

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Bauru - SP

KAREN ROCHA COELHO

**O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM USO E
VENDA DE RETALHOS: UMA PROPOSTA DE
OTIMIZAÇÃO PARA A SUSTENTABILIDADE
AMBIENTAL**

Bauru - SP
2015

KAREN ROCHA COELHO

**O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM USO E
VENDA DE RETALHOS: UMA PROPOSTA DE
OTIMIZAÇÃO PARA A SUSTENTABILIDADE
AMBIENTAL**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Estadual Paulista “Júlio De Mesquita Filho”, UNESP, Câmpus de Bauru, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção

Prof^a. Dr^a. Adriana Cristina Cherri Nicola
Orientadora
Prof^a. Dr^a. Edméa Cássia Baptista
Co-orientadora

Bauru - SP

2015

Coelho, Karen Rocha.

O problema de corte de estoque com uso e venda de retalhos: uma proposta de otimização para a sustentabilidade ambiental / Karen Rocha Coelho, 2015
105 f. : il.

Orientadora: Adriana Cristina Cherri Nicola

Coorientadora: Edméa Cássia Baptista

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2015


1. Problema de Corte de Estoque Unidimensional.
2. Aproveitamento de Sobras.
3. Modelo Matemático.
4. Geração de Colunas.
5. Produção Mais Limpa (P+L) I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado DE KAREN ROCHA COELHO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.

Aos 27 dias do mês de novembro do ano de 2015, às 10:00 horas, no(a) Sala de videoconferência da Engenharia Elétrica/FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. ADRIANA CRISTINA CHERRI NICOLA do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru, Profa. Dra. FRANKLINA MARIA BRAGION DE TOLEDO do(a) Depto. de Matemática Aplicada e Estatística / Universidade de São Paulo, Prof. Dr. CHARBEL JOSE CHIAPPETTA JABBOUR do(a) Departamento de Engenharia de Produção / Faculdade de Engenharia de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de KAREN ROCHA COELHO, intitulada "MODELO MATEMÁTICO PARA RESOLVER O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM USO E VENDA DE RETALHOS E IMPLICAÇÕES EM P+L". Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: aprovada. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Profa. Dra. ADRIANA CRISTINA CHERRI NICOLA


Profa. Dra. FRANKLINA MARIA BRAGION DE TOLEDO


Prof. Dr. CHARBEL JOSE CHIAPPETTA JABBOUR



PROPOSTA DE ALTERAÇÃO DO TÍTULO

A BANCA EXAMINADORA PROPÕE A ALTERAÇÃO DO TÍTULO DO TRABALHO DA ALUNA:
KAREN ROCHA COELHO

DE: "MODELO MATEMÁTICO PARA RESOLVER O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM USO E VENDA DE RETALHOS E IMPLICAÇÕES EM P+L"

PARA:

O problema de corte de estoque com uso e venda de retalhos: uma proposta de otimização para a sustentabilidade ambiental.

Bauru, 27 de novembro de 2015.

Prof. Dra. **ADRIANA CRISTINA CHERRI NICOLA**

Orientadora

Aos meus pais, Marcos e Cátia, e ao meu esposo Rodrigo, pelo apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me permitir finalizar mais uma etapa de minha vida, me proporcionando saúde e perseverança.

Aos meus pais, Marcos e Cátia, pelos seus esforços em me proporcionar uma boa educação desde a infância e por todos os ensinamentos de vida. Ao meu irmão Willian e sua esposa Ivone pelo incentivo e à minha linda sobrinha Ana Laura, que da maneira mais inocente me alegrou nos momentos de tristeza e desânimo. A todos os familiares pelo carinho e apoio.

Ao meu esposo Rodrigo, que compreendeu minhas ausências e sempre esteve presente nos momentos mais difíceis, me incentivando e dando forças para continuar. Obrigado pela amizade, amor e dedicação.

Às professoras Adriana Cristina Cherri Nicola e Edméa Cássia Baptista pela orientação, incentivo, paciência e pela confiança em mim depositada. Obrigado pela disponibilidade e por me acompanhar neste importante momento de minha formação.

Ao amigo Douglas, pela preciosa ajuda e pelas inúmeras discussões acerca deste trabalho. Agradeço, também, aos amigos Diego e Ever, que sempre estiveram dispostos a me auxiliar durante os momentos de dificuldade.

Agradeço à professora Edilaine Martins Soler e ao professor Charbel José Chiappetta Jabbour pelas preciosas sugestões que só fizeram enriquecer este trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e da Licenciatura em Matemática da UNESP - Bauru, por contribuírem para minha formação acadêmica, bem como aos funcionários da Seção Técnica de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia e do Departamento de Matemática, pela assistência e atenção concedidas.

Agradeço aos colegas de trabalho do Centrinho e aos colegas do Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, que sempre me apoiaram e incentivaram.

Enfim, agradeço a todos que, profissional ou pessoalmente, estiveram a meu lado e participaram deste importante momento de minha vida.

*Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei
para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser,
mas Graças a Deus, não sou o que era antes.*

Martin Luther King

RESUMO

Este trabalho, tendo em vista as teorias de *Ecological Modernization* e Produção Mais Limpa (P+L), relaciona sustentabilidade e pesquisa operacional por meio de uma variação do problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis (PCESA). No PCESA um conjunto de objetos padronizados (comprados de fornecedores) ou não padronizados (retalhos gerados em processos de corte anteriores), disponíveis em estoque, devem ser cortados em um conjunto de itens com dimensões e quantidades especificadas. Este problema tem por finalidade determinar a melhor forma de cortar os objetos de modo a otimizar uma função objetivo e considerando que uma determinada quantidade de retalhos pode retornar ao estoque para atender futuras demandas. Diferente dos trabalhos propostos na literatura, neste trabalho, o PCESA será resolvido, porém, os retalhos em estoque além de serem utilizados, poderão ser vendidos se esta opção for a mais atrativa. Este problema, denominado de problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis e venda de retalhos (PCESAVR), tem por objetivo maximizar o lucro. Para modelar o PCESAVR, alterações foram realizadas em um modelo matemático proposto na literatura e, para resolvê-lo, foi utilizado o método simplex com geração de colunas. Como a solução obtida para este problema não é inteira, dois procedimentos heurísticos, que também consideram o aproveitamento de sobras, foram propostos. Testes computacionais foram realizados com exemplares gerados aleatoriamente considerando problemas estáticos e uma simulação por períodos de tempo, na qual os retalhos gerados em um período ficam disponíveis para o uso e/ou venda no período seguinte. Com esses testes, verificou-se o bom desempenho da estratégia proposta. Devido às particularidades dessa estratégia, também se fez uma análise e discutiu-se os resultados considerando implicações na P+L, que é uma estratégia que pretende integrar objetivos ambientais aos processos industriais, a fim de reduzir a quantidade de resíduos e emissões. Alinha-se também à teoria de *Ecological Modernization*, uma vez que busca a redução de impactos ambientais das empresas por meio de inovações produtivas. Além disso, a possibilidade de gerar retalhos contribui para a diminuição da perda de matéria-prima durante o processo de corte. Ao reduzir a perda e aumentar o lucro as empresas podem se tornar mais competitivas no mercado, além de incorporar aspectos ambientais em sua estratégia de operações que, conseqüentemente, melhora a sua imagem e rentabilidade. Diversos trabalhos que fazem uso da pesquisa operacional para resolver problemas industriais já foram publicados, entretanto, não há trabalhos na literatura que associam as características de seus problemas e os resultados com aspectos de sustentabilidade ambiental.

Palavras-chave: Problema de corte de estoque unidimensional; aproveitamento de sobras; modelo matemático; geração de colunas, Produção Mais Limpa (P+L).

ABSTRACT

Considering the theories of Ecological Modernization and Cleaner Production (CP), this work relates the sustainability and the operational research through a variation of cutting stock problem with usable leftovers (CSPUL). In the CSPUL a set of standard objects (bought from suppliers) or non-standard objects (retails generated in previous cutting processes), which are available in stock, must be cut in order to produce a set of demanded items with dimensions and specified quantities. The objective consists of determining the best way to cut the objects optimizing an objective function and considering that a certain amount of retails can return to the stock to meet future demands. Differently of the works from the literature, in this work, the CSPUL will be solved, however, retails in stock in addition to being used, they can be sold if this option is more attractive. This problem is named of cutting stock problem with usable leftovers and sale retails (CSPULSR) and has the objective of maximizing the profit. To model the CSPULSR, was modified a mathematical model proposed in the literature and, to solve it, the simplex method with column generation was used. As the obtained solution to this problem is not integer, were proposed two heuristic procedures that also consider the usable leftovers. Computational tests were performed with randomly generated instances considering static problems and a simulation by periods of time, in which retails generated in a period stay available for use and/or sale of the next period. With these tests, very good performance of the proposed strategy was verified. Due to the particularities of this strategy, also was realized an analysis and discussed the results considering implications for CP, which is a strategy that intends to integrate environmental objectives into industrial processes, in order to reduce the amount of waste and emissions. It also aligns the theory of Ecological Modernization as it seeks to reduce the environmental impacts of companies through productive innovation. Furthermore, the possibility of generating retails contributes to reduce the waste of raw material during the cutting process. Reducing the waste and increasing the profit, the companies can become more competitive in the market, while incorporating environmental aspects in their operation strategies and, consequently, make better their image and profitability. Several works that use operational research to solve industrial problems were already published. However, there were not found paper that associate characteristic of their problems and the results with aspects of environmental sustainability.

Keywords: One-dimensional cutting stock problems; usable leftovers; mathematical model; column generation; Cleaner Production (CP).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Exemplo de Padrões de Corte	20
Figura 2	Representação do Problema da Mochila	21
Figura 3	(a) Objeto (barra) a ser cortado; (b) Objeto cortado produzindo 4 itens e uma perda	24
Figura 4	(a) Placa a ser cortada; (b) Objeto cortado produzindo 8 itens e uma perda	25
Figura 5	(a) Contêiner; (b) 4 caixas empacotadas no contêiner	26
Figura 6	Exemplo de PCESA	31
Figura 7	Escopo de atuação da metodologia Produção mais Limpa (P+L)	38
Figura 8	Resumo dos conceitos em operações sustentáveis	40
Figura 9	(a) Objeto padronizado; (b) Objeto cortado produzindo 1 retalho e 1 objeto reduzido	46
Figura 10	Tipos de retalhos gerados - Heurística Residual 1	77
Figura 11	Tipos de retalhos gerados - Heurística Residual 2	78
Figura 12	Tipos de retalhos cortados - Heurística Residual 1	78
Figura 13	Tipos de retalhos cortados - Heurística Residual 2	79
Figura 14	Tipos de retalhos vendidos - Heurística Residual 1	79
Figura 15	Tipos de retalhos vendidos - Heurística Residual 2	80

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Lucro médio - Sem estoque inicial de retalhos.	70
Tabela 2	Lucro médio - Com estoque inicial de retalhos.	71
Tabela 3	Gap do Lucro (%) - Sem retalhos em estoque.	72
Tabela 4	Gap do Lucro (%) - Com retalhos em estoque.	73
Tabela 5	Lucro médio.	75
Tabela 6	Quantidade de retalhos gerados, cortados e vendidos - Heurística Residual 1.	76
Tabela 7	Quantidade de retalhos gerados, cortados e vendidos - Heurística Residual 2.	76
Tabela 8	Lucro obtido com retalhos cortados - Heurística Residual 1.	81
Tabela 9	Lucro obtido com venda de retalhos - Heurística Residual 1.	81
Tabela 10	Lucro obtido com retalhos cortados - Heurística Residual 2.	81
Tabela 11	Lucro obtido com venda de retalhos - Heurística Residual 2.	82
Tabela 12	Perda média - Sem estoque inicial de retalhos.	83
Tabela 13	Perda média - Com estoque inicial de retalhos.	84
Tabela 14	Perda média - Testes por período.	85

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Classificação dos Problemas de Corte de Estoque	24
1.1.1	Unidimensional	24
1.1.2	Bidimensional	25
1.1.3	Tridimensional	25
1.1.4	Multidimensional	26
1.2	Objetivos	26
1.3	Motivação e contextualização	26
1.4	Organização do Trabalho	29
2	REVISÃO DA LITERATURA	31
2.1	Problemas de Corte de Estoque com Sobras Aproveitáveis	31
2.2	Operações Sustentáveis	34
3	MODELO MATEMÁTICO PARA O PCESAVR	41
3.1	Modelo Clássico	41
3.2	Definição e Formulação Matemática do PCESAVR	43
4	MÉTODO DE SOLUÇÃO PARA O PCESAVR	47
4.1	O Método Simplex	47
4.1.1	O Algoritmo Simplex	51
4.2	Geração de Colunas	52
4.2.1	O Algoritmo Simplex com Geração de Colunas	55
4.3	O Método Simplex com Geração de Colunas Aplicado ao PCESAVR	57

5	HEURÍSTICA RESIDUAL PARA O PCESAVR	61
5.1	Problema Residual	61
5.2	Heurísticas Residuais	62
5.3	Heurísticas Residuais para o PCESAVR	63
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	67
6.1	Dados para os problemas	67
6.2	Testes Estáticos	69
6.3	Testes por períodos	74
6.4	Análise da Perda e suas Implicações em P+L	82
6.4.1	Implicações da redução da perda em P+L	86
7	CONCLUSÕES E PROPOSTAS FUTURAS	89
	REFERÊNCIAS	91
	APÊNDICE A - Exemplo Método Simplex	97

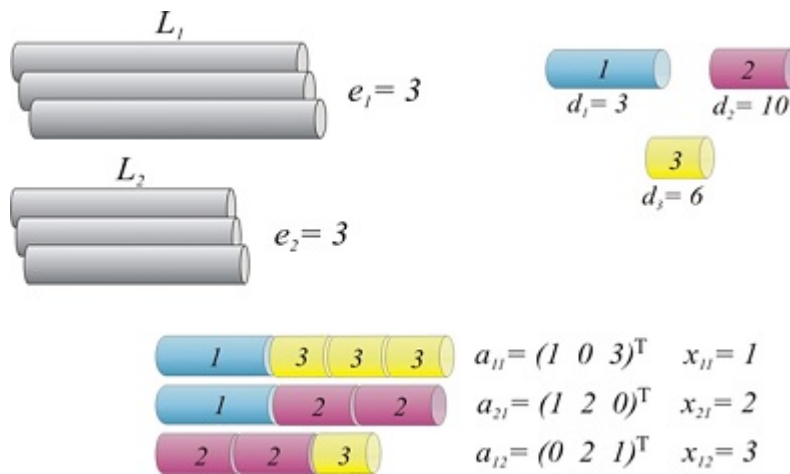
1 INTRODUÇÃO

O problema de corte de estoque (PCE) consiste em cortar um conjunto de objetos disponíveis em estoque em um conjunto de itens, cujas quantidades e tamanhos são especificados, com a finalidade de atender demandas de clientes ou compor estoque (GILMORE; GOMORY, 1961). Para solucionar o problema deve-se otimizar uma função objetivo como, por exemplo, minimizar o número total de objetos cortados, minimizar o custo de cortar objetos, maximizar o lucro, minimizar a perda, entre outras. A aplicação deste tipo de problema ocorre em diversos processos industriais, tais como, o corte de bobinas de aço e de papel, chapas de vidro, peças de madeira, barras de ferro.

As várias aplicações na indústria, sua importância econômica, a dificuldade em resolvê-los e a complexidade computacional tornam os PCE muito importantes na área de otimização combinatória, além de motivar a comunidade de pesquisa operacional a encontrar boas soluções para estes problemas. Uma solução para o PCE, frequentemente denominada de plano de corte, é gerada por um conjunto de padrões de corte e suas respectivas frequências, em outras palavras, quantas vezes cada padrão de corte deve ser cortado para produzir itens.

Um padrão de corte define um subconjunto de itens que deve ser cortado a partir de um objeto disponível em estoque. Um exemplo de padrão de corte, para o caso em que temos mais de um tipo de objeto em estoque, pode ser visto na Figura ??, em que os itens d_1 , d_2 e d_3 possuem quantidades e tamanhos específicos e, para a demanda ser atendida, esses itens são cortados dos objetos tipo L_1 e L_2 disponíveis em estoque em quantidade suficiente para atender a demanda. Temos então, que a_{11} , a_{21} e a_{12} são os padrões de corte e x_{11} , x_{21} e x_{12} representam, respectivamente, a frequência de cada padrão.

Figura 1 - Exemplo de Padrões de Corte



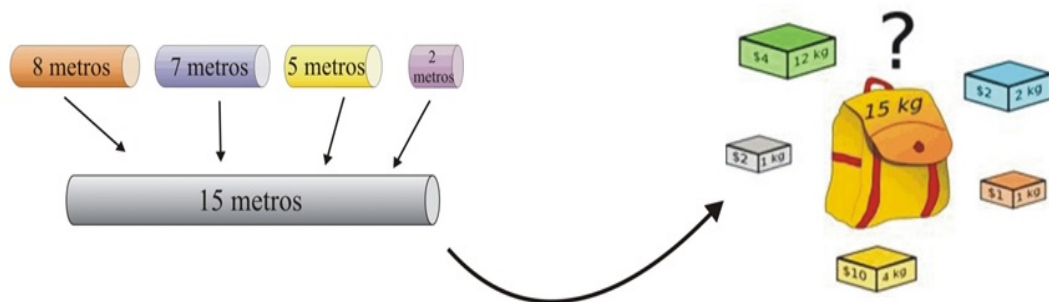
Fonte: Cherri (2009)

Determinar de forma ótima a frequência com que cada padrão de corte deve ser produzido é uma das grandes dificuldades na resolução destes problemas. A frequência de um padrão de corte deve ser um número inteiro e, mesmo para problemas com poucas variáveis, essa pode ser uma difícil tarefa. Desta forma, recorre-se a procedimentos heurísticos que, embora não forneçam uma solução ótima para o problema, de modo geral, apresentam soluções inteiras próximas da otimalidade.

A primeira formulação para os PCE's foi apresentada em 1939 pelo economista russo Kantorovich (1960), embora as principais pesquisas sobre o assunto tenham surgido com os trabalhos de Gilmore e Gomory (1961, 1963). Em 1961, os autores propuseram o método simplex com geração de colunas e, pela primeira vez, resolveram problemas reais de corte unidimensional (uma aproximação para o problema). Em Gilmore e Gomory (1963) foi apresentado um novo método para o problema da mochila e foi realizado um estudo de caso no corte de papel. Nos PCE's, o problema da mochila surge como um subproblema a ser resolvido, fornecendo as novas colunas (padrões de corte) para o problema original.

O nome *Problema da Mochila* é utilizado devido a uma situação hipotética em que é necessário preencher uma mochila com objetos de diferentes pesos e valores. O objetivo é preencher a mochila com os objetos de forma que a soma dos valores dos objetos seja máxima, não ultrapassando o peso máximo da mochila. A Figura ?? representa como o problema da mochila pode ser associado ao PCE unidimensional:

Figura 2 - Representação do Problema da Mochila



Neste exemplo, semelhante ao objetivo de preencher a mochila com a quantidade máxima de objetos não ultrapassando seu peso, no PCE unidimensional preenchemos a barra de 15 metros com a maior quantidade possível de itens de tamanhos 8, 7, 5 e 2 metros de forma que ocorra o maior aproveitamento da barra formando, assim, um padrão de corte.

Haessler (1975) apresentou um procedimento heurístico computacional para resolver problemas de corte de estoque unidimensionais com custo fixo associado à troca de padrões de corte. Em Haessler (1980) foram propostas mudanças nos procedimentos de Gilmore e Gomory (1961) e (1963), mostrando que controlar a geração dos padrões com limitações do número de itens ajuda a reduzir problemas de arredondamento e mudanças de padrões de corte. Hinxman (1980) apresentou uma revisão dos problemas e métodos de resolução de problemas de corte de estoque e formalizou a heurística de repetição exaustiva, bastante utilizada na prática principalmente quando a demanda dos itens é baixa.

Na década de 1990, Stadtler (1990) realizou um estudo de caso em uma indústria de alumínio com o objetivo de determinar o número mínimo necessário de objetos em estoque para atender as demandas de clientes. O autor propôs um novo método baseado no processo de geração de colunas proposto por Gilmore e Gomory (1961) e (1963) e apresentou um procedimento de arredondamento para obtenção de uma solução inteira (heurística residual). Wäscher e Gau (1996) reuniram em um artigo vários métodos heurísticos. Tais métodos possibilitam determinar soluções inteiras para o PCE. Vahrenkamp (1996) fez um estudo comparativo entre o algoritmo de Gilmore e Gomory (1961) para a solução do PCE com uma heurística baseada em algoritmos genéticos e relacionou a estrutura randômica dos algoritmos genéticos a uma escolha randômica de padrões de corte, com o objetivo de minimizar a perda de material.

Limeira e Yanasse (2001) propuseram uma heurística para a redução do número de padrões de corte para os problemas de corte de estoque, enquanto Poldi e Arenales (2009) investigaram o problema de obtenção de uma solução inteira para o PCE enfatizando baixas demandas e

vários tamanhos de objetos em estoque.

São várias as situações em que surgem os PCE's, cada um deles com suas especificidades, restrições e objetivos definidos pelas exigências práticas impostas em cada ambiente em que estes problemas aparecem. Uma consequência do processo de corte é o aproveitamento de sobras de objetos cortados desde que estas apresentem tamanhos suficientemente grandes para retornar ao estoque e atender demandas futuras. Estas sobras que retornam ao estoque são denominadas retalhos e não são computadas como perdas de material. Este problema é conhecido na literatura como Problema de Corte de Estoque com Sobras Aproveitáveis (PCESA).

Brown (1971) foi um dos primeiros autores a tratar implicitamente o aproveitamento de sobras em seu trabalho, mas foi Roodman (1986) que, a partir da técnica de geração de colunas proposta por Gilmore e Gomory (1963), descreveu um conjunto de procedimentos heurísticos para a geração de soluções para problemas de corte unidimensionais, com o objetivo de minimizar as perdas considerando a possibilidade de geração de retalhos durante o processo de corte. Scheithauer (1991) modificou o problema proposto por Gilmore e Gomory (1963) e considerou o aproveitamento de sobras durante o processo de corte.

Visto que o objetivo central de uma empresa é maximizar o lucro e que a matéria-prima não convertida em produto pode significar prejuízos, tecnologias e processos que visam o máximo aproveitamento dos objetos em estoque e a utilização eficiente dessa matéria-prima, como é o caso dos PCESA, são de extrema importância no processo industrial. Não descartar as sobras resulta em um menor desperdício, o qual gera um aumento no lucro da empresa e, consequentemente, minimiza os prejuízos ao meio ambiente, que recebe menor quantidade de resíduos. Este é um ponto de vista que vai ao encontro da estratégia “win-win”, ou seja, “ganha-ganha”. De acordo com Sarkis et al. (2011), a partir dessa estratégia, os governos têm incentivado as empresas a adotar algumas práticas ambientais com base no pressuposto de que também será benéfico ao desempenho dos negócios.

Uma teoria com adequada amplitude analítica para a compreensão do problema mencionado, ou seja, o desenvolvimento de práticas que aliam o bom desempenho econômico e ambiental, e que envolve diversas áreas do conhecimento, entre as quais a engenharia e a economia, é a Teoria da Modernização Ecológica (TME). Esta teoria é entendida como um campo teórico que tem por base quatro pressupostos: confiança no desenvolvimento científico e tecnológico como estratégia para solucionar problemas ambientais; preferência por soluções preventivas para os problemas ambientais; possibilidade de se alcançar, simultaneamente, objetivos ambientais e econômicos; e envolvimento direto e cooperativo na tomada de decisão (MILANEZ, 2009).

De acordo com a TME, o desenvolvimento tecnológico deveria ser baseado no pressuposto de que evitar problemas ambientais é mais desejável do que corrigi-los posteriormente. A prevenção, portanto, consideraria o aumento da eficiência não apenas como uma necessidade econômica, mas também ambiental. O aumento da eficiência significaria redução do consumo de recursos naturais, bem como diminuição nos custos com remediadores de problemas ambientais (MILANEZ, 2009). A introdução de tecnologias ambientalmente orientadas aumenta a produtividade dos recursos e se aproxima do entendimento da modernização ecológica (JÄNICKE, 2008).

