# Aplicação de um método híbrido de pontos interiores e *branch-and-bound* em problemas de minimização de custo de colheita da cana-de-açúcar

Camila de Lima[1], Antonio Roberto Balbo[2],
Helenice de Oliveira Florentino Silva[3]

**Resumo**

Este trabalho tem o objetivo de desenvolver e aplicar um método híbrido que envolve os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* em problemas referentes à minimização do custo de colheita da cana-de-açúcar. Desta forma, o método será utilizado para determinar a escolha das variedades de cana-de-açúcar para o plantio nas áreas determinadas pela usina, que podem ser do tipo mecanizáveis ou semi-mecanizáveis, que utilizam a queima da cana, de modo que se obtenha o menor custo no processo de colheita, respeitando-se as restrições do problema. O método primal-dual de pontos interiores é utilizado para se obter a solução ótima relaxada do modelo. A partir desta, utiliza-se o método *branch-and-bound* para determinar a solução ótima inteira 0-1 relacionada às restrições de integralidade do problema, relativas à escolha das variedades a serem plantadas. Os testes são realizados através de uma implementação computacional no software Borland C++ Builder 6.0 e os resultados numéricos obtidos são comparados àqueles encontrados na literatura e àqueles obtidos pelo aplicativo Solver do *software* Excel, demonstrando que o procedimento é eficiente e determina a solução ótima do problema.

**Palavras Chave:** Otimização, Métodos de Pontos Interiores, Método *Branch-and-Bound*, Biomassa Residual da Cana-de-Açúcar.

[1]Email: cadlima@yahoo.com.br. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, FEB, UNESP, CEP: 17033-360, Bauru, SP.
[2]Email: arbalbo@fc.unesp.br. Departamento de Matemática, FC, UNESP, CEP: 17033-360, Bauru, SP.
[3]Email: helenice@ibb.unesp.br. Departamento de Bioestatística, IB, UNESP, CEP: 18618-970, Botucatu, SP.

# 1 Introdução

A produção de energia elétrica no Brasil é predominantemente hidráulica, porém há alguns anos, este setor tem sofrido algumas mudanças devido à necessidade da diversificação da matriz energética prevista no planejamento do setor. Assim, novas fontes de energia foram introduzidas, como as que exploram o gás natural, a energia nuclear, e as energias renováveis, as quais utilizam recursos que são reabastecidos naturalmente, promovendo um menor impacto ambiental e atendendo aos princípios de sustentabilidade, dentre elas destacam-se a energia solar, a energia eólica e energia cogerada pela biomassa residual [7].

A utilização da biomassa como fonte alternativa no processo de cogeração de energia tem sido avaliada como uma possível solução energética e ambiental, visto a baixa produção de micro poluentes.

Neste contexto, a cana-de-açúcar entra nesse estudo, por ser bastante cultivada no Brasil e por gerar uma grande quantidade de resíduos no solo, como folhas, palhas, ponteiros e frações de colmo, o que incentiva o aproveitamento desta biomassa residual para a cogeração de energia. Isso ocorre devido a proibição das queimadas, utilizadas no processo de colheita semi-mecanizado, o sistema de colheita mecanizado foi mais empregado, ocasionando um aumento significativo quantidade de resíduos no solo, que podem favorecer o aparecimento de pragas, contaminar o solo, e comprometer a próxima safra, caso não seja reaproveitado. Além disso, o período de colheita da cana-de-açúcar coincide com o período de estiagem das principais bacias hidrográficas do parque hidrelétrico brasileiro, e ainda, existe a possibilidade de armazenamento da biomassa por um determinado período até uma maior necessidade ou maior valor de comercialização desta energia.

A partir destes, diversos estudos vêm sendo realizados visando minimizar o custo, não somente da colheita mecanizável e semi-mecanizável, mas também da coleta de resíduos de cana-de-açúcar gerados nas áreas mecanizáveis, bem como, maximizar a produção de energia relativa ao aproveitamento da biomassa residual. O processo é feito de tal forma a atender as restrições de produção e demanda das usinas. Em [3], [11] e [5], são discutidos modelos matemáticos para a escolha de variedades de cana-de-açúcar que buscam otimizar o custo de coleta da biomassa residual e/ou a geração de energia.

A investigação destes modelos ocorre devido a necessidade das usinas em otimizar a colheita da cana-de-açúcar, bem como, a coleta dos resíduos ocasionados pelo corte mecanizado, visando o aproveitamento desta biomassa residual e otimizar a geração de energia a partir da biomassa.

Neste trabalho utiliza-se um procedimento híbrido envolvendo métodos primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* para a resolução dos modelos relativos à colheita da cana-de-açúcar, apresentados em [9], que considera as áreas semi-mecanizáveis e mecanizáveis para o plantio, ainda sem considerar a minimização da coleta e a maximização da geração de energia da biomassa residual da cana, que são objetos de trabalhos futuros.

Na seção 2 é apresentado o procedimento híbrido desenvolvido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound.* Em seguida, na seção 3, são apresentados os modelos matemáticos, nos quais o método citado será aplicado. Os resultados dessa aplicação podem ser vistos na seção 4. E algumas considerações sobre o trabalho são feitas na seção 5.

