



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Juliana Samora Godoy

A Geometria Presente em Alguns Livros Didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental

Rio Claro
2016

Juliana Samora Godoy

**A Geometria Presente em Alguns Livros Didáticos dos Anos Finais do Ensino
Fundamental**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de Rio Claro, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Rúbia Barcelos Amaral.

Rio Claro

2016

516 Godoy, Juliana Samora
G589g A geometria presente em alguns livros didáticos dos anos
finais do ensino fundamental / Juliana Samora Godoy. - Rio
Claro, 2016
97 f. : il., figs., tabs., quadros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientadora: Rúbia Barcelos Amaral

1. Geometria. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Leitura
geométrica. 4. Diagrama. 5. Signo. I. Título.

JULIANA SAMORA GODOY

A Geometria Presente em Alguns Livros Didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão examinadora

Prof(a). Dr(a). Rubia Barcelos Amaral - Orientador(a)
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof(a). Dr(a). Verônica Gitirana Gomes Ferreira
CE/UFPE/Recife (PE)

Prof(a). Dr(a). Rosa Monteiro Paulo
FE/UNESP/Guaratinguetá(SP)

Resultado: Aprovada

Em Especial aos meus pais, Sandra e Vanlierdi, por todo apoio e incentivo nessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus em primeiro lugar, por ter me concebido a graça de ser possível desenvolver esse trabalho e por me fornecer garra o suficiente para terminá-lo.

Agradeço à minha família por todo o apoio, paciência e estímulo durante esses dois intensos anos. Em especial, à minha irmã, Priscila, por ter sido meu exemplo a ser seguido e minha inspiração nessa jornada.

Agradeço ao meu marido, Renan, pela paciência, por todo o apoio dado e por sempre estar disposto a tentar ajudar nos momentos mais críticos. Por estar comigo nos momentos bons ou ruins, me amparando e me apoiando em minhas escolhas.

Agradeço a minha orientadora, Rúbia, por ser exigente e não deixar com que perdesse o foco, mesmo nas horas mais complicadas. Agradeço também pelas conversas e conselhos e por toda a construção conjunta do trabalho.

Aos meus 'irmãos' de orientação, por todos os conselhos, leituras e ajuda ao longo do processo de construção desse trabalho.

Ao GPIMEM pelas contribuições e correções ao longo dessa jornada e também pelo convívio em grupo.

Aos membros da banca pelas contribuições e sugestões para a finalização deste trabalho.

RESUMO

Esta pesquisa tem seu foco na Geometria presente alguns livros didáticos de Matemática, sendo a pergunta diretriz do trabalho: “Como fazer da leitura geométrica dos diagramas uma metodologia de análise para a Geometria presente nos livros didáticos de Matemática?”. O objetivo principal do trabalho é fazer da leitura geométrica dos diagramas uma metodologia de análise dos conteúdos de Geometria existentes em alguns livros didáticos. A coleta de dados se baseia em três coleções de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. A análise dos dados é realizada principalmente com base na teoria de leitura geométrica, desenvolvida por Dietiker e Brakonietcki (2014). Essa teoria diz respeito à negociação de significados entre o leitor e o texto escrito, ou seja, é a compreensão que quem está realizando a leitura desenvolve sobre os diagramas. É uma pesquisa de cunho qualitativo. Tem como temas para a análise de dados: a identificação dos diferentes tipos de signos existentes nos diagramas dos livros didáticos analisados, bem como o estudo de propriedades métricas e topológicas de alguns conteúdos presentes nesses livros e a utilização de representações mentais de conceitos geométricos. Os diferentes tipos de signos são identificados de acordo com a teoria dos Signos de Peirce (1931), podendo ser indicadores, ícones ou símbolos, dependendo da definição assumida no texto e também do possível entendimento do leitor. Em meu trabalho, fica evidente que nos anos iniciais do Ensino Fundamental II, principalmente, os autores das coleções de livros didáticos utilizam com frequência os indicadores para introduzir o assunto dos capítulos, e ao aprofundarem tais assuntos passam a se utilizar de ícones e depois formalizam conceitos utilizando-se de símbolos. O estudo de propriedades métricas e topológicas é pautado em Borges (2005), no qual há a assimilação de propriedades métricas com a parte quantitativa dos diagramas, e das propriedades topológicas com a parte qualitativa dos diagramas. Como resultado dessa análise, destaco que as propriedades métricas estão sendo mais utilizadas se comparadas com as propriedades topológicas, pois os autores, de modo geral, se utilizam de diversas marcações nas figuras para exemplificar uma ideia, focando assim nas propriedades métricas das figuras. Por último, o estudo de representações mentais é pautado em alguns autores, como por exemplo, Galperin (1989), que trata destas representações como sendo um processo que se constrói ao longo dos anos escolares. Esse processo de construção de representações mentais é evidenciado com o estudo dos livros, uma vez que tais representações começam a ser necessárias nos livros dos anos finais do Ensino Fundamental. A partir dessas análises, concluo que uma leitura geométrica é repleta de negociações de significados entre o texto e o que o leitor assume dos mesmos, já que são essas negociações que dão suporte para o entendimento do conteúdo. Destaco que ao fazer uma leitura multidimensional dos diagramas, é possível identificar quase todas as suas características relevantes, pois não olhamos especificamente para uma única classificação ou uma única dimensão de leitura, mas sim para grande parte das informações do diagrama, compondo assim a leitura geométrica.

Palavras-chave: Geometria. Leitura Geométrica. Signo.Diagrama.

ABSTRACT

This research focuses on geometry of Mathematics textbooks, and the main question of this work is: "How to read the geometric diagrams a methodology for this geometry in textbooks of mathematics?". The main objective of this study is to make the reading of the geometric diagrams a methodology of analysis of geometry issues in some textbooks. Data collection is based on three collections of textbooks of Mathematics of Primary Education II. The data were obtained from three collections of Mathematics textbooks of Secondary School. Data analysis was made mainly based on theory of geometric reading developed by Dietiker and Brakonieccki (2014). This theory concerns the negotiation of meanings between the reader and the written text, in other words, is the understanding that the reader develops about the diagrams. It is a qualitative research which have as themes for data analysis: the identification of the different types of signs in the diagrams of the textbooks analyzed, and the study of metric and topological properties of some contents present in these books and the use of mental representations of geometric concepts. The different types of signs are identified according to the theory of Signs of Peirce (1931), may be indicators, icons or symbols, depending on the assumed definition text and also the possible reader's understanding. In this study is evident that mainly in the early years of Second school, the authors of the textbooks collections often use the indicators to introduce the subject of the chapters, and when deepen such matters come to be used icons and then formalize concepts using symbols. The study of metric and topological properties is guided by Borges (2005), in which there is assimilation from metric properties with the quantitative part of the diagrams and, from the topological properties with the qualitative part of diagrams. As a result of this analysis, we emphasize that the metric properties are being used more as compared with the topological properties, since the authors, in general, use several tags in the figures to illustrate an idea, thus focusing on the metric properties of the figures. Finally, the study of mental representations is guided by some authors, such as Galperin (1989), which deals with these representations as a process that is developed over the school years. This process is evidenced by the study books, since such representations will be necessary in the books of the final years of Secondary school. Based on this analysis, we concluded that a geometric reading is full of negotiations of meaning between the text and what the reader assumes from the same, as are these negotiations that support the understanding of the content. I emphasize that when making a multidimensional reading of diagrams, it is possible to identify almost all the relevant characteristics, for not specifically look at a single classification or a single dimension of reading, but for a big part of the diagram information, composing of this way the geometric reading.

Keywords: Geometry. Geometric reading. Sign. Diagram.

Sumário

1- INTRODUÇÃO.....	08
1.1. A pesquisa	9
1.2. Composição da dissertação	11
2. CAPÍTULO 2 – TRABALHOS REALIZADOS.....	13
2.1. O ensino de Geometria.....	13
2.2. Os livros didáticos de Matemática	19
2.3. Os livros didáticos e a Geometria	21
3. CAPÍTULO 3 – LEITURA GEOMÉTRICA.....	24
3.1. A teoria dos Signos	31
3.2. Propriedades Métricas e Topológicas dos diagramas.....	34
3.3. Representações mentais e a abstração	36
4. CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA.....	39
4.1. Abordagem Metodológica.....	39
4.2. Procedimentos metodológicos.....	41
5. CONSTRUINDO MINHA LEITURA GEOMÉTRICA.....	47
5.1. Tipos de signos presentes nos livros	49
5.2. Propriedades Métricas e Topológicas dos diagramas	60
5.3. Representações mentais	77
5.4. Entrelaçando o olhar Multidimensional e a abordagem metodológica.	83
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	86
7 REFERÊNCIAS.....	92

1- INTRODUÇÃO

Esta pesquisa trata da Geometria presente em alguns livros didáticos de Matemática, sendo esses conteúdos estudados por meio de leituras geométricas.

Uma leitura geométrica é entendida como uma negociação de significados feita entre o leitor e o texto, sendo que essa leitura não é única, ou seja, não é possível dizer que existe 'A' leitura geométrica (DIETIKER; BRAKONIECKI, 2014).

A Geometria é um ramo da Matemática muito antigo, pois, segundo estudos de Brito e Carvalho (2005) os primeiros relatos do uso dessa parte da Matemática datam da época em que a civilização egípcia era a mais desenvolvida da Terra e supõe-se que a Geometria tinha o significado de 'medir terras', para então fazer a divisão das mesmas.

O ensino de Geometria no Brasil passou por diferentes fases, mas, já no final dos anos de 1990, os Parâmetros Curriculares Nacionais, passaram a enfatizar a importância do ensino da Geometria integrado a outras áreas do conhecimento e também a outros campos da Matemática:

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática apresentam os objetivos em termos das capacidades a serem desenvolvidas em cada ciclo, assim como os conteúdos para desenvolvê-las. São apontadas as possíveis conexões entre os blocos de conteúdos, entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento e suas relações com o cotidiano e com os Temas Transversais. Quanto aos conteúdos, apresentam um aspecto inovador ao explorá-los não apenas na dimensão de conceitos, mas também na dimensão de procedimentos e de atitudes. Em função da demanda social incorporam, já no ensino fundamental, o estudo da probabilidade e da estatística e evidenciam a importância da geometria e das medidas para desenvolver as capacidades cognitivas fundamentais (BRASIL, 1998, p. 16).

Relacionando a Geometria aos processos de ensinar e aprender Matemática, percebo como professora do Ensino Fundamental e Ensino Médio, que este ramo da Matemática tornou-se um desafio para a educação escolar, pois tem como foco estudar as figuras geométricas e suas propriedades, com a finalidade de auxiliar na compreensão de outras áreas e no próprio desenvolvimento do estudante, ou seja, auxiliar o estudante na construção de suas percepções espaciais e na generalização de conceitos matemáticos (por meio de representações mentais). Devido a isso a Geometria pode ser considerada como:

[...] um campo de conhecimento muito importante para a descrição e a inter-relação do homem com o espaço em que vive, podendo ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade, sendo, portanto, fundamental na formação dos alunos (PASSOS, 2000, p. 1).

Pensando na importância da Geometria no ensino de Matemática, e pautada em minhas experiências, optei então por desenvolver no Mestrado um estudo que abrangesse este tema. O interesse em estudar Geometria me acompanha desde a graduação, pois, ao ingressar no curso de Licenciatura Plena em Matemática na UFSCar, percebi que meu domínio nos tópicos ligados à Geometria poderia ser aprofundado e as leituras mais atentas sobre o material didático me auxiliariam no estudo de metodologias mais eficazes para ensinar a Geometria para meus alunos.

Na graduação desenvolvi o Trabalho de Conclusão de Curso voltado à Geometria, mas o mesmo foi pensado para tentar entender na prática como estava o Ensino de Geometria em uma escola pública da cidade de São Carlos, sendo realizadas algumas atividades com materiais manipuláveis. Como resultado dessa experiência, tive uma grande decepção, pois os alunos do 8º ano dessa escola mal conseguiam reconhecer as diferenças entre triângulos e quadriláteros.

Ao terminar a graduação, ingressei como professora de Matemática em escolas públicas e particulares do estado de São Paulo. Quando comecei a lecionar percebi, na prática, que a Geometria realmente era um desafio, tanto para quem a ensinava quanto para quem a aprendia. A partir de então minha inquietação de continuar estudando o ensino e a aprendizagem de Geometria aumentou e tornou-se foco de estudo para o desenvolvimento da pesquisa de Mestrado.

1.1. A pesquisa

Desde o início, a ideia de tentar ingressar no Mestrado era para trabalhar com a Geometria ligada à escola de alguma maneira. Inicialmente havia pensado em desenvolver atividades com os alunos, compostas por materiais manipuláveis e utilização de softwares de Geometria, mas, ao ingressar de fato no Mestrado, mudei o foco da pesquisa de atividades com os alunos para entender a Geometria presente nos livros didáticos, de Matemática, dos anos finais do Ensino Fundamental. Essa

mudança se deu principalmente pelo fato de minha orientadora estar desenvolvendo um projeto com livros didáticos.

Ao decidir por uma pesquisa com livros didáticos, iniciamos¹ leituras sobre trabalhos que estudavam os livros didáticos, e um artigo nos chamou atenção. Esse artigo se referia à leitura dos diagramas em Geometria, denominada leitura geométrica dos diagramas. Este artigo instigou minha vontade em estudar tal tema, dando origem a este trabalho.

Assumo, nesta pesquisa, o diagrama como sendo não somente a figura geométrica² ou sua definição textual, mas sim a combinação entre estes dois elementos, pois “um ‘diagrama’ pode ser definido, de modo geral, como uma associação entre elementos expressa por meio de relações em um ambiente visual” (FARIAS, 2012, P. 1).

Pensando nas escolhas realizadas e após alguns refinamentos, minha pergunta norteadora de pesquisa se constitui em:

Como fazer da leitura geométrica dos diagramas uma metodologia de análise para a Geometria presente nos livros didáticos de Matemática?

Para conseguir interpretar e analisar as possibilidades de uma leitura dos diagramas nesses livros, tenho como aporte teórico a leitura geométrica dos diagramas, e textos que abordam conceitos ligados a abstração, teoria dos signos e propriedades métricas e topológicas dos diagramas.

A leitura geométrica foi realizada por mim, com a finalidade de analisar a Geometria presente nos livros didáticos participantes desta pesquisa. Leitura que serve para alcançar os objetivos desse trabalho, que são divididos da seguinte maneira:

Objetivo Principal - Fazer da leitura geométrica dos diagramas uma metodologia de análise dos conteúdos de Geometria presentes em alguns livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Objetivos específicos:

¹ As partes escritas em 1ª pessoa do singular são construções minhas, e as partes escritas em 1ª pessoa do plural são referentes ao trabalho conjunto meu e de minha orientadora, ou então para me referir aos leitores.

²No decorrer deste trabalho, as palavras imagens e figuras geométricas serão usadas como sinônimas.

- Identificar os conteúdos que permeiam os anos finais do Ensino Fundamental;
- Entender como é a disposição dos conteúdos geométricos nos livros didáticos;
- Identificar particularidades nos diagramas presentes nos conteúdos de Geometria;
- Estudo profundo de três das oito dimensões de leitura geométrica levantadas anteriormente.

Para a realização desse estudo, foram analisadas três coleções de livros didáticos de Matemática selecionados pelo PNLD³ no edital de 2014, pois são os exemplares enviados para a escola pública recentemente.

Para alcançar os objetivos propostos, a pesquisa se desenvolveu numa abordagem qualitativa, já que me preocupo com o processo como um todo e não somente com os resultados.

Tendo apresentado a pergunta norteadora de pesquisa e os objetivos para o desenvolvimento deste trabalho, passo agora a apresentar a estrutura da dissertação.

1.2. Composição da dissertação

O primeiro capítulo é a introdução da dissertação. Nele foram colocadas as motivações para o desenvolvimento de tal trabalho, os desdobramentos da pesquisa, a pergunta norteadora e os objetivos que pretendo alcançar com a realização desta pesquisa.

No segundo capítulo é apresentado um levantamento da produção acadêmica acerca dos trabalhos relacionados ao ensino de Geometria, que apontaram desde seu 'abandono' até a constatação de sua importância no ensino e a falta que o mesmo faz no desenvolvimento do pensamento lógico-matemático. Além de abordar o ensino de Geometria, há também uma revisão de literatura referente aos trabalhos

³O PNLD é um programa criado pelo Governo Federal com a finalidade de avaliar e selecionar os livros didáticos a serem adotados nas escolas públicas. Esse processo tem algumas etapas e os livros aprovados podem ser escolhidos pelos professores e são enviados gratuitamente a todos os alunos das escolas públicas do país. Mais informações em: <http://www.fn.de.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-apresentacao>. Acesso em out. 2015.

desenvolvidos com os livros didáticos de Matemática. Esses trabalhos apontam a importância da escolha do livro didático e a utilização do mesmo em sala de aula. A última parte deste capítulo trata dos trabalhos relacionados ao livro didático e à Geometria, no qual são apontados resultados sobre a disposição da Geometria nos livros e o uso de imagens em tais conteúdos, por exemplo.

No capítulo 3, apresento a fundamentação teórica sobre leitura geométrica dos diagramas, que serve de base para a análise de dados, e apresento também o aprofundamento de algumas dimensões de leitura geométrica existentes em tal teoria, pois são essas que servem de base para minhas dimensões de análise.

No capítulo 4 é apresentada a metodologia e os desdobramentos desta pesquisa. Para a construção da metodologia fiz a opção por uma pesquisa qualitativa e estudo documental, além de apresentar as dimensões de análise de dados.

No capítulo 5, há a apresentação e análise dos dados que compõem esta pesquisa. Essa análise é feita à luz da teoria, abordada no capítulo 3, e é composta por diferentes exemplos existentes nas coleções de livros didáticos que fazem parte desta pesquisa. Nesse capítulo, além apresentar e discutir os resultados de cada dimensão de análise (apresentadas no capítulo 4), também discuto de maneira multidimensional tais dados, ou seja, faço uma discussão conjunta das dimensões de análise, para então aprofundar a leitura geométrica proposta inicialmente.

No último capítulo são apresentadas as considerações finais e encaminhamentos para novas pesquisas nessa área de estudo.

2. Capítulo 2 – Trabalhos realizados

Neste capítulo é realizado um levantamento das produções acadêmicas de acordo com a área de interesse referente a esse trabalho.

Esse capítulo é dividido em seções, sendo elas revisões relacionadas ao ensino de Geometria na escola básica; livros didáticos de Matemática; e por último, e o mais relacionado a esta pesquisa, tem-se a produção realizada envolvendo livros didáticos e Geometria. Vale ressaltar que a busca foi somente relacionada aos trabalhos feitos com livros didáticos de Matemática e a Geometria de nível básico (ensinada nas escolas de Ensino Fundamental e Médio).

2.1. O ensino de Geometria

O ensino de Geometria nas escolas passou por grandes mudanças e, para alguns estudiosos, como Pavanello (1993), uma das causas dessas mudanças se deve ao Movimento da Matemática Moderna (movimento que teve como objetivo alcançar um rigor matemático, fato este que acabou privilegiando o estudo da álgebra e, com isso, a Geometria perdeu espaço nas escolas e acabou sem grande foco). Para a referida autora, o abandono da Geometria se deve também ao fato de haver uma liberdade dada às escolas, após a promulgação da Lei 5692/71, para decidir sobre os programas das disciplinas em nível escolar. Concedida essa liberdade, muitos professores de Matemática por não se sentirem seguros para trabalhar com Geometria, optaram por não a incluir em sua programação e, mesmo os professores que optaram por continuar ensinando Geometria, deixavam-na para o final do ano letivo (PAVANELLO, 1993).

Na mesma perspectiva, Lorenzato (1995) desenvolveu um trabalho com o objetivo de entender o porquê de a Geometria não estar sendo ensinada por alguns professores, para então propor sugestões de atividades que pudessem mudar tal cenário. Nessa pesquisa, Lorenzato (1995, p. 4) afirma que a Geometria não é ensinada nas escolas porque os docentes não se sentem aptos para ensinar tal conteúdo e “como ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece, está aí mais uma razão para o atual esquecimento geométrico”. Tal afirmação é pautada em estudos anteriores, como Pavanello (1993) e Lorenzato (1993, apud LORENZATO, 1995), sendo este último realizado com 255 professores experientes de 1ª a 4ª série,

para a resolução de 8 questões que envolviam conceitos de Geometria euclidiana plana. Todas as respostas obtidas estavam incorretas, servindo assim de base para as afirmações feitas por Lorenzato.

Corroborando a isso, Gazire (2000) realizou um estudo histórico da Geometria, cujo objetivo principal era explicitar porque não se conseguia resgatar o ensino de Geometria em nossas escolas mesmo após 20 anos de omissão. Ela identificou alguns motivos pelos quais os professores de Matemática do ensino básico não ensinam Geometria. Dentre esses motivos ela destaca que o professor ainda é vítima de um ciclo vicioso, ou seja, o que ele não aprendeu ele não tem como ensinar; somente enxerga a Geometria como sendo um meio para a aplicação da álgebra e da aritmética; sente-se inseguro em utilizar materiais manipuláveis em suas aulas, entre tantas outras questões.

Ainda na mesma perspectiva, Almouloudet al (2004, p.99) afirmam que “ninguém promove aprendizagem do que não sabe, ninguém desenvolve no outro aquilo que não teve oportunidade de desenvolver em si mesmo”.

Oito anos depois de Almouloud ressaltar a falta de ensino de Geometria devido à má formação dos professores de Matemática, Gonçalves e Lando (2012), desenvolveram um trabalho com o objetivo de verificar se a Geometria está sendo ensinada e como esse ensino é feito, ou então investigar quais são os motivos que levam os professores a muitas das vezes ignorarem os conteúdos relacionados a Geometria. Para tal, elas foram a algumas escolas do estado da Bahia para realizar estudos de caso com oito professoras de 5ª série com pelo menos dois anos de experiência.

As autoras supracitadas constataram em sua pesquisa que a Geometria ainda estava ausente em sala de aula, e este fato ocorre principalmente porque “ainda existem muitos professores que não são formados em Matemática assumindo esta disciplina e mesmo os professores que são matemáticos, muitas vezes, não se sentem capacitados para o ensino de Geometria.” (GONÇALVES; LANDO, 2012, p. 386).

Além da má formação apontada pelos autores supracitados, Lorenzato (1995) afirma que alguns professores acreditam que a Geometria é muito complexa para os alunos entenderem já que em alguns livros didáticos a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de qualquer aplicação (o autor se refere aos livros didáticos que não fizeram parte

do Programa Nacional do Livro Didático, ou seja, escritos antes de 1996). Ainda segundo o mesmo autor, a Geometria geralmente era apresentada totalmente separada da aritmética e da álgebra, o que fazia com que os estudantes considerassem que os diferentes ramos da Matemática eram independentes, e que não existiria relação alguma entre eles. Este fato da Geometria ser apresentada separada dos outros ramos da Matemática foi revertido nos anos seguintes, como já retratado em Gazire (2000), citado anteriormente.

É nessa perspectiva que Pereira (2001) ressalta que o abandono da Geometria e de seu ensino se deve a problemas com a formação de professores; problemas relacionados à distribuição da Geometria nos livros didáticos e, ainda, ao Movimento da Matemática Moderna.

De acordo com Pavanello (1993), o ensino de Geometria foi ainda mais comprometido devido ao fato de alguns matemáticos terem opiniões divergentes quanto ao ensino de Geometria, pois uma parte deles acreditava que a mesma era importante para o desenvolvimento do conhecimento matemático, já a outra parte acreditava que a Geometria deveria ceder lugar aos outros ramos da Matemática que estariam em maior destaque, não vendo assim a necessidade de se ensinar Geometria nas escolas.

A falta do ensino de Geometria vem causando alguns impedimentos ou falhas no aprendizado dos alunos, como ressaltou Fainguelernt (1995), pois é por meio da Geometria que eles desenvolvem percepções espaciais. A autora destaca ainda que é com o estudo da Geometria que as pessoas fazem as primeiras analogias entre o concreto e o abstrato, ou seja, é quando ocorre inicialmente a passagem do pensamento concreto para o pensamento abstrato que mais tarde será utilizado nos outros ramos da Matemática, como por exemplo, no campo algébrico.

Além dessa “ponte” entre o pensamento concreto e abstrato, o ensino de Geometria, segundo Pavanello (1995), é bastante importante porque pode proporcionar o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo que será útil por toda vida, já que, em muitas situações do cotidiano as pessoas precisam ter esses pensamentos (crítico e autônomo) bem desenvolvidos, até mesmo quando se encontrar em uma situação profissional fora do contexto escolar.

Ainda, focando as consequências desse abandono, Lorenzato (1995) alerta que o ensino sem Geometria faz com que a leitura interpretativa do mundo fique incompleta e a visão da Matemática torna-se distorcida, pois a Geometria está

presente em grande parte do cotidiano das pessoas. Em sua opinião, a Geometria é muito importante para ajudar no próprio reconhecimento do meio em que vivemos.

A defasagem ou dificuldade de aprendizagem em Geometria foi discutida em trabalhos como os de Alves (2002) e Veronese (2009), que demonstram que os alunos em diferentes etapas do ensino, concluem algumas séries sem saber os conteúdos mínimos previstos em Geometria.

Veronese (2009) investigou o ensino de Geometria no ciclo II do Ensino Fundamental. Seu trabalho se desenvolveu de maneira qualitativa com duas salas de 5ª série de uma escola pública do estado de São Paulo. Ela constatou, por meio de atividades, que os alunos apresentavam um frágil e preocupante desempenho relacionado aos conhecimentos geométricos, sendo que esses resultados muitas vezes aparecem nas avaliações externas e servem para comprovar que ainda não há uma aprendizagem significativa da Geometria.

Com alguns trabalhos, como os citados anteriormente, tendo verificado o possível abandono no ensino de Geometria e as suas consequências, vieram pesquisas ressaltando a importância do ensino desta, como por exemplo, Fainguelernt (1995, p.46) e Passos (2000), que afirmam que a Geometria possui grande relevância no desenvolvimento intelectual do aluno, pois ela ajuda a interligar os diferentes ramos da Matemática. E, ainda, vale ressaltar a importância de se considerar, no ensino da Geometria, “[...] a possibilidade de um maior convívio com elementos geométricos relacionados com os elementos do seu cotidiano, favorecendo o processo de construção do conhecimento” (PASSOS, 2000, p. 7).