Um conceito que pretende integrar objetivos ambientais aos processos industriais com a finalidade de reduzir a quantidade de resíduos e emissões é a Produção Mais Limpa (P+L). Tal conceito foi definido pela *United Nations Environment Program* (UNEP) em 1989, como a aplicação contínua de uma estratégia integrada de prevenção ambiental a processos, produtos e serviços visando a utilização eficiente dos recursos naturais e, conseqüentemente, a minimização da geração de resíduos, bem como os riscos à saúde (ZHAO et al., 2013).

Tendo em vista que PCE e TME são conceitos historicamente desvinculados, é proposto neste trabalho um modelo matemático que tem por objetivo maximizar o lucro da empresa e, como este objetivo está vinculado à qualidade dos padrões de corte, espera-se que a perda de material gerada durante o processo de corte seja mínima, aliando potenciais benefícios ambientais aos econômicos.

O modelo proposto origina-se de alterações no modelo matemático apresentado em Arenales et al. (2015), que é baseado no modelo de Gilmore e Gomory (1963). Com as alterações realizadas, pretende-se maximizar o lucro das empresas considerando que algumas sobras podem retornar ao estoque como retalhos, não sendo contabilizadas como perda (conseqüentemente minimizando o desperdício). Uma vez em estoque, os retalhos podem ser utilizados para cortar itens futuros ou, se for atrativo, serem vendidos a outras empresas que utilizam estes objetos como matéria-prima. De acordo com Angell e Klassen (1999), os resíduos de um processo industrial podem ser utilizados como matéria-prima para outro processo industrial, criando uma nova fonte de renda para a empresa que vende tais resíduos. Este novo problema foi denominado Problema de Corte de Estoque com Sobras Aproveitáveis e Venda de Retalhos (PCESAVR).

Para resolver o modelo, foi utilizada a técnica de geração de colunas (Gilmore e Gomory, 1963) e, para verificar o desempenho do modelo, testes computacionais foram realizados com exemplos gerados aleatoriamente. Além disso, foi realizada uma análise dos resultados relacionando-os aos conceitos de Produção mais Limpa (P+L) para avaliar se o modelo pro-

posto colaboraria com a diminuição do descarte de resíduos no meio ambiente. Ou seja, serão analisadas as contribuições da utilização de um modelo para resolver o PCESAVR, a partir dos conceitos de P+L.

1.1 Classificação dos Problemas de Corte de Estoque

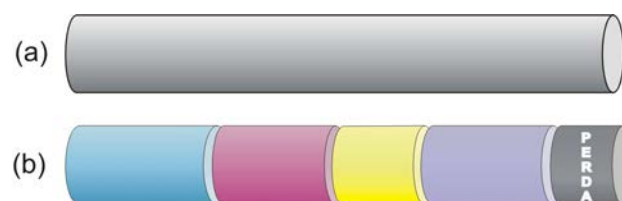
Dyckhoff (1990) apresentou uma tipologia para classificar os problemas de corte de estoque e empacotamento por meio de algumas características, como dimensionalidade, tipo de seleção dos objetos/itens, variedade de objetos/itens, entre outras. Esta tipologia foi determinada com o objetivo de unificar o uso de diferentes notações na literatura. No entanto, uma mesma classe poderia concentrar uma grande diversidade de problemas, sendo que modelos e métodos adequados a um problema poderiam não se adequar a outro problema de uma mesma classe. Dessa forma, Wäscher et al. (2007) apresentaram modificações na tipologia de Dyckhoff e introduziram uma nova categoria que define os problemas, baseada na tipologia de Dyckhoff (1990), porém que permite que cada problema tenha uma única representação.

Nas próximas subseções é apresentada a classificação dos problemas de corte de acordo com suas dimensões (WÄSCHER et al., 2007): Problema de Corte Unidimensional, Bidimensional, Tridimensional e Multidimensional .

1.1.1 Unidimensional

No problema de corte unidimensional apenas uma das dimensões é relevante no processo de corte. Problemas de corte unidimensional possuem várias aplicações industriais, como por exemplo, na indústria de papel, em que os grandes rolos de papel precisam ser cortados em tamanhos encomendados e, também, na indústria de aço, em que bobinas ou barras de ferro são cortadas em bobinas ou barras menores. Esse problema está ilustrado na Figura ??.

Figura 3 - (a) Objeto (barra) a ser cortado; (b) Objeto cortado produzindo 4 itens e uma perda

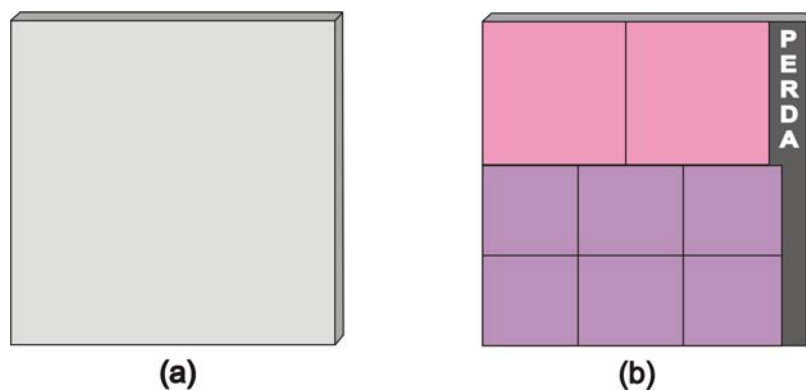


Fonte: Cherri (2009)

1.1.2 Bidimensional

No problema de corte bidimensional duas dimensões são relevantes no processo de corte, comprimento e largura, sendo que a espessura de todas as peças cortadas em conjunto deve ser a mesma. Combinar os itens a serem cortados ao longo do comprimento e da largura do objeto em estoque, de forma a aproveitar ao máximo a peça a ser cortada, é o objetivo do problema. Sua aplicação pode ser encontrada em indústrias que utilizam placas de vidro, de madeira e chapas de aço, por exemplo. A Figura ?? ilustra este tipo de problema.

Figura 4 - (a) Placa a ser cortada; (b) Objeto cortado produzindo 8 itens e uma perda

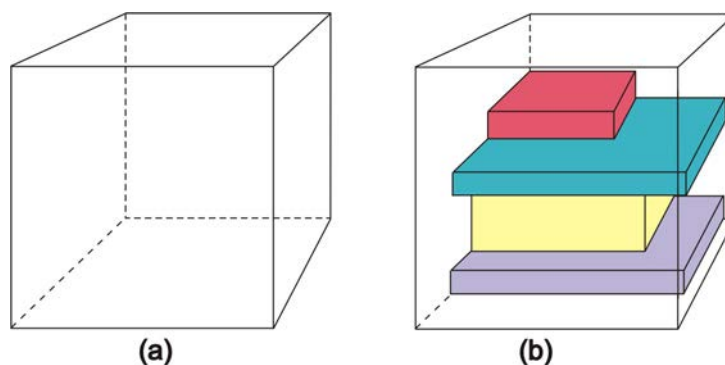


Fonte: Cherri (2009)

1.1.3 Tridimensional

No problema de corte tridimensional três dimensões são relevantes no processo de corte, comprimento, largura e altura. Um exemplo desse problema ocorre no corte de espumas para a produção de colchões e travesseiros. Porém, as aplicações mais frequentes do problema de corte tridimensional aparecem nos Problemas de Empacotamento, que consistem basicamente no carregamento de contêineres ou baús de caminhões, em que os itens devem ser alocados de modo que o espaço vazio seja minimizado. A Figura ?? ilustra este tipo de problema.

Figura 5 - (a) Contêiner; (b) 4 caixas empacotadas no contêiner



Fonte: Cherri (2009)

1.1.4 Multidimensional

Nos problemas multidimensionais, mais de três dimensões são relevantes para encontrar a solução do problema. Uma aplicação interessante está na resolução do problema de alocação de tarefas.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem por objetivo propor um modelo matemático para resolver o PCESAVR. Com esse modelo, espera-se determinar a melhor maneira de cortar os objetos de modo a maximizar o lucro, considerando que retalhos do estoque podem ser utilizados ou vendidos para outras empresas. Procedimentos heurísticos também foram propostos para a obtenção de soluções inteiras.

A partir do estudo desenvolvido, fez-se uma análise do problema e suas soluções voltadas para operações sustentáveis no processo produtivo. Será realizada uma análise que relaciona os conceitos de P+L com a consequente prevenção, minimização e destinação adequada da sobra de material gerada pelo PCESAVR.

1.3 Motivação e contextualização

O aumento das pressões ambientais e as expectativas crescentes de clientes e parceiros de negócios tem feito com que as organizações considerem as operações sustentáveis na cadeia de suprimento como uma nova medida de desempenho (WANG; GUNASEKARAN, 2015). Uma das preocupações presentes no cotidiano das empresas é o impacto causado pelo descarte

de dejetos industriais no meio ambiente e, alguns dos motivos para tais preocupações são a legislação, a regulação ambiental, a conscientização ambiental e a globalização da economia. De modo geral, a redução de resíduos no processo industrial contribui para a gestão ambiental por meio da maior eficiência na utilização de recursos produtivos (JABBOUR et al. 2013).

A ABRELPE (Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais) em conjunto com a ISWA - *International Solid Waste Association* (Associação Internacional de Resíduos Sólidos) e com o apoio da Secretaria de Meio Ambiente do Estado de São Paulo lançaram em 2013 um documento que analisa as principais questões relacionadas com o Planejamento da Gestão de Resíduos. No documento são apresentadas tendências da política global em Gestão Integrada de Resíduos Sólidos, incluindo as perspectivas europeia e australiana sobre o tema.

A União Europeia, por exemplo, se baseia em alguns princípios básicos para a gestão dos resíduos, entre eles:

- prevenção de resíduos: a redução da quantidade de resíduos gerada na fonte está fortemente vinculada à melhoria dos métodos de fabricação e à influência dos consumidores exigindo produtos mais ecológicos;
- reciclagem e reuso: se os resíduos não podem ser evitados, a maior quantidade de materiais possível deve ser recuperada.

Em novembro de 2009, o ministro do meio ambiente da Austrália, através do Conselho de Proteção do Meio Ambiente e do Patrimônio, endossou a nova Política Nacional de Resíduos: *Menos Resíduos, Mais Recursos*, que define a orientação da gestão de resíduos e da recuperação de recursos da Austrália para 2020, e objetiva entre outras coisas, evitar a geração de resíduos, reduzir a quantidade de resíduos e gerir os resíduos como um recurso (ABRELPE, 2013).

No Brasil, a lei nº 12.305 de 2 de Agosto de 2010, que institui a Política Nacional de Resíduos Sólidos (PNRS), define os resíduos industriais como os gerados nos processos produtivos e instalações industriais e estabelece que, na gestão e gerenciamento de resíduos sólidos deve ser observada a ordem de prioridade: não geração, redução, reutilização, reciclagem, tratamento de resíduos e disposição final ambientalmente adequada, assemelhando-se à ordem de prioridade da P+L. Entretanto, o poder público não é o único responsável pela gestão dos resíduos sólidos no nosso país, estado ou município. “Deve haver uma responsabilidade compartilhada pelo ciclo de vida dos produtos, ou seja, um conjunto de atribuições individualizadas e encadeadas dos fabricantes e demais membros da cadeia produtiva” (BRASIL, 2010). As empresas

devem adotar, desenvolver e melhorar tecnologias limpas como forma de minimizar o impacto ambiental (JABBOUR et al., 2014). Como as organizações precisam assumir a responsabilidade pelo ciclo de vida dos seus produtos, desde a concepção até a reciclagem e descarte, elas precisam entender que incorporar a sustentabilidade em suas estratégias de operações melhora a sua imagem e a sua rentabilidade (GUNASEKARAN et al., 2013).

Em setembro de 2015 a Organização das Nações Unidas (ONU) lançou a Agenda 2030 para o Desenvolvimento Sustentável. São 17 objetivos de desenvolvimento sustentável e 169 metas que estimulam ações ao longo dos próximos quinze anos em áreas de importância crucial para a humanidade e para o planeta. Para tanto, é preciso proteger o planeta da degradação, através de consumo e produção sustentáveis, gestão sustentável de seus recursos naturais e medidas urgentes sobre as alterações climáticas, para que ele possa suportar as necessidades das gerações presentes e futuras. Três destas metas são:

- até 2030 alcançar a gestão sustentável e o uso eficiente dos recursos naturais;
- até 2030 reduzir substancialmente a geração de resíduos através da prevenção, redução, reciclagem e reutilização;
- incentivar as empresas, especialmente as grandes empresas e transnacionais, a adotar práticas sustentáveis e integrar informações de sustentabilidade em seus relatórios.

Com base no importante papel que as empresas devem exercer na diminuição do descarte de resíduos no meio ambiente, este trabalho propõe um modelo matemático e sua respectiva resolução, que alia o aumento do lucro à consequente redução da perda de material durante o processo de corte de objetos. Integrar operações sustentáveis na cadeia de suprimentos é um desafio e, desta forma, houve um grande aumento da necessidade de desenvolvimento de novas ferramentas que auxiliem na tomada de decisão e auxiliem eficazmente a gestão de impactos ambientais da cadeia de suprimentos (WANG; GUNASEKARAN, 2015).

Além da contribuição para a diminuição na emissão de resíduos, outra motivação para resolver o PCESAVR e associar seus resultados com aspectos ambientais, é a necessidade de pesquisas que relacionem Pesquisa Operacional às questões ambientais. O crescimento acadêmico nesse campo e seu desenvolvimento requer que novos conhecimentos e ideias sejam gerados (SARKIS et al., 2011). O tema da sustentabilidade ganhou muita atenção tanto de pesquisadores como de profissionais no século XXI, porém a maioria dos trabalhos ainda lida com sustentabilidade a partir de perspectivas ambientais, mas um número muito limitado integra implicações econômicas e ambientais (GUNASEKARAN et al., 2013).

Subramanian e Gunasekaran (2015) revisaram sistematicamente artigos publicados em duas importantes revistas científicas multidisciplinares (*International Journal of Production Economics* (IJPE) e *Journal of Cleaner Production* (JCP)) no período de 2004-2013. A busca realizada pelos autores na base de dados Scopus apontou essas revistas como os principais periódicos para publicação de artigos relacionados à sustentabilidade e questões verdes. Por meio dessa pesquisa os autores concluíram que deve haver um aumento do foco em estudos sobre práticas mais limpas que melhorem a eficiência na redução de emissões, além de produzir e processar iniciativas que reduzem, recuperam e reutilizam, promovendo práticas mais limpas e a melhoria na oportunidade de negócios.

Gunasekaran et al. (2013), revisaram a literatura existente sobre Gestão Operações Sustentáveis (GOS), a partir do ano 2000, e concluíram que o papel da Pesquisa Operacional relacionado ao desenvolvimento sustentável ainda deve ser estudado em profundidade, indicando que deve ser dada devida atenção de pesquisadores e profissionais a essas áreas. Os mesmos autores indicam que abordagens em Modelagem Matemática podem ser empregadas para minimizar a poluição e maximizar o lucro, entretanto, modelos quantitativos ainda são limitados quando se trata em lidar com GOS.

1.4 Organização do Trabalho

O Capítulo 2 apresenta uma breve revisão da literatura sobre o PCESA e sobre alguns conceitos em operações sustentáveis.

No Capítulo 3 é apresentado o modelo clássico para o PCE e é definido o modelo matemático utilizado para resolver o PCESAVR no caso unidimensional. O modelo trabalha com a geração de retalhos como uma estratégia para a maximização do lucro além de considerar a possibilidade de venda desses retalhos, caso seja mais vantajoso do que cortá-los em itens.

No Capítulo 4 é apresentado o Método Simplex com Geração de Colunas e as modificações realizadas neste método para atender ao modelo proposto. Com esse método são determinadas soluções contínuas e, portanto, no Capítulo 5 são apresentadas duas heurísticas residuais para obtenção de soluções inteiras.

No Capítulo 6 são apresentados os resultados obtidos por meio de testes computacionais realizados com dados gerados aleatoriamente. Também neste capítulo, é apresentada uma análise associando a maximização do lucro com a diminuição da perda e como esses resultados podem ser relacionados aos conceitos de P+L.

O Capítulo 7 refere-se às conclusões e a possíveis trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

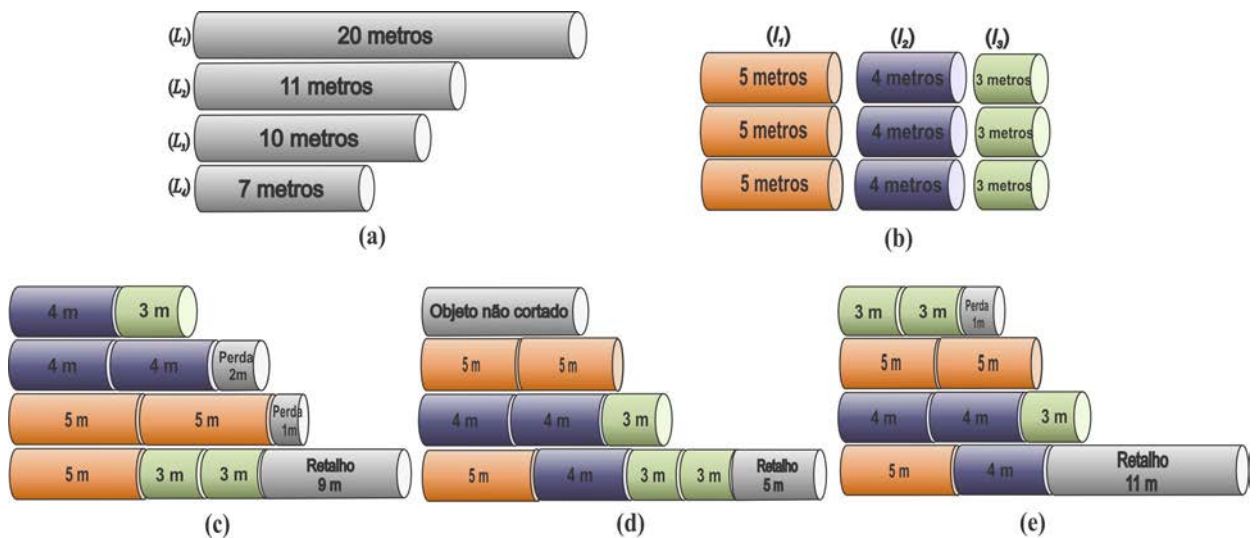
Neste capítulo é apresentada uma revisão da literatura a respeito de trabalhos que envolvam o PCESA e de trabalhos relacionados a operações sustentáveis.

2.1 Problemas de Corte de Estoque com Sobras Aproveitáveis

O PCESA tem por finalidade a obtenção de itens com dimensões e quantidades especificadas a partir do corte de objetos padronizados (comprados de fornecedores) ou não padronizados (retalhos gerados durante os processos de corte) disponíveis em estoque. Seu objetivo é minimizar a sobra de material e, além disso, permite que uma quantidade limitada de retalhos retorne ao estoque, a qual não é computada como perda.

A Figura ?? ilustra um exemplo de PCESA unidimensional. Neste exemplo, retirado de Cherri (2009), uma sobra com tamanho igual ou superior a 5 metros é um retalho. Os objetos (a) com comprimentos 11, 10 e 7 são retalhos em estoque. Os itens de tamanhos 5, 4 e 3 metros (b) devem ser cortados utilizando os objetos em (a).

Figura 6 - Exemplo de PCESA



Fonte: Cherri (2009)

Neste exemplo, a Solução 1 (c) e a Solução 3 (e) cortam todos os retalhos do estoque e geram um novo que deve retornar ao estoque. Assim, como a perda total na Solução 3 é menor, ela é melhor do que a Solução 1. A Solução 2 (d) tem perda nula, mas fica com dois retalhos em estoque. Considerando que não desejamos muitos retalhos em estoque, a Solução 3 é a mais adequada para a nossa abordagem.

Como mencionado anteriormente, o primeiro trabalho que considerou o aproveitamento de sobras foi Brown (1971), porém, esse problema passou a ser pesquisado de forma explícita anos mais tarde. Roodman (1986) descreveu um procedimento heurístico para a geração de padrões para o PCE no qual os objetos do estoque possuem comprimentos diferentes e disponibilidade limitada. Seu principal objetivo era a minimização da perda e a concentração das sobras em poucos padrões de corte para que pudessem ser utilizadas no corte de futuros itens demandados.

Um modelo matemático para resolver o PCESA foi proposto por Scheithauer (1991). Este modelo foi resolvido utilizando a técnica de geração de colunas apresentada por Gilmore e Gomory (1963). A estratégia para considerar o aproveitamento de sobras consiste em incluir itens extras aos demandados sem haver demandas para serem atendidas. Esses itens extras (retalhos) estão disponíveis durante a geração de colunas e são incluídos nos padrões de corte apenas para minimizar a perda.

Sinuany-Stern e Weiner (1994) consideraram o problema de corte de estoque com dois objetivos: minimizar a sobra gerada e acumular a máxima quantidade de sobras no último objeto a ser cortado, para que esta seja maior que um determinado comprimento pré-estabelecido e retorne ao estoque para ser utilizada em uma demanda futura.

Em 1997, Gradisar et al. (1997) apresentaram um estudo sobre PCE em uma indústria de tecidos que possuía em estoque objetos (rolos) com diferentes comprimentos. Foi proposto um modelo matemático para minimizar o número de itens cujas demandas não são atendidas durante o processo de corte e a perda total de material, entretanto, este modelo não foi utilizado para resolver o problema. Os autores propuseram o procedimento heurístico COLA (*COMputerized Laying out*) que também considera a possibilidade de sobras, com comprimento superior a um determinado parâmetro, retornarem ao estoque como retalho para atender futuras demandas. Gradisar et al. (1999) propuseram uma modificação no algoritmo COLA para generalizar e melhorar este procedimento. O novo algoritmo foi denominado CUT.

Gradisar e Trkman (2005) desenvolveram uma abordagem que combina o procedimento CUT (Gradisar et al. (1999)) e o método *branch and bound* que resolve o problema residual final. O objetivo desta combinação é obter perda mínima em um tempo computacional aceitável. Trkman e Gradisar (2007), em outro trabalho, consideraram o PCE em que consecutivos perío-

dos devem ser resolvidos e objetivaram a minimização da perda ou dos custos de produção em um determinado período de tempo. Os autores consideraram que todos os objetos em estoque possuem comprimentos diferentes e, também, a possibilidade de sobras retornarem ao estoque, desde que sejam maiores que um determinado limitante estabelecido.

Um estudo de caso em uma indústria madeireira foi realizado por Koch et al. (2008), os quais propuseram um modelo matemático para atender objetivos específicos da indústria que possui o processo de corte interligado ao transporte e manipulação de material. Tal indústria também considera que, após o processo de corte, as sobras geradas nos padrões de corte podem retornar ao estoque desde que possuam tamanho aceitável.

No ano seguinte, Abuabara e Morabito (2009) utilizaram o modelo matemático proposto por Gradisar et al. (1997) para resolver o PCESA em uma empresa brasileira que corta tubos estruturais metálicos para a produção de aeronaves agrícolas. O problema resolvido considerou diferentes tipos de objetos em estoque em quantidades suficientes para atender a demanda.

Cherri et al. (2009) realizaram alterações em heurísticas (construtivas e residuais) clássicas da literatura para solucionar o PCESA. Para considerar a possibilidade de gerar retalhos, sobras com dimensões superiores a um determinado comprimento não eram consideradas perdas e retornavam ao estoque para atender futuras demandas. Embora as soluções obtidas tenham sido boas em termos de perdas, nenhuma prioridade de uso dos retalhos foi imposta. Assim, estes poderiam permanecer em estoque durante longo período de tempo.