# 2 Método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound*

Seja o seguinte problema primal definido para variáveis canalizadas:

$$\begin{array}{ll} Minimizar & c^T x \\ Sujeito\ a: & \begin{cases} Ax = b \\ l \le x \le u \end{cases} \end{array} \tag{2.1}$$

em que $A \in R^{m \times n}, b \in R^m, x, c, l, u \in R^n$ e $A$ com posto *n.*

Tem-se então, o seguinte problema equivalente ao problema original (2.1):

$$\begin{array}{l} Minimizar\ c^T x \\ Sujeito\ a: \begin{cases} Ax = b \\ x \ge l \text{ e } x \le u \end{cases} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} Minimizar\ c^T x \\ Sujeito\ a: \begin{cases} Ax = b \\ x - r = l \text{ e } x + z = u \\ r \ge 0 \text{ e } z \ge 0 \end{cases} \end{array} \tag{2.2}$$

De acordo com [10], as restrições de igualdade reduzem a região de busca do problema, desta forma, a solução proposta por Lagrange é determinar um novo problema irrestrito, de modo que a função objetivo do PPL (2.2) seja penalizada através dos multiplicadores de lagrange *w*, *s* e *y*, associados às restrições de igualdade do problema. As condições de primeira ordem, apresentadas de (2.4) a (2.7), garantem que as restrições sejam satisfeitas na solução ótima, e assim, a solução ótima da função lagrangiana corresponde ao ótimo do problema original, desde que este problema tenha uma solução.

Além disso, a função objetivo do problema (2.2) é penalizada através do produto de funções barreiras logarítmicas por um parâmetro de barreira $\mu > 0$, que condiciona as variáveis de folga do problema original a serem estritamente positivas, ou seja, $r > 0$ e $z > 0$, garantindo que as soluções permaneçam no interior da região viável do problema original. Assim, à medida que *r* e *z* tendem a zero e as soluções do problema aproximam-se da fronteira da região factível, as funções barreiras tendem ao infinito. Desta forma, o parâmetro de barreira deve tender a zero assintoticamente mais rápido do que as funções barreira logarítmica tendem ao infinito, de tal forma que o produto destas, tenda para zero e a solução da função lagrangiana barreira logarítmica tenda para a solução do problema original.

Desta forma, o problema de programação linear (PPL) com restrições lineares de igualdade e variáveis canalizadas (2.2), é redefinido através de um PPNL primal-dual irrestrito que é definido a partir da função lagrangiana barreira logarítmica $L_\mu(x,w,z,r,y,s)$:

$$L_\mu(x,w,z,r,y,s) = c^T x + w^T(b - Ax) + s^T(l + r - x) + y^T(x + z - u) - \mu\sum_{i=1}^{n}\ln(z_i) - \mu\sum_{i=1}^{n}\ln(r_i) \quad (2.3)$$

Em que: $w \in R^m$ e $y, s \in R^n$; $s \geq 0$, $y \geq 0$, são as variáveis duais do problema e $\mu > 0$ é o parâmetro de barreira ou parâmetro de centragem.

Assim, a partir de (2.3), temos as seguintes condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para este problema:

$$Ax = b \quad (2.4)$$

$$x + z = u \quad (2.5)$$

$$x - r = l \quad (2.6)$$

$$A^T w + s - y = c \quad (2.7)$$

$$RSe - \mu e = 0 \quad (2.8)$$

$$ZYe - \mu e = 0 \quad (2.9)$$

Em que: $R, Z, S$ e $Y$ são matrizes diagonais, respectivamente com $r_i, z_i, s_i$ e $y_i$ como elementos diagonais e $e = (1, \ldots, 1)^T$. Considerando o problema (2.2) e a restrição $x - r = l,$ nota-se que quando $l$ = 0 temos que $x$ = $r$, desta forma, a condição de otimalidade (2.8) pode ser reescrita como:

$$XSe - \mu e = 0 \tag{2.10}$$

em que: $X$ é uma matriz diagonal tendo $x_i$ como elementos da diagonal.

Se um ponto $(x^k, z^k, w^k, s^k, y^k)$ de uma iteração corrente $k$ não satisfaz as equações de KKT apresentadas de (2.4) a (2.10), então gera o resíduo dual $g^k$, relacionado à equação (2.7), os resíduos primais $t^k$ e $f^k$, referentes às equações (2.4) e (2.5), respectivamente, e as folgas complementares $q^k$ e $v^k$, relacionadas às equações (2.9) e (2.10), respectivamente. Estes resíduos são calculados no passo 3, do algoritmo da seção 2.3 e serão utilizados no critério de parada do método, apresentado no passo 2 desse algoritmo.

No critério de parada são feitos os seguintes testes, com o objetivo de garantir que $(x^k, z^k, w^k, s^k, y^k)$ seja a solução ótima do problema:

- Factibilidade primal: $\dfrac{\|t^k\|}{\|b\|+1} = \dfrac{\|b - Ax^k\|}{\|b\|+1} \le \varepsilon_1;$ (2.11)
- Factibilidade dual: $\dfrac{\|g^k\|}{\|c\|+1} = \dfrac{\|c - A^T w^k - s^k + y^k\|}{\|c\|+1} \le \varepsilon_2;$ (2.12)
- Folgas complementares: $\|\tilde{v}^k\| < \varepsilon_3$, e $\|\tilde{q}^k\| < \varepsilon_4;$ (2.13)

em que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$ são pequenas tolerâncias positivas.

A definição de um novo ponto depende diretamente das direções de movimento e comprimento de passo nesta direção, sendo definido através de:

$$(x^{k+1}; z^{k+1}; w^{k+1}; s^{k+1}; y^{k+1}) = (x^k + \alpha_k^P d_x^k, z^k + \alpha_k^P d_z^k, w^k + \alpha_k^D d_w^k, s^k + \alpha_k^D d_s^k, y^k + \alpha_k^D d_y^k) \tag{2.14}$$

Em que $\alpha_k^P > 0,$ é o comprimento de passo das variáveis primais e $\alpha_k^D > 0,$ é o comprimento de passo das variáveis duais, e $d_x^k$, $d_z^k$, $d_w^k$, $d_s^k$, $d_y^k$ são as direções de busca.

