



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.002/16

A eletrodinâmica escalar generalizada de Duffin-Kemmer-Petiau, uma análise funcional de sua dinâmica quântica covariante e o equilíbrio termodinâmico.

Anderson Antunes Nogueira

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Fevereiro de 2016

Agradecimentos

- Primeiramente agradeço a meus familiares, pais José Alysson e Dirce, minha querida avó Maria Auxiliadora pelo valor atribuído ao estudo e principalmente a minha madrinha, a artista plástica Belkiss Nogueira pela ajuda nesta jornada corajosa pelo conhecimento.
- A linda Daniele Borba “fro” pelo apoio nesse término de jornada.
- Aos colegas e membros do IFT pelos anos de convivência.
- As pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.
- Ao Dr. F. A. Barone pelos trabalhos, pelo “pontapé” inicial dado ao estudo da linguagem de integração funcional no formalismo quântico das integrais de trajetória e pelas discussões das flutuações quânticas do vácuo (Efeito Casimir).
- Ao professor B. M. Pimentel, pelos cafés, conselhos, frutífera orientação e pelas divertidas discussões sobre física. A oportunidade de ser seu aluno me enriqueceu tanto em física, estendendo minha análise e conhecimento em Teoria de Campos quânticos e em equilíbrio, quanto na vida. Espero que o futuro nos reserve interessantes trabalhos em colaboração.
- A CAPES pelo apoio financeiro.
- Em especial, homenageio Schwinger por seu princípio variacional quântico e análise de Green utilizando fontes, Fradkin pela extensão do método de Schwinger para temperatura finita a la Matsubara e a Tyutin por seus estudos envolvendo a simetria BRST. Posteriormente eu reverencio esses senhores por suas realizações na física e comprometimento, lembrando Newton que diz “me apoiei em ombros de gigantes”.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo explorar a dinâmica quântica de interação entre partículas escalares e vetoriais e estudar o equilíbrio termodinâmico dessas partículas no ensemble gran-canônico. A dinâmica de interação, escrita em uma linguagem covariante entre o campo de matéria (escalar) e o campo intermediador de interação (vetorial), apresenta uma simetria de calibre local, $U(1)$ no caso quântico e $SO(4)$ no equilíbrio termodinâmico. Sendo assim dividimos o trabalho em dois setores. No primeiro setor analisamos sistematicamente a interação quântica entre partículas escalares (mésons) e partículas vetoriais (fótons) no contexto da eletrodinâmica quântica escalar generalizada de Duffin-Kemmer-Petiau ($GSDKP_4$). Para isso quantizamos a teoria, utilizando uma abordagem funcional. Construímos a estrutura Hamiltoniana do sistema seguindo a metodologia de Dirac, o procedimento de Faddeev-Senjanovic para obter a amplitude de transição no calibre de Coulomb generalizado e o método de Faddeev-Popov-DeWitt para escrever a amplitude de transição anterior de maneira covariante na condição de calibre *no-mixing*. Daí, escrevendo o funcional gerador via Schwinger, as equações de Schwinger-Dyson (SD) e as identidades de Ward-Takahashi (WT) são obtidas. Como introdução à análise das correções radiativas, fizemos um cálculo quantitativo para ver os tipos de divergências superficiais (ultravioleta) que poderiam aparecer na teoria. Depois apresentamos um cálculo explícito das primeiras correções radiativas (1-laço) associadas ao propagador do fóton, propagador do méson, vértice e, estudamos a função de 4 pontos (fóton-fóton) utilizando o método de regularização dimensional, em que a simetria de calibre é manifesta. Como veremos, uma consequência do estudo é que a álgebra de DKP assegura o funcionamento das identidades de WT nas primeiras correções radiativas proibindo certas divergências no ultravioleta. Com o conhecimento das divergências no ultravioleta (UV) e no infravermelho (IV) abordadas nas correções radiativas, estabelecemos o Programa de Renormalização multiplicativo para esta teoria na camada de massa. O fato do propagador do campo escalar possuir uma nova estrutura divergente na massa de Podolsky nos levou a analisar as correções radiativas a 2-laços. Do propagador do fóton definimos o tensor de polarização e com este, de maneira fenomenológica, analisando o comportamento assintótico das funções de Green para altos momentos, abordamos a dependência da constante de estrutura com a escala de energia. No segundo setor estudamos o Formalismo de Matsubara-Fradkin (MF) para descrever campos em equilíbrio

termodinâmico. Para isso foi necessário construir as equações em equilíbrio termodinâmico que descrevessem o setor escalar e vetorial e a posteriori extrair a função de partição. Ao construir o setor vetorial, percebemos o surgimento e a importância dos campos fantasmas e sua conexão com a simetria de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST). No caso da escolha de calibre covariante *no-mixing*, foi necessário contornar o surgimento de uma estrutura pseudo-diferencial. Analisando a função de partição associada aos fótons livres de Podolsky via método dos parâmetros fictícios, percebemos o fato da simetria BRST assegurar que a função de partição não depende das escolhas covariantes ao fixarmos o calibre. As condições de Lorenz, *no-mixing* e Lorenz generalizado são amarradas pela simetria BRST e esse fato está contido em uma afirmação geral em teorias de calibre a temperatura finita, atribuída ao trabalho de Tyutin, de que a física não depende das escolhas de calibre, covariantes ou não, devido a simetria BRST. Por fim, com a função de partição em mãos, construímos as equações de Schwinger-Dyson-Fradkin (SDF) e as identidades de Ward-Takahashi-Fradkin (WTF) em equilíbrio termodinâmico.

Palavras Chaves: Quantização funcional; Sistemas com Vínculos; Formalismo de Matsubara-Fradkin

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos

Abstract

This work has as aim to explore the quantum dynamics of interaction between scalar and vectorial particles and to study the thermodynamic equilibrium of these particles in the gran-canonical ensemble. The dynamics of interaction, written in a covariance language, between the matter field (scalar) and the field that intermediate the interaction (vectorial) exhibit a local gauge symmetry, $U(1)$ in a quantum case and $SO(4)$ in a thermodynamic equilibrium. Therefore we divided the work into two sections. In the first section we analyze systematically the quantum interaction between the scalar particles (mesons) and vectorial particles (photons) in the context of the generalized scalar Duffin-Kemmer-Petiau quantum electrodynamics (GSDKP₄). For this we use the functional approach to quantize the theory. We built the hamiltonian structure by the Dirac methodology, utilize the Faddeev-Senjanovic procedure to obtain the transition amplitude in the generalized Coulomb gauge and the Faadeev-Popov-DeWitt method to write the covariant form of the previously amplitude in the *no-mixing* gauge condition. Then writing the functional generator by Schwinger, the Schwinger-Dyson (SD) equations and the Ward-Takahashi (WT) identities are obtained. As an introductory analysis to the first radiative corrections we make a quantitative calculus to see the types of ultraviolet (UV) superficial divergences that appear in the theory. After this we show an explicit calculation of the first radiative corrections (1-loop) associated with the photon propagator, meson propagator, vertex and the 4 point function (photon-photon) utilizing the dimensional regularization method, where the gauge symmetry is manifest. As we will see one of the consequences of the study is that the DKP algebra ensures the functioning of the WT identities in the first radiative corrections prohibiting certain UV divergences. With the knowledge of the UV divergences and de infrared (IR) addressed in the radiative corrections we established the multiplicative renormalization procedure to this theory in the mass shell. The fact that the meson propagator has a new divergence structure in terms of the Podolsky mass took us to analyze the radiative correction at 2-loops. With the photon propagator we define the polarization tensor and in a phenomenological manner, analyzing the asymptotic behavior of Green's functions for higher momentum, we derive the dependence of the structure constant by the scale of energy. In the second section we study the Matsubara-Fradkin (MF) formalism to describe fields in thermodynamical equilibrium. For this it was necessary to construct the equations in thermodynamic equilibrium that describe the

scalar sector and vectorial sector and then extract the partition function. When we construct the vectorial sector we realize the emergence and the importance of the ghost fields and their connection to the Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST) symmetry. In the case of the *no-mixing* gauge condition was necessary to contour a pseudo-differential structure. Analyzing the free partition function associated with the free Podolsky photons by the method of fictitious parameters we realize that the BRST symmetry ensures that it does not depend of the covariant choices when we fix de gauge. The Lorenz condition, *no-mixing* and generalized Lorenz are tied by the BRST symmetry and this fact is contained in a general statement in gauge theories at finite temperature, assigned by Tyutin work, that the physics doesn't depend of the gauge choices, covariant or not, due to BRST symmetry. Lastly, with the partition function in hands, we construct the Schwinger-Dyson-Fradkin (SDF) and the Ward-Takahashi-Fradkin (WTF) in thermodynamic equilibrium.

Keywords: Functional quantization; Constrained systems; Matsubara-Fradkin formalism

Knowledge field: Field Theory

Uma breve reflexão

Em uma das minhas idas e vindas à cidade mineira de Passa Quatro, ao ler *A Coragem de Criar* de Rollo May, uma observação sobre as estátuas inacabadas de Michelangelo me chamou atenção, os escravos retorcidos que tentam livrar-se da prisão de pedra nas estátuas inacabadas de Michelangelo representam o símbolo perfeito da condição humana, estamos presos na finitude da vida mas nos tornamos imortais no ato criativo. A luta dos homens para alcançar os deuses, o ilimitado, o perfeito. Esta mesma situação leva-me a deparar com Decartes e com fato de sermos finitos nos levar ao conceito de perfeição Deus (infinito). Mais ainda chego na caverna de Platão onde me deparo com um mundo perfeito visto por suas sombras. O mesmo conceito pode ser visto em física no sentido das teorias que utilizamos para descrever os fenômenos naturais de maneira eficaz (estruturas numéricas fenomenológicas advindas das medidas experimentais, muitas vezes sem o rigor matemático pleno) são efetivas, o limite de baixas energias juntamente com seus graus de liberdade e interações pode ser descrito como uma visão efetiva de uma desconhecida teoria de tudo (altas energias) em que unificamos as leis da física (pensamentos iluministas): metafóricamente, com uma pitada de irônia, as portas dos céus estão abertas (o segredo do início do universo) e os anjos nos esperam com suas trombetas juntamente com o arquiteto desse grande design inteligente (Comparando as estátuas inacabadas de Michelangelo com a linguagem que descrevemos a física hoje em dia, Teoria Quântica de Campos efetivas, qual seria o potencial ou teoria que está por vir? A última verdade seria escrita nos moldes de uma linguagem matemática? Mesmo em matemática vemos limitações nos sistemas axiomáticos e estruturas lógicas devido aos teoremas da incompletude de Kurt Gödel.). A idéia de força (dinâmica) atribuído por Newton na descrição do movimento dos planetas dado pelas leis de Kepler foi visto metafisicamente como anjos (força) acompanhando os planetas. Como vemos, janelas distintas imanando a mesma coisa artes, filosofia, crenças, física, matemática etc. Imanência, Espinoza! O mar do desconhecido (ignorância) é imensurável e os ventos epistemológicos que iluminam nem sempre sopram a nosso favor no ato de construir o conhecimento, é necessário coragem para se aventurar.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	A Eletrodinâmica Quântica Escalar Generalizada de Duffin-Kemmer-Petiau	6
2.1	Análise de vínculos e Quantização Funcional	6
2.2	As equações de Schwinger-Dyson	27
2.2.1	O Propagador do campo vetorial	27
2.2.2	O propagador do campo escalar	33
2.2.3	A função de vértice	37
2.3	As identidades de Ward-Takahashi	42
2.4	Divergências Superficiais	48
2.5	Correções Radiativas	50
2.5.1	A auto-energia do méson	50
2.5.2	O tensor de polarização do fóton	55
2.5.3	O vértice	58
2.6	Espalhamento fóton-fóton	63
2.7	O programa de Renormalização	66
2.8	A auto-energia do fóton e o vértice a 2-laços	72
2.9	O acoplamento efetivo em $GSDKP_4$	77
3	A Eletrodinâmica Quântica Escalar Generalizada de Duffin-Kemmer-Petiau em Equilíbrio Termodinâmico	79
3.1	O setor da matéria (escalar)	79
3.2	O setor da radiação (vetorial)	82
3.3	O setor Fantasma	86
3.4	Um estudo no calibre <i>no-mixing</i>	98
3.5	Representação de Integração Funcional e Médias no ensemble	101
3.6	As equações de Schwinger-Dyson-Fradkin	107
3.7	As Identidades de Takahashi-Fradkin	109
3.8	As Identidades de Ward-Fradkin	110
4	Conclusões e perspectivas futuras	113
5	Apêndices	119
5.1	Quantização de sistemas com vínculos e formalismos covariantes.	119
5.1.1	Dinâmica (clássica\quântica) de sistemas com vínculos	119
5.2	O princípio de Ação Quântica e o formalismo funcional	131
5.3	Equações de Podolsky	136
5.4	A equação de DKP	140
5.5	Os graus de liberdade físicos e sua conexão com os vínculos em $GSDKP_4$	143
5.6	O método de Faddeev-Popov-DeWitt	145
5.7	Multiplicadores de Lagrange e o setor fantasma à temperatura finita	148
5.8	A simetria BRST em QED_4 e os parâmetros fictícios	149
5.9	A simetria BRST em $GQED_4$ a temperatura finita	154

5.9.1	Escolha covariante geral na fixação de calibre	154
5.9.2	A função de partição	155
5.9.3	A simetria BRST	158
5.10	Observações matemáticas	160

1 Introdução

Uma das maneiras mais interessantes de se estudar as interações na natureza é utilizando como ferramenta teórica a Teoria Quântica de Campos. Como exemplo, descrevemos o fenômeno eletromagnético precisamente com eletrodinâmica quântica (QED₄), unificamos o eletromagnetismo com a interação fraca no contexto da teoria eletrofraca de Glashow-Weinberg-Salam [1], prevemos o comportamento das partículas devido a interação forte via cromodinâmica quântica (QCD₄), e assim por diante. Deste ponto de vista, a síntese das forças (eletromagnética, fraca e forte) em uma teoria (Modelo Padrão) aparece, e um novo conceito emerge; as teorias que utilizamos para descrever a natureza são efetivas no sentido de depender das escala de energia. O limite de "baixas energias" pode ser descrito como uma visão efetiva de uma desconhecida "Teoria de Tudo". Em uma linguagem científica um problema físico envolve escalas de energias separadas; a dinâmica de baixas energias e as interações de altas energias. Podemos descrever a física de baixas energias efetivamente utilizando os graus de liberdades e as interações apropriadas para essa escala. Essas ideias foram inicialmente propostas por Weinberg [2].

Quando Ostrogradski construiu teorias lagrangianas com derivadas de ordem superior em mecânica clássica, um novo campo de pesquisa foi aberto [3]. A idéia principal desse ramo de teorias com derivada de ordem superior é muito simples, nós construímos termos de ordem superior adicionais de tal maneira que preservem as simetrias originais do problema. Como podemos ver, por exemplo, na generalização do trabalho do Utiyama [4, 5]. Teorias com derivada de ordem superior às vezes possuem Hamiltonianas que não possuem um limite inferior [6] devido aos estados com normas negativas (fantasmas), levando à quebra da unitariedade [7]. Tentativas de restaurar a unitariedade contornando o aparecimento dos fantasmas não levaram a um método geral de como lidar com o problema da quebra de unitariedade [8, 9], porém, recentemente, foi construído um método de como implementar termos com derivadas de ordem superior sem quebrar a estabilidade da teoria, podendo-se então, construir teorias efetivas [10]. A idéia de implementar termos com derivada de ordem superior aparenta ter sucesso na gravitação quântica, em que a ação de Einstein-Hilbert (não-renormalizável) é modificada com a adição de termos com derivada de ordem superior na curvatura de tal forma que seja renormalizável [11].

Um dos que mais contribuíram para mostrar o carácter efetivo das teorias com derivada de ordem superior foram Bopp, Podolsky e Schwed [12]. Eles propuseram uma eletrodinâmica generalizada com o intuito de contornar os infinitos da eletrodinâmica de Maxwell, tais como, a auto-energia da carga elétrica e a polarização de vácuo. Na generalização adicionamos à lagrangiana de Maxwell (radiação) um termo com derivadas de ordem superior preservando a simetria de calibre

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\left(1 + \frac{\square}{m_p^2}\right)F^{\mu\nu}$$

porém esse novo termo quebra a simetria dual, explorada por Dirac no estudo dos monopolos magnéticos. Como resultado, as expressões dessa nova lagrangiana apresentam um parâmetro que pode ser interpretado como o inverso de uma massa, a massa de Podolsky m_p . A modificação nos dá a expressão correta no estudo das auto-forças entre as partículas carregadas demonstrada por Frenkel [13, 14], efeitos interessantes produzidos pela presença de fontes externas estacionárias [15] e, também, podemos ver na literatura estudos associados a condições de contorno (Efeito Casimir) [25, 26]. O fato da teoria ser finita do ponto de vista da eletrodinâmica clássica reflete da mesma forma na

descrição quântica, a teoria tem a qualidade de controlar as divergências no ultravioleta [16, 17] da mesma forma que o esquema de regularização de Pauli-Villars-Rayski [18]. A lagrangiana que descreve a dinâmica de interação entre a matéria (férmions, spin 1/2) e a radiação (bósons, spin 1) no contexto da eletrodinâmica quântica generalizada ($GQED_4$) é dada por

$$\mathcal{L}_{GQED_4} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(1 + \frac{\square}{m_p^2})F^{\mu\nu}$$

$$\nabla_\mu = (\partial_\mu - ieA_\mu)$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \quad (\text{álgebra de Clifford}).$$

A dinâmica associada a $GQED_4$ é estável do ponto de vista clássico\quântico podendo classificá-la no patamar de uma teoria efetiva. Um comentário importante sobre como fixar os graus de liberdade físicos de maneira covariante deve ser feito, embora inicialmente Podolsky tenha utilizado a condição de Lorenz

$$\Omega[A] = \partial^\mu A_\mu$$

para fixar os graus de liberdade físicos na eletrodinâmica generalizada, depois um estudo rigoroso em análise de vínculos demonstrou que isto não é completamente verdadeiro [19], pois temos uma liberdade residual e essa escolha não é atingível do ponto de vista clássico. Como consequência, a maneira natural de fixar os graus de liberdade físicos passou a ser com a condição de Lorenz generalizada

$$\Omega[A] = (1 + \frac{\square}{m_p^2})\partial^\mu A_\mu$$

atingível, porém essa condição aumenta a ordem das derivadas na lagrangiana (6º ordem nas derivadas).

Por outro lado, atualmente acreditamos que a condição que combina perfeitamente com a teoria de Podolsky é a condição de calibre *no-mixing* [20, 21, 22]

$$\Omega[A] = \left(1 + \frac{\square}{m_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \partial^\mu A_\mu$$

apesar de apresentar uma estrutura pseudo-diferencial essa condição matém a ordem na lagrangiana (4º ordem nas derivadas), facilitando o cálculo de resultados físicos. Existem consequências ao se utilizar as condições de calibre associadas a divergências no UV. Por exemplo, a condição de Lorenz gera certas divergências no UV associadas as correções radiativas do propagador do férmion e correções radiativas do vértice em $GQED_4$ que no caso não aparecem ao utilizar a condição de Lorenz generalizada ou *no-mixing*. Dizemos, então, que a dinâmica covariante na condição de Lorenz gera divergências no ultravioleta. Agora, no caso livre, a simetria BRST garante que as 3 escolhas (Lorenz, *No-mixing*, Lorenz generalizado) descrevam a mesma física pois o funcional gerador ou função de partição não depende das escolhas de calibre covariantes propostas.

Sabemos que QED_4 é uma das teorias mais bem sucedidas da física. Apesar disso, existem pesquisas sobre extensões do estudo da simetria de calibre $U(1)$, não apenas extensões onde as equações são lineares como no caso de $GQED_4$ e na teoria de Lee-Wick [23], mas também extensões em que temos equações não-lineares, como nas lagrangianas de Born-Infeld e Euler-Heisenberg [24].

Até o presente momento apresentamos a maneira como a eletrodinâmica generalizada é abordada na literatura com a matéria sendo descrita por campos espinoriais e a radiação por campos vetoriais, mas sabemos que campos escalares também podem descrever a matéria, utilizando uma eletrodinâmica quântica escalar generalizada ($GSQED_4$) [27]

$$\mathcal{L}_{GSQED_4} = (\nabla^\mu \varphi)^\dagger (\nabla_\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \left(1 + \frac{\square}{m_p^2}\right) F^{\mu\nu}$$

onde o setor escalar é descrito pelo campo de Klein-Gordon-Fock (KGF). Por outro lado, é de nosso conhecimento que podemos representar o comportamento da matéria com campos escalares de um ponto de vista fenomenológico diferente, utilizando a teoria de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) para descrever o campo de matéria [28].

A equação de DKP é uma equação de onda relativística de primeira ordem que descreve bósons de spin 0 e de spin 1, similar à equação de Dirac. O desenvolvimento da teoria de um ponto de vista histórico anterior à década de 70 pode ser encontrado em [29]. Devido a não existência de uma revisão recente sobre o assunto, vamos falar um pouco mais sobre o mesmo.

Fundamentado no experimento de Imbert [30], o qual sugeria uma forte contradição clássica e quântica ao descrever deslocamentos longitudinais das ondas planas, de Broglie percebeu que impondo uma massa não nula para os fótons teríamos a interpretação correta para o fenômeno [31]. De fato, de Broglie também sugeriu que o fóton poderia ser formado por uma combinação de 2 léptons e essa combinação seria responsável para dar massa ao fóton,

$$1/2 \otimes 1/2 = 0 \oplus 1.$$

Tomado por essa idéia e com um profundo conhecimento sobre a estrutura algébrica da equação de Dirac (equação relativística para partículas de spin 1/2), de Broglie começou sua pesquisa com a esperança de obter uma equação para sua partícula massiva de spin 1, seu fóton massivo [32]. Agora o desenvolvimento teórico desta teoria se inicia com Petiau, que obtém uma álgebra de DKP matricial [33],

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\theta + \beta^\theta \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu \eta^{\nu\theta} + \beta^\theta \eta^{\nu\mu}.$$

Na verdade, Géhéniau decompõe a álgebra de Petiau em representações irredutíveis de 10 dimensões (representando partículas de spin 1), 5 dimensões (representando partículas escalares) e uma trivial sem significado físico [34]

$$4 \otimes 4 = 10 \oplus 5 \oplus 1.$$

Simultaneamente e completamente alheio ao trabalho de Petiau, Kemmer escreveu as equações de segunda ordem de Proca como equações de primeira ordem e fez o mesmo para as equações de Klein-Gordon-Fock (KGF). A partir de então, Kemmer conjectura sobre a existência de uma forma matricial para seu sistema de equações [35]. Duffin desenvolve a álgebra para teoria de Kemmer [36] e advindo deste episódio segue o grande trabalho de Kemmer [37].

O formalismo de DKP nos permite trabalhar de maneira unificada com o campo escalar e vetorial e a vasta possibilidade de acoplamentos, devido ao estudo dos covariantes bilineares incapazes de serem expressos pela teoria de KGF e Proca, incentivou o estudo da teoria [38, 39, 40, 41, 42] em que percebemos uma grande possibilidade fenomenológica em descrever interações. Entretanto, a "equivalência" entre DKP e KGF no caso livre e minimamente acoplado [43, 44, 45, 46] tanto em

nível clássico quanto em nível quântico diminuiu o interesse na teoria DKP. Embora o formalismo de KGF seja aparentemente mais simples comparado ao tratamento algébrico de DKP em uma linguagem clássica de campos, esse ponto de vista muda dramaticamente na linguagem quântica: a similaridade na forma entre a lagrangiana de DKP e Dirac nos permite utilizar um mecanismo muito simples para se estudar a teoria escalar, uma vez que o mimetismo entre a teoria de Dirac pode ser utilizado para entender melhor o significado físico das quantidades obtidas pela teoria DKP [28, 47]. É importante enfatizar que o campo de DKP geralmente é empregado em física nuclear para descrever mésons em que é possível dizer que temos uma estrutura algébrica mesônica [48], assim, descrevemos campos bosônicos (spin 0, 1) com a álgebra de DKP e fermiônicos (spin 1/2) com a álgebra de Clifford.

Ao descrevermos os mésons como partículas escalares devido à sua interação com os campos eletromagnéticos é válido ressaltar que estamos simplificando as propriedades dessas partículas, neste caso apresentaremos alguns aspectos históricos. O início e a busca por partículas que representassem a interação de curto alcance (forte) que mantivessem o núcleo dos átomos ligados foi a proposta de Yukawa, cujas partículas escalares ou vetoriais massivas intermediariam a interação. Posteriormente o fato da interação forte não "enxergar" a troca de prótons por nêutrons nos levou a considerar esses bárions como estados de uma mesma partícula e definir a conservação de isospin I (simetria aproximada) em que os campos de matéria (prótons, nêutrons, núcleons) estariam na representação fundamental $\Psi = (p, n)$ e os campos intermediadores da interação forte (píons, mésons) estariam na representação adjunta $\vec{\phi} = (\pi^+, \pi^0, \pi^-)$

$$I_{\frac{1}{2}} \otimes I_{\frac{1}{2}} = I_0 \oplus I_1.$$

Ao incluirmos a interação eletromagnética via acoplamento mínimo juntamente com as simetrias discretas: conjugação de carga, paridade e reversão temporal (conservadas pela interação forte e eletromagnética), teríamos uma lagrangiana efetiva que descreveria o comportamento de núcleos atômicos devido à interação forte e eletromagnética

$$\mathcal{L}_{Física Nuclear} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + \frac{1}{2}[(\nabla^\mu\vec{\phi})^2 - m^2\vec{\phi}^2] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}G[\bar{\Psi}\gamma_5\vec{\tau}, \Psi]\vec{\phi}$$

onde τ_i seriam as matrizes de Pauli. Como vemos, descrevemos os mésons anteriormente por uma teoria de KGF. Porém a abordagem utilizando a teoria DKP tem uma certa revelância ao se estudar propriedades em Física Nuclear, como o decaimento dos mésons devido a suas peculiaridades fenomenológicas e nas razões entre as constantes de acoplamento forte nos processos de interações entre 2 bárions com mésons do tipo pseudo-escalares e pseudo-vetoriais. A teoria DKP condiz com os dados experimentais associados as razões entre as constantes de acoplamento forte, enquanto que a teoria de KGF com os mesmos tipos de acoplamento (pseudo-escalares, vetoriais) não condiz com os dados experimentais [50]. Dando continuidade ao estudo das reações nucleares vemos à inclusão da estranheza por Gell-Mann, organizando a estrutura da matéria em bárions e mésons (escalares ou vetoriais) por meio dos octetos e supondo a existência do tripleto de quarks de sabor [49]

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \text{ (mésons)}$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \text{ (bárions)}$$

Posteriormente, tendo em vista o modelo de Yang-Mills e a QCD poderíamos ver os estados de mésons (glueballs) em termos da simetria SU(3) e as cores carregadas pelos glúons.

Nos últimos anos a teoria de DKP tem sido estudada em QCD em grandes e pequenas distâncias por Gribov [51], em uma dinâmica hamiltoniana covariante [52], na generalização e estudo de campos em um espaço-tempo curvo [53, 54, 55] em que notamos resultados interessantes sobre a simetria conforme (campos não massivos) e as transformações de Weyl na prescrição do acoplamento mínimo, no espaço galileano covariante de 5 dimensões [56], no contexto da invariância de calibre em nível clássico de campos [57], no método causal de Epstein-Glaser [58] e assim por diante.

Como vimos com todo embasamento teórico e aplicações existentes na literatura, podemos descrever a dinâmica clássica/quântica de interação entre a matéria (escalares, DKP) e a radiação (vetoriais, Podolsky) no contexto da Eletrodinâmica Escalar Generalizada de Duffin-Kemmer-Petiau (GSDKP₄) [59]

$$\mathcal{L}_{GSDKP} = i\bar{\psi}\beta^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(1 + \frac{\square}{m_p^2})F^{\mu\nu}$$

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\theta + \beta^\theta\beta^\nu\beta^\mu = \beta^\mu\eta^{\nu\theta} + \beta^\theta\eta^{\nu\mu} \quad (\text{álgebra de DKP}).$$

A justificativa em se utilizar a teoria DKP para descrever as partículas escalares pode ser vista pela sua riqueza de propriedades. Como exemplo temos um vasto tipo de interações possíveis (covariantes bilineares), estudo de representações em que produtos tensoriais do tipo momento angular são transformados em somas diretas (muito útil em física de partículas na classificação dos estados quânticos possíveis) e sua melhor descrição dos dados experimentais em alguns casos na Física Nuclear, em comparação com a simples teoria de KGF. Ao analisar o comportamento de campos não massivos (DKP) minimamente acoplados com a geometria Riemanniana, a simetria conforme e as transformações de Weyl nessa estrutura tipo cone de luz são esclarecidas. Da mesma forma, ao utilizar a teoria de Podolsky para descrever as partículas vetoriais temos além de uma teoria mais finita do ponto de vista clássico/quântico, uma descrição fenomenológica interessante associada aos fenômenos magnéticos devido a quebra de simetria dual e também uma extensão do estudo de como fixar os graus de liberdade físicos covariantemente, em comparação com a teoria de Maxwell. O acoplamento mínimo da matéria (DKP) com a radiação (Podolsky) nos leva a descrever uma dinâmica covariante, estável do ponto de vista clássico/quântico e, dessa forma, uma teoria efetiva com diagramas fenomenológicos de Feynmann iguais a Eletrodinâmica Quântica com apenas 1 vértice ao invés de 2 obtidos ao descrever a matéria com as equações de KGF, facilitando a análise de correções radiativas a vários laços em que claramente o número de diagramas necessários diminui. Podemos estender este estudo da dinâmica e explorar o equilíbrio termodinâmico dessas partículas escalares e fótons generalizados no ensemble gran-canônico. Sendo assim utilizaremos o formalismo de Matsubara-Fradkin [60, 61]. O incentivo para a análise está no fato de termos resultados a temperatura finita ao descrever fótons generalizados, correções a Lei de Stefan-Boltzmann e aplicações Cosmológicas e também a quantização térmica de Matsubara-Fradkin para a Eletrodinâmica Generalizada (GQED₄) e DKP [62, 63, 64].

2 A Eletrodinâmica Quântica Escalar Generalizada de Duffin-Kemmer-Petiau

Para maiores detalhes, toda estrutura formal e os conceitos envolvidos nesta seção estão discutidos no apêndice (5.1) e (5.2). Um breve estudo sobre as equações de Podolsky e DKP pode ser visto nos apêndices (5.2) e (5.3), respectivamente. Dando continuidade, no apêndice (5.4), temos uma análise sobre a conexão entre os graus de liberdade físicos e os vínculos da teoria que estamos prestes a estudar no método de Dirac. Por fim, no apêndice (5.5), escrevemos um complemento sobre a quantização funcional covariante via método de Faddeev-Popov-DeWitt. Apenas como um adendo, construímos no apêndice (5.10) observações sobre as estruturas matemáticas necessárias ao longo do trabalho.

2.1 Análise de vínculos e Quantização Funcional

Nosso objetivo é estudar alguns aspectos teóricos advindos da interação entre partículas escalares e fótons generalizados. Para isso, propomos a seguinte densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^\mu(\partial_\mu\psi) - \frac{i}{2}(\partial_\mu\bar{\psi}\beta^\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi + eA_\mu\bar{\psi}\beta^\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.1)$$

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\theta + \beta^\theta\beta^\nu\beta^\mu = \beta^\mu\eta^{\nu\theta} + \beta^\theta\eta^{\nu\mu} \quad (\text{álgebra de DKP}).$$

O setor eletromagnético é descrito por uma teoria com derivadas de ordem superior conhecida como teoria de Podolsky e o setor escalar por uma teoria escalar escrita na forma de Dirac conhecida como DKP. Daremos o nome de GSDKP₄, Generalized Scalar Duffin-Kemmer-Petiau electrodynamics.

O interessante é que em nível clássico, esta teoria foi construída para possuir uma invariância de calibre local

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \exp[i\alpha(x)]\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}\exp[-i\alpha(x)] \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde percebemos o acolplamento mínimo ($\nabla_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$) entre o campo de matéria (escalar, mésons) e o campo intermediador da interação (vetorial, fótons).

Podemos estudar as equações clássicas de movimento ou de Euler-Lagrange via o princípio da mínima ação de Hamilton

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \text{ (ação)}$$

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi + \delta\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} + \delta\bar{\psi} \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \delta A_\mu \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\delta S = 0 \text{ (princípio da mínima ação)} \Rightarrow \delta\mathcal{L} = 0.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \delta\bar{\psi}[i\beta^\mu(\partial_\mu\psi) - m + eA_\mu\beta^\mu\psi] + [-i(\partial_\mu\bar{\psi})\beta^\mu - m\bar{\psi} + eA_\mu\bar{\psi}\beta^\mu]\delta\psi + \\
&+ [e\bar{\psi}\beta^\lambda\psi - \frac{\delta}{\delta A_\lambda}(\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \frac{\delta}{\delta A_\lambda}(\frac{a^2}{2}\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial^\mu F_{\mu\beta})]\delta A_\lambda \\
&= \delta\bar{\psi}[i\beta^\mu(\partial_\mu\psi) - m + eA_\mu\beta^\mu\psi] + [-i(\partial_\mu\bar{\psi})\beta^\mu - m\bar{\psi} + eA_\mu\bar{\psi}\beta^\mu]\delta\psi + \\
&+ [e\bar{\psi}\beta^\lambda\psi - \partial_\mu F^{\lambda\mu} + a^2\Box\partial_\alpha F^{\alpha\lambda}]\delta A_\lambda \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$[i\beta^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi = 0 \quad (\text{acoplamento m\u00ednimo})$$

$$\bar{\psi}[i\beta^\mu(\overleftarrow{\partial}_\mu + ieA_\mu) + m] = 0 \tag{2.5}$$

$$(1 + a^2\Box)\partial_\mu F^{\lambda\mu} = e\bar{\psi}\beta^\lambda\psi.$$

At\u00e9 este momento trabalhamos com uma din\u00e2mica Lagrangiana no espa\u00e7o de configura\u00e7\u00f5es. Para construir uma din\u00e2mica no espa\u00e7o de fase, precisamos da hamiltoniana. A hamiltoniana pode ser obtida, utilizando como ferramenta os Teoremas de Emmy Noether [65] cujas simetrias da a\u00e7\u00e3o est\u00e3o associadas a quantidades conservadas. No caso, uma invari\u00e2ncia da a\u00e7\u00e3o por transla\u00e7\u00f5es espa\u00e7o-temporais nos levaria \u00e0 conserva\u00e7\u00e3o do tensor de energia-momento. Para extrair o tensor de energia-momento can\u00f4nico da GSDKP iremos inserir uma notaa\u00e7\u00e3o

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \tag{2.6}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\bar{\psi}, \partial_\mu\bar{\psi}; \psi, \partial_\mu\psi; A_\nu, \partial_\mu A_\nu, \partial_\mu\partial_\theta A_\nu).$$

Neste caso as equa\u00e7\u00f5es cl\u00e1ssicas de movimento s\u00e3o dadas por

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + \delta(\partial_\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}\delta A_\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta(\partial_\mu A_\nu) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\theta A_\nu)}\delta(\partial_\mu\partial_\theta A_\nu) = \\
&= \delta\bar{\psi}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right)\right] + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\right]\delta\psi + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) + \partial_\mu\partial_\theta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\theta A_\nu)}\right)\right]\delta A_\nu = 0
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right)\right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) + \partial_\mu\partial_\theta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\theta A_\nu)}\right)\right] = 0. \tag{2.7}$$

Observa-se que a a\u00e7\u00e3o \u00e9 invariante pela transforma\u00e7\u00e3o global abaixo

$$\begin{aligned}
\psi &\rightarrow \exp[i\alpha]\psi \\
\bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} \exp[-i\alpha].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Tendo em vista o Teorema de Emmy Noether, a transformação global acima (infinitesimal) está associada a uma simetria,

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \delta \mathcal{L} \\
&= \int d^4x \partial_\mu \left[\delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta \psi \right] \\
&= \int d^4x \partial_\mu (i\alpha \bar{\psi} \beta^\mu \psi) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
J^\mu &= \bar{\psi} \beta^\mu \psi \\
\partial_\mu J^\mu &= 0 \quad (\text{equação da continuidade}) \\
N &= \int d^3x \bar{\psi} \beta^0 \psi \quad (\text{carga conservada}).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Por outro lado, assumindo que a ação seja invariante perante a variação associada a uma translação espaço-temporal

$$\begin{aligned}
x^\lambda &\rightarrow x^\lambda + \delta x^\lambda \\
\psi &\rightarrow \psi + \delta \psi, \quad \delta \psi = (\partial_\lambda \psi) \delta x^\lambda \\
\bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} + \delta \bar{\psi}, \quad \delta \bar{\psi} = (\partial_\lambda \bar{\psi}) \delta x^\lambda \\
A_\mu &\rightarrow A_\mu + \delta A_\mu, \quad \delta A_\mu = (\partial_\lambda A_\mu) \delta x^\lambda \\
\delta(d^4x) &= \partial_\lambda \delta x^\lambda d^4x
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\delta S = \int \delta(d^4x) \mathcal{L} + \int d^4x \delta \mathcal{L}$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \partial_\mu \left[(\partial_\lambda \bar{\psi}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} (\partial_\lambda \psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\lambda A_\nu) - \partial_\theta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\theta A_\nu)} \right) (\partial_\lambda A_\nu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\theta A_\nu)} (\partial_\theta \partial_\lambda A_\nu) - \mathcal{L} \eta_\lambda^\mu \right] \delta x^\lambda
\end{aligned}$$

$$T^\mu{}_\lambda \doteq (\partial_\lambda \bar{\psi}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} (\partial_\lambda \psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\lambda A_\nu) - \partial_\theta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\theta A_\nu)} \right) (\partial_\lambda A_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\theta A_\nu)} (\partial_\theta \partial_\lambda A_\nu) - \mathcal{L} \eta_\lambda^\mu$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \partial_\mu T^\mu{}_\lambda = 0 \quad (\text{conservação da energia e do momento}). \tag{2.12}$$

Dessa forma, a hamiltoniana canônica é dada por

$$\begin{aligned}
H_c &= \int d^3\vec{x} T^0_0 = \\
&= \int d^3\vec{x} \left[(\partial_0\bar{\psi}) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\bar{\psi})} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} (\partial_0\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} (\partial_0 A_\nu) - \partial_\theta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\partial_\theta A_\nu)} \right) (\partial_0 A_\nu) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\partial_\theta A_\nu)} (\partial_\theta\partial_0 A_\nu) - \mathcal{L} \right] = \\
&= \int d^3\vec{x} \left\{ (\partial_0\bar{\psi}) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\bar{\psi})} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} (\partial_0\psi) + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} - 2\partial_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\partial_i A_\nu)} \right) - \partial_0 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\partial_\theta A_\nu)} \right] (\partial_0 A_\nu) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\partial_\theta A_\nu)} (\partial_0\partial_\theta A_\nu) - \mathcal{L} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Podemos definir e calcular os momentos canonicamente conjugados a partir da equação anterior

$$p \doteq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\bar{\psi})} = -\frac{i}{2}\beta^0\psi$$

$$\bar{p} \doteq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^0$$

$$\begin{aligned}
\Pi^\nu &\doteq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} - 2\partial_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\partial_i A_\nu)} \right) - \partial_0 \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\partial_\theta A_\nu)} \right) = F^{\nu 0} - 2\partial_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{2\partial(\partial_0\partial_i A_\nu)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{2\partial(\partial_i\partial_0 A_\nu)} \right) + \\
&\quad - \partial_0 (\partial_\alpha F^{\alpha\nu} - \eta^{0\nu} \partial_\alpha F^{\alpha 0}) = F^{\nu 0} - \partial_i ([\eta^{0i} \partial_\alpha F^{\alpha\nu} - \eta^{0\nu} \partial_\alpha F^{\alpha i}] + [\eta^{i0} \partial_\alpha F^{\alpha\nu} - \eta^{i\nu} \partial_\alpha F^{\alpha 0}]) + \\
&\quad - \partial_0 (\eta^{00} \partial_\alpha F^{\alpha\nu} - \eta^{0\nu} \partial_\alpha F^{\alpha 0}) = [\eta^{0\nu} \partial_\alpha \partial_i F^{\alpha i} + \eta^{0\nu} \partial_0 \partial_\alpha F^{\alpha 0}] + [\eta^{i\nu} \partial_i \partial_\alpha F^{\alpha 0} - \eta^{00} \partial_0 \partial_\alpha F^{\alpha\nu}] = \\
&= \eta^{0\nu} \partial_\alpha \partial_\theta F^{\alpha\theta} + [\eta^{i\nu} \partial_i \partial_\alpha F^{\alpha 0} - \eta^{00} \partial_0 \partial_\alpha F^{\alpha\nu}] = F^{\nu 0} + a^2 [\eta^{i\nu} \partial_i \partial_\alpha F^{\alpha 0} - \partial_0 \partial_\alpha F^{\alpha\nu}]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\Phi^\nu \doteq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\partial_\theta A_\nu)} = a^2 [\partial_\alpha F^{\alpha\nu} - \eta^{\nu 0} \partial_\alpha F^{\alpha 0}].$$

onde utilizamos algumas identidades¹.

Logo, temos que

$$H_c = \int d^3\vec{x} \{ (\partial_0\bar{\psi})p + \bar{p}(\partial_0\psi) + \Pi^\nu(\partial_0 A_\nu) + \Phi^\nu(\partial_0\Gamma_\nu) - \mathcal{L} \} \tag{2.15}$$

$$\Gamma_\nu = \partial_0 A_\nu$$

e o espaço de fase é definido em termos das variáveis $(\bar{\psi}, \psi, A, \Gamma; p, \bar{p}, \Pi, \Phi)$, observando que Γ não se comporta como um 4-vetor. As equações de Hamilton são dadas no espaço de fase em termos do princípio da mínima ação,

1

$$\frac{\partial(F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial(F^{\alpha\beta}) F_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta} \partial(F_{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 2 \frac{\partial(F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F_{\alpha\beta} = 4F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial(\partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\lambda \partial_\sigma A_\omega)} = \frac{\partial(\partial^\mu F_{\mu\beta}) \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha (\partial_\alpha F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\lambda \partial_\sigma A_\omega)} = 2 \frac{\partial(\partial^\mu F_{\mu\beta})}{\partial(\partial_\lambda \partial_\sigma A_\omega)} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 2[\eta^{\lambda\sigma} \partial_\alpha F^{\alpha\omega} - \eta^{\lambda\omega} \partial_\alpha F^{\alpha\sigma}].$$

$$\delta H_c = \int d^3 \vec{x} \{ -\delta \bar{\psi} (\partial_0 p) + (\partial_0 \bar{\psi}) \delta p + \delta \bar{p} (\partial_0 \psi) - (\partial_0 \bar{p}) \delta \psi + \delta \Pi^\nu (\partial_0 A_\nu) - (\partial_0 \Pi^\nu) \delta A_\nu + \delta \Phi^\nu (\partial_0 \Gamma_\nu) - (\partial_0 \Phi^\nu) \delta \Gamma_\nu - \delta \mathcal{L} \}$$

$$\delta H_c = \int d^3 \vec{x} \{ \delta \bar{\psi} \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \psi} \delta \psi + \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta A_\nu} \delta A_\nu + \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \Gamma_\nu} \delta \Gamma_\nu + \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta p} \delta p + \delta \bar{p} \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \bar{p}} + \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \Pi_\nu} \delta \Pi_\nu + \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \Phi_\nu} \delta \Phi_\nu \}$$

(Equações de Hamilton)

$$(\partial_0 p) = -\frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \bar{\psi}} \quad (\partial_0 \bar{p}) = -\frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \psi} \quad (\partial_0 \psi) = \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \bar{p}} \quad (\partial_0 \bar{\psi}) = \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta p}$$

$$(\partial_0 \Pi^\nu) = -\frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta A_\nu} \quad (\partial_0 \Phi^\nu) = -\frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \Gamma_\nu} \quad (\partial_0 A_\nu) = \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \Pi_\nu} \quad (\partial_0 \Gamma_\nu) = \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \Phi_\nu}.$$

(2.16)

Dada uma quantidade física Q sua evolução no espaço de fase é dada por

$$Q = \int d^3 \vec{x} \mathcal{Q}(\bar{\psi}, \psi, A, \Gamma; p, \bar{p}, \Pi, \Phi)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{y} \left\{ \frac{\partial \bar{\psi}(y)}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial \bar{\psi}(y)} + \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial \psi(y)} \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial A_\nu(y)} \frac{\partial A_\nu(y)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial \Gamma_\nu(y)} \frac{\partial \Gamma_\nu(y)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial p(y)} \frac{\partial p(y)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}(y)}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial \bar{p}(y)} + \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial \Pi_\nu(y)} \frac{\partial \Pi_\nu(y)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial \Phi_\nu(y)} \frac{\partial \Phi_\nu(y)}{\partial t} \right\}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{y} \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}_c(y)}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial \bar{\psi}} - \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{H}_c(y)}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial \bar{\psi}} \frac{\partial \mathcal{H}_c(y)}{\partial \bar{p}} - \frac{\partial \mathcal{H}_c(y)}{\partial \bar{\psi}} \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial \bar{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}_c(y)}{\partial \Pi^\nu} \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial A_\nu} - \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial \Pi^\nu} \frac{\partial \mathcal{H}_c(y)}{\partial A_\nu} + \frac{\partial \mathcal{H}_c(y)}{\partial \Phi^\nu} \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial \Gamma_\nu} - \frac{\partial \mathcal{Q}(x)}{\partial \Phi^\nu} \frac{\partial \mathcal{H}_c(y)}{\partial \Gamma_\nu} \right\}$$

$$\frac{dQ}{dt} \doteq \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{y} \{ \mathcal{Q}(x), \mathcal{H}_c(y) \}_P$$

(2.17)

onde definimos a operação $\{, \}_P$ conhecida como parêntese de Poisson. Agora sabemos pelas equações (2.14) que nossa teoria possui vínculos primários, logo as equações de Hamilton não serão válidas no espaço de fase como um todo mas sim em uma "superfície". Para construir o espaço de fase de maneira consistente com os vínculos, vamos utilizar o método de Dirac, restringindo a evolução das quantidades físicas a uma "superfície" no espaço de fase.

Primeiramente, temos os seguintes vínculos primários

$$\chi = p + \frac{i}{2} \beta^0 \psi \approx 0 \quad \bar{\chi} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^0 \approx 0 \quad \varphi_1 = \Phi_0 \approx 0$$

$$\Pi_0 = -a^2 \eta_0^i \partial_i \partial_\alpha F^{\alpha 0} = \partial_k \Phi^k \Rightarrow \varphi_2 = \Pi_0 - \partial_k \Phi^k \approx 0, \quad (2.18)$$

com \approx denotando uma igualdade fraca, restrita à superfície.

Também temos duas relações dinâmicas

$$\Pi^k = F^{k0} + a^2 [\eta^{ik} \partial_i \partial_\alpha F^{\alpha 0} - \partial_0 \partial_\alpha F^{\alpha k}] \Rightarrow \partial_0 A^k = \partial^k A^0 - \Pi^k + a^2 [\partial^k \partial_\alpha F^{\alpha 0} - \partial_0 \partial_\alpha F^{\alpha k}]$$

(2.19)

$$\Phi^k = a^2 [\partial_\alpha F^{\alpha k} - \eta^{k0} \partial_\alpha F^{\alpha 0}] \Rightarrow \partial_0 \Gamma^k = \partial^k \Gamma_0 - \partial_l F^{lk} + \frac{\Phi^k}{a^2}.$$

Com as identidades

$$\frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^\mu(\partial_\mu\psi) = \bar{p}(\partial_0\psi) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^i(\partial_i\psi)$$

$$\frac{i}{2}(\partial_\mu\bar{\psi}\beta^\mu)\psi = -(\partial_0\bar{\psi})p - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^i(\partial_i\psi)$$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = F^{kj}F_{kj} + 2(\Gamma_j - \partial_j A_0)^2$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= \left[\frac{\Phi_\beta}{a^2} - \eta_\beta^0\partial_\mu F^{\mu 0}\right]\left[\frac{\Phi^\beta}{a^2} - \eta^{\beta 0}\partial_\alpha F^{\alpha 0}\right] = \frac{\Phi^k\Phi_k}{a^4} + \partial^\mu F_{\mu 0}\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \frac{\Phi^k\Phi_k}{a^4} + \partial^j F_{0j}\partial_k F^{k0} = \\ &= \frac{\Phi^k\Phi_k}{a^4} + (\partial^j\Gamma_j - \partial^j\partial_j A_0)^2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

escrevemos a hamiltoniana canônica da seguinte forma

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3\vec{x} \{(\partial_0\bar{\psi})p + \bar{p}(\partial_0\psi) + \Pi^\nu(\partial_0 A_\nu) + \Phi^\nu(\partial_0\Gamma_\nu) - \mathcal{L}\} = \int d^3\vec{x} \{ \Pi_0\Gamma^0 + \Pi_k\Gamma^k + \\ &+ \Phi_k(\partial^k\Gamma_0 - \partial_l F^{lk} + \frac{\Phi^k}{2a^2}) - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^i(\overleftrightarrow{\partial}_i\psi) + m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\hat{A}\psi + \frac{1}{4}F_{kj}F^{kj} + \frac{1}{4}(\Gamma_j - \partial_j A_0)^2 + \\ &- \frac{a^2}{2}(\partial^j\Gamma_j - \partial^j\partial_j A_0)^2 \}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Portanto, definimos a densidade de hamiltoniana primária

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_c + \bar{C}\chi + \bar{\chi}C + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 \quad (2.22)$$

onde \bar{C}, C, C_1 , e C_2 são os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos.

Os parênteses fundamentais de Poisson são dados por

$$\begin{aligned} \{\psi^A(x), \bar{p}_E(y)\}_P &= \delta_E^A \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\bar{\psi}^A(x), p_E(y)\}_P &= \delta_E^A \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{A^\mu(x), \Pi_\nu(y)\}_P &= \delta_\nu^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\Gamma^\mu(x), \Phi_\nu(y)\}_P &= \delta_\nu^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para que a teoria seja consistente, os vínculos devem permanecer os mesmos em todo momento, ou seja, devem ser estáveis. Sendo assim, impomos as condições de consistência ou estabilidade nos vínculos

$$\partial_0\chi(x) = \int d^3\vec{y} \{\chi(x), \mathcal{H}_p(y)\}_P \approx 0 \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \partial_0\chi(x) &= \int d^3\vec{y} \{p(x) + \frac{i}{2}\beta^0\psi(x), \mathcal{H}_c(y) + \bar{C}(y)\chi(y) + \bar{\chi}(y)C(y) + C_1(y)\varphi_1(y) + C_2(y)\varphi_2(y)\}_P \\ &= \int d^3\vec{y} \{p(x), -\frac{i}{2}\bar{\psi}(y)\beta^i[\overleftrightarrow{\partial}_i\psi(y)] + m\bar{\psi}(y)\psi(y) - e\bar{\psi}(y)\hat{A}(y)\psi(y)\}_P + \int d^3\vec{y} \{p(x) + \\ &+ \frac{i}{2}\beta^0\psi(x), \bar{\chi}(y)\}_P C(y) \\ &= i\beta^i\partial_i\psi(x) - m\psi(x) + e\hat{A}(x)\psi(x) + i\beta^0 C(x) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$i\beta^0 C(x) + i\beta^i \partial_i \psi(x) - m\psi(x) + e\hat{A}(x)\psi(x) = 0. \quad (2.26)$$

Da álgebra de DKP,

$$\begin{aligned} \beta^\mu \beta^\nu \beta^\theta + \beta^\theta \beta^\nu \beta^\mu &= \beta^\mu \eta^{\nu\theta} + \beta^\theta \eta^{\nu\mu} \\ \beta^0 \beta^0 \beta^0 &= \beta^0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Logo

$$\begin{aligned} \beta^0 \beta^0 [i\beta^0 C(x) + i\beta^i \partial_i \psi(x) - m\psi(x) + e\hat{A}(x)\psi(x)] &= 0 \\ C(x) &= -\beta^0 \beta^i \partial_i \psi(x) - im\beta^0 \psi(x) + ie\beta^0 \hat{A}(x)\psi(x). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Da mesma forma

$$\partial_0 \bar{\chi}(x) = \int d^3 \vec{y} \{ \bar{\chi}(x), \mathcal{H}_p(y) \}_P \approx 0 \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \bar{\chi}(x) &= \int d^3 \vec{y} \{ \bar{p}(x) - \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta^0, \mathcal{H}_c(y) + \bar{C}(y) \chi(y) + \bar{\chi}(y) C(y) + C_1(y) \varphi_1(y) + C_2(y) \varphi_2(y) \}_P \\ &= \int d^3 \vec{y} \{ \bar{p}(x), -\frac{i}{2} \bar{\psi}(y) \beta^i [\overleftrightarrow{\partial}_i \psi(y)] + m\bar{\psi}(y) \psi(y) - e\bar{\psi}(y) \hat{A}(y) \psi(y) \}_P + \int d^3 \vec{y} \bar{C}(y) \{ \bar{p}(x) + \\ &\quad -\frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta^0, \chi(y) \}_P \\ &= -i \partial_i \bar{\psi}(x) \beta^i - m\bar{\psi}(x) + e\bar{\psi}(x) \hat{A}(y) - i\bar{C}(x) \beta^0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Logo

$$\bar{C}(y) = -\partial_i \bar{\psi}(x) \beta^i \beta^0 + im\bar{\psi}(x) \beta^0 - ie\bar{\psi}(x) \hat{A}(y) \beta^0. \quad (2.31)$$

Por outro lado,

$$\partial_0 \varphi_1(x) = \int d^3 \vec{y} \{ \varphi_1(x), \mathcal{H}_p(y) \}_P \approx 0 \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \varphi_1(x) &= \int d^3 \vec{y} \{ \Phi_0(x), H_c(y) + \bar{C}(y) \chi(y) + \bar{\chi}(y) C(y) + C_1(y) \varphi_1(y) + C_2(y) \varphi_2(y) \}_P \\ &= \int d^3 \vec{y} \{ \Phi_0(x), \Pi_0(y) \Gamma^0(y) + \Phi_k(y) \partial^k \Gamma_0(y) \}_P \\ &= -\Pi_0(x) + \partial^k \Phi_k(x) = -\varphi_2(x) \approx 0. \end{aligned}$$

Porém a condição de consistência para o vínculo $\varphi_2(x)$

$$\partial_0 \varphi_2(x) = \int d^3 \vec{y} \{ \varphi_2(x), \mathcal{H}_p(y) \}_P \approx 0 \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \varphi_2(x) &= \int d^3 \vec{y} \{ \varphi_2(x), \mathcal{H}_c(y) + \bar{C}(y) \chi(y) + \bar{\chi}(y) C(y) + C_1(y) \varphi_1(y) + C_2(y) \varphi_2(y) \}_P \\ &= \int d^3 \vec{y} \{ \Pi_0(x) - \partial_k \Phi^k(x), -e\bar{\psi}(y) \hat{A}(y) \psi(y) + \Pi_k(y) \Gamma^k(y) \}_P \\ &= e\bar{\psi}(x) \beta^0 \psi(x) + \partial^k \Pi_k(x) \doteq \tilde{\varphi}_2(x) \approx 0 \end{aligned}$$

nos leva a um novo vínculo, $\tilde{\varphi}_2(x)$ é um vínculo secundário. Neste caso, impondo a condição de consistência para $\tilde{\varphi}_2(x)$

$$\partial_0 \tilde{\varphi}_2(x) = \int d^3 \vec{y} \{ \tilde{\varphi}_2(x), \mathcal{H}_p(y) \}_P \approx 0 \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \varphi_2(x) &= \int d^3 \vec{y} \{ \tilde{\varphi}_2(x), \mathcal{H}_c(y) + \bar{C}(y)\chi(y) + \bar{\chi}(y)C(y) + C_1(y)\varphi_1(y) + C_2(y)\varphi_2(y) \}_P \\ &= \int d^3 \vec{y} \{ e\bar{\psi}(x)\beta^0\psi(x) + \partial^k \Pi_k(x), H_c(y) \}_P \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, após encontrar todos os vínculos, podemos escrever a densidade de hamiltoniana total

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + \bar{C}\chi + \bar{\chi}C + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \tilde{C}_2\tilde{\varphi}_2 \quad (2.35)$$

e utilizar uma nova classificação dos vínculos de acordo com a independência linear destes. Dados dois vínculos Ω_i e Ω_j estes serão de primeira classe se e somente se

$$\{ \Omega_i, \Omega_j \}_P \approx 0 \quad (2.36)$$

caso contrário serão ditos de segunda classe. Esta classificação esta associada ao fato de determinar os multiplicadores de Lagrange, se os vínculos são de primeira classe não conseguimos determiná-los. Conseqüentemente, para o vínculo χ

$$\begin{aligned} \{ \chi_A(x), \bar{\chi}_D(y) \}_P &= \{ p_A(x) + \frac{i}{2} [\beta^0 \psi(x)]_A, \bar{p}_D - \frac{i}{2} [\bar{\psi}(y)\beta^0]_D \}_P \\ &= i\beta_{AD}^0 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \neq 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\{ \chi_A(x), \varphi_1(y) \}_P = \{ p_A(x) + \frac{i}{2} [\beta^0 \psi(x)]_A, \Phi_0(y) \}_P = 0. \quad (2.38)$$

$$\{ \chi_A(x), \varphi_2(y) \}_P = \{ p_A(x) + \frac{i}{2} [\beta^0 \psi(x)]_A, \Pi_0(y) - \partial_k \Phi^k(y) \}_P = 0. \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \{ \chi_A(x), \tilde{\varphi}_2(y) \}_P &= \{ p_A(x) + \frac{i}{2} [\beta^0 \psi(x)]_A, e\bar{\psi}(y)\beta^0\psi(y) - \partial^k \Pi_k(y) \}_P \\ &= \{ p_A(x) + \frac{i}{2} [\beta^0 \psi(x)]_A, e\bar{\psi}(y)\beta^0\psi(y) \}_P \\ &= \{ p_A(x) + \frac{i}{2} [\beta^0 \psi(x)]_A, -\frac{i}{2} e\bar{p}\psi(y) + \frac{i}{2} e\bar{\psi}(y)p \}_P = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

De maneira análoga, encontramos o mesmo resultado para $\bar{\chi}$. Dizemos que os vínculos χ e $\bar{\chi}$ aparentam ser de segunda classe. Para esclarecer esse ponto precisamos explicitar a matriz β_0 e ver se temos vínculos secundários. Isto será feito a *posteriori*.

Por fim, resta-nos encontrar os parênteses de Poisson associados aos vínculos φ_1 , φ_2 e $\tilde{\varphi}_2$. Neste caso

$$\begin{aligned}
\{\varphi_1(x), \varphi_2(y)\}_P &= \{\varphi_1(x), \varphi_2(y)\}_P = \{\Phi_0(x), \Pi_0(y) - \partial_k \Phi^k(y)\}_P = 0 \\
\{\varphi_1(x), \tilde{\varphi}_2(y)\}_P &= \{\Phi_0(x), e\bar{\psi}(y)\beta^0\psi(y) + \partial^k \Pi_k(y)\}_P = 0 \\
\{\varphi_2(x), \tilde{\varphi}_2(y)\}_P &= \{\Pi_0(x) - \partial_k \Phi^k(x), e\bar{\psi}(y)\beta^0\psi(y) + \partial^k \Pi_k(y)\}_P = 0.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Dizemos que os vínculos φ_1 , φ_2 e $\tilde{\varphi}_2$ são de primeira classe.

Devemos ser capazes de encontrar todos os multiplicadores de Lagrange da teoria em questão. Para o caso de vínculos de primeira classe, temos que introduzir condições subsidiárias a fim de que todos os multiplicadores de Lagrange sejam determinados e a dinâmica Hamiltoniana seja equivalente à dinâmica Lagrangeana. O fato de implementar condições subsidiárias está associado à necessidade de trabalharmos apenas com os graus de liberdade físicos ou verdadeiros da teoria. Ao introduzirmos condições subsidiárias, os vínculos de primeira classe passam a ser de segunda classe onde é possível definirmos a evolução de um observável física pelo parêntese de Dirac.

Para esclarecer a metodologia de Dirac suponhamos que primeiramente encontramos todos os vínculos Ω_i (primários, secundários, ...) da teoria. Neste caso, definimos a densidade de hamiltoniana total

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + \Omega_i \lambda^i. \tag{2.42}$$

Se Ω_i são vínculos de primeira classe, não conseguimos determinar os multiplicadores de Lagrange. Para que isso seja possível, introduzimos condições subsidiárias (novos vínculos Σ_j) advindas da teoria para fixar os graus de liberdades não físicos (calibre)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{H}_T + \Sigma_j \theta^j \\
&= \mathcal{H}_c + \Omega_i \lambda^i + \Sigma_j \theta^j.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Conseqüentemente o conjunto de vínculos (Ω, Σ) passa a ser de segunda classe.

Agora se Ω_i são vínculos de segunda classe

$$\begin{aligned}
\partial_0 \Omega_i(x) &= \int d^3 \vec{y} \{\Omega_i(x), \mathcal{H}_T(y)\}_P \\
&\approx \int d^3 \vec{y} \{\Omega_i(x), \mathcal{H}_c(y)\}_P + \int d^3 \vec{y} \{\Omega_i(x), \Omega_j(y)\}_P \lambda^j(y) \\
&\approx 0
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\int d^3 \vec{y} \{\Omega_i(x), \Omega_j(y)\}_P \lambda^j(y) + \int d^3 \vec{y} \{\Omega_i(x), \mathcal{H}_c(y)\}_P \approx 0 \tag{2.45}$$

$$\int d^3 \vec{y} \{\Omega(x), \Omega(y)\}_P \lambda(y) + \int d^3 \vec{y} \{\Omega(x), \mathcal{H}_c(y)\}_P \approx 0 \quad (\text{notação matricial}).$$

Resolvendo a equação anterior de maneira algébrica

$$\begin{aligned}
\lambda(z) &\approx - \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{y} [\{\Omega(z), \Omega(x)\}_P]^{-1} \{\Omega(x), \mathcal{H}_c(y)\}_P \\
&\int d^3 \vec{x} [\{\Omega(z), \Omega(x)\}_P]^{-1} \{\Omega(x), \Omega(y)\}_P = \delta^3(\vec{z} - \vec{y}) I.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Portanto, a evolução de um observável físico $Q = \int d^3\vec{x} \mathcal{Q}(\bar{\psi}, \psi, A, \Gamma; p, \bar{p}, \Pi, \Phi)$ será dado por

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \int d^3\vec{x} d^3\vec{y} \{ \mathcal{Q}(x), \mathcal{H}_T(y) \}_P \\ &\approx \int d^3\vec{x} d^3\vec{y} \{ \mathcal{Q}(x), \mathcal{H}_c(y) \}_P + \int d^3\vec{x} d^3\vec{y} \{ \mathcal{Q}(x), \Omega(y) \}_P \lambda(y) \\ &\approx \int d^3\vec{x} d^3\vec{y} \{ \mathcal{Q}(x), \mathcal{H}_c(y) \}_D \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde definimos o parêntese de Dirac

$$\{ \mathcal{Q}(x), \mathcal{H}_c(y) \}_D = \left[\{ \mathcal{Q}(x), \mathcal{H}_c(y) \}_P - \int d^3\vec{z} d^3\vec{w} \{ \mathcal{Q}(x), \Omega(z) \}_P [\{ \Omega(z), \Omega(w) \}_P]^{-1} \{ \Omega(w), \mathcal{H}_c(y) \}_P \right] \quad (2.48)$$

Logo, se trocarmos o parêntese de Poisson por parêntese de Dirac, a dinâmica Hamiltoniana ocorre em uma superfície contida no espaço de fase $(\bar{\psi}, \psi, A, \Gamma; p, \bar{p}, \Pi, \Phi)$. Esta superfície foi construída por meio da análise de vínculos para que a dinâmica Hamiltoniana seja equivalente com a dinâmica Lagrangiana. Com a definição do parêntese de Dirac as igualdades fracas podem ser escritas como igualdades fortes, $\approx \rightarrow =$. As equações de Hamilton são dadas agora em termos dos parênteses de Dirac $\{, \}_D$.

Havíamos dito que os vínculos χ e $\bar{\chi}$ são aparentemente de segunda classe anteriormente. Para explicar o termo aparente vamos escrever a matriz de vínculos $V_{AD} = \{ \chi_A(x), \bar{\chi}_D(y) \}_P$ de maneira explícita

$$V_{10 \times 10(\vec{x}, \vec{y})} = \begin{pmatrix} 0 & i\beta^0 \\ -i\beta^0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.49)$$

$$V_{10 \times 10} \doteq \begin{pmatrix} 0 & i\beta^0 \\ -i\beta^0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O determinante de $V_{10 \times 10}$ é dado por

$$\det[V_{10 \times 10}] = \det[(\beta^0)^2] = \det[\beta^0] \det[\beta^0] = 0 \quad (2.50)$$

sendo assim, não temos uma matriz inversa $V_{10 \times 10}^{-1}$. Esta informação nos diz que temos vínculos secundários na teoria. Para facilitar a análise vamos escolher uma representação para as matrizes β^μ

$$\begin{aligned} \beta^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \beta^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \beta^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \beta^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Como

$$C(y) = -\beta^0 \beta^i \partial_i \psi(x) - im\beta^0 \psi(x) + ie\beta^0 \hat{A}(y)\psi(x) \quad (2.52)$$

$$\bar{C}(y) = \partial_i \psi(x) \beta^i \beta^0 + im\bar{\psi}(x) \beta^0 - ie\bar{\psi}(x) \hat{A}(y) \beta^0,$$

concluimos que apenas 2 multiplicadores de Lagrange de C e de \bar{C} são encontrados. Logo, temos 6 vínculos secundários, 3 associados a C e 3 associados a \bar{C} . As afirmações anteriores condizem com o fato do posto da matriz $V_{10 \times 10}$ ser 4. Pois bem, vamos encontrar os vínculos secundários. Primeiramente,

$$i\beta^0 C(y) + i\beta^i \partial_i \psi(x) - m\psi(x) + e\hat{A}(y)\psi(x) = 0 \quad (2.53)$$

Definindo o operador projeção $P = [1 - (\beta^0)^2]$

$$[1 - (\beta^0)^2][i\beta^0 C(y) + i\beta^i \partial_i \psi(x) - m\psi(x) + e\hat{A}(x)\psi(x)] = 0 \quad (2.54)$$

$$[1 - (\beta^0)^2][i\beta^i \partial_i \psi(x) - m\psi(x) + e\beta^i A_i(x)\psi(x)] = 0$$

encontramos os vínculos secundários

$$\chi^{(2)} = [1 - (\beta^0)^2][i\beta^i \partial_i \psi(x) - m\psi(x) + e\beta^i A_i(x)\psi(x)] \approx 0 \quad (2.55)$$

Analogamente,

$$\bar{\chi}^{(2)} = [i\partial_i \bar{\psi}(x) \beta^i + m\bar{\psi}(x) - e\bar{\psi}(x) \beta^i A_i(x)][1 - (\beta^0)^2] \approx 0 \quad (2.56)$$

Portanto, a densidade de Hamiltoniana total é dada por

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + \bar{C}^{(1)} \chi^{(1)} + \bar{\chi}^{(1)} C^{(1)} + \bar{C}^{(2)} \chi^{(2)} + \bar{\chi}^{(2)} C^{(2)} + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \tilde{C}_2 \tilde{\varphi}_2 \quad (2.57)$$

onde

$$\begin{aligned} \chi^{(1)} &= p + \frac{i}{2} \beta^0 \psi \\ \bar{\chi}^{(1)} &= \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\chi^{(2)} = [1 - (\beta^0)^2][i\beta^i \partial_i \psi(x) - m\psi(x) + e\beta^i A_i(x)\psi(x)]$$

$$\bar{\chi}^{(2)} = [i\partial_i \bar{\psi}(x) \beta^i + m\bar{\psi}(x) - e\bar{\psi}(x) \beta^i A_i(x)][1 - (\beta^0)^2]$$

Temos agora o conjunto de vínculos primários e secundários

$$\begin{aligned} &(\chi_A^{(1)}, \bar{\chi}_A^{(1)}, \chi_b^{(2)}, \bar{\chi}_b^{(2)}) \\ &A = 1, 2, 3, 4, 5 \\ &b = 3, 4, 5 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Os parênteses de Poisson fundamentais dos vínculos são dados por

$$\{\chi^{(1)}(x), \bar{\chi}^{(1)}(y)\}_P = i\beta^0 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.60)$$

$$\{\chi^{(1)}(x), \chi^{(2)}(y)\}_P = 0, \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \{\chi^{(1)}(x), \bar{\chi}^{(2)}(y)\}_P &= \{p(x) + \frac{i}{2}\beta^0 \psi(x), [i\partial_i \bar{\psi}(y)\beta^i + m\bar{\psi}(y) - e\bar{\psi}(y)\beta^i A_i(y)][1 - (\beta^0)^2]\}_P \\ &= -[i\partial_i \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\beta^i + m\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - e\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\beta^i A_i(y)][1 - (\beta^0)^2] \\ &= -[i\beta^i \partial_i + m - e\beta^i A_i(y)][1 - (\beta^0)^2] \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{\chi}^{(1)}(x), \chi^{(2)}(y)\}_P &= \{\bar{p}(x) - \frac{i}{2}[\bar{\psi}(x)\beta^0]_A, [1 - (\beta^0)^2][i\beta^i \partial_i \psi(y) - m\psi(y) + e\beta^i A_i(y)\psi(y)]\}_P \\ &= -[1 - (\beta^0)^2][i\beta^i \partial_i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - m\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + e\beta^i A_i(y)\delta^3(\vec{x} - \vec{y})] \\ &= -[1 - (\beta^0)^2][i\beta^i \partial_i - m + e\beta^i A_i(y)] \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\{\bar{\chi}^{(1)}(x), \bar{\chi}^{(2)}(y)\}_P = 0, \quad (2.64)$$

$$\{\chi^{(2)}(x), \bar{\chi}^{(2)}(y)\}_P = 0. \quad (2.65)$$

Portanto, ao final temos a seguinte matriz de vínculos $V_{16 \times 16}^{escalar}(\vec{x}, \vec{y})$ associada ao setor escalar

$$V_{16 \times 16}^{escalar}(\vec{x}, \vec{y}) = V_{16 \times 16}^{escalar} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.66)$$

$$V_{16 \times 16}^{escalar} = \begin{bmatrix} V_{10 \times 10}^1 & V_{10 \times 6}^2 \\ V_{6 \times 10}^3 & V_{6 \times 6}^4 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

onde

$$V_{10 \times 10}^1 = \begin{pmatrix} 0_{5 \times 5} & i\beta^0 \\ -i\beta^0 & 0_{5 \times 5} \end{pmatrix}$$

$$V_{10 \times 6}^2 = \begin{pmatrix} 0_{5 \times 3} & \{-[i\beta^i \partial_i + m - e\beta^i A_i(y)][1 - (\beta^0)^2]\}_{5 \times 3} \\ \{-[1 - (\beta^0)^2][i\beta^i \partial_i - m + e\beta^i A_i(y)]\}_{5 \times 3} & 0_{5 \times 3} \end{pmatrix}$$

$$V_{6 \times 10}^3 = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 5} & \{[i\beta^i \partial_i + m - e\beta^i A_i(y)][1 - (\beta^0)^2]\}_{3 \times 5} \\ \{[1 - (\beta^0)^2][i\beta^i \partial_i - m + e\beta^i A_i(y)]\}_{3 \times 5} & 0_{3 \times 5} \end{pmatrix}$$

$$V_{6 \times 6}^4 = 0_{6 \times 6}.$$

(2.68)

Voltando ao problema de se construir um espaço de fase para a eletrodinâmica GSDKP₄ temos

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + \bar{C}^{(1)}\chi^{(1)} + \bar{\chi}^{(1)}C^{(1)} + \bar{C}^{(2)}\chi^{(2)} + \bar{\chi}^{(2)}C^{(2)} + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \tilde{C}_2\tilde{\varphi}_2, \quad (2.69)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \Pi_0\Gamma^0 + \Pi_k\Gamma^k + \Phi_k(\partial^k\Gamma_0 - \partial_l F^{lk} + \frac{\Phi^k}{2a^2}) - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^i(\overleftrightarrow{\partial}_i\psi) + m\bar{\psi}\psi + \\ &- e\bar{\psi}\hat{A}\psi + \frac{1}{4}F_{kj}F^{kj} + \frac{1}{4}(\Gamma_j - \partial_j A_0)^2 - \frac{a^2}{2}(\partial^j\Gamma_j - \partial^j\partial_j A_0)^2, \\ \chi^{(1)} &= p + \frac{i}{2}\beta^0\psi, \\ \bar{\chi}^{(1)} &= \bar{p} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^0, \\ \chi^{(2)} &= [1 - (\beta^0)^2][i\beta^i\partial_i\psi(x) - m\psi(x) + e\beta^i A_i(x)\psi(x)], \\ \bar{\chi}^{(2)} &= [i\partial_i\bar{\psi}(x)\beta^i + m\bar{\psi}(x) - e\bar{\psi}(x)\beta^i A_i(x)][1 - (\beta^0)^2], \\ \varphi_1 &= \Phi_0, \\ \varphi_2 &= \Pi_0 - \partial_k\Phi^k, \\ \tilde{\varphi}_2(x) &= e\bar{\psi}(x)\beta^0\psi(x) - \partial^k\Pi_k(x). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Tendo em vista os graus de liberdades físicos discutidos no apêndice (5.3), implementamos a condição de Coulomb generalizada por meio de um multiplicador de lagrange

$$\mathcal{H}'_T = \mathcal{H}_c + \bar{C}^{(1)}\chi^{(1)} + \bar{\chi}^{(1)}C^{(1)} + \bar{C}^{(2)}\chi^{(2)} + \bar{\chi}^{(2)}C^{(2)} + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \tilde{C}_2\tilde{\varphi}_2 + G_3\Sigma_3, \quad (2.71)$$

$$\Sigma_3 = (1 + a^2\Box)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \approx 0,$$

onde impomos a condição de estabilidade

$$\begin{aligned} \partial_0\Sigma_3(x) &= \int d^3\vec{y}\{\Sigma_3(x), \mathcal{H}'_T(y)\}_P \\ &= -\int d^3\vec{y}\{(1 + a^2\Box)(\partial_j A^j(x)), \Pi_k(y)\Gamma^k(y)\}_P \\ &= -\int d^3\vec{y}[(1 + a^2\Box)\partial_j\{A^j(x), \Pi_k(y)\}]\Gamma^k(y) \\ &= -\int d^3\vec{y}[(1 + a^2\Box)\partial_k\delta^3(\vec{x} - \vec{y})]\Gamma^k(y) \\ &= (1 + a^2\Box)\partial_k\Gamma^k(x) \\ &= (1 + a^2\Box)\partial_k\partial_0 A^k(x) \approx 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Observe que $A_0 \approx 0$ e, sendo assim, temos um vínculo secundário.

