particulares do seguinte resultado:

**Proposição 2.4.** *Se  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$ , então o conjunto de  $V$  formado por todas as combinações lineares*

$$[[v_1, v_2, \dots, v_k]] = \{v \in V; v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, \alpha_i \in \mathbb{K}\}$$

é um subespaço vetorial.

*Demonstração.* Temos que

$$0 = 0 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_k,$$

logo,  $0 \in [[v_1, v_2, \dots, v_k]]$ .

Além disso, dados  $u, w \in [[v_1, v_2, \dots, v_k]]$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ , então existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$  e  $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{K}$  com

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \quad \text{e} \quad w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k.$$

Assim,

$$u + w = \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \right) + \left( \sum_{i=1}^k \beta_i v_i \right) = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i) v_i,$$

com  $\alpha_i + \beta_i \in \mathbb{K}$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Logo,  $u + w \in [[v_1, v_2, \dots, v_k]]$ .

Além disso,

$$\lambda u = \lambda(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = (\lambda \alpha_1) v_1 + \dots + (\lambda \alpha_k) v_k,$$

com  $\lambda \alpha_i \in \mathbb{K}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Portanto,  $\lambda u \in [[v_1, v_2, \dots, v_k]]$ , mostrando assim que  $[[v_1, v_2, \dots, v_k]]$  é um subespaço vetorial.  $\square$

## 2.2 Produto Interno

**Definição 2.11.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Um produto interno sobre  $V$  é uma função  $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$P_1) \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V;$$

$$P_2) \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V;$$

$$P_3) \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \forall u, v \in V;$$

$$P_4) \langle u, u \rangle > 0, \text{ se } u \neq 0.$$

**Observação 2.2.** 1) Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , então  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} = \langle v, u \rangle$ , ou seja, neste caso temos a propriedade comutativa.

2) Pela propriedade  $P_3$  temos que para cada  $u \in V$ ,  $\langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle}$ , assim,  $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 2.5.** Se  $V$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , munido de um produto interno  $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ , então:

$$A_1) \langle 0, v \rangle = 0 = \langle v, 0 \rangle, \forall v \in V;$$

$$A_2) \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0;$$

$$A_3) \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \forall u, v, w \in V;$$

$$A_4) \langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V.$$

*Demonstração.* Sejam  $u, v, w \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$A_1$ : Utilizando a propriedade  $P_1$  temos

$$\langle 0, v \rangle = \langle 0 + 0, v \rangle = \langle 0, v \rangle + \langle 0, v \rangle,$$

assim operando com o inverso  $-\langle 0, v \rangle$  de ambos os lados da igualdade segue que  $\langle 0, v \rangle = 0$ . Além disso, temos  $\langle v, 0 \rangle = \overline{\langle 0, v \rangle} = 0$ .

$A_2$  : Se  $v \neq 0$ , então pela propriedade  $P_4$  temos que  $\langle v, v \rangle > 0$ .

Por outro lado, se  $v = 0$  então pela propriedade  $A_1$  segue que  $\langle v, v \rangle = 0$ .

$A_3$  : Utilizando as propriedades  $P_1$  e  $P_3$  temos

$$\langle u, v + w \rangle = \overline{\langle v + w, u \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle} + \overline{\langle w, u \rangle} = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle.$$

$A_4$  : Pelas propriedade  $P_2$  e  $P_3$  temos

$$\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, u \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \bar{\lambda} \overline{\langle v, u \rangle} = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle.$$

□

**Exemplo 2.7.** (1) Se  $V = C([a, b], \mathbb{K})$  é o espaço vetorial das funções contínuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ , então

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{K} \\ (f, g) &\rightarrow \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \end{aligned}$$

é um produto interno.

De fato, se  $f, g, h \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$  então

$P_1$ : Utilizando que a integral da soma é a soma das integrais e utilizando a propriedade distributiva de  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  temos

$$\begin{aligned} \langle f + g, h \rangle &= \int_a^b (f + g)(t) \overline{h(t)} dt = \int_a^b (f(t) \overline{h(t)} + g(t) \overline{h(t)}) dt \\ &= \int_a^b f(t) \overline{h(t)} dt + \int_a^b g(t) \overline{h(t)} dt \\ &= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle. \end{aligned}$$

$P_2$ : Como a integral de um produto por escalar é o produto do escalar pela integral temos

$$\begin{aligned} \langle \lambda \cdot f, g \rangle &= \int_a^b (\lambda \cdot f)(t) \overline{g(t)} dt \\ &= \int_a^b \lambda f(t) \overline{g(t)} dt = \lambda \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt = \lambda \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

$P_3$ : Utilizando que  $\overline{\overline{z}} = z, \forall z \in \mathbb{K}$ , e  $\overline{z\overline{w}} = \overline{z}w, zw = wz, \forall z, w \in \mathbb{K}$  temos

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt = \int_a^b \overline{\overline{f(t)} \overline{\overline{g(t)}}} dt \\ &= \int_a^b \overline{g(t) \overline{f(t)}} dt = \int_a^b \overline{g(t) \overline{f(t)}} dt = \overline{\langle g, f \rangle}. \end{aligned}$$

$P_4$ : Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  é uma função contínua não nula, então existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) \neq 0$ . Como  $f$  é contínua, então existe uma vizinhança  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$  em que  $f$  é não nula.

Logo,  $\int_a^b |f(t)|^2 dt \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} |f(t)|^2 dt > 0$ , além disso,  $z\overline{z} = |z|^2, \forall z \in \mathbb{K}$ , assim para  $f \neq 0$

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t) \overline{f(t)} dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt > 0.$$

(2) Se  $V = \mathbb{K}^n$  então

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{K} \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) &\rightarrow x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}. \end{aligned}$$

é um produto interno, o qual é chamado de *produto interno canônico*.

**Definição 2.12.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Chamamos de norma de  $v$  ao número real dado por  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

**Exemplo 2.8.** Considere o  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  com produto interno canônico. Para  $v_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n), v_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , então a norma

$$\|v_1 - v_2\| = \sqrt{\langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

é interpretado geometricamente como a distância entre os pontos  $v_1$  e  $v_2$  do espaço  $\mathbb{R}^n$ . Para  $v_2 = 0$ ,  $\|v_1\| = \|v_1 - v_2\|$  é exatamente a distância do ponto  $v_1$  à origem.

**Proposição 2.6.** Se  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com produto interno então:

- a)  $\|u\| \geq 0, \forall u \in V$  e  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .
- b)  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}$  e  $\forall u \in V$ .
- c)  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \forall u, v \in V$ . *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*  
A igualdade ocorre se, e somente se,  $\{u, v\}$  é linearmente dependente.
- d)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ . *(Desigualdade Triangular)*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [4].

## 2.3 Ângulo entre vetores

A desigualdade de Cauchy-Schwarz nos permitirá definir medidas de ângulos, para isso usaremos a seguinte informação: A função cosseno restrito ao intervalo  $[0, \pi]$  é bijetora, assim para cada  $t \in [-1, 1]$ , existe um único  $\theta \in [0, \pi]$  tal que  $\cos \theta = t$ .

Dados dois vetores  $u, v \in \mathbb{R}^n$  com  $u \neq 0$  e  $v \neq 0$ , temos pela *desigualdade de Cauchy-Schwarz* que

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

ou equivalentemente,

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1.$$

Assim, tomando  $t = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$ , existe um único  $\theta \in [0, \pi]$  tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Portanto, para  $u$  e  $v$  vetores não nulo, podemos escrever o produto interno como

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $u$  e  $v$ .

**Definição 2.13.** Dizemos que dois vetores  $u$  e  $v$  são perpendiculares ou ortogonais, se  $\langle u, v \rangle = 0$ . Neste caso denotamos por  $u \perp v$ .

**Observação 2.3.** Segue do item  $A_1$ ) da Proposição 2.5 que o vetor nulo é ortogonal a todo vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ .

Outra observação é que  $u \perp v$ , com  $u, v \neq 0$ , implica que o ângulo entre  $u$  e  $v$  é um ângulo reto.

De fato, nestas circunstâncias sendo  $\theta \in [0, \pi]$  o ângulo entre  $u$  e  $v$ , então

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = 0.$$

Como  $\theta \in [0, \pi]$ , segue que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Usando a observação acima, um método simples de construção de vetores ortogonais a um vetor não nulo  $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  é considerar o vetor  $w_\lambda = (-\lambda x_2, \lambda x_1) \in \mathbb{R}^2$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . De fato, ao tomar o produto interno usual de  $v$  com  $w_\lambda$ , temos

$$\langle v, w_\lambda \rangle = \langle (x_1, x_2), (-\lambda x_2, \lambda x_1) \rangle = -\lambda(x_1 x_2) + \lambda(x_1 x_2) = 0.$$

**Exemplo 2.9.** Seja  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 5y = 0\}$ . Temos que  $W$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^2$ , de fato

$$W = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -\frac{2}{5}x \right\} = W_\alpha,$$

para  $\alpha = -\frac{2}{5}$ .

Além disso, utilizando o produto interno canônico podemos descrever o subespaço  $W$  da seguinte forma:

$$W = \{v \in \mathbb{R}^2 / \langle v, \eta \rangle = 0\},$$

onde  $\eta = (2, 5)$ . Da mesma forma, para  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$  o subespaço

$$\Gamma_\eta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0\},$$

pode ser descrito como

$$\Gamma_\eta = \{v \in \mathbb{R}^3 / \langle v, \eta \rangle = 0\}.$$

**Definição 2.14.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com produto interno. Um conjunto  $A \subseteq V$  é dito ser ortogonal se  $\langle u, v \rangle = 0, \forall u, v \in A$ , com  $u \neq v$ .

**Definição 2.15.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com produto interno. Um conjunto ordenado  $\gamma = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$  é dito ser um conjunto ortonormal quando para todo  $1 \leq i, j \leq k$ , vale:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{para } i = j \\ 0, & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Quando o conjunto ordenado  $\gamma$  é uma base ordenada de  $V$ , então dizemos que  $\gamma$  é uma base ortonormal.

**Proposição 2.7.** *Se  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  é um conjunto ortonormal, então  $V$  é linearmente independente.*

*Demonstração.* De fato, sejam  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ , então

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 &\Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + \alpha_k \langle v_k, v_i \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_1 0 + \dots + \alpha_i 1 + \dots + \alpha_k 0 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_i = 0, \text{ para } i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Portanto,  $V$  é um conjunto linearmente independente.  $\square$

**Exemplo 2.10.** (1) As bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$  com os produtos internos canônicos são bases ortonormais.

(2) Se  $V = C([0, 2\pi], \mathbb{R})$  munido de produto interno canônico, então o conjunto  $A = \{f_n \in V : f_n(t) = \cos nt, n \in \mathbb{N}\}$  é ortogonal.

## 2.4 Produto vetorial em $\mathbb{R}^3$

Veremos nesta seção que  $\mathbb{R}^3$  admite uma operação  $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa o par  $(u, v)$  a um outro vetor denotado por  $u \times v$ , o qual terá a propriedade de ser ortogonal aos vetores  $u$  e  $v$ .

**Definição 2.16.** *Sejam  $u$  e  $v$  vetores de  $\mathbb{R}^3$ . O produto vetorial de  $u$  e  $v$ , denotado por  $u \times v$  é o vetor em  $\mathbb{R}^3$  tal que*

$$\langle w, u \times v \rangle = \det[w, u, v], \quad \forall w \in \mathbb{R}^3.$$

**Proposição 2.8.** *Sejam  $u = (x_1, x_2, x_3)$  e  $v = (y_1, y_2, y_3)$  vetores de  $\mathbb{R}^3$ , então*

*i)  $v \times u$  é perpendicular à  $u$  e  $v$ , simultaneamente.*

*ii) O produto vetorial de  $u$  e  $v$  é dado por*

$$u \times v = \left( \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right)$$

*iii)  $\|u \times v\|^2 = \det[u, v, u \times v] \geq 0$ .*

*Demonstração.* *i)* Pela definição de produto vetorial temos que  $\langle v, v \times u \rangle = \det[v, v, u]$ .

Das propriedades de determinante segue que o determinante se anula para matrizes com linhas ou colunas iguais, assim

$$\langle v, v \times u \rangle = \det[v, v, u] = 0.$$

Logo,  $v \times u \perp v$ . Da mesma forma  $v \times u \perp u$ .

ii) Desenvolvendo  $\left( \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right)$ ,  
obtemos

$$(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1). \quad (2.2)$$

Por outro lado, para qualquer  $z = (z_1, z_2, z_3)$  pertencente a  $\mathbb{R}^3$  temos:

$$\begin{aligned} \langle z, u \times v \rangle &= \det \begin{bmatrix} z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ z_3 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \\ &= z_1(x_2y_3 - x_3y_2) - z_2(y_3x_1 - y_1x_3) + z_3(y_2x_1 - y_1x_2). \end{aligned}$$

Utilizando a igualdade acima para  $z = (1, 0, 0)$  e denotando  $u \times v = (a, b, c)$ , temos

$$a = \langle (1, 0, 0), (a, b, c) \rangle = \langle z, u \times v \rangle = 1(x_2y_3 - x_3y_2) - 0 + 0.$$

Logo,  $a = x_2y_3 - x_3y_2$ .

Da mesma forma tomando  $z = (0, 1, 0)$ , obtemos  $b = y_1x_3 - y_3x_1$  e tomando  $z = (0, 0, 1)$  obtemos  $c = y_2x_1 - y_1x_2$ .

Portanto, comparando com (2.2), chegamos na igualdade

$$u \times v = \left( \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right).$$

iii) Pela definição de produto vetorial e de norma temos

$$0 \leq \|u \times v\|^2 = \langle u \times v, u \times v \rangle = \det [u \times v, u, v].$$

Por outro lado, sabemos das propriedades de determinantes que ao efetuar a troca de duas colunas o determinante altera de sinal. Assim, ao se efetuar duas trocas de colunas o determinante volta ao seu valor original, ou seja sendo  $u \times v = (a, b, c)$  temos

$$\begin{aligned} \det [u \times v, u, v] &= \det \begin{bmatrix} a & x_1 & y_1 \\ b & x_2 & y_2 \\ c & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & a \\ x_2 & y_2 & b \\ x_3 & y_3 & c \end{bmatrix} = \det [u, v, u \times v]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u \times v\|^2 = \det [u, v, u \times v].$$

□

A forma como foi definido o produto vetorial será prático para o desenvolvimento teórico da Geometria Elíptica dada nos capítulos seguintes, no entanto não é prático do ponto de vista computacional. Um algoritmo prático para determinar o produto vetorial  $u \times v$  é calcular o determinante da seguinte matriz simbólica

$$\det \begin{bmatrix} e_1 & x_1 & y_1 \\ e_2 & x_2 & y_2 \\ e_3 & x_3 & y_3 \end{bmatrix},$$

onde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  é a base canônica do  $\mathbb{R}^3$ .

De fato, ao desenvolver o determinante pela primeira coluna obtemos o vetor

$$e_1 \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} - e_2 \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} + e_3 \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

o qual é representado por

$$\left( \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right).$$

**Exemplo 2.11.** Sejam  $u = (3, 1, -4)$  e  $v = (0, 2, 1)$ , então

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & 3 & 0 \\ e_2 & 1 & 2 \\ e_3 & -4 & 1 \end{bmatrix} = 9e_1 - 3e_2 + 6e_3 = (9, -3, 6).$$

**Proposição 2.9.** (*Fórmula de Lagrange*)

Se  $u = (x_1, x_2, x_3)$  e  $v = (y_1, y_2, y_3)$  são vetores do  $\mathbb{R}^3$ , e  $\theta \in [0, \pi]$  é o ângulo entre  $u$  e  $v$ , então

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta.$$

*Demonstração.* Pela Proposição 2.8 temos que

$$u \times v = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|u \times v\|^2 &= \langle u \times v, u \times v \rangle \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\|u\|^2 \|v\|^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$



e

$$\langle u, v \rangle^2 = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2.$$

Efetuando as operações verifica-se que

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2. \quad (2.3)$$

Se  $\theta \in [0, \pi]$  é o ângulo entre os vetores  $u$  e  $v$ , então

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} \|u \times v\|^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \text{sen}^2 \theta) \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 + \|u\|^2 \|v\|^2 \text{sen}^2 \theta \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 \text{sen}^2 \theta. \end{aligned}$$

Como  $\theta \in [0, \pi]$ , então  $\text{sen}(\theta) \geq 0$ , além disso, temos  $\|u \times v\| \geq 0$ ,  $\|u\| \|v\| \geq 0$ , assim extraindo a raiz de ambos os lados da igualdade acima obtemos

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \text{sen} \theta.$$

□

**Proposição 2.10.** Se  $u = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $v = (y_1, y_2, y_3)$  e  $w = (w_1, w_2, w_3)$  são vetores do  $\mathbb{R}^3$ , então

a)  $\|u \times v\| = 0$  se, e somente se,  $\{u, v\}$  é L.D.

b)  $(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$ .

c)  $\langle u \times v, v \times w \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle u, v \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \end{bmatrix} = \langle u, v \rangle \cdot \langle v, w \rangle - \langle v, v \rangle \cdot \langle u, w \rangle$ .

d)  $\langle u, v \times w \rangle = \langle w, u \times v \rangle = \langle v, w \times u \rangle$ . (Identidade cíclica)

e)  $\langle \alpha u, \beta v \times \gamma w \rangle = \alpha \beta \gamma \langle u, v \times w \rangle$ ,  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* a) Observe que a igualdade é imediata se  $u$  ou  $v$  são nulos.

De fato, suponha sem perda de generalidade que  $u = (0, 0, 0)$ , então

$$u \times v = \left( \det \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ 0 & y_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \right) = (0, 0, 0).$$

Por outro lado,

$$0v + 1u = 0(y_1, y_2, y_3) + 1(0, 0, 0) = (0, 0, 0),$$

ou seja,  $\{u, v\}$  é L.D.

Suponha então,  $v$  e  $w$  vetores não nulos.

Pela fórmula de Lagrange temos

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta,$$

onde  $\theta \in [0, \pi]$  é o ângulo entre  $u$  e  $v$ .

Como  $u$  e  $v$  são vetores não nulos, temos pelo item a) da Proposição 2.6 que  $\|v\| > 0$  e  $\|u\| > 0$ , assim segue da igualdade acima que

$$\|u \times v\| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi. \quad (2.5)$$

Como

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}, \quad (2.6)$$

então de (2.5) e (2.6) segue que

$$\|u \times v\| = 0 \Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\|.$$

Portanto, utilizando o item c) da Proposição 2.6 temos

$$\|u \times v\| = 0 \Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \Leftrightarrow \{u, v\} \text{ é L.D.}$$

b) Observe que

$$\begin{aligned} u \times v &= \left( \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= (a, b, c). \end{aligned}$$

Assim,

$$(u \times v) \times w = \left( \det \begin{bmatrix} b & w_2 \\ c & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} a & w_1 \\ c & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a & w_1 \\ b & w_2 \end{bmatrix} \right).$$

Desenvolvendo as coordenadas acima obtemos  $(u \times v) \times w = (X, Y, Z)$  com

$$\begin{aligned} X &= (x_3y_1 - x_1y_3)w_3 - (x_1y_2 - x_2y_1)w_2 \\ Y &= w_1(x_1y_2 - x_2y_1) - (x_2y_3 - x_3y_2)w_3 \\ Z &= (x_2y_3 - x_3y_2)w_2 - (x_3y_1 - x_1y_3)w_1. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo  $\langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u = (X', Y', Z')$ , obtemos

$$(X', Y', Z') = (x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) - (y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3) \cdot (x_1, x_2, x_3).$$

Realizando as operações obtemos as igualdades desejadas  $X = X', Y = Y'$  e  $Z = Z'$ .

c) Realizando as operações em  $s = \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle v, v \rangle \langle u, w \rangle$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 s &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \cdot (y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \cdot (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) \\
 &= x_1y_1^2z_1 + x_1y_1y_2z_2 + x_1y_1y_3z_3 + x_2y_2^2z_2 + x_2y_2y_1z_1 + x_2y_2y_3z_3 + x_3y_3^2z_3 + \\
 &\quad x_3y_3y_1z_1 + x_3y_3y_2z_2 - y_1^2x_1z_1 - y_1^2x_2z_2 - y_1^2x_3z_3 - y_2^2x_1z_1 - y_2^2x_2z_2 - \\
 &\quad y_2^2x_3z_3 - y_3^2x_1z_1 - y_3^2x_2z_2 - y_3^2x_3z_3 \\
 &= x_1y_1y_2z_2 + x_1y_1y_3z_3 + x_2y_2y_1z_1 + x_2y_2y_3z_3 + x_3y_3y_1z_1 + x_3y_3y_2z_2 - \\
 &\quad y_1^2x_2z_2 - y_1^2x_3z_3 - y_2^2x_1z_1 - y_2^2x_3z_3 - y_3^2x_1z_1 - y_3^2x_2z_2 \\
 &= (x_2y_3 - x_3y_2) \cdot (y_2z_3 - y_3z_2) + \\
 &\quad (x_3y_1 - x_1y_3) \cdot (y_3z_1 - y_1z_3) + (x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (y_1z_2 - y_2z_1) \\
 &= \langle (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1), (y_2z_3 - y_3z_2, y_3z_1 - y_1z_3, y_1z_2 - y_2z_1) \rangle \\
 &= \langle u \times v, v \times w \rangle.
 \end{aligned}$$

d) Sabemos das propriedades de determinante que ao trocar a ordem de duas colunas o determinante altera de sinal, assim ao efetuar duas trocas na ordem das colunas, o determinante volta ao valor original.

Utilizando essa observação e a definição de produto vetorial temos

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \times w \rangle &= \det [u, v, w] = \det [w, u, v] = \langle w, u \times v \rangle \\
 &= \det [w, u, v] = \det [v, w, u] = \langle v, w \times u \rangle.
 \end{aligned}$$

e) Outra propriedade de determinante é que ao se efetuar a multiplicação de uma coluna por uma constante, o determinante fica multiplicado pelo mesmo fator.

Assim, dados  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , temos

$$\langle \alpha u, \beta v \times \gamma w \rangle = \det [\alpha u, \beta v, \gamma w] = \alpha\beta\gamma \det [u, v, w] = \alpha\beta\gamma \langle u, v \times w \rangle.$$

□

## 2.5 Transformações Lineares

Estudaremos nesta seção funções entre espaços vetoriais que preservam as respectivas operações, chamadas de transformações lineares. Estas funções estão entre as ferramentas fundamentais no que se refere ao estudo de isometrias realizado nos capítulos 3 e 4. No decorrer deste capítulo  $\mathbb{K}$  denotará um corpo qualquer.

**Definição 2.17.** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Uma função  $T : U \rightarrow V$  é uma transformação linear se*

$$1) T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \forall u_1, u_2 \in U. \text{ (Linearidade da soma de vetores)}$$

2)  $T(\lambda u) = \lambda T(u), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U$ . (Linearidade da multiplicação por escalar)

Uma transformação linear cujo domínio e o contradomínio são iguais é chamado de operador linear.

**Proposição 2.11.** Se  $U$  e  $V$  são espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  e  $T : U \rightarrow V$  é uma transformação linear, então:

a)  $T(0_U) = 0_V$ , onde  $0_U$  e  $0_V$  denotam os vetores nulos de  $U$  e  $V$  respectivamente.

b)  $T(-u) = -T(u), \forall u \in U$ .

c)  $T\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i T(u_i)$ .

*Demonstração.* a) Sejam  $0_U$  e  $0_V$  os vetores nulos de  $U$  e  $V$  respectivamente, assim usando a linearidade da soma obtemos

$$T(0_U) = T(0_U + 0_U) = T(0_U) + T(0_U)$$

e, portanto operando com  $-T(0_U)$  de ambos os lados obtemos  $0_V = T(0_U)$ .

b) Dado  $u \in U$ , então  $-u = (-1).u$ , assim usando a linearidade por escalar obtemos

$$T(-u) = T((-1).u) = (-1).T(u) = -T(u).$$

c) Aplicando a linearidade para  $u = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i u_i$  e  $v = \alpha_m u_m$ , temos

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i\right) &= T\left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i u_i + \alpha_m u_m\right) \\ &= T(u + v) = T(u) + T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i u_i\right) + \alpha_m T(u_m). \end{aligned}$$

Aplicando esse raciocínio repetidamente, obtemos

$$T\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i T(u_i).$$

□

**Exemplo 2.12.** (1) Sejam  $U$  e  $V$  dois espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$ . Existem duas transformações lineares canônicas, a função nula  $T : U \rightarrow V$ , dada por  $T(u) = 0, \forall u \in U$  e a função identidade  $S : U \rightarrow U$ , dada por  $S(u) = u, \forall u \in U$ . De fato, dados  $u_1, u_2 \in U$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , temos

$$T(u_1 + u_2) = 0 = 0 + 0 = T(u_1) + T(u_2) \quad e \quad T(\alpha u_1) = 0 = \alpha.0 = \alpha T(u_1),$$

e

$$S(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 = S(u_1) + S(u_2) \quad e \quad S(\alpha u_1) = \alpha u_1 = \alpha S(u_1).$$

- (2) Se  $a \in \mathbb{R}$ , então  $T_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T_a(x) = ax$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , é uma transformação linear. De fato, dados  $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ , então

$$T_a(x + y) = a(x + y) = ax + ay = T_a(x) + T_a(y).$$

Além disso,

$$T_a(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha(ax) = \alpha T_a(x).$$

- (3) Seja  $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  o subespaço vetorial dado no exemplo 2.6, então  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(f) = \int_a^b f(x)dx$  é uma transformação linear.

De fato, dados  $f, g \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  quaisquer, segue das propriedades de integrais que

$$\begin{aligned} T(f + g) &= \int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) + g(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = T(f) + T(g). \end{aligned}$$

Além disso,

$$T(\alpha \cdot f) = \int_a^b (\alpha \cdot f)(x) dx = \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx = \alpha T(f).$$



# Capítulo 3

## Operadores Ortogonais

Neste capítulo abordaremos o conceito de operadores ortogonais e isometrias no  $\mathbb{R}^n$ . Além disso, faremos a classificação de todos os operadores ortogonais de  $\mathbb{R}^n$ , a qual será importante tanto para classificar todas as isometrias em  $\mathbb{R}^n$ , quanto para classificar todas as isometrias em  $\mathbb{S}^2$  como veremos no capítulo seguinte.

### 3.1 Operadores Ortogonais

**Definição 3.1.** Diz-se que uma função  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é ortogonal se, e somente se,

$$\langle U(u), U(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in \mathbb{R}^n,$$

isto é, uma função ortogonal é uma função que preserva produto interno.

**Exemplo 3.1.** 1) A aplicação  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n),$$

é uma função ortogonal.

De fato,

$$\begin{aligned} \langle A(x_1, \dots, x_n), A(y_1, \dots, y_n) \rangle &= \langle (-x_1, \dots, -x_n), (-y_1, \dots, -y_n) \rangle \\ &= (-x_1)(-y_1) + \dots + (-x_n)(-y_n) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n \\ &= \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle. \end{aligned}$$

Tal função é chamada de aplicação antípoda.

2) Se  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  é uma base ordenada ortonormal do espaço  $\mathbb{R}^n$ , então

$$U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{dada por} \quad U(x_1, \dots, x_n) = x_1u_1 + \dots + x_nu_n,$$

é uma função ortogonal.

De fato, como  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  é ortonormal então

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{para } i = j \\ 0, & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Assim, usando a linearidade do produto interno temos

$$\begin{aligned}
 \langle U(x_1, \dots, x_n), U(y_1, \dots, y_n) \rangle &= \langle x_1 u_1 + \dots + x_n u_n, y_1 u_1 + \dots + y_n u_n \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i u_i, y_j u_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle u_i, u_j \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\
 &= \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle.
 \end{aligned}$$

3) Se  $T_1, T_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , são operadores ortogonais então  $T_1 \circ T_2$  é ortogonal.

De fato, dados  $u, v \in \mathbb{R}^n$  temos

$$\begin{aligned}
 \langle (T_1 \circ T_2)(u), (T_1 \circ T_2)(v) \rangle &= \langle T_1(T_2(u)), T_1(T_2(v)) \rangle = \langle T_2(u), T_2(v) \rangle \\
 &= \langle u, v \rangle.
 \end{aligned}$$

A proposição a seguir caracteriza todos os operadores ortogonais em  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 3.1.** *Seja  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação.*

*$U$  é uma aplicação ortogonal se, e somente se,  $\beta = \{U(e_1), U(e_2), \dots, U(e_n)\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  e  $U$  é um operador linear.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $C = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ .

Sendo  $U$  uma função ortogonal, então

$$\langle U(e_i), U(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Assim,  $U(C) = \{U(e_1), U(e_2), \dots, U(e_n)\}$  é um conjunto ortonormal.

Provemos agora que  $U(C)$  é uma base.

Suponha que existam  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , tais que

$$\alpha_1 U(e_1) + \alpha_2 U(e_2) + \dots + \alpha_n U(e_n) = 0.$$

Assim,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  temos

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_1 U(e_1) + \dots + \alpha_n U(e_n), U(e_i) \rangle &= \langle 0, U(e_i) \rangle = 0 \\
 \Leftrightarrow \alpha_1 \langle U(e_1), U(e_i) \rangle + \dots + \alpha_i \langle U(e_i), U(e_i) \rangle + \dots + \alpha_n \langle U(e_n), U(e_i) \rangle &= 0 \\
 \Leftrightarrow \alpha_1 0 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_i 1 + \dots + \alpha_n 0 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \alpha_i &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $U(C)$  é linearmente independente.

Como  $U(C)$  tem  $n$  elementos e é L.I, segue do Corolário 2.2 que  $U(C)$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Provemos agora que  $U$  é um operador linear.



Dado  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , como  $U(C) = \{U(e_1), U(e_2), \dots, U(e_n)\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ , então segue da Proposição 2.3 que existem únicos  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$U(v) = \beta_1 U(e_1) + \beta_2 U(e_2) + \dots + \beta_n U(e_n). \quad (3.1)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \langle U(v), U(e_i) \rangle &= \langle \beta_1 U(e_1) + \beta_2 U(e_2) + \dots + \beta_n U(e_n), U(e_i) \rangle \\ &= \beta_1 \langle U(e_1), U(e_i) \rangle + \dots + \beta_i \langle U(e_i), U(e_i) \rangle + \dots + \beta_n \langle U(e_n), U(e_i) \rangle \\ &= \beta_1 0 + \dots + \beta_i 1 + \dots + \beta_n 0 = \beta_i. \end{aligned}$$

Por outro lado,  $v = v_1 e_1 + \dots + v_i e_i + \dots + v_n e_n$  e

$$\begin{aligned} \langle v, e_i \rangle &= \langle v_1 e_1 + \dots + v_i e_i + \dots + v_n e_n, e_i \rangle \\ &= v_1 \langle e_1, e_i \rangle + \dots + v_i \langle e_i, e_i \rangle + \dots + v_n \langle e_n, e_i \rangle \\ &= 0 + \dots + v_i + \dots + 0 = v_i. \end{aligned}$$

Como  $U$  é uma aplicação ortogonal segue que

$$\beta_i = \langle U(v), U(e_i) \rangle = \langle v, e_i \rangle = v_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Assim, segue de (3.2) e (3.1) que

$$\begin{aligned} U(v) &= \beta_1 U(e_1) + \dots + \beta_n U(e_n) \\ &= v_1 U(e_1) + \dots + v_n U(e_n). \end{aligned}$$

Portanto,  $U(v) = v_1 U(e_1) + \dots + v_n U(e_n)$ ,  $\forall v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Dados  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , e  $w = (\gamma_1 \dots \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$  temos

$$\begin{aligned} U(v) &= v_1 U(e_1) + \dots + v_n U(e_n) \\ U(w) &= \gamma_1 U(e_1) + \dots + \gamma_n U(e_n). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} U(v + w) &= U((v_1 + \gamma_1)e_1 + \dots + (v_n + \gamma_n)e_n) \\ &= (v_1 + \gamma_1)U(e_1) + \dots + (v_n + \gamma_n)U(e_n) \\ &= [v_1 U(e_1) + \dots + v_n U(e_n)] + [\gamma_1 U(e_1) + \dots + \gamma_n U(e_n)] \\ &= U(v) + U(w). \end{aligned}$$

Além disso, dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned} U(\lambda v) &= U(\lambda(v_1 e_1 + \dots + v_n e_n)) = U((\lambda v_1)e_1 + \dots + (\lambda v_n)e_n) \\ &= (\lambda v_1)U(e_1) + \dots + (\lambda v_n)U(e_n) = \lambda[v_1 U(e_1) + \dots + v_n U(e_n)] \\ &= \lambda U(v). \end{aligned}$$

Portanto,  $U$  é um operador linear.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um operador linear tal que  $U(C) = \{U(e_1), U(e_2), \dots, U(e_n)\}$  é uma base ortonormal. Mostraremos agora que  $U$  é uma função ortogonal.

Sejam  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Como  $U$  é um operador linear, então

$$\begin{aligned} U(v) &= v_1U(e_1) + v_2U(e_2) + \dots + v_nU(e_n) \\ U(w) &= w_1U(e_1) + w_2U(e_2) + \dots + w_nU(e_n). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle U(v), U(w) \rangle &= \langle v_1U(e_1) + \dots + v_nU(e_n), w_1U(e_1) + w_2U(e_2) + \dots + w_nU(e_n) \rangle \\ &= \langle v_1U(e_1), w_1U(e_1) \rangle + \langle v_2U(e_2), w_2U(e_2) \rangle + \dots + \langle v_nU(e_n), w_nU(e_n) \rangle \\ &= v_1w_1 \langle U(e_1), U(e_1) \rangle + v_2w_2 \langle U(e_2), U(e_2) \rangle + \dots + v_nw_n \langle U(e_n), U(e_n) \rangle \\ &= v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n \\ &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

□

## 3.2 Isometrias do $\mathbb{R}^n$

**Definição 3.2.** Uma distância definida em um conjunto  $S$  é uma função  $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  que possui as seguintes propriedades:

$$D_1 : d(u, v) \geq 0, \forall u, v \in S \text{ e } d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v;$$

$$D_2 : d(u, v) = d(v, u), \forall u, v \in S; \quad (\text{Propriedade Simétrica})$$

$$D_3 : d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v), \forall u, v \in S. \quad (\text{Desigualdade Triangular})$$

**Definição 3.3.** Seja  $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função distância num conjunto  $S$ . Diz-se que uma função  $f : S \rightarrow S$  é uma isometria se  $f$  for bijetora e  $d(f(s), f(t)) = d(s, t)$  para quaisquer  $s, t \in S$

Vimos no exemplo 2.8 que a norma  $\| \cdot \|$  calcula o comprimento de vetores em  $\mathbb{R}^n$ , além disso, se  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$d(w, v) = \|w - v\| = \sqrt{(w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 + \dots + (w_n - v_n)^2},$$

para  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  e  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , então  $d$  tem a interpretação geométrica de medir a distância de dois pontos quaisquer em  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 3.2.** A aplicação  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(a, b) = \|a - b\|$  é uma distância.

*Demonstração.* Dados  $a, b \in \mathbb{R}^n$ , então utilizando a) e b) da Proposição 2.6 temos

$$d(a, b) = \|a - b\| \geq 0$$

e

$$d(a, b) = 0 \Leftrightarrow \|a - b\| = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Além disso,

$$d(a, b) = \|a - b\| = \|(-1) \cdot (b - a)\| = |-1| \|b - a\| = d(b, a).$$

Por fim, segue da Desigualdade Triangular que

$$\begin{aligned} d(a, b) = \|a - b\| &= \|a + c - c - b\| = \|a - c + c - b\| \\ &\leq \|a - c\| + \|c - b\| = d(a, c) + d(c, b). \end{aligned}$$

□

A partir de agora, quando fizermos referência a uma isometria  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , estaremos considerando a função distância da Proposição 3.2.

### 3.3 Translações

**Definição 3.4.** Seja  $a \in \mathbb{R}^n$ , então a função  $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $T_a(v) = v + a$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}^n$ , é chamada de translação por  $a$ .

Para  $a \neq 0$ , note que  $T_a$  não é transformação linear.

**Proposição 3.3.** Toda translação é uma isometria.

*Demonstração.* Seja  $T_a$  uma translação. Provemos inicialmente que  $T_a$  preserva norma.

Dados  $u, v \in \mathbb{R}^n$  temos

$$\begin{aligned} d(T_a(u), T_a(v)) &= \|T_a(v) - T_a(u)\| = \|(v + a) - (u + a)\| \\ &= \|v + a - u - a\| = \|v - u\| = d(u, v). \end{aligned}$$

Observe que  $T_a$  é injetora, de fato usando as propriedades de espaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$  temos

$$\begin{aligned} T_a(u) = T_a(v) &\Rightarrow u + a = v + a \Rightarrow (u + a) - a = (v + a) - a \\ &\Rightarrow u + (a - a) = v + (a - a) \Rightarrow u + 0 = v + 0 \\ &\Rightarrow u = v. \end{aligned}$$

$T_a$  é sobrejetora. De fato, dado  $w \in \mathbb{R}^n$ , existe  $w - a \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$T_a(w - a) = w - a + a = w.$$

□

**Exemplo 3.2.** (1) Cada bijeção  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , define uma isometria  $U_\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$U_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} U_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = U_\sigma(y_1, y_2, \dots, y_n) &\Leftrightarrow (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \dots, y_{\sigma(n)}) \\ &\Leftrightarrow x_{\sigma(i)} = y_{\sigma(i)}, \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Como  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  é bijeção então

$$x_{\sigma(i)} = y_{\sigma(i)}, \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow x_j = y_j, \forall j = 1, \dots, n.$$

Assim,

$$U_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = U_\sigma(y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

ou seja,  $U_\sigma$  é injetor.

Além disso, se  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , tomando  $(y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, y_{\sigma^{-1}(n)})$  temos

$$\begin{aligned} U(y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, y_{\sigma^{-1}(n)}) &= (y_{\sigma(\sigma^{-1}(1))}, \dots, y_{\sigma(\sigma^{-1}(n))}) \\ &= (y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Logo,  $U_\sigma$  é sobrejetor.

Mostremos agora que  $U_\sigma$  preserva norma.

Dados  $u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  temos

$$\begin{aligned} \|U_\sigma(u) - U_\sigma(v)\| &= \|(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) - (y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \dots, y_{\sigma(n)})\| \\ &= \sqrt{(x_{\sigma(1)} - y_{\sigma(1)})^2 + \dots + (x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)})^2}. \end{aligned}$$

Como  $\sigma$  é bijeção, então

$$\sqrt{(x_{\sigma(1)} - y_{\sigma(1)})^2 + \dots + (x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)})^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

assim,

$$\begin{aligned} \|U_\sigma(u) - U_\sigma(v)\| &= \sqrt{(x_{\sigma(1)} - y_{\sigma(1)})^2 + \dots + (x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)})^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \|u - v\|. \end{aligned}$$

(2) Dados dois pontos  $u_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $v_0 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  em  $\mathbb{R}^n$ , existe uma única translação  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $T(u_0) = v_0$ .

De fato, tomando a translação  $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $a = v_0 - u_0$ , temos

$$T_a(u_0) = u_0 + a = u_0 + (v_0 - u_0) = v_0.$$

Além disso, se  $T_b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma translação com  $T_b(u_0) = v_0$ , então

$$T_b(u_0) = v_0 \Rightarrow u_0 + b = v_0 \Rightarrow b = v_0 - u_0,$$

ou seja,  $T_b = T_a$ , de onde segue a unicidade.

- (3) Se  $T_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $T_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  são isometrias então  $T_1 \circ T_2$  é uma isometria. De fato, como  $T_1$  e  $T_2$  são isometrias, em particular são funções bijetoras, assim a composta  $T_1 \circ T_2$  é bijetora, além disso, usando que  $T_1$  e  $T_2$  preservam norma segue que

$$\begin{aligned} \|(T_1 \circ T_2)(u) - (T_1 \circ T_2)(v)\| &= \|T_1(T_2(u)) - T_1(T_2(v))\| = \|T_2(u) - T_2(v)\| \\ &= \|u - v\|. \end{aligned}$$

### 3.4 Classificação de Isometrias

A seguir veremos que toda isometria é uma aplicação ortogonal a menos de uma composição com uma translação.

**Proposição 3.4.** *Uma aplicação  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma isometria se, e somente se, existe uma translação  $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e um operador ortogonal  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que*

$$f(x) = T_a \circ U(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $a = f(0)$  e considere

$$U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ dada por } U(v) = f(v) - a, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Observe que:

$$T_a \circ U(x) = T_a(U(x)) = T_a(f(x) - a) = f(x) - a + a = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, basta provar que  $U$  é uma aplicação ortogonal.

Sejam  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , usando que  $f$  é uma isometria temos

$$\begin{aligned} \|U(v) - U(w)\| &= \|f(v) - a - f(w) + a\| \\ &= \|f(v) - f(w)\| \\ &= \|v - w\|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Em particular para  $w = 0$ , temos  $\|U(v) - U(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|$ , mas

$$\begin{aligned} \|U(v) - U(0)\| &= \|U(v) - (f(0) - a)\| \\ &= \|U(v) - (a - a)\| = \|U(v)\|. \end{aligned}$$

Logo,  $\|U(v)\| = \|v\|, \forall v \in \mathbb{R}^n$ . Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \|U(v) - U(w)\|^2 &= \langle U(v) - U(w), U(v) - U(w) \rangle \\ &= \|U(v)\|^2 - 2\langle U(v), U(w) \rangle + \|U(w)\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2\langle U(v), U(w) \rangle + \|w\|^2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Da mesma forma, temos

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2. \quad (3.5)$$

De (3.3) temos  $\|v - w\|^2 = \|U(v) - U(w)\|^2$ , assim comparando (3.4) e (3.5) temos

$$\langle U(v), U(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

( $\Leftarrow$ ) Seja  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um operador ortogonal e  $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma translação. Mostraremos que  $f = T_a \circ U$  é uma isometria.

Como  $U$  é um operador ortogonal, então pela Proposição 3.1  $U$  é um operador linear e  $\{U(e_1), \dots, U(e_n)\}$  é uma base ortonormal.

Mostremos agora que  $f$  é bijetora.

Se  $v \in \mathbb{R}^n$  então  $v - a$  pode ser escrito como uma combinação linear

$$v - a = y_1 U(e_1) + \dots + y_n U(e_n), \quad y_i \in \mathbb{K}.$$

Tomando  $x = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in \mathbb{R}^n$  temos

$$\begin{aligned} f(x) &= T_a(U(x)) = T_a(U(y_1 e_1 + \dots + y_n e_n)) \\ &= T_a(y_1 U(e_1) + \dots + y_n U(e_n)) = T_a(v - a) \\ &= (v - a) + a = v. \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  é sobrejetora.

Sejam  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , assim

$$\begin{aligned} f(u) = f(v) &\Rightarrow f(u) - f(v) = 0 \\ &\Rightarrow \|f(u) - f(v)\| = 0 \Rightarrow \|U(u) + a - (U(v) + a)\| = 0 \\ &\Rightarrow \|U(u) + a - U(v) - a\| = 0 \Rightarrow \|U(u) - U(v)\| = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{\langle U(u) - U(v), U(u) - U(v) \rangle} = 0 \Rightarrow \sqrt{\langle U(u - v), U(u - v) \rangle} = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} = 0 \Rightarrow \langle u - v, u - v \rangle = 0 \\ &\Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v. \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  é injetora.

Mostremos agora que  $d(f(u), f(v)) = d(u, v)$ .

Note que

$$\begin{aligned} d(f(u), f(v)) &= \|f(v) - f(u)\| = \|U(v) + a - (U(u) + a)\| \\ &= \|U(v) - U(u)\| = \|U(v - u)\| = \sqrt{\langle U(v - u), U(v - u) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle v - u, v - u \rangle} = \|v - u\| \\ &= d(u, v). \end{aligned}$$

□

Observe que na implicação que prova toda isometria é uma composição de uma translação com um operador ortogonal, usamos apenas que  $f$  preserva comprimento, assim temos o seguinte corolário:

**Corolário 3.1.** *Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função que preserva comprimento, ou seja,*

$$\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n,$$

*e  $f(0) = 0$ , então  $f$  é uma aplicação ortogonal.*

*Demonstração.* Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é tal que

$$\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n,$$

com  $f(0) = 0$ , então pelo teorema anterior temos

$$f(u) = T_a \circ U(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n,$$

onde  $a = f(0)$  e  $U$  é uma aplicação ortogonal.

Como  $a = f(0) = 0$ , então

$$f(u) = (T_a \circ U)(u) = U(u) + a = U(u) + 0 = U(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja,  $f$  é uma aplicação ortogonal.

**Exemplo 3.3.** (1) Se  $R$  é uma rotação em torno da origem, então  $R$  é uma aplicação ortogonal.

De fato, como  $R$  preserva comprimento e  $R(0) = 0$ , então pelo corolário anterior segue que  $R$  é uma aplicação ortogonal.

Para determinar uma rotação de ângulo  $\theta$  sobre um vetor  $u = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2$ , basta usar a seguinte matriz de rotação:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta)a^2 & (1 - \cos \theta)ab + (\sin \theta)c & (1 - \cos \theta)ac - (\sin \theta)b \\ (1 - \cos \theta)ba - (\sin \theta)c & \cos \theta + (1 - \cos \theta)b^2 & (1 - \cos \theta)bc + (\sin \theta)a \\ (1 - \cos \theta)ca + (\sin \theta)b & (1 - \cos \theta)cb - (\sin \theta)a & \cos \theta + (1 - \cos \theta)c^2 \end{bmatrix}.$$





# Capítulo 4

## Geometria Projetiva Elíptica Dupla

### 4.1 Geometria Projetiva Elíptica Dupla

Veremos que a esfera unitária canônica  $S^2$  será um modelo de “plano” de uma geometria chamada Geometria Projetiva Elíptica Dupla.

Nessa geometria não é considerado o grupo de ordem do sistema axiomático da Geometria Euclidiana imposto por Hilbert. Além disso, as retas elípticas são os grandes círculos da esfera  $S^2$  e dois pontos distintos de um círculo definem dois segmentos de círculo, assim ao falarmos de um segmento de reta elíptica com extremos  $A$  e  $B$  é necessário ser mais preciso indicando qual seria seu “interior”.

Outra diferença em relação à Geometria Euclidiana é que no grupo axiomático, mais especificamente no Axioma  $IV_1$  do grupo de congruência, como não existe ordem, deve-se omitir a expressão “Um dado lado da reta”. Outra importante diferença está no Axioma V, ao contrário do que ocorre na Geometria Euclidiana, na Geometria Projetiva Elíptica Dupla temos que sempre ocorre interseção entre quaisquer duas retas e a interseção é dada por dois pontos, por este motivo o termo “Dupla”.

A região que no plano Euclidiano era denominada ângulo, aqui terá uma região correspondente a qual chamaremos de lua.

Seguem abaixo o sistema de axiomas da *Geometria Projetiva Elíptica Dupla*:

I. *Termos Indefinidos:*

Ponto, reta, plano, pertence e congruência.

II. *Axiomas de Incidência:*

$II_1$ : Para cada dois pontos distintos existe uma reta que os contém.

$II_2$ : Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.

$II_3$ : Toda reta contém pelo menos dois pontos.

IV. *Axiomas de Congruência:*

$IV_1$ : Se  $A$  e  $B$  são dois pontos numa reta  $r_\eta$  e  $A'$  é um outro ponto de uma reta  $r_{\eta'}$ , não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto  $B'$  em  $r_{\eta'}$  tais que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  são congruentes.

$IV_2$ : Se um segmento  $\overline{A'B'}$  e um segmento  $\overline{A''B''}$  são congruentes a um mesmo segmento  $\overline{AB}$  então os segmentos  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  são congruentes entre si.

$IV_3$ : Sobre uma reta  $r_\eta$ , sejam  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  dois segmentos da mesma que, exceto por  $B$  não têm pontos em comum. Além disto, sobre uma outra ou a mesma reta  $r_{\eta'}$ , sejam  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$  dois segmentos que, exceto por  $B'$  não tem pontos em comum. Neste caso, se  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  e  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ , então  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ .

$IV_4$ : Se  $L_{\eta\nu}$  é uma lua e se  $r_{\nu'}$  é uma reta elíptica, então existem duas retas elípticas  $r_{\eta'}$  e  $r_{\nu''}$  tais que  $L_{\eta\nu} = L_{\eta'\nu'} = L_{-\nu''\nu''}$ . Além disto, cada lua é congruente a si mesma.

$IV_5$ : Se para dois triângulos  $\Delta_{uvw}$  e  $\Delta_{u'v'w'}$  temos

$$\overline{uv} = \overline{u'v'}, \quad \overline{vw} = \overline{v'w'} \quad \text{e} \quad L_{\eta\nu} = L_{\eta'\nu'},$$

com

$$\eta = u \times v, \quad \nu = w \times u \quad \text{e} \quad \eta' = u' \times v', \quad \nu' = w' \times u',$$

então  $\Delta_{uvw}$  é congruente à  $\Delta_{u'v'w'}$ .

#### V. Axiomas das Paralelas:

Seja  $r_\eta$  uma reta e  $A$  um ponto não pertencente à  $r_\eta$ . Então toda reta que passa por  $A$  intersecta  $r_\eta$ .

#### VI. Axiomas de Continuidade:

Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de um reta menos um de seus pontos.

### 4.1.1 Distância Esférica

Nosso objetivo será estudar o conjunto  $\mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3, \|v\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$  equipado com uma função distância.

Sejam  $u$  e  $v \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  e  $\theta(u, v) \in [0, \pi]$  a medida do ângulos entre eles. Assim, como vimos no capítulo anterior:

$$\cos \theta(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|},$$

além disso, sabemos que:

$$\sin \theta(u, v) = \frac{\|u \times v\|}{\|u\| \|v\|}.$$

Como  $u, v \in \mathbb{S}^2$ , devemos ter

$$\cos \theta(u, v) = \langle u, v \rangle \quad e \quad \text{sen } \theta(u, v) = \|u \times v\|.$$

Chamaremos de distância em  $\mathbb{S}^2$  a função:

$$d : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(u, v) = \theta(u, v).$$

**Proposição 4.1.** *Se  $\theta(u, v) = d(u, v)$ , então*

$$0 \leq d(u, v) \leq \pi \quad e \quad d(u, v) = \pi \Leftrightarrow v = -u.$$

*Demonstração.* A desigualdade segue diretamente da definição pois  $d(u, v) = \theta(u, v) \in [0, \pi]$ .

Mostremos agora que  $d(u, v) = \pi \Leftrightarrow v = -u$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $-u = v$ , então

$$\cos \theta(u, v) = \cos \theta(u, -u) = \langle u, -u \rangle = -1 \quad \langle u, u \rangle = 1 \quad \|u\|^2 = 1.$$

Como  $\cos \theta(u, v) = -1$  com  $\theta(u, v) \in [0, \pi]$ , segue que  $\theta(u, v) = \pi$ .

( $\Rightarrow$ ) Se  $d(u, v) = \pi$ , então

$$\|u \times v\| = \text{sen } \theta(u, v) = \text{sen } \pi = 0,$$

além disso,

$$\langle u, v \rangle = \cos \theta(u, v) = \cos \pi = -1.$$

Como  $\|u \times v\| = 0$ , então pela Proposição 2.10 temos  $u = \lambda v$ .

Logo,

$$\langle u, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = -1 \Rightarrow \lambda \|v\|^2 = -1 \Rightarrow \lambda = -1.$$

Portanto,  $u = -v$ . □

Para a próxima proposição é aconselhável rever a definição de função distância dada em 3.2.

**Proposição 4.2.** *A função  $d : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $d(u, v) = \theta(u, v)$  é uma função distância em  $\mathbb{S}^2$ .*

*Demonstração.* Sejam  $u, v, w \in \mathbb{S}^2$  quaisquer.

$D_1$ : Por definição  $d(u, v) = \theta(u, v) \in [0, \pi]$ , assim,  $d(u, v) \geq 0$ .

Se  $d(u, v) = \theta(u, v) = 0$ , então

$$\|u \times v\| = \text{sen } \theta(u, v) = 0.$$

Assim, pela Proposição 2.10 segue que  $u = \lambda v$ .

Além disso,  $\langle u, v \rangle = \cos \theta(u, v) = 1$ , então

$$\lambda = \lambda 1 = \lambda \langle u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2 = 1.$$

Portanto,  $u = v$ .

Por outro lado, se  $u = v$ , então

$$\cos \theta(u, v) = \cos \theta(u, u) = \langle u, u \rangle = \|u\|^2 = 1.$$

Como  $\theta(u, v) \in [0, \pi]$  e  $\cos \theta(u, v) = 1$ , então  $d(u, v) = \theta(u, v) = 0$ .

$D_2$ : Usando a propriedade comutativa do produto interno temos

$$\cos \theta(u, v) = \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = \cos \theta(v, u).$$

Como  $\theta(u, v) \in [0, \pi]$  e  $\cos \theta(u, v) = \cos \theta(v, u)$ , então  $\theta(u, v) = \theta(v, u)$ , logo

$$d(u, v) = \theta(u, v) = \theta(v, u) = d(v, u).$$

$D_3$ : Dividiremos essa demonstração em 2 casos.

1° caso:  $\pi \leq \theta(u, v) + \theta(v, w)$ .

Como  $\theta(u, w) \in [0, \pi]$ , então neste caso,

$$\theta(u, w) \leq \pi \leq \theta(u, v) + \theta(v, w).$$

2° caso:  $\theta(u, v) + \theta(v, w) \leq \pi$ .

Sabemos que a função  $\cos : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  é decrescente.

Assim, se provarmos que

$$\cos(\theta(u, v) + \theta(v, w)) \leq \cos \theta(u, w),$$

teremos como consequência que  $\theta(u, w) \leq \theta(u, v) + \theta(v, w)$ .

Como

$$\cos(\theta(u, v) + \theta(v, w)) = \cos \theta(u, v) \cos \theta(v, w) - \operatorname{sen} \theta(u, v) \operatorname{sen} \theta(v, w),$$

então

$$\cos(\theta(u, v) + \theta(v, w)) = \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \|u \times v\| \|v \times w\|. \quad (4.1)$$

Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$|\langle u \times v, v \times w \rangle| \leq \|u \times v\| \|v \times w\|,$$

assim,

$$-\|u \times v\| \|v \times w\| \leq \langle u \times v, v \times w \rangle \leq \|u \times v\| \|v \times w\|.$$

Portanto,

$$\|u \times v\| \|v \times w\| \geq -\langle u \times v, v \times w \rangle \geq -\|u \times v\| \|v \times w\|.$$

Assim, somando  $\langle u, v \rangle \langle v, w \rangle$  na inequação anterior obtemos:

$$\langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \|u \times v\| \|v \times w\| \leq \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u \times v, v \times w \rangle. \quad (4.2)$$

Pela Proposição 2.10 temos

$$\langle u \times v, v \times w \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle u, v \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \end{bmatrix} = \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle v, v \rangle \langle u, w \rangle,$$

assim, utilizando (4.2) em (4.1) obtemos

$$\begin{aligned} \cos(\theta(u, v) + \theta(v, w)) &\leq \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u \times v, v \times w \rangle \\ &= \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - [\langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle v, v \rangle \langle u, w \rangle] \\ &= \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle + \langle v, v \rangle \langle u, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle \langle u, w \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\langle u, w \rangle = \cos \theta(u, w)$  e  $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 = 1$ , segue que

$$\cos(\theta(u, v) + \cos \theta(v, w)) \leq \cos \theta(u, w).$$

□

#### 4.1.2 Retas Elípticas; Axiomas de Incidência e Axioma das Paralelas

Nesta seção introduziremos o conceito de reta elíptica, além de verificar os axiomas de Incidência e o axioma das Paralelas.

Dizemos que os grandes círculos da esfera unitária são equivalentes às retas da Geometria Euclidiana, pois tanto nos grandes círculos como nos segmentos de retas a trajetória percorrida entre dois pontos é a que minimiza a distância entre os mesmos.

Para explicar melhor o que significa esses grandes círculos, precisamos relembrar o conceito de plano Euclidiano.

Chamaremos de  $\Gamma$  o plano de  $\mathbb{R}^3$  passando pela origem  $O$  e com vetor normal  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  não nulo.

Assim, a equação linear do plano é

$$\Gamma : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0.$$

Em outras palavras,

$$\Gamma = \{w \in \mathbb{R}^3 / \langle w, \eta \rangle = 0\},$$

onde  $\langle, \rangle$  é o produto interno canônico.

