

História e Ensino de Matemática: construção e uso de instrumentos de medida do século XVI

Fumikazu Saito
Marisa da Silva Dias

Entre as diversas iniciativas que procuram aproximar a História da Matemática do ensino da Matemática, o uso de fontes primárias tem sido muito promissor¹. Seguindo de perto esta tendência, propomos abaixo três atividades baseadas em excertos retirados de uma obra publicada no século XVI².

INTRODUÇÃO: DAS PARTES DA OBRA E SEU OBJETIVO

Del modo di misurare de Cosimo de Bartoli (1503-1572) é uma compilação, como bem sugere o próprio autor no início de sua obra³. Dedicado a Cosimo de Medici, essa obra teve grande repercussão naquela época não só pelo seu apelo prático, mas também para o ensino de geometria⁴.

¹ Sobre o uso de fontes originais na formação de professores, vide: H. N. Jahnke, "The Use of Original Sources in the Mathematics Classroom," in *History in Mathematics Education: An ICMI Study*, eds. J. Fauvel & J van Maanen (Dordrecht; Boston; London: Kluwer, 2000) e F. Furinghetti, "Teacher education through the history of mathematics," *Educational Studies in Mathematics* 66 (2007): 131-143.

² As atividades aqui propostas fazem parte de projetos de pesquisa desenvolvido pelo grupo de estudos e pesquisa em História e Epistemologia na Educação Matemática, HEEMa. Vide: M. da S. Dias & F. Saito, "A resolução de situações-problema a partir da construção e uso de instrumentos de medida segundo o tratado *Del modo di misurare* (1564) de Cosimo Bartoli", in *Anais PBL2010 International Conference-Problem-Based Learning and Active Learning Methodologies, 2010, São Paulo. Congresso Internacional - PBL 2010: Aprendizagem baseada em Problemas e Metodologias Ativas de Aprendizagem - Conectando pessoas, idéias e comunidades (8 a 11 de fevereiro de 2010, São Paulo, Brasil)*. (São Paulo: Pan American Network of Problem Based Learning; USP, 2010), R518-1.

³ C. Bartoli, *Cosimo Bartoli Gentil'huomo, et accademico Fiorentino, Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive, & tutte le altre cose terrene, che possono occorrere agli homini, Secondo le vere regole d'Euclide, & de gli altri piu lodati scrittori* (Veneza: Francesco Franceschi Sanese, 1564). Sobre as fontes de Bartoli, vide: J. H. Bryce, "Cosimo Bartoli's *Del modo di misurare le distanze* (1564): A Reappraisal of his Sources," *Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze* 5, nº 2 (1982): 19-34.

⁴ Sobre a questão do uso de instrumentos e sua relação com a geometria vide: J. Bennett, "Practical Geometry and Operative Knowledge," *Configurations* 6(1998): 195-222; J. Bennett, "Knowing and doing in the sixteenth century: what were instruments for?," *British Journal for the History of Science* 36, nº 2 (2003): 129-150. Sobre o uso de instrumentos no ensino de geometria

A obra foi dividida por Bartoli em seis livros, cada um deles dedicado, direta ou indiretamente, aos modos de medir: distâncias (largura, comprimento, altura e profundidade); superfícies ou planos (área); corpos (ou volume de corpos regulares e irregulares); e uma província de 400 ou 500 milhas em seu comprimento e largura “de tal modo a poder desenhá-la sobre um plano com sua capital, terras, castelo, portos, rios, e outras coisas notáveis”⁵.

O primeiro livro trata, “segundo a seqüência proposta por Oroncio”, da medida da distância, isto é, comprimento, largura e profundidade. Como veremos abaixo, a mensuração das distâncias requer uso de instrumentos e de outros artifícios. O segundo livro trata da medida da área e, o terceiro, do volume de um corpo. O quarto livro, “segundo, agora, a ordem dada por Gemma Frisio e outros autores”, Bartoli explica e ensina como mapear uma província sobre um plano.

