

Ensino de Geometria Espacial na Licenciatura em Matemática: Uma Proposta de Trabalho com Grupos Colaborativos

Emília de Mendonça Rosa Marques, **Valter Locci,**

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP

17033-360, Bauru, SP

E-mail: emilia@fc.unesp.br valocci@fc.unesp.br

Resumo: *Apresenta-se neste trabalho experiências obtidas através de 06 (seis) anos consecutivos de trabalho com a disciplina de Geometria Espacial em turmas de formação inicial de professores de matemática. A proposta de trabalho em grupos colaborativos se justifica pela necessidade atual de os professores em atividade utilizarem essa poderosa ferramenta como facilitadora da aprendizagem pessoal e dos estudantes sob sua orientação. Os alunos das várias turmas foram desafiados à tarefa de apresentarem, ao final da disciplina (semestre), um trabalho contendo: material escrito (capa, formatação, desenvolvimento do tema, cálculos, desenhos, resultados e referências), material concreto produzido com canudos e fitilho (sólidos construídos: acabamento, uniformização, montagem e medidas) e apresentação oral do grupo (arquivos de programas de apresentação). A metodologia proposta para a realização dessa tarefa em todas as turmas foi de grupos colaborativos, com em média 05 (cinco) alunos cada. Para a 1ª turma foi proposta a construção de “esqueletos” dos poliedros de Platão, com a maior aresta (canudinho) fixada. Cada grupo deveria observar uma propriedade dentre as seguintes: sólidos com a mesma área total; com o mesmo volume; com uma mesma esfera inscrita e com uma mesma esfera circunscrita. Todo material coletado dos grupos (escrito, construído ou digital/apresentação oral), está sendo devidamente catalogado, para então ser disponibilizado no Laboratório de Ensino de Matemática do referido curso. Os trabalhos propostos posteriormente foram gradativamente sendo mais desafiadores. O último trabalho proposto (2012) teve o seguinte tema: Poliedros Arquimedianos ou semirregulares.*

Introdução

O curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências da UNESP/Bauru tem a incumbência de formar o professor de Matemática para o exercício do magistério nas séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Teve início em 1988 e no ano de 2005 passou por um processo de reestruturação, no qual uma nova disciplina chamada de Geometria Espacial foi alocada na grade curricular do 3º termo (1º semestre do segundo ano). Tal disciplina foi oferecida ao curso pela 1ª vez no primeiro semestre de 2007, tendo como ementa os seguintes tópicos: prismas, paralelepípedos, pirâmides, cilindros, cones, troncos de pirâmide e de cones, esfera e suas partes, e inscrição e circunscrição de sólidos. A disciplina objetiva a construção correta dos conceitos e propriedades de Geometria Métrica Espacial, bem como a criação, e ou adaptação, de estratégias e materiais didáticos, que potencializem seu ensino nos níveis Fundamental e Médio. A metodologia proposta envolve: a) Utilização de sólidos geométricos concretos no desenvolvimento dos conceitos e propriedades, dando enfoque na instrumentalização para o ensino; b) Resolução de exercícios; c) Discussão da apresentação desse conteúdo nos livros-textos usualmente propostos na Educação Básica; d) Discussão de artigos científicos envolvendo conceitos de Geometria Espacial da Revista do Professor de Matemática; e) Trabalhos desenvolvidos em grupos.

Neste contexto, nos anos de 2007 a 2012, o desenvolvimento de uma proposta de trabalho através de grupos colaborativos com as turmas da disciplina de Geometria Espacial proporcionou-nos as experiências relatadas neste trabalho.