**Observação 4.1.** Como vimos anteriormente,  $\Gamma$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ . Para destacar o vetor normal  $\eta$ , denotaremos  $\Gamma$  por  $\Gamma_\eta$ , ou seja,  $\Gamma_\eta$  é o único plano de  $\mathbb{R}^3$  contendo a origem cujo vetor normal é  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ .

**Exemplo 4.1.** Se  $\eta = (5, 7, 1) \in \mathbb{R}^3$ , então o único plano que contém a origem e possui  $\eta$  como vetor normal é o conjunto formado por todos os vetores  $v = (x, y, z)$  tais que  $5x + 7y + z = 0$ .

**Definição 4.1.** Uma reta elíptica é um subconjunto  $r \subset \mathbb{S}^2$  onde  $r = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$ , para algum vetor normal  $\eta$ . Para deixar claro qual vetor normal está sendo usado para definir  $r$ , denotaremos  $r = r_\eta$ .

Chamaremos  $\mathbb{S}^2$  de plano elíptico e seus elementos de pontos elípticos. Além disso, quando usarmos a expressão grande círculos estaremos nos referindo às retas elípticas.

Portanto, uma reta elíptica é o subconjunto do plano elíptico formado pelos pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  satisfazendo as equações :

$$r_\eta : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0 \end{cases}$$

Segue abaixo a ilustração da reta elíptica  $r_\eta$ .

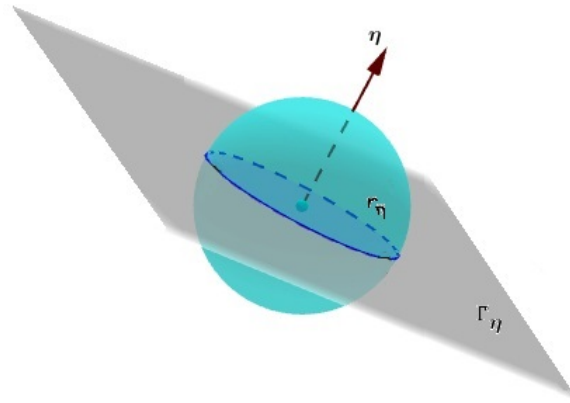


Figura 4.1: Reta Elíptica determinada por  $\Gamma_\eta$

**Definição 4.2.** Dizemos que  $v \in \mathbb{S}^2$  e uma reta elíptica  $r_\eta \subset \mathbb{S}^2$  são incidentes se  $v \in r_\eta$ .

**Proposição 4.3.** (Critério de Incidência)

Sejam um vetor  $v \in \mathbb{S}^2$  e um grande círculo  $r_\eta \subset \mathbb{S}^2$ , então

$$v \text{ e } r_\eta \text{ são incidentes se, e somente se, } \langle v, \eta \rangle = 0.$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $v$  e  $r_\eta$  são incidentes, então  $v \in r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ .

Assim,  $v \in \Gamma_\eta = \{w \in \mathbb{R}^3 / \langle w, \eta \rangle = 0\}$ , de onde segue que  $\langle v, \eta \rangle = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Por outro lado, se  $\langle v, \eta \rangle = 0$ , então

$$v \in \Gamma_\eta = \{w \in \mathbb{R}^3 / \langle w, \eta \rangle = 0\},$$

assim, como  $v$  é um vetor de  $\mathbb{S}^2$ , segue que  $v \in r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$ .

Portanto,  $v$  e  $r_\eta$  são incidentes.

□

Verifiquemos agora a veracidade do *Axioma II<sub>3</sub>*, ou seja,

**“Existem pelo menos dois pontos em uma reta”.**

Dado uma reta elíptica  $r_\eta$  com  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , então a equação

$$\langle (x, y, z), \eta \rangle = \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0,$$

possui infinitas soluções. Tomando  $u \neq 0$  e  $v \neq 0$  dois pontos quaisquer do conjunto solução, com  $u$  não sendo um múltiplo de  $v$ , então

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \eta \right\rangle &= \frac{1}{\|u\|} \langle u, \eta \rangle = 0 \\ \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \eta \right\rangle &= \frac{1}{\|v\|} \langle v, \eta \rangle = 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| &= \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1 \\ \left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| &= \frac{\|u\|}{\|u\|} = 1. \end{aligned}$$

Além disso,  $\frac{u}{\|u\|}$  e  $\frac{v}{\|v\|}$  são distintos, caso contrário  $u$  e  $v$  seriam múltiplos. Portanto,  $\frac{u}{\|u\|}$  e  $\frac{v}{\|v\|}$  são pontos distintos em  $r_\eta$ .

Mostraremos agora que também é verificado o *Axioma II<sub>1</sub>*, ou seja,

**“Dois pontos distintos determinam uma reta”.**

Sejam  $u, v$  pontos distintos de  $\mathbb{S}^2$ .

Primeiramente mostremos que

$$\eta = u \times v \text{ é o vetor nulo se, e somente se, } u = -v.$$

Sabemos da Proposição 4.1 que

$$u = -v \Leftrightarrow \theta(u, v) = d(u, v) = \pi.$$

Como,  $\|u \times v\| = \text{sen } \theta(u, v)$ , e  $u$  e  $v$  são distintos, segue que

$$u = -v \Leftrightarrow \theta(u, v) = \pi \Leftrightarrow \|u \times v\| = \text{sen } \theta(u, v) = 0 \Leftrightarrow u \times v = 0.$$

Assim, no caso  $u \neq -v$ , temos  $\eta = u \times v \neq 0$  e podemos considerar o plano  $\Gamma_\eta$  e a reta elíptica  $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ , para  $\eta = u \times v$ .

Como  $u \times v$  é ortogonal aos vetores  $u$  e  $v$ , temos

$$\langle u, \eta \rangle = \langle u, u \times v \rangle = 0 = \langle v, u \times v \rangle = \langle v, \eta \rangle.$$

Assim, do critério de incidência dado na Proposição 4.3, segue que

$$u, v \in r_\eta,$$

ou seja,  $u$  e  $v$  determinam a reta  $r_\eta$ .

A reta determinada por  $u$  e  $v$  é única.

De fato, suponha que exista outra reta  $r_{\tilde{\eta}}$  tal que

$$u, v \in r_{\tilde{\eta}} \quad \text{e} \quad r_{\tilde{\eta}} = \Gamma_{\tilde{\eta}} \cap \mathbb{S}^2,$$

com  $\Gamma_{\tilde{\eta}}$  passando pela origem.

Sabemos da Geometria Euclidiana que três pontos não colineares em  $\mathbb{R}^3$  determinam um único plano, assim como  $u, v$  e a origem são pontos não colineares pertencentes à  $\Gamma_\eta$  e  $\Gamma_{\tilde{\eta}}$ , então  $\Gamma_\eta = \Gamma_{\tilde{\eta}}$ . Portanto,

$$r_{\tilde{\eta}} = \Gamma_{\tilde{\eta}} \cap \mathbb{S}^2 = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2 = r_\eta.$$

Se  $u = -v$ , teríamos  $u \times v = 0$ , e não seria possível determinar o plano  $\Gamma_\eta$ . Neste caso, tome  $\eta \in \mathbb{R}^3$  um vetor não nulo qualquer tal que  $\langle u, \eta \rangle = 0$ .

Como  $u = -v$  segue que

$$\langle v, \eta \rangle = \langle (-1)u, \eta \rangle = (-1) \langle u, \eta \rangle = 0.$$

Portanto,  $\langle u, \eta \rangle = \langle v, \eta \rangle = 0$ , e pela condição de incidência dada na Proposição 4.3, temos que  $u$  e  $v$  pertencem a  $r_\eta$ .

Assim,  $u$  e  $v$  não determinam uma única reta, pois para cada  $\eta$  não nulo e ortogonal à  $u$ , podemos formar uma reta elíptica  $r_\eta$  passando por  $u$  e  $v$ .

A figura abaixo ilustra as infinitas retas passando por  $u$  e  $v$ , no caso  $u = -v$ .

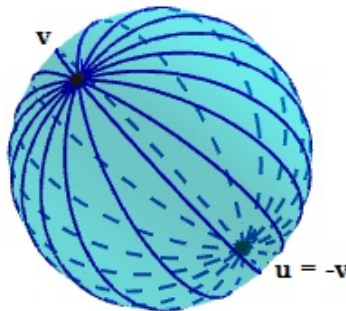


Figura 4.2: Infinitas retas passando por  $u$  e  $v$

**Proposição 4.4.** *Se  $\Gamma_\eta$  e  $\Gamma_\nu$  são dois planos distintos do  $\mathbb{R}^3$  contendo a origem, então a interseção dos planos é uma reta Euclidiana do  $\mathbb{R}^3$  contendo a origem e formada pelos múltiplos do vetor  $u = \eta \times \nu$  (veja figura 4.3).*



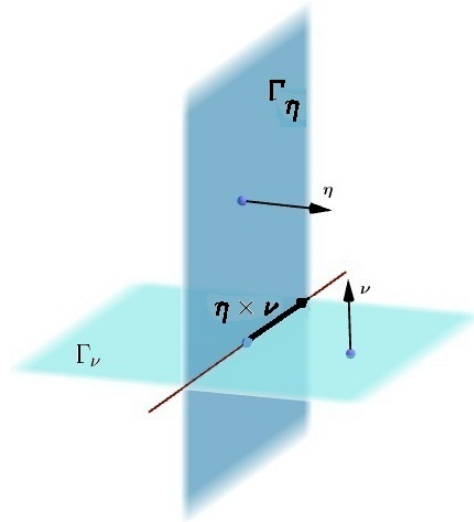


Figura 4.3: Interseção de planos euclidianos

*Demonstração.* De fato, temos

$$\begin{aligned}\Gamma_\eta &= \{x \in \mathbb{R}^3 / \langle x, \eta \rangle = 0\}, \\ \Gamma_\nu &= \{y \in \mathbb{R}^3 / \langle y, \nu \rangle = 0\}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu = \{z \in \mathbb{R}^3 / \langle z, \eta \rangle = 0 \text{ e } \langle z, \nu \rangle = 0\}.$$

Verifiquemos que

$$\Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu = \{\lambda(\eta \times \nu), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Pela Proposição 2.8 temos  $\langle \eta, \eta \times \nu \rangle = 0 = \langle \nu, \eta \times \nu \rangle$ .

Logo,  $\langle \eta, \lambda(\eta \times \nu) \rangle = \lambda \langle \eta, \eta \times \nu \rangle = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , ou seja,

$$\lambda(\eta \times \nu) \in \Gamma_\eta, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Da mesma forma,  $\langle \nu, \lambda(\eta \times \nu) \rangle = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

Portanto,  $\lambda(\eta \times \nu) \in \Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

Por outro lado,

$$x \in \Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu \implies \langle x, \eta \rangle = 0 = \langle x, \nu \rangle.$$

Assim, segue da Proposição 2.10 que

$$(\eta \times \nu) \times x = \langle \eta, x \rangle \nu + \langle \nu, x \rangle \eta = 0.$$

Logo,  $\|(\eta \times \nu) \times x\| = 0$ .

Portanto, da Proposição 2.10 segue que  $\{x, \eta \times \nu\}$  é L.D, ou seja, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  com  $x = \lambda(\eta \times \nu)$ .  $\square$

**Proposição 4.5.** (Concorrência de duas retas)

Dois retas elípticas distintas, digamos  $r_\eta$  e  $r_\nu$ , sempre se intersectam. Além disso, a interseção ocorre em dois pontos, a saber:

$$u_1 = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu \quad e \quad u_2 = -\frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu.$$

*Demonstração.* Sejam  $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$  e  $r_\nu = \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2$ .

Observe que

$$r_\eta \cap r_\nu = \Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2,$$

além disso, pela proposição anterior temos

$$\Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu = \{\lambda(\eta \times \nu); \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Como os vetores de  $\mathbb{S}^2$  são unitários, dado um vetor  $w$  pertencente a  $r_\eta \cap r_\nu = \Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2$ , deve existir  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$w = \lambda(\eta \times \nu) \quad e \quad \|w\| = 1,$$

assim,

$$1 = \|w\| = \|\lambda(\eta \times \nu)\| = |\lambda| \|\eta \times \nu\|.$$

Logo,  $|\lambda| = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|}$ , ou seja,

$$\lambda = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{1}{\|\eta \times \nu\|}.$$

Portanto, os únicos pontos em  $r_\eta \cap r_\nu$  são

$$u_1 = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu \quad e \quad u_2 = -\frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu.$$

□

A figura abaixo mostra uma ilustração da interseção das retas elípticas  $r_\eta$  e  $r_\nu$  no ponto  $u_1$  e no seu antípoda  $u_2$ .

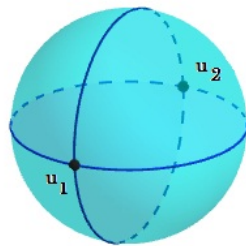


Figura 4.4: Interseção de retas elípticas

Segue da proposição anterior que o *Axioma das Paralelas* é satisfeito, ou seja,  
**“Se  $r_\eta$  é uma reta e  $A$  um ponto não pertencente à  $r_\eta$ , então toda reta que passa por  $A$  intersecta  $r_\eta$ ”.**

De fato, dado um ponto  $A$  não pertencente a uma reta elíptica  $r_\eta$ , se  $r_\nu$  passa por  $A$ , então pela proposição anterior  $r_\eta$  intersecta  $r_\nu$  em dois pontos.

**Proposição 4.6.** (*Equação de colinearidade para três pontos*)

Se  $u, v, w \in \mathbb{S}^2$ , então  $u, v, w$  são colineares se, e somente se,  $\det [u, v, w] = 0$ .

*Demonstração.* Analisemos primeiramente o caso em que  $u, v, w$  não são todos distintos. Neste caso, sem perda de generalidade suponha que  $u = v$ .

Sabemos que dois pontos distintos determinam uma reta, logo  $u, v$  e  $w$  são colineares, já que  $u = v$ . Por outro lado, sabemos que se duas linhas de uma matriz são múltiplas uma da outra então o determinante é nulo, assim  $\det [u, v, w] = 0$ . Portanto, neste caso não há o que provar.

Consideremos agora o caso em que  $u, v, w \in \mathbb{S}^2$  são três pontos distintos, tal que  $v = -w$ .

Sendo  $u$  e  $w$  dois pontos distintos, então  $u$  e  $w$  são colineares, ou seja, existe uma reta elíptica  $r_\eta$  com  $u, w \in r_\eta$ .

Observe que pelo critério de incidência dado na Proposição 4.3 temos

$$\begin{aligned} w \in r_\eta \Rightarrow \langle w, \eta \rangle = 0 &\Rightarrow -\langle w, \eta \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle -w, \eta \rangle = 0 \Rightarrow \langle v, \eta \rangle = 0 \\ &\Rightarrow v \in r_\eta. \end{aligned}$$

Logo, neste caso temos  $u, v$  e  $w$  colineares.

Além disso,  $\det [u, v, w] = 0$  pois a matriz possui linhas proporcionais.

Portanto, neste caso também não há o que provar.

Pelas considerações anteriores, basta mostrarmos que a proposição é verificada no caso em que  $u, v, w \in \mathbb{S}^2$  são três pontos distintos com  $v \neq -w$ .

Por definição, três pontos são colineares se, e somente se, existe uma reta elíptica contendo os mesmos, ou seja,  $u, v$  e  $w$  são colineares, se e somente se, existe  $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$  tal que  $u, v, w \in r_\eta$ .

Como  $v \neq -w$  sabemos que temos uma única reta contendo  $v, w$ . Tal reta contendo  $v$  e  $w$  é dada por  $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$  com  $\eta = v \times w$ .

Assim,  $u, v$  e  $w$  são colineares no plano elíptico  $\mathbb{S}^2$  se, e somente se,  $u, v$  e  $w$  pertencem ao plano  $\Gamma_\eta$  com  $\eta = v \times w$ .

Portanto,  $u, v$  e  $w$  são colineares no plano elíptico  $\mathbb{S}^2$  se, e somente se,

$$\langle u, \eta \rangle = \langle v, \eta \rangle = \langle w, \eta \rangle = 0.$$

Como  $\langle v, \eta \rangle = \langle v, v \times w \rangle = 0$  e  $\langle w, \eta \rangle = \langle w, v \times w \rangle = 0$ , então

$$u, v \text{ e } w \text{ são colineares se, e somente se, } \langle u, \eta \rangle = 0. \quad (4.3)$$

Como  $\langle u, v \times w \rangle = \det [u, v, w]$ , concluímos por (4.3) que

$$u, v, w \text{ são colineares se, e somente se, } \det [u, v, w] = 0.$$

□

Como todos os pontos são tomados no plano elíptico  $\mathbb{S}^2$ , para verificarmos o *Axioma*  $II_2$ , basta mostrar que

**“Existem pelo menos três pontos que não estão em uma mesma reta”.**

Observe que esta afirmação segue diretamente da proposição anterior.

De fato, sejam  $u$  e  $v$  pontos distintos de uma reta elíptica  $r_\eta$  e tome  $w \in \mathbb{S}^2$ , com  $\det [u, v, w] \neq 0$ . Assim, pela proposição anterior  $u, v$  e  $w$  são pontos que não estão em uma mesma reta.

Mostremos agora a seguinte condição para concorrência entre retas elípticas:

**Proposição 4.7.** (*Condição para retas projetivas serem concorrentes*)

Sejam  $r_\eta, r_\mu$  e  $r_\nu$  três retas elípticas, então

$$r_\eta, r_\mu \text{ e } r_\nu \text{ são concorrentes se, e somente se, } \det [\eta, \mu, \nu] = 0.$$

*Demonstração.* Sejam  $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ ,  $r_\mu = \Gamma_\mu \cap \mathbb{S}^2$  e  $r_\nu = \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2$  três retas elípticas e suponha sem perda de generalidade que  $r_\eta$  e  $r_\mu$  são distintas.

Sabemos pela Proposição 4.5 que

$$r_\eta \cap r_\mu = \left\{ \frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|}, -\frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|} \right\},$$

assim,  $r_\eta, r_\mu$  e  $r_\nu$  são concorrentes, se e somente se,

$$u = \frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|} \in r_\nu \quad \text{ou} \quad -u = \frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|} \in r_\nu.$$

Além disso, temos

$$u \in r_\nu \Leftrightarrow \langle u, \nu \rangle = 0 \Leftrightarrow -\langle u, \nu \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle -u, \nu \rangle = 0.$$

Logo,  $r_\eta, r_\mu$  e  $r_\nu$  são concorrentes se, e somente se,  $\langle u, \nu \rangle = 0$ .

Como

$$\langle u, \nu \rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|}, \nu \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\|\eta \times \mu\|} \langle \eta \times \mu, \nu \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \eta \times \mu, \nu \rangle = 0,$$

então,  $r_\eta, r_\mu$  e  $r_\nu$  são concorrentes se, e somente se,

$$0 = \langle \eta \times \mu, \nu \rangle = \det [\eta, \mu, \nu].$$

□

**Exemplo 4.2.** Verifique se os pontos elípticos  $m, p$  e  $q$  são colineares e, caso sejam, determine a reta elíptica  $r_\eta$  que os contém.

$$a) m = (1, 0, 0), p = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right), q = \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \right).$$

Verifiquemos se  $m, p, q$  são colineares.

$$\det [m, p, q] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{11}} & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \neq 0.$$

Portanto,  $m, n, q$  não são colineares.

$$b) m = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), p = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), q = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Mostremos que  $m, p, q$  são colineares.

De fato,

$$\det [m, p, q] = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} = 0.$$

Portanto,  $m, p, q$  são colineares.

Determinemos agora a reta que passa por eles.

Como  $m \neq -p$ , sabemos que  $r_\eta$  com  $\eta = m \times p$  é a única reta elíptica contendo  $m$  e  $p$ .

Sendo  $m, n$  e  $p$  colienares, pela unicidade concluímos que  $m, p, q \in r_\eta$ .

Temos

$$\begin{aligned} \eta = m \times p &= \left[ \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right] \\ &= \left( 0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$r_\eta : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ -\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0. \end{cases}$$

### 4.1.3 Retas Elípticas Orientadas

Sejam  $v$  um vetor e  $\eta$  o vetor normal ao plano  $\Gamma_\eta$ .

**Definição 4.3.** Se  $\langle v, \eta \rangle > 0$ , então dizemos que  $v$  está no semiespaço positivo definido por  $\Gamma_\eta$ . Se  $\langle v, \eta \rangle < 0$ , então dizemos que  $v$  está no semiespaço negativo definido por  $\Gamma_\eta$ . Além disso, se  $\langle v, \eta \rangle = 0$ , então  $v$  está no plano  $\Gamma_\eta$ .

A partir de agora quando usarmos a notação  $\Gamma_\eta$ , estaremos considerando  $\Gamma_\eta$  com uma orientação dada pelo vetor normal  $\eta$ . Geometricamente, o semiespaço positivo é o lado de “cima” do plano  $\Gamma_\eta$ , ou seja, o lado do plano para o qual o vetor  $\eta$  está apontando.

**Proposição 4.8.** *Se  $\lambda > 0$ , então  $\Gamma_\eta = \Gamma_{\lambda\eta}$  como conjuntos e são iguais como planos orientados. Se  $\lambda < 0$ , então  $\Gamma_\eta = \Gamma_{\lambda\eta}$  como conjuntos, mas são distintos como planos orientados.*

*Demonstração.* Mostremos que  $\Gamma_\eta = \Gamma_{\lambda\eta}, \forall \lambda \in \mathbb{R}^3$  como conjunto.

De fato, dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos

$$v \in \Gamma_\eta \Leftrightarrow \langle v, \eta \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda \langle v, \eta \rangle = \lambda \cdot 0 \Leftrightarrow \langle v, \lambda\eta \rangle = 0 \Leftrightarrow v \in \Gamma_{\lambda\eta}.$$

Se  $\lambda > 0$ , então  $v$  está no semiespaço positivo de  $\Gamma_\eta$  se, e somente se,

$$\begin{aligned} \langle v, \eta \rangle > 0 &\Leftrightarrow \lambda \cdot \langle v, \eta \rangle > \lambda \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow \langle v, \lambda\eta \rangle > 0 \\ &\Leftrightarrow v \text{ está no semiespaço positivo de } \Gamma_{\lambda\eta}. \end{aligned}$$

Analogamente se  $\lambda < 0$ , então  $v$  está no semiespaço positivo de  $\Gamma_\eta$  se, e somente se,

$$\begin{aligned} \langle v, \eta \rangle > 0 &\Leftrightarrow \lambda \langle v, \eta \rangle < \lambda \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow \langle v, \lambda\eta \rangle < 0 \\ &\Leftrightarrow v \text{ está no semiespaço negativo de } \Gamma_{\lambda\eta}. \end{aligned}$$

□

Pela proposição anterior para determinar um plano orientado contendo a origem precisamos apenas de um vetor unitário  $\eta \in \mathbb{S}^2$ . Tal plano será denotado por  $\Gamma_\eta$ .

Observe que se escolhermos o vetor  $-\eta \in \mathbb{S}^2$ , o plano  $\Gamma_{-\eta}$  será um conjunto igual ao anterior  $\Gamma_\eta$ , mas com orientação diferente.

Da mesma forma  $r_\eta$  denotará uma reta elíptica, com uma orientação dada por  $\eta$ , onde para cada ponto  $p \in r_\eta$ ,  $\eta \times p = \phi_\eta(p)$ , é um vetor tangente ao grande círculo  $r_\eta$  no ponto  $p$  e geometricamente descreve a velocidade de um movimento de uma partícula fazendo o percurso positivo sobre o grande círculo (veja figura 4.5).

Concluimos que cada ponto  $\eta \in \mathbb{S}^2$  determina um único círculo orientado, em outras palavras, para descrever um reta elíptica precisamos apenas de um vetor unitário  $\eta \in \mathbb{S}^2$ , tal reta elíptica orientada (grande círculo orientado) será denotado por  $r_\eta$ .

Observe que as retas elípticas  $r_\eta$  e  $r_{-\eta}$  são iguais como conjunto, mas suas orientações são opostas.

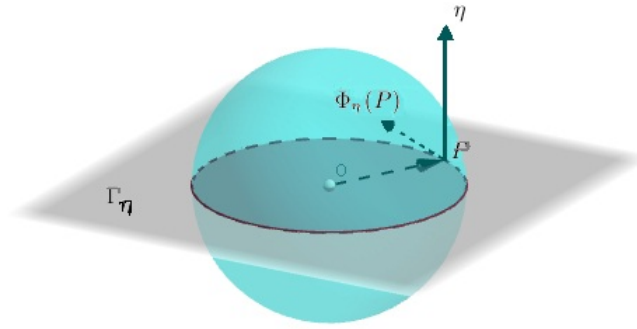


Figura 4.5: Orientação da reta elíptica

#### 4.1.4 Plano Elíptico Dual

Nesta seção iremos discutir a respeito de um conjunto cujos elementos são subconjuntos de um dado conjunto.

A primeira vista parece estranho, mas isso é mais familiar do que parece, por exemplo quando estudamos o conjunto das partes de um conjunto  $A$ .

Considere agora  $\mathcal{R}$  o conjunto das retas elípticas orientadas, ou seja, cada reta elíptica é um “ponto” do conjunto  $\mathcal{R}$ . Nesta seção iremos construir um modelo geométrico para  $\mathcal{R}$ .

Sabemos que cada ponto  $\eta \in \mathbb{S}^2$  determina uma única reta elíptica  $r_\eta$  e cada reta orientada  $r_\eta$  determina um único ponto no plano elíptico  $\eta \in \mathbb{S}^2$ .

Assim, podemos escrever o conjunto  $\mathcal{R}$ , como:

$$\mathcal{R} = \{r_\eta, \eta \in \mathbb{S}^2\},$$

ou seja, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca

$$r_\eta \longleftrightarrow \eta,$$

entre os elementos de  $\mathcal{R}$  (retas elípticas orientadas) e os elementos de  $\mathbb{S}^2$ . Isto mostra que existe a mesma quantidade de retas elípticas orientadas e de pontos elípticos (veja figura 4.6).

Denotaremos o conjunto das retas elípticas orientadas por  $\mathcal{R} = \mathbb{S}^{2*}$  e chamaremos de “plano elíptico dual” ou “esfera dual”.

No conjunto  $\mathbb{S}^{2*}$  considere a mesma métrica já definida na esfera, ou seja,

$$d : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

com  $d(\eta, \nu) = \theta(\eta, \nu)$ .

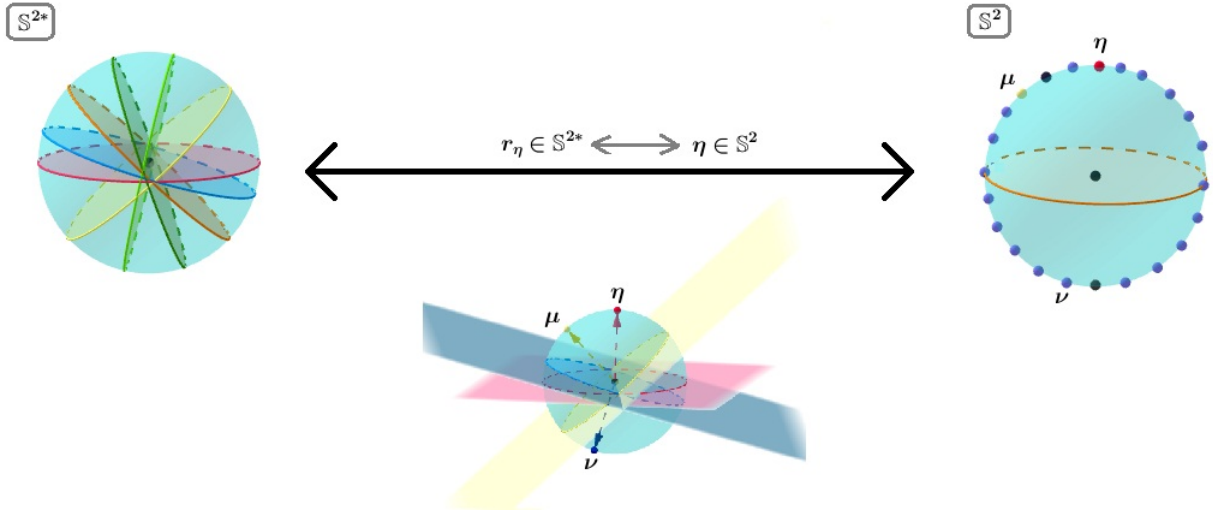


Figura 4.6: Plano elíptico dual

#### 4.1.5 Isometrias em $\mathbb{S}^2$

**Definição 4.4.** Uma isometria em  $\mathbb{S}^2$  é uma aplicação sobrejetora  $U : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  que preserva a distância, ou seja,  $\theta(U(u), U(v)) = \theta(u, v)$ , para quaisquer pontos  $u, v \in \mathbb{S}^2$ .