A esses quatro livros seguem dois outros, um quinto, dedicado às demonstrações geométricas de Euclides e, um sexto, que ensina a obter raízes quadradas e cúbicas. No quinto livro, Bartoli procura fornecer não só as questões, os conceitos e as proposições, apresentadas nos livros anteriores como demonstrações, mas também as proposições das quais derivavam aquelas demonstrações. Aqui Bartoli esclarece que decidiu acrescentar as demonstrações constantes em *Elementos* de Euclides por duas razões. Primeira por sugestão de Francesco de Medici e, segunda, por comodidade, ou seja, para deixar o leitor satisfeito e poupá-lo de se reportar ao livro de Euclides⁶. Mas cabe observar que os *Elementos* de Euclides não são aqui apresentados na íntegra. Bartoli apenas selecionou aqueles axiomas, postulados, definições e proposições que estariam diretamente ligados à medida da distância, área e volume.

vide: M. Kemp, *Science of Art: Optical Themes in Western Art from Brunelleschi to Seurat* (New Haven; London, Yale University Press, 1990), J. J. Gómez Molyna, coord., *Máquinas y herramientas de dibujo* (Madri: Cátedra, 2002) e A. J. Turner, “Mathematical Instruments and the Education of Gentlemen,” *Annals of Science* 30(1973): 51-65.

⁵ Bartoli, *Del modo di misurare*, 1r.

⁶ *Ibid.*, 1v.

No sexto livro, Bartoli apresenta regras para obter raízes quadradas e cúbicas. O autor observa que lhe pareceu interessante juntar este livro porque, em muitos casos, pareceram necessários encontrar as raízes quadradas e cúbicas, ou ainda obter algumas medidas tratadas nos primeiros três primeiros livros⁷. Por último, ainda neste sexto livro, Bartoli fornece a regra de três.



Figura 1: *Del modo di misurare* (1564)



Figura 2: Cosimo Bartoli (1503-1572)

⁷ Ibid., 2r.

ATIVIDADE PROPOSTA

O primeiro livro de *Del modo di misurare*, que ensina como medir distâncias (comprimento, largura e profundidade), está dividido em 27 capítulos. Cada capítulo refere-se a uma situação na qual a medida é obtida por um instrumento mais adequado a ela.

Selecionamos para esta atividade três instrumentos: o quadrante geométrico, o quadrante num quarto de círculo e o báculo. Traduzimos os capítulos referentes a cada um destes instrumentos e elaboramos o material que aqui se encontra⁸.

Cabe observar que, para a realização destas atividades, não é permitido o uso de réguas graduadas, transferidores e outros instrumentos de medida. No século XVI, os artesãos tinham como ferramentas para construir esses instrumentos apenas o compasso, a régua (sem escala como conhecemos hoje) e o esquadro. Assim, com base neste material e utilizando-se destas três ferramentas:

- a) construa o instrumento proposto com recursos que tiverem à mão;
- b) meça a altura de uma coluna utilizando o instrumento, seguindo as instruções fornecidas por Cosimo Bartoli; e
- c) faça um relato sobre a construção e a medição apresentando questões e outros aspectos que julgar interessantes.

QUADRANTE GEOMÉTRICO

Como construir um quadrante, instrumento muito cômodo para medir distâncias (cap. II): “Tome quatro filetes feitos de madeira bem dura. Una-os sem torcê-los de tal modo que a largura e o comprimento deles, trabalhados diligentemente, formem ângulos retos sobre um mesmo plano. Seria desejável que estes filetes tivessem, cada um deles, pelo menos uma braça de comprimento para que possamos operar de modo bem justo. Assim, depois de unidos justamente os quatro filetes, de tal modo a formarem um quadrado perfeito, escolha a face mais polida e

⁸ Fizemos uma tradução livre e adaptada sem, entretanto, alterar o conteúdo e as idéias do texto original.