Novamente

$$\begin{aligned} \mathcal{H}''_T &= \mathcal{H}_c + \bar{C}^{(1)}\chi^{(1)} + \bar{\chi}^{(1)}C^{(1)} + \bar{C}^{(2)}\chi^{(2)} + \bar{\chi}^{(2)}C^{(2)} + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \tilde{C}_2\tilde{\varphi}_2 + G_3\Sigma_3 + G_2\Sigma_2 \\ \Sigma_2 &= A_0 \approx 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}
\partial_0 \Sigma_2(x) &= \int d^3 \vec{y} \{ \Sigma_2(x), \mathcal{H}_T''(y) \}_P \\
&= \int d^3 \vec{y} \{ A_0, \Pi_0(y) \}_P \Gamma^0(y) \\
&= \Gamma^0(x) \approx 0
\end{aligned} \tag{2.74}$$

e, conseqüentemente, temos um vínculo terciário. Logo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_T''' &= \mathcal{H}_c + \bar{C}^{(1)} \chi^{(1)} + \bar{\chi}^{(1)} C^{(1)} + \bar{C}^{(2)} \chi^{(2)} + \bar{\chi}^{(2)} C^{(2)} + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \tilde{C}_2 \tilde{\varphi}_2 + G_1 \Sigma_1 + G_2 \Sigma_2 + G_3 \Sigma_3 \\
\Sigma_1 &= \Gamma_0(x) \approx 0
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
\partial_0 \Sigma_2(x) &= \int d^3 \vec{y} \{ \Sigma_2(x), \mathcal{H}_T'''(y) \}_P \\
&= \int d^3 \vec{y} \{ \Gamma^0(x), \mathcal{H}_T'''(y) \}_P \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Por conseguinte, temos uma matriz de vínculos $V_{6 \times 6}^{vetorial}(\vec{x}, \vec{y})$ associada ao setor vetorial

$$V_{6 \times 6}^{vetorial} = \begin{pmatrix} \{\varphi_1, \varphi_1\} & \{\varphi_1, \varphi_2\} & \{\varphi_1, \tilde{\varphi}_2\} & \{\varphi_1, \Sigma_1\} & \{\varphi_1, \Sigma_2\} & \{\varphi_1, \Sigma_3\} \\ \{\varphi_2, \varphi_1\} & \{\varphi_2, \varphi_2\} & \{\varphi_2, \tilde{\varphi}_2\} & \{\varphi_2, \Sigma_1\} & \{\varphi_2, \Sigma_2\} & \{\varphi_2, \Sigma_3\} \\ \{\tilde{\varphi}_2, \varphi_1\} & \{\tilde{\varphi}_2, \varphi_2\} & \{\tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_2\} & \{\tilde{\varphi}_2, \Sigma_1\} & \{\tilde{\varphi}_2, \Sigma_2\} & \{\tilde{\varphi}_2, \Sigma_3\} \\ \{\Sigma_1, \varphi_1\} & \{\Sigma_1, \varphi_2\} & \{\Sigma_1, \tilde{\varphi}_2\} & \{\Sigma_1, \Sigma_1\} & \{\Sigma_1, \Sigma_2\} & \{\Sigma_1, \Sigma_3\} \\ \{\Sigma_2, \varphi_1\} & \{\Sigma_2, \varphi_2\} & \{\Sigma_2, \tilde{\varphi}_2\} & \{\Sigma_2, \Sigma_1\} & \{\Sigma_2, \Sigma_2\} & \{\Sigma_2, \Sigma_3\} \\ \{\Sigma_3, \varphi_1\} & \{\Sigma_3, \varphi_2\} & \{\Sigma_3, \tilde{\varphi}_2\} & \{\Sigma_3, \Sigma_1\} & \{\Sigma_3, \Sigma_2\} & \{\Sigma_3, \Sigma_3\} \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

Explicitando o cálculo dos elementos não nulos da matrix anterior, temos

$$\{\varphi_1(x), \Sigma_1(y)\} = \{\Phi_0(x), \Gamma_0(y)\} = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \tag{2.78}$$

$$\{\varphi_2(x), \Sigma_2(y)\} = \{\Pi_0(x) - \partial_k \Phi^k(x), A_0(y)\} = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \tag{2.79}$$

$$\{\tilde{\varphi}_2(x), \Sigma_3(y)\} = \{e\bar{\psi}(x)\beta^0\psi(x) - \partial^k \Pi_k(x), -(1+a^2\Box)(\partial_j A^j(y))\} = -(1-a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{2.80}$$

Sendo assim,

$$V_{6 \times 6}^{vetorial}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{2.81}$$

Formalmente o estudo de vínculos da GSDKP nos levou a construir a matriz de vínculos $V(\vec{x}, \vec{y})_{22 \times 22}$ dada por

$$V(\vec{x}, \vec{y})_{22 \times 22} = \begin{pmatrix} V_{16 \times 16}^{escalar}(\vec{x}, \vec{y}) & A_{16 \times 6}(\vec{x}, \vec{y}) \\ B_{6 \times 16}(\vec{x}, \vec{y}) & V_{6 \times 6}^{vetorial}(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{16 \times 16}^{escalar} & A_{16 \times 6} \\ B_{6 \times 16} & V_{6 \times 6}^{vetorial} \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.82)$$

onde o setor escalar e vetorial foram dispostos em blocos e

$$A_{16 \times 6}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0_{10 \times 2} & 0_{10 \times 1} & 0_{10 \times 3} \\ 0_{6 \times 2} & \begin{pmatrix} \{\chi^{(2)}, \tilde{\varphi}_2\}_P \\ \{\bar{\chi}^{(2)}, \tilde{\varphi}_2\}_P \end{pmatrix}_{6 \times 1} & 0_{6 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

$$B_{6 \times 16}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 16} \\ 0_{1 \times 10} & \begin{pmatrix} \{\tilde{\varphi}_2, \chi^{(2)}\}_P & \{\tilde{\varphi}_2, \bar{\chi}^{(2)}\}_P \end{pmatrix}_{1 \times 6} \\ 0_{3 \times 16} \end{pmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned} \{\chi^{(2)}(x), \tilde{\varphi}_2(y)\}_P &= \int d^4y \{ [1 - (\beta^0)^2] [e\beta^i A_i(x)\psi(x)], -\partial^k \Pi_k(y) \}_P \\ &= e[1 - (\beta^0)^2] \beta^i \partial_i \psi(x), \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{\chi}^{(2)}(x), \tilde{\varphi}_2(y)\}_P &= \int d^4y \{ [-e\bar{\psi}(x)\beta^i A_i(x)][1 - (\beta^0)^2], -\partial^k \Pi_k(y) \}_P \\ &= -e\partial_i \bar{\psi}(x) \beta^i [1 - (\beta^0)^2]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Como vimos, o espaço de fase físico é o espaço de fase descrito pelas 36 variáveis $(\bar{\psi}, \psi, A, \Gamma; p, \bar{p}, \Pi, \Phi)$ porém sujeito aos 22 vínculos $\{\chi^{(1)}, \bar{\chi}^{(1)}, \chi^{(2)}, \bar{\chi}^{(2)}, \varphi_1, \varphi_2, \tilde{\varphi}_2, \Sigma_3, \Sigma_2, \Sigma_1\}$. Existe a possibilidade de construir uma leitura intuitiva associada aos graus de liberdade físicos e sua conexão com os vínculos, vide apêndice (5.5).

É importante notar que nossas matrizes são matrizes de operadores diferenciais e o inverso de um operador diferencial é uma função de Green. Dessa forma para encontrarmos a inversa de $V(\vec{x}, \vec{y})_{22 \times 22}$ e podermos definir o parentese de Dirac precisamos resolver a seguinte equação algébrica

$$\int d^3 \vec{x} V^{-1}(\vec{z}, \vec{x})_{22 \times 22} V(\vec{x}, \vec{y})_{22 \times 22} = \delta^3(\vec{z} - \vec{y}) I. \quad (2.86)$$

O problema que estamos lidando é um problema de álgebra linear. Como o setor escalar e vetorial estão dispostos por blocos podemos resolver a equação anterior separando os setores [66]. Observa-se que

$$\begin{aligned} \det[V_{22 \times 22}] &= \det[V_{16 \times 16}^{escalar} - A_{16 \times 6} V_{6 \times 6}^{vetorial}^{-1} B_{6 \times 16}] \det[V_{6 \times 6}^{vetorial}] \\ V_{16 \times 16} &\doteq V_{16 \times 16}^{escalar} - A_{16 \times 6} (V_{6 \times 6}^{vetorial})^{-1} B_{6 \times 16}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Vamos encontrar a inversa da matriz $V_{6 \times 6}^{vetorial}(\vec{x}, \vec{y})$. Para isso

$$\int d^3\vec{x} V_{6\times 6}^{f^{-1}}(\vec{z}, \vec{x}) V_{6\times 6}^{vetorial}(\vec{x}, \vec{y}) = \delta^3(\vec{z} - \vec{y}) I$$

$$V_{6\times 6}^{vetorial^{-1}}(\vec{z}, \vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta^3(\vec{z} - \vec{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^3(\vec{z} - \vec{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G(\vec{z}, \vec{x}) \\ -\delta^3(\vec{z} - \vec{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta^3(\vec{z} - \vec{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G(\vec{z}, \vec{x}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Neste caso

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x} G(\vec{z}, \vec{x}) (1 - a^2 \vec{\nabla}^2) \vec{\nabla}^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) &= \delta^3(\vec{z} - \vec{y}) \\ (1 - a^2 \vec{\nabla}^2) \vec{\nabla}^2 G(\vec{z}, \vec{y}) &= \delta^3(\vec{z} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (2.89)$$

A partir de agora estamos aptos a quantizar a teoria, utilizando o procedimento de Faddeev-Popov-Senjanovic para obter a amplitude de transição.

A amplitude de transição é definida em sua forma hamiltoniana pela seguinte equação

$$Z = N \int D\mu \exp[i \int d^4x \mathcal{L}],$$

$$Z = N \int D\mu \exp[i \int d^4x \{ (\partial_0 \bar{\psi}) p + \bar{p} (\partial_0 \psi) + \Pi^\nu (\partial_0 A_\nu) + \Phi^\nu (\partial_0 \Gamma_\nu) - \mathcal{H}_c \}],$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \Pi_0 \Gamma^0 + \Pi_k \Gamma^k + \Phi_k (\partial^k \Gamma_0 - \partial_l F^{lk} + \frac{\Phi^k}{2a^2}) - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^i (\overleftrightarrow{\partial}_i \psi) + m \bar{\psi} \psi - e \bar{\psi} \hat{A} \psi + \\ &+ \frac{1}{4} F_{kj} F^{kj} + \frac{1}{4} (\Gamma_j - \partial_j A_0)^2 - \frac{a^2}{2} (\partial^j \Gamma_j - \partial^j \partial_j A_0)^2, \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$D\mu = D\Phi^\nu D\Gamma_\nu D\Pi^\mu DA_\mu D\bar{\psi} D\psi D\bar{p} Dp \delta(\Theta_l) \{ \det[V_{22 \times 22}] \}^{\frac{1}{2}},$$

onde $\Theta_l = \{ \chi^{(1)}, \bar{\chi}^{(1)}, \chi^{(2)}, \bar{\chi}^{(2)}, \varphi_1, \varphi_2, \tilde{\varphi}_2, \Sigma_3, \Sigma_2, \Sigma_1 \}$ é o conjunto total de vínculos da teoria. O interessante é que a medida de integração tem que se transformar como um escalar neste espaço de fase vinculado, por isso aparece a raiz de V associada ao jacobiano de uma transformação. Portanto, o funcional gerador é definido como sendo uma integral sobre todas as configurações de campos restritos ao espaço de fase vinculado.

De maneira explícita, a amplitude de transição Z é dada por

$$\begin{aligned} Z &= N \int D\Phi^\nu D\Gamma_\nu D\Pi^\mu DA_\mu D\bar{\psi} D\psi D\bar{p} Dp \delta(\Phi_0) \delta(\Pi_0 - \partial_k \Phi^k) \delta(e \bar{\psi} \beta^0 \psi + \partial^k \Pi_k) \delta(\Gamma_0) \delta(A_0) \times \\ &\times \delta((1 + a^2 \square) (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})) \delta(p + \frac{i}{2} \beta^0 \psi) \delta(\bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^0) \delta([1 - (\beta^0)^2] [i \beta^i \partial_i \psi - m \psi + e \beta^i A_i \psi]) \times \\ &\times \delta([-i \partial_i \bar{\psi} \beta^i + m \bar{\psi} - e \bar{\psi} \beta^i A_i] [1 - (\beta^0)^2]) \det[(1 + a^2 \vec{\nabla}^2) \vec{\nabla}^2] \{ \det[V_{16 \times 16}] \}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \exp[i \int d^4x \{ (\partial_0 \bar{\psi}) p + \bar{p} (\partial_0 \psi) + \Pi^\nu (\partial_0 A_\nu) + \Phi^\nu (\partial_0 \Gamma_\nu) - \Pi_0 \Gamma^0 - \Pi_k \Gamma^k - \Phi_k (\partial^k \Gamma_0 - \partial_l F^{lk} + \frac{\Phi^k}{2a^2}) + \\ &+ \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^i (\overleftrightarrow{\partial}_i \psi) - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \hat{A} \psi - \frac{1}{4} F_{kj} F^{kj} - \frac{1}{4} (\Gamma_j - \partial_j A_0)^2 + \frac{a^2}{2} (\partial^j \Gamma_j - \partial^j \partial_j A_0)^2 \}]. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Integrando nas variáveis Φ_0, Γ_0, Π_0 e A_0 ficamos com

$$\begin{aligned}
Z = N \int D\Phi^k D\Gamma_k D\Pi^l DA_l D\bar{\psi} D\psi D\bar{p} Dp \delta(e\bar{\psi}\beta^0\psi + \partial^k\Pi_k) \delta((1+a^2\Box)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})) \delta(p + \frac{i}{2}\beta^0\psi) \delta(\bar{p} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^0) \times \\
\times \delta([1 - (\beta^0)^2][i\beta^i\partial_i\psi - m\psi + e\beta^i A_i\psi]) \delta([-i\partial_i\bar{\psi}\beta^i + m\bar{\psi} - e\bar{\psi}\beta^i A_i][1 - (\beta^0)^2]) \det[(1+a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \times \\
\times \{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \exp[i\int d^4x\{(\partial_0\bar{\psi})p + \bar{p}(\partial_0\psi) + \Pi^k(\partial_0 A_k) + \Phi^k(\partial_0\Gamma_k) - \Pi_k\Gamma^k + \Phi_k(\partial_l F^{lk} - \frac{\Phi^k}{2a^2}) + \\
+ \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^i(\overleftrightarrow{\partial}_i\psi) - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}A^i\beta_i\psi - \frac{1}{4}F_{kj}F^{kj} - \frac{1}{4}(\Gamma_j\Gamma^j) + \frac{a^2}{2}(\partial^j\Gamma_j)^2\}].
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Integrando nas variáveis \bar{p} e p temos

$$\begin{aligned}
Z = N \int D\Phi^k D\Gamma_k D\Pi^l DA_l D\bar{\psi} D\psi \delta(e\bar{\psi}\beta^0\psi + \partial^k\Pi_k) \delta((1+a^2\Box)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})) \times \\
\times \delta([1 - (\beta^0)^2][i\beta^i\partial_i\psi - m\psi + e\beta^i A_i\psi]) \delta([-i\partial_i\bar{\psi}\beta^i + m\bar{\psi} - e\bar{\psi}\beta^i A_i][1 - (\beta^0)^2]) \times \\
\times \det[(1+a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \exp[i\int d^4x\{\Pi^k(\partial_0 A_k) + \Phi^k(\partial_0\Gamma_k) - \Pi_k\Gamma^k + \\
+ \Phi_k(\partial_l F^{lk} - \frac{\Phi^k}{2a^2}) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^\mu(\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi + eA^i\bar{\psi}\beta_i\psi - \frac{1}{4}F_{kj}F^{kj} - \frac{1}{4}(\Gamma_j\Gamma^j) + \\
+ \frac{a^2}{2}(\partial^j\Gamma_j)^2\}].
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Agora, escrevendo a delta funcional $\delta(e\bar{\psi}\beta^0\psi + \partial^k\Pi_k)$ em termos da sua transformada de Fourier

$$\delta(e\bar{\psi}\beta^0\psi + \partial^k\Pi_k) = \int D\theta \exp[i\int d^4x\{\theta(e\bar{\psi}\beta^0\psi + \partial^k\Pi_k)\}] \tag{2.94}$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
Z = N \int D\Phi^k D\Gamma_k D\Pi^l DA_l D\bar{\psi} D\psi D\theta \delta((1+a^2\Box)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})) \delta([1 - (\beta^0)^2][i\beta^i\partial_i\psi - m\psi + e\beta^i A_i\psi]) \times \\
\times \delta([-i\partial_i\bar{\psi}\beta^i + m\bar{\psi} - e\bar{\psi}\beta^i A_i][1 - (\beta^0)^2]) \det\{[(1+a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2]\} \{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \times \\
\times \exp[i\int d^4x\{\theta(e\bar{\psi}\beta^0\psi + \partial^k\Pi_k) + \Pi^k(\partial_0 A_k) + \Phi^k(\partial_0\Gamma_k) - \Pi_k\Gamma^k + \Phi_k(\partial_l F^{lk} - \frac{\Phi^k}{2a^2}) + \\
+ \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^\mu(\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi + eA^i\bar{\psi}\beta_i\psi - \frac{1}{4}F_{kj}F^{kj} - \frac{1}{4}(\Gamma_j\Gamma^j) + \frac{a^2}{2}(\partial^j\Gamma_j)^2\}].
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Podemos fazer a integral em $D\Pi^l$ na expressão anterior. Para tanto note que

$$\begin{aligned}
Z = N \int D\Phi^k D\Gamma_k D\theta DA_l D\bar{\psi} D\psi \delta((1+a^2\Box)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})) \delta([1 - (\beta^0)^2][i\beta^i\partial_i\psi - m\psi + e\beta^i A_i\psi]) \times \\
\times \delta([-i\partial_i\bar{\psi}\beta^i + m\bar{\psi} - e\bar{\psi}\beta^i A_i][1 - (\beta^0)^2]) \det[(1+a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \times \\
\times \exp[i\int d^4x\{\theta e\bar{\psi}\beta^0\psi + \Phi^k(\partial_0\Gamma_k) + \Phi_k(\partial_l F^{lk} - \frac{\Phi^k}{2a^2}) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^\mu(\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi + eA^i\bar{\psi}\beta_i\psi + \\
- \frac{1}{4}F_{kj}F^{kj} - \frac{1}{4}(\Gamma_j\Gamma^j) + \frac{a^2}{2}(\partial^j\Gamma_j)^2\}] D\Pi^l \exp[i\int d^4x\{-(\partial^k\theta)\Pi_k + \Pi^k(\partial_0 A_k) - \Pi_k\Gamma^k\}],
\end{aligned} \tag{2.96}$$

e utilizando

$$D\Pi^l \exp[i\int d^4x\{-(\partial^k\theta)\Pi_k + \Pi^k(\partial_0 A_k) - \Pi_k\Gamma^k\}] = \delta(\Gamma^l + \partial^l\theta - \partial_0 A^l), \text{ temos} \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned}
Z = N \int D\Phi^k D\Gamma_k D\theta DA_l D\bar{\psi} D\psi \delta((1+a^2\Box)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})) \delta([1 - (\beta^0)^2][i\beta^i\partial_i\psi - m\psi + e\beta^i A_i\psi]) \times \\
\times \delta([-i\partial_i\bar{\psi}\beta^i + m\bar{\psi} - e\bar{\psi}\beta^i A_i][1 - (\beta^0)^2]) \det[(1+a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \times \\
\times \exp[i\int d^4x\{\theta e\bar{\psi}\beta^0\psi + \Phi^k(\partial_0\Gamma_k) + \Phi_k(\partial_l F^{lk} - \frac{\Phi^k}{2a^2}) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^\mu(\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi + eA^i\bar{\psi}\beta_i\psi + \\
- \frac{1}{4}F_{kj}F^{kj} - \frac{1}{4}(\Gamma_j\Gamma^j) + \frac{a^2}{2}(\partial^j\Gamma_j)^2\}] \delta(\Gamma^l + \partial^l\theta - \partial_0 A^l).
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Fazendo a integral em $D\Gamma_k$ chegamos a

$$\begin{aligned}
Z &= N \int D\Phi^k D\theta DA_l D\bar{\psi} D\psi \delta((1 + a^2\Box)(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})) \delta([1 - (\beta^0)^2][i\beta^i \partial_i \psi - m\psi + e\beta^i A_i \psi]) \times \\
&\times \delta([-i\partial_i \bar{\psi} \beta^i + m\bar{\psi} - e\bar{\psi} \beta^i A_i][1 - (\beta^0)^2]) \det[(1 + a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \{\det[V_{16 \times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \exp[i \int d^4x \{ \theta e \bar{\psi} \beta^0 \psi + \Phi^k [\partial_0 (\partial_0 A_k - \partial_k \theta)] + \Phi_k (\partial_l F^{lk} - \frac{\Phi^k}{2a^2}) + \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu (\overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi + \\
&+ e A^i \bar{\psi} \beta_i \psi - \frac{1}{4} F_{kj} F^{kj} - \frac{1}{4} (\partial_0 A_j - \partial_j \theta) (\partial_0 A^j - \partial^j \theta) + \frac{a^2}{2} [\partial^j (\partial_0 A_j - \partial_j \theta)]^2 \}].
\end{aligned} \tag{2.99}$$

e identificando $\theta = A_0$

$$\begin{aligned}
Z &= N \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \delta((1 + a^2\Box)(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})) \delta([1 - (\beta^0)^2][i\beta^i \partial_i \psi - m\psi + e\beta^i A_i \psi]) \times \\
&\times \delta([-i\partial_i \bar{\psi} \beta^i + m\bar{\psi} - e\bar{\psi} \beta^i A_i][1 - (\beta^0)^2]) \det[(1 + a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \{\det[V_{16 \times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \exp[i \int d^4x \{ \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu (\overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \hat{A} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} [\partial^\mu F_{0\mu}]^2 \} \times \\
&\times \int D\Phi^k \exp[i \int d^4x \{ \Phi_k (\partial_\mu F^{\mu k}) - \frac{\Phi_k \Phi^k}{2a^2} \}].
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Completando quadrados na variável de integração $D\Phi^k$ ficamos com

$$\int D\Phi^k \exp[i \int d^4x \{ \Phi_k (\partial_\mu F^{\mu k}) - \frac{\Phi_k \Phi^k}{2a^2} \}] = \int D\Phi^k \exp[i \int d^4x \{ -\frac{(\Phi_k - a^2 \partial^\mu F_{\mu k})(\Phi^k - a^2 \partial_\mu F^{\mu k})}{2a^2} + \frac{a^2}{2} (\partial^\mu F_{\mu k})(\partial_\mu F^{\mu k}) \}]. \tag{2.101}$$

Logo, a amplitude de transição é dada por

$$\begin{aligned}
Z &= N \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \delta((1 + a^2\Box)(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})) \delta([1 - (\beta^0)^2][i\beta^i \partial_i \psi - m\psi + e\beta^i A_i \psi]) \times \\
&\times \delta([-i\partial_i \bar{\psi} \beta^i + m\bar{\psi} - e\bar{\psi} \beta^i A_i][1 - (\beta^0)^2]) \det[(1 + a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \{\det[V_{16 \times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \exp[i \int d^4x \{ \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu (\overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \hat{A} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \}],
\end{aligned} \tag{2.102}$$

$$N^{(1)} = N \int D\Phi^k \exp[i \int d^4x \{ -\frac{(\Phi_k - a^2 \partial^\mu F_{\mu k})(\Phi^k - a^2 \partial_\mu F^{\mu k})}{2a^2} \}].$$

Por fim, trabalharemos com as integrais nas variáveis $\bar{\psi}$ e ψ . Primeiramente, observa-se que

$$\begin{aligned}
\delta([1 - (\beta^0)^2][i\beta^i (\partial_i - ieA_i)\psi - m\psi]) &= \int D\bar{C} \exp[i \int d^4x \{ \bar{C} [1 - (\beta^0)^2][i\beta^i (\partial_i - ieA_i)\psi - m\psi] \}], \\
\delta([i(\partial_i + ieA_i)\bar{\psi} \beta^i + m\bar{\psi}][1 - (\beta^0)^2]) &= \int DC \exp[i \int d^4x \{ [i(\partial_i + ieA_i)\bar{\psi} \beta^i + m\bar{\psi}][1 - (\beta^0)^2] C \}].
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Tendo em vista a definição de derivada covariante $\nabla_\mu = (\partial_\mu - ieA_\mu)$ escrevemos

$$\begin{aligned}
Z &= N^{(1)} \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi D\bar{C} DC \delta((1 + a^2\Box)(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})) \det[(1 + a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \{\det[V_{16 \times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi} [i\beta^\mu \nabla_\mu - m] \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \\
&+ \bar{C} [1 - (\beta^0)^2][i\beta^\mu \nabla_\mu - m] \psi + \bar{\psi} [i\beta^\mu \overleftarrow{\nabla}_\mu + m][1 - (\beta^0)^2] C \}],
\end{aligned} \tag{2.104}$$

$$[1 - (\beta^0)^2] \beta^0 = 0.$$

Fazendo a integração funcional em $\bar{\psi}$ somos levados a

$$Z = N^{(1)} \int DA_\mu D\psi D\bar{C}DC \delta((1+a^2\Box)(\vec{\nabla}.\vec{A})) \det[(1+a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp[i \int d^4x \{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \bar{C}[1-(\beta^0)^2][i\beta^\mu\nabla_\mu - m]\psi\}] \times \\ \times \int D\bar{\psi} \exp[i \int d^4x \bar{\psi}\{(i\beta^\mu\nabla_\mu - m)\psi - (i\beta^\mu\nabla_\mu - m)[1-(\beta^0)^2]C\}], \quad (2.105)$$

$$Z = N^{(1)} \int DA_\mu D\psi D\bar{C}DC \delta((1+a^2\Box)(\vec{\nabla}.\vec{A})) \det[(1+a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp[i \int d^4x \{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \bar{C}[1-(\beta^0)^2][i\beta^\mu\nabla_\mu - m]\psi\}] \times \\ \times \delta\{(i\beta^\mu\nabla_\mu - m)\psi - (i\beta^\mu\nabla_\mu + m)[1-(\beta^0)^2]C\}. \quad (2.106)$$

É de nosso conhecimento a seguinte propriedade

$$\delta(A\psi + B) = \delta(A[\psi + \frac{B}{A}]) = \frac{1}{\det[A]} \delta(\psi + \frac{B}{A}). \quad (2.107)$$

Neste caso,

$$\delta\{(i\beta^\mu\nabla_\mu - m)\psi - (i\beta^\mu\nabla_\mu - m)[1-(\beta^0)^2]C\} = \frac{1}{\det[(i\beta^\mu\nabla_\mu - m)]} \delta(\psi - \frac{(i\beta^\mu\nabla_\mu - m)[1-(\beta^0)^2]C}{(i\beta^\mu\nabla_\mu - m)}). \quad (2.108)$$

Portanto, fazendo a integração funcional em ψ na equação (2.106), concluímos que

$$Z = N^{(1)} \int DA_\mu D\psi D\bar{C}DC \delta((1+a^2\Box)(\vec{\nabla}.\vec{A})) \det[(1+a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \frac{1}{\det[(i\beta^\mu\nabla_\mu - m)]} \exp[i \int d^4x \{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{\bar{C}[1-(\beta^0)^2]i\beta^\mu\nabla_\mu - m[1-(\beta^0)^2]C}{(i\beta^\mu\nabla_\mu - m)}\}]. \quad (2.109)$$

Então,

$$Z = N^{(2)} \int DA_\mu \delta((1+a^2\Box)(\vec{\nabla}.\vec{A})) \det[(1+a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\det[(i\beta^\mu\nabla_\mu - m)]} \times \\ \times \exp[i \int d^4x \{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\}] \quad (2.110)$$

onde por meio da álgebra de DKP

$$N^{(2)} = N \int D\Phi^k \exp[i \int d^4x \{-\frac{(\Phi_k - a^2\partial^\mu F_{\mu k})(\Phi^k - a^2\partial_\mu F^{\mu k})}{2a^2}\}] \times \\ \times \int D\bar{C}DC \exp[i \int d^4x \{m\bar{C}[1-(\beta^0)^2]C\}]. \quad (2.111)$$

Lembrando-se que

$$\frac{1}{\det[(i\beta^\mu\nabla_\mu - m)]} = \epsilon \int D\bar{\psi}D\psi \exp[i \int d^4x \{\bar{\psi}(i\beta^\mu\nabla_\mu - m)\psi\}] \quad (2.112)$$

onde ϵ é uma constante infinita, discutida no apêndice (5.10), encontramos uma expressão final para amplitude de transição Z

$$Z = N^{(2)}\epsilon \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \delta((1 + a^2\Box)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})) \det[(1 + a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi}(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \}], \text{ ou}$$

$$Z = N^{(3)} \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \delta((1 + a^2\Box)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})) \det\{[(1 + a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2]\} \{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}} \exp[i \int d^4x \mathcal{L}], \text{ com} \\ N^{(3)} = N\epsilon \int D\Phi^k \exp[i \int d^4x \{ -\frac{(\Phi_k - a^2\partial^\mu F_{\mu k})(\Phi^k - a^2\partial_\mu F^{\mu k})}{2a^2} \}] \int D\bar{C}DC \exp[i \int d^4x \{ m\bar{C}[1 - (\beta^0)^2]C \}]. \quad (2.113)$$

Como $\{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}}$ não depende dos campos A_μ , $\bar{\psi}$ e ψ , temos que

$$Z = N^{(4)} \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det[(1 + a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \delta((1 + a^2\Box)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})) \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi}(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \\ + \frac{a^2}{2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \}], \text{ sendo}$$

$$N^{(4)} = N\epsilon \int D\Phi^k \exp[i \int d^4x \{ -\frac{(\Phi_k - a^2\partial^\mu F_{\mu k})(\Phi^k - a^2\partial_\mu F^{\mu k})}{2a^2} \}] \times \\ \times \int D\bar{C}DC \exp[i \int d^4x \{ m\bar{C}[1 - (\beta^0)^2]C \}] \{\det[V_{16\times 16}]\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.114)$$

Embora a expressão anterior para a amplitude de transição seja correta sua forma não é covariante explicitamente. Entretanto, podemos usar o ansatz de Faddeev-Popov-DeWitt para determinar a forma covariante da amplitude de transição vácuo-vácuo. Para o caso da condição de calibre *no-mixing*

$$\det[(1 + a^2\Box)^{\frac{1}{2}}\Box\delta^4(x - y)] \int \prod_x d\alpha(x) \delta[(1 + a^2\Box)^{\frac{1}{2}}\partial_\mu A^{\alpha\mu}] = 1. \quad (2.115)$$

Vamos inserir a identidade anterior em (2.114)

$$Z = N^{(4)} \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det[(1 + a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \delta[(1 + a^2\Box)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})] \det[(1 + a^2\Box)^{\frac{1}{2}}\Box\delta^4(x - y)] \times \\ \times \int \prod d\alpha(x) \delta[(1 + a^2\Box)^{\frac{1}{2}}\partial_\mu A^{\alpha\mu}] \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi}(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \}],$$

$$Z = N^{(4)} \int \prod d\alpha(x) \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det[(1 + a^2\vec{\nabla}^2)\vec{\nabla}^2] \delta[(1 + a^2\Box)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})] \det[(1 + a^2\Box)^{\frac{1}{2}}\Box\delta^4(x - y)] \times \\ \times \delta[(1 + a^2\Box)^{\frac{1}{2}}\partial_\mu A^{\alpha\mu}] \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi}(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \}]. \quad (2.116)$$

Aplicando a transformação de calibre

$$A_\mu \rightarrow A^{(\alpha^{-1})}_\mu, \\ \psi \rightarrow \exp[i\alpha^{-1}(x)]\psi, \\ \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp[-i\alpha^{-1}(x)], \quad (2.117)$$

na equação anterior concluímos

$$Z = N^{(4)} \int \prod d\alpha(x) \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det[(1 + a^2 \vec{\nabla}^2) \vec{\nabla}^2] \delta[(1 + a^2 \square) (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^{(\alpha^{-1})})] \det[(1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \square \delta^4(x - y)] \delta[(1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu A^\mu] \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi} (i\beta^\mu \nabla_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \}], \quad (2.118)$$

observando que a medida de integração e a densidade de lagrangiana são invariantes perante uma transformação de calibre. Deste modo

$$Z = N^{(4)} \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det[(1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \square \delta^4(x - y)] \delta[(1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu A^\mu] \times \{ \int \prod d\alpha(x) \det[(1 + a^2 \vec{\nabla}^2) \vec{\nabla}^2] \delta[(1 + a^2 \square) (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^{(\alpha^{-1})})] \} \times \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi} (i\beta^\mu \nabla_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \}], \text{ com} \quad (2.119)$$

$$\int \prod d\alpha(x) \det[(1 + a^2 \vec{\nabla}^2) \vec{\nabla}^2] \delta[(1 + a^2 \square) (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^{(\alpha^{-1})})] = 1$$

A partir deste momento, podemos escrever a seguinte amplitude de transição

$$Z = N^{(4)} \int Df \exp[-i \int d^4x \frac{f^2}{2\xi}] \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det[(1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \square \delta^4(x - y)] \delta[(1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu A^\mu - f] \times \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi} (i\beta^\mu \nabla_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \}],$$

$$Z = N^{(5)} \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi} (i\beta^\mu \nabla_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{[(1+a^2\square)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu A^\mu]^2}{2\xi} \}]$$

$$N^{(5)} = N\epsilon \{ \int \prod d\alpha(x) \det[(1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \square \delta^4(x - y)] \int D\Phi^k \exp[i \int d^4x \{ -\frac{(\Phi^k - a^2 \partial^\mu F_{\mu k})(\Phi^k - a^2 \partial_\mu F^{\mu k})}{2a^2} \}] \} \times \int D\bar{C} DC \exp[i \int d^4x \{ m\bar{C}[1 - (\beta^0)^2]C \}] \{ \det[V_{16 \times 16}] \}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.120)$$

Desse modo, ao inserirmos as fontes na amplitude de transição anterior, encontramos o funcional gerador associado à eletrodinâmica GSDKP₄

$$Z = N^{(5)} \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi} (i\beta^\mu \nabla_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{[(1+a^2\square)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu A^\mu]^2}{2\xi} + J_\mu A^\mu \}]. \quad (2.121)$$

A importância do objeto anterior conhecido como funcional gerador advém de teoria das fontes de Schwinger. Ele está relacionado ao estudo das equações de movimento quânticas na descrição de Heisenberg, utilizando uma linguagem de funcionais ao invés de operadores. A maneira com a qual extraímos informações gerais da teoria é muito simples no formalismo funcional de Schwinger, assunto que trabalharemos nas próximas discussões.

A densidade de lagrangiana pode ser escrita de uma maneira conveniente

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\beta^\mu \nabla_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{[(1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu A^\mu]^2}{2\xi} \\ &= \bar{\psi} (i\beta^\mu \nabla_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\xi} + a^2 \frac{(\partial_\nu \partial_\mu A^\mu)^2}{2\xi}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

O interessante é que ao escolher a condição de calibre *no-mixing* mantemos a ordem da densidade de lagrangiana original e temos derivadas até quarta ordem. No caso da condição de Lorenz generalizado a densidade de lagrangiana passa a ter termos com derivada de sexta ordem.

2.2 As equações de Schwinger-Dyson

A maneira mais elegante de se estudar o conjunto de equações quânticas de campos na descrição de Heisenberg [67, 68] é por meio do formalismo funcional, que consiste em uma cadeia infinita de equações diferenciais que relacionam diferentes funções de Green de maneira exata [69, 70]. Essa torre infinita de equações é conhecida como equações de Schwinger-Dyson (SD) [71].

A proposta deste capítulo é de determinar as equações completas de SD para os propagadores associados ao campo vetorial, escalar e também à função de vértice utilizando o funcional gerador definido pela equação (2.121).

2.2.1 O Propagador do campo vetorial

Tendo em vista o princípio da mínima ação de Hamilton e as suas consequentes equações de Euler-Lagrange, podemos dizer que

$$\frac{\delta S_{eff}}{\delta A_\mu(x)} = -J_\mu(x), \quad (2.123)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Vamos explicitar os termos importantes na ação efetiva para o cálculo em questão a menos de divergências totais,

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}A_\mu(\eta^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu, \quad (2.124)$$

$$\frac{a^2}{2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{a^2}{2}A_\mu(\eta^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu)\square A_\nu, \quad (2.125)$$

$$-\frac{1}{2\xi}\{(1 + a^2\square)^{\frac{1}{2}}\partial^\mu A_\mu\}^2 = \frac{1}{2\xi}A_\mu(1 + a^2\square)\partial^\mu\partial^\nu A_\nu. \quad (2.126)$$

Logo,

$$\frac{\delta S_{eff}}{\delta A_\mu} = \{\square\eta^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu\}(1 + a^2\square)A_\nu + e\bar{\psi}\beta^\mu\psi = -J_\mu. \quad (2.127)$$

Elevando a linguagem em nível quântico

$$\langle [\frac{\delta S_{eff}}{\delta A_\mu(x)} + J_\mu(x)] \rangle = \int D\mu [\frac{\delta S_{eff}}{\delta A_\mu(x)} + J_\mu(x)] \exp[iS_{eff}] = 0. \quad (2.128)$$

Em termos do funcional gerador Z,

$$[\{\square\eta^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu\}(1 + a^2\square)\frac{\delta}{i\delta J^\nu(x)} + e\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}(x)}\beta^\mu\frac{\delta}{i\delta\eta(x)} + J_\mu]Z = 0. \quad (2.129)$$

Como apenas as funções de Grenn conexas contribuem para a amplitude de transição $W = -i \ln Z$

$$A_\mu = \frac{\delta W}{\delta J^\mu} \quad \psi = \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} \quad \bar{\psi} = \frac{\delta W}{\delta \eta}. \quad (2.130)$$

Observe que agora os campos são a valores médios.

Neste caso dividindo (2.129) por Z ,

$$-J_\mu = \{ \square \eta^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\mu \partial^\nu \} (1 + a^2 \square) \frac{\delta(-i \ln Z)}{\delta J^\nu} - e \left(\frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}} \frac{1}{Z} \right) \beta^\mu \frac{\delta Z}{i \delta \eta} + \quad (2.131)$$

$$+ e \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}} \beta^\mu \frac{\delta}{\delta \eta} (-i \ln Z), \quad (2.132)$$

$$-J_\mu = \{ \square \eta^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\mu \partial^\nu \} (1 + a^2 \square) \frac{\delta W}{\delta J^\nu} - e \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} \beta^\mu \frac{\delta W}{\delta \eta} - i e \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \beta^\mu \frac{\delta}{\delta \eta} (W).$$

Por outro lado, temos também o gerador das funções de Green irreduzíveis definido por uma transformada de Legendre,

$$\Gamma = W - \int d^4x (\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + A^\mu J_\mu) \quad (2.133)$$

$$J_\mu = -\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} \quad \eta = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} \quad \bar{\eta} = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi}. \quad (2.134)$$

Em termos dos projetores

$$T^{\mu\nu} \doteq \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \quad L^{\mu\nu} \doteq \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \quad (2.135)$$

e das definições anteriores, podemos concluir que

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} = [T^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} L^{\mu\nu}] (1 + a^2 \square) \square A_\nu(x) - i e \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \beta^\mu \frac{\delta}{\delta \eta(x)} (W), \quad (2.136)$$

onde as fontes escalares foram consideradas nulas.

Agora observa-se o seguinte

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} = -\eta \quad (2.137)$$

$$\frac{\delta}{\delta \eta(y)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} = -\delta^4(x - y) \quad (2.138)$$

$$\int d^4z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(z) \delta \bar{\psi}(x)} \frac{\delta \psi(z)}{\delta \eta(y)} = -\delta^4(x - y) \quad (2.139)$$

$$\int d^4z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(z) \delta \bar{\psi}(x)} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(z)} = -\delta^4(x - y), \quad (2.140)$$

onde podemos definir a quantidade

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(z)} \doteq i\mathcal{S}(z, y). \quad (2.141)$$

Observa-se que

$$\frac{\delta^2 W}{\delta\eta\delta\bar{\eta}} = -i\frac{\delta^2 \ln(Z)}{\delta\eta\delta\bar{\eta}} = i\left[\frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{i\delta\eta i\delta\bar{\eta}} - \frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta\eta}\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta\bar{\eta}}\right] = i[\mathcal{S}_{total} - \mathcal{S}_{desconexo}] = i\mathcal{S}_{conexo} \quad (2.142)$$

$$\int d^4 z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\psi(z)\delta\bar{\psi}(x)} \mathcal{S}(z, y) = i\delta^4(x - y) \Rightarrow \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\psi\delta\bar{\psi}} = \mathcal{S}^{-1}. \quad (2.143)$$

Portanto²,

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} = [T^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi}L^{\mu\nu}](1 + a^2\Box)\Box A_\nu(x) - i\text{etr}[\beta^\mu \mathcal{S}(x, x)]. \quad (2.144)$$

Aplicando uma derivada funcional $\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}$ na equação anterior e tomando a fonte vetorial nula,

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\nu(y)\delta A_\mu(x)} = [T^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi}L^{\mu\nu}](1 + a^2\Box)\Box\delta^4(x - y) - i\text{etr}\{\beta^\mu[\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\mathcal{S}(x, x)]\} \quad (2.145)$$

Da mesma forma

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} = -J^\mu(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta J_\nu(y)} \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} = -\eta^{\mu\nu}\delta^4(x - y) \quad (2.146)$$

$$\int d^4 z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\theta(z)\delta A_\mu(x)} \frac{\delta A_\theta(z)}{\delta J_\nu(y)} = -\eta^{\mu\nu}\delta^4(x - y) \quad (2.147)$$

$$\int d^4 z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\theta(z)\delta A_\mu(x)} \frac{\delta^2 W}{i\delta J_\nu(y)\delta J^\theta(z)} = -\eta^{\mu\nu}\delta^4(x - y), \quad (2.148)$$

onde podemos definir a quantidade

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J_\nu(y)\delta J^\theta(z)} \doteq i\mathcal{D}_\theta^\nu(z, y) \quad (2.149)$$

$$\int d^4 z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\theta(z)\delta A_\mu(x)} \mathcal{D}_\theta^\nu(z, y) = i\eta^{\mu\nu}\delta^4(x - y) \Rightarrow \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A\delta A} = \mathcal{D}^{-1}. \quad (2.150)$$

Sendo assim,

$$\mathcal{D}^{-1\mu\nu}(x, y) = [T^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi}L^{\mu\nu}](1 + a^2\Box)\Box\delta^4(x - y) - i\text{etr}\{\beta^\mu[\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\mathcal{S}(x, x)]\}. \quad (2.151)$$

²Lembremos que as quantidades associadas ao setor escalar são matrizes. Por simplicidade não é necessário colocar os índices escalares.

Para escrever a expressão anterior de maneira conveniente aplicaremos $\frac{\delta}{\delta A^\nu(w)}$ em (2.143)

$$\int d^4z \left[\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\nu(w) \delta \psi(z) \delta \bar{\psi}(x)} \mathcal{S}(z, y) + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(z) \delta \bar{\psi}(x)} \frac{\delta \mathcal{S}(z, y)}{\delta A_\nu(w)} \right] = 0 \quad (2.152)$$

$$\int d^4z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(z) \delta \bar{\psi}(x)} \frac{\delta \mathcal{S}(z, y)}{\delta A_\nu(w)} = - \int d^4z \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\nu(w) \delta \psi(z) \delta \bar{\psi}(x)} \mathcal{S}(z, y). \quad (2.153)$$

Para inverter a equação anterior integraremos,

$$\int d^4x \mathcal{S}(v, x) \left[\int d^4z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(z) \delta \bar{\psi}(x)} \frac{\delta \mathcal{S}(z, y)}{\delta A_\nu(w)} \right] = \int d^4z \frac{\delta \mathcal{S}(z, y)}{\delta A_\nu(w)} i \delta^4(z - v) = i \frac{\delta \mathcal{S}(v, y)}{\delta A_\nu(w)}, \quad (2.154)$$

$$i \frac{\delta \mathcal{S}(v, y)}{\delta A_\nu(w)} = - \int d^4x d^4z \mathcal{S}(v, x) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\nu(w) \delta \psi(z) \delta \bar{\psi}(x)} \mathcal{S}(z, y) \Rightarrow \frac{\delta}{\delta A} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi \delta \bar{\psi}} \right)^{-1} = \mathcal{S} \frac{i \delta^3 \Gamma}{\delta A \delta \psi \delta \bar{\psi}} \mathcal{S}. \quad (2.155)$$

De maneira conveniente,

$$\begin{aligned} i \frac{\delta \mathcal{S}_{ar}(x, x)}{\delta A_\nu(y)} &= - \int d^4u d^4w \mathcal{S}_{ac}(u, x) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\nu(y) \delta \psi_b(u) \delta \bar{\psi}_c(w)} \mathcal{S}_{br}(x, w) = \\ &= -e \int d^4u d^4w \mathcal{S}_{ac}(x, w) \Gamma_{cb}^\nu(w, u; y) \mathcal{S}_{br}(x, w) \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\nu(y) \delta \psi(u)_b \delta \bar{\psi}_c(w)} \doteq e \Gamma_{cb}^\nu(w, u; y).$$

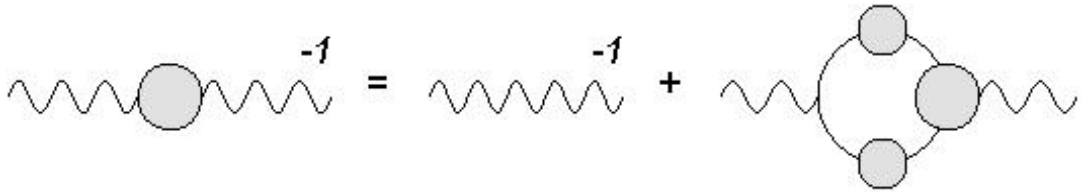
Neste caso,

$$\mathcal{D}^{-1 \mu \nu}(x, y) = [T^{\mu \nu} + \frac{1}{\xi} L^{\mu \nu}] (1 + a^2 \square) \square \delta^4(x - y) + \Pi^{\mu \nu}(x, y), \quad (2.157)$$

onde definimos o funcional associado a polarização,

$$\Pi^{\mu \nu}(x, y) \doteq e^2 \int d^4u d^4w \text{tr} [\beta^\mu \mathcal{S}(u, x) \Gamma^\nu(w, u; y) \mathcal{S}(x, w)]. \quad (2.158)$$

Em termos dos diagramas completos de SDF a equação (2.157) é dada pictoricamente



A expressão anterior esta na representação de coordenadas, vamos escrevê-la na representação de momento. Deste modo, definimos como transformada de Fourier dos funcionais

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{4n} \int d^4p_1 d^4p_2 \dots d^4p_n \exp[-ix_1 p_1 + ix_2 p_2 + \dots + ix_n p_n] F(p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (2.159)$$

Se $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é invariante por translações ($x_i + \epsilon$), devemos ter como consequência a conservação do fluxo dos momentos ou a lei de Kirchoff

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{4n} \int d^4 p_1 d^4 p_2 \dots d^4 p_n \exp[-ix_1 p_1 + ix_2 p_2 + \dots + ix_n p_n] (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 - \dots - p_n) F(p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (2.160)$$

Explicitando as quantidades em termos de sua transformada de Fourier,

$$\Pi^{\mu\nu}(p_1, p_2) = \int d^4 x d^4 y \exp[+ixp_1 - iyp_2] \Pi^{\mu\nu}(x, y) \quad (2.161)$$

$$\mathcal{S}(u, x) = \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \exp[-ik_1(u - x)] \mathcal{S}(k_1) \quad (2.162)$$

$$\mathcal{S}(x, w) = \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \exp[-iq_1(x - w)] \mathcal{S}(q_1) \quad (2.163)$$

$$\Gamma^\nu(w, u; y) = \int \frac{d^4 s_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_3}{(2\pi)^4} \exp[-iws_1 + ius_2 + iys_3] \Gamma^\nu(s_1, s_2; s_3). \quad (2.164)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= e^2 \int d^4 x d^4 y d^4 u d^4 w \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \exp[+ixp_1 - iyp_2] \exp[-ik_1(u - x)] \\ &\exp[-iws_1 + ius_2 + iys_3] \exp[-iq_1(x - w)] \text{tr}[\beta^\mu \mathcal{S}(k_1) \Gamma^\nu(s_1, s_2; s_3) \mathcal{S}(q_1)] = e^2 \int d^4 x d^4 y d^4 u d^4 w \\ &\frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \exp[ix(p_1 + k_1 - q_1)] \exp[-iy(p_2 - s_3)] \exp[-iu(k_1 - s_2)] \\ &\exp[-iw(s_1 - q_1)] \text{tr}[\beta^\mu \mathcal{S}(k_1) \Gamma^\nu(s_1, s_2; s_3) \mathcal{S}(q_1)] = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k_1 d^4 s_1 d^4 s_2 d^4 s_3 d^4 q_1 \\ &\delta^4(p_1 + k_1 - q_1) \delta^4(p_2 - s_3) \delta^4(k_1 - s_2) \delta^4(s_1 - q_1) \text{tr}[\beta^\mu \mathcal{S}(k_1) \Gamma^\nu(s_1, s_2; s_3) \mathcal{S}(q_1)] = \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k_1 d^4 q_1 \delta^4(p_1 + k_1 - q_1) \text{tr}[\beta^\mu \mathcal{S}(k_1) \Gamma^\nu(q_1, k_1; p_2) \mathcal{S}(q_1)]. \end{aligned} \quad (2.165)$$

Como $\Pi^{\mu\nu}(x, y)$ deve ser invariante por translação, pois na equação (2.157) $\mathcal{D}^{-1\mu\nu}(x, y)$ e $\delta^4(x - y)$ são invariantes, impomos a conservação do fluxo de momento da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= (2\pi)^4 \Pi^{\mu\nu}(p_1, p_2) \delta^4(p_1 - p_2) \\ &= e^2 \int d^4 k_1 d^4 q_1 \delta^4(p_1 + k_1 - q_1) \text{tr}[\beta^\mu \mathcal{S}(k_1) \Gamma^\nu(q_1, k_1; p_2) \mathcal{S}(q_1)] \delta^4(p_1 - p_2), \end{aligned} \quad (2.166)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(x, y) &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \exp[-ip_1 x + ip_2 y] \Pi^{\mu\nu}(p_1, p_2) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \exp[-ip_1(x - y)] \Pi^{\mu\nu}(p_1, p_1) = \\ &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \exp[-ip_1(x - y)] \Pi^{\mu\nu}(p_1). \end{aligned} \quad (2.167)$$

Portanto, a transformada de Fourier da equação (2.157) é dada por

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x - y)] \mathcal{D}^{-1\mu\nu}(p) &= \{[T^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} L^{\mu\nu}](1 + a^2 \square) \square \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x - y)]\} + \\ &+ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x - y)] \Pi^{\mu\nu}(p), \end{aligned} \quad (2.168)$$

$$\mathcal{D}^{-1\mu\nu}(p) = -[T^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi}L^{\mu\nu}](1 - a^2p^2)p^2 + \Pi^{\mu\nu}(p) \quad (2.169)$$

onde agora

$$T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \quad L^{\mu\nu} = \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}. \quad (2.170)$$

Por fim, inverteremos (2.169) a fim de encontrar o propagador completo do fóton, mas antes observamos algumas identidades na representação de momento

$$\begin{aligned} \int d^4z \mathcal{D}^{-1\mu\theta}(x, z) \mathcal{D}_\theta^\nu(z, y) &= \eta^{\mu\nu} \delta^4(x - y) \\ \int d^4z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x - z)] \mathcal{D}^{-1\mu\theta}(p) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \exp[-iq(z - y)] \mathcal{D}_\theta^\nu(q) &= \eta^{\mu\nu} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x - y)] \\ \mathcal{D}^{-1\mu\theta}(p) \mathcal{D}_\theta^\nu(p) &= \eta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.171)$$

Será necessário também o conhecimento da identidade de Ward-Takahashi mais o fato de nossas estruturas serem tensoriais no intuito de manter a invariância de calibre e a covariância relativística³. Com essas afirmações, escrevemos uma forma explícita para o $\Pi^{\mu\nu}(p)$,

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) &= (-\eta^{\mu\nu}p^2 + p^\mu p^\nu)\Pi(p) \\ &= -T^{\mu\nu}p^2\Pi(p). \end{aligned} \quad (2.172)$$

Portanto,

$$\mathcal{D}^{-1\mu\nu}(p) = -[\Pi(p) + (1 - a^2p^2)]p^2T^{\mu\nu} + [\frac{1}{\xi}(1 - a^2p^2)p^2]L^{\mu\nu}. \quad (2.173)$$

Inverteremos a equação anterior tendo em vista que $T^{\mu\nu}$ e $L^{\mu\nu}$ são projetores e satisfazem a relação $T^{\mu\nu} + L^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-1\mu\nu}(p) &= aT^{\mu\nu} + bL^{\mu\nu} \\ \mathcal{D}_{\mu\nu}(p) &= cT_{\mu\nu} + dL_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.174)$$

$$\mathcal{D}^{-1\mu\nu}(p) \mathcal{D}_{\mu\nu}(p) = i\eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = 4i,$$

3

$\Pi^{\mu\nu}(p) = [a(p)\eta^{\mu\nu} + b(p)p^\mu p^\nu]$ (covariância relativística)
 $\Pi^{\mu\nu}(p)p_\mu = 0 = \Pi^{\mu\nu}(p)p_\nu$ (identidade de Ward – Takahashi)

$\Pi^{\mu\nu}(p)p_\mu = [a(p) + b(p)p^2]p_\nu = 0$
 $a(p) = -b(p)p^2, b(p) = \Pi(p)$

$\Pi^{\mu\nu}(p) = (-\eta^{\mu\nu}p^2 + p_\mu p_\nu)\Pi(p)$.

$$(aT_{\mu\nu} + bL_{\mu\nu})(cT^{\mu\nu} + dL^{\mu\nu}) = 3ac + 1bd = 4i,$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{i}{a}, \\ d &= \frac{i}{b}, \end{aligned} \tag{2.175}$$

$$\begin{aligned} i\mathcal{D}_{\mu\nu}(p) &= -\frac{T_{\mu\nu}}{[\Pi(p) + (1 - a^2p^2)]p^2} + \xi \frac{L_{\mu\nu}}{(1 - a^2p^2)p^2} \\ &= -\frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}}{[\Pi(p) + (1 - a^2p^2)]p^2} + \xi \frac{1}{(1 - a^2p^2)p^2} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \end{aligned} \tag{2.176}$$

Para o caso livre

$$\begin{aligned} iD_{\mu\nu}(p) &= \left[\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{m_p^2} \right] \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - m_p^2} \right] - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2)^2} \\ &= -\frac{m_p^2}{p^2(p^2 - m_p^2)} \left[\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right], \end{aligned} \tag{2.177}$$

onde $a = m_p^{-1}$.

Por fim, faremos um breve comentário sobre a conexão entre o tensor de polarização e a auto-energia do fóton [68]. Como sabemos, a auto-energia está associada ao propagador do fóton (interação corrente-corrente). Para isto é preciso organizar a estrutura quântica completa na seguinte série de termos compactos

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= D + D\Pi D + D\Pi D\Pi D + \dots \\ &= D + D\Pi \mathcal{D} \end{aligned} \tag{2.178}$$

consequentemente,

$$\mathcal{D}^{-1} = D^{-1} + \Pi. \tag{2.179}$$

2.2.2 O propagador do campo escalar

Novamente, iniciaremos a discussão por meio da equação de movimento

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{eff}}{\delta \bar{\psi}(x)} &= -\eta(x) \\ (i\hat{\partial} - m + \hat{A})\psi(x) &= -\eta(x). \end{aligned} \tag{2.180}$$

Elevando a equação em nível quântico,

$$\langle [\frac{\delta S_{eff}}{\delta \bar{\psi}(x)} + \eta(x)] \rangle = \int D\mu [\frac{\delta S_{eff}}{\delta \bar{\psi}(x)} + \eta(x)] \exp[iS_{eff}] = 0. \quad (2.181)$$

Em termos do funcional gerador Z ,

$$(i\hat{\partial} - m + e\beta^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)}) \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}(x)} Z = -\eta(x)Z. \quad (2.182)$$

Como apenas as funções de Green conexas contribuem para a amplitude de transição $Z = \exp[iW]$

$$(i\hat{\partial} - m + e\beta^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)}) \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}(x)} \exp[iW] = -\eta(x) \exp[iW] \quad (2.183)$$

$$[(i\hat{\partial} - m) \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} + e\beta^\mu \frac{\delta^2 W}{i\delta J^\mu(x)\delta \bar{\eta}(x)} + e\beta^\mu \frac{\delta W}{i\delta J^\mu(x)} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)}] \exp[iW] = -\eta(x) \exp[iW].$$

Derivando funcionalmente a expressão anterior por $\frac{\delta}{\delta \eta(y)}$ e tomando as fontes escalares nulas,

$$(i\hat{\partial} - m) \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y)\delta \bar{\eta}(x)} + e\beta^\mu \frac{\delta^3 W}{i\delta J^\mu(x)\delta \eta(y)\delta \bar{\eta}(x)} + e\beta^\mu \frac{\delta W}{i\delta J^\mu(x)} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y)\delta \bar{\eta}(x)} = -\delta^4(x - y) \quad (2.184)$$

$$[(i\hat{\partial} - m) - ie\beta^\mu \langle A_\mu \rangle - ie\beta^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}] \mathcal{S}(x, y) = i\delta^4(x - y).$$

Agora observa-se que

$$\frac{\delta \mathcal{S}(x, y)}{\delta J^\mu(x)} = \int d^4 z \frac{\delta \mathcal{S}(x, y)}{\delta A^\nu(z)} \frac{\delta A^\nu(z)}{\delta J^\mu(x)}, \quad (2.185)$$

$$i \frac{\delta \mathcal{S}(x, y)}{\delta A^\nu(z)} = -e \int d^4 u d^4 w \mathcal{S}(x, u) \Gamma_\nu(u, w; z) \mathcal{S}(w, y),$$

$$\frac{\delta A^\nu(z)}{\delta J^\mu(x)} = \frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(x)\delta J_\nu(z)} = i\mathcal{D}_\mu^\nu(z, x),$$

$$\frac{\delta \mathcal{S}(x, y)}{\delta J^\mu(x)} = -e \int d^4 z d^4 u d^4 w \mathcal{S}(x, u) \Gamma_\nu(u, w; z) \mathcal{S}(w, y) \mathcal{D}_\mu^\nu(z, x), \quad (2.186)$$

onde no final dos cálculos a fonte vetorial foi considerada nula.

Neste caso,

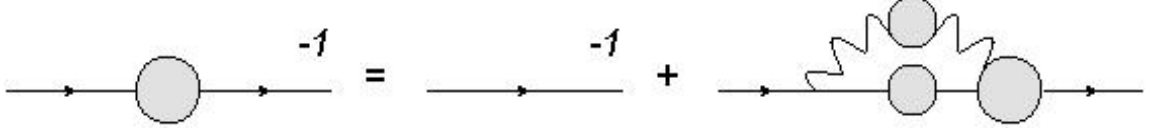
$$(i\hat{\partial} - m) \mathcal{S}(x, y) - ie^2 \beta^\mu \int d^4 z d^4 u d^4 w \mathcal{S}(x, u) \Gamma_\nu(u, w; z) \mathcal{S}(w, y) \mathcal{D}_\mu^\nu(z, x) = i\delta^4(x - y) \quad (2.187)$$

$$(i\hat{\partial} - m) \mathcal{S}(x, y) + \int d^4 w [-ie^2 \beta^\mu d^4 z d^4 u \mathcal{S}(x, u) \Gamma_\nu(u, w; z) \mathcal{D}_\mu^\nu(z, x)] \mathcal{S}(w, y) = i\delta^4(x - y).$$

Em termos dos diagramas completos de SDF

$$\begin{aligned}
(i\hat{\partial} - m)\mathcal{S}(x, y) - i \int d^4w \Sigma(x, w)\mathcal{S}(w, y) &= i\delta^4(x - y) \\
\int d^4y \mathcal{S}^{-1}(y, s) \{ (i\hat{\partial} - m)\mathcal{S}(x, y) - i \int d^4w \Sigma(x, w)\mathcal{S}(w, y) \} &= \\
= i \int d^4y \mathcal{S}^{-1}(y, s) \delta^4(x - y) & \quad (2.188)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S}^{-1}(x, s) = (i\hat{\partial} - m)\delta^4(x - s) - \Sigma(x, s)$$



onde definimos o funcional associado à auto-energia

$$\Sigma(x, w) \doteq e^2 \beta^\mu \int d^4z d^4u \mathcal{S}(x, u) \Gamma_\nu(u, w; z) \mathcal{D}_\mu^\nu(z, x). \quad (2.189)$$

Continuando,

$$\begin{aligned}
(i\hat{\partial} - m)\mathcal{S}(x, y) - \int d^4w \Sigma(x, w)\mathcal{S}(w, y) &= i\delta^4(x - y) \quad (2.190) \\
(i\hat{\partial} - \int d^4w [m\delta^4(x - w) + \Sigma(x, w)])\mathcal{S}(w, y) &= i\delta^4(x - y) \\
[i\hat{\partial} - \int d^4w M(x, w)]\mathcal{S}(w, y) &= i\delta^4(x - y),
\end{aligned}$$

onde definimos o operador de massa

$$M(x, w) \doteq m\delta^4(x - w) + \Sigma(x, w). \quad (2.191)$$

Para finalizar, calcularemos a transformada de Fourier do operador de auto-energia, a saber,

$$\Sigma(x, y) = e^2 \int d^4u d^4w \beta^\mu S(x, w) \Gamma^\nu(w, y; u) D_{\mu\nu}(u, x). \quad (2.192)$$

Escrevendo as quantidades em termos de sua transformada de Fourier,

$$\Sigma(p_1, p_2) = \int d^4x d^4y \exp[+ixp_1 - iyp_2] \Sigma(x, y) \quad (2.193)$$

$$\mathcal{S}(x, w) = \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \exp[-iq_1(x - w)] \mathcal{S}(q_1) \quad (2.194)$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(u, x) = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \exp[-ik_1(u - x)] \mathcal{D}_{\mu\nu}(k_1) \quad (2.195)$$

$$\Gamma^\nu(w, y; u) = \int \frac{d^4 s_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_3}{(2\pi)^4} \exp[-iws_1 + iys_2 + ius_3] \Gamma^\nu(s_1, s_2; s_3). \quad (2.196)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Sigma(p_1, p_2) &= e^2 \int d^4 x d^4 y d^4 u d^4 w \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \exp[+ixp_1 - iyp_2] \exp[-iq_1(x - w)] \\ &\exp[-iws_1 + iys_2 + ius_3] \exp[-ik_1(u - x)] \beta^\mu \mathcal{S}(q_1) \Gamma^\nu(s_1, s_2; s_3) \mathcal{D}_{\mu\nu}(k_1) = -e^2 \int d^4 x d^4 y d^4 u d^4 w \\ &\frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \exp[ix(p_1 - q_1 + k_1)] \exp[-iy(p_2 - s_2)] \exp[-iu(k_1 - s_3)] \\ &\exp[-iw(-q_1 + s_1)] \beta^\mu \mathcal{S}(q_1) \Gamma^\nu(s_1, s_2; s_3) \mathcal{D}_{\mu\nu}(k_1) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 s_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \\ &\delta^4(p_1 - q_1 + k_1) \delta^4(p_2 - s_3) \delta^4(k_1 - s_2) \delta^4(s_1 - q_1) \beta^\mu \mathcal{S}(q_1) \Gamma^\nu(s_1, s_2; s_3) \mathcal{D}_{\mu\nu}(k_1) = \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k_1 d^4 q_1 \delta^4(p_1 + k_1 - q_1) \beta^\mu \mathcal{S}(q_1) \Gamma^\nu(q_1, k_1; p_2) \mathcal{D}_{\mu\nu}(k_1). \end{aligned} \quad (2.197)$$

Como $\Sigma(x, y)$ deve ser invariante por translaçã, pois na equaçã (2.190) $S(x, y)$ e $\delta^4(x - y)$ sã invariantes, impomos a conservaçã do fluxo de momento da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Sigma(p_1, p_2) &= (2\pi)^4 \Sigma(p_1, p_2) \delta^4(p_1 - p_2) \\ &= e^2 \int d^4 k_1 d^4 q_1 \delta^4(p_1 + k_1 - q_1) \beta^\mu \mathcal{S}(q_1) \Gamma^\nu(q_1, k_1; p_2) \mathcal{D}_{\mu\nu}(k_1) \delta^4(p_1 - p_2), \end{aligned} \quad (2.198)$$

$$\begin{aligned} \Sigma(x, y) &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \exp[-ip_1 x + ip_2 y] \Sigma(p_1, p_2) \\ &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \exp[-ip_1(x - y)] \Sigma(p_1, p_2) \\ &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \exp[-ip_1(x - y)] \Sigma(p_1). \end{aligned} \quad (2.199)$$

Portanto, a transformada de Fourier da equaçã (2.190) é dada por

$$\begin{aligned} (i\hat{\partial} - m) \left\{ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x - y)] \mathcal{S}(p) \right\} - \int d^4 w \left\{ \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \exp[-iq_1(x - w)] \Sigma(q_1) \right\} \times \\ \times \left\{ \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \exp[-iq_2(w - y)] \mathcal{S}(q_2) \right\} = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x - y)] \end{aligned} \quad (2.200)$$

$$(\hat{p} - m - \Sigma(p)) \mathcal{S}(p) = i \quad (2.201)$$

$$\mathcal{S}(p) = \frac{i}{(\hat{p} - m - \Sigma(p))} = \frac{i}{(\beta^\mu p_\mu - M(p))}. \quad (2.202)$$

Para o caso livre

$$(\hat{p} - m) \mathcal{S}(p) = i. \quad (2.203)$$

Utilizando a álgebra de DKP

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\theta + \beta^\theta \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu \eta^{\nu\theta} + \beta^\theta \eta^{\nu\mu}, \quad (2.204)$$

$$\hat{p}^3 = p^2 \hat{p},$$

concluimos que

$$[\hat{p}(\hat{p} + m) - (p^2 - m^2)](\hat{p} - m)S(p) = i[\hat{p}(\hat{p} + m) - (p^2 - m^2)] \quad (2.205)$$

$$[(\hat{p}^3 - m^2 \hat{p} - (p^2 - m^2)\hat{p} + m(p^2 - m^2))]S(p) = i[\hat{p}(\hat{p} + m) - (p^2 - m^2)].$$

Portanto,

$$S(p) = i \frac{1}{m} \left[\frac{\hat{p}(\hat{p} + m)}{(p^2 - m^2)} - 1 \right]. \quad (2.206)$$

2.2.3 A função de vértice

Dando sequência ao desenvolvimento formal da teoria, construiremos a função de vértice completa. O ponto de partida para alcançar este objetivo é a seguinte equação⁴

$$[(i\hat{\partial} - m) - ie\beta^\mu \langle A_\mu(x) \rangle - ie\beta^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}] \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} = i\delta^4(x - y). \quad (2.207)$$

Tomando a derivada funcional da equação acima com respeito ao campo $A_\sigma(z)$

$$[(i\hat{\partial} - m) - ie\beta^\mu \langle A_\mu(x) \rangle] \left[\frac{\delta}{\delta A_\sigma(z)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \right] - ie\beta^\sigma \delta^4(x - z) \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} + ie\beta^\mu \frac{\delta}{\delta A_\sigma(z)} \left[\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \right] = 0. \quad (2.208)$$

Recrevendo a equação anterior de maneira conveniente temos

$$[(i\hat{\partial} - m) - ie\beta^\mu \langle A_\mu(x) \rangle] \left[\frac{\delta}{\delta A_\sigma(z)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1} \right] - ie\beta^\sigma \delta^4(x - z) \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} + ie\beta^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left[\frac{\delta}{\delta A_\sigma(z)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1} \right] = 0. \quad (2.209)$$

Como sabemos

$$\frac{\delta}{\delta A_\sigma(z)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1} = - \int d^4 u d^4 w \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(u)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(w)} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(x)}.$$

Neste caso,

$$[(i\hat{\partial} - m) - ie\beta^\mu \langle A_\mu(x) \rangle] \left[- \int d^4 u d^4 w \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(u)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(w)} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(x)} \right] + ie\beta^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left[- \int d^4 u d^4 w \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(u)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(w)} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(x)} \right] = ie\beta^\sigma \delta^4(x - z) \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)}. \quad (2.210)$$

⁴Como estamos estudando variações funcionais deveríamos manter todos os termos advindos do funcional gerador, mas alguns não contribuem para o cálculo, considerando que em certas etapas iremos tomar as fontes nulas. Sendo assim, descartamos de antemão termos que não contribuem por simplicidade.

Por outro lado, quando fazemos as fontes escalares nulas ficamos com

$$\left[(i\hat{\partial} - m) - ie\beta^\mu \langle A_\mu \rangle - ie\beta^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right] \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(x)} = i\delta^4(x-w). \quad (2.211)$$

Logo (2.210) é escrita como

$$\left[\int d^4u \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(u)} \frac{-i\delta^3\Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(x)} \right] - ie\beta^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left[\int d^4u d^4w \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(u)} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(w)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(x)} \right] = ie\beta^\sigma \delta^4(x-z) \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)}. \quad (2.212)$$

Porém inverteremos a equação anterior, utilizando a identidade

$$\int d^4y \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(w)\delta\bar{\psi}(y)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(u)} = i\delta^4(w-u) \quad (2.213)$$

$$\begin{aligned} & \int d^4u \left[\int d^4y \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(w)\delta\bar{\psi}(y)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(u)} \right] \frac{-i\delta^3\Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(x)} + \\ & -ie\beta^\mu \int d^4y \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(w)\delta\bar{\psi}(y)} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left[\int d^4u d^4w \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(u)} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(w)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(x)} \right] = \\ & = ie\beta^\sigma \delta^4(x-z) \left[\int d^4y \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(w)\delta\bar{\psi}(y)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)} \right] \end{aligned} \quad (2.214)$$

$$\begin{aligned} & \int d^4u \left[-i\delta^4(w-u) \right] \frac{-i\delta^3\Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(x)} + \\ & -ie\beta^\mu \int d^4y \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(w)\delta\bar{\psi}(y)} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left[\int d^4u d^4w \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(u)} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(w)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(x)} \right] = \\ & = ie\beta^\sigma \delta^4(x-z) \left[-i\delta^4(w-u) \right] \end{aligned} \quad (2.215)$$

$$\begin{aligned} & \frac{i\delta^3\Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(w)\delta\bar{\psi}(x)} = e\beta^\sigma \delta^4(x-z)\delta^4(w-x) + \\ & + ie\beta^\mu \int d^4y \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(w)\delta\bar{\psi}(y)} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left[\int d^4u d^4w \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(u)} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(w)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(x)} \right]. \end{aligned} \quad (2.216)$$

Fazendo mudanças de variáveis na expressão anterior chegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{i\delta^3\Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(x)} = e\beta^\sigma \delta^4(x-z)\delta^4(y-x) + \\ & + ie\beta^\mu \int d^4w \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(w)} \frac{\delta I^\sigma}{\delta J^\mu(x)}, \end{aligned} \quad (2.217)$$

onde definimos a quantidade

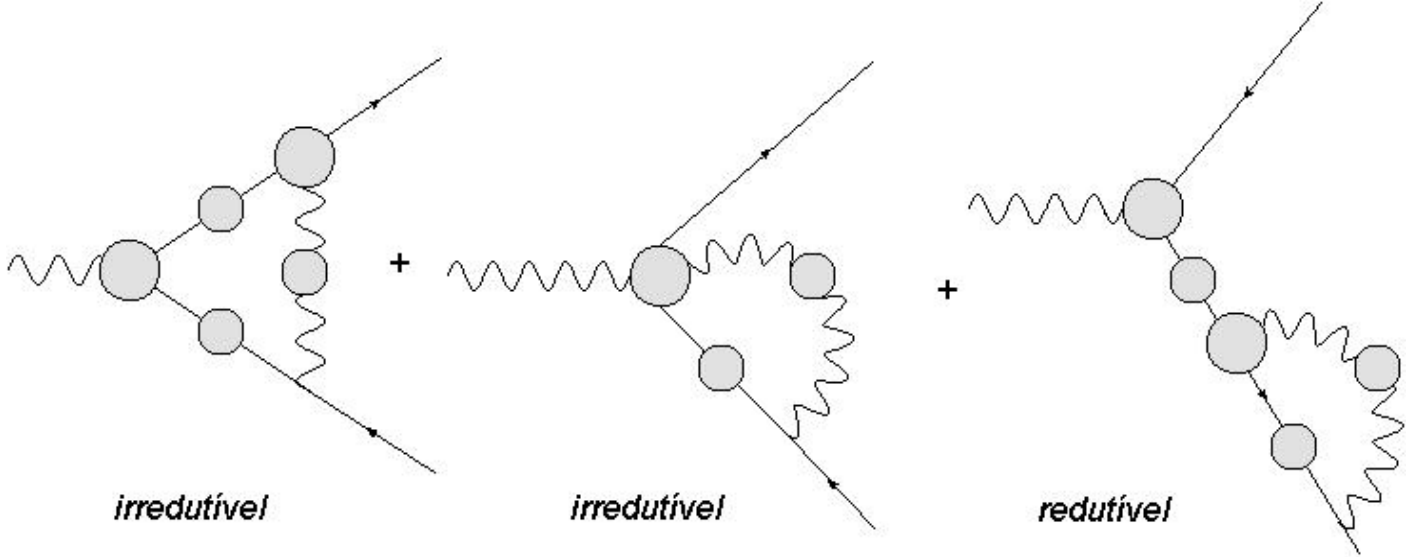
$$I^\sigma \doteq \int d^4u d^4t \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(u)} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(t)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(t)\delta\bar{\eta}(x)}. \quad (2.218)$$

Precisamos calcular então

$$I^\sigma_\mu = \frac{\delta I^\sigma}{\delta J^\mu(x)} = \int d^4s \frac{\delta A_\rho(s)}{\delta J^\mu(x)} \frac{\delta I^\sigma}{\delta A_\rho(s)} = \int d^4s \frac{\delta^2 W}{\delta J^\rho(s)\delta J^\mu(x)} \frac{\delta I^\sigma}{\delta A_\rho(s)}. \quad (2.219)$$

Neste momento explicitaremos a estrutura da equação anterior,

O último termo da expressão anterior não pertence aos diagramas irreduzíveis de uma função de 4-pontos (duas pernas escalares e duas vetoriais) logo, iremos descartá-lo pois calculamos uma equação funcional irreduzível. Esta afirmação pode ser visualizada pelos diagramas completos de SDF abaixo:



Em decorrência dos resultados anteriores,

$$\begin{aligned} \frac{i\delta^3\Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(x)} &= e\beta^\sigma\delta^4(x-z)\delta^4(y-x) + ie\beta^\mu\left\{\int d^4s\frac{\delta^2W}{\delta J^\rho(s)\delta J^\mu(x)}\left[\int d^4t\left(\frac{\delta^4\Gamma}{\delta A_\rho(s)\delta A_\sigma(z)\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(t)}\right)\frac{\delta^2W}{\delta\eta(t)\delta\bar{\eta}(x)} + \right. \right. \\ &\left. \left. - \int d^4u d^4t \int d^4r \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\rho(s)\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(r)} \frac{\delta^2W}{\delta\eta(r)\delta\bar{\eta}(u)} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(t)} \frac{\delta^2W}{\delta\eta(t)\delta\bar{\eta}(x)}\right]\right\}. \end{aligned} \quad (2.226)$$

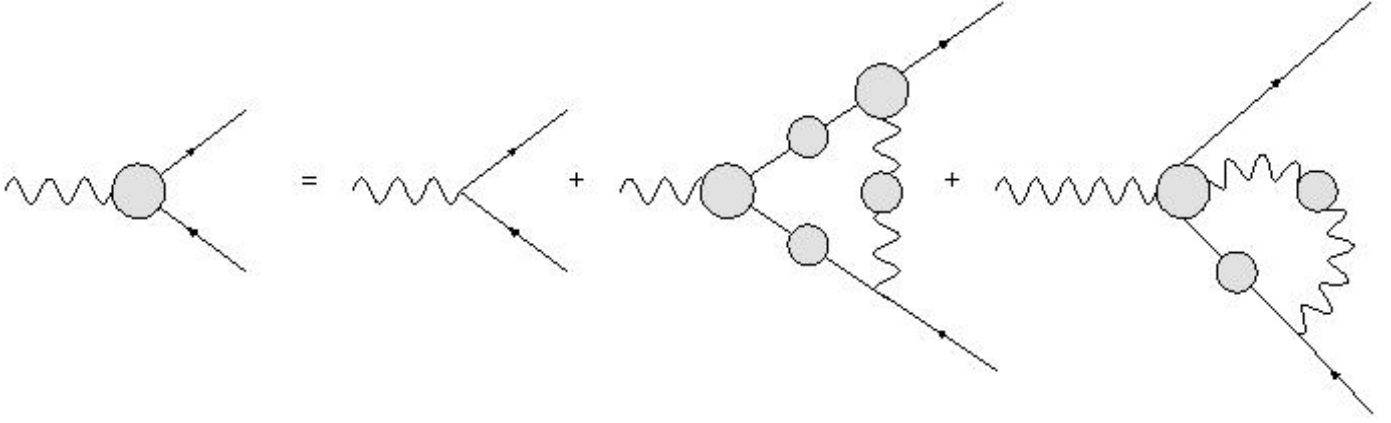
Com as definições de Γ , S e D e também definindo a função de 4-pontos,

$$\frac{\delta^4\Gamma}{\delta A_\rho(s)\delta A_\sigma(z)\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(t)} \doteq e^2\Phi^{\rho\sigma}(t, y; z; s) \quad (2.227)$$

conluímos que

$$\begin{aligned} ie\Gamma^\sigma(x, y; z) &= e\beta^\sigma\delta^4(x-z)\delta^4(y-x) + \\ &+ ie^3\beta^\mu \int d^4s d^4u d^4t d^4r \mathcal{D}_{\mu\rho}(x, s)\Gamma^\rho(r, y; s)\mathcal{S}(u, r)\Gamma^\sigma(t, u; z)\mathcal{S}(x, t) + \\ &- ie^3\beta^\mu \int d^4s d^4t \mathcal{D}_{\mu\rho}(x, s)\Phi^{\rho\sigma}(t, y; z; s)\mathcal{S}(x, t). \end{aligned} \quad (2.228)$$

Em termos dos diagramas completos de SDF a equação (2.228) é dada por



Neste momento, percebemos que a solução completa da teoria só pode ser determinada ao resolvermos um conjunto infinito de equações acopladas, pois as equações de Schwinger-Dyson-Fradkin não formam um sistema fechado (os propagadores dependem do vértice, o vértice depende de uma função de 4-pontos e assim sucessivamente). Esta torre de equações é conhecido na literatura como cadeia de Dyson-Schwinger.

