

UM ESTUDO SOBRE ANISOTROPIA PLANA USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A STUDY ABOUT 2-D ANISOTROPY USING A BOUNDARY ELEMENT FORMULATION

Luttgardes de Oliveira Neto¹, Mark J. Masia²

¹ Prof. Dr. , Departamento de Engenharia Civil, FE - UNESP, CEP 17033-360, Bauru/SP, Brasil
E-mail: lutt@feb.unesp.br

² Lecture PhD, CIPAR, The University of Newcastle, NSW, Australia
E-mail: mark.masia@newcastle.edu.au

RESUMO

Este trabalho apresenta uma aplicação alternativa do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para análise linear de chapa anisotrópica. Neste trabalho esta consideração faz-se expressando-se as constantes elásticas anisotrópicas como a soma dos valores isotrópicos com valores da diferença entre os dois valores, anisotrópicos e isotrópicos. Consideram-se também as variáveis de domínio pela discretização por células. Neste trabalho apresenta-se a formulação completa para análise linear e exemplos numéricos para discussão.

Palavras chave: Método do Elementos de Contorno; Anisotropia; Análise elástica bidimensional.

ABSTRACT

This work presents a Boundary Element Method (BEM) formulation considering anisotropy to analyse 2D problems in elasticity. The isotropic fundamental solution is used and the anisotropic properties are introduced by a residual elastic tensor. Numeric examples are presented to evaluate the proposed application, which results are compared with analytical values.

Keywords: Boundary Element Method, anisotropy, 2D elasticity problems

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho visa a aplicação do Método dos Elementos de Contorno na análise de estruturas de alvenaria, composta por dois materiais, tijolos ou blocos e argamassa de assentamento. A disposição destes componentes faz com que este tipo de estrutura tenha uma ortotropia geométrica inicial. Por tratarem-se de materiais frágeis, requerem uma análise numérica não-linear, em que modelos de dano ou de fratura devam ser utilizados para melhor representar o comportamento estrutural próximo da ruptura.

Neste contexto, a modelagem numérica confiável pode trazer grandes benefícios futuros, procurando o conhecimento do comportamento deste tipo de elemento estrutural quando solicitado a carregamentos usuais, sem a necessidade de se realizarem ensaios de laboratórios, com redução de custos e de prazos, portanto.

Mais especificamente sobre a pesquisa em modelagem numérica de Alvenaria Estrutural, baseia-se exclusivamente no Método dos Elementos Finitos (MEF). Neste contexto, diversos aspectos são importantes para obtenção de resultados confiáveis: além da caracterização (e conseqüente definição dos parâmetros numéricos) dos materiais componentes da alvenaria, a escolha do método numérico (e suas particularidades) e dos modelos matemáticos (linear ou não, dano ou fratura, discretização e homogeneização do sólido, iso, orto ou anisotropia) a serem utilizados são relevantes.

Estes modelos também vêm sendo amplamente estudados e implementados, tanto pelo MEF quanto pelo MEC. Em relação à Alvenaria Estrutural especificamente, as aplicações são apenas utilizando-se o MEF e nada se encontra na literatura com aplicação pelo MEC.

Este trabalho, portanto, pretende apresentar a formulação do MEC aplicada em estruturas bidimensionais com a consideração da anisotropia apresentada por este tipo de estrutura em um procedimento em que o problema anisotrópico é resolvido utilizando as soluções fundamentais isotrópicas do referido método numérico para posterior análise não-linear de alvenaria (Oliveira Neto, 2008).

2. FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Neste item faz-se uma reunião de trabalhos relativos à análise numérica e às alternativas de formulação do Método dos Elementos de Contorno de análise linear em meio homogêneo anisotrópico, que são essencialmente duas, utilizando solução fundamental anisotrópica e solução fundamental isotrópica.

Segundo Perez & Wrobel (1996), os primeiros estudos tiveram início com trabalho de Green (1943), que apresentou uma solução fundamental anisotrópica para problemas bidimensionais, e utilizada por Rizzo & Shippy (1970) e Benjumea & Sikaskie (1972) em formulações diretas com equações integrais de contorno e variáveis reais. Cruse & Swedlow (1971), Mura & Kinoshita (1971), Barnett (1972) também apresentaram formulações do método utilizando solução fundamental anisotrópica com variáveis complexas. Para o problema tridimensional os trabalhos pioneiros são os de Vogel & Rizzo (1973) (apud Perez & Wrobel, 1996) Todos estes trabalhos citados apresentaram formulações com soluções fundamentais anisotrópicas.

Brebbia & Dominguez (1989) apresentaram um procedimento alternativo de análise de meios homogêneos anisotrópicos utilizando solução fundamental isotrópica, porém não implementada. Nos trabalhos de Schlar (1994) e Perez & Wrobel (1996) encontram-se propostas de implementação deste procedimento, os primeiros utilizando o Método da Reciprocidade Dual e os últimos utilizando células para aproximação das variáveis de domínio, ambos reescrevendo a equação integral para pontos internos levando em conta a diferença entre o tensor de constantes elásticas anisotrópicas e isotrópicas.

Este trabalho utilizará o procedimento apresentado por Perez & Wrobel por se adequar à formulação não-linear física com modelos de dano que vem sendo implementada pelo primeiro autor em estágio pós-doutoral atual.

Por tratar-se de uma formulação de meio homogêneo, faz-se necessária a escolha de procedimento de homogeneização das propriedades elásticas dos materiais componentes da alvenaria, tijolos e argamassa. A disposição dos elementos constituintes e ligantes da alvenaria faz com que o elemento estrutural apresente um comportamento anisotrópico, no mínimo ortotrópico, o que sua simulação como um material homogêneo introduz erros numéricos. Este é um problema importante nas formulações utilizando o MEF, mas também deve ser avaliada com atenção nas formulações com MEC, mesmo tendo a discretização do domínio diferentes significados nos dois métodos numéricos.

A discretização realista, denominada modelagem contínua ou micro-modelagem, leva a um grande número de equações, pesado trabalho computacional e de análise de resultados, principalmente em análise não-linear. A discretização, considerando um elemento de volume representativo (RVE – representative volume element) que abranja os volumes dos componentes da alvenaria não homogênea, busca obter uma matriz equivalente de propriedades homogêneas dos materiais.

Há vários procedimentos encontrados na literatura para obtenção do RVE, com relação aos aspectos de discretização e homogeneização e ao comportamento anisotrópico, em aplicações do MEF, dos quais alguns trabalhos básicos podem ser citados como os de Page (1978), Ali e Page

(1988), Papa e Nappi (1993), Anthonie (1995), Lourenço (1996), Pande et al. (1989), Lee et al. (1996), dentre outros.

3. FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1. Formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise linear bidimensional considerando anisotropia

Apresenta-se a formulação linear do método dos elementos de contorno escrita em deslocamentos, segundo formulação proposta inicialmente por Brebbia & Domingues (1989) e posteriormente implementada por Schlar (1994) e Perez & Wrobel (1996).

A representação integral da elastostática espacial é obtida a partir do equilíbrio de um elemento infinitesimal, cuja equação diferencial é

$$\sigma_{ij,j}(s) + b_i(s) = 0 \quad (1)$$

e da relação constituinte

$$\sigma_{ij}(s) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(s) \quad \text{com} \quad C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2)$$

onde σ_{ij} são as tensões, ε_{kl} as deformações, G e ν são constantes elásticas do material e δ_{ij} é o delta de Dirac.