nela trace linhas retas, em todas as quatro faces, não muito distantes dos cantos externos. Sobre os ângulos onde estas linhas retas se encontram, escreva A, B, C e D, lembrando que estas linhas devem estar afastadas igualmente de todos os cantos do quadrado. Feito isto, coloque uma régua do ponto A ao ponto C e trace uma linha oblíqua CE a qualquer um dos lados AB ou CD. Agora, trace três linhas paralelas que se encontrarão com a já traçada oblíqua CE e que, juntamente com BC e CD, formam três intervalos de tal maneira proporcionais entre si, que um seja sempre por seu dobro mais largo do que o outro. Depois, divida cada um destes lados de acordo com seu comprimento em doze partes iguais. Em seguida, tendo a ponta de uma régua sempre firme no ponto A, mova a outra (ponta da régua) para todos os pontos da divisão e trace, a partir destes pontos, algumas linhas abaixo dos três intervalos de tal modo que todas elas sejam oblíquas e paralelas a CE. Isso deve ser feito de modo que elas não transpassem as linhas BC e CD. Em seguida, divida cada uma destas doze partes em cinco partes iguais e, a partir destas cinco, divida novamente em duas partes iguais, do mesmo modo como foram traçadas anteriormente. E, desse modo, o lado BC e CD estará dividido em 60 partes porque 5 vezes 12 ou 12 vezes 5 faz 60. Pode-se ainda dividir o último intervalo, isto é, o mais externo, que é o mais estreito, em duas partes iguais, e cada uma destas partes terá 30 minutos de um grau, ou seja, se cada uma das 60 for dividida em 3 partes iguais, cada uma destas terá 20 minutos: ou em 4, cada uma terá 15 minutos. E assim ela pode ser dividida sucessivamente em quantas partes desejarmos (...). Abaixo do primeiro intervalo, de um e de outro lado, isto é, do intervalo mais largo, escreva os números começando por B até D desta maneira: 5, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, de modo que 60 seja o ponto C que serve a ambos os lados. Feito isto, construa um apontador que seja reto, igual e plano, que chamaremos AF. Este apontador deverá ter pelo menos o tanto de comprimento quanto tem a oblíqua AC. No seu comprimento fixe duas pínulas⁹, G e H, com furos no meio e que correspondem,

⁹ Uma pínula é uma peça laminar, com uma fenda ou furo no meio, que serve para fazer

juntamente com o apontador, à oblíqua AC, como mostra o desenho [figura 3]. Finalmente, este apontador deve estar cravado em A de modo que ele possa mover-se livremente de lado a lado sobre a face do instrumento. Além disso, a linha AF deve coincidir com as pínulas G e H (...).”

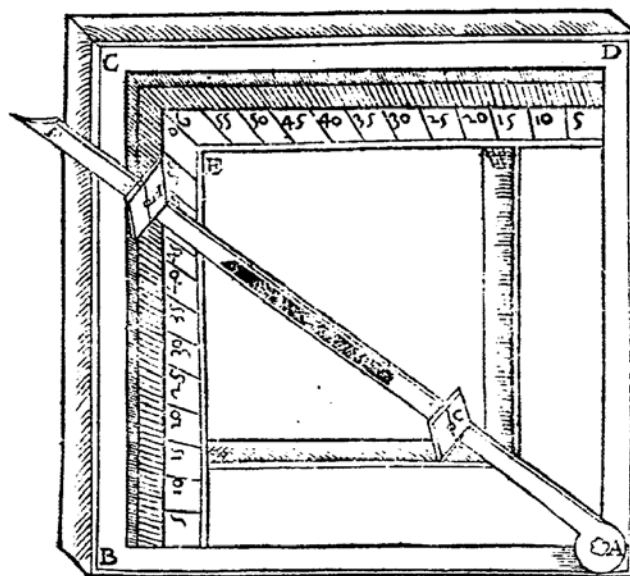


Figura 3: Quadrante geométrico (Bartoli, *Del modo di misurare*, 3r)