Por outro lado, isso não ocorre em teoria de perturbação onde existem apenas 3 funções de Green livres fundamentais: o propagador do campo vetorial, o propagador do campo escalar e o vértice. Toda a estrutura quântica pode ser construída em termos dessas funções por meio dos diagramas de Feynman.

Para finalizar, escreveremos a equação (2.228) na representação de momento por meio de uma transformada de Fourier,

$$ie\Gamma^\sigma(s_1, s_2; s_3) = \int d^4x d^4y d^4z \exp[-is_1x + is_2y + is_3z] ie\Gamma^\sigma(x, y; z).$$

Sendo assim explicitamos os termos,

$$\begin{aligned} a-) \int d^4x d^4y d^4z \exp[-is_1x + is_2y + is_3z] \delta^4(x-z) \delta^4(y-u) &= \int d^4x d^4y d^4z \exp[-is_1x + is_2y + is_3z] \\ &[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x-z)]] [\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \exp[-iq(y-x)]] = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4x d^4y d^4z \exp[ix(-s_1 - p + q)] \\ &\exp[iy(s_2 - q)] \exp[iz(s_3 + p)] = (2\pi)^4 \delta^4(-s_1 + s_2 + s_3). \end{aligned} \quad (2.229)$$

$$\begin{aligned} b-) \int d^4x d^4y d^4z \exp[-is_1x + is_2y + is_3z] \int d^4s d^4t \mathcal{D}_{\mu\rho}(x, s) \Phi^{\rho\sigma}(t, y; z; s) \mathcal{S}(x, t) &= \int d^4x d^4y d^4z d^4s d^4t \\ &\exp[-is_1x + is_2y + is_3z] [\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \exp[-ik_1(x-s)] \mathcal{D}_{\mu\rho}(k_1)] [\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \exp[-ik_1(x-s)] \mathcal{D}_{\mu\rho}(k_1)] \\ &[\int \frac{d^4r_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4r_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4r_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4r_4}{(2\pi)^4} \exp[-ir_1t + ir_2y + ir_3z + ir_4s] \Phi^{\rho\sigma}(r_1, r_2; r_3; r_4)] [\int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \exp[-iq_1(x-t)] \mathcal{S}(q_1)] = \\ &= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4r_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4r_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4r_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4r_4}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(-s_1 - k_1 - q_1) (2\pi)^4 \delta^4(s_2 + r_2) (2\pi)^4 \delta^4(s_3 + r_3) (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + r_4) \\ &(2\pi)^4 \delta^4(-r_1 + q_1) \mathcal{D}_{\mu\rho}(k_1) \Phi^{\rho\sigma}(r_1, r_2; r_3; r_4) \mathcal{S}(q_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k_1 d^4q_1 \delta^4(-s_1 - k_1 - q_1) \mathcal{D}_{\mu\rho}(k_1) \\ &\Phi^{\rho\sigma}(q_1, s_2; s_3; -k_1) \mathcal{S}(q_1) = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_{\mu\rho}(k_1) \Phi^{\rho\sigma}(-s_1 - k_1, s_2; s_3; k_1) \mathcal{S}(-s_1 - k_1). \end{aligned} \quad (2.230)$$

$$\begin{aligned}
& c-) \int d^4x d^4y d^4z \exp[-is_1x + is_2y + is_3z] \int d^4s d^4u d^4t d^4r \mathcal{D}_{\mu\rho}(x, s) \Gamma^\rho(r, y; s) \mathcal{S}(u, r) \Gamma^\sigma(t, u; z) \mathcal{S}(x, t) \\
& = \int d^4x d^4y d^4z d^4s d^4u d^4t d^4r \exp[-is_1x + is_2y + is_3z] \left[\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \exp[-ik_1(x-s)] \mathcal{D}_{\mu\rho}(k_1) \right] \\
& \left[\int \frac{d^4n_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4n_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4n_3}{(2\pi)^4} \exp[in_1n_1 - in_2n_2 - in_3n_3] \Gamma^\nu(n_1, n_2; n_3) \right] \left[\int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \exp[-iq_1(u-r)] \mathcal{S}(q_1) \right] \\
& \left[\int \frac{d^4l_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4l_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4l_3}{(2\pi)^4} \exp[itl_1 - iul_2 - izl_3] \Gamma^\nu(l_1, l_2; l_3) \right] \left[\int \frac{d^4h_1}{(2\pi)^4} \exp[-ih_1(x-t)] \mathcal{S}(h_1) \right] = \\
& = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4s_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4s_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4s_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4l_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4l_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4l_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4h_1}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(-s_1 - k_1 - h_1) (2\pi)^4 \delta^4(s_2 - n_2) \\
& (2\pi)^4 \delta^4(s_3 - l_3) (2\pi)^4 \delta^4(k_1 - n_3) (2\pi)^4 \delta^4(-q_1 - l_2) (2\pi)^4 \delta^4(l_1 + h_1) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + n_1) \\
& \mathcal{D}_{\mu\rho}(k_1) \Gamma^\nu(n_1, n_2; n_3) \mathcal{S}(q_1) \Gamma^\nu(l_1, l_2; l_3) \mathcal{S}(h_1) = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_{\mu\rho}(k_1) \Gamma^\nu(-q_1, s_2; k_1) \mathcal{S}(q_1) \\
& \Gamma^\nu(s_1 + k_1, -q_1; s_3) \mathcal{S}(s_1 + k_1).
\end{aligned} \tag{2.231}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned}
& ie\Gamma^\sigma(s_1, s_2; s_3) = e\beta^\sigma (2\pi)^4 \delta^4(s_1 - s_2 - s_3) + \\
& + ie^2\beta^\mu \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_{\mu\rho}(k_1) \Gamma^\rho(-q_1, s_2; k_1) \mathcal{S}(q_1) \Gamma^\sigma(s_1 + k_1, -q_1; s_3) \mathcal{S}(s_1 + k_1) + \\
& - ie^3\beta^\mu \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_{\mu\rho}(k_1) \Phi^{\rho\sigma}(-s_1 - k_1, s_2; s_3; k_1) \mathcal{S}(-s_1 - k_1),
\end{aligned} \tag{2.232}$$

$$\Gamma^\sigma(s_1, s_2; s_3) = -i\beta^\sigma (2\pi)^4 \delta^4(s_1 - s_2 - s_3) + \Lambda^\sigma(s_1, s_2; s_3),$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^\sigma(s_1, s_2; s_3) & = e\beta^\mu \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_{\mu\rho}(k_1) \Gamma^\rho(-q_1, s_2; k_1) \mathcal{S}(q_1) \Gamma^\sigma(s_1 + k_1, -q_1; s_3) \mathcal{S}(s_1 + k_1) + \\
& - e^2\beta^\mu \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_{\mu\rho}(k_1) \Phi^{\rho\sigma}(-s_1 - k_1, s_2; s_3; k_1) \mathcal{S}(-s_1 - k_1).
\end{aligned} \tag{2.233}$$

Para o caso livre,

$$e\Gamma^\sigma(s_1, s_2; s_3) = -ie\beta^\sigma (2\pi)^4 \delta^4(s_1 - s_2 - s_3). \tag{2.234}$$

Terminamos então o estudo da estrutura quântica completa para o tipo de interação que desejamos explorar. Agora abordaremos umas das simetrias advinda dessa dinâmica de interação.

2.3 As identidades de Ward-Takahashi

É de nosso conhecimento que ao formularmos as equações da eletrodinâmica de maneira covariante podemos descrevê-las por meio de uma lagrangiana que possui em seu âmago uma simetria de calibre. Classicamente o campo de matéria (escalar) possui uma simetria de calibre $U(1)$ global. Ao impor-mos uma simetria de calibre local precisamos dos campos intermediadores da interação (vetoriais). Portanto, ao escrevermos a dinâmica dessa eletrodinâmica (GSDKP₄), de maneira covariante, temos uma simetria de calibre $U(1)$ local. Da mesma forma, podemos descrever uma dinâmica quântica covariante na descrição de Heisenberg com a simetria de calibre $U(1)$ local.

Por outro lado, ao quantizarmos de maneira covariante a teoria utilizando o formalismo funcional, perdemos a simetria de calibre $U(1)$ local ao fixarmos os graus de liberdades físicos e definirmos de maneira adequada a medida de integração. Para mantermos a simetria de calibre impomos a simetria na teoria e, sendo assim, essa imposição gera certos vínculos nas funções de Green, cujas relações entre as funções de Green são conhecidas como identidades de Ward-Takahashi (WT) [72].

O propósito desta seção é derivar tais identidades para a eletrodinâmica GSDKP₄, utilizando uma abordagem funcional [73]. A derivação das identidades de WT é formalmente dada em termos das seguintes transformações infinitesimais

$$\begin{aligned}\Psi &\rightarrow \Psi + i\alpha(x)\Psi, \\ \bar{\Psi} &\rightarrow \bar{\Psi} - i\alpha(x)\bar{\Psi}, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)\end{aligned}\tag{2.235}$$

conhecidas como transformações de calibre.

Como o funcional gerador (2.121) gera todas as funções de Green vamos impor a invariância de calibre neste objeto⁵. Por simplicidade temos,

$$Z = \int d\mu \exp[iS_{eff}].\tag{2.236}$$

Portanto, perante à transformação (2.235) nos campos, o funcional gerador se transforma da seguinte forma

$$Z' = Z + \delta Z\tag{2.237}$$

$$\delta Z = \int \delta d\mu \exp[iS_{eff}] + i \int d\mu \delta S_{eff} \exp[iS_{eff}].$$

Primeiramente, trabalhando com a medida de integração

$$\int DA_\mu D\bar{\Psi} D\Psi \rightarrow \int DA_\mu D\bar{\Psi} D\Psi J\tag{2.238}$$

percebemos que o Jacobiano da transformação é dado por

$$J = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - i\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 + i\alpha \end{pmatrix} = 1 + \alpha^2.\tag{2.239}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\delta S_{eff} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{\xi} \{ (1 + a^2 \square) \partial^\mu \delta A_\mu \} + \delta \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \delta \psi + \delta A^\mu J_\mu \right] \\ &= \int d^4x \left[-\frac{1}{e\xi} (1 + a^2 \square) \partial^\mu A_\mu \square \alpha - i\alpha \bar{\Psi} \eta + i\alpha \bar{\eta} \Psi + \frac{1}{e} \partial^\mu \alpha J_\mu \right] \\ &\rightarrow \int d^4x \alpha \left[-\frac{\square}{e\xi} (1 + a^2 \square) \partial^\mu A_\mu - i\bar{\Psi} \eta + i\bar{\eta} \Psi - \frac{1}{e} \partial^\mu J_\mu \right].\end{aligned}\tag{2.240}$$

Sendo assim,

⁵Observa-se que escolhemos como condição de calibre explicitamente covariante *no-mixing*.

$$\delta Z = i \int d\mu \int d^4x \alpha \left[-\frac{\square}{e\xi} (1+a^2\square) \partial^\mu A_\mu - i\bar{\Psi}\eta + i\bar{\eta}\Psi - \frac{1}{e} \partial^\mu J_\mu \right] \exp[iS_{eff}] + \int d\mu \alpha^2 \exp[iS_{eff}]. \quad (2.241)$$

Consequentemente, para que o funcional gerador seja invariante perante a transformação infinitesimal proposta

$$\delta Z = 0 \Rightarrow \int d^4x \alpha \int d\mu \left[-\frac{\square}{e\xi} (1+a^2\square) \partial^\mu A_\mu - i\bar{\Psi}n + i\bar{\eta}\Psi - \frac{1}{e} \partial^\mu J_\mu \right] \exp[iS_{eff}] = 0. \quad (2.242)$$

Logo temos uma equação funcional a valores médios

$$\left[i\frac{\square}{e\xi} (1+a^2\square) \partial^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu} + \frac{\delta}{\delta \eta} \eta - \bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \frac{1}{e} \partial^\mu J_\mu \right] Z = 0. \quad (2.243)$$

Podemos expressar a última equação em termos do gerador das funções de Green conexas $Z = \exp[iW]$

$$\left[-\frac{\square}{e\xi} (1+a^2\square) \partial^\mu \frac{\delta W}{\delta J^\mu} + i\frac{\delta W}{\delta \eta} \eta - i\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} - \frac{1}{e} \partial^\mu J_\mu \right] Z = 0. \quad (2.244)$$

A partir da equação anterior finalmente encontrarmos uma equação para o gerador das funções de Green irreduzíveis que descreva a simetria que estamos procurando

$$\begin{aligned} \Gamma &= W - \int d^4x (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + A^\mu J_\mu), \\ &-\frac{\square}{e\xi} (1+a^2\square) \partial^\mu A_\mu - i\bar{\psi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} + i\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} \psi - \frac{1}{e} \partial^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} = 0. \end{aligned} \quad (2.245)$$

Por meio da equação (2.245) é possível derivar todas as identidades de WT. A primeira destas identidades é obtida aplicando a derivada funcional $\frac{\delta}{\delta A^\nu(y)}$ na equação (2.245)

$$\left[-\frac{\square}{e\xi} (1+a^2\square) \partial_\nu \delta(x-y) - \frac{1}{e} \partial^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x) A^\nu(y)} \right] = 0 \quad (2.246)$$

onde ao final do cálculo tomamos $A = \bar{\psi} = \psi = 0$.

Agora, por meio de uma transformada de Fourier escrevemos a primeira identidade de WT (2.246) na representação de momentos

$$\begin{aligned} \delta(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp[ik_\mu x^\mu] \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x) A^\nu(y)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_{\mu\nu}(k) \exp[ik_\mu x^\mu] \\ k^\mu \Gamma_{\mu\nu}(k) &= -\frac{k^2}{\xi} (1-a^2k^2) k_\nu. \end{aligned} \quad (2.247)$$

Combinando (2.247) com (2.169) concluímos que

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0 \quad (2.248)$$

e, sendo assim, o setor longitudinal de $\Pi_{\mu\nu}$ não participa da dinâmica no sentido de não ser alterado perante as interações. Dizemos então que $\Pi_{\mu\nu}$ é transversal. Essa identidade é importante ao se estudar as primeiras correções radiativas do tensor de polarização do fóton.

Por outro lado, aplicando as derivadas funcionais $\frac{\delta}{\delta\psi(y)}$ e $\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(z)}$ na equação (2.245) temos

$$-i\frac{\delta\bar{\psi}(x)}{\delta\bar{\psi}(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(x)} + i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(x)}\frac{\delta\psi}{\delta\psi(y)} - \frac{1}{e}\partial^\mu\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(y)\delta A^\mu(x)} = 0, \quad (2.249)$$

onde obtemos

$$\frac{1}{e}\partial^\mu\Gamma_\mu(z, y; x) = -\delta(x-z)\Gamma(x, y) + \Gamma(x, z)\delta(x-y) \quad (2.250)$$

ao tomar $A = \bar{\psi} = \psi = 0$.

A equação (2.250) pode ser escrita na representação de momentos⁶ lembrando-se que $\Gamma = \mathcal{S}^{-1}$

$$\int d^4z d^4y d^4x \exp[ipz - ip'y - ikx] \partial^\mu \Gamma_\mu(z, y; x) = -\int d^4z d^4y d^4x \exp[ikx - ip'y - ipz] \delta(x-z) S^{-1}(x, y) + \int d^4z d^4y d^4x \exp[ikx - ip'y - ipz] S^{-1}(x, z) \delta(x-y)$$

$$\begin{aligned} \int d^4z d^4y d^4x \exp[ipz - ip'y - ikx] \partial^\mu \left\{ \int \frac{d^4s_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4s_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4s_3}{(2\pi)^4} \exp[-is_1z + is_2y + is_3x] (2\pi)^4 \delta^4(s_3 + s_2 - s_1) \right. \\ \left. \Gamma_\mu(s_1, s_2; s_3) \right\} = -\int d^4z d^4y d^4x \exp[ikx - ip'y - ipz] \int \frac{d^4s_1}{(2\pi)^4} \exp[-is_1(x-z)] \times \\ \times \int \frac{d^4s_2}{(2\pi)^4} S^{-1}(s_2) \exp[-is_2(x-y)] + \int d^4z d^4y d^4x \exp[ikx - ip'y - ipz] \int \frac{d^4s_1}{(2\pi)^4} S^{-1}(s_1) \exp[-is_1(x-z)] \times \\ \times \int \frac{d^4s_2}{(2\pi)^4} \exp[-is_2(x-y)] \end{aligned}$$

$$(2\pi)^4 \delta^4(k + p' - p) \frac{1}{e} k^\mu \Gamma_\mu(p, p'; k) = -(2\pi)^4 \delta^4(k + p' - p) S^{-1}(p') + (2\pi)^4 \delta^4(k + p' - p) S^{-1}(p). \quad (2.251)$$

Logo,

$$\frac{1}{e} k^\mu \Gamma_\mu(p, p'; k = p - p') = \mathcal{S}^{-1}(p' + k) - \mathcal{S}^{-1}(p'). \quad (2.252)$$

No limite de $k \rightarrow 0$ temos a seguinte relação

$$\frac{1}{e} \Gamma_\mu(p, p; k = 0) = \frac{\partial \mathcal{S}^{-1}(p)}{\partial p^\mu} = \beta_\mu - \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu}. \quad (2.253)$$

Portanto, vemos uma relação entre o vértice e a auto-energia do méson o que será posteriormente utilizado no programa de renormalização.

Dando continuidade agora aplicaremos $\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(y)}$ na equação (2.245)

$$-i\delta^4(x-y)\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)} + i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(y)\delta\psi(x)}\psi(x) - \frac{1}{e}\partial^\mu\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(y)\delta A^\mu(x)} = 0. \quad (2.254)$$

⁶Observe que o fato do lado direito da equação (2.250) ser invariante por translações implica que devemos aplicar a lei de Kirchhoff para a conservação do fluxo de momento no vértice completo.

Novamente, aplicando $\frac{\delta}{\delta A^\nu(z)}$ na equação anterior,

$$-i\delta^4(x-y)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\nu(z)\delta\bar{\psi}(x)} + i\frac{\delta^3\Gamma}{\delta A^\nu(z)\delta\bar{\psi}(y)\delta\psi(x)}\psi(x) - \frac{1}{e}\partial^\mu\frac{\delta^3\Gamma}{\delta A^\nu(z)\delta\bar{\psi}(y)\delta A^\mu(x)} = 0. \quad (2.255)$$

E, por fim, operamos com $\frac{\delta}{\delta\psi(w)}$

$$-i\delta^4(x-y)\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\psi(w)\delta A^\nu(z)\delta\bar{\psi}(x)} + \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A^\nu(z)\delta\bar{\psi}(y)\delta\psi(x)}i\delta^4(x-w) - \frac{1}{e}\partial^\mu\frac{\delta^4\Gamma}{\delta\psi(w)\delta A^\nu(z)\delta\bar{\psi}(y)\delta A^\mu(x)} = 0. \quad (2.256)$$

tomando ao final $A = \bar{\psi} = \psi = 0$.

Nesse caso, tendo em vista a equação anterior, temos que,

$$\frac{1}{e}\partial^\mu\Phi_{\mu\nu}(w, y; x; z) = -i\delta^4(x-y)\Gamma_\nu(w, x; z) + i\delta^4(x-w)\Gamma_\nu(x, y; z). \quad (2.257)$$

Dando continuidade, com a ajuda da equação (2.250)

$$\begin{aligned} \frac{1}{e}\partial^\mu\partial^\nu\Phi_{\mu\nu}(w, y; x; z) &= -i\delta^4(x-y)\partial^\nu\Gamma_\nu(w, x; z) + i\delta^4(x-w)\partial^\nu\Gamma_\nu(x, y; z) = \\ &= -ie\delta^4(x-y)[- \delta^4(z-w)\Gamma(z, x) + \Gamma(z, w)\delta^4(z-x)] + \\ &+ ie\delta^4(x-w)[- \delta^4(z-x)\Gamma(z, y) + \Gamma(z, x)\delta^4(z-y)]. \end{aligned} \quad (2.258)$$

Na representação dos momentos,

$$\begin{aligned} &\int d^4z d^4y d^4x d^4w \exp[ipz + ip'y - ikx - ik'w] \partial^\mu \partial^\nu \frac{1}{e^2} \Phi_{\mu\nu}(w, y; x; z) = \\ &= \int d^4w d^4z d^4y d^4x \exp[ipz + ip'y - ikx - ik'w] \int d^4w d^4z d^4y d^4x \exp[ipz + ip'y - ikx - ik'w] \times \\ &\times \partial^\mu \partial^\nu \left\{ \int \frac{d^4s_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4s_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4s_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4s_4}{(2\pi)^4} \exp[-is_1z - is_2y + is_3x + is_4w] \times \right. \\ &\left. \times (2\pi)^4 \delta^4(s_4 + s_3 - s_2 - s_1) \Phi_{\mu\nu}(s_1, s_2; s_3; s_4) \right\} = (2\pi)^4 \delta^4(k' + k - p' - p) k^\mu p^\nu \Phi_{\mu\nu}(k', p'; k; p). \end{aligned} \quad (2.259)$$

$$\begin{aligned} &\int d^4z d^4y d^4x d^4w \exp[ipz + ip'y - ikx - ik'w] \{-ie\delta^4(x-y)[- \delta^4(z-w)\Gamma(z, x) + \Gamma(z, w)\delta^4(z-x)]\} = \\ &= \int d^4z d^4y d^4x d^4w \exp[ipz + ip'y - ikx - ik'w] \{ie \int \frac{d^4s_1}{(2\pi)^4} \exp[-is_1(x-y)] \int \frac{d^4s_2}{(2\pi)^4} \exp[-is_2(z-w)] \times \\ &\times \int \frac{d^4s_3}{(2\pi)^4} \mathcal{S}^{-1}(s_3) \exp[-is_3(z-x)] - ie \int \frac{d^4s_1}{(2\pi)^4} \exp[-is_1(x-y)] \int \frac{d^4s_2}{(2\pi)^4} \exp[-is_2(z-x)] \times \\ &\times \int \frac{d^4s_3}{(2\pi)^4} \mathcal{S}^{-1}(s_3) \exp[-is_3(z-w)]\} = ie(2\pi)^4 \delta^4(p - k' - k + p') [\mathcal{S}^{-1}(p - k') - \mathcal{S}^{-1}(k')]. \end{aligned} \quad (2.260)$$

$$\begin{aligned} &\int d^4z d^4y d^4x d^4w \exp[ipz + ip'y - ikx - ik'w] \{ie\delta^4(x-w)[- \delta^4(z-x)\Gamma(z, y) + \Gamma(z, x)\delta^4(z-y)]\} = \\ &= \int d^4z d^4y d^4x d^4w \exp[ipz + ip'y - ikx - ik'w] \{-ie \int \frac{d^4s_1}{(2\pi)^4} \exp[-is_1(x-w)] \int \frac{d^4s_2}{(2\pi)^4} \exp[-is_2(z-x)] \times \\ &\times \int \frac{d^4s_3}{(2\pi)^4} \mathcal{S}^{-1}(s_3) \exp[-is_3(z-y)] + ie \int \frac{d^4s_1}{(2\pi)^4} \exp[-is_1(x-w)] \int \frac{d^4s_2}{(2\pi)^4} \exp[-is_2(z-y)] \times \\ &\times \int \frac{d^4s_3}{(2\pi)^4} \mathcal{S}^{-1}(s_3) \exp[-is_3(z-x)]\} = -ie(2\pi)^4 \delta^4(p - k' - k + p') [\mathcal{S}^{-1}(-p') - \mathcal{S}^{-1}(p + p')]. \end{aligned} \quad (2.261)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} k^\mu p^\nu \Phi_{\mu\nu}(k', p'; k; p) &= ie^2 \{ [\mathcal{S}^{-1}(-p' + k) - \mathcal{S}^{-1}(-p')] - [\mathcal{S}^{-1}(k') - \mathcal{S}^{-1}(k' + k)] \} \quad (2.262) \\ &= ie^2 k^\mu \{ \Gamma_\mu(k', -p'; k = k' + p') - \Gamma_\mu(p', k'; k = p' - k') \}. \end{aligned}$$

Tomando os limites adequados, fótons externos a baixas energias, podemos concluir da expressão anterior que

$$\Phi_{\mu\nu}(k', k'; 0; 0) = \Phi_{\mu\nu}(k') = ie^2 \frac{\partial^2 \Sigma(k')}{\partial k'^\mu \partial k'^\nu}. \quad (2.263)$$

Com as equações (2.253) e (2.263) somos conduzidos ao seguinte resultado

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(-i\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}) \quad (2.264)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p^\mu} &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p^\mu}(-i\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}) + (-i\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1}) \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p^\mu} - i\mathcal{S} \frac{\partial \mathcal{S}^{-1}}{\partial p^\mu} \mathcal{S} \quad (2.265) \\ &= 2 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p^\mu} + i\mathcal{S} \frac{\Gamma_\mu}{e} \mathcal{S} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p^\mu} = \frac{1}{e} i\mathcal{S} \Gamma_\mu \mathcal{S}, \quad (2.266)$$

neste caso

$$e^2 \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial p^\mu \partial p^\nu} = \mathcal{S} \Gamma_\mu \mathcal{S} \Gamma_\nu \mathcal{S} + \mathcal{S} \Gamma_\nu \mathcal{S} \Gamma_\mu \mathcal{S} + \mathcal{S} \Phi_{\mu\nu}(p) \mathcal{S} \quad (2.267)$$

$$e^2 \mathcal{S}^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial p^\mu \partial p^\nu} \mathcal{S}^{-1} = \Gamma_\mu \mathcal{S} \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \mathcal{S} \Gamma_\mu + \Phi_{\mu\nu}(p). \quad (2.268)$$

A identidade anterior é útil ao se estudar o espalhamento Compton e a renormalização da carga elétrica.

Para finalizar o estudo das identidades aplicaremos $\frac{\delta^3}{\delta A^\beta(w) \delta A^\alpha(z) \delta A^\nu(y)}$ na equação (2.245)

$$\partial^\mu \frac{\delta^4 \Gamma}{\delta A^\beta(w) \delta A^\alpha(z) \delta A^\nu(y) \delta A^\mu(x)} = 0. \quad (2.269)$$

Na representação de momentos,

$$p^\mu \Gamma_{\mu\nu\alpha\beta}(p, p', k, k') = 0. \quad (2.270)$$

Essa identidade se aplica ao estudo do espalhamento fóton-fóton.

Como veremos, as identidades de WT terão um papel importante ao se montar e ao se estudar as amplitudes de transição que descrevem os processos físicos associados à interação eletromagnética.

2.4 Divergências Superficiais

Antes de iniciar o estudo sobre as primeiras correções quânticas faremos uma análise quantitativa superficial dos tipos de divergências ultravioleta que poderiam aparecer na eletrodinâmica GSDKP₄, para isso utilizaremos uma contagem de potências [67, 68].

Considere um diagrama de Feynman geral com as seguintes informações

n =número de vértices,

n_γ =número de linhas externas fotônicas,

n_m =número de linhas externas mesônicas.

Desse modo, como cada vértice carrega duas linhas mesônicas e quando ligamos dois vértices com uma linha mesônica o número de linhas mesônicas é dividido por dois, concluímos que o número de linhas internas mesônicas é dado por

$$m_i = \frac{1}{2}(2n - n_m). \quad (2.271)$$

Por outro lado, como cada vértice carrega uma linha fotônica e quando ligamos dois vértices com uma linha fotônica o número de linhas fotônicas é dividido por dois, concluímos que o número de linhas internas fotônicas é dado por

$$\gamma_i = \frac{1}{2}(n - n_\gamma). \quad (2.272)$$

Agora cada linha mesônica carrega uma potência nos momentos de -1 e cada linha fotônica uma potência nos momentos de -4. Neste caso o denominador do diagrama carregará uma potência nos momentos dada por

$$D = m_i + 4\gamma_i = 3n - \frac{1}{2}n_m - 2n_\gamma. \quad (2.273)$$

Como para um dado número de linhas internas temos $(n-1)$ leis de conservação no fluxo de momentos, o numerador do diagrama carregará uma potência nos momentos associadas ao número de integrais dada por

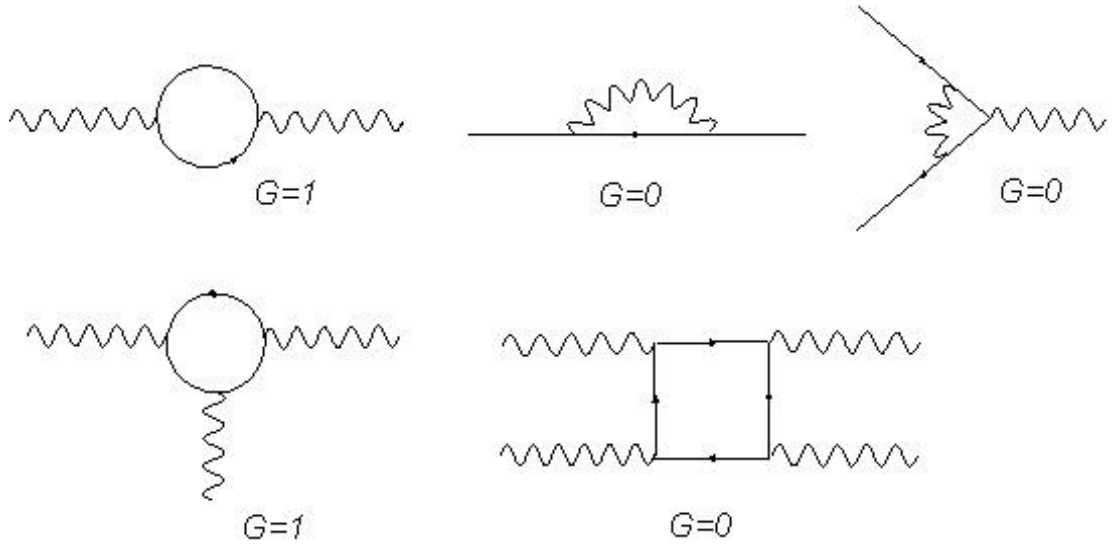
$$N = 4(m_i + \gamma_i) - (n - 1) = 2(n - n_m - n_\gamma + 2). \quad (2.274)$$

Portanto definimos o grau de divergência superficial de um diagrama como sendo

$$G \doteq N - D = 4 - n - \frac{1}{2}n_m. \quad (2.275)$$

Com a equação (2.275), podemos classificar os tipos de divergências que apareceram na teoria. Quando $G < 0$, dizemos que o diagrama é superficialmente convergente.

Concluimos, então, que na eletrodinâmica GSDKP₄ temos apenas dois tipos de divergências superficiais ou primitivas, o que pode ser visto nos diagramas abaixo.



O interessante da análise de divergências superficiais é que existe um teorema atribuído a Weinberg [74], enunciado da seguinte forma: A integral de um gráfico de Feynman F é absolutamente convergente se o grau de divergência superficial G_H for negativo para todo subgrafo H de F , incluído o caso em que $H = F$.

Outra observação importante é que as simetrias da teoria podem diminuir o grau da divergência superficial. Como veremos a simetria de calibre desempenhará um papel importante na análise das correções radiativas associada ao vértice e a função de quatro linhas externas fotônicas, não havendo divergências devido à simetria.

Em $GSDKP_4$ existe um operador C associado a conjugação de carga com a seguinte propriedade

$$C^{-1}\beta^\mu C = -\beta^\mu. \quad (2.276)$$

Sendo assim, com a ajuda do teorema de Furry podemos dizer que amplitudes de transição com números ímpares de linhas externas fotônicas são nulas pois não obedecem à simetria associada à conservação da carga elétrica.

Por fim, encontraremos a dimensão associada à constante de acoplamento (carga elétrica e). Como sabemos, no sistema natural de unidades $\hbar = 1 = c$ a ação S não possui dimensões

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{GSDKP} \quad (2.277)$$

$$\mathcal{L}_{GSDKP} = i\bar{\psi}\beta^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(1 + \frac{\square}{m_p^2})F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\partial_\mu A^\mu(1 + \frac{\square}{m_p^2})\partial_\mu A^\mu.$$

Logo,

$$[\mathcal{L}_{GSDKP}] = [L]^{-4}$$

$$[\psi] = [L]^{-\frac{3}{2}} \quad (2.278)$$

$$[A] = [L]^{-1}$$

e, conseqüentemente,

$$[e] = [L]^0 = 1. \quad (2.279)$$

Nesse caso, dizemos que GSDKP₄ é uma teoria Renormalizável Pertubativamente.

2.5 Correções Radiativas

Uma vez estabelecidas as equações de SD para as funções de Green completas surge o momento de determinar as correções radiativas na primeira ordem em teoria de perturbação. Anteriormente havíamos derivado as funções de Green completas para o propagador do fóton, méson e o vértice da eletrodinâmica GSDKP₄. Neste momento, estamos aptos a considerar as correções radiativas dessas funções. As divergências que apareceram nas correções radiativas serão regularizadas pelo procedimento de regularização dimensional, o qual preserva todas as simetrias da teoria, em particular a simetria de calibre [75, 76, 77, 78].

2.5.1 A auto-energia do méson

Iniciaremos o estudo das correções radiativas pela auto-energia do campo que descreve mésons. Sendo assim, temos que a primeira correção radiativa da auto-energia Σ é advinda de sua estrutura completa



$$\Sigma(p) = ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \beta^\mu S(p-k) \beta^\nu D_{\mu\nu}(-k), \quad (2.280)$$

onde

$$S(p-k) = \frac{i}{m} \left[\frac{(\hat{p}-\hat{k})(\hat{p}-\hat{k}+m)}{(p-k)^2 - m^2} - 1 \right], \quad (2.281)$$

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{im_p^2}{k^2(k^2 - m_p^2)} \left[\eta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right].$$

Portanto,

$$\Sigma(p) = -\frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \beta^\mu \left[\frac{(\hat{p}-\hat{k})(\hat{p}-\hat{k}+m)}{(p-k)^2 - m^2} - 1 \right] \beta^\nu \frac{[\eta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Lambda^2)}]}{(k^2 - \Lambda^2)(k^2 - m_p^2)}, \quad (2.282)$$

onde Λ é um parâmetro de massa necessário para controlar a divergência no infravermelho. Com o parâmetro Λ teríamos uma eletrodinâmica generalizada de Proca e, desse modo quebraríamos a simetria de calibre. Pensamos sempre no limite $\Lambda \rightarrow 0$.

Para resolver as integrais acima, utilizaremos a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[a(1-x-y) + bx + cy]^3}, \quad (2.283)$$

$$\frac{1}{abcd} = 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{1}{[a(1-x-y-z) + bx + cy + dz]^4}. \quad (2.284)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= -\frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \beta^\mu [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 + m^2] \beta_\mu \frac{1}{(k^2 - \Lambda^2)[(p-k)^2 - m^2](k^2 - m_p^2)} + \\ &+ (1 - \xi) \frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \beta^\mu [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 + m^2] \beta^\nu \frac{1}{(k^2 - \Lambda^2)[(p-k)^2 - m^2](k^2 - m_p^2)(k^2 - \Lambda^2)} \\ &= -\frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \beta^\mu [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 + m^2] \beta_\mu \times \\ &\times \frac{1}{[k^2(1-x-y) + [(p-k)^2 - m^2]x + y(k^2 - m_p^2)]^3} + (1 - \xi) \frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \times \\ &\times \beta^\mu [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 + m^2] \beta^\nu \frac{k_\mu k_\nu}{[(k^2 - \Lambda^2)(1-x-y-z) + [(p-k)^2 - m^2]x + (k^2 - m_p^2)y + (k^2 - \Lambda^2)z]^4}, \end{aligned} \quad (2.285)$$

Conseqüentemente, organizando o denominador

$$\begin{aligned} (k^2 - \Lambda^2)(1 - x - y) + [(p - k)^2 - m^2]x + (k^2 - m_p^2)y &= k^2 - 2pxk - m^2x - m_p^2y - \Lambda^2(1 - x - y) \\ = (k - px)^2 - p^2x^2 - m^2x - m_p^2y - \Lambda^2(1 - x - y) &= (k - px)^2 - p^2x^2 - m^2x - m_p^2y - \Lambda^2(1 - x - y) \end{aligned} \quad (2.286)$$

$$\begin{aligned} (k^2 - \Lambda^2)(1 - x - y - z) + [(p - k)^2 - m^2]x + (k^2 - m_p^2)y + (k^2 - \Lambda^2)z &= \\ = (k - px)^2 - p^2x^2 - m^2x - m_p^2y - \Lambda^2(1 - x - y) \end{aligned} \quad (2.287)$$

temos que

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= -\frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \beta^\mu [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 + m^2] \beta_\mu \\ &\frac{1}{[(k-px)^2 - p^2x^2 - m^2x - m_p^2y - \Lambda^2(1-x-y)]^3} + (1 - \xi) \frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1 - x - y) \times \\ &\times \beta^\mu [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 + m^2] \beta^\nu \frac{k_\mu k_\nu}{[(k-px)^2 - p^2x^2 - m^2x - m_p^2y - \Lambda^2(1-x-y)]^4}. \end{aligned} \quad (2.288)$$

Vamos reescrever a integral anterior fazendo a seguinte transformação de coordenadas $k \rightarrow k + px$

e definir um parâmetro b

$$b^2 = p^2x^2 + m^2x + m_p^2y + \Lambda^2(1 - x - y)$$

$$\begin{aligned} (\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 + m^2 &\longrightarrow [(1 - x)\hat{p} - \hat{k}][(1 - x)\hat{p} - \hat{k} + m] - (p - k - px)^2 + m^2 = \\ = (1 - x)^2\hat{p}^2 - (1 - x)(\hat{p}\hat{k} + \hat{k}\hat{p}) + [(1 - x)\hat{p} - \hat{k}]m + \hat{k}^2 - (1 - x)^2p^2 + 2(1 - x)pk - k^2 + m^2. \end{aligned} \quad (2.289)$$

Como vemos, podemos escrever $\Sigma(p)$ da seguinte forma

$$\Sigma(p) = \Sigma^{(1)}(p) + \Sigma^{(2)}(p) + \Sigma^{(3)}(p), \quad (2.290)$$

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(1)}(p) &= -\frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \beta^\mu [(1-x)^2 \hat{p}^2 + (1-x) \hat{p} m - (1-x)^2 p^2 + m^2] \beta_\mu \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - b^2]^3}, \\
\Sigma^{(2)}(p) &= -\frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \beta^\mu [-\eta^{\lambda\theta} + \beta^\lambda \beta^\theta] \beta_\mu \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\lambda k_\theta}{[k^2 - b^2]^3}, \\
\Sigma^{(3)}(p) &= (1-\xi) \frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\
&\times \beta^\mu [(1-x)^2 \hat{p}^2 - (1-x)(\hat{p}\hat{k} + \hat{k}\hat{p}) + [(1-x)\hat{p} - \hat{k}]m + \hat{k}^2 - (1-x)^2 p^2 + 2(1-x)pk - k^2 + m^2] \beta^\nu \times \\
&\times \frac{(k+px)_\mu (k+px)_\nu}{[k^2 - b^2]^4}.
\end{aligned} \tag{2.291}$$

Agora observa-se que

$$\Sigma^{(3)}(p) = (1-\xi) \frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\{A + B_{\mu\nu} k^\mu k^\nu + C_{\mu\nu\theta\lambda} k^\mu k^\nu k^\theta k^\lambda\}}{[k^2 - b^2]^4}, \tag{2.292}$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= [(1-x)^2 \hat{p}^2 + (1-x) \hat{p} m - (1-x)^2 p^2 + m^2] x^2 \hat{p}^2 m, \\
B_{\mu\nu} &= \beta_\mu [-(1-x)(\hat{p}\beta_\nu + \beta_\nu \hat{p}) - \beta_\nu m + 2(1-x)p_\nu] \hat{p} x + \\
&+ \hat{p} x [-(1-x)(\hat{p}\beta_\mu + \beta_\mu \hat{p}) - \beta_\mu m + 2(1-x)p_\mu] \beta_\nu, \\
C_{\mu\nu\theta\lambda} &= \beta_\mu (\beta_\nu \beta_\theta - \eta_{\nu\theta}) \beta_\lambda.
\end{aligned} \tag{2.293}$$

É de nosso conhecimento que

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - b^2]^3} = \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)[-b^2]^{3-\frac{d}{2}}}, \tag{2.294}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\lambda k_\theta}{[k^2 - b^2]^3} = \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta_{\lambda\theta} \Gamma(3-1-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)[-b^2]^{3-1-\frac{d}{2}}},$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - b^2]^4} = \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(4-\frac{d}{2})}{\Gamma(4)[-b^2]^{4-\frac{d}{2}}},$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\lambda k_\theta}{[k^2 - b^2]^4} = \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta_{\lambda\theta} \Gamma(4-1-\frac{d}{2})}{\Gamma(4)[-b^2]^{4-1-\frac{d}{2}}}, \tag{2.295}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda k_\theta}{[k^2 - b^2]^4} = \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{(\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\theta} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\theta} + \eta_{\mu\theta} \eta_{\nu\lambda}) \Gamma(4-2-\frac{d}{2})}{\Gamma(4)[-b^2]^{4-2-\frac{d}{2}}},$$

$$\eta^{\lambda\theta} \eta_{\lambda\theta} = d, \tag{2.296}$$

$$\beta^\mu \beta^\alpha \beta_\alpha \beta_\mu = d = (4 - \epsilon).$$

Neste caso,

$$\Sigma^{(1)}(p) = -\frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \beta^\mu [(1-x)^2 \hat{p}^2 + (1-x) \hat{p} m - (1-x)^2 p^2 + m^2] \beta_\mu \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)[-b^2]^{3-\frac{d}{2}}}, \quad (2.297)$$

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} 2(1 - \beta^\mu \beta_\mu)(4 + \epsilon) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d \Gamma(3-1-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)[-b^2]^{3-1-\frac{d}{2}}}, \quad (2.298)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(3)}(p) = & (1 - \xi) \frac{ie^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{m} 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \left\{ A \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(4-\frac{d}{2})}{\Gamma(4)[-b^2]^{4-\frac{d}{2}}} + \right. \\ & \left. + B_{\mu\nu} \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta^{\mu\nu} \Gamma(4-1-\frac{d}{2})}{\Gamma(4)[-b^2]^{4-1-\frac{d}{2}}} + C_{\mu\nu\theta\lambda} \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{(\eta^{\mu\nu} \eta^{\theta\lambda} + \eta^{\mu\theta} \eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\theta}) \Gamma(4-2-\frac{d}{2})}{\Gamma(4)[-b^2]^{4-2-\frac{d}{2}}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.299)$$

Por fim iremos tomar o limite $d \rightarrow 4$ ou equivalentemente $\epsilon = 4 - d \rightarrow 0$

$$\Sigma^{(1)}(p) = \frac{e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \beta^\mu [(1-x)^2 \hat{p}^2 + (1-x) \hat{p} m - (1-x)^2 p^2 + m^2] \beta_\mu \frac{1}{b^2} \frac{(-1)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma(1+\frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{-\frac{\epsilon}{2}} [-\frac{b^2}{\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}},$$

$$\Sigma^{(2)}(p) = -\frac{2e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} (1 - \beta^\mu \beta_\mu) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(-1)^{-\frac{\epsilon}{2}} (2-\frac{\epsilon}{2}) \Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{-\frac{\epsilon}{2}} [-\frac{b^2}{\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}},$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(3)}(p) = & -(1 - \xi) \frac{e^2 m_p^2 \mu^{4-d}}{2m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \left\{ \frac{A}{b^4} \frac{(-1)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma(2+\frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{-\frac{\epsilon}{2}} [-\frac{b^2}{\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} + \right. \\ & \left. + \frac{B_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}}{b^2} \frac{(-1)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma(1+\frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{-\frac{\epsilon}{2}} [-\frac{b^2}{\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} + C_{\mu\nu\theta\lambda} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\theta\lambda} + \eta^{\mu\theta} \eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\theta}) \frac{(-1)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{-\frac{\epsilon}{2}} [-\frac{b^2}{\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.300)$$

Utilizando identidades matemáticas

$$\Gamma(-n + \delta) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\delta} + \psi_1(n+1) + O(\delta) \right],$$

$$\psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma \quad \psi_1(1) = -\gamma, \quad (2.301)$$

$$\Gamma(1+z) = z \Gamma(z),$$

$$\chi^{-\frac{\epsilon}{2}} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\chi),$$

concluimos que

$$\frac{\Gamma(1+\frac{\epsilon}{2})}{[\frac{b^2}{4\pi\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} = \frac{\frac{\epsilon}{2} \Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[\frac{b^2}{4\pi\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} = \frac{\epsilon}{2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma \right] \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{b^2}{4\pi\mu^2}\right) \right] = 1,$$

$$\frac{(2-\frac{\epsilon}{2}) \Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[\frac{b^2}{4\pi\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} = (2 - \frac{\epsilon}{2}) \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma \right] \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{b^2}{4\pi\mu^2}\right) \right], \quad (2.302)$$

$$\frac{\Gamma(2+\frac{\epsilon}{2})}{[\frac{b^2}{4\pi\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} = \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) \frac{\frac{\epsilon}{2} \Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[\frac{b^2}{4\pi\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} = 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(1)}(p) &= \frac{e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \beta^\mu [(1-x)^2 \hat{p}^2 + (1-x)\hat{p}m - (1-x)^2 p^2 + m^2] \beta_\mu \frac{1}{b^2}, \\
\Sigma^{(2)}(p) &= -\frac{4e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} (1 - \beta^\mu \beta_\mu) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{2}{\epsilon} - 1 - \gamma - \ln\left(\frac{b^2}{4\pi\mu^2}\right) \right], \\
\Sigma^{(3)}(p) &= -(1 - \xi) \frac{e^2 m_p^2}{2m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \left\{ \frac{A}{b^4} + \frac{B_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}}{b^2} + C_{\mu\nu\theta\lambda} (\eta^{\mu\nu}\eta^{\theta\lambda} + \eta^{\mu\theta}\eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\theta}) \right. \\
&\quad \left. \times \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{b^2}{4\pi\mu^2}\right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.303}$$

Organizando os termos, chegamos à expressão final

$$\begin{aligned}
\Sigma(p) &= \frac{e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \beta^\mu [(1-x)^2 \hat{p}^2 + (1-x)\hat{p}m - (1-x)^2 p^2 + m^2] \beta_\mu \frac{1}{b^2} + \\
&\quad - \frac{4e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} (1 - \beta^\mu \beta_\mu) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{2}{\epsilon} - 1 - \gamma - \ln\left(\frac{b^2}{4\pi\mu^2}\right) \right] - (1 - \xi) \frac{e^2 m_p^2}{2m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{A}{b^4} + \frac{B_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}}{b^2} + C_{\mu\nu\theta\lambda} (\eta^{\mu\nu}\eta^{\theta\lambda} + \eta^{\mu\theta}\eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\theta}) \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{b^2}{4\pi\mu^2}\right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.304}$$

Para finalizar utilizaremos a álgebra das matrizes β

$$\beta^\mu \beta^\alpha \beta^\theta + \beta^\theta \beta^\alpha \beta^\mu = \beta^\mu \eta^{\alpha\theta} + \beta^\theta \eta^{\alpha\mu},$$

$$\beta^\mu \hat{p} \beta_\mu = \hat{p}, \tag{2.305}$$

$$\beta^\mu \hat{p}^2 \beta_\mu = p^2,$$

$$\beta^\mu [(1-x)^2 \hat{p}^2 + (1-x)\hat{p}m - (1-x)^2 p^2 + m^2] \beta_\mu = (1-x)\hat{p}m + m^2,$$

$$A = [(1-x)x^2 p^2 m] \hat{p} + m^3 x^2 \hat{p}^2,$$

$$B_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = -[2x(1-x)(3 + \beta^\mu \beta_\mu)] \hat{p}^2 - [2x\beta^\mu \beta_\mu] \hat{p},$$

$$C_{\mu\nu\theta\lambda} (\eta^{\mu\nu}\eta^{\theta\lambda} + \eta^{\mu\theta}\eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\theta}) = \beta^\mu \beta_\mu (\beta^\mu \beta_\mu - 1),$$

podemos escrever o último resultado de uma maneira conveniente

$$\Sigma(p) = \Sigma_3(p^2) \hat{p}^2 + \Sigma_2(p^2) \hat{p} + \Sigma_1(p^2),$$

$$\Sigma_3(p^2) = -(1 - \xi) \frac{e^2 m_p^2}{2m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \left[\frac{m^3 x^2}{b^4} - \frac{2x(1-x)(3 + \beta^\mu \beta_\mu)}{b^2} \right],$$

$$\Sigma_2(p^2) = \frac{e^2 m_p^2}{3(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x) \frac{m}{b^2} - (1 - \xi) \frac{e^2 m_p^2}{2m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \left[\frac{(1-x)x^2 p^2 m}{b^4} - \frac{2x\beta^\mu \beta_\mu}{b^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(p^2) &= -\frac{8e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} (1 - \beta^\mu \beta_\mu) \frac{1}{\epsilon} + \frac{e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{m^2}{b^2} \beta^\mu \beta_\mu + \\
&\quad + \frac{4e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} (1 - \beta^\mu \beta_\mu) \int_0^1 dx \int_0^{1-y} dy \left[1 + \gamma + \ln\left(\frac{b^2}{4\pi\mu^2}\right) \right] + \\
&\quad - (1 - \xi) \frac{e^2 m_p^2}{2m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \beta^\mu \beta_\mu (\beta^\mu \beta_\mu - 1) \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{b^2}{4\pi\mu^2}\right) \right].
\end{aligned} \tag{2.307}$$

Escolhendo $\xi = 1$ temos que

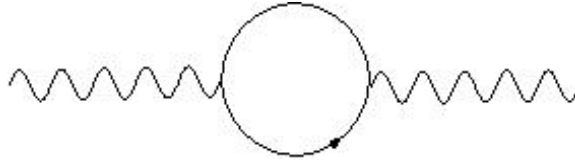
$$\begin{aligned}\Sigma(p) &= \Sigma_2(p^2)\hat{p} + \Sigma_1(p^2), \\ \Sigma_2(p^2) &= \frac{e^2 m_p^2}{3(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x) \frac{m}{b^2}, \\ \Sigma_1(p^2) &= -\frac{8e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} (1 - \beta^\mu \beta_\mu) \frac{1}{\epsilon} + \frac{e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{m^2}{b^2} \beta^\mu \beta_\mu + \\ &+ \frac{4e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} (1 - \beta^\mu \beta_\mu) \int_0^1 dx \int_0^{1-y} dy [1 + \gamma + \ln(\frac{p^2 x^2 + m^2 x + m_p^2 y + \Lambda^2(1-x-y)}{4\pi\mu^2})].\end{aligned}\tag{2.308}$$

Observa-se que a estrutura de divergências no infravermelho (IV) e no ultravioleta (UV) é dada por

$$\begin{aligned}\Sigma(p) &= \Sigma_{finito}(p) + \Sigma_\infty(p) \\ \Sigma_\infty(p) &= \Sigma_2^{IV}(p)\hat{p} + [\Sigma_1^{UV}(p) + \Sigma_1^{IV}(p)].\end{aligned}\tag{2.309}$$

2.5.2 O tensor de polarização do fóton

Dando continuidade ao estudo encontraremos o tensor de polarização do fóton de maneira similar ao caso anterior. Para isso, utilizamos novamente a primeira correção radiativa advinda da estrutura completa para escrever o tensor polarização de vácuo $\Pi_{\mu\nu}(p)$



$$\Pi_{\mu\nu}(p) = ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} tr\{\beta_\mu S(p-k) \beta_\nu S(-k)\}.\tag{2.310}$$

Portanto,

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} tr\{\beta_\mu \frac{1}{m} [\frac{(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m)}{(p-k)^2 - m^2} - 1] \beta_\nu \frac{1}{m} [\frac{-\hat{k}(-\hat{k} + m)}{k^2 - m^2} - 1]\}.\tag{2.311}$$

É sabido que

$$\begin{aligned}tr\{\beta_{\mu_1} \beta_{\mu_2} \dots \beta_{\mu_{2n-1}}\} &= 0, \\ tr\{\beta_{\mu_1} \beta_{\mu_2} \dots \beta_{\mu_{2n}}\} &= \eta_{\mu_1 \mu_2} \eta_{\mu_3 \mu_4} \dots \eta_{\mu_{2n-1} \mu_{2n}} + \eta_{\mu_2 \mu_3} \eta_{\mu_4 \mu_5} \dots \eta_{\mu_{2n} \mu_1}, \\ n &= 1, 2, 3 \dots\end{aligned}\tag{2.312}$$

$$\begin{aligned}
tr[\beta_\mu\beta_\nu] &= 2\eta_{\mu\nu}, \\
tr[\beta_\mu\hat{a}^2\beta_\nu] &= a_\mu a_\nu + a^2\eta_{\mu\nu}, \\
tr[\beta_\mu\hat{a}\beta_\nu\hat{b}] &= a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu, \\
tr[\beta_\mu\hat{a}^2\beta_\nu\hat{b}^2] &= a_\mu a_\nu b^2 + a^2 b_\mu b_\nu,
\end{aligned} \tag{2.313}$$

$$\begin{aligned}
tr\{\beta_\mu[\frac{(\hat{p}-\hat{k})(\hat{p}-\hat{k}+m)}{(p-k)^2-m^2} - 1]\beta_\nu[\frac{\hat{k}(\hat{k}+m)}{k^2-m^2} - 1]\} &= tr\{\frac{\beta_\mu(\hat{p}-\hat{k})(\hat{p}-\hat{k})\beta_\nu\hat{k}\hat{k}}{[(p-k)^2-m^2]k^2-m^2}\} - m^2 tr\{\frac{\beta_\mu(\hat{p}-\hat{k})\beta_\nu\hat{k}}{[(p-k)^2-m^2]k^2-m^2}\} + \\
-tr\{\beta_\mu[\frac{(\hat{p}-\hat{k})(\hat{p}-\hat{k})}{(p-k)^2-m^2}\beta_\nu]\} &- tr\{\frac{\beta_\mu\beta_\nu\hat{k}\hat{k}}{k^2-m^2}\} + tr\{\beta_\mu\beta_\nu\},
\end{aligned} \tag{2.314}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(p) &= \frac{-ie^2\mu^{4-d}}{m^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{(p-k)_\mu(p-k)_\nu k^2 + (p-k)^2 k_\mu k_\nu - [(p-k)_\mu k_\nu + (p-k)_\nu k_\mu] m^2}{[(p-k)^2-m^2](k^2-m^2)} - \frac{(p-k)_\mu(p-k)_\nu + (p-k)^2 \eta_{\mu\nu}}{[(p-k)^2-m^2]} \right. \\
&- \left. \frac{k_\mu k_\nu + k^2 \eta_{\mu\nu}}{(k^2-m^2)} + 2\eta_{\mu\nu} \right\}, \\
\Pi_{\mu\nu}(p) &= \frac{-ie^2\mu^{4-d}}{m^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ m^2(p-2k)_\mu(p-2k)_\nu - m^2[(p-k)^2 + k^2 - 2m^2]\eta_{\mu\nu} \right\} \frac{1}{[(p-k)^2-m^2](k^2-m^2)}.
\end{aligned} \tag{2.315}$$

Novamente, para resolver a integral em (2.315) vamos utilizar a parametrização de Feynman

$$\begin{aligned}
\frac{1}{ab} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[ax+b(1-x)]^2} \\
\Pi_{\mu\nu}(p) &= -ie^2\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ (p-2k)_\mu(p-2k)_\nu - [(p-k)^2 + k^2 - 2m^2]\eta_{\mu\nu} \right\} \times \\
&\times \frac{1}{\{[(p-k)^2-m^2]x + (k^2-m^2)(1-x)\}^2}.
\end{aligned} \tag{2.316}$$

Organizando o denominador da expressão anterior

$$[(p-k)^2 - m^2]x + (k^2 - m^2)(1-x) = k^2 - 2pkx + p^2x - m^2 = (k-px)^2 + p^2x(1-x) - m^2, \tag{2.317}$$

temos que

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(p) &= -ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ (p-2k)_\mu(p-2k)_\nu - [(p-k)^2 + k^2 - 2m^2]\eta_{\mu\nu} \right\} \times \\
&\times \frac{1}{[(k-px)^2 + p^2x(1-x) - m^2]^2}.
\end{aligned} \tag{2.318}$$

Podemos definir um parâmetro b

$$b^2 = m^2 - x(1-x)p^2 \tag{2.319}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(p) &= -ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ (p-2k)_\mu(p-2k)_\nu - [(p-k)^2 + k^2 - 2m^2]\eta_{\mu\nu} \right\} \times \\
&\times \frac{1}{[(k-px)^2 - b^2]^2}.
\end{aligned} \tag{2.320}$$

Fazendo a translação $k \rightarrow k + px$ e observando que termos ímpares em k são nulos temos

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(p) &= -ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \{ (1-2x)^2 p_\mu p_\nu + 4k_\mu k_\nu - [(1-2x+2x^2)p^2 + 2k^2 - 2m^2] \eta_{\mu\nu} \}, \\ &\frac{1}{[k^2-b^2]^2} \\ \Pi_{\mu\nu}(p) &= -ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \{ (1-2x)^2 p_\mu p_\nu + 4k_\mu k_\nu - [(1-2x+2x^2)p^2 + 2\eta^{\lambda\theta} k_\lambda k_\theta - 2m^2] \eta_{\mu\nu} \}, \\ &\frac{1}{[k^2-b^2]^2} \cdot \\ \Pi_{\mu\nu}(p) &= -ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \{ (1-2x)^2 p_\mu p_\nu + 4k_\mu k_\nu - [(1-2x)^2 p^2 - 2b^2 + 2\eta^{\lambda\theta} k_\lambda k_\theta] \eta_{\mu\nu} \} \\ &\frac{1}{[k^2-b^2]^2}.\end{aligned}\tag{2.321}$$

Temos agora os seguintes resultados matemáticos

$$\begin{aligned}\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2-b^2]^2} &= \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)[-b^2]^{2-\frac{d}{2}}}, \\ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\lambda k_\theta}{[k^2-b^2]^2} &= \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta_{\lambda\theta} \Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)[-b^2]^{1-\frac{d}{2}}}.\end{aligned}\tag{2.322}$$

Tomando o limite $\epsilon = 4 - d \rightarrow 0$ mantendo a álgebra das matrizes β

$$\begin{aligned}\mu^{4-d} \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)[-b^2]^{2-\frac{d}{2}}} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2)[\frac{b^2}{4\pi\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} = \frac{1}{(4\pi)^2} [\frac{2}{\epsilon} - \gamma] [1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\frac{b^2}{4\pi\mu^2})], \\ \mu^{4-d} \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta_{\lambda\theta} \Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)[-b^2]^{1-\frac{d}{2}}} &= \frac{\eta_{\lambda\theta} b^2}{2(4\pi)^2} \frac{\Gamma(-1+\frac{\epsilon}{2})}{[\frac{b^2}{4\pi\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} = \frac{\eta_{\lambda\theta} b^2}{2(4\pi)^2} [\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma] [1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\frac{b^2}{4\pi\mu^2})], \\ \eta^{\lambda\theta} \eta_{\lambda\theta} &= d = (4 - \epsilon).\end{aligned}\tag{2.323}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(p) &= e^2 \int_0^1 dx \{ \frac{(1-2x)^2}{(4\pi)^2} [\frac{2}{\epsilon} - \gamma] [1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\frac{b^2}{4\pi\mu^2})] p_\mu p_\nu + \frac{2b^2}{(4\pi)^2} [\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma] [1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\frac{b^2}{4\pi\mu^2})] \eta_{\mu\nu} + \\ &- \frac{(1-2x)^2 p^2 - 2b^2}{(4\pi)^2} [\frac{2}{\epsilon} - \gamma] [1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\frac{b^2}{4\pi\mu^2})] \eta_{\mu\nu} - \frac{b^2(4-\epsilon)}{(4\pi)^2} [\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma] [1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\frac{b^2}{4\pi\mu^2})] \eta_{\mu\nu} \}.\end{aligned}\tag{2.324}$$

Percebemos, então, que

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(p) &= u(p) \eta_{\mu\nu} + v(p) p_\mu p_\nu, \\ u(p) &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \{ b^2 \epsilon [\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma] [1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\frac{b^2}{4\pi\mu^2})] + [(1-2x)^2 p^2 - 2b^2] [\frac{2}{\epsilon} - \gamma] [1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\frac{b^2}{4\pi\mu^2})] \} = \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (1-2x)^2 [\frac{2}{\epsilon} - \gamma] [1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\frac{b^2}{4\pi\mu^2})] p^2, \\ v(p) &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \frac{(1-2x)^2}{2(4\pi)^2} [\frac{2}{\epsilon} - \gamma] [1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\frac{b^2}{4\pi\mu^2})].\end{aligned}\tag{2.325}$$

Neste caso

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = [-\eta_{\mu\nu}p^2 + p_\mu p_\nu]\Pi(p), \quad (2.326)$$

onde

$$\Pi(p) = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (1-2x)^2 \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma \right] \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{b^2}{4\pi\mu^2}\right) \right] = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma \right] - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (1-2x)^2 \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{b^2}\right). \quad (2.327)$$

Sendo assim,

$$\Pi(p) = \Pi_\infty^{UV}(p) + \Pi_{finito}(p).$$

Ao calcularmos em $GSQED_4$ a primeira correção quântica para o tensor de polarização do fóton, encontramos o mesmo resultado obtido acima, indicando uma certa equivalência entre as duas teorias ao descrever partículas escalares

$$GSDKP_4 \iff GSQED_4. \quad (2.328)$$

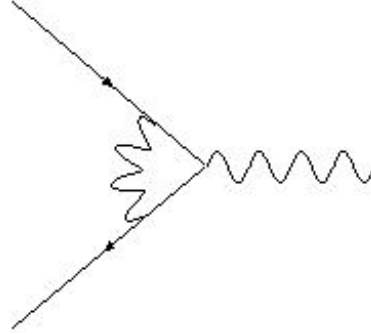
O resultado anterior, equação (2.326), condiz com a informação de que em geral $\Pi_{\mu\nu}(p)$ possui a estrutura completa devido à covariância relativística e à identidade de Ward-Takahashi

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = [-\eta_{\mu\nu}p^2 + p_\mu p_\nu]\Pi(p) \quad (2.329)$$

onde $\Pi(p)$ é conhecido como polarização do fóton.

2.5.3 O vértice

Por fim, encontraremos a primeira correção radiativa associada ao vértice. Tendo em vista a estrutura completa, escrevemos a primeira correção ao vértice $\Lambda^\mu(p', p)$ da seguinte forma



$$\Lambda^\mu(p', p) = e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \beta^\sigma S(p' - k) \beta^\mu S(p - k) \beta^\nu D_{\sigma\nu}(k). \quad (2.330)$$

Conseqüentemente,

$$\Lambda^\mu(p', p) = -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \beta^\sigma \frac{1}{m} \left[\frac{(\hat{p}' - \hat{k})(\hat{p}' - \hat{k} + m)}{(p' - k)^2 - m^2} - 1 \right] \beta^\mu \frac{1}{m} \left[\frac{(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2} - 1 \right] \beta^\nu \eta_{\sigma\nu} \frac{m_p^2}{k^2(k^2 - m_p^2)} \right\}. \quad (2.331)$$

Sendo assim,

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-ie^2 \mu^{4-d} m_p^2}{m^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\{\beta^\sigma [(\hat{p}' - \hat{k})(\hat{p}' - \hat{k} + m) - (p' - k)^2 - m^2] \beta^\mu [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 - m^2] \beta_\sigma\}}{[(p' - k)^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2][k^2(k^2 - m_p^2)]}. \quad (2.332)$$

Utilizando a parametrização de Feynman

$$\begin{aligned} \frac{1}{abcd} &= 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{1}{[a(1-x-y-z) + bx + cy + dz]^4} \\ \Lambda^\mu(p', p) &= \frac{-i6e^2 m_p^2}{m^2} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\{\beta^\sigma [(\hat{p}' - \hat{k})(\hat{p}' - \hat{k} + m) - (p' - k)^2 - m^2] \beta^\mu [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 - m^2] \beta_\sigma\}}{\{k^2(1-x-y-z) + [(p' - k)^2 - m^2]x + [(p - k)^2 - m^2]y + (k^2 - m_p^2)z\}^4}. \end{aligned} \quad (2.333)$$

Organizando o denominador da última expressão

$$\begin{aligned} &k^2(1-x-y-z) + [(p' - k)^2 - m^2]x + [(p - k)^2 - m^2]y + (k^2 - m_p^2)z = \\ &= k^2 - 2p'kx - 2pk y + p'^2x + p^2y - m^2(x+y) - m_p^2z = \\ &= (k - p'x - py)^2 - (p'x + py)^2 + p'^2x + p^2y - m^2(x+y) - m_p^2z, \end{aligned} \quad (2.334)$$

temos que

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i6e^2 m_p^2}{m^2} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\{\beta^\sigma [(\hat{p}' - \hat{k})(\hat{p}' - \hat{k} + m) - (p' - k)^2 - m^2] \beta^\mu [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 - m^2] \beta_\sigma\}}{[(k - p'x - py)^2 - (p'x + py)^2 + p'^2x + p^2y - m^2(x+y) - m_p^2z]^4}. \quad (2.335)$$

Fazendo a seguinte transformação de coordenadas $k \rightarrow k + p'x + py$ na equação anterior e definindo

$$\begin{aligned} b^2 &\doteq (p'x + py)^2 + p'^2x + p^2y - m^2(x+y) - m_p^2z \\ \beta^\sigma [(\hat{p}' - \hat{k})(\hat{p}' - \hat{k} + m) - (p' - k)^2 - m^2] \beta^\mu [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 - m^2] \beta_\alpha &\longrightarrow \\ \longrightarrow \beta^\alpha \{[(1-x)\hat{p}' - y\hat{p} - \hat{k}][[(1-x)\hat{p}' - y\hat{p} - \hat{k} + m]] + & \\ -[(1-x)p' - yp - k]^2 - m^2\} \beta^\mu \{[(1-y)\hat{p} - x\hat{p}' - \hat{k}][[(1-y)\hat{p} - x\hat{p}' - \hat{k} + m]] + & \\ -[(1-y)p - xp' - k]^2 - m^2\} \beta_\sigma & \end{aligned} \quad (2.336)$$

somos levados ao resultado

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu(p', p) &= \frac{-i6e^2 m_p^2}{m^2} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - b^2]^4} \beta^\sigma \{[(1-x)\hat{p}' - y\hat{p} - \hat{k}] \\ &[(1-x)\hat{p}' - y\hat{p} - \hat{k} + m] - [(1-x)p' - yp - k]^2 - m^2\} \beta^\mu \{[(1-y)\hat{p} - x\hat{p}' - \hat{k}] \times \\ &\times [(1-y)\hat{p} - x\hat{p}' - \hat{k} + m] - [(1-y)p - xp' - k]^2 - m^2\} \beta_\sigma. \end{aligned} \quad (2.337)$$

Percebemos então que Λ^μ pode ser escrito com sendo

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i6e^2m_p^2}{m^2}\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{[A^\mu + B_\alpha^\mu k^\alpha + C_{\alpha\nu}^\mu k^\alpha k^\nu + D_{\alpha\nu\lambda}^\mu k^\alpha k^\nu k^\lambda + E_{\alpha\nu\lambda\theta}^\mu k^\alpha k^\nu k^\lambda k^\theta]}{[k^2 - b^2]^4} \quad (2.338)$$

onde os coeficientes relevantes da expansão anterior são dados explicitamente por

$$\begin{aligned} A^\mu &= \beta^\sigma \{[(1-x)\hat{p}' - y\hat{p}][(1-x)\hat{p}' - y\hat{p} + m] - [(1-x)p' - yp]^2 - m^2\} \times \\ &\times \beta^\mu \{[(1-y)\hat{p} - x\hat{p}'][(1-y)\hat{p} - x\hat{p}' + m] - [(1-y)p - xp']^2 - m^2\} \beta_\sigma, \\ C_{\alpha\nu}^\mu &= \beta^\sigma \{\beta_\alpha \beta_\nu - \eta_{\alpha\nu}\} \beta^\mu \{[(1-y)\hat{p} - x\hat{p}' + m] - [(1-y)p - xp']^2 - m^2\} \beta_\sigma \\ &+ \beta^\sigma \{[(1-x)\hat{p}' - y\hat{p}][(1-x)\hat{p}' - y\hat{p} + m] - [(1-x)p' - yp]^2 - m^2\} \beta^\mu \{\beta_\alpha \beta_\nu - \eta_{\alpha\nu}\} + \\ &- \beta^\sigma \{\beta_\alpha [(1-x)\hat{p}' - y\hat{p} + m] + [(1-x)\hat{p}' - y\hat{p}]\beta_\alpha + 2[(1-x)p'_\alpha - yp_\alpha]\} \beta^\mu \times \\ &\times \{\beta_\nu [(1-y)\hat{p} - x\hat{p}' + m] + [(1-y)\hat{p} - x\hat{p}']\beta_\nu + 2[(1-y)p'_\nu - xp'_\nu]\}, \\ E_{\alpha\nu\lambda\theta}^\mu &= \beta^\sigma \{\beta_\alpha \beta_\nu - \eta_{\alpha\nu}\} \beta^\mu \{\beta_\lambda \beta_\theta - \eta_{\lambda\theta}\} \beta_\sigma. \end{aligned} \quad (2.339)$$

Os termos ímpares em k são nulos ao calcularmos a integral em todo espaço dos momenta, bastando fazer a transformação $k \rightarrow -k$ para perceber isso.