**Observação 4.2.** Toda isometria é injetora. De fato, se  $U$  é uma isometria então dados  $u, v \in \mathbb{S}^2$  quaisquer, temos

$$U(v) = U(u) \Rightarrow \theta(U(u), U(v)) = 0 \Rightarrow \theta(u, v) = 0. \quad (4.4)$$

Agora, sabemos pela Proposição 3.2 que  $d(u, v) = \theta(u, v)$  é uma função distância, logo

$$\theta(u, v) = 0 \Rightarrow u = v. \quad (4.5)$$

Segue de (4.4) e (4.5) que

$$U(v) = U(u) \Rightarrow u = v.$$

Portanto,  $U$  é injetora.

Como pela definição já temos que  $U$  é sobrejetora, podemos concluir que toda isometria é bijetora.

**Teorema 4.1.** (Classificação de isometrias em  $\mathbb{S}^2$ ) Uma aplicação  $U_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  é uma isometria se, e somente se,  $U_0$  for a restrição à  $\mathbb{S}^2$  de um operador ortogonal  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $U_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma isometria e considere o seguinte operador  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por :

$$U(v) : \begin{cases} \|v\| U_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right), & v \neq 0, \\ 0, & v = 0. \end{cases}$$



Observe que  $U$  está bem definido, pois para  $v \neq 0$  temos  $\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1$ , ou seja,  $\frac{v}{\|v\|} \in \mathbb{S}^2$  e podemos aplicar  $U_0$  em  $\frac{v}{\|v\|}$ .

Além disso,  $U_{|\mathbb{S}^2} = U_0$ .

De fato, dado  $v \in \mathbb{S}^2$  temos  $v \neq 0$  e  $\|v\| = 1$ , assim

$$U(v) = \|v\| U_0 \left( \frac{v}{\|v\|} \right) = U_0(v).$$

Provemos agora que  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um operador ortogonal.

Se  $v \neq 0$  e  $u \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} \langle U(u), U(v) \rangle &= \left\langle \|u\| U_0 \left( \frac{u}{\|u\|} \right), \|v\| U_0 \left( \frac{v}{\|v\|} \right) \right\rangle \\ &= \|u\| \|v\| \left\langle U_0 \left( \frac{u}{\|u\|} \right), U_0 \left( \frac{v}{\|v\|} \right) \right\rangle = \|u\| \|v\| \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \\ &= \frac{\|u\| \|v\|}{\|u\| \|v\|} \langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

A terceira igualdade é válida pois sendo  $U_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma isometria, então dados  $z, w \in \mathbb{S}^2$  temos

$$\begin{aligned} \langle U_0(z), U_0(w) \rangle &= \frac{\langle U_0(z), U_0(w) \rangle}{\|U_0(z)\| \|U_0(w)\|} = \cos \theta(U_0(z), U_0(w)) \\ &= \cos \theta(z, w) = \frac{\langle z, w \rangle}{\|z\| \|w\|} = \langle z, w \rangle, \end{aligned}$$

desde que  $\|z\| = \|w\| = \|U_0(z)\| = \|U_0(w)\| = 1$ .

Observe que para  $v = 0$  a verificação é imediata.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador ortogonal. Observe que  $U$  preserva norma, pois,

$$\|U(u)\|^2 = \langle U(u), U(u) \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2 \Rightarrow \|U(u)\| = \|u\|.$$

Considere agora a restrição de  $U_{|\mathbb{S}^2} = U_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ .

Observe que a função  $U_0$  está bem definida, pois para todo  $v \in \mathbb{S}^2$

$$\|U_0(v)\| = \|U(v)\| = \|v\| = 1,$$

ou seja,  $U_0(v) \in \mathbb{S}^2$ .

Além disso, como  $U$  é um operador ortogonal temos

$$\begin{aligned} \cos \theta(U_0(u), U_0(v)) &= \frac{\langle U_0(u), U_0(v) \rangle}{\|U_0(u)\| \|U_0(v)\|} = \langle U_0(u), U_0(v) \rangle \\ &= \langle U(u), U(v) \rangle = \langle u, v \rangle \\ &= \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \cos \theta(u, v), \end{aligned}$$

desde que  $\|u\| = \|v\| = \|U_0(u)\| = \|U_0(v)\| = 1$ .

Como  $\theta(u, v) \in [0, \pi]$ , segue que  $\theta(U_0(u), U_0(v)) = \theta(u, v)$ .

Provemos agora que  $U_0$  é sobrejetor.

Sabemos da Proposição 3.1 que  $U$  é uma aplicação linear e

$$\{U(e_1), U(e_2), U(e_3)\} = \{U_0(e_1), U_0(e_2), U_0(e_3)\}$$

é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .

Assim, dado  $w \in \mathbb{S}^2$  qualquer, existem únicos  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  tais que

$$w = \alpha_1 U(e_1) + \alpha_2 U(e_2) + \alpha_3 U(e_3).$$

Como  $U$  é linear, então

$$w = U(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3),$$

além disso, como  $U$  preserva norma temos

$$1 = \|w\| = \|U(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)\| = \|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3\|.$$

Logo,  $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \in \mathbb{S}^2$  e

$$U_0(x) = U(x) = w,$$

desde que  $U_0 = U|_{\mathbb{S}^2}$ . Assim,  $U_0$  é sobrejetor.

Portanto,  $U_0$  é isometria. □

#### 4.1.6 Axiomas de Congruência e Axioma de Continuidade

Nesta seção verificaremos os axiomas do grupo de Congruência e o Axioma de Continuidade. Para isto é necessário introduzirmos o conceito de Congruência, Ângulo (Lua) e Triângulo na Geometria Projetiva Elíptica Dupla.

Além disso, é preciso deixar claro que como comentado anteriormente, ao referirmos a um segmento de reta elíptica  $r_\eta$  com extremos  $u$  e  $v$ , devemos especificar qual dos dois arcos estamos nos referindo. Para isso basta citar um terceiro ponto que esteja no arco considerado.

**Definição 4.5.** *Na Geometria Elíptica, dizemos que dois segmentos são congruentes se existe uma isometria em  $\mathbb{S}^2$  que aplica um segmento no outro.*

**Definição 4.6.** *Cada reta elíptica  $r_\eta$  divide a esfera  $\mathbb{S}^2$  em duas regiões, uma delas é o hemisfério formado pelos pontos  $u \in \mathbb{S}^2$ , tais que  $\langle u, \eta \rangle \geq 0$ , chamada de semiplano positivo e denotada por  $H_\eta$ ; a outra região é o hemisfério formado por aqueles pontos  $u \in \mathbb{S}^2$ , tais que  $\langle u, \eta \rangle \leq 0$ , chamada de semiplano negativo.*

**Observação 4.3.** Se  $\langle u, \eta \rangle > 0$ , então

$$\cos \theta(u, \eta) = \frac{\langle u, \eta \rangle}{\|u\| \|\eta\|} > 0.$$

Logo,  $\theta(u, \eta) \in [0, \frac{\pi}{2})$ , ou seja,  $\theta$  é um ângulo agudo.

Seguindo esse mesmo raciocínio, se  $\langle u, \eta \rangle < 0$  então  $\theta(u, \eta)$  é um ângulo obtuso.

Portanto, o semiplano positivo é formado por  $r_\eta$  e pelos vetores de  $\mathbb{S}^2$  que formam um ângulo agudo com o vetor  $\eta$ , e o semiplano negativo é formado por  $r_\eta$  e pelos vetores de  $\mathbb{S}^2$  que formam um ângulo obtuso com o vetor  $\eta$ .

A figura abaixo é uma representação do semiplano positivo determinado por  $\eta$ .

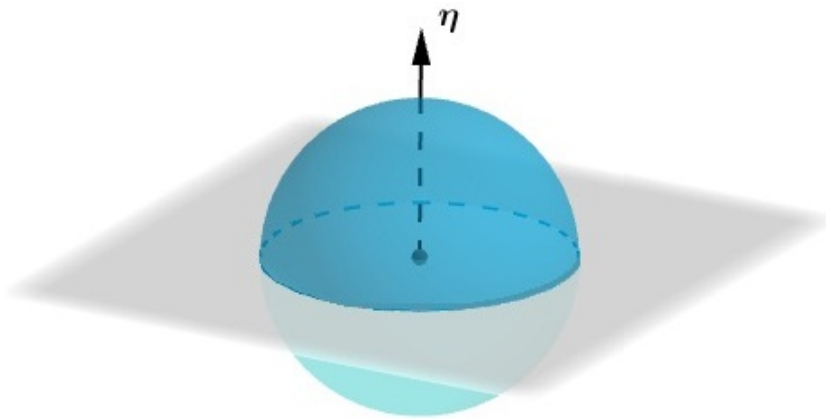


Figura 4.7: Semiplano positivo

É conveniente relembrarmos que na Geometria Euclidiana plana a interseção de dois semiplanos positivos determina uma região chamada de ângulo.

Seguindo essa mesma construção iremos definir na Geometria Elíptica o equivalente ao ângulo da geometria Euclidiana plana, mas para isso precisamos considerar as retas elípticas orientadas para sabermos qual dos dois semiplanos estamos nos referindo.

**Definição 4.7.** Um ângulo ou uma lua no plano elíptico  $\mathbb{S}^2$ , determinado por duas retas elípticas distintas e orientadas  $r_\eta$  e  $r_\mu$ , é o conjunto formado pela interseção dos semiplanos positivos determinados por  $r_\eta$  e  $r_\mu$ . O ângulo formado por  $r_\eta$  e  $r_\mu$  será denotado por  $L_{\eta\mu}$ , assim temos

$$L_{\eta\mu} = H_\eta \cap H_\mu.$$

Os vértices da lua  $L_{\eta\mu}$  são os pontos:

$$u = \frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|} \quad e \quad -u = -\frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|},$$

e a medida de uma lua  $L_{\eta\mu}$  é definida como sendo  $\theta(\eta, -\mu)$  (veja figura abaixo).

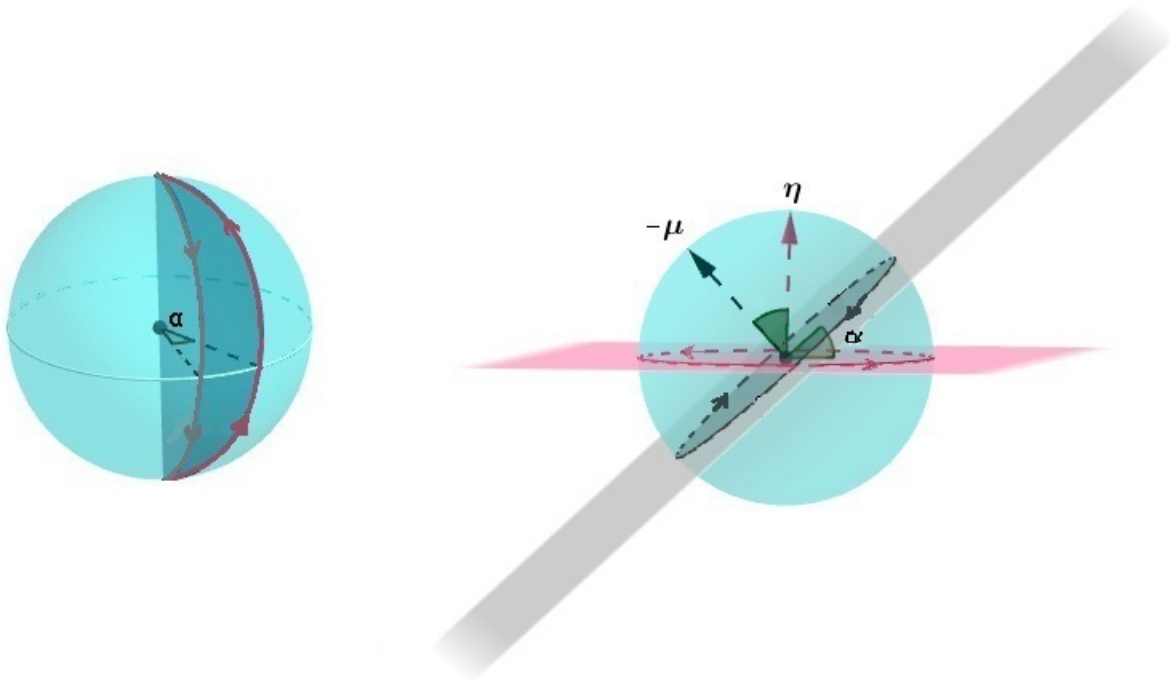


Figura 4.8: Medida da lua

Feito isto, seguem as mesmas terminologias: ângulos agudos, obtusos, suplementares, complementares, retos, opostos pelo vértice, entre outras.

**Definição 4.8.** Duas luas  $L_{\eta\nu}$  e  $L_{\eta'\nu'}$  são ditas congruentes se existe uma isometria em  $\mathbb{S}^2$  que aplica biunivocamente uma lua na outra. Neste caso denotamos por  $L_{\eta\nu} = L_{\eta'\nu'}$

Verificaremos agora os axiomas de congruência.

*Axioma IV<sub>1</sub>:*

**“Se  $A$  e  $B$  são dois pontos numa reta  $r_\eta$  e  $A'$  é um outro ponto de uma reta  $r_{\eta'}$ , não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto  $B'$  em  $r_{\eta'}$  tais que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  são congruentes”.**

Considere pontos  $A$  e  $B$  na reta elíptica  $r_\eta$  e  $A'$  é um outro ponto de uma reta  $r_{\eta'}$ . Mostremos primeiramente que existe uma aplicação que leva  $r_\eta$  em  $r_{\eta'}$ .

Se  $r_\eta = r_{\eta'}$  então a função identidade aplica  $r_\eta$  em  $r_{\eta'}$ , caso contrário, temos pela Proposição 4.5 que  $r_\eta \cap r_{\eta'} = \{u, -u\}$ , onde

$$u = \frac{\eta \times \eta'}{\|\eta \times \eta'\|}.$$

Assim, considerando como eixo de rotação o vetor  $u$  e ângulo de rotação  $\theta$  a medida da lua  $L_{\eta\eta'}$  temos uma rotação  $R_1$  que aplica  $r_\eta$  em  $r_{\eta'}$ .

Agora, considerando como eixo de rotação o vetor  $\eta'$ , e ângulo de rotação o ângulo  $R_1(A)\widehat{O}A'$  (considerado no plano  $\Gamma_{\eta'}$ ), obtemos uma rotação  $R_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que aplica  $R_2(R_1(r_\eta))$  em  $r_{\eta'}$  com  $R_2(R_1(A)) = A'$  (veja figura 4.9).

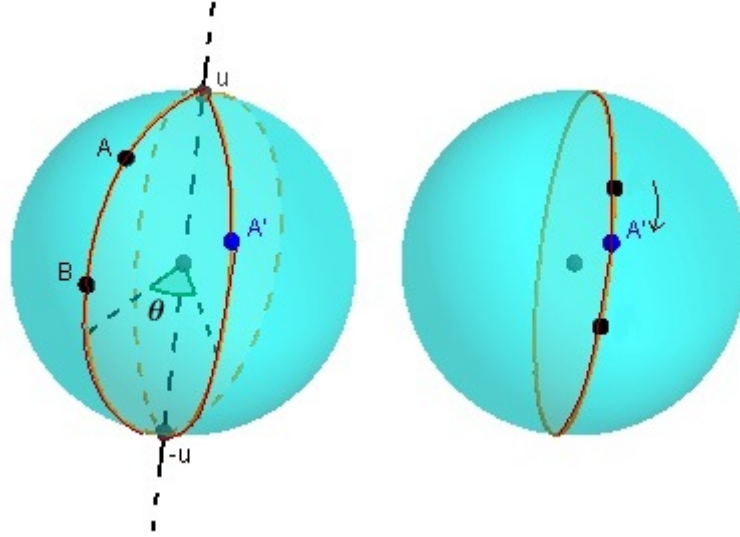


Figura 4.9: Rotações do Axioma  $IV_1$

Definindo agora o ponto  $B'$  como sendo a imagem  $(R_2 \circ R_1)(B) = B'$ , temos

$$(R_2 \circ R_1)(\overline{AB}) = \overline{A'B'}.$$

Como toda rotação é uma aplicação ortogonal (veja exemplo 3.3), e composta de aplicações ortogonais é uma aplicação ortogonal (veja exemplo 3.1), segue que  $R_2 \circ R_1$  é uma aplicação ortogonal, além disso temos pelo Teorema 4.1 que a restrição de  $R_2 \circ R_1$  à  $\mathbb{S}^2$  é uma isometria em  $\mathbb{S}^2$  que aplica  $\overline{AB}$  em  $\overline{A'B'}$ , portanto

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}.$$

*Axioma  $IV_2$  :*

**“Se um segmento  $\overline{A'B'}$  e um segmento  $\overline{A''B''}$  são congruentes a um mesmo segmento  $\overline{AB}$  então os segmentos  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  são congruentes entre si”.**

Se  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  são congruentes à  $\overline{AB}$ , então existem isometrias  $T_1, T_2 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  tais que

$$T_1(\overline{AB}) = \overline{A''B''} \quad \text{e} \quad T_2(\overline{A'B'}) = \overline{AB},$$

assim,

$$(T_1 \circ T_2)(\overline{A'B'}) = T_1(T_2(\overline{A'B'})) = T_1(\overline{AB}) = \overline{A''B''}.$$

Além disso,  $T_1 \circ T_2$  preserva ângulo, de fato, como  $T_1$  e  $T_2$  são isometrias, dados quaisquer  $v, w \in \mathbb{S}^2$  temos

$$\begin{aligned} \theta((T_1 \circ T_2)(v), (T_1 \circ T_2)(w)) &= \theta(T_1(T_2(v)), T_1(T_2(w))) = \theta(T_2(v), T_2(w)) \\ &= \theta(v, w). \end{aligned}$$

Portanto,  $T_1 \circ T_2$  é uma isometria que aplica  $\overline{A'B'}$  em  $\overline{A''B''}$ , ou seja,  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  são congruentes.

*Axioma IV<sub>3</sub>* :

**Sobre uma reta  $r_\eta$ , sejam  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  dois segmentos da mesma que, exceto por  $B$  não têm pontos em comum. Além disto, sobre uma outra ou a mesma reta  $r_{\eta'}$ , sejam  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$  dois segmentos que, exceto por  $B'$  não tem pontos em comum. Neste caso, se  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  e  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ , então  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ .**

Considerando o segmento  $\overline{AB}$  sobre a reta elíptica  $r_\eta$  e o ponto  $A'$  sobre a reta  $r_{\eta'}$ , então seguindo a construção feita no *Axioma IV<sub>1</sub>*, obtemos uma isometria  $U$  que aplica  $r_\eta$  em  $r_{\eta'}$  com  $U(A) = A'$ .

Como  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  e  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ , então existem isometrias  $U_1$  e  $U_2$  com

$$U_1(\overline{AB}) = \overline{A'B'} \quad \text{e} \quad U_2(\overline{BC}) = \overline{B'C'}.$$

Como isometrias preservam ângulo temos

$$A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \quad \text{e} \quad B\hat{O}C = B'\hat{O}C'.$$

Assim, como  $U$  é uma isometria com  $U(A) = A'$ , então

$$U(B) = B' \quad \text{e} \quad U(C) = C'.$$

Portanto,  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$  (veja figura 4.10).

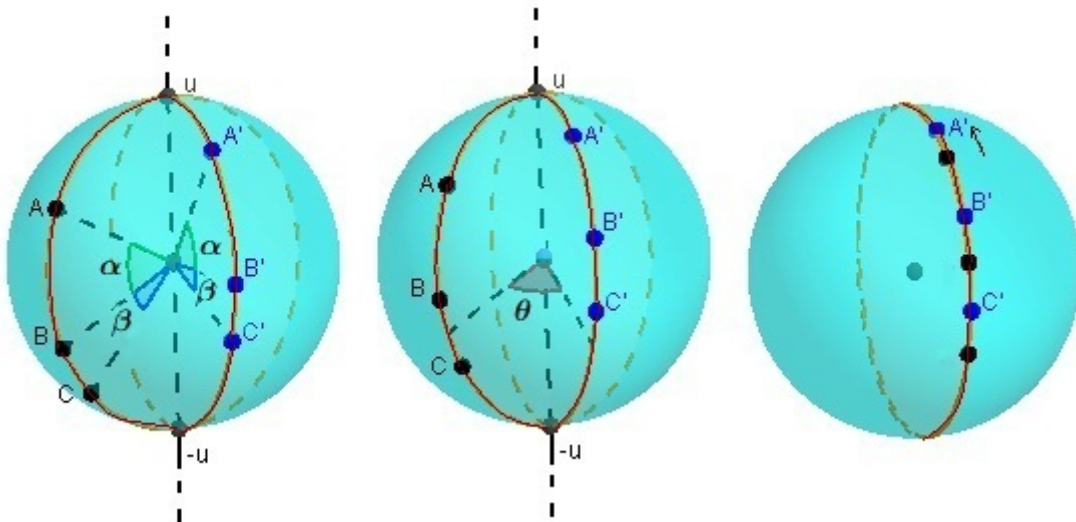


Figura 4.10: Rotações do Axioma IV<sub>3</sub>

*Axioma IV<sub>4</sub>* :

**Se  $L_{\eta\nu}$  é uma lua e se  $r_{\nu'}$  é uma reta elíptica, então existem duas retas elípticas  $r_{\eta'}$  e  $r_{\nu''}$  tais que  $L_{\eta\nu} = L_{\eta'\nu'} = L_{-\nu'\nu''}$ . Além disto, cada lua é congruente a si mesma.**

Sejam  $L_{\eta\nu}$  a lua formada pelas retas elípticas orientadas  $r_\eta$  e  $r_\nu$ , e  $r_{\nu'}$  uma reta elíptica orientada qualquer.

Se  $r_{\nu'} = r_\nu$ , então tomando  $r_{\eta'} = r_\eta$  temos  $L_{\eta\nu} = L_{\eta'\nu'}$ .

Para determinarmos  $r_{\nu''}$ , observemos que neste caso temos pela Proposição 4.5 que  $r_\eta \cap r_\nu = \{u, -u\}$  com

$$u = \frac{\eta \times \nu}{\|\eta \times \nu\|}.$$

Assim, tomando a rotação  $R$ , com eixo de rotação o vetor  $u$  e o ângulo de rotação  $\theta$ , onde  $\theta$  é a medida da lua  $L_{\eta\nu}$ , obtemos a reta elíptica

$$r_{\nu''} = R(r_\nu).$$

Logo, por construção temos  $L_{\eta\nu} = L_{\eta'\nu'} = L_{-\nu'\nu''}$  (veja figura 4.11).

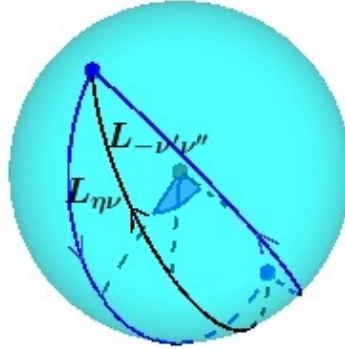


Figura 4.11: Luas equivalentes 1

Para o caso em que  $r_{\nu'}$  é distinta de  $r_\nu$ , então considere as rotações  $R_1$  e  $R_2$  com eixo de rotação sendo o vetor

$$v = \frac{\eta \times \nu'}{\|\eta \times \nu'\|},$$

e ângulos de rotações sendo  $-\theta$  e  $\theta$  respectivamente, onde  $\theta$  é a medida da lua  $L_{\eta\nu}$ .

Assim, definindo

$$r_{\eta'} = R_1(r_{-\nu'}) \quad \text{e} \quad r_{\nu''} = R_2(r_{\nu'})$$

obtemos por construção as igualdades  $L_{\eta\nu} = L_{\eta'\nu'} = L_{-\nu'\nu''}$  (veja figura 4.12).

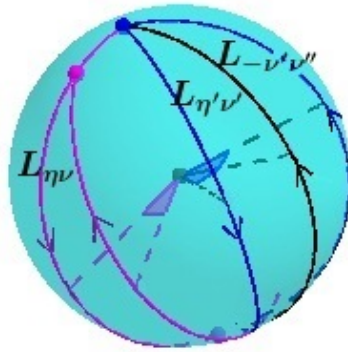


Figura 4.12: Luas equivalentes 2

Para provar que uma lua  $L_{\eta\nu}$  é congruente a si mesma, basta considerar a aplicação identidade em  $\mathbb{S}^2$ ,  $id_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ .

Antes de verificarmos o axioma  $IV_5$  é preciso introduzir alguns conceitos.

**Definição 4.9.** *Sejam  $u, v, w \in \mathbb{S}^2$  três pontos tais que  $\det[u, v, w] > 0$ , ou seja, o conjunto  $\{u, v, w\}$  é uma base ordenada positiva de  $\mathbb{R}^3$ .*

*O triângulo elíptico  $\Delta_{uvw}$  definido por  $u, v$  e  $w$  é dado por*

$$\Delta_{uvw} = H_\eta \cap H_\mu \cap H_\nu.$$

*O triângulo é formado pelos arcos das retas elípticas  $r_\eta, r_\mu, r_\nu$ , chamados de lados desse triângulo, onde*

$$\eta = u \times v, \quad \mu = v \times w, \quad \nu = w \times u.$$

*Os pontos  $u, v$  e  $w$  são chamados de vértices do triângulo (veja a ilustração 4.13).*

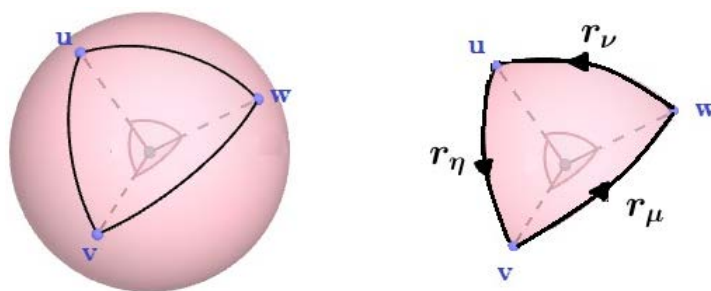


Figura 4.13: Triângulo elíptico I

**Definição 4.10.** *Dois triângulos elípticos são ditos congruentes se existe uma isometria que aplica biunivocamente um triângulo sobre o outro.*

Verifiquemos agora o Axioma  $IV_5$  :

“Se para dois triângulos  $\Delta_{uvw}$  e  $\Delta_{u'v'w'}$  temos

$$\overline{uv} = \overline{u'v'}, \quad \overline{uw} = \overline{u'w'} \quad \text{e} \quad L_{\eta\nu} = L_{\eta'\nu'},$$



com

$$\eta = u \times v, \quad \nu = w \times u \quad \text{e} \quad \eta' = u' \times v', \quad \nu' = w' \times u',$$

então  $\Delta_{uvw}$  é congruente à  $\Delta_{u'v'w'}$ .”

Se  $\theta$  é a medida da lua  $L_{\eta\eta'}$ , então efetuando uma rotação de  $\pi - \theta$  sobre o eixo  $\frac{\eta \times \eta'}{\|\eta \times \eta'\|}$ , obtemos uma rotação  $U_1$  que aplica  $r_\eta$  em  $r_{\eta'}$  (veja figura 4.14).