Metodologia

Paralelamente ao trabalho realizado em sala de aula, através de aulas expositivas, proposição de problemas [1] e [2], utilização de software geométrico para construção de figuras e manipulação de material concreto, durante os anos de 2007 a 2012, propôs-se para cada uma

das turmas, no início de cada semestre, uma tarefa a ser desenvolvida em grupos colaborativos [3] com o objetivo de trabalhar algum tema da Geometria Espacial numa abordagem envolvendo práticas teóricas, concretas, virtuais e expositivas, explicitadas nas seguintes etapas exigidas: 1ª) entrega de um trabalho escrito contendo definições e desenvolvimento algébrico; 2ª) uso de algum software para construção das figuras utilizadas no trabalho escrito; 3ª) entrega de sólidos concretos construídos com canudos e 4ª) apresentação oral em sala de aula do trabalho realizado pelos grupos.

Cabe destacar que inserido aos conteúdos geométricos da disciplina está também a aprendizagem e utilização do software Wingeom [7] na construção de figuras planas e espaciais, como exemplificado na Figura 1. O software é de domínio público e tem sido trabalhado através de aulas práticas no Laboratório Didático de Informática, utilizando-se de objetos de aprendizagem desenvolvidos para esse fim, cujo conteúdo versa sobre Geometria Plana (conteúdo anteriormente trabalhado). Desta forma os estudantes aprendem o software e revisam conceitos imprescindíveis para a Geometria Espacial, tais como: ponto, reta, segmento, ângulo, triângulo, pontos notáveis num triângulo, circunferência, inscrição e circunscrição de polígonos. Os objetos de aprendizagem são os mesmos para todos os grupos colaborativos formados em cada turma. Essa tarefa inicial proporciona a integração do grupo, o evidenciar do líder natural e a divisão de tarefas. O produto dessa tarefa é um trabalho escrito, que após ser corrigido é devolvido ao grupo para que este possa trabalhar as correções e sugestões apontadas na avaliação. Naturalmente esse primeiro trabalho serve como referência inicial para os grupos quanto aos quesitos necessários à apresentação de um trabalho científico, tais como: formatação, desenvolvimento do assunto, explicitação dos resultados e conclusões. Na construção dos sólidos com materiais concretos, considerando-se as variáveis, preço, facilidade de manipulação, acabamento, armazenamento e durabilidade, dá-se preferência aos canudos e fitilhos, conforme Kaleff [4]. Outros artigos da Revista do Professor de Matemática [5] e [6], dentre outros que tratam de temas da Geometria Espacial, são indicados como referência para os grupos, no desenvolvimento do raciocínio matemático a ser utilizado na abordagem dos temas propostos para cada grupo.

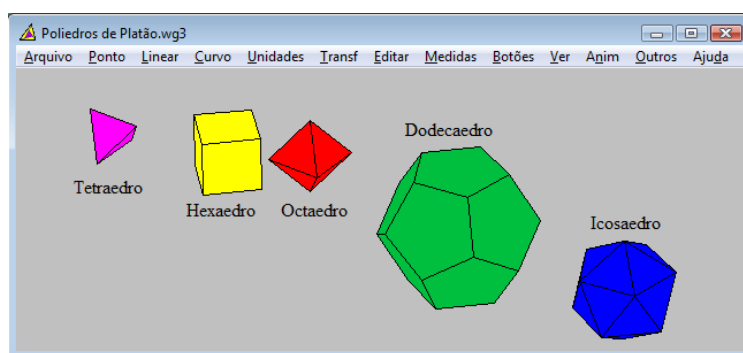


Figura 1: Poliedros de Platão construídos no Wingeom

Descrição das Propostas trabalhadas no período

A primeira turma (2007) era constituída de 26 alunos, os quais foram distribuídos em 4 grupos. A tarefa desafiadora proposta foi de construir “os maiores” **poliedros de Platão** possíveis com canudinhos e fita de acordo com o que se solicitou para cada grupo:

- G1 – sólidos com a mesma área lateral (total);
- G2 – sólidos com o mesmo volume;
- G3 – sólidos inscritíveis em uma esfera;
- G4 – sólidos circunscritíveis a uma esfera.