Agora, para observarmos se o vértice da teoria tem divergências ou não, precisamos obter as integrais abaixo

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - b^2]^4} &= \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(4 - \frac{d}{2})}{\Gamma(4)[-b^2]^{4 - \frac{d}{2}}}, \\ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\alpha k^\nu}{[k^2 - b^2]^4} &= \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta^{\alpha\nu} \Gamma(4 - 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(4)[-b^2]^{4 - 1 - \frac{d}{2}}}, \\ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\alpha k^\nu k^\lambda k^\theta}{[k^2 - b^2]^4} &= \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{4(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{(\eta^{\alpha\nu} \eta^{\lambda\theta} + \eta^{\nu\theta} \eta^{\alpha\lambda} + \eta^{\theta\alpha} \eta^{\lambda\nu}) \Gamma(4 - 2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(4)[-b^2]^{4 - 2 - \frac{d}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.340)$$

Logo, a equação (2.338) é dada por

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu(p', p) &= \frac{6e^2m_p^2}{m^2}\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \left[\frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(4 - \frac{d}{2})}{\Gamma(4)[-b^2]^{4 - \frac{d}{2}}} A^\mu + \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta^{\alpha\nu} \Gamma(4 - 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(4)[-b^2]^{4 - 1 - \frac{d}{2}}} C_{\alpha\nu}^\mu + \right. \\ &\left. \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{4(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{(\eta^{\alpha\nu} \eta^{\lambda\theta} + \eta^{\nu\theta} \eta^{\alpha\lambda} + \eta^{\theta\alpha} \eta^{\lambda\nu}) \Gamma(4 - 2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(4)[-b^2]^{4 - 2 - \frac{d}{2}}} E_{\alpha\nu\lambda\theta}^\mu \right]. \end{aligned} \quad (2.341)$$

Fazendo a transformação $d = 4 - \epsilon$ e tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{e^2m_p^2}{(4\pi)^2 m^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \left[\frac{A^\mu}{b^4} - \frac{\eta^{\alpha\nu} C_{\alpha\nu}^\mu}{2b^2} - \frac{(\eta^{\alpha\nu} \eta^{\lambda\theta} + \eta^{\nu\theta} \eta^{\alpha\lambda} + \eta^{\theta\alpha} \eta^{\lambda\nu}) \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) E_{\alpha\nu\lambda\theta}^\mu}{4[\frac{b^2}{4\pi\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} \right], \quad (2.342)$$

$$\frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{[\frac{b^2}{4\pi\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} = \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma \right] \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{b^2}{4\pi\mu^2}\right) \right].$$

Por meio do resultado anterior concluímos que a primeira correção radiativa do vértice tem aparentemente uma divergência, o que já era esperado tendo em vista uma contagem de potências. Para termos certeza se essa divergência existe é necessário calcular a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
& (\eta^{\alpha\nu}\eta^{\lambda\theta} + \eta^{\nu\theta}\eta^{\alpha\lambda} + \eta^{\theta\alpha}\eta^{\lambda\nu})E_{\alpha\nu\lambda\theta}^{\mu} = (\eta^{\alpha\nu}\eta^{\lambda\theta} + \eta^{\nu\theta}\eta^{\alpha\lambda} + \eta^{\theta\alpha}\eta^{\lambda\nu})\beta^{\sigma}\{\beta_{\alpha}\beta_{\nu} - \eta_{\alpha\nu}\} \times \\
& \times \beta^{\mu}\{\beta_{\lambda}\beta_{\theta} - \eta_{\lambda\theta}\}\beta_{\sigma} = \beta^{\sigma}\{\beta^{\alpha}\beta_{\alpha} - \eta_{\alpha}^{\alpha}\}\beta^{\mu}\{\beta^{\lambda}\beta_{\lambda} - \eta_{\lambda}^{\lambda}\}\beta_{\sigma} + \beta^{\sigma}\{\beta^{\lambda}\beta^{\theta} - \eta^{\lambda\theta}\}\beta^{\mu} \times \\
& \times \{\beta_{\lambda}\beta_{\theta} - \eta_{\lambda\theta}\}\beta_{\sigma} + \beta^{\sigma}\{\beta^{\theta}\beta^{\lambda} - \eta^{\theta\lambda}\}\beta^{\mu}\{\beta_{\lambda}\beta_{\theta} - \eta_{\lambda\theta}\}\beta_{\sigma}.
\end{aligned} \tag{2.343}$$

Para isso, vale lembrar das seguintes propriedades da matriz β^{μ} extendidas para dimensões quaisquer

$$\begin{aligned}
& \beta^{\mu}\beta^{\nu}\beta^{\rho} + \beta^{\rho}\beta^{\nu}\beta^{\mu} = \beta^{\mu}\eta^{\nu\rho} + \beta^{\rho}\eta^{\mu\nu}, \\
& \beta^{\mu}\beta^{\nu}\beta_{\mu} = \beta^{\nu}, \\
& \beta^{\mu}\beta^{\nu}\beta_{\nu}\beta_{\mu} = d = 4 - \epsilon, \\
& \beta^{\mu}\beta^{\nu}\beta_{\nu} + \beta^{\nu}\beta_{\nu}\beta^{\mu} = (5 - \epsilon)\beta^{\mu}.
\end{aligned} \tag{2.344}$$

Neste caso, calculamos o primeiro termo da expressão (2.343)

$$\begin{aligned}
& \beta^{\sigma}\beta^{\alpha}\beta_{\alpha}\beta^{\mu}\beta^{\lambda}\beta_{\lambda}\beta_{\sigma} = (5 - \epsilon - \beta^{\alpha}\beta_{\alpha})\beta^{\mu}(5 - \epsilon - \beta^{\lambda}\beta_{\lambda}) = (5 - \epsilon - \beta^{\alpha}\beta_{\alpha})\beta^{\lambda}\beta_{\lambda}\beta^{\mu} \\
& - \eta_{\lambda}^{\lambda}\beta^{\sigma}\beta^{\alpha}\beta_{\alpha}\beta^{\mu}\beta_{\sigma} = -(4 - \epsilon)(5 - \epsilon - \beta^{\alpha}\beta_{\alpha})\beta^{\mu} \\
& - \beta^{\sigma}\eta_{\alpha}^{\alpha}\beta^{\mu}\beta^{\lambda}\beta_{\lambda}\beta_{\sigma} = -(4 - \epsilon)\beta^{\mu}(5 - \epsilon - \beta^{\lambda}\beta_{\lambda}) = -(4 - \epsilon)\beta^{\lambda}\beta_{\lambda}\beta^{\mu} \\
& \beta^{\sigma}\eta_{\alpha}^{\alpha}\beta^{\mu}\eta_{\lambda}^{\lambda}\beta_{\sigma} = (4 - \epsilon)(4 - \epsilon)\beta^{\mu} \\
& \Rightarrow \beta^{\sigma}\{\beta^{\alpha}\beta_{\alpha} - \eta_{\alpha}^{\alpha}\}\beta^{\mu}\{\beta^{\lambda}\beta_{\lambda} - \eta_{\lambda}^{\lambda}\}\beta_{\sigma} = [-(4 - \epsilon) + (5 - \epsilon)\beta^{\lambda}\beta_{\lambda} - \beta^{\alpha}\beta_{\alpha}\beta^{\lambda}\beta_{\lambda}]\beta^{\mu}.
\end{aligned}$$

O segundo termo

$$\begin{aligned}
& \beta^{\sigma}\beta^{\lambda}\beta^{\theta}\beta^{\mu}\beta_{\lambda}\beta_{\theta}\beta_{\sigma} = [-\beta^{\theta}\beta^{\lambda}\beta^{\sigma} + \beta^{\sigma}\eta^{\lambda\theta} + \beta^{\theta}\eta^{\sigma\lambda}]\beta^{\mu}[-\beta_{\sigma}\beta_{\theta}\beta_{\lambda} + \beta_{\lambda}\eta_{\theta\sigma} + \beta_{\sigma}\eta_{\lambda\theta}] = \\
& = \beta^{\mu} - \beta^{\lambda}\beta_{\lambda}\beta^{\mu} - (5 - \epsilon - \beta^{\lambda}\beta_{\lambda})\beta^{\mu} - \beta^{\lambda}\beta_{\lambda}\beta^{\mu} + (4 - \epsilon)\beta^{\mu} + \beta^{\mu} - (5 - \epsilon - \beta^{\lambda}\beta_{\lambda})\beta^{\mu} + \beta^{\mu} + (4 - \epsilon)\beta^{\mu} = \\
& = \beta^{\mu} \\
& - \beta^{\sigma}\beta^{\lambda}\beta^{\theta}\beta^{\mu}\eta_{\lambda\theta}\beta_{\sigma} = -\beta^{\sigma}\beta^{\lambda}\beta_{\lambda}\beta^{\mu}\beta_{\sigma} = -(5 - \epsilon - \beta^{\lambda}\beta_{\lambda})\beta^{\mu} \\
& - \beta^{\sigma}\eta^{\lambda\theta}\beta^{\mu}\beta_{\lambda}\beta_{\theta}\beta_{\sigma} = -\beta^{\sigma}\beta^{\mu}\beta^{\theta}\beta_{\theta}\beta_{\sigma} = -\beta^{\sigma}\beta^{\mu}\beta_{\sigma}(5 - \epsilon - \beta^{\theta}\beta_{\theta}) = -\beta^{\theta}\beta_{\theta}\beta^{\mu} \\
& \beta^{\sigma}\eta^{\lambda\theta}\beta^{\mu}\eta_{\lambda\theta}\beta_{\sigma} = (4 - \epsilon)\beta^{\mu} \\
& \Rightarrow \beta^{\sigma}\{\beta^{\lambda}\beta^{\theta} - \eta^{\lambda\theta}\}\beta^{\mu}\{\beta_{\lambda}\beta_{\theta} - \eta_{\lambda\theta}\}\beta_{\sigma} = 0.
\end{aligned}$$

E, por fim, o terceiro

$$\begin{aligned}
\beta^\sigma \beta^\theta \beta^\lambda \beta^\mu \beta_\lambda \beta_\theta \beta_\sigma &= \beta^\mu \\
-\beta^\sigma \beta^\theta \beta^\lambda \beta^\mu \eta_{\lambda\theta} \beta_\sigma &= -(5 - \epsilon - \beta^\lambda \beta_\lambda) \beta^\mu \\
-\beta^\sigma \eta^{\theta\lambda} \beta^\mu \beta_\lambda \beta_\theta \beta_\sigma &= -\beta^\theta \beta_\theta \beta^\mu \\
\beta^\sigma \eta^{\lambda\theta} \beta^\mu \eta_{\lambda\theta} \beta_\sigma &= (4 - \epsilon) \beta^\mu \\
\Rightarrow \beta^\sigma \{ \beta^\theta \beta^\lambda - \eta^{\theta\lambda} \} \beta^\mu \{ \beta_\lambda \beta_\theta - \eta_{\lambda\theta} \} \beta_\sigma &= 0.
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
(\eta^{\alpha\nu} \eta^{\lambda\theta} + \eta^{\nu\theta} \eta^{\alpha\lambda} + \eta^{\theta\alpha} \eta^{\lambda\nu}) E_{\alpha\nu\lambda\theta}^\mu &= [-(4 - \epsilon) + (5 - \epsilon) \beta^\lambda \beta_\lambda - \beta^\alpha \beta_\alpha \beta^\lambda \beta_\lambda] \beta^\mu = \\
&= [-4 + 5\beta^\lambda \beta_\lambda - \beta^\alpha \beta_\alpha \beta^\lambda \beta_\lambda] \beta^\mu + \epsilon [1 - \beta^\lambda \beta_\lambda] \beta^\mu.
\end{aligned} \tag{2.345}$$

Agora observa-se que

$$\begin{aligned}
-4 + 5\beta^\lambda \beta_\lambda - \beta^\alpha \beta_\alpha \beta^\lambda \beta_\lambda &= -4 + 5\beta^\lambda \beta_\lambda - [-\beta^\lambda \beta^\alpha \beta_\alpha \beta_\lambda + (5 - \epsilon) \beta^\lambda \beta_\lambda] \\
&= -4 + 5\beta^\lambda \beta_\lambda - [-(4 - \epsilon) + (5 - \epsilon) \beta^\lambda \beta_\lambda] \\
&= -\epsilon [1 - \beta^\lambda \beta_\lambda] \beta^\mu
\end{aligned} \tag{2.346}$$

e, conseqüentemente,

$$(\eta^{\alpha\nu} \eta^{\lambda\theta} + \eta^{\nu\theta} \eta^{\alpha\lambda} + \eta^{\theta\alpha} \eta^{\lambda\nu}) E_{\alpha\nu\lambda\theta}^\mu = 0. \tag{2.347}$$

Percebemos então que Λ_μ não possui divergências no ultravioleta, apenas no infravermelho devido ao propagador do fóton. Isso já era esperado para o caso particular obtido de uma das identidades de WT

$$\Gamma^\mu(p, p; k = 0) = \frac{\partial \mathcal{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu}, \tag{2.348}$$

pois Σ tem uma divergência no ultravioleta proporcional a massa de Podolsky m_p . Portanto, a álgebra de DKP proíbe o aparecimento de uma divergência UV no vértice, assegurando uma das identidades de WT e, conseqüentemente a simetria de calibre.

De maneira geral

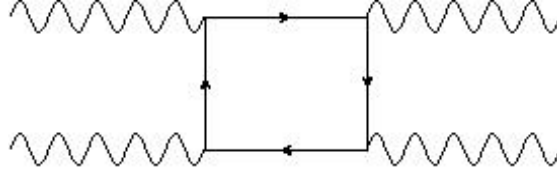
$$\Lambda^\mu(p', p) = \Lambda_{finito}^\mu(p', p) + \Lambda_\infty^\mu(p', p)$$

$$\Lambda_\infty^\mu(p', p) = \Lambda^{IV\ \mu}_\infty(p', p).$$

Logo o estudo das primeiras correções radiativas nos levou a visualizar divergências tanto no ultravioleta como no infravermelho da GSDKP₄ associadas a massa do méson e a sua carga. Esse conhecimento é importante e nos dá um guia de como se procederá o programa de renormalização.

2.6 Espalhamento fóton-fóton

Iniciaremos o estudo do espalhamento luz-luz. Tendo em vista as regras de Feynman ou a estrutura geral advinda do funcional gerador, escrevemos a amplitude associada a este espalhamento $\Gamma^{\mu\nu\lambda\theta}(p', p; p', p)$ da seguinte forma



$$\Gamma^{\mu\nu\lambda\theta}(p', p; p', p) = e^4 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{tr}\{\beta^\mu S(p' + k) \beta^\nu S(k) \beta^\lambda S(p - k) \beta^\theta S(k)\}. \quad (2.349)$$

Sendo assim, com o resultado

$$S(p) = \frac{i}{m} \left[\frac{\hat{p}(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2} - 1 \right], \quad (2.350)$$

somos conduzidos à expressão

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu\lambda\theta}(p', p; p', p) &= \frac{e^4 \mu^{4-d}}{m^4} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{tr}\{\beta^\mu [(\hat{p}' + \hat{k})(\hat{p}' + \hat{k} + m) - (p' + k)^2 - m^2] \beta^\nu \times \\ &\times [\hat{k}(\hat{k} + m) - k^2 - m^2] \beta^\lambda [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 - m^2] \beta^\theta \times \\ &\times [\hat{k}(\hat{k} + m) - k^2 - m^2]\} \frac{1}{[(p' + k)^2 - m^2][k^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2][k^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (2.351)$$

Com a ajuda da parametrização de Feynman

$$\frac{1}{abcd} = 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{1}{[a(1-x-y-z) + bx + cy + dz]^4}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu\lambda\theta}(p', p; p', p) &= \frac{6e^4 \mu^{4-d}}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\text{tr}\{\beta^\mu [(\hat{p}' + \hat{k})(\hat{p}' + \hat{k} + m) - (p' + k)^2 - m^2] \beta^\nu [\hat{k}(\hat{k} + m) - k^2 - m^2] \beta^\lambda [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 - m^2] \beta^\theta [\hat{k}(\hat{k} + m) - k^2 - m^2]\}}{\{[k^2 - m^2](1-x-y-z) + [(p' + k)^2 - m^2]x + [(p - k)^2 - m^2]y + [k^2 - m^2]z\}^4}, \end{aligned} \quad (2.352)$$

organizamos o denominador da última expressão

$$\begin{aligned} [k^2 - m^2](1 - x - y - z) + [(p' + k)^2 - m^2]x + [(p - k)^2 - m^2]y + [k^2 - m^2]z &= \\ = (k + p'x - py)^2 - (p'x - py)^2 + p'^2 x + p^2 y \end{aligned} \quad (2.353)$$

e concluímos que

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu\lambda\theta}(p', p; p', p) &= \frac{6e^4 \mu^{4-d}}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1 - x - y) \times \\ &\times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\text{tr}\{\beta^\mu [(\hat{p}' + \hat{k})(\hat{p}' + \hat{k} + m) - (p' + k)^2 - m^2] \beta^\nu [\hat{k}(\hat{k} + m) - k^2 - m^2] \beta^\lambda [(\hat{p} - \hat{k})(\hat{p} - \hat{k} + m) - (p - k)^2 - m^2] \beta^\theta [\hat{k}(\hat{k} + m) - k^2 - m^2]\}}{\{(k + p'x - py)^2 - (p'x - py)^2 + p'^2 x + p^2 y\}^4}. \end{aligned} \quad (2.354)$$

Fazendo a transformação de coordenadas $k \rightarrow k + p'x - py$ na equação anterior, definimos um

parâmetro b

$$b^2 = (p'x - py)^2 + p'^2x + p^2y \quad (2.355)$$

e escrevemos o numerador da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \beta^\mu [(\hat{p}' + \hat{k} + \hat{p}'x - \hat{p}y)(\hat{p}' + \hat{k} + \hat{p}'x - \hat{p}y + m) - (p' + k + p'x - py)^2 - m^2] \times \\ & \times \beta^\nu [(\hat{k} + \hat{p}'x - \hat{p}y)(\hat{k} + \hat{p}'x - \hat{p}y + m) - (k + p'x - py)^2 - m^2] \beta^\lambda \times \\ & \times [(\hat{p} - \hat{k} - \hat{p}'x + \hat{p}y)(\hat{p} - \hat{k} - \hat{p}'x + \hat{p}y + m) - (p - k - p'x + py)^2 - m^2] \beta^\theta \times \\ & \times [(\hat{k} + \hat{p}'x - \hat{p}y)(\hat{k} + \hat{p}'x - \hat{p}y + m) - (k + p'x - py)^2 - m^2] \end{aligned} \quad (2.356)$$

Assim, percebemos a estrutura

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu\lambda\theta}(p', p; p', p) &= \frac{6e^4\mu^{4-d}}{\eta^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \times \\ & \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\text{tr}\{A^{\mu\nu\lambda\theta} + B_{\alpha\sigma}^{\mu\nu\lambda\theta} k^\alpha k^\sigma + C_{\alpha\sigma\gamma\delta}^{\mu\nu\lambda\theta} k^\alpha k^\sigma k^\gamma k^\delta + D_{\alpha\sigma\gamma\delta\pi\varpi\rho\tau}^{\mu\nu\lambda\theta} k^\alpha k^\sigma k^\gamma k^\delta k^\pi k^\varpi k^\rho k^\tau\}}{\{k^2 - b^2\}^4}, \end{aligned} \quad (2.357)$$

Explicitando apenas a estrutura com uma possível divergência no ultravioleta

$$\Gamma_{UV}^{\mu\nu\lambda\theta}(p', p; p', p) = \text{tr}\{D_{\alpha\sigma\gamma\delta\pi\varpi\rho\tau}^{\mu\nu\lambda\theta}\} \frac{6e^4\mu^{4-d}}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\alpha k^\sigma k^\gamma k^\delta k^\pi k^\varpi k^\rho k^\tau}{\{k^2 - b^2\}^4}, \quad (2.358)$$

$$D_{\alpha\sigma\gamma\delta\pi\varpi\rho\tau}^{\mu\nu\lambda\theta} = \beta^\mu(\beta_\alpha\beta_\sigma - \eta_{\alpha\sigma})\beta^\nu(\beta_\gamma\beta_\delta - \eta_{\gamma\delta})\beta^\lambda(\beta_\pi\beta_\varpi - \eta_{\pi\varpi})\beta^\theta(\beta_\rho\beta_\tau - \eta_{\rho\tau}),$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\alpha k^\sigma k^\gamma k^\delta k^\pi k^\varpi k^\rho k^\tau}{[k^2 - b^2]^4} = \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}} (\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\gamma\delta}\eta^{\pi\varpi}\eta^{\rho\tau} + \dots + \text{perm})\Gamma(4 - 3 - \frac{d}{2})}{8(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(4)[-b^2]^{4-3-\frac{d}{2}}}. \quad (2.359)$$

Fazendo a transformação $d = 4 - \epsilon$, tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$ temos

$$\Gamma_{UV}^{\mu\nu\lambda\theta}(p', p; p', p) = \frac{ie^4}{(4\pi)^2 m^4} \text{tr}\{D_{\alpha\sigma\gamma\delta\pi\varpi\rho\tau}^{\mu\nu\lambda\theta}\} (\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\gamma\delta}\eta^{\pi\varpi}\eta^{\rho\tau} + \dots + \text{perm}) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \frac{b\Gamma(-1+\frac{\epsilon}{2})}{8[\frac{b^2}{4\pi\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}}$$

$$\frac{\Gamma(-1+\frac{\epsilon}{2})}{[\frac{b^2}{4\pi\mu^2}]^{\frac{\epsilon}{2}}} = [\frac{2}{\epsilon} - \gamma][1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\frac{b^2}{4\pi\mu^2})]. \quad (2.360)$$

Por outro lado, sabemos de uma das identidades de WT que

$$p^\mu \Gamma_{\mu\nu\alpha\beta}(p, p', k, k') = 0. \quad (2.361)$$

Nesse caso, a estrutura que representa o espalhamento luz-luz não deve ter divergências no ultravioleta pois caso contrário quebraria a simetria de calibre. Consequentemente, assim como na primeira correção radiativa do vértice, a álgebra de DKP deve proibir a divergência no ultravioleta,

$$tr\{D_{\alpha\sigma\gamma\delta\pi\varpi\rho\tau}^{\mu\nu\lambda\theta}\}(\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\gamma\delta}\eta^{\pi\varpi}\eta^{\rho\tau} + \dots perm) = 0,$$

$$tr\{\beta^\mu(\beta_\alpha\beta_\sigma - \eta_{\alpha\sigma})\beta^\nu(\beta_\gamma\beta_\delta - \eta_{\gamma\delta})\beta^\lambda(\beta_\pi\beta_\varpi - \eta_{\pi\varpi})\beta^\theta(\beta_\rho\beta_\tau - \eta_{\rho\tau})\}(\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\gamma\delta}\eta^{\pi\varpi}\eta^{\rho\tau} + \dots perm) = 0. \quad (2.362)$$

Esquecendo os índices de D percebemos

$$D = \beta^{12} - 4\eta\beta^{10} + 6\eta\eta\beta^8 - 4\eta\eta\eta\beta^6 + \eta\eta\eta\eta\beta^4 \quad (2.363)$$

$$1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0.$$

De maneira explícita

$$\begin{aligned} & \beta^\mu\beta_\alpha\beta_\sigma\beta^\nu\beta_\gamma\beta_\delta\beta^\lambda\beta_\pi\beta_\varpi\beta^\theta\beta_\rho\beta_\tau - (\eta_{\alpha\sigma}\beta^\mu\beta^\nu\beta_\gamma\beta_\delta\beta^\lambda\beta_\pi\beta_\varpi\beta^\theta\beta_\rho\beta_\tau + \eta_{\gamma\delta}\beta^\mu\beta_\alpha\beta_\sigma\beta^\nu\beta^\lambda\beta_\pi\beta_\varpi\beta^\theta\beta_\rho\beta_\tau + \\ & + \eta_{\pi\varpi}\beta^\mu\beta_\alpha\beta_\sigma\beta^\nu\beta_\gamma\beta_\delta\beta^\lambda\beta^\theta\beta_\rho\beta_\tau + \eta_{\rho\tau}\beta^\mu\beta_\alpha\beta_\sigma\beta^\nu\beta_\gamma\beta_\delta\beta^\lambda\beta_\pi\beta_\varpi\beta^\theta) + (\eta_{\alpha\sigma}\eta_{\gamma\delta}\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda\beta_\pi\beta_\varpi\beta^\theta\beta_\rho\beta_\tau + \\ & + \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\pi\varpi}\beta^\mu\beta^\nu\beta_\gamma\beta_\delta\beta^\lambda\beta^\theta\beta_\rho\beta_\tau + \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\rho\tau}\beta^\mu\beta^\nu\beta_\gamma\beta_\delta\beta^\lambda\beta_\pi\beta_\varpi\beta^\theta + \eta_{\gamma\delta}\eta_{\pi\varpi}\beta^\mu\beta_\alpha\beta_\sigma\beta^\nu\beta^\lambda\beta^\theta\beta_\rho\beta_\tau + \\ & + \eta_{\gamma\delta}\eta_{\rho\tau}\beta^\mu\beta_\alpha\beta_\sigma\beta^\nu\beta^\lambda\beta_\pi\beta_\varpi\beta^\theta + \eta_{\pi\varpi}\eta_{\rho\tau}\beta^\mu\beta_\alpha\beta_\sigma\beta^\nu\beta_\gamma\beta_\delta\beta^\lambda\beta^\theta) - (\eta_{\alpha\sigma}\eta_{\gamma\delta}\eta_{\pi\varpi}\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda\beta^\theta\beta_\rho\beta_\tau + \\ & + \eta_{\gamma\delta}\eta_{\pi\varpi}\eta_{\rho\tau}\beta^\mu\beta_\alpha\beta_\sigma\beta^\nu\beta^\lambda\beta^\theta + \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\gamma\delta}\eta_{\rho\tau}\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda\beta_\pi\beta_\varpi\beta^\theta + \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\pi\varpi}\eta_{\rho\tau}\beta^\mu\beta^\nu\beta_\gamma\beta_\delta\beta^\lambda\beta^\theta) \\ & + \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\gamma\delta}\eta_{\pi\varpi}\eta_{\rho\tau}\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda\beta^\theta \end{aligned}$$

É de nosso conhecimento que

$$tr\{\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\dots\beta^{\mu_{2s-1}}\beta^{\mu_{2s}}\} = \eta^{\mu_1\mu_2}\dots\eta^{\mu_{2s-1}\mu_{2s}} + \eta^{\mu_2\mu_3}\dots\eta^{\mu_{2s}\mu_1}. \quad (2.364)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} tr\{D_{\alpha\sigma\gamma\delta\pi\varpi\rho\tau}^{\mu\nu\lambda\theta}\} &= \eta_\alpha^\mu\eta_\sigma^\nu\eta_\gamma^\delta\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu - [\eta_{\alpha\sigma}(\eta^{\mu\nu}\eta_\gamma^\delta\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_\gamma^\nu\eta_\delta^\lambda\eta_\pi^\theta\eta_\varpi^\mu\eta_\rho^\mu) + \\ & \eta_{\gamma\delta}(\eta_\alpha^\mu\eta_\sigma^\nu\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_{\alpha\sigma}\eta_\gamma^\nu\eta_\delta^\lambda\eta_\pi^\theta\eta_\varpi^\mu\eta_\rho^\mu) + \eta_{\pi\varpi}(\eta_\alpha^\mu\eta_\sigma^\nu\eta_\gamma^\delta\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu) + \\ & + \eta_{\rho\tau}(\eta_\alpha^\mu\eta_\sigma^\nu\eta_\gamma^\delta\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu) + \eta_{\alpha\sigma}\eta_\gamma^\nu\eta_\delta^\lambda\eta_\pi^\theta\eta_\varpi^\mu\eta_\rho^\mu] + [\eta_{\alpha\sigma}\eta_\gamma^\delta(\eta^{\mu\nu}\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_\pi^\nu\eta_\varpi^\lambda\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu) + \\ & + \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\pi\varpi}(\eta^{\mu\nu}\eta_\gamma^\delta\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_\gamma^\nu\eta_\delta^\lambda\eta_\pi^\theta\eta_\varpi^\mu\eta_\rho^\mu) + \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\rho\tau}(\eta^{\mu\nu}\eta_\gamma^\delta\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_\gamma^\nu\eta_\delta^\lambda\eta_\pi^\theta\eta_\varpi^\mu\eta_\rho^\mu) + \\ & \eta_{\gamma\delta}\eta_{\pi\varpi}(\eta_\alpha^\mu\eta_\sigma^\nu\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_{\alpha\sigma}\eta_\gamma^\nu\eta_\delta^\lambda\eta_\pi^\theta\eta_\varpi^\mu\eta_\rho^\mu) + \eta_{\gamma\delta}\eta_{\rho\tau}(\eta_\alpha^\mu\eta_\sigma^\nu\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_{\alpha\sigma}\eta_\gamma^\nu\eta_\delta^\lambda\eta_\pi^\theta\eta_\varpi^\mu\eta_\rho^\mu) + \\ & + \eta_{\pi\varpi}\eta_{\rho\tau}(\eta_\alpha^\mu\eta_\sigma^\nu\eta_\gamma^\delta\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_{\alpha\sigma}\eta_\gamma^\nu\eta_\delta^\lambda\eta_\pi^\theta\eta_\varpi^\mu\eta_\rho^\mu)] - [\eta_{\alpha\sigma}\eta_{\gamma\delta}\eta_{\pi\varpi}(\eta^{\mu\nu}\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_\pi^\nu\eta_\varpi^\lambda\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu) + \\ & + \eta_{\gamma\delta}\eta_{\pi\varpi}\eta_{\rho\tau}(\eta_\alpha^\mu\eta_\sigma^\nu\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_{\alpha\sigma}\eta_\gamma^\nu\eta_\delta^\lambda\eta_\pi^\theta\eta_\varpi^\mu\eta_\rho^\mu) + \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\gamma\delta}\eta_{\rho\tau}(\eta^{\mu\nu}\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_\pi^\nu\eta_\varpi^\lambda\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu) + \\ & + \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\pi\varpi}\eta_{\rho\tau}(\eta^{\mu\nu}\eta_\gamma^\delta\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_\gamma^\nu\eta_\delta^\lambda\eta_\pi^\theta\eta_\varpi^\mu\eta_\rho^\mu)] + \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\gamma\delta}\eta_{\pi\varpi}\eta_{\rho\tau}(\eta^{\mu\nu}\eta_\pi^\lambda\eta_\varpi^\theta\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu + \eta_\pi^\nu\eta_\varpi^\lambda\eta_\rho^\mu\eta_\tau^\mu). \end{aligned} \quad (2.365)$$

Agora, observa-se que

$$tr\{D_{\alpha\sigma\gamma\delta\pi\varpi\rho\tau}^{\mu\nu\lambda\theta}\}\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\gamma\delta}\eta^{\pi\varpi}\eta^{\rho\tau} = 16(\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\theta} + \eta^{\nu\lambda}\eta^{\theta\mu})(1 - 4 + 6 - 4 + 1) = 0. \quad (2.366)$$

Desse modo, a equação anterior juntamente com a propriedade cíclica do traço garante que

$$tr\{D_{\alpha\sigma\gamma\delta\pi\varpi\rho\tau}^{\mu\nu\lambda\theta}\}(\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\gamma\delta}\eta^{\pi\varpi}\eta^{\rho\tau} + \dots + perm) = 0. \quad (2.367)$$

Concluimos então que a simetria de calibre, utilizada em uma linguagem quântica por uma das identidades de WT, proíbe divergência no ultravioleta para o espalhamento luz-luz, porém quem assegura a afirmação anterior é novamente a álgebra de DKP.

2.7 O programa de Renormalização

Para apresentar o programa de renormalização na eletrodinâmica GSDKP₄ utilizaremos o esquema de renormalização na camada de massa [79]. Primeiramente, exploraremos a liberdade dos campos e parâmetros nus de maneira consistente com a simetria da teoria, no caso uma simetria de calibre local. Depois deixaremos explícita esta liberdade, escrevendo o que chamaremos de campos (parâmetros) vestidos ou renormalizáveis onde será possível visualizar todos os contra-termos. Com o estudo prévio sobre equações quânticas completas e divergência, será intuitivo perceber que os contra-termos cancelam as divergências. Para fixar a liberdade dos contra-termos utilizaremos condições físicas. De maneira geral as condições físicas exigem que na camada de massa as funções de Green da sua teoria tendam à sua forma livre. Como exemplo dessas condições na camada de massa, o propagador do méson deve ter um pólo na massa física, o propagador do fóton deve se comportar como um propagador livre de Podolsky e a função de vértice deve ter sua forma livre. À primeira vista, estamos apenas ajustando a teoria de tal forma que descreva a física e seja independente da ordem que trabalhamos ao aplicar a teoria de perturbação, porém a posteriori perceberemos que nossos parâmetros físicos dependem da escala de energia que estudamos o fenômeno.

Sabemos que a densidade de lagrangiana que representa nossa teoria é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m + e\hat{A})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \quad (2.368)$$

onde temos implicitamente uma simetria de calibre local

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi + i\alpha(x)\Psi \\ \bar{\Psi} &\rightarrow \bar{\Psi} - i\alpha(x)\bar{\Psi} \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \end{aligned} \quad (2.369)$$

Procuraremos por uma forma mais geral da densidade de lagrangiana (2.368) consistente com a invariância de calibre local. Para isso, primeiramente, renormalizamos os campos da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Psi &= C_0^{\frac{1}{2}}\Psi_{(R)} \\ A &= C_3^{\frac{1}{2}}A_{(R)}. \end{aligned} \quad (2.370)$$

Neste caso

$$\mathcal{L} = C_0\bar{\psi}_{(R)}(i\hat{\partial} - m + eC_3^{\frac{1}{2}}\hat{A}_{(R)})\psi_{(R)} - \frac{C_3}{4}F_{(R)\mu\nu}F_{(R)}^{\mu\nu} + \frac{C_3}{2m_p^2}\partial^\mu F_{(R)\mu\beta}\partial_\alpha F_{(R)}^{\alpha\beta}. \quad (2.371)$$

Temos ainda a liberdade nos parâmetros de massa, carga e comprimento de Podolsky, sendo assim

$$\begin{aligned} m &= \frac{C_1}{C_0}m_{(R)} \\ e &= \frac{C_2}{C_0C_3^{\frac{1}{2}}}e_{(R)} \\ m_p &= \left(\frac{C_3}{C_4}\right)^{\frac{1}{2}}m_{(R)p}. \end{aligned}$$

Portanto, a densidade de lagrangiana inicial (2.368) é escrita de maneira geral em termos de uma combinação linear das quantidades renormalizadas

$$\mathcal{L} = C_0 \bar{\psi}_{(R)} i \hat{\partial} \psi_{(R)} - C_1 m_{(R)} \bar{\psi}_{(R)} \psi_{(R)} + C_2 e_{(R)} \bar{\psi}_{(R)} \hat{A}_{(R)} \psi_{(R)} - \frac{C_3}{4} F_{(R)\mu\nu} F_{(R)}^{\mu\nu} + \frac{C_4}{2m_{(R)p}^2} \partial^\mu F_{(R)\mu\beta} \partial_\alpha F_{(R)}^{\alpha\beta}. \quad (2.372)$$

A densidade de lagrangiana anterior é invariante perante as seguinte transformação de calibre local

$$\begin{aligned} \psi_{(R)} &\rightarrow \psi_{(R)} + i\alpha(x)\psi_{(R)} \\ \bar{\psi}_{(R)} &\rightarrow \bar{\psi}_{(R)} - i\alpha(x)\bar{\psi}_{(R)} \\ A_{(R)\mu} &\rightarrow A_{(R)\mu} + \frac{1}{e_{(R)}} \frac{C_0}{C_2} \partial_\mu \alpha(x). \end{aligned} \quad (2.373)$$

De maneira geral podemos escrever a densidade de lagrangiana em termos dos parâmetros renormalizados como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}_{(R)} (i \hat{\partial} - m_{(R)}) \psi_{(R)} - \frac{1}{4} F_{(R)\mu\nu} F_{(R)}^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2} \partial^\mu F_{(R)\mu\beta} \partial_\alpha F_{(R)}^{\alpha\beta} + e_{(R)} \bar{\psi}_{(R)} \hat{A}_{(R)} \psi_{(R)} + \\ & (C_0 - 1) \bar{\psi}_{(R)} i \hat{\partial} \psi_{(R)} - (C_1 - 1) m_{(R)} \bar{\psi}_{(R)} \psi_{(R)} + (C_2 - 1) e_{(R)} \bar{\psi}_{(R)} \hat{A}_{(R)} \psi_{(R)} - \frac{(C_3 - 1)}{4} F_{(R)\mu\nu} F_{(R)}^{\mu\nu} + \\ & + \frac{(C_4 - 1)}{2m_{(R)p}^2} \partial^\mu F_{(R)\mu\beta} \partial_\alpha F_{(R)}^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

onde percebemos que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{livre} + \mathcal{L}_{int},$$

$$\mathcal{L}_{livre} = \bar{\psi}_{(R)} (i \hat{\partial} - m_{(R)}) \psi_{(R)} - \frac{1}{4} F_{(R)\mu\nu} F_{(R)}^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_{(R)p}^2} \partial^\mu F_{(R)\mu\beta} \partial_\alpha F_{(R)}^{\alpha\beta},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & e_{(R)} \bar{\psi}_{(R)} \hat{A}_{(R)} \psi_{(R)} + (C_0 - 1) \bar{\psi}_{(R)} i \hat{\partial} \psi_{(R)} - (C_1 - 1) m_{(R)} \bar{\psi}_{(R)} \psi_{(R)} + (C_2 - 1) e_{(R)} \bar{\psi}_{(R)} \hat{A}_{(R)} \psi_{(R)} + \\ & - \frac{(C_3 - 1)}{4} F_{(R)\mu\nu} F_{(R)}^{\mu\nu} + \frac{(C_4 - 1)}{2m_{(R)p}^2} \partial^\mu F_{(R)\mu\beta} \partial_\alpha F_{(R)}^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.374)$$

Os termos extras na parte de interação são denominados contra-termos. Geralmente utilizamos como notação

$$\delta_{C_i} = (C_i - 1). \quad (2.375)$$

Por fim, inserindo o termo associado à condição de calibre *no-mixing*

$$\begin{aligned} \Omega(A_{(R)}) &= \left(1 + \frac{\square}{m_{(R)p}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \partial^\mu A_{(R)\mu}, \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{livre} + \mathcal{L}_{int} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_{(R)\mu})^2 + \frac{1}{2\xi m_{(R)p}^2} (\partial^\mu \partial^\nu A_{(R)\nu})^2. \end{aligned} \quad (2.376)$$

Dando continuidade, concluímos que

$$\mathcal{L} = C_0 \bar{\psi}_{(R)} i \hat{\partial} \psi_{(R)} - C_1 m_{(R)} \bar{\psi}_{(R)} \psi_{(R)} + C_2 e_{(R)} \bar{\psi}_{(R)} \hat{A}_{(R)} \psi_{(R)} - \frac{C_3}{4} F_{(R)\mu\nu} F_{(R)}^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_{(R)p}^2} \partial^\mu F_{(R)\mu\beta} \partial_\alpha F_{(R)}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_{(R)\mu})^2 + \frac{1}{2\xi m_{(R)p}^2} (\partial^\mu \partial^\nu A_{(R)\nu})^2 \quad C_4 = 1$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_{(R)} (i \hat{\partial} - m_{(R)} + e_{(R)} \hat{A}_{(R)}) \psi_{(R)} - \frac{1}{4} F_{(R)\mu\nu} F_{(R)}^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2} \partial^\mu F_{(R)\mu\beta} \partial_\alpha F_{(R)}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_{(R)\mu})^2 + \frac{1}{2\xi m_{(R)p}^2} (\partial^\mu \partial^\nu A_{(R)\nu})^2 + \delta_{C_0} \bar{\psi}_{(R)} i \hat{\partial} \psi_{(R)} - \delta_{C_1} m_{(R)} \bar{\psi}_{(R)} \psi_{(R)} + \delta_{C_2} e_{(R)} \bar{\psi}_{(R)} \hat{A}_{(R)} \psi_{(R)} - \frac{\delta_{C_3}}{4} F_{(R)\mu\nu} F_{(R)}^{\mu\nu} \quad (2.377)$$

pois temos 4 parâmetros C_i e apenas 2 divergências na massa e na carga. Observe também que a dinâmica não afeta o parâmetro m_p .

A próxima etapa seria estudar as equações de SDF e analisar a relação entre os parâmetros C_i . Isso pode ser realizado de maneira imediata tendo em vista os resultados anteriores

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mu\nu} &= C_3 \mathcal{D}_{(R)}^{\mu\nu}, \\ \mathcal{S} &= C_0 \mathcal{S}_{(R)}, \\ \Gamma^\mu &= C_2^{-1} \Gamma_{(R)}^\mu. \end{aligned} \quad (2.378)$$

Por outro lado, para mantermos as identidades de WT na teoria renormalizada temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_2} \frac{1}{e_{(R)}} \partial_\mu \Gamma_{(R)}^\mu(z, y; x) &= -\delta(x-z) \frac{1}{C_0} \Gamma_{(R)}(x, y) + \frac{1}{C_0} \Gamma_{(R)}(x, z) \delta(x-y), \\ C_0 &= C_2. \end{aligned} \quad (2.379)$$

Portanto, lembrando-se que nossos parâmetros e campos agora são físicos, podemos escrever a densidade de lagrangiana da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(R)} &= \bar{\psi} (i \hat{\partial} - m + e \hat{A}) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\xi m_p^2} (\partial^\mu \partial^\nu A_\nu)^2 + \\ &+ \delta_{C_0} \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi - \delta_{C_1} m \bar{\psi} \psi + \delta_{C_2} e \bar{\psi} \hat{A} \psi - \frac{\delta_{C_3}}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.380)$$

Ao se obter as funções de auto-energia do fóton e do méson, essas são alteradas pela adição dos contra-termos. Primeiramente, ao analisar o setor associado à auto-energia do fóton obtemos

$$\Pi_{(R)}^{\mu\nu}(p) = \Pi^{\mu\nu}(p) + \delta_{C_3} [-\eta_{\mu\nu} p^2 + p_\mu p_\nu], \quad (2.381)$$

$$\Pi_{(R)}(p) = \Pi(p) + \delta_{C_3}.$$

Impondo a condição física de que na camada de massa o propagador do fóton se comporta como um fóton livre de Podolsky

$$\Pi_{(R)}(p) \Big|_{p^2=0} = 0 \Rightarrow \delta_{C_3} = -\Pi(p) \Big|_{p^2=0}. \quad (2.382)$$

Explícitamente, das primeiras correções radiativas do tensor de polarização do fóton, podemos dizer que

$$\delta_{C_3} = -\frac{e^2}{3(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) \right].$$

Por outro lado, ao analisar o setor associado à auto-energia do campo escalar sabemos que o propagador completo é escrito de maneira geral da seguinte forma

$$\mathcal{S} = \frac{i}{\hat{p} - m - \Sigma_R} \quad (2.383)$$

onde

$$\begin{aligned} \Sigma_R &= \Sigma - m\delta C_1 + \delta C_0 \hat{p} \\ \Sigma &= \Sigma_1 + \Sigma_2 \hat{p}, \quad \xi = 1 \end{aligned} \quad (2.384)$$

$$\hat{p} = p_\mu \beta^\mu.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{i}{a\hat{p} - b} \\ a &= (1 - \delta C_0 - \Sigma_2) \\ b &= m(1 - \delta C_1) + \Sigma_1. \end{aligned} \quad (2.385)$$

Por outro lado,

$$[a\hat{p}(a\hat{p} + m) - (a^2 p^2 - b^2)](a\hat{p} - b)S(p) = i[a\hat{p}(a\hat{p} + m) - (a^2 p^2 - b^2)], \quad (2.386)$$

$$[(a^3 \hat{p}^3 - b^2 a\hat{p} - (a^2 p^2 - b^2)a\hat{p} + b(a^2 p^2 - b^2)]S(p) = i[a\hat{p}(a\hat{p} + m) - (a^2 p^2 - b^2)],$$

$$S(p) = \frac{i}{b} \left[\frac{a\hat{p}(a\hat{p} + b)}{(a^2 p^2 - b^2)} - 1 \right] = i \frac{a\hat{p}(a\hat{p} + b) - (a^2 p^2 - b^2)}{b(a^2 p^2 - b^2)}, \quad (2.387)$$

onde utilizamos a álgebra de DKP

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\theta + \beta^\theta \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu \eta^{\nu\theta} + \beta^\theta \eta^{\nu\mu} \quad (2.388)$$

$$\hat{p}^3 = p^2 \hat{p}.$$

As condições físicas dizem que o propagador completo do campo escalar se comporta como um propagador livre na camada de massa $\hat{p} \longrightarrow m_f I$

$$a\hat{p}(a\hat{p} + b) - (a^2 p^2 - b^2) \longrightarrow \hat{p}(\hat{p} + m_f) - (p^2 - m_f^2) \quad (\text{resíduo}) \quad (2.389)$$

$$b(a^2 p^2 - b^2) \longrightarrow m_f(p^2 - m_f^2) \quad (\text{pólo}).$$

De maneira equivalente podemos inferir que

$$\hat{\Gamma} = a\hat{p} - b \quad (2.390)$$

$$\hat{\Gamma} \longrightarrow \hat{p} - m_f.$$

Agora observa-se que a condição do resíduo é dada por

$$\beta_\mu \frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial p_\mu} = \beta^\mu \beta_\mu \Rightarrow -\delta C_0 \beta^\mu \beta_\mu = \beta^\mu \beta_\mu \Sigma_2 + \beta_\mu \frac{\partial \Sigma_2}{\partial p_\mu} \hat{p} + \beta_\mu \frac{\partial \Sigma_1}{\partial p_\mu}. \quad (2.391)$$

Para fixar o parâmetro δC_0 (número) precisamos calcular o traço da expressão anterior

$$\begin{aligned} tr[\beta_\mu \frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial p_\mu}] &= tr[\beta^\mu \beta_\mu] = 8 \\ -\delta C_0 &= \Sigma_2 + \frac{tr[\beta_\mu \hat{p}]}{8} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial p_\mu} + \frac{tr[\beta_\mu \frac{\partial \Sigma_1}{\partial p_\mu}]}{8} \\ -\delta C_0 &= \Sigma_2 + \frac{p_\mu}{4} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial p_\mu} + \frac{tr[\beta_\mu \frac{\partial \Sigma_1}{\partial p_\mu}]}{8}. \end{aligned} \quad (2.392)$$

Sabemos também que $\hat{\Gamma}$ tem um pólo na massa física $\hat{p} \longrightarrow m_f I$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} &= \hat{p} - m - (\delta C_0 + \Sigma_2) \hat{p} + m \delta C_1 - \Sigma_1 \\ \Sigma_R(p^2, m) = 0 &\Rightarrow m \delta C_1 = (\delta C_0 + \Sigma_2) \hat{p} + \Sigma_1 \\ m \delta C_1 &= \Sigma_1 - \frac{p_\mu}{4} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial p_\mu} \hat{p} - \frac{tr[\beta_\mu \frac{\partial \Sigma_1}{\partial p_\mu}]}{8} \hat{p}. \end{aligned} \quad (2.393)$$

Resulta que as condições físicas associadas ao resíduo e o pólo do propagador escalar em GSDKP₄ são dadas por

$$\begin{aligned} -\delta C_0 &= \Sigma_2 + \frac{p_\mu}{4} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial p_\mu} + \frac{tr[\beta_\mu \frac{\partial \Sigma_1}{\partial p_\mu}]}{8} \\ m \delta C_1 &= \Sigma_1 - \frac{p_\mu}{4} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial p_\mu} \hat{p} - \frac{tr[\beta_\mu \frac{\partial \Sigma_1}{\partial p_\mu}]}{8} \hat{p}, \end{aligned} \quad (2.394)$$

mas esperamos também que δC_1 seja um número

$$\begin{aligned} -\delta C_1 &= \Sigma_1 + \frac{p_\mu}{4} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial p_\mu} \hat{p} + \frac{tr[\beta_\mu \frac{\partial \Sigma_1}{\partial p_\mu}]}{8} \hat{p} \\ 5m \delta C_1 &= tr[\Sigma_1]. \end{aligned} \quad (2.395)$$

Resumindo, temos as expressões no limite de $\hat{p} \longrightarrow m_f I$

$$\begin{aligned} -\delta C_0 &= \Sigma_2 + \frac{p_\mu}{4} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial p_\mu} + \frac{tr[\beta_\mu \frac{\partial \Sigma_1}{\partial p_\mu}]}{8} \\ 5m \delta C_1 &= tr[\Sigma_1]. \end{aligned} \quad (2.396)$$

Explícitamente das correções radiativas associadas à auto-energia do méson, concluímos que

$$\begin{aligned}
-\delta C_0 &= \frac{e^2 m_p^2}{3(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x) \frac{m}{[p^2 x^2 + m^2 x + m_p^2 y + \Lambda^2 (1-x-y)]} + \\
&\quad - \frac{e^2 m_p^2}{3(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x) p^2 \frac{m}{[p^2 x^2 + m^2 x + m_p^2 y + \Lambda^2 (1-x-y)]^2}
\end{aligned} \tag{2.397}$$

$$\begin{aligned}
5m\delta C_1 &= \frac{8e^2 m_p^2}{m(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{8e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{m^2}{[p^2 x^2 + m^2 x + m_p^2 y + \Lambda^2 (1-x-y)]} + \\
&\quad - \frac{4e^2 m_p^2}{m(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-y} dy [1 + \gamma + \ln(\frac{p^2 x^2 + m^2 x + m_p^2 y + \Lambda^2 (1-x-y)}{4\pi\mu^2})].
\end{aligned} \tag{2.398}$$

Para completar o programa de renormalização precisamos calcular C_2 por meio do vértice. Para isso investigaremos o espalhamento de partículas escalares pelo potencial de Coulomb. É de nosso conhecimento que a aproximação de Born para a probabilidade de transição de uma partícula escalar na presença de um campo externo $A_\mu^{(e)}$ é igual a [47]

$$\mathcal{M}_{1\rightarrow 2} = 2\pi e^2 \left| \bar{\psi}(p') \hat{A}^{(e)}(\vec{k}) \psi(p) \right|^2 \delta(E' - E) \quad \vec{k} = \vec{p}' - \vec{p} \tag{2.399}$$

onde

$$\hat{A}^{(e)}(k) = \int d^3 \vec{x} \beta^\mu A_\mu^{(e)}(\vec{x}) e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}}. \tag{2.400}$$

Levando em conta todas as correções radiativas temos

$$\hat{A}^{(e)}(\vec{q}) = K^\mu(p', p; k = p' - p) A_\mu^{(e)}(\vec{k}) \tag{2.401}$$

$$\Gamma^\mu(p', p; k) = K^\mu(p', p; k) \delta^4(p' - p - k).$$

Quando utilizamos o procedimento de renormalização ficamos com

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1\rightarrow 2} &\rightarrow 2\pi e_{(R)}^2 \left| \bar{\psi}_{(R)}(p') \hat{A}_{(R)}^{(e)}(\vec{k}) \psi_{(R)}(p) \right|^2 \delta(E' - E) \\
\hat{A}_{(R)}^{(e)}(\vec{q}) &= \frac{C_2}{C_3^{\frac{1}{2}}} K^\mu(p', p; k = p' - p) A_\mu^{(e)}(\vec{k})
\end{aligned} \tag{2.402}$$

$$e = \frac{C_2}{C_0 C_3^{\frac{1}{2}}} e_{(R)} \quad \Psi = C_0^{\frac{1}{2}} \Psi_{(R)} \quad A = C_3^{\frac{1}{2}} A_{(R)}$$

No limite de $k \rightarrow 0$

$$C_2 \bar{\psi}_{(R)}(p) K^\mu(p, p; k = 0) A_{(R)\mu}^{(e)}(\vec{k}) \psi_{(R)}(p) = \bar{\psi}_{(R)}(p) \beta^\mu A_{(R)\mu}^{(e)}(\vec{k}) \psi_{(R)}(p). \tag{2.403}$$

Por fim, podemos entender o significado da carga elétrica escrevendo a amplitude de transição que descreva o espalhamento de fótons por mésons. É de nosso conhecimento que no regime de baixas energias $k \rightarrow 0$ temos a seguinte amplitude de transição

$$\begin{aligned}
M_{f+m \rightarrow f+m} &= \bar{\psi}(p) [\Gamma_\mu \mathcal{S} \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \mathcal{S} \Gamma_\mu + \Phi_{\mu\nu}(p)] \psi(p) A^\mu A^\nu \\
&= e^2 \bar{\psi}(p) \mathcal{S}^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial p^\mu \partial p^\nu} \mathcal{S}^{-1} \psi(p) A^\mu A^\nu \\
&\rightarrow C_3 e^2 \bar{\psi}_{(R)}(p) \mathcal{S}_{(R)}^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{S}_{(R)}}{\partial p^\mu \partial p^\nu} \mathcal{S}_{(R)}^{-1} \psi_{(R)}(p) A_{(R)}^\mu A_{(R)}^\nu
\end{aligned} \tag{2.404}$$

implicando

$$e_{(R)} = C_3^{\frac{1}{2}} e, \quad (2.405)$$

concordando aparentemente com o Teorema de Thirring para o efeito Compton.

Como vimos, os contra-termos são necessários para cancelarem as divergências que aparecem na teoria ajustando os parâmetros de tal maneira a descreverem a física (experimento). C_0 e C_2 cancelam a divergência no IV, assegurando a identidade de WT, $C_0 = C_2$. C_1 está associado à massa no méson e cancela divergências no IV e UV. C_3 está associado a carga do méson e cancela a divergência no UV.

2.8 A auto-energia do fóton e o vértice a 2-laços

Anteriormente havíamos visto que a auto-energia do méson possui uma estrutura de divergência na massa de Podolsky. Poderíamos nos perguntar se esse tipo de divergência se apresenta na auto-energia do fóton ou no vértice em ordem superior. Para observar isto, calcularemos a auto-energia do fóton e a estrutura de vértice a 2-laços [80], utilizando técnicas funcionais inspiradas na teoria de perturbação modificada de Fradkin com contra-termos.

Inicialmente é de nosso conhecimento que

$$\begin{aligned} Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] &= \int D\mu \exp[iS_{eff}] \\ S_{eff} &= \int d^4x [\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m + e\hat{A})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\xi m_p^2}(\partial^\mu\partial^\nu A_\nu)^2 + \\ &+ \delta_{C_0}\bar{\psi}i\hat{\partial}\psi - \delta_{C_1}m\bar{\psi}\psi + \delta_{C_2}e\bar{\psi}\hat{A}\psi - \frac{\delta_{C_3}}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}n + \bar{\eta}\psi + A^\mu J_\mu]. \end{aligned} \quad (2.406)$$

Neste caso

$$\begin{aligned} Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] &= \int D\mu \exp[i \int d^4y (1 + \delta_{C_2})e\bar{\psi}\hat{A}\psi] \exp\{i \int d^4x [\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \\ &+ \frac{1}{2m_p^2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\xi m_p^2}(\partial^\mu\partial^\nu A_\nu)^2 + \delta_{C_0}\bar{\psi}i\hat{\partial}\psi - \delta_{C_1}m\bar{\psi}\psi + \\ &- \frac{\delta_{C_3}}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}n + \bar{\eta}\psi + A^\mu J_\mu]\}. \end{aligned} \quad (2.407)$$

Pois bem,

$$\bar{\psi} = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}; \quad \psi = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta}; \quad \hat{A} = \beta^\mu \frac{\delta}{i\delta A^\mu}. \quad (2.408)$$

Logo,

$$\begin{aligned} Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] &= \exp[i \int d^4y (1 + \delta_{C_2})e \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta n} (\beta^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu}) \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}] \\ &\int D\mu \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L} + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + A^\mu J_\mu]\}. \end{aligned} \quad (2.409)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}[i(1 + \delta_{C_0})\hat{\partial} - (1 + \delta_{C_1})m]\psi - \frac{(1+\delta_{C_3})}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \\ &+ \frac{1}{2\xi m_p^2}(\partial^\mu\partial^\nu A_\nu)^2 \end{aligned}$$

Observa-se que usualmente escrevemos a série perturbativa de Fradkin, colocando todos os termos associados aos contra-termos na exponencial com a lagrangiana de interação. Sendo assim, teríamos a interação moldando o funcional gerador livre

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \exp[i \int d^4y \mathcal{L}_{inte}] Z_{livre},$$

$$Z_{livre} = \int D\mu \exp\{i \int d^4x [\bar{\psi}[i\hat{\partial} - m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\xi m_p^2}(\partial^\mu \partial^\nu A_\nu)^2 + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + A^\mu J_\mu]\}.$$
(2.410)

Agora

$$\begin{aligned} -\frac{(1+\delta_{C_3})}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= \frac{(1+\delta_{C_3})}{2}A_\mu(\eta^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu \\ \frac{1}{2m_p^2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}A_\mu(\eta^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu)\frac{\square}{m_p^2}A_\nu \\ -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\xi m_p^2}(\partial^\mu \partial^\nu A_\nu)^2 &= \frac{1}{2\xi}A_\mu(1 + \frac{\square}{m_p^2})\partial^\mu\partial^\nu A_\nu. \end{aligned}$$
(2.411)

Sendo assim,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i(1 + \delta_{C_0})\hat{\partial} - (1 + \delta_{C_1})m]\psi + \frac{1}{2}A_\mu\{[\eta^{\mu\nu}\square - (1 - \frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu] + [\eta^{\mu\nu}\square - (1 - \frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu]\frac{\square}{m_p^2} + \delta_{C_3}(\eta^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu)\}A_\nu.$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\mathcal{S}^{-1}\psi + \frac{1}{2}A_\mu \mathcal{D}^{-1\mu\nu} A_\nu.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{-1} &\doteq i(1 + \delta_{C_0})\hat{\partial} - (1 + \delta_{C_1})m \\ \mathcal{D}^{-1\mu\nu} &\doteq [\eta^{\mu\nu}\square - (1 - \frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu] + [\eta^{\mu\nu}\square - (1 - \frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu]\frac{\square}{m_p^2} + \delta_{C_3}(\eta^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu). \end{aligned}$$

Definiremos o funcional gerador da seguinte forma

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \exp[i \int d^4y (1 + \delta_{C_2})e^{\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta n}(\beta^\mu \frac{\delta}{i\delta A^\mu})\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}}] Z_0[\eta, \bar{\eta}, J_\mu],$$
(2.412)

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \int D\mu \exp\{i \int d^4x [\bar{\psi}\mathcal{S}^{-1}\psi + \frac{1}{2}A_\mu \mathcal{D}^{-1\mu\nu} A_\nu + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + A^\mu J_\mu]\}.$$

Fazendo as translações nos campos

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi(x) - \int d^4z \mathcal{S}(x, z)\eta(z), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x) - \int d^4z \bar{\eta}(z)\mathcal{S}(z, x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \int d^4z \mathcal{D}_{\mu\nu}(x, z)J^\nu(z), \end{aligned}$$
(2.413)

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}(x, z) &= \delta^4(x - z) \\ \mathcal{D}^{-1\mu} \mathcal{D}^{\theta\nu}(x, z) &= \eta^{\mu\nu} \delta^4(x - z).\end{aligned}\tag{2.414}$$

Observa-se que a medida de integração é invariante perante a translação proposta.

Portanto,

$$\begin{aligned}Z_0[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] &= Z_0[0] \exp\{-i \int d^4z d^4x [\bar{\eta}(z)\mathcal{S}(z, x)n(x) + \frac{1}{2}J_\mu(z)\mathcal{D}^{\mu\nu}(z, x)J_\nu(x)]\}, \\ Z_0[0] &= \int D\mu \exp\{i \int d^4x [\bar{\psi}\mathcal{S}^{-1}\psi + \frac{1}{2}A_\mu \mathcal{D}^{-1\mu\nu} A_\nu]\},\end{aligned}\tag{2.415}$$

onde os objetos \mathcal{S} e \mathcal{D} são conhecidos como propagadores do méson e do fóton, respectivamente.

Podemos calcular uma forma explícita para os propagadores assumindo suas respectivas transformadas de Fourier

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(z, x) &\doteq \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathcal{S}(p) \exp[ip(z - x)], \\ \mathcal{D}^{\theta\nu}(x, z) &\doteq \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathcal{D}^{\theta\nu}(p) \exp[ip(z - x)].\end{aligned}\tag{2.416}$$

Primeiramente,

$$\begin{aligned}-[(1 + \delta_{C_0})\hat{p} + (1 + \delta_{C_1})m]\mathcal{S}(p) &= 1 \\ \mathcal{S}(p) &= \frac{-1}{[(1 + \delta_{C_0})\hat{p} - (1 + \delta_{C_1})m]}.\end{aligned}\tag{2.417}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}\{[-\eta^{\mu\theta}p^2 + (1 - \frac{1}{\xi})p^\mu p^\theta] - [-\eta^{\mu\theta}p^2 + (1 - \frac{1}{\xi})p^\mu p^\theta] \frac{p^2}{m_p^2} + \delta_{C_3}(-\eta^{\mu\theta}p^2 + p^\mu p^\theta)\} \mathcal{D}_\theta^\nu(p) &= \eta^{\mu\nu} \\ \{-(1 - \frac{p^2}{m_p^2} + \delta_{C_3})p^2 \eta^{\mu\theta} + [\delta_{C_3} + (1 - \frac{p^2}{m_p^2})(1 - \frac{1}{\xi})]p^\mu p^\theta\} \mathcal{D}_\theta^\nu(p) &= \eta^{\mu\nu} \\ \mathcal{D}_\theta^\nu(p) &= A\eta_\theta^\mu + Bp^\mu p_\theta \text{ e chamando}\end{aligned}\tag{2.418}$$

$$A = \frac{-1}{(1 - \frac{p^2}{m_p^2} + \delta_{C_3})p^2}; \quad B = \frac{-[\delta_{C_3} + (1 - \frac{p^2}{m_p^2})(1 - \frac{1}{\xi})]}{[1 + (1 - \frac{p^2}{m_p^2})(1 - \frac{1}{\xi})](1 - \frac{p^2}{m_p^2} + \delta_{C_3})p^2}$$

$$\mathcal{D}_\theta^\nu(p) = -\frac{(1 + \delta_{C_3})\eta_\theta^\mu}{p^2(1 - \frac{p^2}{m_p^2} + \delta_{C_3})} \quad \xi = 1.$$

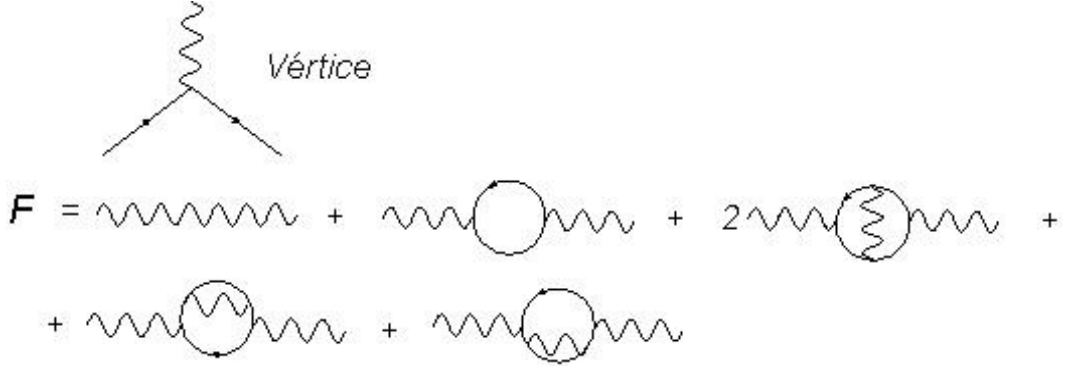
Neste momento estamos aptos a utilizar teoria de perturbação. Para isso expandiremos o funcional gerador em termos da constante de acoplamento (carga elétrica)

$$\begin{aligned}
Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] &= Z_0[0] \exp\left[i \int d^4y (1 + \delta_{C_2}) e^{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(y)}} \left(\beta^\mu \frac{\delta}{i \delta J^\mu(y)}\right)^{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(y)}}\right] \times \\
&\times \exp\left\{\int d^4z d^4x [i \bar{\eta}(z) i \mathcal{S}(z, x) i \eta(x) + \frac{1}{2} i J_\mu(z) i \mathcal{D}^{\mu\nu}(z, x) i J_\nu(x)]\right\} \\
\exp\left[i \int d^4y (1 + \delta_{C_2}) e^{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(y)}} \left(\beta^\mu \frac{\delta}{i \delta J^\mu(y)}\right)^{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(y)}}\right] &= 1 + i \int d^4y (1 + \delta_{C_2}) e^{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(y)}} \left(\beta^\mu \frac{\delta}{i \delta J^\mu(y)}\right)^{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(y)}} + \\
&- \int d^4w (1 + \delta_{C_2}) e^{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(w)}} \left(\beta^\mu \frac{\delta}{i \delta J^\mu(w)}\right)^{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(w)}} \int d^4y (1 + \delta_{C_2}) e^{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(y)}} \left(\beta^\mu \frac{\delta}{i \delta J^\mu(y)}\right)^{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(y)}}
\end{aligned} \tag{2.419}$$

e calcularemos a função de dois pontos do fóton

$$F^{\theta\lambda}(r, s) \doteq \frac{\delta Z}{i \delta J^\lambda(s) i \delta J^\theta(r)}_{J=0}. \tag{2.420}$$

Após obtermos a função de dois pontos, percebemos que apenas com o conhecimento da estrutura do vértice da teoria é possível escrever as correções radiativas da função de dois pontos de maneira imediata.



Podemos também inserir uma notação de diagramas para os contra-termos. Para isso é necessário lembrarmos que os contra-termos têm uma dependência de no mínimo e^2 . Sendo assim, escrevendo os propagadores em termos do propagador livre e outro associado aos contra-termos

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(p) &= \frac{-1}{[(1+\delta_{C_0})\hat{p} - (1+\delta_{C_1})m]} = \frac{-1}{[\hat{p} - m]} + \left\{ \frac{-1}{[(1+\delta_{C_0})\hat{p} - (1+\delta_{C_1})m]} + \frac{1}{[\hat{p} - m]} \right\}, \\
\mathcal{D}_\theta^\nu(p) &= -\frac{(1+\delta_{C_3})\eta_\theta^\mu}{p^2(1 - \frac{p^2}{m_p^2} + \delta_{C_3})} = \frac{-\eta_\theta^\mu}{p^2(1 - \frac{p^2}{m_p^2})} + \left\{ -\frac{(1+\delta_{C_3})\eta_\theta^\mu}{p^2(1 - \frac{p^2}{m_p^2} + \delta_{C_3})} + \frac{\eta_\theta^\mu}{p^2(1 - \frac{p^2}{m_p^2})} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.421}$$

Trabalhando um pouco mais com o propagador do méson

$$\begin{aligned}
\{a\hat{p}^2 + b\hat{p} - \frac{[(a\hat{p})^2 - b^2]}{a}\}(a\hat{p} - b) &= -[(a\hat{p})^2 - b^2] \frac{b}{a} \\
a &= (1 + \delta_{C_0}) \\
b &= (1 + \delta_{C_1})m
\end{aligned} \tag{2.422}$$

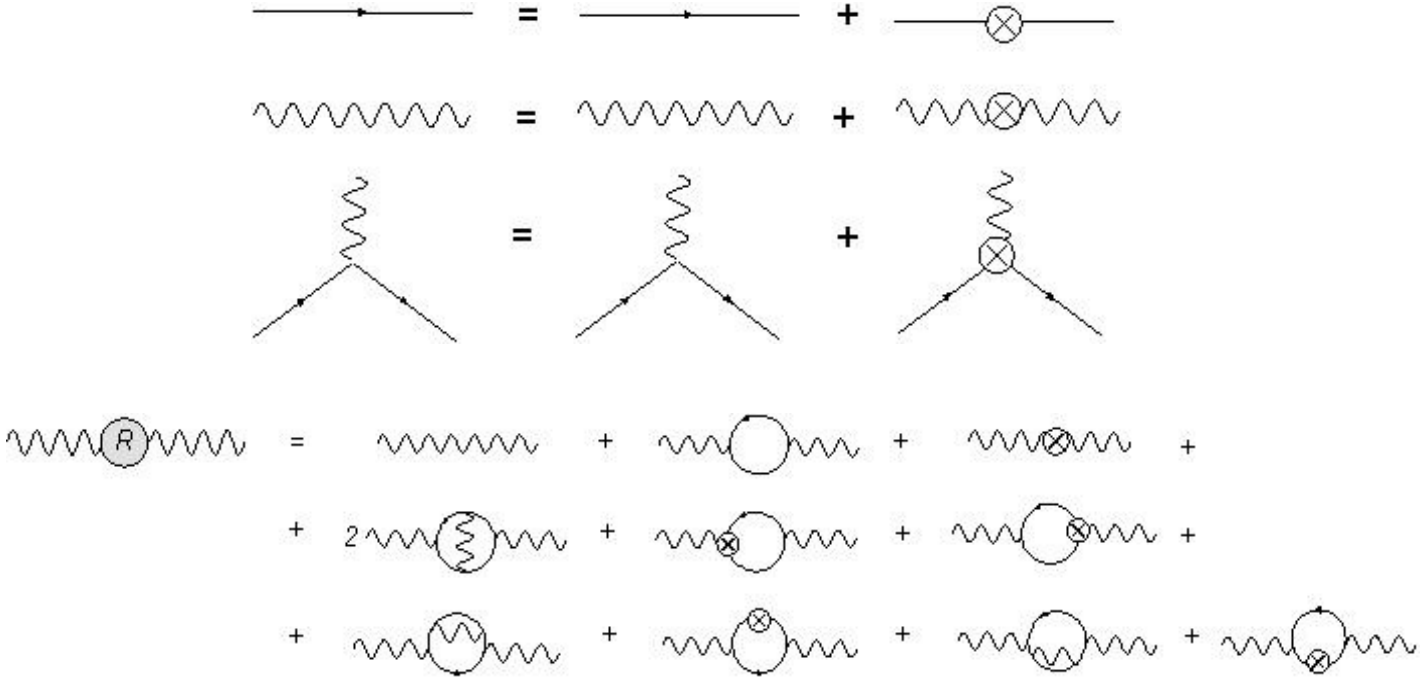
$$\mathcal{S}(p) = \frac{-1}{[\hat{p} - m]} + \left\{ \frac{a\{a\hat{p}^2 + b\hat{p} - \frac{[(a\hat{p})^2 - b^2]}{a}\}}{b[(a\hat{p})^2 - b^2]} - \frac{1}{m} \left[\frac{\hat{p}(\hat{p} + m)}{(p^2 - m^2)} - 1 \right] \right\}.$$

Por fim, escrevendo os propagadores do méson e do fóton de maneira explícita

$$\mathcal{S}(p) = \frac{1}{m} \left[\frac{\hat{p}(\hat{p}+m)}{(p^2-m^2)} - 1 \right] + \frac{m^2[(1+\delta_{C_1})^2 - (1+\delta_{C_0})^2] \hat{p}^2 + [(1+\delta_{C_0})(\delta_{C_1} - \delta_{C_0})p^2 + (1+\delta_{C_1})(\delta_{C_0} - \delta_{C_1})m^2] m \hat{p}}{m^2(1+\delta_{C_1})[(1+\delta_{C_0})^2 p^2 - (1+\delta_{C_1})^2 m^2] (p^2 - m^2)}, \quad (2.423)$$

$$\mathcal{D}_\theta^\nu(p) = \frac{-\eta_\theta^\mu}{p^2(1-\frac{p^2}{m_p^2})} + \frac{\delta_{C_3} \eta_\theta^\mu}{m_p^2(1-\frac{p^2}{m_p^2} + \delta_{C_3})(1-\frac{p^2}{m_p^2})}. \quad (2.424)$$

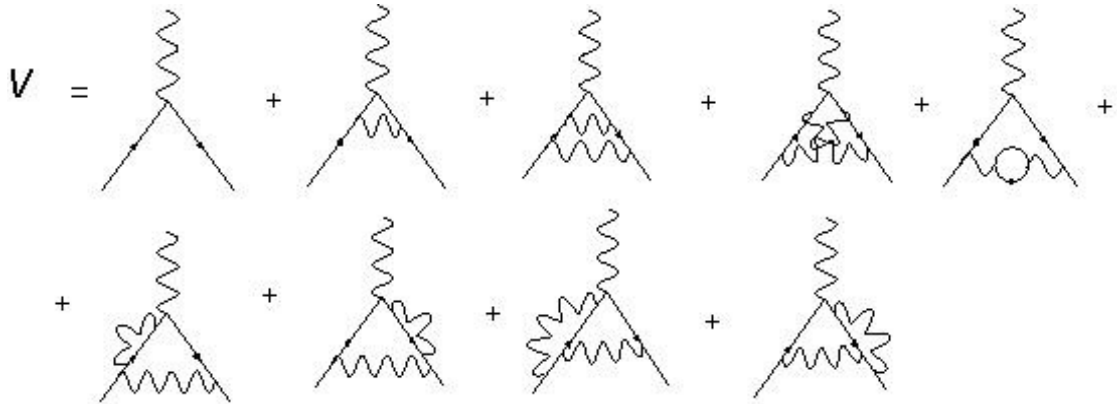
A introdução dos propagadores e vértice associado aos contra-termos é útil para visualizarmos o cancelamento das divergências, o que pode ser observado nos diagramas de Feynman abaixo.