As direções do passo previsor são determinadas utilizando o método de Newton, considerando uma aproximação linear de primeira ordem por série de Taylor das condições de KKT, apresentadas de (2.4) a (2.10), sobre o novo ponto definido em (2.14), sem considerar ainda o comprimento do passo. Assim, tem-se as seguintes direções do passo previsor, que serão apresentadas no passo 4 do algoritmo da seção 2.3:

$$d_x^k = \theta_k (A^T d_w^k + p^k - u^k) \tag{2.15}$$

$$d_z^k = -d_x^k + f^k \tag{2.16}$$

$$d_w^k = (A\theta_k A^T)^{-1} \left[ A\theta_k (-p^k + u^k) + t^k \right] \tag{2.17}$$

$$d_s^k = X_k^{-1} (v^k - S_k d_x^k) \tag{2.18}$$

$$d_y^k = Z_k^{-1} (q^k - Y_k d_z^k) \tag{2.19}$$

em que $\theta_k = (X_k^{-1} S_k + Z_k^{-1} Y_k)^{-1}$, e $p^k = Z_k^{-1} \left( Y_k f^k - q^k \right) + X_k^{-1} v^k$.

As direções do passo corretor, por sua vez, consideram aproximações de segunda ordem sobre os resíduos relacionados às condições de complementaridade, $q^k$ e $v^k$, os quais são redefinidos utilizando as direções de busca $(d_x^k;\ d_z^k;\ d_w^k;\ d_s^k;\ d_y^k)$ determinadas no passo previsor do método, para obter os novos resíduos do passo corretor $\tilde{q}^k$ e $\tilde{v}^k$, vistos no passo 5 do algoritmo 2.3, e calculados da seguinte forma:

$$\tilde{v}^k = \mu_k e - X_k S_k e - D_x^k D_s^k \tag{2.20}$$

$$\tilde{q}^k = \mu_k e - Z_k Y_k e - D_z^k D_y^k e \tag{2.21}$$

em que: $D_x^k = Diag(d_{x_i}^k)$, $D_s^k = Diag(d_{s_i}^k)$, $D_z^k = Diag(d_{z_i}^k)$, e $D_y^k = Diag(d_{y_i}^k)$.

Desta forma, obtemos através do método de newton, como no passo previsor, as novas direções do passo corretor $(\tilde{d}_x^k;\ \tilde{d}_z^k;\ \tilde{d}_w^k;\ \tilde{d}_s^k;\ \tilde{d}_y^k)$, que podem ser vistas no passo 6 do algoritmo 2.3:

$$\tilde{d}_x^k = \theta_k (A^T \tilde{d}_w^k + p^k - u^k) \tag{2.22}$$

$$\tilde{d}_w^k = (A\theta_k A^T)^{-1} \left[ A\theta_k (-p^k + u^k) + t^k \right] \tag{2.23}$$

$$\tilde{d}_z^k = -\tilde{d}_x^k + f \tag{2.24}$$

$$\tilde{d}_s^k = X_k^{-1} (\tilde{v}^k - S_k \tilde{d}_x^k) \tag{2.25}$$

$$\tilde{d}_y^k = Z_k^{-1}(\tilde{q}^k - Y_k \tilde{d}_z^k) \quad (2.26)$$

O comprimento do passo, apresentado no passo 8 do algoritmo citado, referente às variáveis primais e duais do problema, são calculados da seguinte maneira baseando-se em [4]:

- $$\alpha_k^P = \min\left\{1, \min\left\{\frac{-\alpha x_i}{\tilde{d}x_i} / \tilde{d}x_i < 0\right\}, \min\left\{\frac{-\alpha z_i}{\tilde{d}z_i} / \tilde{d}z_i < 0\right\}\right\} \quad (2.27)$$
- $$\alpha_k^D = \min\left\{1, \min\left\{\frac{-\alpha s_i}{\tilde{d}s_i} / \tilde{d}s_i < 0\right\}, \min\left\{\frac{-\alpha y_i}{\tilde{d}y_i} / \tilde{d}y_i < 0\right\}\right\} \quad (2.28)$$

em que $0 < \alpha < 1$.

Assim, definem-se os passos de 1 a 9 do algoritmo PDBB a seguir, de acordo com [7]. Este algoritmo é complementado no passo 10 pelo método *branch-and-bound*, que é usado para integralizar as soluções relaxadas obtidas pelo método primal-dual, baseando-se em [1], [2] e [6].

## 2.1 Algoritmo previsor-corretor primal-dual e *branch-and-bound* (PDBB)

**Passo 1:** Ajustar $k = 0$ e encontrar uma solução inicial $(x^0; z^0; w^0; s^0; y^0) \in P \times D$, ou seja, uma solução inicial factível. Seja $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$ pequenas tolerâncias positivas auxiliares ao passo 2 do algoritmo.

**Passo 2:** Testar a otimalidade de solução: Se o critério de parada definido de (2.11) à (2.13) é atingido então vá para o passo 10, pois a solução relaxada $x^k, z^k, w^k, s^k, y^k$ obtida é ótima. Caso contrário, continue.

**Passo 3:** Fazer os cálculos intermediários do <u>*passo previsor*</u>.

**Passo 4 :** Calcular as direções $d_x^k$, $d_z^k$, $d_w^k$, $d_s^k$ e $d_y^k$ do <u>*passo previsor*</u>, definidas de (2.15) à (2.19).

**Passo 5:** Fazer os cálculos intermediários do <u>*passo corretor*</u>, atualizando os termos de segunda ordem das folgas complementares vistos em (2.20) e (2.21)

**Passo 6 :** Atualizar as direções $\tilde{d}_x^k$, $\tilde{d}_z^k$, $\tilde{d}_w^k$, $\tilde{d}_s^k$ e $\tilde{d}_y^k$ do <u>*passo corretor*</u>, definidas de (2.22) à (2.26).

**Passo 7:** Testar a ilimitariedade: Se $t^k = 0, f^k = 0$, $\tilde{d}_x^k$, $\tilde{d}_z^k > 0$, e $c^t \tilde{d}_x^k < 0$, então o problema primal é ilimitado. Se $g^k = 0$, $\tilde{d}_w^k$, $\tilde{d}_s^k$, $\tilde{d}_y^k > 0$ e $b^t \tilde{d}_w^k > 0$, então o problema dual é ilimitado. Se ambos os casos acontecem, então PARE e vá para o passo 10. Se $\tilde{d}_x^k$, $\tilde{d}_z^k$, $\tilde{d}_w^k$, $\tilde{d}_s^k$, $\tilde{d}_y^k = 0$, então também PARE, $x^k, z^k, w^k, s^k, y^k$ são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respectivamente. Caso contrário ir para o passo 8.