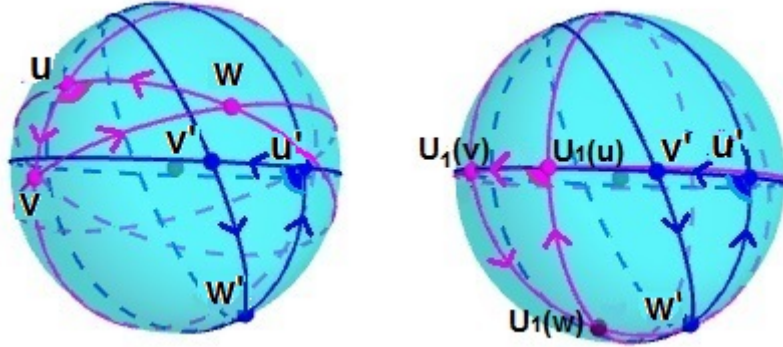


Figura 4.14: Rotação 1

Depois efetuando uma rotação, com ângulo de rotação  $U_1(u)\widehat{O}u'$  sobre o eixo  $\eta'$ , obtemos uma rotação  $U_2$  que aplica  $r_{\eta'}$  em  $r_{\eta'}$  com  $U_2(U_1(u)) = u'$  (veja figura 4.15).

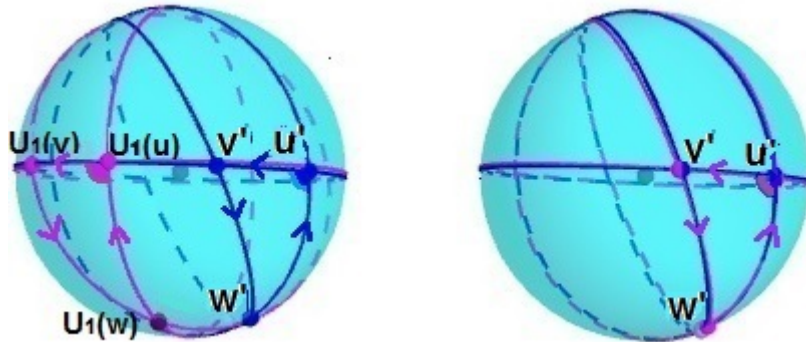


Figura 4.15: Rotação 2

Como

$$\overline{U_1(u)U_1(v)} = \overline{uv} = \overline{u'v'}, \quad \overline{U_1(u)U_1(w)} = \overline{uw} = \overline{u'w'} \quad \text{e} \quad L_{\eta\nu} = L_{\eta'\nu'},$$

então

$$U_2 \circ U_1(\Delta_{uvw}) = \Delta_{u'v'w'}.$$

Como  $U_1$  e  $U_2$  são aplicações ortogonais (veja exemplo 3.3), e composta de aplicações ortogonais é uma aplicação ortogonal (veja exemplo 3.1), então  $U_2 \circ U_1$  é uma aplicação ortogonal.

Assim, segue do Teorema 4.1 que a restrição de  $U_2 \circ U_1$  à  $\mathbb{S}^2$  é uma isometria, e portanto  $\Delta_{uvw}$  é congruente à  $\Delta_{u'v'w'}$ .

A seguir verificaremos o *Axioma de Continuidade*, ou seja,

“Uma reta elíptica menos um dos seus pontos é um modelo de uma reta Euclidiana”.

Com o intuito de definir uma função

$$f : \mathbb{S}^1 - \{(0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R} \times \{0\} ,$$

dado  $(x, y) \in \mathbb{S}^1$  iremos achar o valor de  $\lambda$  para que  $P = (\lambda x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$  (veja figura 4.16).

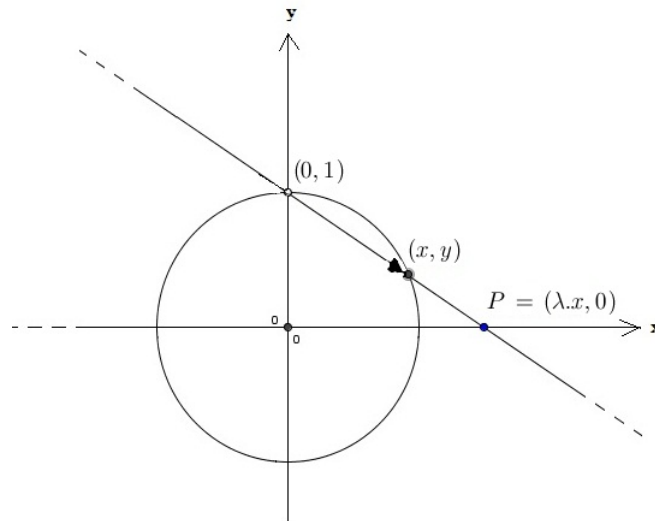


Figura 4.16: Projeção estereográfica I

Considere a reta

$$r : (0, 1) + \lambda((x, y) - (0, 1)) .$$

Observe que um ponto de  $r$  é da forma

$$\begin{aligned} (x', y') &= (0, 1) + \lambda(x, y - 1) = (0, 1) + (\lambda x, \lambda(y - 1)) \\ &= (\lambda x, 1 + \lambda(y - 1)) . \end{aligned}$$

Então, o  $\lambda$  procurado é tal que  $1 + \lambda(y - 1) = 0$ , ou seja,  $\lambda = \frac{1}{1 - y}$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^1 - \{(0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \{0\} \\ (x, y) &\longmapsto \left( \frac{x}{1 - y}, 0 \right) . \end{aligned}$$

Para mostrarmos que  $f$  é uma bijeção iremos construir uma inversa para  $f$ . Queremos determinar uma função

$$g : \mathbb{R} \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^1 - \{(0, 1)\} ,$$

que associe  $(x, 0) \longmapsto P = (x', y')$ , como indicado na figura 4.17.

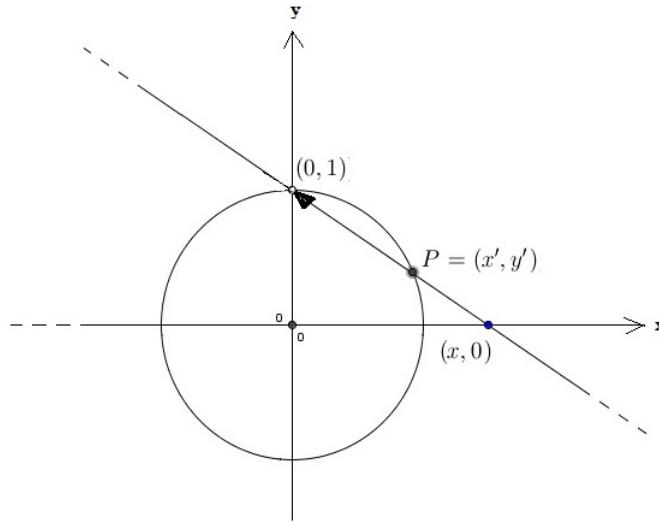


Figura 4.17: Projeção estereográfica II

Para isto considere a reta

$$s : (x, 0) + \lambda' ((0, 1) - (x, 0)).$$

Observe que um ponto de  $s$  é da forma

$$\begin{aligned} (x', y') &= (x, 0) + \lambda'(-x, 1) = (x, 0) + (-\lambda'x, \lambda') \\ &= (x - \lambda'x, \lambda'). \end{aligned}$$

Assim, para  $P = (x', y')$  pertencer à  $\mathbb{S}^1 - \{(0, 1)\}$ , devemos ter que  $(x')^2 + (y')^2 = 1$ .

Calculando obtemos

$$\begin{aligned} (x - \lambda'x)^2 + (\lambda')^2 &= 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x^2\lambda' + (\lambda')^2x^2 + (\lambda')^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 1)(\lambda')^2 - 2x^2\lambda' - (1 - x^2) = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do 2º grau na variável  $\lambda'$  obtemos

$$\lambda' = 1 \text{ ou } \lambda' = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Observe que  $\lambda' \neq 1$ , caso contrário  $P = (0, 1)$  o que é um absurdo, pois  $P \in \mathbb{S}^1 - \{(0, 1)\}$ , assim

$$\lambda' = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad P = \left( \frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times \{0\} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 - \{(0, 1)\}, \\ (x, 0) &\longmapsto \left( \frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Efetuando os cálculos, verificamos que

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= (x, 0), \quad \forall (x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \\ (g \circ f)(x, y) &= (x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{S}^1 - \{(0, 1)\}. \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  é uma bijeção.

Como toda reta elíptica menos um de seus pontos tem bijeção com  $\mathbb{S}^1 - \{(0, 1)\}$ , concluímos que uma reta elíptica menos um de seus pontos é um modelo de reta euclidiana.

**Proposição 4.9.** *A medida da lua  $L_{\eta\mu}$  é dada por  $\pi - \theta(\eta, \mu)$ .*

*Demonstração.* Sabemos que a medida da lua  $L_{\eta\mu}$  é dada por  $\theta(\eta, -\mu)$ , assim para mostrarmos a proposição basta mostrarmos que

$$\theta(\eta, -\mu) = \pi - \theta(\eta, \mu).$$

Como  $\theta \in [0, \pi]$ , então basta mostrarmos que  $\cos \theta(\eta, -\mu) = \cos(\pi - \theta(\eta, \mu))$ .

Temos que

$$\cos \theta(\eta, -\mu) = \langle \eta, -\mu \rangle = -\langle \eta, \mu \rangle = -\cos \theta(\eta, \mu).$$

Da mesma forma temos

$$\cos(\pi - \theta(\eta, \mu)) = \cos \pi \cos \theta(\eta, \mu) + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} \theta(\eta, \mu) = -\cos \theta(\eta, \mu).$$

Portanto,  $\theta(\eta, -\mu) = \pi - \theta(\eta, \mu)$  e o resultado segue.  $\square$

## 4.2 Trigonometria Elíptica

Lembremos da Geometria Euclidiana que dados três pontos não colineares do plano Euclidiano, digamos  $A, B$  e  $C$ , podemos construir um triângulo que possui como vértices estes pontos. Denotemos esse triângulo por  $\Delta ABC$  e por  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  as medidas dos ângulos de vértices  $A, B, C$  respectivamente. Além disso, denotemos por  $a, b$  e  $c$  as medidas dos lados opostos aos vértices  $A, B, C$  respectivamente (veja figura 4.18):

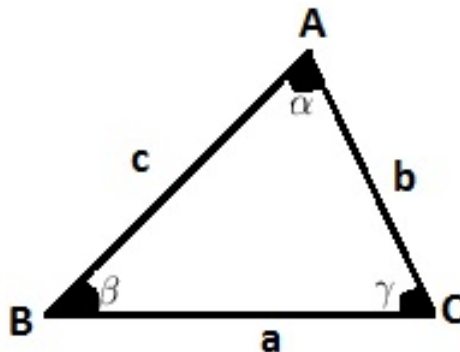


Figura 4.18: Triângulo euclidiano I

No estudo de Trigonometria nos deparamos com as seguintes igualdades:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}. \quad (\text{Lei dos Senos})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (\text{Lei dos Cossenos})$$

A Lei dos Cossenos na Geometria Euclidiana é uma generalização do Teorema de Pitágoras, de fato aplicando a Lei dos cossenos para  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , obtemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{2} = a^2 + b^2,$$

assim,  $c^2 = a^2 + b^2$  (Teorema de Pitágoras).

Na fundamentação axiomática da Geometria Euclidiana, é possível mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  (vide Apêndice A).

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar leis, equivalentes às leis do seno e cosseno, para a Geometria Elíptica e mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo elíptico é maior que  $180^\circ$ . Também trataremos um pouco do triângulo dual e suas propriedades.

#### 4.2.1 Lei dos Senos

É conveniente fixarmos uma série de dados de um triângulo elíptico para estudar a trigonometria elíptica.

Dado um triângulo elíptico  $\Delta_{uvw}$ , diremos que a medida dos ângulos de vértices  $u, v, w$  medem respectivamente  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ ; e as medidas dos lados opostos aos vértices medem  $a, b, c$  respectivamente (veja figura 4.19)

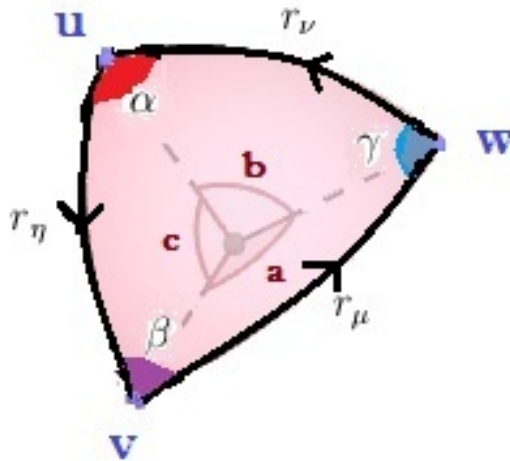


Figura 4.19: Triângulo elíptico  $II_1$

$r_\eta$  é a reta elíptica que passa por  $u$  e  $v$  e tem como normal  $\eta$ ;  
 $r_\mu$  é a reta elíptica que passa por  $v$  e  $w$  e tem como normal  $\mu$ ;  
 $r_\nu$  é a reta elíptica que passa por  $u$  e  $w$  e tem como normal  $\nu$ .

Dados referentes aos vértices.

1) Vértice  $u$

- \* O lado oposto ao vértice  $u$  está contido em  $r_\mu$ , onde  $\mu = v \times w$ ;
- \* A medida do ângulo com vértice  $u$  é  $\alpha = \pi - \theta(\nu, \eta)$ ;
- \* A medida do lado oposto ao vértice  $u$  é  $a = \theta(v, w)$ .

2) Vértice  $v$

- \* O lado oposto ao vértice  $v$  está contido em  $r_\nu$ , onde  $\nu = w \times u$ ;
- \* A medida do ângulo com vértice  $v$  é  $\beta = \pi - \theta(\eta, \mu)$ ;
- \* A medida do lado oposto ao vértice  $v$  é  $b = \theta(w, u)$ .

3) Vértice  $w$

- \* O lado oposto ao vértice  $w$  está contido em  $r_\eta$ , onde  $\eta = u \times v$ ;
- \* A medida do ângulo com vértice  $w$  é  $\gamma = \pi - \theta(\mu, \nu)$ ;
- \* A medida do lado oposto ao vértice  $w$  é  $c = \theta(u, v)$ .

**Proposição 4.10.** *Com a notação fixada temos as relações*

$$\eta \times \mu = \langle \nu, v \rangle v, \quad \mu \times \nu = \langle \eta, w \rangle w, \quad \nu \times \eta = \langle \mu, u \rangle u.$$

*Como consequência, valem as igualdades das normas*

$$\|\eta \times \mu\| = \|\mu \times \nu\| = \|\nu \times \eta\|.$$

*Demonstração.* Sabemos que  $\nu = w \times u$  e  $\eta = u \times v$ , assim pela Proposição 2.10 temos

$$\nu \times \eta = (w \times u) \times (u \times v) = \langle w, u \times v \rangle u - \langle u, u \times v \rangle w.$$

Como  $u \times v$  é ortogonal a  $u$ , então  $\langle u, u \times v \rangle = 0$ .

Portanto,

$$\nu \times \eta = \langle w, u \times v \rangle u = \langle w, \eta \rangle u.$$

Analogamente  $\eta \times \mu = \langle u, \mu \rangle v$  e  $\mu \times \nu = \langle v, \nu \rangle w$ .

Pela identidade cíclica feita na Proposição 2.10 temos

$$\begin{aligned} \langle u, \mu \rangle &= \langle u, v \times w \rangle \\ &= \langle w, u \times v \rangle = \langle w, \eta \rangle \\ &= \langle w, u \times v \rangle = \langle v, w \times u \rangle = \langle v, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Assim, pela comutatividade do produto interno segue que

$$\begin{aligned} \eta \times \mu &= \langle \mu, u \rangle v = \langle \nu, v \rangle v \\ \nu \times \eta &= \langle \eta, w \rangle u = \langle \mu, u \rangle u \\ \mu \times \nu &= \langle \nu, v \rangle w = \langle \eta, w \rangle w. \end{aligned}$$

Em particular temos

$$\begin{aligned}\|\eta \times \mu\| &= \|\langle u, \mu \rangle v\| = |\langle u, \mu \rangle| \|v\| = |\langle u, \mu \rangle| \\ \|\mu \times \nu\| &= \|\langle v, \nu \rangle w\| = |\langle v, \nu \rangle| \|w\| = |\langle v, \nu \rangle| \\ \|\nu \times \eta\| &= \|\langle w, \eta \rangle u\| = |\langle w, \eta \rangle| \|u\| = |\langle w, \eta \rangle|.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\nu \times \eta\| = \|\mu \times \nu\| = \|\eta \times \mu\|.$$

□

**Proposição 4.11.** *Seja  $\Delta_{uvw}$  um triângulo elíptico. Se  $a, b$  e  $c$  são as medidas dos lados opostos aos vértices  $u, v$  e  $w$ , respectivamente e  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  os ângulos com vértices em  $u, v$  e  $w$ , respectivamente, então*

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \gamma.$$

*Demonstração.* Seja  $\Delta_{uvw}$  um triângulo elíptico, onde  $a, b$  e  $c$  são as medidas dos lados opostos aos vértices  $u, v$  e  $w$ , respectivamente e  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  os ângulos com vértices em  $u, v$  e  $w$ , respectivamente, como indicado na figura 4.20:

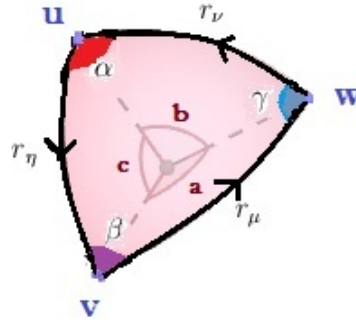


Figura 4.20: Triângulo elíptico  $II_2$

I) Sabemos que  $\alpha = \pi - \theta(\nu, \eta)$ , assim

$$\operatorname{sen} \theta(\nu, \eta) = \operatorname{sen} (\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \pi \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \pi = \operatorname{sen} \alpha.$$

II) Como  $\nu = w \times u$ , temos

$$\|\nu\| = \|w \times u\| = \|w\| \|u\| \operatorname{sen} \theta(w, u) \Rightarrow \|\nu\| = \operatorname{sen} \theta(w, u) \Rightarrow \|\nu\| = \operatorname{sen} b.$$

III) Como  $\eta = u \times v$ , temos

$$\|\eta\| = \|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta(u, v) \Rightarrow \|\eta\| = \operatorname{sen} \theta(u, v) \Rightarrow \|\eta\| = \operatorname{sen} c.$$

IV) Sabemos que  $\alpha = \pi - \theta(\nu, \eta)$ , assim

$$\|\nu \times \eta\| = \|\nu\| \|\eta\| \operatorname{sen} \theta(\nu, \eta) = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \alpha.$$

De modo análogo, obtemos que

$$\|\eta \times \mu\| = \text{sen } a \text{ sen } c \text{ sen } \beta \quad e \quad \|\mu \times \nu\| = \text{sen } a \text{ sen } b \text{ sen } \gamma.$$

Pela Proposição 4.10 temos  $\|\eta \times \mu\| = \|\mu \times \nu\| = \|\nu \times \eta\|$ .

Portanto,

$$\text{sen } a \text{ sen } c \text{ sen } \beta = \text{sen } a \text{ sen } b \text{ sen } \gamma = \text{sen } b \text{ sen } c \text{ sen } \alpha.$$

□

**Proposição 4.12.** (*Lei dos Senos e Lei dos Cossenos*)

Seja  $\Delta_{uvw}$  um triângulo elíptico. Se as medidas dos lados opostos aos vértices  $u, v, w$  são respectivamente  $a, b, c$  e as medidas dos ângulos com vértices  $u, v, w$  são, respectivamente,  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , então

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } c}; \quad \cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\text{sen } a \text{ sen } b}.$$

*Demonstração.* I) Provemos primeiramente que

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } c}.$$

Pela Proposição 4.11 temos

$$\text{sen } \alpha \text{ sen } b \text{ sen } c = \text{sen } a \text{ sen } \beta \text{ sen } c = \text{sen } a \text{ sen } b \text{ sen } \gamma. \quad (4.6)$$

Observe que  $a, b$  e  $c$  são valores em  $(0, \pi)$ , de fato se  $c = \theta(u, v) = 0$ , então usando que  $d(u, v) = \theta(u, v)$  é uma função distância temos

$$d(u, v) = \theta(u, v) = c = 0 \Rightarrow u = v.$$

Segue que

$$\det(u, v, w) = \det(u, u, w) = 0,$$

o que contradiz a definição de triângulo elíptico dado em 4.9.

Da mesma forma, se  $c = \theta(u, v) = \pi$ , então pela Proposição 4.1 temos

$$u = -v.$$

Segue que

$$\det(u, v, w) = \det(u, -u, w) = 0,$$

contradizendo novamente a definição 4.9.

Portanto,  $c \in (0, \pi)$ . Analogamente temos  $a, b \in (0, \pi)$ .

Como  $a \in (0, \pi)$  então  $\text{sen } a > 0$ . Assim, dividindo as igualdades em (4.6) por  $\text{sen } a$ , temos

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } a} \text{ sen } b \text{ sen } c = \text{sen } \beta \text{ sen } c = \text{sen } b \text{ sen } \gamma$$



agora dividindo as igualdades acima por  $\text{sen } b$ , obtemos

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } a} \text{sen } c = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } b} \text{sen } c = \text{sen } \gamma.$$

Por fim dividindo as igualdades acima por  $\text{sen } c$ , concluimos que

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } c}.$$

II) Provemos agora que

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\text{sen } a \text{sen } b}.$$

Temos

$$\cos a = \cos \theta(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \Rightarrow \cos a = \langle v, w \rangle$$

$$\cos b = \cos \theta(w, u) = \frac{\langle w, u \rangle}{\|w\| \|u\|} \Rightarrow \cos b = \langle w, u \rangle$$

$$\cos c = \cos \theta(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \Rightarrow \cos c = \langle u, v \rangle$$

Logo, utilizando a Proposição 2.10 segue que

$$\begin{aligned} \langle \mu, \nu \rangle &= \langle (v \times w), (w \times u) \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle v, w \rangle & \langle v, u \rangle \\ \langle w, w \rangle & \langle w, u \rangle \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \cos a & \cos c \\ 1 & \cos b \end{bmatrix} = \cos a \cos b - \cos c. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \text{sen } a &= \text{sen } \theta(v, w) = \frac{\|v \times w\|}{\|v\| \|w\|} = \|v \times w\| = \|\mu\| \\ \text{sen } b &= \text{sen } \theta(w, u) = \frac{\|w \times u\|}{\|w\| \|u\|} = \|w \times u\| = \|\nu\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \mu, \nu \rangle &= \|\mu\| \|\nu\| \cos \theta(\mu, \nu) = \text{sen } a \text{sen } b \cos(\pi - \gamma) \\ &= \text{sen } a \text{sen } b [\cos \pi \cos \gamma + \text{sen } \pi \text{sen } \gamma] \\ &= \text{sen } a \text{sen } b (-\cos \gamma) = -\text{sen } a \text{sen } b \cos \gamma. \end{aligned}$$

Segue que

$$-\text{sen } a \text{sen } b \cos \gamma = \cos a \cos b - \cos c,$$

ou seja,

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\text{sen } a \text{sen } b}.$$

□

### 4.2.2 Área de Triângulos

Como já vimos, em um triângulo Euclidiano, cujas medidas dos ângulos internos são  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , é válido a igualdade  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Porém isto não ocorre em um triângulo elíptico  $\Delta \subset \mathbb{S}^2$ , cujas medidas dos ângulos internos são  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ .

Nosso objetivo nesta seção é provar que  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ , mas para isso precisamos saber calcular as áreas de toda a esfera e das luas da esfera.

Sendo assim, considere  $\mathcal{L}$  a lateral do cilindro circunscrito à esfera e  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , a aplicação que a cada  $P \in \mathcal{L}$  associa ao ponto  $f(P) \in \mathbb{S}^2$  (veja figura 4.21).

Uma propriedade da aplicação  $f$  é que ela preserva áreas, além disso, temos  $f(\mathcal{L}) = \mathbb{S}^2$ .

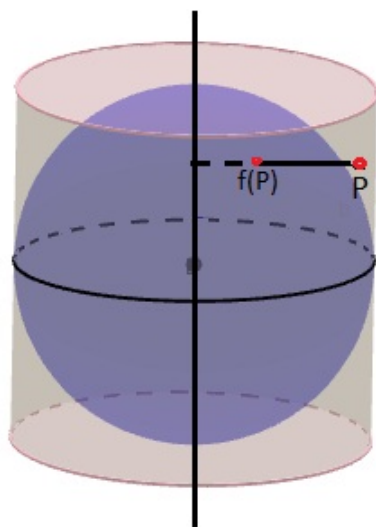


Figura 4.21: Cilindro circunscrito à esfera

Sendo assim, uma lua na esfera unitária de ângulo  $\alpha$  é obtida pela projeção por  $f$  de uma faixa com altura 2 (pois o raio da esfera é 1) e largura  $\alpha$  (veja figura 4.22).

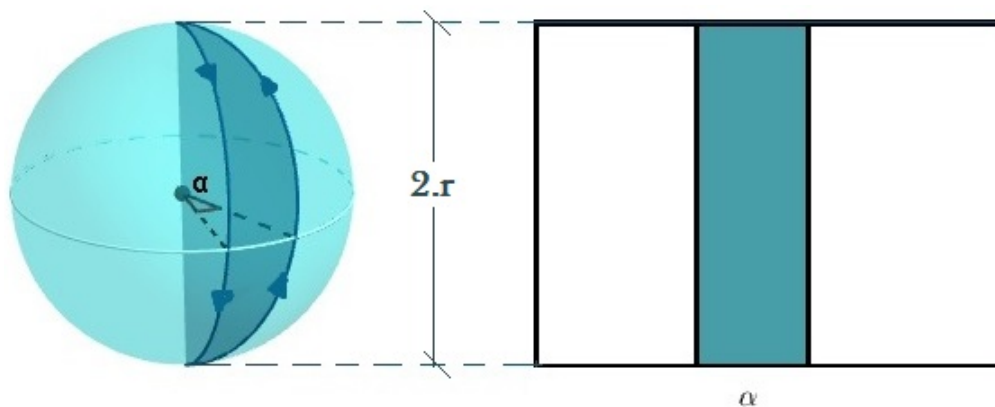


Figura 4.22: Planificação da lua

Como a área da faixa é  $2\alpha$ , a área da lua também será  $2\alpha$ .

**Proposição 4.13.** (Teorema de Girard)

Seja  $\Delta_{uvw}$  um triângulo elíptico. Se as medidas dos ângulos determinados pelos vértices  $u, v, w$  são respectivamente  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , então

$$\text{Área}(\Delta_{uvw}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

E como consequência, teremos que as medidas dos ângulos de um triângulo elíptico satisfazem a desigualdade:

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

*Demonstração.* Sejam  $L_{\nu\eta}, L_{\eta\mu}$  e  $L_{\mu\nu}$  luas de medidas  $2\alpha, 2\beta$  e  $2\gamma$  respectivamente.

Consideremos  $L_{\nu\eta}^-, L_{\eta\mu}^-, L_{\mu\nu}^-$  as luas simétricas, em relação à origem, das luas  $L_{\nu\eta}, L_{\eta\mu}$  e  $L_{\mu\nu}$  respectivamente, ou seja,

$$L_{\nu\eta}^- = \{-v, v \in L_{\nu\eta}\},$$

$$L_{\eta\mu}^- = \{-v, v \in L_{\eta\mu}\},$$

$$L_{\mu\nu}^- = \{-v, v \in L_{\mu\nu}\}.$$

Desta forma, as áreas de duas luas simétricas são iguais, ou seja, as medidas de  $L_{\nu\eta}^-, L_{\eta\mu}^-, L_{\mu\nu}^-$  são respectivamente  $2\alpha, 2\beta$  e  $2\gamma$ .

Seguindo a notação acima, concluímos que a esfera é descrita como a união de seis luas (veja figura 4.23):

$$\mathbb{S}^2 = L_{\nu\eta} \cup L_{\eta\mu} \cup L_{\mu\nu} \cup L_{\nu\eta}^- \cup L_{\eta\mu}^- \cup L_{\mu\nu}^-.$$

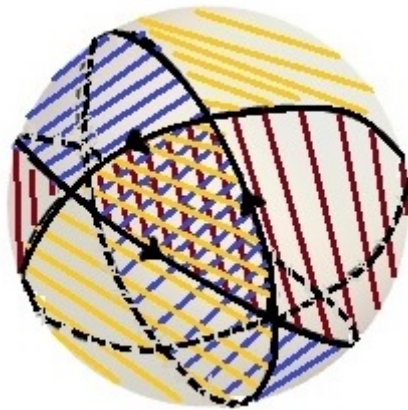


Figura 4.23: Luas cobrindo  $\mathbb{S}^2$

Além disso, obtemos dois triângulos elípticos simétricos

$$\Delta_{uvw} = L_{\nu\eta} \cap L_{\eta\mu} \cap L_{\mu\nu} \quad e \quad \Delta_{uvw}^- = L_{\nu\eta}^- \cap L_{\eta\mu}^- \cap L_{\mu\nu}^-.$$

Teremos que a área da esfera não será a soma das áreas de  $L_{\nu\eta}, L_{\eta\mu}, L_{\mu\nu}, L_{\nu\eta}^-, L_{\eta\mu}^-, L_{\mu\nu}^-$ , pois se efetuarmos tal soma, a área do triângulo elíptico citado acima, será contabilizada

três vezes, bem como a área de seu simétrico.