Após a constatação do abandono do ensino de Geometria por um período e da constatação de sua importância aos estudantes, surgiram trabalhos que procuraram meios diferentes dos habituais para o ensino de Geometria nas escolas de Ensino Básico.

É possível ressaltar alguns trabalhos com abordagens diferenciadas em Geometria, sendo eles com o uso de materiais manipuláveis ou jogos; com o uso de softwares isoladamente ou estes interligados ao uso de materiais manipuláveis.

A utilização de materiais manipuláveis e jogos no ensino de Geometria foram defendidos e ressaltados por Passos (2000, p.1) quando ela fala que “as experiências geométricas se apresentam de forma espontânea para crianças em atividades de exploração de objetos e do espaço físico em que se desenvolvem”.

Ainda pensando no uso de materiais manipuláveis, Passos (2006) ressalta que estes materiais funcionam como uma forma inicial de representação de conceitos.

Corroborando essa perspectiva, Carvalho (2008) analisou os livros didáticos da 2ª série do Ensino Médio sobre o ensino da Geometria espacial métrica. Ele ressaltou a importância dos materiais manipuláveis em sala para auxiliar os professores no uso de livros didáticos, já que somente os livros não fornecem as representações necessárias se comparados aos materiais manipuláveis, partindo então, para uma ação que busca o aprimoramento do ensino de Geometria e seu aprendizado em sala de aula. Essa constatação se deu por meio de entrevistas com professores que lecionavam na 2ª série do Ensino Médio juntamente com a análise de três livros didáticos da mesma série em questão.

Magri (2012) explorou algumas possibilidades de jogos no âmbito da Geometria como uma proposta de recurso didático para os professores de Matemática. Ela desenvolveu sua pesquisa em uma escola pública que continha cinco salas de 7º ano, mas só conseguiu autorização para trabalhar com duas dessas salas.

A pesquisadora relata que as atividades realizadas com jogos tendem a ser positivas, já que parecem motivar mais os alunos, fazendo com que os mesmos se dediquem para resolver tais atividades e assimilar os conceitos envolvidos. Além disso, Magri (2012) salienta que segundo seus dados (questionários, atividades em sala de aula e uma prova realizada pelos alunos), o conteúdo foi aprendido pelos alunos e não simplesmente decorado, como na maioria das vezes, fato este que foi comprovado com uma prova para todas as salas de 7º ano, sendo que as duas salas participantes da pesquisa apresentaram rendimento relativamente maior que as demais.

Pensando agora no ensino de Geometria com o auxílio de softwares, há trabalhos como os de Cunha (2009) e Soares (2009), onde aparece o uso de softwares para o ensino de Geometria como sendo um bom recurso, já que é apresentado com uso diferenciado, de boa compreensão pelos alunos e também com grande relevância para o entendimento de determinados conceitos.

Soares (2009) estudou Objetos de Aprendizagens voltados para o ensino de Geometria e destaca que,

a dinâmica oferecida pelo Objeto de Aprendizagem pode contribuir de modo relevante para o desenvolvimento da aprendizagem significativa. Mas é óbvio que ao propor o uso de softwares de Geometria para a melhoria do ensino, não irei esperar que todos se convençam de que o uso de OA possa solucionar todos os problemas que envolvem o ensino da Geometria [...] (SOARES, 2009, p. 102).

Soares (2009) deixa claro que os softwares podem auxiliar no aprendizado de Geometria, mas, também ressalta que os mesmos não conseguem resolver todos os problemas que permeiam o ensino e a aprendizagem.

Em todos os trabalhos citados (que envolvem o uso de software no ensino de Geometria) há uma característica comum: todos ressaltam que de alguma maneira os softwares ajudam no processo de compreensão dos conceitos geométricos, isso de modo geral se deve ao fato dos softwares utilizados para este fim proporcionarem melhor visualização das figuras e de suas propriedades, já que seria possível ver as figuras geométricas em 'movimento', considerando-se um software de Geometria Dinâmica. Assim, os alunos poderiam aprofundar seus conhecimentos.

Há ainda trabalhos relacionados ao ensino de Geometria que assumem a importância de materiais manipuláveis juntamente com a utilização de softwares. Como exemplo, há a pesquisa de Fassio (2011), que desenvolveu um trabalho com estudantes de 7ª e 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública de Rio Claro – SP, utilizando materiais manipuláveis e o uso de softwares. Em seu trabalho, a referida autora conclui que com a utilização de materiais diferenciados os alunos se motivam mais e isso faz com que eles aprendam mais, seja com o uso de materiais manipuláveis ou softwares, mas ressalta que com o uso de computadores os alunos se dedicaram mais.

Na mesma linha de pesquisa, há também o trabalho de Vieira (2010), que concluiu que tanto os softwares quanto os materiais manipuláveis ajudaram no aprendizado dos alunos, sendo necessário seu uso no Ensino Fundamental e também no Ensino Médio, já que muitas vezes, esses alunos têm defasagem nos conceitos elementares de Geometria. Ressalta ainda que:

Os materiais concretos podem ocupar, em qualquer nível de ensino, uma posição estratégica como ferramenta constante de diálogo entre os professores e os alunos. As atividades envolvendo materiais concretos se afirmam como espaço de debate e discussão coletiva, sendo que a participação do aluno no aperfeiçoamento de estratégias é um dos pontos principais, indispensáveis para a compreensão dos conceitos estudados. (VIEIRA, 2010, p. 41)

A referida autora assume que os softwares são necessários, pois,

O computador trouxe para a aula de Geometria outra possibilidade de manipular objetos geométricos. Não se trata de jogar fora lápis, papel, régua e compasso, mas de ter acesso a mais uma ferramenta de aprendizagem, que favorece o incremento de outros raciocínios. Quando usados adequadamente, esses recursos podem facilitar a construção de conhecimentos geométricos. (VIEIRA, 2010, p. 51)

Como conclusão de seu estudo, Vieira (2010) destaca o interesse dos alunos por terem materiais diferenciados e tentarem resolver algumas situações problemas com maior entusiasmo, isso devido ao fato de poderem realizar experiências e conjecturas até chegar a uma resposta ou formalização de conceitos.

Assim, com um estudo sobre o ensino de Geometria é possível perceber que os trabalhos observados mostram a defasagem no ensino de Geometria, suas complicações e, também, algumas possibilidades de resgate desse ensino, usando materiais manipuláveis e softwares de Geometria.

2.2. Os livros didáticos de Matemática

O surgimento do livro didático de Matemática parece se confundir com o início da Educação Matemática, pois, desde o início, os dois caminharam sempre juntos e demonstraram mútua dependência, sendo na forma de anotações dos estudantes ou manuais para serem estudados. Valente (2008) desenvolveu um trabalho com o objetivo de refletir sobre o uso do livro didático de Matemática como fonte para pesquisa. Com o decorrer de seu estudo, constatou que o livro didático e a Educação Matemática parecem ser elementos indissociáveis, já que desde o início dos registros sobre a Educação Matemática há indícios de livros didáticos da disciplina de Matemática. Torna-se difícil dizer o que surgiu primeiro, a Educação Matemática ou o livro didático (considerado também como cadernos de anotações), pois “sua origem está na cultura escolar, mesmo antes da invenção da imprensa no final do século XV. Na época em que os livros eram raros, os próprios estudantes universitários europeus produziam seus cadernos de textos” (GATTI JÚNIOR, 2004, p.36).

Com o aumento de publicações e lançamentos de livros didáticos (por meio da imprensa e de materiais impressos) iniciaram-se os estudos relacionados ao tema, mas segundo Choppin (2004) o interesse em realizar pesquisa nessa área aumentou bastante em meados da década de setenta.

Para Dante (1996), o livro, quando é bem utilizado, tem papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem, pois estimula o estudo e a busca por conhecimentos.

Corroborando Dante (1996), Alves (2005) destacam que o livro didático foi de grande importância durante o Movimento da Matemática Moderna, uma vez que os professores recorriam a eles para conseguir preparar e ministrar suas aulas.

Alves (2005) desenvolveu um trabalho acerca de alguns livros didáticos de Matemática que foram utilizados entre 1943 até 1995. Sua pesquisa tinha como objetivos compreender a trajetória da Matemática enquanto disciplina e resgatar as diferentes matemáticas existentes nos livros didáticos. Alves constatou que durante esse longo período houve algumas mudanças mais frequentes referentes aos livros didáticos. Dentre tantas mudanças ele destaca a parte física como sendo a que mais sofreu mudanças, ou seja, a apresentação de desenhos, figuras, as dimensões e as capas desses livros. Além disso, ele destacou que na parte relacionada aos conteúdos, a maior mudança se deve ao fato da introdução de teoria de conjuntos, mas relata ainda que a maneira de abordar os conteúdos é praticamente a mesma ao longo desses anos.

Em outra vertente de pesquisa sobre o livro didático, encontramos Biel e Bayer (2009), que estudaram o papel do livro didático em sala de aula e constataram que existem professores que utilizam o livro didático como principal orientação na sua prática, seja na parte de explicar determinado conteúdo, de realizar atividades e até mesmo para avaliar os alunos. Ainda para os mesmos autores, há uma falha existente nessa colocação para o livro, já que esses autores fazem uma crítica ao papel do livro didático atribuído pelo professor, pois o mesmo não poderia ocupar o papel dominante no ensino, sendo a única fonte de estudo para os alunos, mas reconhecem que a utilização do livro didático é indispensável já que facilita na preparação das aulas e é uma forma de ligação entre a esfera do currículo, legislação e a esfera escolar.

Algumas falhas existentes e que seguem nos livros que podem ser escolhidos pelos professores, são discutidos em Rosa, Ribas e Barazzutti (2012). As

pesquisadoras analisaram diferentes conteúdos de um livro do Ensino Médio e constataram que há falhas relacionadas à composição e apresentação dos conteúdos. As falhas apontadas são principalmente relacionadas à falta de ligação entre os capítulos do livro, ou na falta de ligação entre a introdução de um capítulo, seus conceitos e as atividades propostas.

Pensando ainda na composição dos livros didáticos, Bittencourt (2004) desenvolveu um trabalho cujo objetivo era analisar o papel do livro didático no momento da estruturação do ensino escolar brasileiro. Ela ressalta que a organização dos livros apresentou mudanças, principalmente relacionadas às ilustrações, já que as mesmas passaram a ter mais importância devido ao fato dos alunos se apoiarem em tais representações para auxiliar a construção do conhecimento. A autora ainda ressalta que, a representação do conhecimento matemático por imagens melhor estruturadas, mudou a composição dos livros didáticos, já que tais ilustrações poderiam ser uma alternativa de tornar o texto matemático mais chamativo aos olhos de quem o lê, e também devido ao fato das ilustrações muitas vezes assumirem papel de exemplos, ou como parte da explicação de determinados conceitos matemáticos.

Os estudos mais recentes relacionados à temática que envolve os livros didáticos relatam a importância de novos estudos, mas dessa vez com o foco voltado aos alunos e sua aprendizagem, e não somente o livro didático como puramente objeto de estudo (FAN et al., 2013).

2.3. Os livros didáticos e a Geometria

Antes de iniciarmos a revisão de literatura relacionada aos livros didáticos e Geometria vale ressaltar que, após uma vasta busca em trabalhos acadêmicos, poucas pesquisas foram encontradas nessa área. Brigo (2010), em sua pesquisa, procurou entender como e com qual propósito as figuras geométricas aparecem nos livros didáticos de Matemática na década de 70. Para tal, a pesquisadora estudou diferentes livros didáticos e constatou que as figuras geométricas eram utilizadas para ajudar na demonstração, na ilustração, na formação dos conceitos e também com função explicativa dos conteúdos. Devido a essas diferentes maneiras de utilizar as figuras geométricas, Brigo (2010) afirma que nos livros didáticos fica evidente a existência de duas Geometrias diferentes, sendo elas denominadas de

Geometria intuitiva e Geometria dedutiva. A pesquisadora afirma que a Geometria intuitiva serve de suporte para o ensino da Geometria dedutiva.

Ainda como resultado de sua pesquisa, Brigo (2010) afirma que

Na maioria dos livros didáticos, vemos uma mesma disposição da representação figural dos triângulos em relação à margem inferior dos livros didáticos; a maioria dos triângulos é apresentada com um dos lados paralelos à margem inferior do livro (BRIGO, 2010, p. 152-153).

Albuquerque (2011) analisou diferentes coleções de livros didáticos aprovadas pelo PNLD, com o intuito de perceber como determinados termos são apresentados. Ele relatou em seu estudo um problema referente à nomenclatura envolvendo o termo “semelhante” e “semelhança”, pois em cada coleção havia uma definição diferente para tal conceito/conteúdo geométrico e, segundo ele, o desacordo entre os termos utilizados pode gerar um conflito na aprendizagem e na formação matemática dos alunos.

Kluppel (2012) também analisou alguns livros didáticos e pôde constatar que a Geometria deixou de ser apresentada no final dos livros de Matemática e está distribuída pelo livro todo. Ela verificou que alguns livros trazem definições de polígonos, figuras planas e triângulos somente na forma escrita e não ilustram essas definições e, segundo a referida autora, esse fato faz com que se torne mais difícil a interação entre as imagens e as definições, além de perder a oportunidade de utilizar duas dimensões representativas distintas.

Outro fato apontado por Kluppel (2012) se refere aos exercícios que apresentam o enunciado com poucas informações, faltando assim informações relevantes para que os alunos consigam resolver tais exercícios, ou então causando resoluções inesperadas. A autora conclui seu trabalho ressaltando a importância da ligação entre as imagens e o texto escrito.

Corroborando Kluppel (2012), Collares (2012) desenvolveu uma pesquisa com o objetivo de identificar a presença de conteúdos de Geometria no Ensino Fundamental II, bem como analisar a abordagem de tais conteúdos. A pesquisadora apresentou resultados relacionados à organização dos conteúdos nos livros didáticos, mas ela diz que a mudança na disposição dos tópicos de Geometria começou a aparecer a partir da década de 90 e, juntamente com tal mudança, apareceu outra que chamou mais sua atenção: o uso de imagens, principalmente na implantação das figuras geométricas para ajudar no entendimento da Geometria.

Bardini (2015), em sua pesquisa, cujo objetivo central era analisar alguns livros didáticos de Matemática utilizados no 5º ano da rede municipal de Rio Claro – SP, destaca que os livros didáticos de Matemática deste ano tentam relacionar os conteúdos geométricos com o cotidiano do aluno, mas ao fazer tal relação utilizam figuras bidimensionais no lugar de figuras tridimensionais. Além desse fato, a autora supracitada relata que, embora pesquisas anteriores ressaltem a importância de desenvolver um trabalho com materiais manipuláveis, nenhum livro que ela analisou menciona tais atividades.

Focando em nossa revisão de literatura torna-se evidente a escassez de trabalhos que relacionam o livro didático e a Geometria. É justamente devido a falta de trabalhos relacionando estes temas que minha pesquisa assume importância, uma vez que a mesma visa fazer da leitura geométrica dos diagramas uma metodologia de análise dos conteúdos de Geometria presentes em alguns livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental, para então conseguir entender como tais conteúdos estão presentes nesses livros.

3. Capítulo 3 – Leitura Geométrica

O ensino de Geometria, como já mencionado na revisão de literatura, apresenta alguns problemas. Primeiramente, pode ser apontado como um obstáculo/problema o fato dos objetos matemáticos, na maioria das vezes, serem apresentados desvinculados de suas representações por meio de figuras (ALMOULOU, 2010). Neste trabalho, objetos geométricos são entendidos como sendo representações de sólidos geométricos que podem ser moldados como objetos do cotidiano, podendo ser inicialmente os desenhos realizados a partir desses objetos geométricos e a posteriori sua representação mental.

Nos livros didáticos, a falta de ligação entre a representação dos objetos e os objetos em si acaba dificultando a construção de conceitos geométricos, gerando uma busca por alternativas que contribuam com seu ensino e compreensão (CARDOSO, 2014).

A 'leitura geométrica dos diagramas', proposta por Dietiker e Brakoniecki (2014) é utilizada para entender como a Geometria está sendo abordada nos livros didáticos, observando nessa leitura desde uma possível ligação com os objetos do cotidiano até sua conceitualização.

Há alguns trabalhos que se aproximam desta temática ao abordarem questões referentes à leitura e ao entendimento de imagens. Esses trabalhos podem ser considerados como sendo de grande relevância para entendermos a importância que uma imagem pode carregar consigo ao longo do processo de aprendizagem, ou seja, a imagem pode trazer mais informações que o próprio texto escrito. Como exemplo, é possível citar os trabalhos de Grimberg (2013) e Martins e Gouvêa (2014). Nestes trabalhos os autores destacam que, às vezes, as imagens contêm mais informações do que o próprio texto escrito, tendo que ser realizada uma leitura das imagens para as mesmas poderem ser interpretadas e gerar um aprendizado.

Pensando na temática relativa à leitura de imagens que compõem o texto matemático, Dietiker e Brakoniecki (2014) sugerem a Leitura Geométrica dos Diagramas, que aborda a relação existente entre o texto escrito e a imagem que o acompanha, seja a mesma utilizada como ilustração, exemplos ou complemento do texto, iniciando assim um possível entendimento desses diagramas. Para tal, eles desenvolveram uma pesquisa a partir de um estudo realizado com alunos do Ensino

Fundamental (alunos mais novos) e Ensino Médio (alunos mais velhos) e, também, com livros didáticos de Matemática dos Estados Unidos e da Turquia.

Dietiker e Brakoniecki (2014) relataram que ler diagramas é mais complexo do que originalmente é admitido, e também ressaltam que embora seja tentador falar sobre 'A' leitura geométrica, nem sempre pode ser feita tal afirmação. Seu estudo mostrou que isso ocorre uma vez que existem diferentes maneiras de interpretar um diagrama. Principalmente porque tais leituras dependem das informações dadas pelos diagramas e das informações que o leitor considera como relevantes em um determinado momento ou em uma determinada situação.

Ainda pensando na construção da leitura geométrica, ressalto a importância da informação, tanto no texto quanto no diagrama serem a mesma e de forma coesa, já que, algumas vezes o texto ao tratar de determinadas propriedades de algumas figuras, como por exemplo, a proporcionalidade entre os lados de um retângulo, essa proporcionalidade nem sempre é respeitada nos diagramas que acompanham tal ideia descrita no texto, pois ao fazer o diagrama referente ao retângulo, do exemplo anterior, as medidas dos lados não seguem a proporcionalidade dita na parte escrita.

A leitura geométrica é definida pelos autores como uma negociação de significados entre o leitor e o texto. Esse tipo de leitura envolve um redesenho do diagrama na mente do leitor, trazendo para dentro de si a avaliação do contexto em que o mesmo pode ser utilizado, considerando suas experiências anteriores com as convenções dos diagramas, ou seja, suas marcações e suas classificações.

Em outras palavras, entendo que a leitura geométrica é a compreensão desenvolvida por quem está realizando a leitura, podendo o texto conter uma figura ou não e, mesmo que tal compreensão seja mínima, ainda há uma leitura sendo realizada, e isso pode acarretar de alguma maneira um aprendizado.

Inicialmente, a leitura geométrica é realizada com o uso e a associação de imagens e textos. No entanto, com a familiarização dos conceitos geométricos e suas respectivas representações por meio de imagens essa leitura começa a ser feita sem tanta necessidade das representações (desenhos ou representações mentais), ou seja, começa a ser realizada somente por meio de palavras, não sendo tão necessário o auxílio das imagens, chegando assim na chamada abstração de conceitos ou representações mentais de imagens. Dessa maneira, a leitura

geométrica continua sendo feita, mas com modificações na forma de representação e uso das imagens.

Assim, a maneira como se usa a imagem, especialmente na representação, é modificada ao longo dos anos escolares, chegando até o ponto de não ser necessária estar mais presente no texto para que uma imagem mental seja criada. Com essas modificações o leitor pode perceber qual característica dos diagramas em geral é mais importante naquele momento, e quais informações não são necessárias para seu entendimento.

Para haver uma leitura dos conteúdos de Geometria, alguns autores propõem a necessidade de os diagramas geométricos serem lidos e não somente observados ou admirados como um desenho. Um desses autores é Pimm (2006), que ressalta que para que se consiga ler um diagrama é preciso fazer duas perguntas relacionadas a ele, sendo elas: “O que nós perguntamos a um diagrama matemático? E, o que nós perguntamos de um diagrama em Matemática?” (PIMM, 2006, p. 181). Essas duas perguntas se relacionam no sentido de quais aspectos são procurados nos diagramas e sobre qual perspectiva.

Esses questionamentos servem para nortear a busca de informações em determinados diagramas, pois, dependendo da pergunta assumida, tem-se uma resposta. Por exemplo, se buscamos informações específicas sobre as características de alguma figura, nos atentamos somente ao que estamos procurando. Por outro lado, ao olharmos para um diagrama sem buscarmos por algo específico, estamos abertos a tudo o que o mesmo nos mostra, ou seja, conseguimos olhá-lo de modo geral e assim entendê-lo de maneira mais global.

Além das perguntas apresentadas por Pimm (2006), Dietiker e Brakoniecki (2014) destacam que ao longo do processo de leitura geométrica podem surgir muitas questões, que podem ajudar a nortear uma possível leitura geométrica, por exemplo:

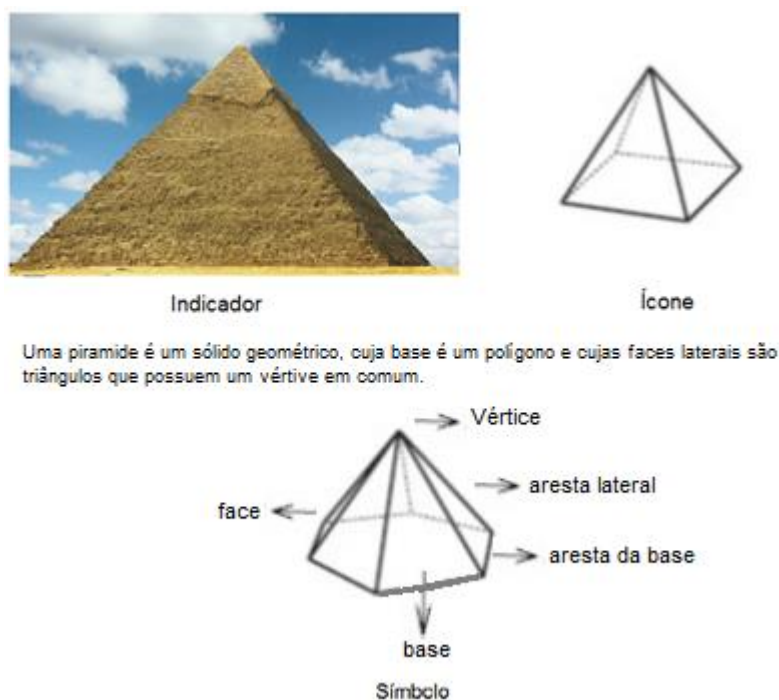
O que pode ser assumido a partir do diagrama? Que evidências não devem ser assumidas? O que mais essa imagem pode dizer do objeto geométrico? Esse objeto tem uma representação única ou múltipla? Quais aspectos desses diagramas limitam minha visão? (DIETIKER; BRAKONIECKI, 2014, p. 5-6, tradução nossa).

Ao fazer uma leitura geométrica dos diagramas presentes nos livros estudados, tanto dos Estados Unidos quanto da Turquia, Dietiker e Brakoniecki (2014) identificaram a existência de oito dimensões de leitura.

A primeira dimensão de leitura geométrica abordada pelos autores se refere ao reconhecimento do tipo de signo assumido por um diagrama. Vale explicitar que signo é entendido como sendo uma figura ou uma palavra que se relaciona a uma ideia principal. No âmbito dessa dimensão, os diagramas estão divididos em três tipos possíveis, a partir da teoria dos Signos, desenvolvida por Peirce (1931).

Os três tipos de signos que compõem essa primeira dimensão de leitura geométrica, representados na figura 1, dizem respeito:

Figura 1 - Exemplos se signos.



Fonte: Adaptado de Pirâmides – Slide Player⁴

- Ao indicador: quando a representação aponta um objeto que pode ser modelado por um sólido geométrico (ou uma figura plana) que está sendo estudado. Nessa parte se encaixam as relações que as pessoas fazem envolvendo objetos reais para falar de figuras geométricas;

⁴ Disponível em: <http://slideplayer.com.br/slide/1538765/>. Acesso em set. 2015.

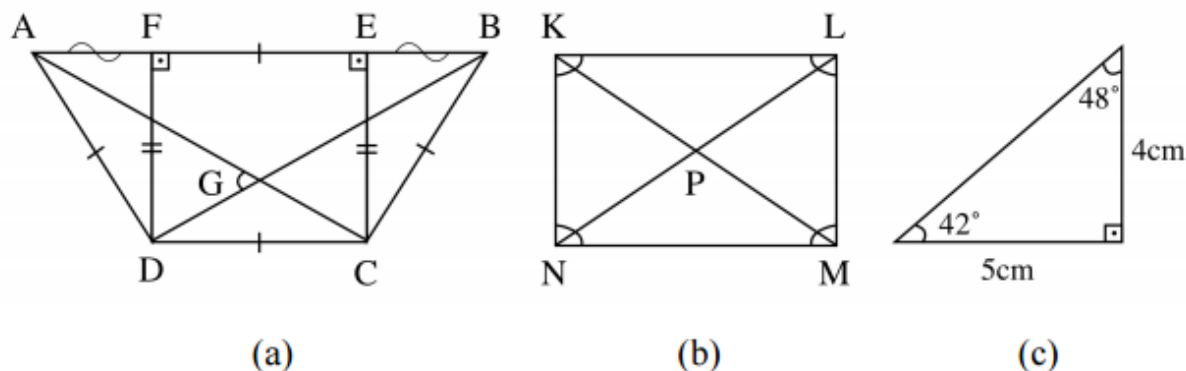
- Ao ícone: quando uma figura é representada pela sua aparência, ou seja, seu reconhecimento se dá pela forma que ela apresenta e não pela sua definição;

- Ao símbolo: quando a representação é baseada em uma associação de conceitos, juntamente com o entendimento dos mesmos. Uma figura geométrica passa a ser um símbolo quando ela carrega consigo suas propriedades e os conceitos que a envolvem, sendo essas características apresentadas na forma escrita ou então como marcações (como marcações de ângulos, congruências, paralelismo, etc).