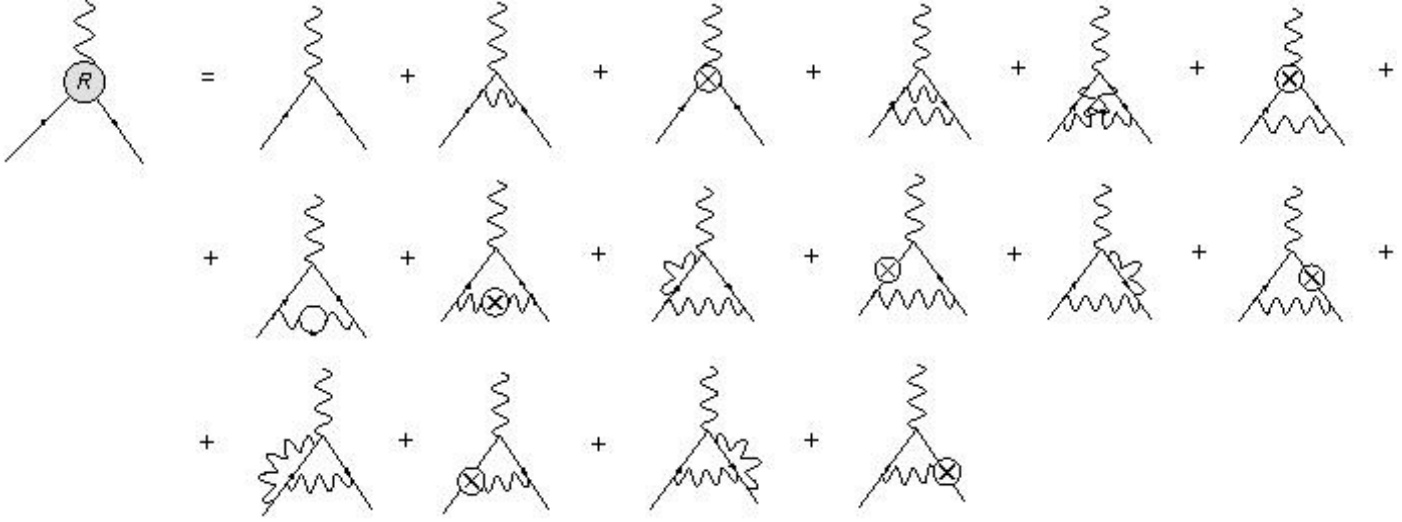
Agora, para o caso do vértice calculamos a função de 3 pontos

$$V_{ab}^\lambda(r, s, w) \doteq \frac{\delta Z}{i\delta\eta_b(s) i\delta\bar{\eta}_a(r) i\delta J_\lambda(w) i} \Big|_{n, \bar{\eta}, J=0}. \quad (2.425)$$

De maneira heurística, utilizando o método de Feynman para implementar as correções radiativas na função de 3 pontos, concluímos que



Inserindo os propagadores e vértices associados aos contra-termos



Portanto, apenas analisando os diagramas anteriores afirmamos que a divergência que se apresenta na massa de Podolsky não se propaga na função de dois pontos do fóton associada à auto-energia do fóton, nem na função de 3 pontos associada ao vértice. Sendo assim, somos conduzidos a dizer que de maneira geral após renormalizarmos a teoria a divergência na massa de Podolsky não irá aparecer em nenhuma estrutura quântica que desejamos estudar.

2.9 O acoplamento efetivo em GSDKP_4

Agora obteremos algumas conclusões físicas, de maneira heurística, associadas à dependência da constante de acoplamento com a escala de energia. Tendo em vista a equação que descreve o propagador completo do fóton, podemos dizer que a primeira correção radiativa do propagador do fóton ($\xi = 0$, calibre transversal, Landau) é dada em termos da seguinte equação

$$\begin{aligned}
 iD^{\mu\nu}(k) &= \frac{-T^{\mu\nu}}{k^2(1 - \frac{k^2}{m_p^2})[1 + \frac{\Pi(p)}{(1 - \frac{k^2}{m_p^2})}]} \\
 &= -T^{\mu\nu} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_p^2} \right] \left[1 - \frac{1}{(1 - \frac{k^2}{m_p^2})} [\delta_{C_3} - \Pi_{(R)}(k)] \right].
 \end{aligned} \tag{2.426}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 \Pi_{(R)}(k) &= \Pi(k) - \Pi(k)|_{k^2=0} = \frac{e^2}{4\pi} \int_0^1 dx (1-2x)^2 \ln\left(\frac{b^2}{m^2}\right) \\
 b^2 &= m^2 - x(1-x)p^2.
 \end{aligned} \tag{2.427}$$

A equação (2.426), nos leva a definir de maneira fenomenológica a carga efetiva no regime onde $m^2 \ll k^2 < m_p$

$$\alpha_{(R)}(k^2) = \alpha \left[1 - \frac{1}{(1 - \frac{k^2}{m_p^2})} [C_3 - 1 - \frac{\alpha}{12\pi} \ln(\frac{k^2}{m^2})] \right] \quad (2.428)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

onde percebemos que

$$\begin{aligned} \alpha_{(R)}(k^2) &= \alpha C_3 \left[\frac{1}{C_3} - \frac{1}{(1 - \frac{k^2}{m_p^2})} [1 - \frac{1}{C_3} - \frac{C_3 \alpha}{12\pi C_3^2} \ln(\frac{k^2}{m^2})] \right] \\ \alpha_{(R)}(k^2) &= \alpha_{(R)}(m^2) [1 + \frac{\alpha_{(R)}(m^2)}{12\pi} \frac{1}{1 - \frac{k^2}{m_p^2}} \ln(\frac{k^2}{m^2})] \end{aligned} \quad (2.429)$$

$$\alpha_{(R)}(m^2) = C_3 \alpha.$$

Desse modo, a dependência da constante de acoplamento é escrita da seguinte forma em primeira aproximação logarítmica (*leading logarithmic approximation*)

$$\alpha_{(R)}(k^2) = \frac{\alpha_{(R)}(m^2)}{[1 - \frac{\alpha_{(R)}(m^2)}{12\pi} \frac{1}{1 - \frac{k^2}{m_p^2}} \ln(\frac{k^2}{m^2})]} \quad (2.430)$$

$$\frac{1}{\alpha_{(R)}(k^2)} = \frac{1}{\alpha_{(R)}(m^2)} - \frac{1}{12\pi} \frac{1}{1 - \frac{k^2}{m_p^2}} \ln(\frac{k^2}{m^2}).$$

A equação anterior é singular no seguinte ponto

$$\frac{\alpha_{(R)}(m^2)}{12\pi} \frac{1}{1 - \frac{k^2}{m_p^2}} \ln(\frac{k^2}{m^2}) = 1, \quad (2.431)$$

o que nos leva ao pólo de Landau

$$\exp\left[\frac{12\pi}{\alpha_{(R)}(m^2)}\right] = \exp\left[\frac{1}{1 - \frac{k^2}{m_p^2}}\right] \frac{k^2}{m^2}. \quad (2.432)$$

Portanto, o pólo de Landau (Zero de Moscou) esta nos dizendo que a constante de estrutura física (renormalizada) cresce com a energia. Se não existisse o pólo de Landau, a teoria seria trivial no regime onde $m^2 \ll k^2 < m_p^2$ no sentido da constante de acoplamento ir a zero a altas energias. A análise dessa secção é condizente com o resultado em GSQED₄ [27] e nos conduz para uma abordagem mais rigorosa, envolvendo a análise do propagador completo do fóton renormalizado no regime de altas energias via equações de Gell-Mann-Low. Seria também de bom grado formular as equações do grupo de renormalização, equações diferenciais de Callan-Symanzik para constante de estrutura [79].

3 A Eletrodinâmica Quântica Escalar Generalizada de Duffin-Kemmer-Petiau em Equilíbrio Termodinâmico

Estamos interessados agora em descrever a Eletrodinâmica Quântica Escalar Generalizada de Duffin-Kemmer-Petiau (GSDKP₄) em equilíbrio termodinâmico no ensemble gran-canônico com o Formalismo de Matsubara-Fradkin [81]. Sendo assim, estudamos separadamente o setor da matéria com campos externos e o setor vetorial com fontes. Ao implementar o método de Nakanishi para descrever o campo vetorial em equilíbrio termodinâmico de maneira covariante no calibre *no-mixing* percebemos o surgimento dos campos fantasmas via multiplicador de Lagrange e sua respectiva carga fantasma conservada. Um estudo no calibre *no-mixing* foi necessário para esclarecer a simetria por trás das escolhas covariantes ao fixar o calibre, no caso a simetria BRST e também, resolver o problema do surgimento de uma estrutura pseudo-diferencial. Por fim, com a função de partição construída, estudamos a dinâmica quântica em equilíbrio termodinâmico e suas conseqüentes simetrias. Alguns apêndices foram construídos para complementar o texto e evitar a perda de linearidade. Como vemos, implementamos no apêndice (5.7) à análise do setor fantasma via multiplicadores de Lagrange, equivalente ao método funcional abordado no texto. Também temos a introdução do método dos parâmetros fictícios na análise da simetria BRST em eletrodinâmica quântica QED_4 no apêndice (5.8) e sua aplicação estendida para a eletrodinâmica quântica generalizada em equilíbrio termodinâmico $GQED_4$ no apêndice (5.9), muito útil no estudo do calibre *no-mixing* [82]. Se necessário, observações matemáticas podem ser vistas no apêndice (5.10).

3.1 O setor da matéria (escalar)

Estudaremos as equações de movimento no formalismo Hamiltoniano. É sabido que a hamiltoniana do setor escalar na presença de um campo externo é dada por

$$H_c = \int d^3\vec{x} \left\{ -\frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^i (\overleftrightarrow{\partial}_i \psi) + m \bar{\psi} \psi - e \bar{\psi} \hat{A} \psi \right\}.$$

Então, agora encontraremos a equação de movimento para $\beta^0 \psi$

$$\frac{d}{dt}(\beta^0 \psi) = \int d^3\vec{z} \{ \beta^0 \psi, \mathcal{H}_c(z) \}_D = \int d^3\vec{z} \{ \beta^0 \psi, -\frac{i}{2} \bar{\psi}(z) \beta^i [\partial_i \psi(z)] + \frac{i}{2} [\partial_i \bar{\psi}(z)] \beta^i \psi(z) + m \bar{\psi}(z) \psi(z) - e A_\mu(z) \bar{\psi}(z) \beta^\mu \psi(z) \}_D. \quad (3.1)$$

A equivalência entre a dinâmica hamiltoniana e a dinâmica lagrangiana e a análise dos vínculos de segunda classe nos leva ao seguinte resultado

$$\{ \beta^0 \psi(x), \bar{\psi}(y) \}_D = -i I \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.2)$$

pois neste caso a equação (3.1) nos leva a equação de movimento

$$[i \beta^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) - m] \psi = 0. \quad (3.3)$$

De maneira análoga, encontramos a equação de movimento para $\bar{\psi} \beta^0$

$$\frac{d}{dt}(\bar{\psi} \beta^0) = \int d^4z \{ \bar{\psi} \beta^0, \mathcal{H}_c(z) \}_D = \int d^4z \{ \bar{\psi} \beta^0, -\frac{i}{2} \bar{\psi}(z) \beta^i [\partial_i \psi(z)] + \frac{i}{2} [\partial_i \bar{\psi}(z)] \beta^i \psi(z) + m \bar{\psi}(z) \psi(z) - e A_\mu(z) \bar{\psi}(z) \beta^\mu \psi(z) \}_D \quad (3.4)$$

onde

$$\{\bar{\psi}\beta^0, \psi(y)\}_D = iI\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.5)$$

pois nesse caso

$$\bar{\psi}[i\beta^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + ieA_\mu] + m = 0. \quad (3.6)$$

Portanto, para a análise das equações de movimento precisamos dos seguintes parênteses de Dirac

$$\{\beta^0\psi(x), \bar{\psi}(y)\}_D = -iI\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad \{\bar{\psi}\beta^0, \psi(y)\}_D = iI\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.7)$$

Utilizando o princípio da correspondência de Dirac, quantizamos a teoria $\{, \}_D \rightarrow -i[,]$ (comutador),

$$[\beta^0\hat{\psi}(x), \hat{\bar{\psi}}(y)] = I\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad [\hat{\bar{\psi}}\beta^0, \hat{\psi}(y)] = -I\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.8)$$

Como estamos interessados em estudar GSDKP₄ em equilíbrio termodinâmico as equações anteriores passam a ser estacionárias no sentido de não dependerem do tempo.

Neste momento estamos aptos a definir a matriz densidade de estados ρ no ensemble gran-canônico que descreve o setor escalar da eletrodinâmica GSDKP₄ com fontes

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_s(\beta) &= \exp[-\beta(\hat{H} - \mu_e\hat{N})] \\ \hat{H} &= \int d^3\vec{z} \left\{ -\frac{i}{2}\hat{\bar{\psi}}\beta^i[\partial_i\hat{\psi}] + \frac{i}{2}[\partial_i\hat{\bar{\psi}}]\beta^i\hat{\psi} + m\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} - e\hat{A}_\mu\hat{\bar{\psi}}\beta^\mu\hat{\psi} + \hat{\eta}\hat{\psi} + \hat{\bar{\psi}}\hat{\eta} \right\} \\ \hat{N} &= \int d^3\vec{z} \hat{\bar{\psi}}\beta^0\hat{\psi}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Aplicando uma transformação de similaridade em (3.8) $\hat{O}^s = \hat{\rho}_s^{-1}\hat{O}\hat{\rho}_s$, obtemos os comutadores em equilíbrio termodinâmico

$$[\beta^0\hat{\psi}^s(\vec{x}, \tau), \hat{\bar{\psi}}^s(\vec{y}, \tau)] = I\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad [\hat{\bar{\psi}}^s(\vec{x}, \tau)\beta^0, \hat{\psi}^s(\vec{y}, \tau)] = -I\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.10)$$

A seguir, encontraremos as equações de movimento em equilíbrio termodinâmico. Primeiramente para $\beta^0\hat{\psi}^s$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\beta^0\hat{\psi}^s)}{\partial\tau} &= \frac{\partial \left\{ \exp[\tau(\hat{H} - \mu_e\hat{N})]\beta^0\hat{\psi} \exp[-\tau(\hat{H} - \mu_e\hat{N})] \right\}}{\partial\tau} \\ &= \exp[\tau(\hat{H} - \mu_e\hat{N})][\hat{H} - \mu_e\hat{N}, \beta^0\hat{\psi}] \exp[-\tau(\hat{H} - \mu_e\hat{N})], \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\beta^0\hat{\psi}^s)}{\partial\tau} &= \left[\int d^3\vec{z} \left\{ -\frac{i}{2}\hat{\bar{\psi}}^s\beta^i[\partial_i\hat{\psi}^s] + \frac{i}{2}[\partial_i\hat{\bar{\psi}}^s]\beta^i\hat{\psi}^s + m\hat{\bar{\psi}}^s\hat{\psi}^s - e\hat{A}_\mu\hat{\bar{\psi}}^s\beta^\mu\hat{\psi}^s - \mu_e\hat{\bar{\psi}}^s\beta^0\hat{\psi}^s + \right. \right. \\ &\left. \left. + \hat{\eta}\hat{\psi}^s + \hat{\bar{\psi}}^s\hat{\eta}, \beta^0\hat{\psi} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$-\beta^0\partial_0\hat{\psi}^s + i\beta^j\partial_j\hat{\psi}^s + e\hat{A}_\mu\beta^\mu\hat{\psi}^s + \mu_e\beta^0\hat{\psi}^s - m\hat{\psi}^s = \eta.$$

Observa-se que estruturas no espaço euclidiano aparecem naturalmente

$$\begin{aligned}\beta_0^E &\doteq -\beta^0 \\ \beta_j^E &\doteq i\beta^j\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\beta_\mu^E \beta_\nu^E \beta_\theta^E + \beta_\theta^E \beta_\nu^E \beta_\mu^E = \beta_\mu^E \delta_{\nu\theta} + \beta_\theta^E \delta_{\nu\mu}.$$

Com o intuito de escrever a equação de movimento em equilíbrio termodinâmico de maneira covariante fazamos

$$\begin{aligned}\widehat{A}_\mu \beta^\mu &= \widehat{A}_0 \beta^0 + \widehat{A}_j \beta^j = -\widehat{A}_0 \beta_0^E + i\widehat{A}_j \beta_j^E \\ \widehat{A}_0 &= i\widehat{\mathcal{A}}_0^E \quad \widehat{A}_j = -\widehat{\mathcal{A}}_j^E.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\beta_0^E \partial_0 \widehat{\psi}^s + \beta_j^E \partial_j \widehat{\psi}^s - ie(\widehat{\mathcal{A}}_0^E \beta_0^E + \widehat{\mathcal{A}}_j^E \beta_j^E) \widehat{\psi}^s - \mu_e \beta_0^E \widehat{\psi}^s - m \widehat{\psi}^s &= \eta \\ \beta_\mu^E \partial_\mu \widehat{\psi}^s - ie \widehat{\mathcal{A}}_\mu^E \beta_\mu^E \widehat{\psi}^s - \mu_e \delta_{\mu 0} \beta_\mu^E \widehat{\psi}^s - m \widehat{\psi}^s &= \eta \\ [\beta_\mu^E D_\mu^{(e, \mu_e)} - m] \widehat{\psi}^s &= \eta \\ D_\mu^{(e, \mu_e)} &\doteq \partial_\mu - ie \widehat{\mathcal{A}}_\mu^E - \mu_e \delta_{\mu 0}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

De maneira similar encontramos a equação de movimento para $\widehat{\bar{\psi}}^s \beta^0$.

Sendo assim finalizamos este estudo com as equações do setor escalar da eletrodinâmica GSDKP com fontes em equilíbrio termodinâmico

$$\begin{aligned}[\beta_\mu^E \overrightarrow{D}_\mu^{(e, \mu_e)} - m] \widehat{\psi}^s &= \eta, \\ \widehat{\bar{\psi}}^s [\overleftarrow{D}_\mu^{(-e, -\mu_e)} \beta_\mu^E + m] &= \bar{\eta}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

A fim de encontrar uma representação de integração funcional para as equações (3.16), as mesmas podem ser reescritas com a ajuda da matriz densidade (3.9)

$$\begin{aligned}\beta_\mu^E \partial_\mu \widehat{\psi}^s - \mu_e \delta_{\mu 0} \beta_\mu^E \widehat{\psi}^s - m \widehat{\psi}^s &= ie \widehat{\mathcal{A}}_\mu^E \beta_\mu^E \widehat{\psi}^s + \eta \\ [(\beta_\mu^E)_{ab} \partial_\mu^{\mu_e} - m \delta_{ab}] \widehat{\psi}_b^s &= ie (\beta_\mu^E)_{ab} \widehat{\mathcal{A}}_\mu^E \widehat{\psi}_b^s + \eta \\ [(\beta_\mu^E)_{ab} \partial_\mu^{\mu_e} - m \delta_{ab}] \frac{\delta \hat{\rho}_s(\beta)}{\delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau)} &= ie (\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta \hat{\rho}_s(\beta)}{\delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau)} \widehat{\mathcal{A}}_\mu^E + \eta \hat{\rho}_s(\beta), \\ \bar{\psi}_a^s [(\beta_\mu^E)_{ab} \overleftarrow{\partial}_\mu^{-\mu_e} + m \delta_{ab}] &= -ie \bar{\psi}_a^s (\beta_\mu^E)_{ab} \widehat{\mathcal{A}}_\mu^E + \bar{\eta} \\ \frac{\delta \hat{\rho}_s(\beta)}{\delta \eta_a(\vec{x}, \tau)} [(\beta_\mu^E)_{ab} \overleftarrow{\partial}_\mu^{-\mu_e} + m \delta_{ab}] &= -ie (\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta \hat{\rho}_s(\beta)}{\delta \eta_b(\vec{x}, \tau)} \widehat{\mathcal{A}}_\mu^E + \hat{\rho}_s(\beta) \bar{\eta}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Tomando-se o traço das expressões anteriores com o objetivo de encontrar equações a valores médios, somos levados as equações funcionais satisfeitas pelo funcional gerador $Z_1[\mathcal{J}, \bar{\eta}, \eta]$

$$\begin{aligned} [(\beta_\mu^E)_{ab} \partial_\mu^{\mu_e} - m \delta_{ab}] \frac{\delta Z_1[J, \bar{\eta}, \eta]}{\delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau)} &= ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta Z_1[J, \bar{\eta}, \eta]}{\delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau)} \mathcal{A}_\mu^E + \eta Z_1[\mathcal{J}, \bar{\eta}, \eta] \\ \frac{\delta Z_1[J, \bar{\eta}, \eta]}{\delta \eta_a(\vec{x}, \tau)} [(\beta_\mu^E)_{ab} \partial_\mu^{-\mu_e} - m \delta_{ab}] &= -ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta Z_1[J, \bar{\eta}, \eta]}{\delta \eta_b(\vec{x}, \tau)} \mathcal{A}_\mu^E + Z_1[\mathcal{J}, \bar{\eta}, \eta] \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vamos supor que a solução das equações (3.19) seja dada por

$$Z_1[\bar{\eta}, \eta] = \int D\bar{\psi} D\psi \tilde{Z}_1[\mathcal{A}, \bar{\psi}, \psi] \exp[\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]. \quad (3.20)$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} \int D\bar{\psi} D\psi [\beta_\mu^E \vec{D}_\mu^{(e, \mu_e)} - m] \psi \tilde{Z}_1[\mathcal{A}, \bar{\psi}, \psi] \exp[\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta] &= \eta Z_1[\mathcal{J}, \bar{\eta}, \eta], \\ \int D\bar{\psi} D\psi \tilde{Z}_1[\mathcal{A}, \bar{\psi}, \psi] \exp[\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta] \bar{\psi} [\overleftarrow{D}_\mu^{(-e, -\mu_e)} \beta_\mu^E + m] &= Z_1[\mathcal{J}, \bar{\eta}, \eta] \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pois bem, seja a quantidade

$$S_1 = - \int d^4x \bar{\psi}(\vec{x}, \tau) [\beta_\mu^E \vec{D}_\mu^{(e, \mu_e)} - m] \psi(\vec{x}, \tau), \quad (3.22)$$

$$\frac{\delta S_1}{\delta \psi(\vec{x}, \tau)} = - [\beta_\mu^E \vec{D}_\mu^{(e, \mu_e)} - m] \psi(\vec{x}, \tau), \quad (3.23)$$

$$\frac{\delta S_1}{\delta \bar{\psi}(\vec{x}, \tau)} = \bar{\psi}(\vec{x}, \tau) [\beta_\mu^E \overleftarrow{D}_\mu^{(-e, -\mu_e)} + m].$$

Portanto, percebemos que a função partição do setor escalar na presença de um campo externo é dada por

$$Z_1[J, \bar{\eta}, \eta] = \int D\bar{\psi} D\psi \exp[-S_1 + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]. \quad (3.24)$$

3.2 O setor da radiação (vetorial)

Iniciamos esta secção com a densidade de lagrangiana que descreve o setor vetorial livre com o termo de fixação de calibre covariante *no-mixing*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2} \partial_\mu F^{\mu\lambda} \partial^\theta F_{\lambda\theta} - \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu \left(1 + \frac{\square}{m_p^2}\right) \partial_\nu A^\nu \\ &\rightarrow -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2} \partial_\mu F^{\mu\lambda} \partial^\theta F_{\lambda\theta} - \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + \frac{1}{2\xi m_p^2} \partial_\theta \partial_\mu A^\mu \partial^\theta \partial_\nu A^\nu. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dos estudos anteriores sabemos que a hamiltoniana canônica é dada por

$$H_c = \int d^3\vec{x} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} - 2\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_i A_\nu)} \right) - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_0 A_\nu)} \right] (\partial_0 A_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_0 A_\nu)} (\partial_0 \partial_0 A_\nu) - \mathcal{L} \right\}. \quad (3.26)$$

Podemos definir e calcular os momentos canonicamente conjugados a partir da equação anterior

$$\begin{aligned} \Pi^\nu \doteq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} - 2\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_i A_\nu)} \right) - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_0 A_\nu)} \right) &= F^{\nu 0} + \frac{1}{m_p^2} [\eta^{i\nu} \partial_i \partial_\alpha F^{\alpha 0} - \partial_0 \partial_\alpha F^{\alpha \nu}] + \\ &+ \frac{1}{\xi} \eta^{0\nu} \partial_\mu A^\mu + \frac{2}{\xi m_p^2} \eta^{i\nu} \partial_i \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{\xi m_p^2} \eta^{0\nu} \partial_0 \partial_\mu A^\mu \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\Phi^\nu \doteq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_0 A_\nu)} = \frac{1}{m_p^2} [\partial_\alpha F^{\alpha \nu} - \eta^{\nu 0} \partial_\alpha F^{\alpha 0}] + \frac{1}{\xi m_p^2} \eta^{0\nu} \partial^0 \partial_\nu A^\nu.$$

Com a ajuda das identidades

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = F^{kj} F_{kj} + 2(\Gamma_j - \partial_j A^0)^2,$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= [m_p^2 \Phi_\beta + \eta_\beta^0 \partial_\mu F^{\mu 0} + \frac{1}{\xi} \eta_\beta^0 \partial^0 \partial_\mu A^\mu] [m_p^2 \Phi^\beta + \eta^{0\beta} \partial_\nu F^{\nu 0} + \frac{1}{\xi} \eta^{0\beta} \partial^0 \partial_\nu A^\nu] = \\ &= m_p^4 \Phi_\beta \Phi^\beta + 2m_p^2 [\partial_j \partial^j A^0 - \partial_j \Gamma^j + \frac{1}{\xi} \partial_\mu \Gamma^\mu] \Phi^0 + [\partial_j \partial^j A^0 - \partial_j \Gamma^j + \frac{1}{\xi} \partial_\mu \Gamma^\mu]^2, \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + \frac{1}{2\xi m_p^2} \partial_\theta \partial_\mu A^\mu \partial^\theta \partial_\nu A^\nu = -\frac{1}{2\xi} [\Gamma^0 \Gamma^0 + \partial_i A^i \partial_j A^j] + \frac{1}{2\xi m_p^2} [\partial_\mu \Gamma^\mu \partial^\mu \Gamma_\mu + \partial_i \partial_j A^j \partial^i \partial_k A^k], \quad (3.28)$$

$$\partial_\mu \Gamma^\mu = \xi m_p^2 \Phi^0,$$

$$(3.29)$$

$$\partial_0 \Gamma^k = \partial^k \Gamma_0 - \partial_l F^{lk} + m_p^2 \Phi^k,$$

escrevemos a hamiltoniana canônica da seguinte forma

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3 \vec{x} \{ \Pi^\nu \Gamma_\nu - \Phi^0 [\partial_i \Gamma^i - \xi m_p^2 \Phi^0] + \Phi_k [\partial^k \Gamma_0 - \partial_l F^{lk} + m_p^2 \Phi^k] + \frac{1}{4} F^{kj} F_{kj} + \frac{1}{2} (\Gamma_j - \partial_j A_0)^2 + \\ &- \frac{m_p^2}{2} \Phi_\beta \Phi^\beta - \frac{1}{2} [\partial_j \partial^j A^0 - \partial_j \Gamma^j - m_p^2 \Phi^0] \Phi^0 + \frac{1}{2m_p^2} [\partial_j \partial^j A^0 - \partial_j \Gamma^j - m_p^2 \Phi^0]^2 + \frac{1}{2\xi} [\Gamma^0 \Gamma^0 + \partial_i A^i \partial_j A^j] + \\ &- \frac{1}{2\xi m_p^2} [\xi m_p^2 \Phi^0 \xi m_p^2 \Phi^0 + \partial_i \partial_j A^j \partial^i \partial_k A^k] \} \end{aligned} \quad (3.30)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3 \vec{x} \{ \Pi^\nu \Gamma_\nu - \Phi^0 \partial_i \Gamma^i + \frac{\xi m_p^2}{2} \Phi^0 \Phi^0 + \Phi_k [\partial^k \Gamma_0 - \partial_l F^{lk} + \frac{m_p^2}{2} \Phi^k] + \frac{1}{4} F^{kj} F_{kj} + \\ &+ \frac{1}{2} (\Gamma_j - \partial_j A_0)^2 + \frac{1}{2m_p^2} [\partial_j \partial^j A^0 - \partial_j \Gamma^j]^2 + \frac{1}{2\xi} [\Gamma^0 \Gamma^0 + \partial_i A^i \partial_j A^j] - \frac{1}{2\xi m_p^2} \partial_i \partial_j A^j \partial^i \partial_k A^k \}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Com a Hamiltoniana anterior $H_c(A^\mu, \Gamma^\nu; \Pi^\mu, \Phi^\nu)$ podemos construir toda dinâmica no espaço de fase. Os parênteses de Poisson fundamentais são dados por

$$\{A^\mu(x), \Pi_\nu(y)\}_P = \delta_\nu^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.32)$$

$$\{\Gamma^\mu(x), \Phi_\nu(y)\}_P = \delta_\nu^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}),$$

com o restante dos parênteses nulos.

Neste caso a construção da dinâmica quântica no espaço de Hilbert se dá pelo princípio da correspondência de Dirac $\{, \} \rightarrow -i[,]$

$$[\hat{A}^\mu(x), \hat{\Pi}_\nu(y)] = i\delta_\nu^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.33)$$

$$[\hat{\Gamma}^\mu(x), \hat{\Phi}_\nu(y)] = i\delta_\nu^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

Pois bem a dinâmica dos campos em equilíbrio termodinâmico é obtida definindo a matriz densidade de estados ρ que descreva o setor vetorial livre com fontes

$$\hat{\rho}_s(\beta) = \exp[-\beta \hat{H}]$$

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int d^3\vec{z} \{ & \hat{\Pi}^\nu \hat{\Gamma}_\nu - \hat{\Phi}^0 \partial_i \hat{\Gamma}^i + \frac{\xi m_p^2}{2} \hat{\Phi}^0 \hat{\Phi}^0 + \hat{\Phi}_k [\partial^k \hat{\Gamma}_0 - \partial_l \hat{F}^{lk} + \frac{m_p^2}{2} \hat{\Phi}^k] + \frac{1}{4} \hat{F}^{kj} \hat{F}_{kj} + \frac{1}{2} (\hat{\Gamma}_j - \partial_j \hat{A}_0)^2 + \\ & + \frac{1}{2m_p^2} [\partial_j \partial^j \hat{A}^0 - \partial_j \hat{\Gamma}^j]^2 + \frac{1}{2\xi} [\hat{\Gamma}^0 \hat{\Gamma}^0 + \partial_i \hat{A}^i \partial_j \hat{A}^j] - \frac{1}{2\xi m_p^2} \partial_i \partial_j \hat{A}^j \partial^i \partial_k \hat{A}^k + J^\mu \hat{A}_\mu \}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aplicando uma transformação de similaridade em (3.33) $\hat{O}^s = \hat{\rho}_s^{-1} \hat{O} \hat{\rho}_s$ obtemos os comutadores em equilíbrio termodinâmico

$$[\hat{A}_\mu^s(\vec{x}, \tau), \hat{\Pi}_\nu^s(\vec{y}, \tau)] = i\delta_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.35)$$

$$[\hat{\Gamma}_\mu^s(\vec{x}, \tau), \hat{\Phi}_\nu^s(\vec{y}, \tau)] = i\delta_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

Com a análise anterior construímos a matriz densidade de estados ρ explicitando a hamiltoniana que descreveria as equações de movimento quânticas escritas de maneira covariante do setor da radiação livre em equilíbrio termodinâmico.

Entretanto, para se estudar as equações em equilíbrio termodinâmico é mais elegante utilizar o método do campo auxiliar de Nakanishi juntamente com o princípio de ação quântica de Schwinger para encontrar a função de partição. Tendo em vista que as estruturas que se apresentam na descrição quântica de campos em equilíbrio termodinâmico são estruturas no espaço euclidiano, a densidade de Lagrangeana que descreve o setor da radiação com interação e fontes em equilíbrio termodinâmico é dada por

$$\hat{\mathcal{L}}_N = \frac{1}{4} \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p} \partial_\mu \hat{\mathcal{F}}_{\mu\lambda} \partial_\theta \hat{\mathcal{F}}_{\theta\lambda} + \frac{1}{2} \{ \hat{B}, G[\hat{A}] \} + \frac{\xi}{2} \hat{B}^2 - ie \hat{\mathcal{A}}_\mu^E \hat{\psi}^s \beta_\mu^E \hat{\psi}^s - \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}_\mu^E \quad (3.36)$$

$$\hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu.$$

onde \hat{B} é conhecido como campo auxiliar de Nakanish [83] e $G[\hat{A}]$ é operador de escolha de calibre.

Para encontrarmos as equações de movimento em equilíbrio termodinâmico utilizaremos o princípio da ação quântica de Schwinger

$$\hat{S} = \int_\beta d^4x \hat{\mathcal{L}}_N. \quad (3.37)$$

Ao aplicarmos as variações nos campos

$$\hat{A}_\mu \rightarrow \hat{A}_\mu + \delta \hat{A}_\mu \quad (3.38)$$

$$\hat{B} \rightarrow \hat{B} + \delta \hat{B}$$

e impormos $\delta\hat{S} = \hat{0}$, encontramos as equações de movimento. Faremos a seguinte escolha de calibre *no-mixing*

$$G[\hat{A}] = \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu \hat{A}_\mu. \quad (3.39)$$

Com as relações

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \hat{A}_\mu (\delta_{\mu\nu} \Delta + \partial_\mu \partial_\nu) \hat{A}_\nu \\ \frac{1}{2m_p^2} \partial_\mu \hat{\mathcal{F}}_{\mu\lambda} \partial_\theta \hat{\mathcal{F}}_{\theta\lambda} &= -\frac{1}{2} \hat{A}_\mu (\delta_{\mu\nu} \Delta + \partial_\mu \partial_\nu) \frac{\Delta}{m_p^2} \hat{A}_\nu \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\delta\hat{S} = \int d^4x \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_N}{\partial \hat{A}} \delta \hat{A} + \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_N}{\partial \hat{B}} \delta \hat{B},$$

as equações de movimento serão dadas por

$$-\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right) (\delta_{\mu\nu} \Delta + \partial_\mu \partial_\nu) \hat{A}_\nu - \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu \hat{B} - ie \hat{\psi}^s \beta_\mu^E \hat{\psi}^s - \mathcal{J}_\mu = \hat{0} \quad (3.41)$$

$$\hat{B} = -\frac{1}{\xi} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \partial_\nu \hat{A}_\nu.$$

Logo,

$$-\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right) [(\delta_{\mu\nu} \Delta + (1 - \frac{1}{\xi}) \partial_\mu \partial_\nu)] \hat{A}_\nu = ie \hat{\psi}^s \beta_\mu^E \hat{\psi}^s + \mathcal{J}_\mu, \quad (3.42)$$

onde definimos o operador diferencial de Podolsky

$$P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \doteq -\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right) [(\delta_{\mu\nu} \Delta + (1 - \frac{1}{\xi}) \partial_\mu \partial_\nu)]. \quad (3.43)$$

Portanto,

$$P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \hat{A}_\nu = ie \hat{\psi}^s \beta_\mu^E \hat{\psi}^s + \mathcal{J}_\mu. \quad (3.44)$$

O interessante dessa análise é que estendemos para temperatura finita dois métodos: o método de Nakanishi para fixar os graus de liberdade físicos de maneira covariante via multiplicador de Lagrange e o método variacional de Schwinger para encontrar as equações de movimento via ação.

Por fim, obteremos a função de partição que descreve o setor vetorial com interação no calibre *no-mixing*. A matriz densidade de estados é dada por

$$\hat{\rho}_s(\beta) = \exp[-\beta \hat{H}]$$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3\vec{z} \{ \Pi^\nu \Gamma_\nu - \Phi^0 \partial_i \Gamma^i + \frac{\xi m_p^2}{2} \Phi^0 \Phi^0 + \Phi_k [\partial^k \Gamma_0 - \partial_l F^{lk} + \frac{m_p^2}{2} \Phi^k] + \frac{1}{4} F^{kj} F_{kj} + \frac{1}{2} (\Gamma_j - \partial_j A_0)^2 + \\ &+ \frac{1}{2m_p^2} [\partial_j \partial^j A^0 - \partial_j \Gamma^j]^2 + \frac{1}{2\xi} [\Gamma^0 \Gamma^0 + \partial_i A^i \partial_j A^j] - \frac{1}{2\xi m_p^2} \partial_i \partial_j A^j \partial^i \partial_k A^k - e \hat{A}_\mu \hat{\psi} \beta^\mu \hat{\psi} + J^\mu \hat{A}_\mu \}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Observe que o ensemble em questão é o ensemble canônico pois não temos cargas conservadas.

Nesse caso a equação (3.44) pode ser escrita da seguinte forma

$$P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \frac{\delta \hat{\rho}_s(\beta)}{\delta \mathcal{J}^\nu(\vec{x}, \tau)} = ie \hat{\bar{\psi}}^s \beta_\mu^E \hat{\psi}^s + \mathcal{J}_\mu \hat{\rho}_s(\beta), \quad (3.46)$$

onde tomando-se o traço temos uma equação funcional para a função de partição

$$P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \frac{\delta Z_2[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}^\nu(\vec{x}, \tau)} = ie \hat{\bar{\psi}}^s \beta_\mu^E \hat{\psi}^s + \mathcal{J}_\mu Z_2[\mathcal{J}, \bar{\eta}, \eta]. \quad (3.47)$$

Procuraremos por uma solução da equação anterior da seguinte forma

$$Z_2[\mathcal{J}] = \int D\mathcal{A} \tilde{Z}_2[\mathcal{A}, \bar{\psi}, \psi] \exp[\mathcal{J}_\mu \mathcal{A}_\mu], \quad (3.48)$$

$$\int D\mathcal{A} [P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \mathcal{A}_\nu - ie \bar{\psi} \beta_\mu^E \psi] \tilde{Z}_2[\mathcal{A}, \bar{\psi}, \psi] \exp[\mathcal{J}_\mu \mathcal{A}_\mu] = \mathcal{J}_\mu Z_2[\mathcal{J}]. \quad (3.49)$$

Definindo

$$S_2 \doteq \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{A}_\mu P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \mathcal{A}_\nu - ie \mathcal{A}_\mu \bar{\psi} \beta_\mu^E \psi \right\} \quad (3.50)$$

$$\frac{\delta S_2}{\delta \mathcal{A}_\mu} = P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \mathcal{A}_\nu - ie \bar{\psi} \beta_\mu^E \psi$$

percebemos que a função partição que descreve o setor vetorial é dada por

$$Z_2[\mathcal{J}] = \int D\mathcal{A} \exp[-S_2 + \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}_\mu]. \quad (3.51)$$

3.3 O setor Fantasma

Apesar de termos fixado o calibre, existe uma simetria residual na teoria. Esta pode ser observada fazendo uma transformação de calibre na equação abaixo

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_N &= \frac{1}{4} \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2} \partial_\mu \hat{\mathcal{F}}_{\mu\lambda} \partial_\theta \hat{\mathcal{F}}_{\theta\lambda} + \frac{1}{2} \{ \hat{B}, G[\hat{\mathcal{A}}] \} + \frac{\xi}{2} \hat{B}^2 \\ \hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{\mathcal{A}}_\nu - \partial_\nu \hat{\mathcal{A}}_\mu \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$G[\hat{\mathcal{A}}] = \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu \hat{\mathcal{A}}_\mu.$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_\mu &\rightarrow \hat{\mathcal{A}}_\mu + \partial_\mu \hat{\alpha} \\ \hat{B} &\rightarrow \hat{B} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\delta \hat{\mathcal{L}}_N = \frac{1}{2} \{ \hat{B}, \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta \hat{\alpha} \}.$$

Neste caso para que tenhamos uma simetria

$$\delta\hat{\mathcal{L}}_N = \hat{0} \Rightarrow \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \Delta\hat{\alpha} = \hat{0}. \quad (3.54)$$

Implementaremos a condição anterior por meio de um multiplicador de Lagrange

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_N + \hat{\lambda}\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \Delta\hat{\alpha}. \quad (3.55)$$

Podemos escrever a equação anterior em termos dos campos fantasmas

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_N + i\hat{c}\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \Delta\hat{c}. \quad (3.56)$$

Como vemos, os fantasmas são inseridos por meio de uma estrutura pseudo-diferencial, o que dificultaria o estudo de um formalismo hamiltoniano, o cálculo da carga fantasma conservada e a construção de uma representação funcional para o setor fantasma a temperatura finita. Para resolver esse problema faremos uso do conhecimento sobre integração funcional. Sendo assim iniciamos o estudo encontrando uma resolução para a seguinte integral,

$$I = \int d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_n dc_1 \dots dc_n \exp[\bar{c}_i A_{ij} c_j] \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.57)$$

onde \bar{c}_i e c_i são variáveis de Grassmann independentes e A é um operador matricial. Suponhamos que encontremos todos os auto-valores de A ,

$$\begin{aligned} A.c &= \lambda.c \\ \det(A - \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Conseqüentemente, temos seus auto-vetores

$$A.e_\alpha = \lambda_\alpha.e_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (3.59)$$

Portanto, se encontrarmos uma transformação que leve os auto-vetores na base canônica

$$e_\alpha = R.c_\alpha \quad (3.60)$$

esta diagonaliza o operador A ,

$$\begin{aligned} A.c_\alpha &= \lambda_\alpha.c_\alpha \\ (R.A.R^{-1}).e_\alpha &= \lambda_\alpha.e_\alpha. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Na sequência, faremos a seguinte transformação sobre as variáveis de Grassmann

$$c' = R.c \quad (3.62)$$

observando que

$$d\bar{c}'_1 \dots d\bar{c}'_n dc'_1 \dots dc'_n = (\det R)^2 d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_n dc_1 \dots dc_n \quad (3.63)$$

e também o fato de termos $(\det R)^2 = 1$.

Desse modo

$$I = \int d\bar{c}'_1 \dots d\bar{c}'_n dc'_1 \dots dc'_n \exp[\bar{c}'_i A'_{ij} c'_j] \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.64)$$

onde A' é diagonal.

Continuando,

$$\begin{aligned} I &= \int d\bar{c}'_1 \dots d\bar{c}'_n dc'_1 \dots dc'_n \exp[\bar{c}'_i A'_{ij} c'_j] \\ &= \int d\bar{c}'_1 \dots d\bar{c}'_n dc'_1 \dots dc'_n \prod_i (1 + \lambda_i \bar{c}'_i c'_i) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \\ &= \det A, \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde utilizamos propriedades das variáveis de Grassmann. A extensão para o caso contínuo ocorre de maneira natural,

$$\det A = \int D\bar{c}Dc \exp\left[\int d^4x d^4y \bar{c}(x)A(x, y)c(y)\right]. \quad (3.66)$$

Para o caso em que estamos interessados $A(x, y) = \det\left[\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta \delta^4(x - y)\right]$

$$\det\left[\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta \delta^4(x - y)\right] = \int D\bar{c}Dc \exp\left[\int d^4x d^4y \bar{c}(x)\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta \delta^4(x - y)c(y)\right]. \quad (3.67)$$

Por outro lado,

$$\frac{\det \left\| \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\|}{\det \left\| \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\|} \det \left\| \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta \right\| = \frac{\det \left\| \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \Delta \right\|}{\det \left\| \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\|} = \frac{\det \left\| \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \Delta \right\|}{\left[\det \left\| \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \right\|\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.68)$$

Portanto,

$$\frac{\det \left\| \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \Delta \right\|}{\left[\det \left\| \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \right\|\right]^{\frac{1}{2}}} = \int D\bar{c}Dc \int D\phi \exp\left[\int d^4x \left\{ \bar{c} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right) \Delta c - \frac{1}{2} \phi \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right) \phi \right\}\right], \quad (3.69)$$

$$\det\left[\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta \delta^4(x - y)\right] = \int D\bar{c}Dc \int D\phi \exp\left[\int d^4x \left\{ i\bar{c} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right) \Delta c - \frac{1}{2} \phi \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right) \phi \right\}\right]. \quad (3.70)$$

Logo, a densidade de lagrangiana que descreve o setor fantasma no calibre *no-mixing* é dada por

$$\hat{\mathcal{L}}_g = i\hat{c} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right) \Delta \hat{c} - \frac{1}{2} \hat{\phi} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right) \hat{\phi}. \quad (3.71)$$

A partir daí, estamos aptos a construir toda estrutura do setor fantasma. Classicamente, a ação que descreve o setor fantasma advinda de um estudo no calibre *no-mixing* pode ser definida como sendo

$$\mathcal{S} \doteq \int d^4x \mathcal{L} \quad (3.72)$$

$$\mathcal{L} = -i\bar{c}\left(1 + \frac{\square}{m_p^2}\right)\square c + \frac{1}{2}\phi\left(1 + \frac{\square}{m_p^2}\right)\phi \iff i\partial_\mu \bar{c}\partial^\mu c - \frac{i}{m_p^2}\square\bar{c}\square c - \frac{1}{2m_p^2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\phi^2$$

onde

$$c, \bar{c} \text{ (campos de grassmann)} \quad (3.73)$$

$$\phi \text{ (campo real).}$$

Para extrair o tensor de energia-momento canônico fantasma iremos inserir uma notação

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad (3.74)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_\mu \bar{c}, \partial_\mu \partial_\nu \bar{c}; \partial_\alpha c, \partial_\alpha \partial_\beta c; \phi, \partial_\lambda \phi).$$

Neste caso as equações clássicas de movimento são dadas por

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \delta(\partial_\mu \bar{c}) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{c})} + \delta(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c}) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha c)} \delta(\partial_\alpha c) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta c)} \delta(\partial_\alpha \partial_\beta c) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\theta \phi)} \delta(\partial_\theta \phi) = \\ &= \delta\bar{c} \left[-\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{c})} \right) + \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} \right) \right] + \left[-\partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha c)} \right) + \partial_\alpha \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta c)} \right) \right] \delta c + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\theta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\theta \phi)} \right) \right] \delta\phi \\ &-\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{c})} \right) + \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} \right) = 0 \\ &-\partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha c)} \right) + \partial_\alpha \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta c)} \right) = 0 \\ &\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\theta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\theta \phi)} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Por outro lado, implementando uma translação espaço-temporal

$$\begin{aligned} x^\lambda &\rightarrow x^\lambda + \delta x^\lambda \\ \bar{c} &\rightarrow \bar{c} + \delta\bar{c}, \quad \delta\bar{c} = (\partial_\lambda \bar{c})\delta x^\lambda \\ c &\rightarrow c + \delta c, \quad \delta c = (\partial_\lambda c)\delta x^\lambda \\ \phi &\rightarrow \phi + \delta\phi, \quad \delta\phi = (\partial_\lambda \phi)\delta x^\lambda \\ \delta(d^4x) &= \partial_\lambda \delta x^\lambda d^4x \end{aligned} \quad (3.76)$$

temos

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int \delta(d^4x) \mathcal{L} + \int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x [\partial_\lambda \delta x^\lambda \mathcal{L} + \delta(\partial_\mu \bar{c}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{c})} + \delta(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha c)} \delta(\partial_\alpha c) + \\
& + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta c)} \delta(\partial_\alpha \partial_\beta c) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\theta \phi)} \delta(\partial_\theta \phi)] = \int d^4x [(-\partial_\lambda \mathcal{L}) \delta x^\lambda + \partial_\lambda (\mathcal{L} \delta x^\lambda) + \partial_\mu (\delta \bar{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{c})}) + \\
& - \delta \bar{c} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{c})} \right) + \delta(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} + \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha c)} \delta c \right) - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha c)} \right) \delta c + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta c)} \delta(\partial_\alpha \partial_\beta c) + \\
& + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\theta \phi)} \delta(\partial_\theta \phi)].
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Ao utilizar as equações de movimento (3.75)

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int d^4x [\partial_\nu (-\mathcal{L} \eta'_\lambda) \delta x^\lambda + \partial_\mu (\delta \bar{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{c})}) - \delta \bar{c} \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} \right) + \delta(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} + \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha c)} \delta c \right) + \\
& - \partial_\alpha \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta c)} \right) \delta c + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta c)} \delta(\partial_\alpha \partial_\beta c) + \partial_\theta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\theta \phi)} \right) \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\theta \phi)} \delta(\partial_\theta \phi)] = \int d^4x \{ \partial_\nu (-\mathcal{L} \eta'_\lambda) \delta x^\lambda + \\
& + \partial_\mu [(\partial_\lambda \bar{c}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{c})}] \delta x^\lambda + \partial_\nu [-(\partial_\lambda \bar{c}) \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} \right) + (\partial_\mu \partial_\lambda \bar{c}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})}] \delta x^\lambda + \partial_\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha c)} (\partial_\lambda c) \right] \delta x^\lambda + \\
& + \partial_\beta [-\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta c)} \right) (\partial_\lambda c) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta c)} (\partial_\alpha \partial_\lambda c)] + \partial_\theta \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\theta \phi)} \right) (\partial_\lambda \phi) \right] \delta x^\lambda \}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Neste caso, assumindo que a ação seja invariante por (3.76)

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int d^4x \partial_\nu [(\partial_\lambda \bar{c}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \bar{c})} - (\partial_\lambda \bar{c}) \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} \right) + (\partial_\mu \partial_\lambda \bar{c}) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu c)} (\partial_\lambda c) + \\
& - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu c)} \right) (\partial_\lambda c) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu c)} \right) (\partial_\mu \partial_\lambda c) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \right) \partial_\lambda \phi - \mathcal{L} \eta'_\lambda] \delta x^\lambda \\
T_\lambda^\nu \doteq & (\partial_\lambda \bar{c}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \bar{c})} - (\partial_\lambda \bar{c}) \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} \right) + (\partial_\mu \partial_\lambda \bar{c}) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu c)} (\partial_\lambda c) + \\
& - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu c)} \right) (\partial_\lambda c) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu c)} \right) (\partial_\mu \partial_\lambda c) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \right) \partial_\lambda \phi - \mathcal{L} \eta'_\lambda
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \partial_\nu T_\lambda^\nu = 0 \quad (\text{conservação de energia e momento}).$$

A hamiltoniana canônica é dada por

$$\begin{aligned}
H_c = & \int d^3 \vec{x} T_0^0 = \int d^3 \vec{x} [(\partial_0 \bar{c}) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{c})} - 2\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \partial_0 \bar{c})} \right) - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_0 \bar{c})} \right) \right] + (\partial_0 \partial_0 \bar{c}) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_0 \bar{c})} \right) + \\
& + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 c)} - 2\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \partial_0 c)} \right) - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_0 c)} \right) \right] (\partial_0 c) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_0 c)} \right) (\partial_0 \partial_0 c) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \right) (\partial_0 \phi)] - \mathcal{L} + \\
& + \int d^3 \vec{x} \partial_i [(\partial_0 \bar{c}) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \partial_0 \bar{c})} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \partial_0 c)} \right) (\partial_0 c)].
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Conseqüentemente,

$$\mathcal{H} = (\partial_0 \bar{c}) \pi + (\partial_0 \partial_0 \bar{c}) P + \bar{\pi} (\partial_0 c) + \bar{P} (\partial_0 \partial_0 c) + p (\partial_0 \phi) - \mathcal{L}, \tag{3.81}$$

onde definimos os momentos canônicos

$$\begin{aligned}
\pi &\doteq \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{c})} - 2\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \partial_0 \bar{c})} \right) - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_0 \bar{c})} \right) \right] = i\left(1 + \frac{\square}{m_p^2}\right) \partial_0 c \\
\bar{\pi} &\doteq \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 c)} - 2\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \partial_0 c)} \right) - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_0 c)} \right) \right] = -i\left(1 + \frac{\square}{m_p^2}\right) \partial_0 \bar{c} \\
P &\doteq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_0 \bar{c})} = -i \frac{\square}{m_p^2} c \\
\bar{P} &\doteq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_0 c)} = i \frac{\square}{m_p^2} \bar{c} \\
p &\doteq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = -\frac{1}{m_p^2} \partial_0 \phi.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Para encontrar e discutir o que seria uma carga fantasma vamos abordar o seguinte problema

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &\doteq \int d^4x \mathcal{L} \\
\mathcal{L} &= -i\bar{c}\left(1 + \frac{\square}{m_p^2}\right)\square c + \frac{1}{2}\phi\left(\frac{\square}{m_p^2} + 1\right)\phi.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

De início temos as seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\overrightarrow{\square}}{m_p^2}\right) \overrightarrow{\square} c &= 0 \\
\bar{c} \left(1 + \frac{\overleftarrow{\square}}{m_p^2}\right) \overleftarrow{\square} &= 0 \\
\left(\frac{\vec{\square}}{m_p^2} + 1\right) \phi &= 0.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Encontraremos a carga conservada pelo Teorema de Emmy Noether. A ação (3.83) é invariante perante a seguinte transformação global

$$\begin{aligned}
\bar{c} &\rightarrow \bar{c}' = \bar{c} \exp[-i\theta] \\
c &\rightarrow c' = \exp[i\theta]c.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Infinitesimalmente,

$$\begin{aligned}
\bar{c} &\rightarrow \bar{c} + \delta\bar{c}; & \delta\bar{c} &= -i\delta\theta\bar{c} \\
c &\rightarrow c + \delta c; & \delta c &= i\delta\theta c.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow S + \delta S; & \delta S &= 0 \\
\delta \mathcal{S} &= \int d^4x \left[\delta(\partial_\mu \bar{c}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{c})} + \delta(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \bar{c})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha c)} \delta(\partial_\alpha c) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta c)} \delta(\partial_\alpha \partial_\beta c) \right].
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Ao utilizar as equações de movimento (3.75)

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} = & \int d^4x \partial_\mu \left[\delta\bar{c} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{c})} - \delta\bar{c} \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\bar{c})} \right) + \delta(\partial_\nu\bar{c}) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\bar{c})} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu c)} \delta c - \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu c)} \right) \delta c + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu c)} \right) \delta(\partial_\nu c) \right] \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{c})} = i\partial^\mu c; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\bar{c})} = -i\frac{1}{m_p^2}\eta^{\mu\nu}\square c; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu c)} = -i\partial^\mu\bar{c}; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu c)} = i\frac{1}{m_p^2}\square\bar{c}\eta^{\mu\nu}.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \delta\theta \int d^4x \partial^\mu \left\{ \bar{c}(\partial_\mu c) - (\partial_\mu\bar{c})c + \frac{1}{m_p^2} [\bar{c}(\partial_\mu\square c) - (\partial_\mu\bar{c})\square c + \square\bar{c}(\partial_\mu c) - (\partial_\mu\square\bar{c})c] \right\} \\ &= \int d^4x \partial^\mu Q_\mu, \end{aligned} \quad (3.89)$$

onde encontramos a carga de Noether

$$Q_0 = \bar{c}(\partial_0 c) - (\partial_0\bar{c})c + \frac{1}{m_p^2} [\bar{c}(\partial_0\square c) - (\partial_0\bar{c})\square c + \square\bar{c}(\partial_0 c) - (\partial_0\square\bar{c})c]. \quad (3.90)$$

Portanto, escrevemos a densidade de carga fantasma da seguinte forma

$$\begin{aligned} iQ_0 &= \bar{c} \left[i \left(1 + \frac{\square}{m_p^2} \right) \partial_0 c \right] - \left[i \left(1 + \frac{\square}{m_p^2} \right) \partial_0 \bar{c} \right] c + \left[i \frac{\square}{m_p^2} \bar{c} \right] \partial_0 c - \partial_0 \bar{c} \left[i \frac{\square}{m_p^2} c \right] \\ &= \bar{c}\pi + \bar{\pi}c + \bar{P}(\partial_0 c) + (\partial_0\bar{c})P. \end{aligned} \quad (3.91)$$

A seguir estudaremos o formalismo hamiltoniano e quantização do setor fantasma. Primeiramente precisamos construir o formalismo hamiltoniano. Sendo assim, escreveremos a densidade de Hamiltoniana fantasma de maneira explícita

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= (\partial_0\bar{c})\pi + (\partial_0\partial_0\bar{c})P + \bar{\pi}(\partial_0 c) + \bar{P}(\partial_0\partial_0 c) + p(\partial_0\phi) - \mathcal{L} = \\ &= \bar{D}\pi + \bar{D}P + \bar{\pi}D + \bar{P}\dot{D} - m_p^2 p^2 - [-i(\bar{D}D + \partial_k\bar{c}\partial^k c) + im_p^2\bar{P}P + \\ &\quad - \frac{1}{2}m_p^2 p^2 - \frac{1}{2m_p^2}\partial_k\phi\partial^k\phi + \frac{1}{2}\phi^2], \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$D = \partial_0 c.$$

Por outro lado,

$$P = -i\frac{\square}{m_p^2}c = -\frac{i}{m_p^2}(\dot{D} + \partial_k\partial^k c), \quad (3.93)$$

$$\dot{D} = im_p^2 P - \partial_k\partial^k c.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & \bar{D}\pi + [-im_p^2\bar{P} - \partial_k\partial^k\bar{c}]P + \bar{\pi}D + \bar{P}[im_p^2P - \partial_k\partial^k c] - m_p^2p^2 + i(\bar{D}D + \partial_k\bar{c}\partial^k c) + \\
& -im_p^2\bar{P}P + \frac{1}{2}m_p^2p^2 + \frac{1}{2m_p^2}\partial_k\phi\partial^k\phi - \frac{1}{2}\phi^2 = \bar{D}\pi - (\partial_k\partial^k\bar{c})P + \bar{\pi}D + \bar{P}(-\partial_k\partial^k c) + \\
& + i(\bar{D}D + \partial_k\bar{c}\partial^k c) - im_p^2\bar{P}P + \frac{1}{2}m_p^2p^2 + \frac{1}{2m_p^2}\partial_k\phi\partial^k\phi - \frac{1}{2}\phi^2,
\end{aligned} \tag{3.94}$$

$$\mathcal{H}(c, \bar{c}, D, \bar{D}, \phi; \pi, \bar{\pi}, P, \bar{P}, p) = \bar{D}\pi - (\partial_k\partial^k\bar{c})P + \bar{\pi}D + \bar{P}(-\partial_k\partial^k c) + i(\bar{D}D + \partial_k\bar{c}\partial^k c) + \\
-im_p^2\bar{P}P + \frac{1}{2}m_p^2p^2 + \frac{1}{2m_p^2}\partial_k\phi\partial^k\phi - \frac{1}{2}\phi^2. \tag{3.95}$$

Portanto, podemos encontrar as equações de Hamilton pelo princípio da mínima ação

$$\mathcal{L} = \dot{\bar{c}}\pi + \dot{\bar{D}}P + \bar{\pi}\dot{c} + \bar{P}\dot{D} + p\dot{\phi} - \mathcal{H} \tag{3.96}$$

$$\delta\mathcal{L} = 0.$$

$$\delta\mathcal{L} = -\delta\bar{c}\dot{\pi} + \dot{\bar{c}}\delta\pi + \dots - \delta\bar{c}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{c}} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}\delta\pi + \dots \tag{3.97}$$

Neste caso

$$\begin{aligned}
\dot{c} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{\pi}} \quad \dot{\pi} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial c}; \quad \dot{\bar{c}} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} \quad \dot{\bar{\pi}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{c}} \\
\dot{D} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{P}} \quad \dot{P} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{D}}; \quad \dot{\bar{D}} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P} \quad \dot{\bar{P}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{D}} \\
\dot{\phi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Agora dada uma quantidade física F sua evolução será dada por

$$\begin{aligned}
F = \int d^3\vec{x}\mathcal{F}(c, \bar{c}, D, \bar{D}, \phi; \pi, \bar{\pi}, P, \bar{P}, p) \\
\dot{F} = \int d^3\vec{x}d^3\vec{y}[\frac{\partial\mathcal{F}(x)}{\partial c(y)}\dot{c}(y) + \dot{\bar{\pi}}(y)\frac{\partial\mathcal{F}(x)}{\partial\bar{\pi}(y)} + \dots] = \int d^3\vec{x}d^3\vec{y}[\frac{\partial\mathcal{F}(x)}{\partial c}\frac{\partial\mathcal{H}(y)}{\partial\bar{\pi}} + \frac{\partial\mathcal{F}(x)}{\partial\bar{\pi}}\frac{\partial\mathcal{H}(y)}{\partial c} + \dots] = \\
\dot{=} \int d^3\vec{x}d^3\vec{y}\{\mathcal{F}(x), \mathcal{H}(y)\}_B
\end{aligned} \tag{3.99}$$

onde definimos uma extensão do parentese de Poisson conhecido como parentese de Berezin, pois temos variáveis reais e de Grassmann.

Tendo em vista a definição do parentese de Berezin podemos escrever os parenteses de Berezin fundamentais

$$\begin{aligned}
\{c(x), \bar{\pi}(y)\}_B = \{\bar{\pi}(x), c(y)\}_B = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}); \quad \{\bar{c}(x), \pi(y)\}_B = \{\pi(x), \bar{c}(y)\}_B = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\
\{D(x), \bar{P}(y)\}_B = \{\bar{P}(x), D(y)\}_B = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}); \quad \{\bar{D}(x), P(y)\}_B = \{P(x), \bar{D}(y)\}_B = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\
\{\phi(x), p(y)\}_B = -\{p(x), \phi(y)\}_B = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})
\end{aligned} \tag{3.100}$$

com o restante dos parenteses fundamentais nulos.

Observa-se que

$$\begin{aligned}\dot{\pi} &= i\left(1 + \frac{\square}{m_p^2}\right)\dot{c} = \int d^3\vec{y}\{\pi, \mathcal{H}(y)\}_B = \int d^3\vec{y}\{\pi, -(\partial_k\partial^k\bar{c})P + i\partial_k\bar{c}\partial^k c\}_B = \\ &= -\partial_k\partial^k P - i\partial_k\partial^k c,\end{aligned}\tag{3.101}$$

$$i\left(1 + \frac{\square}{m_p^2}\right)\square c = 0.$$

A quantização do setor fantasma é obtida utilizando o princípio da correspondência de Dirac

$$\{, \}_B \rightarrow \begin{array}{l} -i\{, \} \quad \text{anti-comutador (campos de grassmann)} \\ -i[,] \quad \text{comutador (campos reais)} \end{array}\tag{3.102}$$

Desse modo

$$\begin{aligned}\{\widehat{c}(x), \widehat{\pi}(y)\} &= \{\widehat{\pi}(x), \widehat{c}(y)\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}); \quad \{\widehat{c}(x), \widehat{\pi}(y)\} = \{\widehat{\pi}(x), \widehat{c}(y)\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\widehat{D}(x), \widehat{P}(y)\} &= \{\widehat{P}(x), \widehat{D}(y)\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}); \quad \{\widehat{D}(x), \widehat{P}(y)\} = \{\widehat{P}(x), \widehat{D}(y)\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\widehat{\phi}(x), \widehat{p}(y)] &= -[\widehat{p}(x), \widehat{\phi}(y)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}).\end{aligned}\tag{3.103}$$

Como estamos interessados em estudar campos em equilíbrio termodinâmico, toda a discussão anterior nos leva a definir a matriz densidade de estados no ensemble gran-canônico do setor fantasma com fontes da seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{gs}(\beta) &= \exp[-\beta(\widehat{H} - \mu_g\widehat{Q})] \\ \widehat{H} &= \int d^3\vec{x}\{\widehat{D}\widehat{\pi} - (\partial_k\partial^k\widehat{c})\widehat{P} + \widehat{\pi}\widehat{D} + \widehat{P}(-\partial_k\partial^k\widehat{c}) + i(\widehat{D}\widehat{D} + \partial_k\widehat{c}\partial^k\widehat{c}) + \\ &-im_p^2\widehat{P}\widehat{P} + \frac{1}{2}m_p^2\widehat{p}^2 + \frac{1}{2m_p^2}\partial_k\widehat{\phi}\partial^k\widehat{\phi} - \frac{1}{2}\widehat{\phi}^2 + \zeta\widehat{c} + \widehat{c}\zeta + J\widehat{\phi}\}. \\ i\widehat{Q} &= \widehat{c}\widehat{\pi} + \widehat{\pi}\widehat{c} + \widehat{P}\widehat{D} + \widehat{D}\widehat{P}.\end{aligned}\tag{3.104}$$

Aplicando uma transformação de similaridade $\widehat{O}^{\wedge gs}(\vec{x}, \tau) = \hat{\rho}_{gs}^{-1}(\tau)\widehat{O}(\vec{x})\hat{\rho}_{gs}(\tau)$ nas equações (3.103) estacionárias obtemos os parenteses fundamentais em equilíbrio termodinâmico

$$\begin{aligned}\{\widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau), \widehat{\pi}^{gs}(\vec{y}, \tau)\} &= \{\widehat{\pi}^{gs}(\vec{x}, \tau), \widehat{c}^{gs}(\vec{y}, \tau)\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau), \widehat{\pi}(\vec{y}, \tau)\} &= \{\widehat{\pi}^{gs}(\vec{x}, \tau), \widehat{c}^{gs}(\vec{y}, \tau)\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau), \widehat{P}^{gs}(\vec{y}, \tau)\} &= \{\widehat{P}^{gs}(\vec{x}, \tau), \widehat{D}^{gs}(\vec{y}, \tau)\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau), \widehat{P}(\vec{y}, \tau)\} &= \{\widehat{P}^{gs}(\vec{x}, \tau), \widehat{D}^{gs}(\vec{y}, \tau)\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\widehat{\phi}^{gs}(\vec{x}, \tau), \widehat{p}^{gs}(\vec{y}, \tau)] &= -[\widehat{p}^{gs}(\vec{x}, \tau), \widehat{\phi}^{gs}(\vec{y}, \tau)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}).\end{aligned}\tag{3.105}$$

Pois bem, encontraremos as equações de movimento em equilíbrio termodinâmico. Primeiramente para c ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \left\{ \exp[\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})] \widehat{c} \exp[-\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})] \right\}}{\partial \tau} \\ &= \exp[\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})] [\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q}, \widehat{c}] \exp[-\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})].\end{aligned}\quad (3.106)$$

Notemos que

$$[\widehat{A}\widehat{B}, \widehat{C}] = \widehat{A}\{\widehat{B}, \widehat{C}\} - \{\widehat{A}, \widehat{C}\}\widehat{B} \quad (3.107)$$

$$[\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q}, \widehat{c}(\vec{x})] = [\int d^3\vec{y} (\widehat{\pi}\widehat{D} + i\mu_g \widehat{\pi}\widehat{c}), \widehat{c}(\vec{x})] = -i\widehat{D} + \mu_g \widehat{c} \quad (3.108)$$

$$\frac{\partial \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} = -i\widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau) + \mu_g \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau),$$

onde definimos a seguinte quantidade

$$\widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) \doteq \exp[\mu_g \tau] \widehat{c}^s(\vec{x}, \tau). \quad (3.109)$$

Dando continuidade

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau^2} &= -i \frac{\partial \widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} + \mu_g [-i\widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau) + \mu_g \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau)] \\ \frac{\partial \widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} &= \exp[\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})] [\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q}, \widehat{D}] \exp[-\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})]\end{aligned}\quad (3.110)$$

$$\begin{aligned}[\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q}, \widehat{D}(\vec{x})] &= [\int d^3\vec{y} \{ \widehat{P}(-\partial_k \partial^k \widehat{c}) - im_p^2 \widehat{P}\widehat{P} - i\mu_g \widehat{P}\widehat{D}, \widehat{D}(\vec{x}) \}] = \\ &= i\partial_k \partial^k \widehat{c} - m_p^2 \widehat{P} - \mu_g \widehat{D}.\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau^2} &= \partial_k \partial^k \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) + im_p^2 \widehat{P}^{gs}(\vec{x}, \tau) + \mu_g^2 \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) \\ \widehat{P}^{gs}(\vec{x}, \tau) &= -\frac{i}{m_p^2} [\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \partial^k \partial^k] \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) + i\mu_g^2 \frac{1}{m_p^2} \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau)\end{aligned}\quad (3.111)$$

onde definimos a seguinte operação

$$\Delta \doteq - \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \partial^k \partial^k \right] \quad (3.112)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\widehat{P}^{gs}(\vec{x}, \tau) &= i \frac{\Delta}{m_p^2} \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) + i\mu_g^2 \frac{1}{m_p^2} \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) \\ &= \left[i \frac{\Delta}{m_p^2} + i\mu_g^2 \frac{1}{m_p^2} \right] \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau).\end{aligned}\quad (3.113)$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{P}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} &= [i\frac{\Delta}{m_p^2} + i\mu_g^2 \frac{1}{m_p^2}] [-i\widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau) + \mu_g \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau)] \\
\frac{\partial \widehat{P}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} &= \exp[\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})] [\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q}, \widehat{P}] \exp[-\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})] \\
[\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q}, \widehat{P}(\vec{x})] &= [\int d^3\vec{y} \{ \widehat{D}\widehat{\pi} + i\widehat{D}\widehat{D} - i\mu_g \widehat{D}\widehat{P} \}, \widehat{P}(\vec{x})] = \\
&= -i\widehat{\pi} + \kappa\widehat{D} - \mu_g \widehat{P}.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
-i\widehat{\pi}^{gs}(\vec{x}, \tau) + \widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau) - \mu_g \widehat{P}^{gs}(\vec{x}, \tau) &= [i\frac{\Delta}{m_p^2} + i\mu_g^2 \frac{1}{m_p^2}] [-i\widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau) + \mu_g \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau)] \\
\widehat{\pi}^{gs}(\vec{x}, \tau) &= [-i(1 - \frac{\Delta}{m_p^2}) + i\mu_g^2 \frac{1}{m_p^2}] \widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau) - \mu_g \{ [\frac{\Delta}{m_p^2} + \mu_g^2 \frac{1}{m_p^2}] \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) - i\widehat{P} \} = \\
&= [-i(1 - \frac{\Delta}{m_p^2}) + i\mu_g^2 \frac{1}{m_p^2}] \widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau).
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Sendo assim, temos condições de encontrar a equação de movimento

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{\pi}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} &= [-i(1 - \frac{\Delta}{m_p^2}) + i\mu_g^2 \frac{1}{m_p^2}] [i\partial_k \partial^k \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) - m_p^2 \widehat{P}^{gs}(\vec{x}, \tau) - \mu_g \widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau)], \\
\frac{\partial \widehat{\pi}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} &= \exp[\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})] [\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q}, \widehat{\pi}] \exp[-\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})], \\
[\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q}, \widehat{\pi}(\vec{x})] &= [\int d^3\vec{y} \{ -(\partial_k \partial^k \widehat{c}) \widehat{P} + i(\partial_k \widehat{c} \partial^k \widehat{c}) + \widehat{c}\zeta - i\mu_g \widehat{c}\widehat{\pi} \}, \widehat{\pi}(\vec{x})] = \\
&= i\partial_k \partial^k \widehat{P} + \partial_k \partial^k \widehat{c} - i\zeta - \mu_g \widehat{\pi},
\end{aligned} \tag{3.116}$$

$$\begin{aligned}
i[i\frac{\Delta}{m_p^2} + i\mu_g^2 \frac{1}{m_p^2}] \partial_k \partial^k \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) + \partial_k \partial^k \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) - i\zeta(\vec{x}, \tau) - \mu_g \widehat{\pi}^{gs}(\vec{x}, \tau) &= \\
= [-i(1 - \frac{\Delta}{m_p^2}) + i\mu_g^2 \frac{\kappa}{m_p^2}] \{ i\partial_k \partial^k \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) - m_p^2 [i\frac{\Delta}{m_p^2} + i\mu_g^2 \frac{1}{m_p^2}] \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) - \mu_g \widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau) \},
\end{aligned} \tag{3.117}$$

$$\begin{aligned}
(1 - \frac{\Delta}{m_p^2}) \Delta \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) &= i\zeta(\vec{x}, \tau) + \mu_g [-i(1 - \frac{\Delta}{m_p^2}) + i\mu_g^2 \frac{1}{m_p^2}] \widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau) + \\
+ \mu_g^2 \frac{1}{m_p^2} (1 - \frac{\Delta}{m_p^2}) [\widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) - \mu_g \widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau)] &+ \mu_g^2 \frac{1}{m_p^2} \{ -\partial_k \partial^k \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) + \\
+ m_p^2 [\frac{\Delta}{m_p^2} + \mu_g^2 \frac{1}{m_p^2}] \widehat{c}^{gs}(\vec{x}, \tau) - i\mu_g \widehat{D}^{gs}(\vec{x}, \tau) \}.
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Percebemos então a seguinte equação de movimento

$$-i(1 - \frac{\Delta}{m_p^2}) \Delta \widehat{c}^s(\vec{x}, \tau) = \zeta(\vec{x}, \tau), \quad \mu_g = 0. \tag{3.119}$$

A seguir, encontraremos uma equação de movimento para ϕ . Pois bem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{\phi}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} &= \exp[\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})] [\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q}, \widehat{\phi}] \exp[-\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})] \\
[\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q}, \widehat{\phi}(\vec{x})] &= [\int d^3\vec{y} \{ \frac{1}{2} m_p^2 \widehat{p}^2 \}, \widehat{\phi}(\vec{x})] = -im_p^2 \widehat{p}
\end{aligned} \tag{3.120}$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{\phi}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -im_p^2 \frac{\partial \widehat{p}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial \widehat{p}^{gs}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} = \exp[\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})][\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q}, \widehat{p}] \exp[-\tau(\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q})] \quad (3.121)$$

$$[\widehat{H} - \mu_g \widehat{Q}, \widehat{p}(\vec{x})] = [\int d^3 \vec{y} \{ \frac{1}{2m_p^2} \partial_k \widehat{\phi} \partial^k \widehat{\phi} - \frac{1}{2} \widehat{\phi}^2 + J \widehat{\phi} \}, \widehat{p}(\vec{x})] =$$

$$= -i \frac{1}{m_p^2} \partial_k \partial^k \widehat{\phi} - i \widehat{\phi} - iJ$$

$$(1 - \frac{\Delta}{m_p^2}) \widehat{\phi}^{gs}(\vec{x}, \tau) = -J(\vec{x}, \tau). \quad (3.122)$$

Finalmente toda a discussão anterior nos conduz às seguintes equações de movimento em equilíbrio termodinâmico

$$-i(1 - \frac{\Delta}{m_p^2}) \Delta \widehat{c}^s(\vec{x}, \tau) = \zeta(\vec{x}, \tau) \quad \mu_g = 0$$

$$i(1 - \frac{\Delta}{m_p^2}) \Delta \widehat{\bar{c}}^s(\vec{x}, \tau) = \bar{\zeta}(\vec{x}, \tau) \quad \mu_g = 0 \quad (3.123)$$

$$(1 - \frac{\Delta}{m_p^2}) \widehat{\phi}^{gs}(\vec{x}, \tau) = -J(\vec{x}, \tau).$$

Como vemos, existe uma relação entre as equações clássicas (3.84) advindas da ação (3.72) e as equações quânticas em equilíbrio termodinâmico

$$\square \Leftrightarrow -\Delta. \quad (3.124)$$

Para que as equações quânticas em equilíbrio termodinâmico sejam definidas adequadamente devíamos utilizar a seguinte ação clássica

$$\mathcal{S} \doteq \int d^4 x \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} = i\bar{c}(1 - \frac{\square}{m_p^2})\square c + \frac{1}{2}\phi(1 - \frac{\square}{m_p^2})\phi \iff -i\partial_\mu \bar{c} \partial^\mu c - \frac{i}{m_p^2} \square \bar{c} \square c + \frac{1}{2m_p^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \phi^2. \quad (3.125)$$

Logo as equações quânticas em equilíbrio termodinâmico seriam

$$i(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}) \Delta \widehat{c}^s(\vec{x}, \tau) = \zeta(\vec{x}, \tau) \quad \mu_g = 0$$

$$-i(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}) \Delta \widehat{\bar{c}}^s(\vec{x}, \tau) = \bar{\zeta}(\vec{x}, \tau) \quad \mu_g = 0 \quad (3.126)$$

$$(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}) \widehat{\phi}^{gs}(\vec{x}, \tau) = -J(\vec{x}, \tau).$$

Neste caso as equações anteriores podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
i(1 + \frac{\Delta}{m_p^2})\Delta \frac{\delta \hat{\rho}_{gs}(\beta)}{\delta \bar{\zeta}(\vec{x}, \tau)} &= \zeta(\vec{x}, \tau) \hat{\rho}_{gs}(\beta) \\
-i(1 + \frac{\Delta}{m_p^2})\Delta \frac{\delta \hat{\rho}_{gs}(\beta)}{\delta \zeta(\vec{x}, \tau)} &= \bar{\zeta}(\vec{x}, \tau) \hat{\rho}_{gs}(\beta) \\
(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}) \frac{\delta \hat{\rho}_{gs}(\beta)}{\delta J(\vec{x}, \tau)} &= -J(\vec{x}, \tau) \hat{\rho}_{gs}(\beta)
\end{aligned} \tag{3.127}$$

onde tomando-se o traço temos uma equação funcional para a função de partição

$$\begin{aligned}
i(1 + \frac{\Delta}{m_p^2})\Delta \frac{\delta Z_3[\bar{\zeta}, \zeta, J]}{\delta \bar{\zeta}(\vec{x}, \tau)} &= \zeta(\vec{x}, \tau) Z_3[\bar{\zeta}, \zeta, J] \\
-i(1 + \frac{\Delta}{m_p^2})\Delta \frac{\delta Z_3[\bar{\zeta}, \zeta, J]}{\delta \zeta(\vec{x}, \tau)} &= \bar{\zeta}(\vec{x}, \tau) Z_3[\bar{\zeta}, \zeta, J] \\
(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}) \frac{\delta Z_3[\bar{\zeta}, \zeta, J]}{\delta J(\vec{x}, \tau)} &= -J(\vec{x}, \tau) Z_3[\bar{\zeta}, \zeta, J].
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Procuraremos por uma solução da equação anterior da seguinte forma

$$Z_3[\bar{\zeta}, \zeta, J] = \int D\bar{c}DcD\phi \tilde{Z}_3[\bar{c}, c, \phi] \exp[\bar{c}\zeta + \bar{\zeta}c + J\phi]. \tag{3.129}$$

Definindo

$$S_3 \doteq \int d^4x \{ i\bar{c}(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta c - \frac{1}{2}\phi(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\phi \} \tag{3.130}$$

percebemos que a função partição que descreve o setor fantasma é dada por

$$Z_3[\bar{\zeta}, \zeta, J] = \int D\bar{c}DcD\phi \exp[-S_3 + \bar{c}\zeta + \bar{\zeta}c + J\phi]. \tag{3.131}$$

3.4 Um estudo no calibre *no-mixing*

Neste momento iremos aplicar o estudo da simetria BRST na condição de calibre *no-mixing*. Como vimos a função de partição livre no calibre non-mixing ($\epsilon = \frac{1}{2}$) é dada por

$$\begin{aligned}
Z(\beta) &= Z_0 \int DA \int D\bar{C}DC \exp[-S] \\
S &= \int d^4x \{ \frac{1}{2} \mathcal{A}_\mu P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)} \mathcal{A}_\nu - i\bar{c}(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^\epsilon \Delta c \} \\
P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)} &= -(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1) \{ \delta_{\mu\nu} \Delta + [1 - \frac{1}{\xi} (\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{2\epsilon-1}] \partial_\mu \partial_\nu \}.
\end{aligned} \tag{3.132}$$

Observa-se que o setor fantasma para o calibre no-mixing ($\epsilon = \frac{1}{2}$) é uma estrutura pseudo-diferencial. Para contornar este problema

$$\det[(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^\epsilon \Delta] \rightarrow \frac{\det[(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{\epsilon+\frac{1}{2}} \Delta]}{\det[(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{\frac{1}{2}}]} \rightarrow \frac{\det[(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{\epsilon+\frac{1}{2}} \Delta]}{\det[(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{\frac{1}{2}}]}. \tag{3.133}$$

Neste caso

$$\tilde{Z}(\beta) = \tilde{Z}_0 \int D\mathcal{A} \int D\bar{c}Dc \int D\phi \exp[-\tilde{S}] \quad (3.134)$$

$$\tilde{S} = \int_{\beta} d^4x \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\mu} P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)} \mathcal{A}_{\nu} - i\bar{c} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon + \frac{1}{2}} \Delta c + \frac{1}{2} \phi \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \phi \right\},$$

onde

$$\begin{aligned} \int D\mathcal{A} \exp[-\frac{1}{2} \mathcal{A}_{\mu} P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)} \mathcal{A}_{\nu}] &= \det[P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}]^{-\frac{1}{2}} \\ \int D\bar{c}Dc \exp[i\bar{c} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon + \frac{1}{2}} \Delta c] &= \det\left[\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon + \frac{1}{2}} \Delta\right] \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\int D\phi \exp[-\frac{1}{2} \phi \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \phi] = \det\left[\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Em seguida, demonstraremos que $Z(\beta)$ e $\tilde{Z}(\beta)$ descrevem a mesma física.