Assim, a área de  $\mathbb{S}^2$ ,  $A(\mathbb{S}^2)$ , será dada pela igualdade

$$A(L_{\nu\eta}) + A(L_{\eta\mu}) + A(L_{\mu\nu}) + A(L_{\nu\eta}^-) + A(L_{\eta\mu}^-) + A(L_{\mu\nu}^-) - 2A(\Delta_{uvw}) - 2A(\Delta_{uvw}^-),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} A(\mathbb{S}^2) &= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2A(\Delta_{uvw}) - 2A(\Delta_{uvw}^-) \\ &= 4\alpha + 4\beta + 4\gamma - 4A(\Delta_{uvw}) = 4(\alpha + \beta + \gamma - A(\Delta_{uvw})). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A(\mathbb{S}^2) &= 4(\alpha + \beta + \gamma - A(\Delta_{uvw})) \Rightarrow \\ 4\pi &= 4(\alpha + \beta + \gamma - A(\Delta_{uvw})) \Rightarrow \\ \pi &= \alpha + \beta + \gamma - A(\Delta_{uvw}) \Rightarrow \\ A(\Delta_{uvw}) &= \alpha + \beta + \gamma - \pi. \end{aligned}$$

Observe que sendo a área do triângulo positiva, temos  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ .  $\square$

**Exemplo 4.3.** Sejam  $u = (1, 0, 0)$ ,  $v = (0, 1, 0)$  e  $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$  três pontos de  $\mathbb{S}^2$ .

Verifiquemos que  $u, v$  e  $w$  formam um triângulo elíptico e calculemos sua área.

(i) Mostremos que  $u, v$  e  $w$  não são colineares.

De fato,

seja  $r_\eta$  a reta que passa por  $u$  e  $v$ , tal que

$$\eta = u \times v = \left[ \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = (0, 0, 1).$$

Provemos agora que  $w \notin r_\eta$ , ou seja, que  $\langle w, \eta \rangle \neq 0$ .

De fato,

$$\langle w, \eta \rangle = \left\langle \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0, 0, 1) \right\rangle = 0 \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Portanto,  $u, v$  e  $w$  determinam um triângulo elíptico  $\Delta_{uvw}$ .

(ii) Calculemos a área de  $\Delta_{uvw}$ , cujos os ângulos dos vértices  $u, v, w$  são respectivamente  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  e onde  $r_\nu$  é a reta que passa por  $u$  e  $w$ ,  $r_\eta$  é a reta que passa por  $u$  e  $v$ ,  $r_\mu$  é a reta que passa por  $v$  e  $w$ .

Assim,

$$\begin{aligned} A(\Delta_{uvw}) &= \alpha + \beta + \gamma - \pi = \pi - \theta(\nu, \eta) + \pi - \theta(\eta, \mu) + \pi - \theta(\mu, \nu) - \pi \\ &= 2\pi - \theta(\nu, \eta) - \theta(\eta, \mu) - \theta(\mu, \nu) \stackrel{(*)}{=} 2\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

(\*) Sabemos que  $\eta = (0, 0, 1)$  e temos que

$$v \times w = \left[ \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right] = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)$$

$$w \times u = \left[ \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \right] = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

como  $\mu = v \times w$  e  $\nu = u \times w$ , segue que

$$\begin{aligned} \cos \theta(\nu, \eta) &= \frac{\langle \nu, \eta \rangle}{\|\nu\| \|\eta\|} = \frac{0.0 + 0. \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1. \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{\langle \nu, \nu \rangle} \sqrt{\langle \eta, \eta \rangle}} \\ &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{0.0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)} \sqrt{0.0 + 0.0 + 1.1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\theta(\nu, \eta) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Analogamente, temos

$$\cos \theta(\eta, \mu) = \frac{\langle \eta, \mu \rangle}{\|\eta\| \|\mu\|} = \frac{0. \frac{1}{\sqrt{2}} + 0.0 + 1.0}{\sqrt{\langle \eta, \eta \rangle} \sqrt{\langle \mu, \mu \rangle}} = 0$$

$$\cos \theta(\mu, \nu) = \frac{\langle \mu, \nu \rangle}{\|\mu\| \|\nu\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 0. \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 0. \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\langle \mu, \mu \rangle} \sqrt{\langle \nu, \nu \rangle}} = 0.$$

Logo,  $\theta(\eta, \mu) = \frac{\pi}{2}$  e  $\theta(\nu, \mu) = \frac{\pi}{2}$ .

### 4.2.3 Triângulo Dual

Um outro exemplo de plano elíptico é o plano elíptico dual  $\mathbb{S}^{2*}$ . Usaremos esta dualidade para estabelecer outras propriedades de triângulo elíptico.

Seja  $\Delta_{uvw} \subset \mathbb{S}^2$  um triângulo elíptico, onde  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são os ângulos referentes aos vértices  $u, v, w$  respectivamente, e  $a, b, c$  são os lados opostos aos vértices  $u, v, w$  como indicado na figura 4.24:

onde  $r_\eta$  é a reta elíptica que passa por  $u$  e  $v$ ,  $r_\nu$  é a reta elíptica que passa por  $u$  e  $w$ ,  $r_\mu$  é a reta elíptica que passa por  $v$  e  $w$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \mu &= v \times w, & \alpha &= \pi - \theta(\nu, \eta), & a &= \theta(v, w) \\ \nu &= w \times u, & \beta &= \pi - \theta(\eta, \mu), & b &= \theta(w, u) \\ \eta &= u \times v, & \gamma &= \pi - \theta(\mu, \nu), & c &= \theta(u, v). \end{aligned}$$

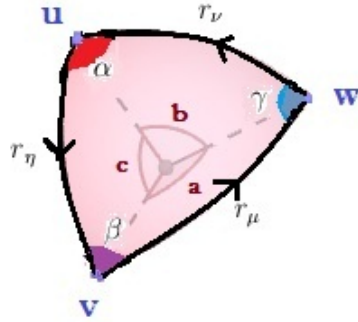


Figura 4.24: Triângulo elíptico  $II_3$

**Definição 4.11.** O triângulo elíptico dual de  $\Delta_{uvw}$  é o triângulo  $\Delta_{u^*v^*w^*}$ , onde os vértices  $u^*, v^*, w^*$  são pontos de  $S^{2*}$  dados por

$$u^* = \frac{\mu}{\|\mu\|}, \quad v^* = \frac{\nu}{\|\nu\|}, \quad w^* = \frac{\eta}{\|\eta\|}.$$

No triângulo elíptico dual temos os grandes círculos em  $S^{2*}$ , obtidos por

$$\eta^* = u^* \times v^*, \quad \mu^* = v^* \times w^*, \quad \nu^* = w^* \times u^*.$$

Seguindo as convenções notacionais já estabelecidas, sejam

$a^*, b^*$  e  $c^*$  as medidas dos lados opostos aos vértices  $u^*, v^*$  e  $w^*$  respectivamente;

$\alpha^*, \beta^*$  e  $\gamma^*$  as medidas dos ângulos cujos vértices são  $u^*, v^*$  e  $w^*$  respectivamente (veja figura 4.25).

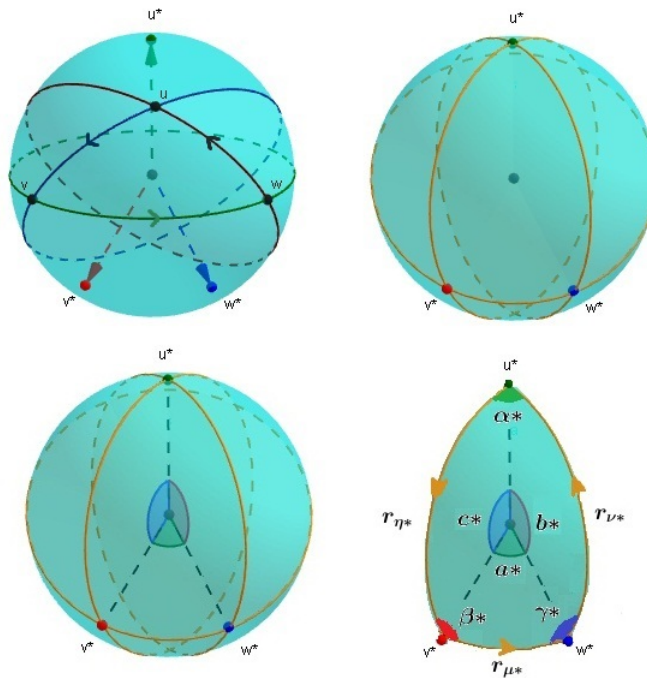


Figura 4.25: Triângulo dual

Tais valores são calculáveis da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a^* &= \theta(v^*, w^*) = \theta\left(\frac{\nu}{\|\nu\|}, \frac{\eta}{\|\eta\|}\right) = \theta(\nu, \eta) = \pi - \alpha \\ b^* &= \theta(u^*, w^*) = \theta\left(\frac{\mu}{\|\mu\|}, \frac{\eta}{\|\eta\|}\right) = \theta(\mu, \eta) = \pi - \beta \\ c^* &= \theta(u^*, v^*) = \theta\left(\frac{\mu}{\|\mu\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|}\right) = \theta(\mu, \nu) = \pi - \gamma. \end{aligned}$$

Temos também, assim como no triângulo elíptico que

$$\alpha^* = \pi - \theta(\nu^*, \eta^*), \quad \beta^* = \pi - \theta(\eta^*, \mu^*), \quad \gamma^* = \pi - \theta(\mu^*, \nu^*).$$

Aplicando no triângulo dual a Proposição 4.10 temos

$$\nu^* \times \eta^* = \langle \mu^*, u^* \rangle u^*, \quad \eta^* \times \mu^* = \langle \nu^*, v^* \rangle v^*, \quad \mu^* \times \nu^* = \langle \eta^*, w^* \rangle w^*.$$

Até agora sabemos que:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{\mu}{\|\mu\|}, & v^* &= \frac{\nu}{\|\nu\|}, & w^* &= \frac{\eta}{\|\eta\|} \\ \eta^* &= u^* \times v^*, & \mu^* &= v^* \times w^*, & \nu^* &= w^* \times u^* \\ a^* &= \theta(\nu, \eta) = \pi - \alpha, & b^* &= \theta(\eta, \mu) = \pi - \beta, & c^* &= \theta(\mu, \nu) = \pi - \gamma \\ \alpha^* &= \pi - \theta(\nu^*, \eta^*), & \beta^* &= \pi - \theta(\eta^*, \mu^*), & \gamma^* &= \pi - \theta(\mu^*, \nu^*) \\ \nu^* \times \eta^* &= \langle \mu^*, u^* \rangle u^*, & \eta^* \times \mu^* &= \langle \nu^*, v^* \rangle v^*, & \mu^* \times \nu^* &= \langle \eta^*, w^* \rangle w^*. \end{aligned}$$

Provemos então que

$$\pi - \alpha^* = \theta(v, w) = a.$$

Sabemos que  $\pi - \alpha^* = \theta(\nu^*, \eta^*)$ . Assim, basta provar que  $\cos \theta(\nu^*, \eta^*) = \cos \theta(v, w)$ .

Utilizando o item e) da Proposição 2.10 temos

$$\begin{aligned} \cos \theta(\nu^*, \eta^*) &= \frac{\langle \nu^*, \eta^* \rangle}{\|\nu^*\| \|\eta^*\|} = \frac{\langle w^* \times u^*, u^* \times v^* \rangle}{\|w^* \times u^*\| \|u^* \times v^*\|} = \frac{\left\langle \frac{\eta}{\|\eta\|} \times \frac{\mu}{\|\mu\|}, \frac{\mu}{\|\mu\|} \times \frac{\nu}{\|\nu\|} \right\rangle}{\|w^* \times u^*\| \|u^* \times v^*\|} \\ &= \frac{\frac{1}{\|\eta\|} \frac{1}{\|\mu\|} \frac{1}{\|\mu\|} \frac{1}{\|\nu\|} \langle \eta \times \mu, \mu \times \nu \rangle}{\|w^* \times u^*\| \|u^* \times v^*\|} = \frac{\frac{1}{\|\eta\|} \frac{1}{\|\mu\|} \frac{1}{\|\mu\|} \frac{1}{\|\nu\|} \langle \eta \times \mu, \mu \times \nu \rangle}{\left\| \frac{\eta}{\|\eta\|} \times \frac{\mu}{\|\mu\|} \right\| \left\| \frac{\mu}{\|\mu\|} \times \frac{\nu}{\|\nu\|} \right\|}} \\ &= \frac{\frac{1}{\|\eta\|} \frac{1}{\|\mu\|} \frac{1}{\|\mu\|} \frac{1}{\|\nu\|} \langle \eta \times \mu, \mu \times \nu \rangle}{\sqrt{\left\langle \frac{\eta}{\|\eta\|} \times \frac{\mu}{\|\mu\|}, \frac{\eta}{\|\eta\|} \times \frac{\mu}{\|\mu\|} \right\rangle} \sqrt{\left\langle \frac{\mu}{\|\mu\|} \times \frac{\nu}{\|\nu\|}, \frac{\mu}{\|\mu\|} \times \frac{\nu}{\|\nu\|} \right\rangle}} \\ &= \frac{\frac{1}{\|\eta\|} \frac{1}{\|\mu\|} \frac{1}{\|\mu\|} \frac{1}{\|\nu\|} \langle \eta \times \mu, \mu \times \nu \rangle}{\sqrt{\left(\frac{1}{\|\eta\|}\right)^2 \left(\frac{1}{\|\mu\|}\right)^2 \langle \eta \times \mu, \eta \times \mu \rangle} \sqrt{\left(\frac{1}{\|\mu\|}\right)^2 \left(\frac{1}{\|\nu\|}\right)^2 \langle \mu \times \nu, \mu \times \nu \rangle}} \\ &= \frac{\frac{1}{\|\eta\|} \frac{1}{\|\mu\|} \frac{1}{\|\mu\|} \frac{1}{\|\nu\|} \langle \eta \times \mu, \mu \times \nu \rangle}{\frac{1}{\|\eta\|} \frac{1}{\|\mu\|} \frac{1}{\|\mu\|} \frac{1}{\|\nu\|} \|\eta \times \mu\| \|\mu \times \nu\|}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\langle \eta \times \mu, \mu \times \nu \rangle}{\|\eta \times \mu\| \|\mu \times \nu\|} = \cos \theta(\eta \times \mu, \mu \times \nu). \tag{4.7}$$

Além disso, pela identidade cíclica da Proposição 2.10, e pela Proposição 4.10 temos

$$\eta \times \mu = \langle \nu, v \rangle v = \langle w \times u, v \rangle v = \langle v, w \times u \rangle v \tag{4.8}$$

$$\mu \times \nu = \langle \eta, w \rangle w = \langle u \times v, w \rangle w = \langle w, u \times v \rangle w = \langle v, w \times u \rangle w. \tag{4.9}$$

Substituindo (4.8) e (4.9) em (4.7) obtemos

$$\cos \theta(\nu^*, \eta^*) = \cos \theta(v, w).$$

Portanto,

$$\theta(\nu^*, \eta^*) = \theta(v, w).$$

Analogamente,

$$\pi - \beta^* = b \quad \text{e} \quad \pi - \gamma^* = c.$$

□

A seguir temos uma ilustração de um triângulo elíptico com o seu dual

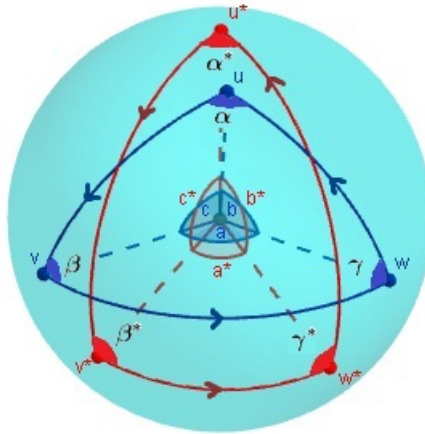


Figura 4.26: Triângulo elíptico e seu dual

**Proposição 4.14.** (Segunda lei dos Senos e lei dos Cossenos da esfera)

Seja  $\Delta_{uvw}$  um triângulo elíptico. Se as medidas dos lados opostos aos vértices  $u, v, w$  são respectivamente  $a, b, c$  e as medidas dos ângulos com vértices  $u, v, w$  são, respectivamente,  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , então

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } \beta} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } \gamma}, \quad \cos c = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta}.$$

*Demonstração.* Pela Lei dos Senos para o triângulo dual, temos

$$\frac{\text{sen } \alpha^*}{\text{sen } a^*} = \frac{\text{sen } \beta^*}{\text{sen } b^*} = \frac{\text{sen } \gamma^*}{\text{sen } c^*}.$$



Desenvolvendo as igualdades acima obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(\pi - a)}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)} &= \frac{\operatorname{sen}(\pi - b)}{\operatorname{sen}(\pi - \beta)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - c)}{\operatorname{sen}(\pi - \gamma)} \Leftrightarrow \\ \frac{\operatorname{sen} \pi \cos a - \operatorname{sen} a \cos \pi}{\operatorname{sen} \pi \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \pi} &= \frac{\operatorname{sen} \pi \cos b - \operatorname{sen} b \cos \pi}{\operatorname{sen} \pi \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \pi} = \frac{\operatorname{sen} \pi \cos c - \operatorname{sen} c \cos \pi}{\operatorname{sen} \pi \cos \gamma - \operatorname{sen} \gamma \cos \pi} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} \gamma}. \end{aligned}$$

Provemos agora a segunda igualdade.

Aplicando a Lei dos Cossenos para o triângulo dual, temos

$$\cos \gamma^* = \frac{\cos c^* - \cos a^* \cos b^*}{\operatorname{sen} a^* \operatorname{sen} b^*}.$$

Desenvolvendo a igualdade acima obtemos:

$$\cos(\pi - c) = \frac{\cos(\pi - \gamma) - \cos(\pi - \alpha) \cos(\pi - \beta)}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha) \operatorname{sen}(\pi - \beta)}. \quad (4.10)$$

Observe que

$$\cos(\pi - c) = \cos \pi \cos c + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} c = -\cos c, \quad (4.11)$$

além disso, desenvolvendo a expressão  $X = \frac{\cos(\pi - \gamma) - \cos(\pi - \alpha) \cos(\pi - \beta)}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha) \operatorname{sen}(\pi - \beta)}$  obtemos

$$\begin{aligned} X &= \frac{[\cos \pi \cos \gamma + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} \gamma] - [\cos \pi \cos \alpha + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} \alpha] [\cos \pi \cos \beta + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} \beta]}{[\operatorname{sen} \pi \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \pi] [\operatorname{sen} \pi \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \pi]} \\ &= \frac{-\cos \gamma + \cos \alpha (-\cos \beta)}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \\ &= \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Comparando (4.10), (4.11) e (4.12), obtemos

$$\cos c = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}.$$

□

**Proposição 4.15.** (*Área de um triângulo elíptico II*)

Seja  $\Delta_{uvw}$  um triângulo elíptico. Se as medidas dos lados opostos aos vértices  $u, v$  e  $w$  são, respectivamente,  $a, b$  e  $c$ , então

$$\text{Área}(\Delta_{uvw}) = 2\pi - a^* - b^* - c^*.$$

Como consequência, o perímetro do triângulo elíptico satisfaz a desigualdade:

$$2\pi > a^* + b^* + c^*.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema de Girard, temos

$$\text{Área}(\Delta_{uvw}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \pi - a^* + \pi - b^* + \pi - c^* - \pi = 2\pi - a^* - b^* - c^*.$$

Como  $\text{Área}(\Delta_{uvw}) > 0$ , temos  $2\pi - a^* - b^* - c^* > 0$ .

Portanto,

$$2\pi > a^* + b^* + c^*.$$

□

# Capítulo 5

## Geometria Projetiva Elíptica Simples

### 5.1 Geometria Projetiva Elíptica Simples

Nesta seção consultamos os livros [1], [6], [7] e [8].

Um fenômeno interessante é percebido quando se olha uma fotografia, ou uma pintura de uma longa estrada em linha reta como mostrado na figura abaixo:



Figura 5.1: Ponto de fuga  
(Retirada do livro [1])

Nesta imagem os lados da estrada são assumidos paralelos, mas a nossa percepção nos diz que eles concorrem num ponto distante, chamado de ponto de fuga. Esse fenômeno sugere que a Geometria Euclidiana é um modelo da realidade não tão fiel às nossas sensações como estamos acostumados a pensar.

Neste ponto cabe a seguinte pergunta: qual o tipo de espaço geométrico que obtemos se assumirmos que quaisquer duas retas se intersectam num único ponto?

Nesta seção construiremos uma geometria bidimensional onde não existem retas paralelas, na qual quaisquer duas retas se intersectam em um único ponto, tal geometria será chamada de *Geometria Elíptica Simples*.

### Axiomas da Geometria Projetiva Elíptica Simples

#### I. *Termos Indefinidos*

Ponto, Reta, Plano, Pertence.

II. *Axiomas de Incidência*

$II_1$ : Para cada dois pontos distintos existe uma reta que os contém.

$II_2$ : Existe pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.

$II_3$ : Toda reta contém pelo menos dois pontos.

IV. *Axioma das Paralelas*

Se  $l$  é uma reta e  $A$  um ponto que não está em  $l$ , então toda reta que incide em  $A$  intersecta  $l$ .

VI. *Axioma de Continuidade*

Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta menos um de seus pontos.

5.2 O Plano Projetivo  $\mathbb{RP}^2$ 

Considere inicialmente o conjunto  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ . Nosso objetivo será construir à partir deste conjunto, o chamado plano projetivo.

Usaremos a terminologia usada em  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, quando nos referirmos à um “plano”  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , fica subentendido que ele é a interseção de  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  com  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Da mesma forma, ao nos referirmos à uma “reta”  $r$  em  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , fica subentendido que ela é a interseção de  $r \subset \mathbb{R}^3$  com  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ . Assim, no caso em que o plano  $\Gamma$  ou a reta  $r$  intersectar a origem  $(0, 0, 0)$ , teremos planos e retas sem um ponto.

**Definição 5.1.** *O plano projetivo  $\mathbb{RP}^2$ , será o conjunto quociente obtido de  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , com a seguinte relação de equivalência:*

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} / v = \lambda w.$$

Um elemento em  $\mathbb{RP}^2 = \frac{\mathbb{R}^3 - \{0\}}{\sim}$ , será uma classe denotada por

$$\bar{v} = \overline{(v_1, v_2, v_3)},$$

onde  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  será chamado de ponto projetivo.

Pela definição da relação de equivalência temos

$$\bar{v} = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\},$$

ou seja,  $\bar{v} \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$  será uma reta sem um ponto, como indicado na figura 5.2. A imagem sugere que podemos escolher um representante em cada classe  $\bar{v}$  que esteja em uma esfera, de fato veremos quais serão os respectivos representantes unitários das classes  $\bar{v}$ .

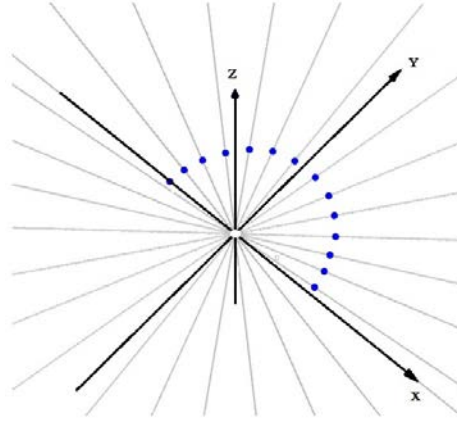


Figura 5.2: Representantes de pontos projetivos

A aplicação projeção será a função

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^3 - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{RP}^2 \\ v &\longmapsto \Psi(v) = \bar{v}. \end{aligned}$$

**Observação 5.1.** Se  $v$  é um vetor de  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  e  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ , então  $\bar{v} = \overline{\lambda v}$ .

De fato,

$$\overline{\lambda v} = \{ \tilde{\lambda}(\lambda v), \tilde{\lambda} \in \mathbb{R} - \{0\} \} = \{ (\tilde{\lambda}\lambda)v, \tilde{\lambda}\lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \} = \{ \lambda'v, \lambda' \in \mathbb{R} - \{0\} \} = \bar{v}.$$

### 5.3 Relação entre $\mathbb{RP}^2$ e $\mathbb{S}^2$

Se  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$ , então os únicos vetores unitários que pertencem à  $\bar{v}$  são

$$u = \frac{v}{\|v\|} \quad \text{e} \quad -u = -\frac{v}{\|v\|}.$$

Claramente  $u$  e  $-u$  são unitários.

De fato, usando o item a) e b) da Proposição 2.6 temos

$$\|u\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1.$$

Da mesma forma,  $\|-u\| = \|(-1) \cdot u\| = |-1| \|u\| = 1$ .

Além disso, se  $w \in \mathbb{S}^2$  e  $w \in \bar{v}$ , então

$$w = \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{e} \quad \|w\| = 1,$$

assim, usando o item b) da Proposição 2.6 segue que

$$1 = \|w\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|.$$

Portanto, as únicas possibilidades são  $\lambda = \frac{1}{\|v\|}$  e  $\lambda = -\frac{1}{\|v\|}$ , de onde segue

$$w = \frac{v}{\|v\|} \quad \text{ou} \quad w = -\frac{v}{\|v\|}.$$

Pela observação 5.1 temos  $\bar{u} = \overline{-u} = \bar{v}$ , assim cada classe de equivalência  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  contém dois representantes  $u$  e  $-u$  da esfera unitária  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Pelas considerações anteriores, ao restringirmos a aplicação projeção à  $\mathbb{S}^2$ , obtemos a seguinte função sobrejetora

$$\begin{aligned} \Psi_0 : \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{RP}^2 \\ v &\longmapsto \bar{v} \end{aligned}$$

com

$$\Psi_0^{-1}(\bar{v}) = \left\{ \frac{v}{\|v\|}, -\frac{v}{\|v\|} \right\}.$$

Com o objetivo de obter um novo modelo para o plano projetivo, consideremos a seguinte relação de equivalência em  $\mathbb{S}^2$

$$v \sim w \iff v = w \quad \text{ou} \quad v = -w.$$

Considere agora a aplicação induzida

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_0 : \frac{\mathbb{S}^2}{\sim} &\longmapsto \mathbb{RP}^2 \\ \tilde{v} &\longrightarrow \bar{v}. \end{aligned}$$

Observe que  $\overline{\Psi}_0$  está bem definida, de fato, dados  $v, w \in \mathbb{S}^2$  tais que  $v \sim w$ , então  $w = v$  ou  $w = -v$ ; em ambos os casos temos pela observação 5.1 que

$$\overline{\Psi}_0(\tilde{w}) = \bar{w} = \bar{v} = \overline{\Psi}_0(\tilde{v}).$$

Mostremos agora que  $\overline{\Psi}_0$  é bijetora.

Dado  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$ , e sendo  $u = \frac{v}{\|v\|}$  temos

$$\tilde{u} \in \frac{\mathbb{S}^2}{\sim} \quad \text{com} \quad \overline{\Psi}_0(\tilde{u}) = \frac{\overline{v}}{\|v\|} = \bar{v},$$

assim,  $\overline{\Psi}_0$  é sobrejetora. Além disso, dados  $w, v \in \mathbb{S}^2$ , com  $\bar{w} = \overline{\Psi}_0(\tilde{w}) = \overline{\Psi}_0(\tilde{v}) = \bar{v}$ , temos  $w \in \mathbb{S}^2$  com  $w \in \bar{v}$ , logo

$$w = \frac{v}{\|v\|} = v, \quad \text{ou} \quad w = -\frac{v}{\|v\|} = -v;$$

em ambos os casos temos  $\tilde{w} = \tilde{v}$ .