Na tentativa de que os alunos estivessem o mais confortável possível, do ponto de vista emocional, proximidade geográfica e nível de desenvolvimento cognitivo, não se colocou aos alunos restrição quanto a quantidade de alunos por grupo. Assim foram compostos os quatro grupos com 6, 5, 8 e 7 alunos, respectivamente. Os grupos deveriam entregar um trabalho escrito com os cálculos e estes, juntamente com os trabalhos manuais, foram avaliados segundo critérios explicitados verbalmente pelo docente. Todos os trabalhos escritos apresentaram os cálculos corretos e de forma sucinta, sendo dois deles digitados e outros dois manuscritos. Os

trabalhos manuais foram confeccionados com bastante qualidade e suas dimensões se mostraram adequadas para auxiliar os grupos, em sala de aula, no desenvolvimento do raciocínio para deduzir as fórmulas necessárias. Entretanto considerando a dificuldade de armazenamento destes, ficou evidenciada a necessidade de reduzir seus tamanhos na próxima proposta, conforme a Figura 2. O envolvimento dos alunos nas discussões em sala de aula motivou para a turma seguinte o acréscimo da exigência de apresentação oral dos trabalhos.

Em 2008, a turma estava constituída de 29 alunos, os quais iniciaram a disciplina trazendo a expectativa da “tarefa desafiadora para os grupos colaborativos”. Foram então distribuídos em grupos como no ano anterior, sendo que estes ficaram com 4, 8, 8 e 9 alunos respectivamente. Desta vez a tarefa se constituiu na construção com canudinhos e fitilhos dos “esqueletos” dos **poliedros de Platão**, tendo a maior aresta (canudinho) comprimento igual a 10 cm.

Na avaliação dos trabalhos, após a análise crítica e conjunta, realizada ao final de todas as atividades do semestre, observou-se a necessidade de que esses critérios estivessem explícitos no enunciado da tarefa, de modo claro. Considerando a discrepância na quantidade de alunos por grupo vivenciada nesta turma, para o ano seguinte, foi decidido fixar o número mínimo e máximo de elementos por grupo. A Figura 3 exemplifica dois trabalhos desta turma.



Figura 2: Trabalho de 2007



Figura 3: Parte dos trabalhos de 2008

Em 2009, os 36 alunos foram distribuídos em 6 grupos de 6 ou 7 alunos cada e realizaram a tarefa seguinte. Construir os sólidos (“esqueletos”) especificados abaixo com canudinhos e fitilho (ou cordão), tendo a maior aresta (canudinho) comprimento igual a 20 cm (opção de 16 cm também), de acordo com o que se pede para cada grupo:

a) Cinco **pirâmides regulares equiláteras** (inscritas em cones equiláteros), tendo o polígono da base n lados, onde $n= 3, 4, 5, 6$ e 8 :

G1 – pirâmides inscritas a uma mesma esfera;

G2 – pirâmides circunscritas a uma mesma esfera.

b) Os cinco **poliedros de Platão**:

G3 – sólidos com o mesmo volume.

G4 – sólidos com uma mesma esfera inscrita.

G5 – sólidos com uma mesma esfera circunscrita.

G6 – sólidos com a mesma área (superfície total) e inscrever em cada um deles o seu dual.

Após uma análise crítica e conjunta dos envolvidos na tarefa proposta para essa turma, considerando os resultados obtidos, as dificuldades e facilidades encontradas e os benefícios de aprendizagem obtidos pelos estudantes dessa turma, evidenciou-se a conveniência do aumento na valorização (nota) desse trabalho. Também se observou a necessidade de melhorar a formatação da proposta para a turma seguinte. A Figura 4 apresenta os sólidos do grupo 6.

Em 2010, a turma possuía apenas 20 alunos. A proposta da tarefa desafiadora para essa turma manteve o tema, mas acrescentou um item de construção de poliedros com esferas tangentes às arestas e introduziu uma 5ª etapa solicitando o planejamento, redação e proposição de um tema de Geometria Espacial que fosse adequado à execução pelas próximas turmas da disciplina. A proposição desta nova etapa visou maior participação dos alunos na discussão dos

temas, visão global dos conteúdos da disciplina e diversificação de temas. A proposta explicitou também condições mais rigorosas sobre a formação dos grupos, a construção dos sólidos, a elaboração das figuras e a apresentação oral do trabalho.