Cui e Yang (2010) propuseram uma extensão do modelo de Scheithauer (1991), considerando que a quantidade de objetos em estoque é limitada e a quantidade de retalhos gerados nos padrões de corte pode ser controlada.

Em Cherri et al. (2013) são modificadas as heurísticas desenvolvidas em Cherri et al. (2009) e, além de minimizar a perda, assume-se que retalhos em estoque devem ter prioridade em utilização durante o processo de corte. Um *survey* é apresentado em Cherri et al. (2014), o qual reúne trabalhos da literatura que consideram o PCESA para o caso unidimensional. Os autores apresentam as aplicações do PCESA, o modelo matemático (quando proposto), comentários dos resultados obtidos em cada trabalho e propostas para continuidade de estudos relacionados ao PCESA.

Finalmente, Arenales et al. (2015) propuseram um modelo matemático para resolver o PCESA. Neste trabalho, os retalhos gerados possuem comprimento e quantidades máximas definidos previamente. Os testes computacionais realizados mostraram bom desempenho do modelo proposto e a forte relação que existe entre quantidade de retalhos gerados e redução da

perda.

2.2 Operações Sustentáveis

Diversos fatores podem motivar uma empresa a adotar práticas de gestão ambiental. Além das expectativas de clientes e parceiros a gestão ambiental pode melhorar o desempenho financeiro e aumentar a competitividade de produção da empresa (JABBOUR et al. 2013). Durante as últimas décadas as empresas começaram a adotar o conceito de desenvolvimento sustentável, como proposta de que o crescimento econômico pode ocorrer ao mesmo tempo em que se protege o meio ambiente. O conceito de desenvolvimento sustentável foi utilizado pela primeira vez em 1987 no Relatório Brundtland, elaborado pela Comissão Mundial sobre Meio Ambiente e Desenvolvimento, criado em 1983 pela Assembleia das Nações Unidas. Sua definição mais empregada é: a satisfação das necessidades da geração atual, sem comprometer a capacidade das gerações futuras satisfazerem as suas próprias necessidades.

O desenvolvimento sustentável baseia-se em três pilares: desenvolvimento social, desenvolvimento econômico e desenvolvimento ambiental. Isso significa possibilitar que as pessoas, agora e no futuro, atinjam um nível satisfatório de desenvolvimento social e econômico e de realização humana e cultural, fazendo, ao mesmo tempo, um uso razoável dos recursos da Terra e preservando as espécies e os habitats naturais.

Pagell e Shevchenko (2014) apontam em seu artigo que, se as práticas das empresas têm um impacto negativo na linha de fundo econômico, então ela não é sustentável, não importando o quão benéfica é para o desempenho ambiental ou social. Logo, as empresas devem focar em práticas ambientais ou sociais que sejam benéficas ao desempenho econômico. A maioria das cadeias de suprimentos não sobreviverá hoje em dia se não mudar as práticas e modelos de negócios existentes para enfrentar seus impactos sociais e ambientais negativos.

Em seu trabalho, Gunasekaran e Irani (2014) mostram que a Gestão de Operação Sustentável (GOS) começou a receber atenção de pesquisadores da Gestão de Operações, incluindo temas como *Green Supply Chain Management* (GSCM), contratos públicos ecológicos e Logística Reversa. A Pesquisa Operacional reforça significativamente a tomada de decisões e a GOS tem importante contribuição na solução de desafios de sustentabilidade enfrentados pelas organizações. GOS pode ser definida como “as estratégias de operações, táticas e técnicas, e as políticas operacionais para apoiar ambos os objetivos e metas econômicas e ambientais” (GUNASEKARAN et al. 2013), ou seja, planeja, coordena e controla um sistema que agrega valor ao cliente de forma mais rentável, enquanto protege os recursos naturais e o meio ambi-

ente. Dessa forma, a GOS não deve ter apenas o objetivo de reduzir custos, mas também de considerar a proteção ao meio ambiente através da logística reversa, remanufatura e GSCM, por exemplo.

Sarkis et al. (2011) defendem que há várias teorias organizacionais que têm sido utilizadas para investigar questões relacionadas à GSCM, ou seja, perspectivas de gestão que auxiliam ou descrevem comportamentos organizacionais, projetos ou estruturas. Uma dessas teorias é a Teoria da Modernização Ecológica (TME), que é orientada para a realização conjunta do desenvolvimento industrial e proteção do ambiente por meio da inovação e desenvolvimento tecnológico ou modernidade. O termo “modernização ecológica” foi criado no início de 1980 para fornecer uma fórmula para a interação entre ecologia e economia (JÄNICKE, 2008). Duas dimensões da TME podem influenciar os estudos em práticas de GSCM no contexto capitalista: novas políticas de poluição, analisando a evolução dos regulamentos e seus efeitos sobre a inovação ambiental, e inovação tecnológica, que sugere a introdução no mercado de uma tecnologia que pode melhorar algumas ou todas as fases do ciclo de vida de um produto. Os fabricantes podem superar obstáculos à inovação e ganhar oportunidades operacionais para melhoria no desempenho.

Essencialmente, a TME defende o desenvolvimento tecnológico atrelado a preceitos ecológicos como o principal caminho para solucionar problemas ambientais. Pesquisadores argumentam que investir em pesquisa tecnológica pode ser uma estratégia com grande probabilidade de solucionar problemas existentes e evitar o surgimento de novos problemas ambientais (YOUNG, 2000). O desenvolvimento tecnológico deve ser baseado no pressuposto de que evitar problemas ambientais é mais vantajoso e desejável do que corrigi-los posteriormente (MILANEZ, 2009). Dessa forma, tecnologias limpas e processos inovadores buscam aumentar a eficiência produtiva, enquanto as políticas públicas objetivam decisões com menor impacto ambiental possível no âmbito produtivo.

Em termos econômicos, modernização é a melhoria sistemática baseada em conhecimento dos produtos e processos de produção, inclusive propondo um modelo, semelhante ao apresentado neste trabalho. O aumento na concorrência para a inovação nos países industrializados colaborou para a aceleração na modernização tecnológica e o desafio é direcionar o progresso tecnológico colocando a compulsão por inovação a serviço do meio ambiente (JÄNICKE, 2008), pois o próprio crescimento industrial pode criar demanda por inovações ambientais, uma vez que muitos recursos naturais são escassos ou possuem capacidade limitada.

A TME sugere que regulamentos e políticas ecológicas podem motivar práticas de GSCM entre os fabricantes que as implementam por meio de equipamentos de produção mais eficien-

tes, aumento da colaboração entre fornecedores e inovações tecnológicas. As inovações surgem para solucionar os problemas e os desafios organizacionais ou tecnológicos que podem surgir pela pressão dos requisitos regulatórios, das necessidades do cliente e da necessidade de melhoria do desempenho em ecoeficiência. Além disso, sua difusão indica que uma inovação é comunicada através de canais específicos entre os membros de um sistema social (SARKIS et al., 2011).

A ecoeficiência tem sido utilizada no campo da GSCM, que procura alcançar uma rentabilidade sustentável, oferecendo produtos e práticas ambientalmente saudáveis. Govindan et al. (2014) apresentam algumas definições para ecoeficiência, dentre as quais a de que a ecoeficiência é uma perspectiva do desenvolvimento sustentável que traz elevados benefícios ao desempenho operacional da empresa. As organizações devem projetar de forma proativa suas estratégias competitivas no século XXI, com base em práticas mais limpas (SUBRAMANIAN; GUNASEKARAN, 2015). Esse é um dos objetivos do modelo que será utilizado para resolver o PCESAVR, apresentado nesse trabalho. Almeja-se cortar os objetos de modo a maximizar o lucro da empresa e, devido à qualidade dos padrões de corte, espera-se menor geração de resíduos.

A definição mais citada de ecoeficiência, de acordo com Govindan et al. (2014), é a do Conselho Empresarial Mundial para o Desenvolvimento Sustentável (CEMDS), que afirma que ela é alcançada através da entrega de bens e serviços a preços competitivos que satisfaçam as necessidades humanas e tragam qualidade de vida, além de reduzir progressivamente o impacto ecológico e a intensidade de recursos ao longo do ciclo de vida para um nível pelo menos de acordo com a capacidade estimada da Terra. Segundo os autores, a simplicidade da ecoeficiência levou-a a se espalhar pelo mundo, desfrutando de grande aceitação pelas empresas que utilizam esse conceito para apoiar suas decisões, estratégias de produção, além de investimentos que contribuem para o desenvolvimento sustentável.

Ehrenfeld (2005) nos mostra que a importância prática e teórica do conceito da ecoeficiência reside em sua capacidade de combinar o desempenho ao longo de dois dos três eixos do desenvolvimento sustentável: meio ambiente e economia. Questões relativas às propriedades sociais não estão incluídas no conceito de ecoeficiência. Há uma razão entre certa medida de valor econômico agregado a certa medida de impacto ambiental, sendo que, quanto maior for o valor adicionado, mais eficaz é a utilização de serviços ambientais.

Uma forma de estruturar a ecoeficiência é utilizando os conceitos de Produção Mais Limpa (P+L) que, de acordo com a *United Nations Environment Programme* (UNEP), é uma estratégia ambiental preventiva integrada e aplicada a processos, produtos e serviços para aumentar a

ecoeficiência, além de reduzir riscos para humanos e meio ambiente. De acordo com o Centro Nacional de Tecnologias Limpas do SENAI do Rio Grande do Sul (CNTL/Senai - RS), responsável por difundir pelo Brasil as práticas de P+L, bem como auxiliar as empresas a realizarem projetos de prevenção da poluição, a aplicação da P+L em processos de produção ocorre com a conservação da matéria-prima e energia, eliminando matérias-primas tóxicas e reduzindo a quantidade e toxicidade de todas as emissões e resíduos; já a aplicação em produtos ocorre reduzindo os impactos negativos ao longo do ciclo de vida de um produto desde a extração de matéria-prima até sua disposição final e, finalmente, sua aplicação em serviços acontece com a incorporação da vertente ambiental dentro do projeto e entrega do serviço.

Alves e Oliveira (2007) destacam que a P+L é uma técnica que consiste em eliminar o desperdício, pois este não agrega valor ao produto ou ao serviço. É muito mais econômico evitar ou minimizar a geração de resíduos nos processos industriais do que reciclá-los, apesar da reciclagem ser de extrema importância. A P+L pretende integrar objetivos ambientais aos processos industriais, a fim de reduzir a quantidade de resíduos e emissões. O principal objetivo das estratégias de P+L é mudar o foco da gestão e controle de resíduos para a prevenção (KHALILI et al., 2015), o que requer mudança de atitudes, gerenciamento ambiental responsável, criação de uma política ambiental nacional condutiva e avaliação das opções tecnológicas (CNTL, 2003).

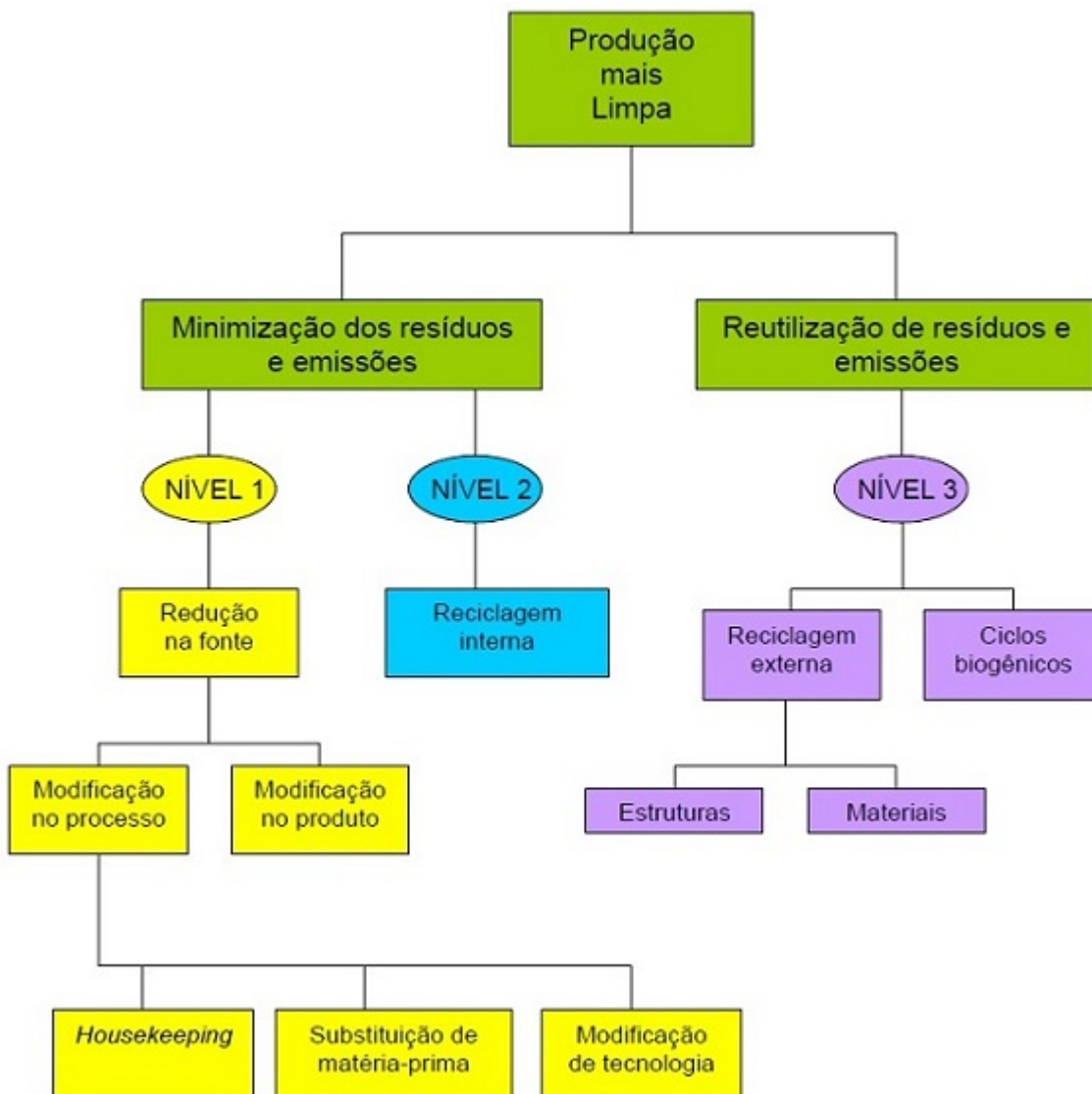
Segundo Kubota e da Rosa (2013), a P+L acontece através da melhoria das tecnologias e das mudanças de atitudes de trabalho e seu uso é uma estratégia preventiva que minimiza os impactos de processos de produção sobre o meio ambiente, além de oferecer novas oportunidades para a otimização dos negócios e da economia. Esta estratégia é uma opção que não vai criar uma sociedade sustentável, mas é um passo importante nesta direção (KHALILI et al., 2015), já que produzir sustentavelmente significa, em palavras simples, transformar recursos naturais em produtos e não em resíduos. Entretanto, de acordo com o CNTL (2003), a P+L não é apenas um tema ambiental e econômico. A geração de resíduos em um processo produtivo muitas vezes está diretamente relacionada a problemas de saúde ocupacional e de segurança dos trabalhadores, abrangendo dessa forma a esfera social.

A mudança nos paradigmas ambientais faz com que as empresas considerem a origem da geração de seus resíduos sólidos buscando soluções nos seus próprios processos produtivos, minimizando, assim, o emprego de tratamentos convencionais de fim-de-tubo, ou seja, ações que apenas ajudam a diminuir o impacto ambiental causado por determinados resíduos, ao dar-lhes tratamento, muitas vezes onerosos e de resultados não definitivos para tais resíduos. Quando resíduos e emissões são minimizados também ocorre um aumento na eficiência da utilização de insumos e energia garantindo que os processos sejam mais eficientes (CNTL,

2003). Além disso, uma estratégia de P+L pode ser considerada uma vantagem competitiva da empresa (VAN HOOFF; LYON, 2013).

Para a minimização do consumo de recursos e da poluição devem-se trabalhar as três fases do ciclo de vida do produto: a manufatura, o seu uso e o seu descarte final (ALVES; OLIVEIRA, 2007), o que exige diferentes níveis de solução dos problemas, conhecidos como Nível 1, Nível 2 e Nível 3 da P+L. Nesse sentido, Barbieri (2007) apresenta os diferentes níveis de P+L, que podem ser verificados na Figura ??.

Figura 7 - Escopo de atuação da metodologia Produção mais Limpa (P+L)



Fonte: Barbieri (2007)

As alternativas do Nível 1 constituem prioridade máxima e envolvem modificações em produtos e processos, com o objetivo de reduzir emissões e resíduos na fonte, além de eliminar ou diminuir sua toxicidade. O Nível 2 nos mostra que emissões e resíduos que não podem ser evitados devem, preferencialmente, ser reutilizados internamente. O Nível 3 ocorre quando as emissões ou os resíduos gerados não podem ser aproveitados pela própria fonte geradora. A alternativa é a reciclagem externa, vendendo ou doando os resíduos para quem possa utilizá-los e, caso não seja possível, estes resíduos devem ser tratados e descartados em lugares apropriados (BARBIERI, 2007).

Essa abordagem de diferentes níveis de solução dos problemas, nos mostra as prioridades da P+L: evitar a geração de resíduos, reintegrar os resíduos que não puderam ser evitados, e tomar medidas de reciclagem fora da empresa, caso a mesma não possa reutilizar seus resíduos. De acordo com esta lógica é melhor eliminar o poluente do que tentar recuperá-lo.

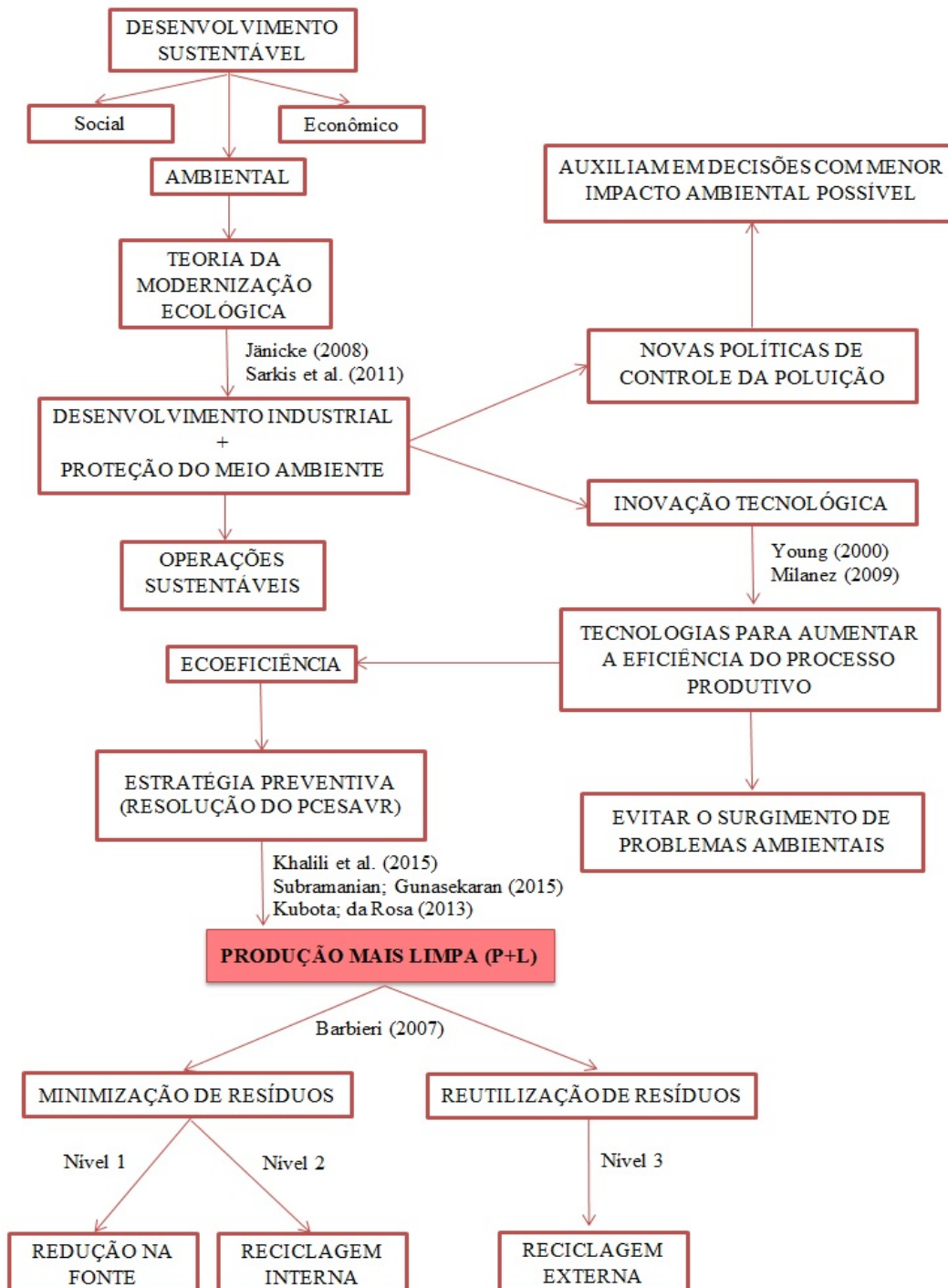
Inovações em P+L implicam em um processo de mudança organizacional. A educação e a formação da força de trabalho são reconhecidas como ingredientes essenciais na promoção e implementação de práticas de gestão ambiental em organizações empresariais (UNNIKRISHNAN; HEGDE, 2007), pois a gestão empresarial e os funcionários devem aprender a lidar com novas rotinas operacionais e incorporar o paradigma da prevenção (VAN HOOFF; LYON, 2013), o que exige, também, modelos alternativos de otimização que não rivalizem com aspectos ambientais.

O modelo matemático proposto neste trabalho para resolver o PCESAVR tem por objetivo o corte de objetos, em determinado processo industrial, de modo a maximizar o lucro. O modelo possibilita a geração de retalhos que podem ser utilizados futuramente no processo de corte ou mesmo serem vendidos a empresas que tenham suas necessidades atendidas por esses retalhos. Além disso, como o aumento do lucro está atrelado à qualidade dos padrões de corte, espera-se que o desperdício seja mínimo. Dependendo do material cortado, as perdas (sobras do processo de corte que não podem ser aproveitadas) geradas durante o processo de corte também poderão ser vendidas (esta análise não é realizada neste trabalho).

Como o referido modelo apresenta alguns objetivos semelhantes aos objetivos da P+L, uma análise dos resultados obtidos é realizada, relacionando-os aos conceitos de P+L apresentados, de modo que o PCESAVR possa ser utilizado como alternativa por determinadas empresas e contribua no atendimento das prioridades da P+L por meio da não geração de resíduos, aproveitamento interno e aproveitamento externo.

Na Figura ?? é apresentado um fluxograma que resume os conceitos em operações sustentáveis até aqui apresentados:

Figura 8 - Resumo dos conceitos em operações sustentáveis



No próximo capítulo será apresentado o modelo utilizado para resolver o PCESA.

3 MODELO MATEMÁTICO PARA O PCESAVR

Um dos objetivos mais comuns de um PCE é cortar objetos disponíveis em estoque aproveitando ao máximo este material. A possibilidade de gerar retalhos para estoque contribui significativamente para a melhor utilização dos objetos disponíveis em estoque. Os retalhos podem ser utilizados futuramente para atender demandas ou, se atrativo, serem vendidos para outras empresas.

Para um melhor entendimento do PCESAVR, será apresentada, inicialmente, a formulação do problema clássico de corte de estoque.

3.1 Modelo Clássico

Considera-se para a modelagem do PCE objetos disponíveis com tamanho padronizado L , em quantidade ilimitada, para a produção de m tipos de itens com comprimentos l_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Cada item i possui uma demanda d_i , $i = 1, 2, \dots, m$ que deve ser atendida. A formulação do modelo matemático para o PCE acontece em duas etapas:

1. define-se todos os possíveis padrões de corte;
2. define-se quantas vezes cada padrão de corte é utilizado para atender a demanda, que deve ser um número inteiro e não-negativo.

