



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Câmpus de São José do Rio Preto

Rafaela Soares de Carvalho

Singularidades do tipo  $D(q,p)$

São José do Rio Preto  
2016

Rafaela Soares de Carvalho

Singularidades do tipo  $D(q,p)$

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

São José do Rio Preto  
2016

Carvalho, Rafaela Soares de.  
Singularidades do tipo  $D(q,p)$  / Rafaela Soares de  
Carvalho. -- São José do Rio Preto, 2016  
76 f.

Orientador: Michelle Ferreira Zanchetta Morgado  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio  
de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências  
Exatas

1. Matemática. 2. Singularidades (Matemática) 3. Funções  
(Matemática) 4. Difeomorfismos. I. Morgado, Michelle Ferreira  
Zanchetta. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita  
Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513.74

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Rafaela Soares de Carvalho

Singularidades do tipo  $D(q,p)$

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado  
UNESP – São José do Rio Preto  
Orientador

Prof. Dr. Aldicio José Miranda  
UFU – Uberlândia

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa  
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto  
31 de março de 2016

*Aos meus pais Joaquim e Sueli  
à minha amiga que considero como irmã, Tamara  
e ao professor Edson Tresso  
dedico.*

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir alcançar mais este objetivo.

Aos meus pais por estarem ao meu lado me dando forças para continuar e lutar pela realização dos meus sonhos. Muito obrigada por todas as orações e carinho que me disponibilizaram.

A toda minha família que sempre esteve na torcida por mim.

A minha orientadora Michelle por toda a atenção, amizade, companheirismo, paciência e dedicação. Muito obrigada por tudo que sempre fez por mim e por sempre me apoiar desde o início, inclusive nos momentos mais difíceis.

A todos os professores do IBILCE que me deram aula.

A todos da seção de Pós-graduação por estarem bem dispostos a me atender todas as vezes que precisei.

Aos professores Edson e Edna que me deram aula no Ensino Fundamental e Médio e que despertaram em mim esse imenso interesse pela matemática.

A todos da escola João Deoclécio por sempre me apoiarem e torcerem por mim.

Ao Victor Zupirolli por ser o melhor professor de inglês do mundo e por sempre me mandar estudar mais inglês e menos matemática.

A minha “cumadi” linda Hellen Carvalho por toda a amizade, carinho, atenção, ajuda e por sempre acreditar em minha capacidade.

À Laura Rezzieri que sempre me apoia e incentiva demais, serei eternamente grata por tudo que sempre faz por mim, por toda a preocupação e por todas as broncas.

À Daniele Gazetta por ser tão fofa, linda, sincera, amiga e companheira. Estarei sempre torcendo por você, Dani.

Ao Eric “Bobão” (ops, Eric Busatto) por toda a amizade, confiança, conselhos e torcida. Muito obrigada, Bobão.

Ao Marcelo Bongarti pela amizade desde a época da graduação.

A todos os demais que estudaram comigo no mestrado em algum momento, em especial: Jessica, Taísa, Kumon, Ana Livia, Carol, Bruno, Otávio, Ronan, Yagor, Rodrigo, Deninho, Carol Dordan, Melka, Raul e Marco. Muito obrigada por serem pessoas tão maravilhosas e por tornarem meus dias muito melhores.

Ao pessoal do doutorado: Alisson, Jarne, Rafael, Alex Paulo Francisco, Robson Trevizan, Luís Fernando, Júnior, Heloísa, Erica Batista, Luana, Fabrício, Bruno, Willian Nunes e Rodiak por alegrarem meus dias e por me apoiarem demais. Agradeço em especial as excelentes piadas do Alisson, ao Rafael por ser tão mala e ao Willian por sempre arrumar meu celular, mas muito mais que isso, agradeço todo o apoio e amizade de vocês.

A todos do PET, em especial à Amanda Monteiro por ser tão atenciosa comigo, ao Carlos Vicente que sempre está do meu lado me apoiando e me mandando parar de chorar e reclamar, um irmão maravilhoso que a vida me deu de presente. E ao Vinicius Vitória por ter em tão pouco tempo se tornado um grande amigo, meu irmãozinho caçula mais chorão do mundo.

À Amanda Souza que agradeço toda a amizade e por ter uma alegria tão contagiante capaz de me animar até nos momentos mais difíceis.

À Mayara Braz por ser tão legal e maravilhosa com todos sempre.

Aos meus queridos amigos Willian Oliveira e Glalco pela amizade sincera, dois amigos maravilhosos que posso contar em todos os momentos. Muito obrigada por tudo que fizeram por mim e por sempre estarem do meu lado.

Ao meu amigo Roberto Alvarenga por ter indicado minha orientadora e por todo o apoio de sempre. Agradeço toda a ajuda no início da minha faculdade que me disponibilizou sendo monitor de Cálculo I, sua ajuda foi fundamental para que eu superasse as dificuldades iniciais e conseguisse pegar o ritmo do curso e seguir em frente. Muito obrigada por acreditar na minha capacidade.

Aos meus amigos de graduação, em especial ao Alex Honorato, Sergio Furquim, Lucas Santos, Willian Mazoni, Felipe Felix, Mayara Zanon e Dasi que sempre estarão torcendo por mim e que estão sempre presentes em meu coração. Agradeço também ao pessoal que foi nas minhas monitorias de G.E.e que se tornaram amigos queridos, em especial ao Adriano Gois, Edino, Aldimir, Andreza e Thais.

A todos os amigos, não só os que conheci no IBILCE, mas também os amigos que fui tendo o privilégio de conhecer durante a minha vida e que torcem pela realização dos meus sonhos, em especial à Fabiana Bianchi, Mary Monteiro, Flávia Adão, Simone, Sara, Natiele, Kryssia, Renan Liberato, Lucas Oliveira, Juninho, Denis e Alex Padre. A todos vocês, muitíssimo obrigada.

Aos meus bichinhos de estimação por me distraírem e me animarem nos momentos mais difíceis e por tornarem minha vida mais feliz.

À Tamara, que é a irmã que Deus me deu de presente aos seis anos de idade e que desde então está sempre do meu lado compartilhando tudo comigo. Muito obrigada por me aguentar, por me ouvir e desabafar, por me dar conselhos e incentivo. Te amo tanto, maninha. Muito obrigada, por tudo.

À Capes pelo suporte financeiro.



*“Eu tentei 99 vezes e falhei, mas na centésima tentativa eu consegui, nunca desista de seus objetivos mesmo que eles pareçam impossíveis, a próxima tentativa pode ser a vitoriosa.”*

Albert Einstein

# RESUMO

Neste trabalho estudamos germes de funções sob a ação do grupo  $\mathcal{R}_I$  dos germes de difeomorfismos em  $\mathbb{C}^n$  que preservam um ideal  $I$ , descrevendo os conceitos de codimensão e determinação finita associados. Isso nos fornece ferramentas para caracterizar um tipo especial de germes com singularidades não isoladas, as chamadas singularidades do tipo  $D(q, p)$ . Conseguimos ainda relacionar o conceito de  $\mathcal{R}_I$ -estabilidade com estes germes, para o caso em que  $I$  é um ideal radical que define uma intersecção completa quase homogênea com singularidade isolada. Além disso, apresentamos um sistema de coordenadas através do qual obtemos uma fórmula explícita para alguns dos números de Lê destes germes.

Palavras-chave: Grupo  $\mathcal{R}_I$ , Singularidades do tipo  $D(q, p)$ , Números de Lê.

# **ABSTRACT**

*In this work we study germs of functions under the action of the  $\mathcal{R}_I$  group of diffeomorphisms of germs in  $\mathbb{C}^n$  which preserving an ideal  $I$ , describing the concepts of codimension and finite determination associated. This provides the tools to characterize a particular type of germ with non isolated singularities, the so called  $D(q,p)$  singularities. We can still relate the concept of  $\mathcal{R}_I$ -stability with these germs, in the case where  $I$  is a radical ideal that defines complete intersection with isolated singularity. Moreover, we present a coordinate system by which we obtain an explicit formula for some Lê numbers of these germs.*

*Keywords:  $\mathcal{R}_I$  group,  $D(q,p)$  singularities, Lê numbers.*

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Tópicos de Álgebra Comutativa . . . . .	1
1.1.1 Módulo . . . . .	1
1.1.2 Anel noetheriano . . . . .	5
1.1.3 Dimensão . . . . .	9
1.1.4 Anel regular e anel Cohen-Macaulay . . . . .	11
1.2 Teoria de Singularidades . . . . .	13
1.2.1 Estrutura algébrica de $\mathcal{O}_n$ . . . . .	13
1.2.2 O grupo $\mathcal{R}$ . . . . .	21
1.2.3 Singularidade isolada e determinação finita . . . . .	27
<b>2 Codimensão associada a um ideal</b>	<b>30</b>
2.1 Derlog sobre $I$ . . . . .	30
2.2 O ideal primitivo . . . . .	34
2.3 O grupo $\mathcal{R}_I$ e o espaço tangente . . . . .	39
2.4 Determinação finita sobre $\mathcal{R}_I$ . . . . .	42
<b>3 Singularidade do tipo <math>D(q, p)</math></b>	<b>45</b>
3.1 Caracterização do germe $f \in \int I$ . . . . .	45
3.2 $\mathcal{R}_I$ -estabilidade . . . . .	53
<b>4 Números de Lê de singularidades do tipo <math>D(q, p)</math></b>	<b>60</b>
4.1 Números de Lê . . . . .	60
4.2 Descrição para singularidades do tipo $D(q, p)$ . . . . .	64
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Introdução

O estudo de germes de aplicações sob a ação dos grupos de Mather é um dos objetivos da teoria clássica de Singularidades. Considerando o grupo  $\mathcal{R}$  dos germes de difeomorfismos de  $\mathbb{C}^n$  que preservam a origem, as informações a respeito da  $\mathcal{R}$ -equivalência dos germes de funções analíticas em  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathcal{O}_n$ , é bastante ampla e pode ser encontrada em vários livros básicos da teoria, por exemplo [8]. Nesta direção aparecem os conceitos de codimensão e determinação finita. A finitude da codimensão de um germe sob a ação do grupo  $\mathcal{R}$  implica que o germe tenha singularidade isolada e relaciona a codimensão com a determinação finita dele. Para estender tais conceitos e abranger o estudo de germes com singularidades não isoladas, é considerado, para cada ideal  $I$  em  $\mathcal{O}_n$ , o grupo  $\mathcal{R}_I$  dos germes em  $\mathcal{R}$  que preservam  $I$ . Associado a cada ideal  $I$  é obtido um novo ideal, denotado por  $\int I$ , chamado ideal primitivo de  $I$ . Vamos sempre considerar germes contidos no ideal primitivo de algum ideal.

Em nosso trabalho, vamos descrever as estruturas algébricas necessárias para esta extensão e caracterizar tais conceitos neste caso, ou seja, descrever a codimensão e a determinação finita sob a ação do grupo  $\mathcal{R}_I$ .

O primeiro trabalho no qual foram introduzidas essas estruturas foi em [23] e alguns outros pesquisadores deram continuidade a esse estudo, dentre eles Pellikaan em [18] e Zaharia em [25].

A partir dessas novas ferramentas estudaremos um tipo especial de germes com singularidade não isolada, chamados de germes do tipo  $D(q, p)$ , ou seja, um germe  $f$  é uma singularidade do tipo  $D(q, p)$  se existem coordenadas locais  $x_{ij}$ , ( $1 \leq i \leq j \leq p$ ),  $y_1, \dots, y_{p+k}$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  tais que

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} x_{ij} y_i y_j + \sum_{l=p+1}^{p+k} y_l^2, \text{ onde } x = (x_{ij}) \text{ e } y = (y_1, \dots, y_{p+k}).$$

Claramente para estes germes a origem é uma singularidade não isolada.

Nem sempre garantir a existência dessas coordenadas  $(x, y)$  tal que  $f$  seja escrito como acima é simples, para nos auxiliar há uma caracterização para estes germes utilizando a codimensão de  $f$  a respeito de um certo ideal  $I$ .

Por outro lado, associado a um germe de função analítica em  $\mathbb{C}^n$  com singularidade não isolada, digamos de dimensão  $s$ , Massey em [13] introduz  $s + 1$  números associados que, quando  $s = 0$ , o número associado é o número de Milnor deste germe. Estes números são chamados de números de Lê do germe.

No caso de singularidade isolada ( $s = 0$ ), mostra-se que o número de Milnor associado é a codimensão do germe com relação ao grupo  $\mathcal{R}$  (uma referência é [12, p. 77]). No

caso de singularidades não isoladas não há resultados relacionando os números de Lê e a codimensão do germe com relação ao grupo  $\mathcal{R}_I$ , para algum  $I$ .

Veremos que no caso de germes  $f$  do tipo  $D(q, p)$  (que têm singularidade não isolada), a sua codimensão com relação ao grupo  $\mathcal{R}_I$ , onde  $f \in \int I$  e  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é regular, é zero somente se  $p$  é zero e os números de Lê associados a  $f$  dependem somente de  $p$ .

Ressaltamos que a definição dos números de Lê de um germe de função analítica está associada a um sistema linear de coordenadas locais e que genericamente estes números são únicos. Gaffney em [7] (Teorema 1.6, p.5) obtém uma fórmula para todos os números de Lê genéricos de um germe do tipo  $D(q, p)$  via blowup. Nós optamos por trabalhar com sistema de coordenadas e mostraremos que com o nosso sistema escolhido conseguimos deduzir uma fórmula para alguns dos seus números de Lê que coincide com a fórmula fornecida por Gaffney. A ideia da escolha do sistema de coordenadas foi obtida do trabalho do Bobadilla [3].

Neste contexto, nosso trabalho está dividido em quatro capítulos, distribuídos da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos inicialmente resultados importantes e refinados de Álgebra comutativa com o intuito de obter os requisitos básicos para o desenvolvimento de nosso trabalho. Dada essa bagagem partimos para um estudo sobre Teoria de Singularidades obtendo conceitos importantes, dentre eles estão o grupo  $\mathcal{R}$ , o espaço tangente a órbita de um germe  $f$  segundo a ação de  $\mathcal{R}$ , codimensão e determinação finita, que no próximo capítulo serão estendidos e a partir dessa extensão teremos artifícios essenciais para explorarmos propriedades dos germes do tipo  $D(q, p)$ .

No capítulo 2 apresentamos algumas ferramentas algébricas associadas a um ideal  $I$  de  $\mathcal{O}_n$ , dentre elas estão o derlog sobre  $I$ , o ideal primitivo de  $I$ , o grupo  $\mathcal{R}_I$  que é obtido a partir do grupo  $\mathcal{R}$  e o espaço tangente sobre  $I$ . A partir desses objetos obteremos a codimensão e codimensão estendida de  $f$ , com  $f \in \int I$  e sob certas condições sobre  $I$  veremos adiante que estes números serem zero nos fornecerá a caracterização mencionada.

No capítulo 3 obteremos todas as ferramentas necessárias para demonstrarmos a tão importante caracterização dos germes do tipo  $D(q, p)$ . Além disso conseguimos dar uma descrição para germes especiais chamados de  $\mathcal{R}_I$ -estáveis, pertencentes ao ideal primitivo, mostrando que quando  $I$  satisfazer uma condição especial, estes germes podem ser  $\mathcal{R}_I$ -equivalentes a uma  $D(q, 0)$ -singularidade.

No capítulo 4 definiremos números associados a germes de funções analíticas com singularidades podendo ser não isoladas e calcularemos estes números para as singularidades do tipo  $D(q, p)$ , para um sistema de coordenadas específico.

# Preliminares

Nosso objetivo neste capítulo é introduzir resultados e definições que aparecerão no decorrer dos próximos capítulos e assim facilitar a compreensão do conteúdo, dentre eles estão resultados importantes de Álgebra Comutativa e alguns resultados básicos da Teoria de Singularidades.

## 1.1 Tópicos de Álgebra Comutativa

Nesta seção abordaremos tópicos de Álgebra Comutativa com o intuito de fixar notações e fornecer ferramentas necessárias nos próximos capítulos. As demonstrações extensas e técnicas serão omitidas.

### 1.1.1 Módulo

Consideremos  $R$  um anel comutativo com unidade.

**Definição 1.1.1** Um  $R$ -**módulo** é um par  $(M, \mu)$ , onde  $M$  é um grupo abeliano e  $\mu$  é uma aplicação  $\mu : R \times M \rightarrow M$  tal que, denotando  $\mu(a, x)$  por  $ax$  ( $a \in R, x \in M$ ), temos satisfeitas as seguintes propriedades:

- i)  $a(x + y) = ax + ay$ ;
- ii)  $(a + b)x = ax + bx$ ;
- iii)  $(ab)x = a(bx)$ ;
- iv-)  $1x = x$ , com  $a, b \in R$  e  $x, y \in M$ .

**Notação:** Denotemos o  $R$ -módulo  $(M, \mu)$  simplesmente por  $M$ .

**Exemplo 1.1.2** Todo ideal de  $R$  é um  $R$ -módulo e  $R$  é um  $R$ -módulo.

**Definição 1.1.3** Sejam  $M$  e  $N$  dois  $R$ -módulos e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação. Dizemos que  $f$  é um **homomorfismo de  $R$ -módulos** se para todo  $x, y \in M$  e para todo  $a \in R$  tivermos

- i)  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ;
- ii)  $f(ax) = af(x)$ .

**Definição 1.1.4** Um **submódulo**  $M'$  de  $M$  é um subgrupo que é fechado com respeito a multiplicação por elementos de  $R$ .

**Observação 1.1.5** O grupo abeliano  $\frac{M}{M'}$  herda então uma estrutura de  $R$ -módulo de  $M$ , definida por  $a(x + M') = ax + M'$ .

**Teorema 1.1.6** Seja  $\varphi : M \rightarrow N$  um homomorfismo de  $R$ -módulos. Então  $\text{Ker}(\varphi)$  e  $\text{Im}(\varphi)$  são  $R$ -módulos e  $\frac{M}{\text{Ker}(\varphi)} \cong \text{Im}(\varphi)$ .

**Demonstração:**

Temos que  $\text{Ker}(\varphi)$  é um  $R$ -módulo pois  $0 \in M$  e como  $\varphi$  é homomorfismo,  $\varphi(0) = 0$ . Assim,  $0 \in \text{Ker}(\varphi)$ . Além disso, sejam  $a, b \in R$  e  $x, y \in \text{Ker}(\varphi)$ . Então  $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$  e como  $\varphi$  é homomorfismo temos que  $\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y) = 0$ . Assim,  $ax + by \in \text{Ker}(\varphi)$ . Logo,  $\text{Ker}(\varphi)$  é um  $R$ -submódulo e portanto é um  $R$ -módulo.

Agora,  $\text{Im}(\varphi)$  é um  $R$ -módulo pois  $0 \in M$  e como  $\varphi$  é homomorfismo,  $\varphi(0) = 0$ . Assim,  $0 \in \text{Im}(\varphi)$ . Além disso, sejam  $a, b \in R$  e  $z, w \in \text{Im}(\varphi)$ . Então,  $z = \varphi(x)$  e  $w = \varphi(y)$  com  $x, y \in M$ . Agora, novamente usando o fato que  $\varphi$  é homomorfismo segue que  $az + bw = a\varphi(x) + b\varphi(y) = \varphi(ax) + \varphi(by) = \varphi(ax + by) \in \text{Im}(\varphi)$ . Logo,  $\text{Im}(\varphi)$  é um  $R$ -módulo.

Vamos agora mostrar que  $\frac{M}{\text{Ker}(\varphi)} \cong \text{Im}(\varphi)$ . Seja  $f : \frac{M}{\text{Ker}(\varphi)} \rightarrow \text{Im}(\varphi)$  dada por  $f(a + \text{Ker}(\varphi)) = \varphi(a)$ , onde  $a \in M$ .

Vejam que  $f$  está bem definida.

Consideremos  $a + \text{Ker}(\varphi)$  e  $b + \text{Ker}(\varphi)$  elementos de  $\frac{M}{\text{Ker}(\varphi)}$  tais que  $a + \text{Ker}(\varphi) = b + \text{Ker}(\varphi)$ . Assim,  $a - b \in \text{Ker}(\varphi)$ , ou seja,  $\varphi(a - b) = 0$ . Como  $\varphi$  é homomorfismo temos que  $\varphi(a) - \varphi(b) = 0$ . Então  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . Logo,  $f(a + \text{Ker}(\varphi)) = f(b + \text{Ker}(\varphi))$ . Portanto,  $f$  está bem definida.

Temos que  $f$  é injetora, pois

$$x + \text{Ker}(\varphi) \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x + \text{Ker}(\varphi)) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(\varphi) \Rightarrow x + \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi).$$

Então,  $f$  é injetora.

Claramente,  $f$  é sobrejetora e portanto,  $f$  é bijetora.

Como  $M$  e  $\text{Ker}(\varphi)$  são módulos pela observação anterior temos que  $\frac{M}{\text{Ker}(\varphi)}$  é um  $R$ -módulo. Temos que  $f$  é um homomorfismo, pois usando que  $\varphi$  é homomorfismo e  $\text{Ker}(\varphi)$  é um  $R$ -submódulo temos que

$$\begin{aligned} f((a + \text{Ker}(\varphi)) + (b + \text{Ker}(\varphi))) &= f((a + b) + \text{Ker}(\varphi)) = \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \\ &= f(a + \text{Ker}(\varphi)) + f(b + \text{Ker}(\varphi)) \text{ e para } r \in R \\ f(r \cdot (b + \text{Ker}(\varphi))) &= f((rb) + \text{Ker}(\varphi)) = \varphi(rb) = r\varphi(b) = rf(b + \text{Ker}(\varphi)). \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  é um isomorfismo e assim  $\frac{M}{\text{Ker}(\varphi)} \cong \text{Im}(\varphi)$ . ■

Utilizando o teorema anterior para certas aplicações, obtemos o seguinte resultado:

**Proposição 1.1.7** *i) Sejam  $N \subseteq M \subseteq L$   $R$ -módulos. Então,*

$$\frac{\frac{L}{N}}{\frac{M}{N}} \cong \frac{L}{M}.$$



ii) Sejam  $M_1$  e  $M_2$  submódulos de  $M$ . Então,

$$\frac{M_1 + M_2}{M_1} \cong \frac{M_2}{M_1 \cap M_2}.$$

A demonstração pode ser vista em [2, Proposição 2.1, p.22].

**Definição 1.1.8** Seja  $\{M_i\}_{i \in I}$  uma família de  $R$ -módulos. Definimos a **soma direta** destes módulos por

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \neq 0 \text{ para um número finito de índices}\},$$

que é um  $R$ -módulo usando a aplicação  $\mu : R \times \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$  dada por  $\mu(a, (x_i)_{i \in I}) = (ax_i)_{i \in I}$ .

**Definição 1.1.9** Dizemos que um  $R$ -módulo  $M$  é **finitamente gerado** se existem  $a_1, \dots, a_n$

em  $M$  tais que  $M = \left\{ \sum_{i=1}^n u_i a_i \mid u_i \in R, \forall i \right\}$ .

**Notação:**  $M = \langle a_1, \dots, a_n \rangle R$  ou simplesmente  $M = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .

**Definição 1.1.10** Seja  $M$  um  $R$ -módulo. Dizemos que  $M$  é **livre** se  $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$ , onde  $M_i \cong R, \forall i \in I$ .

**Observação 1.1.11** Considere  $M$  um  $R$ -módulo livre e finitamente gerado. Como  $M$  é livre então  $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$  onde  $M_i \cong R, \forall i \in I$ . Agora, seja  $x \in M$ . Como  $M$  é finitamente gerado, digamos por  $x_1, \dots, x_n$ , então existem  $a_1, \dots, a_n \in R$  tais que  $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ . Como cada  $x_i \in M$  e  $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$ , segue que  $x_i \in M_{j_i}$  para algum  $j_i \in I$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Portanto, existem  $j_1, \dots, j_k$  tais que para todo  $x \in M$  temos que  $x \in M_{j_1} \oplus \dots \oplus M_{j_k}$ . Logo,  $M \subset \bigoplus_{l=j_1}^{j_n} M_l$  e com isso concluímos que  $M = \bigoplus_{l=j_1}^{j_n} M_l$ . Deste modo, como  $M_l \cong R$  temos que  $M \cong R \oplus \dots \oplus R = R^n$ .

Vamos agora demonstrar o Lema de Nakayama, um lema muito útil e conhecido.

**Lema 1.1.12 (Lema de Nakayama)** Sejam  $R$  um anel comutativo com unidade 1 e  $\mathcal{M}$  um ideal de  $R$  com a propriedade de que  $1 + x$  é invertível em  $R$  para todo  $x \in \mathcal{M}$ . Sejam  $\mathcal{M}$  um  $R$ -módulo e  $A$  e  $B$   $R$ -submódulos com  $A$  finitamente gerado. Se  $A \subseteq (B + \mathcal{M}.A)$ , então  $A \subseteq B$ .

**Demonstração:**

Como  $A$  é finitamente gerado, consideremos  $a_1, \dots, a_t$  geradores de  $A$ . Pela hipótese, existem  $b_1, \dots, b_t \in B$  e  $\lambda_{ij} \in \mathcal{M}$  tais que para  $i \in \{1, \dots, t\}$  podemos escrever

$$a_i = b_i + \sum_{j=1}^t \lambda_{ij} a_j.$$

Considerando a notação matricial  $a = (a_1, \dots, a_t)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_t)$  e  $\Lambda = (\lambda_{ij})$ , onde  $\Lambda$  é a matriz formada pelos elementos  $\lambda_{ij}$ , a igualdade descrita anteriormente pode ser reescrita como  $(I_d - \Lambda)a = b$ , com  $I_d$  sendo a matriz identidade.

Para mostrar que  $A \subseteq B$ , temos que mostra que  $(I_d - \lambda)$  é inversível. Mas isso ocorre se, e somente se, seu determinante é diferente de zero.

$$\text{Note que } \det(I_d - \Lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda_{11} & -\lambda_{12} & \cdots & -\lambda_{1t} \\ -\lambda_{21} & 1 - \lambda_{22} & \cdots & -\lambda_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{t1} & -\lambda_{t2} & \cdots & 1 - \lambda_{tt} \end{vmatrix} = 1 + \sum \lambda_{i_k j_{i_r}}^{\alpha_1} \cdots \lambda_{i_k j_{i_r}}^{\alpha_r}.$$

Logo o determinante de  $(I_d - \Lambda)$  é da forma  $1 + x$ , com  $x \in \mathcal{M}$ . Assim, por hipótese,  $1 + x$  é não nulo e, portanto,  $A \subseteq B$ . ■

**Definição 1.1.13** *Seja  $R$  um anel. Um anel  $B$  é uma  $R$ -álgebra se existe  $\lambda : R \rightarrow B$  homomorfismo.*

**Exemplo 1.1.14** *Seja  $R$  um anel. O anel dos polinômios  $R[x_1, \dots, x_n]$  e o anel das séries de potências  $R[[x_1, \dots, x_n]]$  é uma  $R$ -álgebra via a inclusão  $i : R \rightarrow R[[x_1, \dots, x_n]]$ .*

Vamos agora apresentar alguns ideais especiais.