A segunda dimensão de leitura geométrica identificada assume que os leitores estão fazendo considerações de aspectos topológicos e métricos dos diagramas. Esses aspectos são relacionados às medidas dos diagramas ou às suas propriedades ou aspectos referentes às partes desses objetos. As pessoas mais novas, ou então sem muita familiaridade com determinado conceito, tendem a considerar as propriedades métricas dos diagramas, e as pessoas mais velhas ou mais experientes, que estão mais acostumadas às propriedades de determinada figura, tendem a ignorar as propriedades métricas, considerando somente as topológicas.

Já a terceira dimensão de leitura geométrica estudada envolve a compreensão e o acompanhamento de convenções culturais. Nessa dimensão de leitura, o diagrama é um sistema de signos impostos por convenções culturais com os quais um leitor deve estar familiarizado para conseguir entendê-las. Tais convenções se referem, por exemplo, às marcações de símbolos específicos para representar relações em diferentes culturas, uma dessas convenções é a utilização da marcação específica para identificar um ângulo reto. Esse fato foi observado nos livros didáticos dos Estados Unidos, nos quais essa marcação é convencionada, assim como ilustrado nos itens **a** e **c** da figura 2, e nos livros da Turquia, nos quais tais marcações não são utilizadas, como mostra item **b** da figura 2.

Figura 2 - Exemplo de convenções culturais.



Fonte: Dietiker e Brakoniecki (2014, p. 4)

Assim como Dietiker e Brakoniecki (2014) observaram essas marcações nos livros dos Estados Unidos e da Turquia, eu ao olhar para os livros didáticos brasileiros, a marcação específica de ângulo reto também pode ser observada no decorrer dos conteúdos geométricos.

Os autores ressaltam que a negociação de significado dos diagramas envolve deduções de propriedades que podem não ser explicitadas, surgindo assim a quarta dimensão de leitura geométrica. Nesta dimensão aparece a dedução de informações sobre os objetos e diagramas. Essa dedução se refere ao fato de algumas características serem entendidas a partir de outras, não precisando assim estar explicitadas em palavras, sendo colocadas somente as condições suficientes para seu entendimento, ou seja, não há a necessidade de marcar todos os elementos nas figuras, se eles podem ser deduzidos de outros elementos, ou então, colocados em enunciados escritos.

A quinta dimensão de leitura geométrica envolve a aceitação ou a rejeição de informações apresentadas por um diagrama, ou seja, as informações existem, mas cabe ao leitor identificar e aceitar tais informações que os diagramas oferecem e, ainda, fazer possíveis considerações sobre as mesmas. Essa aceitação ou rejeição pode ocorrer de acordo com o que o leitor tenha entendido ou não de tais informações, possivelmente fazendo com que só sejam aceitas as informações assimiladas pelo leitor.

A sexta dimensão envolve a reconstrução de um diagrama particular, por meio de representações mentais. Exemplos dessa dimensão ocorrem quando nos livros didáticos aparece uma questão para o aluno responder baseado em

informações textuais, fazendo menção a algumas imagens, mas tais imagens não são apresentadas, sendo necessário que o aluno a imagine.

A penúltima dimensão de leitura geométrica de um diagrama foca a relação existente entre o diagrama e o contexto em que está inserido. Neste caso, os autores ressaltam que o contexto é de extrema importância para a leitura dos diagramas, pois depende do tipo de Geometria que está sendo considerada. Nesse sentido, um diagrama que tem determinada representação na Geometria Euclidiana, provavelmente não terá a mesma representação em uma Geometria não-Euclidiana. Assim, as suposições axiomáticas também são negociadas e são de grande importância para o entendimento do diagrama em questão.

Por fim, a última dimensão envolve a decisão sobre se a leitura está sendo feita a partir de uma figura e suas características, ou então a partir de um contexto no qual tal figura está inserida. Por exemplo, em uma situação envolvendo uma sequência de figuras (Figura 3), podemos fazer diferentes questionamentos, sendo dois deles 'quais figuras formam essa sequência?' ou 'qual figura vem a seguir?'. Essas duas perguntas e suas respectivas respostas são distintas, pois, ao pensar na primeira questão o leitor pode simplesmente considerar as características isoladas de cada figura para respondê-la (considera cada figura isolada da outra), por outro lado, considerando a segunda pergunta o leitor precisa considerar as diferenças entre as figuras para conseguir respondê-la. Assim, o contexto em que uma figura está inserida, bem como o enunciado da questão, podem influenciar na leitura geométrica realizada.

Figura 3 – Sequência de figuras geométricas.

Nesta sequência, qual figura geométrica vem a seguir?



Fonte: Elaborado pela autora

Ao explicitar as dimensões de leitura geométrica propostas por Dietiker e Brakoniecki (2014), ressalto que, para o desenvolvimento deste trabalho, foram aprofundadas três dessas oito dimensões de leitura geométrica. Essas dimensões

de leitura são referentes aos tipos de signos; às propriedades métricas e topológicas e, às representações mentais.

A escolha por essas três dimensões de leitura geométrica se deve ao fato de que, durante as primeiras leituras dos materiais que compõem minha pesquisa, as duas dimensões iniciais de leitura geométrica apontadas por Dietiker e Brakonicki (2014) se destacaram nos livros que compõem minha pesquisa, e a terceira dimensão de leitura escolhida (representações mentais) se deve à minha inquietação como professora e também às dificuldades que percebo serem apresentadas pelos alunos ao realizarem tais representações. Além dos motivos anteriores, há ainda falta de tempo hábil para a análise das oito dimensões, com a profundidade que me propus a fazer, no período referente ao mestrado.

Para o aprofundamento das três dimensões de leitura geométrica e de seus respectivos conceitos, me baseei nas ideias de Peirce (1931) que trata dos Signos; Borges (2005) que aborda as propriedades métricas e topológicas dos diagramas e, por último, nas ideias de diferentes autores que abordam as representações mentais dos diagramas, como Pais (1996), Galperin (1989) e Pontes (2013).

3.1. A teoria dos Signos

A teoria dos Signos de Peirce (1931), também conhecida como semiótica, pode ser tratada como um relato de significação, sendo esta significação referente à representação e ao significado de objetos.

A significação que engloba a representação aborda a relação existente entre o objeto e sua representação através do signo, ou seja, a interpretação de certo objeto é dado por meio de sua representação e de seu conceito. Já a significação feita a partir de um interpretante diz respeito à interpretação de um signo juntamente a um objeto, sendo feita por alguém.

Peirce (1931) formulou o modelo triádico sobre os signos, que ainda é utilizado. Os estudiosos que buscam referências sobre os signos recorrem a essa teoria, já que ela é conhecida como o princípio da semiótica com status de Ciência, e nesse modelo as principais características de qualquer signo precisam ser claras e suficientes para que o leitor consiga interpretá-lo.

Peirce (1931) sugeriu que a estrutura básica dos signos é composta por três aspectos interligados. Esses aspectos são relacionados à sua imagem, ao objeto e

ao intérprete. Para Peirce (1931), a imagem é algo que se relaciona a uma ideia principal; o objeto é o significado atribuído à imagem (ou simplesmente o objeto em si) e, por último, o intérprete é aquele que atribui o significado à imagem e ao objeto. Como exemplo, podemos pensar em uma cadeira como sendo um objeto. Depois, ao pensar cadeira temos o signo da mesma e, por último, a utilidade que atribuímos à cadeira e/ou sua definição seria o papel do intérprete.

Com a formulação da estrutura básica dos signos, Peirce (1931) dividiu esses três aspectos iniciais em outras partes, gerando assim muitas combinações acerca de possíveis entendimentos. Inicialmente, o referido autor propôs que haveria mais de 100 combinações, mas ao aprofundar as características de cada combinação, ele percebeu que o limite para elas seria 66 combinações. Em seu trabalho é discutida e exemplificada cada uma dessas categorias de interpretação, com o intuito de elucidar estas ideias. No entanto, como o foco desse trabalho é a leitura geométrica dos diagramas, há um recorte relacionado à parte referente ao aspecto do objeto juntamente com as imagens e seu significado atribuído, sendo tal recorte a tricotomia que aborda os indicadores, ícones e símbolos.

No início de seu trabalho, por volta de 1860, Peirce propôs uma representação através de um conjunto de imagens e/ou palavras relacionadas a algumas de suas qualidades. Inicialmente ele chama esse conjunto de semelhanças, que depois passa a ser denotado como ícones. Em segundo lugar, aparece a representação cuja relação com seus objetos consiste em uma correspondência por meio de desenhos, denominados de indicadores. E, finalmente, aparecem aquelas cuja relação com seus objetos é carregada de conceitos e propriedades, chamadas de símbolos.

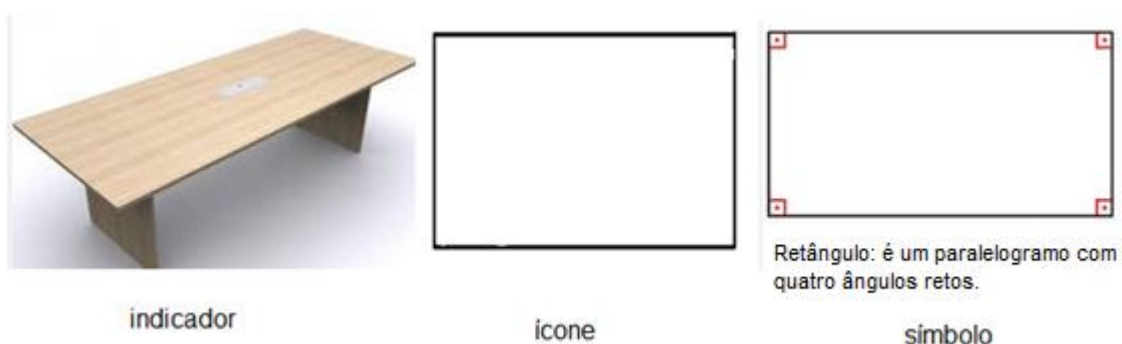
Para exemplificar, se chegarmos a interpretar um signo apenas como uma forma desenhada, sem pensar em suas propriedades, então esse signo é um ícone. Se, por outro lado, a interpretação de um signo é feita usando objetos reais para fazer conexões com figuras geométricas, por exemplo, então o signo é um indicador. E, se o signo estiver repleto de informações que o deduzam e houver uma assimilação das propriedades pelo leitor, então esse signo é um símbolo.

Nessa tricotomia inicial, a relevância dos ícones e indicadores foi questionada por estudiosos da época, pois, o entendimento dos objetos era considerado como sendo símbolos, já que os objetos apresentam propriedades, e as propriedades por sua vez, caracterizavam os símbolos.

Após alguns anos, por volta de 1903, Peirce retomou seus estudos e se aprofundou nos conceitos de ícone, símbolo e indicador, incluindo casos adicionais pensando no desenvolvimento da lógica. Assim, se as restrições de significação fossem bem-sucedidas, exigindo que o signo refletisse características qualitativas do objeto, e se os diagramas fossem usados no raciocínio geométrico, então esse signo seria um ícone. Se as restrições de significação não fossem dúbias, e exigissem que o signo utilizasse alguma ligação existencial ou física entre ela e seu objeto e, se fossem usados objetos geométricos semelhantes para se referirem a figuras geométricas, então o signo seria um indicador. E, finalmente, se a significação fosse bem-sucedida com o objeto e requeresse que o signo utilizasse alguma convenção, hábito, ou regra social ou de direito, que se conecta com o seu objeto, e se fossem consideradas as propriedades e características dos objetos, então o signo seria um símbolo.

Vale ressaltar que os tipos de signos, dependendo da situação e de quem os interpreta, podem apresentar diferentes representações. A figura 4 traz como exemplo o desenho de um retângulo, sendo o mesmo classificado de acordo com a tricotomia de Peirce.

Figura 4 – Tricotomia de Peirce relacionada ao objeto e signo.



Fonte: Elaborado pela autora

Na figura 4, temos inicialmente um indicador, pois ao falarmos que o tampo da mesa parece um retângulo nos remetemos ao formato retangular, chegando assim ao seu ícone, como mostra a parte do meio da figura 4 e, por último, ao pensarmos nas características de um retângulo e as mesmas serem entendidas, temos a representação do retângulo como símbolo, já que sua imagem passa a ser utilizada com suas propriedades.

3.2. Propriedades Métricas e Topológicas dos diagramas

A ideia desta seção é discutir o que são as propriedades métricas e topológicas dos diagramas. Para tanto são usados os trabalhos de Borges (2005) e Dietiker e Brakoniecki (2014).

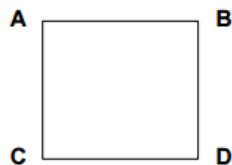
Dietiker e Brakoniecki (2014) assumem como propriedades métricas as propriedades que são relativas às marcações (ou não) de comprimento, medidas de ângulos, marcações de paralelas e perpendiculares, marcações de congruência e outros símbolos que representam aspectos dos diagramas referentes às medidas. Como propriedades topológicas, assumem as que se referem aos números de lados, interseções, formas abertas ou fechadas, as orientações, adjacências, colinearidades e outros aspectos relacionados às partes desses objetos.

Para Borges (2005) também há uma separação entre as propriedades métricas e topológicas dos diagramas. Ele inicia seu estudo fazendo um paralelo com questões qualitativas e questões quantitativas, para então definir quais são as propriedades métricas e topológicas. Como exemplos de questões, o autor usa as seguintes perguntas: “Qual é o comprimento dessa sala de aula? Qual o ângulo feito por aquelas duas paredes? Você é vizinho de Paulo? O móvel já está dentro da sala?” (BORGES, 2005, p. 15).

A partir destes questionamentos, o autor introduz a ideia de propriedades métricas como sendo tudo o que se refere a quantidade e é possível ser respondido com números (as duas primeiras questões) e, como propriedades topológicas tudo aquilo que se associa às qualidades e não pode ser respondido por números (os dois últimos questionamentos).

Em seu texto, o autor traz um exemplo de propriedades referentes a algumas figuras geométricas e a partir de tais propriedades, juntamente com a ideia de qualitativo e quantitativo, define quais são as propriedades métricas e topológicas para tais figuras, fazendo assim uma generalização dessas propriedades. A figura 5 mostra o exemplo de um quadrado, onde ocorre o emprego dessas ideias.

Figura 5 - Propriedades qualitativas e quantitativas de diagramas



Rotulemos algumas propriedades dessa figura:

1. O lado AB mede 5 cm.
2. Seus quatros lados são iguais.
3. A distância do lado AC à margem esquerda é de 5,5 cm.
4. Todos os seus ângulos são iguais.
5. A figura divide o plano em três conjuntos de pontos:
 - a) os pontos que estão dentro dela;
 - b) os pontos que estão sobre as suas quatro linhas;
 - c) os pontos que estão fora dela.

Fonte: Borges (2005, p. 17)

Na figura 5, as quatro primeiras propriedades são de cunho quantitativo, pois a informação obtida é um número ou algo relacionado à parte métrica da figura, sendo, assim, exemplos de propriedades métricas. Por outro lado, a última propriedade não necessita de ideias ligadas a números para que possamos entendê-la, sendo classificada pelo autor como propriedade topológica, ou seja, considera a parte qualitativa da figura, como por exemplo: noções de vizinhança, fora, dentro, interior ou exterior, aberto ou fechado, longe ou perto, separado ou unido, adjacências (proximidades) e ordem (BORGES, 2005).

A partir da definição acima e olhando novamente para a figura 5, é possível entender que as propriedades métricas da figura se referem ao tamanho de seu lado, congruência entre os mesmos, congruência entre os ângulos e também relacionada à distância de tal figura até a margem. Já como propriedades topológicas aparecem as noções de estar dentro ou fora da figura e sobre sua linha.

Assim, os diagramas contêm tanto as características métricas quanto as topológicas e, para conseguir entendê-lo de maneira completa, é necessário identificar quais delas estão sendo evidenciadas e quais são mais relevantes para o entendimento de tal figura. Acredito que dependendo do foco da leitura feita há momentos que as propriedades métricas serão mais relevantes e há momentos em que as propriedades topológicas terão mais destaque.

A seguir abordo os conceitos que envolvem as representações mentais e a abstração dos diagramas.

3.3. Representações mentais e a abstração

A ideia central desse tema é que as representações mentais, segundo Rezende e Valdes (2006) não surgem sem uma conceitualização ou um conhecimento prático, já que “conceitos mentais devem estar correlacionados com sua aplicação prática” (REZENDE; VALDES, 2006, p. 1210).

Nesse mesmo sentido, Barbosa e Ferreira (2012) destacam em seu estudo que o objeto, o desenho, a representação mental e o conceito são elementos que se complementam, sendo indissociáveis.

Pensando na parte de representações mentais, segundo Galperin (1989), antes do indivíduo conseguir realizar representações mentais⁵ ele passa por algumas etapas, sendo elas: a manipulação do objeto, o desenho, a representação verbal e por último a representação mental. Quando um objeto totalmente novo é apresentado a alguém, sua primeira fase de exploração, a primeira etapa, é a manipulação e, em uma segunda etapa, o desenho de tal objeto começa a ter significado para essa pessoa, ou então ela começa a representá-lo por meio de desenhos. A terceira etapa é a de representação verbal, quando o indivíduo consegue falar das propriedades e características do objeto em questão, tendo assim uma visão mais geral do mesmo. E, por último, o indivíduo consegue representar mentalmente o objeto sem a necessidade de desenhá-lo ou de manipulá-lo.

Esse processo de conhecimento de um objeto geométrico chegando até sua representação mental não é linear ou único para todas as pessoas, pois “o nível de aperfeiçoamento dos conceitos mentais assimilados varia de acordo com: a) a natureza das ações mentais; b) o potencial dos aprendizes; c) o nível de complexidade da situação-problema” (REZENDE; VALDES, 2006, p. 1217).

Segundo Pais (1996), a formação de imagens mentais e a generalização dos conceitos geométricos são construídas pelos indivíduos de forma lenta, pois só se pode dizer que o indivíduo tem uma imagem mental quando “ele é capaz de enunciar, de forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos” (PAIS, 1996, p. 70). Dessa maneira, a formação de imagens mentais é quase uma consequência do trabalho com objetos e desenhos,

⁵ Chamadas também de ações mentais por Galperin (1989).

uma vez que para o referido autor, nesse processo, o indivíduo recorre à representação do objeto por meio de desenhos e somente depois de ter se familiarizado a esses elementos, ele passa a realizar representações mentais de tais desenhos ou objetos.

Assim, como os autores citados acima, assumo que o processo que envolve uma representação mental é longo e ocorre de maneira lenta e evolutiva, dependendo de vivências anteriores, já que, a meu ver, ninguém consegue ter uma imagem mental de um objeto sem antes tê-lo visto ou tê-lo manipulado, pois somente assim poderá conhecer suas propriedades. Dessa maneira, a representação mental é algo construído aos poucos, e depende de cada indivíduo desenvolver sua representação mental.

Ainda relacionado à abstração, Piaget (1977 apud MANTOAN 1994) defende que existem graus de abstração, sendo eles: abstração empírica, pseudo-empírica, reflexiva e refletida. As características dos diferentes tipos de abstrações são: abstração empírica é aquela que deriva de experiência física, ou seja, o indivíduo é capaz de extrair informações do objeto como cor, tamanho, textura, etc. A abstração pseudo-empírica se refere às propriedades dos objetos e ela se deriva do objeto e de suas observações. Já a abstração reflexiva é aquela que deriva das coordenações das ações do sujeito, esse tipo de abstração se associa à experiência lógica-matemática, ou seja, quando o sujeito se depara com situações desconhecidas, ele vale-se de esquemas de ações já conhecidas para reordenar sua experiência para tal situação. E, por último, a abstração refletida, que por sua vez possibilita ao sujeito estabelecer relações entre os fatos sem necessitar do real, ou seja, o sujeito trabalha com suas próprias ideias do objeto (MANTOAN, 1994).

Pensando nos níveis de abstração propostos por Piaget (1977 apud MANTOAN, 1994) é possível perceber que esses níveis são de certa maneira evolutivos e podem se relacionar pois, para alcançar determinado nível de abstração, o indivíduo precisa aprofundar alguns outros (anteriores), mesmo assumindo que a abstração é uma atividade nata dos sujeitos.

Pontes (2013) propõe uma ideia geral de Princípios de Abstração. O ponto principal diz respeito ao fato de que “a função central dos Princípios de Abstração deve ser (ou deveria ser) a de estabelecer critérios de identidade que possibilitem introduzir de forma legítima e segura o discurso sobre o objeto abstrato” (PONTES, 2013, p. 185). Além disso, o referido autor discorre sobre as diferentes abstrações

que um indivíduo pode apresentar, ou seja, abstrações com características primárias do objeto, e ao estudá-lo melhor, essa abstração também é aprofundada ou reformulada.

Pensando nas ideias propostas por Pontes (2013) e Piaget (1977 apud MANTOAN, 1994), entendo que para haver abstração é necessário ter um conhecimento prévio sobre os objetos e figuras, sendo que este conhecimento apresente o mínimo de dúvidas ou incertezas possíveis, pois dessa maneira a abstração poderia ser construída considerando a maioria das características do objeto concreto, não sendo assim uma atividade nata do sujeito e que possa ser classificada de diferentes maneiras pensando de onde a mesma é derivada, como proposto por Piaget.

Dessa forma, entendo que embora existam diferentes perspectivas relacionadas às representações mentais e à abstração, a maioria delas tende a se pautar tomando a priori um objeto ou uma imagem. Assim, a formação de imagens mentais aparece quase como uma consequência de aprendizados ou experiências anteriores, já que antes de conseguir realizar tais representações, as pessoas apresentam conhecimento prévio sobre tal assunto, objeto ou imagem.

Nesta pesquisa a leitura geométrica é realizada por mim, enquanto pesquisadora, tentando apontar elementos relevantes que possam colaborar com o desenvolvimento de tal leitura. Esses apontamentos são pautados nas três dimensões de leitura geométrica aprofundadas, sendo elas: os tipos de signos; as propriedades métricas e topológicas dos diagramas e, as representações mentais. A realização da leitura geométrica tem a finalidade de identificar como os conteúdos de Geometria estão propostos nos livros das três coleções analisadas e, também, nortear possíveis caminhos para que outras leituras sejam desenvolvidas, mas, sempre pensando na negociação de significados entre o leitor e o texto.

Dessa maneira, apresentada a fundamentação teórica, no próximo capítulo apresento a metodologia para o desenvolvimento desse trabalho visando alcançar o objetivo proposto.

4. Capítulo 4 - Metodologia

Neste capítulo é apresentada a concepção de abordagem de pesquisa qualitativa que assumi como base para esta pesquisa, considerando que o objetivo principal foi fazer da leitura geométrica dos diagramas, partindo de uma metodologia de análise dos conteúdos de Geometria presentes em alguns livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental.

4.1. Abordagem Metodológica

Para a realização desse trabalho, optei por uma abordagem qualitativa, já que uma das minhas inquietações era estudar os conteúdos de Geometria presentes em alguns livros didáticos atuais e entender como esses conteúdos apareciam nos livros de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. Segundo Minayo (2001), a pesquisa qualitativa aborda o universo de significados, motivos, aspirações e atitudes que correspondem a respostas que não podem ser reduzidas à operacionalização de variáveis, ou seja, é com uma abordagem qualitativa que se buscam respostas a questões particulares que não podem ser quantificadas.

Bogdan e Biklen (1994, p. 11) caracterizam a pesquisa qualitativa enquanto uma “[...] metodologia de investigação que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais”. Ainda, concordo com esses autores quando ressaltam alguns pontos da pesquisa qualitativa como sendo ela uma investigação descritiva, com uma análise realizada pelo pesquisador de forma mais indutiva.

Os meus objetos de análise e meu objetivo me ajudaram a delinear esse estudo como uma pesquisa qualitativa e, dentro da abordagem qualitativa como sendo um estudo documental, já que

No âmbito da abordagem qualitativa, diversos métodos são utilizados de forma a se aproximar da realidade social, sendo o método da pesquisa documental aquele que busca compreendê-la de forma indireta por meio da análise dos inúmeros tipos de documentos produzidos pelo homem (SILVA, et al., 2009, p. 4555).

Segundo Lüdke e André (1986), o estudo documental é a identificação de informações e evidências nos documentos a partir de questionamentos de seu

interesse. Ainda nessa perspectiva, temos, segundo Pádua (1997, p. 62), que “pesquisa documental é aquela realizada a partir de documentos, contemporâneos ou retrospectivos, considerados cientificamente autênticos (não fraudados)”.

Como vantagem do estudo documental, Gil (2002) aponta para o fato de que nesse tipo de pesquisa a fonte de dados é rica e estável, podendo ser consultada diversas vezes, além de ser possível a realização de leituras aprofundadas. É nessa perspectiva que Oliveira (2007) aborda a análise documental como um processo de tratamento do material para armazenar as informações de maneira diferente à original, sendo ela mais condensada.

Neste contexto, como Bravo (1991) e Godoy (1995), assumo que ‘documentos’ são todas as realizações produzidas pelo homem que se mostram como indícios de sua ação e que podem revelar suas ideias, opiniões e formas de atuar e viver; podem ser ideias e materiais escritos. Como nessa pesquisa a fonte de informações são os livros didáticos, eles tornam-se documentos.

Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009, p. 10) fizeram um apanhado sobre como pode ser realizada a análise de uma pesquisa de caráter documental, e constataram que a mesma “propõe-se a produzir ou reelaborar conhecimentos e criar novas formas de compreender os fenômenos”. Para produzir, reelaborar conhecimentos ou criar novas formas de compreender os fenômenos, os autores destacam que os dados devem ser situados em uma estrutura teórica, pois, isoladamente eles não fazem sentido algum.