Desta forma, usando a bijeção construída acima podemos dizer que  $\mathbb{RP}^2 = \frac{\mathbb{S}^2}{\sim}$ . Além disso, pelas considerações anteriores cada ponto  $\bar{u} \in \mathbb{RP}^2$  pode ser representado por um ponto  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}^2$ , com  $u_3 \geq 0$  (veja figura 5.3).

Observe que sendo  $H_{e_3} = \{u \in \mathbb{S}^2; \langle u, e_3 \rangle \geq 0\}$ , o hemisfério norte da esfera unitária, então considerando a restrição da aplicação projeção à  $H_{e_3}$  temos que a imagem inversa por  $\Psi_{0|_{H_{e_3}}}$  de um ponto projetivo  $\bar{v} = \overline{(v_1, v_2, v_3)}$  é

$$\Psi_{0|_{H_{e_3}}}^{-1}(\bar{v}) = \begin{cases} \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}, & \text{se } v_3 > 0, \\ \left\{ -\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\}, & \text{se } v_3 = 0. \end{cases}$$

Figura 5.3: Representação do  $\mathbb{RP}^2$ 

A imagem da reta elíptica  $r_{e_3} \subset \mathbb{S}^2$  pela projeção  $\Psi_0$  é chamada de *pontos ideais*  $I_\infty$ . Observe que a projeção  $\Psi_0$  aplica o conjunto  $H_{e_3} - r_{e_3}$  biunivocamente sobre  $\mathbb{RP}^2 - I_\infty$ .

## 5.4 Retas Projetivas

Nesta seção usaremos a aplicação projeção  $\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ , para transportar os conceitos definidos em  $\mathbb{S}^2$  para o plano projetivo  $\mathbb{RP}^2$ .

**Definição 5.2.** : Um subconjunto  $r \subset \mathbb{RP}^2$  é uma *reta projetiva* se  $r$  for a imagem de uma reta elíptica pela projeção  $\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ .

Uma definição usando planos sem um ponto pode ser dada da seguinte forma:

**Definição 5.3.** : Um subconjunto  $r \subset \mathbb{RP}^2$  é uma *reta projetiva* se  $r$  for a imagem de um plano  $\Gamma$  pela projeção  $\Psi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ .

Sabemos que um plano  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  que contenha a origem  $0 = (0, 0, 0)$  é determinado pelo seu vetor normal  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , onde  $\eta$  é um vetor não nulo. Tal plano é denotado por  $\Gamma_\eta$  e é definido pela equação linear:

$$\Gamma_\eta : \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0.$$

Para  $\lambda \neq 0$ , vimos que  $\Gamma_{\lambda\eta} = \Gamma_\eta$ , ou seja, todo elemento da classe

$$\bar{\eta} = \{\lambda\eta, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\},$$

determina um único plano  $\Gamma_\eta$ .

Por outro lado, uma reta elíptica  $r_\eta$  é obtida pela interseção  $\Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ . Além disso, por definição uma reta projetiva  $r$  é obtida pela imagem de uma reta elíptica. Estes fatos motivam a seguinte notação:

Denotaremos  $r_{\bar{\eta}}$ , à reta projetiva  $r$  obtida da imagem pela projeção da reta elíptica  $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ .

**Exemplo 5.1.** : Dado o vetor normal  $\bar{e}_3 = \overline{(0, 0, 1)} \in \mathbb{RP}^2$ , então  $r_{e_3}$  é a reta elíptica obtida pela interseção do plano  $xy$  com a esfera unitária. A imagem pela projeção de  $r_{e_3}$  é a reta projetiva  $r_{\bar{e}_3}$  formada pelos pontos ideais  $I_\infty$ .

### 5.5 Plano Projetivo Dual

Seja  $P(\mathbb{RP}^2)$  o conjunto das partes do plano projetivo  $\mathbb{RP}^2$  e denotemos por  $\mathcal{R}$  o subconjunto de  $P(\mathbb{RP}^2)$ , formado por todas as retas projetivas.

Nosso objetivo nesta seção é construir um modelo geométrico que represente  $\mathcal{R}$ . Para isso, usaremos o seguinte fato (veja figura 5.4):

*Cada ponto  $\bar{\eta} \in \mathbb{RP}^2$  determina uma única reta projetiva  $r_{\bar{\eta}} \in \mathcal{R}$  e cada reta projetiva  $r_{\bar{\eta}} \in \mathcal{R}$  determina um único ponto projetivo  $\bar{\eta} \in \mathbb{RP}^2$ .*

Logo,  $\mathcal{R}$  pode ser escrito como:

$$\mathcal{R} = \{r_{\bar{\eta}}, \bar{\eta} \in \mathbb{RP}^2\},$$

e temos uma correspondência biunívoca entre  $\mathcal{R}$  e  $\mathbb{RP}^2$ , dada por:

$$r_{\bar{\eta}} \leftrightarrow \bar{\eta}.$$

Portanto, existem tantas retas projetivas quantos pontos projetivos.

Denotaremos por  $\mathbb{RP}^{2*}$  o conjunto das retas projetivas que será denominado *plano projetivo dual*.

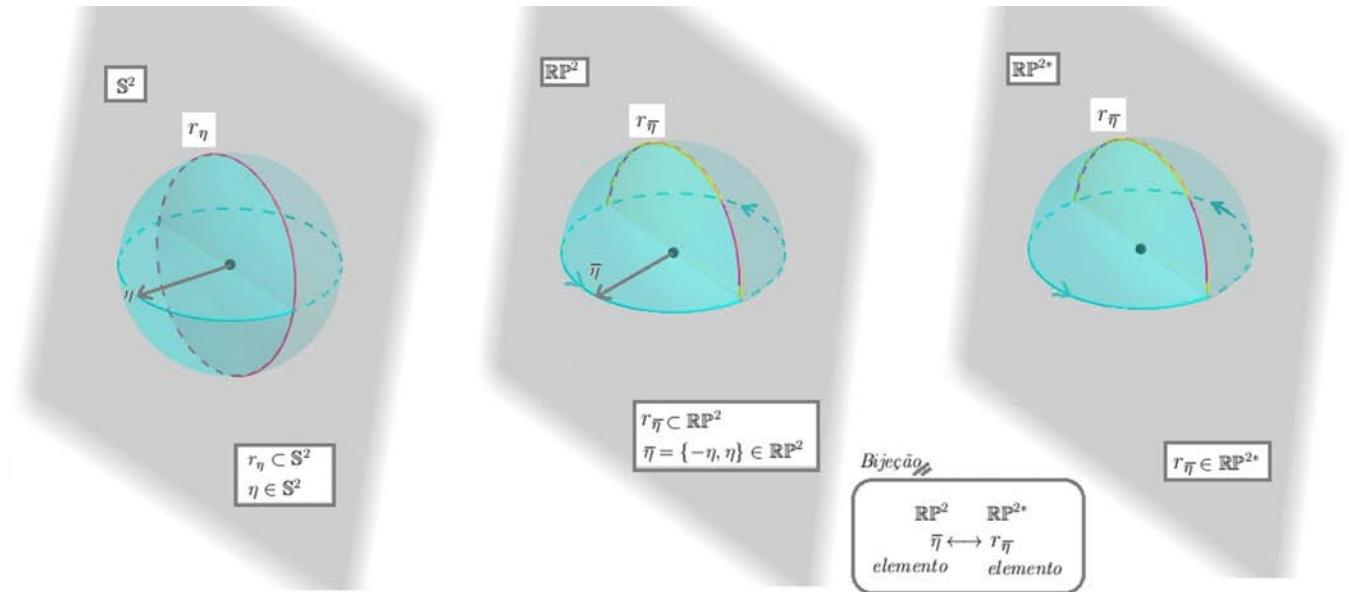


Figura 5.4: Plano Projetivo Dual

### 5.6 Axiomas de Incidência e o Axioma das Paralelas

Nesta seção verificaremos que o plano projetivo  $\mathbb{RP}^2$  satisfaz os Axiomas de Incidência mencionados no início do capítulo.



Os axiomas  $II_2$  e  $II_3$  são verificados de maneira imediata, de fato, se  $\Psi_0(r_\eta) = r_{\bar{\eta}}$  é uma reta projetiva, então usando que o axioma  $II_3$  é válido em  $\mathbb{S}^2$ , temos que  $r_\eta$  possui pelo menos dois pontos  $u_1$  e  $u_2$ , de onde segue que

$$\bar{u}_1 \in \Psi_0(r_\eta) = r_{\bar{\eta}} \quad \text{e} \quad \bar{u}_2 \in \Psi_0(r_\eta) = r_{\bar{\eta}}.$$

Além disso, usando que o axioma  $II_2$  é válido em  $\mathbb{S}^2$ , temos que existem três pontos  $u_1, u_2$  e  $u_3$  que não estão sobre  $r_\eta$ , assim devemos ter que

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \text{ e } \bar{u}_3 \text{ não pertencem à } r_{\bar{\eta}},$$

caso contrário, teríamos os seguintes pontos em  $r_\eta$

$$\begin{aligned} \Psi_0^{-1}(\bar{u}_1) &= \{u_1, -u_1\} \\ \Psi_0^{-1}(\bar{u}_2) &= \{u_2, -u_2\} \\ \Psi_0^{-1}(\bar{u}_3) &= \{u_3, -u_3\}, \end{aligned}$$

contrariando o fato de  $u_1, u_2$  e  $u_3$  não estarem em  $r_\eta$ .

Para provar o axioma  $II_1$  precisaremos do seguinte critério de incidência.

**Proposição 5.1.** *(Condição de incidência)*

Dados um ponto projetivo  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  e uma reta projetiva  $r_{\bar{\eta}} \in \mathbb{RP}^{2*}$ . Então,  $\bar{v}$  e  $r_{\bar{\eta}}$  são incidentes se, e somente se,  $\langle v, \eta \rangle = 0$ .

*Demonstração.* Dados um ponto projetivo  $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$  e uma reta elíptica  $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ , então

$$\langle v, \eta \rangle = 0 \iff \pm v \in \Gamma_\eta \iff \pm \frac{v}{\|v\|} \in r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2. \tag{5.1}$$

Sabemos que

$$\Psi_0^{-1}(\bar{v}) = \left\{ \frac{v}{\|v\|}, -\frac{v}{\|v\|} \right\} \quad \text{e} \quad \Psi_0(r_\eta) = r_{\bar{\eta}},$$

portanto, segue de (5.1) que

$$\langle v, \eta \rangle = 0 \iff \pm \frac{v}{\|v\|} \in r_\eta \iff \Psi_0 \left( \pm \frac{v}{\|v\|} \right) = \bar{v} \in \Psi_0(r_\eta) = r_{\bar{\eta}}.$$

□

Verificaremos agora o axioma  $II_1$ , ou seja,

**“Para cada dois pontos distintos existe uma reta que os contém”.**

**Proposição 5.2.** *Por dois pontos projetivos distintos  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$  incide uma única reta projetiva, a saber,*

$$r_{\left( \frac{v}{\|v\|} \times \frac{w}{\|w\|} \right)} \in \mathbb{RP}^{2*}.$$

*Demonstração. (Existência):* Sejam  $\bar{v}, \bar{w}$  dois pontos distintos pertencentes a  $\mathbb{RP}^2$ . Considere agora os respectivos representantes  $\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \in \mathbb{S}^2$ , das classes  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$ .

Observe que  $\frac{v}{\|v\|} \neq \pm \frac{w}{\|w\|}$ , caso contrário teríamos que

$$v = \lambda w, \quad \lambda = \pm \frac{\|v\|}{\|w\|} \in \mathbb{R} - \{0\},$$

ou seja,  $\bar{v} = \bar{w}$ .

Assim, pela Proposição 2.10 podemos formar o vetor não nulo  $\eta = \frac{v}{\|v\|} \times \frac{w}{\|w\|}$ , e considerar o plano  $\Gamma_\eta$ .

Pelo item (i) da Proposição 2.8 temos

$$\begin{cases} \langle v, \eta \rangle = \|v\| \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \eta \right\rangle = 0 \\ \langle w, \eta \rangle = \|w\| \left\langle \frac{w}{\|w\|}, \eta \right\rangle = 0. \end{cases}$$

Logo,  $v, w \in \Gamma_\eta$ , ou seja,  $\Gamma_\eta$  é o único plano em  $\mathbb{R}^3$  contendo  $v, w$  e a origem.

Como sabemos, a interseção deste plano com  $\mathbb{S}^2$  determina a reta elíptica

$$r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta.$$

Dada a aplicação projeção  $\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ , temos por definição que

$$\Psi_0(r_\eta) = r_{\bar{\eta}},$$

e como  $\frac{v}{\|v\|}$  e  $\frac{w}{\|w\|}$  são pontos unitários que estão em  $\Gamma_\eta$  segue que

$$\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \in r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta.$$

Portanto, as suas imagens

$$\Psi_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \overline{\left(\frac{v}{\|v\|}\right)} = \bar{v} \quad \text{e} \quad \Psi_0\left(\frac{w}{\|w\|}\right) = \overline{\left(\frac{w}{\|w\|}\right)} = \bar{w},$$

estão em  $\Psi_0(r_\eta) = r_{\bar{\eta}}$ .

*(Unicidade):* Suponha que  $r_{\bar{\mu}} \in \mathbb{RP}^{2*}$  é outra reta projetiva contendo  $\bar{v}, \bar{w}$ , então

$$\begin{cases} \left\{ -\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\} = \Psi_0^{-1}(\{\bar{v}\}) \subseteq \Psi_0^{-1}(r_{\bar{\mu}}) = r_\mu \\ \left\{ -\frac{w}{\|w\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\} = \Psi_0^{-1}(\{\bar{w}\}) \subseteq \Psi_0^{-1}(r_{\bar{\mu}}) = r_\mu. \end{cases}$$

Portanto,  $\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \in r_\mu = \Gamma_\mu \cap \mathbb{S}^2$ , ou seja,

$$\begin{cases} \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \mu \right\rangle = 0 \\ \left\langle \frac{w}{\|w\|}, \mu \right\rangle = 0. \end{cases}$$

Portanto,  $\mu$  é um vetor não nulo pertencente à  $\Gamma_{\frac{v}{\|v\|}} \cap \Gamma_{\frac{w}{\|w\|}}$ .

Segue da Proposição 4.4 que existe  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  com  $\mu = \lambda \left( \frac{v}{\|v\|} \times \frac{w}{\|w\|} \right)$ , assim

$$\bar{\mu} = \overline{\left( \frac{v}{\|v\|} \times \frac{w}{\|w\|} \right)} = \bar{\eta}.$$

□

**Proposição 5.3.** (Concorrência de duas retas projetivas)

Existe um único ponto na interseção das retas projetivas distintas,  $r_{\bar{\eta}}, r_{\bar{\mu}} \in \mathbb{RP}^{2*}$ , a saber

$$\bar{v} = \overline{\eta \times \mu} \in \mathbb{RP}^2.$$

*Demonstração.* Sabemos pela Proposição 4.5 que

$$r_{\eta} \cap r_{\mu} = \left\{ -\frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|}, \frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|} \right\}.$$

Observe que

$$\Psi_0(r_{\eta} \cap r_{\mu}) \subseteq \Psi_0(r_{\eta}) \cap \Psi_0(r_{\mu}) = r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} x \in \Psi_0(r_{\eta} \cap r_{\mu}) &\Rightarrow x = \Psi_0(y), y \in r_{\eta} \cap r_{\mu} \\ &\Rightarrow x = \Psi_0(y), y \in r_{\eta} \text{ e } y \in r_{\mu} \\ &\Rightarrow x \in \Psi_0(r_{\eta}) \cap \Psi_0(r_{\mu}). \end{aligned}$$

Como  $\frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|} \in r_{\eta} \cap r_{\mu}$ , segue que

$$\overline{\frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|}} = \Psi_0\left(\frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|}\right) \in \Psi_0(r_{\eta} \cap r_{\mu}) \subseteq r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}},$$

ou seja,  $\overline{\eta \times \mu} \in r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}}$ .

Provemos agora a unicidade.

Se  $\bar{w}$  é tal que  $\bar{w} \in r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}}$ , então

$$\left\{ -\frac{w}{\|w\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\} = \Psi_0^{-1}(\{\bar{w}\}) \subseteq \Psi_0^{-1}(r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}}). \quad (5.2)$$

Observe que

$$\Psi_0^{-1}(r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}}) \subseteq \Psi_0^{-1}(r_{\bar{\eta}}) \cap \Psi_0^{-1}(r_{\bar{\mu}}) = r_{\eta} \cap r_{\mu}. \quad (5.3)$$

De fato,

$$\begin{aligned} x \in \Psi_0^{-1}(r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}}) &\Rightarrow \Psi_0(x) \in r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}} \\ &\Rightarrow \Psi_0(x) \in r_{\bar{\eta}} \text{ e } \Psi_0(x) \in r_{\bar{\mu}} \\ &\Rightarrow x \in \Psi_0^{-1}(r_{\bar{\eta}}) \text{ e } x \in \Psi_0^{-1}(r_{\bar{\mu}}) \\ &\Rightarrow x \in \Psi_0^{-1}(r_{\bar{\eta}}) \cap \Psi_0^{-1}(r_{\bar{\mu}}). \end{aligned}$$

Segue de (5.2) e (5.3) que

$$\frac{w}{\|w\|} \in r_\eta \cap r_\mu = \left\{ -\frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|}, \frac{\eta \times \mu}{\|\eta \times \mu\|} \right\}.$$

Logo,  $w = \lambda(\eta \times \mu)$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Portanto,

$$\bar{w} = \overline{\left( \frac{w}{\|w\|} \right)} = \overline{\eta \times \mu}.$$

□

Como consequência desta proposição, temos o válido o *Axioma das Paralelas*,

**“Se  $r_{\bar{\eta}}$  é uma reta projetiva e  $\bar{u}$  um ponto projetivo que não pertencente à  $r_{\bar{\eta}}$ , então toda reta projetiva que passa por  $\bar{u}$  intersecta  $r_{\bar{\eta}}$ ”.**

De fato, se  $r_{\bar{\eta}}$  é uma reta projetiva e  $\bar{u}$  um ponto projetivo que não pertencente à  $r_{\bar{\eta}}$ , então toda reta projetiva  $r_{\bar{\mu}}$  que passa por  $\bar{u}$  intersecta  $r_{\bar{\eta}}$  em  $\overline{\eta \times \mu}$ .

**Definição 5.4.** Diz-se que três pontos  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$  são colineares se existe uma reta projetiva incidindo sobre os mesmos.

**Proposição 5.4.** (Colinearidade para três pontos projetivos): Dados três pontos  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$  temos que  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  são colineares se, e somente se,  $\det [u, v, w] = 0$ .

*Demonstração.* Temos que  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  são colineares se, e somente se, existe  $r_{\bar{\eta}}$  tal que  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in r_{\bar{\eta}}$ .

Além disso, utilizando a condição de incidência dada na Proposição 4.6 temos

$$\begin{aligned} \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in r_{\bar{\eta}} &\Leftrightarrow \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in r_{\bar{\eta}} = \Psi_0(r_\eta) \\ &\Leftrightarrow \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \in r_\eta \\ &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \frac{u}{\|u\|} & \frac{v}{\|v\|} & \frac{w}{\|w\|} \end{bmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\|u\|} \frac{1}{\|v\|} \frac{1}{\|w\|} \det [u, v, w] = 0 \\ &\Leftrightarrow \det [u, v, w] = 0. \end{aligned}$$

□

**Proposição 5.5.** (Concorrência para três retas projetivas)

Dadas três retas projetivas  $r_{\bar{\eta}}, r_{\bar{\mu}}, r_{\bar{\nu}} \in \mathbb{RP}^{2*}$ , então

$$r_{\bar{\eta}}, r_{\bar{\mu}}, r_{\bar{\nu}} \text{ são concorrentes se, e somente se, } \det [\eta, \mu, \nu] = 0.$$

*Demonstração.* Suponha que as retas  $r_{\bar{\eta}}, r_{\bar{\mu}}, r_{\bar{\nu}} \in \mathbb{RP}^{2*}$  sejam concorrentes. Assim, existe  $x$  tal que

$$x \in r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}} \cap r_{\bar{\nu}}.$$

Como  $x \in r_{\bar{\mu}} \cap r_{\bar{\nu}}$ , então pela Proposição 5.3

$$x = \overline{\mu \times \nu}.$$

Portanto,

$$\overline{\mu \times \nu} \in r_{\bar{\eta}} \cap r_{\bar{\mu}} \cap r_{\bar{\nu}}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} r_{\bar{\eta}}, r_{\bar{\mu}}, r_{\bar{\nu}} \text{ são concorrentes} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\mu \times \nu} \in r_{\bar{\eta}} \\ \overline{\mu \times \nu} \in r_{\bar{\mu}} \\ \overline{\mu \times \nu} \in r_{\bar{\nu}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \overline{\mu \times \nu} \in r_{\bar{\eta}}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \overline{\mu \times \nu} = \left( \frac{\mu \times \nu}{\|\mu \times \nu\|} \right) \in r_{\bar{\eta}} &\Leftrightarrow \Psi_0 \left( \frac{\mu \times \nu}{\|\mu \times \nu\|} \right) \in \Psi_0(r_{\eta}) \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu \times \nu}{\|\mu \times \nu\|} \in r_{\eta} = \Gamma_{\eta} \cap \mathbb{S}^2 \\ &\Leftrightarrow \langle \eta, \mu \times \nu \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \det[\eta, \mu, \nu] = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$r_{\bar{\eta}}, r_{\bar{\mu}}, r_{\bar{\nu}} \text{ são concorrentes} \Leftrightarrow \langle \eta, \mu \times \nu \rangle = 0 \Leftrightarrow \det[\eta, \mu, \nu] = 0.$$

□

## 5.7 Axioma de Continuidade

Da mesma forma que na Geometria Projetiva Elíptica Dupla, na Geometria Projetiva Elíptica Simples é válido o *Axioma de Continuidade*, ou seja,

**“Uma reta projetiva menos um de seus pontos é um modelo de reta Euclidiana”.**

De fato, observe que em  $r_{\bar{\eta}} \in \mathbb{RP}^2$  os pontos  $u$  e  $-u$  são identificados, assim  $r_{\bar{\eta}}$  tem uma bijeção com um círculo de raio  $R$ , além disso o círculo tem uma bijeção com  $r_{\eta} \in \mathbb{S}^2$ .

Logo,  $r_{\bar{\eta}} \in \mathbb{RP}^2$  tem uma bijeção com  $r_{\eta} \in \mathbb{S}^2$  (veja figura 5.5).

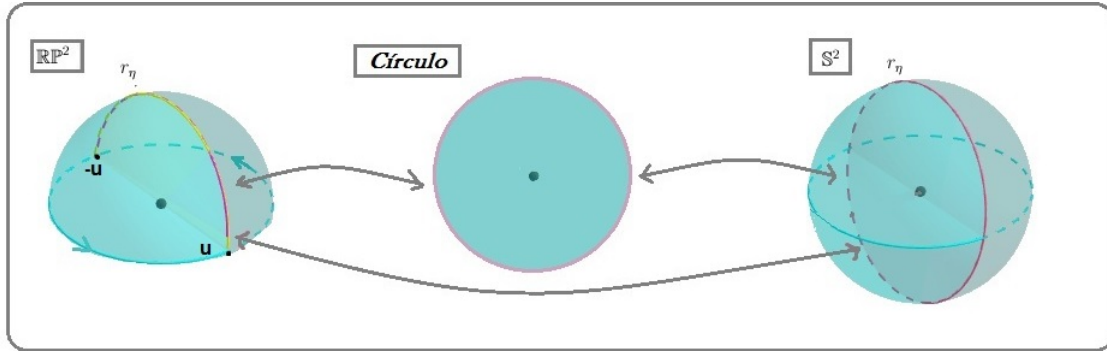


Figura 5.5: Bijeção com o círculo

Assim, como provamos anteriormente que uma reta elíptica menos um dos seus pontos é um modelo de reta Euclidiana, temos que  $r_\eta \in \mathbb{RP}^2$  menos um de seus pontos também é um modelo de reta Euclidiana (veja figura 5.6).

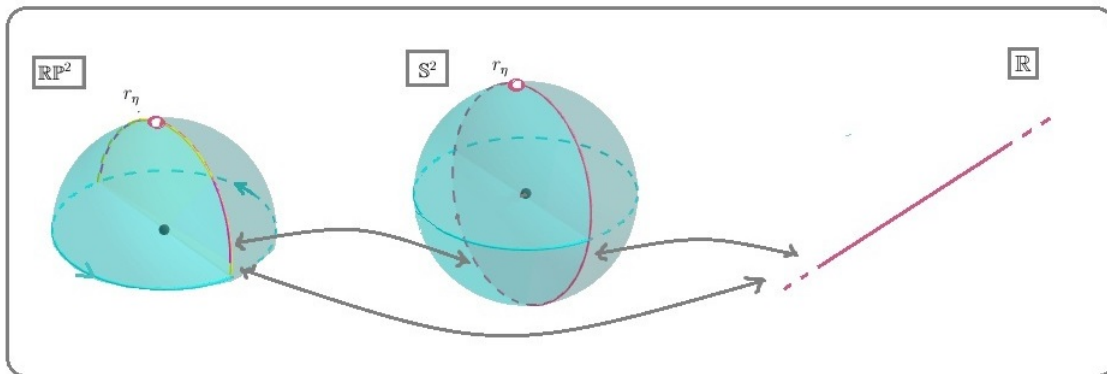


Figura 5.6: Bijeção com a reta

## Capítulo 6

# Aplicação: Teorema de Euler para poliedros convexos

Neste capítulo apresentaremos uma demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos usando a teoria de triângulo elíptico desenvolvida até aqui.

Para essa demonstração consultamos o livro [9] escrito por Antonio Caminha Muniz neto.

Primeiramente precisaremos de alguns conceitos iniciais.

**Definição 6.1.** *Considere a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  de centro  $O$ .*

*Uma **poligonal esférica simples e fechada** de  $k$  lados em  $\mathbb{S}^2$  é uma união*

$$\widehat{A_1A_2} \cup \widehat{A_2A_3} \cup \dots \cup \widehat{A_{k-1}A_k} \cup \widehat{A_kA_1},$$

onde  $A_{k+1} = A_1$ , cada  $\widehat{A_jA_{j+1}}$  é um segmento da reta elíptica de medida menor que  $\pi$ ,  $A_{i-1}$ ,  $A_i$  e  $A_{i+1}$  não pertencem simultaneamente à uma reta elíptica e

$$\widehat{A_iA_{i+1}} \cap \widehat{A_jA_{j+1}} \neq \emptyset \Leftrightarrow i = j - 1, i = j \text{ ou } i = j + 1.$$

Neste caso, dizemos que os pontos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  são os vértices e os arcos  $\widehat{A_iA_{i+1}}$  para  $1 \leq i \leq k - 1$  são os lados da poligonal esférica  $A_1A_2 \dots A_k$  (veja figura abaixo).

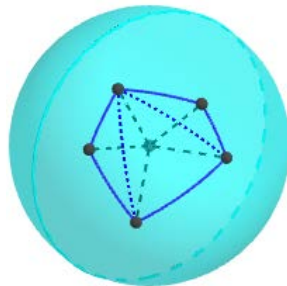


Figura 6.1: Poligonal esférica

Uma poligonal simples fechada  $A_1A_2 \dots A_k$  divide a esfera  $\mathbb{S}^2$  em duas partes, sendo que uma delas está situada em um hemisfério de  $\mathbb{S}^2$ ; tal parte é chamada de polígono esférico determinado pela poligonal esférica  $A_1A_2 \dots A_k$ .

Observe que um polígono esférico de  $k$  lados pode ser escrito como a união de  $k - 2$  triângulos elípticos.

**Definição 6.2.** O **ângulo interno** de  $A_1A_2 \dots A_k$  em  $A_i$  é a medida da lua formada pelas retas elípticas  $r_\eta$  e  $r_\mu$ , onde  $\eta = A_i \times A_{i-1}$  e  $\mu = A_{i+1} \times A_i$ , em particular  $\theta_i \in (0, \pi)$ .