Definição 3.1.1. *Denomina-se **padrão de corte** a maneira como um objeto em estoque é cortado para a produção dos itens demandados. A cada padrão de corte associa-se um vetor m -dimensional $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, em que a_i fornece o número de itens do tipo i no padrão de corte, contabilizando, assim, os itens produzidos.*

No caso unidimensional, um vetor \mathbf{a} corresponde a um padrão de corte se, e somente se, satisfazer as restrições de capacidade física do Problema da Mochila (Gilmore e Gomory, 1963):

$$\begin{aligned} l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_m a_m &\leq L \\ a_i &\geq 0, i = 1, \dots, m \text{ e inteiro.} \end{aligned} \tag{1}$$

Seja j a quantidade de padrões de corte em uma solução para o PCE, $j = 1, \dots, n$. Para a definição do modelo matemático, considera-se a seguinte variável de decisão:

- $x_j = \text{número de vezes que o objeto é cortado utilizando-se o padrão de corte } j, j = 1, \dots, n.$

Desta forma, o PCE unidimensional que considera minimizar o número de objetos em estoque a serem cortados, pode ser formulado como o seguinte problema de otimização linear inteiro:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ &\text{sujeito a: } \begin{cases} \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{d} \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \text{ e inteiro.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Por simplicidade de notação, escreve-se o modelo (??) em notação matricial como:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{sujeito a: } \begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{d} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

sendo que cada coluna da matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um vetor associado a um padrão de corte, conforme a Definição ??.

Para o modelo matemático (??), tem-se que a função objetivo minimiza o total de objetos a serem cortados. A restrição de igualdade garante que a quantidade de itens produzidos seja exatamente igual à demanda, e a última restrição garante que a repetição de cada padrão de corte seja um número inteiro e não-negativo. Qualquer solução do sistema linear dado pelas restrições do problema (??), cujas componentes sejam inteiras e não negativas, fornece uma *solução factível* para o problema de corte de estoque.

Outros objetivos, como por exemplo, minimizar a perda total, podem ser considerados para a modelagem do PCE. Neste caso, a função objetivo em (??) seria substituída pela função *perda total*, que é definida como:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n p_j x_j \quad (4)$$

em que,

$$p_j = L - (a_{1j}l_1 + a_{2j}l_2 + \dots + a_{mj}l_m)$$

define a perda no padrão de corte $j, j = 1, \dots, n.$

Observe que a minimização da função $f(x)$ em (??) resulta em um conjunto de padrões de corte com perda mínima e, neste caso simples, em que há apenas um tipo de objeto em estoque, minimizar o total de objetos cortados e minimizar a perda total são objetivos equivalentes. A demonstração desta afirmação pode ser encontrada em Poldi (2003).

A seguir apresenta-se o modelo matemático proposto para resolver o PCESAVR. Este modelo difere do modelo proposto em Arenales et al. (2015), pois maximizará o lucro, ao invés de minimizar a perda e permitirá a venda de retalhos, quando for mais vantajoso do que cortá-los. Além disto, a quantidade permitida de retalhos a serem gerados será contabilizada para cada tipo de retalho, o que contrasta com Arenales et al. (2015), em que a quantidade permitida de retalhos pode ser gerada sem distinção de qual é o tipo de retalho.

3.2 Definição e Formulação Matemática do PCESAVR

No PCESAVR, um conjunto de itens demandados deve ser produzido a partir de objetos padronizados ou retalhos. Similar ao PCE, são conhecidas as demandas dos itens e o estoque de objetos. As demandas devem ser atendidas cortando os objetos disponíveis, de modo a maximizar o lucro da empresa. Retalhos com comprimentos definidos previamente e em quantidades limitadas, para cada tipo, podem ser gerados para estoque e não são computados como perdas. Os retalhos disponíveis em estoque podem ser utilizados durante o processo de corte ou, se atrativo, podem ser vendidos para outras empresas que atendem seus pedidos a partir do corte destes objetos.

O modelo matemático para o PCESAVR, apresentado neste trabalho, tem por objetivo maximizar o lucro. Para a modelagem do problema são utilizados os seguintes dados:

- S : número de tipos de objetos padronizados. Denotamos objetos do tipo $s \in \{1, \dots, S\}$;
- R : número de tipos de retalhos em estoque. Denotamos retalhos do tipo $k, k \in \{1, \dots, R\}$;
- L_s : comprimento do objeto do tipo $s, s = 1, \dots, S$;
- Lr_k : comprimento do retalho do tipo k em estoque, $k = 1, \dots, R$;
- e_s : número de objetos do tipo s em estoque, $s = 1, \dots, S$;
- er_k : número de retalhos do tipo k em estoque, $k = 1, \dots, R$;
- m : número de tipos de itens demandados;
- l_i : comprimento do item do tipo $i, i = 1, \dots, m$;
- d_i : demanda do item do tipo $i, i = 1, \dots, m$;
- J_s : conjunto de padrões de corte para o objeto do tipo $s, s = 1, \dots, S$;
- Jr_k : conjunto de padrões de corte para o retalho do tipo $k, k = 1, \dots, R$;

- $J_s(k)$: conjunto de padrões de corte para um objetos do tipo s que geram um retalho do tipo k , $k = 1, \dots, R$, $s = 1, \dots, S$;
- a_{ijs} : número de itens do tipo i cortados de acordo com o padrão de corte j para um objeto do tipo s , $i = 1, \dots, m$, $s = 1, \dots, S$, $j \in J_s$;
- a_{ijsk} : número de itens do tipo i , cortados de acordo com o padrão de corte j para um objeto do tipo s gerando retalho do tipo k , $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, R$, $s = 1, \dots, S$, $j \in J_s(k)$;
- ar_{ijk} : número de itens do tipo i cortados de acordo com o padrão de corte j para um retalho do tipo k , $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, R$, $j \in Jr_k$;
- c_{js} : lucro ao cortar um objeto do tipo s de acordo com o padrão de corte j , $s = 1, \dots, S$, $j \in J_s$;
- c_{jsk} : lucro ao cortar um objeto do tipo s de acordo com o padrão de corte j e gerando um retalho do tipo k , $s = 1, \dots, S$, $k = 1, \dots, R$, $j \in J_s(k)$;
- cr_{jk} : lucro ao cortar um retalho do tipo k de acordo com o padrão de corte j , $k = 1, \dots, R$, $j \in Jr_k$;
- v_k : valor de venda do retalho do tipo k , $k = 1, \dots, R$;
- U_k : número máximo permitido de retalhos do tipo k a serem gerados, $k = 1, \dots, R$;
- α : parâmetro utilizado para ponderar a geração de novos retalhos;
- α' : parâmetro utilizado para ponderar o uso de retalhos disponíveis em estoque;
- α'' : parâmetro utilizado para ponderar a venda de retalhos.

Variáveis:

- x_{js} : número de objetos do tipo s cortados segundo o padrão de corte j podendo gerar perda, $s = 1, \dots, S$, $j \in J_s$;
- x_{jsk} : número de objetos do tipo s cortados segundo o padrão de corte j e gerando um retalho do tipo k , $s = 1, \dots, S$, $k = 1, \dots, R$, $j \in J_s(k)$;
- xr_{jk} : número de retalhos do tipo k cortados segundo o padrão de corte j , $k = 1, \dots, R$, $j \in Jr_k$;
- y_k : quantidade de retalhos do tipo k vendidos, $k = 1, \dots, R$.

Modelo Matemático

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^S \sum_{j \in J_s} c_{js} x_{js} + \alpha \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} c_{j sk} x_{j sk} + \alpha' \sum_{k=1}^R \sum_{j \in Jr_k} cr_{jk} x_{rjk} + \alpha'' \sum_{k=1}^R v_k y_k \quad (5)$$

Sujeito a:

$$\sum_{s=1}^S \sum_{j \in J_s} a_{ijs} x_{js} + \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} a_{i j sk} x_{j sk} + \sum_{k=1}^R \sum_{j \in Jr_k} ar_{ijk} x_{rjk} = d_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (6)$$

$$\sum_{j \in J_s} x_{js} + \sum_{k=1}^R \sum_{j \in J_s(k)} x_{j sk} \leq e_s, \quad s = 1, \dots, S \quad (7)$$

$$\sum_{j \in Jr_k} x_{rjk} + y_k \leq er_k, \quad k = 1, \dots, R \quad (8)$$

$$\sum_{s=1}^S \sum_{j \in J_s(k)} x_{j sk} - \sum_{j \in Jr_k} x_{rjk} - y_k \leq U_k - er_k, \quad k = 1, \dots, R \quad (9)$$

$$x_{js} \geq 0, \quad s = 1, \dots, S, \quad j \in J_s \quad \text{e inteiro;} \quad (10)$$

$$x_{j sk} \geq 0, \quad s = 1, \dots, S, \quad k = 1, \dots, R, \quad j \in J_s(k) \quad \text{e inteiro;}$$

$$x_{rjk} \geq 0, \quad k = 1, \dots, R, \quad j \in Jr_k \quad \text{e inteiro;}$$

$$y_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, R \quad \text{e inteiro}$$

No modelo (??)-(??) a principal decisão a ser tomada consiste em determinar a frequência com que cada padrão de corte é utilizado (modelo matemático orientado ao padrão). A função objetivo (??) maximiza o lucro de cortar objetos, sejam eles padronizados ou retalhos e também considera o lucro com a venda de retalhos. A restrição (??) assegura que a quantidade de itens cortados atende a demanda. A restrição (??) garante que a quantidade de objetos padronizados utilizados durante o processo de corte não seja superior à quantidade disponível em estoque. A restrição (??) garante que a quantidade de retalhos utilizada durante o processo de corte adicionada ao número de retalhos vendidos não seja maior que a disponibilidade de cada tipo de retalho em estoque. A restrição (??) limita a quantidade de cada tipo de retalho gerado durante o processo de corte. Por fim, a restrição (??) garante a integralidade e não-negatividade das variáveis do problema.

Utilizando o modelo (??)-(??) um objeto padronizado pode ser completamente cortado ou

parcialmente cortado. No segundo caso, dois objetos são gerados: um objeto reduzido que será cortado em itens e um retalho que retornará ao estoque para atender futuras demandas ou, se for atrativo, poderá ser vendido a outras empresas. A Figura ?? ilustra um objeto parcialmente cortado.

Figura 9 - (a) Objeto padronizado; (b) Objeto cortado produzindo 1 retalho e 1 objeto reduzido



A possibilidade de vender retalhos pode ser considerada de duas formas distintas em um problema de corte: os retalhos podem ser gerados com o propósito de venda ou os retalhos disponíveis em estoque podem ser vendidos. A possibilidade de gerar retalhos para vender não altera o modelo clássico para o PCE apresentado na Seção ?. Basta considerar que os retalhos são itens demandados e incluí-los no processo de corte com ou sem demanda para ser atendida. Esta abordagem é a mesma proposta por Cui e Yang (2010).

Na abordagem considerada neste trabalho, há a possibilidade de vender retalhos que já estão em estoque, desde que esta opção seja mais vantajosa que cortá-los em itens demandados. Assim como os itens, os retalhos em estoque possuem um valor associado.

Devido ao número exponencial de variáveis e às condições de integralidade sobre as variáveis, é muito difícil resolver o modelo (??)-(??) na otimalidade. Assim, a restrição (??) é relaxada e a técnica de geração de colunas (Gilmore e Gomory, 1961) é utilizada. Com a relaxação desta restrição as soluções obtidas são, em geral, contínuas. Desta forma, faz-se necessário o uso de procedimentos heurísticos para obtenção de soluções inteiras.

No próximo capítulo a técnica de geração de colunas é detalhada, assim como as alterações realizadas neste método para resolver o PCESAVR. Procedimentos heurísticos para a obtenção de soluções inteiras são apresentados no Capítulo ??

4 MÉTODO DE SOLUÇÃO PARA O PCESAVR

Neste capítulo é apresentado um dos métodos mais importantes para resolução do PCE, o método simplex com geração de colunas. O método simplex foi elaborado por George Dantzig em 1947 e se destacou entre os métodos de resolução de problemas de programação linear devido à sua eficiência. Gilmore e Gomory (1961) utilizaram o método simplex com a técnica de geração de colunas para resolução de um problema de otimização linear e resolveram pela primeira vez um problema real de corte unidimensional.

4.1 O Método Simplex

Por simplicidade, utiliza-se o problema de otimização linear em sua forma padrão, escrito em notação matricial:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{d} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array} \quad (11)$$

em que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz dos coeficientes das restrições e tem posto $(\mathbf{A}) = m$, \mathbf{c} é o vetor dos custos, \mathbf{d} é o vetor dos termos independentes (demanda), \mathbf{x} é o vetor das variáveis e $\mathbf{0}$ é o vetor nulo.

Para o desenvolvimento do método considera-se uma reorganização nas colunas da matriz \mathbf{A} de modo que $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$, em que a matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é denominada *matriz básica* e é composta por m colunas linearmente independentes da matriz \mathbf{A} ; e \mathbf{N} é denominada *matriz não-básica* e corresponde às $(n - m)$ colunas restantes da matriz \mathbf{A} , ou seja, colunas de \mathbf{A} que não estão em \mathbf{B} .

Esta partição nas colunas da matriz \mathbf{A} nos impõe uma partição nos vetores \mathbf{x} e \mathbf{c} , como segue:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N] \text{ e } \mathbf{c} = [\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N]$$

em que \mathbf{x}_B é denominado *vetor das variáveis básicas* e \mathbf{x}_N é denominado *vetor das variáveis não-básicas*. O vetor \mathbf{c}_B representa os coeficientes das variáveis básicas na função objetivo e

\mathbf{c}_N é o vetor com coeficientes das variáveis não-básicas. Assim, reescreve-se o modelo (??) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ & \text{sujeito a:} && \begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{d} \\ \mathbf{x}_B \geq 0, \mathbf{x}_N \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Para o sistema $\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{d}$ em (??), tem-se a seguinte solução geral:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N. \quad (13)$$

Atribuindo valores às variáveis não-básicas, \mathbf{x}_N , pode-se determinar soluções para o sistema (??).

Para a partição básica $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$, a solução $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{x}}_B, \hat{\mathbf{x}}_N]^T$, em que $\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}$ e $\hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$, é denominada *solução básica*. Se $\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} \geq 0$, então a solução básica $\hat{\mathbf{x}}$ é factível e, neste caso, a partição básica também é factível.

Substituindo (??) na função objetivo $f(\mathbf{x})$ em (??) temos:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N. \quad (14)$$

A partir de (??), temos que, $\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}$, corresponde ao valor da função objetivo na solução básica $\hat{\mathbf{x}}$:

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}_B^T(\hat{\mathbf{x}}_B) + \mathbf{c}_N^T\hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{c}_B^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}) + \mathbf{c}_N^T(\mathbf{0}) = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}. \quad (15)$$

Para simplificar a notação e cálculos seja, $\lambda^T = (\mathbf{c}_B^T)\mathbf{B}^{-1}$, o *vetor das variáveis duais* ou *vetor multiplicador simplex*:

$$\lambda^T = (\mathbf{c}_B^T)\mathbf{B}^{-1} \Leftrightarrow \lambda = (\mathbf{B}^{-1})^T\mathbf{c}_B \Leftrightarrow (\mathbf{B}^T)\lambda = \mathbf{c}_B. \quad (16)$$

Substituindo (??) em (??), tem-se que:

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{c}_B^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N = f(\hat{\mathbf{x}}) - \lambda^T\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N = f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{c}_N^T - \lambda^T\mathbf{N})\mathbf{x}_N. \quad (17)$$

Considerando que $(\mathbf{c}_N^T - \lambda^T \mathbf{N}) = (c_{N_1}, c_{N_2}, \dots, c_{N_{n-m}}) - \lambda^T (a_{N_1}, a_{N_2}, \dots, a_{N_{n-m}}) = (c_{N_1} - \lambda^T a_{N_1}, c_{N_2} - \lambda^T a_{N_2}, \dots, c_{N_{n-m}} - \lambda^T a_{N_{n-m}})$ e, também que $\mathbf{x}_N = (x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_{n-m}})$, tem-se que:

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \lambda^T a_{N_1})x_{N_1} + (c_{N_2} - \lambda^T a_{N_2})x_{N_2} + \dots + (c_{N_{n-m}} - \lambda^T a_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}. \quad (18)$$

Os coeficientes $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j})$ das variáveis não básicas da função objetivo descrita por (??) são denominados *custos relativos* ou *custos reduzidos*. Logo, pode-se reescrever (??) como:

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1}x_{N_1} + \hat{c}_{N_2}x_{N_2} + \dots + \hat{c}_{N_{n-m}}x_{N_{n-m}}. \quad (19)$$

Como todas as variáveis do problema são não-negativas, então $x_{N_j} \geq 0$. Se $(c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j}) \geq 0$, com $j = 1, 2, \dots, n - m$, então $f(\mathbf{x}) \geq f(\hat{\mathbf{x}})$ para qualquer $x_N \geq 0$.

Logo, para a partição básica $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$, em que a solução básica (factível) é $\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d} \geq 0$, e $\lambda^T = (\mathbf{c}_B^T) \mathbf{B}^{-1}$ é o vetor multiplicador simplex, se $(\mathbf{c}_N^T - \lambda^T a_{N_j}) \geq 0$, com $j = 1, 2, \dots, n - m$, ou seja, todos os custos relativos são não-negativos, então a solução básica é *ótima*.

Se a condição $(\mathbf{c}_N^T - \lambda^T a_{N_j}) \geq 0$ não for verificada é necessário encontrar uma nova solução básica factível que diminua o valor da função objetivo. Para tanto é utilizada a *estratégia simplex*, que consiste na perturbação de uma solução básica factível que altera as variáveis não-básicas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{N_k} = \varepsilon \geq 0, \text{ (variável com custo relativo negativo)} \\ \mathbf{x}_{N_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n - m, i \neq k \end{cases} \quad (20)$$

ou seja, apenas uma variável não-básica, \mathbf{x}_{N_k} , deixa de ser nula e, com isso, a função objetivo (??) passa a valer:

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1}0 + \dots + \hat{c}_{N_k}\varepsilon + \dots + \hat{c}_{N_{n-m}}0 = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_k}\varepsilon < f(\hat{\mathbf{x}}). \quad (21)$$

Dessa forma, a função objetivo decresce quando ε cresce com a taxa negativa \hat{c}_{N_k} . Quanto menor o valor de $\hat{c}_{N_k} < 0$, mais rápido a função decresce, o que justifica a escolha da variável não-básica com menor custo relativo a ser perturbada. Tal escolha é conhecida na literatura como *regra de Dantzig*. Como a função objetivo decresce quando ε cresce, então determina-se o maior valor possível de ε que mantém factível a solução que está sendo perturbada.

Como os valores das variáveis não-básicas são alterados pela estratégia simplex, é necessário que também sejam alteradas as variáveis básicas \mathbf{x}_B para que o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ seja satisfeito. A estratégia simplex é equivalente a alterar as variáveis não-básicas para:

$$\mathbf{x}_N^T = (x_{N_1} \dots x_{N_k} \dots x_{N_{m-n}}) = (0 \dots \varepsilon \dots 0) \quad (22)$$

em que ε está na k -ésima coordenada.

Utilizando a definição de matriz não básica \mathbf{N} e a definição de \mathbf{x}_N em (??), as variáveis básicas são modificadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \cdot (0 \dots \varepsilon \dots 0)^T = \\ &\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} - \mathbf{B}^{-1}[a_{N_1} \dots a_{N_k} \dots a_{N_{n-m}}] \cdot (0 \dots \varepsilon \dots 0)^T = \hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{B}^{-1}a_{N_k}\varepsilon = \hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{y}\varepsilon \end{aligned} \quad (23)$$

em que $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}a_{N_k}$. O vetor \mathbf{y} é chamado de *direção simplex* e fornece os coeficientes de como as variáveis básicas são alteradas pela estratégia simplex. A direção simplex é a solução do sistema linear $\mathbf{B}\mathbf{y} = a_{N_k}$. Assim, pode-se reescrever a equação vetorial (??) em cada uma de suas coordenadas e, considerando a não-negatividade das variáveis básicas, tem-se:

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i\varepsilon \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (24)$$

Para $y_i \leq 0$, então $x_{B_i} \geq 0$, para qualquer $\varepsilon \geq 0$. Quando $y_i > 0$, como $x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i\varepsilon \geq 0$, então, $\varepsilon \leq \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}$.

Assim, o maior valor de ε é dado por:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l} = \text{mínimo} \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}, \text{ tal que } y_i > 0 \right\}. \quad (25)$$

Se $y_i \leq 0$ para qualquer $i = 1, \dots, m$, então (??) não se aplica, ou seja, não há limitante superior para ε . Logo, a solução perturbada pela estratégia simplex será sempre factível para todo valor de $\varepsilon \geq 0$. Como a função objetivo decresce com o crescimento de ε , o problema não possuirá solução ótima e esse tipo de solução é denominada *solução ótima ilimitada*.

No Apêndice A é apresentado um exemplo de um problema resolvido utilizando o Método Simplex.

4.1.1 O Algoritmo Simplex

O Algoritmo Simplex é uma forma reduzida de se trabalhar com o procedimento apresentado na Seção ?? para o Método Simplex. Considere um problema de otimização linear escrito na forma padrão como em (?). O algoritmo é composto por duas *fases*. A *Fase I* consiste em determinar uma partição básica factível inicial e o Método Simplex é o que chamamos de *Fase II*.

Fase I:

Determinar inicialmente uma partição básica factível $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$.

$$\mathbf{B} = [a_{\mathbf{B}_1} \dots a_{\mathbf{B}_{l-1}} \quad a_{\mathbf{N}_k} \quad a_{\mathbf{B}_{l+1}} \dots a_{\mathbf{B}_m}] \text{ e } \mathbf{N} = [a_{\mathbf{N}_1} \dots a_{\mathbf{N}_{k-1}} \quad a_{\mathbf{B}_l} \quad a_{\mathbf{N}_{k+1}} \dots a_{\mathbf{N}_{n-m}}].$$

Esta partição nos fornece os vetores de variáveis básicas e variáveis não-básicas, respectivamente:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} = (x_{B_1} \quad x_{B_2} \quad \dots \quad x_{B_m}) \text{ e } \mathbf{x}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{T}} = (x_{N_1} \quad x_{N_2} \quad \dots \quad x_{N_{n-m}}).$$

Fase II:

{Início da iteração do método simplex}

Passo 1: {Cálculo da solução básica}

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d} & \{ \text{equivalente a resolver o sistema } \mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = \mathbf{d} \} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{N}} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Passo 2: {Cálculo dos custos relativos}

2.1. {vetor multiplicador simplex}

$$\lambda^{\mathbf{T}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \mathbf{B}^{-1} \quad \{ \text{equivalente a resolver o sistema } \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \lambda = \mathbf{c}_{\mathbf{B}} \}$$

2.2. {custos relativos}

$$\hat{c}_{N_j} = c_{N_j} - \lambda^{\mathbf{T}} a_{N_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n - m$$

2.3. {determinação da variável a entrar na base}

$$\hat{c}_{N_k} = \text{mínimo}\{\hat{c}_{N_j}, j = 1, \dots, n - m\} \text{ (a variável } x_{N_k} \text{ entra na base)}$$

Passo 3: {Teste de otimalidade}

Se $\hat{c}_{N_k} \geq 0$, então: pare {a solução na iteração atual é a solução ótima}

Passo 4: {Cálculo da direção simplex}

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} a_{N_k} \quad \{ \text{equivalente a resolver o sistema } \mathbf{B}\mathbf{y} = a_{N_k} \}$$

Passo 5: {Determinação do tamanho do passo e da variável a sair da base}

Se $\mathbf{y} \leq 0$, então pare {problema não tem solução ótima finita: $f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ }

Caso contrário, determine a variável a sair da base da seguinte forma:

$$\hat{\epsilon} = \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l} = \text{mínimo} \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}, \text{ tal que } y_i > 0, i = 1, \dots, m \right\} \text{ (a variável } x_{B_l} \text{ sai na base)}$$

Passo 6: {Atualização da partição básica: trocar a l-ésima coluna de } \mathbf{B} \text{ pela k-ésima coluna de } \mathbf{N} \text{}:

$$\text{Nova matriz básica: } \mathbf{B} = [a_{\mathbf{B}_1} \dots a_{\mathbf{B}_{l-1}} \quad a_{N_k} \quad a_{\mathbf{B}_{l+1}} \dots a_{\mathbf{B}_m}]$$

$$\text{Nova matriz não-básica: } \mathbf{N} = [a_{N_1} \dots a_{N_{k-1}} \quad a_{\mathbf{B}_l} \quad a_{N_{k+1}} \dots a_{N_{n-m}}]$$

Iteração = Iteração + 1

Retornar ao Passo 1.