Para Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009), um dos aspectos principais da análise de uma pesquisa documental é a forma de registro. Esse registro pode ser feito de diferentes maneiras, mas, sempre considerando que os dados devem ser organizados de acordo com várias leituras e releituras das obras, isso para que seja possível organizá-los de acordo com suas características comuns.

Dessa maneira, Lüdke e André (1986, p. 42) assumem que “[...] esse processo, essencialmente indutivo, vai culminar na construção de categorias ou tipologias”.

Outro aspecto da análise documental destacado como relevante por Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009), consiste em uma análise referente às suas ‘categorias’, tentando entender se as mesmas abrangem seus dados e seus objetivos, ou se terá

que alterar alguma ideia de sua pesquisa para então conseguir alcançar o objetivo proposto no trabalho.

A seguir apresento as etapas de desenvolvimento da pesquisa, desde a escolha do tema até a construção das dimensões de análise.

4.2. Procedimentos metodológicos

A pesquisa foi desenvolvida a partir da análise de três coleções de livros didáticos aprovados pelo PNLD no Edital de 2014. Cada coleção é composta por quatro livros (um referente a cada ano do Ensino Fundamental II). Decidi pelo estudo de três coleções para ter mais de uma fonte de dados; diferentes maneiras de apresentação de conteúdos matemáticos e também por acreditar que no período referente ao mestrado seria possível analisar somente três das dez coleções aprovadas no referido edital.

Tendo delimitado quantas coleções comporiam os dados dessa pesquisa, a próxima decisão seria sobre o que iríamos analisar nos livros didáticos, já que sabia que trabalharia com os livros didáticos e com a Geometria, mas, não sabia qual seria o foco.

Iniciamos um estudo de um artigo sobre a leitura geométrica dos diagramas e, a partir da leitura desse artigo, optei em desenvolver um trabalho sobre o tema, focando minha pesquisa na leitura geométrica dos diagramas, ou seja, na negociação de significados entre o texto e o entendimento de quem o lê. Essa decisão se deu principalmente por que identifiquei na leitura geométrica um modo de haver a construção do conhecimento geométrico, já que o mesmo é construído no decorrer de tal leitura.

4.2.1. Os livros didáticos

Dentre as dez coleções aprovadas pelo PNLD de 2014, pretendia inicialmente analisar as coleções mais adotadas no país, mas tive acesso somente a três das dez coleções. Dessas coleções, consegui as duas mais utilizadas no país, sendo elas: 1) “Praticando Matemática – Edição Renovada” (EDITORA do BRASIL) e 2)

“Vontade de Saber Matemática” (Editora FTD) e, uma terceira coleção intitulada “Matemática – Ideias e Desafios” (Editora SARAIVA). Assim, devido à dificuldade em ter acesso a todas as coleções aprovadas no edital de 2014, foram essas três coleções que se tornaram meu objeto de análise.

Ao ter clareza sobre quais seriam os livros didáticos desta pesquisa e constatar que, inicialmente, a principal diferença entre eles estava na abordagem metodológica e na disposição dos conteúdos previstos para serem estudados ao longo dos livros, optei por centrar minha pesquisa na construção de uma metodologia de análise pautada na leitura geométrica para conseguir identificar como a Geometria está presente nestes mesmos livros. Para tanto, foquei somente em alguns conteúdos geométricos, uma vez que não seria viável analisar com profundidade todo o conteúdo de Geometria presente em quatro livros de cada uma das três coleções. A seguir esclareço os critérios de seleção de tais conteúdos.

4.2.2. Conteúdos de Geometria

Para selecionar os conteúdos de Geometria, realizei um estudo inicial sobre tais conteúdos em cada obra. Para a realização desse estudo, destaquei os tópicos de Geometria de cada capítulo ou unidade presente em cada livro didático de cada uma das três coleções, e busquei convergências entre eles.

Ao realizar as observações dos tópicos de Geometria, fiz um quadro (quadro 1) com esses tópicos. Neste quadro, os assuntos que coincidiam entre si, nas diferentes coleções, foram coloridos da mesma cor para que eu conseguisse identificar, da forma mais prática possível, os tópicos que aparecem nos diferentes livros de Matemática do Ensino Fundamental II com maior frequência.

Quadro 1 – Distribuição dos conteúdos de Geometria nos livros analisados.

Livro	Coleções analisadas e tópicos presentes em cada uma delas.		
	Matemática – Ideias e Desafios	Praticando Matemática – Edição Renovada	Vontade de Saber Matemática
6º ano	11 un. ao todo; 4 un. de Geometria: Figuras geométricas espaciais e planas; Formas geométricas planas; Polígonos; Áreas	14 un. ao todo; 4 un. de Geometria: Observando formas; Ângulos; Polígonos e circunferências; Medidas.	14 cap. ao todo; 4 cap. de Geometria: Formas geométricas espaciais; Ângulos e retas; Polígonos, formas circulares e simetria;

	e volumes.		Medidas de superfície.
7º ano	10 un. ao todo; 2 un. de Geometria: Ângulos, circunferências e círculos; Ângulos, polígonos e propriedades.	11 un. ao todo; 3 un. de Geometria: Sólidos geométricos; Áreas e volumes; Ângulos e triângulos.	12 cap. ao todo; 4 cap. de Geometria: Formas geométricas espaciais; Ângulos; Polígonos; Medidas de Volume.
8º ano	11 un. ao todo; 5 un. de Geometria: Geometria, medidas e números; Simetria, movimentos e padrões em Geometria; Retas coplanares e ângulos; Polígonos e propriedades; Triângulos e quadriláteros.	14 un. ao todo; 5 un. de Geometria: Retas e ângulos; Triângulos; Triângulos – congruência e pontos notáveis; Quadriláteros e outros polígonos; Circunferência e círculo.	13 cap. ao todo; 6 cap. de Geometria: Ângulos; Polígonos; Triângulos; Quadriláteros; Medindo superfícies; Formas circulares.
9º ano	10 un. ao todo; 4 un. de Geometria: Tales e proporcionalidade; Semelhança e proporcionalidade; Semelhança e medidas; Circunferências e círculos.	10 un. ao todo; 3 un. de Geometria: Teorema de Tales e semelhança de triângulos; Relações métricas nos triângulos; Círculo e cilindro.	10 cap. ao todo; 4 cap. de Geometria: Simetria de rotação, translação e reflexão; Teorema de Tales; semelhança de figuras geométricas; Triângulo retângulo; Circunferência.

Fonte: Elaborado pela autora

De acordo com os estudos iniciais dos conteúdos de Geometria e com a organização dos mesmos (quadro 1), foi possível identificar que os conteúdos que aparecem com maior frequência durante o Ensino Fundamental II são os que envolvem de alguma maneira o estudo dos polígonos (colorido de lilás), poliedros (amarelo) e os que se relacionam ao estudo dos ângulos (verde). Dessa maneira, esses foram os conteúdos selecionados nos livros didáticos para compor meus dados.

Inicialmente pensei em como poderia ser a forma de registro, descrita por Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009) como sendo a segunda fase da análise documental. Optei por tirar cópias dos conteúdos já selecionados e então separá-los de acordo com algumas características comuns, por exemplo, de acordo com a forma que as imagens apareciam no texto, ou seja, introduzindo um conceito; exemplificando ou então definindo tal conceito. Algumas outras separações foram relacionadas às marcações de ângulos e lados congruentes, e, também, relacionadas à empregabilidade de um mesmo diagrama ao longo das coleções.

Essas separações iniciais nortearam a estruturação/elaboração das dimensões de análise.

4.2.3. *Dimensões de análise e estudo dos conteúdos*

Ao ler um artigo de Dietiker e Brakoniecki (2014) me interessei pelo tema e, baseada inicialmente nesse artigo, surgiram algumas ideias de como desenvolver a análise de dados para minha pesquisa. A partir dessas ideias comecei a pensar, então, em possíveis dimensões de leitura geométrica para se tornarem minhas dimensões de análise.

As possíveis dimensões de análise foram baseadas em algumas das oito dimensões de leitura geométrica utilizadas por Dietiker e Brakoniecki (2014). Vale observar que elas já foram apresentadas no capítulo de teoria.

Inicialmente, pensei em utilizar diversas dimensões de leitura geométrica como minhas dimensões de análise, sendo elas: O signo dos diagramas, ou seja, a forma como esses diagramas estão presentes no texto e como são entendidos pelo leitor; O diagrama inserido em um contexto; Convenções e marcações, ou seja, as marcações existentes nos diagramas para indicar algo em comum; Aceitação ou rejeição das informações que esses diagramas traziam; Conceito topológico e métrico; Representações mentais. Mas, ao voltar aos conteúdos de Geometria selecionados nos livros didáticos, percebi que não teria condições de analisar todas as dimensões de leitura geométrica que pretendia, já que a análise das dimensões de leitura geométrica não é algo apenas descritivo, mas sim algo que demanda uma preocupação com a exposição do que é compreendido e uma profundidade na análise, e, no tempo referente ao Mestrado, tal profundidade não seria possível com todas as dimensões, mas sim somente com algumas delas. Devido a isso, decidi então reduzir minha análise a três dimensões de leitura geométrica.

Assim sendo, voltei ao material que iria servir de base para a composição dos dados (cópias dos livros) e agrupei-os de maneira a tentar identificar as minhas dimensões de análise. Ao realizar esse procedimento, identifiquei que duas características marcantes eram relacionadas aos signos e às marcações existentes nos diagramas (relacionado às propriedades métricas e topológicas dos mesmos), portanto, essas seriam duas dimensões de análise. Para compor a terceira

dimensão de análise optei pela parte que envolve as representações mentais dos diagramas e a abstração, já que essa é uma parte um pouco complexa do ensino de Geometria pois, como professora, percebo a dificuldade que os alunos apresentam para realizar tais representações ou entender a parte referente a abstração.

A primeira dimensão de análise se relaciona aos signos; a segunda às propriedades métricas e topológicas das figuras e a terceira às representações mentais. Essas três dimensões de análise nortearam a leitura geométrica dos diagramas.

Na primeira dimensão de análise, os diagramas foram analisados considerando como foram empregados no texto. Para isso há uma subdivisão como sendo: ícone (quando é apenas a representação da figura), símbolo (quando o digrama carrega além da imagem, suas propriedades e conceitos) e por último, indicadores (quando o diagrama serve para relacionar objetos da vida das pessoas).

Na segunda dimensão de análise, os diagramas foram estudados de acordo com suas propriedades métricas e topológicas. Essa dimensão de análise, em especial, busca identificar se existem marcações específicas para tais propriedades nos diagramas, e se as mesmas estão presentes ao longo de todos os livros das coleções, além de analisar se essas marcações se fazem necessárias sempre.

A última dimensão de análise se refere às representações mentais, ou seja, as representações que os leitores do livro didático precisam construir em determinadas situações. Aqui se encaixam os exercícios e definições que pedem para o aluno pensar em uma figura qualquer com tais características, sendo essas figuras não apresentadas como desenhos, ou seja, somente contendo a parte escrita.

4.2.4. Procedimentos de análise de dados

Para a realização da análise de dados reservei os diagramas que estavam relacionados aos conteúdos da pesquisa, corroborando com Lüdke e André (2008, p. 45) quando enfatizam que “a análise de dados implica, num primeiro momento, a organização de todo o material, dividindo-o em partes, relacionando as partes e tentando identificar nele tendências e padrões relevantes”.

Ao fazer as cópias das páginas referentes aos conteúdos de Geometria, separei-os inicialmente por coleções e depois essa separação foi feita de acordo com os anos. Realizei duas maneiras de separação, conforme dito, para identificar as dimensões de análise e conversar com a teoria utilizada.

Após fazer a separação dos diagramas, fiz a análise de acordo com cada coleção, pois, assim conseguiria falar das três dimensões de análise em cada uma delas. Ao decidir como analisar, fiz um processo semelhante ao de Cury (2007), de modo que peguei as cópias e coloquei-as agrupadas em cima de uma mesa, de acordo com a coleção que as mesmas pertenciam e considerando suas características mais marcantes. Ao terminar de fazer esses agrupamentos, passei para o estudo das dimensões de análise isoladas e depois as entrelacei para realizar a leitura geométrica da coleção.

Vale explicitar que, algumas vezes, os diagramas foram analisados em mais de uma dimensão de análise, fato que se deve aos diferentes aspectos dos diagramas serem olhados em diferentes momentos da análise dos dados, e quando um diagrama se 'encaixava' em mais de uma dimensão de análise, ele foi utilizado novamente. Isso ocorre porque as dimensões de análise não se excluem mutuamente, dando assim a possibilidade para a realização de tal análise.

Após realizar a análise de cada coleção, fiz um apanhado geral no âmbito da dimensão de análise e, então, passei para a última etapa da análise documental, que segundo Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009) é o julgamento das 'categorias' assumidas, ou seja, nessa etapa é necessário entender se a 'categorização' se mostrou útil para alcançar os objetivos da pesquisa ou não. Foi pautada nesse questionamento que, ao terminar a análise isolada das coleções, busquei fazer um estudo multidimensional das três dimensões de análise para, de fato, aprofundar a leitura geométrica dos conteúdos de Geometria presentes nos livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental considerados.

No próximo capítulo faço a apresentação dos dados e a análise dos mesmos.

5. CONSTRUINDO MINHA LEITURA GEOMÉTRICA

Neste capítulo são apresentados os dados que compõem o trabalho como também a análise dos mesmos, de acordo com o referencial teórico escolhido para amparar a pesquisa. Tal processo foi realizado para que seja possível fazer da leitura geométrica dos diagramas uma metodologia de análise dos conteúdos de Geometria presentes em alguns livros didáticos do Ensino Fundamental II.

Antes de iniciar a análise dos dados referentes a cada coleção de livros didáticos que compõem esse trabalho, apresento alguns aspectos gerais das três coleções, com a finalidade de perceber como a Geometria está disposta nas mesmas, ou seja, para identificar se ela continua sendo trazida no final desses livros, como constatado por alguns autores que citei no capítulo 2, ou se está presente ao longo dos mesmos.

As coleções são subdivididas em unidades ou capítulos, sendo essa divisão da seguinte maneira:

- ✓ Matemática – Ideias e Desafios:
6º ano 11- unidades; 7º ano - 10 unidades; 8º ano - 11 unidades e, 9º ano - 10 unidades.
- ✓ Praticando Matemática – Edição Renovada:
6º ano - 14 unidades; 7º ano - 11 unidades; 8º ano - 14 unidades e, 9º ano -10 unidades.
- ✓ Vontade de Saber Matemática:
6º ano 14 - capítulos; 7º ano - 12 capítulos; 8º ano - 13 capítulos e, 9º ano - 10 capítulos.

Os conteúdos geométricos propostos pelos livros são os mesmos, e estão de acordo com os conteúdos previstos para serem ensinados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), mas, são apresentados de diferentes maneiras, como mostra o quadro abaixo.

Quadro 1 - Conteúdos geométricos presentes nos livros analisados.

Nível de Ensino	Coleções analisadas e tópicos presentes em cada uma delas.		
	Matemática – Ideias e Desafios	Praticando Matemática – Edição Renovada	Vontade de Saber Matemática

6º ano	<p>Unidade 2: Formas geométricas espaciais e planas;</p> <p>Unidade 5: Formas geométricas planas;</p> <p>Unidade 7: Polígonos;</p> <p>Unidade 11: Áreas e volumes.</p>	<p>Unidade 8: Observando formas;</p> <p>Unidade 9: Ângulos;</p> <p>Unidade 10: Polígonos e circunferências;</p> <p>Unidade 14: medidas.</p>	<p>Capítulo 1: Formas geométricas espaciais;</p> <p>Capítulo 7: Ângulos e retas;</p> <p>Capítulo 8: Polígonos, formas circulares e simetria;</p> <p>Capítulo 12: Medidas de superfície.</p>
7º ano	<p>Unidade 3: Ângulos, circunferências e círculos;</p> <p>Unidade 6: Ângulos, polígonos e propriedades.</p>	<p>Unidade 7: Sólidos geométricos;</p> <p>Unidade 8: Áreas e volumes;</p> <p>Unidade 11: Ângulos e triângulos.</p>	<p>Capítulo 3: Formas geométricas espaciais;</p> <p>Capítulo 8: Ângulos;</p> <p>Capítulo 9: Polígonos;</p> <p>Capítulo 12: Medidas de Volume.</p>
8º ano	<p>Unidade 1: Geometria, medidas e números;</p> <p>Unidade 5: Simetria, movimentos e padrões em Geometria;</p> <p>Unidade 8: Retas coplanares e ângulos;</p> <p>Unidade 9: Polígonos e propriedades;</p> <p>Unidade 11: Triângulos e quadriláteros.</p>	<p>Unidade 9: Retas e ângulos;</p> <p>Unidade 10: Triângulos;</p> <p>Unidade 11: Triângulos – congruência e pontos notáveis;</p> <p>Unidade 12: Quadriláteros e outros polígonos;</p> <p>Unidade 13: Circunferência e círculo.</p>	<p>Capítulo 1: Ângulos;</p> <p>Capítulo 6: Polígonos;</p> <p>Capítulo 10: Triângulos;</p> <p>Capítulo 11: Quadriláteros;</p> <p>Capítulo 12: Medindo superfícies;</p> <p>Capítulo 13: Formas circulares.</p>
9º ano	<p>Unidade 4: Tales e proporcionalidade;</p> <p>Unidade 5: Semelhança e proporcionalidade;</p> <p>Unidade 6: Semelhança e medidas;</p> <p>Unidade 10: Circunferências e círculos.</p>	<p>Unidade 6: teorema de Tales e semelhança de triângulos;</p> <p>Unidade 7: Relações métricas nos triângulos;</p> <p>Unidade 9: Círculo e cilindro.</p>	<p>Capítulo 4: Simetria de rotação, simetria de translação e simetria de reflexão;</p> <p>Capítulo 6: Teorema de Tales, semelhança de figuras geométricas;</p> <p>Capítulo 7: Triângulo retângulo;</p> <p>Capítulo 9: Circunferência.</p>

Fonte: Elaborado pela autora

A partir da verificação do número de unidades e de capítulos que cada coleção é composta, bem como a distribuição dos conteúdos geométricos nas coleções, não podemos mais afirmar que seja comum que a Geometria esteja sendo apresentada somente no final destes livros didáticos, corroborando os estudos de Kluppel (2012), que apontaram para o fato da Geometria estar presente ao longo dos livros didáticos de Matemática e não mais concentrada somente no final dos mesmos. Assim, podemos inferir, sob o aspecto temporal, que tal disposição não desfavoreça mais o estudo da Geometria, como nos livros que a traziam no final. Mas, por outro lado, também não podemos afirmar que seu estudo seja favorecido pelo fato dela estar disposta ao longo dos livros.

Após expor de maneira geral as três coleções de livros didáticos, me dedico a apresentar cada uma das três dimensões de análise, denominadas como: “tipo de signos”; “marcações existentes nas figuras” e, por último, “representações mentais”, já identificadas no capítulo de metodologia. Para a análise dos dados, vale lembrar que a mesma é pautada no conceito de leitura geométrica dos diagramas.

Essas dimensões de análise têm a finalidade de traçar alguns caminhos que norteiam a leitura geométrica dos livros analisados, uma vez que essa leitura geométrica não é única e é entendida como sendo uma negociação de significados entre o leitor e o texto estudado. Algumas das questões que foram levantadas por Dietiker e Brakoniecki (2014) e que me ajudaram nas discussões são: O que pode ser assumido a partir do diagrama? Quais evidências podem ser ignoradas? Em quais aspectos esse diagrama pode limitar minha visão?

Pensando nos questionamentos acima selecionei alguns exemplos nos livros que me fornecessem os subsídios necessários para ler geometricamente os conteúdos definidos para compor esta pesquisa, e também me ajudassem a entender como tais conteúdos estão presentes nos livros que fazem parte desse trabalho. Realizei a seleção dos exemplos já pensando na construção de minha leitura geométrica.

5.1. Tipos de signos presentes nos livros

Nesta primeira dimensão de análise é abordado o tipo de signo que aparece nos livros conforme destacado, a teoria dos signos apresenta algumas subdivisões, sendo elas: ícone (quando é apenas a representação da figura), símbolo (quando o

digrama carrega além da imagem, suas propriedades e conceitos, possibilitando um entendimento a alguém) e, por último, indicadores (quando o diagrama serve para relacionar objetos presentes na vida das pessoas) (PEIRCE, 1931). Um signo é tudo o que gera um significado para alguém (PEIRCE 1931), mas no caso deste trabalho, nos restringimos aos signos como diagramas, já que nosso interesse está no significado que possa ser construído por meio desses diagramas.

Considerando essa perspectiva, há um fato que chama atenção em todos os livros analisados da coleção 1e da coleção 3, e no livro referente ao 6º ano da coleção 2, que diz respeito ao início dos capítulos e à maneira de apresentar os tópicos que serão neles estudados. Mori e Onaga (2012), Andrini e Vasconcellos (2012a) e Souza e Pataro (2012) optaram por trazer fotos e/ou imagens de paisagens, ou objetos, que tragam ideias do conteúdo que estão relacionadas com o cotidiano, ou seja, que possam ser familiares aos seus leitores. Além disso, essas imagens e/ou fotos podem ajudar o leitor a ter uma ideia do foco do capítulo e do que será trabalhado no mesmo. As figuras 7, 8 e 9 servem para ilustrar essa situação.

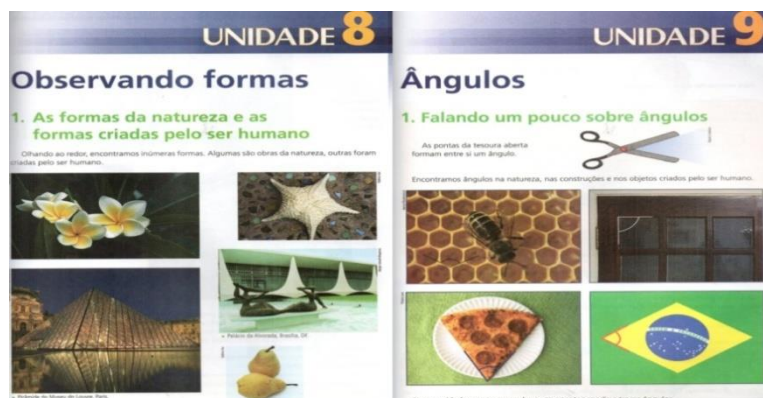
Figura 7- Abertura de unidades da coleção 1



Fonte: Adaptado de Mori e Onaga (2012a, p. 137; 2012c, p. 231; 2012d, p. 131)⁶

⁶Entende-se as letras a), b), c) e d) abaixo das figuras, como sendo correspondência entre elas e os livros, ou seja, a) corresponde ao livro do 6º ano; b) ao livro do 7º ano; c) ao livro do 8º ano; d) ao livro do 9º ano.

Figura 8 - Abertura de unidades no 6º ano – coleção 2



Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2012a, p. 117 - 135)

Figura 9 – Abertura dos capítulos da coleção 3



Fonte: Adaptado de Souza e Pataro(2012c, p. 130; 2012a, p. 10; 2012c, p. 224)

Ao analisar a utilização dos recursos relacionados ao uso de imagens para tentar construir uma associação com o conteúdo a ser estudado, temos parte da construção da primeira dimensão de análise que compõe esse trabalho, pois, ao construir tais associações há o emprego de indicadores, uma vez que os objetos do cotidiano procuram remeter o leitor a pensar em figuras matemáticas que se relacionem ao tema de estudo proposto.

Na coleção 1, analisando as unidades e suas subdivisões em capítulos e, com o decorrer da leitura, temos o uso de imagens como sendo ícones (representação como uma figura), pois assim é uma maneira de realizar uma conexão entre representações planas de objetos reais (indicadores) e as figuras geométricas e, mais fortemente, o emprego das figuras como sendo um símbolo, já

que as mesmas começam a ter características específicas relacionadas a cada uma delas e carregam consigo conceitos relacionados à sua representação. Para exemplificar cada um dos tipos de signos podemos pensar em um desenho de um triângulo, nas faces laterais de uma pirâmide, e na definição de triângulo (todos esses elementos encontrados separadamente no livro do 6º ano), assim como mostra a figura 10.

Figura 10– Ícones, indicadores e símbolos.




Fonte: Adaptado de Mori e Onaga (2012a, p. 31 – 33 - 141)

Ao longo dos capítulos as autoras da coleção 1 realizam diversas transições de ícones para símbolos, pois, ao apresentarem uma definição, tornam viável o entendimento de um ícone como sendo um símbolo matemático, considerando que essas definições façam sentido para o leitor e gerem um entendimento. A figura 11 exemplifica essa mudança do tipo de signo que pode ocorrer ao longo da leitura geométrica.

Figura 11 – Uso de diferentes tipos de signos

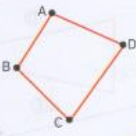
Roberto utilizou os seguintes quadriláteros, todos convexos, na composição que fez.



Um quadrilátero é um polígono com **4 lados** e **4 ângulos**.




Na figura ao lado, temos o quadrilátero ABCD. Ele tem:

- quatro lados — \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} ;
- quatro vértices — A, B, C e D;
- quatro ângulos — $\widehat{A\hat{B}C}$, $\widehat{B\hat{C}D}$, $\widehat{C\hat{D}A}$ e $\widehat{D\hat{A}B}$.






Classificação dos quadriláteros

Os quadriláteros recebem nomes particulares conforme a quantidade de pares de lados paralelos. Na situação a seguir os quadriláteros foram separados em três grupos.

Paralelogramos	Trapézios	Nem paralelogramos nem trapézios
		

Os quadriláteros que têm dois pares de lados paralelos são os **paralelogramos**. Aqueles que têm apenas um par de lados paralelos são os **trapézios**. Note que existem quadriláteros que não são nem paralelogramos nem trapézios.

Os paralelogramos têm nomes especiais que dependem de características que possuem.

Retângulos	Losangos	Quadrado
		
Todos os ângulos são retos.	Todos os lados têm medidas iguais.	Todos os ângulos são retos e todos os lados têm medidas iguais.

Vamos estudar apenas os quadriláteros convexos.