Considerando-se o tensor de deformações com o vetor de deslocamentos $\varepsilon_{ij}(s) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(s) + u_{j,i}(s)]$ chega-se às equações integrais do MEC pelo teorema de reciprocidade de Maxwell-Betti (PTV) ou utilizando-se do Princípio dos Resíduos Ponderados ponderando-se a Eq. (1) com uma função do tipo deslocamento, como segue:

$$\int_{\Omega} u_j^* (\sigma_{ji,i} + b_j) d\Omega = 0 \quad (3)$$

onde Ω é o domínio do corpo.

Em procedimento algébrico padrão do MEC, realizando-se integrações por partes sobre a integral de domínio e levando em conta as seguintes condições de contorno

$$u_k = \bar{u}_k \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \quad \text{e} \quad p_k = \bar{p}_k \quad \text{em} \quad \Gamma_2 \quad \text{onde} \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (4)$$

chega-se à expressão geral do Princípio dos Resíduos Ponderados para problemas de elasticidade, como segue:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^* \sigma_{jk,k} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega = \int_{\Gamma_2} u_{ij}^* (p_j - \bar{p}_j) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p_{ij}^* (\bar{u}_j - u_j) d\Gamma \quad (5)$$

Integrando-se por partes a integral de domínio, tem-se

$$-\int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega = \int_{\Gamma_2} u_{ij}^* (p_j - \bar{p}_j) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p_{ij}^* (\bar{u}_j - u_j) d\Gamma - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (6)$$

Admitindo-se representar a relação constituinte entre tensões e deformações como

$$\sigma_{jk} = (C_{jklm}^i + \hat{C}_{jklm}) \varepsilon_{lm} = \sigma_{jk}^i + \hat{\sigma}_{jk} \quad (7)$$

sendo σ_{jk}^i a componente isotrópica do tensor de tensões reais, $\hat{\sigma}_{jk}$ a componente residual da diferença entre as tensões reais do meio anisotrópico e as tensões isotrópicas, C_{ijkl}^i o tensor elástico isotrópico de referência e \hat{C}_{ijkl} o tensor de diferença entre o tensor de constantes elásticas do meio anisotrópico e o tensor elástico de referência. Tensor elástico isotrópico de referência pode ser obtido como a média das constantes elásticas do material anisotrópico (Brebbia & Dominguez) ou como um tensor isotrópico equivalente, Cowin (1989).

Substituindo-se a Eq. (7), que relaciona as tensões isotrópicas e a parcela residual anisotrópica, resulta em

$$-\int_{\Omega} \varepsilon_{ikj}^* \sigma_{jk}^i d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \hat{\sigma}_{jk} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega = -\int_{\Gamma_2} u_{ij}^* \bar{p}_j d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p_{ij}^* (\bar{u}_j - u_j) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (8)$$

Fazendo $\sigma_{jk}^i = C_{jklm}^i \varepsilon_{lm}$ e $\sigma_{jk}^* = C_{jklm}^i \varepsilon_{lm}^*$
e, ainda $\varepsilon_{jki}^* \sigma_{jk}^i = \varepsilon_{jki}^* C_{jklm}^i \varepsilon_{lm} = \sigma_{lmi}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{jki}^* \varepsilon_{jk}$

e substituindo-se em (8), tem-se

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ikj}^* \varepsilon_{jk} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \hat{\sigma}_{jk} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega = -\int_{\Gamma_2} u_{ij}^* \bar{p}_j d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p_{ij}^* (\bar{u}_j - u_j) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (9)$$

Integrando-se por partes novamente a integral de domínio, tem-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{ijk,k}^* u_j d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \hat{\sigma}_{jk} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega = -\int_{\Gamma_2} u_{ij}^* \bar{p}_j d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p_{ij}^* (\bar{u}_j - u_j) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} p_{ij}^* u_j d\Gamma \quad (10)$$

Considerando-se novamente que a primeira integral de domínio corresponde à solução fundamental de carregamento unitário de Kelvin, resulta em

$$-u_{ij} - \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \hat{\sigma}_{jk} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega = -\int_{\Gamma_2} u_{ij}^* \bar{p}_j d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p_{ij}^* \bar{u}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p_{ij}^* u_j d\Gamma \quad (11)$$

ou ainda, rearranjando os termos e somando-se as duas partes do contorno, tem-se

$$u_{ij} + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \hat{\sigma}_{jk} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (12)$$

Trata-se da identidade de Somigliana, que pode ser escrita para pontos do domínio e do contorno, explicitando-se os pontos fonte s e resposta p , como segue

$$C_{ij}(s)u_j(s) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s,P).u_j(P)d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s,P).p_j(P)d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(s,p)\hat{\sigma}_{jk}(p)d\Omega + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s,p).b_j(s)d\Omega \quad (13)$$

com adicional integral de domínio com respostas referentes ao material anisotrópico.

Para a solução do problema, uma outra equação integral deve ser escrita para pontos de domínio, que pode ser obtida com a diferenciação da Eq. (12) com respeito às coordenadas do ponto fonte s , e combinando as derivadas como

$$\frac{\partial u_i(s)}{\partial x_1(s)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n(s)}{\partial x_m(s)} + \frac{\partial u_m(s)}{\partial x_n(s)} \right)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}(s) = \hat{C}_{ijmn} \varepsilon_{ij}(s) = \hat{C}_{ijmn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n(s)}{\partial x_m(s)} + \frac{\partial u_m(s)}{\partial x_n(s)} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{nk}^*(s,p)}{\partial x_m(s)} + \frac{\partial u_{mk}^*(s,p)}{\partial x_n(s)} \right) = -\varepsilon_{mnk}^*(s,p)$$

e

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_{nk}^*(s,p)}{\partial x_m(s)} + \frac{\partial p_{mk}^*(s,p)}{\partial x_n(s)} \right) = -p_{mnk}^*(s,p)$$

Assim Eq. (12) fica escrita como

$$\begin{aligned} & \hat{C}_{ijmn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n(s)}{\partial x_m(s)} + \frac{\partial u_m(s)}{\partial x_n(s)} \right) + \hat{C}_{ijmn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_m(s)} \int_{\Gamma} p_{nj}^*(s,P) \cdot u_j(P) d\Gamma + \frac{\partial u}{\partial x_n(s)} \int_{\Gamma} p_{mj}^*(s,P) \cdot u_j(P) d\Gamma \right) = \\ & = \hat{C}_{ijmn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_m(s)} \int_{\Gamma} u_{nj}^*(s,P) \cdot p_j(P) d\Gamma + \frac{\partial u}{\partial x_n(s)} \int_{\Gamma} u_{mj}^*(s,P) \cdot p_j(P) d\Gamma \right) + \\ & - \hat{C}_{ijmn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_m(s)} \int_{\Omega} \varepsilon_{nj k}^*(s,p) \cdot \hat{\sigma}_{jk}(p) d\Omega + \frac{\partial u}{\partial x_n(s)} \int_{\Omega} \varepsilon_{mj k}^*(s,p) \cdot \hat{\sigma}_{jk}(p) d\Omega \right) + \\ & + \hat{C}_{ijmn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_m(s)} \int_{\Omega} u_{nj}^*(s,p) \cdot b_j(p) d\Omega + \frac{\partial u}{\partial x_n(s)} \int_{\Omega} u_{mj}^*(s,p) \cdot b_j(p) d\Omega \right) \end{aligned} \quad (14)$$

onde

$$\varepsilon_{mnk}^*(s,p) = -\varepsilon_{ijk}^*(s,p) = -\frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr} \left[(1-2\nu)(r_{,m} \delta_{nk} + r_{,n} \delta_{mk}) - r_{,k} \delta_{mn} + 2r_{,mi} r_{,n} r_{,k} \right] \quad (15.a)$$

e

$$\begin{aligned} p_{mnk}^*(s,p) = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu) [\delta_{mn} n_k - \delta_{mk} n_n - \delta_{nk} n_m - 2r_{,m} r_{,n} n_k] + \right. \\ & \left. - 2\nu(r_{,m} r_{,k} n_n + r_{,n} r_{,k} n_m) - r_{,m} n_m [2\nu(r_{,m} \delta_{nk} + r_{,n} \delta_{mk}) + 2r_{,k} \delta_{mn} - 8r_{,m} r_{,n} r_{,k}] \right\} \end{aligned} \quad (15.b)$$