**Definição 1.1.15** *Um elemento  $x \in R$  é **nilpotente** se existe uma potência  $n$  de  $x$  tal que  $x^n = 0$ . Quando  $R$  não contém elementos nilpotentes, dizemos que ele é **reduzido**.*

**Exemplo 1.1.16** *Temos que  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , dada por  $f(x, y) = (0, x)$ , é nilpotente pois  $f^2(x, y) = f(f(x, y)) = f(0, x) = (0, 0)$ .*

**Definição 1.1.17** *Seja  $I$  um ideal de  $R$ . Chamamos de **radical** de  $I$  e denotemos por  $\sqrt{I}$  o conjunto de todos os elementos  $g \in R$  tais que alguma potência de  $g$  está em  $I$ .*

É fácil ver que  $\sqrt{I}$  é um ideal de  $R$  e que  $I \subseteq \sqrt{I}$ .

**Proposição 1.1.18** *Se  $I$  é um ideal primo de  $R$  então  $\sqrt{I} = I$ .*

**Demonstração:**

Seja  $x \in \sqrt{I}$ . Então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x^n \in I$ . Assim  $x \cdot x^{n-1} \in I$  e, como  $I$  é primo,  $x \in I$  ou  $x^{n-1} \in I$ .

Se  $x \in I$  temos o desejado. Caso contrário, se  $x^{n-1} \in I$  aplicamos o mesmo raciocínio pois  $x^{n-1} = x \cdot x^{n-2} \in I$ . Repetindo o mesmo processo até  $x \cdot x^{n-(n-1)}$  temos que  $x \in I$ . Assim  $\sqrt{I} \subset I$  e, portanto,  $\sqrt{I} = I$ . ■

**Exemplo 1.1.19** *Sejam  $R = K[x, y]$ ,  $K$  corpo e  $I = \langle x, y \rangle$ . Temos que  $I$  é primo, pois, dados  $f, g \in K[x, y]$  tais que  $f \notin I$  e  $g \notin I$ , então  $f$  e  $g$  possuem termos constantes. Logo,  $f \cdot g$  também possui termo constante e assim,  $f \cdot g \notin I$ . Portanto, pela proposição anterior  $\sqrt{I} = I$ .*

A igualdade  $\sqrt{I} = I$  nem sempre acontece. Considere  $R$  e  $K$  como antes e  $I = \langle x^2, y \rangle$ . Vamos mostrar que  $\sqrt{I} = \langle x, y \rangle$ . Temos,

$$f \in \langle x, y \rangle \Rightarrow f = f_1 x + f_2 y ; f_1, f_2 \in K[x, y] \Rightarrow f^2 = f_1^2 x^2 + 2f_1 f_2 xy + f_2^2 y^2 \in \langle x^2, xy, y^2 \rangle \subset \langle x^2, y \rangle \Rightarrow f^2 \in \langle x^2, y \rangle \Rightarrow f^2 \in I \Rightarrow \exists k = 2 ; f^2 \in I \Rightarrow f \in \sqrt{I}.$$

Logo,  $\langle x, y \rangle \subset \sqrt{I}$ .

Por outro lado,

$f \in \sqrt{I} \Rightarrow f^k \in I$  para algum  $k \Rightarrow f^k \in \langle x^2, y \rangle \subset \langle x, y \rangle \Rightarrow f^k \in \langle x, y \rangle \Rightarrow f \cdot f^{k-1} \in \langle x, y \rangle$ .

Como  $\langle x, y \rangle$  é primo temos que  $f \in \langle x, y \rangle$  ou  $f^{k-1} \in \langle x, y \rangle$ . Utilizando o mesmo argumento da Proposição 1.1.18 temos que  $f \in \langle x, y \rangle$ . Logo,  $\sqrt{I} \subset \langle x, y \rangle$ .

Portanto,  $\sqrt{I} = \langle x, y \rangle$ . Assim,  $I = \langle x^2, y \rangle \neq \langle x, y \rangle = \sqrt{I}$ .

É importante notarmos que  $I = \langle x^2, y \rangle$  não é primo, pois, sejam  $f = x \in K[x, y]$  e  $g = x + y \in K[x, y]$ . Temos que  $f \cdot g = x^2 + xy \in I$ , mas  $f \notin I$  e  $g \notin I$ .

Deste exemplo, concluímos que a hipótese de  $I$  ser primo na Proposição 1.1.18 é imprescindível.

**Definição 1.1.20** Seja  $I$  é um ideal de  $R$ . Dizemos que  $I$  é um **ideal radical** se  $\sqrt{I} = I$ .

**Observação 1.1.21** Segue da Proposição 1.1.18 que todo ideal primo é ideal radical.

**Definição 1.1.22** Sejam  $R$  um anel e  $I$  um ideal de  $R$ . Dizemos que  $I$  é **primário** se  $I \neq R$  e se  $xy \in I$  então  $x \in I$  ou  $y^n \in I$  para algum  $n > 0$ . Para  $P$  ideal primo de  $R$ , dizemos que  $I$  é  **$P$ -primário** se  $\sqrt{I} = P$ .

Claramente, todo ideal primo é ideal primário. Além disso, temos a seguinte caracterização:

**Proposição 1.1.23**  $I$  é um ideal primário se, e somente se,  $I \neq R$  e cada divisor de zero em  $R/I$  é nilpotente.

**Demonstração:**

Considere  $I$  um ideal primário e seja  $\bar{b} := b + I$  um divisor de zero em  $R/I$ . Assim,  $b \notin I$  e existe  $\bar{a} := a + I$  com  $a \notin I$  tais que  $\bar{b} \cdot \bar{a} = \bar{0}$ . Logo,  $ba \in I$ . Como  $I$  é um ideal primário e  $a \notin I$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $b^n \in I$ . Portanto,  $(\bar{b})^n = \bar{0}$ , ou seja,  $\bar{b}$  é nilpotente.

Reciprocamente, seja  $ab \in I$  e suponha que  $a \notin I$ . Temos duas possibilidades:

- 1)  $b \in I$  e, com isso, segue que  $I$  é um ideal primário.
- 2)  $b \notin I$ . Neste caso,  $\bar{b}$  é um divisor de zero de  $R/I$ . Assim,  $\bar{b}$  é nilpotente, ou seja,  $(\bar{b})^n = \bar{0}$ . Logo, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $b^n \in I$ . Portanto,  $I$  é um ideal primário. ■

**Exemplo 1.1.24** Sejam  $R = K[x, y]$  e  $I = \langle x^2, y \rangle$ , com  $K$  um corpo.

Então  $R/I \cong K[x]/\langle x^2 \rangle$ , em que os divisores de zero são múltiplos de  $x$  e, portanto, são nilpotentes. Logo,  $I$  é um ideal primário.

## 1.1.2 Anel noetheriano

O fato de um anel ser noetheriano nos fornece propriedades muito úteis conforme apresentaremos a seguir. Adiante trabalharemos em um anel especial que é noetheriano e assim sempre que preciso poderemos usufruir dessas propriedades.

**Definição 1.1.25** Sejam  $R$  um anel e  $I$  um ideal de  $R$ . Uma **decomposição primária** de  $I$  é uma expressão de  $I$  como uma intersecção finita de ideais primários  $\{I_j\}_{j=1}^n$ , isto é,

$$I = \bigcap_{j=1}^n I_j.$$

Uma decomposição primária é dita **minimal** se

- i)  $\sqrt{I_i}$  são ideais primos distintos de  $R$ ;
- ii) Para todo  $j = 1, \dots, r$ , temos  $\bigcap_{i=1, j \neq i}^r I_i \not\subseteq I_j$ .

**Teorema 1.1.26 (Teorema da Unicidade)** *Seja  $I$  decomponível com  $I = \bigcap_{i=1}^r I_i$  uma decomposição primária minimal de  $I$ . Os ideais primos  $P_i = \sqrt{I_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$  são independentes da decomposição.*

A demonstração pode ser vista em [2, Teorema 4.5, p.57].

Seguindo a notação deste resultado, temos bem definido o seguinte conceito:

**Definição 1.1.27** *Definimos os **primos associados de  $I$**  como sendo  $\{P_1, \dots, P_r\}$  e denotamos por  $\text{Ass}(I) = \{P_1, \dots, P_r\}$ . Chamamos de **ideais primos minimais de  $I$**  os elementos minimais de  $\text{Ass}(I)$  e os demais elementos que não são minimais são chamados de **ideais primos imersos ou primos embutidos**.*

Veremos um anel em que todo ideal possui uma decomposição primária minimal.

**Definição 1.1.28** *Seja  $R$  um anel. Dizemos que  $R$  é **noetheriano** se toda cadeia crescente de ideais  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq \dots$  em  $R$  é estacionária, ou seja, se existe  $n$  tal que  $I_k = I_{k+1}$ , para  $k \geq n$ .*

*Dizemos que um  $R$ -módulo  $M$  é **noetheriano** se toda cadeia crescente de submódulos  $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq \dots$  em  $M$  é estacionária, ou seja, se existe  $n$  tal que  $M_k = M_{k+1}$ , para  $k \geq n$ .*

**Teorema 1.1.29** *Em um anel noetheriano todo ideal tem uma decomposição primária (que sempre pode ser escolhida minimal).*

A demonstração pode ser vista em [2, Teorema 7.13, p.93].

Seguem outras propriedades muito úteis envolvendo módulos/aneis noetherianos.

**Proposição 1.1.30** *Um anel  $R$  é noetheriano se, e somente se, todo ideal em  $R$  é finitamente gerado.*

**Demonstração:**

Seja  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq \dots$  uma cadeia crescente de ideais em  $R$ .

Consideremos  $I = \bigcup_{n \geq 1} I_n$ .

Mostraremos que  $I$  é um ideal de  $R$ .

Inicialmente temos que  $I \neq \emptyset$  pois como  $I_n$  é ideal segue que  $I_n \neq \emptyset$ .

Sejam  $a, b \in I$ . Então  $a, b \in I_k$  para algum  $k$ . Assim,  $a - b \in I_k$  pois  $I_k$  é ideal. Logo  $a - b \in I$  e com isso,  $I$  é um grupo. Claramente  $I$  é comutativo.

Sejam  $a \in R$  e  $i \in I$ . Assim,  $i \in I_k$  para algum  $k$ . Como  $I_k$  é ideal concluímos que  $ai \in I_k$ , ou seja,  $ai \in I$ . Portanto,  $I$  é um ideal de  $R$ .

Logo,  $I$  é finitamente gerado por hipótese. Então,  $I = a_1R + \dots + a_mR$  onde  $a_1, \dots, a_m \in I$ . Para todo  $i = 1, \dots, m$  existe  $n_i$  tal que  $a_i \in I_{n_i}$ . Seja  $N = \max\{n_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ .

Logo,  $I_{n_i} \subset I_N$  para todo  $i$ . Então,  $a_i \in I_N$  para todo  $i$ . Assim,  $I = a_1R + \dots + a_mR \subset I_N \subset I$ . Com isso,  $I_N = I$ . Portanto,  $I_n = I_N = I$  para todo  $n \geq N$ , ou seja, a cadeia de ideais  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq \dots$  é estacionária e concluímos então que  $R$  é noetheriano. ■

Assim, todo corpo é um anel noetheriano (pois os únicos ideais são os triviais).

**Proposição 1.1.31** *Se  $R$  é um anel local (possui um único ideal maximal) noetheriano então todo  $R$ -submódulo de um  $R$ -módulo finitamente gerado é finitamente gerado.*

A demonstração pode ser vista em [2, Proposição 6.2, p.82].

**Proposição 1.1.32** *Seja  $R$  um anel e  $I$  um ideal de  $R$ . Se  $R$  é noetheriano então  $\frac{R}{I}$  é noetheriano.*

**Demonstração:**

Como  $R$  é noetheriano então todo ideal de  $R$  é finitamente gerado pela Proposição 1.1.30. Assim,  $I$  é finitamente gerado.

Seja  $L$  um ideal de  $\frac{R}{I}$ , então  $L = \frac{J}{I}$  onde  $I \subseteq J$  e  $J$  é um ideal de  $R$ .

Como  $J$  é um ideal de  $R$  novamente usando a Proposição 1.1.30 segue que  $J$  é finitamente gerado. Assim,  $J = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  e  $I = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$  com  $k \leq n$  pois  $I \subset J$ .

Temos que

$$x \in \frac{J}{I} \Rightarrow x = j + I \mid j \in J \Rightarrow x = j_1x_1 + \dots + j_kx_k + j_{k+1}x_{k+1} + \dots + j_nx_n + I.$$

Como  $j_1x_1 + \dots + j_kx_k \in I$  temos que  $x = j_{k+1}x_{k+1} + \dots + j_nx_n + I$ , ou seja,  $x \in \langle x_{k+1} + I, \dots, x_n + I \rangle$ .

Assim,  $\frac{J}{I} \subset \langle x_{k+1} + I, \dots, x_n + I \rangle$ .

Agora, seja  $x \in \langle x_{k+1} + I, \dots, x_n + I \rangle$ . Então,  $x = a_{k+1}x_{k+1} + \dots + a_nx_n + I \in \frac{J}{I}$ . Logo,  $\frac{J}{I} = \langle x_{k+1} + I, \dots, x_n + I \rangle$ . Portanto, todo ideal  $L = \frac{J}{I}$  de  $\frac{R}{I}$  é finitamente gerado e disso temos que  $\frac{R}{I}$  é noetheriano. ■

**Teorema 1.1.33 (Teorema da base de Hilbert)** *Se  $R$  é noetheriano, então o anel de polinômios  $R[x]$  e o anel das séries de potências convergentes  $R[[x]]$  são noetherianos.*

A demonstração da primeira parte pode ser vista em [2, Teorema 7.5, p.90] (para a segunda parte a demonstração é análoga).

Dado um anel local noetheriano temos dois interessantes e importantes resultados sobre seu ideal maximal.

**Lema 1.1.34** *Sejam  $R$  um anel local noetheriano com  $\mathcal{M}$  seu ideal maximal e  $I \subset R$  um ideal  $\mathcal{M}$ -primário. Então  $B = \frac{R}{I}$  é um anel local.*

A demonstração pode ser vista em [20, Lema 3.2.4, p.76].

**Proposição 1.1.35** *Sejam  $R$  um anel local noetheriano com ideal maximal  $\mathcal{M}$  e  $J$  um ideal em  $R$ . Então existe  $r \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{M}^{k+r} \cap J \subset \mathcal{M}^k J$ .*

A demonstração pode ser vista em [14, Teorema 8.5, p. 59].

Considere  $R$  um anel,  $M$  um  $R$ -módulo,  $S \subset R$  tal que  $1 \in S$  e  $S$  é fechado para a multiplicação. Em  $M \times S = \{(a, s) \mid a \in M \text{ e } s \in S\}$  é definida uma relação da seguinte maneira

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists u \in S \mid (at - bs)u = 0.$$

Temos que  $\sim$  é uma relação de equivalência.

**Notação:** Denotamos por  $S^{-1}M$  ou  $M_S$  o conjunto das classes de equivalência de  $\sim$ , ou seja,

$$S^{-1}M := \{ \overline{(a, s)} \mid a \in M \text{ e } s \in S \} = \{ \frac{a}{s} \mid a \in M \text{ e } s \in S \}.$$

Em  $S^{-1}M$  colocamos duas operações  $+$ ,  $\cdot$  tais que  $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$  e  $\frac{a}{s} \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$ . É fácil verificar que estas duas operações estão bem definidas.

**Definição 1.1.36** O anel  $S^{-1}M$  é chamado de **localização** ou **módulo de frações** de  $M$  em relação á  $S$ .

**Notação:** Sejam  $P$  um ideal primo de  $M$  e  $S = R - P$ . Neste caso é comum usarmos a notação  $M_P$  para  $M_S$ .

**Observação 1.1.37** Claramente da definições de soma direta e localização, dados  $\{M_i\}_{i \in I}$  uma família de  $R$ -módulos e  $S \subset R$  tal que  $1 \in S$  com  $S$  é fechado para a multiplicação, temos

$$S^{-1} \left( \bigoplus_{i \in I} M_i \right) = \bigoplus_{i \in I} S^{-1}(M_i).$$

Vamos relacionar a localização de um quociente com o quociente das localizações, mas antes precisamos do seguinte conceito:

**Definição 1.1.38** Sejam  $M_i$  módulos com  $i \in \mathbb{N}$ . Uma sequência

$$\cdots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \rightarrow \cdots$$

é **exata** se,  $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$ .

**Observação 1.1.39** Sejam  $M$  e  $N$  módulos. Temos que  $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} M \oplus N \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 0$  é claramente uma sequência exata onde  $i$  é a inclusão canônica e  $\pi$  é a projeção canônica.

Seja  $u : M \rightarrow N$  um homomorfismo de  $R$ -módulos. A partir de  $u$  temos o homomorfismo de  $S^{-1}R$ -módulos,  $S^{-1}u : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$  dado por  $S^{-1}u \left( \frac{m}{s} \right) = \frac{u(m)}{s}$ . Além do mais se considerarmos  $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$  temos  $S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}u} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}v} S^{-1}P$ , tal que

$$S^{-1}(v \circ u) \left( \frac{m}{s} \right) = \frac{v \circ u(m)}{s} = S^{-1}v \left( \frac{u(m)}{s} \right) = S^{-1}v \circ S^{-1}u \left( \frac{m}{s} \right).$$

Assim,  $S^{-1}(v \circ u) = S^{-1}v \circ S^{-1}u$ .

**Proposição 1.1.40** Sejam  $R$  um anel,  $M$  um  $R$ -módulo e  $N$  um  $R$ -submódulo de  $M$ . Então  $S^{-1} \left( \frac{M}{N} \right)$  e  $\frac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$  são isomorfos.

**Demonstração:**

Temos que  $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{N} \rightarrow 0$  é exata, onde  $i$  é a inclusão canônica e  $\pi$  é a projeção canônica. Então  $Im(i) = Ker(\pi)$  e, assim,  $\pi \circ i = 0$ . Logo,  $S^{-1}(\pi \circ i) = 0$ , ou seja,  $S^{-1}\pi \circ S^{-1}i = 0$ . Portanto,  $Im(S^{-1}i) \subset Ker(S^{-1}\pi)$ .

Por outro lado, seja  $\frac{n}{s} \in Ker(S^{-1}\pi)$ . Assim,  $S^{-1}\pi \left( \frac{n}{s} \right) = 0$ , ou seja,  $\frac{\pi(n)}{s} = 0$ . Logo, existe  $t \in S$  tal que  $t\pi(n) = 0$  e, como  $\pi$  é homomorfismo de  $R$ -módulos, segue que  $\pi(tn) = 0$ . Então,  $tn \in Ker(\pi) = Im(i)$ . Assim  $tn = i(m)$ , onde  $m \in M$ .

Notemos que  $\frac{n}{s} = \frac{tn}{ts} = \frac{f(m)}{ts} = S^{-1}f\left(\frac{m}{ts}\right) \in \text{Im}(S^{-1}f)$ . Logo,  $\text{Ker}(S^{-1}g) \subset \text{Im}(S^{-1}i)$ . Portanto,  $\text{Ker}(S^{-1}\pi) = \text{Im}(S^{-1}i)$ .

Assim, a sequência  $0 \rightarrow S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}i} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\pi} S^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) \rightarrow 0$  é exata e, como  $S^{-1}\pi$  é sobrejetora e  $S^{-1}i$  é injetora, segue que  $\text{Im}(S^{-1}\pi) = S^{-1}\left(\frac{M}{N}\right)$  e  $\text{Ker}(S^{-1}\pi) = S^{-1}N$ .

Como  $\pi$  é um homomorfismo temos pelo Teorema 1.1.6 que  $\frac{S^{-1}M}{\text{Ker}(S^{-1}\pi)} \cong \text{Im}(S^{-1}\pi)$ . Logo,  $\frac{S^{-1}M}{\text{Ker}(S^{-1}N)} \cong S^{-1}\left(\frac{M}{N}\right)$ . ■

Um importante ideal pode ser obtido através de localização, como segue.

**Definição 1.1.41** Para um ideal primo  $P$  em um anel noetheriano  $R$ , definimos a  $k$ -ésima potência simbólica de  $P$  como sendo  $P^{(k)} = R \cap (P^k R_P)$ .

**Observação 1.1.42** Notemos que  $P^{(k)}$  é um ideal primário. De fato, suponha que  $f \notin S^{-1}P^k$  e que para todo  $n$ ,  $g^n \notin S^{-1}P^k$ . Assim,  $f \neq \frac{a}{r}$  com  $a \in P^k$  e  $r \in S$  e  $g^n \neq \frac{b}{t}$  com  $b \in P^k$  e  $t \in S$ . Logo  $fg \neq \frac{a}{r} \frac{b}{t}$ . Então  $fg \neq \frac{c}{s}$  com  $c \in P^k$  e  $s \in S$ . Assim  $fg \notin S^{-1}P^k$ . Portanto,  $S^{-1}P^k$  é primário e concluímos então que  $P^{(k)}$  é primário.

Dado um ideal radical  $I$  de  $R$  temos que  $I$  tem uma decomposição primária (Teorema 1.1.29),  $I = P_1 \cap \dots \cap P_r$ , onde  $P_1, \dots, P_r$  são ideais primos em  $R$  tais que  $P_i$  não está contido em  $P_j$  para  $i \neq j$ . A menos de ordem de  $P_1, \dots, P_r$  esta decomposição é única.

**Definição 1.1.43** Definimos a  $k$ -ésima potência simbólica de  $I$  como sendo  $I^{(k)} = P_1^{(k)} \cap \dots \cap P_r^{(k)}$ .

### 1.1.3 Dimensão

Dados um anel  $R$  e  $M$  um  $R$ -módulo, introduziremos o conceito de dimensão de  $M$  visto como  $R$ -módulo, a chamada dimensão de Krull de  $M$ . Quando  $M$  for um  $R$ -espaço vetorial de dimensão finita ( $R$  um corpo), a sua dimensão de Krull e a dimensão como espaço vetorial estão relacionadas.

**Definição 1.1.44** Seja  $M$  um  $R$ -módulo. Uma **cadeia de submódulos** de  $M$  é uma sequência de submódulos de  $M$ ,  $(M_i)$  para  $i = 1, \dots, r$  tal que

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_r = \{0\}.$$

Chamamos  $r$  de **longitude** (ou **comprimento**) da cadeia anterior.

Uma **sequência de composição** de  $M$  é uma cadeia maximal, isto é,  $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_r = \{0\}$  tal que entre  $M_n$  e  $M_{n+1}$  não existe nenhum  $R$ -submódulo de  $M$  para  $n = 0, \dots, r-1$ .

Nesta direção temos dois importantes resultados.

**Proposição 1.1.45** Suponha que  $M$  tem uma sequência de composição de longitude  $n$ . Então toda sequência de composição de  $M$  tem longitude  $n$  e cada cadeia em  $M$  pode ser estendida a uma sequência de composição.

A demonstração pode ser vista em [2, Proposição 6.7, p.84].

**Proposição 1.1.46** *Se  $M$  é noetheriano então  $M$  tem uma sequência de composição.*

**Demonstração:**

Considere  $M = M_0$ . Como  $M$  é noetheriano então todo conjunto de submódulos de  $M$  possui um submódulo maximal. Assim, existe um submódulo maximal  $M_1 \subset M_0$ . Analogamente,  $M_1$  tem um submódulo maximal  $M_2 \subset M_1$ . Repetindo esse raciocínio temos uma cadeia  $M_0 \supset M_1 \supset \dots$  e como  $M$  é noetheriano essa cadeia é estacionária e portanto é uma série de composição de  $M$ . ■

**Definição 1.1.47** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo noetheriano. Definimos a **longitude** (ou **comprimento**) de  $M$  como sendo a longitude (ou comprimento) de uma das suas sequências de composição.*

**Notação:**  $l(M)$ .

**Definição 1.1.48** *Sejam  $R$  um anel e  $P$  um ideal primo de  $R$ . O supremo de todos os comprimentos das cadeias  $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n$  onde  $P_i$  são ideais primos com  $P_n = P$  é chamado de **altura** de  $P$ .*

**Notação:**  $ht(P)$ .

**Definição 1.1.49** *A **dimensão de  $R$** , também chamada de **dimensão de Krull** de  $R$ , é definida como sendo o supremo das alturas de todos os ideais primos de  $R$ .*

**Notação:**  $\dim_{krull} R$  ou, simplesmente,  $\dim R$ .

**Definição 1.1.50** *Seja  $M \neq 0$  um  $R$ -módulo. Definimos a **dimensão** de  $M$  como sendo a dimensão de Krull do anel  $\frac{R}{Ann(M)}$ , onde  $Ann(M) = \{a \in R \mid aM = 0\}$ .*

Por convenção, se  $M = 0$ , dizemos que  $\dim M = -1$ . Notemos que se  $Ann(M) = \{0\}$  temos que  $\dim M = \dim R$ .

**Exemplo 1.1.51** *Seja  $K$  um corpo. Os únicos ideais de  $K$  são  $\{0\}$  e  $K$  e apenas o ideal  $\{0\}$  é primo. Assim, temos apenas uma cadeia  $P_0 = \{0\}$  que tem comprimento  $n = 0$ . Portanto,  $\dim K = 0$ .*

**Exemplo 1.1.52** *Sejam  $K$  um corpo e o anel dos polinômios  $A = K[x_1, \dots, x_n]$ . Por [14, Corolário 5.6, p.35] temos que  $\dim A = n$ . O mesmo vale para o anel das séries de potências  $K[[x_1, \dots, x_n]]$ , ou seja,  $\dim K[[x_1, \dots, x_n]] = n$ .*

Quando estivermos trabalhando com um  $R$ -espaço vetorial  $V$ , com  $R$  corpo, a dimensão de  $V$  será denotada por  $\dim_R V$ .

**Proposição 1.1.53** *Se  $V$  é um  $R$ -espaço vetorial,  $R$  um corpo, então  $\dim_R V = l(V)$ .*

A demonstração pode ser vista em [2, Proposição 6.10, p.85].

**Proposição 1.1.54** *Seja  $R$  um anel local com ideal maximal  $\mathcal{M}$  e  $M$  um  $R$ -módulo finitamente gerado. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- i)  $l(M) < \infty$  e  $l(M) \neq 0$ ;
- ii)  $M \neq 0$  e existe um inteiro  $n$  tal que  $\mathcal{M}^n M = 0$ ;
- iii)  $\dim M = 0$ .

A demonstração pode ser vista em [10, Lema 2.21, p.14].