Fonte: Mori e Onaga (2012a, p. 144)

Na figura 11, a transição de ícone para símbolo pode ser evidenciada, já que inicialmente há vários desenhos de quadriláteros sem definições anteriores, e somente depois da apresentação desses desenhos (ícones) é apresentada uma definição para quadrilátero, fazendo com que os mesmos possam ser associados a determinados conceitos e assim possam ser entendidos como símbolos, pois estão repletos de significados, e podem gerar um entendimento para os leitores.

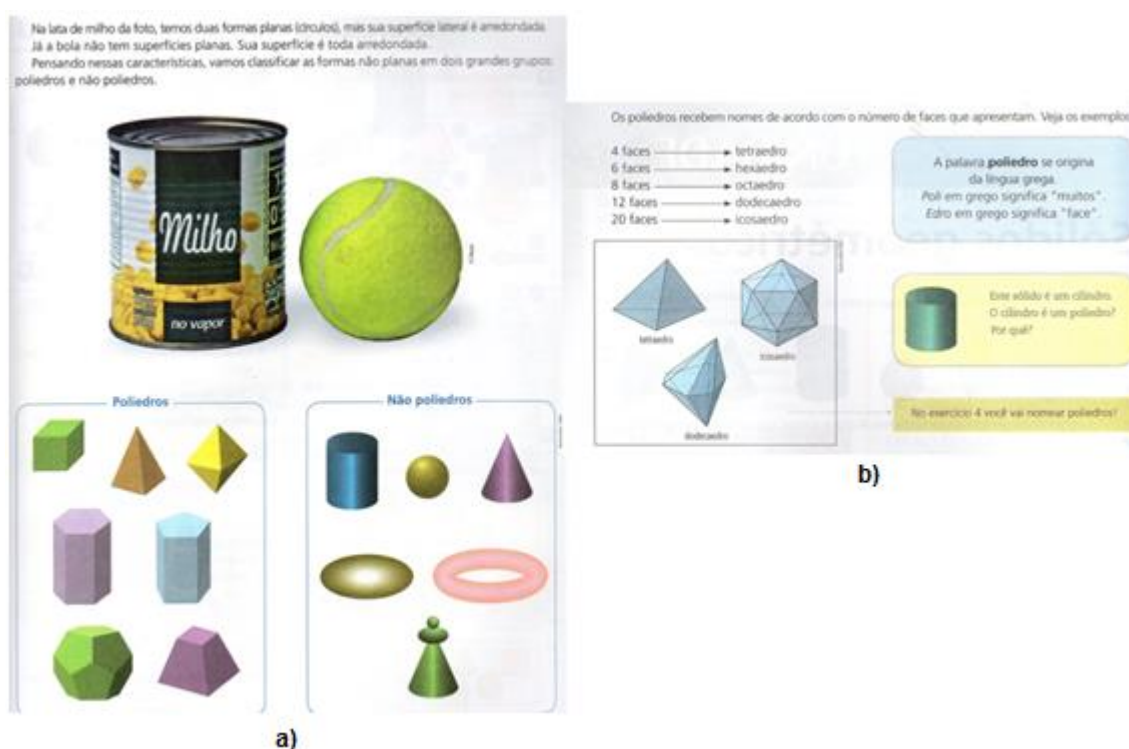
Na coleção 2, os autores, na maioria das vezes, apresentam somente as ideias iniciais dos conteúdos sem as definições. Sendo assim, podemos interpretar que essa disposição sugere que o leitor tente construir suas definições a partir de algumas ideias expostas.

Considerando o fato da coleção 2 não explicitar as definições no início dos capítulos é possível identificar que, principalmente nos tópicos introdutórios dos conteúdos, há somente o emprego de indicadores e de ícones, uma vez que não há uma definição associada a eles. A transição de ícone para símbolo, em alguns

casos, ocorre somente em outras unidades ou até mesmo em outros livros dessa coleção.

Para exemplificar a transição entre os diferentes tipos de signos trago como exemplo a figura 12, da coleção 2. Neste caso, os autores abordam o conteúdo poliedros e não poliedros no livro do 6º ano, e utilizam apenas indicadores e ícones para exemplificar suas diferenças. A formalização desse conceito para símbolo ocorre somente no livro referente ao 7º ano.

Figura 12 – Uso de diferentes tipos de signos



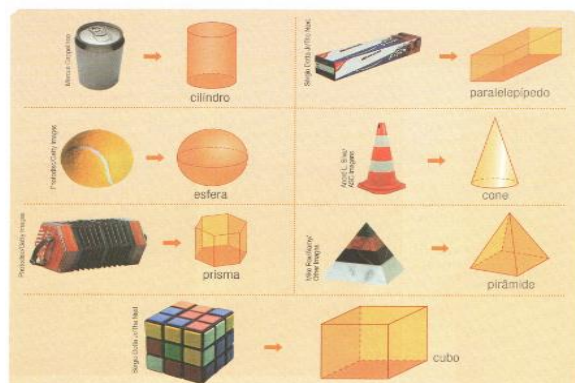
Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2012a, p. 121; 2012b, p.152)

Na coleção 3, a transição do uso de ícones para possíveis símbolos ocorre ao longo dos próprios capítulos, pois, os autores apresentam inicialmente os indicadores e os ícones, e ao aprofundarem o tema trabalhado surgem significados aos ícones e possibilitando um possível entendimento, chegando assim à construção dos símbolos. Como exemplo trago a figura 13.

Figura 13 – Utilização de indicadores, ícones e símbolos – coleção 3

As formas geométricas espaciais

Nas imagens estão representados alguns objetos que se assemelham a formas geométricas espaciais.



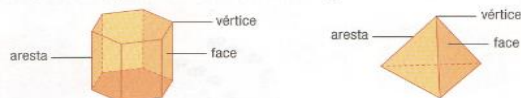
As formas geométricas espaciais apresentadas podem ser classificadas em poliedros ou não poliedros.

Os poliedros são formas geométricas espaciais sólidas que têm sua superfície formada apenas por partes planas.

Poliedros

Elementos de um poliedro

Em um poliedro, podemos destacar os seguintes elementos:

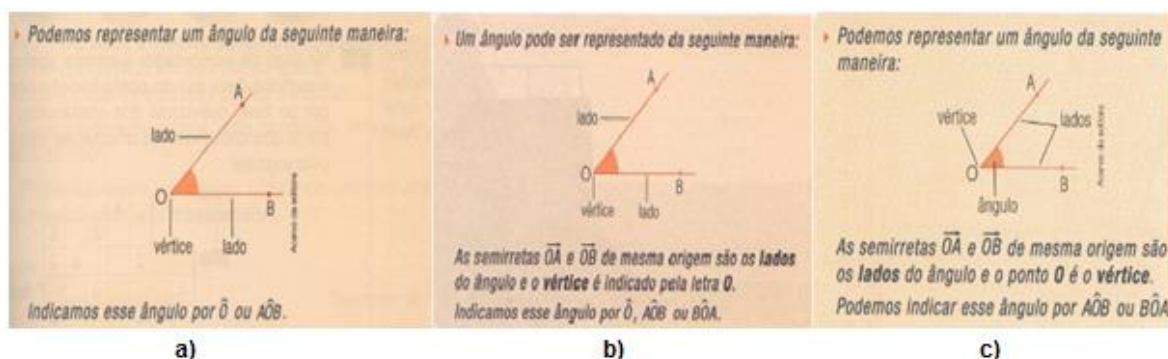


A palavra poliedro tem origem grega em que "poli" significa muitos(as) e "edro", face. Portanto, poliedro significa "muitas faces".

Fonte: Adaptado de Souza e Pataro (2012b, p. 72 - 74)

Ainda analisando a coleção 3, há alguns conceitos que são trabalhados ao longo dos livros dessa coleção, sendo tais conceitos sempre apresentados da mesma maneira que a inicial (figura 14). Podemos pensar que esse fato ocorre para que o aluno que não tenha atingido inicialmente a representação por meio de símbolo possa construí-la quando o conteúdo for abordado novamente, ao longo dos diferentes livros dessa coleção.

Figura 14 – Representação de ângulo.



Fonte: Adaptado de Souza e Pataro (2012a, p. 163; 2012b, p. 206; 2012c, p. 10)

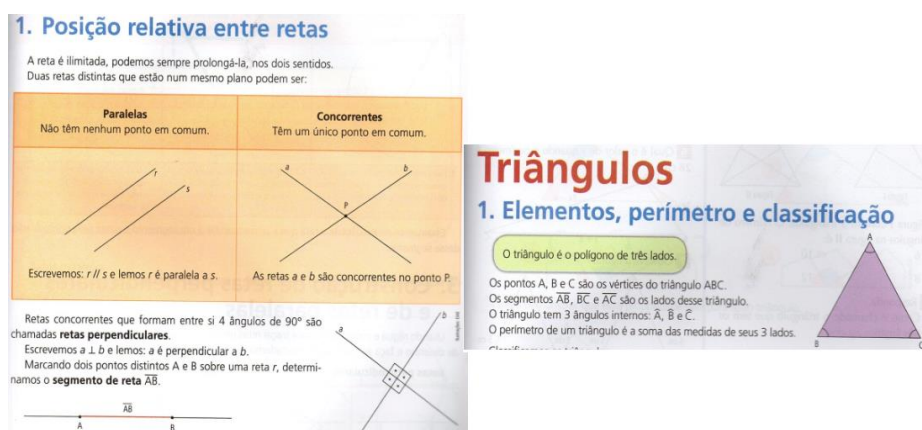
A transição de ícone para símbolo pode ocorrer de maneira natural (com facilidade) quando conseguimos entender que a leitura geométrica não é considerada como se fosse um jogo, onde as regras são sempre as mesmas, e não podem ser modificadas durante o jogo, mas, sim como um conjunto de ideias e

representações das mesmas que abrangem convenções adotadas por quem as estuda, estando essas ideias inseridas em um determinado contexto, ou seja, quando entendemos que a leitura geométrica está em constante construção ou modificação por quem a faz.

O uso de ícones nos anos finais do Ensino Fundamental perde espaço na representação de figuras geométricas, talvez pelo fato dos conteúdos previstos para serem estudados nessa etapa de ensino, em sua maioria, ser um aprofundamento de tópicos anteriores, pois ao lecionar no Ensino Fundamental e Ensino Médio percebo que os conceitos são construídos e aprofundados gradativamente ao longo dos anos escolares. Além dessa visão como professora, ao analisar os conteúdos previstos para serem trabalhados nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio é possível identificar que um conceito mais elaborado depende de outro trabalhado inicialmente de maneira mais superficial e isso faz com que os conteúdos sejam explorados, inicialmente, pelas ideias básicas e, ao haver necessidade, essas ideias vão sendo aprofundadas ao longo dos anos, retomando o que já havia sido estudado previamente.

Nos livros dos anos finais do Ensino Fundamental da coleção 2, os símbolos são apresentados sem a utilização prévia de ícones ou de indicadores nas unidades e capítulos, uma vez que esses ícones e indicadores já haviam sido estudados em livros dos anos anteriores. Um exemplo dessa prática é ilustrado pela figura 15, em que não há nenhum ícone ou indicador utilizado para introduzir o conceito de retas paralelas e perpendiculares, e nem de triângulos, pois esses conteúdos já foram previamente estudados em anos anteriores.

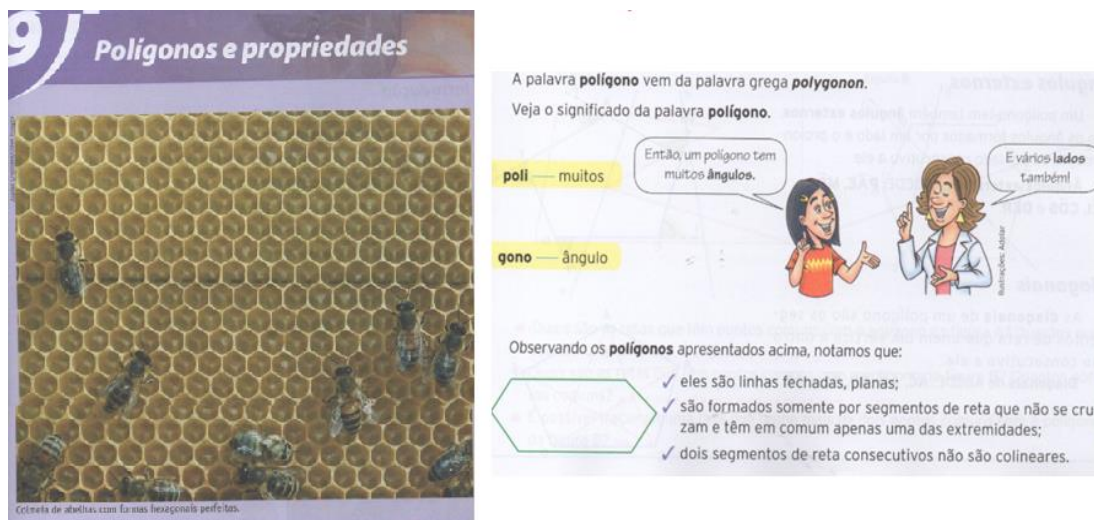
Figura 15 - Uso de símbolos nos anos finais do Ensino Fundamental



Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconellos (2012c, p. 163 - 181)

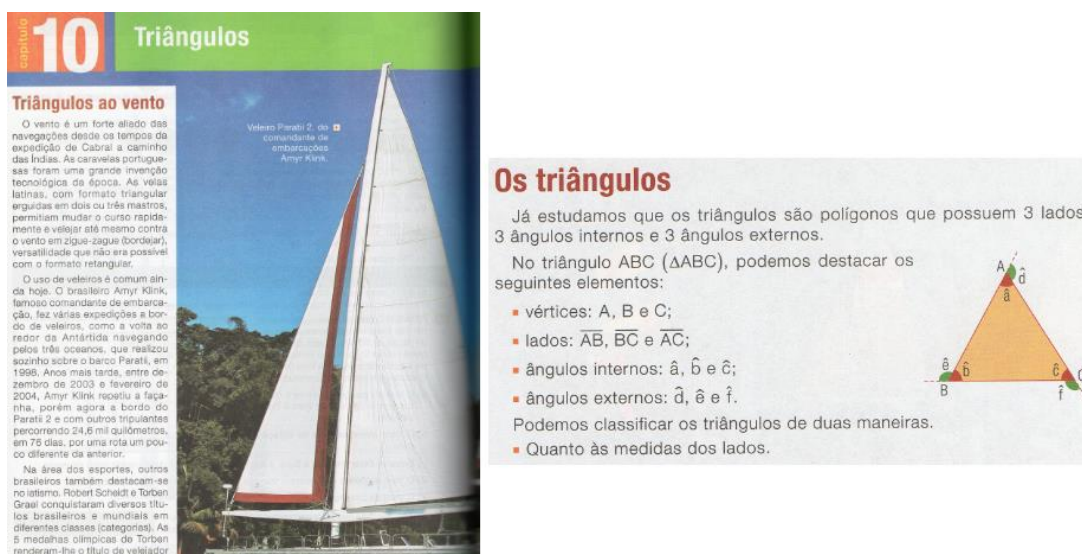
Nos livros dos anos finais do Ensino Fundamental da coleção 1 e da coleção 3, os conteúdos também são aprofundados gradativamente, mas, os autores dessas duas coleções continuam apresentando no início dos capítulos os indicadores, talvez para conseguirem relacionar a Geometria ao cotidiano dos alunos, mas logo depois já introduzem os símbolos, como mostram as figuras 16 e 17.

Figura 16 - Uso de indicadores e símbolos



Fonte: Adaptado de Mori e Onaga (2012c, p. 231 - 233)

Figura 17 – Indicadores e símbolos – coleção 3



Fonte: Adaptado de Souza e Pataro (2012c, p. 224 - 226)

Ao fazer uso somente de indicadores e símbolos nos anos finais do Ensino Fundamental, esse fato torna-se coerente ao que Dietiker e Brakoniecki (2014)

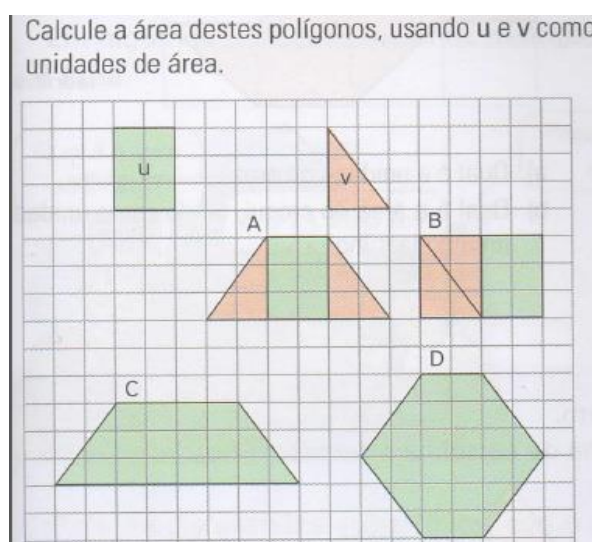
discutem em sua pesquisa, em que consideram que a questão visual se torna mais necessária quando os estudantes são mais novos, se comparado com os estudantes mais velhos. Esse fato também pôde ser observado nos livros que compõem minha pesquisa, já que as figuras do tipo ícone vão ‘perdendo espaço’ nos livros ao longo dos anos escolares, sendo representadas em sua maioria através de símbolos, ou então somente em palavras.

Ressalto que, mesmo que haja alunos nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio que necessitem da parte visual das figuras, os autores dos livros, de modo geral, assumem que todos os estudantes estejam no mesmo nível de aprendizado e é possível que seja devido a isso que as figuras vão deixando de ser utilizadas nos livros dos estudantes mais velhos.

Outro argumento utilizado para tentar entender o ‘desaparecimento’ de figuras nos livros referentes aos estudantes mais velhos se deve ao fato de que é esperado que os estudantes ‘mudem’ seu tipo de leitura e consigam chegar até o entendimento dos símbolos, devido a isto pode ser utilizada a transição direta de indicador para símbolo (quando ocorre).

Ainda com relação ao tipo de signo presente nos livros analisados, é interessante olhar para as atividades propostas que envolvem áreas de polígonos (figura 18).

Figura 18 - Exercício proposto sobre área de polígonos.



Fonte: Mori e Onaga (2012a, p. 261)

Analisando o exercício proposto e a figura 18 é possível notar certa incoerência com a definição apresentada sobre polígonos e sua representação, pois, inicialmente Mori e Onaga (2012) assumem que os polígonos se constituem apenas do contorno, e usam como ícones e símbolos figuras coerentes a tal definição, mas, ao propor o exercício acima, as autoras assumem a definição de polígono diferente da inicial, uma vez que estes passaram a ser considerados como uma região, de modo que seja possível solicitar o cálculo da sua área. Destaco que é preciso ter atenção à coerência entre a definição assumida e a forma de propor os exercícios.

Quando é considerado o contorno, não faz sentido pedir o cálculo da “área do polígono”, já que para termos área é necessário existir uma superfície, e como não há superfície, não pode haver área. Assim, deve ser solicitado o cálculo da área da região interna ao polígono, mesmo que já usemos, coloquialmente, a expressão ‘cálculo de área de polígono’ para expressar o cálculo da área da região interna do polígono.

Assim, é preciso pensar quais fatos devem ser considerados para tornar o que assumimos, no exercício, como sendo válido, ou seja, quais evidências podem ser ignoradas, e ainda como as representações podem ajudar ou limitar o entendimento de tal exercício, já que, de acordo com Dietiker e Brakoniecki (2014), a leitura geométrica se desenvolve através de negociações entre o leitor e o texto. Cabe ao leitor entender o que ele pode considerar de cada representação e o que seria relevante para seu entendimento, pois as informações fornecidas pelos diagramas podem ser aceitas ou não, ajudando na formação ou aprofundamento do conceito estudado.

Com os exemplos trazidos até o momento, é possível entender que, para ter uma leitura geométrica dos diagramas, é necessário perceber quais são as características relevantes e quais são as características que podem ser ignoradas naquele momento, ou seja, as características que não prejudicam o entendimento de tal diagrama.

Esta dimensão de análise mostra que, nas coleções analisadas, os diagramas podem ser lidos de diferentes maneiras, pois, espera-se que os leitores modifiquem sua maneira de ler um texto geométrico ao longo dos anos escolares, ou conforme vão associando novos significados a algo que já conheciam.

A leitura depende de quem a faz e como a faz, ou seja, podemos ter diferentes leituras para o mesmo diagrama, pois, cada leitor pode focar em uma

característica que julgue relevante no mesmo, já que a leitura geométrica é uma negociação de significados, e essa negociação pode ser diferente de leitor para leitor, produzindo assim distintos entendimentos de tal diagrama. Mesmo que esses entendimentos ocorreram de maneira errônea ou diversa, tal diagrama continua a ser considerado como sendo um símbolo, ainda que não necessariamente compreendido pelo leitor.

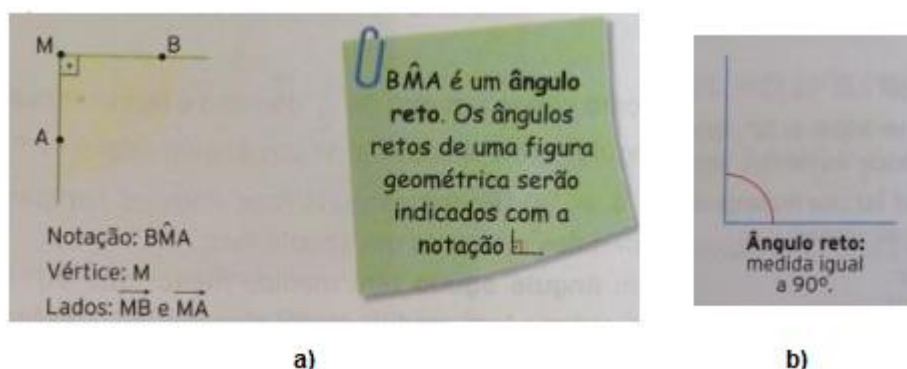
Nesta dimensão de análise, os diagramas apresentados, como exemplos, foram lidos considerando-se apenas o tipo de signo que os mesmos poderiam assumir ao longo do texto. Ressalto que, ao término das análises das diferentes dimensões, apresento uma análise multidimensional de todos os diagramas apresentados (como exemplos), ao longo deste capítulo.

5.2. Propriedades Métricas e Topológicas dos diagramas

Nesta segunda dimensão de análise são abordadas algumas propriedades métricas e topológicas dos diagramas que aparecem nos livros das coleções em estudo. Borges (2005) desenvolveu um trabalho com as propriedades métricas e topológicas dos diagramas, comparando-as com as propriedades qualitativas e quantitativas, ou seja, tudo o que diz respeito à quantidade também é referente à métrica do diagrama (marcações existentes nos diagramas, como por exemplo, as marcações de congruência, marcações específicas para ângulos e outras marcações que sejam referentes às medidas das figuras) e, por outro lado, tudo o que for referente à qualidade é referente à parte topológica desse diagrama (o número de lados, suas interseções, as orientações e outros aspectos relacionados às partes desses objetos).

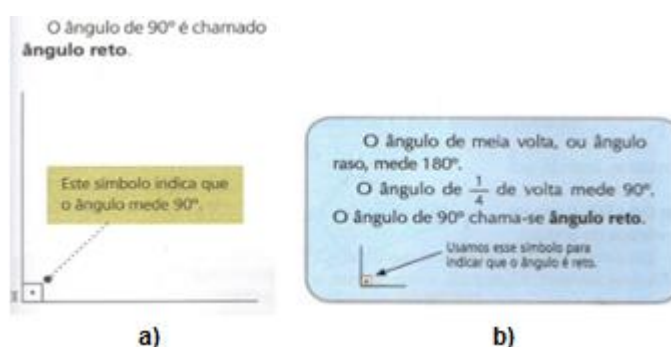
Nas coleções de livros estudados, escolhi alguns diagramas para discutir o uso de propriedades métricas e topológicas. A princípio discuto a parte referente ao uso da marcação correspondente ao ângulo reto, como exemplo, trago as figuras 19, 20 e 21.

Figura 19 – Convenções para o símbolo de ângulo reto



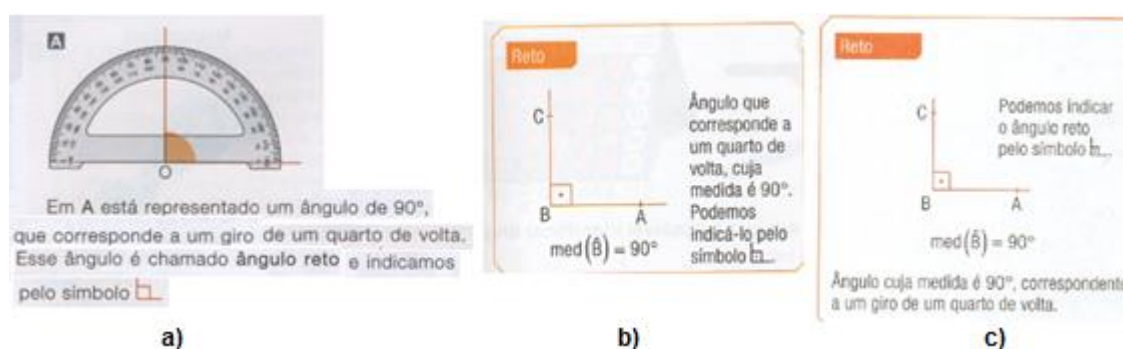
Fonte: Adaptado de Mori e Onaga (2012a, p. 119; 2012b, p. 82)

Figura 20 – Símbolo de ângulo reto



Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2012a, p. 139; 2012b, p.232)

Figura 21 – Marcação de ângulo reto – coleção 3



Fonte: Adaptado de Souza e Pataro (2012a, p.166; 2012b, p. 209; 2012c, p. 11)

Na figura 19, as autoras da coleção 1 convencionam no livro do 6º ano que o ângulo reto teria uma marcação específica, e no livro do 7º ano, ao definir um ângulo reto, as autoras não fazem mais uso dessa marcação específica. Já nas figuras 20 e 21, os autores, ao definirem um ângulo reto, tanto no livro do 6º ano quanto no livro do 7º ano, nas duas coleções, e no livro do 8º ano, da coleção 3, convencionam que

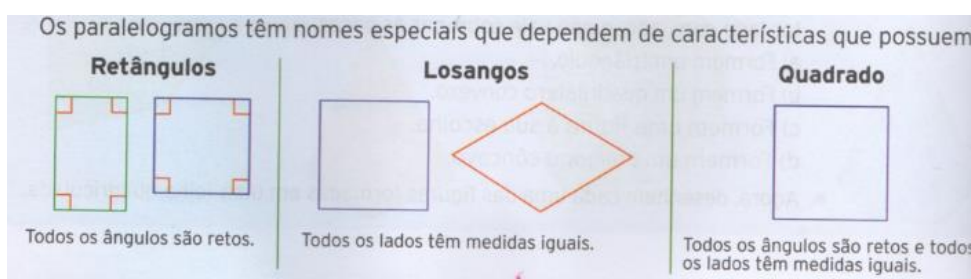
o ângulo reto apresenta uma marcação específica, como as marcações mostradas nas figuras anteriores.