{Fim da iteração do método simplex}

4.2 Geração de Colunas

Em PCE's práticos, o número de variáveis n (igual ao número de colunas) do problema é um número muito maior do que a quantidade m de restrições (igual ao número de linhas). A técnica de geração de colunas foi proposta por Gilmore e Gomory (1961) e é eficiente no auxílio à resolução do PCE. Cada coluna da matriz de restrições \mathbf{A} representa um padrão de corte e, durante as iterações do Método Simplex, determinamos uma nova coluna para entrar na base. Devido ao grande número de variáveis (colunas) do problema, analisar e determinar

quais colunas entram na base torna-se um trabalho inviável. Desta forma, utiliza-se a técnica de geração de colunas (Gilmore e Gomory (1961)) para resolver o problema.

A técnica de geração de colunas consiste em gerar uma coluna k , ou seja, um novo padrão de corte, utilizando o critério de Dantzig, que procura a variável x_k com o menor custo relativo para entrar na base, a partir do seguinte subproblema:

$$c_k - \lambda^T a_k = \text{mínimo}\{c_j - \lambda^T a_j, j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (27)$$

em que λ é o vetor multiplicador simplex de uma determinada iteração.

Inicialmente constrói-se uma matriz básica \mathbf{B} com padrões triviais, tais como padrões homogêneos (padrões de corte que produzem apenas um tipo de item). Ao considerar um único tipo de objeto em estoque com quantidade ilimitada, os padrões de corte são obtidos de modo que:

$$b_{ii} = \min \left\{ \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor, d_i \right\}, i = 1, \dots, m, \quad (28)$$

em que $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x , L é o comprimento do objeto em estoque, l_i é o comprimento dos itens e d_i suas respectivas demandas, $i = 1, \dots, m$. Assim, a matriz \mathbf{B} será uma matriz diagonal formada por padrões de corte homogêneos.

Dependendo da função objetivo a ser otimizada, algumas alterações precisam ser realizadas no Método Simplex com geração de colunas. No *caso 1* a seguir, o objetivo consiste em minimizar o total de objetos a serem cortados e no *caso 2* o objetivo é minimizar a perda.

Caso 1: O modelo consiste em:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) = \sum_{j=1}^n x_j \\ &\text{sujeito a: } \begin{cases} \mathbf{Ax} = \mathbf{d} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ e inteiro,} \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

em que o vetor de custos $\mathbf{c} = (1, 1, \dots, 1)$. Logo:

$$\text{mínimo}\{\mathbf{c}_j - \lambda^T a_j\} = 1 - \text{máximo}\{\lambda^T a_j\}.$$

Logo, encontrar uma coluna não-básica (padrão de corte), denotada por $(a_1, a_2, \dots, a_m)^T$,

para entrar na base no lugar de uma coluna básica, corresponde a resolver o problema:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \\ &\text{sujeito a:} && (a_1, a_2, \dots, a_m)^{\mathbf{T}} \text{ corresponda a um padrão de corte.} \end{aligned} \quad (30)$$

Para que a coluna $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^{\mathbf{T}}$ corresponda a um padrão de corte, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m l_i a_i \leq L \\ &0 \leq a_i \leq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e inteiro.} \end{aligned} \quad (31)$$

Reescrevendo o problema (??), tem-se o seguinte problema da mochila restrito:

$$\begin{aligned} &g(\mathbf{a}) = \max \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \\ &\text{sujeito a:} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m l_i a_i \leq L \\ 0 \leq a_i \leq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e inteiro.} \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

Assim, se o menor dos custos relativos é não-negativo, ou seja, se $1 - g(a) \geq 0$, a solução contínua do problema atual é ótima.

Caso 2: O modelo consiste em:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ &\text{sujeito a:} && \begin{cases} \mathbf{Ax} = \mathbf{d} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ e inteiro,} \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

em que o custo \mathbf{c} define a perda no padrão de corte: $\mathbf{c} = \mathbf{L} - \sum_{i=1}^m l_i a_i$. Desta forma, a função objetivo no subproblema (??) será dada por:

$$\mathbf{c} - \lambda^{\mathbf{T}} \mathbf{a} = \left(L - \sum_{i=1}^m l_i a_i \right) - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = L - \sum_{i=1}^m (l_i + \lambda_i) a_i. \quad (34)$$

Logo, o problema (??) passa a ser descrito pelo seguinte problema da mochila restrito:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && g(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m (l_i + \lambda_i) a_i \\ &\text{sujeito a:} && \begin{cases} \sum_{i=1}^m l_i a_i \leq L \\ 0 \leq a_i \leq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e inteiro.} \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

Como pode-se observar nesta seção, o problema da mochila surge como um subproblema na solução de um PCE que utiliza o método simplex. No Passo 2 do algoritmo simplex deve-se determinar uma coluna para entrar na base e, esta coluna é a solução de um problema da mochila. Define-se u_i , $i = 1, \dots, m$, o *valor de utilidade* do item i no problema da mochila. No *caso 1*, u_i é o i -ésimo multiplicador simplex λ_i , $i = 1, \dots, m$ e, no *caso 2*, u_i é definido por $(l_i + \lambda_i)$, $i = 1, \dots, m$.

4.2.1 O Algoritmo Simplex com Geração de Colunas

Fase I:

- Determinar a matriz básica inicial como em (??):

$$\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

- Faça: PARE = Falso e IT = 1

Fase II:

Enquanto PARE = *Falso*, faça:

{Início da iteração do método simplex}

Passo 1: Cálculo da solução básica: $\mathbf{Bx}_B = \mathbf{d}$

Passo 2: Cálculo dos custos relativos

Passo 2.1: Cálculo do vetor multiplicador simplex: $\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{B}^T \lambda = \mathbf{c}_B$

Passo 2.2: Resolução do Problema da Mochila {Gerar uma coluna para entrar na base}

$$\begin{aligned} g(\mathbf{a}) &= \text{máximo } u_1 a_1 + u_2 a_2 + \dots + u_m a_m \\ \text{sujeito a: } &\begin{cases} l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_m a_m \leq L \\ 0 \leq a_i \leq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e inteiro} \end{cases} \end{aligned} \quad (36)$$

em que $u_i = \lambda_i$ para o caso 1 e $u_i = (\lambda_i + l_i)$, $i = 1, \dots, m$ para o caso 2. Além disso, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$ é a solução do problema da mochila.

Passo 3: Teste de Otimalidade

Se $1 - g(\mathbf{a}) \geq 0$ (para o caso 1) ou $L - g(\mathbf{a}) \geq 0$ (para o caso 2), então PARE = Verdadeiro
{A solução atual é a solução ótima e foi obtida em IT iterações.}

senão Início

Passo 4: Cálculo da direção simplex

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} a_{N_k} \quad \{ \text{equivalente a resolver o sistema } \mathbf{B}\mathbf{y} = a_{N_k} \}$$

Passo 5: Determinação do tamanho do passo e da variável a sair da base

Se $\mathbf{y} \leq 0$, então pare {problema não tem solução ótima finita: $f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ }

Caso contrário, determine a variável a sair da base da seguinte forma:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l} = \text{mínimo} \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}, \text{ tal que } y_i > 0, i = 1, \dots, m \right\} \text{ (a variável } x_{B_l} \text{ sai na base)}$$

Passo 6: {Atualização da base}

Substitua a l -ésima coluna da matriz \mathbf{B} por \mathbf{a} , que foi obtida no passo 2.2.

IT = IT + 1.

fim do senão.

{Fim da iteração do método simplex}

4.3 O Método Simplex com Geração de Colunas Aplicado ao PCESAVR

Para resolução do modelo (??)-(??) realizou-se uma alteração no método simplex com geração de colunas apresentado na Seção 4.2. No Passo 2.2 do Algoritmo Simplex com Geração de Colunas resolve-se o seguinte Problema da Mochila:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{a}) &= \text{máximo } u_1 a_1 + u_2 a_2 + \dots + u_m a_m \\ \text{sujeito a: } &\begin{cases} l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_m a_m \leq L \\ 0 \leq a_i \leq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e inteiro} \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

Como no PCESAVR o objetivo principal é maximizar o lucro, o valor de utilidade do item i em (??) é dado por $u_i = (v_i - \lambda_i)$, $i = 1, \dots, m$ em que v_i é o valor do item i , $i = 1, \dots, m$.

Alterações também foram realizadas no cálculo dos custos relativos. Seja $(\lambda^1 \ \lambda^2 \ \lambda^3 \ \lambda^4)$ o vetor dos multiplicadores simplex com dimensão $m + S + R + R$:

λ^1 : m -vetor, referente à demanda;

λ^2 : S -vetor, referente ao estoque de objetos padronizados;

λ^3 : R -vetor, referente ao estoque de retalhos;

λ^4 : R -vetor, referente a cada tipo de retalho gerado.

De acordo com o modelo (??)-(??) três tipos de objetos podem ser cortados: objetos padronizados, retalhos e objetos reduzidos (obtidos por cortes parciais nos objetos padronizados com a finalidade de melhorar a qualidade do padrão de corte). Para cada tipo de objeto, resolve-se o problema da mochila (??), o qual retornará os padrões de corte e, conseqüentemente, um custo relativo associado a cada padrão (cada padrão gerado é uma coluna). Para cada tipo de objeto tem-se:

1. Objetos padronizados:

A coluna associada ao padrão de corte J_s , $s = 1, \dots, S$ é dada por:

$$a_s^T = \left(\underbrace{a_{1s} \ \dots \ a_{ms}}_{m\text{-vetor}} \mid \underbrace{0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0}_{S\text{-vetor coluna identidade}} \mid \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{R\text{-vetor de zeros}} \mid \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{R\text{-vetor de zeros}} \right)$$

Na coluna a_s , o m -vetor corresponde ao padrão de corte para um objeto padronizado de comprimento L_s . O S -vetor indica qual objeto padronizado foi utilizado no padrão de corte. Os R -vetores são nulos pelo fato de nenhum retalho ser cortado ou gerado, respectivamente.

Seja V_s o valor do objeto padronizado s em estoque, $s = 1, \dots, S$. Então, o custo relativo associado à coluna a_s é:

$$\hat{c}(a_s) = \underbrace{\sum_{i=1}^m u_i a_{is}}_{\text{lucro}} - V_s - \sum_{i=1}^m \lambda_i^1 a_{is} - \lambda_s^2 = \sum_{i=1}^m (v_i - \lambda_i^1) a_{is} - V_s - \lambda_s^2 = g(a) - V_s - \lambda_s^2$$

2. Objetos padronizados com geração de retalhos (objetos reduzidos):

A coluna associada ao padrão de corte $J_s(k)$, $k = 1, \dots, R$, $s = 1, \dots, S$ é dada por:

$$a_s(k)^{\mathbf{T}} = (a_{1s} \ \dots \ a_{ms} \mid 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \mid \underbrace{0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0}_{\text{não serão cortados retalhos}} \mid \underbrace{0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0}_{\text{pode ser gerado 1 retalho}})$$

e o custo relativo associado a essa coluna é:

$$\hat{c}(a_s(k)) = \alpha' \left[\underbrace{\sum_{i=1}^m u_i a_{is}}_{\text{lucro}} - (V_s - Vr_k) \right] - \sum_{i=1}^m \lambda_i^1 a_{is} - \lambda_s^2 - \lambda_k^4$$

em que $V_s - Vr_k$ é o valor do objeto reduzido a partir de um objeto padronizado de tamanho L_s , $s = 1, \dots, S$, $k = 1, \dots, R$.

3. Objetos retalhos:

A coluna associada ao padrão de corte Jr_k , $k = 1, \dots, R$, é dada por:

$$a_s(k)^{\mathbf{T}} = (a_{1s} \ \dots \ a_{ms} \mid 0 \ \dots \ 0 \mid 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \mid 0 \ \dots \ -1 \ \dots \ 0)$$

e o custo relativo associado a essa coluna é:

$$\hat{c}(a_s(k)) = \alpha'' \left(\underbrace{\sum_{i=1}^m u_i a_{ik}}_{\text{lucro}} - Vr_k \right) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^1 a_{ik} - \lambda_s^3 + \lambda_k^4$$

em que Vr_k é o valor do retalho, $k = 1, \dots, R$.

Após resolver o Problema da Mochila, o padrão que retornou o maior custo relativo é candidato a entrar na base, visto que deseja-se maximizar o lucro. Se o melhor padrão for cortado de um retalho, então o lucro obtido com o corte dos itens é comparado com o valor de venda dos retalhos e, desta forma, toma-se a decisão que retornar o maior lucro.

Ao acrescentar a nova coluna (novo padrão) na matriz básica alguma coluna com custo menos atrativo sai da base e este novo sistema é novamente resolvido até que a condição de otimalidade seja verificada, ou seja, os custos sejam negativos ou nulos.

A resolução do PCESAVR por meio da estratégia proposta retorna uma solução ótima contínua para o problema. Desta forma, dois procedimentos heurísticos residuais foram propostos para a obtenção de soluções inteiras, os quais são apresentados no próximo capítulo.

5 HEURÍSTICA RESIDUAL PARA O PCESAVR

O Método Simplex com Geração de Colunas aplicado ao modelo (??)-(??) com a condição de integralidade relaxada fornece uma solução contínua para o PCESAVR. Como a solução para este problema deve ser inteira (não é possível cortar um padrão uma quantidade fracionária de vezes), nesta seção são propostos dois procedimentos heurísticos residuais, orientados para o aproveitamento de sobras, que fornecem uma solução inteira a partir da solução ótima contínua do problema.

5.1 Problema Residual

Considere o problema de corte de estoque:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \begin{cases} \mathbf{Ax} = \mathbf{d} \\ \mathbf{x} \geq 0 \text{ e inteiro,} \end{cases} \end{array} \quad (38)$$

em que \mathbf{A} é a matriz dos padrões de corte.

A condição de integralidade sobre as variáveis torna inviável a resolução do problema (??). Esta condição é relaxada e a técnica de geração de colunas proposta por (Gilmore e Gomory, 1961) pode ser aplicada. Com a relaxação desta restrição as soluções obtidas são, em geral, contínuas. Logo, faz-se necessário o uso de procedimentos heurísticos para obtenção de soluções inteiras.

Definição 5.1.1. *Seja $\bar{\mathbf{x}}$ uma solução ótima contínua obtida a partir da resolução do problema (??) com a condição de integralidade relaxada. O vetor $\bar{\mathbf{y}}$ é chamado solução inteira aproximada de $\bar{\mathbf{x}}$ se satisfaz:*

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{y}} \leq \mathbf{d}. \quad (39)$$

Uma maneira de se obter $\bar{\mathbf{y}}$ é arredondar $\bar{\mathbf{x}}$ por truncamento:

$$\bar{\mathbf{y}} = (\lfloor \bar{x}_1 \rfloor, \lfloor \bar{x}_2 \rfloor, \dots, \lfloor \bar{x}_n \rfloor), \quad (40)$$

em que $\lfloor \bar{x} \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a \bar{x} e (??) satisfaz (??), já que os coeficientes de A são não-negativos e \bar{x} satisfaz $A\bar{x} = d$.

Definição 5.1.2. (*Problema Residual*) Seja \bar{y} uma solução inteira aproximada de \bar{x} e $r = d - A\bar{y}$ o vetor de demanda residual. O problema residual é definido pelo problema (??) com $d = r$.

A seguir, apresentamos a estrutura geral das heurísticas residuais.

5.2 Heurísticas Residuais

As heurísticas residuais consistem em resolver o problema de corte de estoque (??) original com a condição de integralidade das variáveis relaxada e, a partir da solução contínua do problema, obter uma solução inteira aproximada. Como este procedimento pode gerar uma demanda residual, em seguida resolve-se o problema residual resultante (Definição ??) também relaxado e obtém-se uma solução inteira aproximada do problema residual. Este processo é repetido sucessivas vezes até que a demanda residual seja nula ou a solução inteira aproximada do problema residual se anule. Neste último caso aplica-se algum método, heurístico ou exato, que resolve o problema residual final com poucos itens.

Algoritmo Residual (Poldi e Arenales, 2009):

{Início}

Passo 1: Faça $q = 0$ e $r^q = d$.

Passo 2: {Determinação da solução ótima contínua}

Resolva o problema residual (??) com $r = r^q$, utilizando a técnica de geração de colunas;

Seja \bar{x}^q a solução contínua obtida;

Se \bar{x}^q é uma solução inteira, então PARE.

Passo 3: {Determinação da solução inteira aproximada}

Determine \bar{y}^q , a solução inteira aproximada de \bar{x}^q ;

Se \bar{y}^q é um vetor nulo, então vá para o Passo 5.

Passo 4: {Atualização}

Determine a nova demanda residual.

$r^{q+1} = r^q - A\bar{y}^q$;

$$q = q + 1;$$

Vá para o Passo 2.

Passo 5: Resolva o problema residual final com poucos itens por algum método heurístico ou exato.

{Fim}

A seguir são apresentadas duas heurísticas residuais propostas para obter soluções inteiras para o PCESAVR.

5.3 Heurísticas Residuais para o PCESAVR

As heurísticas apresentadas nesta seção consistem em obter uma solução inteira de boa qualidade para o PCESAVR, utilizando o algoritmo apresentado na Seção ???. Entretanto, para que esse algoritmo seja totalmente definido é necessário especificar como determinar \bar{y}^q , solução inteira aproximada de \bar{x}^q no Passo 3, e como resolver o problema residual no Passo 5. Além disso, diferente dos procedimentos propostos na literatura, as heurísticas também consideram o aproveitamento de retalhos.

Seja $j = 1, 2, \dots, n$ o número de padrões de corte de uma solução contínua, obtida com a resolução do modelo (??)-(??) com a condição de integralidade relaxada e $j \in J_s \cup Jr_k \cup J_s(k)$. Também, seja h_j o tipo de objeto (padronizado ou retalho) associado ao padrão de corte j de uma solução contínua. Define-se g_{jh_j} como o lucro obtido ao cortar um objeto h_j utilizando um padrão de corte j , $j = 1, 2, \dots, n$ e p_{jh_j} como a perda ao cortar um objeto h_j segundo o padrão de corte j , $j = 1, 2, \dots, n$.

As heurísticas propostas foram denominadas de Residual 1 e Residual 2. Para estas heurísticas, os Passos 1 e 2 são os mesmos do algoritmo residual apresentado na seção ??.

Para a heurística Residual 1, o Passo 3, é definido como a seguir:

- Ordene os padrões de corte tal que:

$$p_{1h_1} \leq p_{2h_2} \leq \dots \leq p_{nh_n},$$

ou seja, os padrões com a menor perda têm maior prioridade.

Para cada padrão, se $p_{jh_j} \leq \delta L_s$ ou $p_{jh_j} \leq \delta Lr_k$ (ou seja, a perda é menor ou igual a uma porcentagem δ do tamanho da barra cortada), $s = 1, 2, \dots, S$, $k = 1, 2, \dots, R$ então a frequência

deste padrão é obtida da seguinte maneira:

$$\bar{y}_{jh_j} \leftarrow \lfloor \bar{x}_{jh_j} \rfloor + 1. \quad (41)$$

Caso contrário:

$$\bar{y}_{jh_j} \leftarrow \lfloor \bar{x}_{jh_j} \rfloor. \quad (42)$$

Com este procedimento de arredondamento, temos a solução inteira dada por

$$\bar{\mathbf{y}}^q = (\bar{y}_{1h_1}, \bar{y}_{2h_2}, \dots, \bar{y}_{nh_n}).$$

O próximo passo consiste em verificar a factibilidade da solução. Desta forma, faz-se $\bar{\mathbf{y}}^q = (\bar{y}_{1h_1}, 0, \dots, 0)$, ou seja, considera-se apenas a frequência do primeiro padrão de corte e fixam-se as demais em zero. Analisa-se se as restrições de demanda e estoque estão sendo violadas. Enquanto houver excesso de itens ou uso excessivo do objeto em estoque faz-se $\bar{y}_{1h_1} \leftarrow \bar{y}_{1h_1} - 1$. Verificada a factibilidade do primeiro padrão de corte, este é fixado, armazenado e a demanda e o estoque são atualizados. O próximo padrão de corte é analisado, ou seja, $\bar{\mathbf{y}}^q = (\bar{y}_{1h_1}, \bar{y}_{2h_2}, 0, \dots, 0)$. Esse procedimento é repetido para todos os padrões de corte. Caso a frequência de algum padrão torne-se nula, o mesmo é descartado.

Como o problema proposto também considera o aproveitamento de retalhos, após esse procedimento, os padrões de corte que geraram retalhos são novamente analisados. Caso a restrição de retalhos (restrição (??)) seja violada, ou seja, ocorra produção de retalhos em excesso, na ordem em que esses padrões estão dispostos, a frequência do primeiro padrão é reduzida de uma unidade até que o mesmo se torne factível. Demanda, estoque e retalhos são atualizados. Este procedimento é repetido para todos os padrões de corte. Caso a frequência de algum padrão se torne nula, o mesmo é descartado.

Este procedimento gera uma demanda residual, cujo problema é resolvido da mesma maneira. Com este procedimento, a demanda residual tende a reduzir durante as iterações e, em um número finito de passos, a demanda residual torna-se nula. Devido a solução de arredondamento, o último problema residual geralmente tem uma demanda muito baixa, gerando uma sobra tal que $p_{jh_j} > \delta L_s$ ou $p_{jh_j} > \delta Lr_k$, $s = 1, 2, \dots, S$, $k = 1, 2, \dots, R$. Neste caso, para atender a demanda, a frequência desse padrão é arredondado por (??).

Na heurística Residual 2, no Passo 3, os padrões são ordenados de acordo com o lucro, em ordem não-crescente, da seguinte forma:

$$g_{1h_1} \geq g_{2h_2} \geq \dots \geq g_{nh_n},$$

ou seja, os padrões com o maior lucro têm maior prioridade.

O processo de arredondamento das frequências dos padrões e a verificação da factibilidade é realizada como na heurística Residual 1.

No próximo capítulo são apresentados os resultados dos testes computacionais realizados.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os testes computacionais realizados para avaliar o desempenho do modelo (??)-(??) e das heurísticas propostas para resolver o PCESAVR. Foram realizados dois tipos de testes: estático e por períodos. Nos testes estáticos os retalhos gerados durante o processo de corte são armazenados em estoque para atender a possíveis demandas futuras e não são utilizados durante o próprio processo de corte no qual foram gerados. Neste tipo de teste, retalhos são cortados e vendidos apenas quando já estão disponíveis em estoque antes do início do processo de corte. Os resultados dos testes estáticos foram obtidos a partir da média de 20 exemplos e os retalhos gerados em um exemplo não são utilizados como estoque para o exemplo seguinte. Nos testes por período, os resultados obtidos consideraram 10 períodos e os retalhos gerados em um período são disponibilizados para o período seguinte (CHERRI, et al. 2013), ou seja, os retalhos que possivelmente são gerados no primeiro período são armazenados e podem ser utilizados para corte ou venda no segundo período, e assim sucessivamente.