Nessas notações, se  $R$  for um corpo e  $M$  for finitamente gerado satisfazendo as condições da proposição anterior conseguimos através das duas últimas proposições relacionar  $\dim M$  com  $\dim_R M$  através de  $l(M)$ .



### 1.1.4 Anel regular e anel Cohen-Macaulay

Segue a descrição de dois anéis importantes para este trabalho. Considere  $R$  um anel e  $M$  um  $R$ -módulo.

**Definição 1.1.55** Um elemento  $a \in R$  é  $M$ -regular se  $ax \neq 0$  para todo  $x \neq 0$  em  $M$ .

Uma sequência  $a_1, \dots, a_n$  de elementos de  $R$  é uma  $M$ -sequência, ou uma **sequência  $M$ -regular**, se as duas condições são satisfeitas:

- 1-)  $a_1$  é  $M$ -regular,  $a_2$  é  $\frac{M}{a_1M}$ -regular,  $\dots$ ,  $a_n$  é  $\frac{M}{\sum_{i=1}^{n-1} a_iM}$ -regular;
- 2-)  $\frac{M}{\sum_{i=1}^n a_iM}$  é diferente de zero.

Seja  $I$  um ideal de  $R$ . Se  $a_1, \dots, a_n$  é uma  $M$ -sequência tal que para qualquer  $b \in I$ ,  $a_1, \dots, a_n, b$  não é uma  $M$ -sequência então dizemos que  $a_1, \dots, a_n$  é uma  **$M$ -sequência maximal** em  $I$ .

**Exemplo 1.1.56** Sejam  $R$  um anel e  $R[x_1, \dots, x_n]$  o anel dos polinômios. Então,  $x_1, \dots, x_n$  é uma  $R$ -sequência. De fato,  $x_1$  é  $R$ -regular já que dado  $a_1 \in R$  com  $a_1 \neq 0$  segue que  $x_1a_1 \neq 0$  pois  $x_1 \neq 0$ . Além disso  $x_2$  é  $\frac{R}{a_1R}$ -regular pois seja  $a_2 \in \frac{R}{a_1R}$  com  $a_2 \neq \bar{0}$ . Então,  $a_2 = \tilde{a}_2 + a_1R$  com  $\tilde{a}_2 \notin a_1R$ . Assim,  $a_2x_2 = (\tilde{a}_2 + a_1R)x_2 = x_2\tilde{a}_2 + x_2a_1R \notin a_1R$  pois  $\tilde{a}_2 \notin a_1R$  e  $x_2 \neq 0$ .

Repetindo o raciocínio concluímos que  $x_i$  é  $\frac{R}{\sum_{j=1}^{i-1} a_jR}$ -regular para  $i = 3, \dots, n$ , pois  $x_3 \neq 0, \dots, x_n \neq 0$ .

Temos dois resultados importantes envolvendo este conceito.

**Proposição 1.1.57** Seja  $R$  um anel local com  $\mathcal{M}$  seu ideal maximal. Se  $\mathcal{M} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , então  $x_1, \dots, x_i$  é uma  $R$ -sequência para todo  $i$ .

**Demonstração:**

Temos que  $x_1$  é  $R$ -regular pois para todo  $f_1 \in R$  com  $f_1 \neq 0$  segue que  $x_1f_1 \neq 0$ , pois  $x_1 \neq 0$ .

Agora seja  $f_2 \in \frac{R}{x_1R}$ ,  $f_2 = \tilde{f}_2 + x_1R$  com  $\tilde{f}_2 \notin x_1R$ . Logo,  $x_2(\tilde{f}_2 + x_1R) = x_2\tilde{f}_2 + x_1x_2R \notin x_1R$  pois  $\tilde{f}_2 \notin x_1R$  e  $x_2 \neq 0$ . Portanto,  $x_2$  é  $\frac{R}{x_1R}$ -regular.

Seguindo o mesmo raciocínio conseguimos mostrar que  $x_i$  é  $\frac{R}{\sum_{j=1}^{i-1} x_jR}$ -regular para  $i = 3, \dots, n$ , pois  $x_3 \neq 0, \dots, x_n \neq 0$ .

Temos ainda que  $\frac{R}{\sum_{j=1}^n x_jR}$  é diferente de zero, pois cada  $x_i$  é não constante e assim  $\sum_{j=1}^n x_jR$  não possui termos constantes. Logo,  $R \neq \sum_{j=1}^n x_jR$ . ■

**Proposição 1.1.58** Sejam  $R$  um anel local noetheriano e  $J$  um ideal de  $R$  tal que  $J = \langle y_1, \dots, y_s \rangle$  com  $y_1, \dots, y_s$  uma  $R$ -sequência. Se considerarmos  $x_i = \sum_{1 \leq j \leq s} a_{ij}y_j$  com  $(a_{ij})$  invertível, então  $x_1, \dots, x_s$  é uma  $R$ -sequência.

A demonstração pode ser vista em [14, Observação 19.9, p.160].

**Definição 1.1.59** Para todo ideal  $I$  de  $R$ , definimos a  **$I$ -profundidade** de  $M$  como sendo o número de elementos de uma  $M$ -sequência maximal em  $I$ .

**Notação:**  $\text{depth}(I, M)$  denota a  $I$ -profundidade de  $M$ .

Se  $R$  é um anel local noetheriano com ideal maximal  $\mathcal{M}$  denotamos a  $\mathcal{M}$ -profundidade de  $M$  simplesmente por  $\text{depth}(M)$ .

No que segue seja  $R$  um anel local noetheriano com ideal maximal  $\mathcal{M}$ .

**Definição 1.1.60** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo finitamente gerado. Se  $M \neq 0$  com  $\text{depth}(M) = \dim M$  ou se  $M = 0$ , dizemos que  $M$  é um **módulo Cohen-Macaulay**. Se  $R$  é Cohen-Macaulay como um  $R$ -módulo, dizemos que  $R$  é um **anel Cohen-Macaulay**.*

**Definição 1.1.61** *Se  $\dim R = r$  e  $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{M}$  geram um ideal  $\mathcal{M}$ -primário dizemos que  $\{x_1, \dots, x_r\}$  é um **sistema de parâmetros** de  $R$ . Dizemos que  $R$  é **regular** se existe um sistema de parâmetros gerando  $\mathcal{M}$ . Tal sistema de parâmetros é chamado de **sistema regular de parâmetros**.*

Seguem alguns resultados importantes envolvendo estes conceitos.

**Teorema 1.1.62** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo finitamente gerado.*

*i) Se  $M$  é um módulo Cohen-Macaulay então  $M$  não tem primos embutidos.*

*ii) Se  $a_1, \dots, a_r$  é uma sequência  $M$ -regular em  $\mathcal{M}$  e  $M' = \frac{M}{\langle a_1, \dots, a_r \rangle M}$  então  $M$  é Cohen-Macaulay se, e somente se,  $M'$  é Cohen-Macaulay.*

A demonstração pode ser vista em [14, Teorema 17.3, p.134].

**Proposição 1.1.63** *Sejam  $R$  um anel regular e  $I \subset R$  um ideal. Então,  $\frac{R}{I}$  é regular se, e somente se,  $I$  é gerado por um subconjunto de um sistema regular de parâmetros de  $R$ .*

A demonstração pode ser vista em [5, Proposição 2.2.4, p.66].

**Proposição 1.1.64** *Seja  $R$  um anel Cohen-Macaulay. Toda  $R$ -sequência é parte de um sistema regular de parâmetros de  $R$ .*

A demonstração pode ser vista em [14, Teorema 17.4, p.135].

O próximo resultado nos garante que a localização de um anel regular  $R$  com relação a  $S = R - P$  é regular.

**Teorema 1.1.65 (Teorema de Serre)** *Seja  $R$  um anel regular e  $P$  um ideal primo de  $R$  então  $R_P$  é também regular.*

A demonstração pode ser vista em [14, Teorema 19.3, p.157].

**Definição 1.1.66** *Sejam  $B, C$   $R$ -módulos,  $P$  um  $R$ -módulo livre. Dizemos que  $P$  é **projetivo** se  $\beta : B \rightarrow C$  é epimorfismo,  $P$  é livre e  $\alpha : P \rightarrow C$  aplicação qualquer, então existe  $\gamma : P \rightarrow B$  com  $\alpha = \beta \circ \gamma$ .*

Seja  $R$  um anel e  $M$  um  $R$ -módulo.

**Definição 1.1.67** *Uma **resolução projetiva** de  $M$  é uma sequência exata*

$$\dots P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

em que cada  $P_n$  é um  $R$ -módulo projetivo. Tal resolução é dita com **comprimento**  $n$  se  $P_n \neq 0$  e  $P_i = 0, \forall i > n$ .

**Definição 1.1.68** A **dimensão projetiva** de  $M$  é um inteiro  $n$ , se ele for o menor inteiro tal que existe uma resolução projetiva de  $M$  com comprimento  $n$ .

**Notação:**  $\text{projdim}(M)$ .

**Teorema 1.1.69** Seja  $R$  um anel local noetheriano e  $I$  um ideal próprio de  $R$  tal que  $\text{projdim}(I) < \infty$ . Então,  $I$  é gerado por uma  $R$ -sequência se, e somente se,  $\frac{I}{I^2}$  é um módulo livre sobre  $\frac{R}{I}$ .

A demonstração pode ser vista em [14, Teorema 19.9, p.160].

O próximo resultado é um artifício útil para garantir que  $\text{projdim}(I) < \infty$  e, assim, garantir a hipótese do teorema anterior e poder usá-lo.

**Teorema 1.1.70** Seja  $R$  um anel local noetheriano com  $\mathcal{M}$  seu ideal maximal. Então,  $R$  é regular se, e somente se,  $\text{projdim}(M) < \infty$  para todo  $R$ -módulo  $M$ .

A demonstração pode ser vista em [5, Teorema 2.2.7, p.66].

## 1.2 Teoria de Singularidades

Nesta seção vamos trazer os principais resultados da Teoria de Singularidades necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

### 1.2.1 Estrutura algébrica de $\mathcal{O}_n$

Seja  $X$  o conjunto das aplicações analíticas  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ . Introduzimos em  $X$  a seguinte relação de equivalência:

**Definição 1.2.1** Sejam  $f_1, f_2 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$  aplicações analíticas. Dizemos que  $f_1$  e  $f_2$  são **equivalentes** quando existir um aberto  $U \subset \mathbb{C}^n$  tal que as restrições  $f_1|_U$  e  $f_2|_U$  coincidam.

**Notação:**  $f_1 \sim f_2$

**Definição 1.2.2** As classes de equivalência desta relação são chamadas de **germes de aplicações** e um elemento da classe de equivalência é chamado de **representante do germe**.

**Notação:** Para  $x \in U$ ,  $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, f(x))$  ou  $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow \mathbb{C}^p$ , denotam o germe da aplicação  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$  em uma vizinhança de  $x$ .

**Definição 1.2.3** Para cada germe  $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, f(x))$ , a **derivada**  $d_x f$  é o germe em uma vizinhança de  $x$  da aplicação derivada em  $x$  de qualquer representante. Dizemos que  $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, f(x))$  é um germe de **difeomorfismo** se um de seus representantes é um difeomorfismo local e o seu **posto** é definido como o posto de sua derivada em  $x$ , ou seja, é o posto da matriz jacobiana do representante em  $x$ .

**Definição 1.2.4** O **espaço dos jatos**  $J^k(n, p)$  é o espaço vetorial das aplicações  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$  onde cada componente  $f_i$  de  $f$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $k$  nas coordenadas canônicas  $x_1, \dots, x_n$  de  $\mathbb{C}^n$  com termo constante nulo. Os elementos de  $J^k(n, p)$  são chamados de  **$k$ -jatos**.

**Definição 1.2.5** Sejam  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$  aplicação analítica e  $a \in \mathbb{C}^n$ . Definimos a aplicação  $j^k f : \mathbb{C}^n \rightarrow J^k(n, p)$  dada por  $j^k f(a) =$  polinômio de Taylor de  $f(x+a) - f(a)$  de ordem  $k$  na origem. A aplicação  $j^k f$  é claramente suave e  $j^k f(a)$  é chamado de  **$k$ -jato de  $f$  em  $a$** .

**Exemplo 1.2.6** Sejam  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x) = \text{sen}(x)$ . O 3-jato de  $f$  na origem é

$$j^3 f(0) = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = \cos(0)x - \frac{\text{sen}(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{6}x^3 = x - \frac{x^3}{6}.$$

**Exemplo 1.2.7** Seja  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $f(x, y) = (x, y^2, xy)$ . Assim,

$$j^3 f(0, 0) = d_{(0,0)}f(x, y) + \frac{1}{2}d_{(0,0)}^2 f(x, y) + \frac{1}{6}d_{(0,0)}^3 f(x, y).$$

Dado  $f_i : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , temos que

$$d_{(0,0)}^k f_i(x, y) = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{\partial^k f_i}{\partial x^{k-l} \partial y^l}(0, 0) x^{k-l} y^l, \text{ onde } \binom{k}{l} = \frac{k!}{(k-l)!l!}.$$

Como  $f_1 = x$ ,  $f_2 = y^2$  e  $f_3 = xy$ , temos

$$j^3 f(0, 0) = (x, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 2y^2, 2xy) + \frac{1}{6}(0, 0, 0) = (x, y^2, xy) = f(x, y).$$

O conjunto dos germes de aplicações analíticas  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  é denotado por  $\mathcal{O}_n$ . O conjunto dos germes em que  $f(0) = 0$  é denotado por  $\mathcal{O}_n^0$ .

Vamos trabalhar em  $\mathcal{O}_n$  e por isso no que segue apresentaremos propriedades importantes que este conjunto satisfaz.

Denotando um germe em  $\mathcal{O}_n$  por  $[f]$  e considerando as operações  $[f] + [g] := [f + g]$  e  $[f].[g] := [f.g]$  é fácil ver que  $(\mathcal{O}_n, +, \cdot)$  é um anel.

No que segue, escreveremos simplesmente  $f$  para um elemento de  $\mathcal{O}_n$ .

**Proposição 1.2.8**  $f \in \mathcal{O}_n$  é invertível se, e somente se,  $f(0) \neq 0$ .

**Demonstração:**

Seja  $f \in \mathcal{O}_n$  invertível. Então existe  $g \in \mathcal{O}_n$  tal que  $fg = 1$ , onde 1 é o elemento identidade de  $\mathcal{O}_n$ . Em particular,  $f(0).g(0) = 1$ . Se  $f(0) = 0$  teríamos  $0 = 1$ , contradição. Logo,  $f(0) \neq 0$ .

Reciprocamente, consideremos  $f(0) \neq 0$ . Pelo Teorema da Conservação do Sinal, existe uma vizinhança aberta  $U \subset \mathbb{C}^n$  contendo 0 tal que  $f(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U$ . Assim, para  $x \in U$ , existe  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ , assim,  $f(x).g(x) = 1$ . Portanto,  $f$  é invertível. ■

**Proposição 1.2.9**  $\mathcal{O}_n$  é um anel local cujo ideal maximal é  $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n \mid f(0) = 0\}$ .

**Demonstração:**

Vamos mostrar que  $\mathcal{O}_n$  possui um único ideal maximal:  $\mathcal{M}_n$ .

Claramente  $\mathcal{M}_n$  é um ideal de  $\mathcal{O}_n$ .

Seja  $I$  um ideal em  $\mathcal{O}_n$  tal que  $\mathcal{M}_n \subset I$ . Se  $\mathcal{M}_n \neq I$ , então existe  $f \in I$  tal que  $f \notin \mathcal{M}_n$ . Assim,  $f(0) \neq 0$ , o que garante que  $f$  é invertível, pela proposição anterior. Logo  $1 \in I$ , o que assegura que  $I = \mathcal{O}_n$  e portanto  $\mathcal{M}_n$  é um ideal maximal.

Seja  $J$  um ideal maximal de  $\mathcal{O}_n$  com  $J \neq \mathcal{M}_n$ . Assim existe  $f \in J$  tal que  $f(0) \neq 0$ . Novamente pela proposição anterior  $f$  é invertível e, portanto,  $J = \mathcal{O}_n$ . Assim  $\mathcal{M}_n$  é o único ideal maximal de  $\mathcal{O}_n$  e, portanto,  $\mathcal{O}_n$  é um anel local. ■

A próxima proposição nos diz que  $\mathcal{M}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  e usaremos muito este fato ao longo de todo o trabalho. Para demonstrá-la precisamos do Lema de Hadamard.

**Lema 1.2.10 (Lema de Hadamard)** *Sejam  $U$  uma vizinhança convexa de  $0$  em  $\mathbb{C}^n$  e  $f : U \times \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}$  suave tal que  $f(0, y) = 0$ , para qualquer  $y \in \mathbb{C}^q$ . Então existem funções  $f_1, \dots, f_n$  definidas em  $U \times \mathbb{C}^q$  tais que  $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_q)$  e  $\gamma(t) = (tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q)$ .

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_0^1 (f \circ \gamma)' dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(x, y) - f(0, y) = f(x, y) - 0 = f(x, y).$$

Pela Regra da Cadeia temos que  $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ . Notemos que

$$f'(\gamma(t)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)), \frac{\partial f}{\partial y_1}(\gamma(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_q}(\gamma(t)) \right) \text{ e } \gamma'(t) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Assim,  $f'(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))x_n$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f \circ \gamma)' dt &= \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))x_n \right) dt = \\ &= x_1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) dt + \dots + x_n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) dt. \end{aligned}$$

Portanto,  $f(x, y) = \int_0^1 (f \circ \gamma)' dt = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ , onde  $f_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) dt$ , como queríamos. ■

**Proposição 1.2.11** *O ideal  $\mathcal{M}_n$  é gerado por  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .*

**Demonstração:**

Seja  $f \in \mathcal{M}_n$ . Aplicando o Lema de Hadamard para o caso  $q = 0$ , temos que existem  $f_1, \dots, f_n$  tais que  $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$  e, assim,  $f \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ . Logo  $\mathcal{M}_n \subset \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .

Seja  $f \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , ou seja,  $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ . Temos que  $f \in \mathcal{M}_n$  pois  $f(0) = 0f_1 + \dots + 0f_n = 0$ .

Logo  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset \mathcal{M}_n$  e, portanto,  $\mathcal{M}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ . ■

**Observação 1.2.12** Temos que  $\mathcal{O}_n$  é isomorfo a  $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$  (isso pode ser visto em [9, p. 3]). Assim, como  $\mathbb{C}$  é corpo e, aplicando  $n$  vezes o Teorema 1.1.33, temos que  $\mathcal{O}_n$  é um anel noetheriano.

**Observação 1.2.13** Pela Proposição 1.1.57 como  $\mathcal{M}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  é o ideal maximal de  $\mathcal{O}_n$  segue que  $x_1, \dots, x_i$  é uma  $\mathcal{O}_n$ -sequência para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Observação 1.2.14** Como  $\mathcal{O}_n$  é isomorfo ao anel das séries de potências  $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$  que tem dimensão  $n$  (isso pode ser visto [14, Corolário 5.6, p.35]) segue que  $\dim \mathcal{O}_n = n$  e como  $\mathcal{M}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  é um ideal  $\mathcal{M}_n$ -primário segue que  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é um sistema de parâmetros de  $\mathcal{O}_n$ . Portanto,  $\mathcal{O}_n$  é regular.

**Observação 1.2.15** Como  $\mathcal{O}_n$  é isomorfo a  $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$  segue pelo Exemplo 1.1.14 que  $\mathcal{O}_n$  é uma  $\mathbb{C}$ -álgebra.

**Proposição 1.2.16** Se  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é regular então  $I$  é um ideal radical de  $\mathcal{O}_n$ .

**Demonstração:**

Sendo  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  regular, podemos considerar as variáveis  $u_1, \dots, u_s, y_1, \dots, y_p$  tais que  $I = \langle y_1, \dots, y_p \rangle$  (ver Proposição 1.1.63).

Sejam  $f, g \in \mathcal{O}_n$  tais que  $f \notin I$  e  $g \notin I$ . Assim, ao menos um dos termos de  $f$  é constante ou depende apenas de  $u_1, \dots, u_s$ . Analogamente, ao menos um dos termos de  $g$  é constante ou depende apenas de  $u_1, \dots, u_s$ . Logo,  $f.g$  terá ao menos um termo constante ou dependendo apenas de  $u_1, \dots, u_s$ . Assim,  $f.g \notin I$ . Portanto,  $I$  é um ideal primo em  $\mathcal{O}_n$ .

Vimos na Observação 1.1.21 que todo ideal primo é radical e assim concluímos que se  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  regular então  $I$  é um ideal radical de  $\mathcal{O}_n$ . ■

Queremos agora obter uma relação biunívoca entre os ideais de  $\mathcal{O}_n$  e certas classes de equivalência especiais que serão definidas no que segue.

**Definição 1.2.17** Uma **variedade analítica (algébrica)** em um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{C}^n$  é um subconjunto de  $U$  onde existe uma vizinhança aberta de cada ponto desse subconjunto que é o conjunto de zeros comuns de um número finito de funções analíticas (polinomiais) definidas nessa vizinhança.

Considere os pares  $(X_\alpha, U_\alpha)$ , onde  $U_\alpha$  é uma vizinhança da origem em  $\mathbb{C}^n$  e  $X_\alpha$  é uma variedade analítica (algébrica) de  $U_\alpha$ .

**Definição 1.2.18** Dois pares  $(X_1, U_1)$  e  $(X_2, U_2)$  são **equivalentes** se existe uma vizinhança  $W \subset U_1 \cap U_2$  da origem tal que  $W \cap X_1 = W \cap X_2$ .

Esta relação é uma relação de equivalência.

**Definição 1.2.19** Uma classe de equivalência da relação anterior é chamada de **germe de uma variedade analítica (algébrica)** na origem em  $\mathbb{C}^n$ .

A seguir descreveremos uma relação biunívoca existente entre germes de variedades analíticas definidas na origem em  $\mathbb{C}^n$  e os ideais de  $\mathcal{O}_n$ .

**Observação 1.2.20** Para cada germe de variedade analítica  $X$  definido na origem de  $\mathbb{C}^n$ , associamos a este o ideal em  $\mathcal{O}_n$

$$I(X) = \{f \in \mathcal{O}_n \mid f(x) = 0, \forall x \in X\}.$$

Neste caso dizemos que  $I$  define  $X$ .

Agora, para cada ideal  $I$  de  $\mathcal{O}_n$ , temos que  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  pois como  $\mathcal{O}_n$  é noetheriano (Observação 1.2.12),  $I$  é finitamente gerado (ver Proposição 1.1.30) e associamos a este ideal a variedade analítica canônica

$$V(I) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}.$$

A próxima proposição nos fornece propriedades muito úteis relacionando ideais e germes de variedades analíticas.

**Proposição 1.2.21** *Sejam  $I, J$  ideais em  $\mathcal{O}_n$  e  $X, Y$  germes de variedades analíticas na origem em  $\mathbb{C}^n$ . Temos que:*

1. Se  $I \subset J$  então  $V(J) \subset V(I)$ .
2.  $V(I) \cup V(J) = V(I.J) = V(I \cap J)$ .
3. Se  $X \subseteq Y$  então  $I(Y) \subseteq I(X)$ .

**Demonstração:**

1. Seja  $a \in V(J)$ . Então  $f(a) = 0, \forall f \in J$ . Como  $I \subset J$ , segue que  $f(a) = 0, \forall f \in I$  e, portanto,  $a \in V(I)$ . Logo,  $V(J) \subset V(I)$ .

2. Inicialmente mostraremos que  $V(I.J) = V(I) \cup V(J)$ .

Temos que  $V(I) = \{p \in \mathbb{C}^n \mid f(p) = 0, \forall f \in I\}$ ,  $V(J) = \{q \in \mathbb{C}^n \mid g(q) = 0, \forall g \in J\}$  e  $V(I.J) = \{r \in \mathbb{C}^n \mid (f.g)(r) = 0, \forall f \in I \text{ e } \forall g \in J\}$ .

Notemos que  $(f.g)(r) = f(r).g(r)$ . Para que  $f(r).g(r) = 0$  precisamos que  $f(r) = 0$  ou  $g(r) = 0$ . Os pontos que satisfazem  $f(r) = 0$  são os pontos de  $V(I)$  e os pontos que satisfazem  $g(r) = 0$  são os pontos de  $V(J)$ . Portanto,  $V(I.J) = V(I) \cup V(J)$ .

Agora mostraremos que  $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$ .

Como  $I \cap J \subset I$  e  $I \cap J \subset J$  temos pelo item 1. que  $V(I) \subset V(I \cap J)$  e  $V(J) \subset V(I \cap J)$ .

Seja  $d \in V(I) \cup V(J)$ . Então,  $d \in V(I) \subset V(I \cap J)$  ou  $d \in V(J) \subset V(I \cap J)$ . Assim,  $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J)$ .

Suponha que  $b \in V(I \cap J)$  com  $b \notin V(I)$ . Então, existe  $f \in I$  tal que  $f(b) \neq 0$ . Para todo  $g \in J$  temos  $fg \in IJ \subset I \cap J$  e assim  $(fg)(b) = 0$ . Logo,  $f(b)g(b) = 0$  e assim, como  $f(b) \neq 0$  temos que  $g(b) = 0$ , pois  $f(b), g(b) \in \mathbb{C}$  que é corpo. Portanto,  $b \in V(J)$  e com isso  $b \in V(I) \cup V(J)$ . Assim,  $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$ .