Ao convencionar uma marcação específica para um ente matemático, como o citado acima, tal convenção pode atrapalhar o entendimento dos alunos, pois, é possível que quando tal marcação não seja utilizada, o aluno não reconheça esse ente (ou o objeto matemático), ou então, pode fazer com que as características visuais não influenciem demasiadamente a leitura geométrica e, conseqüentemente, a compreensão do conceito. Tal fato, devido às marcações de ângulo reto poderem ser substituídas por informações explícitas nos dados do problema ou em definições e, além disso, o aluno não tem contato sempre com a mesma representação das figuras geométricas (ou elementos geométricos), ajudando assim na construção de diferentes representações, sejam elas representações escritas ou mentais, mas, desde que essas diferentes representações sejam coerentes entre si.

Pensando nas características visuais de uma figura, e quando as mesmas são aceitas como informações, Santos (2014) diz que essas características visuais são válidas principalmente para a compreensão, interpretação e formulação de hipóteses matemáticas, podendo gerar futuros conhecimentos.

A utilização da marcação do ângulo reto aparece e desaparece no decorrer de todos os livros, inclusive no livro do 6º ano da coleção 1, como mostra a figura 22.

Figura 22 - Ângulo reto.



Fonte: Mori e Onaga (2012a, p. 147)

Na figura anterior há uma contradição quanto ao uso da marcação referente ao ângulo reto, pois como as autoras no livro do 6º ano definem inicialmente um ângulo reto como sempre apresentando a marcação específica, e definem os retângulos como tendo os quatro ângulos retos (com a marcação dos mesmos), mas não usam a mesma marcação para definir um quadrado, isso pode causar incerteza quanto ao conteúdo de determinada figura, já que, segundo Dietiker e Brakoniecki

(2014), os estudantes mais novos se amparam mais nas marcações das figuras do que em suas medidas propriamente ditas. De maneira que, a falta da marcação de ângulos retos nos quadrados (figura 22) pode fazer com que os alunos, em especial os mais jovens, não consigam perceber que o quadrado tem ângulos retos, sendo também um retângulo.

Na coleção 2, os autores deixam, no livro do 6º ano, a definição de retângulos e quadrados sem a marcação do ângulo reto, mesmo que a marcação tenha sido convencionalmente inicialmente, e fazem uso da marcação de ângulo reto em apenas alguns dos exercícios do capítulo, e também somente em alguns casos, como por exemplo, o exercício 21 da figura 23.

Figura 23 – Definição de retângulos no 6º ano.

Os paralelogramos que apresentam todos os ângulos retos são chamados de **retângulos**.

Então retângulos são paralelogramos que têm uma característica especial: ter 4 ângulos de 90° .

Os paralelogramos que apresentam todos os lados com a mesma medida são chamados de **losangos**.

E os losangos também são paralelogramos especiais!

Por fim, temos os **quadrados**, que são paralelogramos que apresentam todos os ângulos retos e todos os lados com mesma medida.

Final! O quadrado é um paralelogramo, é um retângulo e é um losango também!

17 Todos estes quadrados têm as mesmas dimensões:

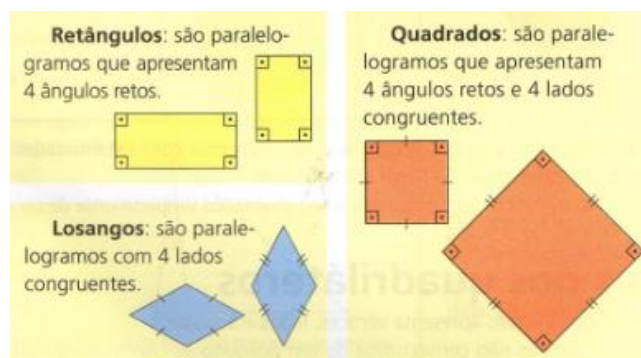
Juntando os quatro quadrados é possível formar figuras com 20 cm de perímetro. Descubra pelo menos duas dessas figuras e faça o desenho delas em seu caderno.

21 Qual é o perímetro do polígono da figura?

Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2012a, p. 156 - 161)

Ainda analisando o uso do símbolo do ângulo reto, os autores da coleção 2 optaram por trazer a marcação na definição de retângulos e quadrados apenas no livro do 8º ano, como apontado na figura 24.

Figura 24 - Definição de retângulos no 8º ano.



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012c, p. 212)

Os exemplos do uso da marcação de ângulo reto, abordados nas figuras 23 e 24, podem ser discutidos como sendo relevantes ou não, pois, nos resultados da pesquisa de Dietiker e Brakonieccki (2014), os estudantes mais novos consideram mais as marcações realizadas nas figuras do que os estudantes mais velhos. Assim, as definições com as marcações de ângulo reto poderiam estar presentes logo no início do Ensino Fundamental II, uma vez que foram pré-definidas, e que esperamos que sejam realizadas as associações entre as marcações e a ideia que a mesma representa, podendo então ser retiradas no decorrer dos anos escolares e serem substituídas por palavras (no texto) que indiquem a existência do ângulo reto. Ainda pensando na não utilização de marcações específicas, entendo que se considerarmos que não houve a compreensão sobre o que é um ângulo reto nos anos iniciais, então a marcação de ângulo reto nos diagramas não faz sentido para o aluno, já que o mesmo não construiu um significado para tal marcação, e dessa maneira torna-se desnecessária sua utilização.

Analisando a coleção 3, quanto ao uso da marcação de ângulo reto, os autores utilizam tal marcação para identificá-los sempre que necessário, ou seja, fazem uso dessa marcação quando tratam de assuntos que abordam os retângulos, os quadrados, as retas perpendiculares e assim por diante. Como exemplo, trago a figura 25.

Figura 25 – Uso de marcação de ângulo reto**Classificação dos paralelogramos**

Os paralelogramos podem ser classificados de acordo com a medida dos lados e dos ângulos internos.



Fonte: Adaptado de Souza e Pataro (2012a, p.188)

Ao perceber a utilização do símbolo do ângulo reto em algumas definições e a mesma não existir em outras, podemos levantar algumas questões, como por exemplo: se a definição apresenta informação sobre ângulo reto, o fato de haver ou não o uso da marcação referente a este ângulo pode ser ignorado? Esse elemento serve para apontar especificidades de uma determinada figura ou serve para falar de uma classe geral de figuras geométricas?

Para tentar responder aos questionamentos levantados acima, vamos pensar inicialmente na primeira pergunta e relacioná-la com a ideia de negociação de significados, pois, assim a argumentação é pautada nessa negociação entre o leitor e o texto. As marcações específicas podem não ser usadas, principalmente nos anos finais do Ensino Fundamental, se a definição estiver clara, ou seja, se ela traz todos os detalhes como, por exemplo, congruência entre lados ou ângulos, assim como medidas dos ângulos ou lados. Vale ressaltar que, se o aluno estiver apropriando-se dos conteúdos como se espera ao ler a definição, ela pode ser entendida. Além da negociação de significados, "Nós conjecturamos que é esperado que os estudantes alterem as maneiras de interpretar os diagramas geométricos (ou seja, o desenvolvimento de novas estratégias de leitura) à medida que progridem ao longo do ensino" (DIETIKER; BRAKONIECKI, 2014, p. 2, tradução nossa). As mudanças na leitura ocorrem principalmente pelo fato de haver uma ideia nos livros, que conteúdos apresentados anteriormente já foram apreendidos pelo aluno, portanto, pode se considerar desnecessário retomar algumas representações dos diagramas, como por exemplo, as marcações específicas em algumas figuras.

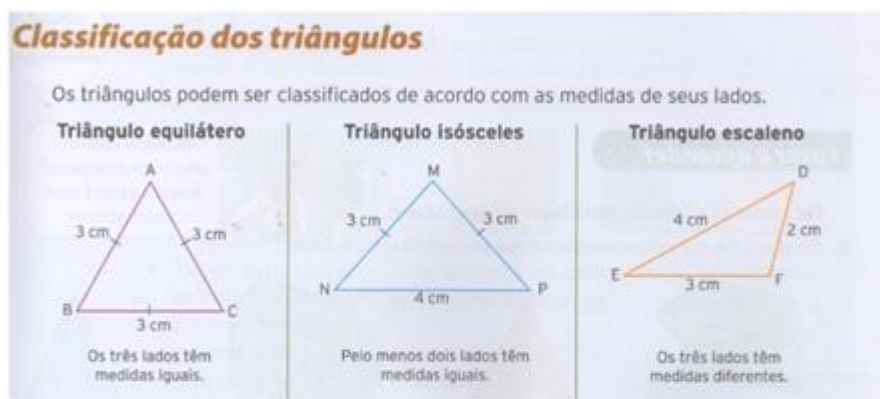
Dessa maneira, pautada na negociação de significados e no resultado da pesquisa supracitada, considero que se já existe a informação sobre determinada propriedade não há a necessidade de ter marcações específicas nas figuras e vice-versa.

Quanto à segunda pergunta, entendo que ao ler geometricamente os diagramas, os elementos relacionados às marcações específicas servem tanto para demonstrar especificidades das figuras, quanto para falar de uma classe geral, pois, podemos pensar que ao utilizarmos o símbolo do ângulo reto em pelo menos dois ângulos opostos de um quadrilátero, estamos nos referindo aos retângulos, mas quando recorremos às marcações de congruências de duas figuras, como por exemplo, dois triângulos (podemos pensar em qualquer caso de congruência dos triângulos), estamos mostrando suas especificidades, ou seja, a congruência dos mesmos, e dessa maneira não estamos nos referindo a todos os triângulos existentes.

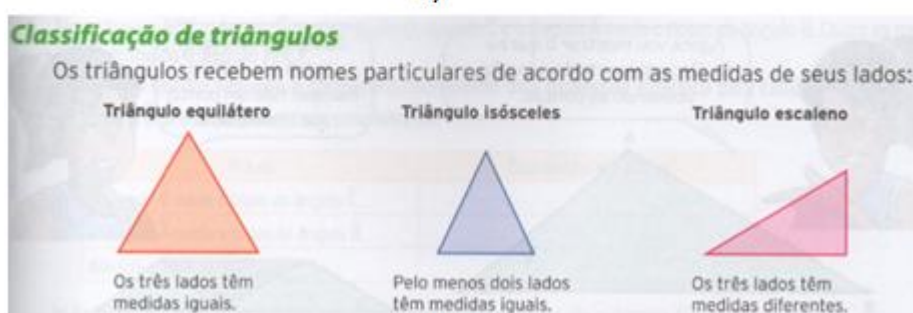
Outra parte das coleções que pode ser destacada devido ao uso de propriedades métricas e topológicas é referente à classificação dos triângulos, pois, esse mesmo tópico é estudado em diferentes anos de ensino.

Nos livros de 6º ano e 7º ano da coleção 1, há um mesmo tópico a ser estudado, com o mesmo nome: “Classificação de triângulos”, e eles apresentam a mesma definição com imagens diferentes, sendo que no livro do 6º ano o foco está nas medidas e marcações dos lados e, no livro do 7º ano, o foco está na parte topológica da imagem ou, segundo Borges (2005), na parte qualitativa de tal imagem. Tal diferenciação pode ser vista na figura 25 e nos ajuda a entender que com diagramas diferentes, o enfoque é diferente, mudando assim o foco da leitura geométrica.

Figura 25 - Classificação de triângulos



a)



b)

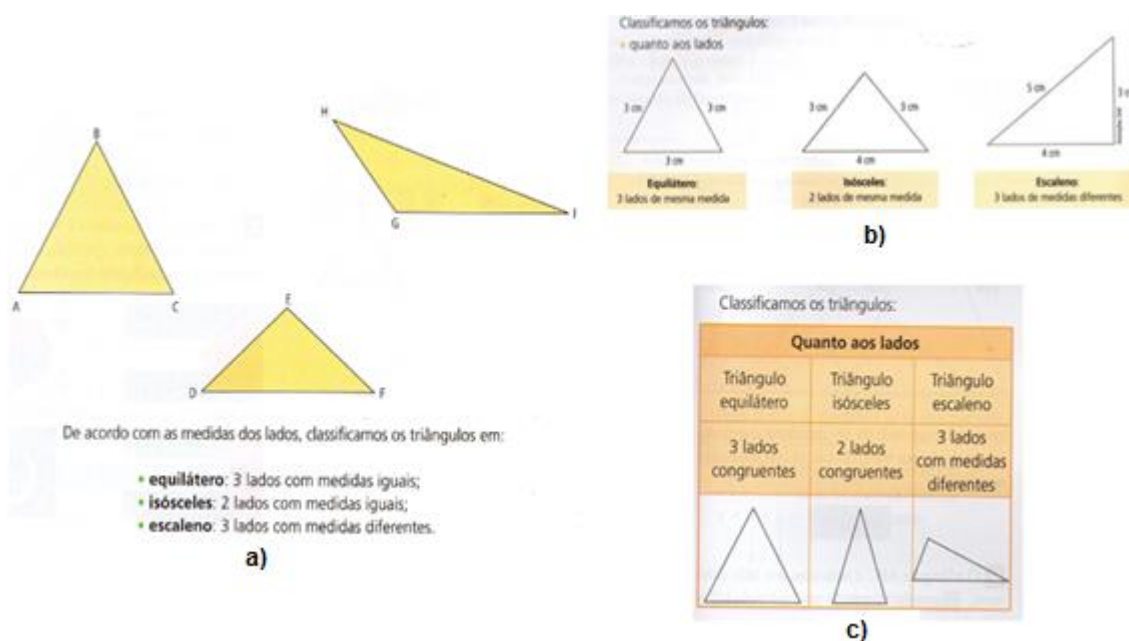
Fonte: Adaptado de Mori e Onaga (2012a, p. 141; 2012b, p. 183)

Diferentemente da coleção 1, ao analisar o conteúdo referente aos triângulos, na coleção 2, temos que a definição de triângulos aparece nos livros referentes ao 6º ano, 7º ano e 8º ano. São definições equivalentes em todos os livros, pois, a única troca que ocorre é referente à mudança da expressão “lados com medidas iguais” pela expressão “lados congruentes”. Essa modificação da expressão ocorre somente no livro referente ao 8º ano, talvez, pelo fato dos alunos serem mais velhos e também por se iniciarem, nesse ano do Ensino Fundamental, os estudos sobre congruências. Além da modificação da expressão utilizada, os autores fazem uso de diferentes imagens para exemplificar as definições, sendo que as imagens utilizadas no 6º ano e 8º ano não apresentam marcações nas figuras para identificar medidas ou igualdade de lados, tendo assim seu enfoque nas propriedades topológicas dos triângulos, já no livro do 7º ano o foco está nas medidas colocadas nos lados para representá-los, chamando a atenção do leitor para as propriedades métricas dos triângulos, como na figura 26.

Pensando nos resultados apontados por Dietikere Brakoniecki (2014), seria interessante ter a marcação de medidas no livro do 6º ano, para então retirá-la nos

anos seguintes, deixando as propriedades topológicas evidentes no decorrer dos anos de estudo.

Figura 26 – Estudo dos triângulos

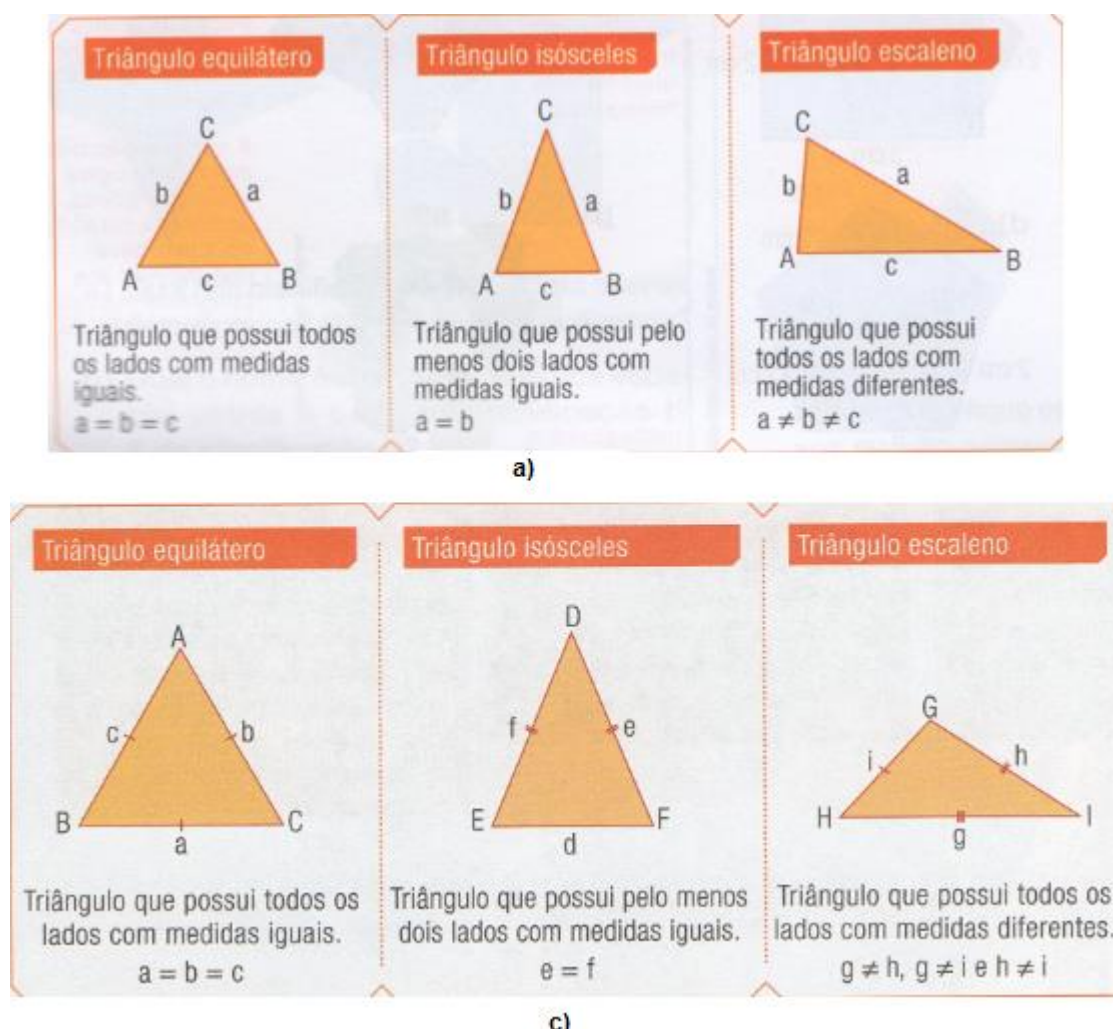


Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2012a, p. 154; 2012b, p. 250; 2012c, p. 181)

Estudando os tópicos referentes aos triângulos na coleção 3, percebemos que eles são programados para serem estudados nos livros do 6º ano e 8º ano. A diferença dos conteúdos está basicamente na maneira de apresentar os desenhos dos triângulos, já que no livro do 6º ano a classificação dos triângulos, quanto aos lados, é feita somente com o uso de imagens sem marcações alguma, e no livro do 8º ano a classificação desses triângulos, também quanto aos lados, é utilizada a marcação de congruência dos lados com medida iguais, mas, sem a utilização da palavra congruente, o que deixa a parte escrita das definições sem sofrer mudança alguma de um livro para outro.

No livro do 8º ano há maior preocupação com a parte métrica dos triângulos (figura 27), talvez, pelo fato de tentar introduzir o conceito de congruência de figuras ainda nesse mesmo capítulo.

Figura 27 – Classificação de triângulos – coleção 3



Fonte: Adaptado de Souza e Pataro (2012a, p.184; 2012c, p. 226)

Analisando o mesmo tópico nos três livros temos diferentes abordagens para classificar os triângulos, e isso gera alguns questionamentos.

Inicialmente, podemos pensar que o fato das duas primeiras coleções trazerem como exemplos triângulos com medidas numéricas (figuras 25 e 26), nos passa a ideia da utilização de propriedades métricas, as quais estamos mais acostumados ou mais familiarizados. Estes exemplos numéricos também podem gerar questões sobre a validação da generalização de conceitos por meio de medidas numéricas, ou seja, será que a criança ao ler um diagrama com medidas numéricas irá entender que é apenas um exemplo, ou irá entender que somente aquela figura representa o conceito apresentado?

Algumas alternativas para a generalização no caso da classificação dos triângulos poderiam ser a utilização de letras para indicar qualquer medida (figura

27a), ou então o uso de tracinhos para marcar a congruência entre os lados. Matematicamente, a melhor maneira de generalizar um conceito seria com a utilização de letras no lugar de números, mas será que assim as crianças entenderiam que as letras representam números, ou isso causaria confusão para o aprendizado?

Ao estudar os conteúdos propostos para cada ano do Ensino Fundamental, a fim de encontrar uma possível resposta para os questionamentos levantados anteriormente, nos deparamos com o fato de que a introdução das letras como sendo números ocorre somente no final do 7º ano, e o estudo de congruências e a utilização de marcações específicas para tal são definidas somente no 8º ano.

Dessa maneira, quando são utilizadas medidas nas figuras para exemplificar um determinado conceito, tal exemplificação fica restrita aos números utilizados, mas por outro lado, no 6º ano, os alunos ainda não entendem que as letras assumem o papel de números e ainda não foram apresentados às marcações específicas de congruência (tracinhos).

De acordo com os argumentos anteriores, surge novamente um questionamento sobre qual seria a melhor solução para a generalização de conceitos no 6º ano? Encontrar uma solução ou a resposta para as questões levantadas até o momento não é fácil, mas ‘enxergo’ uma alternativa como sendo a construção de leitura geométrica, pois é esperado que, com ela, a criança consiga ser crítica com relação a vários aspectos do diagrama e assim entenda suas modificações por meio da incorporação de novos conceitos ou elementos matemáticos.

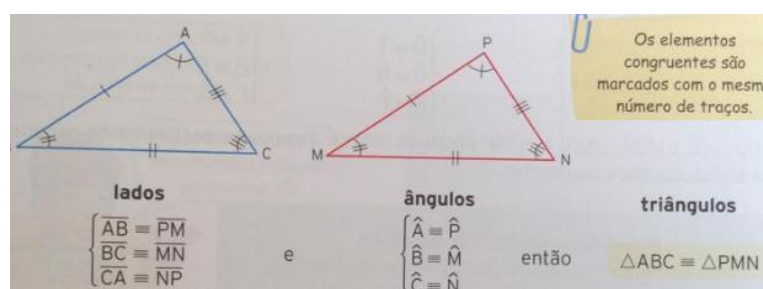
Como último exemplo do uso de propriedades métricas, apresento as marcações referentes à congruência entre os lados das figuras e, mais adiante, especificamente o caso da congruência de triângulos.

Na coleção 1, mais especificamente no livro do 6º ano, as autoras fazem uso de marcações referentes à congruência somente em alguns casos e em outros não. Como exemplo, temos a definição de triângulo isósceles e triângulo equilátero (figura 25), na qual as autoras colocam ‘um risco’ nos lados congruentes, mas, se olharmos para a definição de ‘paralelogramos com nomes especiais’ (figura 22), as marcações de congruência nos lados dos losangos, retângulos e quadrados deixam de ser utilizadas, fazendo com que a percepção de lados congruentes fique apenas

exemplificada pela escrita podendo assim também dificultar o entendimento dos estudantes, especialmente dos mais novos.

As autoras desta coleção iniciam o assunto sobre congruência com os triângulos e colocam marcações nos mesmos para identificar os lados e os ângulos que são congruentes, e definem que os elementos congruentes terão o mesmo número de traços, como mostra a figura 28. A coleção apresenta, todos os casos de congruência exemplificados por triângulos, com as marcações pré-definidas pelas autoras.

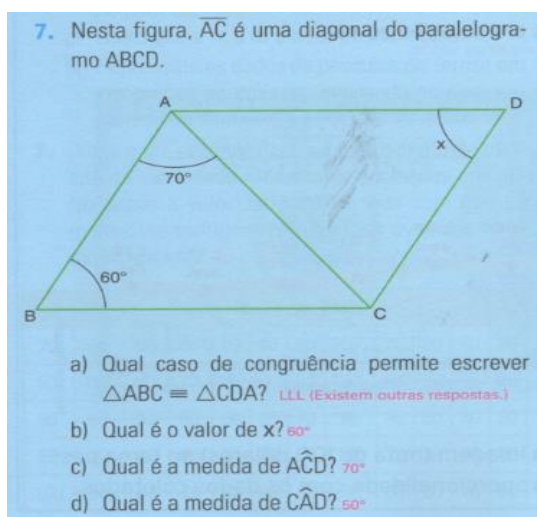
Figura 28 - Marcações utilizadas em casos de congruência



Fonte: Mori e Onaga (2012c, p. 275)

Ao analisar os exercícios correspondentes à congruência de triângulos, as marcações utilizadas nas definições nem sempre continuam existindo, pois são substituídas por números que têm o mesmo 'papel' de tais marcações, como na figura 29.

Figura 29 - Exemplo de exercício sobre congruência de triângulos.