Como, encontrando-se em um lugar no alto, medir uma linha reta colocada no plano (cap. IIII): “Se, encontrando-se em cima de alguma torre ou em uma janela de qualquer edifício, que está numa grande praça ou em campo aberto, desejar medir uma linha reta colocada no mesmo plano sobre o qual está a parede do edifício, ou de uma torre que se eleva em ângulo reto com ela, procederemos deste modo: Digamos que a torre reta seja BE; e a linha estendida EF, ou EH, ou mesmo EK (...) Acomode o lado AB do quadrante geométrico ao longo de seu comprimento de modo que AB e BE fiquem sobre uma única linha, AE, perpendicular a EHF. Em seguida, com olho no ponto A, levante ou abaixe o apontador até que a mirada atinja a extremidade da linha estendida. Feito isto, confira o ponto no qual o apontador cairá. É certo que o apontador cairá, ou o ponto C

alinhamento. O observador deve olhar através de uma pínula de tal modo que a “mirada” pelas duas pínulas coincida. Quando isto ocorrer, o observador terá o correto alinhamento para obter-se a medida.

(...), ou no lado BC, ou no lado CD (...) Quando o apontador cai no ponto C, a linha estendida EF que se quer medir é igual à altura da torre EB. E para saber a altura da torre basta estender de cima para baixo uma fio de prumo e, depois, medir o fio (...). Mas se o apontador cair no lado BC, por exemplo, no ponto G, e a linha estendida que se quer medir for EH, é coisa certíssima que esta linha EH estendida é mais curta do que aquela AE obtida com fio de prumo. Também é certo que AE estará em proporção com EH que é o lado do quadrante AB na parte interceptada BG. É preciso, portanto, conhecer as divisões dos lados do quadrante que são 60. Vamos dizer que BG seja 40. Sabemos que todo o lado AB é igual a BC que é 60. Verificamos que 60 corresponde a 40 (...). Em seguida, meça com o fio de prumo a altura da torre AE e calcule a terça parte do comprimento AE, e em seguida calcula-se EH. Por exemplo, se a linha de prumo AE medir 24 braças, a linha EH será 16 (...) Mas se a linha cair no lado CD, por exemplo, em I, e que a linha que se quer medir for EK, é claro que esta EK será maior do que aquela linha AE medida com o fio de prumo, na mesma proporção que o lado AD é maior o que a interseção DI do lado CD. Por exemplo, se DI for 40 partes do lado do quadrante que é 60, a linha EK terá como medida uma vez mais meia linha da altura da torre AE. Assim, por exemplo, se AE for 24 braças, EK terá proporcionalmente 36 braças (...)" (vide figura 4).

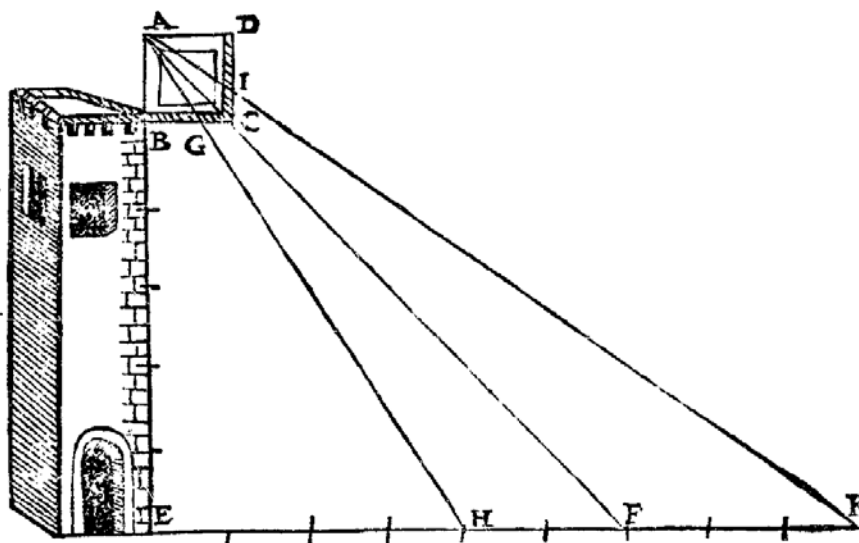


Figura 4: ilustração de como usar o quadrante geométrico (Bartoli, *Del modo di misurare*, 5r)