3. Seja  $f_2 \in I(Y)$ . Assim,  $f_2(p) = 0, \forall p \in Y$ . Como  $X \subseteq Y$ , temos que  $f_2(p) = 0, \forall p \in X$ . Logo,  $f_2 \in I(X)$ . Portanto,  $I(Y) \subseteq I(X)$ . ■

**Exemplo 1.2.22** *Considere  $f, f_1, f_2 \in \mathcal{O}_n$  cujos representantes dos germes na origem são  $f(x, y) = y^2 - xy - x^2y + x^3$ ,  $f_1(x, y) = y - x$  e  $f_2(x, y) = y - x^2$ . Temos  $V, V_1$  e  $V_2$  as variedades algébricas associadas, ou seja,  $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 - xy - x^2y + x^3 = 0\}$ ,  $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y - x = 0\}$  e  $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y - x^2 = 0\}$ , como na Figura 1.1. Como  $f = f_1.f_2$  então  $V = V_1 \cup V_2$ . O ideal  $I = \langle f \rangle$  está associado ao germe na origem de  $V$ .*

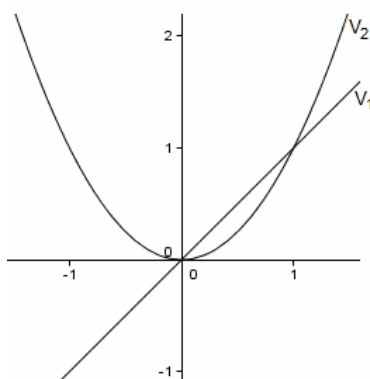


Figura 1.1: Germe na origem de  $V = V_1 \cup V_2$

**Definição 1.2.23** *Seja  $X$  um germe de variedade analítica na origem em  $\mathbb{C}^n$  irredutível. A dimensão de  $X$  é a dimensão de Krull do anel  $\mathcal{O}_{X,0}$ , onde  $\mathcal{O}_{X,0}$  denota o quociente  $\frac{\mathcal{O}_n}{I(X)}$ .*

Lembremos que  $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ , onde cada  $X_i$ , para  $i = 1, \dots, r$ , é uma variedade analítica na origem em  $\mathbb{C}^n$  irredutível. Nestas condições temos a próxima definição:

**Definição 1.2.24** *A dimensão de  $X$  é a maior dimensão de  $X_i$ , para  $i = 1, \dots, r$ , ou seja,  $\max\{\dim X_i\}$ .*

**Definição 1.2.25** *Dizemos que  $X$  é Cohen-Macaulay se o anel  $\mathcal{O}_{X,0}$  é um anel Cohen-Macaulay, ou seja,  $\text{depth } \mathcal{O}_{X,0} = \dim \mathcal{O}_{X,0}$ .*

**Proposição 1.2.26** *Seja  $X$  um germe de variedade analítica na origem em  $\mathbb{C}^n$ . Então,  $X = V(I(X))$ .*

**Demonstração:**

Seja  $a \in X$ , então para  $f \in I(X)$  temos que  $f(a) = 0$  e assim  $a \in V(I(X))$ . Logo,  $X \subset V(I(X))$ .

Temos que  $X = V(J)$  onde  $J$  é um ideal.

Seja  $f \in J$ . Assim, para  $b \in V(J)$  temos  $f(b) = 0$ . Então,  $f \in I(V(J))$ . Logo,  $J \subset I(V(J))$ . Então, pelo item 1. da Proposição 1.2.21 temos  $V(I(V(J))) \subset V(J)$ , ou seja,  $V(I(X)) \subset X$ .

Portanto,  $X = V(I(X))$ . ■

**Teorema 1.2.27 (Teorema dos Zeros de Hilbert ou Nullstellensatz)** *Seja  $J$  um ideal de  $\mathcal{O}_n$ . Então  $I(V(J)) = \sqrt{J}$ .*

A demonstração pode ser vista em [19, p. 16].

Definimos agora um tipo especial de variedades analíticas, que aparecerão com frequência no decorrer do trabalho.

**Definição 1.2.28** *Seja  $X$  um germe de variedade analítica na origem em  $\mathbb{C}^n$  de dimensão  $k$  e  $I$  um ideal tal que  $I$  define  $X$ . Dizemos que  $X$  é uma **intersecção completa** se o número de geradores de  $I(X)$  é a codimensão de  $X$  ( $\text{cod}_{\mathbb{C}} X = \dim \mathbb{C}^n - \dim X$ ).*



Neste caso é comum dizer que o ideal  $I$  define uma intersecção completa ou que  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é uma intersecção completa.

De acordo com as notações anteriores, a próxima proposição nos fornece uma caracterização da definição anterior.

**Proposição 1.2.29** *Considere  $J$  um ideal em  $\mathcal{O}_n$ . Uma condição necessária e suficiente para que  $\frac{\mathcal{O}_n}{J}$  seja uma intersecção completa é que  $J$  seja gerado por uma  $\mathcal{O}_n$ -sequência.*

A demonstração pode ser vista em [14, Teorema 21.2, p.171].

**Definição 1.2.30** *As variedades analíticas (algébricas) que são intersecções completas de dimensão  $n - 1$  em  $\mathbb{C}^n$  são chamadas de **hipersuperfícies**.*

**Exemplo 1.2.31** *Seja  $V$  a união dos eixos  $x$  e  $y$  em  $\mathbb{C}^2$ . Então  $V = V(I)$ , onde  $I = \langle xy \rangle$ . Temos que  $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$  em  $\mathbb{C}^2$  e o número de geradores de  $I$  é  $1 = 2 - 1$ . Logo,  $V$  é uma intersecção completa e  $V$  é uma hipersuperfície.*

**Exemplo 1.2.32** *Seja  $V$  a união dos eixos  $x, y$  e  $z$  em  $\mathbb{C}^3$ . Então  $V = V(I)$ , onde  $I = \langle yz, zx, xy \rangle$ . Temos que  $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$  em  $\mathbb{C}^3$  e o número de geradores de  $I$  é  $3 \neq 3 - 1$ . Logo,  $V$  não é uma intersecção completa.*

Vamos ver agora um resultado geral que nos será útil adiante.

**Proposição 1.2.33** *Seja  $I$  um ideal de  $\mathcal{O}_n$ . Então, temos as seguintes implicações:*

$$\frac{\mathcal{O}_n}{I} \text{ é regular} \Rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{I} \text{ é uma intersecção completa} \Rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{I} \text{ é Cohen-Macaulay.}$$

A demonstração pode ser vista em [5, Teorema 3.1.20, p.96].

**Definição 1.2.34** *Seja  $V$  uma intersecção completa em  $\mathbb{C}^n$  de dimensão  $k$ . Dizemos que  $V$  é uma **intersecção completa com singularidade isolada** na origem ( $0 \in \mathbb{C}^n$ ) se  $I(V) = \langle f_1, \dots, f_{n-k} \rangle$  e existe uma vizinhança  $U$  da origem em  $\mathbb{C}^n$  tal que para todo  $y \neq 0$  no conjunto dos zeros comuns de  $f_1, \dots, f_{n-k}$  temos que  $d_y f_1, \dots, d_y f_{n-k}$  são linearmente independentes.*

**Observação 1.2.35** *Seja  $I = \langle f \rangle$ . Temos que  $I$  define uma intersecção completa em  $\mathbb{C}^n$  de dimensão  $n - 1$ ,  $V = V(I)$ . Neste caso se  $V$  tem singularidade isolada na origem então  $0$  é uma singularidade isolada de  $f$ .*

**Definição 1.2.36** *Um germe  $X$  de uma variedade analítica na origem em  $\mathbb{C}^n$  é **redutível** se pode ser escrito como  $X = X_1 \cup X_2$ , onde  $X_i$ ,  $i = 1, 2$  são também germes de subvariedade analíticas na origem em  $\mathbb{C}^n$ . Um germe que não é redutível é dito ser **irredutível**.*

Como  $\mathcal{O}_n$  é um anel noetheriano, pela decomposição primária de ideais temos que um germe  $X$  é irredutível se, e somente se,  $I(X)$  é um ideal primo em  $\mathcal{O}_n$  e qualquer germe  $X$  de uma variedade analítica na origem em  $\mathbb{C}^n$  pode ser escrito de forma única como  $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$  onde  $X_i$  para  $i = 1, \dots, r$  são variedades analíticas irredutíveis.

**Definição 1.2.37** *Nas notações anteriores chamamos de **componentes irredutíveis** de  $X$  as variedades analíticas irredutíveis  $X_i$ , para  $i = 1, \dots, r$ .*

No Exemplo 1.2.22,  $V$  é redutível e  $V_1$  e  $V_2$  são irredutíveis. As variedades analíticas  $V_1$  e  $V_2$  são as componentes irredutíveis de  $V$ .

**Definição 1.2.38** Dizemos que  $X$  tem **estrutura reduzida**, ou simplesmente é **reduzido**, se  $I(X)$  é um ideal radical.

Apresentamos agora a teoria necessária para mostrar que dado este germe de variedade analítica na origem em  $\mathbb{C}^n$   $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$  cada  $X_i$  para  $i = 1, \dots, r$  corresponde a um primo minimal de  $I(X)$ .

Consideremos  $X$  um germe de variedade analítica na origem em  $\mathbb{C}^n$ . Assim,  $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$  onde  $X_i$  para  $i = 1, \dots, r$  são componentes irredutíveis de  $X$ .

**Observação 1.2.39** As componentes  $X_i$ , para  $i = 1, \dots, r$  correspondem exatamente aos primos minimais de  $I(X)$ .

**De fato:**

Como  $I(X)$  é um ideal de  $\mathcal{O}_n$  temos que  $I(X)$  admite decomposição primária minimal. Sejam  $P_1, \dots, P_r$  ideais primos minimais de  $I(X)$ . Assim,  $I(X) = P_1 \cap \dots \cap P_r$ . Logo,  $V(I(X)) = V(P_1 \cap \dots \cap P_r)$ . Assim, usando as Proposições 1.2.26 e 1.2.21 concluímos que  $X = V(P_1) \cup \dots \cup V(P_r)$ . Como  $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$  segue que a menos de ordem,  $X_i = V(P_i)$ ,  $1 \leq i \leq r$ .

**Definição 1.2.40** Nas condições da observação anterior, as variedades analíticas associadas aos ideais primos minimais de  $I(X)$  são chamadas de **componentes isoladas** de  $X$ . As variedades analíticas associadas aos primos imersos de  $I(X)$  são chamadas de **componentes mergulhadas ou embutidas** de  $X$ .

Sejam  $M$  um  $\mathcal{O}_n$ -módulo livre finitamente gerado, ou seja,  $M = \mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_n \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_n$ , e  $I$  um submódulo. Assim podemos considerar a estrutura de espaço vetorial complexo de  $M$  e  $I$  um subespaço vetorial de  $M$ .

**Definição 1.2.41**  $I$  tem **codimensão finita** em  $M$  se o espaço quociente  $M/I$  tem dimensão finita como um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. A codimensão de  $I$  é definida como a dimensão deste espaço.

Denotamos por  $\widehat{\mathcal{O}}_n$  o espaço das séries de Taylor dos germes do espaço  $\mathcal{O}_n$ . Estas séries estão naturalmente inseridas no espaço das séries de potência  $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ .

**Lema 1.2.42 (Lema de Borel)** A aplicação  $\varphi : \mathcal{O}_n \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_n$ , que a cada  $f$  associa a sua série de Taylor em torno do zero, denotada por  $\widehat{f}$ , é um epimorfismo de anéis.

A demonstração pode ser encontrada em [8, p. 228].

**Observação 1.2.43** Denotemos  $\varphi(\mathcal{M}_n^k) := \widehat{\mathcal{M}}_n^k$  e seja  $\psi : \frac{\mathcal{O}_n}{\mathcal{M}_n^k} \rightarrow \frac{\widehat{\mathcal{O}}_n}{\widehat{\mathcal{M}}_n^k}$  dada por  $\psi(f + \mathcal{M}_n^k) := \varphi(f) + \widehat{\mathcal{M}}_n^k$ , que é claramente um epimorfismo pelo lema anterior.

Agora, mostremos que  $\text{Ker}(\psi) = \mathcal{M}_n^k$ . Seja  $f + \mathcal{M}_n^k \in \frac{\mathcal{O}_n}{\mathcal{M}_n^k}$  tal que  $\psi(f + \mathcal{M}_n^k) = \widehat{\mathcal{M}}_n^k$ , assim,  $\varphi(f) + \widehat{\mathcal{M}}_n^k = \widehat{\mathcal{M}}_n^k$ . Logo,  $\varphi(f) \in \widehat{\mathcal{M}}_n^k$ . Como  $\varphi(\mathcal{M}_n^k) = \widehat{\mathcal{M}}_n^k$  segue que  $f \in \mathcal{M}_n^k$ . Então,  $\text{Ker}(\psi) = \mathcal{M}_n^k$  e com isso temos que  $\psi$  é injetora. Portanto,  $\psi$  é um isomorfismo.

Como  $\mathcal{M}_n^k = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , o isomorfismo anterior nos permite concluir que  $\frac{\widehat{\mathcal{O}}_n}{\widehat{\mathcal{M}}_n^k}$  tem dimensão finita.

Veremos agora um resultado muito útil para identificar se um ideal  $I$  tem codimensão finita.

**Proposição 1.2.44**  *$I$  tem codimensão finita em  $M$  se, e somente se, existe um inteiro  $k \geq 1$  tal que  $\mathcal{M}_n^k M \subseteq I$ .*

**Demonstração:**

Inicialmente suponha que existe um inteiro  $k \geq 1$  tal que  $\mathcal{M}_n^k M \subseteq I$ . Então  $M/I \subseteq M/\mathcal{M}_n^k M$  e, assim,  $\dim_{\mathbb{C}} M/I \leq \dim_{\mathbb{C}} M/\mathcal{M}_n^k M$ . Temos que

$$M/\mathcal{M}_n^k M = \mathcal{O}_n/\mathcal{M}_n^k \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_n/\mathcal{M}_n^k$$

tem dimensão finita (Observação 1.2.43). Portanto  $M/I$  tem dimensão finita.

Reciprocamente, suponha que  $I$  tem codimensão finita em  $M$ . Podemos escrever a sequência

$$I + M \supseteq I + \mathcal{M}_n M \supseteq I + \mathcal{M}_n^2 M \supseteq I + \mathcal{M}_n^3 M \supseteq \dots \supseteq I + \mathcal{M}_n^k M \supseteq \dots$$

e conseqüentemente

$$M/(I + M) \subseteq M/(I + \mathcal{M}_n M) \subseteq M/(I + \mathcal{M}_n^2 M) \subseteq \dots \subseteq M/(I + \mathcal{M}_n^k M) \subseteq \dots$$

Como a codimensão de  $I$  é finita existe  $k \geq 1$  tal que  $I + \mathcal{M}_n^k M = I + \mathcal{M}_n^{k+1} M$  e como  $\mathcal{M}_n^k$  é finitamente gerado, podemos aplicar o Lema 1.1.12 para concluir que  $\mathcal{M}_n^k \subseteq I$ . ■

## 1.2.2 O grupo $\mathcal{R}$

Estudaremos agora conjuntos de germes de difeomorfismos de  $\mathbb{C}^n$ , que agem em  $\mathcal{O}_n$ . Através da ação, definiremos o espaço tangente à órbita de um germe e obteremos o conceito de codimensão associada a esta ação.

Vamos então iniciar vendo os conceitos de ação e órbita.

**Definição 1.2.45** *Uma ação de um grupo  $G$  em um conjunto  $M$  é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi : G \times M &\rightarrow M \\ (g, x) &\mapsto g.x \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades para todo  $x \in M$  e  $g, h \in G$ :

- a-)  $1.x = x$ , onde  $1$  é o elemento identidade de  $G$ ;
- b-)  $(g.h).x = g.(h.x)$ .

É fácil mostrar que uma ação induz a seguinte relação de equivalência:  $x, y \in M$  são **equivalentes** se existir  $g \in G$  tal que  $y = g.x$ .

**Definição 1.2.46** *O conjunto dos elementos  $y \in M$  tais que existe  $g \in G$  com  $y = g.x$  é chamado de **órbita** de  $x$  em  $M$ .*

**Notação:**  $G.x := \{g.x \mid g \in G\}$ .

Assim, a órbita de  $x$  é a classe de equivalência de  $x$ .

Considere  $\mathcal{R}$  o conjunto dos germes de difeomorfismo  $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  que preservam a origem.

Claramente  $\mathcal{R}$  é um grupo com a operação de composição. Este grupo age em  $\mathcal{O}_n$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{R} \times \mathcal{O}_n &\rightarrow \mathcal{O}_n \\ (h, f) &\mapsto h.f := f \circ h^{-1} \end{aligned} \quad ,$$

que é uma ação de grupos.

O conjunto dos germes de difeomorfismos que não preservam a origem é denotado por  $\mathcal{R}_e$  (grupo estendido).

**Definição 1.2.47** *Dois germes  $f, g \in \mathcal{O}_n$  são  $\mathcal{R}$ -equivalentes se existe um germe de difeomorfismo  $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  em  $\mathcal{R}$  tal que  $f = g \circ h^{-1}$ .*

**Notação:**  $f \sim_{\mathcal{R}} g$ .

*Em outras palavras,  $f \sim_{\mathcal{R}} g$  se  $f$  e  $g$  estão na mesma órbita via ação anterior.*

*Dois germes  $f, g \in \mathcal{O}_n$  são  $\mathcal{R}_e$ -equivalentes se existe um germe de difeomorfismo  $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  em  $\mathcal{R}_e$  tal que  $f = g \circ h^{-1}$ .*

**Notação:**  $f \sim_{\mathcal{R}_e} g$ .

**Exemplo 1.2.48** *Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(x) = x + 1$  e  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $g(x) = 2x + 1$ . Temos que  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{R}$ -equivalentes, pois existe  $h \in \mathcal{R}$  dada por  $h(x) = 2x$  tal que  $g \circ h^{-1}(x) = g(h^{-1}(x)) = g(\frac{1}{2}x) = x + 1 = f(x)$ .*

**Exemplo 1.2.49** *Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(x) = x + 1$  e  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $g(x) = 2x$ . Temos que  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{R}_e$ -equivalentes, pois existe  $h \in \mathcal{R}_e$  dada por  $h(x) = 2x - 1$  tal que  $g \circ h^{-1}(x) = g(h^{-1}(x)) = g(\frac{x+1}{2}) = x + 1 = f(x)$ .*

Fixemos a seguinte notação:

Se  $f \in \mathcal{O}_n$ , chamamos de **matriz Hessiana** de  $f$  a matriz

$$d_p^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix}$$

**Lema 1.2.50 (Splitting Lemma)** *Seja  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função analítica tal que  $d_0^2 f$  é uma matriz  $(n \times n)$  de posto  $r$ . Então existem coordenadas locais  $w_1, \dots, w_q, y_1, \dots, y_r$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  ( $q + r = n$ ) tais que*

$$f(w, y) = g(w) + \sum_{l=1}^r y_l^2, \text{ onde } g \in \mathcal{M}_q^3, w = (w_1, \dots, w_q) \text{ e } y = (y_1, \dots, y_r).$$

*O germe  $g$  é chamado de forma reduzida de  $f$ .*

**Demonstração:**

Inicialmente vamos mostrar, por indução, a seguinte afirmação

$$f \sim_{\mathcal{R}} g_k(w) + y_1^2 + \dots + y_r^2, \text{ com } g_k \in \mathcal{M}_q^2 \text{ para } k \geq 2.$$

Vale para o caso  $k = 2$ , pois como o posto( $d_0^2 f$ ) =  $r \neq 0$  e como  $f$  é uma forma quadrática em  $n$  variáveis, existe uma classificação que pode ser vista em [8, p. 63], que nos garante que  $f \sim_{\mathcal{R}} g_2(w) + y_1^2 + \dots + y_r^2$ , onde  $g_2(w) = 0 \in \mathcal{M}_q^2$ .

Suponhamos, por hipótese de indução, que

$$f \sim_{\mathcal{R}} g_k(w) + y_1^2 + \dots + y_r^2, \text{ com } g_k \in \mathcal{M}_q^2.$$

Temos que  $f \sim_{\mathcal{R}} g_k(w) + y_1^2 + \dots + y_r^2 + H(w, y)$  onde  $H \in \mathcal{M}_n^{k+1}$ . Agora, pelo Lema de Hadamard,  $H(w, y) = h(w) + y_1 H_1(w) + \dots + y_r H_r(w)$ , onde  $h \in \mathcal{M}_q^{k+1}$  e  $H_i \in \mathcal{M}_n^k$ .

Consideremos a seguinte mudança de coordenadas na vizinhança da origem:

$$w_1 = W_1, \dots, w_q = W_q, y_1 = Y_1 - H_1(W), \dots, y_r = Y_r - H_r(W),$$

onde  $(W) = (W_1, \dots, W_q)$ .

Deste modo,

$$\begin{aligned} f \sim_{\mathcal{R}} g_k(W) + h(W) + (Y_1 - H_1(W))^2 + \dots + (Y_r - H_r(W))^2 + \sum_{i=1}^r [(Y_i - H_i(W))H_i(W)] = \\ g_k(W) + h(W) + Y_1^2 + \dots + Y_r^2 - (H_1^2 + \dots + H_r^2). \end{aligned}$$

Como  $(H_1^2 + \dots + H_r^2)$  tem grau maior que  $k + 1$ , então

$$f \sim_{\mathcal{R}} g_k(W) + h(W) + Y_1^2 + \dots + Y_r^2$$

e, assim,  $f \sim_{\mathcal{R}} g(W) + Y_1^2 + \dots + Y_r^2$ , onde  $g(W) = g_k(W) + h(W)$ . Portanto, pelo Princípio de Indução, temos o desejado. ■

Seguindo a linha de raciocínio da demonstração do lema anterior se obtém a prova do próximo lema, por isso apenas indicaremos a referência.

**Lema 1.2.51** *Sejam  $f \in \mathcal{O}_n$  tal que  $f(0) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$  para  $i = 1, \dots, n$  e  $\det(d_0^2 f) \neq 0$ . Então existe um sistema de coordenadas  $(v_1, \dots, v_n)$  e  $h_{ij} \in \mathcal{O}_n$  com  $h_{ij} = h_{ji}$  tal que*

$$f = \sum_{i \leq r} v_i^2 + \sum_{i, j > r} v_i v_j h_{ij}(v_1, \dots, v_n).$$

A demonstração pode ser vista em [15, Lema 2.2, p.6]).

Vamos agora apresentar a teoria necessária para trabalhar com uma ação especial visando descrever o espaço tangente a uma órbita da ação do grupo  $\mathcal{R}$ .

**Definição 1.2.52** *Uma **variedade diferenciável** de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  é um par ordenado  $(M, \mathfrak{U})$  onde*

- i)  $M$  é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável;*
- ii)  $\mathfrak{U}$  é uma coleção de homeomorfismos  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , de conjuntos abertos  $U \subset M$  sobre abertos  $x(U) \subset \mathbb{R}^m$ , que são chamados de **cartas locais**;*
- iii) os domínios  $U$  dos homeomorfismos  $x \in \mathfrak{U}$  cobrem  $M$ ;*
- iv) dados  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  pertencentes a  $\mathfrak{U}$  com  $U \cap V \neq \emptyset$ , então  $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$  é um homeomorfismo de classe  $C^k$ ;*
- v) dados um homeomorfismo  $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  de um aberto  $W \subset M$  sobre um aberto  $z(W) \subset \mathbb{R}^m$ , tal que  $z \circ x^{-1}$  e  $x \circ z^{-1}$  são de classe  $C^k$  para cada  $x \in \mathfrak{U}$ , então  $z \in \mathfrak{U}$ .*

**Notação:** Para simplificar a notação escrevemos  $M^m$  significando  $(M, \mathfrak{U})$  uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional, ficando subentendida a estrutura.

**Exemplo 1.2.53** 1-) Um aberto de uma variedade diferenciável de dimensão  $k$  e classe  $C^k$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $k$  e classe  $C^k$ .

2-) Todo espaço vetorial de dimensão finita é uma variedade diferenciável (ver em [26, Observação 5, p.3]).

**Definição 1.2.54** Uma **subvariedade**  $M^m$  de classe  $C^k$  de uma variedade  $N^n$  de classe  $C^r$  ( $r \geq k$ ) é um subconjunto  $M \subset N$ , com a topologia induzida pela de  $N$ , e dotado de uma estrutura de variedade  $C^k$  tal que a aplicação de inclusão  $i : M \rightarrow N$  é uma imersão e um homeomorfismo de  $M$  sobre  $i(M)$ .

**Definição 1.2.55** Sejam  $M^m, N^n$  variedades de classe  $C^r$ . Diz-se que uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é **contínua** no ponto  $p \in M$  (respectivamente, **diferenciável** no ponto  $p \in M$ ) se existem cartas locais  $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $N$ , com  $p \in U$  e  $f(U) \subset V$  tais que

$$\psi \circ f \circ \chi^{-1} : \chi(U) \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

é contínua (respectivamente, diferenciável) no ponto  $\chi(p)$ .

Seja  $M^n$  uma variedade de classe  $C^k$  e seja  $p$  um ponto de  $M$ . Indicaremos por  $\mathcal{C}_p$  o conjunto de todos os caminhos  $\lambda : J \rightarrow M$ , definidos num intervalo aberto  $J$ , contendo 0, tais que  $\lambda(0) = p$  e  $\lambda$  é diferenciável em 0.

**Definição 1.2.56** Dois caminhos  $\lambda, \mu \in \mathcal{C}_p$  são **equivalentes**, e escrevemos  $\lambda \sim \mu$ , quando existir uma carta local  $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ , com  $p \in U$ , tal que  $\chi \circ \lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\chi \circ \mu : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  têm o mesmo vetor velocidade em  $t = 0$ , ou seja,  $(\chi \circ \lambda)'(0) = (\chi \circ \mu)'(0)$ .

Claramente essa relação é uma relação de equivalência em  $\mathcal{C}_p$ .

**Definição 1.2.57** O conjunto quociente  $\mathcal{C}_p / \sim$  será indicado por  $T_p M$  e será chamado de **espaço tangente** à variedade  $M$  em  $p$ .

Se  $M$  estivesse em  $\mathbb{R}^n$ , podemos diretamente caracterizar seu espaço tangente em cada ponto por caminhos (ver [11, Proposição 2, p. 43]). Usando isso e a definição anterior, temos a seguinte caracterização para o espaço tangente:

$$T_p M = \{v = \lambda'(0) \mid \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ diferenciável, } \lambda(0) = p\}.$$

**Definição 1.2.58** Sejam  $M^m, N^n$  variedades diferenciáveis e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável no ponto  $p \in M$ . A **derivada** de  $f$  no ponto  $p$  é a transformação linear

$$d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

que associa a cada  $v = \dot{\lambda} \in T_p M$  o elemento  $d_p f(v) = (f \circ \lambda)'(0) \in T_{f(p)} N$ .

**Definição 1.2.59** Um **grupo de Lie** é um grupo  $G$  multiplicativo que é uma variedade diferenciável e as operações de multiplicação e de inversão são aplicações suaves (de classe  $C^\infty$ ).

**Exemplo 1.2.60** Considere  $\mathcal{R}^k = \{j^k(h)(0) \mid h \in \mathcal{R}\}$ , que é um grupo com relação a composição. Além disso,  $\mathcal{R}^k$  é um subespaço vetorial de  $J^k(n, 1)$ , que têm dimensão finita. Logo,  $\mathcal{R}^k$  e  $J^k(n, 1)$  são variedades diferenciáveis e, portanto,  $\mathcal{R}^k$  é um grupo de Lie.

**Definição 1.2.61** Uma *ação de um grupo de Lie*  $G$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma ação  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  tal que  $\varphi$  é suave.

**Exemplo 1.2.62** Consideremos a ação  $\phi : \mathcal{R}^k \times J^k(n, 1) \rightarrow J^k(n, 1)$  dada por

$$\phi(j^k(h)(0), j^k(f)(0)) := j^k(f \circ h^{-1})(0).$$

Claramente  $\phi$  é suave e, portanto,  $\phi$  é uma ação de um grupo de Lie em uma variedade diferenciável.