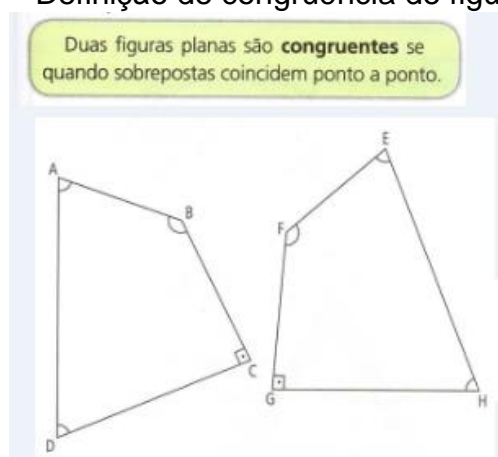
Fonte: Mori e Onaga (2012c, p. 308)

Relacionado às figuras 28 e 29, é possível identificar que o entendimento sobre a congruência de triângulos pode ocorrer tanto pelas marcações utilizadas para tal, quanto pelas medidas colocadas nas figuras ou nos dados do enunciado da questão.

Olhando agora para a coleção 2, percebemos que os autores não utilizam as marcações de congruência para os polígonos sem antes terem definido o que é a congruência e, ao trazerem tal definição, passam a utilizá-la para reforçar a ideia de congruência entre os lados do quadrado e do losango, mas, não a utilizam para reforçar a ideia de que os lados opostos de um retângulo também são congruentes, (figura 24).

A definição de congruência inicia-se com congruência de figuras planas e, para isso, os autores não utilizam as marcações específicas, talvez, pelo fato de ser uma apresentação do tópico a ser estudado, assim como mostra a figura 30. Mas, ao abordarem a congruência de polígonos, as marcações específicas são utilizadas para mostrar a congruência entre lados e ângulos, como ilustrado na figura 31, talvez, pelo fato de haver uma explicitação de sentido na definição utilizada.

Figura 30 – Definição de congruência de figuras planas.



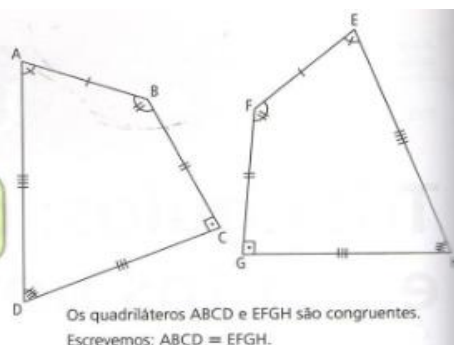
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012c, p. 191)

Figura 31 – Definição de congruência de polígonos.

Por exemplo, ao ângulo A corresponde o ângulo E e vice-versa.

Usaremos "tracinhos" para identificar pares de lados e pares de ângulos correspondentes. Veja na figura ao lado.

Dois polígonos são congruentes quando apresentam lados correspondentes congruentes e ângulos correspondentes congruentes.



Os quadriláteros ABCD e EFGH são congruentes.
Escrevemos: $ABCD = EFGH$.

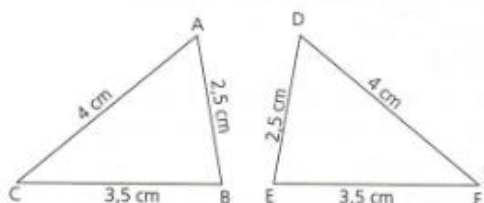
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012c, p. 192)

Os autores da coleção 2, ao tratarem de congruência de triângulos, fazem tal abordagem através de números para indicar as medidas, e não mais com a marcação de congruência, como exemplifica a figura 32.

Figura 32 – Alguns casos de congruência de triângulos.

Dois triângulos que têm os lados correspondentes congruentes são congruentes.

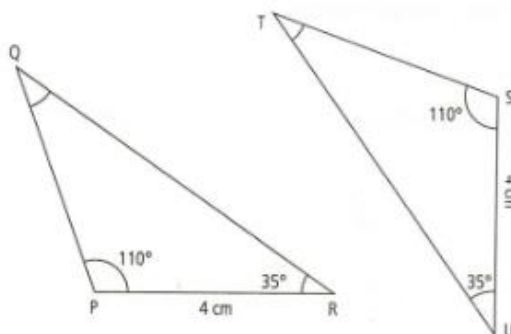
Veja os triângulos ABC e DEF, eles apresentam lados respectivamente congruentes.



Dois triângulos que têm dois ângulos e o lado compreendido entre eles respectivamente congruentes são congruentes.

Nos triângulos PQR e STU, temos:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \hat{S} \\ \hat{R} &= \hat{U} \\ \overline{PR} &= \overline{SU} \end{aligned}$$

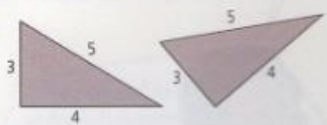



Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2012c, p. 195)

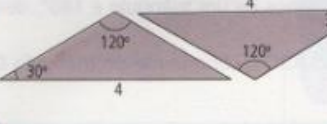
Nos exercícios propostos sobre congruência de triângulos, há abordagens distintas, algumas vezes, utilizando apenas medidas ou então apenas marcações nas figuras, assim como exemplificado na figura 33.


Figura 33 – Exercícios de congruência de triângulos.

2 Observe os pares de triângulos a seguir e anote no caderno os que são congruentes, considerando apenas as indicações dadas.

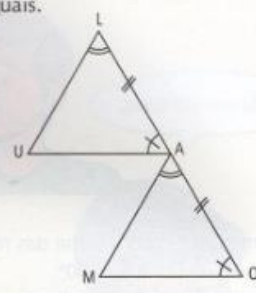
a) 

b) 

c) 

d) 

5 (Saresp) Nos triângulos LUA e AMO os elementos congruentes estão assinalados com marcas iguais.



Sabendo-se que $UA = 10$ cm e $LA = 8$ cm, responda:

a) Quanto mede \overline{AO} ?

b) Quanto mede \overline{MO} ?

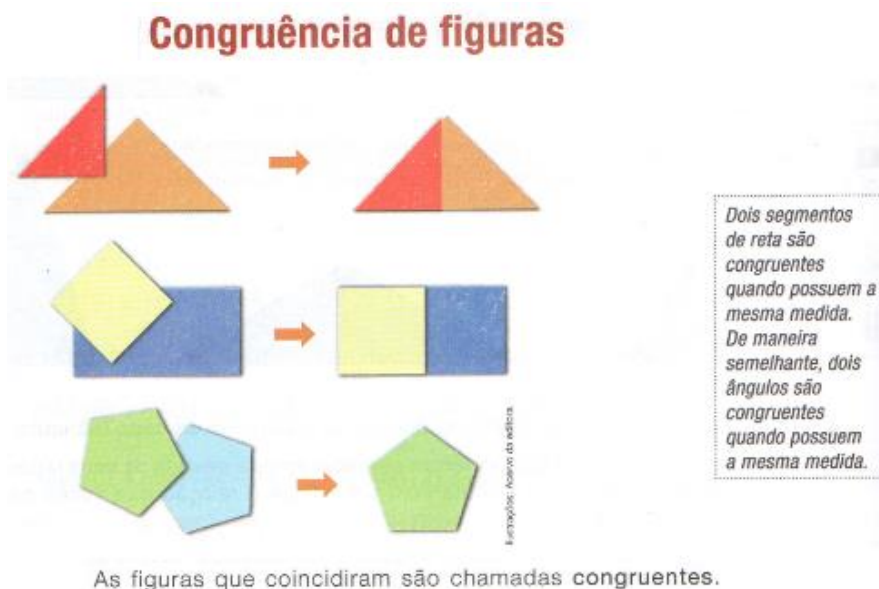
Fonte: Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2012c, p. 198)

Analisando as figuras 32 e 33, podemos perceber que as informações necessárias para resolver os exercícios podem estar no enunciado da questão, quando o mesmo possibilita essas deduções, ou então tais informações são dadas nos próprios desenhos, quando o enunciado não fornece as informações necessárias para a resolução do exercício. Podemos pensar nos dois exemplos anteriores, para ressaltar o papel do diagrama como sendo determinante para a resolução dos exercícios, pois, se ele já faz parte do exercício, sua situação já está representada, mas se não há a utilização dos diagramas, na maioria das vezes, os leitores recorrem a uma representação das informações do enunciado por meio de desenhos, para então passarem para sua resolução e resposta do exercício.

Relacionado ao tema ligado à congruência de figuras, os autores da coleção 3, trazem inicialmente a congruência de figuras, sendo esta apresentada como figuras que se sobrepõem, ou que coincidem em todas as medidas dos segmentos de seus lados. Ao tratar de congruência de figuras, os autores optaram por não trazer uma marcação específica de congruência (figura 34), mas, ao abordarem como novo tópico a congruência de triângulos, eles deixam claro que, para

identificar tais congruências utilizam marcações nos lados ou nos ângulos dos triângulos, e que as marcações iguais representam as partes congruentes de tais triângulos (figura 35).

Figura 34 – Congruência de figuras



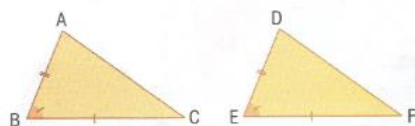
Fonte: Souza e Pataro (2012c, p. 234)

Figura 35 – Congruência de triângulos

Casos de congruência de triângulos

• 1º caso: lado, ângulo e lado (LAL)

Quando dois triângulos têm dois lados e o ângulo formado por esses lados respectivamente congruentes, esses triângulos são congruentes.

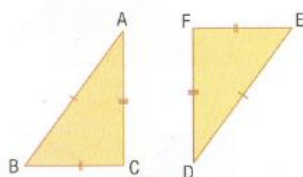


lado: $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$
 ângulo: $\hat{B} \equiv \hat{E}$
 lado: $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$
 $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$

Os lados dos triângulos indicados com o mesmo número de marcações são congruentes. O mesmo vale para os ângulos.

• 2º caso: lado, lado e lado (LLL)

Quando dois triângulos têm os três lados respectivamente congruentes, esses triângulos são congruentes.



lado: $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$
 lado: $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$
 lado: $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$
 $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$

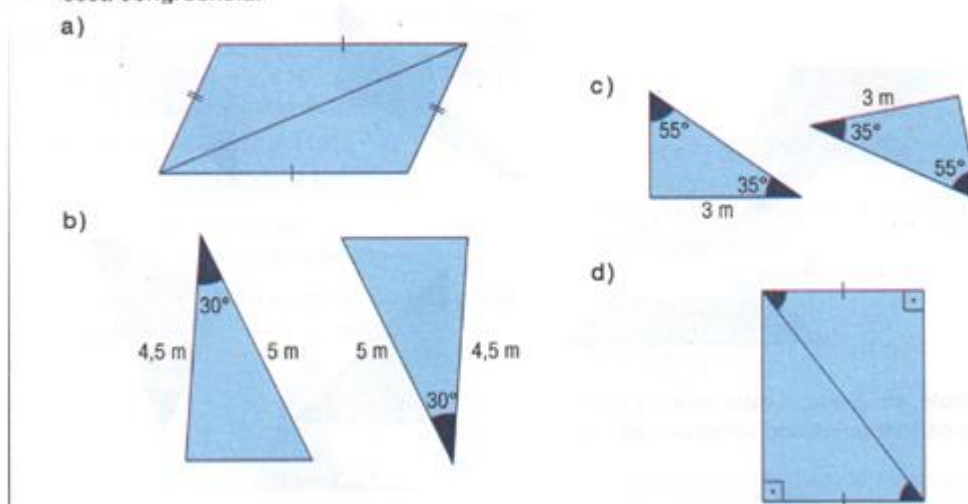
Fonte: Souza e Pataro (2012c, p. 236)

Passando para a análise dos exercícios correspondentes à congruência de triângulos na coleção 3, existem atividades que tratam a congruência por meio de

números ou então por meio de marcações nas figuras, assim como mostra a figura 36. Estes diferentes modos de uso fazem com que o foco das atividades fique na parte métrica dos triângulos, tanto quando utilizam as medidas dos lados ou dos ângulos, ou quando utilizam as marcações de congruência nas figuras. Mas, ressalto que o trabalho feito de ambas as maneiras é importante para que os leitores estejam familiarizados com essas diferentes possibilidades de abordagem de tal conteúdo.

Figura 36 – Atividades de congruência de triângulos – coleção 3.

48 Os triângulos indicados em cada item são congruentes. Identifique o caso que garante essa congruência.



Fonte: Adaptado de Souza e Pataro (2012c, p. 249)

Nesta seção, fica evidente o fato de que ao realizar uma leitura geométrica é preciso pensar sobre quais aspectos focar e também pensar em como as propriedades métricas ou topológicas podem limitar a visão e o entendimento de determinado conteúdo, sendo necessário pensarmos sobre quais aspectos ignorar nas figuras para conseguir realizar uma negociação de significados com o texto.

Com esta dimensão de análise é possível perceber que as propriedades métricas e topológicas são consideradas como importantes ao longo da leitura geométrica e que a empregabilidade de ambas indica qual é foco do conteúdo em determinado momento. Ao longo das discussões desta seção, ficou evidente que as propriedades métricas foram mais utilizadas se comparadas com as topológicas, talvez pelo fato de estarmos mais acostumados com as propriedades que nos remetem às quantidades e não às qualidades, ou seja, estamos acostumados a ler números e marcações nas figuras e isso nos remete a algo métrico.

Ainda pensando na utilização de tais propriedades a principal diferença em sua leitura se deve ao fato das propriedades métricas serem mais específicas e poderem ser identificadas com mais clareza se comparadas com as propriedades topológicas, uma vez que as propriedades métricas estão explícitas nos diagramas trazidos como exemplo ao longo desta seção e, na maioria das vezes, as propriedades topológicas requerem maior atenção do leitor para serem identificadas e entendidas.

A utilização e a leitura geométrica das propriedades métricas e topológicas podem contribuir para a aprendizagem Matemática, pois, podem ajudar no entendimento dos diagramas de modo geral, e também pelo fato de que quanto mais familiarizados com tais propriedades, mais conseguimos trabalhar com as mesmas em conjunto com as outras características dos diagramas para o entendimento e a leitura geométrica destes diagramas.

5.3. Representações mentais

A partir desta dimensão de análise são abordadas algumas possibilidades de representações mentais trazidas pelos livros didáticos em análise. Galperin (1989) ressalta que antes de um indivíduo chegar à fase de representações mentais, ele passa por etapas anteriores sendo elas parte da construção dessas futuras representações mentais. Nessa mesma linha de pensamento, Pais (1996) afirma que o pensamento abstrato é construído de maneira lenta, pois, inicialmente, os alunos recorrem a desenhos e somente depois de internalizados esses elementos começam a produzir as representações mentais.

As possibilidades do uso de representações mentais aparecem com mais frequência nos exercícios propostos e na retomada de conceitos anteriores. Nos exercícios se torna favorável pois, na maioria dos casos, eles abordam os temas que foram apresentados anteriormente no capítulo ou unidade do livro didático e, com isso, o desenho já seria previamente apresentado. Já na retomada de conceitos estudados em séries anteriores, o uso de representações mentais também se torna possível porque como os alunos já conhecem esse conteúdo, seria possível que conseguissem fazer analogia entre a teoria e a representação sem necessitar do desenho no papel.

Os exemplos da discussão realizada nessa seção são encontrados em sua maioria no final das unidades referentes à Geometria nos livros dos anos finais do Ensino Fundamental, pois, a maior parte dos exercícios traz nos enunciados a informação sobre algumas imagens e não apresentam mais essas imagens, fazendo com que os alunos tenham a representação mental de tal diagrama e consigam pensá-lo sem ver seu desenho no papel.

Tanto na coleção 1, quanto na coleção 2, o modo que os diagramas são apresentados nos livros dos anos finais do Ensino Fundamental é favorável ao uso das representações mentais, pois nessa etapa alguns desenhos deixam de ser apresentados nas definições ou exercícios, ficando sua representação a cargo do leitor.

Na coleção 3, tal prática quase não aparece, já que os autores trazem praticamente a todo momento o emprego de desenhos para ilustrar as definições e exercícios. Mas, nesta coleção, há uma seção nos capítulos intitulada: “Refletindo sobre o capítulo”, na qual são solicitadas algumas informações sobre o que foi estudado, e também que os alunos façam representações por meio de desenhos. Dessa maneira, talvez, seja possível estimular a formação de representações mentais por meio dos leitores. Como exemplo trago a figura 37.

Figura 37 – Seção ‘Refletindo sobre o capítulo’

The image shows a worksheet titled "Refletindo sobre o capítulo" with a sub-header "Anote no caderno". It contains five numbered questions and their corresponding answers:

- 1 Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? *polígonos e ângulos nos polígonos*
- 2 Com suas palavras, explique quais são as características de um polígono.
Resposta esperada: um polígono é uma forma geométrica plana cujo contorno é fechado e formado por segmentos de reta que não se cruzam.
- 3 Cite alguns objetos que você conhece que lembram polígonos.
Resposta pessoal.
- 4 Pelo número de ângulos internos de um polígono é possível saber o número de lados e de vértices que ele possui? Justifique. *Sim, pois o número de lados, vértices e ângulos internos de um polígono é igual.*
- 5 Desenhe um polígono convexo e um polígono não convexo. *Resposta pessoal.*

Fonte: Souza e Pataro (2012b, p. 239)

Um dos exemplos de exercícios que estimulam a utilização de representações mentais está no livro referente do 9º ano do Ensino Fundamental da coleção 1, apresentado na figura 38. Outro exemplo dessa prática está no livro do 8º ano, também da coleção 1, como mostra a figura 39.

Figura 38 – Exercício proposto

12. Em uma oficina há duas estruturas metálicas triangulares semelhantes, com perímetros iguais a 45 m e 18 m, respectivamente. Essas estruturas têm uma haste que passa por um dos vértices e é perpendicular ao lado oposto a esse vértice. Qual é a medida da haste da estrutura maior, se a haste da estrutura menor mede 12 m?

Fonte: Mori e Onaga (2012d, p. 281)

Figura 39 – Exercício proposto para o 8º ano

15. No $\triangle FEL$ os ângulos \hat{E} e \hat{L} medem 64° e 42° , respectivamente. \overline{FH} é a altura relativa ao lado \overline{EL} e \overline{FS} é a bissetriz do ângulo \hat{F} . Qual é a medida do ângulo $H\hat{F}S$ formado por essa altura e por essa bissetriz?

Fonte: Mori e Onaga (2012c, p. 273)

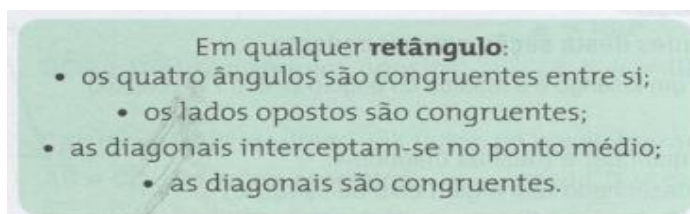
Nos dois exercícios acima a resolução é possível sem o auxílio de desenhos, mas, pautada em minha experiência como professora, percebi que o aluno necessita de uma representação. Essa representação pode ser mental ou uma representação concreta, utilizando papel para tentar esboçar os dados do problema, valendo-se assim de representações primitivas para então conseguir gerar modelos mais complexos de representações mentais que considerem a localização de cada vértice do triângulo, seus lados e seus ângulos.

Assim sendo, os problemas apresentados (figuras 38 e 39) requerem o uso dos modelos mentais por parte dos alunos, em virtude de não haver uma ilustração da situação proposta, pois, como já mencionei anteriormente, os alunos sentem a necessidade de uma representação, mesmo que o enunciado dos exercícios forneça todos os dados possíveis para sua resolução. Mas, ressalto que tal representação só será realizada pelo aluno se for trabalhado com ele o desenvolvimento desse tipo de habilidade, uma vez que os modelos mentais, ou mesmo as representações dos diagramas de maneira concreta (desenhos), são construídas lentamente ao longo do processo de ensino e aprendizagem. Talvez, esse processo de construção de representações seja uma das possíveis justificativas existentes para os diagramas irem perdendo espaço nos livros, e as informações surjam condensadas nos enunciados.

Um exemplo de possível utilização de representações mentais por parte dos leitores pode ser encontrado quando, ao retomar alguns conceitos anteriores, os autores, das coleções 1 e 2, se referem a algumas definições, figuras geométricas ou imagens, mas, não colocam sua representação em forma de desenho, deixando que o aluno faça sua própria representação por meio de lembranças ou de acordo com as palavras utilizadas pelos autores.

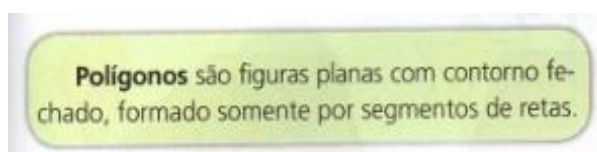
Como exemplos dessa prática, há a definição de retângulos no livro do 8º ano da coleção 1, apresentada na figura 40, e a definição de polígonos, apresentada no livro do 8º ano da coleção 2, apresentada na figura 41, que recorrem somente a palavras para relembrar tais definições.

Figura 40 – Definição de retângulo.



Fonte: Mori e Onaga (2012c, 292)

Figura 41 – Definição de polígonos.



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012c, p. 211)

Existem casos em que a falta de desenho pode não influenciar no entendimento das definições, pois, somente com a parte escrita é possível compreender o conceito, assim como mostramos na figura 42, pois, nesse caso, as informações da figura são restritas, já que não existe marcação específica de proporcionalidade, e também não há como identificar os ângulos congruentes pela figura. Por outro lado, há definições que podem ser complementadas ou exemplificadas por desenhos, como exemplo há a figura 43.

Figura 42 – Definição de semelhança

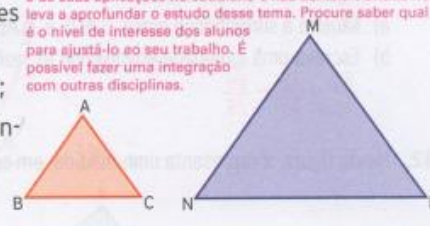
CAPÍTULO 3 Os triângulos e a semelhança

Sabemos que dois polígonos são semelhantes quando, e somente quando:

- ✓ os ângulos correspondentes são congruentes;
- ✓ os lados correspondentes são, respectivamente, proporcionais.

Para estes triângulos temos...

A importância do conceito de semelhança entre triângulos e de suas aplicações no cotidiano e nas demais ciências nos leva a aprofundar o estudo desse tema. Procure saber qual é o nível de interesse dos alunos para ajustá-lo ao seu trabalho. É possível fazer uma integração com outras disciplinas.



$\triangle ABC \sim \triangle MNP$

$$\hat{A} = \hat{M} \quad \hat{B} = \hat{N} \quad \hat{C} = \hat{P}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{PM}}$$

Fonte: Mori e Onaga (2012d, p. 151)

Figura 43 – Definição de semelhança

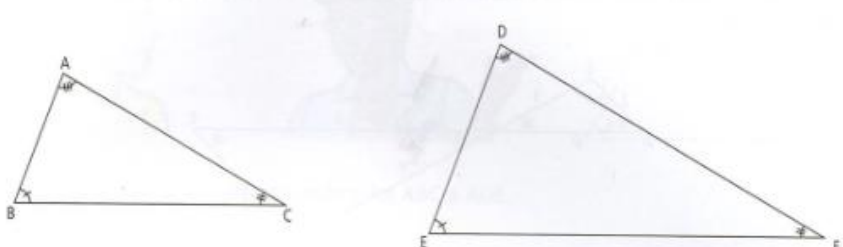
5. Semelhança de triângulos

Triângulos são polígonos; portanto, para que dois triângulos sejam semelhantes é preciso ter os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

No entanto, para os triângulos, dois pares de ângulos correspondentes congruentes já garantem as outras condições.

Vamos mostrar que isso é verdade.

Nos triângulos ABC e DEF abaixo, temos $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° , temos que obrigatoriamente $\hat{A} = \hat{D}$.



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012d, p. 169)

Nas figuras anteriores, primeiramente foi definido semelhança por meio de palavras da linguagem algébrica, mas, logo após temos a utilização de diagramas, e os mesmos acabam sendo bastante utilizados no decorrer dos livros. Dessa maneira, os desenhos podem ajudar no entendimento do conceito de semelhança e servirem como base para novos modelos de representações mentais, para situações que envolvam semelhança de triângulos, já que esse é um conceito novo para os alunos do 9º ano.

Pensando no fato das representações mentais serem mais utilizadas nos anos finais do Ensino Fundamental, uma possível explicação para que isso aconteça se deve ao fato de que, de acordo com Galperin (1989) e Pais (1996), a abstração ocorre de forma lenta, sendo necessário que o indivíduo vivencie experiências anteriores, para então conseguir fazer uma representação mental de tal diagrama. Assim, seria inviável esperar que os alunos nas séries iniciais se utilizem de representações mentais estruturadas, repletas de propriedades, uma vez que eles ainda estão construindo os conceitos e definições.

Nos livros do 8º ano e 9º ano os conteúdos são como um aprofundamento dos conteúdos estudados nos livros do 6º ano e 7º ano, então se torna possível a representação mental dos diagramas já estudados, uma vez que esses alunos tiveram contato com esses diagramas. Com isso, temos que o conteúdo a ser estudado é basicamente o mesmo, mas com novas considerações sendo incorporadas. Desse modo, o foco da leitura geométrica muda, proporcionando, assim, uma nova interpretação desse conteúdo, sendo que esta interpretação pode ser um aprofundamento sobre o conhecimento que já tinham ou então a inclusão de algo novo.

Ressalto que, em todos os livros, é possível que os alunos façam uma leitura geométrica, de modo a entender, por exemplo, como o mesmo diagrama pode representar um ícone e um símbolo, dependendo de sua utilização ao longo do texto, ou seja, se há a apresentação de suas características relevantes ou não, ou então, há partes que são utilizadas marcações de congruência e em outras partes não. Além disso, também podem começar a se questionar sobre o que seria mais relevante para seu aprendizado e o que não o mudaria, mas, para tal é necessário considerar o todo do diagrama, e é esse o foco que discuto na próxima seção.

Com o estudo desta dimensão de análise é possível perceber que a leitura geométrica tende a sofrer alterações à medida que o leitor vai se familiarizando com os conteúdos, conceitos e diagramas previamente estudados. Além da construção de uma nova leitura geométrica, esta dimensão de análise pressupõe (nós esperamos) que, em alguns casos, as representações mentais sejam suficientes para o entendimento de algo, e isso acaba ajudando na transição do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, já que neste último a representação por meio de desenhos é mais escassa se comparada com o ciclo de ensino anterior.