Duas situações foram consideradas para o caso estático: primeiramente considerou-se que o estoque era composto apenas por objetos padronizados, havendo a possibilidade de gerar ou não novos retalhos. Note que o caso em que não há retalhos em estoque e não é gerado nenhum tipo de retalho coincide com o problema de corte clássico (ARENALES et al., 2015). A segunda situação considera que o estoque é composto por objetos padronizados e retalhos, havendo a possibilidade de gerar ou não novos retalhos.

6.1 Dados para os problemas

Os dados para os exemplares e para o gerador são descritos a seguir. Os mesmos foram obtidos a partir de testes preliminares:

- Número de tipos de objetos padronizados: $s = 1$;
- Número de tipos de retalhos em estoque: $k = 4$;
- Número de tipos de itens: $m = 15$;
- Disponibilidades dos tipos de objetos padronizados: suficiente para atender toda a demanda de itens;

- Disponibilidades dos retalhos em estoque: $er_k = 0, 1, 2, k = 1, \dots, 4$;
- Comprimento do objeto padronizado: $L_1 = 1200$;
- Comprimento dos retalhos em estoque e para estoque: $Lr_1 = 400, Lr_2 = 500, Lr_3 = 600$ e $Lr_4 = 650$;
- Comprimento dos itens: os itens de comprimento l_i foram gerados considerando 3 categorias de tamanho - pequenos (P), médios (M) e grandes (G). Cada categoria foi gerada aleatoriamente considerando os intervalos:
 - Itens pequenos (P): [50-140];
 - Itens médios (M): [140,350];
 - Itens grandes (G): [350,750].
- Demanda: a demanda dos itens foi gerada considerando 3 categorias para as quantidades - baixa (B), média (M) e alta (A). Cada categoria foi gerada aleatoriamente considerando os intervalos:
 - Demanda baixa (B): [1,10];
 - Demanda média (M): [10,80];
 - Demanda alta (A): [80,300].

Outros valores poderiam ser utilizados para definir os tipos de itens bem como as demandas. Combinando as categorias de comprimento de itens com as categorias de demandas, 9 classes de exemplares foram geradas aleatoriamente. A classe [GA], por exemplo, representa uma classe de itens grandes e demanda alta.

- Valor de venda dos retalhos em estoque: $v_k = 1, 1Lr_k, k = 1, \dots, 4$;
- Valor de venda dos itens: $1, 25l_i, i = 1, \dots, m$;
- Número máximo de retalhos gerados: $U_k = 2\beta + 2, \beta = 0, 1, 2$ e $k = 1, \dots, 4$. Desta forma, quando $\beta = 0$, por exemplo, pode-se gerar 2 retalhos de cada tipo k para estoque. Nos testes, também foi analisada a solução do problema clássico de corte de estoque ($U_k = 0$ e $er_k = 0, k = 1, \dots, 4$).
- Parâmetro α : $\alpha = \alpha' = \alpha'' = 1$;

O modelo (??)-(??) foi implementado utilizando a interface OPL do software CPLEX. Os testes foram executados em um computador Intel Core i5, 1.80GHz, 4 GB de memória RAM.

As soluções ótimas para o PCESAVR foram obtidas com a condição de integralidade do modelo (??)-(??) relaxada. Para obtenção de soluções inteiras, foram utilizados os procedimentos heurísticos Residual 1 e Residual 2 apresentados na seção ???. Para as heurísticas, foi utilizado o parâmetro $\delta = 0, 1$.

6.2 Testes Estáticos

Nos testes estáticos considera-se ou não a geração de retalhos durante o processo de corte. Porém, os retalhos são gerados para estoque, e não são utilizados para corte de itens ou para venda dentro do mesmo processo de corte. Cortam-se ou vedem-se retalhos apenas quando os mesmos já estão disponíveis em estoque antes do processo de corte ser iniciado.

As Tabelas ?? e ?? apresentam, respectivamente, o lucro médio absoluto para o caso em que não há retalhos em estoque antes de se iniciar o processo de corte ($er_k = 0, k = 1, \dots, 4$) e o lucro médio absoluto para o caso em que há retalhos em estoque antes de se iniciar o processo de corte. Os resultados apresentados são referentes à media de 20 exemplos gerados aleatoriamente.

Tabela 1 - Lucro médio - Sem estoque inicial de retalhos.

Classe	Tipo de Solução	$U_k = 0$	$U_k = 2, \beta = 0$	$U_k = 4, \beta = 1$	$U_k = 6, \beta = 2$
[GA]	Contínua	227.721,63	228.601,63	229.481,63	230.361,63
	Residual 1	227.304,13	228.586,63	229.456,63	230.344,13
	Residual 2	227.304,13	228.586,63	229.449,13	230.334,13
[GM]	Contínua	52.270,19	53.125,19	53.980,19	54.825,19
	Residual 1	51.890,19	53.070,19	53.940,19	54.795,19
	Residual 2	51.890,19	53.070,19	53.940,19	54.787,69
[GB]	Contínua	6.904,81	7.554,81	8.129,81	8.494,81
	Residual 1	6.649,81	7.524,81	8.052,31	8.442,31
	Residual 2	6.649,81	7.524,81	8.052,31	8.442,31
[MA]	Contínua	166.061,71	166.062,26	166.062,81	166.063,35
	Residual 1	165.509,69	165.802,19	165.857,19	165.879,69
	Residual 2	165.509,69	165.894,69	165.907,19	165.889,69
[MM]	Contínua	40.807,82	40.808,57	40.809,04	40.809,52
	Residual 1	40.150,44	40.605,44	40.637,94	40.597,94
	Residual 2	40.150,44	40.627,94	40.585,44	40.602,94
[MB]	Contínua	4.858,50	4.859,75	4.859,78	4.859,79
	Residual 1	4.086,81	4.711,81	4.776,81	4.744,31
	Residual 2	4.086,81	4.681,81	4.701,81	4.689,31
[PA]	Contínua	65.770,55	65.770,55	65.770,55	65.770,55
	Residual 1	65.272,75	65.510,25	65.575,25	65.532,75
	Residual 2	65.272,75	65.574,88	65.554,88	65.524,88
[PM]	Contínua	16.048,03	16.048,03	16.048,03	16.048,03
	Residual 1	15.440,13	15.830,13	15.820,13	15.832,63
	Residual 2	15.440,13	15.857,63	15.840,13	15.860,13
[PB]	Contínua	1.935,50	1.935,50	1.935,50	1.935,50
	Residual 1	1.457,50	1.667,50	1.712,56	1.705,00
	Residual 2	1.457,50	1.682,56	1.685,06	1.680,00

Quando a solução contínua é analisada, pode-se observar que quanto maior o valor de U_k , $k = 1, 2, 3, 4$, maior é o lucro obtido, ou seja, a estratégia de gerar retalhos apresenta aumentos significativos no lucro. Esta situação era esperada visto que retalhos devem ser gerados para melhorar a qualidade dos padrões de corte, ou seja, reduzir as perdas de material.

Porém, esse crescimento não é observado para todas as soluções inteiras. Em alguns casos, o lucro diminui para valores maiores de U_k , $k = 1, 2, 3, 4$. Isso ocorre devido ao arredondamento realizado, pois, como a demanda residual tende a diminuir, poucos itens são alocados no último padrão de corte, gerando inclusive, prejuízos.

Tabela 2 - Lucro médio - Com estoque inicial de retalhos.

Classe	Tipo de Solução	$U_k = 2, er_k = \beta = 0$	$U_k = 4, er_k = \beta = 1$	$U_k = 6, er_k = \beta = 2$
[GA]	Contínua	228.601,63	229.298,63	229.995,63
	Residual 1	228.586,63	229.298,88	230.024,13
	Residual 2	228.586,63	229.303,88	230.024,13
[GM]	Contínua	53.125,19	53.792,19	54.449,19
	Residual 1	53.070,19	53.802,44	54.468,69
	Residual 2	53.070,19	53.802,44	54.468,69
[GB]	Contínua	7.554,81	8.024,81	8.379,81
	Residual 1	7.524,81	8.046,81	8.397,31
	Residual 2	7.524,81	8.046,81	8.397,31
[MA]	Contínua	166.062,26	165.136,44	165.136,82
	Residual 1	165.802,19	165.028,44	165.072,69
	Residual 2	165.894,69	166.346,50	166.047,31
[MM]	Contínua	40.808,57	41.191,37	41.192,38
	Residual 1	40.605,44	41.025,31	41.119,56
	Residual 2	40.627,94	41.025,56	40.781,00
[MB]	Contínua	4.859,75	4.892,57	4.892,75
	Residual 1	4.711,81	4.779,50	4.856,00
	Residual 2	4.681,81	4.741,31	4.813,31
[PA]	Contínua	65.770,55	65.770,55	65.770,55
	Residual 1	65.510,25	65.627,75	65.701,75
	Residual 2	65.574,88	65.682,13	65.687,75
[PM]	Contínua	16.048,03	16.048,03	16.048,03
	Residual 1	15.830,13	15.988,50	15.979,63
	Residual 2	15.857,63	15.744,06	15.823,06
[PB]	Contínua	1.935,50	1.935,50	1.935,50
	Residual 1	1.667,50	1.789,38	1.821,38
	Residual 2	1.682,56	1.767,50	1.826,38

A restrição (??) no modelo (??)-(??) tem muita influência sobre os resultados obtidos. Quando o parâmetro $U_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$, o modelo não pode gerar qualquer retalho e é obrigado a cortar ou vender os retalhos do tipo k se disponíveis em estoque, para manter a factibilidade da solução. Por exemplo, se há em estoque 2 retalhos de um determinado tipo k e $U_k = 0$, de acordo com a restrição (??) esses dois retalhos deverão obrigatoriamente ser cortados ou vendidos para manter a factibilidade do modelo. Esta imposição pode pesar negativamente para a qualidade da solução, pois, quando a quantidade de retalhos do tipo k em estoque for igual à quantidade permitida U_k , o modelo poderá gerar retalhos do tipo k até no máximo a mesma quantidade em que vai cortá-los ou vendê-los. Quando U_k é maior que a quantidade de retalhos do tipo k em estoque o modelo poderá gerar retalhos deste tipo independente de cortá-los ou

vendê-los. Esta última situação deixa a restrição com uma certa “folga”, logo as soluções tendem a ser melhores, o que também justifica o fato das soluções da Tabela ?? serem melhores que os resultados da Tabela ??, mesmo que a diferença seja mínima.

Comparando os resultados obtidos pela Heurística Residual 1 e pela Heurística Residual 2 pode-se concluir que os resultados são muito parecidos. Quando ocorre diferença entre os resultados das duas heurísticas, essa diferença não é significativa. Nas Tabelas ?? e ?? as melhores soluções entre a heurística 1 e a 2 estão destacadas.

As Tabelas ?? e ?? apresentam o *gap* do lucro, calculado pela seguinte razão:

$$\frac{| \text{solução inteira} - \text{solução contínua} |}{| \text{solução inteira} |}$$

em que a solução contínua representa o valor ótimo do problema relaxado e o valor da solução inteira foi encontrado por meio das heurísticas residuais 1 e 2.

Tabela 3 - Gap do Lucro (%) - Sem retalhos em estoque.

Classe	Tipo de Solução	$U_k = 0$	$U_k = 2$	$U_k = 4$	$U_k = 6$
[GA]	Residual 1	0,18	0,01	0,01	0,01
	Residual 2	0,18	0,01	0,01	0,01
[GM]	Residual 1	0,73	0,10	0,07	0,05
	Residual 2	0,73	0,10	0,07	0,07
[GB]	Residual 1	3,83	0,39	0,95	0,62
	Residual 2	3,83	0,39	0,95	0,62
[MA]	Residual 1	0,33	0,16	0,12	0,11
	Residual 2	0,33	0,10	0,09	0,10
[MM]	Residual 1	1,64	0,50	0,42	0,52
	Residual 2	1,64	0,44	0,55	0,51
[MB]	Residual 1	18,88	3,19	1,73	2,44
	Residual 2	18,88	3,89	3,37	3,66
[PA]	Residual 1	0,76	0,40	0,30	0,36
	Residual 2	0,76	0,32	0,35	0,40
[PM]	Residual 1	3,94	1,37	1,43	1,35
	Residual 2	3,94	1,19	1,30	1,18
[PB]	Residual 1	32,80	15,04	12,46	12,85
	Residual 2	32,80	13,94	13,80	14,30

Tabela 4 - Gap do Lucro (%) - Com retalhos em estoque.

Classe	Tipo de Solução	$U_k = 2$	$U_k = 4$	$U_k = 6$
[GA]	Residual 1	0,01	0,00	0,01
	Residual 2	0,01	0,00	0,01
[GM]	Residual 1	0,10	0,02	0,04
	Residual 2	0,10	0,02	0,04
[GB]	Residual 1	0,39	0,27	0,21
	Residual 2	0,39	0,27	0,21
[MA]	Residual 1	0,16	0,07	0,04
	Residual 2	0,10	0,16	0,07
[MM]	Residual 1	0,50	0,40	0,18
	Residual 2	0,44	0,40	0,27
[MB]	Residual 1	3,19	2,40	0,75
	Residual 2	3,89	2,57	0,97
[PA]	Residual 1	0,40	0,22	0,11
	Residual 2	0,32	0,16	0,12
[PM]	Residual 1	1,37	0,84	0,42
	Residual 2	1,19	1,33	1,08
[PB]	Residual 1	15,04	6,81	4,98
	Residual 2	13,94	7,60	4,59

Os maiores *gaps* ocorrem nos casos em que os itens são pequenos e as demandas são baixas. Como a combinação dos itens no padrão de corte é boa para itens pequenos, o problema residual final, de modo geral, apresenta uma quantidade muito baixa de itens para serem cortados, muitas vezes, gerando grandes prejuízos. Essa situação nos sugere a busca por outros procedimentos heurísticos

Das Tabelas ?? e ??, também pode-se concluir que a solução inteira é melhor quando há retalhos em estoque antes do início do processo de corte do que quando não há, já que o *gap* é menor para esses casos. Isso ocorre, pois, no caso em que há retalhos em estoque um retalho pode ter sido utilizado no último padrão, evitando prejuízo.

Na Tabela ?? na classe [GA], quando $U_k = 4$, podemos notar que o *gap* é nulo, apesar das soluções inteiras não serem iguais à solução ótima. Isso ocorre devido ao arredondamento, já que a diferença entre as soluções é muito pequena e o *gap* resultante é um número decimal também muito pequeno.

Com relação ao tempo computacional, a solução para cada problema foi obtida com um tempo médio de 1,27 segundos, o que é bem aceitável na prática.

6.3 Testes por períodos

Nos testes por períodos considera-se a possibilidade de gerar retalhos em um período de modo que os mesmos podem ser cortados ou vendidos no período seguinte, ou seja, os retalhos que são gerados no 1º período podem ser cortados ou vendidos no 2º período, e assim sucessivamente (CHERRI et al., 2013). Com esses testes, procura-se simular o dia-a-dia de uma empresa e verificar se a possibilidade de gerar retalhos contribui para o aumento de seu lucro.

Foram simuladas situações para 10 períodos de tempo, sendo que no 1º período o estoque é composto apenas pelo objeto padronizado, cujo comprimento é 1200 e a quantidade é suficiente para atender toda a demanda. Os dados para os testes considerando períodos de tempo são os mesmos apresentados na Seção ???. Em cada período podem ser gerados retalhos com comprimentos 400, 500, 600 e 650 em quantidades variando entre $U_k = 0, 2, 4$ e 6 , $k = 1, 2, 3, 4$. A partir do 2º período os retalhos que possivelmente estão em estoque podem ser utilizados para corte ou para a venda. Em cada período, 15 tipos de itens são gerados aleatoriamente.

Na simulação por períodos foram apresentadas apenas as soluções inteiras visto que as soluções contínuas podem gerar quantidades fracionárias de retalhos para estoque.

Analisando os primeiros testes computacionais, nota-se que o desempenho da heurística era prejudicado por uma característica muito comum das heurísticas residuais: o último problema residual resolvido contém uma quantidade muito pequena de itens, o que acaba gerando uma sobra muito grande no último padrão da solução inteira. De modo geral, essa sobra não possui o tamanho dos possíveis retalhos e, muitas vezes a possibilidade de gerar retalhos já havia sido esgotada para o último problema residual. Desta forma, para melhorar o desempenho das heurísticas, uma nova etapa foi acrescentada aos procedimentos heurísticos:

- armazenar a sobra do último padrão do período atual e obrigatoriamente utilizá-la no período seguinte. Este procedimento é realizado apenas se o comprimento da sobra for maior ou igual ao comprimento do menor retalho permitido, ou seja, o comprimento superior a 400. Assim, a sobra não é considerada como perda no período atual.

Este passo foi acrescentado apenas nos testes por período. Nas soluções estáticas, como comparam-se as soluções das heurísticas com a solução contínua a sobra do último padrão foi mantida.

A Tabela ?? apresenta o lucro médio absoluto para os 10 períodos de tempo. Na tabela, quando $U_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$, não é permitido gerar retalhos em nenhum período. Quando $U_k = 2$, $k = 1, 2, 3, 4$, é permitido gerar 2 retalhos de cada tipo em cada período e assim sucessivamente.

Tabela 5 - Lucro médio.

Classe	Tipo de Solução	$U_k = 0$	$U_k = 2$	$U_k = 4$	$U_k = 6$
[GA]	Residual 1	229.457,25	230.792,75	231.398,75	232.124,75
	Residual 2	229.457,25	230.792,75	231.398,75	232.124,75
[GM]	Residual 1	56.560,75	57.550,65	57.873,65	58.179,65
	Residual 2	56.560,75	57.550,65	57.873,65	58.179,65
[GB]	Residual 1	5.493,25	6.879,65	7.450,75	7.760,75
	Residual 2	5.493,25	6.879,65	7.450,75	7.760,75
[MA]	Residual 1	181.525,50	182.020,00	182.028,50	182.071,80
	Residual 2	181.525,50	181.974,50	182.033,60	182.081,50
[MM]	Residual 1	43.856,63	44.719,25	44.643,75	44.761,25
	Residual 2	43.992,25	44.647,25	44.704,25	44.760,25
[MB]	Residual 1	4.673,63	5.206,63	5.217,63	5.307,49
	Residual 2	4.673,63	5.156,63	5.302,13	5.263,63
[PA]	Residual 1	71.666,38	72.444,27	72.429,48	72.431,88
	Residual 2	71.666,38	72.484,88	72.522,88	72.505,18
[PM]	Residual 1	15.506,00	15.896,10	15.914,20	15.896,10
	Residual 2	15.506,00	15.956,40	15.929,70	15.972,10
[PB]	Residual 1	1.265,75	1.941,15	1.941,15	1.883,05
	Residual 2	1.265,75	1.924,05	1.924,05	1.898,05

Pela tabela, pode-se observar que quanto maior o valor de U_k , $k = 1, 2, 3, 4$, ou seja, quanto mais retalhos podem ser gerados em cada período, maior é o lucro obtido. Da mesma forma como ocorreu para os testes estáticos, este aumento no lucro era esperado visto que, quanto maior a possibilidade de gerar retalhos, maior é a diversidade de retalhos em estoque (que podem ser cortados ou vendidos) e, conseqüentemente, melhor pode ser a qualidade dos padrões de corte. Apenas em uma classe de itens médios e em algumas classes de itens pequenos a qualidade da solução não aumentou para valores maiores de U_k . Isso ocorreu devido aos arredondamentos realizados pelas heurísticas.

Comparando os resultados da Heurística Residual 1 com os da Heurística Residual 2, nota-se que os resultados estão próximos. Em cada classe na Tabela ?? foi destacado em negrito a melhor solução entre as fornecidas pelas duas heurísticas. Observe que na classe de itens grandes ambas as heurísticas apresentaram a mesma solução. Nestas classes, como a combinação de itens é mais restrita, os padrões de corte gerados foram basicamente os mesmos para as duas heurísticas. Nestas classes, também pode-se notar um aumento mais expressivo do lucro para valores maiores de U_k , $k = 1, 2, 3, 4$, comparado com as demais classes de itens (médios e pequenos).

Ainda para a análise da simulação, nas Tabelas ?? e ??, são apresentadas as quantidades de

retalhos que foram gerados, cortados e vendidos durante os 10 períodos de tempo.

Tabela 6 - Quantidade de retalhos gerados, cortados e vendidos - Heurística Residual 1.

Classe	$U_k = 2$			$U_k = 4$			$U_k = 6$		
	Gerados	Cortados	Vendidos	Gerados	Cortados	Vendidos	Gerados	Cortados	Vendidos
[GA]	24	16	5	40	26	9	59	39	13
[GM]	21	7	10	36	9	17	47	11	23
[GB]	20	14	2	32	20	4	43	27	6
[MA]	29	15	10	49	16	23	57	16	28
[MM]	22	4	15	44	8	25	57	4	38
[MB]	28	13	10	43	11	24	46	12	27
[PA]	24	7	13	26	9	7	28	10	6
[PM]	25	6	16	26	7	18	26	8	14
[PB]	19	1	16	19	1	16	20	2	12

Tabela 7 - Quantidade de retalhos gerados, cortados e vendidos - Heurística Residual 2.

Classe	$U_k = 2$			$U_k = 4$			$U_k = 6$		
	Gerados	Cortados	Vendidos	Gerados	Cortados	Vendidos	Gerados	Cortados	Vendidos
[GA]	24	16	5	40	26	9	59	39	13
[GM]	22	8	9	36	9	17	47	11	23
[GB]	20	14	2	32	20	4	43	27	6
[MA]	21	7	9	42	8	25	38	10	19
[MM]	18	5	8	27	3	19	43	3	34
[MB]	18	7	6	33	5	21	39	8	19
[PA]	25	4	16	24	2	16	28	2	19
[PM]	19	3	13	22	4	14	25	4	16
[PB]	18	2	14	18	2	14	18	2	10

Analisando as tabelas, pode-se notar que de modo geral a menor quantidade de retalhos é gerada quando os itens são pequenos. Isso ocorre, pelo fato de haver melhor possibilidade de combinação destes itens (e conseqüentemente melhor aproveitamento) nos padrões de corte gerados por objetos padronizados.

Além disso, a quantidade de retalhos cortados e vendidos é bem balanceada entre as classes para as duas heurísticas, pois o modelo decide qual ação é mais vantajosa no momento, que pode variar de acordo com a situação gerada pelo próprio processo de corte.

Em ambas as tabelas e, para todas as classes, existe uma pequena quantidade de retalhos que não foram cortados, nem vendidos. Possivelmente, estes retalhos não foram atrativos para o corte ou venda durante os períodos ou então, foram gerados no último período.

Nos gráficos das Figuras ?? e ?? são apresentadas as quantidades totais de cada tipo de retalho gerado durante os 10 períodos de tempo para as heurísticas Residual 1 e 2, respectivamente.

Foram apresentados os resultados para as classes de itens grandes e médios. Essa escolha baseia-se nas Tabelas 6 e 7 que mostraram que para itens pequenos a quantidade de retalhos gerados é menor. Arenales et al. (2015) também destacam o fato de que as situações em que se trabalha com itens grandes e médios e com demandas baixas e médias são casos mais promissores para permitir sobras durante o processo de corte.