Conseqüentemente a Eq. (14) resulta em

$$\begin{aligned} & -\hat{\sigma}_{ij} - \hat{C}_{ijmn} \int_{\Gamma} p_{mnj}^*(s,P) \cdot u_j(P) d\Gamma = \\ & = -\hat{C}_{ijmn} \int_{\Gamma} \varepsilon_{mnj}^*(s,P) \cdot p_j(P) d\Gamma + \\ & - \hat{C}_{ijmn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_m(s)} \int_{\Omega} \varepsilon_{nj k}^*(s,p) \cdot \hat{\sigma}_{jk}(p) d\Omega + \frac{\partial u}{\partial x_n(s)} \int_{\Omega} \varepsilon_{mj k}^*(s,p) \cdot \hat{\sigma}_{jk}(p) d\Omega \right) + \\ & - \hat{C}_{ijmn} \int_{\Omega} \varepsilon_{mnj}^*(s,P) \cdot b_j(P) d\Omega \end{aligned} \quad (16)$$

As diferenciações dos termos das integrais de domínio devem ser realizadas em procedimento algébrico, apresentado em detalhes em Telles & Brebbia (1979) e Banerjee & Raveendra (1986) e utilizado por Perez & Wrobel (1996), resultando em uma integral de domínio e em um termo independente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_m(s)} \int_{\Omega} \varepsilon_{nkj}^*(s, p) \cdot \hat{\sigma}_{kj}(p) d\Omega + \frac{\partial u}{\partial x_n(s)} \int_{\Omega} \varepsilon_{mkj}^*(s, p) \cdot \hat{\sigma}_{kj}(p) d\Omega \right) = \\ & \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon_{nkj}^*(s, p)}{\partial x_m(s)} \cdot \hat{\sigma}_{kj}(p) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon_{mkj}^*(s, p)}{\partial x_n(s)} \cdot \hat{\sigma}_{kj}(p) d\Omega \right) + \\ & + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{kj}(p) \left(\int_{\Gamma} \varepsilon_{nkj}^*(s, p) \cdot \frac{\partial r}{\partial x_m(s)} d\Gamma + \int_{\Gamma} \varepsilon_{mkj}^*(s, p) \cdot \frac{\partial r}{\partial x_n(s)} d\Gamma \right) = \\ & \left(- \int_{\Omega} \varepsilon_{mnkj}^*(s, p) \cdot \hat{\sigma}_{kj}(p) d\Omega \right) - \frac{1}{16(1-\nu)G} \left[(6-8\nu) \hat{\sigma}_{ij}(p) - \hat{\sigma}_{ii}(p) \delta_{ij} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mnkl}^*(s, p) = & \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu) [\delta_{nk} \delta_{ml} + \delta_{mk} \delta_{nl}] - \delta_{mn} \delta_{kl} + 2r_{,k} r_{,l} \delta_{mn} + r_{,m} r_{,n} \delta_{kl} + \right. \\ & \left. + 2\nu [r_{,m} r_{,k} \delta_{nl} + r_{,n} r_{,k} \delta_{ml} + r_{,m} r_{,l} \delta_{nk} + r_{,n} r_{,l} \delta_{mk}] - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} \right\} \end{aligned}$$

Substituindo-se o resultado na Eq. (16) segue:

$$\begin{aligned} & \hat{\sigma}_{ij} + \hat{C}_{ijmn} \int_{\Gamma} p_{mnj}^*(s, P) \cdot u_j(P) d\Gamma = \\ & = \hat{C}_{ijmn} \int_{\Gamma} \varepsilon_{mnj}^*(s, P) \cdot p_j(P) d\Gamma + \\ & - \hat{C}_{ijmn} \left\{ \int_{\Omega} \varepsilon_{mnkj}^*(s, p) \cdot \hat{\sigma}_{kj}(p) d\Omega + \frac{1}{16(1-\nu)G} \left[(6-8\nu) \hat{\sigma}_{ij}(p) - \hat{\sigma}_{ii}(p) \delta_{ij} \right] \right\} + \\ & + \hat{C}_{ijmn} \int_{\Omega} \varepsilon_{mnj}^*(s, p) \cdot b_j(p) \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

3.2. Formulação algébrica do Método dos Elementos de Contorno

As discretizações do contorno em elementos e do domínio em células são necessárias para a obtenção das representações algébricas das Eqs. (13) e (18), como seguem:

$$[H](U) = [G](P) - [Q](\hat{\sigma}) + [V](b) \quad (19)$$

e, Eq. (18), escrita de maneira similar a Eq. (19),

$$[\hat{H}](U) = [\hat{G}](P) - [\hat{Q}](\hat{\sigma}) + [\hat{V}](b) \quad (20)$$

onde

$$[\hat{Q}] = [\hat{C}][Q^e] - [I]$$

Pode-se escrever a Eq. (20) isolando-se o vetor ($\hat{\sigma}$):

$$(\hat{\sigma}) = [\hat{Q}]^{-1} \{ -[\hat{H}](U) + [\hat{G}](P) + [\hat{V}](b) \} \quad (21)$$

Substituindo a Eq. (21) em (19) obtém-se um sistema de equações que pode ser resolvido após serem impostas as condições de contorno:

$$[H - Q\hat{Q}^{-1}\hat{H}](U) = [G - Q\hat{Q}^{-1}\hat{G}](P) + [V - Q\hat{Q}^{-1}\hat{V}](b) \quad (22)$$

3.3. Tensor elástico anisotrópico

O tensor elástico anisotrópico de chapas sob estado plano de tensões é apresentado em detalhes por Lekhnitskii (1968). Considerando-se um corpo plano onde são conhecidas as propriedades elásticas nas direções principais, x e y, deseja-se conhecer as propriedades em determinado sistema x' e y', rotacionado do ângulo φ .

Em relação ao novo sistema de eixos, a equação generalizada da Lei de Hooke é expressa como:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_x &= \frac{1}{E'_1} \sigma'_x - \frac{\nu'_2}{E'_2} \sigma'_y + \frac{\eta'_1}{E'_1} \tau'_{xy} \\ \varepsilon'_y &= -\frac{\nu'_1}{E'_1} \sigma'_x + \frac{1}{E'_2} \sigma'_y + \frac{\eta'_2}{E'_2} \tau'_{xy} \\ \gamma'_{xy} &= \frac{\eta'_1}{E'_1} \sigma'_x + \frac{\nu'_2}{E'_2} \sigma'_y + \frac{1}{2G'} \tau'_{xy} \end{aligned} \quad (23)$$