5.4. Entrelaçando o olhar Multidimensional e a abordagem metodológica.

No decorrer da análise de cada dimensão surgiram alguns questionamentos, principalmente referente à quais aspectos dos diagramas poderiam ser considerados relevantes e quais desses aspectos poderiam ser ignorados. Ressalto que tais questões me acompanharam ao longo do processo de análise.

Ao olhar para as três dimensões de análise anteriores como um único conjunto, e pensar sobre quais aspectos dos diagramas poderiam ser os mais relevantes e quais poderiam ser desconsiderados, temos uma leitura geométrica repleta de negociações de significados entre o texto e o que o leitor assume desses textos, já que são essas negociações que servirão de base para o entendimento do conteúdo. Como já foi dito no capítulo 3, não podemos pensar que a leitura geométrica é única, uma vez que ela depende do que está sendo considerado em determinado momento da leitura.

Considerando que ler geometricamente não é só identificar elementos separados nos diagramas, como por exemplo: isso é um símbolo, ou isso é uma propriedade métrica, e, sim, algo geral sobre as características dos diagramas como, por exemplo, identificar em um mesmo diagrama quais são suas características importantes, ou seja, as que o definem como um triângulo, um quadrado, etc. Com esse entendimento de leitura geométrica se torna possível perceber que a todo o momento precisamos considerar diferentes aspectos dos diagramas para conseguir lê-los e entendê-los. A cada aspecto considerado o entendimento prévio pode ser ampliado ou modificado, mas sempre lembrando que a leitura geométrica se baseia no todo do diagrama, ou seja, suas características conjuntamente.

Este entendimento sobre o diagrama (como um todo) pode ser construído de maneira geral se considerarmos que a leitura geométrica pode ser uma metodologia de análise para tais diagramas, sendo, assim, algo que ajude no processo de aprendizagem em Geometria.

Dietiker e Brakoniecki (2014) destacam como um dos resultados de sua pesquisa o fato de ser necessário focar o que os leitores devem assumir como sendo verdadeiro ao responder algo, e ao realizar sua leitura. Este resultado também é observado em meu trabalho, já que ao realizar a análise dos dados ficou evidente a necessidade de negociação de significados entre o leitor e o texto, uma vez que há momentos que algumas informações implícitas podem se tornar

necessárias para o entendimento do conteúdo, ou então, por outro lado, há informações que se repetem no enunciado de um exercício e em sua figura, ou ainda, na definição e na sua representação.

Para ajudar no entendimento sobre os aspectos a serem considerados nos diagramas, que às vezes nos parecem divergentes, como por exemplo, o fato de pedir o cálculo de área do polígono, sendo que o mesmo foi definido como sendo somente o contorno das figuras, faz com que os leitores identifiquem o que é relevante para ser assumido como verdadeiro, para tentar realizar a convergência de ideias de maneira correta, e a partir de tal fato, conseguir construir um aprendizado.

Para tal, podemos nos apropriar das ideias de Pimm (1995), quando ele diz que é necessário entendermos o que podemos perguntar a um diagrama e o que esse diagrama nos diz, além de pensar quais são características mais relevantes que serão consideradas em determinada circunstância.

Considerando essas ideias, e pensando principalmente 'no que o diagrama nos diz', conseguimos ter uma leitura geométrica pautada em suas características relevantes, uma vez que não olhamos especificamente para uma única classificação ou uma única dimensão de leitura de dados apresentada, mas sim, para tudo o que o diagrama tiver para nos mostrar.

Questões como as citadas ao longo desse capítulo não aparecem no currículo, e talvez se esses questionamentos fossem colocados e assumidos desde o início dos processos de ensino e de aprendizagem, a leitura geométrica poderia estar presente na prática de alunos e professores, como metodologia para auxiliar nesse processo, tornando a transição entre o Ensino Fundamental e Ensino Médio natural, já que ao chegar ao Ensino Médio é esperado que o aluno consiga realizar abstrações e reconhecer propriedades que estejam implícitas, tanto em definições, quanto em desenhos, para então conseguir identificar os aspectos relevantes dos diagramas. A abstração, que é o ponto chave do Ensino Médio, se torna consequência do processo como um todo. Ressalto que a abstração não é o fim do processo de aprendizagem em Geometria, mesmo porque o processo de aprendizagem não é linear, ele está em constante construção.

Além de ser possível, para os alunos, melhorar a transição entre os níveis de ensino, o processo de ler geometricamente sendo construído desde o início da aprendizagem tornaria possível que eles entendessem que a Geometria não é simplesmente um jogo cheio de regras, onde já está tudo pronto e acabado, e a ele

cabe somente o papel de aceitar e decorar tais regras, mas sim que cabe ao aluno o papel de construir seu conhecimento.

Ao realizar uma análise multidimensional dos exemplos trazidos neste capítulo, torna-se evidente que, na maioria deles, há a presença de mais de uma dimensão de análise, tornando a compreensão de tais diagramas como algo global e não mais como um exemplo de análise isolado, já que o fato de um mesmo diagrama estar presente em uma dimensão de análise não o exclui de outra, pois, as mesmas se complementam para construir e consolidar a leitura geométrica realizada.

Considerando a leitura geométrica como uma metodologia de análise para os diagramas, é possível considerar tal leitura como o “solo” para a aprendizagem de Geometria, pois por meio dela pode ser realizada a construção do conhecimento de maneira crítica, tendo noção que tal compreensão pode ser modificada ou ampliada conforme há o surgimento de novos conceitos matemáticos.

Utilizando a leitura geométrica como uma metodologia de análise é possível entender que nos conteúdos de Geometria há diversos elementos que se encaixam em diferentes dimensões de análise, e esses elementos podem ser compreendidos de diferentes modos, de acordo com o que estamos olhando ou estudando nos mesmos. Dessa maneira, a construção da análise é sempre multidimensional, pois os livros oportunizam tal construção, já que trazem os diagramas dentro de conceitos e não simplesmente como figuras isoladas e sem contexto algum.

No próximo capítulo apresento minhas considerações finais desta pesquisa, bem como algumas ideias para encaminhamentos futuros.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após grande envolvimento e dedicação a esta pesquisa, chegou o momento de encerrá-la e, para tal, inicio aqui minhas considerações finais, lembrando meu ponto de partida: A inquietação com o ensino de Geometria!

Meu desconforto relacionado ao ensino de Geometria foi traduzido, após alguns ajustes, na seguinte pergunta norteadora de meu trabalho: **Como fazer da leitura geométrica dos diagramas uma metodologia de análise dos conteúdos de Geometria presente nos livros didáticos de Matemática?** E para tentar sanar minha inquietação de alguma maneira, meu objetivo principal ao longo desta pesquisa foi fazer da leitura geométrica uma metodologia de análise dos conteúdos de Geometria presentes nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Vale lembrar que uma leitura geométrica é definida por Dietiker e Brakoniecki (2014) como sendo uma negociação de significados entre o leitor e o texto escrito, e que tal leitura não é única, já que depende de quem a faz. Entendo que a leitura geométrica é a compreensão que quem está realizando a leitura desenvolve sobre os diagramas, mesmo que tal compreensão seja mínima, ainda há uma leitura sendo realizada, e isso pode acarretar de alguma maneira um aprendizado.

Na construção da leitura geométrica, alguns aspectos devem ser considerados nos diagramas. Esses aspectos foram denominados pelos autores supracitados de dimensões de leitura geométrica, e em seu trabalho eles apresentaram 8 dimensões, sendo que explicitaram que nem sempre é esse número de dimensões, pois pode haver mais dimensões de leitura ou menos. Tomei como base as dimensões de leitura geométrica que abordavam o tipo de signo dos diagramas, as propriedades métricas e topológicas dos mesmos, e as representações mentais.

A principal diferença entre o meu trabalho e o de Dietiker e Brakoniecki (2014) é que no trabalho dos referidos autores é feita a construção das oito dimensões de leitura geométrica a partir de um trabalho com os estudantes de diferentes níveis de ensino. No meu trabalho estudo três das oito dimensões propostas por eles, mas meu foco está nos conteúdos de Geometria presente nos livros didáticos, com a

finalidade de analisá-los a partir da perspectiva dessas três dimensões e assim explorar a possibilidade de fazer da leitura geométrica uma metodologia.

Para aprofundamento do tema, fez-se necessário um estudo sobre o 'ensino de Geometria', 'os livros didáticos de Matemática', e 'os livros didáticos e a Geometria'. Este estudo mostrou a evidência de que a Geometria passou por um longo período de escassez nas escolas, como citado por autores como Pavanello (1993). Além de apontar a escassez de ensino, trabalhos datados da mesma época surgem para tentar entender o motivo que culminou em tal defasagem, sendo estes a formação de professores e a distribuição da Geometria nos livros didáticos.

Lorenzatto (1995) aponta como um dos principais problemas, a falta de aptidão dos professores para ensinarem Geometria, uma vez que não tinham conhecimento da mesma. Com o mesmo argumento, alguns anos depois, Gazire (2000) e Almouloud et al (2004) continuam alertando sobre o despreparo de alguns professores para ensinar tal conteúdo.

Após os estudos que tratavam da defasagem, vieram estudos que procuravam maneiras diferenciadas de promover um ensino de Geometria, e na maioria das vezes, essas alternativas eram pautadas em jogos (MAGRI, 2012), materiais manipuláveis (PASSOS, 2001) ou em softwares, como por exemplo, nos estudos de Soares (2009) e Vieira (2010).

Relacionado aos dois últimos temas de estudo preliminares, um fato que chama muito a atenção é que os livros didáticos e a Matemática parecem indissociáveis, uma vez que a maioria das pesquisas já realizadas, como por exemplo, Valente (2008), aponta que o livro didático é a principal, se não a única, fonte de preparo de aula dos professores e de acompanhamento dos alunos. Já na parte referente aos livros didáticos e a Geometria, as pesquisas mostram que a Geometria está presente ao longo dos livros didáticos e não isolada como foi relatado antes (KLUPPEL, 2012), e que os autores de livros didáticos passaram a utilizar mais as figuras geométricas para ajudar no entendimento dos conteúdos (COLLARES, 2012).

Corroborando a Kluppel (2012), os livros que analisei também trazem a disposição da Geometria ao longo dos capítulos, mas não é possível afirmar se tal distribuição favorece o ensino de Geometria, uma vez que não fui a campo realizar

tal investigação, e esse ensino depende de cada professor e do currículo a ser seguido.

Analisando os conteúdos de Geometria, utilizando a leitura geométrica como uma metodologia de análise dos diagramas, é possível perceber que existem diferentes caminhos para um mesmo entendimento dos diagramas, pois essa metodologia é uma maneira de mostrar alternativas para que tal entendimento possa ser construído.

Relacionado aos tipos de signos que os diagramas podem assumir ao longo dos livros didáticos, ou seja, indicadores, ícones ou símbolos, fica evidenciado a utilização de indicadores com a finalidade de apresentar ao leitor os conteúdos de maneira familiar, ou seja, utilizando-se de objetos do cotidiano ou imagens conhecidas para fazer menção a tal conteúdo. Esse fato serve para comprovar que os leitores dependem de uma imagem inicial para começar a compreender os conceitos que serão trabalhados.

Ainda nessa parte dos tipos de signos, outro resultado importante é que conforme os alunos vão ficando mais velhos espera-se que os mesmos não se utilizem tanto dos diagramas para a resolução de exercícios, pois se espera que quanto mais velho seja o leitor, mais identificação de símbolos ele tenha e com isso não necessite tanto de indicadores e de ícones para entender determinado conteúdo ou determinada ideia acerca de uma figura geométrica.

Na análise dos conteúdos de Geometria fica evidente o fato de que as representações como sendo ícones, indicadores e símbolos tendem a diminuir nos livros destinados aos alunos mais velhos, mas ressalto que mesmo em menor número, ainda são utilizados indicadores, ícones e símbolos ao longo dos conteúdos de Geometria, talvez para ajudar o leitor a retomar a ideia trabalhada (quando o conteúdo já foi estudado), ou então, por tentar auxiliar na construção de representações mentais.

Passando agora para as propriedades métricas e topológicas dos diagramas, um dos principais resultados deste trabalho é que as propriedades métricas são mais utilizadas se comparadas com as topológicas, isso se deve, talvez, ao fato de estarmos mais acostumados com os números, marcações de congruência e marcações específicas, ou seja, com as características quantitativas dos diagramas

do que com as características qualitativas dos mesmos. Além disso, há também a discussão sobre o uso ou não de marcações específicas do ângulo reto e de congruência, uma vez que sua utilização pode modificar o foco da leitura geométrica.

Como última parte da análise dos diagramas isolados, temos que as representações mentais começam a ser favorecidas em algumas partes dos livros finais do Ensino Fundamental, pois requerem uma longa construção dos conceitos anteriores para serem utilizadas, uma vez que é difícil representar algo mentalmente sem antes ter tido contato com tal objeto ou imagem. Mesmo que alguns exercícios ou definições favoreçam a utilização de representações mentais, não é possível afirmar que os leitores farão tais representações. Com o estudo desta última dimensão de análise é possível perceber que a leitura geométrica tende a sofrer alterações à medida que o leitor vai se familiarizando com os conteúdos, conceitos e diagramas previamente estudados. Essas alterações podem ocorrer, por exemplo, na mudança da leitura de um indicador para um ícone, ou então na percepção de uma leitura multidimensional e não mais como sendo leituras isoladas de diferentes dimensões de análise.

Ao analisar os diagramas presente nos livros, é passada a ideia de linearidade no processo de ensino e aprendizagem, sendo as representações mentais o final desse processo. Isso se deve a sequência assumida pelos autores dos livros didáticos, talvez por ser uma maneira de cumprir os conteúdos previstos, ou então pelo fato de ser complicado traduzir nos livros a ideia de não linearidade no processo de ensino e aprendizagem.

A construção do conhecimento não é linear, pois a todo o momento estamos sujeitos a mudanças e, além disso, em alguns casos há a necessidade de retomada de conceitos anteriores para que possamos avançar. Para ressaltar o fato da construção do conhecimento não ser linear, nos livros didáticos do 8º ano e 9º ano são utilizados os indicadores e os símbolos, pois é extremamente difícil para qualquer indivíduo precisar em qual momento do processo de construção da leitura geométrica o aluno está, ou seja, se ele já entende o símbolo ou ainda está construindo essa representação.

Ao estudar as três dimensões de análise juntas, temos a ideia do que pode ser uma negociação de significados, pois temos aspectos referentes à classificação

do signo, às propriedades mais relevantes do mesmo, e ainda podemos realizar uma representação mental do diagrama.

Para fazer a leitura geométrica é necessário entender que as diferentes dimensões de análise se complementam, já que uma informação de uma determinada dimensão pode completar informações que antes estavam implícitas ou incompletas devido a não leitura multidimensional dessas informações.

Ao usar a leitura geométrica dos diagramas como metodologia de análise, percebo que a utilização de todos os elementos conjuntos dos diagramas é o que possibilita ao leitor construir sua leitura geométrica, mesmo porque existem diferentes caminhos e diferentes olhares sobre um mesmo diagrama, e mais ainda, os próprios livros são multidimensionais, pois se eles não fossem não possibilitariam a construção da leitura geométrica e conseqüentemente a construção do conhecimento. Assim, todas as maneiras de representação tornam-se importantes para o aprendizado e reforçam a ideia de não linearidade no ensino.

Acredito que retirar as representações (desenhos) seja um bom caminho para que haja um processo de construção do conhecimento. Ressalto que isso não se deve ao fato de não poder mais haver tais representações, mas sim em ir retirando-as aos poucos para não conter muitas ilustrações durante os conteúdos, e às vezes, quando oportuno, colocar um exemplo (indicador ou ícone) para resgatar os estudantes que ainda não conseguiram atingir a abstração proposta nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

No decorrer do trabalho surgiram algumas questões, como por exemplo: "Qual aspecto é mais relevante no diagrama que está sendo estudado?", "Esse diagrama é um símbolo ou um ícone?", dentre outras, e para ajudar na busca por essas e outras possíveis respostas nos pautamos em Pimm (1995), que diz que podemos olhar o que o diagrama nos mostra e o que queremos que tal diagrama nos mostre.

A diferença entre os dois pontos de vista de Pimm (1995) está justamente no que procuramos entender, pois se procurarmos algo específico, só temos duas possibilidades, encontrar o que estamos querendo ou não. Mas, por outro lado, se prestarmos atenção em tudo ou em quase tudo o que o diagrama nos mostra, será possível compreendê-lo e fazer uma leitura geométrica pautada em todas as suas características relevantes, e não apenas naquela que estávamos procurando.

Espero que este trabalho sirva para muitos professores que, assim como eu, passem a olhar os livros didáticos com outros olhos, procurando despertar em cada aluno uma compreensão de sua própria leitura geométrica, de sua negociação com os diagramas e sobre o que é relevante para o entendimento de tais diagramas, e que assim esses alunos consigam compreender melhor a Geometria.

A utilização da leitura geométrica como metodologia de análise pode auxiliar os professores e os alunos a entenderem de maneira mais crítica os conteúdos e os diagramas trazidos nos livros didáticos e, além disso, pode proporcionar uma reflexão sobre como determinado conteúdo pode ser apresentado ao aluno, ou seja, qual ou quais podem ser os caminhos que possam proporcionar uma construção do conhecimento por meio de diferentes leituras geométricas. Assim, é possível considerar a leitura geométrica como sendo o ponto de partida para haver mais compreensão da Geometria, tanto por parte dos estudantes quanto por parte dos professores.

Entendo que meu trabalho foi somente o início de tal perspectiva, então, como encaminhamentos futuros, acredito que seria de suma importância ter trabalhos que deem andamento a essa pesquisa, como por exemplo, um estudo realizado com os livros do Ensino Médio, também trabalhos que foquem a leitura geométrica nas escolas, com professores e alunos.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, A. G. *A ideia de semelhança nas associações entre entidades da Geometria, em livros didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental*. 2011. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

ALMOULOUD, S. A. et al. A Geometria no Ensino Fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*, Rio de Janeiro, n. 27, p.94-210, set./dez. 2004.

ALMOULOUD, S. Ag. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*- Campinas, São Paulo: Papyrus, 2010. p. 125-148.

ALVES, D. M. *Ensino de Geometria nas séries iniciais: que conhecimentos possuem os alunos ao concluírem a 4ª série?* CAPES, 2002.

ALVES, A. M. M. *Livro didático de Matemática: Uma abordagem histórica (1943 – 1995)*. 2005. 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2005.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. *Praticando Matemática-Edição Renovada*. 3. ed. São Paulo: EDITORA do BRASIL, 2012.

BARBOSA, C. P.; FERREIRA, A. C. O pensamento geométrico em movimento: O caso de Marta. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Petrópolis. *Anais...* Petrópolis, 2012. p. 1-23.

BARDINI, L. C. *Geometria no 5º ano: Uma análise dos livros didáticos*. 2015. 146 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

BIEHL, J. V.; BAYER, A. A escolha do livro didático de Matemática. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., Ijuí. *Anais...* Ijuí, 2009.

BITTENCOURT, C. *Livro didático e saber escolar: 1810-1970*. Autêntica: Belo Horizonte, 2004.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 1994.

BORGES, C. C. A topologia: considerações teóricas e implicações para o ensino da Matemática. *Caderno de Física da UEF*, Feira de Santana, n. 03, p. 15-35, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais Matemática 5ª a 8ª série. Brasília: SEF, 1998.

BRAVO, R. S. *Técnicas de investigação social: Teoria e ejercicios*. 7 ed. Ver. Madrid: Paraninfo, 1991.

BRIGO, J. *As figuras geométricas no ensino de Matemática: Uma análise histórica nos livros didáticos*. 2010. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L. *História da matemática em atividades didáticas: Utilizando a história no Ensino de Geometria*. EDUFRN, 2005.

CARVALHO, L. C. de. *Análise da organização didática da geometria espacial métrica nos livros didáticos*. 2008. 164f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, USP, São Paulo, 2008.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. *Educação e pesquisa*, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.

COLLARES, T. S. L. L. *Análise dos livros didáticos: Geometria no Ensino Fundamental*. 2012. 48 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

CUNHA, M. C. *Um ambiente virtual de aprendizagem para o Ensino Médio sobre tópicos de Geometria Analítica Plana*. 2009. 165 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – UFSCar, São Carlos, 2009.

CURY, H. N. *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DANTE, L. R. LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA: uso ou abuso? *Em Aberto*, Brasília, ano16, n. 69, p. 83-97, jan./mar. 1996.

DIETIKER, L. C.; BRAKONIECKI, A. Reading geometrically: the negotiation of the expected meaning of diagrams in geometry textbooks. In: PROCEEDINGS OF INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS TEXTBOOK RESEARCH AND DEVELOPMENT (ICMT). Southampton: University of Southampton, 2014. p.1-6.

FAINGUELERNT, E. K. O Ensino de Geometria no 1º e 2º Grau. *A Educação Matemática em Revista*, SBEM, n. 4, 1º sem. 1995.

FAN, L.; ZHU, Y.; MIAO, Z. Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, Karlsruhe, p. 633-646, Set. 2013.

FASSIO, S. A. O. *Da cartolina ao computador: uma proposta para estudo de Geometria*. 2011. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, 2011.

GALPERIN, P.I. *Mental actions as a basis for the formation of thoughts and images*. Soviet Psychology, Moscou, v. 27, n. 3, p. 45- 64, may/june 1989.

GAZIRE, E. S. *O não resgate das geometrias*. 2000. 238 f. Tese (Doutorado em Educação), FE/UNICAMP- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP, 2000.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. p. 41-57.

GODOY, A. S. *Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais*. Revista de Administração de Empresas, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-29, mai/jun, 1995.

GONÇALVES, J. S.; LANDO, J. C. O ensino de Geometria, em escolas públicas, na cidade de Jequié – Bahia. *Revista Eventos Pedagógicos*, Sinop, n. 3, p. 363-389, Ago./Dez. 2012.

GRIMBERG, G. E. O estatuto do diagrama na História da Matemática. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 6., 2013, São Carlos. *Anais...* São Carlos: UFSCar, 2013. p. 1-13.

KLUPPEL, G. T. *Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval*. 2012. 110 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012.

LORENZATO, S. *Por que não ensinar Geometria?* Educação Matemática em Revista, SBEM, ano III, n. 04, 1995.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. 11 ed. São Paulo. Editora Pedagógica e Universitária LTDA, 2008.

MAGRI, M. A. *Explorando Geometria Elementar através de jogos e desafios*. 2012. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas), UFSCar, São Carlos, 2012.

MANTOAN, M. T. E. Processo de Conhecimento - Tipos de Abstração e Tomada de Consciência. *Núcleo de Informática Aplicada à Educação Universidade Estadual de Campinas. NIED*, Campinas, n° 27, p. 1-17,1994.

MARTINS, I.; GOUVÊA, G. Práticas de leituras de imagens em livros didáticos de Ciências: O papel das leituras prévias e do texto escrito como mediadores na construção de sentidos. In: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica: sobre linguagens e práticas culturais*. 1 ed. Campinas: Mercado de Letras, 2014. p. 259-283.

MINAYO, M. C. S. (Org.). *Pesquisa social: teoria, método e criatividade*. Petrópolis: Vozes, 2001.

MORI, I.; ONAGA, D. S. *Matemática Ideias e Desafios*. 17. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

OLIVEIRA, A. A. P. de. *Análise documental do processo de capacitação dos multiplicadores do projeto “Nossas crianças: Janelas de oportunidades” no município de São Paulo à luz da Promoção da Saúde*, 2007. 210 f. Dissertação (Mestrado em Enfermagem em Saúde Coletiva) – Escola de Enfermagem, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

PÁDUA, E. M. M. de. *Metodologia da pesquisa: abordagem teórico-prática*. 2. ed. Campinas: Papiros, 1997.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. *Zetetiké*, Campinas, v. 4, n. 6, p. 65-74, 1996.

PASSOS, C. L. B. *Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula*. 2000. 348 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Faculdade de Educação - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

PASSOS, C. L. B. Materiais Manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In LORENZATO, S.(Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*, Campinas: Autores Associados, 2006. pp. 77-92; 178 p. (Coleção Formação de professores).

PAVANELLO, Regina M.. O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*. Campinas, Faculdade de Educação: Cempem, Unicamp, 1993.

PEIRCE, C. S. *Collected Papers*. Cambridge: Harvard University Press, 1931. (v.1). Editores: Hartshorne, C.; Weiss, P.

PEREIRA, M. R. O. *A Geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o seu abandono*. 2001. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUCSP, São Paulo, 2001.

PIMM, D. Drawing on the image in mathematics and art. In N. Sinclair, D. Pimm, & W. Higginson (Eds.), *Mathematics and the aesthetic: New approaches to an ancient affinity* (pp.160–190). New York, NY: Springer.

PONTES, A. N. A proposta de uma teoria geral de Princípios de Abstração: uma contribuição à fundamentação da aritmética. *Trans/Form/Ação*, Marília, v. 36, n. 2, p. 179-194, Maio/Ago. 2013.

ROSA, C. P.; RIBAS, L. C.; BARAZZUTTI, M. Análise de livros didáticos. In: ENCONTRO NACIONAL PIBID – MATEMÁTICA, 1., 2012, Santa Maria. *Anais...* Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 2012. p. 1-9.

SÁ-SILVA, J.; ALMEIDA, C.D.; GUINDANI, J.F. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. *Revista brasileira de História e Ciências Sociais*, São Leopoldo, ano 1, n. 1, p. 1-15, jul. 2009.

SOARES, L. H. *Aprendizagem Significativa na Educação Matemática: uma proposta para a aprendizagem de Geometria Básica*. 2009. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. *Vontade de Saber Matemática*. 2. ed. São Paulo: FTD, 2012.

VALENTE, W.R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. *Zetetiké*, Campinas, v. 16, n. 30, p. 159-178, jul./dez. 2008.

VERONESE, P. C. F. *O ensino de geometria no ciclo II do Ensino Fundamental: um estudo analítico*. 2009. 261 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista – UNESP, Marília, 2009.

VIEIRA, C. R. *Reinventando a Geometria no Ensino Médio: Uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de Geometria Dinâmica e a teoria de Van Hiele*. 2010. 151 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.