Tema da tarefa: **Poliedros de Platão.**

Desenvolvimento:

- a) Alunos divididos em 5 grupos com no mínimo 4 integrantes cada.
- b) Cada grupo abordará o tema para uma classe específica de sólidos, sendo que as classes, sorteadas entre os grupos, são constituídas dos Poliedros de Platão com mesmo (a):
G1 – volume; G2 – esfera inscrita; G3 – esfera circunscrita; G4 – esfera tangente às arestas; G5 – área (superfície total) e poliedro dual inscrito em cada um deles.
- c) Cada grupo deve realizar a tarefa em cinco etapas:
 - 1ª) Elaborar um material escrito conforme a classe sorteada, apresentando o tema, a classe específica e os cálculos realizados que demonstrem a pertinência de cada sólido a essa classe.
 - 2ª) Executar a construção dos sólidos (“esqueletos”) com canudinhos e fitilho (cordão ou linha de nylon), tendo a maior aresta (canudinho) comprimento igual a 20 cm (opção de 16 cm também).
 - 3ª) Utilizar um software (Wingem, por exemplo) para elaboração das imagens (com possibilidade de animações) utilizadas no trabalho escrito.
 - 4ª) Realizar (e assistir) a apresentação do trabalho desenvolvido pelo grupo. As apresentações serão realizadas na ordem crescente dos números dos grupos. A duração das apresentações será de 20 minutos por grupo, com mais 5 minutos para questionamentos da platéia.
 - 5ª) Planejar, redigir e fazer uma proposta de trabalho sobre algum tema de Geometria Espacial, preferencialmente envolvendo abordagens teórica, concreta e virtual, para ser executado pela próxima turma da disciplina.

Avaliação dos Trabalhos (itens a serem considerados):

- a) Trabalho Escrito: capa, formatação, desenvolvimento do tema, cálculos, desenhos, resultados, referências.
- b) Construção dos Sólidos: acabamento, uniformização, montagem, medidas.
- c) Apresentação do Trabalho: recursos utilizados, animação, domínio do tema, clareza, precisão, divisão das tarefas, participação dos membros do grupo.

Os cinco grupos apresentaram propostas inovadoras, sendo duas bem fundamentadas e estruturadas, uma sem detalhamentos, uma inadequada ao contexto e outra inconsistente. A Figura 5 apresenta alguns dos sólidos produzidos pelos estudantes dessa turma.



Figura 4: Trabalho de 2009



Figura 5: Trabalho de 2010

No ano de 2011, o trabalho estava consolidado e as turmas se mostravam motivadas desde a inscrição na disciplina, o que ficou comprovado pelo aumento significativo de alunos inscritos (33 alunos distribuídos em 6 grupos). O novo tema proposto, adequado de propostas das turmas anteriores, era inovador, mais desafiador e de confecção muito mais trabalhosa. Desta forma cada grupo passou a abordar apenas dois poliedros.

Tema da tarefa: **Poliedros de Kleper-Poisont:** pequeno dodecaedro estrelado, grande dodecaedro estrelado, grande dodecaedro e grande icosaedro.

Desenvolvimento:

a) Alunos distribuídos em 6 grupos com no mínimo 5 integrantes cada (e no máximo 6).

b) Tema específico:

G1 – grande dodecaedro estrelado e pequeno dodecaedro estrelado com mesma área.

G2 – grande dodecaedro estrelado e pequeno dodecaedro estrelado com mesma esfera circunscrita.

G3 – grande dodecaedro estrelado e pequeno dodecaedro estrelado com mesmo volume.

G4 – grande dodecaedro e grande icosaedro com mesma área.

G5 – grande dodecaedro e grande icosaedro com mesma esfera circunscrita.

G6 – grande dodecaedro e grande icosaedro com mesmo volume.