ou, expressando-se em termos das tensões

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \frac{E'_1 E'_1 (E'_2 - 2\eta'^2_1 G')}{K'} \varepsilon'_x + \frac{E'_1 E'_2 (\nu'_2 E'_1 + 2\eta'_1 \eta'_2 G')}{K'} \varepsilon'_y + \\ &+ \frac{2E'_1 G' [-\eta'_1 (E'_2 - 2\eta'^2_1 G') - \eta'_2 (\nu'_2 E'_1 + 2\eta'_1 \eta'_2 G')]}{K'} \gamma'_{xy} \\ \sigma'_y &= \frac{E'_1 E'_2 (\nu'_1 E'_2 + 2\eta'_1 \eta'_2 G')}{K'} \varepsilon'_x + \frac{E'_2 E'_2 (E'_1 - 2\eta'^2_1 G')}{K'} \varepsilon'_y + \\ &+ \frac{2E'_2 G' [-\eta'_2 (E'_1 - 2\eta'^2_1 G') - \eta'_1 (\nu'_1 E'_2 + 2\eta'_1 \eta'_2 G')]}{K'} \gamma'_{xy} \\ \tau'_{xy} &= -\frac{2G' E'_1 E'_2 (\eta'_1 + \eta'_2 \nu'_1)}{K'} \varepsilon'_x - \frac{2G' E'_1 E'_2 (\eta'_2 + \eta'_1 \nu'_2)}{K'} \varepsilon'_y + \frac{2G' E'_1 E'_2 (1 - \nu'_2 \nu'_1)}{K'} \gamma'_{xy} \end{aligned} \quad (24)$$

com

$$K' = (E'_1 - 2\eta'^2_1 G') (E'_2 - 2\eta'^2_2 G') - (\nu'_2 E'_1 + 2\eta'_1 \eta'_2 G') (\nu'_1 E'_2 + 2\eta'_1 \eta'_2 G') \quad (25)$$

As constantes elásticas podem ser obtidas das seguintes relações:

$$\frac{1}{E_1'} = \frac{\cos^4 \varphi}{E_1} + \left(\frac{1}{2G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{\sin^4 \varphi}{E_2}$$

$$\frac{1}{E_2'} = \frac{\sin^4 \varphi}{E_1} + \left(\frac{1}{2G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{\cos^4 \varphi}{E_2} \quad (26)$$

$$\frac{1}{G'} = \frac{1}{G} + 2 \left(\frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1}{2G} \right) \sin^2 2\varphi$$

$$\nu_1' = E_1' \left[\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{1}{4} \left(\frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1}{2G} \right) \sin^2 2\varphi \right] \quad (27)$$

$$\nu_2' = \nu_1' \frac{E_2'}{E_1'}$$

Têm-se ainda os coeficientes de acoplamento entre tensões normais e tangenciais, que se anulam nas direções principais,

$$\eta_1' = E_1' \left[\frac{\sin^2 \varphi}{E_2} - \frac{\cos^2 \varphi}{E_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi$$

$$\eta_2' = E_2' \left[\frac{\cos^2 \varphi}{E_2} - \frac{\sin^2 \varphi}{E_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi \quad (28)$$

e os invariantes,

$$\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} - \frac{2\nu_1'}{E_1'} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{2\nu_1}{E_1}$$

$$\frac{1}{2G'} + \frac{4\nu_1'}{E_1'} = \frac{1}{2G} + \frac{4\nu_1}{E_1} \quad (29)$$

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

São apresentados três exemplos para comprovar o bom desempenho da formulação apresentada, quatro exemplos com comparação de valores analíticos e numéricos.

Para todos os exemplos apresentados foram utilizados na discretização da chapa 12 elementos de contorno e 32 células, com aproximação linear de variáveis.

4.1. Placa retangular submetida a tensões por carga distribuida uniformemente

Considerando-se a placa mostrada na Fig. (1) (Leikhnitskii, 1968), submetida a carga distribuida uniformemente sobre os dois lados, os dados utilizados são os seguintes:

$$E_{1\text{-iso}} = 78.255\text{MPa}; \nu = 0.21 ; \ell = 1000\text{cm} ; b = 400\text{cm} ; p = 0.0025\text{kN/cm} ; \varphi = 0$$

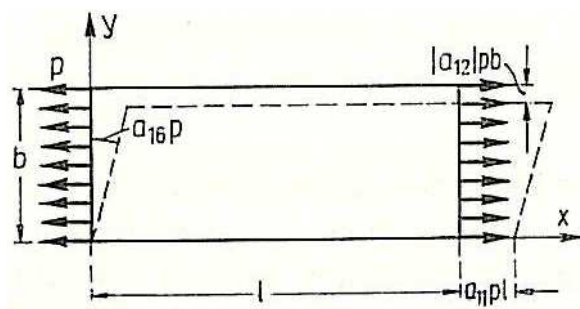


Figura 1 – Chapa submetida a carga distribuída uniformemente sobre os dois lados.(Leikhnitskii, 1968)

Para a consideração da anisotropia, utilizaram-se valores dos módulos de Young E_1 e E_2 com diferenças, para mais e para menos do valor de E_{1-iso} dado, das ordens de 0%, 1%, 4%, 25%, 64%, 90%. As menores diferenças foram calculadas para comprovação do procedimento de obtenção das propriedades elásticas dos tensores anisotrópico, isotrópico e de diferença, C_{jklm} , C_{jklm}^i e \hat{C}_{jklm} respectivamente, apresentados no item 3.1, e que são calculados a partir das expressões (23) a (29).

Os resultados obtidos dos deslocamentos indicados na Fig. (1) são apresentados na Tabela (1), para $\varphi=0$, onde os valores entre parênteses são os obtidos diretamente do tensor anisotrópico ($a_{11} = C_{11}^{-1}$, $a_{12} = C_{12}^{-1}$, e $a_{16} = C_{16}^{-1} = 0$), conforme indicado na Fig. (1).

Tabela 1- Placa retangular sob carga uniformemente distribuída, $\varphi=0$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm)	d_y (cm)
MEC isotrópico	7.8255	0,3195	-0.02686
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.3195 (0.3054)	-0.02684 (-0.02984)
$E_1/E_{1-iso}=1.3\%$	7.9255/7.7255	0.3143 (0.3019)	-0.02604 (-0.02958)
$E_1/E_{1-iso}=3.8\%$	8.1255/7.5255	0.3043 (0.2951)	-0.02430 (-0.03030)
$E_1/E_{1-iso}=25.5\%$	9.8255/5.8255	0.2327 (0.2478)	0.00460 (0.00836)
$E_1/E_{1-iso}=63.9\%$	12.8255/2.8255	0.1614 (0.1930)	0.03434 (0.08398)
$E_1/E_{1-iso}=89.5\%$	14.8255/0.8255	0.1326 (0.1683)	0.05329 (0.2878)

Observa-se na Tabela (1) que para valores de módulos de Young E_1 e E_2 próximos (quase isotrópicos) os valores obtidos numericamente praticamente coincidem com os calculados pelo tensor elástico anisotrópico e com o valor isotrópico. Para E_1 e E_2 distantes entre si, há uma alteração o sentido das deformações transversais devido à mudança de sinal do termo do tensor anisotrópico $a_{12} = C_{12}^{-1}$. Em todos os casos, não há variação no ângulo reto da placa, ou seja a placa é ortótropa e ela se mantém retangular.

Os resultados obtidos dos deslocamentos são apresentados nas Tabelas 1 a 7, para $\varphi=0$ a -90° , onde os valores entre parênteses são os obtidos diretamente do tensor anisotrópico ($a_{11} = C_{11}^{-1}$, $a_{12} = C_{12}^{-1}$, e $a_{16} = C_{16}^{-1} = 0$), conforme indicado na Fig. 1.