Figura 10 - Tipos de retalhos gerados - Heurística Residual 1

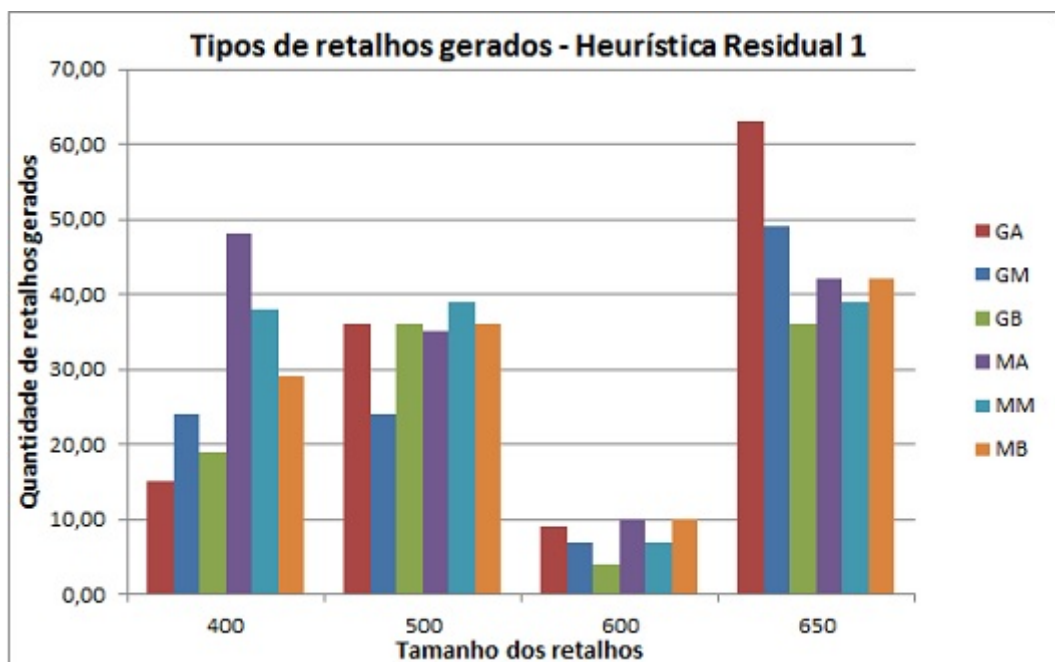
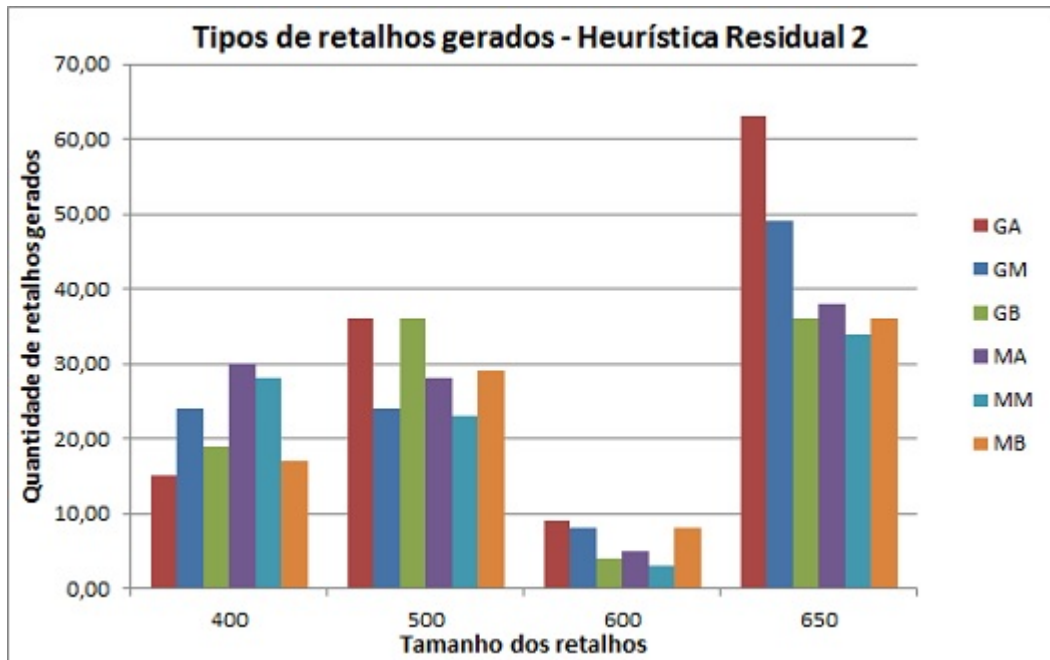


Figura 11 - Tipos de retalhos gerados - Heurística Residual 2



Os gráficos das Figuras ?? e ?? mostram as quantidades totais de cada tipo de retalhos que foram cortados durante os 10 períodos de tempo, para as heurísticas Residual 1 e 2, respectivamente.

Figura 12 - Tipos de retalhos cortados - Heurística Residual 1

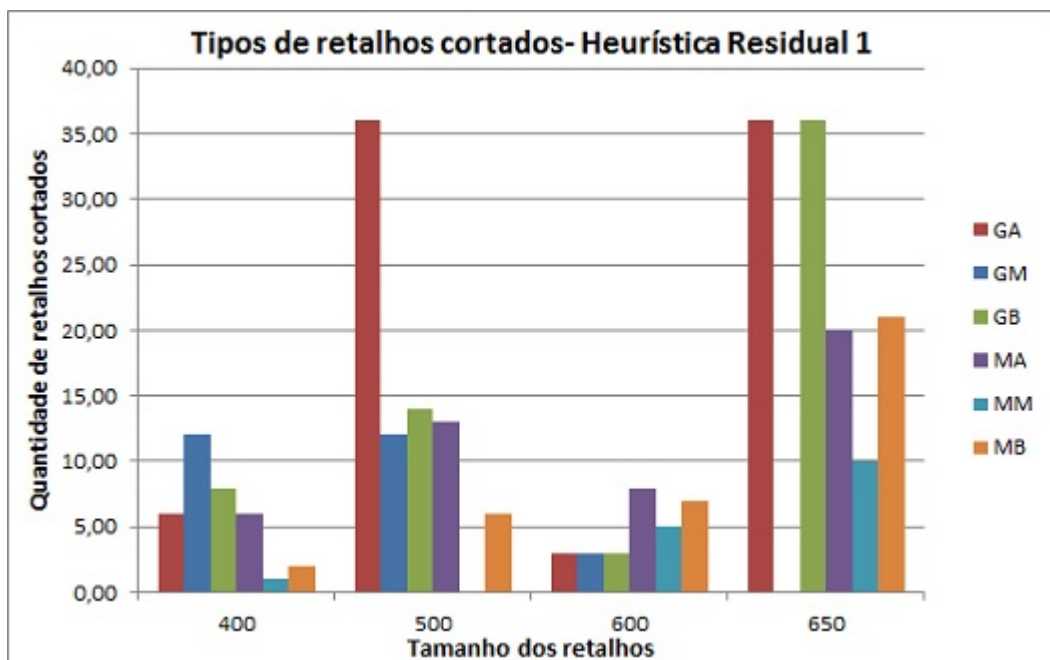
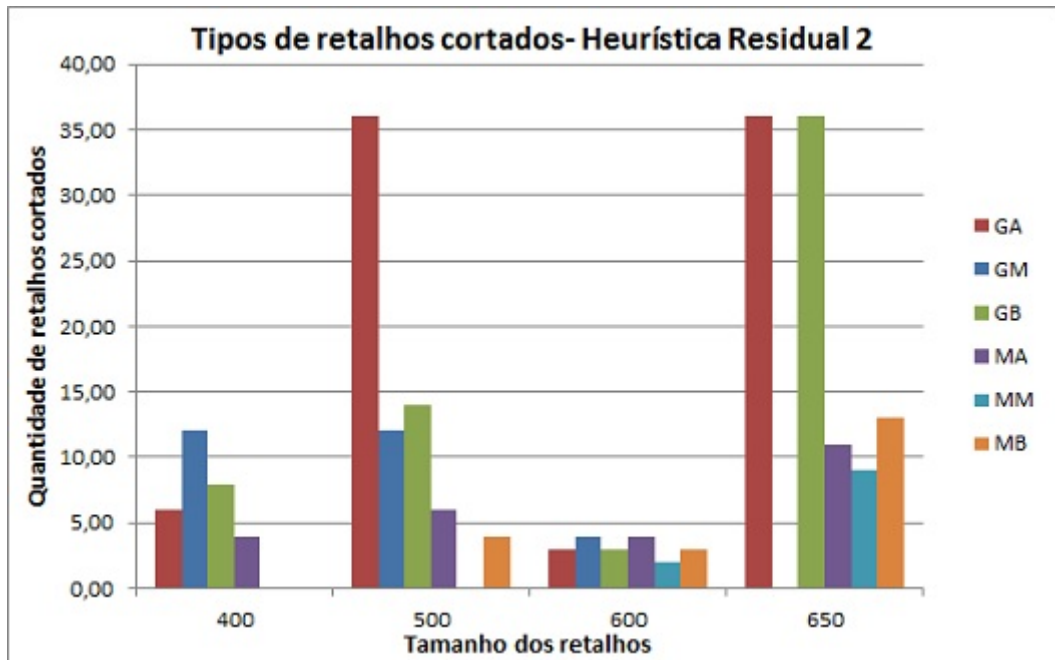


Figura 13 - Tipos de retalhos cortados - Heurística Residual 2



Por fim, os gráficos das Figuras ?? e ?? mostram as quantidades de cada tipo de retalho que foram vendidas durante os 10 períodos de tempo para as heurísticas Residual 1 e 2, respectivamente.

Figura 14 - Tipos de retalhos vendidos - Heurística Residual 1

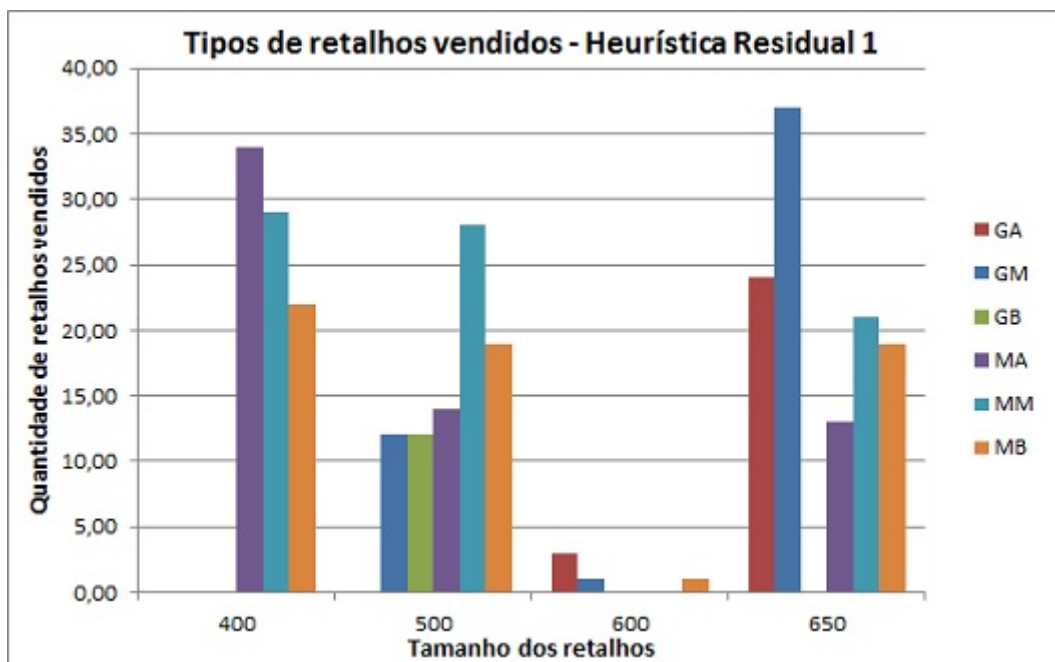
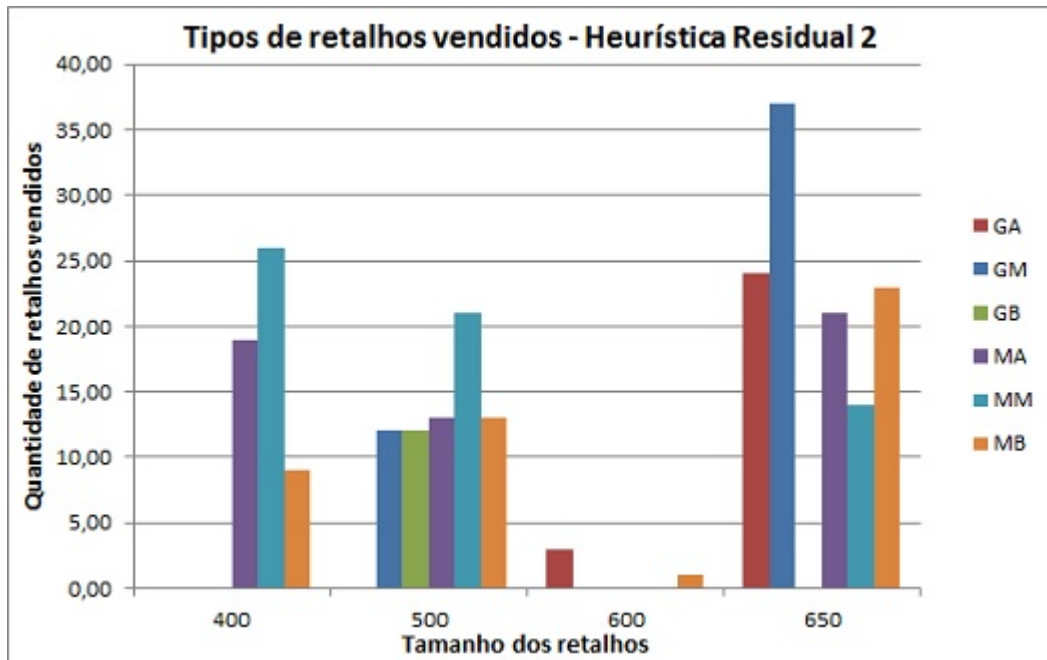


Figura 15 - Tipos de retalhos vendidos - Heurística Residual 2



Pela análise dos gráficos pode-se concluir que, na maioria das classes, o retalho gerado com maior frequência foi o de dimensão 650 e o retalho de menor frequência foi o de dimensão 600. Consequentemente, para a maioria das classes os retalhos mais cortados e vendidos foram os de dimensão 650. Os retalhos de comprimento 600 foram os menos cortados e vendidos.

Para a classe $[MM]$ (itens médios e demanda média), os retalhos gerados de tamanho 400 e 500 não foram cortados, mas sim vendidos. De forma contrária, os retalhos de tamanho 400 e 500 gerados na classe $[GA]$ (itens grandes e demanda alta) foram todos cortados, e não vendidos.

As Tabelas ?? e ?? apresentam, respectivamente, o lucro médio obtido com o corte de retalhos e o lucro médio obtido com a venda de retalhos para o caso da Heurística Residual 1. Já as Tabelas ?? e ?? apresentam, respectivamente, os lucros médios obtidos com o corte e a venda de retalhos para o caso da Heurística Residual 2.

Tabela 8 - Lucro obtido com retalhos cortados - Heurística Residual 1.

Classe	$U_k = 2$	$U_k = 4$	$U_k = 6$
[GA]	215,78	365,77	532,90
[GM]	85,20	108,20	135,07
[GB]	193,6	281,78	337,58
[MA]	182,12	226,00	222,25
[MM]	59,37	116,62	49,62
[MB]	165,87	160,37	185,25
[PA]	104,37	120,50	133,00
[PM]	72,37	92,50	100,00
[PB]	16,25	16,25	32,50

Tabela 9 - Lucro obtido com venda de retalhos - Heurística Residual 1.

Classe	$U_k = 2$	$U_k = 4$	$U_k = 6$
[GA]	32,00	58,00	84,00
[GM]	61,50	104,50	140,50
[GB]	10,00	20,00	30,00
[MA]	49,50	108,00	133,00
[MM]	72,00	126,50	194,00
[MB]	48,00	124,00	140,50
[PA]	67,00	36,50	25,00
[PM]	93,00	101,00	75,00
[PB]	96,00	96,00	71,50

Tabela 10 - Lucro obtido com retalhos cortados - Heurística Residual 2.

Classe	$U_k = 2$	$U_k = 4$	$U_k = 6$
[GA]	215,78	365,77	532,90
[GM]	91,57	108,20	135,07
[GB]	193,60	281,78	337,58
[MA]	89,75	108,50	118,87
[MM]	75,50	43,00	42,25
[MB]	97,62	75,65	108,12
[PA]	40,37	18,75	24,25
[PM]	38,25	52,00	49,87
[PB]	31,25	31,25	31,25

Tabela 11 - Lucro obtido com venda de retalhos - Heurística Residual 2.

Classe	$U_k = 2$	$U_k = 4$	$U_k = 6$
[GA]	32,00	58,00	84,00
[GM]	55,50	104,50	140,50
[GB]	10,00	20,00	30,00
[MA]	49,00	132,50	96,00
[MM]	35,00	92,00	173,00
[MB]	33,00	113,50	110,00
[PA]	84,50	82,50	100,50
[PM]	72,50	79,50	84,00
[PB]	79,50	79,50	53,50

Na maioria das classes o lucro com o corte ou com a venda de retalhos é maior quando $U_k = 6$, o que é natural, já que neste caso é possível gerar um maior número de retalhos para, possivelmente, serem utilizados em períodos futuros. Além disso, os lucros com o corte e a venda de retalhos apresentados, são uma pequena, porém significativa, parcela do lucro apresentado na Tabela ???. Estes lucros representam o aproveitamento de materiais que possivelmente seriam descartados por uma empresa, se transformando, desta forma, em um indesejável prejuízo.

O tempo computacional para o caso dos testes por períodos foi semelhante ao tempo computacional para os testes estáticos.

6.4 Análise da Perda e suas Implicações em P+L

Um processo de produção pode se tornar mais limpo e eficiente por meio de algumas metodologias e tecnologias. Alguns pontos a serem melhorados são economia de energia, economia de água, redução da quantidade de matéria-prima utilizada e, ainda, a geração e destinação final de resíduos.

Até o momento, verificou-se que o modelo (??)-(??) proposto para resolver o PCESAVR contribui para o aumento do lucro das empresas possibilitando a geração de retalhos que podem ser cortados posteriormente ou vendidos a empresas que utilizam estes retalhos como matéria-prima. Este aumento no lucro está relacionado com a qualidade dos padrões de corte gerados que, conseqüentemente, reflete na perda de material.

Embora o modelo (??)-(??) não seja orientado para a minimização das perdas, as Tabelas ?? e ?? apresentam, respectivamente, a perda média absoluta para o caso em que não há retalhos em estoque antes de se iniciar o processo de corte e a perda média absoluta para o caso em que

há retalhos em estoque antes de se iniciar o processo de corte. Os resultados referem-se a média de 20 exemplos e foram obtidos com os mesmos exemplares das Tabelas ?? e ??.

Tabela 12 - Perda média - Sem estoque inicial de retalhos.

Classe	Tipo de Solução	$U_k = 0$	$U_k = 2$	$U_k = 4$	$U_k = 6$
[GA]	Contínua	156451,20	155571,20	154691,20	153811,20
	Residual 1	156868,70	155586,20	154716,20	153828,70
	Residual 2	156868,70	155586,20	154723,70	153838,70
[GM]	Contínua	40847,85	39992,85	39137,85	38292,85
	Residual 1	41227,85	40047,85	39177,85	38322,85
	Residual 2	41227,85	40047,85	39177,85	38330,35
[GB]	Contínua	4385,15	3735,15	3160,15	2795,15
	Residual 1	4640,15	3765,15	3237,65	2847,65
	Residual 2	4640,15	3765,15	3237,65	2847,65
[MA]	Contínua	60,23	59,68	59,13	58,58
	Residual 1	612,25	319,75	264,75	242,25
	Residual 2	612,25	227,25	214,75	232,25
[MM]	Contínua	18,27	17,52	17,05	16,57
	Residual 1	675,65	220,65	188,15	228,15
	Residual 2	675,65	198,15	240,65	223,15
[MB]	Contínua	2,86	1,61	1,58	1,57
	Residual 1	774,55	149,55	84,55	117,05
	Residual 2	774,55	179,55	159,55	172,05
[PA]	Contínua	0,00	0,00	0,00	0,00
	Residual 1	497,80	260,30	195,30	237,80
	Residual 2	497,80	212,10	232,10	262,10
[PM]	Contínua	0,00	0,00	0,00	0,00
	Residual 1	607,90	217,90	227,90	215,40
	Residual 2	607,90	190,40	207,90	187,90
[PB]	Contínua	0,00	0,00	0,00	0,00
	Residual 1	478,00	268,00	229,95	230,50
	Residual 2	478,00	252,95	250,45	255,50

Tabela 13 - Perda média - Com estoque inicial de retalhos.

Classe	Tipo de Solução	$U_k = 2$	$U_k = 4$	$U_k = 6$
[GA]	Contínua	155571,20	154878,70	154186,20
	Residual 1	155586,20	154893,70	154183,70
	Residual 2	155586,20	154893,70	154183,70
[GM]	Contínua	39992,85	39330,35	38677,85
	Residual 1	40047,85	39332,85	38677,85
	Residual 2	40047,85	39332,85	38677,85
[GB]	Contínua	3735,15	3267,65	2915,15
	Residual 1	3765,15	3267,65	2937,65
	Residual 2	3765,15	3267,65	2937,65
[MA]	Contínua	59,68	57,60	57,22
	Residual 1	319,75	203,85	208,85
	Residual 2	227,25	213,50	276,75
[MM]	Contínua	17,52	20,14	19,14
	Residual 1	220,65	228,95	191,45
	Residual 2	198,15	238,95	255,40
[MB]	Contínua	1,61	1,63	1,45
	Residual 1	149,55	150,70	115,70
	Residual 2	179,55	167,05	139,55
[PA]	Contínua	0,00	0,00	0,00
	Residual 1	260,30	195,30	170,30
	Residual 2	212,10	164,60	220,30
[PM]	Contínua	0,00	0,00	0,00
	Residual 1	217,90	179,70	177,90
	Residual 2	190,40	276,15	268,65
[PB]	Contínua	0,00	0,00	0,00
	Residual 1	268,00	177,10	202,10
	Residual 2	252,95	206,80	244,60

Analisando as Tabelas ?? e ??, nota-se que, quanto maior o valor de $U_k, k = 1, \dots, 4$, ou seja, quanto mais retalhos podem ser gerados, menor é a perda média. Algumas oscilações acontecem com as heurísticas, porém, isso deve-se ao arredondamento da solução. Semelhante ao que ocorre com o aumento do lucro, esta diminuição da perda era esperada, já que retalhos devem ser gerados apenas para melhorar a qualidade dos padrões.

Devido à possibilidade de combinação, observe que para itens pequenos, independente da demanda, ocorrem as menores perdas. A maior perda ocorre quando trabalha-se com itens grandes.

A Tabela ?? apresenta a perda média obtida por meio dos testes por períodos de tempo

já apresentados na Tabela ???. Considerou-se que não havia retalhos em estoque no primeiro período, porém há liberdade para gerá-los.

Tabela 14 - Perda média - Testes por período.

Classe	Tipo de Solução	$U_k = 0$	$U_k = 2$	$U_k = 4$	$U_k = 6$
[GA]	Residual 1	174418,20	173114,70	172534,70	171834,70
	Residual 2	174418,20	173114,70	172534,70	171834,70
[GM]	Residual 1	35823,40	34895,00	34615,00	34433,40
	Residual 2	35823,40	34895,00	34615,00	34345,00
[GB]	Residual 1	5157,40	3781,00	3219,90	2919,90
	Residual 2	5157,40	3781,00	3219,90	2919,90
[MA]	Residual 1	675,60	230,60	280,60	262,30
	Residual 2	675,60	275,60	300,00	215,60
[MM]	Residual 1	746,70	223,20	353,20	303,20
	Residual 2	878,20	258,20	258,20	283,20
[MB]	Residual 1	653,10	168,10	233,10	193,10
	Residual 2	653,10	203,10	138,10	173,10
[PA]	Residual 1	866,90	156,00	140,30	126,40
	Residual 2	866,90	132,90	92,90	128,60
[PM]	Residual 1	459,20	162,10	152,00	144,10
	Residual 2	459,20	81,30	115,00	77,10
[PB]	Residual 1	691,40	112,00	112,00	145,60
	Residual 2	691,40	112,60	112,60	112,60

Semelhante ao que ocorreu com o caso dos testes estáticos, quanto maior o valor de U_k , $k = 1, \dots, 4$, ou seja, quanto mais retalhos podem ser gerados, menor é a perda média, já que a possibilidade de gerar retalhos pode melhorar a qualidade dos padrões de corte e, com isso, há uma melhor utilização dos objetos em estoque.