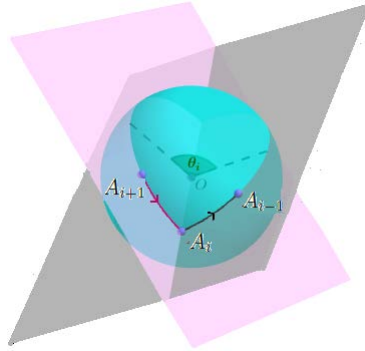


Figura 6.2: Ângulo interno

**Observação 6.1.** Sabemos pelo Teorema de Girard que a área de um triângulo elíptico é dada pela soma dos ângulos internos menos  $\pi$ , assim usando o fato de que um polígono esférico convexo  $A_1A_2 \dots A_k$  pode ser particionado em  $k - 2$  triângulos elípticos, então a sua área é dada por

$$A(A_1A_2 \dots A_k) = \sum_{i=1}^k \theta_i - (k - 2)\pi,$$

onde  $\theta_i$  é o ângulo interno de  $A_1A_2 \dots A_k$  em  $A_i$ .

**Definição 6.3.** Uma **poligonal** é uma figura formada por uma sequência de pontos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  e pelos segmentos  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \dots, \overline{A_{k-1}A_k}$ .

Os pontos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  são chamados de vértices da poligonal e os segmentos  $\overline{A_iA_{i+1}}, i = 1, \dots, k - 1$  são chamados de lados da poligonal.

**Definição 6.4.** Um **polígono** é uma poligonal  $A_1, A_2, \dots, A_k$  em que as seguintes condições são satisfeitas:

- (a)  $A_k = A_1$ ;
- (b) Os lados da poligonal se intersectam somente em suas extremidades;
- (c) Cada vértice é extremidade de dois lados;
- (d) Dois lados com a mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

A região poligonal correspondente ao polígono  $A_1, A_2, \dots, A_k$  é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{k-1}A_k}, \overline{A_kA_1}$ .



**Definição 6.5.** Um **poliedro** é um conjunto fechado e limitado, com interior não vazio e cuja fronteira consiste da união de um número finito de regiões poligonais satisfazendo as seguintes condições:

(a) Dois polígonos quaisquer não estão contidos em um mesmo plano;

(b) Se dois polígonos se intersectam, então eles têm um vértice ou um lado em comum;

(c) Se dois polígonos  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  não se intersectam, então existem polígonos

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k = \mathcal{Q},$$

tais que  $\mathcal{P}_i$  e  $\mathcal{P}_{i+1}$  se intersectam, para  $1 \leq i < k$ .

Um poliedro é **convexo** se for um subconjunto convexo do espaço.

**Observação 6.2.** Se um poliedro tem  $A$  arestas e  $F_k$  faces de  $k$  lados, então observando que cada aresta do poliedro pertence a exatamente duas faces temos

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

De fato, em ambos os membros da igualdade cada aresta está sendo contada exatamente duas vezes.

**Exemplo 6.1.** Considere o seguinte poliedro convexo abaixo

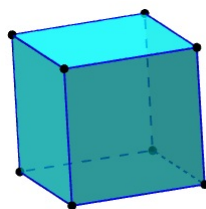


Figura 6.3: Cubo

Observe que para esse poliedro  $F_4 = 6$ ,  $A = 12$  e é verificada a igualdade

$$4F_4 = 4 \cdot 6 = 24 = 2 \cdot 12 = 2A.$$

**Definição 6.6.** Dado um poliedro  $\mathcal{P}$  (não necessariamente convexo), denotamos respectivamente por  $V$ ,  $A$  e  $F$  seus números de vértices, arestas e faces, e

$$\mathcal{X}(\mathcal{P}) = V - A + F$$

é chamado de **característica de Euler** de  $\mathcal{P}$ .

**Teorema 6.1. Teorema de Euler**

Se  $\mathcal{P}$  é um poliedro convexo, então  $\mathcal{X}(\mathcal{P}) = 2$ .

*Demonstração.* Considere a fronteira  $\partial\mathcal{P}$  formada por faces poligonais  $A_1A_2\dots A_k$  e seja  $O$  um ponto no interior de  $\mathcal{P}$ .

Seja  $\mathbb{S}^2$  a esfera com centro em  $O$ , então fazendo a projeção radial, cada ponto  $Q \in A_1A_2\dots A_k$ , é associado a um ponto  $Q' \in \mathbb{S}^2$  (veja figura 6.4). Obtendo assim uma aplicação bijetora

$$\begin{aligned} f : \partial\mathcal{P} &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ Q &\longmapsto Q'. \end{aligned}$$

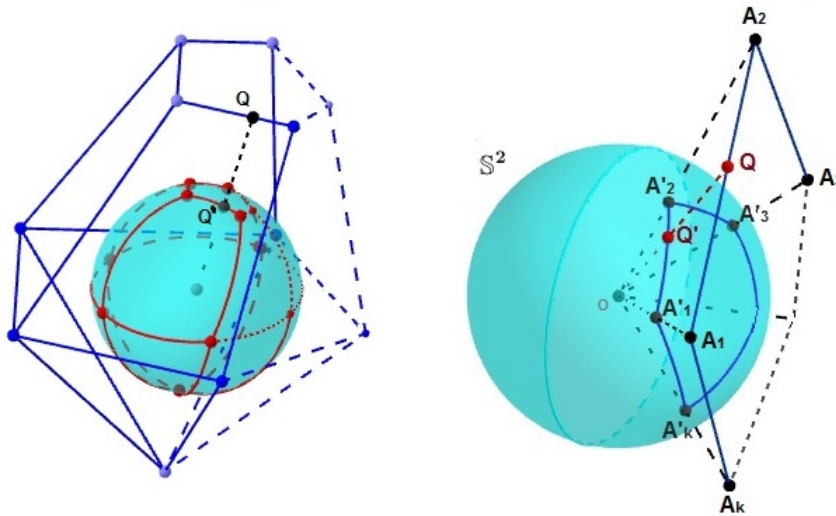


Figura 6.4: Projeção radial I

Se  $A_1A_2\dots A_k$  é uma face de  $\mathcal{P}$ , observe que  $A'_1A'_2\dots A'_k = f(A_1A_2\dots A_k)$  é uma poligonal esférica de  $\mathbb{S}^2$ , pois  $f(A_iA_{i+1})$  é um segmento de uma reta elíptica em  $\mathbb{S}^2$ , ligando  $A'_i$  e  $A'_{i+1}$ .

Por outro lado, se  $\Gamma$  é o plano que passa por  $O$  e é paralelo ao plano da face  $A_1A_2\dots A_k$ , então  $A'_1A'_2\dots A'_k$  e  $A_1A_2\dots A_k$  estão contidos no mesmo semiespaço determinado por  $\Gamma$  (veja figura 6.5).

Além disso, sendo  $\theta_i$  o ângulo interno de  $A'_1A'_2\dots A'_k$  em  $A'_i$ , então pela observação 6.1, a área do polígono esférico  $A'_1A'_2\dots A'_k$  é dada por

$$A(A'_1A'_2\dots A'_k) = \sum_{i=1}^k \theta_i - (k-2)\pi, \quad (6.1)$$

Somemos agora ambos os membros da igualdade acima sobre todos os polígonos esféricos convexos obtidos a partir das faces de  $\mathcal{P}$ .

Como  $f$  é uma bijeção então a esfera está particionada em polígonos esféricos  $A'_1A'_2\dots A'_k \in \mathbb{S}^2$ , de onde segue que a soma dos primeiros membros da igualdade é igual  $4\pi$  (área de  $\mathbb{S}^2$ ).

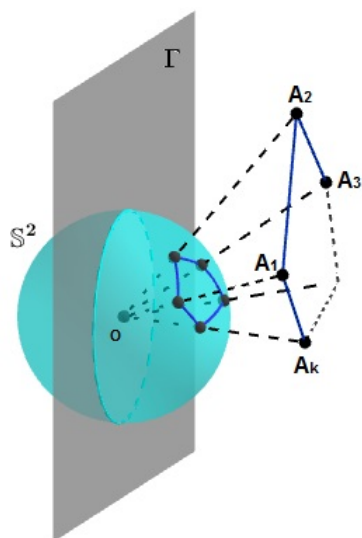


Figura 6.5: Projeção radial II

Para a soma dos segundos membros, observe inicialmente que se um vértice  $A$  de  $\mathcal{P}$  pertence às faces

$$\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_j \text{ e } \mathcal{F}'_i = f(\mathcal{F}_i),$$

para  $1 \leq i \leq j$ , então a soma dos ângulos internos dos polígonos esféricos convexos  $\mathcal{F}'_i$  em  $A'$  é igual a  $2\pi$  (Veja ilustração abaixo).

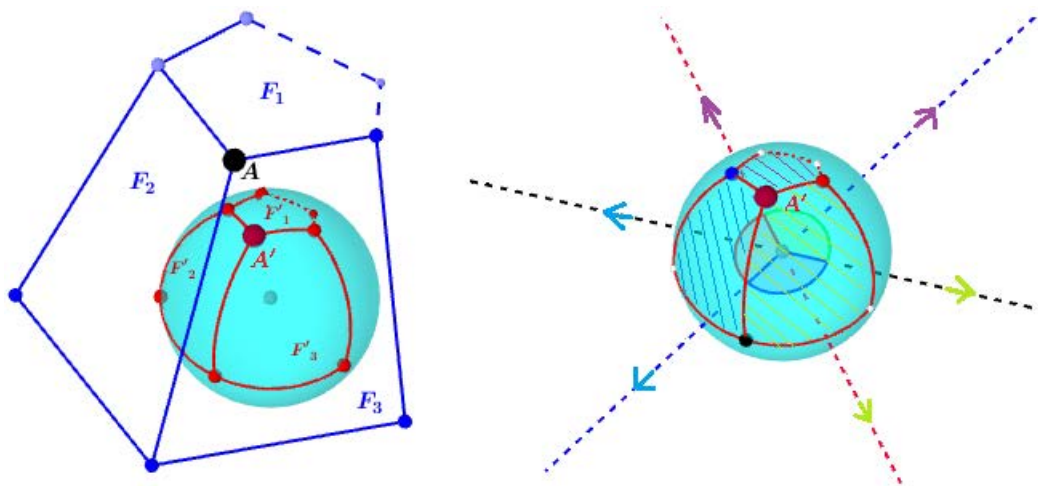


Figura 6.6: Soma dos ângulos internos em cada vértice

Por outro lado, se  $F_k$  denota, para  $k \geq 3$ , o número de faces de  $\mathcal{P}$  com  $k$  vértices, então  $F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots$  e a soma dos segundos membro é dada por

$$\left( 2\pi V - \sum_{k \geq 3} (k-2) \pi F_k \right) = \left( 2V - \sum_{k \geq 3} k F_k + 2F \right) \pi = (2V - 2A + 2F) \pi,$$

onde na última igualdade utilizamos a observação 6.2.

Como somas de parcelas iguais fornecem totais iguais, podemos concluir das considerações anteriores, que

$$4\pi = (V - A + F) 2\pi,$$

ou seja,  $V - A + F = 2$ . □

É importante ressaltar que se  $\mathcal{P}$  é um poliedro não convexo com “buracos”, então a projeção radial  $f$  não é bijetora (veja figura abaixo)

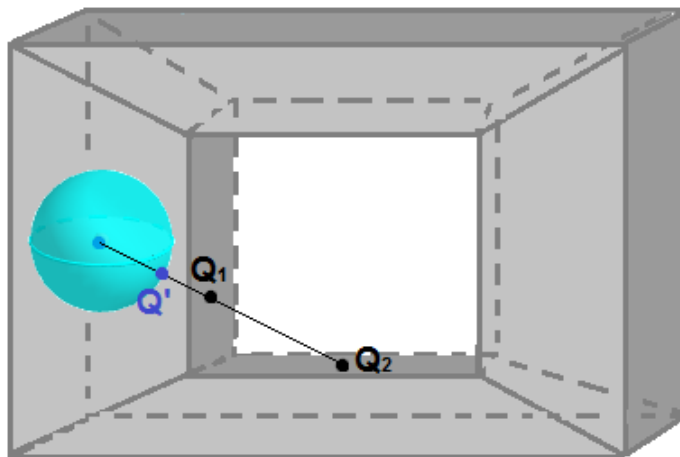


Figura 6.7: Poliedro não convexo com gênero 1

Observe que neste caso existem dois pontos  $Q_1$  e  $Q_2$ , com a mesma imagem  $f(Q_1) = f(Q_2) = Q'$ , ou seja,  $f$  não é injetora.

A demonstração de que se  $\mathcal{P}$  é um poliedro convexo, então a projeção radial  $f$  é bijetora pode ser encontrada em [9].

De maneira geral é possível provar que para todo poliedro  $\mathcal{P}$ ,

$$\mathcal{X}(\mathcal{P}) = 2 - 2g,$$

onde  $g$  é o gênero (“número de buracos”) de  $\mathcal{P}$ . Uma demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [10].

# Capítulo 7

## Considerações Finais

Nesta dissertação vimos que salvo algumas adaptações do sistema axiomático de Hilbert (Incidência, Ordem, Congruência, Paralelismo e Continuidade) podemos dar origem a três geometrias projetivas, a saber: Geometria Projetiva Elíptica, Geometria Projetiva Hiperbólica e Geometria Projetiva Afim. O objetivo desta dissertação foi realizar um estudo da Geometria Projetiva Elíptica, sendo dividido em duas frentes, a Geometria Projetiva Elíptica Dupla e a Geometria Projetiva Elíptica Simples.

A Geometria Elíptica Dupla tem como modelo a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ , onde são satisfeitos os axiomas de incidência, congruência, além do axioma das paralelas e do axioma de continuidade a menos de adaptações. No estudo desta geometria foi apresentado os conceitos de reta Elíptica, Lua e Triângulo Elíptico (conceitos respectivamente equivalentes ao de reta, ângulo e triângulo da Geometria Euclidiana).

Apresentamos também o conceito de Triângulo Dual e obtemos as Leis dos Senos e Cossenos para triângulos elípticos. Além disso, vimos que nesta geometria sempre ocorre interseção entre quaisquer duas retas e a interseção é dada por dois pontos, por este motivo o termo “Dupla”.

No estudo de triângulo elíptico foi demonstrado o importante teorema de Girard, usado posteriormente para provar o teorema de Euler para poliedros convexos.

Vimos que a Geometria Projetiva Elíptica Simples tem como modelo o plano projetivo  $\mathbb{RP}^2$ , o qual pode ser obtido de  $\mathbb{S}^2$  com a relação de equivalência que identifica os pontos antípodas. Nesta geometria são satisfeitos os axiomas de incidência, além dos axiomas das paralelas e continuidade a menos de adaptações.

No estudo da Geometria Projetiva Elíptica Simples foram introduzidos os conceitos de reta projetiva e Plano Projetivo Dual. Vimos também que quaisquer duas retas projetivas sempre se intersectam e a interseção é dada por apenas um ponto, por este motivo o termo “Simples”.



# Apêndice A

## Unicidade das Paralelas

Neste capítulo consultamos o livro ([11]) escrito João Lucas Marques Barbosa.

Vimos que diferente do que ocorre na Geometria Euclidiana, na Geometria Projetiva Elíptica a soma dos ângulos internos de um triângulo elíptico é maior que  $\pi$ .

Nesta seção veremos que o fator determinante para haver essa diferença em relação à soma dos ângulos internos é que na Geometria Projetiva Elíptica não existe a unicidade da reta paralela.

Para isto, listemos primeiramente os critérios de congruência para triângulos na Geometria Euclidiana.

Existem três critérios de congruência de triângulos:

**(Critério L.L.L)**

Se  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  são dois triângulos com

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} = \overline{B'C'} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = \overline{A'C'},$$

então  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  são congruentes.

**(Critério L.A.L)**

Se  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  são dois triângulos com

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \quad \text{e} \quad \overline{BC} = \overline{B'C'},$$

então  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  são congruentes.

**(Critério A.L.A.)**

Se  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  são dois triângulos com

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}, \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}, \quad \text{e} \quad \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'},$$

então  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  são congruentes.

Agora mostremos o seguinte teorema

**Teorema do ângulo externo:** *A medida de um ângulo externo de um triângulo é sempre maior que a medida dos ângulos não adjacentes a ele.*

Considere um triângulo  $\Delta ABC$ , com  $\alpha, \beta$  sendo os ângulos internos com vértice  $A$  e  $B$  respectivamente e seja  $\gamma'$  o ângulo externo ao vértice  $C$ .

Provemos que  $\gamma' > \alpha$  e  $\gamma' > \beta$ .

Para isto considere  $P$  ponto médio de  $AC$  e a reta  $t$  passando por  $B$  e  $P$ .

Além disso, considere  $Q \in t$ , tal que  $BP = PQ$  e  $P$  esteja entre  $B$  e  $Q$ .

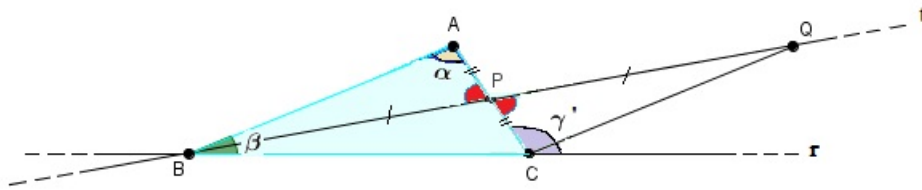


Figura A.1: Triângulo euclidiano  $I_1$

Observe pela figura acima que o triângulo  $\Delta ABP = \Delta CQP$  pelo critério L.A.L, pois  $\widehat{QPC} = \widehat{BPA}$  são opostos pelo vértice.

Assim,  $\widehat{PCQ} = \widehat{BAC}$ .

Como  $\gamma' > \widehat{PCQ}$  por construção, então  $\gamma' > \widehat{BAC} = \alpha$ .

De forma análoga, provamos que  $\gamma' > \beta$ .

Basta tomar o ponto  $P' \in BC$ , tal que  $BP' = P'C$ , a reta  $t'$  passando por  $P'$  e tomar  $Q' \in t'$ , tal que  $AP' = P'Q'$  e  $P'$  esteja entre  $A$  e  $Q'$  como na figura abaixo.

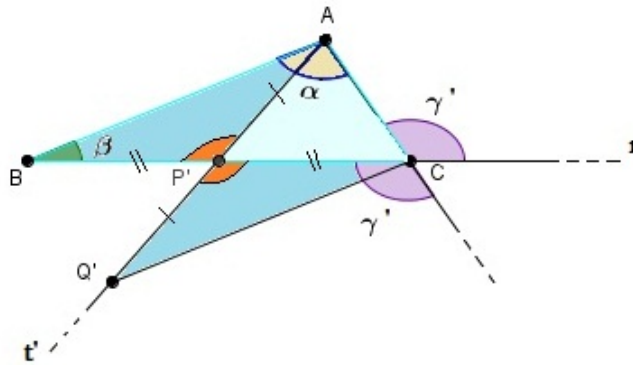


Figura A.2: Triângulo euclidiano  $I_2$

Assim, temos que  $\Delta ABP' = \Delta Q'CP'$  pelo critério L.A.L. e portanto

$$\widehat{ABC} = \widehat{P'Q'C} \text{ e } \widehat{BAP'} = \widehat{CQ'P'}.$$



Observe que o ângulo oposto pelo vértice  $C$  ao ângulo  $\gamma'$ , também possui medida  $\gamma'$  e tal ângulo é maior que  $Q'\hat{C}P'$  por construção.

Logo,  $\gamma' > Q'\hat{C}P' = A\hat{B}C = \beta$ .

Agora estamos em condição de mostrar que a soma dos ângulos internos é  $\pi$ . Considere um triângulo  $\Delta ABC$ , com  $r$  passando por  $B$  e  $C$ , e  $s$  reta paralela à  $r$  passando por  $A$  como indicado na figura abaixo:

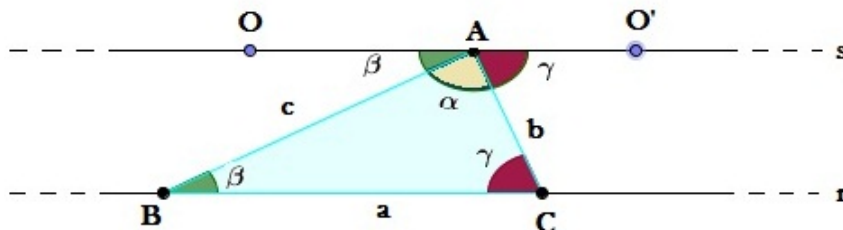


Figura A.3: Triângulo euclidiano  $I_3$

Observe que as igualdades

$$O\hat{A}B = A\hat{B}C = \beta \text{ e } O'\hat{A}C = A\hat{C}B = \gamma,$$

estão diretamente ligada á unicidade da reta paralela.

De fato, se supormos por absurdo que  $O\hat{A}B \neq A\hat{B}C$ , então existirá uma reta  $s'$  diferente de  $s$  passando por  $A$ , formando um ângulo  $\beta$  com a semi-reta  $S_{AB}$  (Semi-reta com origem em  $A$  passando por  $B$ ).

Assim, segue da unicidade de retas paralelas que  $s'$  não é paralela à  $r$ , ou seja,  $s'$  encontra  $r$  em algum ponto  $P$  (veja figura abaixo).

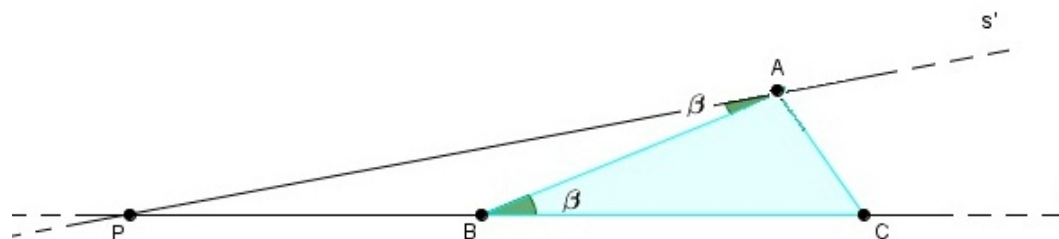


Figura A.4: Triângulo euclidiano  $I_4$

Assim, temos  $P\hat{A}B = A\hat{B}C$ .

Porém, como  $A\hat{B}C$  é o ângulo externo do triângulo  $\Delta ABP$ , então pelo Teorema do ângulo externo temos  $A\hat{B}C > P\hat{A}B$ .

Assim, chegamos em um absurdo, já que  $P\hat{A}B = A\hat{B}C$ .

Logo, devemos ter  $O\hat{A}B = A\hat{B}C$ .

De forma análoga provamos que  $O'\hat{A}C = A\hat{C}B$ .

Portanto, sendo  $O, A$  e  $O'$  pontos colineares temos

$$O\hat{A}O' = \pi = \alpha + \beta + \gamma,$$

como queríamos demonstrar.

# Apêndice B

## Modelos da Geometria Hiperbólica e Afim

Neste apêndice apresentaremos algumas ilustrações dos modelos da geometria Projetiva Hiperbólica e da geometria Projetiva Afim. Para um estudo aprofundado destas geometrias veja [8] e [6].

### B.1 Geometria Projetiva Hiperbólica

Um modelo para a geometria Projetiva Hiperbólica é o plano hiperbólico definido a partir da região limitada por uma circunferência (veja figura B.1). Esse modelo é conhecido como Disco de Poincaré e usualmente denotado por  $\mathbb{D}^2$ .

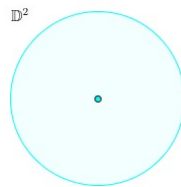


Figura B.1: Disco de Poincaré

Os pontos interiores à essa circunferência são denominados pontos hiperbólicos, os pontos que pertencem à circunferência são denominados pontos ideais.

Para se definir as retas nesta geometria é preciso saber anteriormente o conceito de circunferências ortogonais: Duas circunferências são ditas ortogonais se as retas tangentes aos pontos de interseção formam ângulos retos (veja figura abaixo).

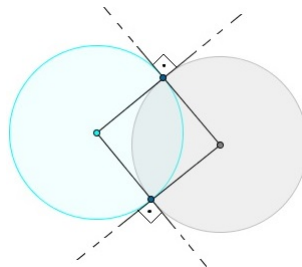


Figura B.2: Cincunferências Ortogonais

Nesta geometria as retas são obtidas pela interseção de  $\mathbb{D}^2$  com as circunferências ortogonais aos pontos ideais e também pela interseção de  $\mathbb{D}^2$  com as retas euclidianas passando pela origem do disco (veja figura abaixo).

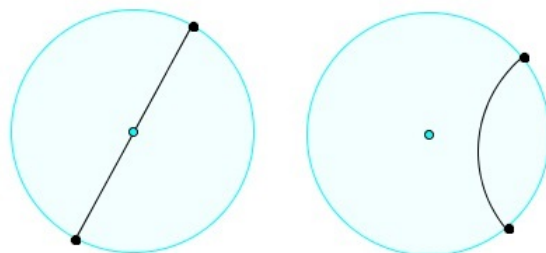


Figura B.3: Retas no Disco de Poincaré

Na geometria Hiperbólica não é satisfeito a unicidade do axioma das paralelas, ou seja, dado uma reta  $r$  e um ponto  $P \notin r$ , existem infinitas retas paralelas à  $r$  passando por  $P$ , como ilustrado na figura abaixo:

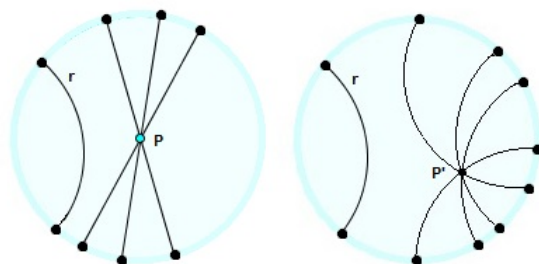


Figura B.4: Retas paralelas

## B.2 Geometria Projetiva Afim

Um modelo para a geometria Projetiva Afim é obtido pelo conjunto  $\mathbb{RP}^2 - I_\infty$ , onde  $\mathbb{RP}^2$  é o plano projetivo e  $I_\infty$  são os pontos ideais obtidos pela imagem de  $r_{e_3} \subset \mathbb{S}^2$  pela projeção  $\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  (veja seção 5.3). Tal conjunto é denominado Plano Afim e denotado por  $\mathbb{AP}^2$  (veja figura abaixo).

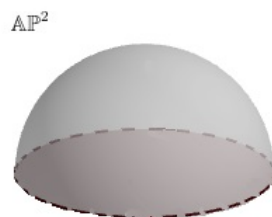


Figura B.5: Plano Afim

As retas nesta geometria são obtidas pela interseção das retas projetivas  $r_{\bar{\eta}}$  com  $\mathbb{A}\mathbb{P}^2$  (para a definição de retas projetivas veja seção 5.4), sendo cada reta denominada reta Afim (veja figura abaixo).

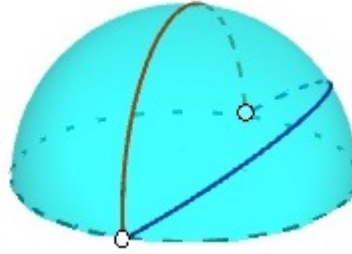


Figura B.6: Retas afins

Como cada reta projetiva intersecta  $I_\infty$  em um único ponto, então cada reta afim é uma reta projetiva sem o seu ponto ideal.



# Referências

- [1] ANDRADE, P. F. A.; BARROS, A. A. *Introdução à Geometria Projetiva*. Rio de Janeiro: Coleção textos universitários SBM, 2004.
- [2] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Tradução Elza Gomilde; Editora Edgar Blucher Ltda-Universidade de São Paulo, 1974.
- [3] EUCLIDES. *Os elementos*. São Paulo: Tradução Irineu Bicudo; Editora UNESP, 2009.
- [4] COELHO, F. V.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2005.
- [5] WINTERLE, P. *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books, 2000.
- [6] COXETER, H. S. M. *Non-Euclidean Geometry*. 6. ed. São Paulo: The Mathematical Association of America, Spectrum Series, 1998.
- [7] COXETER, H. S. M. *The Real Projective Plane*. 3. ed. São Paulo: Springer-Verlag, 1992.
- [8] GREENBERG, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries - Development and History*. 3. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1993.
- [9] NETO, A. C. M. *Geometria*. 1. ed. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática SBM, 2013.
- [10] LIBARDI, A. K. M.; VIEIRA, J. P.; MELO, T. *Invariantes Topológicos*. 1. ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.
- [11] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática SBM, 2012.