**Teorema 1.2.63** Seja  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  uma ação de um grupo de Lie  $G$  em uma variedade diferenciável  $M$ . Se as órbitas são subvariedades de  $M$ , então para qualquer  $x \in M$  a aplicação  $\varphi_x : G \rightarrow G.x$  definida por  $\varphi_x(g) = g.x$  é uma submersão.

**Demonstração:**

Mostraremos que  $\varphi_x$  tem posto constante em todo  $h \in G$ . Para isto vamos mostrar que o posto desta aplicação em  $h$  coincide com o seu posto no elemento identidade  $1 \in G$ .

Sejam  $\theta : G \rightarrow G$  o difeomorfismo dado por  $\theta(g) = hg$  (operação do grupo) e  $\psi : M \rightarrow M$  o difeomorfismo dado por  $\psi(y) = h.y$  (via a ação dada). Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_x} & G.x \\ \theta \downarrow & & \downarrow \psi \\ G & \xrightarrow{\varphi_x} & G.x \end{array}$$

e, derivando, o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_1G & \xrightarrow{d_1\varphi_x} & T_xG.x \\ d_1\theta \downarrow & & \downarrow d_x\psi \\ T_hG & \xrightarrow{d_h\varphi_x} & T_{h.x}G.x \end{array}$$

Portanto o posto de  $\varphi_x$  em  $h$  coincide com o posto de  $\varphi_x$  em  $1$  para todo  $h \in G$ . Agora é suficiente mostrar que  $\varphi_x$  é submersão em algum ponto de  $G$  a aplicação, mas isto segue imediatamente do Teorema de Sard, que garante a existência de pelo menos um valor regular na imagem de  $\varphi_x$ , já que o conjunto de valores críticos na imagem da aplicação tem medida nula. ■

Este resultado nos garante que o espaço tangente à órbita  $G.x$  em  $x$  é a imagem de  $d_1\varphi_x : T_1G \rightarrow T_xM$ .

Nosso objetivo é obter uma definição para o espaço tangente à órbita de um germe via a ação do grupo  $\mathcal{R}$ , mas que não é uma ação de um grupo de Lie em uma variedade diferenciável. Vamos então trabalhar com  $J^k(n, 1)$  e com o grupo  $\mathcal{R}^k = \{j^k(h)(0) \mid h \in \mathcal{R}\}$ .

As órbitas consideradas são da forma

$$\mathcal{R}^k.f = \{j^k(f \circ h^{-1}) \mid h \in \mathcal{R}\}.$$

Usando o teorema anterior e a caracterização obtida para o espaço tangente a uma variedade diferenciável, conseguimos obter a definição para o espaço tangente à órbita de um germe, como segue.

Fixemos um inteiro positivo  $k$  e consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_f : \mathcal{R}^k &\rightarrow J^k(n, 1) \\ h &\mapsto j^k(f \circ h^{-1}) \end{aligned} .$$

De acordo com o Teorema 1.2.63 temos que  $T_f \mathcal{R}^k . f = \text{Im}(d_1 \varphi_f)$ . Assim, a definição seguirá do estudo da  $\text{Im}(d_1 \varphi_f)$ .

Note que  $T_1 \mathcal{R} = \{\lambda'(0) \text{ com } \lambda = 1 + t\varphi, \varphi \in \mathcal{O}_{n,n}^0 \text{ e } \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{R}\}$ .

Temos que  $\mathcal{R}^k$  é aberto em  $J^k(n, n)$ , assim,  $T_1 \mathcal{R}^k = J^k(n, n)$ . Consideremos  $g \in T_1 \mathcal{R}^k$  e a curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{R}^k$  com  $\alpha(0) = 1$  e  $\alpha'(0) = g$  tal que  $\alpha(t)(x) = x + tg(x)$ .

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\varphi_f \circ \alpha(t)]|_{t=0} &= \frac{d}{dt} [j^k(f \circ \alpha(t)^{-1})]|_{t=0} = \frac{d}{dt} [j^k(f \circ \alpha(t))]|_{t=0} = \\ &= j^k \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} (\alpha(t)) \alpha'_j(t)|_{t=0} = \sum_{j=1}^n j^k \frac{\partial f}{\partial x_j} g_j|_{t=0} \in T_f \mathcal{R}^k . f. \end{aligned}$$

Como cada  $g_j \in \mathcal{M}_n$  temos que  $T_f \mathcal{R}^k . f = j^k(\mathcal{M}_n J(f))$ , para qualquer  $k$ .

Assim, torna-se natural definir o espaço tangente à  $\mathcal{R}$ -órbita em um germe  $f$  da seguinte forma:

**Definição 1.2.64** O *espaço tangente* à órbita de  $f \in \mathcal{O}_n$  segundo a ação de  $\mathcal{R}$  é o ideal  $\mathcal{M}_n J(f)$ .

**Notação:**  $T_f \mathcal{R} . f$ .

O *espaço tangente estendido* à órbita de  $f \in \mathcal{O}_n$  segundo a ação de  $\mathcal{R}$  é o ideal  $J(f)$ .

**Notação:**  $T_f \mathcal{R}_e . f$ .

**Definição 1.2.65** A  *$\mathcal{R}$ -codimensão* de um germe  $f \in \mathcal{O}_n$  é definida como a dimensão de  $\frac{\mathcal{M}_n}{\mathcal{M}_n J(f)}$ .

**Notação:**  $\mathcal{R}\text{-cod}(f)$ .

A  *$\mathcal{R}_e$ -codimensão*, ou simplesmente *codimensão*, de um germe  $f \in \mathcal{O}_n$  é definida como a dimensão do espaço vetorial  $\frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}$ .

**Notação:**  $\mathcal{R}_e\text{-cod}(f)$  ou simplesmente  $\text{cod}(f)$ .

Se este quociente é um espaço vetorial de dimensão finita, dizemos que o germe  $f$  tem *codimensão finita* em  $\mathcal{O}_n$ .

**Exemplo 1.2.66** Seja  $f(x, y) = x^3 + xy^2$  em  $\mathcal{O}_2$ . Temos que

$$J(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle 3x^2 + y^2, 2xy \rangle = \langle 3x^2 + y^2, xy \rangle.$$

Note que  $x^3 = \frac{1}{3} x(3x^2 + y^2) - \frac{1}{3} y(xy)$  e  $y^3 = y(3x^2 + y^2) - 3x(xy)$ . Assim  $\frac{\mathcal{O}_2}{J(f)} \subset \mathbb{C}\{1, x, y, x^2, y^2\}$ . Por outro lado,  $x^2$  e  $y^2$  não podem ficar juntos no quociente



pois  $3x^2 + y^2 \in J(f)$ . Como estamos pensando somente na dimensão, a escolha de qual-quer um deles para estar no quociente é independente. Escolhamos  $x^2$ . Logo,

$$\frac{\mathcal{O}_2}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \mathbb{C}\{1, x, y, x^2\}.$$

Portanto  $\mathcal{R}_e\text{-cod}(f) = 4$ .

Agora,  $\mathcal{M}_2 J(f) = \langle x, y \rangle \langle 3x^2 + y^2, xy \rangle = \langle x^3, xy^2, x^2y, y^3 \rangle$ .

Assim,  $\frac{\mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_2 J(f)} = \mathbb{C}\{x, y, x^2, y^2, xy\}$ . Portanto,  $\mathcal{R}\text{-cod}(f) = 5$ .

Veremos agora um importante resultado sobre  $\mathcal{R}$ -equivalência.

**Proposição 1.2.67** *Se dois germes  $f$  e  $g$  em  $\mathcal{O}_n$  são  $\mathcal{R}$ -equivalentes então  $f$  e  $g$  têm a mesma codimensão.*

**Demonstração:**

Como  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{R}$ -equivalentes então existe um germe de difeomorfismo  $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  tal que  $g = f \circ h$ . Portanto  $h$  induz um isomorfismo  $h^* : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$  dado por  $h^*(f) = f \circ h$ . Claramente  $h^*$  é um homomorfismo. Vamos mostrar que  $h^*$  é bijetora.

i) Sejam  $f_1$  e  $f_2$  em  $\mathcal{O}_n$  tais que  $h^*(f_1) = h^*(f_2)$ . Assim,

$$h^*(f_1) = h^*(f_2) \Rightarrow f_1 \circ h = f_2 \circ h \Rightarrow (f_1 \circ h) \circ h^{-1} = (f_2 \circ h) \circ h^{-1} \Rightarrow f_1 = f_2.$$

Logo  $h^*$  é injetora.

ii) Para todo  $f_1 \in \mathcal{O}_n$ , existe  $f_2 = f_1 \circ h^{-1} \in \mathcal{O}_n$  tal que  $h^*(f_2) = f_2 \circ h = f_1 \circ h^{-1} \circ h = f_1$ . Logo,  $h^*$  é sobrejetora e portanto  $h^*$  é bijetora.

Agora, vamos mostrar que  $h^*(J(f)) = J(g)$ .

Utilizando a Regra da Cadeia temos que:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ h \right) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n h^* \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial h_j}{\partial x_i},$$

então  $J(g) \subseteq h^*(J(f))$ .

Existe também um germe de difeomorfismo  $h^{-1} : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  tal que  $f = g \circ h^{-1}$ . Temos que  $h^{-1}$  induz um isomorfismo  $(h^{-1})^* : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$  dado por  $(h^{-1})^*(g) = g \circ h^{-1}$ . Aplicando novamente a Regra da Cadeia temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_j} \circ h^{-1} \right) \left( \frac{\partial h_j^{-1}}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^n (h^{-1})^* \left( \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) \frac{\partial h_j^{-1}}{\partial x_i},$$

então  $J(f) \subseteq (h^{-1})^*(J(g))$ .

Temos  $(h^{-1})^* = (h^*)^{-1}$  pois  $h$  é isomorfismo. Portanto,  $h^*(J(f)) = J(g)$ .

Logo,  $\frac{\mathcal{O}_n}{J(f)} \simeq \frac{\mathcal{O}_n}{J(g)}$  e, portanto,  $f$  e  $g$  têm a mesma codimensão. ■

### 1.2.3 Singularidade isolada e determinação finita

Iniciamos a subseção com a definição de singularidade isolada e não isolada cuja importância para o nosso trabalho se deve ao fato de que iremos adiante estudar germes do tipo  $D(q, p)$  que são certos germes em que  $0$  é uma singularidade não isolada. Além

disso, veremos o conceito de determinação finita e o relacionamos com a finitude da  $\mathcal{R}$ -codimensão de um germe e mais pra frente trabalhando com um grupo obtido a partir de  $\mathcal{R}$  conseguiremos fazer uma extensão disso para germes pertencentes a um ideal especial.

**Definição 1.2.68** Uma **singularidade** de um germe  $f \in \mathcal{O}_n$  é um ponto  $p \in \mathbb{C}^n$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Se existir  $U$  vizinhança de  $p$  tal que nela  $p$  é a única solução do sistema de equações anteriores, dizemos que  $p$  é uma **singularidade isolada** de  $f$ . Caso contrário,  $p$  é uma **singularidade não isolada** de  $f$ .

Quando o germe  $f$  tem uma singularidade isolada é comum dizer simplesmente que  $f$  é uma singularidade isolada e quando  $f$  tem uma singularidade não isolada é comum dizer que  $f$  é uma singularidade não isolada.

**Exemplo 1.2.69** O germe  $f(x, y) = x^5 - y^7$  tem uma singularidade isolada na origem, pois sendo  $\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = -7y^6$ , a única solução das equações  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  é quando  $(x, y) = (0, 0)$ .

**Exemplo 1.2.70** Para o germe  $f(x, y) = xy^2$  a origem é uma singularidade não isolada pois, sendo  $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$ , para toda vizinhança da origem temos que  $(x, 0)$  para qualquer  $x$  é solução das derivadas parciais.

**Proposição 1.2.71** Seja  $f$  um germe em  $\mathcal{O}_n$  de codimensão finita positiva, então  $f$  possui uma singularidade isolada na origem.

**Demonstração:**

Suponhamos que a origem não seja um ponto singular, ou seja,  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0$  para algum  $i$ . Então  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  é um elemento invertível de  $\mathcal{O}_n$ . Logo  $J(f) = \mathcal{O}_n$  e, assim,  $f$  tem codimensão zero, o que contradiz a hipótese. Portanto a origem é um ponto singular de  $f$ .

Se  $f$  tem codimensão finita positiva então:

$$\text{cod}(f) < \infty \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(f)} < \infty \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{M}_n}{\mathcal{M}_n J(f)} < \infty.$$

Como  $\mathcal{M}_n J(f)$  tem codimensão finita em  $\mathcal{M}_n$ , então pela Proposição 1.2.44, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{M}_n^k \mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_n J(f)$ . Assim, os monômios  $x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k$  se escrevem como combinação linear de  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  com coeficientes em  $\mathcal{O}_n$ . Como em um ponto singular de  $f$  todas as derivadas parciais se anulam, então estes monômios se anulam também, ou seja, o único ponto singular é a origem. ■

Vamos agora definir um tipo especial de germe e mostraremos que ele também se relaciona com a finitude de sua codimensão.

**Definição 1.2.72** Um germe  $f \in \mathcal{O}_n$  é  **$k$ -determinado** se para qualquer germe  $g \in \mathcal{O}_n$  com  $j^k(g) = j^k(f)$ , temos  $f \sim_{\mathcal{R}} g$ .

Se existir um  $k$  finito tal que um germe  $f$  é  $k$ -determinado dizemos que  $f \in \mathcal{O}_n$  é **finitamente determinado**.

**Proposição 1.2.73** Se para algum germe  $f \in \mathcal{O}_n$ , temos  $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n J(f)$  então  $f$  é  $k$ -determinado.

Para a demonstração deste resultado indicamos como referência ver [8, Proposição 3.1, p. 117].

**Corolário 1.2.74** *Se  $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 J(f)$ , então  $f$  é  $(k+1)$ -determinado.*

**Demonstração:**

Como  $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 J(f) \subset \mathcal{M}_n J(f)$  então, diretamente da Proposição 1.2.73,  $f$  é  $(k+1)$ -determinado. ■

Vimos que se um germe  $f$  é tal que  $\text{cod}(f) < \infty$  então  $f$  tem uma singularidade isolada na origem (Proposição 1.2.71) e como  $\text{cod}(f) < \infty$  implica que  $\mathcal{R}\text{-cod}(f) < \infty$ , temos, a partir da finitude da codimensão de  $f$ , um resultado parecido para germes finitamente determinado, como segue.

**Corolário 1.2.75** *Se  $\mathcal{R}\text{-cod}(f) < \infty$  então  $f$  é finitamente determinado.*

**Demonstração:**

Como  $\mathcal{R}\text{-cod}(f) < \infty$ , então  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{M}_n}{\mathcal{M}_n J(f)} < \infty$ , ou seja,  $\mathcal{M}_n J(f)$  é finito em  $\mathcal{M}_n$ . Pela Proposição 1.2.44, existe um inteiro  $k \geq 1$  tal que  $\mathcal{M}_n^k \mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{M}_n J(f)$ , ou seja,  $\mathcal{M}_n^{k+1} \subseteq \mathcal{M}_n J(f)$ . Pela Proposição 1.2.73 temos que  $f$  é  $(k+1)$ -determinado. Portanto  $f$  é finitamente determinado. ■

**Exemplo 1.2.76** *Seja  $f(x, y) = x^3 + y^3$ .*

*Temos  $J(f) = \langle x^2, y^2 \rangle$  e  $\mathcal{M}_2 J(f) = \langle x^3, xy^2, yx^2, y^3 \rangle = \mathcal{M}_2^3$ .*

*Logo,  $\mathcal{M}_2^3 \subset \mathcal{M}_2 J(f)$  e pela Proposição 1.2.73 temos que  $f$  é 3-determinado.*

**Exemplo 1.2.77** *Seja  $f(x, y) = x^4 + y^4$ , então  $J(f) = \langle x^3, y^3 \rangle$ .*

*Temos que  $\mathcal{M}_2 J(f) = \langle x^4, xy^3, yx^3, y^4 \rangle$  e  $\mathcal{M}_2^2 J(f) = \langle x^5, x^2 y^3, x^4 y, xy^4, y^2 x^3, y^5 \rangle = \mathcal{M}_2^5$*

*Portanto  $\mathcal{M}_2^5 \subset \mathcal{M}_2^2 J(f)$  e, pela Proposição 1.2.74, temos que  $f$  é 5-determinado.*

## Codimensão associada a um ideal

Nosso objetivo agora é obter, dado um ideal  $I$  em  $\mathcal{O}_n$ , um número associado a germes pertencentes a um ideal especial relacionado com  $I$ . Sob certas condições sobre  $I$  este número ser zero caracteriza um tipo especial de germes com singularidade não isolada, chamados de singularidades do tipo  $D(q, p)$ . Para isso, precisamos de algumas ferramentas algébricas associadas a  $I$ , dentre elas estão o derlog sobre  $I$ , o ideal primitivo de  $I$ , o grupo  $\mathcal{R}_I$  e o espaço tangente sobre  $I$ .

### 2.1 Derlog sobre $I$

Nesta seção apresentamos a teoria necessária para definir o Derlog sobre  $I$  e calcular os seus geradores.

**Definição 2.1.1** *Sejam  $R$  um anel e  $N$  um  $R$ -módulo. Uma **derivação** de  $R$  em  $N$  é uma aplicação  $D : R \rightarrow N$  satisfazendo, para quaisquer  $a, b \in R$ ,*

- i)  $D(a + b) = D(a) + D(b)$ ,*
- ii)  $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ .*

**Exemplo 2.1.2** *Sejam  $A$  um anel,  $R = A[[x_1, \dots, x_n]]$  e  $N$  um  $R$ -módulo. Consideremos  $\xi_1, \dots, \xi_n \in N$  fixados. Pela aditividade das derivadas parciais e pela Regra de Leibniz temos que  $D : R \rightarrow N$  dada por  $D(f) = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$  é uma derivação.*

**Notação:** Denotamos por  $Der(R, N)$  o conjunto de todas as derivações de  $R$  em  $N$  vindas do exemplo anterior.

Considerando as operações naturais  $(D_1 + D_2)(a) = D_1(a) + D_2(a)$  e  $(aD)(b) = aD(b)$  temos que  $Der(R, N)$  torna-se um  $R$ -módulo.

**Definição 2.1.3** *Chamamos de **derlog** o conjunto  $Der(\mathcal{O}_n, \mathcal{O}_n)$ .*

**Notação:**  $Der$ .

Assim,  $Der$  é um  $\mathcal{O}_n$ -módulo. Vamos a seguir dar uma descrição para este objeto a partir de campo de vetores.

**Definição 2.1.4** *Um **campo de vetores**  $\xi$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p$  de  $M$  associa um vetor  $\xi(p) \in T_p M$ .*

Considere então  $\xi$  um campo de vetores em  $M$ . Como  $M$  é uma variedade diferenciável e  $p \in M$ , existe uma carta local em  $p$ ,  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ , onde  $U$  é um aberto em  $\mathbb{C}^n$ ,  $\varphi(U)$  é um aberto em  $M$  e  $p = \varphi(x)$  com  $x \in U$ . A partir de  $\varphi$  temos o isomorfismo  $d_x\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow T_pM$ .

Sendo  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  (1 na posição  $i$ ),  $\forall i = 1, \dots, n$ , temos que  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  é base canônica de  $\mathbb{C}^n$  e então  $d\varphi_x(B)$  é base de  $T_pM$ .

Vamos usar a seguinte notação:  $d\varphi_x(e_i) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Assim,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$  é base de  $T_pM$ .

Como  $\xi(p) \in T_pM$ , então  $\xi(p)$  se escreve como combinação linear dos vetores básicos  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \in T_pM$ , ou seja, existem  $\xi_j : U \rightarrow \mathbb{C}$  para  $j = 1, \dots, n$  tais que

$$\xi(p) = \sum_{j=1}^n \xi_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Tomando  $H := \{f : M \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é analítica em } M\}$ , é conveniente pensarmos em um campo  $\xi$  como uma aplicação  $\xi : H \rightarrow H$  dada por

$$\xi(f)(p) = \sum_{j=1}^n \xi_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Considerando  $H = \mathcal{O}_n$  temos que o derlog pode ser descrito como o conjunto formado pelos germes de campos de vetores analíticos na origem em  $\mathbb{C}^n$ , ou seja,

$$Der = \{\xi \mid \xi : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n\}.$$

**Definição 2.1.5** *Seja  $I \subset \mathcal{O}_n$  um ideal. Um campo  $\xi \in Der$  é **logarítmico** em  $I$  se  $\xi(h) \in I$ , para qualquer  $h \in I$ .*

**Definição 2.1.6** *O conjunto formado pelos germes de campos de vetores  $\xi \in Der$  que são logarítmicos em  $I$  é chamado de **derlog sobre  $I$** , denotado por  $Der_I$ , ou seja,*

$$Der_I := \{\xi \in Der \mid \xi \text{ é logarítmico para } I\}.$$

**Proposição 2.1.7** *O conjunto  $Der_I$  é  $\mathcal{O}_n$ -submódulo de  $Der$ .*

**Demonstração:**

Podemos sempre definir o campo nulo  $\xi$  sobre  $M$ , isto é, o campo que a cada  $p \in M$  associa o vetor nulo de  $T_pM$ , este é o elemento neutro de  $Der$ .

Para  $f \in I \subset \mathcal{O}_n$  temos  $\xi(f) = 0 \in I$  pois  $I$  é ideal de  $\mathcal{O}_n$ . Logo,  $\xi \in Der_I$ .

Sejam  $f, g \in \mathcal{O}_n$  e  $\xi, \eta \in Der_I$ . Vamos mostrar que  $f\xi + g\eta \in Der_I$ .

Pela operação definida em  $Der$ ,  $f\xi = \sum_{j=1}^n f\xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in Der$ . Da mesma forma  $g\eta \in Der$ .

Além disso, para  $h \in I$  temos que  $(f\xi + g\eta)(h) = (f\xi)(h) + (g\eta)(h) = f\xi(h) + g\eta(h) \in I$  pois  $\xi(h), \eta(h) \in I$  já que  $\xi, \eta \in Der_I$  e  $I$  é ideal. Assim,  $f\xi + g\eta \in Der_I$ . ■

Temos que  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$  é base de  $Der$ . Assim,  $Der$  é um  $\mathcal{O}_n$ -módulo finitamente gerado. Como, dado um ideal qualquer  $I$ ,  $Der_I$  é um  $\mathcal{O}_n$ -submódulo de  $Der$ , segue que

$Der_I$  é finitamente gerado (Proposição 1.1.31). Contudo, exibir seus geradores é uma tarefa difícil. O próximo resultado nos fornece o conjunto de seus geradores para um caso especial de ideal  $I$ , cuja demonstração será omitida pois envolve uma teoria não descrita no trabalho.

Antes de enunciá-lo, consideremos o seguinte conceito:

**Definição 2.1.8** *Um germe de aplicação  $f = (f_1, \dots, f_p) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  é dito **quase homogêneo** do tipo  $(w_1, \dots, w_n; d_1, \dots, d_p)$  com  $w_i, d_j \in \mathbb{Z}^+$ , se para todo  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,*

$$f(\lambda^{w_1}x_1, \lambda^{w_2}x_2, \dots, \lambda^{w_n}x_n) = (\lambda^{d_1}f_1(x), \lambda^{d_2}f_2(x), \dots, \lambda^{d_p}f_p(x)).$$

O valor  $w_i$  obtido é chamado de **peso da variável**  $x_i$ .

Seja  $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$ . Dizemos que  $I$  define uma variedade analítica quase homogênea se  $f = (f_1, \dots, f_p)$  é quase homogêneo.

**Proposição 2.1.9** *Seja  $I$  um ideal que define uma intersecção completa com singularidade isolada quase homogênea  $f = (f_1, \dots, f_p) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  com pesos  $w_1, \dots, w_n$ . Então  $Der_I$  é gerado:*

i) pelos campos de vetores  $f_i \frac{\partial}{\partial x_j}$ , com  $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n$ ;

ii) pelo campo de Euler, ou seja,  $\epsilon = \sum_{i=1}^n w_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e

iii) pelos campos de vetores triviais, ou seja, menores  $(p+1) \times (p+1)$  da matriz  $A =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ associados para todos os pares } (i_1, i_2, \dots, i_{p+1}), \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{i_{p+1}}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_{p+1}}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_{p+1}}} \end{vmatrix},$$

satisfazendo  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p+1} \leq n$ .

A demonstração pode ser vista em [24, p.617].

**Exemplo 2.1.10** *Seja  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dada por  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + x_3^5$ .*

Temos que  $f$  é quase homogêneo do tipo  $(15, 10, 6; 30)$ , pois

$$f(\lambda^{15}x_1, \lambda^{10}x_2, \lambda^6x_3) = \lambda^{30}(x_1^2 + x_2^3 + x_3^5) = \lambda^{30}f(x_1, x_2, x_3).$$

Consideremos  $I = \langle f \rangle$ . Para facilitar a descrição dos campos de vetores usaremos a seguinte notação:  $(g_1, g_2, g_3) \equiv \sum_{j=1}^3 g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ .

Pela proposição anterior o  $Der_I$  é gerado:

i) pelos campos de vetores  $f \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , que usando a notação anterior são

$$(f, 0, 0) = (x_1^2 + x_2^3 + x_3^5, 0, 0), (0, f, 0) = (0, x_1^2 + x_2^3 + x_3^5, 0) \text{ e } (0, 0, f) = (0, 0, x_1^2 + x_2^3 + x_3^5).$$

ii) pelo campo de Euler, ou seja,

$$\epsilon = \sum_{i=1}^3 w_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 15x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 10x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 6x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \equiv (15x_1, 10x_2, 6x_3).$$

iii) pelos campos de vetores triviais, ou seja, menores  $2 \times 2$  da matriz  $A = \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{array} \right)$  associados para todos os pares  $(i_1, i_2)$ ,  $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{i_2}} \end{array} \right|$ , satisfazendo

$$1 \leq i_1 < i_2 \leq 3.$$

Temos as seguintes possibilidades para  $(i_1, i_2) : (1, 2), (1, 3)$  e  $(2, 3)$ .