QUADRANTE NUM QUARTO DE CÍRCULO

Como construir um quadrante dentro da quarta parte de um círculo (cap. V): “Tome uma peça de madeira firme e bem polida. Desenhe nela a quarta parte de um círculo de tal modo que as duas linhas, que partem do centro A do círculo, formem entre si um ângulo reto, tal como mostra a figura ABCD abaixo. Em seguida, divida esta quarta parte de círculo com uma linha reta que parte do centro A e chega em C, ponto que está situado no meio do arco. Depois, com uma régua colocada no ponto C, trace duas linhas CB e CD de modo a obter um quadrado ABCD dividido no meio pelo diâmetro AC. Em seguida, trace duas outras duas linhas paralelas a BC e CD na parte interna do quadrado, isto é, na parte que vai em direção ao centro A. Estas linhas paralelas deverão ser traçadas de tal modo que o intervalo que está mais próximo do centro A seja duas vezes mais largo do que aquele outro que está fora do quadrado. Depois, divida cada um dos lados BC e CD em quatro partes iguais. Em seguida, utilizando a régua, colocada no centro A, mova-a na direção em que se queira para as divisões, ou pontos que foram feitos, traçando linhas abaixo dos ditos intervalos a partir da primeira e da segunda linha em direção ao centro A. Novamente, divida cada uma dessas quatro partes em outras três igualmente, traçando outras linhas, tal como fizemos anteriormente, isto é, partindo de BC e CD, indo em direção ao centro A sem, entretanto, atravessar o intervalo menor. Assim, as partes do lado BC estarão divididas em 12 partes e, também, 12 serão as divisões do lado CD. Em seguida, escreva números nos espaços dos intervalos maiores, começando pelo ponto B e D até chegar à extremidade C, distribuindo-os na seguinte ordem: 3, 6, 9, 12, de tal modo que 12 de um lado e de outro lado seja o ponto C (...). Construa depois duas pínulas, furadas como normalmente se usa e fixe-as no instrumento, uma colocada próxima a A e outra a D, igualmente distantes. Em seguida, fixe um fio de seda no centro A com um pequeno peso na outra ponta de

comprimento¹⁰ conveniente, isto é, em relação ao tamanho da circunferência, tal como pode-se ver no desenho [figura 5]¹¹.

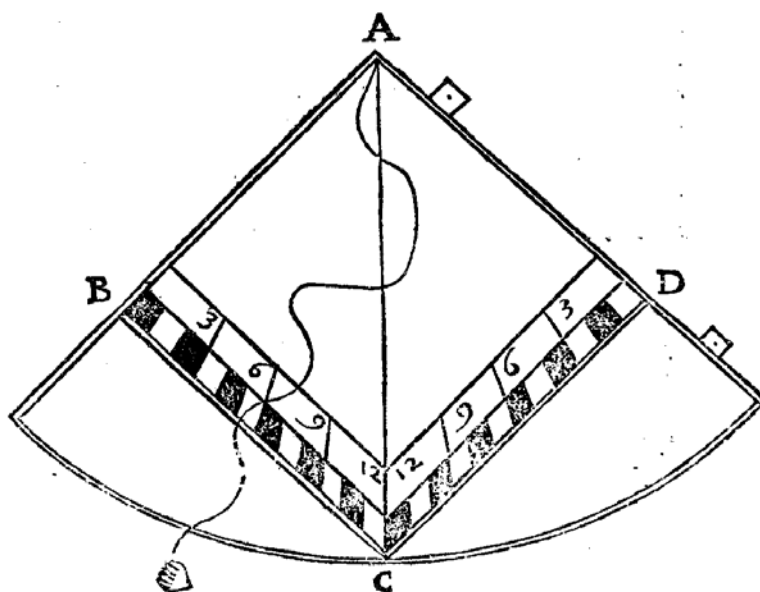


Figura 5: Quadrante num quarto de círculo (Bartoli, *Del modo di misurare*, 8r)