Tabela 2- Placa retangular sob carga uniformemente distribuida, $\varphi=-15^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm)	d_y (cm)
MEC isotrópico	7.8255	0,3195	-0.02686
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.2849 (0.2779)	-0.01271 (-0.0549)
$E_1/E_{1-iso}=1.3\%$	7.9255/7.7255	0.2808 (0.2749)	-0.01201 (-0.0575)
$E_1/E_{1-iso}=3.8\%$	8.1255/7.5255	0.2727 (0.2690)	-0.01061 (-0.0639)
$E_1/E_{1-iso}=25.5\%$	9.8255/5.8255	0.2170 (0.2273)	0.00086 (-0.06795)
$E_1/E_{1-iso}=63.9\%$	12.8255/2.8255	0.1603 (0.1784)	0.01796 (0.04394)

Tabela 3- Placa retangular sob carga uniformemente distribuida, $\varphi=-30^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm)	d_y (cm)
MEC isotrópico	7.8255	0,3195	-0.02686
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.2375 (0.2356)	0.00594 (0.0708)
$E_1/E_{1-iso}=1.3\%$	7.9255/7.7255	0.2353 (0.2334)	0.00657 (0.0636)
$E_1/E_{1-iso}=3.8\%$	8.1255/7.5255	0.2311 (0.2291)	0.00780 (0.0528)
$E_1/E_{1-iso}=25.5\%$	9.8255/5.8255	0.2054 (0.1982)	0.01709 (0.0218)
$E_1/E_{1-iso}=63.9\%$	12.8255/2.8255	0.2036 (0.1599)	0.03626 (0.0108)

Tabela 4- Placa retangular sob carga uniformemente distribuida, $\varphi=-45^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm)	d_y (cm)
MEC isotrópico	7.8255	0,3195	-0.02686
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.2228 (0.2189)	0.01182 (0.0330)
$E_1/E_{1-iso}=1.3\%$	7.9255/7.7255	0.2220 (0.2177)	0.01248 (0.0310)
$E_1/E_{1-iso}=3.8\%$	8.1255/7.5255	0.2206 (0.2152)	0.01378 (0.0276)
$E_1/E_{1-iso}=25.5\%$	9.8255/5.8255	0.2154 (0.1958)	0.02471 (0.0144)
$E_1/E_{1-iso}=63.9\%$	12.8255/2.8255	0.2598 (0.1683)	0.05726 (0.00788)

Tabela 5- Placa retangular sob carga uniformemente distribuida, $\varphi=-60^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm)	d_y (cm)
MEC isotrópico	7.8255	0,3195	-0.02686
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.2375 (0.2356)	0.005994 (0.0708)
$E_1/E_{1-iso}=1.3\%$	7.9255/7.7255	0.2381 (0.2357)	0.006703 (0.0635)
$E_1/E_{1-iso}=3.8\%$	8.1255/7.5255	0.2393 (0.2359)	0.008124 (0.0528)
$E_1/E_{1-iso}=25.5\%$	9.8255/5.8255	0.2508 (0.2368)	0.02059 (0.0218)
$E_1/E_{1-iso}=63.9\%$	12.8255/2.8255	0.2974 (0.2361)	0.05033 (0.0108)

Tabela 6- Placa retangular sob carga uniformemente distribuida, $\varphi=-75^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm)	d_y (cm)
MEC isotrópico	7.8255	0,3195	-0.02686
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.2849 (0.2779)	-0.01266 (-0.0549)
$E_1/E_{1-iso}=1.3\%$	7.9255/7.7255	0.2882 (0.2805)	-0.01226 (-0.05761)
$E_1/E_{1-iso}=3.8\%$	8.1255/7.5255	0.2946 (0.2856)	-0.01136 (-0.06388)
$E_1/E_{1-iso}=25.5\%$	9.8255/5.8255	0.3447 (0.3360)	0.00164 (-0.6797)
$E_1/E_{1-iso}=63.9\%$	12.8255/2.8255	0.4180 (0.4747)	0.04766 (0.04394)

Tabela 7- Placa retangular sob carga uniformemente distribuida, $\varphi=-90^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm)	d_y (cm)
MEC isotrópico	7.8255	0,3195	-0.02686
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.3195 (0.3054)	-0.02684 (-0.02908)
$E_1/E_{1-iso}=1.3\%$	7.9255/7.7255	0.3246 (0.3097)	-0.02690 (-0.02950)
$E_1/E_{1-iso}=3.8\%$	8.1255/7.5255	0.3348 (0.3186)	-0.02686 (-0.03035)
$E_1/E_{1-iso}=25.5\%$	9.8255/5.8255	0.4089 (0.4179)	-0.01591 (-0.03980)
$E_1/E_{1-iso}=63.9\%$	12.8255/2.8255	0.4489 (0.8762)	0.04391 (-0.08345)

4.2. Placa retangular submetida a tensões por carga tangencial distribuida uniformemente

Considerando-se a mesma placa submetida a carga tangencial distribuida uniformemente sobre todos os lados (Fig. (2), Leikhnitskii, 1968), os dados utilizados são os seguintes:

$$E_{1-iso} = 78.255\text{MPa}; \nu = 0.21 ; \ell = 1000\text{cm} ; b = 400\text{cm} ; t = 0.0025\text{kN/cm} ; \varphi = -30^\circ$$

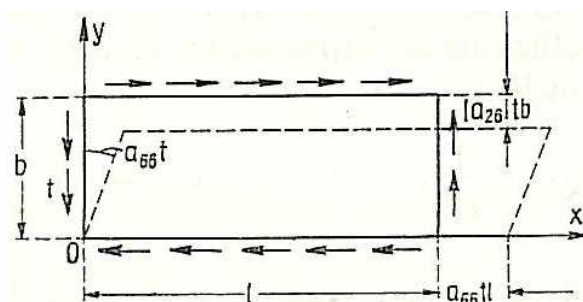


Figura 2 – Chapa submetida a carga tangencial distribuida uniformemente sobre os quatro lados.(Leikhnitskii, 1968)

Para a consideração da anisotropia, utilizaram-se valores dos módulos de Young E_1 e E_2 com diferenças, para mais e para menos do valor de E_1 dado, das ordens de 0%, 1%, 4%, 25%, 64%. As menores diferenças foram calculadas para comparação dos resultados isotrópicos e quase isotrópicos. Novamente as propriedades elásticas dos tensores foram calculadas pelas expressões encontradas no item 3.4.

Os resultados obtidos dos deslocamento são apresentados na Tabela (2), onde os valores entre parênteses são os obtidos diretamente do tensor anisotrópico ($a_{16} = C_{16}^{-1}$, $a_{26} = C_{26}^{-1}$, $a_{66} = C_{66}^{-1}$), conforme indicado na Fig. (2).

Novamente observa-se uma boa aproximação dos valores em deslocamento quando utiliza-se módulos de Young iguais e ângulo $\varphi=0^\circ$. Nos casos com variação dos módulos de Young e ângulo $\varphi=-30^\circ$, há uma sensível alteração nos valores pois as direções x e y deixam de ser as direções principais e distancia-se da condição de chapa isotrópica, porém sem grandes variações de valores de γ_{xy} .

Os valores de deformações transversais mostram-se pequenos, mesmo considerando-se os casos de grande diferença entre os módulos de Young e apresentam uma variação irregular, comparada aos valores de deslocamento horizontal.