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\beta) &= \tilde{Z}_0 \det[P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}]^{-\frac{1}{2}} \det\left[\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon + \frac{1}{2}} \Delta\right] \det\left[\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \tilde{Z}_0 \det[P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}]^{-\frac{1}{2}} \det\left[\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon} \Delta\right] \\ &= Z(\beta), \quad \tilde{Z}_0 = Z_0. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Inserindo fontes na função partição (3.134) tendo em vista o princípio de Schwinger para campos a temperatura finita

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\beta) &= Z_0 \int D\mathcal{A} \int D\bar{c}Dc \exp[-\tilde{S}], \\ \tilde{S} &= \int_{\beta} d^4x \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\mu} P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)} \mathcal{A}_{\nu} - i\bar{c} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon + \frac{1}{2}} \Delta c + \frac{1}{2} \phi \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \phi + \mathcal{A}_{\mu} \mathcal{J}_{\mu} + \bar{c} \eta + \bar{\eta} c + J \phi \right\}, \end{aligned} \quad (3.137)$$

e variando com respeito a ϵ

$$\delta \tilde{Z} = \frac{\delta \tilde{Z}}{\delta \epsilon} \delta \epsilon \quad (3.138)$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{Z}}{\delta \epsilon} &= -\tilde{Z}_0 \int D\mathcal{A} \int D\bar{c}Dc \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \epsilon} \exp[-\tilde{S}] \\ &= -\tilde{Z}_0 \int D\mathcal{A} \int D\bar{c}Dc \left\{ \int_{\beta} d^4x \left[\frac{1}{2} \mathcal{A}_{\mu} \frac{\delta P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}}{\delta \epsilon} \mathcal{A}_{\nu} - i\bar{c} \frac{\delta \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon + \frac{1}{2}}}{\delta \epsilon} \Delta c \right] \right\} \exp[-\tilde{S}] \end{aligned} \quad (3.139)$$

e, conseqüentemente

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{Z}}{\delta \epsilon} = & -\tilde{Z}_0 \int d^4x d^4y \delta^4(x-y) \int D\mathcal{A} \int D\bar{c}Dc \left[\frac{\delta P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}}{\delta \epsilon} \frac{1}{2} \mathcal{A}_\mu(x) \mathcal{A}_\nu(y) + \right. \\ & \left. -i \frac{\delta(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{\epsilon + \frac{1}{2}}}{\delta \epsilon} \Delta \bar{c}(x) c(y) \right] \exp[-\tilde{S}]. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Logo,

$$\left\{ \frac{\delta P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}}{\delta \epsilon} \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} - i \frac{\delta(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^\epsilon}{\delta \epsilon} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta \frac{\delta^2}{\delta \bar{c}(x) \delta c(y)} \right\} \tilde{Z} = 0 \quad \delta \tilde{Z} = 0. \quad (3.141)$$

Escrevendo de outra maneira

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\delta P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}}{\delta \epsilon} \langle \mathcal{A}_\mu(x) \mathcal{A}_\nu(y) \rangle &= i \frac{\delta(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^\epsilon}{\delta \epsilon} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta \langle \bar{c}(x) c(y) \rangle \\ \frac{1}{\xi} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon - \frac{1}{2}} \partial_\mu \partial_\nu \langle \mathcal{A}_\mu(x) \mathcal{A}_\nu(y) \rangle &= i \Delta \langle \bar{c}(x) c(y) \rangle. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Portanto,

$$\frac{1}{\xi} \partial_\mu \langle \mathcal{A}_\mu(x) \mathcal{A}_\nu(y) \rangle = i \partial_\nu \langle \bar{c}(x) c(y) \rangle \quad \epsilon = \frac{1}{2}. \quad (3.143)$$

Agora para encontrar a simetria rígida do problema (BRST) associada à identidade anterior é suficiente trabalhar o funcional gerador associado a lagrangiana (*no-mixing*)

$$Z[\mathcal{J}, \bar{\xi}, \xi, J] = \int D\mathcal{A} D\bar{c} Dc \exp[i \int d^4x \mathcal{L} - \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}_\mu + \bar{\zeta} c + \bar{c} \zeta + J\phi],$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \mathcal{A}_\mu \left[(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right) \right] \mathcal{A}_\nu + \frac{\mathcal{A}_\mu \left[\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right)^{2\epsilon} \partial_\mu \partial_\nu \right] \mathcal{A}_\nu}{2\xi} - i \bar{c}(x) \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right) \Delta c(x) + \\ & + \frac{1}{2} \phi \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \phi. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Então, fazendo as seguintes transformações nos campos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu &\rightarrow \mathcal{A}_\mu + \delta \mathcal{A}_\mu \\ c &\rightarrow c + \delta c \\ \bar{c} &\rightarrow \bar{c} + \delta \bar{c} \\ \phi &\rightarrow \phi \end{aligned} \quad (3.145)$$

onde as variações são dadas por

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_\mu &= i \lambda \partial_\mu c(x) \\ \delta c &= 0 \\ \delta \bar{c} &= -\frac{1}{\xi} \lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\mu \\ \delta \phi &= 0 \end{aligned} \quad (3.146)$$

e λ é um parâmetro de natureza anticomutante independente do espaço-tempo.

Sendo assim, temos que a lagrangiana inicial se transforma da seguinte forma perante a transformação proposta,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\mathcal{A}_\mu \left[\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] \delta\mathcal{A}_\nu}{\xi} - \delta\bar{c}(x) \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \Delta c(x) \\ &= \frac{i}{\xi} \partial_\mu \left[\lambda \mathcal{A}_\mu \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \Delta c(x) \right]\end{aligned}\quad (3.147)$$

Portanto, a invariância é confirmada, pois temos um termo de derivada total que não contribui para a ação.

Por fim, impondo a simetria no funcional gerador Z encontramos

$$\int DAD\bar{c}Dci\lambda \int d^4x \left[-i\mathcal{J}_\mu \partial_\mu c - \frac{1}{\xi} \partial_\mu \mathcal{A}_\mu \zeta \right] \exp[iS_{eff}] = 0. \quad (3.148)$$

De outra maneira a equação funcional advinda da simetria BRST é dada por

$$\left[\frac{1}{\xi} \partial_\mu \mathcal{A}_\mu \zeta + i\mathcal{J}_\mu \partial_\mu c \right] Z = 0. \quad (3.149)$$

Aplicando $\frac{\delta^2}{\delta J_\nu \zeta}$ na equação anterior e tomando no final as fontes iguais a zero

$$\frac{1}{\xi} \partial_\mu \langle \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \rangle = i \partial_\nu \langle \bar{c} c \rangle. \quad (3.150)$$

O interessante de se observar é que as identidades advindas da simetria BRST no calibre *no-mixing* se mantém na forma de QED₄. Como vemos a relação anterior relaciona o setor longitudinal do propagador do fóton com o propagador do fantasma, condizendo com o fato de apenas o setor transversal do propagador do fóton ser físico.

3.5 Representação de Integração Funcional e Médias no ensemble

Tendo em vista toda a discussão anterior, podemos dizer que a matriz densidade que descreve o ensemble gran-canônico da GSDKP₄ em equilíbrio termodinâmico em uma dinâmica covariante é escrita de maneira explícita definindo a entropia de Gibbs

$$S_{entropia} \doteq \langle -\ln[\hat{\rho}_{gs}(\beta)] \rangle \quad (3.151)$$

e formulando o problema a partir de um princípio de máxima entropia de tal forma que os vínculos sejam satisfeitos

$$\delta[\lambda \langle \hat{I} \rangle + \lambda_U \langle \hat{\mathbb{H}} \rangle + \lambda_N \langle \hat{N} \rangle + \lambda_Q \langle \hat{Q} \rangle - \langle \ln[\hat{\rho}_{gs}(\beta)] \rangle] = 0 \quad (3.152)$$

onde

$$\hat{\rho}_{gs}(\beta) = \exp[-\beta(\hat{\mathbb{H}} - \mu_e \hat{N} - \mu_g \hat{Q})]$$

$$\hat{\mathbb{H}} = \hat{H}_T + \hat{H}_g$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_T = \int d^3 \vec{x} \{ & \hat{\Pi}^\nu \hat{\Gamma}_\nu - \hat{\Phi}^0 \partial_i \hat{\Gamma}^i + \frac{\xi m_p^2}{2} \hat{\Phi}^0 \hat{\Phi}^0 + \hat{\Phi}_k [\partial^k \hat{\Gamma}_0 - \partial_l \hat{F}^{lk} + \frac{m_p^2}{2} \hat{\Phi}^k] + \frac{1}{4} \hat{F}^{kj} \hat{F}_{kj} + \frac{1}{2} (\hat{\Gamma}_j - \partial_j \hat{A}_0)^2 + \\ & + \frac{1}{2m_p^2} [\partial_j \partial^j \hat{A}^0 - \partial_j \hat{\Gamma}^j]^2 + \frac{1}{2\xi} [\hat{\Gamma}^0 \hat{\Gamma}^0 + \partial_i \hat{A}^i \partial_j \hat{A}^j] - \frac{1}{2\xi m_p^2} \partial_i \partial_j \hat{A}^j \partial^i \partial_k \hat{A}^k - \frac{i}{2} \hat{\psi} \beta^i (\overleftarrow{\partial}_i \hat{\psi}) + m \hat{\psi} \hat{\psi} - e \hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi} + \\ & + J_\mu \hat{A}^\mu + \hat{\eta} \hat{\psi} + \hat{\psi} \hat{\eta} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_g = \int d^3 \vec{x} \{ & \overleftarrow{D} \hat{\pi} - (\partial_k \partial^k \hat{c}) \hat{P} + \hat{\pi} \hat{D} + \hat{P} (-\partial_k \partial^k \hat{c}) + i (\overleftarrow{D} \hat{D} + \partial_k \hat{c} \partial^k \hat{c}) + \\ & - i m_p^2 \hat{P} \hat{P} + \frac{1}{2} m_p^2 \hat{p}^2 + \frac{1}{2m_p^2} \partial_k \hat{\phi} \partial^k \hat{\phi} - \frac{1}{2} \hat{\phi}^2 + \bar{\zeta} \hat{c} + \hat{c} \zeta + j \hat{\phi} \}. \end{aligned}$$

$$i \hat{Q} = \int d^3 \vec{x} \{ \hat{c} \hat{\pi} + \hat{\pi} \hat{c} + \hat{P} \hat{D} + \overleftarrow{D} \hat{P} \}$$

$$\hat{N} = \int d^3 \vec{x} \hat{\psi} \beta^0 \hat{\psi}.$$

(3.153)

A obtenção dos multiplicadores de lagrange seria dada comparando a equação obtida do processo de maximização com a equação termodinâmica que define o potencial grão-canônico Ω ,

$$\Omega = \langle U \rangle - T \langle S \rangle - \mu_e \langle N \rangle - \mu_g \langle Q \rangle. \quad (3.154)$$

As equações de movimento quânticas em equilíbrio termodinâmico da GSDKP no calibre non-mixing são dadas por

$$\begin{aligned} [\beta_\mu^E \overleftarrow{D}_\mu^{(e, \mu_e)} - m] \hat{\psi}^{gs} &= \eta \quad (\text{setor escalar}) \\ \hat{\psi}^{gs} [\overleftarrow{D}_\mu^{(-e, -\mu_e)} \beta_\mu^E + m] &= \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (3.155)$$

$$D_\mu^{(e, \mu_e)} = \partial_\mu - ie \hat{\mathcal{A}}_\mu^E - \mu_e \delta_{\mu 0}.$$

$$P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \hat{A}_\nu^{gs} = ie \hat{\psi}^{gs} \beta_\mu^E \hat{\psi}^{gs} + \mathcal{J}_\mu \quad (\text{setor vetorial}) \quad (3.156)$$

$$P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} = -(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1) [(\delta_{\mu\nu} \Delta + (1 - \frac{1}{\xi}) \partial_\mu \partial_\nu)].$$

$$i(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}) \Delta \hat{c}^s = \xi \quad \mu_g = 0$$

$$-i(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}) \Delta \bar{c}^s = \bar{\xi} \quad \mu_g = 0 \quad (\text{setor fantasma}) \quad (3.157)$$

$$(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}) \hat{\phi}^{gs}(\vec{x}, \tau) = j(\vec{x}, \tau).$$

O funcional gerador termodinâmico $Z[\mathcal{J}, \bar{\eta}, \eta, \bar{\xi}, \xi, J]$ é obtido como sendo solução das equações funcionais extraídas das equações quânticas em equilíbrio termodinâmico

$$\left[(\beta_\mu^E)_{ab} \overrightarrow{\partial}_\mu^{\mu_e} - m\delta_{ab} \right] \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \bar{\eta}_b} = ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 Z_{GF}}{\delta J_\mu \delta \bar{\eta}_b} + \eta Z_{GF} \quad (3.158)$$

$$\frac{\delta Z_{GF}}{\delta \eta_a} \left[(\beta_\mu^E)_{ab} \overleftarrow{\partial}_\mu^{-\mu_e} + m\delta_{ab} \right] = -ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 Z_{GF}}{\delta J_\mu \delta \eta_b} + Z_{GF} \bar{\eta} \quad (3.159)$$

$$P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \mathcal{J}_\nu} = ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \eta_a \delta \bar{\eta}_b} + \mathcal{J}_\mu Z_{GF} \quad (3.160)$$

$$i\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \Delta \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \bar{\zeta}} = \xi Z_{GF} \quad (3.161)$$

$$-i\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \Delta \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \zeta} = Z_{GF} \bar{\zeta} \quad (3.162)$$

$$\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \frac{\delta Z_{GF}}{\delta J} = J Z_{GF}. \quad (3.163)$$

Neste caso

$$\begin{aligned} Z_{GF}[\mathcal{J}, \bar{\eta}, \eta, \bar{\xi}, \xi, J] &= \int D\mathcal{A} D\bar{\psi} D\psi D\bar{c} Dc D\phi \exp[-S_T^{eff}], \\ S_T^{eff} &= \int d^4x \left[\frac{1}{2} \mathcal{A}_\mu P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi)} \mathcal{A}_\nu - \bar{\psi} [\beta_\mu^E \overrightarrow{D}_\mu^{(e, \mu_e)} - m] \psi - i\bar{c} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \Delta c + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \phi \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \phi + \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}_\mu + \hat{\eta} \psi + \hat{\psi} \eta + \bar{\zeta} c + \bar{c} \zeta + J\phi \right]. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Derivando de maneira adequada com relação as fontes as equações (3.158 – 3.163) e tomando as fontes nulas, encontramos um sistema de equações diferenciais relacionando diversas médias térmicas:

$$\left[(\beta_\mu^E)_{ab} \overrightarrow{\partial}_\mu^{\mu_e} - m\delta_{ab} \right] \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \eta_c(\vec{y}, \tau_y) \delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} - ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 Z_{GF}}{\delta J_\mu(\vec{x}, \tau) \delta \eta_c(\vec{y}, \tau_y) \delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} = \delta_{ca} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) \quad (3.165)$$

$$\frac{\delta Z_{GF}}{\delta \bar{\eta}_c(\vec{y}, \tau_y) \delta \eta_a(\vec{x}, \tau_x)} \left[(\beta_\mu^E)_{ab} \overleftarrow{\partial}_\mu^{-\mu_e} + m\delta_{ab} \right] + ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 Z_{GF}}{\delta J_\mu \bar{\eta}_c(\vec{y}, \tau_y) \delta \eta_b(\vec{x}, \tau_x)} = \delta_{ca} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) \quad (3.166)$$

$$P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \mathcal{J}_\sigma(\vec{y}, \tau_y) \delta \mathcal{J}_\nu(\vec{x}, \tau_x)} = ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \mathcal{J}_\sigma(\vec{y}, \tau_y) \delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x) \delta \eta_a(\vec{x}, \tau_x)} + \mathcal{J}_\mu \quad (3.167)$$

$$i\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \Delta \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \zeta(\vec{y}, \tau_y) \delta \bar{\zeta}(\vec{x}, \tau_x)} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) \quad (3.168)$$

$$-i\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \Delta \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \bar{\zeta}(\vec{y}, \tau_y) \delta \zeta(\vec{x}, \tau_x)} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) \quad (3.169)$$

$$(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}) \frac{\delta Z_{GF}}{\delta J(\vec{y}, \tau_y) \delta J(\vec{x}, \tau_x)} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y). \quad (3.170)$$

Observa-se que algumas destas médias térmicas

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \eta_c(\vec{y}, \tau_y) \delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} &= \left\langle T[\widehat{\psi}_c(\vec{y}, \tau_y) \widehat{\psi}_b(\vec{x}, \tau_x)] \right\rangle \\ \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \mathcal{J}_\sigma(\vec{y}, \tau_y) \delta \mathcal{J}_\nu(\vec{x}, \tau_x)} &= \left\langle T[\widehat{\mathcal{A}}_\sigma(\vec{y}, \tau_y) \widehat{\mathcal{A}}_\nu(\vec{x}, \tau_x)] \right\rangle \\ \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \zeta(\vec{y}, \tau_y) \delta \bar{\zeta}(\vec{x}, \tau_x)} &= \left\langle T[\widehat{c}(\vec{y}, \tau_y) \widehat{c}(\vec{x}, \tau_x)] \right\rangle \\ \frac{\delta Z_{GF}}{\delta J(\vec{y}, \tau_y) \delta J(\vec{x}, \tau_x)} &= \left\langle T[\widehat{\phi}(\vec{y}, \tau_y) \widehat{\phi}(\vec{x}, \tau_x)] \right\rangle \end{aligned} \quad (3.171)$$

denominadas propagadores térmicos. Assim sendo, primeiramente estudaremos o seguinte propagador

$$\left\langle T[\widehat{\psi}_c(\vec{y}, \tau_y) \widehat{\psi}_b(\vec{x}, \tau_x)] \right\rangle = \frac{Tr[\widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{\psi}_c(\vec{y}, \tau_y) \widehat{\psi}_b(\vec{x}, \tau_x)]}{Tr[\widehat{\rho}_g(\beta)]}. \quad (3.172)$$

Para calcular o traço anterior escolhemos a seguinte base

$$\begin{aligned} |E, \vec{P}, N, Q\rangle &= |\Omega\rangle \\ \widehat{\mathbb{H}} |\Omega\rangle &= E |\Omega\rangle \\ \widehat{P}_i |\Omega\rangle &= P_i |\Omega\rangle \\ \widehat{N} |\Omega\rangle &= N |\Omega\rangle \\ \widehat{Q} |\Omega\rangle &= Q |\Omega\rangle \end{aligned} \quad (3.173)$$

$$\begin{aligned} Tr[\widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{\psi}_c(\vec{y}, \tau_y) \widehat{\psi}_b(\vec{x}, \tau_x)] &= \int d\Omega \langle \Omega | \exp[-\beta(\widehat{\mathbb{H}} - \mu_e \widehat{N} - \mu_g \widehat{Q})] \widehat{\psi}_c(\vec{y}, \tau_y) \widehat{\psi}_b(\vec{x}, \tau_x) | \Omega \rangle = \\ &= \int d\Omega \exp[-\beta(E - \mu_e N - \mu_g Q)] \langle \Omega | \widehat{\rho}_g^{-1}(\tau_y) \widehat{\psi}_c(\vec{y}, 0) \widehat{\rho}_g(\tau_y) \int d\Omega' |\Omega'\rangle \langle \Omega' | \widehat{\rho}_g^{-1}(\tau_x) \widehat{\psi}_b(\vec{x}, 0) \widehat{\rho}_g(\tau_x) | \Omega \rangle \\ &= \int d\Omega d\Omega' \exp[-\beta(E - \mu_e N - \mu_g Q)] \times \exp\{-(\tau_x - \tau_y)[E - E' - \mu_e(N - N') - \mu_g(Q - Q')]\} \\ &= \int d\Omega d\Omega' \exp[-\beta(E - \mu_e N - \mu_g Q)] \langle \Omega | \widehat{\psi}_c(\vec{y}, 0) | \Omega' \rangle \langle \Omega' | \widehat{\psi}_b(\vec{x}, 0) | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (3.174)$$

e lembrando-se que \widehat{P} é o gerador das translações espaciais obtemos

$$\begin{aligned}
Tr[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\psi}_c(\vec{y}, \tau_y)\hat{\psi}_b(\vec{x}, \tau_x)] &= \int d\Omega d\Omega' \exp[-\beta(E - \mu_e N - \mu_g Q)] \\
&\exp\{-(\tau_x - \tau_y)[E - E' - \mu_e(N - N') - \mu_g(Q - Q')]\} \times \\
&\times \langle \Omega | \exp[-i\vec{y}\cdot\hat{\vec{P}}]\hat{\psi}_c(\vec{0}, 0) \exp[-i\vec{y}\cdot\hat{\vec{P}}] | \Omega' \rangle \langle \Omega' | \exp[-i\vec{x}\cdot\hat{\vec{P}}]\hat{\psi}_b(\vec{0}, 0) \exp[i\vec{x}\cdot\hat{\vec{P}}] | \Omega \rangle
\end{aligned} \tag{3.175}$$

$$\begin{aligned}
Tr[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\psi}_c(\vec{y}, \tau_y)\hat{\psi}_b(\vec{x}, \tau_x)] &= \int d\Omega d\Omega' \exp[-\beta(E - \mu_e N - \mu_g Q)] \\
&\exp\{-(\tau_x - \tau_y)[E - E' - \mu_e(N - N') - \mu_g(Q - Q')]\} \times \\
&\times \exp[i(\vec{x} - \vec{y})\cdot\hat{\vec{P}}] \langle \Omega | \hat{\psi}_c(\vec{0}, 0) | \Omega' \rangle \langle \Omega' | \hat{\psi}_b(\vec{0}, 0) | \Omega \rangle .
\end{aligned} \tag{3.176}$$

Logo,

$$\left\langle T[\hat{\psi}_c(\vec{y}, \tau_y)\hat{\psi}_b(\vec{x}, \tau_x)] \right\rangle \doteq S_{cb}(\vec{x} - \vec{y}; \tau_x - \tau_y).$$

Portanto, estendendo a análise anterior para os outros propagadores térmicos definimos de maneira geral as seguintes quantidades

$$\begin{aligned}
\left\langle T[\hat{\psi}_c(\vec{y}, \tau_y)\hat{\psi}_b(\vec{x}, \tau_x)] \right\rangle &\doteq S_{cb}(\vec{x} - \vec{y}; \tau_x - \tau_y) \\
\left\langle T[\hat{\mathcal{A}}_\sigma(\vec{y}, \tau_y)\hat{\mathcal{A}}_\nu(\vec{x}, \tau_x)] \right\rangle &\doteq D_{\sigma\nu}(\vec{x} - \vec{y}; \tau_x - \tau_y) \\
\left\langle T[\hat{c}(\vec{y}, \tau_y)\hat{c}(\vec{x}, \tau_x)] \right\rangle &\doteq G(\vec{x} - \vec{y}; \tau_x - \tau_y) \\
\left\langle T[\hat{\phi}(\vec{y}, \tau_y)\hat{\phi}(\vec{x}, \tau_x)] \right\rangle &\doteq F(\vec{x} - \vec{y}; \tau_x - \tau_y)
\end{aligned} \tag{3.177}$$

onde devido as propriedades de ordenamento

$$\begin{aligned}
\left\langle T[\hat{\psi}_b(\vec{x}, \tau_x)\hat{\psi}_c(\vec{y}, \tau_y)] \right\rangle &= S_{bc}(\vec{y} - \vec{x}; \tau_y - \tau_x) \\
\left\langle T[\hat{\mathcal{A}}_\nu(\vec{x}, \tau_x)\hat{\mathcal{A}}_\sigma(\vec{y}, \tau_y)] \right\rangle &= \mathcal{D}_{\nu\sigma}(\vec{y} - \vec{x}; \tau_y - \tau_x) \\
\left\langle T[\hat{c}(\vec{x}, \tau_x)\hat{c}(\vec{y}, \tau_y)] \right\rangle &= -G(\vec{y} - \vec{x}; \tau_y - \tau_x) \\
\left\langle T[\hat{\phi}(\vec{x}, \tau_x)\hat{\phi}(\vec{y}, \tau_y)] \right\rangle &= F(\vec{y} - \vec{x}; \tau_y - \tau_x).
\end{aligned} \tag{3.178}$$

Agora segue-se a demonstração da periodicidade das médias térmicas. Essa propriedade das funções de Green serem periódicas ou anti-periódicas serão úteis na extensão do intervalo $(0, \beta)$ para toda reta real, definindo as distribuições chamadas pentes de Dirac e sendo possível escrever as funções de Green no espaço de Fourier em termos das frequências de Matsubara bosônica ou fermiônica. Primeiramente,

$$\left\langle \hat{\psi}_b(\vec{x}, \tau) \right\rangle = \frac{Tr[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\psi}_b(\vec{x}, \tau)]}{Tr[\hat{\rho}_g(\beta)]} = \frac{Tr[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\rho}_g^{-1}(\beta)\hat{\psi}_b(\vec{x}, \tau)\hat{\rho}_g(\beta)]}{Tr[\hat{\rho}_g(\beta)]} = \frac{Tr[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\psi}_b(\vec{x}, \tau + \beta)]}{Tr[\hat{\rho}_g(\beta)]} = \left\langle \hat{\psi}_b(\vec{x}, \tau + \beta) \right\rangle \tag{3.179}$$

$$S_{cb}(\vec{x} - \vec{y}; \tau) = \frac{\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\psi}_c(\vec{y},0)\hat{\psi}_b(\vec{x},\tau)]}{\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)]}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\psi}_c(\vec{y},0)\hat{\psi}_b(\vec{x},\tau)] &= \text{Tr}[\hat{\psi}_b(\vec{x},\tau)\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\psi}_c(\vec{y},0)] = \text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\rho}_g^{-1}(\beta)\hat{\psi}_b(\vec{x},0)\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\psi}_c(\vec{y},\tau)] = \\ &= \text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\psi}_b(\vec{x},\beta)\hat{\psi}_c(\vec{y},\tau)] \end{aligned}$$

$$S_{cb}(\vec{x} - \vec{y}; \tau) = S_{cb}(\vec{x} - \vec{y}; \tau - \beta).$$

(3.180)

De maneira análoga,

$$\langle \hat{\mathcal{A}}_\nu(\vec{x}, \tau) \rangle = \langle \hat{\mathcal{A}}_\nu(\vec{x}, \tau - \beta) \rangle; \quad D_{\sigma\nu}(\vec{x} - \vec{y}; \tau) = D_{\sigma\nu}(\vec{x} - \vec{y}; \tau - \beta)$$

(3.181)

$$\langle \hat{\phi}(\vec{x}, \tau) \rangle = \langle \hat{\phi}(\vec{x}, \tau - \beta) \rangle; \quad F(\vec{x} - \vec{y}; \tau) = F(\vec{x} - \vec{y}; \tau - \beta).$$

Portanto, para os campos $\psi, \bar{\psi}, \mathcal{A}, \phi$ temos periodicidade. Por outro lado, faremos a mesma análise para os campos fantasma c, \bar{c}

$$\langle \hat{c}(\vec{x}, \tau) \rangle = \frac{\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{c}(\vec{x},\tau)]}{\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)]} = \frac{\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\rho}_g^{-1}(\beta)\hat{c}(\vec{x},\tau)\hat{\rho}_g(\beta)]}{\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)]} = \frac{\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{c}^g(\vec{x},\tau+\beta)]}{\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)]} = \exp[-\beta\mu_g] \langle \hat{c}(\vec{x}, \tau + \beta) \rangle, \quad (3.182)$$

$$G(\vec{x} - \vec{y}; \tau) = \frac{\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{c}(\vec{y},0)\hat{c}(\vec{x},\tau)]}{\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)]},$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{c}(\vec{y},0)\hat{c}(\vec{x},\tau)] &= \text{Tr}[\hat{c}(\vec{x},\tau)\hat{\rho}_g(\beta)\hat{c}(\vec{y},0)\hat{\rho}_g^{-1}(\beta)\hat{\rho}_g(\beta)] = \text{Tr}[\hat{c}(\vec{x},\tau)\hat{c}^g(\vec{y},-\beta)\hat{\rho}_g(\beta)] = \\ &= -\exp[\beta\mu_g]\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{c}^g(\vec{y},-\beta)\hat{c}(\vec{x},\tau)], \end{aligned}$$

$$G(\vec{x} - \vec{y}; \tau) = -\exp[\beta\mu_g]G(\vec{x} - \vec{y}; \tau + \beta),$$

(3.183)

$$G(\vec{y} - \vec{x}; -\tau) = \frac{\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{c}(\vec{x},-\tau)\hat{c}(\vec{y},0)]}{\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)]},$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{c}(\vec{x},-\tau)\hat{c}(\vec{y},0)] &= \text{Tr}[\hat{c}(\vec{x},-\tau)\hat{\rho}_g(\beta)\hat{\rho}_g^{-1}(\beta)\hat{c}(\vec{y},0)\hat{\rho}_g(\beta)] = \text{Tr}[\hat{c}(\vec{x},-\tau)\hat{\rho}_g(\beta)\hat{c}^g(\vec{y},\beta)] = \\ &= -\exp[-\beta\mu_g]\text{Tr}[\hat{\rho}_g(\beta)\hat{c}(\vec{x},-\tau)\hat{c}^g(\vec{y},\beta)], \end{aligned}$$

$$G(\vec{y} - \vec{x}; -\tau) = -\exp[-\beta\mu_g]G(\vec{y} - \vec{x}; \beta + \tau).$$

(3.184)

Como sabemos das equações (3.168 – 3.169)

$$i(1 + \frac{\Delta}{m_p^2})\Delta G(\vec{x} - \vec{y}; \tau_x - \tau_y) = \delta(\vec{x} - \vec{y})\delta(\tau_x - \tau_y),$$

$$i(1 + \frac{\Delta}{m_p^2})\Delta G(\vec{y} - \vec{x}; \tau_y - \tau_x) = \delta(\vec{x} - \vec{y})\delta(\tau_x - \tau_y), \quad (3.185)$$

$$G(\vec{x} - \vec{y}; \tau_x - \tau_y) = G(\vec{y} - \vec{x}; \tau_y - \tau_x).$$

Portanto,

$$G(\vec{x} - \vec{y}; \tau + \beta) = \exp[2\beta\mu_g]G(\vec{x} - \vec{y}; \tau + \beta) \quad (3.186)$$

onde percebemos que o potencial químico fantasma deve satisfazer a seguinte equação

$$\mu_g = \frac{in\pi}{\beta} \quad (3.187)$$

$$\langle \hat{c}(\vec{x}, \tau) \rangle = \exp[-in\pi] \langle \hat{c}(\vec{x}, \tau + \beta) \rangle$$

$$\langle \widehat{\bar{c}}(\vec{x}, \tau) \rangle = \exp[in\pi] \langle \widehat{\bar{c}}(\vec{x}, \tau + \beta) \rangle$$

$$n = 0, 2, 4, 6, \dots \text{ (periódico)}$$

$$n = 1, 3, 5, \dots \text{ (anti - periódico)}.$$

3.6 As equações de Schwinger-Dyson-Fradkin

Neste momento estamos aptos a calcular as equações de SDF em equilíbrio termodinâmico. De maneira semelhante ao caso quântico elas são geradas pelas seguintes equações abaixo

$$\left[(\beta_\mu^E)_{ab} \partial_\mu^{\mu_e} - m\delta_{ab} \right] \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} = ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 Z_{GF}}{\delta J_\mu(\vec{x}, \tau_x) \delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} + \eta_a(\vec{x}, \tau_x) Z_{GF} \quad (3.189)$$

$$P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \mathcal{J}_\nu(\vec{x}, \tau_x)} = ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 Z_{GF}}{\delta \eta_a(\vec{x}, \tau_x) \delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} + \mathcal{J}_\mu(\vec{x}, \tau_x) Z_{GF}.$$

Definindo o gerador das médias térmicas conexas W

$$Z_{GF} \doteq \exp W, \quad (3.190)$$

$$\left[(\beta_\mu^E)_{ab} \partial_\mu^{\mu_e} - m\delta_{ab} \right] \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} = ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu(\vec{x}, \tau_x) \delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} + ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta W}{\delta J_\mu(\vec{x}, \tau_x)} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} + \eta_a(\vec{x}, \tau_x)$$

$$P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \frac{\delta W}{\delta \mathcal{J}_\nu(\vec{x}, \tau_x)} = ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_a(\vec{x}, \tau_x) \delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} + ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} \frac{\delta W}{\delta \eta_a(\vec{x}, \tau_x)} + \mathcal{J}_\mu(\vec{x}, \tau_x). \quad (3.191)$$

Sendo assim, derivando funcionalmente de maneira conveniente as equações anteriores e tomando as fontes nulas

$$\left[(\beta_\mu^E)_{ab} D_\mu^{\mu_e, e} - m\delta_{ab} \right] \frac{\delta W}{\delta \eta_s(\vec{y}, \tau_y) \delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} = ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu(\vec{x}, \tau_x) \delta \eta_s(\vec{y}, \tau_y) \delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} + \delta_{as} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) \quad (3.192)$$

$$P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi)} \frac{\delta W}{\delta \mathcal{J}_\theta(\vec{y}, \tau_y) \delta \mathcal{J}_\nu(\vec{x}, \tau_x)} = ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta W}{\delta \mathcal{J}_\theta(\vec{y}, \tau_y) \delta \eta_a(\vec{x}, \tau_x) \delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} + \delta_{\mu\theta} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y),$$

onde podemos definir algumas quantidades

$$\frac{\delta W}{\delta \eta_s(\vec{y}, \tau_y) \delta \bar{\eta}_b(\vec{x}, \tau_x)} \doteq \mathcal{S}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y), \quad (3.193)$$

$$\frac{\delta W}{\delta \mathcal{J}_\theta(\vec{y}, \tau_y) \delta \mathcal{J}_\nu(\vec{x}, \tau_x)} \doteq \mathcal{D}_{\theta\nu}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y).$$

Agora definimos o operador de auto-energia Σ e tensor de polarização Π por meio das seguintes relações implícitas

$$ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta \mathcal{S}_{bs}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y)}{\delta \mathcal{J}_\mu(\vec{x}, \tau_x)} = - \int d^4z \Sigma_{ar}(\vec{x}, \vec{z}; \tau_x, \tau_z) \mathcal{S}_{rs}(\vec{z}, \vec{y}; \tau_z, \tau_y) \quad (3.194)$$

$$ie(\beta_\mu^E)_{ab} \frac{\delta \mathcal{S}_{ba}(\vec{x}, \vec{x}; \tau_x, \tau_x)}{\delta \mathcal{J}_\theta(\vec{y}, \tau_y)} = - \int d^4z \Pi_{\mu\sigma}(\vec{x}, \vec{z}; \tau_x, \tau_z) \mathcal{D}_{\sigma\theta}(\vec{z}, \vec{y}; \tau_z, \tau_y).$$

Neste caso as equações (3.192) são escritas da seguinte forma

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y) = P_{\mu\sigma}^{(m_p^2, \xi)} \delta_{\sigma\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) + \Pi_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y), \quad (3.195)$$

$$\mathcal{S}_{ab}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y) = [(\beta_\mu^E)_{ac} D_\mu^{\mu_e, e} - m \delta_{ac}] \delta_{ab} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) + \Sigma_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y).$$

Por outro lado observe que

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y)}{\delta J_\mu(\vec{z}, \tau_z)} = \int d^4w \frac{\delta \langle \mathcal{A}_\nu(\vec{w}, \tau_w) \rangle}{\delta J_\mu(\vec{z}, \tau_z)} \frac{\delta \mathcal{S}_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y)}{\delta \langle \mathcal{A}_\nu(\vec{w}, \tau_w) \rangle} = \int d^4w \frac{\delta \langle \mathcal{A}_\nu(\vec{w}, \tau_w) \rangle}{\delta J_\mu(\vec{z}, \tau_z)} \frac{\delta \{ \mathcal{S}_{ab}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y) \}^{-1}}{\delta \langle \mathcal{A}_\nu(\vec{w}, \tau_w) \rangle} = \quad (3.196)$$

$$= - \int d^4w \mathcal{D}_{\mu\nu}(\vec{w}, \vec{z}; \tau_w, \tau_z) \int d^4u d^4v \mathcal{S}_{ac}(\vec{x}, \vec{u}; \tau_x, \tau_u) \frac{\delta \mathcal{S}_{cd}^{-1}(\vec{u}, \vec{v}; \tau_u, \tau_v)}{\delta \langle \mathcal{A}_\nu(\vec{w}, \tau_w) \rangle} \mathcal{S}_{db}(\vec{v}, \vec{y}; \tau_v, \tau_y)$$

onde definimos a função de vértice completa

$$ie \Gamma_{cd\nu}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}; \tau_u, \tau_v, \tau_w) = \frac{\delta \mathcal{S}_{cd}^{-1}(\vec{u}, \vec{v}; \tau_u, \tau_v)}{\delta \langle \mathcal{A}_\nu(\vec{w}, \tau_w) \rangle}. \quad (3.197)$$

A equação anterior pode ser escrita com a ajuda da equação completa do setor escalar

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{ab}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y)}{\delta \langle \mathcal{A}_\nu(\vec{w}, \tau_w) \rangle} = -ie(\beta_\mu^E)_{ab} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\vec{z} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) \delta(\tau_z - \tau_y) + \frac{\delta \Sigma_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y)}{\delta \langle \mathcal{A}_\nu(\vec{w}, \tau_w) \rangle}. \quad (3.198)$$

Por fim utilizando as equações (3.196) e (3.197) em (3.194) identificamos

$$\Sigma_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y) = e^2 (\beta_\mu^E)_{ac} \int d^4u d^4v \mathcal{D}_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{u}; \tau_x, \tau_u) \mathcal{S}_{cd}(\vec{x}, \vec{v}; \tau_x, \tau_v) \Gamma_{db\nu}(\vec{v}, \vec{y}, \vec{u}; \tau_v, \tau_y, \tau_u),$$

$$\Pi_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y) = e^2 (\beta_\mu^E)_{ab} \int d^4u d^4v \mathcal{S}_{bc}(\vec{x}, \vec{u}; \tau_x, \tau_u) \Gamma_{cd\nu}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{y}; \tau_u, \tau_v, \tau_y) \mathcal{S}_{da}(\vec{v}, \vec{x}; \tau_v, \tau_x). \quad (3.199)$$

Apesar de estar implícito na análise das equações completas em equilíbrio termodinâmico deveríamos ter definido o gerador das funções de Green irreduzíveis definido por uma transformada de Legendre,

$$\Gamma \doteq W - \int d^4x [\langle \bar{\psi} \rangle \eta + \bar{\eta} \langle \psi \rangle + \langle \mathcal{A}_\mu \rangle \mathcal{J}_\mu + \bar{\zeta} \langle c \rangle + \langle \bar{c} \rangle \zeta + J \langle \phi \rangle]. \quad (3.200)$$

3.7 As Identidades de Takahashi-Fradkin

Iniciamos o capítulo relembrando o funcional gerador termodinâmico

$$Z_{GF}[\mathcal{J}, \bar{\eta}, \eta, \bar{\xi}, \xi, J] = \int D\mathcal{A}D\bar{\psi}D\psi D\bar{c}DcD\phi \exp[-S_T^{eff}]$$

$$S_T^{eff} = \int d^4x \left[\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2} \partial_\mu \mathcal{F}_{\mu\lambda} \partial_\theta \mathcal{F}_{\theta\lambda} - \bar{\psi} [\beta_\mu^E \vec{D}_\mu^{(e,\mu_e)} - m] \psi + \frac{\mathcal{A}_\mu \left[(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}) \partial_\mu \partial_\nu \right] \mathcal{A}_\nu}{2\xi} + \right. \\ \left. - i\bar{c} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \Delta c + \frac{1}{2} \phi \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \phi + \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\zeta} c + \bar{c} \zeta + J \phi \right]. \quad (3.201)$$

Como sabemos no processo de quantização e construção do formalismo de campos em equilíbrio termodinâmico perdemos a simetria de gauge. Neste caso para que a teoria de campos em equilíbrio termodinâmico continue sendo uma teoria de gauge impomos esta simetria em (3.201).

A simetria de gauge é dada pelas seguintes transformações

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu(\vec{x}, \tau) &\longrightarrow \mathcal{A}_\mu(\vec{x}, \tau) + \partial_\mu \alpha(\vec{x}, \tau) \\ \psi(\vec{x}, \tau) &\longrightarrow \exp[-ie\alpha(\vec{x}, \tau)] \psi(\vec{x}, \tau) \\ \bar{\psi}(\vec{x}, \tau) &\longrightarrow \bar{\psi}(\vec{x}, \tau) \exp[ie\alpha(\vec{x}, \tau)] \end{aligned} \quad (3.202)$$

Portanto, impomos que o funcional gerador (3.201) seja invariante pelas transformações (3.202) para que tenhamos uma teoria de gauge

$$\left. \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.203)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \alpha} &= \int D\mathcal{A}D\bar{\psi}D\psi D\bar{c}DcD\phi \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{\xi} \mathcal{A}_\mu \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right) \partial_\mu \partial_\nu \frac{\delta \mathcal{A}_\nu}{\delta \alpha} + \mathcal{J}_\mu \frac{\delta \mathcal{A}_\mu}{\delta \alpha} + \bar{\eta} \frac{\delta \psi}{\delta \alpha} + \frac{\delta \bar{\psi}}{\delta \alpha} \eta \right] \right\} \exp[-S_T^{eff}], \\ \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right) \Delta \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J_\nu} + \partial_\mu \mathcal{J}_\mu + ie \left[\bar{\eta}_a \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_a} - \eta_a \frac{\delta}{\delta \eta_a} \right] Z_{GF} &= 0. \end{aligned} \quad (3.204)$$

Em termos das médias térmicas conexas $Z_{GF} = \exp[W]$ escrevemos a equação anterior da seguinte forma

$$\partial_\mu \mathcal{J}_\mu(\vec{x}, \tau_x) = -\frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right) \Delta \partial_\mu \langle \mathcal{A}_\mu(\vec{x}, \tau_x) \rangle - ie \left[\bar{\eta}(\vec{x}, \tau_x) \langle \psi(\vec{x}, \tau_x) \rangle - \langle \bar{\psi}(\vec{x}, \tau_x) \rangle \eta(\vec{x}, \tau_x) \right]. \quad (3.205)$$

Dessa equação funcional decorre todas as identidades de Takahashi-Fradkin. A fim de encontrarmos uma das identidades, derivaremos funcionalmente à equação (3.205) com relação a $\langle \mathcal{A}_\nu(\vec{y}, \tau_y) \rangle$ e, posteriormente tomar as fontes nulas

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{J}_\mu(\vec{x}, \tau_x)}{\delta \langle \mathcal{A}_\nu(\vec{y}, \tau_y) \rangle} = -\frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right) \Delta \partial_\mu \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) \quad (3.206)$$

onde observando que

$$\frac{\delta \mathcal{J}_\mu(\vec{x}, \tau_x)}{\delta \langle \mathcal{A}_\nu(\vec{y}, \tau_y) \rangle} = \left(\frac{\delta \langle \mathcal{A}_\nu(\vec{y}, \tau_y) \rangle}{\delta \mathcal{J}_\mu(\vec{x}, \tau_x)} \right)^{-1} = \mathcal{D}^{-1}(\vec{x} - \vec{y}; \tau_x - \tau_y) \quad (3.207)$$

concluimos,

$$\partial_\mu \mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1}(\vec{x} - \vec{y}; \tau_x - \tau_y) = -\frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \Delta \partial_\mu \delta_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y). \quad (3.208)$$

Utilizando a primeira equação de (3.195) na equação (3.208) somos conduzidos ao seguinte resultado

$$\partial_\mu \Pi_{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}; \tau_x, \tau_y) = 0. \quad (3.209)$$

3.8 As Identidades de Ward-Fradkin

Para encontrarmos a identidade de Ward primeiramente escreveremos a equação (3.205) em termos das funções de Green irredutíveis

$$\Gamma = W - \int d^4x [\langle \bar{\psi} \rangle \eta + \bar{\eta} \langle \psi \rangle + \langle \mathcal{A}_\mu \rangle \mathcal{J}_\mu + \bar{\zeta} \langle c \rangle + \langle \bar{c} \rangle \zeta + J \langle \phi \rangle], \quad (3.210)$$

$$\partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\langle \mathcal{A}_\mu(\vec{x}, \tau_x) \rangle} = \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \Delta \partial_\mu \langle \mathcal{A}_\mu(\vec{x}, \tau_x) \rangle + ie \left[\frac{\delta \Gamma}{\langle \psi(\vec{x}, \tau_x) \rangle} \langle \psi(\vec{x}, \tau_x) \rangle - \langle \bar{\psi}(\vec{x}, \tau_x) \rangle \frac{\delta \Gamma}{\langle \bar{\psi}(\vec{x}, \tau_x) \rangle} \right]. \quad (3.211)$$

Derivando funcionalmente a expressão anterior com respeito a $\langle \bar{\psi}_a(\vec{y}, \tau_y) \rangle$ e $\langle \psi_b(\vec{z}, \tau_z) \rangle$ e tomando as fontes nulas ao final encontramos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\delta^3 \Gamma}{\langle \bar{\psi}_a(\vec{y}, \tau_y) \rangle \langle \psi_b(\vec{z}, \tau_z) \rangle \langle \mathcal{A}_\mu(\vec{x}, \tau_x) \rangle} &= ie \left[\frac{\delta^2 \Gamma}{\langle \bar{\psi}_a(\vec{y}, \tau_y) \rangle \langle \psi_b(\vec{z}, \tau_z) \rangle} \delta(\vec{x} - \vec{z}) \delta(\tau_x - \tau_z) + \right. \\ &\left. - \frac{\delta^2 \Gamma}{\langle \psi_b(\vec{z}, \tau_z) \rangle \langle \bar{\psi}_a(\vec{x}, \tau_x) \rangle} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) \right]. \end{aligned} \quad (3.212)$$

Pois bem, dos estudos anteriores é de nosso conhecimento que

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\langle \bar{\psi}_a(\vec{y}, \tau_y) \rangle \langle \psi_b(\vec{z}, \tau_z) \rangle} = \mathcal{S}_{ab}^{-1}(\vec{y} - \vec{z}; \tau_y - \tau_z), \quad (3.213)$$

$$\frac{\delta^3 \Gamma}{\langle \bar{\psi}_a(\vec{y}, \tau_y) \rangle \langle \psi_b(\vec{z}, \tau_z) \rangle \langle \mathcal{A}_\mu(\vec{x}, \tau_x) \rangle} = \frac{\delta \mathcal{S}_{ab}^{-1}(\vec{y}, \vec{z}; \tau_y \tau_z)}{\langle \mathcal{A}_\mu(\vec{x}, \tau_x) \rangle} = ie \Gamma_\mu(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}; \tau_x, \tau_y \tau_z). \quad (3.214)$$

Logo

$$\partial_\mu \Gamma_\mu(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}; \tau_x, \tau_y \tau_z) = \mathcal{S}_{ab}^{-1}(\vec{y} - \vec{x}; \tau_y - \tau_x) \delta(\vec{x} - \vec{z}) \delta(\tau_x - \tau_z) - \mathcal{S}_{ab}^{-1}(\vec{x} - \vec{z}; \tau_x - \tau_z) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(\tau_x - \tau_y). \quad (3.215)$$

A identidade anterior, conhecida como identidade de Ward, poderia ser obtida utilizando a simetria BRST onde as transformações infinitesimais nos campos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\mu &\rightarrow \mathcal{A}_\mu + \delta\mathcal{A}_\mu \\
\psi &\rightarrow \psi + \delta\psi \\
\bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} + \delta\bar{\psi} \\
c &\rightarrow c + \delta c \\
\bar{c} &\rightarrow \bar{c} + \delta\bar{c} \\
\phi &\rightarrow \phi,
\end{aligned} \tag{3.216}$$

seriam dadas por

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A}_\mu &= \lambda\partial_\mu c \\
\delta\psi &= ie\lambda c\psi \\
\delta\bar{\psi} &= -ie\lambda c\bar{\psi} \\
\delta c &= 0 \\
\delta\bar{c} &= -\frac{1}{\xi}\lambda\partial_\mu\mathcal{A}_\mu \\
\delta\phi &= 0.
\end{aligned} \tag{3.217}$$

Neste caso impondo a simetria BRST na função de partição (3.201)

$$\begin{aligned}
\delta_{BRST}Z_{GF} &= - \int D\mathcal{A}D\bar{\psi}D\psi D\bar{c}DcD\phi\delta_{BRST}S_T^{eff} \exp[-S_T^{eff}] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.218}$$

observando que a medida de integração é invariante (Jacobiano é igual a identidade). Logo

$$\begin{aligned}
\delta_{BRST}S_T^{eff} &= \int d^4x[\mathcal{J}_\mu\delta\mathcal{A}_\mu + \bar{\eta}\delta\psi + \delta\bar{\psi}\eta + \bar{\zeta}\delta c + \delta\bar{c}\zeta + J\delta\phi] \\
&= \lambda \int d^4x[\mathcal{J}_\mu\partial_\mu c + ie\bar{\eta}\psi c - ie\bar{\psi}\eta c - \frac{1}{\xi}\partial_\mu\mathcal{A}_\mu\zeta].
\end{aligned} \tag{3.219}$$

Portanto, escrevendo em termos da função de partição geradora das funções de Green conexas W e, posteriormente, em termos da função geradora das funções de Green irreduzíveis Γ , somos conduzidos a equação funcional

$$\int d^4x\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\mathcal{A}\rangle_\mu}\partial_\mu\langle c\rangle - ie\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\psi\rangle}\langle\psi\rangle\langle c\rangle - ie\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\bar{\psi}\rangle}\langle\bar{\psi}\rangle\langle c\rangle - \frac{1}{\xi}\partial_\mu\langle\mathcal{A}\rangle_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\bar{c}\rangle}\right] = 0. \tag{3.220}$$

Agora aplicando a derivada funcional

$$\frac{\delta^3}{\delta \langle \bar{\psi}(\vec{s}, \tau_s) \rangle \delta \langle \psi(\vec{y}, \tau_y) \rangle \delta \langle c(\vec{z}, \tau_z) \rangle} \quad (3.221)$$

na equação anterior somos conduzidos a equação (3.212) a menos de termos de superfície.

Como podemos observar todas as identidades do capítulo 3, identidades de WT, podem ser estendidas para o caso de uma dinâmica em equilíbrio termodinâmico, identidades de Ward-Takahashi-Fradkin (WTF). O setor fantasma, apesar de não ser necessário no estudo em $T=0$ pois o determinante que o define pode desaparecer na normalização, desempenha um papel importante ao construir o ensemble gran-canônico em uma dinâmica explicitamente covariante devido à carga fantasma conservada.

4 Conclusões e perspectivas futuras

A dinâmica quântica covariante envolvendo a interação entre campos escalares (mésons) e campos vetoriais (fótons generalizados) foi estudada sistematicamente no contexto da GSDKP₄ juntamente com seu equilíbrio termodinâmico. No primeiro setor construímos o funcional gerador e no segundo setor obtivemos a função de partição com suas respectivas consequências.

Primeiramente, ao construir a teoria quântica, na linguagem de integração funcional ou integrais de caminho, foi necessária uma análise de vínculos seguindo a metodologia de Dirac e o procedimento de Fadeev-Senjanovic para encontrarmos a amplitude de transição no calibre da radiação generalizado (Coulomb)

$$Z = N \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det[(1 + \frac{\vec{\nabla}^2}{m_p^2})\vec{\nabla}^2] \delta((1 + \frac{\square}{m_p^2})(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})) \times \\ \times \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi}(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(1 + \frac{\square}{m_p^2})F^{\mu\nu} \}].$$

A conexão entre a escolha do calibre da radiação e sua correspondente escolha covariante, no presente caso *no-mixing*, foi obtida utilizando o método de Faddeev-Popov-DeWitte em que vimos o surgimento de estruturas pseudo-diferenciais,

$$(1 + \frac{\square}{m_p^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Acreditamos que para melhor compreensão entre a conexão entre uma dinâmica quântica descrita pelos graus de liberdades físicos no calibre da radiação e sua correspondente dinâmica covariante (Lorenz, *no-mixing*, Lorenz Generalizado) deveríamos incluir os fantasmas e a simetria BRST estudando a teoria em um contexto geral no formalismo de Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BFV) [84, 85, 86]

$$Z = N \int D\Phi^k D\Gamma_k D\Pi^l DA_l (D\bar{\psi} D\psi D\bar{p} Dp) (D\lambda D\bar{b}) (D\bar{c} Dc D\bar{P} DP) \exp[i \int d^4x \{ \Pi^k(\partial_0 A_k) + \Phi^l(\partial_0 \Gamma_l) + \\ + (\partial_0 \bar{\psi})p + \bar{p}(\partial_0 \psi) + (\partial_0 \lambda)b + (\partial_0 c)\bar{P} + P(\partial_0 \bar{c}) - \mathcal{H}_c \} + i \int dy_0 \{ \Psi, Q_{BRST} \}].$$

No formalismo de BFV o método de Faddeev-Popov-DeWitte é elucidado e questões sobre atingibilidade dos calibres são discutidas de maneira clara.

Dando continuidade ao estudo de GSDKP₄ com o funcional gerador Z covariante em mãos no calibre *no-mixing*

$$Z = \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi}(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(1 + \frac{\square}{m^2})F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu (1 + \frac{\square}{m^2}) \partial_\nu A^\nu + J_\mu A^\mu \}],$$

obtivemos as equações completas de Schwinger-Dyson para o propagador do campo vetorial, propagador do campo escalar e vértice onde foi possível observar a mesma estrutura fenomenológica entre GSDKP₄ \longleftrightarrow GQED₄. Em particular, o campo de DKP é frequentemente utilizado para descrever em física nuclear mésons, onde é possível dizer que temos uma estrutura algébrica mesônica, enquanto o campo fermiônico obedece a álgebra de Clifford

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \text{ (álgebra de Clifford, bilinear),}$$

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu \text{ (álgebra de DKP, trilinear).}$$

Também, advindo do funcional gerador covariante encontramos as identidades de Ward-Takahashi (WT), as quais mantinham a simetria de calibre U(1) em nível quântico. Pois bem, existe um método que mantém a simetria de calibre explicitamente em todas as etapas de cálculo, conhecido como O Método do Campo de Fundo [87, 88]. A idéia básica do método é escrever o campo de calibre na ação efetiva como sendo B+A onde B é o campo de fundo com simetria de calibre e A é a variável de integração na integral funcional

$$Z = N \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \exp[i \int d^4x \{ \bar{\psi}(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)\psi + \\ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(1 + \frac{\square}{m_p^2})F^{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu A^\mu(1 + \frac{\square}{m_p^2})\partial_\nu A^\nu}{2\xi} \}] \\ F_{\mu\nu} \doteq \partial_\mu(A_\nu + B_\nu) - \partial_\nu(A_\mu + B_\mu).$$

A técnica foi iniciada por DeWitt cujo objetivo era construir um teoria quântica da gravitação manifestamente covariante. Seria interessante expandir nosso conhecimento ao implementar essa abordagem do campo de fundo em nossos estudos sobre dinâmica covariante e simetria de calibre. Seria também interessante, como perspectiva futura, introduzir no estudo de GSDKP₄ as transformações de Landau, Khalatnikov e Fradkin [89] pois elas permitiriam analisar o comportamento dos propagadores em diversas escolhas de calibre e justificariam o uso do calibre de Feynman ($\xi = 1$) no propagador do fóton generalizado.

Por fim, como exemplo instrutivo em lidar com os fantasmas, poderíamos explorar o calibre que t'Hooft e Veltman utilizaram, atingível pelas transformações de Bell-Treiman, em Podolsky, em que teríamos uma interação fictícia entre os fantasmas e o campo de calibre [90]

$$\Omega(A) = (1 + \frac{\square}{m_p^2})^{\frac{1}{2}}(\partial_\mu A^\mu + gA_\mu A^\mu),$$

não podendo esconder os fantasmas na constante de normalização. Fenomenologicamente a escolha de calibre de t'Hooft-Veltman tem como implicação vértices escalar-escalar-fóton, fantasmas-fantasma-fóton, interação tripla e quártica de fótons em termos do parâmetro fictício g . Usualmente chama-se QED₄ no calibre de t'Hooft-Veltman de pré QCD₄ devido à similaridade fenomenológica dos vértices fóton→gluon, porém, como é observado no Apêndice (5.8), a simetria BRST garante que a física não dependa do parâmetro fictício g .

Seguindo a análise das correções radiativas, vimos a importância da simetria de calibre, asseguradas pelas identidades de WT. Como observamos, em geral $\Pi_{\mu\nu}(p)$ possui a seguinte estrutura devido a covariância relativística e uma das identidades de Ward-Takahashi ($k^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$),

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = [-\eta_{\mu\nu}p^2 + p_\mu p_\nu]\Pi(p).$$

Também percebemos a conexão entre as divergências no ultravioleta e a álgebra de DKP no método de regularização dimensional onde a simetria de calibre é manifesta. A álgebra de DKP tem como implicação que a primeira correção radiativa do vértice e a amplitude de 4 linhas externas fotônicas não possuam divergência no ultravioleta, assegurando duas das identidades de WT,

$$\frac{1}{e}\Gamma_\mu(p, p; k = 0) = \frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p^\mu} \iff (\eta^{\alpha\nu}\eta^{\lambda\theta} + \eta^{\nu\theta}\eta^{\alpha\lambda} + \eta^{\theta\alpha}\eta^{\lambda\nu})\beta^\sigma\{\beta_\alpha\beta_\nu - \eta_{\alpha\nu}\}\beta^\mu\{\beta_\lambda\beta_\theta - \eta_{\lambda\theta}\}\beta_\sigma = 0 \\ p^\mu\Gamma_{\mu\nu\alpha\beta}(p, p', k, k') = 0 \iff tr\{\beta^\mu(\beta_\alpha\beta_\sigma - \eta_{\alpha\sigma})\beta^\nu(\beta_\gamma\beta_\delta - \eta_{\gamma\delta})\beta^\lambda(\beta_\pi\beta_\varpi - \eta_{\pi\varpi})\beta^\theta(\beta_\rho\beta_\tau - \eta_{\rho\tau})\} \times \\ \times (\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\gamma\delta}\eta^{\pi\varpi}\eta^{\rho\tau} + \dots perm) = 0.$$

Ao final do estudo das correções radiativas, utilizando o método de regularização dimensional, encontramos as seguintes divergências no ultravioleta (UV) e infravermelho (IV) associadas à auto-energia do méson

$$\Sigma(p) = \Sigma_{finito}(p) + \Sigma_{\infty}(p) \quad \xi = 1$$

$$\Sigma_{\infty}(p) = \Sigma_2^{IV}(p)\hat{p} + [\Sigma_1^{UV}(p) + \Sigma_1^{IV}(p)],$$

o tensor de polarização do fóton

$$\Pi(p) = \Pi_{\infty}^{UV}(p) + \Pi_{finito}(p)$$

e o vértice

$$\Lambda^{\mu}(p', p) = \Lambda_{finito}^{\mu}(p', p) + \Lambda_{\infty}^{\mu}(p', p)$$

$$\Lambda_{\infty}^{\mu}(p', p) = \Lambda^{IV\mu}_{\infty}(p', p).$$

Uma análise importante sobre as divergências seria explorar a possibilidade de cancelar as divergências no infravermelho com a escolha do calibre de Fried-Yennie $\xi = 3$ em GSDKP₄ [91].

Tendo em vista as divergências no (UV) e (IV), o programa de renormalização multiplicativo na camada de massa é estudado onde os contra-termos δC_i são obtidos

$$\delta C_3 = -\Pi(p)|_{p^2=0}$$

$$\delta C_0 = \delta C_2 \text{ (Ward-Takahashi)}$$

$$-\delta C_0 = \Sigma_2 + \frac{p_{\mu}}{4} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial p_{\mu}} + \frac{tr[\beta_{\mu} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial p_{\mu}}]}{8} \quad (\hat{p} \longrightarrow m_f I)$$

$$5m\delta C_1 = tr[\Sigma_1] \quad (\hat{p} \longrightarrow m_f I).$$

Nesse ponto da análise existe uma outra maneira de encontrar os contra-termos δC_0 e δC_1 ,

$$tr[\beta_{\mu} \frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial p_{\mu}}] = tr[\beta^{\mu} \beta_{\mu}] = 8 \rightarrow \beta_{\nu} [\beta_{\mu} \frac{\partial \Gamma(p)}{\partial p_{\mu}}] \beta^{\nu} = \beta_{\nu} \beta_{\mu} \beta^{\mu} \beta^{\nu} = 4I, \quad \text{quando } \hat{p} \rightarrow m_f.$$

Uma abordagem importante ao utilizar técnicas não perturbativas seria estudar as representações espectrais de Källén-Lehmann para os propagadores na descrição de Heisenberg extraíndo o conceito de renormalização da carga elétrica e da massa [92].

Um estudo fenomenológico das correções radiativas juntamente com os contra-termos foi necessário devido a uma divergência na massa de Podolsky m_p

$$\Sigma(p) = \Sigma_3(p^2)\hat{p}^2 + \Sigma_2(p^2)\hat{p} + \Sigma_1(p^2)$$

$$\Sigma_1(p^2) = -\frac{8e^2 m_p^2}{3m(4\pi)^2} (1 - \beta^{\mu} \beta_{\mu}) \frac{1}{\epsilon} + \dots$$

Por fim, do contra-termo associado a polarização δC_3 obtivemos de maneira fenomenológica o correr da constante de acoplamento (carga elétrica), concordando com o resultado obtido em GSQED₄.

O próximo passo associado ao programa de renormalização seria estudar as equações do grupo de renormalização e o comportamento assintótico das funções de Green, conhecidas como equações Callan-Symanzik [93].

Também poderíamos continuar o programa de estudo sistemático da eletrodinâmica GSQED₄, encontrando as amplitudes de transição e as respectivas secções de choque (espalhamento Möller, Bhabha, Compton) juntamente com as correções radiativas no formalismo de redução da matriz S de Lehmann, Symanzik and Zimmermann (LSZ) [94], tendo em vista toda estrutura de Green montada ao longo do trabalho. Nesse ponto um caminho alternativo pode ser traçado utilizando a Teoria de Perturbação Causal em GSDKP₄ para estudar os processos no espalhamento, como vemos nos trabalhos em SQED₄ e GQED₄ [95, 96].

Agora ao construir a função de partição da GSDKP₄ dividimos o trabalho em dois setores. Primeiramente, construímos a função de partição associada a escalares interagindo com campos externos (o setor escalar com campos externos)

$$Z_1[J, \bar{\eta}, \eta] = \int D\bar{\psi} D\psi \exp[-S_1 + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]$$

$$S_1 = - \int d^4x \bar{\psi}(\vec{x}, \tau) [\beta_\mu^E \vec{D}_\mu^{(e, \mu_e)} - m] \psi(\vec{x}, \tau)$$

e, posteriormente, como as correntes geram campos externos (o setor vetorial com fontes)

$$Z_2[\mathcal{J}] = \int D\mathcal{A} \exp[-S_2 + \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}_\mu]$$

$$S_2 = \int d^4x \{ \frac{1}{2} \mathcal{A}_\mu P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)} \mathcal{A}_\nu - ie \mathcal{A}_\mu \bar{\psi} \beta_\mu^E \psi \}.$$

Com a função de partição desses setores já poderíamos obter resultados físicos interessantes.

Como vimos ao estudar as equações do setor vetorial covariantes, utilizamos o método do campo auxiliar de Nakanishi juntamente com o princípio de ação quântica de Schwinger

$$\hat{\mathcal{L}}_N = \frac{1}{4} \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p} \partial_\mu \hat{\mathcal{F}}_{\mu\lambda} \partial_\theta \hat{\mathcal{F}}_{\theta\lambda} + \frac{1}{2} \{ \hat{B}, G[\hat{A}] \} + \frac{\xi}{2} \hat{B}^2 - ie \hat{\mathcal{A}}_\mu^E \hat{\psi}^s \beta_\mu^E \hat{\psi}^s - \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}_\mu^E$$

$$\hat{S} = \int_\beta d^4x \hat{\mathcal{L}}_N, \quad \delta \hat{S} = \hat{0}.$$

O fato de existir uma simetria residual no formalismo covariante conhecida como simetria BRST nos levou a incluir os fantasmas via multiplicador de Lagrange no calibre *no-mixing*

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_N + \hat{\lambda} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta \hat{\alpha},$$

construir a função de partição do setor fantasma

$$Z_3[\bar{\zeta}, \zeta, J] = \int D\bar{c}DcD\phi \exp[-S_3 + \bar{c}\zeta + \zeta c + J\phi]$$

$$S_3 = \int d^4x \left\{ i\bar{c} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \Delta c - \frac{1}{2} \phi \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \phi \right\}$$

e estudar a conexão entre a simetria BRST e a escolha de calibre *no-mixing*. Vimos também como complemento no Apêndice (5.9) que a função de partição não depende das escolhas de calibre covariantes (Lorenz, *no-mixing*, Lorenz generalizado) condizendo com o trabalho de Tuytin. A simetria por trás da física não depender dessas escolhas de calibre covariantes é a simetria BRST.

Por fim com os estudos do setor escalar, vetorial e fantasma foi possível unificar a matriz densidade que descreve o ensemble gran-canônico da GSDKP₄ em equilíbrio termodinâmico e obter a função de partição de maneira explícita

$$Z_{GF}[\mathcal{J}, \bar{\eta}, \eta, \bar{\xi}, \xi, J] = \int D\mathcal{A}D\bar{\psi}D\psi D\bar{c}DcD\phi \exp[-S_T^{eff}],$$

$$S_T^{eff} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \mathcal{A}_\mu P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi)} \mathcal{A}_\nu - \bar{\psi} [\beta_\mu^E \vec{D}_\mu^{(\epsilon, \mu_e)} - m] \psi - i\bar{c} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \Delta c + \frac{1}{2} \phi \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \phi + \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}_\mu + \bar{\eta} \hat{\psi} + \hat{\bar{\psi}} \eta + \bar{\zeta} c + \zeta c + J\phi \right].$$

Com a função de partição covariante Z_{GF} obtemos as equações de Schwinger-Dyson-Fradkin (SDF) e as identidades de Ward-Takahashi-Fradkin (WTF) em equilíbrio termodinâmico.

A maioria das observações feitas anteriormente para o estudo da GSDKP₄ podem ser estendidas no contexto de temperatura finita; Podemos estudar as correções radiativas, o programa de renormalização, as equações do grupo de renormalização, o formalismo de BFV, o método do campo de fundo. Outro ponto importante que poderíamos explorar em GSDKP₄ no euclidiano é a teoria de perturbação modificada de Fradkin [97] para se obter informações não perturbativas associadas aos propagadores que descrevem a matéria. Agora, como sabemos, a quantização do campo de Podolsky livre em equilíbrio termodinâmico nos levou a demonstrar que um gás de fótons de Podolsky se comporta como sendo composto por 2 gases sem interação entre si: um gás de Maxwell e outro gás de Proca com massa m_p ambos livres em que a lei de Stefan-Boltzmann sofre correções devido ao parâmetro de massa de Podolsky. Dando continuidade, poderíamos explorar a física de plasmas e estudar a blindagem de Debye em Podolsky onde a interação intermediada pelo campo de calibre passa a ser de curto alcance e o campo de calibre acaba adquirindo uma massa de Debye [98].

Finalizaremos a tese com uma breve discussão física sobre em que circunstâncias observaríamos a teoria de Podolsky e questões em aberto. Como sabemos QED₄ é uma das teorias físicas mais precisas existentes, logo uma correção da mesma seria bem "pequena" e nos dias atuais essas correções estariam escondida na incerteza experimental de qualquer fenômeno eletromagnético. Calculando à razão giromagnética com a teoria de Podolsky (GQED₄) ou mais ainda estudando o espalhamento elétron-pósitron, perceberíamos uma cota inferior ao parâmetro de massa de Podolsky m_p e o aparecimento de um comprimento fundamental da ordem de 10^{-17} metros, ou seja, esse comprimento de Podolsky estaria associado ao tamanho do elétron [16, 22]. Sendo assim, é válido pensar que os graus de liberdade massivos da teoria de Podolsky só se libertariam a altas energias. Outro aspecto interessante seria o fato da teoria de Podolsky quebrar a simetria dual, aquela que levou Dirac a conceber os monopólos magnéticos, neste caso temos uma riqueza fenomenológica ao analisar fenômenos físicos no setor magnético. Seguindo o vize de matéria condensada e as idéias de Higgs [99], poderíamos

nos perguntar sobre a existência de um mecanismo de quebra de simetria dual e geração de massa, tendo em vista os graus de liberdade massivos em Podolsky. O fato de existir fenômenos na natureza onde há o aparecimento de um comprimento fundamental como na blindagem de Debye nos daria esperança em explicar fenomenologicamente o aparecimento do parâmetro de Podolsky. Observando que a dinâmica não afeta a massa de Podolsky, poderíamos nos perguntar se existiria uma dinâmica e conseqüentemente uma dependência do parâmetro m_p na escala energia. Agora voltando ao contexto da tese, GSDKP₄, descrevemos a interação eletromagnética entre mésons e fótons generalizados. Implementando a interação forte e observando o raio do méson, da ordem de $0,6 \times 10^{-13}$ metros, concluiríamos que os mésons existiriam nos núcleos dos átomos, manteriam os prótons e neutrons ligados a la Yukawa e trocariam fótons generalizados, sempre com os graus de liberdades massivos de Podolsky escondidos na incerteza experimental. Como vimos, para liberar os graus de liberdade massivos de Podolsky deveríamos estudar a teoria a altas energias. Neste caso, uma teoria de Yang-Mills-Utiyama, em que os quarks que compõem os mésons trocariam não apenas gluons mas fótons generalizados. Sendo assim, uma teoria de Podolsky em cromodinâmica quântica poderia apresentar efeitos interessantes, tendo em vista a quebra de simetria dual presente e os monopólos magnéticos de t'Hooft-Polyakov [100]. Questões Cosmológicas associada a dependência de m_p perante referenciais acelerados e a definição de um tempo de meia vida para um fóton generalizado seriam, acreditamos, de grande interesse [14, 101].