Como medir alturas com o mesmo quadrante, sem utilizar-se da sombra, mas somente com os raios vistos (cap. X): "(...) Volte a pínulas da esquerda do quadrante, A, em direção ao ponto da altura que se quer medir e coloque o olho na outra pínula, B. Levante ou abaixe o quadrante (deixando o fio de prumo livre) até que a mirada pelas duas pínulas coincida. Feito isto, veja onde o fio de prumo cai. Ele, necessariamente, cairá, ou no lado BC, ou no ângulo C, ou no lado CD, dependendo do lugar onde você estiver em relação à base da torre que se quer medir. Digamos que o fio caia no lado CD, no ponto E, e que a altura estendida da torre a ser medida seja GF. E aqui é necessário deixar suspenso um fio de prumo cujo comprimento DH é a distância do olho até o chão. Feito isto, deve-se encontrar a que distância estamos da torre por meio de DH, que é tomada na mesma proporção que tem as partes DE com 12, isto é, com todo o lado do quadrante. Por exemplo, se DE for 6

¹⁰ Este fio será doravante chamado fio de prumo.

¹¹ Bartoli, *Del modo di misurare*, 8r.

partes, ele será metade de 12. Assim, agrega-se a metade desta DH, ou seja, HI, ao longo de GH em linha reta (...). Pode-se notar que a linha reta GI é menor do que a altura GF naquela proporção que é encontrada entre as partes DE e o lado AD. Por exemplo, se GI fosse 9 passos, multiplicando 9 por 12, ter-se-ia 108, o qual dividido por 6, isto é, DE, restaria 18 passos (...). Mas quando o fio de prumo cai no ponto C, isto é no ângulo do ponto do quadrante, deixando o fio de prumo cair do olho até o chão, que será DK (...), em tal caso, GL será igual a GF. Assim, se medirmos GL teremos a altura GF (...). Mas quando o fio cair no lado BC, como no exemplo, no ponto E, sendo o outro fio do olho ao chão DM, é preciso que se opere de modo contrário ao primeiro modo. Note que naquela proporção, que faz corresponder o lado AB ao lado BE, corresponderá, agora à MN com a linha de prumo MD. Se BE for 6 de todo o lado do quadrante que é 12, diremos que MN deverá ser duas vezes MD (...) Desse modo, se GN tiver 36 passos, multiplicando-se 36 por 6, que são as partes de BE, encontrar-se-á 216. Este número dividido por 12 dará 18, que será a altura GF (...)[vide figura 6]"¹².