Tabela 8- Placa retangular sob carga tangencial uniformemente distribuida, $\varphi=0^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm) (y=400)	d_y (cm) (y=400)	γ_{xy}
MEC isotrópico	7.8255	0.2924	0.0	0.000731
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.3067 (0.3054)	0.0	0.000767 (0.000774)
$E_1/E_{1-iso}=1,3\%$	7.9255/7.7255	0.3028 (0.3019)	0.0	0.000757 (0.000763)
$E_1/E_{1-iso}=3,8\%$	8.1255/7.5255	0.2952(0.2951)	0.0	0.000738 (0.000745)
$E_1/E_{1-iso}=25,5\%$	9,8255/5,8255	0.2373 (0.2478)	0.0	0.000593 (0.000616)
$E_1/E_{1-iso}=63,9\%$	12,8255/2,8255	0.1544 (0.1930)	0.0	0.000388 (0.000472)

Tabela 9- Placa retangular sob carga tangencial uniformemente distribuida, $\varphi=-15^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm) (y=400)	d_y (cm) (y=400)	γ_{xy}
MEC isotrópico	7.8255	0.2924	0.0	0.000731
$E_1/E_{1-iso}=0\%$ ($\varphi=0^\circ$)	7.8255/7.8255	0.3067 (0.3054)	0.0	0.000767 (0.000774)
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.3833 (0.2780)	-0.02670 (-0.05491)	0.000958 (0.000884)
$E_1/E_{1-iso}=1,3\%$	7.9255/7.7255	0.3796 (0.2749)	-0.02737 (-0.05765)	0.000949 (0.000874)
$E_1/E_{1-iso}=3,8\%$	8.1255/7.5255	0.3721 (0.2690)	-0.02864 (-0.06383)	0.000930 (0.000854)
$E_1/E_{1-iso}=25,5\%$	9,8255/5,8255	0.3111 (0.2273)	-0.03631 (-0.06796)	0.000777 (0.000720)
$E_1/E_{1-iso}=63,9\%$	12,8255/2,8255	0.2168 (0.1784)	-0.04283 (0.04394)	0.000541 (0.000564)

Tabela 10- Placa retangular sob carga tangencial uniformemente distribuida, $\varphi=-30^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm) (y=400)	d_y (cm) (y=400)	γ_{xy}
MEC isotrópico	7.8255	0.2924	0.0	0.000731
$E_1/E_{1-iso}=0\%$ ($\varphi=0^\circ$)	7.8255/7.8255	0.3067 (0.3054)	0.0	0.000767 (0.000774)
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.3548 (0.2356)	-0.01529 (0.07081)	0.000886 (0.001237)
$E_1/E_{1-iso}=1,3\%$	7.9255/7.7255	0.3508 (0.2334)	-0.01591 (0.06356)	0.000877 (0.001229)
$E_1/E_{1-iso}=3,8\%$	8.1255/7.5255	0.3430 (0.2291)	-0.01708 (0.05280)	0.000827 (0.001213)
$E_1/E_{1-iso}=25,5\%$	9,8255/5,8255	0.2818 (0.1982)	-0.02554 (0.0218)	0.000705 (0.001093)
$E_1/E_{1-iso}=63,9\%$	12,8255/2,8255	0.1700 (0.1599)	-0.03817 (0.01064)	0.000420 (0.000928)

Tabela 11- Placa retangular sob carga tangencial uniformemente distribuida, $\varphi=-45^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm) (y=400)	d_y (cm) (y=400)	γ_{xy}
MEC isotrópico	7.8255	0.2924	0.0	0.000731
$E_1/E_{1-iso}=0\%$ ($\varphi=0^\circ$)	7.8255/7.8255	0.3067 (0.3092)	0.0	0.000767 (0.000774)
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.2910 (0.2189)	-0.00014 (0.00339)	0.000728 (0.001545)
$E_1/E_{1-iso}=1,3\%$	7.9255/7.7255	0.2868 (0.2176)	-0.00063 (0.00310)	0.000717 (0.001543)
$E_1/E_{1-iso}=3,8\%$	8.1255/7.5255	0.2786 (0.2152)	-0.00158 (0.02760)	0.000697 (0.001536)
$E_1/E_{1-iso}=25,5\%$	9,8255/5,8255	0.2187 (0.1958)	-0.00888 (0.01439)	0.000546 (0.001475)
$E_1/E_{1-iso}=63,9\%$	12,8255/2,8255	0.1312 (0.1683)	-0.02939 (0.00787)	0.000324 (0.001365)

Tabela 12- Placa retangular sob carga tangencial uniformemente distribuida, $\varphi=-60^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm) (y=400)	d_y (cm) (y=400)	γ_{xy}
MEC isotrópico	7.8255	0.2924	0.0	0.000731
$E_1/E_{1-iso}=0\%$ ($\varphi=0^\circ$)	7.8255/7.8255	0.3067 (0.3054)	0.0	0.000767 (0.000774)
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.3155 (0.2356)	0.01504 (0.07081)	0.000784 (0.001237)
$E_1/E_{1-iso}=1,3\%$	7.9255/7.7255	0.3101 (0.2357)	0.01455 (0.06356)	0.000775 (0.001229)
$E_1/E_{1-iso}=3,8\%$	8.1255/7.5255	0.3036 (0.2359)	0.01355 (0.05280)	0.000759 (0.001213)
$E_1/E_{1-iso}=25,5\%$	9,8255/5,8255	0.2532 (0.2368)	0.004139 (0.02182)	0.000633 (0.001093)
$E_1/E_{1-iso}=63,9\%$	12,8255/2,8255	0.1587 (0.2361)	-0.01854 (0.01084)	0.000397 (0.000928)

Tabela 13- Placa retangular sob carga tangencial uniformemente distribuida, $\varphi=-75^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm) (y=400)	d_y (cm) (y=400)	γ_{xy}
MEC isotrópico	7.8255	0.2924	0.0	0.000731
$E_1/E_{1-iso}=0\%$ ($\varphi=0^\circ$)	7.8255/7.8255	0.3067 (0.3054)	0.0	0.000767 (0.000774)
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.3137 (0.2780)	0.02677 (-0.05491)	0.0007845 (0.0008836)
$E_1/E_{1-iso}=1,3\%$	7.9255/7.7255	0.3102 (0.2804)	0.02675 (-0.05761)	0.0007756 (0.0008737)
$E_1/E_{1-iso}=3,8\%$	8.1255/7.5255	0.3032 (0.2856)	0.02663 (-0.06388)	0.0007582 (0.0008546)
$E_1/E_{1-iso}=25,5\%$	9,8255/5,8255	0.2508 (0.3360)	0.02110 (-0.06796)	0.0006272 (0.0007207)
$E_1/E_{1-iso}=63,9\%$	12,8255/2,8255	0.1754 (0.4747)	-0.007569 (0.04394)	0.0004396 (0.0005642)

Tabela 14- Placa retangular sob carga tangencial uniformemente distribuida, $\varphi=-90^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm) (y=400)	d_y (cm) (y=400)	γ_{xy}
MEC isotrópico	7.8255	0.2924	0.0	0.000731
$E_1/E_{1-iso}=0\%$	7.8255/7.8255	0.3067 (0.3054)	0.0 (-0.0291)	0.0007667 (0.0007731)
$E_1/E_{1-iso}=1,3\%$	7.9255/7.7255	0.3028 (0.3097)	0.0 (-0.0295)	0.0007570 (0.0007634)
$E_1/E_{1-iso}=3,8\%$	8.1255/7.5255	0.2951(0.3186)	0.0 (-0.0303)	0.0007377 (0.0007445)
$E_1/E_{1-iso}=25,5\%$	9,8255/5,8255	0.2355 (0.4179)	-0.000422 (-0.0398)	0.0005789 (0.00061576)
$E_1/E_{1-iso}=63,9\%$	12,8255/2,8255	0.1503 (0.8762)	-0.0020 (-0.0834)	0.0003758 (0.0004717)

Novamente observa-se uma boa aproximação dos valores em deslocamento quando utiliza-se módulos de Young iguais e ângulo $\varphi=0^\circ$. Nos casos com variação dos módulos de Young e ângulo $\varphi=-30^\circ$, há uma sensível alteração nos valores pois as direções x e y deixam de ser as direções principais e distancia-se da condição de chapa isotrópica, porém sem grandes variações de valores de γ_{xy} .