5 Apêndices

5.1 Quantização de sistemas com vínculos e formalismos covariantes.

O objetivo deste apêndice é estudar a dinâmica de sistemas com vínculos e o problema de quantização. Sendo assim, faremos uma breve introdução histórica.

Como sabemos o estudo sobre a quantização de uma dinâmica clássica é atribuído a Dirac [102] pois ele observou que uma dinâmica clássica descrita no espaço de fase pelas observáveis e o parêntese de Poisson estaria associada a uma dinâmica quântica descrita no espaço de Hilbert pelos operadores e o comutador\anti-comutador via princípio da correspondência,

$$\{, \}_P \rightarrow -i[,]_{\pm}. \quad (5.1)$$

Posteriormente, a existência de vínculos na dinâmica hamiltoniana levou Dirac a estender sua análise mecânica do espaço de fase, definindo o parentese de Dirac e sua classificação de vínculos (primeira classe\segunda classe), podendo sempre fazer a conexão com a dinâmica quântica pelo princípio da correspondência [103],

$$\{, \}_D \rightarrow -i[,]_{\pm}. \quad (5.2)$$

Este é o primeiro olhar obtido ao estudar a conexão entre a dinâmica clássica e a dinâmica quântica.

O segundo olhar se inicia novamente com um estudo de Dirac [104] sobre a conexão entre uma dinâmica descrita no espaço de configuração e sua consequente dinâmica quântica. Nesse estudo vemos o surgimento de um objeto muito importante chamado amplitude de transição

$$Z = \int D\mu \exp[iS], \quad (5.3)$$

onde $D\mu$ é a medida de integração e S a ação.

Feynman utiliza a idéia de Dirac para formular sua maneira de descrever a mecânica quântica via integrais de trajetória. Porém, elegantemente Schwinger infere que devido ao fato das equações na descrição de Heisenberg preservarem sua forma clássica, deve existir um princípio de ação quântica [105, 106]. Portanto, a amplitude de transição ou funcional gerador é solução de uma equação funcional advinda de uma dinâmica com fontes

$$[\dot{q} - \{q, H_0 - qJ\}_D] \Big|_{\varphi = \frac{\delta}{i\delta J}} Z[J] = 0, \quad (5.4)$$

sendo H_0 a hamiltoniana inicial.

Dando continuidade, Faddeev explora propriedades da medida de integração $D\mu$ para se estudar conexões entre a dinâmica clássica\quântica de sistemas físicos com vínculos de primeira classe [107]. Posteriormente, Senjanovic estende as idéias de Faddeev [108] para vínculos de segunda classe. Por fim Fradkin, Vilkovisky e Batalin nos dão uma visão geral do problema tendo em vista formalismos covariantes e sua relação com a simetria BRST [109].

Para maiores detalhes sobre quantização de sistemas com vínculos ver [110, 111].

5.1.1 Dinâmica (clássica\quântica) de sistemas com vínculos

Um sistema dinâmico geral com vínculos é definido no espaço das variáveis canônicas q^i, p_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ pela forma da Hamiltoniana $H_0(q^i, p_i)$ juntamente com as equações de vínculos

$$T_\alpha(q^i, p_i) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (5.5)$$

Nesse caso, o problema da dinâmica clássica é encontrar um extremo da ação canônica na superfície de vínculos

$$\Omega = \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0)|_{T_\alpha} = 0 \quad (5.6)$$

$$\delta\Omega = 0.$$

Agora procuraremos por uma transformação nas variáveis canônicas que conectem pontos na superfície de vínculos

$$\begin{aligned} q^i &\rightarrow q^i + \delta^F q^i \\ p_i &\rightarrow p_i + \delta^F p_i \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$T_\alpha(q^i, p_i) \rightarrow T_\alpha(q^i + \delta^F q^i, p_i + \delta^F p_i) = 0,$$

sendo assim,

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial q^i} \delta^F q^i + \frac{\partial T_\alpha}{\partial p_i} \delta^F p_i = 0. \quad (5.8)$$

Como ingrediente a mais vamos supor que estas transformações na superfície de vínculos não modifiquem a dinâmica do problema

$$\delta^F \Omega = 0, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \delta^F \Omega &= \int dt (\delta^F p_i \dot{q}^i + p_i \delta^F \dot{q}^i - \delta^F H_0) \\ &= \int dt (\delta^F p_i \dot{q}^i - \dot{p}_i \delta^F q^i - \delta^F H_0), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \delta^F H_0 &= \delta^F p_i \dot{q}^i - \dot{p}_i \delta^F q^i \\ &= \delta^F p_i \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \frac{\partial H_0}{\partial q^i} \delta^F q^i. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Portanto, concluímos que o gerador destas transformações será dado por

$$\delta^F H_0 = \{H_0, T_\beta\}_P F^\beta \quad \delta^F p_i = \{p_i, T_\beta\}_P F^\beta \quad \delta^F q^i = \{q^i, T_\beta\}_P F^\beta. \quad (5.12)$$

Aplicando o resultado (5.12) na equação (5.8)

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial q^i} \delta^F q^i + \frac{\partial T_\alpha}{\partial p_i} \delta^F p_i = \{T_\alpha, T_\beta\}_P F^\beta = 0 \quad (5.13)$$

$$\{T_\alpha, T_\beta\}_P = U_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma.$$

Por outro lado, o fato dos vínculos não evoluírem no tempo, tem como implicação

$$\begin{aligned} \dot{T}_\alpha &= \{T_\alpha, H_0\}_P = 0 \\ \{H_0, T_\alpha\}_P &= V_\alpha^\beta T_\beta. \end{aligned} \quad (5.14)$$

A condição anterior denomina-se condição de consistência e nos diz que a estrutura de vínculos que definem a superfície (variedade) no espaço de fase permanece a mesma, ou seja, não evolui no tempo.

Essa classe especial de vínculos é conhecida como vínculos de primeira classe (degenerados) e podem ser definidos de maneira geral, da seguinte forma

$$\begin{aligned} \{T_\alpha, T_\beta\}_P &\doteq U_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma \\ \{H_0, T_\alpha\}_P &\doteq V_\alpha^\beta T_\beta. \end{aligned} \quad (5.15)$$

O problema de se encontrar um extremo da ação (5.6) pode ser reformulado, implementando os vínculos via multiplicadores de Lagrange

$$\mathcal{S}[q, p, \lambda] \doteq \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^\alpha T_\alpha). \quad (5.16)$$

Ao impormos que a ação anterior seja invariante pela transformação

$$\delta^F \mathcal{S} = 0, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \delta^F \mathcal{S} &= \int dt [\delta^F p_i \dot{q}^i + p_i \delta^F \dot{q}^i - \delta^F H_0 - \delta^F \lambda^\mu T_\mu - \lambda^\mu \delta^F T_\mu] \\ &= \int dt [(\delta^F p_i) \dot{q}^i + p_i (\delta^F \dot{q}^i) - \delta^F H_0 - (\delta^F \lambda^\mu) T_\mu - \lambda^\mu (\delta^F T_\mu)] \\ &= \int dt [-\dot{T}_\mu F^\mu - \{H_0, T_\mu\}_P F^\mu - (\delta^F \lambda^\mu) T_\mu - \lambda^\mu \{T_\mu, T_\nu\}_P F^\nu] \\ &= \int dt [T_\mu \dot{F}^\mu - V_\mu^\beta T_\beta F^\mu - (\delta^F \lambda^\mu) T_\mu - \lambda^\mu U_{\mu\nu}^\gamma T_\gamma F^\nu]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Logo,

$$(\delta^F \lambda^\mu) = \dot{F}^\mu - V_\nu^\mu F^\nu - \lambda^\alpha U_{\alpha\nu}^\mu F^\nu, \quad (5.19)$$

onde $F^\mu = F^\mu(q, p, \lambda; t)$.

Como vimos anteriormente, existe uma classe de escolhas que descrevem a mesma física (dinâmica). O gerador que conecta essas escolhas são os vínculos T_α . Para quebrar a simetria e descrever a física de maneira única, selecionamos um dos membros dessa classe, impondo condições adicionais tais que

$$\begin{aligned} \Theta^\nu(q^i, p_i) &= 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, m \\ \delta^F \Theta^\nu &= \{\Theta^\nu, T_\beta\}_P F^\beta \neq 0 \\ \det\{\Theta^\nu, T_\beta\}_P &\neq 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Desse modo, a dinâmica física é descrita pela seguinte ação

$$\mathcal{S}[q, p, \lambda] \doteq \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^\mu T_\mu - \pi_\mu \Theta^\mu), \quad (5.21)$$

onde π_μ são os multiplicadores de Lagrange adicionais e a dimensão do espaço físico é dada por $(2n - 2m)$. Podemos definir uma notação compacta

$$\Psi^\alpha = \begin{pmatrix} T^\mu \\ \Theta^\nu \end{pmatrix}, \quad \xi_\alpha = (\lambda^\mu \quad \pi_\nu), \quad \alpha = 1, 2, \dots, 2m. \quad (5.22)$$

$$\mathcal{S}[q, p, \xi] \doteq \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0 - \Psi^\alpha \xi_\alpha).$$

Conseqüentemente, as equações de movimento são dadas pelo princípio da mínima ação

$$\delta \mathcal{S} = \int dt (\dot{q}^i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q^i - \frac{\partial H_0}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^i} \xi_\alpha \delta q^i - \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial p_i} \xi_\alpha \delta p_i - \Psi^\alpha \delta \xi_\alpha), \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial p_i} \xi_\alpha, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_0}{\partial q^i} - \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^i} \xi_\alpha, \\ \Psi^\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Pois bem, devido à condição de estabilidade

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_\alpha &= \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial q^i} \left(\frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial p_i} \xi^\beta \right) + \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H_0}{\partial q^i} - \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial q^i} \xi^\beta \right) \\ &= \{\Psi_\alpha, H_0\}_P + \{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\}_P \xi^\beta, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\xi_\beta = \{\Psi^\alpha, H_0\}_P \{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\}_P^{-1}. \quad (5.25)$$

Observa-se que após selecionamos um dos membros da classe de escolhas, nossa coleção de vínculos passa a ser de segunda classe. Portanto, podemos definir o parentese de Dirac

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial p_i} \xi_\alpha = \{q^i, H_0\}_P + \{q^i, \Psi^\alpha\}_P \{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\}_P^{-1} \{\Psi_\beta, H_0\}_P \doteq \{q^i, H_0\}_D \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_0}{\partial q^i} - \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^i} \xi_\alpha \doteq \{p^i, H_0\}_D. \end{aligned} \quad (5.26)$$

De maneira geral

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \{q^i, H_0\}_D \quad \dot{p}_i = \{p^i, H_0\}_D, \\ \Psi^\alpha(q, p) &= 0, \\ \xi_\beta &= \{\Psi^\alpha, H_0\}_P \{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\}_P^{-1}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Por fim, é de nosso conhecimento que o espaço físico tem dimensão $(2n - 2m)$. Poderíamos nos perguntar se podemos encontrar $(2n - 2m)$ parâmetros $(q^*, p^*; * = 1, 2, \dots, n - m)$ que descrevam a superfície $\Psi^\alpha = 0$ e sejam ao mesmo tempo variáveis canônicas

$$\{q_i^*, q_j^*\}_P = 0 \quad \{p_i^*, p_j^*\}_P = 0 \quad \{q_i^*, p_j^*\}_P = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n - m. \quad (5.28)$$

Para deixar claro, analisaremos um caso abordado por Faddeev. Como sabemos

$$\begin{aligned} \{T_\mu, T_\nu\}_P &\approx 0 \\ \det\{\Theta^\alpha, T_\beta\}_P &\neq 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Suponhamos que

$$\{\Theta^\alpha, \Theta^\beta\}_P \approx 0 \quad (5.30)$$

onde podemos escolher variáveis canônicas P_α e Q_β no seguinte sentido

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \Theta^\alpha \\ \{P_\alpha, P_\beta\}_P &\approx 0 \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\}_P \approx 0 \quad \{Q_\alpha, P_\beta\}_P \approx \delta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Complementando com as variáveis canônicas físicas, temos uma transformação canônica $(q, p) \rightarrow (q^*, p^*; Q, P)$ na superfície física,

$$\{, \}_P_{q,p} \approx \{, \}_P_{q^*, p^*; Q, P}. \quad (5.32)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \det\{T_\beta, \Theta^\alpha\}_P &= \det\left\{\frac{\partial T_\beta}{\partial Q_\alpha}\right\} \neq 0 \Rightarrow T_\beta = T_\beta(Q_\alpha), \\ P_\alpha &= 0 \quad Q_\alpha = Q_\alpha(q^*, p^*). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Neste caso a dinâmica poderia ser formulada explicitamente

$$\begin{aligned} \delta \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0) \Big|_{T_\mu, \Theta^\mu = 0} &= \delta \int dt [p^* \dot{q}^* + P \dot{Q} - H(q^*, p^*; Q, P) + \\ &+ \frac{dG(q^*, p^*, Q, P; t)}{dt}] \approx \delta \int dt [p^* \dot{q}^* - H_{físico}(q^*, p^*)], \end{aligned} \quad (5.34)$$

no sentido das equações de movimento associadas às variáveis físicas serem dadas em termos das equações de Hamilton

$$\dot{q}^* = \frac{\partial H_{físico}(q^*, p^*)}{\partial p^*}, \quad \dot{p}^* = -\frac{\partial H_{físico}(q^*, p^*)}{\partial q^*}. \quad (5.35)$$

Observa-se que a equação (5.34) garante uma equivalência fraca entre as dinâmicas de um ponto de vista clássico. Como vemos, podemos separar de maneira canônica (fracamente) o setor físico (q^*, p^*) do não físico (Q, P) de tal forma a termos uma dinâmica de Hamilton. A afirmação anterior nos assegurará encontrar uma conexão da dinâmica clássica com a dinâmica quântica e estudar a equivalência entre as dinâmicas de um ponto de vista geral (clássico\quântico).

Para elucidar os fatos, a quantização canônica do setor físico é dada pelo princípio de Dirac da correspondência $\{, \} \rightarrow -i[,]$

$$i\frac{d\hat{q}^*}{dt} = [\hat{q}^*, \hat{H}_{fisico}], \quad i\frac{d\hat{p}^*}{dt} = [\hat{p}^*, \hat{H}_{fisico}], \quad (5.36)$$

onde temos a mesma forma das equações de movimento clássicas no espaço de fase e quânticas na descrição de Heisenberg. Tendo em vista o princípio da ação quântica de Schwinger $\varphi^* = (q^*, p^*)$ inseriremos as fontes \mathcal{J}

$$\begin{aligned} \delta \langle q^*, t' | q^*, t \rangle = \langle q^*, t' | \delta S^* | q^*, t \rangle = 0 &\Rightarrow \delta S^* Z^*[\mathcal{J}] = 0 \\ [\dot{\varphi}^* - \{\varphi^*, H_{fisico} - \varphi^* \mathcal{J}\}_P] Z^*[\mathcal{J}] = 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

e encontraremos como solução das equações de movimento quânticas o funcional gerador

$$\begin{aligned} Z^*[\mathcal{J}] &= \int Dq^* Dp^* \exp \left\{ i \int dt [p^* \dot{q}^* - H_{fisico}(q^*, p^*) - \varphi^* \mathcal{J}] \right\} \\ \int Dq^* &= \int \prod_{i,t} dq_i^*(t). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Por outro lado, poderíamos quantizar a teoria, utilizando o princípio da correspondência $\{, \}_D \rightarrow -i[,]$

$$\begin{aligned} i\frac{d\hat{q}}{dt} &= [\hat{q}, \hat{H}_0] \quad i\frac{d\hat{p}}{dt} = [\hat{p}, \hat{H}_0], \\ [\hat{\Psi}^a, \hat{H}_0] &= 0 \quad \langle \hat{\Psi}^a \rangle = 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Formulando as equações anteriores em termos do princípio da ação quântica de Schwinger $\varphi = (q, p)$, inserimos as fontes \mathcal{Y}

$$\begin{aligned} \delta \langle q', t' | q, t \rangle = \langle q', t' | \delta S | q, t \rangle = 0 &\Rightarrow \delta S Z[\mathcal{Y}] = 0 \\ \langle \hat{\Psi}^a \rangle = 0 &\Rightarrow \Psi^a Z[\mathcal{Y}] = 0 \\ [\dot{\varphi} - \{\varphi, H_0 - \varphi \mathcal{Y}\}_D] |_{\varphi = \frac{\delta}{i\delta \mathcal{Y}}} Z[\mathcal{Y}] &= 0 \\ \Psi^a |_{\varphi = \frac{\delta}{i\delta \mathcal{Y}}} Z[\mathcal{Y}]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Percebemos, então, que a equivalência entre as dinâmicas quânticas ($\varphi^* \Leftrightarrow \varphi$) será assegurada se e somente se

$$Z^* = Z. \quad (5.41)$$

A seguir, demonstraremos a afirmação anterior utilizando o método de Faddeev. De início, assumimos o *ansatz*

$$\begin{aligned} Z &= \int d\mu \exp[i\mathcal{S}] \\ d\mu &\doteq Dq Dp \det\{T, \Theta\}_P \Pi\delta(T) \Pi\delta(\Theta) \quad (\text{medida}) \\ \mathcal{S} &\doteq \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Fazendo a transformação canônica $(q, p) \rightarrow (q^*, p^*; Q, P)$ a medida de integração se transforma da seguinte forma

$$\begin{aligned} d\mu &= JDq^*Dp^*DQDP \det\left\{\frac{\partial T}{\partial Q}\right\} \Pi\delta(T)\Pi\delta(P) \\ &= Dq^*Dp^*DPDQ\Pi\delta(P)\Pi\delta(Q - Q(q^*, p^*)), \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde

$$\begin{aligned} J\Pi\delta(T)\Pi\delta(P) &= 1\Pi\delta(T)\Pi\delta(P), \\ \delta(T(Q)) &= \frac{\delta(Q - Q(q^*, p^*))}{\det\left\{\frac{\partial T}{\partial Q}\right\}}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Logo

$$\begin{aligned} Z &= \int Dq^*Dp^*DPDQ\Pi\delta(P)\Pi\delta(Q - Q(q^*, p^*)) \exp\left[i \int dt(p^*\dot{q}^* + P\dot{Q} - H(q^*, p^*; Q, P) + \frac{dG(q^*, p^*, Q, P; t)}{dt})\right] \\ &= \int Dq^*Dp^* \exp\left[i \int dt(p^*\dot{q}^* - H_{físico}(q^*, p^*))\right] = Z^*. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Z[\mathcal{Y}] &= \int DqDp \det\{T, \Theta\}_P \Pi\delta(T)\Pi\delta(\Theta) \exp\left[i \int dt(p_i\dot{q}^i - H_0 - \varphi\mathcal{Y})\right] \\ &= \int DqDp \det\{T, \Theta\}_P D\lambda D\pi \exp\left[i \int dt(p_i\dot{q}^i - H_0 - \lambda T - \pi\Theta - \varphi\mathcal{Y})\right] \end{aligned} \quad (5.46)$$

é solução da equação funcional (5.40).

É de se esperar que a dinâmica quântica não dependa da escolha de calibre. Essa afirmação é garantida, demonstrando que Z não depende da escolha de calibre $\Theta(q, p)$. Para demonstrar isso faremos uma transformação de calibre geral observando o conjunto de equações em (5.12)

$$\begin{aligned} q^i &\rightarrow q'^i = q^i + \delta^F q^i \\ p_i &\rightarrow p'_i = p_i + \delta^F p_i \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\delta^F p_i = \{p_i, T_\mu\}_P F^\mu \quad \delta^F q^i = \{q^i, T_\mu\}_P F^\mu.$$

Nesse caso $\Theta(q', p')$ fixa outro elemento da órbita (fibrado) associada a (q, p)

$$\begin{aligned} \Theta_\mu(q', p') &= \Theta'_\mu(q, p) = \Theta_\mu(q + \delta^F q, p + \delta^F p) \\ &= \Theta_\mu + \{\Theta_\mu, T_\nu\}_P F^\nu. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} T_\mu(q', p') &= T_\mu + \{T_\mu, T_\nu\}_P F^\nu \\ &= T_\mu + U_{\mu\nu}^\gamma F^\nu T_\gamma \\ &= (\delta_\mu^\gamma + U_{\mu\nu}^\gamma F^\nu) T_\gamma. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
\det\{\Theta(q', p'), T(q', p')\}_P &= \det\{\Theta', T_\mu + U_{\mu\nu}^\gamma F^\nu T_\gamma\}_P \\
&= \det[(\delta_\mu^\gamma + U_{\mu\nu}^\gamma F^\nu)\{\Theta', T_\gamma\}_P] \\
&= \det\{\Theta', T\}_P \det(I + UF).
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int Dq' Dp' &= \int JDqDp \\
J &= \Pi_t \det \begin{pmatrix} \frac{\partial q'}{\partial q} & \frac{\partial q'}{\partial p} \\ \frac{\partial p'}{\partial q} & \frac{\partial p'}{\partial p} \end{pmatrix} = \Pi_t \det \begin{pmatrix} I + \frac{\partial^2 T}{\partial q \partial p} F & \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial p} F \\ -\frac{\partial^2 T}{\partial q \partial q} F & I - \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial q} F \end{pmatrix} = \Pi_t \det(I + M) \\
M &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial p} \\ -\frac{\partial^2 T}{\partial q \partial q} & -\frac{\partial^2 T}{\partial p \partial q} \end{pmatrix} F.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\Pi_t \det(I + M) &= \Pi_t \exp\{\ln[\det(I + M)]\} \\
&= \exp\left\{\sum_t \ln[\det(I + M)]\right\} \\
&= tr \ln(I + M) \simeq tr M = 0 \Rightarrow J = 1.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Sendo assim, o conjunto de afirmações anteriores nos conduzem ao resultado

$$\begin{aligned}
Z_\Theta &= \int Dq' Dp' \det\{\Theta(q', p'), T(q', p')\}_P \Pi\delta(T(q', p')) \Pi\delta(\Theta(q', p')) \exp[i\mathcal{S}'] \\
&= \int JDqDp [\det\{\Theta', T\}_P \det(I + UF)] \left[\Pi \frac{\delta(T)}{\det(I + UF)} \right] \Pi\delta(\Theta') \exp[i\mathcal{S}] \\
&= \int DqDp \det\{\Theta', T\}_P \Pi\delta(T) \Pi\delta(\Theta') \exp\left[i \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0)\right] = Z_{\Theta'},
\end{aligned} \tag{5.53}$$

demonstrando a indepêndencia de calibre.

O método de Faddeev nos serve de guia de pensamento de como construir uma dinâmica quântica de sistemas com vínculos. A extensão da análise para sistemas de segunda classe foi obtida por Senjanovic. Como sabemos a dinâmica de um sistema clássico de segunda classe é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \{q, H_0\}_D \quad \dot{p} = \{p, H_0\}_D \\
\Psi_\alpha &= 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, 2m.
\end{aligned} \tag{5.54}$$

A formulação quântica é atribuída às equações de Schwinger

$$[\dot{q} - \{q, H_0 - \varphi\mathcal{Y}\}_D]_{\varphi=\frac{\delta}{i\delta\mathcal{Y}}} Z[\mathcal{Y}] = 0 \quad [\dot{p} - \{p, H_0 - \varphi\mathcal{Y}\}_D]_{\varphi=\frac{\delta}{i\delta\mathcal{Y}}} Z[\mathcal{Y}] = 0 \quad (5.55)$$

$$\Psi_\alpha|_{\varphi=\frac{\delta}{i\delta\mathcal{Y}}} Z[\mathcal{Y}].$$

Vamos afirmar que a solução dessas equações seja o *ansatz*

$$Z[\mathcal{Y}] = \int DqDp[\det\{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\}_P]^{\frac{1}{2}} \Pi\delta(\Psi) \exp[i \int dt(p_i \dot{q}^i - H_0 - \varphi\mathcal{Y})]. \quad (5.56)$$

Logo

$$Z = \int DqDp[\det\{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\}_P]^{\frac{1}{2}} \Pi\delta(\Psi) \exp[i \int dt(p_i \dot{q}^i - H_0)]. \quad (5.57)$$

Agora o parêntese de Poisson dos vínculos

$$\{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\}_P = Q_{\alpha\beta} \quad (5.58)$$

é uma matrix anti-simétrica. Neste caso, o conhecimento de álgebra linear nos leva a afirmar a existência de uma matriz V tal que

$$VQV^t = \tilde{Q}$$

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} & \epsilon \\ -\epsilon & \end{pmatrix}_{2m \times 2m} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot & & \\ 1 & \cdot & & \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

$$\det[VQV^t] = \det V \det Q \det V^t = (\det V)^2 \det Q = \det \tilde{Q} = 1 \Rightarrow \det V = \frac{1}{[\det\{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\}_P]^{\frac{1}{2}}}.$$

Desse modo,

$$\tilde{\Psi}_\alpha = V_{\alpha\beta} \Psi_\beta \Rightarrow \{\tilde{\Psi}_\alpha, \tilde{\Psi}_\beta\}_P = V_{\alpha\mu} Q_{\mu\nu} V_{\beta\nu} = \tilde{Q}_{\alpha\beta}. \quad (5.60)$$

Portanto, inspirando-se no método de Faddeev, podemos escolher variáveis canônicas no seguinte sentido

$$\{P_\alpha, P_\beta\}_P \approx 0 \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\}_P \approx 0 \quad \{Q_\alpha, P_\beta\}_P \approx \delta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, m$$

$$Q_\theta = \tilde{\Psi}_\theta \quad P_\theta = \tilde{\Psi}_{2m-\theta+1} \quad (5.61)$$

$$\{q_i^*, q_j^*\}_P = 0 \quad \{p_i^*, p_j^*\}_P = 0 \quad \{q_i^*, p_j^*\}_P = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n - m.$$

Nesse caso,

$$\begin{aligned}
Z &= \int DqDp[\det\{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\}_P]^{\frac{1}{2}}\Pi\delta(\Psi)\exp[i\mathcal{S}] \\
&= \int JDq^*Dp^*DQDP[\det\{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\}_P]^{\frac{1}{2}}\Pi\delta(V^{-1}\tilde{\Psi})\exp[i\mathcal{S}^*] \\
&= \int Dq^*Dp^*DQDP[\det\{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\}_P]^{\frac{1}{2}}\det V\Pi\delta(Q)\Pi\delta(P)\exp[i\mathcal{S}^*] \\
&= \int Dq^*Dp^*\exp[i\int dt(p^*\dot{q}^* - H_{fisisco}(q^*, p^*))] = Z^*.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Observa-se que com o resultado anterior recuperamos (5.42)

$$\begin{aligned}
\Psi &= \begin{pmatrix} T \\ \Theta \end{pmatrix} \\
\det\{\Psi, \Psi\}_P &= \det \begin{pmatrix} \{T, T\}_P & \{T, \Psi\}_P \\ \{\Theta, T\}_P & \{\Theta, \Theta\}_P \end{pmatrix} \approx \det \begin{pmatrix} 0 & \{T, \Psi\}_P \\ \{\Theta, T\}_P & \{\Theta, \Theta\}_P \end{pmatrix} = [\det\{T, \Psi\}]^2. \\
\Pi\delta(\Psi) &= \Pi\delta(T)\Pi\delta(\Theta)
\end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\int DqDp[\det\{\Psi, \Psi\}_P]^{\frac{1}{2}}\Pi\delta(\Psi)\exp[i\mathcal{S}] = \int DqDp\det\{T, \Theta\}_P\Pi\delta(T)\Pi\delta(\Theta)\exp[i\mathcal{S}].$$

Para finalizar e complementar o estudo vamos estender nossos resultados para um sistema geral que possua vínculos de primeira classe Ψ e de segunda classe Φ

$$\mathcal{S}[q, p, \zeta, \xi] = \int dt(p\dot{q} - H_0 - \zeta\Phi - \Psi\xi). \tag{5.64}$$

Conseqüentemente, temos as equações de movimento

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\zeta + \frac{\partial \Psi}{\partial p}\xi \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H_0}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial q}\zeta - \frac{\partial \Psi}{\partial q}\xi \\
\Phi, \Psi &= 0.
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Como os vínculos não devem evoluir no tempo (condição de estabilidade) vamos supor que estes possuam o seguinte comportamento

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\dot{p} \\
&= \{\Phi, H_0 + \zeta\Phi + \Psi\xi\}_P \\
&\approx \{\Psi, H_0 + \zeta\Phi\}_P,
\end{aligned} \tag{5.66}$$

$$\zeta_a \approx \{\Phi^b, H_0\}_P \{\Phi_b, \Phi_a\}_P^{-1}, \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \frac{\partial \Psi}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \Psi}{\partial p} \dot{p} \\ &= \{\Psi, H_0 + \zeta \Phi + \Psi \xi\}_P \\ &\approx \{\Psi, H_0 + \Psi \xi\}_P, \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\xi_\alpha \approx \{\Psi^\beta, H_0\}_P \{\Psi_\beta, \Psi_\alpha\}_P^{-1}. \quad (5.69)$$

Neste caso a dinâmica associada a equação (5.65) pode ser formulada fracamente em termos dos parênteses de Dirac

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[q, p, \chi] &= \int dt (p\dot{q} - H_0 - \chi \Upsilon) \\ \Upsilon &= \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} \quad \chi = (\zeta \quad \xi) \\ \dot{q} &\approx \{q, H_0\}_D \quad \dot{p} \approx \{p, H_0\}_D \\ \Upsilon &= 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Portanto, podemos formular a dinâmica quântica a la Schwinger

$$\begin{aligned} [\dot{q} - \{q, H_0 - \varphi \mathcal{Y}\}_D] \Big|_{\varphi = \frac{\delta}{i\delta \mathcal{Y}}} Z[\mathcal{Y}] &= 0, \quad [\dot{p} - \{p, H_0 - \varphi \mathcal{Y}\}_D] \Big|_{\varphi = \frac{\delta}{i\delta \mathcal{Y}}} Z[\mathcal{Y}] = 0, \\ \Upsilon \Big|_{\varphi = \frac{\delta}{i\delta \mathcal{Y}}} Z[\mathcal{Y}], \end{aligned} \quad (5.71)$$

onde a solução dessas equações é a seguinte

$$Z[\mathcal{Y}] = \int Dq Dp [\det\{\Upsilon, \Upsilon\}_P]^{1/2} \Pi \delta(\Upsilon) \exp[i \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0 - \varphi \mathcal{Y})]. \quad (5.72)$$

Agora

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} T \\ \Theta \end{pmatrix},$$

$$\det\{\Upsilon, \Upsilon\} = \det \begin{pmatrix} \{\Phi, \Phi\}_P & \{\Phi, T\}_P & \{\Phi, \Theta\}_P \\ \{T, \Phi\}_P & \{T, T\}_P & \{T, \Theta\}_P \\ \{\Theta, \Phi\}_P & \{\Theta, T\}_P & \{\Theta, \Theta\}_P \end{pmatrix} \approx \det \begin{pmatrix} \{\Phi, \Phi\}_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{T, \Theta\}_P \\ 0 & \{\Theta, T\}_P & \{\Theta, \Theta\}_P \end{pmatrix},$$

$$\det\{\Upsilon, \Upsilon\}_P = \det\{\Phi, \Phi\}_P [\det\{T, \Psi\}_P]^2,$$

$$\Pi\delta(\Psi) = \Pi\delta(\Phi)\Pi\delta(T)\Pi\delta(\Theta),$$

$$\int DqDp [\det\{\Psi, \Psi\}_P]^{\frac{1}{2}} \Pi\delta(\Psi) \exp[i\mathcal{S}] = \int DqDp [\det\{\Phi, \Phi\}_P]^{\frac{1}{2}} \det\{T, \Theta\} \Pi\delta(\Phi)\Pi\delta(T)\Pi\delta(\Theta) \exp[i\mathcal{S}]. \quad (5.73)$$

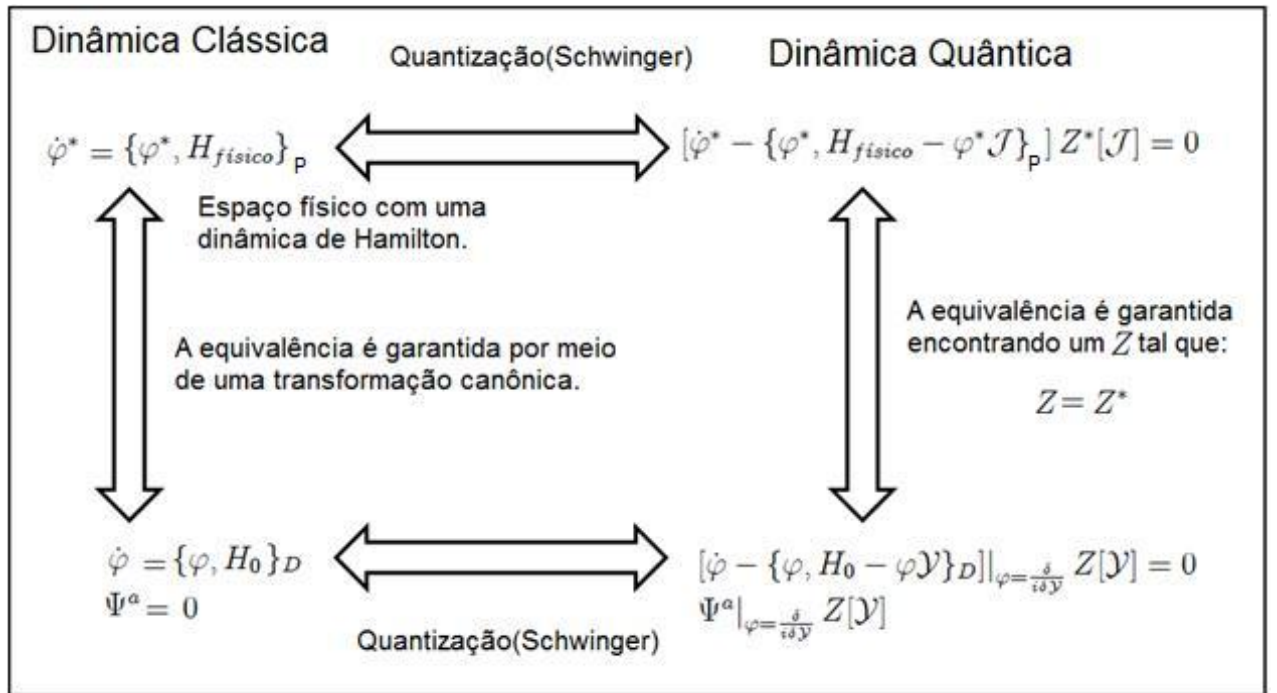
Sendo assim,

$$Z[\mathcal{Y}] = \int DqDp [\det\{\Phi, \Phi\}_P]^{\frac{1}{2}} \det\{T, \Theta\}_P \Pi\delta(\Phi)\Pi\delta(T)\Pi\delta(\Theta) \exp[i\mathcal{S}]. \quad (5.74)$$

A equação anterior só é verdadeira devido a seguinte propriedade advinda dos vínculos

$$\begin{aligned} \{\Phi, \Psi\xi\}_P &\approx 0, \\ \{\Psi, \zeta\Phi\}_P &\approx 0. \end{aligned} \quad (5.75)$$

A estratégia de trabalho para se abordar a dinâmica tanto clássica quanto quântica de um sistema físico com vínculos pode ser sintetizada no diagrama abaixo:



5.2 O princípio de Ação Quântica e o formalismo funcional

Ao descrever o movimento de uma partícula na natureza sem a ação de interações externas (livre) sabemos que de maneira geral temos uma expressão relativística (Einstein) que relaciona sua energia e o momento. Tendo em vista a covariância, sintetizamos essa expressão relativística em termos de uma linguagem tensorial,

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= m^2 \\ p^\mu &= (E, \vec{p}). \end{aligned} \tag{5.76}$$

Por outro lado, a interpretação das quantidades físicas na descrição quântica da natureza via princípio da correspondência de Schrödinger

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\partial_t \\ \vec{p} &\rightarrow -i\vec{\nabla} \end{aligned} \tag{5.77}$$

nos leva a uma cinemática ondulatória de Klein-Gordon-Fock

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\phi &= 0 \\ \square &= \partial_\mu \partial^\mu, \end{aligned} \tag{5.78}$$

onde ϕ é um campo escalar.

Com a equação de movimento anterior construímos o princípio da mínima ação de Hamilton em termos de uma linguagem funcional

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2]. \end{aligned} \tag{5.79}$$

O espaço descrito pelas coordenadas $(\phi, \partial_0 \phi)$ é conhecido como espaço de configurações.

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] = 0 \\ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \Rightarrow (\square + m^2)\phi = 0. \end{aligned} \tag{5.80}$$

A linguagem funcional da mínima ação de Hamilton nos leva a observar a ligação entre simetrias e quantidades conservadas (Emmy Noether). Para isso vamos aplicar translações espaço-temporais $(x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu)$, impondo que a ação seja invariante

$$\begin{aligned} d^4x' &= J d^4x, \quad J = \det \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right] = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu d^4x \\ \delta d^4x &= \partial_\mu \delta x^\mu d^4x \\ \delta \phi &= \partial_\mu \phi \delta x^\mu \end{aligned} \tag{5.81}$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] + \int \delta d^4x \mathcal{L} \\
&= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \eta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \delta x^\nu \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.82}$$

onde obtemos uma quantidade conservada conhecida como tensor de energia-momento

$$\begin{aligned}
T_\nu^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \eta_\nu^\mu \mathcal{L} \\
&= \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_\nu^\mu [\partial_\theta \phi \partial^\theta \phi - m^2 \phi^2].
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Restringindo o caso anterior somente para translações temporais, temos a energia total do sistema ou Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [\partial_0 \phi \partial_0 \phi + \partial_i \phi \partial_i \phi + m^2 \phi^2]. \tag{5.84}$$

Portanto definindo o momento por

$$\pi \doteq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)}, \tag{5.85}$$

temos que a Lagrangiana e a Hamiltoniana estão relacionadas por uma transformada de Legendre

$$\mathcal{H} = \pi (\partial_0 \phi) - \mathcal{L}. \tag{5.86}$$

Dando continuidade, percebemos que o princípio da mínima ação pode ser escrito da seguinte forma

$$S = \int d^4x [\pi (\partial_0 \phi) - \mathcal{H}(\phi, \pi)] \tag{5.87}$$

$$\delta S = \int d^4x \{ \delta \pi [\partial_0 \phi - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}] - [\partial_0 \pi - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}] \delta \phi \}.$$

Nesse caso, vemos que uma equação de segunda ordem pode ser transformada em duas de primeira ordem

$$\begin{aligned}
\partial_0 \phi &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \\
\partial_0 \pi &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}.
\end{aligned} \tag{5.88}$$

O espaço descrito pelas coordenadas (ϕ, π) é conhecido como espaço de fase.

A evolução de uma quantidade física Q

$$Q = \int d^3 \vec{x} \mathcal{Q}(\phi, \pi) \tag{5.89}$$

$$\begin{aligned}
\partial_0 Q &= \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{y} \left[\frac{\partial Q}{\partial \phi} \partial_0 \phi + \frac{\partial Q}{\partial \pi} \partial_0 \pi \right] \\
&= \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{y} \left[\frac{\partial Q}{\partial \phi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \frac{\partial Q}{\partial \pi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \right],
\end{aligned} \tag{5.90}$$

nos leva a definir o parêntese de Poisson

$$\{Q, \mathcal{H}\}_P = \int d^3 \vec{y} \left[\frac{\partial Q}{\partial \phi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \frac{\partial Q}{\partial \pi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \right]. \tag{5.91}$$

Sendo assim, temos as equações de movimento fundamentais escritas em termos dos parênteses de Poisson,

$$\begin{aligned}
\partial_0 \phi &= \{\phi, \mathcal{H}\}_P \\
\partial_0 \pi &= \{\pi, \mathcal{H}\}_P.
\end{aligned} \tag{5.92}$$

A evolução de uma quantidade física é dada pela Hamiltoniana e o parêntese de Poisson.

Como todo fenômeno físico precisa de uma dinâmica, implementaremos a dinâmica na Hamiltoniana

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{cinemática} + \mathcal{H}_{dinâmica} \tag{5.93}$$

$$\mathcal{H}_{dinâmica} = V(\phi).$$

A necessidade de implementar uma dinâmica é historicamente interessante. Newton a partir das leis cinemática de Keppler e Galileu extrai uma dinâmica. Einstein, tendo primeiramente construído uma cinemática relativística, estende para uma dinâmica em espaço-tempo curvos. Não obstante, construímos o espaço dos estados de Hilbert a partir da cinemática relativística quântica, representações do Grupo de Poincaré e, posteriormente ao implementar a dinâmica perceberemos seus efeitos nos processos quânticos pelas equações de Lippmann-Schwinger.

A necessidade de uma dinâmica de um sistema de várias partículas interagindo entre si nos leva a quantizar o campo que descreve a matéria ϕ via princípio da correspondência de Dirac $\{, \} \rightarrow -i[,]$

$$i\partial_0 \hat{\phi} = [\hat{\phi}, \hat{\mathcal{H}}], \tag{5.94}$$

$$i\partial_0 \hat{\pi} = [\hat{\pi}, \hat{\mathcal{H}}],$$

onde as equações quânticas de campos estão na descrição de Heisenberg e o espaço de Hilbert de uma partícula é estendido para o espaço de Fock de várias partículas. Observa-se que temos as seguintes relações cinemáticas

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}] = 0, \quad [\hat{\pi}, \hat{\pi}] = 0, \quad [\hat{\phi}, \hat{\pi}] = -[\hat{\pi}, \hat{\phi}] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{5.95}$$

O fato das equações quânticas preservarem sua forma clássica a valores médios nos leva a perguntar sobre a existência de um princípio de ação variacional que seja quântico.

Para responder à pergunta anterior, sabemos que os estados evoluem no espaço de Hilbert da seguinte forma

$$i\partial_0 |\phi\rangle = \hat{H} |\phi\rangle. \quad (5.96)$$

Supondo que exista um operador evolução

$$|\phi', t'\rangle = U(t', t) |\phi, t\rangle, \quad (5.97)$$

com determinadas propriedades, somos conduzidos ao resultado

$$i\partial_0 U(t', t) = \hat{H} U(t', t), \quad (5.98)$$

onde para intervalos infinitesimais ($t' = t + dt$) temos que

$$\begin{aligned} U(t', t) &= \exp[i\hat{H}dt] \\ &\simeq I + i\hat{H}dt. \end{aligned} \quad (5.99)$$

A solução geral seria dada por

$$U(t', t) = \exp\left[\int_t^{t'} i\hat{H}dt\right]. \quad (5.100)$$

Pois bem, podemos estudar algumas propriedades da evolução e projeção de estados por meio do seguinte objeto

$$\langle\phi', t' | \phi, t\rangle, \quad (5.101)$$

denominado amplitude de transição. Observa-se que agora pela relação de completeza, a evolução de um estado $|f\rangle$ e suas projeções são dadas por uma equação integral

$$\langle\phi', t' | f\rangle = \int D\phi \langle\phi', t' | \phi, t\rangle \langle\phi, t | f\rangle. \quad (5.102)$$

Aplicaremos variações nessa amplitude de transição

$$\delta \langle\phi', t' | \phi, t\rangle, \quad (5.103)$$

sabendo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\phi} |\phi, t\rangle &= -i\hat{\pi} |\phi, t\rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} |\phi, t\rangle &= -i\hat{H} |\phi, t\rangle. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Sendo assim

$$\delta \langle\phi', t' | \phi, t\rangle = i \langle\phi', t' | \left\{ \int d^3\vec{x} [\hat{\pi}(\vec{x}, t') \delta\hat{\phi}(\vec{x}, t') - \hat{\pi}(\vec{x}, t) \delta\hat{\phi}(\vec{x}, t)] + \hat{H}(t')\delta t' - \hat{H}(t)\delta t \right\} |\phi, t\rangle. \quad (5.105)$$

Agora, pensando em intervalos de tempo infinitesimais

$$\begin{aligned}\hat{\pi}(\vec{x}, t + dt) &= \hat{\pi}(\vec{x}, t) + \frac{d\hat{\pi}(\vec{x}, t)}{dt} dt = \hat{\pi}(\vec{x}, t) - i[\hat{\pi}, \hat{\mathcal{H}}] dt \\ \hat{H}(t + dt) &= \hat{H}(t) + \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} dt,\end{aligned}\tag{5.106}$$

somos conduzidos ao resultado

$$\begin{aligned}\delta \langle \phi', t' | \phi, t \rangle &= i \langle \phi', t' | \{ \int d^3 \vec{x} [\hat{\pi}(\vec{x}, t') \delta \hat{\phi}(\vec{x}, t') - \hat{\pi}(\vec{x}, t) \delta \hat{\phi}(\vec{x}, t)] + \hat{H}(t') \delta t' - \hat{H}(t) \delta t \} | \phi, t \rangle = \\ &= i \langle \phi', t' | \left(\int d^3 \vec{x} \{ \hat{\pi}(\vec{x}, t) [\delta \hat{\phi}(\vec{x}, t + dt) - \delta \hat{\phi}(\vec{x}, t)] \} + dt \int d^3 \vec{x} i [\hat{\pi}, \hat{\mathcal{H}}] \delta \hat{\phi}(\vec{x}, t) - \hat{H}(t) \delta dt - dt \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \delta t \right) | \phi, t \rangle = \\ &= i \langle \phi', t' | \delta \left(\int d^3 \vec{x} \{ \hat{\pi}(\vec{x}, t) [\hat{\phi}(\vec{x}, t + dt) - \hat{\phi}(\vec{x}, t)] \} - \hat{H}(t) dt \right) | \phi, t \rangle,\end{aligned}\tag{5.107}$$

desconsiderando termos de segunda ordem. Logo

$$\begin{aligned}\delta \langle \phi', t' | \phi, t \rangle &= i \langle \phi', t' | \delta [dt \int d^3 \vec{x} [\hat{\pi} \partial_0 \hat{\phi} - \hat{\mathcal{H}}] | \phi, t \rangle \\ &= i \langle \phi', t' | \delta [dt \int d^3 \vec{x} \hat{\mathcal{L}}] | \phi, t \rangle.\end{aligned}\tag{5.108}$$

Estendendo o resultado anterior para um intervalos de tempo $\Delta t = t' - t$

$$\begin{aligned}\delta \langle \phi', t' | \phi, t \rangle &= i \langle \phi', t' | \delta \left[\int d^4 x \hat{\mathcal{L}} \right] | \phi, t \rangle \\ &= \langle \phi', t' | i \delta \hat{S} | \phi, t \rangle\end{aligned}\tag{5.109}$$

onde \hat{S} é uma ação quântica.

Como vemos, temos em (5.109) uma equação variacional a valores de operadores. Utilizando o método de Green, podemos encontrar uma equação geradora em termos de uma linguagem de integração funcional

$$\delta \langle \phi', t' | \phi, t \rangle = i \delta S_{ef} \langle \phi', t' | \phi, t \rangle\tag{5.110}$$

e deste modo

$$\begin{aligned}\delta Z[J, \varsigma] &= i \delta S_{ef} Z[J, \varsigma], \\ S_{ef} &= S + J\phi + \varsigma\pi.\end{aligned}\tag{5.111}$$

O conceito por trás da passagem anterior está implicitamente relacionado aos estados assintoticamente livre e a definição da matriz \mathcal{S}

$$\begin{aligned}Z &= \langle out | U(\infty, -\infty) | in \rangle \\ \mathcal{S} &= U(\infty, -\infty).\end{aligned}\tag{5.112}$$

A solução da equação (5.111) é dada em termos de uma transformada de Fourier funcional

$$Z[J, \varsigma] = \int D\phi D\pi Z[\phi, \pi] \exp[iJ\phi] \exp[i\varsigma\pi],$$

$$Z[\phi, \pi] = \exp[iS] \quad (\text{solução}), \quad (5.113)$$

$$S = \int d^4x [\pi(\partial_0\phi) - \frac{1}{2}\pi^2 - \partial_i\phi\partial_i\phi - m^2\phi^2 - V(\phi)].$$

Como a ação é quadrática nos momentos, podemos fazer a seguinte transformação

$$\begin{aligned} \pi(\partial_0\phi) - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}[\partial_i\phi\partial_i\phi - m^2\phi^2] &\rightarrow -\frac{1}{2}(\pi + \partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}[\partial_i\phi\partial_i\phi + m^2\phi^2] - V(\phi) = \\ &= -\frac{1}{2}(\pi + \partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2] - V(\phi) \end{aligned} \quad (5.114)$$

e nesse caso

$$Z[J] = N \int D\phi \exp[iS_{ef}]$$

$$S_{ef} = \int d^4x [\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2 - V(\phi) + J\phi] \quad (5.115)$$

$$N = \int D\pi \exp[-i \int d^4x \frac{1}{2}(\pi + \partial_0\phi)^2].$$

Portanto, escrevemos o princípio da ação quântica da seguinte forma

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta S_{ef}}{\delta \phi} \right\rangle &= \int D\phi \frac{\delta S_{ef}}{\delta \phi} \exp[iS_{ef}] \\ &= \frac{\delta S_{ef}}{\delta \phi} \Big|_{\phi = \frac{\delta}{i\delta J}} Z[J]. \end{aligned} \quad (5.116)$$

A partir da equação anterior, podemos gerar as funções de Green da teoria com derivadas funcionais adequadas.

5.3 Equações de Podolsky

Agora exploraremos o setor eletromagnético de Podolsky. Anteriormente, havíamos encontrado as equações de movimento associadas ao fato de partículas em movimento (fontes mesônicas) gerarem campos eletromagnéticos

$$(1 + a^2\Box)\partial_\mu F^{\lambda\mu} = J^\lambda$$

$$J^\lambda = e\bar{\psi}\beta^\lambda\psi. \quad (5.117)$$

Por outro lado, qual seria a interação entre partículas mesônicas com campos eletromagnéticos? Para responder à pergunta construímos uma ação que representa as equações de movimento relativística associada a interação de uma partícula com um campo eletromagnético externo na forma covariante

$$S = S_{livre} + S_{int},$$

$$S_{livre} = - \int m ds, \quad (5.118)$$

$$S_{int} = -e A^\mu dx_\mu,$$

onde ds^2 é o intervalo associado a medidas de distância no espaço de Minkowski. Conseqüentemente, aplicando o princípio da mínima ação

$$\delta S = 0,$$

$$x^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (5.119)$$

juntamente com as identidades

$$\delta ds = \frac{1}{\sqrt{dx^\mu dx_\mu}} dx^\mu \delta dx_\mu \rightarrow \delta S_{livre} = \int m \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \delta x_\mu ds \quad (5.120)$$

$$\delta(A^\mu dx_\mu) = -[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] \frac{dx_\nu}{ds} \delta x_\mu ds \rightarrow \delta S_{int} = e[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] \frac{dx_\nu}{ds} \delta x_\mu ds,$$

encontramos a equação que representa a força de Lorentz na forma covariante

$$m \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -e F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{ds} \quad (5.121)$$

$$F^{\mu\nu} \doteq [\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu].$$

Mésons se movendo a velocidades newtonianas ($v \ll 1$) interagem com o campo eletromagnético da seguinte forma

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -e F^{i0} - e F^{ij} \frac{dx_j}{dt} \quad (5.122)$$

$$= e E^i + e(\vec{v} \times \vec{B})^i \quad (\text{experimental})$$

onde, na aproximação, o tempo próprio passou a ser o tempo coordenado.

Definimos os campos elétricos \vec{E} e magnéticos \vec{B} em termos do 4-potencial $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ a partir da equação anterior

$$\vec{E} \doteq - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi, \quad (5.123)$$

$$\vec{B} \doteq \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Observa-se que os campos elétricos e magnéticos definidos anteriormente são invariantes perante a transformação de calibre

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi - \partial_t \alpha \\ \vec{A} &\longrightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \alpha, \end{aligned} \quad (5.124)$$

onde é necessário utilizar a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \alpha) = \vec{0}$. Os campos elétricos \vec{E} e magnéticos \vec{B} são os campos que realmente têm conteúdo físico no sentido de representarem os verdadeiros graus

de liberdade apresentados na natureza. Já o 4-potencial A^μ possui uma liberdade de escolha a qual representamos pelas transformações de calibre. Podemos, por exemplo, fixar o calibre encontrando os verdadeiros graus de liberdade do 4-potencial A^μ que descrevem a propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo (radiação) e a posteriori utilizar essa escolha para descrever qualquer fenômeno eletromagnético, pois, como havíamos dito, toda dinâmica do eletromagnetismo é dada em termos dos campos \vec{E} e \vec{B} e estes não dependem da escolha de calibre.

A partir do conjunto de equações (5.123) encontramos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0,\end{aligned}\tag{5.125}$$

onde além de aplicar o rotacional e o divergente utilizamos as identidades vetoriais

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= 0.\end{aligned}\tag{5.126}$$

Por outro lado, a equação (5.117) pode ser escrita em termos dos campos eletromagnéticos e das componentes da 4-corrente $J^\mu = (\rho, \vec{j})$

$$\begin{aligned}(1 + a^2 \square) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho, \\ (1 + a^2 \square) \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}.\end{aligned}\tag{5.127}$$

Portanto as equações clássicas de movimento de Podolsky na presença de fontes são dadas por

$$\begin{aligned}(1 + a^2 \square) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & (1 + a^2 \square) \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}.\end{aligned}\tag{5.128}$$

Observa-se que a dinâmica é dada pelas equações que tem variações temporais dos campos.

Podemos encontrar facilmente uma equação de onda no vácuo ($\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$) a partir do conjunto de equações anterior

$$\begin{aligned}(1 + a^2 \square) \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} [(1 + a^2 \square) \vec{\nabla} \times \vec{B}] \\ &= -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.\end{aligned}\tag{5.129}$$

Pois bem, com a identidade vetorial

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2(\vec{E})\tag{5.130}$$

concluimos que

$$(1 + a^2 \vec{\nabla}^2) \square \vec{E} = \vec{0}.\tag{5.131}$$

Da mesma forma,

$$(1 + a^2 \vec{\nabla}^2) \square \vec{B} = \vec{0}. \quad (5.132)$$

Agora observa-se que ϕ não participa da dinâmica, pois

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \right), \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0 \quad (5.133)$$

Neste caso vamos escolher $\phi = 0$.

Por outro lado, o sistema de equações

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu F^{\lambda\mu} = (1 + a^2 \square) \square A^\lambda - \partial^\lambda [(1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu] = 0, \quad (5.134)$$

implica numa solução para A^0

$$(1 + a^2 \square) \square A^0 - \partial^0 [(1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu] \rightarrow (1 + a^2 \square) \vec{\nabla}^2 A^0 = \partial_i [(1 + a^2 \square) \partial^0 A^i] \quad (5.135)$$

$$A^0 = \frac{1}{(1 + a^2 \square) \vec{\nabla}^2} \partial^0 (1 + a^2 \square) (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}).$$

Inserindo A^0 no restante das equações

$$(1 + a^2 \square) \square A^i - \partial^i [(1 + a^2 \square) (\partial_0 A^0 + \partial_j A^j)] = (1 + a^2 \square) \square [A^i - \partial^i \left(\frac{1}{(1 + a^2 \square) \vec{\nabla}^2} \partial^0 (1 + a^2 \square) (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right)] \quad (5.136)$$

concluimos que

$$(1 + a^2 \square) \square A'^i = 0 \quad (5.137)$$

$$A'^i = A^i - \partial^i \left(\frac{1}{(1 + a^2 \square) \vec{\nabla}^2} \partial^0 (1 + a^2 \square) (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right).$$

Como ϕ não participa da dinâmica podemos escolher

$$A^0 = \phi = 0 \Rightarrow (1 + a^2 \square) \square A^i = 0 \quad (5.138)$$

Portanto, temos a condição que fixa a liberdade que temos em descrever a interação eletromagnética com o 4-potencial

$$\phi = 0 \quad (5.139)$$

$$(1 + a^2 \square) (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 0,$$

conhecida como condição de Coulomb generalizada. Para encontrar os graus de liberdade físicos associados a equação (5.138) supomos uma solução do tipo

$$A^i = A_{\text{Mawell}}^i + A_{\text{Proca}}^i \quad (5.140)$$

$$\square A_{\text{Mawell}}^i = 0 \tag{5.141}$$

$$(1 + a^2 \square) A_{\text{Proca}}^i = 0$$

onde devido a condição de Coulomb generalizada

$$(1 + a^2 \square)(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\text{Mawell}}) = 0. \tag{5.142}$$

Como podemos ver o setor de Maxwell tem 3 equações de segunda ordem e um vínculo, logo dois graus de liberdade. O setor de Proca tem 3 equações de segunda ordem. Fisicamente os graus de liberdade físicos estão associados ao número de configurações (liberdade) que a energia pode se propagar via equações de onda (segunda ordem). Em eletrodinâmica as configurações de propagação da energia estão associadas às polarizações advindas da helicidade. No caso de Podolsky temos uma soma de Maxwell+Proca, 2+3, g=5.

Se quisermos ser menos restritivos e mantermos uma certa liberdade, podemos escolher uma condição explicitamente covariante partindo da equação (5.134)

$$\begin{aligned} (1 + a^2 \square) \square A^\lambda - \partial^\lambda [(1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu] &= 0 \\ (1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu &= C \text{ (constante)} \\ (1 + a^2 \square) \square A^\lambda &= 0 \text{ (equação de onda)}. \end{aligned} \tag{5.143}$$

Porém,

$$\begin{aligned} A^\mu &\rightarrow A^\mu + \partial^\mu \alpha \\ (1 + a^2 \square) \square \alpha &= 0. \end{aligned} \tag{5.144}$$

Podemos somar qualquer função α que satisfaça a equação anterior e não há mudança na descrição do problema físico. Nesse caso, a condição explicitamente covariante não fixa o calibre. A condição explicitamente covariante é conhecida como condição de Lorenz generalizada. A análise geral de como escrever as equações de Podolsky com fontes, em termos do 4-potencial e os verdadeiros graus de liberdades físicos, está baseada no Teorema da decomposição de Helmholtz [112]. Para maiores detalhes sobre o estudo clássico da eletrodinâmica de Podolsky ver [113].

5.4 A equação de DKP

Como sabemos, uma partícula relativística é descrita cinematicamente pela equação de Einstein

$$E^2 = p^2 + m^2. \tag{5.145}$$

Tendo em vista o princípio da correspondência de Schrödinger

$$\begin{aligned} E &= i \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} &= -i \vec{\nabla}, \end{aligned} \tag{5.146}$$

somos conduzidos à equação de Klein-Gordon-Fock (KGF)

$$(\square + m^2)\phi(\vec{r}, t) = 0. \quad (5.147)$$

Vamos generalizar o procedimento de Dirac ao encontrar uma equação de onda relativística de primeira ordem a partir de uma equação de segunda ordem (KGF) [38]. Seja uma função de onda multicomponente $\phi_b(x)$, em que $b = 1, 2, \dots, n$. A equação relativística para esta função de onda tem a seguinte forma

$$\Lambda(\partial)\phi(x) = 0, \quad (5.148)$$

em que $\Lambda(\partial)$ é um operador matricial. A condição de Klein-Gordon-Fock exige que (5.148) satisfaça a relação

$$d(\partial)\Lambda(\partial) = (\square + m^2)I, \quad (5.149)$$

em que $d(\partial)$ é um operador diferencial, tal que

$$d(\partial) = \alpha + \alpha^\nu \partial_\nu + \alpha^{\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma + \dots \quad (5.150)$$

onde os coeficientes $\alpha, \alpha^\nu, \alpha^{\nu\sigma}, \dots$ são matrizes de dimensão n .

Uma equação relativística como um conjunto de equações diferenciais em primeira ordem é escrita de maneira geral na forma

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - mI)\phi(x) = 0, \quad (5.151)$$

em que β^μ são certas matrizes de dimensão n , I é a matriz identidade $n \times n$ e $\phi(x)$ é uma matriz coluna também de dimensão n . Sendo assim, consideraremos particularizações.

Primeiro caso: $d(\partial) = \alpha + \alpha^\nu \partial_\nu$

Neste caso (5.149) é tal que

$$(\alpha + \alpha^\nu \partial_\nu)(i\beta^\mu \partial_\mu - mI) = \square + m^2 \quad (5.152)$$

ou seja,

$$i\alpha\beta^\mu \partial_\mu - (\alpha I)m + i\alpha^\nu \beta^\mu \partial_\mu \partial_\nu - (\alpha^\nu I)m\partial_\nu = (\square + m^2) \quad (5.153)$$

$$i(\alpha\beta^\mu)\partial_\mu - (\alpha I)m + \frac{i}{2}(\alpha^\nu \beta^\mu + \alpha^\mu \beta^\nu)\partial_\mu \partial_\nu - (\alpha^\nu I)m\partial_\nu = (\square + m^2). \quad (5.154)$$

Para que essa igualdade seja verdadeira, as condições

$$\begin{aligned} i(\alpha\beta^\mu) - (\alpha^\mu I)m &= 0 \\ \frac{i}{2}(\alpha^\nu \beta^\mu + \alpha^\mu \beta^\nu) &= \eta^{\mu\nu} \\ -(\alpha I)m &= m^2 I \end{aligned} \quad (5.155)$$

devem ser obedecidas. Essas condições conduzem a

$$\begin{aligned} \alpha &= -mI \\ \alpha^\mu &= -i\beta^\mu \end{aligned} \quad (5.156)$$

$$\beta^\nu \beta^\mu + \beta^\mu \beta^\nu = 2\eta^{\mu\nu}.$$

Portanto, identificando os termos de (5.148) com as condições acima se obtém que

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m) \phi(x) = 0 \quad (5.157)$$

onde a função de onda multicomponente $\phi(x)$ é reconhecida como o espinor $\psi(x)$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0, \quad (5.158)$$

e na renomeação de β por γ percebemos uma álgebra de Clifford

$$\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (5.159)$$

Segundo caso: $d(\partial) = \alpha + \alpha^\nu \partial_\nu + \alpha^{\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma$

De maneira análoga ao caso anterior a equação (5.149) agora se escreve como

$$(\alpha + \alpha^\nu \partial_\nu + \alpha^{\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma) (i\beta^\mu \partial_\mu - mI) = \square + m^2 \quad (5.160)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & i(\alpha\beta^\mu) \partial_\mu - (\alpha I) m + \frac{i}{2} (\alpha^\nu \beta^\mu + \alpha^\mu \beta^\nu) \partial_\mu \partial_\nu - (\alpha^\nu I) m \partial_\nu + \\ & + \sum^{(P)} (i\alpha^{\nu\sigma} \beta^\mu) \partial_\nu \partial_\sigma \partial_\mu - (\alpha^{\nu\sigma} I) m \partial_\nu \partial_\sigma = (\square + m^2), \end{aligned} \quad (5.161)$$

em que $\sum^{(P)}$ indica a soma sobre todas as permutações possíveis entre ν , σ e μ devido à simetria de $\partial_\nu \partial_\sigma \partial_\mu$. Portanto, para que essa igualdade seja satisfeita as condições

$$\begin{aligned} & i(\alpha\beta^\mu) - (\alpha^\mu I) m = 0 \\ & -(\alpha I) m = m^2 I \\ & \frac{i}{2} (\alpha^\nu \beta^\mu + \alpha^\mu \beta^\nu) - \alpha^{\mu\nu} m = \eta^{\mu\nu} \\ & \sum^{(P)} (i\alpha^{\nu\sigma} \beta^\mu) = 0 \end{aligned} \quad (5.162)$$

devem ser obedecidas. Essas condições conduzem a

$$\begin{aligned} & \alpha = -mI \\ & \alpha^\mu = -i\beta^\mu \\ & \alpha^{\mu\nu} = -\frac{1}{m} [\delta^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\beta^\mu \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\mu)] \\ & \sum^{(P)} [\frac{1}{2} (\beta^\nu \beta^\sigma \beta^\mu + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu) - \eta^{\nu\sigma} \beta^\mu] = 0. \end{aligned} \quad (5.163)$$

A última relação, tomadas todas as permutações possíveis, conduz à álgebra

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu, \quad (5.164)$$

e, identificando os termos de (5.148) com as condições acima, determina-se o sistema de equações em primeira ordem

$$i\beta^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0. \quad (5.165)$$

As equações (5.165) e sua álgebra (5.164) são atribuídas a Duffin-Kemmer-Petiau (DKP).

É interessante determinar a álgebra de DKP partindo da ideia de Louis de Broglie ao combinar 2 léptons $1/2 \otimes 1/2 = 0 \oplus 1$. Seja β^μ escrita como

$$\beta^\mu = \frac{1}{2} (\Gamma^\mu + \bar{\Gamma}^\mu), \quad (5.166)$$

onde $\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes 1$ e $\bar{\Gamma}^\mu = 1 \otimes \gamma^\mu$. Neste caso

$$\begin{aligned} \gamma \otimes \gamma &= (\gamma \otimes 1) \oplus (1 \otimes \gamma) \\ \{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} &= 2\eta^{\mu\nu} \\ [\Gamma^\mu, \bar{\Gamma}^\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (5.167)$$

Logo escrevendo a soma $\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu$ em termos dos Γ e $\bar{\Gamma}$

$$\begin{aligned} \beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu &= \frac{1}{8} (\Gamma^\mu + \bar{\Gamma}^\mu) (\Gamma^\nu + \bar{\Gamma}^\nu) (\Gamma^\sigma + \bar{\Gamma}^\sigma) + \frac{1}{8} (\Gamma^\sigma + \bar{\Gamma}^\sigma) (\Gamma^\nu + \bar{\Gamma}^\nu) (\Gamma^\mu + \bar{\Gamma}^\mu) = \\ &= \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} (\Gamma^\sigma + \bar{\Gamma}^\sigma) + \eta^{\sigma\nu} \frac{1}{2} (\Gamma^\mu + \bar{\Gamma}^\mu) = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu, \end{aligned} \quad (5.168)$$

encontramos a álgebra de DKP.

5.5 Os graus de liberdade físicos e sua conexão com os vínculos em GSDKP₄

A análise dessa secção se baseia na equivalência entre a dinâmica descrita no espaço de fase e a dinâmica descrita no espaço de configuração, advinda da análise de vínculos de Dirac, observando que o número de equações multiplicado pela ordem das equações deva ser independente do espaço que trabalhamos

$$\begin{aligned} &\text{espaço de configuração} \iff \text{espaço de fase} \\ &(\text{número de equações}) \times (\text{ordem}) = \text{constante}. \end{aligned}$$

Primeiramente analizaremos o setor escalar (DKP). Como sabemos, o espaço de configuração é descrito por 10 equações de 1º ordem

$$\begin{aligned} &\text{espaço de configuração} \\ &(\text{DKP}) \Psi, \bar{\Psi} \text{ 10 equações (1º ordem)}. \end{aligned}$$

Porém, ao construir o espaço de fase, temos 20 equações de primeira ordem

$$\begin{aligned} &\text{espaço de fase} \\ &\bar{\psi}, \psi, \bar{p}, p \text{ 20 equações (1º ordem)}. \end{aligned}$$

Logo para ter uma equivalência entre as dinâmicas devemos ter 10 vínculos

$$\chi^{(1)}, \bar{\chi}^{(1)} \text{ 10 vínculos.}$$

Por outro lado sabemos que ao lidarmos com os graus de liberdade físicos via equações de KGF temos 2 equações de 2º ordem

$$\begin{aligned} &\text{espaço de configuração (graus de liberdade físicos)} \\ &\text{(KGF) } \phi, \phi^* \text{ 2 equações (2º ordem).} \end{aligned}$$

Portanto devemos ter 16 vínculos no setor escalar para que a equivalência entre as dinâmicas nos graus de liberdade físicos seja mantida,

$$\begin{aligned} &\text{espaço de fase (físico)} \\ &\bar{\psi}, \psi, \bar{p}, p \text{ 20 equações (1º ordem); } \chi^{(1)}, \bar{\chi}^{(1)}, \chi^{(2)}, \bar{\chi}^{(2)} \text{ 16 vínculos.} \end{aligned}$$

De maneira análoga sabemos que o setor vetorial (Podolsky) é descrito no espaço de configuração por 4 equações (4º ordem)

$$\begin{aligned} &\text{espaço de configuração} \\ &\text{(Podolsky) } A_\mu \text{ 4 equações (4º ordem)} \end{aligned}$$

Porém, ao construir o espaço de fase, temos 16 equações (1º ordem)

$$\begin{aligned} &\text{espaço de fase} \\ &A_\mu, \Phi_\nu; \Pi^\mu, \Gamma^\nu \text{ 16 equações (1º ordem).} \end{aligned}$$

Por outro lado, os graus de liberdade do setor vetorial são descrito por 5 equações de 2º ordem (Maxwell+Proca)

$$\begin{aligned} &\text{espaço de configuração (graus de liberdade físicos, Maxwell+Proca, 2+3)} \\ &5 \text{ equações (2º ordem)} \end{aligned}$$

Neste caso, devemos ter 6 vínculos no setor vetorial para que a equivalência entre as dinâmicas nos graus de liberdade físicos seja mantida

$$\begin{aligned} &\text{espaço de fase (físico)} \\ &A_\mu, \Phi_\nu; \Pi^\mu, \Gamma^\nu \text{ 16 equações (1º ordem); } \varphi_1, \varphi_2, \tilde{\varphi}_2, \Sigma_3, \Sigma_2, \Sigma_1 \text{ 6 vínculos} \end{aligned}$$

Como podemos ver temos um método simples e intuitivo ao analisar a conexão entre os graus de liberdade físicos e o aparecimento dos vínculos em teorias de calibre, no presente caso temos

graus de liberdade g

$$[\text{setor escalar (DKP), } g=2] [\text{setor vetorial, Podolsky, } g=2+3]$$

$$\chi^{(1)}, \bar{\chi}^{(1)}, \chi^{(2)}, \bar{\chi}^{(2)}, \varphi_1, \varphi_2, \tilde{\varphi}_2, \Sigma_3, \Sigma_2, \Sigma_1 \text{ (22 vínculos).}$$

5.6 O método de Faddeev-Popov-DeWitt

A seguir discutiremos como o ansatz de Faddeev-Popov-DeWitt é abordado na literatura [114]. Para isso seja o seguinte funcional gerador

$$\begin{aligned} Z[J_\mu] &= \int DA_\mu \exp[iS] \\ Z[J_\mu] &= \int DA_\mu \exp[i \int d^4x \mathcal{L}] \exp[-i \int d^4x J_\mu A^\mu] \end{aligned} \quad (5.169)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned} \quad (5.170)$$

Esqueceremos a fonte na aplicação do método de Faddeev-Popov-DeWitt tendo em vista o conhecimento de teoria das fontes de Schwinger

$$Z = \int DA_\mu \exp[i \int d^4x \mathcal{L}]. \quad (\text{amplitude de transição}) \quad (5.171)$$

É de nosso conhecimento que a Lagrangiana acima não muda perante a seguinte transformação

$$A_\mu^\alpha(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x). \quad (5.172)$$

Neste caso reconhecemos que não devemos integrar sobre todas as configurações de campo, pois temos o que se chama em física de invariância de calibre. Uma maneira de fixar o calibre é impondo uma equação para o campo A_μ , ou seja,

$$\Omega(A_\mu) = f(x). \quad (5.173)$$

Com o intuito de extrair o volume devido a invariância de calibre definimos

$$\Delta[A_\mu] \int \prod_x d\alpha(x) \delta[\Omega(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)] = 1. \quad (5.174)$$

A afirmação acima implica em

$$\Delta^{-1}[A_\mu] = \int \prod_x d\alpha(x) \delta[\Omega(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)]. \quad (5.175)$$

Como vemos temos a seguinte invariância por translação funcional

$$\Delta^{-1}[A_\mu] = \Delta^{-1}[A_\mu^\theta]. \quad (5.176)$$

Inserindo a identidade (5.174) em (5.169)

$$\begin{aligned}
Z &= \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \int \prod_x d\alpha(x) \delta[\Omega(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)] \exp[iS] \\
&= \int \prod_x d\alpha(x) \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[\Omega(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)] \exp[iS] \\
&= \left[\int \prod_x d\alpha(x) \right] \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[\Omega(A_\mu(x)) - f(x)] \exp[iS].
\end{aligned} \tag{5.177}$$

Como a física não deve depender da escolha de f , concluímos que

$$\begin{aligned}
Z &= \left[\int \prod_x d\alpha(x) \right] \int Df L[f] \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[\Omega(A_\mu(x)) - f(x)] \exp[iS] \\
&= \left[\int \prod_x d\alpha(x) \right] \int DA_\mu \Delta[A_\mu] L[\Omega(A_\mu(x))] \exp[iS].
\end{aligned} \tag{5.178}$$

Em seguida construiremos a demonstração da afirmação anterior. Para isso, considera-se o seguinte objeto matemático

$$Z_1 = \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[\Omega(A_\mu(x)) - f_1(x)] \exp[iS]. \tag{5.179}$$

Inserindo a identidade

$$\Delta[A_\mu] \left[\int \prod_x d\alpha(x) \delta[\Omega(A_\mu^\alpha(x)) - f_2(x)] \right] = 1 \tag{5.180}$$

na equação anterior concluímos que

$$Z_1 = \left[\int \prod_x d\alpha(x) \right] \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[\Omega(A_\mu(x)) - f_1(x)] \Delta[A_\mu] \delta[\Omega(A_\mu^\alpha(x)) - f_2(x)] \exp[iS] \tag{5.181}$$

Fazendo uma transformação inversa de calibre

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^{\alpha^{(-1)}}(x) \tag{5.182}$$

e observando os invariantes perante essa transformação temos

$$Z_1 = \left[\int \prod_x d\alpha(x) \right] \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[\Omega(A_\mu^{\alpha^{(-1)}}(x)) - f_1(x)] \Delta[A_\mu] \delta[\Omega(A_\mu(x)) - f_2(x)] \exp[iS]. \tag{5.183}$$

Como

$$\Delta[A_\mu] \left[\int \prod_x d\alpha(x) \delta[\Omega(A_\mu^{\alpha^{(-1)}}(x)) - f_2(x)] \right] = 1, \tag{5.184}$$

podemos afirmar que

$$Z_1 = \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[\Omega(A_\mu(x)) - f_2(x)] \exp[iS] = Z_2. \quad (5.185)$$

O fato de $Z_1 = Z_2$ nos permite assegurar que nossos cálculos não dependem da escolha de f .