**Passo 8:** Calcular os comprimentos dos passos primal e dual, através de (2.27) e (2.28).

**Passo 9:** Determinar uma nova solução:

$x^{k+1} = x^k + \alpha_k^P \tilde{d}_x^k$, $z^{k+1} = z^k + \alpha_k^P \tilde{d}_z^k$, $w^{k+1} = w^k + \alpha_k^D \tilde{d}_w^k$, $s^{k+1} = s^k + \alpha_k^D \tilde{d}_s^k$, e $y^{k+1} = y^k + \alpha_k^D \tilde{d}_y^k$

Atualizar $k \leftarrow k+1$ e ir para o Passo 2.

**Passo 10: Método *Branch-and-Bound***

Para cada $x_i$, se $x_i \geq 0.85$ assuma $x_i = 1$, o que implica que a variedade *i* será plantada no talhão *j*, e faça $x_h = 0$, $h \neq i$, para $h = 1,...,k$ em todos os *h's* restantes e $j = 1,...,n$. (em que *h* é número de variedades e *j* é o número de talhões, e ambos são informados pelo usuário de acordo com o modelo em questão). Para as variáveis restantes, diferentes de 0 ou 1, percorra todos os nós cujas componentes $x_i$*'s* que ainda não atenderam o critério de integralidade ( $0 < x_i < 0,85$), de tal forma que somente uma componente assuma o valor 1 para cada nível da árvore, verificando a viabilidade e a otimalidade. Armazene sempre o menor valor da função objetivo encontrado. Um fluxograma que detalha os procedimentos a serem feitos no passo 10 é visto em [2], [3] e [5].

O algoritmo PDBB é definido através de um procedimento envolvendo os métodos primal-dual e *branch-and-bound* e é proposto para a resolução dos modelos definidos na seção 3, da seguinte forma:

i) Os passos de 1 a 9 resolvem o modelo relaxado para as variáveis limitadas superiormente $0 \leq x_i \leq u_i$;

ii) O passo 10, que utiliza o método *branch-and-bound*, integraliza a variável $x_i$ $(x_i = 0 \text{ ou } x_i = u_i = 1)$ para cada nível da árvore. A variável $x_i = 1$ implica que a variedade *i* deverá ser plantada em um talhão *j*.

# 3 Modelagem Matemática

De modo geral, o modelo apresentado nesta seção visa a minimização do custo da colheita da cana-de-açúcar, considerando as áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis. Um modelo de minimização de colheita da cana-de-açúcar é apresentado por [8], que considera as áreas de plantio mecanizáveis e semi-mecanizáveis, porém sem a divisão em talhões. Assim, um variante deste modelo é apresentado por [9], o qual considera em sua formulação, as áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis divididas em talhões. Para a resolução deste modelo são necessárias técnicas de programação inteira 0-1 (binária) para obter-se a solução ótima do problema. Desta forma, o modelo apresentado a seguir, baseando-se em [9], é equivalente ao problema (1.1), definido na seção 1.

## 3.1 Modelo – Minimização do custo de coleta da cana-de-açúcar

O problema consiste em determinar quais das $n$ variedades $i$ devem ser plantadas nos $k$ talhões $j$ de medida $L_j$ ($ha$) e distância $D_j$ ($Km$) do centro de produção ($j$=1,2,...,$k$) e, que ofereça o menor custo possível para o processo de colheita e de transporte da cana-de-açúcar do campo para a usina. Para formulação do modelo, a área para plantio foi dividida em duas partes, uma parte para plantio da cana que será colhida crua ($l$ talhões) e outra para cana que deverá ser queimada na pré-colheita (($k$-$l$) talhões), devido aos diferentes custos para cada tipo de colheita.

Para a formulação da função objetivo do modelo são feitos os cálculos dos custos envolvidos no processo, baseando-se em [8] e [9]. Na colheita de cana queimada têm-se os custos de aceiro, queima, corte manual, carregamento da cana para o caminhão e transporte da cana do campo para a usina. Na colheita mecanizada têm-se os custos de corte e transporte da cana do campo para a usina.

O custo de transporte da variedade $i$ plantada no talhão $j$ ($Ct_{ij}$) a uma distância ($D_j$) do talhão $j$ para a usina:

$$Ct_{ij} = c_{med_i} \,.\, D_j \tag{3.1}$$

Em que: $i$ = 1, 2, ..., $n$ são os índices que representam as variedades; $j$ = 1, 2, ..., $k$ são os índices que representam os talhões; $c_{med_i}$ é o custo médio do transporte da cana por km; e $D_j$ é a distância do talhão $j$ do centro de processamento, em talhões.

O custo $C_{ij}^{SM}$ de colheita e transporte da cana-de-açúcar de variedade *i* plantada no talhão *j* no sistema semi-mecanizado é calculado da seguinte forma:

$$C_{ij}^{SM} = (Ca_i + Cq_i + Cco_i + Cca_i + Ct_{ij}).\, L_j \tag{3.2}$$

Em que: $Ca_i$ é o custo de aceiro da variedade *i* ($R\$.ha^{-1}$); $Cq_i$ é o custo da queima da variedade *i* ($R\$.ha^{-1}$); $Cco_i$ é o custo de corte da variedade *i* ($R\$.ha^{-1}$); $Cca_i$ é o custo de carregamento da variedade *i* ($R\$.ha^{-1}$); $Ct_{ij}$ é o custo de transporte da variedade *i* plantada no talhão *j* ($R\$.ha^{-1}$), calculado em (2.1); e $L_j$ é área do talhão *j*, em hectare.