Os valores de deformações transversais mostram-se pequenos e apresentam variação irregular quando comparados aos valores de deslocamento horizontal.

Há uma sensibilidade numérica com relação às expressões analíticas das propriedades elásticas anisotrópicas nos casos onde o módulo de Young E_2 é numericamente próximo de zero, resultando em valores numericamente próximos de zero ou negativos para os coeficientes de Poisson ν_2 , na direção principal, e ν'_2 , na direção analisada. Estes casos provocam a mudança de sinais dos deslocamentos (deformações) transversais d_y observados nas tabelas. Bons resultados numéricos foram obtidos para razão entre módulos de Young E_1/E_2 menores do que 2 e E_2 numericamente distantes de zero (podendo ser evitados apresentando módulos de Young em unidades como MPa ou kN/cm^2 , para o caso de alvenarias);

4.3. Viga em cantilever sob carga vertical distribuída uniformemente no topo. (Leikhnitskii, 1968)

Neste exemplo apresenta-se a viga em cantilever, sob carregamento vertical uniformemente distribuído considerando-se a mesma discretização anterior com os dados seguintes:

$$E_{1\text{-iso}} = 78.255\text{MPa}; \nu = 0.21 ; \ell = 1000\text{cm} ; b = 400\text{cm} ; t = 0.0025\text{kN/cm} ; \varphi = 0^\circ$$

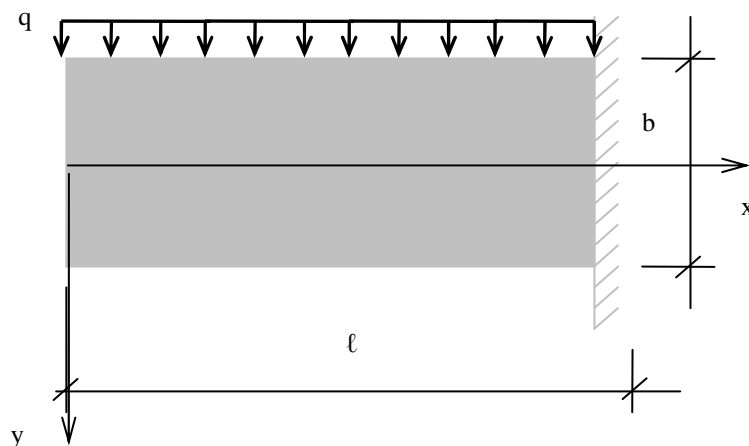


Figura 3 – Viga em cantilever submetida a carregamento vertical distribuído uniformemente.(Leikhnitskii, 1968)

As expressões analíticas para os deslocamentos apresentadas por Leikhnitskii são as seguintes, e na tabela 15 estão apresentadas entre parênteses:

$$d_y = \frac{q \cdot a_{11}}{24J} (x^4 - 4\ell^3 x + 3\ell^4) - \frac{q \cdot b^2}{80J} \left(3 \cdot a_{12} + 4 \cdot a_{66} - \frac{8}{3} \frac{a_{16}^2}{a_{11}} \right) (x - \ell)$$

$$d_{y(x=0)} = \frac{q \cdot a_{11} \cdot \ell^4}{8J} - \frac{q \cdot b^2 \cdot \ell^2}{80J} \left(3 \cdot a_{12} + 4 \cdot a_{66} - \frac{8}{3} \frac{a_{16}^2}{a_{11}} \right)$$

Tabela 15- Viga em cantilever sob carga uniformemente distribuída, $\varphi = 0^\circ$

Propriedades elásticas	E_1/E_2 (MPa)	d_x (cm) ($x=0, y=b/2$)	d_y (cm) ($x=0$)
MEC isotrópico	7.8255	2.216	9.5730 (9.74134)
$E_1/E_{1\text{-iso}}=0\%$	7.8255/7.8255	2.0450	8.8400 (9.88308)
$E_1/E_{1\text{-iso}}=1,3\%$	7.9255/7.7255	2.0110	8.7020 (9.68734)
$E_1/E_{1\text{-iso}}=3,8\%$	8.1255/7.8255	1.9480	8.4370 (9.30233)
$E_1/E_{1\text{-iso}}=25,5\%$	9,8255/5,8255	1.5300	6.6280 (6.21360)
$E_1/E_{1\text{-iso}}=63,9\%$	12,8255/2,8255	1.1270	4.6920 (1.04710)

4.4. Placa retangular submetida a tensões por carga distribuída uniformemente

Considerando-se a placa mostrada na Fig. 4 (Cho et al., 1992), submetida a carga distribuída uniformemente sobre os dois lados.

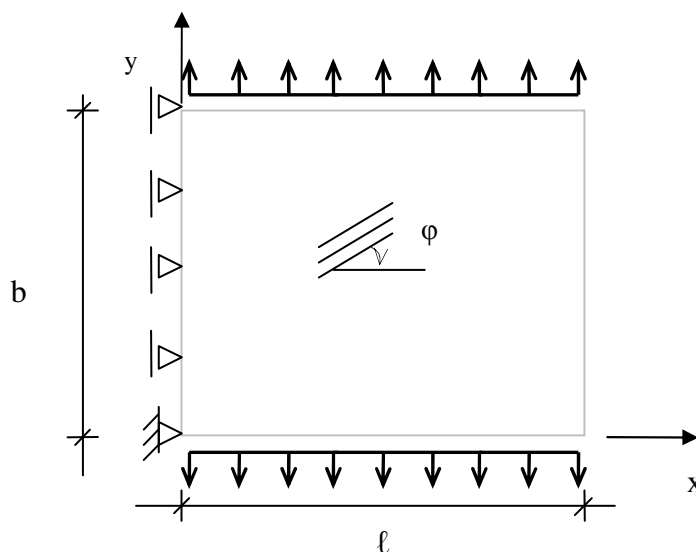


Figura 4 – Placa quadrada submetida a carregamento vertical distribuído uniformemente. (Cho et al., 1992)

Os dados utilizados são os seguintes:

$$E_{11} = 100 \text{ N/m}^2; E_{22} = 50 \text{ N/m}^2; \nu = 0.30; G_{12} = 29.168 \text{ N/m}^2; \ell = b = 2,0\text{m}; p = 0.1 \text{ N/m}^2; \phi = 0$$

Utilizando-se das expressões apresentadas no item 3.3, neste exemplo o módulo de Poisson e o módulo de cisalhamento são calculados e resultaram nos seguintes valores:

$$\nu_{21} = 0.15; G_{12} = 38.4615 \text{ N/m}^2$$

As tabelas mostram os valores apresentados na referência, comparados aos obtidos pela formulação aqui utilizada. Como já comentado nos exemplos anteriores, os valores entre parêntesis referem-se aos obtidos pelas expressões do item 3.3.