Com a inovação do tema, devido à maior complexidade do assunto e ao maior número de alunos e grupos, as apresentações foram realizadas em dois dias. Apesar da maior dificuldade na confecção dos sólidos, estes ficaram muito bem montados e acabados, como exemplificado nas Figuras 6 e 7.



Figura 6: Trabalho de 2011



Figura 7: Trabalho de 2011

Em 2012, 28 alunos distribuídos em 5 grupos, receberam a tarefa descrita a seguir.

Tema da tarefa: **Poliedros Arquimedianos ou semirregulares**. Desenvolvimento:

a) Alunos distribuídos em 5 grupos com no mínimo 5 integrantes cada (e no máximo 6).

b) Tema específico:

G1–Tetraedro truncado, Cuboctaedro, Cubo truncado e Octaedro truncado, com mesmo volume.

G2 – Rombicuboctaedro e Cuboctaedro truncado, com mesmo volume.

G3 – Cosidodecaedro, Dodecaedro truncado e Icosaedro truncado, com mesma área.

G4 – Rombicosidodecaedro e Icosidodecaedro truncado, com mesma área.

G5 – Cubo snub e Icosidodecaedro snub, com mesma área.

Novamente, pelos mesmos motivos anteriores, as apresentações foram realizadas em dois dias. Da mesma forma, apesar da dificuldade de confecção dos sólidos propostos, os trabalhos ficaram muito bem montados e acabados, conforme exemplificado nas Figuras 8 e 9. Desta vez todos os grupos apresentaram propostas de trabalho adequadas e consistentes.



Figura 8: Trabalho de 2012



Figura 9: Parte dos trabalhos de 2012

Resultados

Os grupos colaborativos se mostraram muito adequados às tarefas propostas, a participação muito ativa dos alunos da disciplina, tanto em sala de aula, quanto nas reuniões para desenvolvimento dos trabalhos se evidenciou fortemente. Os alunos aprenderam efetivamente a utilizar um software para construção de figuras geométricas e treinaram o desenvolvimento de raciocínio colaborativo em grupo, utilizando o material concreto na dedução algébrica dos resultados e vice-versa. Aprenderam efetivamente a produzir um texto científico e didático, planejaram e construíram material didático concreto de apoio ao texto para uso no Laboratório Didático de Matemática do curso, como exemplificado nas Figuras 10 e 11, e obtiveram, alguns pela primeira vez, a experiência de realizar uma apresentação oral de trabalho. As últimas turmas mostraram um grande amadurecimento no processo de aquisição dos conteúdos. Percebeu-se então que a consolidação da proposta de tarefas desafiadoras proporcionou grande amadurecimento dos estudantes.



Figura 10: Parte dos trabalhos de 2008-2009



Figura 11: Trabalhos de 2011

Referências

- [1] Carvalho, P. C. P. “Introdução à Geometria Espacial”. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 1999.
- [2] Dolce, O. e Pompeo, J. N. “Geometria Espacial, Posição e Métrica”, 5ª Ed., Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, V. 10. São Paulo: Atual, 1998.
- [3] Gama, R. P. “Desenvolvimento profissional com apoio de grupos colaborativos: o caso de professores de matemática em início de carreira”. Tese de Doutorado em Educação Matemática - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2007.
- [4] Kaleff, A. M. e Rei, D. M. “Varetas, canudos, arestas e sólidos geométricos”, Revista do Professor de Matemática, Nº.28, Rio de Janeiro: SBM
- [5] Pedone, N. M. D. “Poliedros de Platão”, Revista do Professor de Matemática, Nº.15, Rio de Janeiro: SBM.
- [6] Saraiva, J. C. V. “O poliedro regular de maior volume”, Revista do Professor de Matemática, Nº.49, Rio de Janeiro: SBM.
- [7] Wingeom (1.01M) for Windows 95/98/ME/2K/XP/Vista/7. Disponível em: <<http://math.exeter.edu/rparris/wingeom.html>>. Acesso em: 15 jun. 2013.