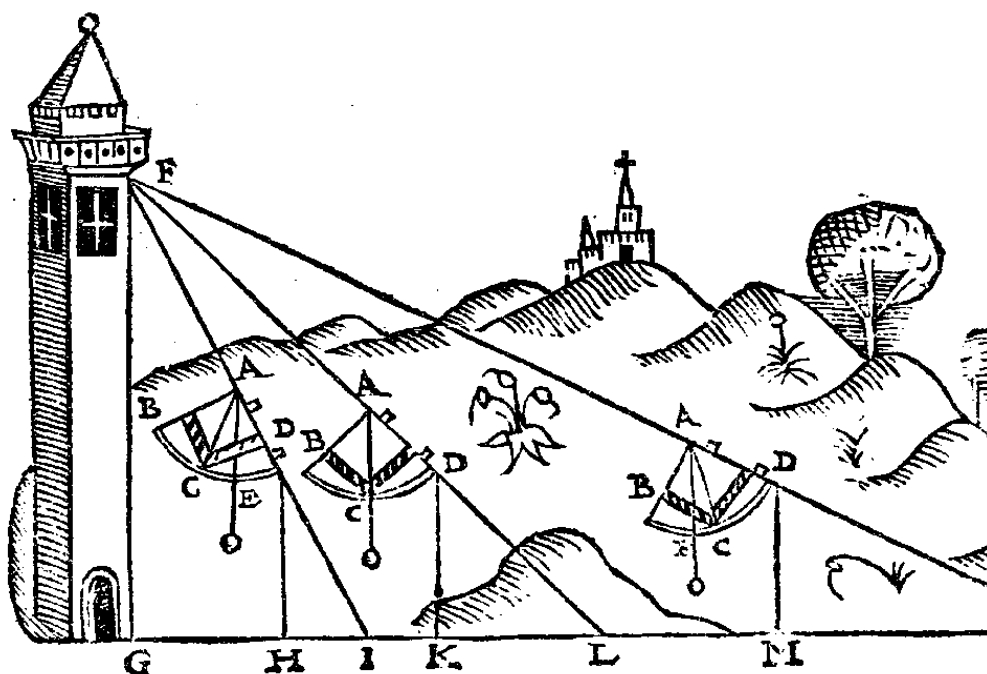


Figura 6: Ilustração de como usar o quadrante num quarto de círculo (Bartoli, *Del modo di misurare*, 20r)

¹² Ibid., 19v-20v.

BÁCULO

Como é possível construir outro instrumento para poder medir as distâncias, tal como de uma linha reta, da qual não é possível se aproximar (cap. VII): “Para construir um báculo, que assim os latinos nomeiam este instrumento, prepare uma haste de espessura quadrada de madeira bem dura (...) de comprimento e espessura que se quiser, mas pedirei que tenha, pelo menos, duas braças de comprimento e de grossura moderada, como mostra o desenho [figura 7]. Depois, divida esta haste em algumas partes iguais, dez, oito ou seis, conforme a comodidade e chame esta haste AB. Construa, em seguida, outra haste, semelhante a esta, mas de comprimento igual a uma das partes da haste maior AB, de largura tal que possa ser feito um orifício quadrado nele de modo que ele possa se mover, convenientemente, ao longo da haste AB pelo ponto E, formando com E sempre um ângulo reto. Chame esta haste menor CD, como pode-se ver no desenho [figura 7]”¹³.



Figura 7: Báculo (Bartoli, *Del modo di misurare*, 5r)

[Como medir utilizando o báculo]: (...) Pode-se chamar esta haste maior, AB, de bastão e a haste menor, CD, de transversal. Se nós queremos medir uma linha colocada sobre um plano transversalmente, e da qual não podemos nos aproximar, procederemos deste modo com este instrumento: seja FG a linha estendida transversalmente sobre o plano. Nós moveremos a transversal CD e a fixaremos numa das divisões do bastão AB arbitrariamente, como, por exemplo, diremos de tê-la fixada na segunda divisão, considerando-se que movemos de A em direção a B. Colocamos, em seguida, o olho em A e abaixaremos o bastão em direção

¹³ Ibid., 10r.

à linha reta FG que se quer medir, aplicando a extremidade da transversal à extremidade desta linha que se deseja medir, isto é, o lado direito D à direita da linha (ponto G) e o lado esquerdo C à esquerda da linha (ponto F). Depois, nos aproximamos ou nos afastamos da linha a ser medida de tal modo que a mirada do olho, colocado no ponto A, passando pela extremidade CD da transversal, forme com a transversal e as extremidades da linha ser medida dois raios de visão: ACF e ADG. Feito isto, marque o lugar onde está fazendo a operação com a letra H. Depois, afastando-se deste local, mova a transversal para outra divisão do bastão em direção a B, isto é, até a terceira divisão a partir de A de modo que, estando fixa a transversal CD na terceira divisão, colocando o olho novamente em A, veja-se novamente por CD os extremos FG da linha, tal como na primeira operação e, feito isto, marque o ponto onde tu estás com a letra I. Meça depois o espaço (*spacio*) que está abaixo, HI, que terá a mesma medida de FG. Para maior clareza apresentamos o desenho abaixo [vide figura 8]¹⁴.