1-)  $i_1 = 1$  e  $i_2 = 2$ :

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{array} \right| = \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} = (3x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-(2x_1)) \frac{\partial}{\partial x_2} \equiv (3x_2^2, -2x_1, 0).$$

2-)  $i_1 = 1$  e  $i_2 = 3$ :

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{array} \right| = \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} = (5x_3^4) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-(2x_1)) \frac{\partial}{\partial x_3} \equiv (5x_3^4, 0, -2x_1).$$

3-)  $i_1 = 2$  e  $i_2 = 3$ :

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{array} \right| = \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} = (5x_3^4) \frac{\partial}{\partial x_2} + (-(3x_2^2)) \frac{\partial}{\partial x_3} \equiv (0, 5x_3^4, -3x_2^2).$$

Portanto,

$$Der_I = \langle (x_1^2 + x_2^2 + x_3^5, 0, 0), (0, x_1^2 + x_2^3 + x_3^5, 0), (0, 0, x_1^2 + x_2^3 + x_3^5), (15x_1, 10x_2, 6x_3), (3x_2^2, -2x_1, 0), (5x_3^4, 0, -2x_1), (0, 5x_3^4, -3x_2^2) \rangle.$$

Usando o software SINGULAR, que pode ser baixado gratuitamente no link:

<https://drive.google.com/file/d/0B2apAawcfcmUVZGJWUUpEZmxzRUE/view?usp=sharing>,

vamos descrever através de um exemplo o algoritmo para obter os geradores de  $Der_I$  onde  $I = \langle f \rangle$ . O interessante é usar este algoritmo quando  $f$  não é quase homogênea pois neste caso não há um resultado que descreva os geradores de  $Der_I$ .

Muitas vezes não é fácil verificar se  $f$  é quase homogênea. No SINGULAR, podemos fazer esta verificação através do seguinte algoritmo, via o exemplo anterior. Apenas para simplificar as notações,  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$  e assim  $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^5$ .

No singular digitamos

> ring r = 0, (x, y, z), (c, ds);

> poly f = x2 + y3 + z5;

> qhweight(f);

15, 10, 6 (números que aparecem depois que apertamos ENTER)

Isto significa que a  $f$  é quase homogênea com pesos 15, 10 e 6.

Vamos agora ver um exemplo em que o germe  $f$  não é quase homogêneo, através do software SINGULAR, e o algoritmo para calcular os geradores de  $Der_I$ .

**Exemplo 2.1.11** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dada por  $f(x, y) = x^3 + x^2y^2 + y^7$ .

No singular digitamos

> ring  $r = 0, (x, y), (c, ds);$   
 > poly  $f = x^3 + x^2y^2 + y^7;$   
 > qhweight( $f$ );

0,0

Assim,  $f$  não é quase homogêneo.

> ideal  $I = \text{diff}(f, x), \text{diff}(f, y), f;$   
 > module  $M = \text{syz}(I);$   
 >  $M;$

$M[1] = [441x^2 - 40xy + 21xy^2 - 14y^4, 4x + 189xy - 16y^2, -1323x + 112y]$

$M[2] = [160xy - 84xy^2 - 9261xy^3 + 56y^4 - 441y^5, -16x + 126xy + 64y^2 - 3969y^4, -448y + 27783y^3]$

As imagens de  $M[1]$  e  $M[2]$  pela projeção nas duas primeiras coordenadas nos fornecem os geradores de  $Der_I$ . Não entraremos em detalhes quanto a justificativa teórica deste fato, que pode ser visto em [17, Observação 2.5, p. 15].

Portanto,  $Der_I = \langle (441x^2 - 40xy + 21xy^2 - 14y^4, 4x + 189xy - 16y^2), (160xy - 84xy^2 - 9261xy^3 + 56y^4 - 441y^5, -16x + 126xy + 64y^2 - 3969y^4) \rangle$ .

## 2.2 O ideal primitivo

Dado um ideal  $I$  de  $\mathcal{O}_n$ , vamos a partir deste, obter um outro ideal envolvendo o  $Der$ . Vamos trabalhar com elementos deste novo ideal.

**Definição 2.2.1** *Sejam  $R$  um anel,  $I \subset R$  um ideal e  $Der(R, R)$ . O  $R$ -ideal primitivo associado ao ideal  $I$  é*

$$\int I := \{f \in I \mid \xi(f) \in I, \forall \xi \in Der(R, R)\}.$$

Claramente  $\int I$  é de fato um ideal e  $\int I \subset I$ .

Quando  $R = \mathcal{O}_n$ ,  $\int I$  é chamado simplesmente de **ideal primitivo** de  $I$ .

A próxima proposição nos permite dar uma caracterização para o ideal primitivo.

**Proposição 2.2.2**  $\int I = \{f \in \mathcal{O}_n \mid \langle f \rangle + J(f) \subseteq I\}$ .

**Demonstração:**

Seja  $f \in \mathcal{O}_n$  tal que  $\langle f \rangle + J(f) \subseteq I$ .

Como  $\langle f \rangle + J(f) \subseteq I$ , segue que  $\langle f \rangle \subset I$  e, com isso,  $f \in I$ .

Do mesmo modo,  $J(f) \subset I$ , então  $\sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \in I, \forall \xi_j$ . Logo,  $\xi(f) \in I$ , para todo  $\xi \in Der$ . Então,

$$\{f \in \mathcal{O}_n \mid \langle f \rangle + J(f) \subseteq I\} \subset \int I.$$

Agora, tome  $f \in \int I$ , ou seja,  $f \in I$  tal que  $\xi(f) \in I, \forall \xi \in Der$ . Como  $f \in I$ , temos  $f \in \mathcal{O}_n$  e  $\langle f \rangle \subset I$ .



Consideremos  $g \in J(f)$ . Então,  $g = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$  com  $\eta_i \in \mathcal{O}_n$ . Logo,  $g = \eta(f)$  com  $\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \text{Der}$ . Como, por hipótese,  $\xi(f) \in I$ ,  $\forall \xi \in \text{Der}$  segue que  $g \in I$ . Assim,  $J(f) \subset I$ . Logo,  $\langle f \rangle + J(f) \subset I$ . Então,  $\int I \subset \{f \in \mathcal{O}_n \mid \langle f \rangle + J(f) \subseteq I\}$ .

Portanto,  $\int I = \{f \in \mathcal{O}_n \mid \langle f \rangle + J(f) \subseteq I\}$ . ■

O próximo resultado será necessário para demonstrarmos uma proposição que nos fornece características muito úteis sobre o ideal primitivo. Por ser muito técnico omitiremos a demonstração.

**Proposição 2.2.3** *Seja  $f \in \mathcal{M}_n$ . Então  $f^s \in J(f)$ , para  $s$  suficientemente grande.*

A demonstração pode ser vista em [4] ou [18, Observação 1.2, p. 358].

No que segue veremos propriedades de ideal primitivo que serão úteis para mostrar que  $\int I$  coincide com  $I^2$  quando  $I$  for um ideal radical.

**Proposição 2.2.4** *Seja  $I \subset \mathcal{O}_n$  um ideal,  $I \neq \mathcal{O}_n$ . Então:*

i)  $I^2 \subseteq \int I \subseteq I$ .

ii) Se  $f \in \int I$  então  $V(I) \subset V(J(f))$ .

iii) Suponha que  $I$  é um ideal radical e que  $f \in \mathcal{M}_n$ . Se  $V(I) \subseteq V(J(f))$  então  $f \in \int I$ .

**Demonstração:**

i) Vamos inicialmente mostrar que  $I^2 \subseteq \int I$ . Para isso, consideremos  $f \in I^2$ . Então,  $f = g.h$  com  $g, h \in I$ . Temos que

$$\begin{aligned} \langle f \rangle + J(f) &= \langle g.h \rangle + \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1} h + g \frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} h + g \frac{\partial h}{\partial x_n} \right\rangle = \\ &\left\langle g.h, \frac{\partial g}{\partial x_1} h + g \frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} h + g \frac{\partial h}{\partial x_n} \right\rangle \subseteq I. \end{aligned}$$

Logo  $f \in \int I$  e, portanto,  $I^2 \subseteq \int I$ .

Já vimos que  $\int I \subseteq I$ .

ii) Suponhamos que  $f \in \int I$ . Logo,  $\langle f \rangle + J(f) \subseteq I$ . Assim,  $J(f) \subseteq I$ . Pela Proposição 1.2.21 (item 1), temos  $V(I) \subset V(J(f))$ .

iii) Suponhamos que  $I$  é um ideal radical, ou seja,  $I = \sqrt{I}$  e  $f \in \mathcal{M}_n$ .

Se  $V(I) \subseteq V(J(f))$ , então, pela Proposição 1.2.21 (item 3),

$$I(V(J(f))) \subset I(V(I)).$$

Assim, pelo Teorema 1.2.27, temos que  $\sqrt{J(f)} \subset \sqrt{I}$ . Como  $J(f) \subseteq \sqrt{J(f)}$  e  $I = \sqrt{I}$ , concluímos que  $J(f) \subset I$ .

Além disso, como  $f \in \mathcal{M}_n$ , pela Proposição 2.2.3, temos que  $f^s \in J(f)$ , para  $s$  suficientemente grande. Como  $J(f) \subset I$  temos que  $f^s \in I$ . Logo  $f \in \sqrt{I} = I$  e, assim,  $\langle f \rangle \subset I$ .

Portanto,  $\langle f \rangle + J(f) \subset I$ , ou seja,  $f \in \int I$ . ■

**Proposição 2.2.5** *Sejam  $I_1$  e  $I_2$  ideais em  $\mathcal{O}_n$ . Então*

$$\int I_1 \cap I_2 = \int I_1 \cap \int I_2.$$

**Demonstração:**

Temos que

$$f \in \int I_1 \cap I_2 \Leftrightarrow \langle f \rangle + J(f) \subset I_1 \cap I_2 \Leftrightarrow \langle f \rangle + J(f) \subset I_1 \text{ e } \langle f \rangle + J(f) \subset I_2 \Leftrightarrow f \in \int I_1 \text{ e } f \in \int I_2 \Leftrightarrow f \in \int I_1 \cap \int I_2.$$

Portanto,  $\int I_1 \cap I_2 = \int I_1 \cap \int I_2$ . ■

**Proposição 2.2.6** *Se  $I$  é um ideal primário de  $\mathcal{O}_n$  então  $\int I$  é um ideal primário de  $\mathcal{O}_n$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $f, g \in \mathcal{O}_n$  com  $fg \in \int I$ . Suponhamos que  $f \notin \int I$ .

Como  $fg \in \int I$  e  $\int I \subset I$  pela Proposição 2.2.4, então  $fg \in I$ . Assim, como  $I$  é primário,  $f \in I$  ou existe  $n > 0$  tal que  $g^n \in I$ .

Se  $f \in I$  então  $\langle f \rangle \subset I$ . Como  $f \notin \int I$  temos que  $\langle f \rangle + J(f) \not\subset I$ . Assim,  $J(f) \not\subset I$ . Em particular  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \notin I$ , para algum  $i$ . Notemos que

$$\frac{\partial fg}{\partial x_i} = f \frac{\partial g}{\partial x_i} + g \frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow g \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial fg}{\partial x_i} - f \frac{\partial g}{\partial x_i} \in I,$$

pois  $J(fg) \subset \langle fg \rangle + J(fg) \subset I$  já que  $fg \in \int I$  e  $f \in I$  que é ideal.

Assim,  $g \frac{\partial f}{\partial x_i} \in I$ . Então, existe  $m > 0$  tal que  $g^m \in I$  pois  $I$  é primário e  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \notin I$ .

Como  $J(g^{m+1}) = \left\langle (m+1)g^m \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, (m+1)g^m \frac{\partial g}{\partial x_n} \right\rangle$  e  $g^m \in I$ , então  $J(g^{m+1}) \subset I$ . Além disso,  $g^{m+1} = g^m g \in I$  pois  $I$  é um ideal e  $g^m \in I$ . Assim  $\langle g^{m+1} \rangle \subset I$ .

Então  $J(g^{m+1}) + \langle g^{m+1} \rangle \subset I$ . Logo,  $g^{m+1} \in \int I$ .

Se existe  $n > 0$  tal que  $g^n \in I$  então analogamente ao que fizemos acima concluímos que  $J(g^{n+1}) \subset I$  e  $\langle g^{n+1} \rangle \subset I$ . Logo,  $g^{n+1} \in \int I$ .

Portanto,  $\int I$  é primário. ■

Para provar que  $\int I = I^2$  quando  $I$  for um ideal radical precisamos ainda de mais uma propriedade envolvendo o conceito de ideal primitivo, mas para sua prova necessitamos do próximo teorema que é mais geral e cuja demonstração envolve vários outros resultados algébricos que fogem do nosso objetivo e por isso a omitiremos.

**Definição 2.2.7** *Seja  $R$  uma  $K$ -álgebra. Uma  $K$ -derivacão com relação a  $R$  é uma derivacão  $D$  de  $R$  em  $N$  tal que  $D \circ f = 0$ , onde  $f$  é o homomorfismo vindo de  $R$  ser uma  $K$ -álgebra.*

**Notação:**  $Der_K(R, N) = \{D \in Der(R, N) \mid D \text{ é uma } K\text{-derivacão com relação a } R\}$ .

**Teorema 2.2.8** *Sejam  $R$  uma  $K$ -álgebra, onde  $K$  é um corpo de característica zero,  $R$  um anel local regular,  $Der_K(R, R)$  e  $P$  um ideal primo de  $R$ . Se  $R_P$  é regular então,  $\int P = P^{(2)}$ .*

A demonstração pode ser vista em [21, Lemma 3.2, p. 163]

**Proposição 2.2.9** *Seja  $I$  um ideal radical em  $\mathcal{O}_n$ . Então,  $\int I = I^{(2)}$ .*

**Demonstração:**

Como  $I$  é um ideal radical podemos definir  $I^{(2)} = P_1^{(2)} \cap \dots \cap P_r^{(2)}$ , onde  $P_1, \dots, P_r$  são ideais primos de  $\mathcal{O}_n$  tais que  $I = P_1 \cap \dots \cap P_r$  e  $P_i$  não está contido em  $P_j$  para  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, r$ . Assim,  $\int I = \int (P_1 \cap \dots \cap P_r)$ . Agora, usando a Proposição 2.2.5 temos que  $\int I = \int P_1 \cap \dots \cap \int P_r$ . Pelo Teorema 1.1.65 como  $P_k$  são primos para  $k = 1, \dots, r$  temos que  $(\mathcal{O}_n)_{P_k}$  é regular e além disso pela Observação 1.2.15 temos que  $\mathcal{O}_n$  é uma  $\mathbb{C}$ -álgebra e então pelo Teorema 2.2.8 temos que  $\int P_k = P_k^{(2)}$  para  $k = 1, \dots, r$ . Logo,  $\int I = P_1^{(2)} \cap \dots \cap P_r^{(2)} = I^{(2)}$ . ■

Na Proposição 2.2.4 vimos que  $I^2 \subseteq \int I$  e agora veremos que quando o ideal  $I$  possuir certas características especiais é possível obtermos a igualdade  $\int I = I^2$ .

**Proposição 2.2.10** *Seja  $I$  um ideal radical em  $\mathcal{O}_n$ . Se  $I$  define uma intersecção completa então  $\int I = I^2$ .*

**Demonstração:**

Pela Proposição 2.2.9 como  $I$  é radical temos que  $\int I = I^{(2)}$ . Assim, basta mostrar que  $I^{(2)} = I^2$ . Pela Proposição 2.2.4 temos que  $I^2 \subseteq \int I$ . Assim,  $I^2 \subseteq I^{(2)}$  e temos bem definido o quociente  $\frac{I^{(2)}}{I^2}$ .

Como  $I$  define uma intersecção completa então é gerado por uma  $\mathcal{O}_n$ -sequência (Proposição 1.2.29), digamos  $I = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ . Então, como  $I$  é um ideal de  $\mathcal{O}_n$  temos que  $I$  é também um ideal de  $\mathcal{O}_r$  e além disso  $I = \mathcal{M}_r$ . Agora, como  $I$  é radical temos que  $\sqrt{I} = I$  e assim,  $\sqrt{I} = \mathcal{M}_r$ . Logo  $I$  é um ideal  $\mathcal{M}_r$ -primário.

Temos que  $I$  é um ideal, assim  $I$  é um  $\mathcal{O}_r$ -módulo, e como  $\mathcal{O}_r$  é regular (Observação 1.2.14) temos pelo Teorema 1.1.70 que  $\text{projdim}(I) < \infty$ .

Como  $I$  é gerado por uma  $\mathcal{O}_r$ -sequência (Observação 1.2.13). Aplicando o Teorema 1.1.69 temos que  $\frac{I}{I^2}$  é um  $\mathcal{O}_r$ -módulo livre.

Temos que  $\frac{I^{(2)}}{I^2}$  é um submódulo de  $\frac{I}{I^2}$ . Assim,  $\dim \frac{I^{(2)}}{I^2} \leq \dim \frac{I}{I^2}$ .

Seja  $P$  um ideal primo minimal de  $I$  e  $S = \mathcal{O}_r - P$ . Como  $I^2 \subseteq I^{(2)}$  temos claramente que  $S^{-1}I^2 \subset S^{-1}I^{(2)}$ .

Agora, seja  $j \in S^{-1}I^{(2)}$ . Então

$j \in S^{-1}I^{(2)} \Rightarrow j = \frac{b}{s}$  com  $b \in I^{(2)}$  e  $s \in \mathcal{O}_r - P \Rightarrow j = \frac{b}{s}$  com  $b \in P_1^{(2)} \cap \dots \cap P_r^{(2)}$  e  $s \in \mathcal{O}_r - P \Rightarrow j = \frac{b}{s}$  com  $b \in S^{-1}P_1^2 \cap \dots \cap S^{-1}P_r^2$  e  $s \in \mathcal{O}_r - P \Rightarrow j = \frac{b}{s}$  com  $b = \frac{a_i}{t}$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $a_i \in P_i^2$  e  $t, s \in \mathcal{O}_r - P \Rightarrow j = \frac{a_i}{st}$  com  $a_i \in P_i^2$  e  $t, s \in \mathcal{O}_r - P \Rightarrow j = \frac{a_i}{v}$  com  $a_i \in P_i^2$  e  $v = st \in \mathcal{O}_r - P$ , pois  $S$  é fechado para a multiplicação.

Então,  $j \in S^{-1}P_i^2 \subset S^{-1}I^2$ , pois  $P_i^2 \subset I^2$ . Logo,  $S^{-1}I^2 = S^{-1}I^{(2)}$ .

Suponha que  $\dim \frac{I^{(2)}}{I^2} = \dim \frac{I}{I^2}$ . Então, como  $\frac{I^{(2)}}{I^2} \subset \frac{I}{I^2}$  e  $\frac{I^{(2)}}{I^2}$  e  $\frac{I}{I^2}$  são  $\mathcal{O}_n$ -módulos e, assim tem uma estrutura de  $\mathbb{C}$ -espaços vetoriais, então  $\frac{I^{(2)}}{I^2} = \frac{I}{I^2}$ . Logo,  $I^{(2)} = I$ . Como  $S^{-1}I^2 = S^{-1}I^{(2)}$ , segue que  $S^{-1}I^2 = S^{-1}I$ . Assim,  $\left( \frac{S^{-1}I}{S^{-1}I^2} \right) = 0$  e, usando a Proposição 1.1.40, concluímos que  $S^{-1}\left(\frac{I}{I^2}\right) = 0$ .

Por outro lado,  $\frac{I}{I^2}$  é um  $\mathcal{O}_r$ -módulo livre, ou seja,  $\frac{I}{I^2} = \frac{\mathcal{O}_r}{I} \oplus \dots \oplus \frac{\mathcal{O}_r}{I}$ . Assim, pela Observação 1.1.37,

$$S^{-1}\left(\frac{I}{I^2}\right) = S^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_r}{I} \oplus \dots \oplus \frac{\mathcal{O}_r}{I}\right) = S^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_r}{I}\right) \oplus \dots \oplus S^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_r}{I}\right).$$

Como  $S^{-1}\left(\frac{I}{I^2}\right) = 0$  concluímos que  $S^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_r}{I}\right) \oplus \dots \oplus S^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_r}{I}\right) = 0$ . Então,  $S^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_r}{I}\right) = 0$ . Assim,  $S^{-1}\mathcal{O}_r = S^{-1}I$ , o que é uma contradição.

Portanto,  $\dim \frac{I^{(2)}}{I^2} < \dim \frac{I}{I^2}$ . Então,  $\frac{I^{(2)}}{I^2} \subset \frac{I}{I^2}$ , mas  $\frac{I^{(2)}}{I^2} \neq \frac{I}{I^2}$ .

Claramente  $\frac{I}{I^2}$  é um ideal de  $\frac{\mathcal{O}_r}{I}$ . Pela Proposição 1.1.32 temos que  $\frac{\mathcal{O}_r}{I}$  é noetheriano e assim  $\frac{I}{I^2}$  admite uma decomposição primária minimal (Teorema 1.1.29). Assim,  $\frac{I}{I^2} = I_1 \cap \dots \cap I_k$ , onde  $I_1, \dots, I_k$  são ideais primários. Como  $\frac{I^{(2)}}{I^2}$  é um ideal primário (Observação 1.1.42) e  $\frac{I^{(2)}}{I^2} \subset \frac{I}{I^2}$ , mas  $\frac{I^{(2)}}{I^2} \neq \frac{I}{I^2}$  segue que  $\frac{I^{(2)}}{I^2}$  é um primo embutido de  $\frac{I}{I^2}$ , pois se fosse um primo minimal de  $\frac{I}{I^2}$  então  $\frac{I^{(2)}}{I^2} = \sqrt{I_j}$  para algum  $j = 1, \dots, k$  e assim como  $I_j \subset \sqrt{I_j}$  segue que  $I_j \subset \frac{I^{(2)}}{I^2}$ . Agora, como  $\frac{I}{I^2} = I_1 \cap \dots \cap I_k \subset I_j$  temos que  $\frac{I}{I^2} \subset \frac{I^{(2)}}{I^2}$  e portanto  $\frac{I}{I^2} = \frac{I^{(2)}}{I^2}$ , o que é uma contradição. Portanto,  $\frac{I^{(2)}}{I^2}$  é um primo embutido de  $\frac{I}{I^2}$ .

Temos que  $I = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$  onde  $x_1, \dots, x_r$  é uma  $\mathcal{O}_r$ -sequência. Assim,  $\dim_{\mathbb{C}} I = r$ . Então, pela Proposição 1.1.53 segue que  $l(I) = r$  e com isso temos que  $l(I) < \infty$ . Então, usando o Lema 1.1.54 concluímos que  $\dim I = 0$ . Então  $I$  é Cohen-Macaulay.

Então, como  $\mathcal{O}_r$  é local e  $I$  é finitamente gerado segue pelo Teorema 1.1.62 que  $\frac{I}{I^2}$  é Cohen-Macaulay. Assim, como  $\frac{\mathcal{O}_r}{I}$  é noetheriano (Proposição 1.1.32) e além disso, como  $I$  é  $\mathcal{M}_r$ -primário temos que  $\frac{\mathcal{O}_r}{I}$  é local (Lema 1.1.34) e  $\frac{I}{I^2}$  é finitamente gerado (Proposição 1.1.30) temos pelo Teorema 1.1.62 que  $\frac{I}{I^2}$  não tem primos embutidos. Assim,  $\frac{I^{(2)}}{I^2} = 0$ , ou seja,  $I^{(2)} = I^2$ . Portanto,  $\int I = I^2$ . ■

O próximo exemplo mostra que quando  $I$  não define uma intersecção completa nem sempre temos  $\int I = I^2$ .

**Exemplo 2.2.11** *Suponha que  $I = \langle yz, zx, xy \rangle$ , que vimos não ser uma intersecção completa no Exemplo 1.2.32. Claramente,  $I^2 + \langle xyz \rangle \neq I^2$ . Mostremos que  $\int I = I^2 + \langle xyz \rangle$ .*

**De fato:**

Seja  $f \in I^2 + \langle xyz \rangle$ . Então  $f = a_1y^2z^2 + a_2yz^2x + a_3xy^2z + a_4z^2x^2 + a_5zx^2y + a_6x^2y^2 + a_7xyz$ , onde  $a_i \in \mathcal{O}_3$  para  $i = 1, \dots, 7$ .

Claramente,  $f \in I$ . Logo,  $\langle f \rangle \subseteq I$ . Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial a_1}{\partial x}y^2z^2 + \frac{\partial a_2}{\partial x}yz^2x + a_2yz^2 + \frac{\partial a_3}{\partial x}xy^2z + a_3y^2z + \frac{\partial a_4}{\partial x}z^2x^2 + 2a_4z^2x + \frac{\partial a_5}{\partial x}zx^2y + \\ &\quad 2a_5zxy + \frac{\partial a_6}{\partial x}x^2y^2 + 2a_6xy^2 + \frac{\partial a_7}{\partial x}xyz + a_7yz \in I. \end{aligned}$$

Analogamente  $\frac{\partial f}{\partial y} \in I$  e  $\frac{\partial f}{\partial z} \in I$ .

Logo,  $\langle f \rangle + J(f) \subseteq I$ . Então,  $f \in \int I$ . Assim,  $I^2 + \langle xyz \rangle \subseteq \int I$ .

Por outro lado, consideremos  $f \in \int I$ . Assim,  $\langle f \rangle + J(f) \subseteq I$ . Deste modo  $f \in I$ , ou seja,  $f = g_1yz + g_2zx + g_3xy$  para  $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{O}_3$ . Além disso  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \in I$ . Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g_2z + g_3y + \frac{\partial g_1}{\partial x}yz + \frac{\partial g_2}{\partial x}zx + \frac{\partial g_3}{\partial x}xy \in I,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g_1z + g_3x + \frac{\partial g_1}{\partial y}yz + \frac{\partial g_2}{\partial y}zx + \frac{\partial g_3}{\partial y}xy \in I,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = g_1 y + g_2 x + \frac{\partial g_1}{\partial z} y z + \frac{\partial g_2}{\partial z} z x + \frac{\partial g_3}{\partial z} x y \in I.$$

Logo  $g_1$  tem todos os monômios dependendo de  $x$ . Assim  $g_1 y z \in \langle xyz \rangle$  e também pode pertencer a  $I^2$ . Da mesma forma  $g_2$  tem todos os monômios dependendo de  $y$ . Assim  $g_2 z x \in \langle xyz \rangle$  e também pode pertencer a  $I^2$ . Por último,  $g_3$  tem todos os monômios dependendo de  $z$ . Assim  $g_3 x y \in \langle xyz \rangle$  e também pode pertencer a  $I^2$ .

Então,  $f \in I^2 + \langle xyz \rangle$ . Logo,  $\int I \subseteq I^2 + \langle xyz \rangle$  e, portanto,  $\int I = I^2 + \langle xyz \rangle \neq I^2$ .

## 2.3 O grupo $\mathcal{R}_I$ e o espaço tangente

Iniciamos a seção obtendo a partir de  $\mathcal{R}$  e  $I$ , onde  $\mathcal{R}$  é o grupo dos difeomorfismos de  $\mathbb{C}^n$  que preservam a origem e  $I$  um ideal de  $\mathcal{O}_n$ , um novo grupo munido de uma ação segundo a qual obteremos o conceito de espaço tangente sobre  $I$ .