Tabela 16- Placa retangular sob carga uniformemente distribuida, $\phi = 0^\circ$

Coordenadas x y (m)	$d_x (x10^{-3})$ (m)			$d_y (x10^{-3})$ (m)		
	MEC (ref.)	Analítico (ref.)	MEC anisotrópico	MEC (ref.)	Analítico (ref.)	MEC anisotrópico
0.0 0.0	0.00	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0 0.0	-0.30	-0.30	-0.21410 (-0.3183)	0.00	0.00	0.0
2.0 0.0	-0.60	-0.60	-0.45108 (-0.6365)	0.00	0.00	0.0
2.0 0.5	-0.60	-0.60	-0.42454 (-0.6365)	0.999	1.00	0.8734 (0.9163)
2.0 1.0	-0.60	-0.60	-0.42117 (-0.6365)	1.999	2.00	1.7582 (1.8325)
2.0 1.5	-0.60	-0.60	-0.42229 (-0.6365)	2.999	3.00	2.6243 (2.7488)
2.0 2.0	-0.60	-0.60	-0.44806 (-0.6365)	3.999	4.00	3.5322 (3.8200)
1.0 2.0	-0.30	-0.30	-0.21997 (-0.3183)	3.999	4.00	3.5245 (3.8200)
0.0 2.0	0.00	0.00	0.00	3.999	4.00	3.5214 (3.8200)

Cabe observar que os valores de deslocamento obtidos pela formulação implementada estão compatíveis comparados aos da referência, levando-se em conta que os dados numéricos são diferentes quanto às propriedades ν_{21} e G_{12} .

Tabela 17- Placa retangular sob carga uniformemente distribuida, $\varphi=-45^\circ$

Coordenadas x y (m)	$d_x (x10^{-3})$ (m)			$d_y (x10^{-3})$ (m)		
	MEC (ref.)	Analítico (ref.)	MEC anisotrópico (0.3356)	MEC (ref.)	Analítico (ref.)	MEC anisotrópico (0.806)
2.0 0.0	-0.514	-0.514	0.4619	1.46	1.46	0.792
2.0 0.5	-0.514	-0.514	0.4654	1.46	1.46	0.777
2.0 1.0	-0.514	-0.514	0.4655	1.46	1.46	0.812
2.0 1.5	-0.514	-0.514	0.4625	1.46	1.46	0.846
2.0 2.0	-0.514	-0.514	0.4616	1.46	1.46	0.877

Em outra situação encontrada com a mesma placa mostrada na Fig. 4 (Cho et al., 1992), os dados são os seguintes:

$$E_{11} = 1.2 \text{ N/m}^2; E_{22} = 0.60 \text{ N/m}^2; \nu = 0.071 ; G_{12} = 0.8 \text{ N/m}^2; \ell = b = 2,0\text{m}; p = 0.1 \text{ N/m}^2; \varphi=0$$

Utilizando-se das expressões apresentadas no item 2.3, neste exemplo o módulo de Poisson e o módulo de cisalhamento são calculados e resultaram nos seguintes valores:

$$\nu_{21} = 0.0355 ; G_{12} = 0.560 \text{ N/m}^2$$

As tabelas mostram os valores apresentados na referência, comparados aos obtidos pela formulação aqui utilizada.

Tabela 18- Placa retangular sob carga uniformemente distribuida, $\varphi=-45^\circ$

Coordenadas x y (m)	$d_x (x10^{-1})$ (m)			$d_y (x10^{-1})$ (m)		
	MEC (ref.)	Analítico (ref.)	MEC anisotrópico	MEC (ref.)	Analítico (ref.)	MEC anisotrópico
0.0 0.0	0.00	0.00	0.0	0.0	-	0.0
1.0 0.0	0.28285	0.28291	0.01737 (0.0386)	-0.41661	-	-0.07452 (-0.06278)
2.0 0.0	0.56571	0.56582	0.03431	-0.83332	-	-0.1086
2.0 0.5	0.56571	0.56582	0.03447	-0.37940	0.45396	0.2514
2.0 1.0	0.56571	0.56582	0.03441	0.07456	0.90791	0.6461
2.0 1.5	0.56571	0.56582	0.03430	0.52853	1.36186	1.0410
2.0 2.0	0.56571	0.56582	0.03428 (0.0772)	0.98245	1.81582	1.4730 (1.2555)

A partir dos exemplos numéricos apresentados, pode-se comprovar o bom desempenho da formulação do Método dos Elementos de Contorno com a consideração da anisotropia por utilização das soluções fundamentais isotrópicas. Cabe frisar que estes resultados foram obtidos com uma discretização com poucos elementos de contorno lineares e a discretização de domínio para consideração das variáveis internas, tensões $\hat{\sigma}_{jk}$, também com aproximação linear. Está é uma vantagem do método, comparado aos métodos de domínio. Outros exemplos devem ser elaborados

para melhor avaliação das potencialidades da formulação proposta, buscando fazer aplicações comparativas com outras paredes de alvenaria ensaiadas com discretização mais robusta.

Outros estudos a serem realizados para o aperfeiçoamento do programa computacional elaborado são referentes a implementação e comparação de modelos de homogeneização das propriedades elásticas de paredes reais para simulação encontrados na literatura e do tensor elástico isotrópico equivalente.

Agradecimentos

O primeiro autor gostaria de agradecer a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, do Ministério da Educação do Brasil pelo suporte financeiro recebido para realização de estágio pós-doutoral. O autor também expressa sua gratidão pela aprovação e suporte em seu afastamento temporário das atividades junto ao Departamento de Engenharia Civil, UNESP, campus de Bauru-SP e também pela recepção e suporte por parte de Mark J. Masia, Senior Lecturer no Centre for Infrastructure Performance and Reliability, School of Engineering, University of Newcastle, Australia, que tornaram esta pesquisa possível.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALI, S.; PAGE, A.W. Finite element model for masonry subject to concentrated loads, *Journal of Structural Engineering*, v.114, n.8, p.1761-1784, 1988.

ANTHOINE, A. Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *International Journal of Solids and Structures*;32(2):137–63, 1995.

BANERJEE, P.K., RAVEENDRA, S.T. Advanced Boundary Element analysis of two- and three-dimensional problems of elasto-plasticity. *International Journal for Num. Methods in Eng.*; v.23: p.985–1002, 1986.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements an Introductory Course*, McGraw-Hill, Comp. Mech. Public, 1989.

COWIN, S.C. Properties of the anisotropic elasticity tensor, *Q. Jl. Mech. Appl. Math.* vol. 42, p.2, , 1989.

LEE, J.S.; PANDE, G.N.; MIDDLETON, J.; KRALJ, B. Numerical modeling of brick masonry panels subject to lateral loadings, *Comp. Structures*, vol. 61, pp.735-745, 1996.

LEIKHNITSKII, S.G. *Anisotropic plates*, Gordon and Breach Sc. Publ., 1968.

LOURENÇO, P.B. *Computational strategies for masonry structures*. Netherlands, Delft Univ. Press. 1996.

OLIVEIRA NETO, L. *Método dos Elementos de Contorno em análise não-linear com modelos de dano contínuo em alvenaria de tijolos maciços cerâmicos*. (Relatório de pesquisa, estágio pós-doutoral). CIPR, Universidade de Newcastle, Austrália, 2008.

PAGE, A.W., Finite element model for masonry. *Journal of the Structural Division*, v.104, n. ST8, p.1267-1285, 1978.

PANDE, G.N.; LIANG, J.X.; MIDDLETON, J. Equivalent elastic moduli for brick masonry. *Comp. Geotech.* , 8 ,pp. 243-265, , 1989.

PAPA, E.; NAPPI, A. A numerical approach for the analysis of masonry structures. *Masonry International*, v.7, n.1, p.18-24, 1993.

PEREZ, M.M.; WROBEL, L.C. An integral-equation formulation for anisotropic elastostatics, *J. Appl. Mech.*, pp.892-902, , 1996.

SCHLAR, N.A. *Anisotropic Analysis using Boundary Elements*. Comp. Mech. Public. Southampton, 1994.

TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. On the application of the Boundary Element Method to plasticity. Research notes. *Applied Math. Modelling*, vol. 3, pp. 466-470, 1979.