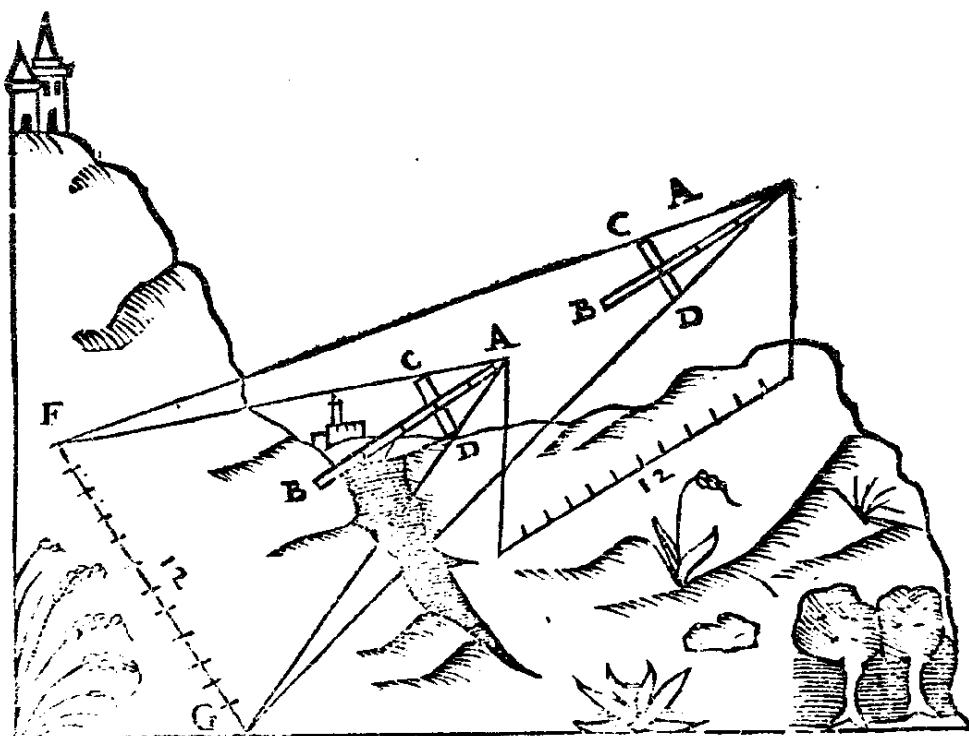


Figura 8: Ilustração de como utilizar o báculo (Bartoli, *Del modo di misurare*, 11r)

¹⁴ Ibid., 10v.

SOBRE OS AUTORES:**Prof. Dr. Fumikazu Saito**

Mestre e Doutor em História da Ciência. Atualmente é professor do PEPG em Educação Matemática da PUC/SP e do PEPG em História da Ciência da PUC/SP. Desenvolve pesquisas área de Filosofia e História da Ciência e da Matemática, História da Ciência e Ensino de Ciência e História da Ciência da Técnica e da Tecnologia.

(e-mail: fsaito@pucsp.br)

Profa. Dra. Marisa da Silva Dias

Mestre em Educação Matemática e doutora em Educação. Atualmente é assistente doutora da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (Unesp) na qual leciona na formação inicial de professores de matemática e de pedagogia e pesquisa na área de formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática

(e-mail: marisadias@fc.unesp.br)

Ambos os autores são coordenadores do grupo de estudo e pesquisa HEEMa (História e Epistemologia na Educação Matemática).