Por fim,

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[A_\mu] &= \int \prod_x d\alpha(x) \delta[\Omega(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)] \\ &= \int \prod_x dF \delta[\Omega(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)] \det\left(\frac{\delta\alpha}{\delta\Omega}\right) \\ &= \det\left(\frac{\delta\alpha}{\delta\Omega}\right) \Big|_{F(A_\mu^\alpha(x))=f(x)}. \end{aligned} \quad (5.186)$$

Desse modo,

$$\Delta[A_\mu] = \det\left(\frac{\delta\Omega(A_\mu^\alpha(x))}{\delta\alpha}\right) \Big|_{\Omega(A_\mu^\alpha(x))=f(x)}. \quad (5.187)$$

Usualmente escolhe-se

$$L[\Omega(A_\mu(x))] = \exp\left\{-i \frac{[(1 + a^2\Box)\partial_\mu A^\mu]^2}{2\xi}\right\} \quad \Omega(A_\mu(x)) = (1 + a^2\Box)\partial_\mu A^\mu$$

(condição de Lorenz generalizada).

Sendo assim,

$$\Delta[A_\mu] = \det\left(\frac{\delta\Omega(A_\mu^\alpha(x))}{\delta\alpha}\right) \Big|_{F(A_\mu^\alpha(x))=f(x)} = \det\left[\frac{\delta\Omega(A_\mu^\alpha(x))}{\delta\alpha(y)}\right] \Big|_{\alpha=0} = \det[(1 + a^2\Box)\Box\delta^4(x - y)]. \quad (5.188)$$

Portanto, incluindo a fonte do campo eletromagnético, temos o seguinte funcional gerador

$$Z[J_\mu] = \left[\int \prod_x d\alpha(x) \right] \det[(1 + a^2\Box)\Box\delta^4(x - y)] \int DA_\mu \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \right. \right. \quad (5.189)$$

$$\left. - \frac{[(1 + a^2\Box)\partial_\mu A^\mu]^2}{2\xi} - J_\mu A^\mu\right], \quad (5.190)$$

onde definimos uma constante de normalização

$$N = \left[\int \prod_x d\alpha(x) \right] \det[(1 + a^2\Box)\Box\delta^4(x - y)]. \quad (5.191)$$

Agora percebemos que o ansatz de Faddeev-Popov-DeWitt é a identidade

$$\Delta[A_\mu] \int \prod_x d\alpha(x) \delta[\Omega(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)] = 1. \quad (5.192)$$

É possível escolher outra condição de calibre alternativa a Lorenz generalizada

$$\begin{aligned} (1 + a^2 \square) \square A^\lambda - \partial^\lambda [(1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu] &= 0 \\ (1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu A^\mu &= C \text{ (constante)} \\ (1 + a^2 \square) \square A^\lambda &= 0 \text{ (equação de onda)}. \end{aligned} \quad (5.193)$$

$$L[\Omega(A_\mu(x))] = \exp\left\{-i \int d^4x \frac{[(1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu A^\mu]^2}{2\xi}\right\} \quad \Omega(A_\mu(x)) = (1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu A^\mu \quad (5.194)$$

(condição *no-mixing*).

Ao implementar esta condição de calibre alternativa (*no-mixing*) no método de Faddeev-Popov-DeWitt temos que

$$\det[(1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \square \delta^4(x - y)] \int \prod_x d\alpha(x) \delta[(1 + a^2 \square)^{\frac{1}{2}} \partial_\mu A^{\alpha\mu}] = 1. \quad (5.195)$$

5.7 Multiplicadores de Lagrange e o setor fantasma à temperatura finita

Para complementar a discussão do setor fantasma no calibre *no-mixing* encontraremos a equação

$$\hat{\mathcal{L}}_g = i\hat{c}\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)\Delta\hat{c} - \frac{1}{2}\hat{\phi}\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)\hat{\phi}, \quad (5.196)$$

via multiplicador de Lagrange. Como sabemos,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_N &= \frac{1}{4}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2}\partial_\mu\hat{\mathcal{F}}_{\mu\lambda}\partial_\theta\hat{\mathcal{F}}_{\theta\lambda} + \frac{1}{2}\{\hat{B}, G[\hat{A}]\} + \frac{\xi}{2}\hat{B}^2 \\ &\rightarrow \frac{1}{4}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2}\partial_\mu\hat{\mathcal{F}}_{\mu\lambda}\partial_\theta\hat{\mathcal{F}}_{\theta\lambda} - \frac{1}{2\xi}\partial_\mu\hat{\mathcal{A}}_\nu\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)\partial_\nu\hat{\mathcal{A}}_\nu. \end{aligned} \quad (5.197)$$

Aplicando uma transformação de calibre

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_\mu &\rightarrow \hat{\mathcal{A}}_\mu + \partial_\mu\hat{\alpha} \\ \delta\hat{\mathcal{L}}_N &= -\frac{1}{\xi}\partial_\mu\hat{\mathcal{A}}_\nu\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)\Delta\hat{\alpha} - \frac{1}{2\xi}\Delta\hat{\alpha}\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)\Delta\hat{\alpha} \end{aligned} \quad (5.198)$$

e, impondo a simetria

$$\begin{aligned}\delta\hat{\mathcal{L}}_N &= \hat{0}, \\ (\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta\hat{\alpha} &= \hat{0}.\end{aligned}\tag{5.199}$$

A condição anterior pode ser implementada por meio de um multiplicador de Lagrange

$$\hat{\mathcal{L}}_N = \frac{1}{4}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2}\partial_\mu\hat{\mathcal{F}}_{\mu\lambda}\partial_\theta\hat{\mathcal{F}}_{\theta\lambda} - \frac{1}{2\xi}\partial_\mu\hat{\mathcal{A}}_\nu(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\partial_\nu\hat{\mathcal{A}}_\nu + \hat{\lambda}(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta\hat{\alpha}.\tag{5.200}$$

Observa-se que ainda temos que impor uma simetria residual pois

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &\rightarrow \hat{\alpha} + \hat{\beta} \\ \delta\hat{\mathcal{L}}_N &= -\frac{1}{\xi}\partial_\mu\hat{\mathcal{A}}_\nu(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta\hat{\beta} - \frac{1}{\xi}\Delta\hat{\alpha}(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta\hat{\beta} + \hat{\lambda}(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta\hat{\beta} \\ (\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\hat{\beta} &= \hat{0}.\end{aligned}\tag{5.201}$$

Portanto,

$$\hat{\mathcal{L}}_N = \frac{1}{4}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2}\partial_\mu\hat{\mathcal{F}}_{\mu\lambda}\partial_\theta\hat{\mathcal{F}}_{\theta\lambda} - \frac{1}{2\xi}\partial_\mu\hat{\mathcal{A}}_\nu(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\partial_\nu\hat{\mathcal{A}}_\nu + \hat{\lambda}(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta\hat{\alpha} + \hat{\chi}(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\hat{\beta}.\tag{5.202}$$

Sendo assim, definindo a ação

$$\hat{S}_N = \int d^4x \hat{\mathcal{L}}_N\tag{5.203}$$

e, aplicando o princípio da ação quântica de Schwinger, obtemos as equações

$$\begin{aligned}P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \alpha)}\hat{\mathcal{A}}_\nu &= \hat{0} \\ (\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta\hat{\alpha} &= \hat{0}; \quad (\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta\hat{\lambda} = \hat{0} \\ (\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\hat{\beta} &= \hat{0}; \quad (\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\hat{\chi} = \hat{0}.\end{aligned}\tag{5.204}$$

5.8 A simetria BRST em QED₄ e os parâmetros fictícios

Iniciamos o estudo propondo a seguinte extensão da condição de Lorenz

$$\Omega = \epsilon\partial_\mu A^\mu.\tag{5.205}$$

Utilizando o método de Faddeev-Popov-DeWitt somos levados à expressão

$$\begin{aligned}Z &= \int DA_\mu \det[\epsilon\Box] \exp[iS], \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{[\epsilon\partial_\mu A^\mu]^2}{2\xi},\end{aligned}\tag{5.206}$$

onde podemos escrever $\det[\epsilon\Box]$ em termos dos campos fantasmas

$$\det[\epsilon\Box] = \int D\bar{c}Dc \exp[-i \int d^4x \epsilon \bar{c}\Box c]. \quad (5.207)$$

Desse modo, a amplitude de transição (5.206) é escrita da seguinte forma

$$Z = \int DA_\mu \exp\left\{i \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{[\epsilon\partial_\mu A^\mu]^2}{2\xi} - \epsilon\bar{c}\Box c\right]\right\}, \quad (5.208)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{[\epsilon\partial_\mu A^\mu]^2}{2\xi} - \epsilon\bar{c}\Box c.$$

Agora, impondo que a amplitude de transição anterior seja independente do parâmetro ϵ , somos conduzidos ao seguinte resultado

$$\frac{\delta Z}{\delta \epsilon} = \left\langle \int d^4x \left[\epsilon \frac{A^\mu (\partial_\mu \partial_\nu) A^\nu}{\xi} - \bar{c}\Box c \right] \right\rangle. \quad (5.209)$$

Localmente temos que,

$$\left. \frac{\delta Z}{\delta \epsilon} \right|_{\epsilon=1} = 0 \quad (5.210)$$

$$\frac{1}{\xi} \partial_\mu \langle A^\mu A^\nu \rangle = \partial^\nu \langle \bar{c}c \rangle. \quad (5.211)$$

Como vemos a equação anterior, (5.209), é uma identidade que relaciona o setor longitudinal do propagador do campo de calibre com os fantasmas. Essa identidade é advinda da simetria BRST onde o funcional gerador é invariante perante a seguinte transformação dos campos

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \delta A_\mu \\ c &\rightarrow c + \delta c \\ \bar{c} &\rightarrow \bar{c} + \delta \bar{c}, \end{aligned} \quad (5.212)$$

onde as variações são dadas por

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \lambda \partial_\mu c \\ \delta c &= 0 \\ \delta \bar{c} &= -\frac{1}{\xi} \lambda \epsilon \partial_\mu A^\mu \end{aligned} \quad (5.213)$$

e λ é um parâmetro de natureza anticomutante independente do espaço-tempo. Portanto, perante as transformações nos campos definidas anteriormente, o funcional gerador se transforma da seguinte forma

$$\begin{aligned} Z' &= Z + \delta Z \\ \delta Z &= \int \delta d\mu \exp[iS_{eff}] + \int d\mu i \delta S_{eff} \exp[iS_{eff}] \end{aligned} \quad (5.214)$$

em que

$$S_{eff} = S + \int d^4x [J_\mu A^\mu + \bar{\zeta}c + \bar{c}\zeta] \quad (5.215)$$

$$S \doteq \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{[\epsilon \partial_\mu A^\mu]^2}{2\xi} - \epsilon \bar{c} \square c \right].$$

Primeiramente, trabalhando com a medida de integração,

$$\int DAD\bar{c}Dc \rightarrow \int DAD\bar{c}Dc J \quad (5.216)$$

$$J = \det \begin{bmatrix} 1 & \lambda \partial_\mu \delta(x-y) & 0 \\ -\frac{1}{\xi} \epsilon \lambda \partial_\mu \delta(x-y) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.217)$$

onde percebemos que o jacobiano é 1. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \delta_{BRST} S_{eff} &= \int d^4x [-J_\mu \delta A_\mu + \bar{\zeta} \delta c + \delta \bar{c} \zeta] \\ &= \lambda \int d^4x \left[-J_\mu \partial^\mu c - \frac{1}{\xi} \epsilon \partial_\mu A^\mu \zeta \right]. \end{aligned} \quad (5.218)$$

Portanto, impondo a simetria no funcional gerador Z encontramos

$$\int DAD\bar{c}Dc i \lambda \int d^4x \left[-J_\mu \partial^\mu c - \frac{1}{\xi} \epsilon \partial_\mu A^\mu \zeta \right] \exp[iS_{eff}] = 0, \quad (5.219)$$

dessa forma, temos uma equação do valor médio dos campos. De outra maneira a equação funcional advinda da simetria BRST é dada por

$$\left[\frac{1}{\xi} \epsilon \partial_\mu A_\mu \zeta + J_\mu \partial^\mu c \right] Z = 0. \quad (5.220)$$

Aplicando $\frac{\delta^2}{\delta J_\nu \zeta}$ na equação anterior e tomando no final as fontes iguais a zero

$$\frac{1}{\xi} \epsilon \partial_\mu \langle \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \rangle = \partial_\nu \langle \bar{c} c \rangle. \quad (5.221)$$

Logo, comparando as equações (5.209) e (5.221), a independência da amplitude de transição perante o parâmetro ϵ é assegurada pela simetria BRST.

Existe na literatura uma outra escolha covariante conhecida como escolha de t'Hooft-Veltman [79, 90]

$$\Omega = \partial_\mu A^\mu + g A_\mu A^\mu \quad (5.222)$$

onde a atingibilidade é garantida pelas transformações de Bell-Treimann.

Neste caso a amplitude de transição é dada pelo método de Faddeev-Popov-DeWitt

$$Z = \int DA_\mu \det[\square + 2gA_\mu \partial^\mu] \exp[iS], \quad (5.223)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{[\partial_\mu A^\mu + gA_\mu A^\mu]^2}{2\xi},$$

onde podemos escrever $\det[\square + 2gA_\mu \partial^\mu]$ em termos dos campos fantasmas

$$\det[\square + 2gA_\mu \partial^\mu] = \int D\bar{c}Dc \exp\{-i \int d^4x [\bar{c}(\square + 2gA_\mu \partial^\mu)c]\}. \quad (5.224)$$

Observa-se que nesta escolha temos uma interação fictícia entre os fantasmas e o campo de calibre. Pois bem, impondo que a amplitude de transição não dependa de g concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z}{\delta g} &= \left\langle \int d^4x \left[-i \frac{[\partial_\mu A^\mu + gA_\theta A^\theta] A_\nu A^\nu}{\xi} - i\bar{c}(A_\theta \partial^\theta)c - i\bar{c}(A_\nu \partial^\nu)c \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \int d^4x \left[-iA_\theta \left\{ \frac{[\partial_\mu A^\mu + gA_\nu A^\nu] A^\theta}{\xi} + \bar{c} \partial^\theta c \right\} - iA_\nu \left\{ \frac{[\partial_\mu A^\mu + gA_\mu A^\mu] A^\nu}{\xi} + i\bar{c} \partial^\nu c \right\} \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (5.225)$$

e sendo assim localmente,

$$\left. \frac{\delta Z}{\delta g} \right|_{g=0} = 0, \quad (5.226)$$

$$\left. \frac{\delta Z}{\delta g} \right|_{g=0} = \left\langle \int d^4x \left[\frac{1}{\xi} A^\mu (A_\nu \partial_\mu) A^\nu - \bar{c} A_\nu \partial^\nu c \right] \right\rangle, \quad (5.227)$$

$$\frac{1}{\xi} \partial_\mu \langle A^\mu A^\nu \rangle - \partial^\nu \langle \bar{c} c \rangle = 0. \quad (5.228)$$

Observe que encontramos a simetria BRST quando o funcional gerador é invariante pelas seguintes transformações transformação dos campos

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \delta A_\mu \\ c &\rightarrow c + \delta c \\ \bar{c} &\rightarrow \bar{c} + \delta \bar{c}, \end{aligned} \quad (5.229)$$

onde as variações são dadas por

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \lambda \partial_\mu c \\ \delta c &= 0 \\ \delta \bar{c} &= -\frac{1}{\xi} \lambda (\partial_\mu + gA_\mu) A^\mu. \end{aligned} \quad (5.230)$$

Portanto, perante as transformações nos campos definidas anteriormente, o funcional gerador se transforma da seguinte forma

$$\begin{aligned}
Z' &= Z + \delta Z \\
\delta Z &= \int \delta d\mu \exp[iS_{eff}] + \int d\mu i\delta S_{eff} \exp[iS_{eff}]
\end{aligned} \tag{5.231}$$

em que

$$\begin{aligned}
S_{eff} &= S + \int d^4x [J_\mu A^\mu + \bar{\zeta}c + \bar{c}\zeta] \\
S &\doteq \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{[\partial_\mu A^\mu + gA_\mu A^\mu]^2}{2\xi} - \bar{c}(\square + 2gA_\mu \partial^\mu)c \right].
\end{aligned} \tag{5.232}$$

Primeiramente, trabalhando com a medida de integração,

$$\int DAD\bar{c}Dc \rightarrow \int DAD\bar{c}Dc J \tag{5.233}$$

$$J = \det \begin{bmatrix} 1 & \lambda\partial_\mu\delta(x-y) & 0 \\ -\frac{1}{\xi}\lambda(\partial_\mu + gA_\mu)\delta(x-y) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.234}$$

onde percebemos que o jacobiano é 1. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\delta_{BRST}S_{eff} &= \int d^4x [-J_\mu\delta A_\mu + \bar{\zeta}\delta c + \delta\bar{c}\zeta] \\
&= \lambda \int d^4x [-J_\mu\partial^\mu c - \frac{1}{\xi}\lambda(\partial_\mu + gA_\mu)A^\mu\zeta]
\end{aligned} \tag{5.235}$$

Portanto, impondo a simetria no funcional gerador Z encontramos

$$\int DAD\bar{c}Dc i\lambda \int d^4x [-J_\mu\partial^\mu c - \frac{1}{\xi}\lambda(\partial_\mu + gA_\mu)\partial_\mu A^\mu] \exp[iS_{eff}] = 0, \tag{5.236}$$

dessa forma, temos uma equação do valor médio dos campos. De outra maneira a equação funcional advinda da simetria BRST é dada por

$$\left[\frac{1}{\xi}\lambda(\partial_\mu + gA_\mu)\partial_\mu A^\mu + J_\mu\partial^\mu c \right] Z = 0. \tag{5.237}$$

Aplicando $\frac{\delta^2}{\delta J_\nu \bar{\zeta}}$ na equação anterior e tomando no final as fontes iguais a zero

$$\frac{1}{\xi}\lambda(\partial_\mu + gA_\mu)\langle A^\mu A^\nu \rangle = i\partial^\nu \langle \bar{c}c \rangle. \tag{5.238}$$

Logo, comparando as equações (5.225) e (5.238), a independência da amplitude de transição perante o parâmetro g é assegurada pela simetria BRST.

Como vimos as diferentes escolhas covariantes e extensões da condição de Lorenz só são possíveis devido a simetria BRST pois os parâmetros a mais envolvidos ϵ , g não contribuem para a amplitude de transição e, desse modo, nenhuma quantidade física dependerá desses parâmetros "fictícios". Temos assim um método de como inserir parâmetros fictícios de tal forma que não contribuam para física.

5.9 A simetria BRST em GQED_4 a temperatura finita

No presente momento calcularemos a função de partição utilizando o mínimo de etapas possíveis para descrever fótons livres de Podolsky. Uma consequência desse estudo será o fato da simetria BRST dizer que a função de partição não depende da maneira covariante como fixamos o calibre, caso particular de uma afirmação geral atribuída a Tseytlin que diz: A função de partição é independente sob uma classe de escolhas de calibre, covariantes ou não, devido a simetria BRST [115].

5.9.1 Escolha covariante geral na fixação de calibre

Iniciamos o método propondo a seguinte densidade de Lagrangeana (Euclidiana) em equilíbrio termodinâmico

$$\hat{\mathcal{L}}_N = \frac{1}{4}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_p^2}\partial_\mu\hat{\mathcal{F}}_{\mu\lambda}\partial_\theta\hat{\mathcal{F}}_{\theta\lambda} + \frac{1}{2}\{\hat{B}, G[\hat{\mathcal{A}}]\} + \frac{\xi}{2}\hat{B}^2$$

$$\hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{\mathcal{A}}_\nu - \partial_\nu\hat{\mathcal{A}}_\mu.$$
(5.239)

onde \hat{B} é conhecido como campo auxiliar de Nakanishi e $G[\hat{\mathcal{A}}]$ é operador de escolha de calibre.

Para encontrarmos as equações de movimento em equilíbrio termodinâmico, utilizamos o princípio da ação quântica de Schwinger

$$\hat{S} = \int_{\beta} d^4x \hat{\mathcal{L}}_N.$$
(5.240)

Ao aplicarmos as variações nos campos

$$\hat{\mathcal{A}}_\mu \rightarrow \hat{\mathcal{A}}_\mu + \delta\hat{\mathcal{A}}_\mu$$

$$\hat{B} \rightarrow \hat{B} + \delta\hat{B}$$
(5.241)

e impormos $\delta\hat{S} = 0$, encontramos as equações de movimento. Faremos a seguinte escolha geral de fixação de calibre

$$G[\hat{\mathcal{A}}] = \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^\epsilon \partial_\mu\hat{\mathcal{A}}_\mu.$$
(5.242)

onde

$$\epsilon = 0 \quad (\text{Lorenz}); \quad \epsilon = \frac{1}{2} \quad (\text{No-mixing}); \quad \epsilon = 1 \quad (\text{Lorenz generalizado})$$
(5.243)

Poderíamos pensar em $\epsilon \in [0, 1]$, uma classe de escolhas que fixa os graus de liberdade físicos?

Com as relações

$$\frac{1}{4}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}}_\mu(\delta_{\mu\nu}\Delta + \partial_\mu\partial_\nu)\hat{\mathcal{A}}_\nu$$

$$\frac{1}{2m_p^2}\partial_\mu\hat{\mathcal{F}}_{\mu\lambda}\partial_\theta\hat{\mathcal{F}}_{\theta\lambda} = -\frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}}_\mu(\delta_{\mu\nu}\Delta + \partial_\mu\partial_\nu)\frac{\Delta}{m_p^2}\hat{\mathcal{A}}_\nu$$

$$\delta\hat{S} = \int_{\beta} d^4x \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}_N}{\partial\hat{\mathcal{A}}}\delta\hat{\mathcal{A}} + \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}_N}{\partial\hat{B}}\delta\hat{B},$$
(5.244)

as equações de movimento serão dadas por

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)(\delta_{\mu\nu}\Delta + \partial_\mu\partial_\nu)\hat{\mathcal{A}}_\nu - \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^\epsilon\partial_\mu\hat{B} = \hat{0} \\
& \hat{B} = -\frac{1}{\xi}\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^\epsilon\partial_\nu\hat{\mathcal{A}}_\nu.
\end{aligned} \tag{5.245}$$

Logo,

$$-\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)\left\{\delta_{\mu\nu}\Delta + \left[1 - \frac{1}{\xi}\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^{2\epsilon-1}\right]\partial_\mu\partial_\nu\right\}\hat{\mathcal{A}}_\nu = 0, \tag{5.246}$$

onde definimos o operador diferencial de Podolsky

$$P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)} = -\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)\left\{\delta_{\mu\nu}\Delta + \left[1 - \frac{1}{\xi}\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^{2\epsilon-1}\right]\partial_\mu\partial_\nu\right\}. \tag{5.247}$$

Apesar de termos fixado o calibre, existe uma simetria residual na teoria. Esta pode ser observada fazendo uma transformação de calibre na equação (5.239)

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathcal{A}}_\mu \rightarrow \hat{\mathcal{A}}_\mu + \partial_\mu\hat{\alpha} \\
& \hat{B} \rightarrow \hat{B} \\
& \delta\hat{\mathcal{L}}_N = \frac{1}{2}\{\hat{B}, \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^\epsilon\Delta\hat{\alpha}\}.
\end{aligned} \tag{5.248}$$

Neste caso para que tenhamos uma simetria

$$\delta\hat{\mathcal{L}}_N = \hat{0} \Rightarrow \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^\epsilon\Delta\hat{\alpha} = \hat{0}. \tag{5.249}$$

Vamos implementar a condição anterior por meio de um multiplicador de Lagrange

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_N + \hat{\lambda}\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^\epsilon\Delta\hat{\alpha}. \tag{5.250}$$

Podemos escrever a equação anterior em termos dos campos fantasmas

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_N + i\hat{c}\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^\epsilon\Delta\hat{c}. \tag{5.251}$$

5.9.2 A função de partição

A análise anterior nos conduz a definir a função de partição de maneira direta

$$\begin{aligned}
& Z(\beta) = Z_0 \int D\mathcal{A} \int D\bar{c}Dc \exp[-S], \\
& S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{A}_\mu P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)} \mathcal{A}_\nu - i\bar{c} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1\right)^\epsilon \Delta c \right\}.
\end{aligned} \tag{5.252}$$

De fato, lembrando-se da representação funcional dos determinantes, concluímos que

$$Z(\beta) = Z_0 \det[P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}]^{-\frac{1}{2}} \det[(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^\epsilon \Delta]. \quad (5.253)$$

Agora dado um operador diferencial M

$$M = A\delta_{\mu\nu} + B\partial_\mu\partial_\nu \quad (5.254)$$

$$\det[M] = A^4 - A^3B\Delta.$$

No presente caso $M = P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}$

$$A = -(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta \quad (5.255)$$

$$B = -(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)[1 - \frac{1}{\xi}(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{2\epsilon-1}].$$

Sendo assim,

$$\det[M] = [(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta]^4 [\frac{1}{\xi}(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{2\epsilon-1}] \quad (5.256)$$

$$\det[P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}] = \det[(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta]^4 \det[\frac{1}{\xi}(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{2\epsilon-1}]. \quad (5.257)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= Z_0 \det[(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)\Delta]^{-2} \det[\frac{1}{\xi}(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{2\epsilon-1}]^{-\frac{1}{2}} \det[(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^\epsilon \Delta] \quad (5.258) \\ &= Z_0 \det[m_p^2]^{-\frac{3}{2}} \det[\frac{1}{\xi}]^{-\frac{1}{2}} \det[(\Delta + m_p^2)]^{-\frac{3}{2}} \det[\Delta]^{-1}. \end{aligned}$$

Concluimos então que a função de partição $Z(\beta)$ não depende do parâmetro fictício ϵ , e dessa forma a função de partição não depende da classe de escolhas propostas na equação (5.242). Neste caso, como o objeto função partição esta intrinsecamente relacionado aos graus de liberdade físicos, essa classe de escolhas não modifica os mesmos. No presente caso os graus de liberdade físicos (Maxwell+Proca, $g=2+3$) são dados por

$$\det[\Delta]^{-1} \text{ (Maxwell) } g=2 \quad (5.259)$$

$$\det[(\Delta + m_p^2)]^{-\frac{3}{2}} \text{ (Proca) } g=3.$$

Agora vamos inserir fontes na função partição (5.252) tendo em vista o método de Schwinger para campos à temperatura finita

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= Z_0 \int D\mathcal{A} \int D\bar{c}Dc \exp[-S], \\ S &= \int_\beta d^4x \{ \frac{1}{2} \mathcal{A}_\mu P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)} \mathcal{A}_\nu - i\bar{c}(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^\epsilon \Delta c + \mathcal{A}_\mu \mathcal{J}_\mu + \bar{c}\eta + \bar{\eta}c, \end{aligned} \quad (5.260)$$

e variar com respeito a ϵ

$$\delta Z = \frac{\delta Z}{\delta \epsilon} \delta \epsilon. \quad (5.261)$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z}{\delta \epsilon} &= -Z_0 \int D\mathcal{A} \int D\bar{c}Dc \frac{\delta S}{\delta \epsilon} \exp[-S] \\ &= -Z_0 \int D\mathcal{A} \int D\bar{c}Dc \left\{ \int_{\beta} d^4x \left[\frac{1}{2} \mathcal{A}_{\mu} \frac{\delta P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}}{\delta \epsilon} \mathcal{A}_{\nu} - i\bar{c} \frac{\delta(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{\epsilon}}{\delta \epsilon} \Delta c \right] \right\} \exp[-S] \end{aligned} \quad (5.262)$$

e, conseqüentemente

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z}{\delta \epsilon} &= -Z_0 \int d^4x d^4y \delta^4(x-y) \int D\mathcal{A} \int D\bar{c}Dc \left[\frac{\delta P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}}{\delta \epsilon} \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\nu}(y) + \right. \\ &\quad \left. - i \frac{\delta(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{\epsilon}}{\delta \epsilon} \Delta \bar{c}(x) c(y) \right] \exp[-S]. \end{aligned} \quad (5.263)$$

Portanto,

$$\left\{ \frac{\delta P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}}{\delta \epsilon} \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta J_{\mu}(x) \delta J_{\nu}(y)} - i \frac{\delta(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{\epsilon}}{\delta \epsilon} \Delta \frac{\delta^2}{\delta \bar{c}(x) \delta c(y)} \right\} Z = 0, \quad \delta Z = 0. \quad (5.264)$$

Escrevendo de outra maneira,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\delta P_{\mu\nu}^{(m_p^2, \xi, \epsilon)}}{\delta \epsilon} \langle \mathcal{A}_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\nu}(y) \rangle &= i \frac{\delta(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{\epsilon}}{\delta \epsilon} \Delta \langle \bar{c}(x) c(y) \rangle, \\ \frac{1}{2\xi} \left[\frac{\delta}{\delta \epsilon} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{2\epsilon} \right] \partial_{\mu} \partial_{\nu} \langle \mathcal{A}_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\nu}(y) \rangle &= i \left[\frac{\delta(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1)^{\epsilon}}{\delta \epsilon} \right] \Delta \langle \bar{c}(x) c(y) \rangle, \\ \frac{1}{\xi} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \langle \mathcal{A}_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\nu}(y) \rangle &= i \Delta \langle \bar{c}(x) c(y) \rangle, \end{aligned} \quad (5.265)$$

onde foram utilizadas as identidades,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \epsilon} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{2\epsilon} &= \frac{\delta}{\delta \epsilon} \left[\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon} \right]^2 = 2 \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon} \frac{\delta}{\delta \epsilon} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon} \\ \frac{\delta x^{\epsilon}}{\delta \epsilon} &= \frac{\delta \exp[\epsilon \ln x]}{\delta \epsilon} = \ln x \exp[\epsilon \ln x] = x^{\epsilon} \ln x \\ \frac{\delta}{\delta \epsilon} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon} &= \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon} \ln \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \\ \frac{\delta}{\delta \epsilon} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{2\epsilon} &= 2 \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon} \left[\left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon} \ln \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right) \right] = 2 \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{2\epsilon} \ln \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right). \end{aligned} \quad (5.266)$$

Logo,

$$\frac{1}{\xi} \left(\frac{\Delta}{m_p^2} + 1 \right)^{\epsilon} \partial_{\mu} \langle \mathcal{A}_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\nu}(y) \rangle = i \partial_{\nu} \langle \bar{c}(x) c(y) \rangle. \quad (5.267)$$

A identidade anterior esta associada a uma simetria rígida do problema conhecida como simetria BRST.

5.9.3 A simetria BRST

Como já tivemos oportunidade de observar, mesmo após a inclusão do termo de fixação de calibre a lagrangiana possui uma simetria residual e esta envolve os campos fantasmas.

Começemos relembando a lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathcal{A}_\mu \left[(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \right] \mathcal{A}_\nu + \frac{\mathcal{A}_\mu \left[\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^{2\epsilon} \partial_\mu \partial_\nu \right] \mathcal{A}_\nu}{2\xi} - i\bar{c}(x) \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^\epsilon \Delta c(x). \quad (5.268)$$

Então faremos as seguintes transformações dos campos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu &\rightarrow \mathcal{A}_\mu + \delta\mathcal{A}_\mu \\ c &\rightarrow c + \delta c \\ \bar{c} &\rightarrow \bar{c} + \delta\bar{c}, \end{aligned} \quad (5.269)$$

onde as variações são dadas por

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_\mu &= i\lambda\partial_\mu c(x) \\ \delta c &= 0 \\ \delta\bar{c} &= -\frac{1}{\xi}\lambda\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^\epsilon \partial_\mu \mathcal{A}_\mu \end{aligned} \quad (5.270)$$

e λ é um parâmetro de natureza anticomutante independente do espaço-tempo.

Sendo assim, temos que a lagrangiana inicial se transforma da seguinte forma perante a transformação proposta,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\mathcal{A}_\mu \left[\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^{2\epsilon} \partial_\mu \partial_\nu \right] \delta\mathcal{A}_\nu}{\xi} - \delta\bar{c}(x) \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^\epsilon \Delta c(x) - \bar{c}(x) \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^\epsilon \Delta \delta c(x) \\ &= \frac{\mathcal{A}_\mu \left[\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^{2\epsilon} \partial_\mu \partial_\nu \right] i\lambda\partial_\nu c(x)}{\xi} + i\frac{1}{\xi}\lambda\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^\epsilon \partial_\mu \mathcal{A}_\mu \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^\epsilon \Delta c(x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.271)$$

Portanto a invariância é confirmada já que um termo de derivada total é irrelevante para a ação.

O próximo passo é elevar a linguagem da simetria BRST para campos quânticos em equilíbrio termodinâmico. Isto pode ser feito impondo a simetria no funcional gerador (função partição) Z pois como vimos este gera todas as estruturas quânticas à temperatura finita que precisamos para calcular quantidades físicas. Sendo assim, começemos com o funcional gerador,

$$\begin{aligned} Z[\mathcal{J}, \bar{\xi}, \xi] &= \int D\mathcal{A}D\bar{c}Dc \exp[i \int d^4x \mathcal{L} - \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}^\mu + \bar{\zeta}c + c\zeta], \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\mathcal{A}_\mu \left[(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right) \right] \mathcal{A}_\nu + \frac{\mathcal{A}_\mu \left[\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^{2\epsilon} \partial_\mu \partial_\nu \right] \mathcal{A}_\nu}{2\xi} - i\bar{c}(x) \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2}\right)^\epsilon \Delta c(x), \end{aligned} \quad (5.272)$$

onde podemos definir uma ação efetiva

$$S_{eff} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \mathcal{A}_\mu \left[(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right) \right] \mathcal{A}_\nu + \frac{\mathcal{A}_\mu \left[\left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right)^{2\epsilon} \partial_\mu \partial_\nu \right] \mathcal{A}_\nu}{2\xi} - i\bar{c}(x) \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right)^\epsilon \Delta c(x) + J_\mu A_\mu + \bar{\zeta}c + \bar{c}\zeta \right]. \quad (5.273)$$

Por simplicidade temos,

$$Z = \int d\mu \exp[iS_{eff}]. \quad (5.274)$$

Portanto, perante uma transformação nos campos, o funcional gerador se transforma da seguinte forma

$$\begin{aligned} Z' &= Z + \delta Z, \\ \delta Z &= \int \delta d\mu \exp[iS_{eff}] + \int d\mu i\delta S_{eff} \exp[iS_{eff}]. \end{aligned} \quad (5.275)$$

Analisaremos o caso onde as transformações dos campos definem a simetria BRST a qual estamos interessados em suas implicações. Neste caso,

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= i\lambda \partial_\mu c \\ \delta c &= 0 \\ \delta \bar{c} &= -\frac{1}{\xi} \lambda \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right)^\epsilon \partial_\mu \mathcal{A}_\mu. \end{aligned} \quad (5.276)$$

Primeiramente, trabalhando com a medida de integração,

$$\int DAD\bar{c}Dc \rightarrow \int DAD\bar{c}Dc J, \quad (5.277)$$

$$J = \det \begin{bmatrix} 1 & i\kappa\lambda\partial_\mu\delta(x-y) & 0 \\ -\frac{1}{\xi}\lambda\left(1+\frac{\Delta}{m_p^2}\right)^\epsilon\partial_\mu\delta(x-y) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.278)$$

onde percebemos que o jacobiano é 1. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \delta_{BRST} S_{eff} &= \int d^4x \left[-J_\mu \delta \mathcal{A}_\mu + \bar{\zeta} \delta c + \delta \bar{c} \zeta \right] \\ &= \lambda \int d^4x \left[-iJ_\mu \partial^\mu c - \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right)^\epsilon \partial_\mu \mathcal{A}_\mu \zeta \right]. \end{aligned} \quad (5.279)$$

Portanto, impondo a simetria no funcional gerador Z encontramos

$$\int DAD\bar{c}Dc i\lambda \int d^4x \left[-iJ_\mu \partial^\mu c - \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\Delta}{m_p^2} \right)^\epsilon \partial_\mu \mathcal{A}_\mu \zeta \right] \exp[iS_{eff}] = 0, \quad (5.280)$$

e dessa forma temos uma equação do valor médio dos campos,

$$[-i\mathcal{J}_\mu\partial_\mu c - \frac{1}{\xi}(1+\frac{\Delta}{m_p^2})^\epsilon\partial_\mu\mathcal{A}_\mu\zeta] = 0. \quad (5.281)$$

A equação funcional advinda da simetria BRST é dada por

$$\left[\frac{1}{\xi}(1+\frac{\Delta}{m_p^2})^\epsilon\partial_\mu\mathcal{A}_\mu\zeta + i\mathcal{J}_\mu\partial_\mu c\right] Z = 0. \quad (5.282)$$

Aplicando $\frac{\delta^2}{\delta J_\nu\zeta}$ na equação anterior e tomando no final as fontes iguais a zero

$$\frac{1}{\xi}(1+\frac{\Delta}{m_p^2})^\epsilon\partial_\mu\langle\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\rangle = i\partial_\nu\langle\bar{c}c\rangle. \quad (5.283)$$

Portanto, concluímos que a não dependência da função partição perante o parâmetro ϵ está associada a simetria BRST, observando as equações (5.267) e (5.283). Esta afirmação é um caso particular do trabalho de Tuitin.

5.10 Observações matemáticas

Esta breve secção foi construída apenas para complementar algumas passagens e identidades matemáticas utilizadas ao longo do texto envolvendo Jacobianos, integrais gaussianas, determinantes e propriedades do traço de matrizes, problemas de auto-valores e auto-vetores ao diagonalizar uma matriz, integrais e álgebra estendidas para dimensões quaisquer.

Sendo assim, para iniciar a discussão dada uma matriz por blocos $M_{n,n}$

$$M_{n,n} = \begin{pmatrix} A_{m,m} & B_{m,n-m} \\ C_{n-m,m} & D_{m,m} \end{pmatrix}, \quad (5.284)$$

se D possui inversa podemos dizer utilizando matrizes triangulares que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}. \quad (5.285)$$

Logo

$$\det M = \det(A - BD^{-1}C) \det D. \quad (5.286)$$

A identidade anterior foi utilizada em análise de vínculos para escrever adequadamente a matriz de vínculos $V_{22,22}$ onde separavamos o setor escalar e o setor vetorial.

Dando continuidade é de nosso conhecimento a seguinte identidade

$$\delta(A\psi + B) = \delta\left(A\left[\psi + \frac{B}{A}\right]\right) = \frac{1}{\det[A]}\delta\left(\psi + \frac{B}{A}\right). \quad (5.287)$$

O pensamento guia de como se demonstra a identidade anterior é dado por

$$\delta(Ax + B) \Rightarrow \int dx \delta(Ax + B) = 1$$

$$x = A^{-1}u$$

$$\int dx \delta(A[x + \frac{B}{A}]) = \int du \det[\frac{dx}{du}] \delta(A[x + \frac{B}{A}]) \quad (5.288)$$

$$J = \det[\frac{dx}{du}] = \frac{1}{\det[A]} (\text{Jacobiano})$$

$$\int dx \delta(Ax + B) = \frac{1}{\det[A]} \int du \delta(u + \frac{B}{A}).$$

Neste caso como aplicação, estendido para Teoria de Campos, temos o seguinte

$$\begin{aligned} & \delta\{(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)\psi + (i\beta^\mu \nabla_\mu + m)[1 - (\beta^0)^2]C\} = \\ & = \frac{1}{\det[(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)]} \delta(\psi + \frac{(i\beta^\mu \nabla_\mu + m)[1 - (\beta^0)^2]C}{(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)}). \end{aligned} \quad (5.289)$$

Outra equação utilizada no texto é a seguinte

$$\frac{1}{\det[(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)]} = \epsilon \int D\bar{\psi} D\psi \exp[i \int d^4x \{\bar{\psi}(i\beta^\mu \nabla_\mu - m)\psi\}] \quad (5.290)$$

onde ϵ é uma contante. Para ter uma ideia de como se demonstra a equação (5.290), utilizaremos novamente um pensamento guia com variáveis complexas θ_i ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$\int d\theta^* d\theta \exp[-\theta^* A\theta]$$

$$\theta = U\alpha, \quad U^{-1}AU = A_{diagonal}, \quad U^* = U^{-1}$$

$$\int d\theta^* d\theta \exp[-\theta^* A\theta] = \int d\alpha^* d\alpha \det[U^*U] \exp[-\alpha^* A\alpha] \quad (5.291)$$

$$\det[U^*U] = 1$$

$$\int d\alpha^* d\alpha \exp[-\alpha^* A_{diag}\alpha] = \int d\alpha^* d\alpha \exp[-\lambda_i |\alpha_i|^2] \quad A_{diag}\alpha_i = \lambda_i \alpha_i.$$

Por outro lado, fazendo a mudança de variáveis $\alpha = x + iy$

$$\int d\alpha^* d\alpha = \int dx dy \det \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = 2i \int dx dy. \quad (5.292)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int d\alpha^* d\alpha \exp[-\lambda_i |\alpha_i|^2] &= (2i)^N \int \Pi dx_i \exp[-\lambda_i |x_i|^2] \int \Pi dy_i \exp[-\lambda_i |y_i|^2] \\ &= \frac{(2\pi i)^N}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \dots} = \frac{(2\pi i)^N}{\det[A]}, \end{aligned} \quad (5.293)$$

e desse modo,

$$\int d\theta^* d\theta \exp[-\theta^* A \theta] = \frac{(2\pi i)^N}{\det[A]}. \quad (5.294)$$

Como caso particular ao anterior, sendo θ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) variáveis reais

$$\begin{aligned} & \int d\theta \exp[-\frac{1}{2}\theta^T A \theta] \\ & \theta = U\alpha, \quad U^{-1}AU = A_{diagonal} \quad U^{-1} = U^T \\ & \int d\theta \exp[-\frac{1}{2}\theta^T A \theta] = \int d\alpha \det[U] \exp[-\frac{1}{2}\alpha^T A_{diagonal}\alpha] \\ & \det[U] = 1 \end{aligned}$$

$$\int d\alpha \exp[-\frac{1}{2}\alpha^T A_{diagonal}\alpha] = \int \prod d\alpha_i \exp[-\lambda_i \alpha_i^2] = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \dots}} = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\det[A]^{\frac{1}{2}}}, \quad A_{diagonal}\alpha_i = \lambda_i \alpha_i. \quad (5.295)$$

Portanto,

$$\int d\theta \exp[-\frac{1}{2}\theta^T A \theta] = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{\det[A]^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.296)$$

No caso de variáveis de grassmann Θ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) no corpo dos complexos

$$\begin{aligned} & \int d\Theta^* d\Theta \exp[-\Theta^* A \Theta] \\ & \Theta = U\omega, \quad U^{-1}AU = A_{diagonal}, \quad U^* = U^{-1} \\ & \int d\Theta^* d\Theta \exp[-\Theta^* A \Theta] = \int d\omega^* d\omega \det[U^*U] \exp[-\omega^* A_{diagonal}\omega] \\ & \det[U^*U] = 1 \end{aligned} \quad (5.297)$$

$$\int d\omega^* d\omega \exp[-\omega^* A_{diagonal}\omega] = \int d\omega^* d\omega \prod_i (1 - \lambda_i \omega^* \omega) = \prod_i \lambda_i = \det A, \quad A_{diagonal}\omega_i = \lambda_i \omega_i$$

e, sendo assim

$$\int d\Theta^* d\Theta \exp[-\Theta^* A \Theta] = \det[A]. \quad (5.298)$$

Por fim, no caso de variáveis de grassmann Θ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) no corpo dos reais

$$\int d\Theta \exp[-\frac{1}{2}\Theta^T A \Theta] = \det[A]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.299)$$

Resumindo, temos as seguintes propriedades de integrais gaussianas e seus respectivos determinantes

$$\begin{aligned}
\int d\theta^* d\theta \exp[-\theta^* A \theta] &= \frac{(2\pi i)^N}{\det[A]} \quad (\text{variáveis complexas}), \\
\int d\theta \exp[-\frac{1}{2}\theta^T A \theta] &= \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{\det[A]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{variáveis reais}), \\
\int d\Theta^* d\Theta \exp[-\Theta^* A \Theta] &= \det[A] \quad (\text{variáveis de grassmann no corpo dos complexos}), \\
\int d\Theta \exp[-\frac{1}{2}\Theta^T A \Theta] &= \det[A]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{variáveis de grassmann no corpo dos reais}).
\end{aligned} \tag{5.300}$$

Este conhecimento, estendido para infinitos graus de liberdade em Teoria de Campos foi de grande ajuda no estudo do calibre *no-mixing* e na contagem dos graus de liberdades onde contornamos o surgimento de estruturas pseudo-diferenciais

$$\det[A^{\frac{1}{2}}] = \det[A]^{\frac{1}{2}} = \frac{\det[A]}{\det[A]^{\frac{1}{2}}}, \tag{5.301}$$

$$\int d\Theta^* d\Theta \exp[-\Theta^* A^{\frac{1}{2}} \Theta] = \int d\Theta \exp[-\frac{1}{2}\Theta^T A \Theta]$$

e, neste caso,

$$\int d\Theta \exp[-\frac{1}{2}\Theta^T A \Theta] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int d\Theta^* d\Theta d\theta \exp[-\Theta^* A \Theta - \frac{1}{2}\theta^T A \theta], \tag{5.302}$$

$$N = 2N - N \quad (\text{contagem dos graus de liberdade}).$$

Dizemos que a variável escalar come os graus de liberdade da variável de grassmann no corpo dos complexos equilibrando a equação anterior. O fato de necessitarmos de variáveis de Grassmann no corpo dos complexos está associado à inclusão dos campos fantasmas juntamente com a simetria BRST e a carga fantasma conservada.

Também foi de grande ajuda a seguinte identidade

$$\det[G] = \exp[\text{tr} \ln G]. \tag{5.303}$$

Apenas para justificar a passagem anterior, podemos utilizar como guia de pensamento uma matriz G com as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
G\vec{\lambda}_i &= \lambda_i \vec{\lambda}_i \quad \det[G - \lambda I] = 0 \quad \vec{\lambda}_i = W e_i \Rightarrow (W^{-1} G W) e_i = \lambda_i e_i \\
\det[W^{-1} G W] &= \det[G] = \prod_i \lambda_i \quad \text{tr}[W^{-1} G W] = \text{tr}[G]
\end{aligned} \tag{5.304}$$

então,

$$\ln[\det G] = \ln[\prod_i \lambda_i] = \sum_i \ln[\lambda_i] = \text{tr} \ln G. \tag{5.305}$$

As identidades (5.290) e (5.303) foram utilizadas no estudo da análise de vínculos e quantização funcional em teorias covariantes.

Agora, na análise das primeiras correções radiativas da GSDKP₄, utilizando o método de regularização dimensional foi necessário avaliar as integrais nos momentos por meio dos seguintes resultados

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - b^2]^\alpha} &= \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)[-b^2]^{\alpha - \frac{d}{2}}}, \\ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\alpha k^\nu}{[k^2 - b^2]^\alpha} &= \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta^{\alpha\nu}\Gamma(\alpha - 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)[-b^2]^{\alpha - 1 - \frac{d}{2}}}, \\ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\alpha k^\nu k^\lambda k^\theta}{[k^2 - b^2]^\alpha} &= \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{4(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{(\eta^{\alpha\nu}\eta^{\lambda\theta} + \eta^{\nu\theta}\eta^{\alpha\lambda} + \eta^{\theta\alpha}\eta^{\lambda\nu})\Gamma(\alpha - 2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)[-b^2]^{\alpha - 2 - \frac{d}{2}}}, \end{aligned} \quad (5.306)$$

onde $\eta^{\lambda\theta}\eta_{\lambda\theta} = d$ e as propriedades da função gama, sendo dadas por

$$\Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \Psi_1(n + 1) + O(\varepsilon) \right], \quad (5.307)$$

onde

$$\Psi_1(n + 1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma. \quad (5.308)$$

e γ é a constante de Euler-Mascheroni. Também foi de grande ajuda a seguinte expressão

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1), \quad \chi^{-\frac{\varepsilon}{2}} \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \chi. \quad (5.309)$$

Como sabemos as matrizes β satisfazem a seguinte algebra trilinear

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\theta + \beta^\theta \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu \eta^{\nu\theta} + \beta^\theta \eta^{\nu\mu}.$$

Com propriedades úteis do traço

$$\begin{aligned} Tr \left(\beta_{\mu_1} \beta_{\mu_2} \dots \beta_{\mu_{2n-1}} \right) &= 0, \\ Tr \left(\beta_{\mu_1} \beta_{\mu_2} \dots \beta_{\mu_{2n}} \right) &= \eta_{\mu_1 \mu_2} \eta_{\mu_3 \mu_4} \dots \eta_{\mu_{2n-1} \mu_{2n}} + \eta_{\mu_2 \mu_3} \eta_{\mu_4 \mu_5} \dots \eta_{\mu_{2n} \mu_1}. \end{aligned} \quad (5.310)$$

Podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \beta^\mu \beta^\nu \beta_\mu &= \beta^\nu \Rightarrow \beta^\mu \hat{p} \beta_\mu = \hat{p}, \\ \beta^\mu \hat{p}^2 \beta_\mu &= p^2. \end{aligned} \quad (5.311)$$

Observa-se que

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\theta} (\beta^\mu \beta^\nu \beta^\theta + \beta^\theta \beta^\nu \beta^\mu) &= 2\beta^\nu \\ \beta^\mu \beta^\nu \beta_\mu &= \beta^\nu, \end{aligned} \quad (5.312)$$

e também

$$\begin{aligned} tr[\beta^\mu \beta^\nu \beta^\theta \beta_\mu] &= 5\eta^{\nu\theta} \\ tr[\beta^\mu \hat{p}^2 \beta_\mu] &= tr[I]p^2 = 5p^2 \\ \beta^\mu \hat{p}^2 \beta_\mu &= p^2 \end{aligned} \quad (5.313)$$

Por fim, a extensão da álgebra de DKP para um espaço d -dimensional nos leva às seguintes identidades algébricas

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta_\nu \beta_\mu = d, \quad \beta^\mu \beta^\nu \beta_\nu + \beta^\nu \beta_\nu \beta^\mu = (1 + d)\beta^\mu. \quad (5.314)$$

A extensão da álgebra de DKP para um espaço d -dimensional é assegurada pela extensão da álgebra de Clifford pois

$$\beta^\mu = \frac{1}{2} (\Gamma^\mu + \bar{\Gamma}^\mu) \quad (5.315)$$

onde $\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes 1$ e $\bar{\Gamma}^\mu = 1 \otimes \gamma^\mu$.

Referências

- [1] S. Weinberg, **A model of Leptons**, *Phys. Rev* **19**, 21 (1967).
- [2] S. Weinberg, **Phenomenological lagrangians**, *Physica (Amsterdam) A* **96**, 327 (1979); C. Marat Reyes, **Testing symmetries in effective models of higher derivative field theories**, *Phys. Rev. D* **80**, 105008 (2009).
- [3] M. Ostrogradski, **Memoires sur les equations differentielles relatives au probleme des isoperimetretres**, *Mem. Ac. St. Petersburg VI* **4**, 385 (1850); P. Weiss, **On the Hamilton-Jacobi Theory and Quantization of a Dynamical Continuum**, *Proc. R. Soc. Lond. A* **169**, 102 (1938); **On the Hamilton-Jacobi Theory and Quantization of Generalized Electrodynamics**, *Proc. R. Soc. Lond. A* **169**, 119 (1938); J. S. Chang, **Field theories with high derivatives**, *Proc. Camb. Philos. Soc.* **44**, 76 (1948).
- [4] R. Utiyama, **Invariant theoretical interpretation of interaction**, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956); R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo and P.J. Pompeia, **Second order gauge theory**, *Ann. Phys. (N.Y.)* **322**, 1211 (2007).
- [5] P. J. Pompeia, **Aspectos clássicos de teorias de segunda ordem**, Tese, Instituto de Física Teórica, Unesp, S.P (2009).
- [6] A. Pais and G. E. Uhlenbeck, **On Field Theories with Non-Localized Action**, *Phys. Rev.* **79**, 145 (1950).
- [7] W. Heisenberg, **Lee Model and Quantisation of Nonlinear Field Equations**, *Nucl. Phys.* **4**, 532 (1957).
- [8] S. W. Hawking and T. Hertog, **Living with ghosts**, *Phys. Rev. D* **65**, 103515 (2002).
- [9] A. V. Smilga, **Benign vs malicious ghosts in higher-derivative theories**, *Nucl. Phys. B* **706**, 598 (2005); C. M. Bender and P. D. Mannheim, **No-ghost theorem for the fourth-order derivative Pais–Uhlenbeck oscillator model**, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 110402 (2008); A. V. Smilga, **An Alternative Canonical Approach to the Ghost Problem in a Complexified Extension of the Pais-Uhlenbeck Oscillator**, *SIGMA* **5**, 017 (2009).
- [10] D. S. Kaparulin, S. L. Lyakhovich, and A. A. Sharapov, **Classical and quantum stability of higher-derivative dynamics**, *Eur. Phys. J. C* **74**, 3072 (2014); arXiv:1407.8481 (2014).
- [11] K. S. Stelle, **Renormalization of higher-derivative quantum gravity**, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977); **Classical Gravity with Higher Derivatives**, *Gen. Rel. Grav.* **9**, 353 (1978). T. P. Sotiriou and V. Faraoni, **f(R) theories of gravity**, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 451 (2010).
- [12] F. Bopp, **Eine lineare Theorie des Elektrons**, *Ann. Phys. (Leipzig)* **430**, 345 (1940); B. Podolsky, **A generalized electrodynamics. Part I - non-quantum**, *Phys. Rev.* **62**, 68 (1942); B. Podolsky and C. Kikuchy, **A generalized electrodynamics. Part II - quantum**, *Phys. Rev.* **65**, 228 (1944); B. Podolsky and P. Schwed, **Review of a generalized electrodynamics**, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 4 (1948).

- [13] J. Frenkel, **The self-force of a charged particle in classical electrodynamics**, *Phys. Rev. E* **54**, 5859 (1996).
- [14] A. E. Zayats, **Self-interaction in the Bopp-Podolsky electrodynamics: Can the observable mass of a charged particle depend on its acceleration**, *Ann. Phys.* **342**, 11 (2014); J. Gratus, V. Perlick and R. W. Tucker, **On the self-force in Bopp-Podolsky electrodynamics**, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **48**, 43 (2015).
- [15] F. A. Barone, G. Flores-Hidalgo and A. A. Nogueira, **External sources in Lee-Wick theories**, *Phys. Rev. D* **88**, 105031 (2013); F. A. Barone, G. Flores-Hidalgo and A. A. Nogueira, **Point-charge self-energy in Lee-Wick theories**, *Phys. Rev. D* **91**, 027701 (2015); F. A. Barone and A. A. Nogueira, **A Conducting surface in Lee-Wick electrodynamics**, *Eur. Phys. J. C* **75**, 339 (2015).
- [16] R. Bufalo, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, **Path integral quantization of generalized quantum electrodynamics**, *Phys. Rev. D* **83**, 045007 (2011); R. Bufalo, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, **Renormalizability of generalized quantum electrodynamics**, *Phys. Rev. D* **86**, 125023 (2012).
- [17] R. Bufalo, **Quantização Funcional e Renormalizabilidade da Eletrodinâmica Generalizada**, Tese, Instituto de Física Teórica, Unesp, S.P (2012).
- [18] W. Pauli and F. Villars, **On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory**, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 434 (1949); J. Rayski, **On simultaneous interactions of several fields and the self-energy problem**, *Acta. Phys. Pol.* **9**, 129 (1948); R. Jost and J. Rayski, **Polarization of the Vacuum**, *Phys. Rev.* **75**, 1961 (1949).
- [19] C. A. P Galvão and B. M. Pimentel, **The canonical structure of Podolsky generalized electrodynamics**, *Can. J. Phys.* **66**, 460 (1988).
- [20] C. Lämmerzahl, **The Pseudo-Differential Operator Square Root of the Klein-Gordon Equation**, *J. Math. Phys.* **34**, 9 (1993).
- [21] R. S. Chivukula, A. Farzinnia, R. Foadi and E.H. Simmons, **Global symmetries and renormalizability of Lee-Wick theories**, *Phys. Rev. D* **82**, 035015 (2010).
- [22] R. Bufalo, B. M. Pimentel and D. E. Soto, **Causal approach for the electron-positron scattering in generalized quantum electrodynamics**, *Phys. Rev. D* **90**, 085012 (2014).
- [23] T. D. Lee and G. C. Wick, **Negative Metric and the Unitarity of the S Matrix**, *Nucl. Phys. B* **9**, 209 (1969); **Finite Theory of Quantum Electrodynamics**, *Phys. Rev. D* **2**, 1033 (1970).
- [24] J. Plebansky, **Lectures on Nonlinear Electrodynamics**, 1st edn. (Nordita, Copenhagen, 1968).
- [25] M. Blazhyevska, **The Casimir effect in the electrodynamics of Podolsky**, *J. Phys. Stud.* **16**, 3001 (2012).

- [26] A. A. Nogueira, **Aspectos do modelo Lee-Wick abeliano**, Dissertação, Universidade Federal de Itajubá, M.G (2012).
- [27] R. Bufalo and B. M. Pimentel, **Batalin-Fradkin-Vilkovisky quantization of the generalized scalar electrodynamics**, *Phys. Rev. D* **88**, 125023 (2013).
- [28] T. Kinoshita, **On the Interaction of Mesons with the Electromagnetic Field. I**, *Progress of Theoretical Physics* **5**, 473 (1950); **On the Interaction of Mesons with the Electromagnetic Field. II**, *Progress of Theoretical Physics* **5**, 749 (1950).
- [29] R. A. Krajcik, M. M. Nieto, **Historical development of the Bhabha first-order relativistic wave equations for arbitrary spin**, *Am. J. Phys.* **45**, 818 (1977).
- [30] A. Mazet et C. Imbert, **Huard S. Effet Goos-Hänchen en lumière non polarisée: la réflexion totale sépare les états de polarisation rectiligne**, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series B* **273**, 592 (1971).
- [31] L. de Broglie e J. Vigier, **Photon Mass and New Experimental Results on Longitudinal Displacements of Laser Beams near Total Reflection**, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1001 (1972).
- [32] B. G. Sidharth, **Comments on the Mass of the Photon**, *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **33**, 3 (2008).
- [33] G. Petiau, **Contribution à la théorie des équations d'ondes corpusculaires**, *Académie Royale de Belgique* **16**, (1936).
- [34] J. Géhéniau, **Mécanique ondulatoire de l'électron et du photon**, *Académie Royale de Belgique* **18**, (1938).
- [35] N. Kemmer, **Quantum theory of Einstein-Bose particles and nuclear interaction**, *Proceedings of the Royal Society A* **166**, 924 (1938).
- [36] R. J. Duffin, **On the characteristic matrices of covariant systems**, *Phy. Rev* **54**, 1114 (1938).
- [37] N. Kemmer, **Quantum theory of Einstein-Bose particles and nuclear interaction**, *Proceedings of the Royal Society A* **173**, 91 (1939).
- [38] H. Umezawa, **Quantum Field Theory**, 1st edn. (North-Holland, Amsterdam, 1956).
- [39] E. M. Corson, **Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations**, 1st edn. (Hafner, New York, 1953).
- [40] Y. Takahashi, **An introduction to Field Quantization**, 1st edn. (Pergamon Press, Oxford, 1969).
- [41] E. Fischbach, M. M. Nieto and C. K. Scott, **Duffin-Kemmer-Petiau subalgebras: representations and applications**, *J.Math.Phys.* **14**, 1760 (1973).

- [42] B. C. Clark, S. Hama, G. R. Kälbermann, R. L. Mercer and L. Ray, **Relativistic impulse approximation for Meson-Nucleus scattering in the Kemmer-Duffin-Petiau formalism**, *Phys. Rev. Lett* **55**, 592 (1985); V. K. Mishra, S. Hama, B. C. Clark, R. E. Kozak, R. L. Mercer and L. Ray, **Implications of various spin-one relativistic wave equations for intermediate-energy deuteron-nucleus scattering**, *Phys. Rev C* **43**, 801 (1991).
- [43] M. Nowakowski, **The electromagnetic coupling in Kemmer-Duffin-Petiau theory**, *Phys.Lett. A* **244**, 329 (1998).
- [44] B. M. Pimentel and V. Ya. Fainberg, **On Equivalence of Duffin-Kemmer-Petiau and Klein-Gordon Equations**, *Theo. Math. Phys* **124**, 1234 (2000).
- [45] V. Ya. Fainberg and B. M. Pimentel, **Duffin-Kemmer-Petiau and Klein-Gordon-Fock equations for electromagnetic, Yang-Mills and external gravitational field interactions: proof of equivalence**, *Phys.Lett. A* **271**, 16 (2000).
- [46] V. Ya. Fainberg and B. M. Pimentel, **On equivalence of Duffin-Kemmer-Petiau and Klein-Gordon equations**, *Braz. J. Phys.* **30**, 275 (2000).
- [47] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii, **Elements of Quantum Electrodynamics**, 1st edn. (Interscience Publishers John Wiley&Sons, New York, 1965).
- [48] J. Helmstetter and A. Micali, **The Graded Structure of Non degenerate Meson Algebras**, *Advances in Applied Clifford Algebras* **18**, 196 (2008); A. Micali and M.Rachidi, **On Meson Algebras**, *Advances in Applied Clifford Algebras* **18**, 875 (2008); J. Helmstetter and A. Micali, **About the Structure of Meson Algebras**, *Advances in Applied Clifford Algebras* **20**, 617 (2010).
- [49] S. Gasiorowicz, **Elementary Particle Physics**, 1st edn. (Jon Wiley & Sons, New York, 1996).
- [50] Ephraim Fischbach, Michael Martin Nieto, Henry Primakoff and C. K. Scott, **Meson decays and the DKP equation**, *Phys. Rev. D* **9**, 2183 (1974).
- [51] Gribov, **QCD at large and short distances**, *Eur. Phys. J. C*, **10**, 71 (1999); **The Gribov Theory of Quark Confinement**, 1st edn. (World Scientific, Singapore 2001).
- [52] I.V. Kanatchikov, **On the Duffin-Kemmer-Petiau Formulation of the Covariant Hamiltonian Dynamics in Field Theory**, *Rep. Math. Phys* **46**, 1 (2000).
- [53] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel and R.G. Teixeira, **Duffin-Kemmer-Petiau equation in Riemannian space-times**, Geometrical Aspects of Quantum Fields, Proceedings (Londrina, Brazil, 2000); A. A. Bytsenko, A. E. Gonçalves and B. M. Pimentel, (World Scientific, Singapore, 2001), *Preprint*: 9909033; J. T. Lunardi, B. M. Pimentel and R. G. Teixeira, **Interacting spin 0 fields with torsion via Duffin-Kemmer-Petiau theory**, *Gen. Rel. Grav.* **34**, 491 (2002); R. Casana, J. T. Lunardi, B. M. Pimentel and R. G. Teixeira, **Free eletromagnetic field in riemannian space-time via DKP theory**, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **17**, 4197 (2002); R. Casana, V. Ya. Fainberg , J. T. Lunardi and B. M Pimentel, **Massless DKP fields in Riemann-Cartan spacetimes**, *Class. Quantum Grav.* **20**, 2457 (2003); R. Casana, J. T.

- Lunardi, B. M. Pimentel and R. G. Teixeira, **Conformal invariance of massless Duffin-Kemmer-Petiau theory in Riemannian space-times**, *Class. Quantum Grav.* **22**, 3083 (2005); R. Casana, C. A. M. deMelo and B. M. Pimentel, **Massless DKP field in a Lyra manifold**, *Class. Quantum Grav.* **24**, 723 (2007).
- [54] J. T. Lunardi, **O Campo Escalar no Formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau**, Tese, Instituto de Física Teórica, Unesp, S.P (2001).
- [55] C. A. M. deMelo, **Geometria Invariante de Escala**, Tese, Instituto de Física Teórica, Unesp, S.P (2006).
- [56] M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana, E. S. Santos and J. D. M. Vianna, **Galilean covariance and the Duffin-Kemmer-Petiau equation**, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 273 (2000).
- [57] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira and J. S. Valverde, **Remarks on Duffin-Kemmer-Petiau theory and gauge invariance**, *Phys.Lett. A* **268**, 165 (2000).
- [58] J. T. Lunardi, L. A. Manzoni, B. M. Pimentel and J.S. Valverde, **Duffin-Kemmer-Petiau Theory in the Causal Approach**, *Int. J. Mod.Phys. A* **17**, 205 (2002).
- [59] R. Bufalo, T. R. Cardoso, A. A. Nogueira and B. M. Pimentel, **Functional quantization of Generalized Scalar Duffin-Kemmer-Petiau Electrodynamics**, arXiv:1510.04877 (2015).
- [60] Matsubara, **New Approach to Quantum-Statistical Mechanics**, *Progr. Theor. Phys.* **14**, 351 (1955).
- [61] E. S. Fradkin, **Selected Papers on Theoretical Physics**, Ed. I.V. Tyutin, Lebedev Institute, Moscow (2007)
- [62] J. S. Valverde, **A Teoria de DKP a Temperatura Finita**, Tese, Instituto de Física Teórica, Unesp, S. P (2004).
- [63] C. A. Bonin, R. Bufalo, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, **Podolsky electromagnetism at finite temperature: Implications on the Stefan-Boltzmann law**, *Phys. Rev. D* **81**, 025003 (2010); C. A. Bonin and B. M. Pimentel, **Matsubara-Fradkin thermodynamical quantization of Podolsky electrodynamics**, *Phys. Rev. D* **84**, 065023 (2011).
- [64] C. A. Bonin, **A Quantização da Eletrodinâmica de Podolsky em Equilíbrio Termodinâmico no Formalismo de Matsubara-Fradkin**, Tese, Instituto de Física Teórica, Unesp, S.P (2011).
- [65] Emmy Noether, **Invariant Variation Problems**, *Nachr. d. König. Gesellsch.d. Wiss. zu Göttingen*, Math-phys. Klasse, 235 (1918); M. A. Tavel's English translation.
- [66] Philip D. Powell, **Calculating determinants of block matrices**, arXiv:1112.4379 (2011); John R. Silvester, **Determinants of Block Matrices**, Department of Mathematics, King's College, London (1999).

- [67] J. D. Bjorken and S. D. Drell, **Relativistic Quantum Fields**, (McGraw-Hill, New York, 1965); Schweber, **An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory**, (Row, Peterson and Company, New York, 1961).
- [68] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, **Quantum Electrodynamics**, (Pergamon Press, Oxford, 1982).
- [69] F. J. Dyson, **The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman**, *Phys. Rev.* **75**, 486 (1949).
- [70] J. S. Schwinger, **The Theory of Quantized Fields. I**, *Phys. Rev.* **82**, 914 (1951).
- [71] C. D. Roberts and A. G. Williams, **Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics**, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **33**, 477 (1994).
- [72] J. C. Ward, **The Scattering of Light by Light**, *Phys. Rev.* **77**, 293 (1950); J.C. Ward, **An Identity in Quantum Electrodynamics**, *Phys. Rev.* **78**, 182 (1950); Y. Takahashi, **On the generalized ward identity**, *Il Nuovo Cimento* **6**, 371 (1957).
- [73] N. N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, **Introduction to the Theory of Quantized Fields**, 3rd edn. (John Wiley & Sons, New York, 1980) ; S. Pokorski, **Gauge Field Theories**, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [74] S. Weinberg, **High-Energy Behavior in Quantum Field Theory**, *Phys. Rev.* **118**, 838 (1960).
- [75] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, **Dimensional renormalization: The number of dimensions as a regularizing parameter**, *Nuovo Cimento B* **12**, 20 (1972).
- [76] G. 't Hooft and M. Veltman, **Regularization and renormalization of gauge fields**, *Nucl. Phys. B* **44**, 189 (1972).
- [77] G. 't Hooft, **Dimensional regularization and the renormalization group**, *Nucl. Phys. B* **61**, 455 (1973).
- [78] P. H. Frampton, **Gauge Field Theories**, 3rd edn. (Wiley-VCH, Weinheim, 2008).
- [79] C. Nash, **Relativistic Quantum Fields**, 1st edn. (Dover, New York, 2011); E. Leader and E. Predazzi, **An introduction to gauge theories and modern particle physics vol. II**, 1st edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [80] C. Itzykson and J. B. Zuber, **Quantum Field Theory**, (Dover, New York, 2005).
- [81] A. A. Nogueira and B. M. Pimentel, **Matsubara-Fradkin formalism of Generalized Scalar Duffin-Kemmer-Petiau Electrodynamics**, work in progress.
- [82] A. A. Nogueira and B. M. Pimentel, **The BRST symmetry and the method of fictitious parameters**, work in progress.

- [83] N. Nakanishi, **Covariant Quantization of the Electromagnetic Field in the Landau Gauge**, *Progr. Theor. Phys.* **35**, 1111 (1966); N. Nakanishi and I. Ojima, **Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity**, 1st edn. (World Scientific, Singapore, 1990).
- [84] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, **Quantization of Relativistic Systems with Constraints**, *Phys. Lett. B* **55**, 224 (1975).
- [85] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, **Relativistic S-Matrix of Dynamical Systems with Boson and Fermion Constraints**, *Phys. Lett. B* **69**, 309 (1977).
- [86] E. S. Fradkin and T. E. Fradkina, **Quantization of Relativistic System with Boson and Fermion First and Second-Class Constraints**, *Phys. Lett. B* **72**, 343 (1978).
- [87] B. S. De Witt, **Quantum theory of gravity II The manifestly covariant theory**, *Phys. Rev* **162**, 1195 (1967).
- [88] L. F. Abbott, **The Background Field Method Beyond One Loop**, *Nucl. Phys B* **185**, 189 (1981); L. F. Abbott, **Introduction to the Background Field Method**, *Acta Physica Polonica B* **13**, (1982); L. F. Abbott, M. T. Grisaru and R. K. Schaefer, **The Background Field Method and the S-Matrix**, *Nucl. Phys B* **229**, 372 (1983).
- [89] L. D. Landau and I. M. Khalatnikov, **The gauge transformation of the Green function for charged particles**, *Zhur. Eksptl. i Teor. Fiz.* **29**, 89 (1955) (Trad: *Soviet. Phys. JETP* **2**, 69 (1956)). E. S. Fradkin, **Concerning some general relations of quantum electrodynamics**, *Sov. Phys. JETP* **2**, 361 (1956).
- [90] G. 't Hooft and M. Veltman, **Diagrammar**, CERN 73-9 Laboratory I. Theoretical Studies Division (1973).
- [91] H. M. Fried e D. R. Yennie, **New Techniques in the Lamb Shift Calculation**, *Phys. Rev.* **112**, 1391 (1958); G. S. Adkins, **Fried-Yennie gauge in dimensionally regularized QED**, *Phys. Rev. D* **47**, 3647 (1993); G. S. Adkins, **Calculation of the electron magnetic moment in Fried-Yennie gauge QED**, *Phys. Rev. D* **39**, 3798 (1989).
- [92] G. Källén, **On the Definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics**, *Helvetica Physica Acta* **25**, 417 (1952); H. Lehmann, **Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder**, *Nuovo Cimento (Società Italiana di Fisica)* **11**, 342 (1954).
- [93] C. G. Callan, Jr., **Broken Scale Invariance in Scalar Field Theory**, *Phys. Rev. D* **2**, 1541 (1970); K. Symanzik, **Small Distance Behaviour in Field Theory and Power Counting**, *Commun. Math. Phys.* **18**, 227 (1970); K. Symanzik, **Small-Distance-Behaviour Analysis and Wilson Expansions**, *Commun. math. Phys.* **23**, 49 (1971).
- [94] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, **Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien**, *Nuovo Cimento* **1**, 205 (1955).

- [95] J. V. B. Ramírez, **Eletrodinâmica Quântica Escalar via Teoria de Perturbação Causal: um estudo**, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Teórica, Unesp, S. P (2014); D. S. Barrientos, **Eletrodinâmica Quântica Generalizada a la Teoria de Perturbação Causal**, Tese, Instituto de Física Teórica, Unesp, S.P (2014).
- [96] R. Bufalo, B.M. Pimentel and D.E. Soto, **Normalizability analysis of the generalized quantum electrodynamics from the causal point of view**, arXiv:1510.00023 (2015).
- [97] E. S. Fradkin, **Application of Functional Methods in Quantum Field Theory and Quantum Statistics (II)** Nucl. Phys. **76**, 588 (1966).
- [98] M. Le Bellac, **Thermal Field Theory**, 1st edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [99] P. W. Higgs, **Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons**, *Phys. Rev* **13**, 16 (1964).
- [100] G. t'Hooft, **Magnetic monopoles in unified gauge theories**, *Nuclear Physics B* **79**, 276 (1974); A. M. Polyakov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 430 (1974).
- [101] Julian Heeck, **How Stable is the Photon?**, *Phys. Rev. Lett* **111**, 021801 (2013).
- [102] B. L van Der Waerden, **Sources of Quantum Mechanics**, 1st edn. (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967); P. A. M. Dirac, **The Principle of Quantum Mechanics**, 4th edn. (Oxford University Press, London, 1958).
- [103] P. A. M. Dirac, **Generalized Hamiltonian Dynamics**, *Canad. J. Math.* **2**, 129 (1950); **Lectures on Quantum Mechanics**, 1st edn. (Belter Graduate School of Science, New York, 1964).
- [104] P. A. M. Dirac, **The Lagrangian in Quantum Mechanics**, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* **3**, 64 (1933).
- [105] J. Schwinger, **Symbolism of Atomic Measurements**, 1st edn. (Springer, New York 2001).
- [106] R. Feynman, **A New Approach to Quantum Theory**, 1st edn. (World Scientific, New Jersey 2005).
- [107] L. D. Faddeev, **Feynman integral for singular Lagrangians**, *Teor. Mat. Fiz.* **1**, 3 (1969); *Theor. Math. Phys.* **1**, 1 (1969).
- [108] P. Senjanovic, **Path integral quantization of field theories with second-class constraints**, *Ann. Phys.* **100**, 227 (1976).
- [109] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, **Quantization of relativistic systems with constraints. Equivalence of canonical and covariant formalisms in quantum theory of gravitational field**, CERN report TH 2332 (1977).
- [110] K. Sundermeyer, **Constrained Dynamics**, 1st edn. (Springer-Verlag, Berlin, 1982); D. M. Gitman and I. V. Tyutin, **Quantization of Fields with Constraints**, 1st edn. (Springer-Verlag, Berlin, 1990).

- [111] H. J. Rothe and K. D. Rothe, **Classical and quantum dynamics of constrained Hamiltonian systems**, 1st edn. (World Scientific, New Jersey, 2010).
- [112] J. D. Jackson, **Classical Electrodynamics**, 3rd edn. (John Wiley & Sons, New York, 1998).
- [113] Paulo Henrique Ortega, **Aspectos Clássicos da Eletrodinâmica de Podolsky**, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Teórica, Unesp, S.P (2014).
- [114] L. D. Faddeev and V. N. Popov, **Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field**, *Phys. Lett. B* **25**, 29 (1967); B.S. DeWitt, **Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory**, *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
- [115] I. V. Tyutin, **Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism**, Preprint of P. N. Lebedev Physical Institute **39**, (1975); arXiv: 0812.0580 (2008).