No sistema mecanizado o custo, $C_{ij}^{M}$, de colheita e transporte da cana de variedade *i* plantada no talhão *j*, é calculado da seguinte forma:

$$C_{ij}^{M} = (Cco_i + Ct_{ij}).\, L_j \tag{3.3}$$

Em que: $Cco_i$ é o custo de corte da variedade *i* ($R\$.ha^{-1}$); $Ct_{ij}$ é o custo de transporte da variedade *i* plantada no talhão *j* ($R\$.ha^{-1}$), calculado em (2.1); e $L_j$ é área do talhão *j*, em hectare.

A partir dos cálculos (3.2) e (3.3), é proposta a função objetivo do modelo que visa o menor custo possível no processo de colheita. Para a eficiência do modelo, deve-se satisfazer as restrições de sacarose e de fibra da cana (recomendações da empresa para manter a qualidade da cana e a demanda de açúcar e álcool) e usar toda a área destinada para o plantio da cana (mecanizada e semi-mecanizada). Este modelo é definido a seguir:

$$Minimizar\ CCT = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} C_{ij}^{M} X_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=l+1}^{k} C_{ij}^{SM} X_{ij} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} Sujeito\ a:\ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} A_i X_{ij} \geq \overline{P}T; \\ & \overline{F}_I T \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} F_i X_{ij} \leq \overline{F}_S T; \\ & \sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1; \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$X_{ij} = 0 \text{ ou } 1,\ i = 1, 2, ..., n \text{ e } j = 1, 2, ..., k$$

Em que: *CCT* é o custo do processo de colheita e transporte da cana de açúcar; $i = 1, 2, ..., n$ são os índices que representam as variedades, $j = 1, 2, ..., k$ são os índices que representam os talhões; *l* é número de talhões em que se considera o sistema mecanizado; $k - l$ é o número de talhões em que se considera o sistema semi-mecanizado; $C_{ij}^{M}$ é o custo da colheita e do transporte da cana de variedade $i$ plantada no talhão $j$ ($j = 1, \ldots, l$), no sistema mecanizado; $C_{ij}^{SM}$ é o custo da colheita e do transporte da cana de variedade $i$ plantada no talhão $j$ ($j = l+1, \ldots, k$), no sistema semi-mecanizado; $X_{ij}$ são as variáveis de decisão, tais que, $X_{ij} = 1$ implica que a cana de variedade $i$ deve ser plantada no talhão $j$ e em caso contrário $X_{ij} = 0$; $A_i$ é a estimativa de produção de sacarose da variedade $i$ *(t/ha)*; $\overline{P}$ é a quantidade mínima estabelecida para a POL da cana; $T$ é o número total de talhões; $F_i$ é a estimativa do teor de fibra da variedade $i$; $\overline{F_I}$ e $\overline{F_S}$ são as quantidades mínimas e máximas estabelecidas para a fibra da cana.

Com o intuito de utilizar mais variedades, inseriu-se ao modelo uma restrição que limita a quantidade que cada tipo de variedade pode ser plantada.

$$\sum_{j=1}^{k} X_{ij} \leq M \qquad (3.6)$$

Em que: $M$ é o número máximo que cada variedade $i$ pode ser plantada.

# 4 Resultados

Para a aplicação do método aos modelos investigados foram utilizados dados necessários das tabelas 1, 2 e 3, apresentadas por [8] e [9]. A tabela 1 apresenta a área e a distância dos talhões à usina. A tabela 2 apresenta os custos referentes ao processo de colheita. A tabela 3 apresenta os custos referentes ao processo de transporte. E por fim, a tabela 4 apresenta as estimativas por tipo de variedades, em que $A_i$ é a produtividade de açúcar fermentescível (POL) da variedade *i*, $F_i$ é a produtividade de fibra da variedade $i$ e $P_c$ é a produtividade da cana-de-açúcar da variedade $i$. A seguir, têm-se as tabelas 1, 2, 3 e 4:

**Tabela 1**: **Área e distância dos talhões até a usina**

| Dados dos Talhões | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Talhãoj | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Lj | 8,490 | 4,520 | 0,000 | 4,220 | 5,740 | 6,610 | 30,410 | 5,080 |
| Dj | 3,490 | 2,490 | 16,080 | 3,490 | 2,590 | 2,590 | 15,330 | 8,300 |
| Talhãoj | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| Lj | 12,010 | 54,950 | 0,000 | 3,780 | 10,430 | 6,150 | 8,790 | 57,790 |
| Dj | 9,240 | 12,630 | 16,430 | 8,250 | 7,800 | 8,590 | 2,250 | 17,200 |

**Tabela 2: Custos envolvidos no processo de colheita**

| Custos Colheita | |
|---|---|
| Operação | Custo |
| Aceiro | 0,14 |
| Queima | 0,17 |
| Corte | 7,03 |
| Corte cana crua | 10,5 |
| Carregamento | 1,62 |

**Tabela 3: Custos envolvidos no processo de transporte**

| Custos Transporte | |
|---|---|
| Transporte | Custo |
| Cana crua | 6,42 |
| Cana queimada | 5,35 |

**Tabela 4: Estimativas de valores por variedade**

| Dados das variedades | | | | |
|---|---|---|---|---|
| i | Variedade | Ai | Fi | Pc |
| 1 | SP80-1816 | 16,420 | 13,940 | 100,000 |
| 2 | RB72454 | 20,400 | 12,900 | 186,000 |
| 3 | SP80-3280 | 18,460 | 12,630 | 158,000 |
| 4 | SP81-3250 | 18,380 | 11,320 | 179,000 |
| 5 | RB855536 | 17,050 | 12,510 | 165,000 |
| 6 | RB855113 | 17,540 | 10,910 | 155,000 |
| 7 | SP79-1011 | 15,800 | 10,330 | 158,000 |
| 8 | RB835486 | 12,840 | 9,280 | 155,000 |
| 9 | RB711406 | 20,770 | 16,120 | 183,000 |
| 10 | SP70-1143 | 15,010 | 11,590 | 155,000 |