**Notação:** O conjunto dos germes  $h \in \mathcal{R}$  tal que  $h^*(I) = I$  é denotado por  $\mathcal{R}_I$ .

Temos que  $\mathcal{R}_I$  é um subgrupo de  $\mathcal{R}$ .

De fato, pois sendo  $h^* : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$  dada por  $h^*(f) = f \circ h$ , onde  $h \in \mathcal{R}$ , vimos, na Proposição 1.2.67, que  $h^*$  é um isomorfismo e que  $(h^*)^{-1} = (h^{-1})^*$ . Assim

$$(h \circ k^{-1})^*(I) = ((k^{-1})^* \circ h^*)(I) = (k^{-1})^*(h^*(I)) = (k^{-1})^*(I) = (k^*)^{-1}(I) = I, \quad \forall h, k \in \mathcal{R}_I.$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{R}_I \times \int I &\rightarrow \int I \\ (h, f) &\mapsto h.f := f \circ h^{-1} \end{aligned}$$

Esta aplicação está bem definida devido a seguinte proposição.

**Proposição 2.3.1** *Se  $f \in \int I$  e  $h \in \mathcal{R}_I$  então  $f \circ h^{-1} \in \int I$ .*

**Demonstração:**

Como  $f \in \int I$  e  $\int I \subset I$  (pela Proposição 2.2.4), temos que  $f \in I$ . Pelo observado anteriormente, se  $h \in \mathcal{R}_I$  então  $h^{-1} \in \mathcal{R}_I$ . Assim  $(h^{-1})^*(f) \in I$ , ou seja,  $f \circ h^{-1} \in I$ . Desta forma,  $\langle f \circ h^{-1} \rangle \subset I$ .

Por outro lado, pela Regra da Cadeia,  $d_x(f \circ h^{-1}) = d_{h^{-1}(x)} f \cdot d_x h^{-1}$ , com  $h^{-1}$  um difeomorfismo. Como  $d_{h^{-1}(x)} f \in J(f)$ , assim  $d_{h^{-1}(x)} f \cdot d_x h^{-1} \in J(f)$ , pois  $J(f)$  é ideal. Logo,  $J(f \circ h^{-1}) \subset J(f)$ .

Como  $f \in \int I$ , então  $\langle f \rangle + J(f) \subset I$ . Assim,  $J(f) \subset \langle f \rangle + J(f) \subset I$  e disso concluímos que  $J(f \circ h^{-1}) \subset I$ .

Portanto,  $\langle f \circ h^{-1} \rangle + J(f \circ h^{-1}) \subset I$  e, assim,  $f \circ h^{-1} \in \int I$ . ■

Claramente  $\varphi$  é uma ação de  $\mathcal{R}_I$  em  $\int I$ .

**Notação:** Dada  $f \in \int I$ , denotemos por  $\mathcal{R}_I.f$  a órbita de  $f$  nesta ação, ou seja,

$$\mathcal{R}_I.f = \{f \circ h^{-1} \mid h \in \mathcal{R}_I\}.$$

A partir da ação de  $\mathcal{R}_I$  temos as próximas definições:

**Definição 2.3.2** *Dados  $f, g \in \int I$ , dizemos que  $f$  é  $\mathcal{R}_I$ -equivalente a  $g$  se  $g = f \circ h^{-1}$ ,  $h \in \mathcal{R}_I$ . Em outras palavras  $g \in \mathcal{R}_I.f$ .*

**Notação:**  $f \sim_{\mathcal{R}_I} g$ .

**Definição 2.3.3** Seja  $f \in \int I$ . O **espaço tangente** de  $f$  sobre  $I$  é o seguinte conjunto

$$\{\xi(f) \mid \xi \in \text{Der}_I, \xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ e } \xi_j \in \mathcal{M}_n \text{ para } j = 1, \dots, n\}.$$

**Notação:**  $T_I(f)$ .

O **espaço tangente estendido** de  $f$  sobre  $I$  é o seguinte conjunto

$$\{\xi(f) \mid \xi \in \text{Der}_I\}.$$

**Notação:**  $T_{I,e}(f)$  (ou simplesmente  $T_e(f)$ ).

**Observação 2.3.4** Pela descrição do espaço tangente à  $\mathcal{R}$ -órbita em um germe  $f$ ,  $T_f \mathcal{R}.f$ , ser da forma  $\mathcal{M}_n J(f)$ , podemos identificar  $T_f \mathcal{R}.f$  com  $\mathcal{M}_n \text{Der}$ .

Usando as mesmas argumentações do espaço tangente à  $\mathcal{R}$ -órbita, agora para o espaço tangente à  $\mathcal{R}_I$ -órbita, temos

$$T_f \mathcal{R}_I.f = \{\xi \in T_f \mathcal{R}.f \mid \xi(I) \subset I\}.$$

Consideremos a aplicação  $\alpha_f : \mathcal{R}_I \rightarrow \int I$  dada por  $\alpha_f(h) = f \circ h$  com  $f \in \int I$ .

Notemos que  $\alpha_f$  está bem definida, pois  $\alpha_f(h) \in \int I, \forall h \in \mathcal{R}_I$ . A prova desse fato é análoga a já feita na demonstração da Proposição 2.3.1.

A derivada de  $\alpha_f$  é  $d\alpha_f : T_f \mathcal{R}_I.f \rightarrow \int I$ , dada por  $(d\alpha_f)(\xi) := \xi(f)$ .

A imagem de  $d\alpha_f$  é  $\int I$ , pois  $\int I$  é um  $\mathbb{C}$ -subespaço linear de  $\mathcal{O}_n$  e, assim,  $T_f \int I = \int I$ .

**Proposição 2.3.5**  $d\alpha_f(T_f \mathcal{R}_I.f) = T_I(f)$ .

**Demonstração:**

Pela discussão anterior temos

$$\begin{aligned} h \in d\alpha_f(T_f \mathcal{R}_I.f) &\Leftrightarrow h = \xi(f) \mid \xi \in T_f \mathcal{R}_I.f \\ &\Leftrightarrow h = \xi(f) \mid \xi \in T_f \mathcal{R}.f \text{ e } \xi(I) \subset I \\ &\Leftrightarrow h = \xi(f) \mid \xi \in \mathcal{M}_n \text{Der} \text{ e } \xi(I) \subset I \\ &\Leftrightarrow h \in T_I(f). \end{aligned}$$

■

A seguir segue a propriedade envolvendo a derivada e o tangente, cuja demonstração será omitida por ser extensa e envolver o uso de vários resultados que não serão usados no decorrer de nosso trabalho.

**Proposição 2.3.6**  $d\alpha_f(T_f \mathcal{R}_I.f) = T_f(\alpha_f \mathcal{R}_I)$ .

A demonstração pode ser vista em [18, Corolário 3.13, p.366].

**Observação 2.3.7** Concluimos então que  $T_I(f) = T_f(\alpha_f \mathcal{R}_I)$ .

**Proposição 2.3.8**  $T_I(f) \subset T_{I,e}(f) \subset \int I$ .

**Demonstração:**

Claramente  $T_I(f) \subset T_{I,e}(f)$ .

Seja  $g \in T_{I,e}(f)$ . Então  $g = \xi(f)$  tal que  $\xi \in \text{Der}_I$ . Como  $f \in \int I \subset I$  e  $\xi \in \text{Der}_I$  temos que  $g \in I$ .

Dado  $\eta \in \text{Der}$  temos  $\eta(g) = \eta(\xi(f)) = (\eta\xi)(f)$ . Como  $\eta \in \text{Der}$ ,  $\xi \in \text{Der}_I$  e  $\text{Der}_I$  é  $\mathcal{O}_n$ -submódulo temos  $\eta\xi \in \text{Der}_I$ . Assim, como  $f \in I$  temos que  $(\eta\xi)(f) \in I$ . Logo,  $\eta(g) \in I$ ,  $\forall \eta \in \text{Der}$ . Então,  $g \in \int I$ . Portanto,  $T_{I,e}(f) \subset \int I$ . ■

A partir da proposição anterior temos bem definidos os quocientes  $\frac{\int I}{T_I(f)}$  e  $\frac{\int I}{T_{I,e}(f)}$  e podemos vê-los como  $\mathbb{C}$ -espaços vetoriais. Assim podemos definir:

**Definição 2.3.9** A *I-codimensão* de  $f \in \int I$  é definida como a dimensão de  $\frac{\int I}{T_I(f)}$ .

**Notação:**  $c_I(f)$ .

A *I-codimensão estendida* de  $f \in \int I$  é definida como a dimensão de  $\frac{\int I}{T_{I,e}(f)}$ .

**Notação:**  $c_{I,e}(f)$ .

**Proposição 2.3.10** Sejam  $I \subset \mathcal{O}_n$  um ideal e  $f \in \int I$ .

i)  $T_I(f) \subseteq (\mathcal{M}_n \cdot J(f)) \cap \int I$  e  $T_{I,e}(f) \subseteq J(f) \cap \int I$ .

ii)  $c_I(f) < \infty$  se, e somente se,  $c_{I,e}(f) < \infty$ .

**Demonstração:**

i) Vamos mostrar que  $T_I(f) \subseteq (\mathcal{M}_n J(f)) \cap \int I$ . Já vimos que  $T_I(f) \subset \int I$  (Proposição 2.3.8). Além disso,  $T_I(f) \subseteq \mathcal{M}_n J(f)$ , pois

$$\begin{aligned} h \in T_I(f) &\Rightarrow h = \xi(f) \mid \xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \text{Der}_I \text{ e } \xi_j \in \mathcal{M}_n, \text{ para } j = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow h = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{M}_n J(f). \end{aligned}$$

Portanto,  $T_I(f) \subseteq (\mathcal{M}_n J(f)) \cap \int I$ .

Da mesma forma mostra-se que  $T_{I,e}(f) \subseteq J(f) \cap \int I$ .

ii) Claramente  $T_I(f)$  é um  $\mathcal{O}_n$ -submódulo de  $T_{I,e}(f)$ . Assim,  $M = \frac{T_{I,e}(f)}{T_I(f)}$  está bem definido e é um  $\mathcal{O}_n$ -módulo (Observação 1.1.5). Além disso,  $M$  é finitamente gerado. Inicialmente mostraremos que  $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$ .

Notemos que  $\mathcal{M}_n T_{I,e}(f) \subset T_I(f)$  pois dado  $h \in \mathcal{M}_n T_{I,e}(f)$  temos  $h = g.t$ , onde  $g \in \mathcal{M}_n$  e  $t \in T_{I,e}(f)$  ( $t = \xi(f)$  tal que  $\xi \in \text{Der}_I$ ). Assim

$$h = g \cdot \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n g \cdot \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Como  $g \in \mathcal{M}_n$ , que é ideal,  $g \cdot \xi_j \in \mathcal{M}_n$  e, claramente  $\sum_{j=1}^n g \cdot \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \in \text{Der}_I$ . Assim,  $h \in T_I(f)$ . Portanto,  $\mathcal{M}_n T_{I,e}(f) \subset T_I(f)$ . Temos que

$$\mathcal{M}_n M = \mathcal{M}_n \frac{T_{I,e}(f)}{T_I(f)} = \frac{\mathcal{M}_n T_{I,e}(f)}{T_I(f)} \subset \frac{T_I(f)}{T_I(f)} = 0.$$

Assim, pela Proposição 1.1.54 temos que  $l(M) < \infty$ . Como  $M$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial, pela Proposição 1.1.53 temos que  $l(M) = \dim_{\mathbb{C}} M$  e então temos que  $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$ .

Suponhamos que  $c_I(f) < \infty$ . Assim,  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\int I}{T_I(f)} < \infty$ .

Como  $T_I(f) \subset T_{I,e}(f)$  temos que  $\frac{\int I}{T_{I,e}(f)} \subset \frac{\int I}{T_I(f)}$ .

Assim,  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\int I}{T_{I,e}(f)} < \dim_{\mathbb{C}} \frac{\int I}{T_I(f)} < \infty$ , ou seja,  $c_{I,e}(f) < \infty$ .

Suponhamos agora que  $c_{I,e}(f) < \infty$ . Então,  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\int I}{T_{I,e}(f)} < \infty$ .

Temos, pela Proposição 1.1.7, que

$$\frac{\frac{\int I}{T_I(f)}}{\frac{T_{I,e}(f)}{T_I(f)}} \cong \frac{\int I}{T_{I,e}(f)}.$$

Como  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\int I}{T_{I,e}(f)} < \infty$  temos que  $\dim_{\mathbb{C}} (\int I/T_I(f))/(T_{I,e}(f)/T_I(f)) < \infty$ . Já vimos que  $\dim M < \infty$ . Portanto,  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\int I}{T_I(f)} < \infty$ , ou seja,  $c_I(f) < \infty$ . ■

## 2.4 Determinação finita sobre $\mathcal{R}_I$

Assim como no grupo  $\mathcal{R}$ , temos o conceito de determinação finita com relação ao grupo  $\mathcal{R}_I$  e além disso, também conseguimos relacionar a condição de determinação finita com a finitude da codimensão de um germe para o grupo  $\mathcal{R}_I$ .

**Definição 2.4.1** *Seja  $f \in \int I$ . Dizemos que  $f$  é  $(k, I)$ -finitamente determinado se para qualquer germe  $g \in \int I$  com  $j^k(g) = j^k(f)$ , temos  $f \sim_{\mathcal{R}_I} g$ . Dizemos que  $f$  é  $I$ -finitamente determinado se  $f$  é  $(k, I)$ -finitamente determinado para algum  $k$ .*

Vamos agora ver que  $\mathcal{R}_I$ -equivalência preserva germes  $(k, I)$ -finitamente determinado.

**Lema 2.4.2** *Se  $f_1 \sim_{\mathcal{R}_I} f_2$  e  $f_1$  é  $(k, I)$ -finitamente determinado então  $f_2$  é  $(k, I)$ -finitamente determinado.*

**Demonstração:**

Tome  $l \in \int I$  com  $j^k(l) = j^k(f_2)$ . Mostraremos que  $f_2 \sim_{\mathcal{R}_I} l$ .

Como  $f_1 \sim_{\mathcal{R}_I} f_2$  temos que existe  $h \in \mathcal{R}_I$  tal que  $f_2 = f_1 \circ h$ .

Então  $j^k(l) = j^k(f_1 \circ h)$ , ou seja,  $d_0^i(l) = d_0^i(f_1 \circ h)$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . Usando a Regra da Cadeia temos

$$d_0^i(l) = d_0^i(f_1 \circ h) = d_0^i(f_1) d_0^i(h) \Rightarrow d_0^i(l) (d_0^i(h))^{-1} = d_0^i(f_1) \Rightarrow d_0^i(l) d_0^i(h^{-1}) = d_0^i(f_1) \Rightarrow d_0^i(l \circ h^{-1}) = d_0^i(f_1).$$



Logo,  $j^k(f_1) = j^k(l \circ h^{-1})$ . Como  $f_1$  é  $(k, I)$ -finitamente determinado segue que  $f_1 \sim_{\mathcal{R}_I} l \circ h^{-1}$ , ou seja, existe  $l_1 \in \mathcal{R}_I$  tal que  $f_1 = l \circ h^{-1} \circ l_1$ .

Então,  $f_2 = f_1 \circ h = l \circ h^{-1} \circ l_1 \circ h = l \circ (h^{-1} \circ l_1 \circ h)$ . Notemos que como  $h, l_1 \in \mathcal{R}_I$  então  $h^{-1} \circ l_1 \circ h \in \mathcal{R}_I$ . Assim existe  $\varphi = h^{-1} \circ l_1 \circ h \in \mathcal{R}_I$  tal que  $f_2 = l \circ \varphi$ , ou seja,  $f_2 \sim_{\mathcal{R}_I} l$ . Portanto,  $f_2$  é  $(k, I)$ -finitamente determinado. ■

A partir da próxima proposição será possível obtermos uma caracterização de determinação finita.

**Proposição 2.4.3** *Sejam  $f, g \in \int I$ . Temos que  $j^k(f) = j^k(g)$  se, e somente se,  $g - f \in \int I \mathcal{M}_n^k$ .*

**Demonstração:**

Como  $g \in \int I$  e  $f \in \int I$  então  $g - f \in \int I$  pois  $\int I$  é ideal. Como  $j^k(f) = j^k(g)$  então  $g - f \in \mathcal{M}_n^{k+l}$  para todo  $l > 2$ . Assim,  $g - f \in \mathcal{M}_n^{k+l} \cap \int I$  para todo  $l > 2$ .

Pela Proposição 1.1.35 existe um  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{M}_n^{k+l+r} \cap \int I \subset \mathcal{M}_n^{k+l} \int I \subset \mathcal{M}_n^k \int I$ .

Assim,  $g - f \in \int I \mathcal{M}_n^k$ .

Reciprocamente, consideremos  $g - f \in \int I \mathcal{M}_n^k$ . Assim,  $g + \int I \mathcal{M}_n^k = f + \int I \mathcal{M}_n^k$ . Portanto,  $j^k(f) = j^k(g)$ . ■

**Observação 2.4.4** *Nesse contexto dado  $f \in \int I$ ,  $f$  é  $(k, I)$ -finitamente determinado se para qualquer germe  $g \in \int I$  com  $g - f \in \int I \mathcal{M}_n^k$ , temos  $f \sim_{\mathcal{R}_I} g$ .*

Assim como no grupo  $\mathcal{R}$ , temos para o grupo  $\mathcal{R}_I$ , uma relação entre a finitude da  $I$ -codimensão e a determinação finita sobre  $\mathcal{R}_I$ .

Para isso faremos uso de um resultado envolvendo uma família especial de germes, cuja demonstração será omitida pois envolve artifícios de Equações Diferenciais Ordinárias, fugindo do nosso objetivo de estudo.

Sejam  $I = \langle y_1, \dots, y_p \rangle$  e  $\mathcal{M}_n = \langle x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_p \rangle$  onde  $s + p = n$ .

Considerando  $f, g \in \int I$  com  $g - f \in \int I \mathcal{M}_n^k$  definimos

$$F : \mathbb{C}^n \times [0, 1] \rightarrow \frac{\int I}{\int I \mathcal{M}_n^k} \text{ dada por } F(x, y, t) = f(x, y) + t(g(x, y) - f(x, y)),$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_s)$  e  $y = (y_1, \dots, y_p)$ .

Note que como  $f \in \int I$  e  $g - f \in \int I \mathcal{M}_n^k$  então,  $F(x, y, t) \in \frac{\int I}{\int I \mathcal{M}_n^k}$ , ou seja,  $F$  está bem definida.

Denotemos  $F(x, t) = F_t(x)$ . Para essa família  $F_t$  temos:

**Lema 2.4.5** *Se  $\int I \mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n T_I(f) + \int I \mathcal{M}_n^{k+1}$ . Então dado qualquer  $t_0 \in \mathbb{R}$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $F_t \sim_{\mathcal{R}_I} F_{t_0}$  para todo  $t$  com  $|t - t_0| < \epsilon$ .*

A demonstração pode ser vista em [22, Lema 2, p.10].

Agora, podemos obter o resultado mencionado.

**Teorema 2.4.6** *Seja  $f \in \int I$ . Temos que:*

i) *Se  $f$  é  $(k, I)$ -finitamente determinado então  $\int I \mathcal{M}_n^k \subset T_I(f) + \int I \mathcal{M}_n^{k+1}$ .*

ii) *Se  $\int I \mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n T_I(f) + \int I \mathcal{M}_n^{k+1}$  então  $f$  é  $(k, I)$ -finitamente determinado.*

**Demonstração:**

i) Como  $f$  é  $(k, I)$ -finitamente determinado então para qualquer germe  $g \in \int I$  com  $g - f \in \int I\mathcal{M}_n^k$ , temos  $f \sim_{\mathcal{R}_I} g$ . Agora,  $f \sim_{\mathcal{R}_I} g$  significa que  $g \in \mathcal{R}_I.f$ . Como  $g - f \in \int I\mathcal{M}_n^k$  segue que  $f + \int I\mathcal{M}_n^k = g + \int I\mathcal{M}_n^k$ . Como  $g \in \mathcal{R}_I.f$  temos que  $f + \int I\mathcal{M}_n^k \subset \frac{\mathcal{R}_I.f}{\int I\mathcal{M}_n^k} \subset \mathcal{R}_I.f$ . Logo,  $f + \int I\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{R}_I.f$ . Como  $\mathcal{R}_I.f = \alpha_f(\mathcal{R}_I)$  segue que  $f + \int I\mathcal{M}_n^k \subset \alpha_f(\mathcal{R}_I)$ , onde  $\alpha_f$  é a aplicação descrita na Proposição 2.3.5. Então  $T_f(f + \int I\mathcal{M}_n^k) \subset T_f(\alpha_f(\mathcal{R}_I))$ . Usando a Observação 2.3.7 temos que  $T_f(f + \int I\mathcal{M}_n^k) \subset T_I(f)$ . Logo,  $T_f(\int I\mathcal{M}_n^k) \subset T_I(f)$ . Como  $\int I\mathcal{M}_n^k$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial segue que  $\int I\mathcal{M}_n^k \subset T_I(f)$ . Portanto,  $\int I\mathcal{M}_n^k \subset T_I(f) + \int I\mathcal{M}_n^{k+1}$ .

ii) Consideremos  $g \in \int I$  com  $g - f \in \int I\mathcal{M}_n^k$ .

Como  $\int I\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n T_I(f) + \int I\mathcal{M}_n^{k+1}$ , pelo Lema 2.4.5, para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $F_t \sim_{\mathcal{R}_I} F_{t_0}$  para todo  $t$  com  $|t - t_0| < \epsilon$ .

Para  $t_0 = 0$ , existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $F_t \sim_{\mathcal{R}_I} F_0$  para todo  $t$  com  $|t - 0| < \epsilon_0$ . Temos duas possibilidades:  $\epsilon_0 \geq 1$  ou  $\epsilon_0 < 1$ .

Se  $\epsilon_0 \geq 1$ , consideremos  $t_0 = 1$ . Logo, existe  $\epsilon_1 > 0$  tal que  $F_t \sim_{\mathcal{R}_I} F_1$  para todo  $t$  com  $|t - 1| < \epsilon_1$ . Assim, existe  $\tilde{t}$  tal que  $|\tilde{t} - 0| < \epsilon_0$  e  $|\tilde{t} - 1| < \epsilon_1$ . Daí,  $F_{\tilde{t}} \sim_{\mathcal{R}_I} F_0$  e  $F_{\tilde{t}} \sim_{\mathcal{R}_I} F_1$  e, portanto,  $F_0 \sim_{\mathcal{R}_I} F_1$ , ou seja,  $f \sim_{\mathcal{R}_I} g$ .

Se  $\epsilon_0 < 1$ , consideremos  $t_0$  tal que  $0 < t_0 < \epsilon_0$ . Logo, existe  $\epsilon_1 > 0$  tal que  $F_t \sim_{\mathcal{R}_I} F_{t_0}$  para todo  $t$  com  $|t - t_0| < \epsilon_1$ . Temos duas possibilidades:  $\epsilon_1 \geq 1$  ou  $\epsilon_1 < 1$ . Procedendo de maneira análoga, ou encontramos um  $\tilde{t}$  tal que  $F_{\tilde{t}} \sim_{\mathcal{R}_I} F_{t_0}$  e  $F_{\tilde{t}} \sim_{\mathcal{R}_I} F_1$  e, como  $F_{t_0} \sim_{\mathcal{R}_I} F_0$ , temos  $F_0 \sim_{\mathcal{R}_I} F_1$  ( $f \sim_{\mathcal{R}_I} g$ ) ou tomamos  $t_0 = \epsilon_1$ . Seguindo este processo, obtemos o desejado, ou seja,  $f \sim_{\mathcal{R}_I} g$ . ■

**Corolário 2.4.7** *Seja  $f \in \int I$ . Então  $c_I(f) < \infty$  se, e somente se,  $f$  é  $I$ -finitamente determinado.*

**Demonstração:**

Consideremos  $c_I(f) < \infty$ . Assim,  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\int I}{T_I(f)} < \infty$ , ou seja,  $T_I(f)$  tem codimensão finita em  $\int I$ . Pela Proposição 1.2.44 existe  $k \geq 1$  tal que  $\mathcal{M}_n^{k-1} \int I \subset T_I(f)$ . Disso temos que  $\mathcal{M}_n^k \int I \subset \mathcal{M}_n T_I(f)$ . Logo,  $\mathcal{M}_n^k \int I \subset \mathcal{M}_n T_I(f) + \int I\mathcal{M}_n^{k+1}$ . Portanto, pelo item ii) do Teorema 2.4.6 concluímos que  $f$  é  $(k, I)$ -finitamente determinado.

Reciprocamente, suponha que  $f$  é  $(k, I)$ -finitamente determinado. Então pelo item i) do Teorema 2.4.6 temos que  $\int I\mathcal{M}_n^k \subset T_I(f) + \int I\mathcal{M}_n^{k+1}$ . Logo, pelo Lema 1.1.12, temos que  $\int I\mathcal{M}_n^k \subset T_I(f)$ . Novamente pela Proposição 1.2.44,  $T_I(f)$  tem codimensão finita em  $\int I$  e, portanto,  $c_I(f) < \infty$ . ■

## Singularidade do tipo $D(q, p)$

Neste capítulo finalmente conseguiremos definir o principal objeto de estudo deste trabalho, que são os germes do tipo  $D(q, p)$  e provaremos o resultado que nos fornece uma caracterização para estes germes. Damos também uma descrição para germes especiais, cuja codimensão é nula, chamados de germes  $\mathcal{R}_I$ -estáveis, mostrando que existe a possibilidade deles serem  $\mathcal{R}_I$  equivalentes a um germe do tipo  $D(q, 0)$ .

### 3.1 Caracterização do germe $f \in \int I$

Iremos iniciar a seção mostrando que, dado um germe  $f \in \int I$ , há uma relação entre  $c_{\tilde{I}}(f)$  com  $c_I(g)$  e  $c_{\tilde{I},e}(f)$  com  $c_{I,e}(g)$ , para o germe  $g$  obtido via o Lema 1.2.50, onde  $I \subset \tilde{\mathcal{O}}_q \cong \mathbb{C}[[w_1, \dots, w_q]]$  e  $\tilde{I} \subset \tilde{\mathcal{O}} \cong \mathbb{C}[[w_1, \dots, w_q, y_1, \dots, y_r]]$  dado por  $\tilde{I} = I\tilde{\mathcal{O}} + \langle y \rangle \tilde{\mathcal{O}}$ , onde  $\langle y \rangle \tilde{\mathcal{O}} = \langle y_1, \dots, y_r \rangle \tilde{\mathcal{O}}$ .