Assim como para os testes estáticos, a menor perda média sempre ocorre quando trabalha-se com itens pequenos e a maior perda ocorre quando trabalha-se com itens grandes. Considerando os períodos de tempo, pode-se verificar o comportamento da solução quando retalhos podem ser gerados, aproveitados e vendidos. Nos testes realizados, pode-se notar que esta estratégia reflete um bom uso de material.

Com a estratégia proposta neste trabalho, mostra-se que é possível diminuir a quantidade de resíduos gerados durante o processo de corte quando permite-se que retalhos sejam gerados e armazenados em estoque. Os retalhos podem ser cortados ou vendidos em períodos futuros, de forma que o modelo matemático analisa qual opção é mais vantajosa.

6.4.1 Implicações da redução da perda em P+L

Os resultados apontam para a viabilidade de reduzir a perda e gerar menos resíduos ao longo do processo produtivo. O modelo, de forma geral, contribui com o avanço da Teoria de Modernização Ecológica (TME), pois admite que possa haver melhorias em processos produtivos que os tornem ambientalmente mais adequados, reduzindo resíduos e perdas (MILANEZ, 2009). O modelo mostrou-se também viável, podendo ser difundido entre as empresas, além de ser uma abordagem que pode ser utilizada pelo Governo para promover a modernização ecológica do setor industrial brasileiro e em outros países.

Em pequenas indústrias, a matéria-prima é parte importante do custo total do produto final. Ao reduzir a perda e aumentar o lucro as empresas podem se tornar mais competitivas no mercado. A empresa que incorpora em seu processo produtivo uma ferramenta como o modelo (??)-(??) compreende que incorporar aspectos ambientais em sua estratégia de operações melhora a sua imagem e rentabilidade. Este tipo de empresa preocupa-se com a origem da geração de seus resíduos sólidos buscando soluções nos seus próprios processos produtivos.

A redução de resíduos é um dos princípios da Gestão de Operações Sustentáveis (GOS) e dos conceitos de Green Supply Chain Management (GSCM). Isso ocorre porque a solução proposta é totalmente aderente à perspectiva de P+L, que prioriza a redução de perdas na fonte, por meio da otimização de processos produtivos e, em último caso, a venda de materiais para outras empresas. A característica de venda também encontra suporte na literatura sobre Operações Sustentáveis, pois a recuperação de investimentos, por meio da venda, é sugerida por Sarkis et al. (2011) como uma prática de GSCM.

A P+L consiste em eliminar o desperdício, porque o desperdício não agrega valor ao produto ou ao serviço. Sua prioridade é a minimização dos resíduos e emissões nas três fases do ciclo de vida do produto: manufatura, uso e descarte final (ALVES; OLIVEIRA, 2007). Para tanto, são exigidos diferentes níveis de soluções de problemas. Com o modelo proposto foi alcançado o objetivo de reduzir a perda durante o processo de corte a partir da possibilidade de gerar retalhos (Nível 1 do escopo de atuação da P+L (Figura 6)). Além disso, os retalhos gerados podem ser utilizados dentro do próprio processo de corte, ou seja, podem ser aproveitados internamente (Nível 2 do escopo de atuação da P+L). A possibilidade de venda de retalhos gerados durante o processo de corte a empresas que podem utilizá-los como matéria-prima permite reutilizar externamente as sobras (Nível 3 do escopo de atuação da P+L).

Para viabilizar a P+L de forma mais intensa, a venda deveria ser desestimulada e o corte de retalhos mais estimulado. Isso poderia ser feito por meio de incentivos governamentais por TME, em que o governo assume a responsabilidade de induzir melhorias ambientais nas

empresas. Ainda que os resultados apresentados nas Tabelas ?? e ?? mostrem que, para os resultados obtidos com os testes realizados neste trabalho, os retalhos gerados são vendidos com maior frequência do que cortados, esta situação pode ser revertida por meio da diminuição do lucro de venda dos retalhos. Dessa forma, o lucro com o corte de retalhos provavelmente seria maior e, assim, o modelo decidiria pelo corte e não pela venda de retalho (o modelo analisa o lucro entre cortar e vender o retalho e opta pela alternativa que retorna mais lucro). Além disso, o corte de retalhos poderia ser mais estimulado do que a venda.

Um dos pressupostos da TME é que deve ocorrer envolvimento direto e cooperativo na tomada de decisão (MILANEZ, 2009). A tomada de decisão do que fazer para tornar um processo ambientalmente melhor nem sempre é de conhecimento dos empresários e profissionais envolvidos no processo produtivo. Cultura e estratégias de gestão podem ser modificadas para promover práticas sustentáveis por meio da educação e formação ambiental, que são essenciais para que todos tenham conhecimento das normas ambientais e mudanças associadas ao processo produtivo quando uma nova tecnologia é implementada. O treinamento ambiental pode contribuir para que a organização e os empregados passem a agir de forma ambientalmente responsável (UNNIKRISHNAN; HEGDE, 2007).

A P+L exige conhecimentos e habilidades de todos os profissionais para garantir o uso eficaz das estratégias preventivas como o modelo matemático aplicado a esta pesquisa. A solução encontrada faz avançar a teoria por indicar que a implementação em P+L requer um nível de treinamento empresarial focado em detalhes. Especificidades como o tamanho dos itens e a margem de lucro para incentivar o corte e a venda de retalhos, devem ser analisados, pois podem ser mais ou menos viáveis para a adoção de P+L. Outra especificidade é que momentos de pico de demanda podem prejudicar a aplicação de P+L (como podemos verificar nas Tabelas ??, ?? e ??, as perdas mais acentuadas ocorrem nos casos em que as demandas são altas). Até o momento, não havia indicação na literatura sobre isso. Isso coloca a necessidade de difundir conhecimentos sobre gestão da demanda e de P+L nesse contexto.

No próximo capítulo algumas conclusões são apresentadas bem como são propostos tópicos a serem investigados futuramente.

7 CONCLUSÕES E PROPOSTAS FUTURAS

Neste trabalho, foi abordado o problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis e venda de retalhos (PCESAVR) para melhor aproveitamento da matéria-prima e consequente aumento no lucro da empresa. Para resolver o problema, foi realizada uma alteração no modelo proposto por Arenales et al. (2015). Com as alterações propostas, o modelo passou a ter por objetivo maximizar o lucro da empresa a partir da geração de retalhos, os quais são previamente definidos e podem ser gerados em quantidades limitadas para cada tipo.

O modelo matemático foi resolvido utilizando o método simplex com geração de colunas com a condição de integralidade relaxada. A partir das soluções contínuas obtidas, dois procedimentos heurísticos foram propostos para a obtenção de soluções inteiras. Para avaliar o desempenho do modelo, testes computacionais foram realizados com exemplos gerados aleatoriamente. Os resultados mostraram um bom desempenho do modelo matemático proposto ao considerar uma análise dos testes de forma estática e também uma simulação por períodos em que, os retalhos gerados em um período ficam disponíveis para o corte e/ou venda no período seguinte. Por estas análises, verificou-se que, quando retalhos podem ser gerados ou vendidos, o lucro aumenta consideravelmente. Como a geração de retalhos aumenta a diversidade de objetos em estoque, a qualidade dos padrões de corte também aumenta, o que garante um melhor aproveitamento dos mesmos.

Além do aumento no lucro, concluiu-se que a possibilidade de gerar retalhos proporciona a diminuição na perda de matéria-prima e, dessa forma, menor quantidade de resíduos é descartada no meio ambiente. Logo, também foi realizada uma análise das soluções e uma discussão dos resultados considerando suas implicações em P+L. Como esta estratégia tem por prioridade evitar a geração de resíduos, reintegrar os resíduos que não puderam ser evitados e tomar medidas de reciclagem fora da empresa, caso a mesma não possa reutilizar esses resíduos, concluímos que a estratégia proposta para resolver o PCESAVR pode colaborar para que essa ordem seja respeitada, já que a intenção é gerar retalhos que podem ser utilizados internamente, no decorrer do próprio processo de corte. Quando é menos vantajoso para a empresa cortar os retalhos, existe a opção de vender esses retalhos para empresas que os utilizam como matéria-prima, o que é uma medida externa de aproveitamento do material além de aumentar o lucro da empresa que vende os retalhos.

Em trabalhos futuros, pretende-se propor novos procedimentos heurísticos e realizar alterações nas duas heurísticas já apresentadas de forma a minimizar a diferença entre a solução contínua e a solução inteira. Também, pode-se desenvolver alguma estratégia baseada em Programação Inteira Mista. Além disso, pode-se pesquisar *softwares* livres que podem ser utilizados na resolução do modelo, o que possibilita maior difusão e aplicação do modelo estudado.

REFERÊNCIAS

ABRELPE - Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Resíduos Sólidos: Manual de Boas Práticas no Planejamento**. Disponível em: http://www.abrelpe.org.br/arquivos/manual_portugues_2013.pdf. Acesso em: 19 jun. 2015.

ABUABARA, A.; MORABITO, R. Cutting optimization of structural tubes to build agricultural light aircrafts. **Annals of Operations Research**, v. 169, n. 1, p. 149-165, 2009.

ALVES, S. M.; OLIVEIRA, J. F. G. de. Adequação ambiental dos processos usinagem utilizando Produção mais Limpa como estratégia de gestão ambiental. **Produção** (São Paulo. Impresso), v. 17, p. 129-138, 2007.

ANGELL, L. C.; KLASSEN, R. D. Integrating environmental issues into the mainstream: an agenda for research in operations management. **Journal of Operations Management**, v. 17, n. 5, p. 575-598, 1999.

ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier: ABEPRO, 2011.

ARENALES, M., CHERRI, A., NASCIMENTO, D.N., VIANNA, A. A new mathematical model for the cutting stock/leftover problem. Notas do ICMC-USP: Série Computação, n.97, São Carlos: ICMC, 2015. 14p. Disponível em: < http://www.icmc.usp.br/CMS/Arquivos/arquivos_enviados/ESTAGIO-BIBLIO_171_Notas%20Serie%20Comp%2097.pdf >. Acesso em 04/11/2015.

BARBIERI, J. C. **Gestão ambiental empresarial: conceitos, modelos e instrumentos**. 2. Ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

BRASIL. Lei nº 12.305, de 02 de agosto de 2010. Institui a Política Nacional de Resíduos Sólidos. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 03 ago. 2010, p. 2.

BROWN, A. R., Optimum packing and depletion: the computer in space and resource usage

proble. **Macdonald and Co., London** , 1971.

CHERRI, A. C. **Algumas extensões do problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis**. 215f. Tese de Doutorado - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

CHERRI, A. C.; ARENALES, M. N.; YANASSE, H. H. The one-dimensional cutting stock problem with usable leftover - A heuristic approach. **European Journal of Operational Research**, v. 196, n. 3, p. 897-908, 2009.

CHERRI, A. C.; ARENALES, M. N.; YANASSE, H. H. The usable leftover one-dimensional cutting stock problem - a priority-in-use heuristic. **International Transactions in Operational Research**, v. 20, n. 2, p. 189-199, 2013.

CHERRI, A. C.; ARENALES, M. N.; YANASSE, H. H.; POLDI, K. C.; VIANNA, A. C. G. The one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers - A survey. **European Journal of Operational Research**, v. 236, n. 2, p. 395-402, 2014.

CNTL - Centro Nacional de Tecnologias Limpas. **Implementação de Programas de Produção mais Limpa**. Porto Alegre, Centro Nacional de Tecnologias Limpas SENAI-RS/ UNIDO/INEP, 2003. 42 p. il.

CUI Y.; YANG Y. A heuristic for the one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers. **European Journal of Operational Research**, v. 204, n. 2, p. 245-250, 2010.

DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 44, n. 2, p. 145-159, 1990.

EHRENFELD, J. R. Eco-efficiency. **Journal of Industrial Ecology**, v. 9, n. 4, p. 6-8, 2005.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem. **Operations Research**, v. 9, n. 6, p. 849-859, 1961.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II. **Operations research**, v. 11, n. 6, p. 863-888, 1963.

GOVINDAN, K.; SARKIS, J.; JABBOUR, C. J. C.; ZHU, Q.; GENG, Y. Eco-efficiency based green supply chain management: Current status and opportunities. **European Journal of Operational Research**, v. 233, n. 2, p. 293-298, 2014.

GRADISAR, M.; JESENKO, J.; RESINOVIC, C. Optimization of roll cutting in clothing industry. **Computers & Operations Research**, v. 24, n. 10, p. 945-953, 1997.

GRADISAR, M.; RESINOVIC, C.; KLJAJIC, M. A hybrid approach for optimization of one-dimensional cutting. **European Journal of Operational Research**, v. 119, n. 3, p. 719-728, 1999.

GRADISAR, M., TRKMAN, P., A combined approach to the solution to the general one-dimensional cutting stock problem. **Computers & Operations Research**, v. 32, n. 7, p. 1793-1807, 2005.

GUNASEKARAN, A.; IRANI, Z.; PAPADOPOULOS, T. Modelling and analysis of sustainable operations management: certain investigations for research and applications. **Journal of the Operational Research Society**, v. 65, n. 6, p. 806-823, 2013.

GUNASEKARAN, A.; IRANI, Z. Sustainable Operations Management: design, modelling and analysis. **Journal of the Operational Research Society**, v. 65, n. 6, p. 801-805, 2014.

HAESSLER, R. W., Controlling cutting pattern changes in one-dimensional trim loss problems. **Operations Research**, v. 23, n. 3, p. 483-493, 1975.

HAESSLER, R. W., A note on computational modifications to the Gilmore-Gomory cutting stock algorithm. **Operations Research**, v. 28, n. 4, p. 1001-1005, 1980.

HINXMAN, A., The trim-loss and assortment problems: a survey. **European Journal of Operational Research**, v. 5, n. 1, p. 8-18, 1980.

JABBOUR, A. B. L. et al. Brazil's new national policy on solid waste: challenges and opportunities. **Clean Technologies and Environmental Policy**, v. 16, n. 1, p. 7-9, 2014.

JABBOUR, C. J. C. et al. Environmental management and operational performance in automotive companies in Brazil: the role of human resource management and lean manufacturing. **Journal of Cleaner Production**, v. 47, p. 129-140, 2013.

JÄNICKE, M. Ecological modernisation: new perspectives. **Journal of cleaner production**, v. 16, n. 5, p. 557-565, 2008.

KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing and planning production (traduzido de um trabalho em russo datado de 1939). **Management Science**, v. 6, n. 4, p. 366-422, 1960.

KHALILI, N. R. et al. From cleaner production to sustainable development: the role of academia. **Journal of Cleaner Production**, v. 96, p. 30-43, 2015.

KOCH, S.; KÖNIG, S.; WÄSCHER, G. Linear programming for a cutting problem in the wood processing industry - a case study. **International Transactions in Operational Research**, v. 16, n. 6, p. 715-726, 2008.

KUBOTA, F. I.; DA ROSA, L. C. Identification and conception of cleaner production opportunities with the Theory of Inventive Problem Solving. **Journal of Cleaner Production**, v. 47, p. 199-210, 2013.

LIMEIRA, M. S.; YANASSE, H. H. Uma heurística para o problema de redução de padrões de corte. **Anais da V Oficina Nacional de Problemas de Corte e Empacotamento**, São José dos Campos, SP, p.137-145, 2001.

MILANEZ, B. Modernização ecológica no Brasil: limites e perspectivas. **Desenvolvimento e meio ambiente**, v. 20, 2009.

ONU. Transforming our world: the 2030 Agenda for Sustainable Development. Disponível em: < <https://sustainabledevelopment.un.org/post2015/transformingourworld> >. Acesso em: 18 out. 2015.

PAGELL, M.; SHEVCHENKO, A. Why research in sustainable supply chain management should have no future. **Journal of Supply Chain Management**, v. 50, n. 1, p. 44-55, 2014.

POLDI, K. C. **Algumas extensões do problema de corte de estoque**. 141f. Dissertação de Mestrado - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

POLDI, K. C.; ARENALES, M. N. Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths. **Computers and Operations Research**, v. 36, n. 6, p. 2074-2081, 2009.

ROODMAN, G. M. Near-optimal solutions to one-dimensional cutting stock problem. **Computers and Operations Research**, v. 13, n. 6, p. 713-719, 1986.

SARKIS, J.; ZHU, Q.; LAI, K. An organizational theoretic review of green supply chain management literature. **International Journal of Production Economics**, v. 130, n. 1, p. 1-15, 2011.

SCHEITHAUER, G. A note on handling residual lengths. **Optimization**, v. 22, n. 3, p. 461-466, 1991.

SINUANY-STERN, Z.; WEINER I. The one dimensional cutting stock problem using two objectives. **Journal of Operations Research Society**, v. 45, p. 231-236, 1994.

STADTLER, H. A one-dimensional cutting stock problem in the Aluminium Industry and its solution. **European Journal of Operational Research**, v. 44, n. 2, p. 209-223, 1990.

SUBRAMANIAN, N.; GUNASEKARAN, A. Cleaner supply-chain management practices for twenty-first-century organizational competitiveness: Practice-performance framework and research propositions. **International Journal of Production Economics**, v. 164, p. 216-233, 2015.

TRKMAN, P., GRADISAR, M., One-dimensional cutting stock optimization in consecutive time periods. **European journal of Operational Research**, v. 179, n. 2, p. 291-301, 2007.

UNNIKRISHNAN, S; HEGDE, D. S. Environmental training and cleaner production in Indian industry - A micro-level study. **Resources, conservation and recycling**, v. 50, n. 4, p. 427-441, 2007.

VAHRENKAMP, R., Random search in the one-dimensional cutting stock problem. **European Journal of Operational Research**, v. 95, n. 1, p. 191-200, 1996.

VAN HOOFF, B; LYON, T. P. Cleaner production in small firms taking part in Mexico's Sustainable Supplier Program. **Journal of Cleaner Production**, v. 41, p. 270-282, 2013.

WANG, G.; GUNASEKARAN, A. Modeling and analysis of sustainable supply chain dynamics. **Annals of Operations Research**, p. 1-16, 2015.

WÄSCHER, G., GAU, T. Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computational study. **Operations-Research-Spektrum**, v. 18, n. 3, p. 131-144, 1996.

WÄSCHER, G., HAUßNER, H., SCHUMANN, H. An improved typology cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 183, n. 3, p. 1109-1130, 2007.

YOUNG, S. C. Introduction: the origins and evolving nature of ecological modernisation. In: YOUNG, S. C. (Org.). *The emergence of ecological modernisation: integrating the environment and the economy?* London; New York: **Routledge**, p. 1-39, 2000.

ZHAO, R. et al. A software based simulation for cleaner production: A game between manufacturers and government. **Journal of Loss Prevention in the Process Industries**, v. 26, n. 1, p. 59-67, 2013.

APÊNDICE A - Exemplo Método Simplex

Apresentamos um exemplo numérico solucionado com a utilização do método simplex apresentado na Seção 4.1. Este exemplo pode ser encontrado em Arenales et al. (2011), p. 76.

Considere o problema de otimização linear:

$$\begin{array}{l} \text{minimizar} \\ \text{sujeito a:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} f(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq \frac{7}{2} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (43)$$

que pode ser escrito na forma padrão:

$$\begin{array}{l} \text{minimizar} \\ \text{sujeito a:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_5 = \frac{7}{2} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{array} \right. \quad (44)$$

Consideremos também, a partição básica $(a_{B_1}, a_{B_2}, a_{B_3}) = (1, 2, 4)$ e $(a_{N_1}, a_{N_2}) = (3, 5)$. Com essa partição podemos definir as matrizes B e N e também os vetores c_B e c_N :

$$B = [a_{B_1} \ a_{B_2} \ a_{B_3}] = [a_1 \ a_2 \ a_4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = [a_{N_1} \ a_{N_2}] = [a_3 \ a_5] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (c_{B_1} \ c_{B_2} \ c_{B_3}) = (c_1 \ c_2 \ c_4) = (-2 \ -1 \ 0)$$

$$c_N^T = (c_{N1} \ c_{N2}) = (c_3 \ c_5) = (0 \ 0)$$

Calculemos B^{-1} , a inversa de B : $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A solução básica $x_B = (x_1, x_2, x_4)$ é a solução do sistema $Bx_B = b$, ou de forma equivalente resolver o sistema $\hat{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$.

O valor da função objetivo $f(\hat{x}) = c_{B1}\hat{x}_{B1} + c_{B2}\hat{x}_{B2} + c_{B3}\hat{x}_{B3} = -2 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{7}{2} + 0 \times \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}$.

Para testar a otimalidade devemos calcular o vetor multiplicador simplex e os custos relativos. Calculemos primeiramente o vetor multiplicador simplex: $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$.

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} = (-2 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-2 \ 0 \ 1)$$

Agora podemos calcular os custos relativos para todas as variáveis não-básicas:

- Para $j = 1$: $\hat{c}_{N1} = \hat{c}_3 = c_3 - \lambda^T a_3 = 0 - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$
- Para $j = 2$: $\hat{c}_{N2} = \hat{c}_5 = c_5 - \lambda^T a_5 = 0 - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$

Logo, $x_{N2} = x_5$ entra na base.

Dessa forma, a condição de otimalidade não é verificada e a variável x_5 pode ser aumentada para diminuir a função objetivo a partir de $f(x) = f(\hat{x}) + \hat{c}_{Nk}\hat{\varepsilon} = -\frac{9}{2} - \varepsilon$.

Calculemos, agora, a direção simplex dada por:

$$y = B^{-1}a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculando o tamanho do passo ε :

$$\hat{\varepsilon} = \text{mínimo} \left\{ \frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2}, \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3} \right\} = \text{mínimo} \left\{ \frac{7}{2}, \frac{5}{1} \right\} = \frac{5}{2} = \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3} \quad (x_{B_3} = x_4 \text{ sai da base}).$$

Logo, temos a nova partição básica:

$$(B_1, B_2, B_3) = (1, 2, 5) \text{ e } (N_1, N_2) = (3, 4).$$

Com essa partição podemos definir as novas matrizes B e N e custos dados por:

$$B = [a_{B_1} \ a_{B_2} \ a_{B_3}] = [a_1 \ a_2 \ a_5] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = [a_{N_1} \ a_{N_2}] = [a_3 \ a_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (c_{B_1} \ c_{B_2} \ c_{B_3}) = (c_1 \ c_2 \ c_5) = (-2 \ -1 \ 0)$$

$$c_N^T = (c_{N_1} \ c_{N_2}) = (c_3 \ c_4) = (0 \ 0)$$

Calculemos B^{-1} , a inversa de B : $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A solução básica $x_B = (x_1, x_2, x_5)$ é a solução do sistema $Bx_B = b$, ou de forma equivalente resolver o sistema $\hat{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

O valor da função objetivo $f(\hat{x}) = c_{B_1}\hat{x}_{B_1} + c_{B_2}\hat{x}_{B_2} + c_{B_3}\hat{x}_{B_3} = -2 \times 3 + (-1) \times 1 + 0 \times \frac{5}{2} = -7$.

Para testar a otimalidade devemos calcular o vetor moltiplicador simplex e os custos relativos. Calculemos primeiramente o vetor moltiplicador simplex: $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$.

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} = (-2 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \ -1 \ 0)$$

Agora podemos calcular os custos relativos para todas as variáveis não-básicas:

$$\bullet \text{ Para } j = 1: \hat{c}_{N_1} = \hat{c}_3 = c_3 - \lambda^T a_3 = 0 - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\bullet \text{ Para } j = 2: \hat{c}_{N_2} = \hat{c}_4 = c_4 - \lambda^T a_4 = 0 - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Logo, como todos os custos relativos são não-negativos, então a solução básica é a solução ótima. Além disso, a função objetivo quando restrita ao sistema $Ax = d$ é dada por $f(x) = -7 + x_3 + x_4$ e, como $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$, então $f(x) \geq -7$ para toda solução factível. Com isso podemos concluir que a solução ótima é obtida com $x_3 = x_4 = 0$, o que também nos possibilita concluir que a solução básica é ótima.