Através da implementação do algoritmo PDBB, visto na seção (1.1), no *software* Borland C++ Builder 6.0, pode-se obter as soluções ótimas do modelo apresentado na seção (2.1), e estes resultados foram comparados com aqueles obtidos pelo aplicativo *Solver* do *software* Excel, que para o caso específico a resolução de problemas lineares do tipo inteiro e binário, utiliza o método simplex, e com aqueles obtidos por [9], cuja obtenção de resultados é realizada a partir da utilização de algoritmos genéticos. Nas tabelas de 5 e 6 são apresentados os resultados reais e inteiros obtidos a partir da aplicação do algoritmo PDBB, proposto na seção 1.1. Estas representam os valores reais obtidos pelos passos de 1 a 9 do algoritmo PDBB, e indicam quais índices devem ser ramificados. Na coluna "Passo 10 Método PDBB" estão indicadas as variedades para plantio, encontrada pelo passo 10 do método. E ainda, a tabela 5 é referente ao modelo, apresentado em [9], e a tabela 6, é referente a este mesmo modelo, mas acrescentando neste, a nova restrição (3.6), apresentada na seção (3.1), em sua formulação. Foram definidos os talhões 3 e 11 para áreas semi-mecanizáveis, e os demais para as áreas mecanizáveis. A tabela 7 exibe a comparação entre os resultados obtidos por [9], pelo *Solver* e pelo algoritmo PDBB.

**Tabela 5: Resultados obtidos**

| Método PDBB - Resultados da minimização do custo da colheita da cana-de-açúcar | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Áreas mecanizáveis | | | | | | | | | | | |
| Talhão | Variedades | | | | | | | | | | Passo 10 Método PDBB |
| | SP80-1816 | RB72454 | SP80-3280 | SP81-3250 | RB855536 | RB855113 | SP79-1011 | RB835486 | RB711406 | SP70-1143 | Variedade a ser plantada |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 1 | 0,953298 | 0,003719 | 0,005728 | 0,004076 | 0,005043 | 0,006084 | 0,005729 | 0,006080 | 0,003862 | 0,006079 | 1(SP80-1816) |
| 2 | 0,914294 | 0,006971 | 0,010760 | 0,007646 | 0,009468 | 0,011432 | 0,010762 | 0,011418 | 0,007237 | 0,009710 | 1(SP80-1816) |
| 4 | 0,918444 | 0,000229 | 0,011792 | 0,007508 | 0,009755 | 0,011555 | 0,010514 | 0,010634 | 0,007529 | 0,011737 | 1(SP80-1816) |
| 5 | 0,931309 | 0,005482 | 0,008443 | 0,006009 | 0,007434 | 0,008968 | 0,008445 | 0,008959 | 0,005691 | 0,008956 | 1(SP80-1816) |
| 6 | 0,939954 | 0,004784 | 0,007378 | 0,005245 | 0,006493 | 0,007837 | 0,007379 | 0,007831 | 0,004967 | 0,007829 | 1(SP80-1816) |
| 7 | 0,986698 | 0,001087 | 0,001586 | 0,001173 | 0,001412 | 0,001678 | 0,001586 | 0,001677 | 0,001122 | 0,001677 | 1(SP80-1816) |
| 8 | 0,922552 | 0,006184 | 0,009525 | 0,006779 | 0,008386 | 0,010117 | 0,009527 | 0,010106 | 0,006419 | 0,010102 | 1(SP80-1816) |
| 9 | 0,966958 | 0,002640 | 0,004035 | 0,002887 | 0,003559 | 0,004282 | 0,004035 | 0,004281 | 0,002739 | 0,004279 | 1(SP80-1816) |
| 10 | 0,991983 | 0,000684 | 0,000925 | 0,000722 | 0,000836 | 0,000974 | 0,000925 | 0,000974 | 0,000699 | 0,000974 | 1(SP80-1816) |
| 12 | 0,894922 | 0,008375 | 0,012947 | 0,009189 | 0,011387 | 0,013759 | 0,012950 | 0,013740 | 0,008693 | 0,013733 | 1(SP80-1816) |
| 13 | 0,962241 | 0,003015 | 0,004619 | 0,003299 | 0,004072 | 0,004903 | 0,004619 | 0,004901 | 0,003128 | 0,004899 | 1(SP80-1816) |
| 14 | 0,935684 | 0,005129 | 0,007904 | 0,005622 | 0,006958 | 0,008396 | 0,007905 | 0,008388 | 0,005325 | 0,008385 | 1(SP80-1816) |
| 15 | 0,954965 | 0,003588 | 0,005522 | 0,005622 | 0,004862 | 0,005864 | 0,005522 | 0,005860 | 0,003725 | 0,005859 | 1(SP80-1816) |
| 16 | 0,993012 | 0,000619 | 0,000791 | 0,000646 | 0,000726 | 0,000827 | 0,000791 | 0,000827 | 0,000630 | 0,000827 | 1(SP80-1816) |
| Áreas semi-mecanizáveis | | | | | | | | | | | |
| Talhão | Variedades | | | | | | | | | | Passo 10 Método PDBB |
| | SP80-1816 | RB72454 | SP80-3280 | SP81-3250 | RB855536 | RB855113 | SP79-1011 | RB835486 | RB711406 | SP70-1143 | Variedade a ser plantada |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 3 | 0,997936 | 2,321E-5 | 0,000189 | 3,267E-5 | 7,024E-5 | 0,000403 | 0,000189 | 0,000411 | 2,690E-5 | 0,000416 | 1(SP80-1816) |
| 11 | 0,987319 | 0,001041 | 0,001508 | 0,001121 | 0,001345 | 0,001594 | 0,001508 | 0,001594 | 0,001073 | 0,001594 | 1(SP80-1816) |

Temos que o valor da função objetivo encontrada pelo método PDBB obtidos pelos passos de 1 a 9, em 11 iterações, é de aproximadamente R$345.586,34688. A partir da tabela 5, nenhuma ramificação deverá ser feita, visto que sem a integralização do método pelo passo 10, os valores apresentados na primeira coluna em destaque, são valores acima de 0,85. Pela coluna "Passo10 Método PDBB", é possível notar que o método PDBB integralizou os resultados pelo passo 10, determinando a plantação da variedade 1-SP80-1816 em todos os talhões e obteve uma melhoria no custo da minimização da colheita que passou a ser: R$341.654,54718.

**Tabela 6: Resultados obtidos**

| Método PDBB - Resultados da minimização do custo da colheita da cana-de-açúcar | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Áreas mecanizáveis | | | | | | | | | | | |
| Talhão | Variedades | | | | | | | | | | Passo 10 Método PDBB |
| | SP80-1816 | RB72454 | SP80-3280 | SP81-3250 | RB855536 | RB855113 | SP79-1011 | RB835486 | RB711406 | SP70-1143 | Variedade a ser plantada |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 1 | 0,004818 | 0,036716 | 0,157798 | 0,046060 | 0,094411 | 0,158676 | 0,153034 | 0,152901 | 0,040547 | 0,155037 | 10(SP70-1143) |
| 2 | 0,004876 | 0,062921 | 0,120656 | 0,076517 | 0,132035 | 0,146579 | 0,115501 | 0,141568 | 0,069123 | 0,130224 | 3 (SP80-3280) |
| 4 | 0,004875 | 0,001019 | 0,001552 | 0,070596 | 0,138900 | 0,195352 | 0,158443 | 0,160072 | 0,072716 | 0,196475 | 3 (SP80-3280) |
| 5 | 0,004901 | 0,050955 | 0,137786 | 0,062631 | 0,114928 | 0,148884 | 0,132979 | 0,144459 | 0,056036 | 0,146442 | 8 (RB835486) |
| 6 | 0,004902 | 0,045452 | 0,146318 | 0,056339 | 0,108141 | 0,151706 | 0,141432 | 0,146811 | 0,050075 | 0,148825 | 8 (RB835486) |
| 7 | 0,011555 | 0,010952 | 0,096042 | 0,014068 | 0,032845 | 0,247742 | 0,094982 | 0,237151 | 0,012130 | 0,242533 | 10(SP70-1143) |
| 8 | 0,004889 | 0,056022 | 0,129975 | 0,068283 | 0,119960 | 0,146736 | 0,125292 | 0,142695 | 0,061492 | 0,144656 | 7 (SP79-1011) |
| 9 | 0,004073 | 0,026822 | 0,159250 | 0,034027 | 0,074270 | 0,176097 | 0,155326 | 0,168940 | 0,029675 | 0,171521 | 6 (RB855113) |
| 10 | 0,953917 | 0,003423 | 0,005879 | 0,003875 | 0,005143 | 0,006095 | 0,005872 | 0,006093 | 0,003607 | 0,006097 | 1(SP80-1816) |
| 12 | 0,004843 | 0,069143 | 0,111951 | 0,082216 | 0,127888 | 0,141811 | 0,107673 | 0,138572 | 0,075438 | 0,140465 | 3 (SP80-3280 |
| 13 | 0,004542 | 0,030543 | 0,161164 | 0,038598 | 0,082434 | 0,167627 | 0,156807 | 0,161079 | 0,03377 | 0,163434 | 6 (RB855113) |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 0,004904 | 0,048215 | 0,142065 | 0,059517 | 0,111723 | 0,150200 | 0,137209 | 0,145549 | 0,053072 | 0,147545 | 6 (RB855113) |
| 15 | 0,004791 | 0,035611 | 0,158820 | 0,044735 | 0,092405 | 0,159947 | 0,154105 | 0,154044 | 0,039336 | 0,156207 | 8 (RB835486) |
| 16 | 0,956247 | 0,003183 | 0,005577 | 0,003598 | 0,004792 | 0,005893 | 0,005572 | 0,005892 | 0,003352 | 0,005895 | 1(SP80-1816) |
| Áreas semi-mecanizáveis | | | | | | | | | | | |
| Talhão | Variedades | | | | | | | | | | Passo 10 Método PDBB |
| | SP80-1816 | RB72454 | SP80-3280 | SP81-3250 | RB855536 | RB855113 | SP79-1011 | RB835486 | RB711406 | SP70-1143 | Variedade a ser plantada |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 3 | 0,953044 | 0,003965 | 0,005989 | 0,004490 | 0,005804 | 0,005519 | 0,005979 | 0,005512 | 0,004181 | 0,0055172 | 1(SP80-1816) |
| 11 | 0,068161 | 0,010089 | 0,088249 | 0,012958 | 0,030225 | 0,236129 | 0,087362 | 0,225880 | 0,011171 | 0,229776 | 10(SP70-1143) |

Para o modelo com restrição de plantio de variedade, o valor da função objetivo encontrada pelo método PDBB obtidos pelos passos de 1 a 9, em 21 iterações, é de aproximadamente R$431.395,40287. De acordo com a tabela 6, o método PDBB nos passos de 1 a 9 determinou diretamente apenas a plantação da variedade 1 em 3 talhões (3, 10 e 16), e para a determinação do plantio nos demais talhões, foi necessária a ramificação através do passo 10 do método PDBB para a integralização dos resultados.

Assim, a partir da solução real encontrada, realizou-se o passo 10 do método PDBB, que após 9 iterações, integralizou os resultados e determinou o plantio da variedade 1-SP80-1816  para os talhões 3, 10 e 16, da variedade 3 – SP80-32801 nos talhões 2, 4 e 12, da variedade 6 – RB855113 nos talhões 9, 13 e 14, da variedade 7 – SP79-1011 no talhão 8, da variedade 8 – RB835486 nos talhões 5, 6 e 15, e da variedade 10 – SP70-1143 nos talhões 1, 7, e 11, que são apresentados na coluna “Passo 10 Método PDBB”. Neste caso, também houve uma melhoria no custo da minimização da colheita que passou a ser: R$ 422.584,03702.

Note que o valor da função objetivo deste problema comparada à tabela 5, aumentou cerca de R$85.809,05, devido à restrição do número de variedades para o plantio nos talhões. Isso também justifica o aumento de iterações para os passos de 1 a 9 do método PDBB.

A tabela 7 a seguir, estão os valores ótimos das funções objetivo encontrados, cuja linha “AG” corresponde ao melhor resultado obtido por [9], a partir da utilização de algoritmos genéticos para a obtenção de resultados, a linha “Solver” corresponde ao resultados obtidos pelo programa citado, que utiliza o método simplex e a linha “PDBB” correspondem aos resultados obtidos através da implementação em C++ do procedimento híbrido envolvendo o algoritmo previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* (PDBB).

**Tabela 7: Comparação de resultados**

| Valores da função objetivo (R$) | | |
|---|---|---|
| Procedimento | Modelo sem restrição de variedades | Modelo com restrição de variedades |
| AG | 472.305,59 | ----------- |
| Solver | 341.654,547178 | 422.584,0370180 |
| PDBB | 341.654,547184 | 422.584,0370179 |

Nesta tabela, é possível notar que os resultados obtidos pelos procedimentos Solver e PDBB se diferenciam apenas a partir da quinta ou sexta casa decimal, e são considerados melhores que aqueles obtidos pelo procedimento AG, cujo valor da função objetivo sem a restrição adicional, que limita o plantio de variedades nos talhões, é superior aos resultados obtidos pelos demais procedimentos quando consideram esta restrição.

# 5 Considerações Finais

Neste trabalho fez-se uma aplicação de um procedimento híbrido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* no modelo de minimização do custo da colheita da cana-de-açúcar, que considera áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis, apresentado por [9]. Explorou-se uma nova restrição na formulação do modelo, que incluía a restrição de quantidades de variedades destinadas ao plantio.

Os resultados obtidos mostram a eficiência do algoritmo PDBB implementado no software Borland C++ Builder 6.0, quando comparado àqueles obtidos pelo aplicativo Solver do *software* Excel, que utiliza o método simplex, bem como àqueles apresentados em [9], que utilizou algoritmos genéticos para a resolução do modelo apresentado na seção 3.1. Além disso, estes incentivam a utilização destes métodos para outros modelos.

## 5.1 Trabalhos Futuros

O trabalho proposto e em desenvolvimento encontra-se em fase intermediária de execução. Como proposta futura, pretende-se investigar o procedimento híbrido aplicado ao modelo de maximização de energia envolvido no processo de aproveitamento da biomassa residual da cana-de-açúcar.

# 6 Agradecimentos

Agradecemos à CAPES pela Bolsa de Mestrado.

# Referências Bibliográficas

[1] BAZARAA, Mokhtar. S. and SHETTY, C. *“Nonlinear Programming: Theory and Algorithms”*. John-Willey & Sons, Inc., (1979).

[2] BORCHES, Brian and MITCHELL, John E. *Using an interior point method in a branch and bound algorithm for integer programming*. Technical Report 195, Mathematical Sciences, Resselaer Polytechnic Institute, Troy, NY 12180, March 1991, Revised July 7, (1992).

[3] FLORENTINO, Helenice Oliveira. *Programação linear inteira em problemas de aproveitamento da biomassa residual de colheita da cana-de-açúcar*. 64f. Tese (Livre Docência) – Instituto de Biociências de Botucatu – Universidade Estadual Paulista, Botucatu, SP, (2006).

[4] GRANVILLE, S., *Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods.*IEEE Transactions on Power Systems, v.9, p.136-146, 1994.

[5] HOMEM, Thiago Pedro Donadon. *Procedimento híbrido envolvendo os métodos Primal-Dual de Pontos Interiores e Branch-and-Bound em problemas multiobjetivo de aproveitamento de resíduos de cana-de-açúcar*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia – Universidade Estadual Paulista. Bauru, (2010).

[6] HOMEM, Thiago Pedro Donadon, BALBO, Antonio Roberto and FLORENTINO, Helenice Oliveira. *Optimal energy generation with biomass of sugarcane harvest*. Revista IEEE América Latina, v.1, p. 653-658, (2011).

[7] PELLEGRINI, Maria Cristina. *Inserção de centrais cogeradoras a bagaço de cana no parque energético do Estado de São Paulo: exemplo de aplicação de metodologia para análise dos aspectos locacionais e de integração energética.* Dissertação (Mestrado em Energia) – Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, (2002).

[8] RAMOS, Rômulo Pimentel. *Modelo matemático para custo e energia na produção de açúcar e álcool.* Dissertação (Mestrado em Agronomia/Energia na Agricultura) – Faculdade de Ciências Agronômicas – Universidade Estadual Paulista. Botucatu, (2010).

[9] SILVA, Leandro M. *Algoritmo Genético na Otimização do Custo de Colheita e de Transporte da Cana-de-Açúcar.* Dissertação (Mestrado em Biometria) – Faculdade de Ciências Agronômicas – Universidade Estadual Paulista. Botucatu, (2011).

[10] SOUZA, M. A. S., *Investigação e aplicação de métodos primal - dual de pontos interiores em problemas de despacho econômico e ambiental.* Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia – Universidade Estadual Paulista. Bauru, (2010).

[11] TOLENTINO, Gilmar. *Programação Linear Inteira Aplicada ao Aproveitamento do Palhiço da Cana-de-Açúcar.* Dissertação (Mestrado em Agronomia/Energia na Agricultura) – Faculdade de Ciências Agronômicas – Universidade Estadual Paulista, Botucatu, SP, (2007).