**Lema 3.1.1** *Sejam  $\frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\tilde{I}}$  regular e  $f \in \tilde{\mathcal{O}}$  com  $f(w, y) = g(w) + y_1^2 + \dots + y_r^2$ , onde  $y = (y_1, \dots, y_r)$  e  $w = (w_1, \dots, w_q)$ . Se  $g \in (\int I)\tilde{\mathcal{O}}$  (ou simplesmente,  $g \in \int I$ ), então  $f \in (\int \tilde{I})\tilde{\mathcal{O}}$  (ou simplesmente,  $f \in \int \tilde{I}$ ),  $c_{\tilde{I}}(f) = c_I(g)$  e  $c_{\tilde{I},e}(f) = c_{I,e}(g)$ .*

**Demonstração:**

i) Mostraremos inicialmente que  $f \in \int \tilde{I}$ .

Como  $\frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\tilde{I}}$  é regular, então, pela Proposição 1.2.16 temos que  $I$  é ideal radical e, pela Proposição 1.2.33, segue que  $\frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\tilde{I}}$  é intersecção completa. Portanto, pela Proposição 2.2.10, temos que  $\int I = I^2$ . Analogamente concluímos que  $\int \tilde{I} = \tilde{I}^2$ . Usando estas informações obtemos

$$\tilde{I}^2 = \tilde{I} \cdot \tilde{I} = (I\tilde{\mathcal{O}} + \langle y \rangle \tilde{\mathcal{O}}) \cdot (I\tilde{\mathcal{O}} + \langle y \rangle \tilde{\mathcal{O}}) = (I^2)\tilde{\mathcal{O}} + I\langle y \rangle \tilde{\mathcal{O}} + \langle y \rangle^2 \tilde{\mathcal{O}} = (\int I)\tilde{\mathcal{O}} + I\langle y \rangle \tilde{\mathcal{O}} + \langle y \rangle^2 \tilde{\mathcal{O}}.$$

Logo,

$$\int \tilde{I} = \left( \int I \right) \tilde{\mathcal{O}} + I\langle y \rangle \tilde{\mathcal{O}} + \langle y \rangle^2 \tilde{\mathcal{O}}. \quad (3.1)$$

Assim,  $f \in (\int \tilde{I})\tilde{\mathcal{O}}$ , pois  $g \in (\int I)\tilde{\mathcal{O}}$  e  $y_1^2 + \dots + y_r^2 \in \langle y \rangle^2 \tilde{\mathcal{O}}$ .

ii) Agora vamos mostrar que  $c_{\tilde{I}}(f) = c_I(g)$ .

Consideremos a aplicação  $\psi : \frac{\int I}{T_I(g)} \rightarrow \frac{\int \tilde{I}}{T_{\tilde{I}}(f)}$  dada por  $\psi(\hat{g} + T_I(g)) = \hat{g} + T_{\tilde{I}}(f)$ .

Vejam que  $\psi$  está bem definida.

Dado  $\hat{g} + T_I(g) \in \frac{\int I}{T_I(g)}$  temos que  $\psi(\hat{g} + T_I(g)) = \hat{g} + T_{\tilde{I}}(f) \in \frac{\int \tilde{I}}{T_{\tilde{I}}(f)}$ , pois pela Equação (3.1) como  $\int I = (\int I)\tilde{\mathcal{O}} \subset \int \tilde{I}$  e  $\hat{g} \in \int I$ , então  $\hat{g} \in \int \tilde{I}$ .

Além disso, consideremos  $\hat{g}_1 + T_I(g)$  e  $\hat{g}_2 + T_I(g)$  elementos de  $\frac{\int I}{T_I(g)}$  tais que  $\hat{g}_1 + T_I(g) = \hat{g}_2 + T_I(g)$ . Assim,  $\hat{g}_1 - \hat{g}_2 \in T_I(g)$ .

Notemos que

$$T_{\tilde{I}}(f) = \left\{ \sum_{k=1}^q n_k \frac{\partial g}{\partial w_k} + \sum_{i=1}^r \varphi_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \mid n_k, \varphi_i \in \mathcal{M}_n, k = 1, \dots, q; i = 1, \dots, r; n = q + r \right\}.$$

Para cada  $k = 1, \dots, q$  e  $i = 1, \dots, r$  considere  $n_k^w$  a parte de  $n_k$  que só depende de  $w$  e  $m_k^w$  tal que  $n_k^w + m_k^w = n_k$  e  $\varphi_i^w$  a parte de  $\varphi_i$  que só depende de  $w$  e  $\beta_i^w$  tal que  $\varphi_i^w + \beta_i^w = \varphi_i$ .

$$T_{\tilde{I}}(f) = \left\{ \sum_{k=1}^q n_k^w \frac{\partial g}{\partial w_k} + \sum_{k=1}^q m_k^w \frac{\partial g}{\partial w_k} + \sum_{i=1}^r \varphi_i^w \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^r \beta_i^w \frac{\partial f}{\partial y_i} \mid n_k^w, m_k^w, \varphi_i^w, \beta_i^w \in \mathcal{M}_n \right\} = T_I(g)\tilde{\mathcal{O}} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial w} \right\rangle \langle y \rangle \tilde{\mathcal{O}} + A + \langle y \rangle^2 \tilde{\mathcal{O}}, \text{ onde } A = \left\{ \sum_{i=1}^r \varphi_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \right\}.$$

Logo,

$$T_{\tilde{I}}(f) = T_I(g)\tilde{\mathcal{O}} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial w} \right\rangle \langle y \rangle \tilde{\mathcal{O}} + A + \langle y \rangle^2 \tilde{\mathcal{O}}. \quad (3.2)$$

Com isso temos que  $T_I(g) \subset T_{\tilde{I}}(f)$ .

Assim  $\hat{g}_1 - \hat{g}_2 \in T_{\tilde{I}}(f)$ , ou seja,  $\hat{g}_1 + T_{\tilde{I}}(f) = \hat{g}_2 + T_{\tilde{I}}(f)$ . Então,  $\psi(\hat{g}_1 + T_I(g)) = \psi(\hat{g}_2 + T_I(g))$ . Portanto,  $\psi$  está bem definida.

Temos que  $\psi$  é injetora, pois

$$\hat{g} + T_I(g) \in \text{Ker}(\psi) \Rightarrow \psi(\hat{g} + T_I(g)) = T_{\tilde{I}}(f) \Rightarrow \hat{g} + T_{\tilde{I}}(f) = T_{\tilde{I}}(f) \Rightarrow \hat{g} \in T_{\tilde{I}}(f) \Rightarrow \hat{g} \in T_I(g)\tilde{\mathcal{O}} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial w} \right\rangle \langle y \rangle \tilde{\mathcal{O}} + A + \langle y \rangle^2 \tilde{\mathcal{O}}.$$

Como  $\hat{g}$  depende apenas de  $w$  temos que  $\hat{g} \in T_I(g)$ . Logo,  $\hat{g} + T_I(g) = T_I(g)$ . Portanto,  $\text{Ker}(\psi) = T_I(g)$  e concluímos que  $\psi$  é injetora.

Vamos mostrar agora que  $\psi$  é sobrejetora, ou seja, mostraremos que  $\psi\left(\frac{\int I}{T_I(g)}\right) = \frac{\int \tilde{I}}{T_{\tilde{I}}(f)}$ .

Seja  $l \in \frac{\int \tilde{I}}{T_{\tilde{I}}(f)}$ . Temos que mostrar que existe  $l_1 \in \int I$  tal que  $l = \psi(l_1 + T_I(g))$ .

Como  $l \in \frac{\int \tilde{I}}{T_{\tilde{I}}(f)}$  existe  $\tilde{f} \in \int \tilde{I}$  tal que  $l = \tilde{f} + T_{\tilde{I}}(f)$ . Como  $\tilde{f} \in \int \tilde{I}$ , usando a Equação (3.1), temos

$$l = \tilde{f} + T_{\tilde{I}}(f) \Rightarrow l = l_1 + l_2 + l_3 + T_{\tilde{I}}(f) \mid l_1 \in (\int I)\tilde{\mathcal{O}}, l_2 \in I\langle y \rangle\tilde{\mathcal{O}}, l_3 \in \langle y \rangle^2\tilde{\mathcal{O}}.$$

Pela Equação (3.2),  $l_3 \in T_{\tilde{I}}(f)$ . Mostremos que  $l_2 \in T_{\tilde{I}}(f)$ . Para isso, mostremos que  $I\langle y \rangle\tilde{\mathcal{O}} \subset T_{\tilde{I}}(f)$ .

$$\tau \in I\langle y \rangle\tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \tau = i.\lambda \mid i \in I \subset \tilde{I} \text{ e } \lambda \in \langle y \rangle\tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \tau = \sum_{k=1}^r i.a_k.y_k \mid a_k \in \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \tau = \sum_{k=1}^r v_k.y_k \mid v_k \in \tilde{I}, \text{ pois } \tilde{I} \text{ é um ideal de } \tilde{\mathcal{O}}.$$

Para cada  $k = 1, \dots, r$  considere  $v_k^w$  a parte de  $v_k$  que só depende de  $w$  e  $u_k^w$  tal que  $v_k^w + u_k^w = v_k$ . Assim,  $\tau = \sum_{k=1}^r v_k^k \cdot y_k + \sum_{k=1}^r u_k^k \cdot y_k \in A + \langle y \rangle^2 \subset T_{\tilde{I}}(f)$ .

Então,  $I\langle y \rangle \tilde{\mathcal{O}} \subset T_{\tilde{I}}(f)$ .

Logo, existe  $l_1 \in (\int I) \tilde{\mathcal{O}}$  tal que  $l = l_1 + T_{\tilde{I}}(f) = \psi(l_1 + T_I(g))$ . Então,  $\frac{f \tilde{I}}{T_{\tilde{I}}(f)} \subset \psi \left( \frac{f I}{T_I(g)} \right)$ .

Assim,  $\psi \left( \frac{f I}{T_I(g)} \right) = \frac{f \tilde{I}}{T_{\tilde{I}}(f)}$ .

Portanto  $\psi$  é bijetora, concluindo,  $c_{\tilde{I}}(f) = c_I(g)$ . De modo análogo, é possível mostrar que  $c_{\tilde{I},e}(f) = c_{I,e}(g)$ . ■

Enfim, temos a teoria necessária para definirmos e explorarmos propriedades dos germes do tipo  $D(q, p)$ , que são germes especiais em que 0 é uma singularidade não isolada.

**Definição 3.1.2** Um germe  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é chamado do **tipo**  $D(q, p)$ , ou de uma  **$D(q, p)$ -singularidade**, onde  $q = \frac{p(p+1)}{2}$ , se existem coordenadas locais  $x_{ij}$ , ( $1 \leq i \leq j \leq p$ ),  $y_1, \dots, y_{p+k}$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  tais que

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} x_{ij} y_i y_j + \sum_{l=p+1}^{p+k} y_l^2, \text{ onde } x = (x_{ij}) \text{ e } y = (y_1, \dots, y_{p+k}).$$

Note que a quantidade de variáveis  $x_{ij}$  é  $1 + 2 + \dots + p$  (se  $j = l$  então  $i$  pode ser  $1, 2, \dots, l$ ), ou seja,  $\frac{p(p+1)}{2}$ . Assim  $n = q + p + k$ .

Chamamos  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq p} x_{ij} y_i y_j$  de **forma reduzida** de  $f$  e podemos escrever  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq p} x_{ij} y_i y_j = (Y')^t (X') (Y')$ , onde

$$(X') = \begin{pmatrix} x_{11} & \frac{1}{2}x_{12} & \frac{1}{2}x_{13} & \frac{1}{2}x_{14} & \cdots & \frac{1}{2}x_{1p} \\ \frac{1}{2}x_{12} & x_{22} & \frac{1}{2}x_{23} & \frac{1}{2}x_{24} & \cdots & \frac{1}{2}x_{2p} \\ \frac{1}{2}x_{13} & \frac{1}{2}x_{23} & x_{33} & \frac{1}{2}x_{34} & \cdots & \frac{1}{2}x_{3p} \\ \frac{1}{2}x_{14} & \frac{1}{2}x_{24} & \frac{1}{2}x_{34} & x_{44} & \cdots & \frac{1}{2}x_{4p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}x_{1p} & \frac{1}{2}x_{2p} & \frac{1}{2}x_{3p} & \frac{1}{2}x_{4p} & \cdots & x_{pp} \end{pmatrix} \text{ e } (Y') = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}.$$

**Notação:** Uma  $D(q, 0)$ -singularidade é também chamada de  $A(q)$ , onde

$$f(x, y) = \sum_{l=1}^k y_l^2.$$

Para  $p = 1$  temos que  $f$  é do tipo  $D(q, 1)$  e  $f(x, y) = x_1 y_1^2 + \sum_{l=2}^{1+k} y_l^2$ .

Um germe do tipo  $A(0)$  é chamado uma **função de Morse** ou um **ponto duplo ordinário** e uma singularidade em 0 em  $\mathbb{C}^3$  definida por uma função  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  do tipo  $D(1, 1)$  é chamada de **guarda-chuva de Whitney** ou **Cartan**.

É usado também a notação  $D_\infty$  para a  $D(1, 1)$ -singularidade e  $A_\infty$  para a singularidade do tipo  $A(1) = D(1, 0)$ .

**Observação 3.1.3** *É fácil ver que dado um germe do tipo  $D(q, p)$ , para quaisquer  $x_{ij}$  ( $1 \leq i \leq j \leq p$ ) temos que  $((x_{ij}), 0, \dots, 0)$  anula todas as derivadas parciais de  $f$ . Assim, para toda vizinhança de  $\underline{0} = (0, \dots, 0)$  sempre vai existir outras soluções para as derivadas parciais de  $f$  além da origem. Com isso, concluímos que  $\underline{0}$  é uma singularidade não isolada dos germes do tipo  $D(q, p)$ .*

A seguir descreveremos os espaços tangente e tangente estendido de  $f$  quando  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é regular. Isso será fundamental para descrever tais espaços de  $g$  quando  $f$  for do tipo  $D(q, p)$  com  $g$  sua forma reduzida e para a descrição da  $I$ -codimensão (e  $I$ -codimensão estendida) de um germe  $f \in \int I$ .

Sendo  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  regular, podemos considerar as variáveis  $u_1, \dots, u_s, y_1, \dots, y_p$  tais que  $I = \langle y_1, \dots, y_p \rangle$  (ver Proposição 1.1.63).

**Proposição 3.1.4** *Sejam  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  regular e  $f \in \int I$ . Então,  $T_{I,e}(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle + I \left\langle \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$  e  $T_I(f) = \mathcal{M}_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle + I \left\langle \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$ .*

**Demonstração:**

Como  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é regular, pela Proposição 1.2.16 temos que  $I$  é ideal radical e, pela Proposição 1.2.33,  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é intersecção completa. Portanto, pela Proposição 2.2.10 temos que  $\int I = I^2$ .

Por outro lado, pela Proposição 2.3.8, temos que  $T_{I,e}(f) \subset \int I$ . Assim  $T_{I,e}(f) \subset I^2$ , ou seja,  $\xi(f) \in I^2$ ,  $\forall \xi \in Der_I$ .

Notemos que  $\xi(f) = \sum_{k=1}^k \xi_k \frac{\partial f}{\partial u_k} + \sum_{l=1}^p \tilde{\xi}_l \frac{\partial f}{\partial y_l}$ . Como  $\xi \in Der_I$ , tomando  $g_l = y_l$ , temos que  $g_l \in I$  e  $\xi(g_l) = \tilde{\xi}_l \in I$ .

$$\text{Logo, } T_{I,e}(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle + I \left\langle \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle.$$

Analogamente temos também que

$$T_I(f) = \left\{ \xi(f) \mid \xi \in Der_I, \sum_{1 \leq k \leq p} \xi_k \frac{\partial f}{\partial u_k} + \sum_{1 \leq i \leq p} \xi_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{1 \leq j \leq p} \xi_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \mid \xi_{ij}, \xi_i, \xi_j \in \mathcal{M}_n \right\} = \mathcal{M}_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle + I \left\langle \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle. \quad \blacksquare$$

Antes de caracterizar os espaços tangente e tangente estendido de  $g$ , quando  $f$  é do tipo  $D(q, p)$  e  $g$  é sua forma reduzida, precisamos do seguinte resultado:

**Lema 3.1.5** *Seja  $I = \langle y_1, \dots, y_p \rangle$ . Então  $B = \{y_i y_j \mid 1 \leq i \leq j \leq p\}$  é uma base de  $\frac{I^2}{\mathcal{M}_n I^2}$ .*

**Demonstração:**

Temos que  $B = \{y_i y_j \mid 1 \leq i \leq j \leq p\}$  é um conjunto de geradores de  $I^2$ . Seja  $N$  o conjunto em  $I^2$  tal que  $B$  não é linearmente independente. Assim,  $B$  é base de  $\frac{I^2}{N}$ .

Sejam  $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$  com  $1 \leq i \leq j \leq p$ . Então  $\alpha_{ij} \in \mathcal{M}_n$  ou  $\alpha_{ij} \notin \mathcal{M}_n$ .

Notemos que  $B$  ser linearmente independente sobre  $\mathbb{C}$  significa

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq p} \alpha_{ij} y_i y_j = 0 \Rightarrow \alpha_{ij} = 0 \Rightarrow \alpha_{ij} \notin \mathcal{M}_n.$$

Assim, para  $\alpha_{ij} \in \mathcal{M}_n$ , temos que  $B$  não é linearmente independente. Logo,  $N = \mathcal{M}_n I^2$ . Portanto,  $B$  é uma base de  $\frac{I^2}{\mathcal{M}_n I^2}$ . ■

Agora podemos obter:

**Proposição 3.1.6** *Seja  $f \in \mathcal{O}_n$  do tipo  $D(q, p)$ , com  $g$  sua forma reduzida. Se  $I = \langle y_1, \dots, y_p \rangle$ , e  $\mathcal{M}_n = \langle (x_{ij}), y_1, \dots, y_{p+k} \rangle$  para  $1 \leq i, j \leq p$  então  $T_{I,e}(g) = I^2$ ,  $T_I(g) = \mathcal{M}_n I^2$ ,  $c_{I,e}(g) = 0$  e  $c_I(g) = \frac{p(p+1)}{2}$ .*

**Demonstração:**

Como  $g(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} x_{ij} y_i y_j$ , onde  $x = (x_{ij})$  e  $y = (y_1, \dots, y_p)$  temos que  $\frac{\partial g}{\partial x_{ij}} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} y_i y_j$  e, portanto,  $\left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle = I^2$ .

Como  $I = \langle y_1, \dots, y_p \rangle$  e  $\{(x_{ij}), y_1, \dots, y_p\}$  é um sistema regular de parâmetros de  $\mathcal{O}_n$  (Observação 1.2.14) então  $I$  é gerado por um subconjunto do sistema regular de parâmetros de  $\mathcal{O}_n$  e, usando a Proposição 1.1.63, temos que  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é regular. Além disso, claramente  $g(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} x_{ij} y_i y_j \in \int I$  e, pela Proposição 3.1.4, temos que

$$T_{I,e}(g) = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle + I \left\langle \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle \text{ e } T_I(g) = \mathcal{M}_n \left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle + I \left\langle \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle.$$

Temos ainda que  $\left\langle \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle \subset \mathcal{M}_n I \subset I$ , pois  $\frac{\partial g}{\partial y} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} (x_{ij} y_i + x_{ij} y_j) \in \mathcal{M}_n I \subset I$ .

Assim  $\left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle + I \left\langle \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle \subseteq I^2$ . Logo,  $T_{I,e}(g) \subseteq I^2$ .

Por outro lado,  $I^2 = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle \subseteq T_{I,e}(g)$ . Então  $T_{I,e}(g) = I^2$ .

Como  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é regular, pela Proposição 1.2.16 temos que  $I$  é ideal radical e pela Proposição 1.2.33,  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é intersecção completa. Portanto, pela Proposição 2.2.10 temos que  $\int I = I^2$  e, assim,  $T_{I,e}(g) = I^2 = \int I$ . Dessa forma,

$$c_{I,e}(g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\int I}{T_{I,e}(g)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{T_{I,e}(g)}{T_{I,e}(g)} = 0.$$

Além disso,  $\mathcal{M}_n I^2 = \mathcal{M}_n \left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle \subset T_I(g) = \mathcal{M}_n \left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle + I \left\langle \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle \subseteq \mathcal{M}_n I^2$ , pois  $\left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle = I^2$  e  $\left\langle \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle \subset \mathcal{M}_n I$ .

Portanto,  $T_I(g) = \mathcal{M}_n I^2$ . Assim,  $\frac{\int I}{T_I(g)} = \frac{I^2}{\mathcal{M}_n I^2}$ .

Pelo Lema 3.1.5 temos que  $\{y_i y_j \mid 1 \leq i \leq j \leq p\}$  é uma base de  $\frac{\int I}{T_I(g)}$ .

Como  $1 \leq i \leq j \leq p$ , temos que se  $j = l$ , para  $l = 1, \dots, p$ , então  $i$  pode ser  $1, \dots, l$ .

Assim, a quantidade de  $y_i y_j$  é  $1 + 2 + \dots + p$  (que é uma P.A.).

Logo,  $c_I(g) = \frac{p(p+1)}{2}$ . ■

Finalmente temos todos os artifícios necessários para se demonstrar um dos principais resultados de nosso trabalho, o importante teorema que nos fornece uma caracterização dos germes do tipo  $D(q, p)$ , muito mencionado desde o início da dissertação.

**Teorema 3.1.7** *Seja  $I$  um ideal em  $\mathcal{O}_n$  tal que  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é regular e suponha que  $f \in \int I$ . Então:*

i)  $c_{I,e}(f) = 0$  se, e somente se,  $f$  é do tipo  $D(q, p)$  para algum  $p$ ;

ii)  $c_I(f) = 0$  se, e somente se,  $f$  é do tipo  $D(q, 0)$ .

**Demonstração:**

i) Seja  $p$  o posto de  $d_0^2 f$ . Pelo Lema 1.2.50 existem coordenadas locais  $u_1, \dots, u_s, y_1, \dots, y_p$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  tais que  $f(u, y) = g(u) + \sum_{l=1}^p y_l^2$ , onde  $u = (u_1, \dots, u_s)$  e  $y = (y_1, \dots, y_p)$ , com  $g \in \mathcal{M}_s^3$ . Assim basta mostrar que  $g$  é do tipo  $D(q, p)$  para algum  $p$ .

Consideremos  $\hat{I}$  um ideal tal que  $I = \hat{I}\mathcal{O}_n + \langle y \rangle \mathcal{O}_n$ . Assim,  $\hat{I} \subset \mathcal{O}_s \cong \mathbb{C}[[u_1, \dots, u_s]]$ . Notemos que como  $f \in \int I$  então  $g \in \int \hat{I}$ .

Como  $c_{I,e}(f) = 0$  então, pelo Lema 3.1.1, temos que  $c_{\hat{I},e}(g) = 0$ .

Como  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é regular então  $\frac{\mathcal{O}_s}{\hat{I}}$  é regular e, novamente pela Proposição 1.1.63, existe um sistema regular de parâmetros de  $\mathcal{O}_s$  tal que  $\hat{I}$  é gerado por um subconjunto deste. Denotando tal sistema por  $w_1, \dots, w_r, z_1, \dots, z_t$  temos  $\hat{I} = \langle z_1, \dots, z_t \rangle$ . Ainda usando o fato que  $\frac{\mathcal{O}_s}{\hat{I}}$  é regular temos, pela Proposição 1.2.16, que  $\hat{I}$  é ideal radical e pela Proposição 1.2.33, temos que  $\frac{\mathcal{O}_s}{\hat{I}}$  é uma intersecção completa. Assim, sendo  $\hat{I}$  radical e definindo uma intersecção completa, pela Proposição 2.2.10, temos que  $\int \hat{I} = \hat{I}^2$ . Como  $g \in \int \hat{I}$  então  $g \in \hat{I}^2$ .

Como  $g \in \hat{I}^2$  e  $g \in \mathcal{M}_s^3$ , podemos escrever

$$g(w, z) = \sum_{i \leq j} \left( \sum_k a_{ijk}(w, z) w_k + \sum_l b_{ijl}(w, z) z_l \right) z_i z_j. \quad (3.3)$$

Pela Proposição 3.1.4,

$$T_{\hat{I},e}(g) = \left\langle \frac{\partial g}{\partial w} \right\rangle + \hat{I} \left\langle \frac{\partial g}{\partial z} \right\rangle. \quad (3.4)$$

Notemos que

$$\frac{\partial g}{\partial w_k}(w, z) = \sum_{i \leq j} \sum_k \frac{\partial a_{ijk}}{\partial w_k}(w, z) w_k z_i z_j + \sum_{i \leq j} \sum_k a_{ijk}(w, z) z_i z_j + \sum_{i \leq j} \sum_l \frac{\partial b_{ijl}}{\partial w_k}(w, z) z_l z_i z_j.$$

Usando a notação  $\alpha_{ij,k} = a_{ijk}(0, 0)$ , temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g}{\partial w_k}(w, z) - \sum_{i \leq j} \alpha_{ij,k} z_i z_j = \\ & \sum_{i \leq j} \sum_k \frac{\partial a_{ijk}}{\partial w_k}(w, z) w_k z_i z_j + \sum_{i \leq j} \sum_k (a_{ijk}(w, z) - \alpha_{ij,k}) z_i z_j + \sum_{i \leq j} \sum_l \frac{\partial b_{ijl}}{\partial w_k}(w, z) z_l z_i z_j \in \mathcal{M}_s \hat{I}^2, \end{aligned}$$



pois cada parcela pertence a  $\mathcal{M}_s \hat{I}^2$ . Assim

$$\frac{\partial g}{\partial w_k}(w, z) \equiv \sum_{i \leq j} \alpha_{ij,k} z_i z_j \pmod{\mathcal{M}_s \hat{I}^2}, \quad (3.5)$$

Além disso,

$$\frac{\partial g}{\partial z_l}(w, z) = \sum_{i \leq j} \sum_k \frac{\partial a_{ijk}}{\partial z_l}(w, z) w_k z_i z_j + \sum_{i \leq j} \sum_l b_{ijl}(w, z) z_i z_j + \sum_{i \leq j} \sum_l \frac{\partial b_{ijl}}{\partial z_l}(w, z) z_l z_i z_j.$$

Logo,  $\frac{\partial g}{\partial z_l}(w, z) \in \mathcal{M}_s \hat{I}$  e, portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial z_l}(w, z) \equiv 0 \pmod{\mathcal{M}_s \hat{I}}. \quad (3.6)$$

Pelas Equações (3.4) e (3.6) temos  $T_{\hat{I},e}(g) \equiv \left\langle \frac{\partial g}{\partial w} \right\rangle \pmod{\mathcal{M}_s \hat{I}^2}$ .

Como  $c_{\hat{I},e}(g) = 0$ , ou seja,  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\int \hat{I}}{T_{\hat{I},e}(g)} = 0$ , concluímos que  $\int \hat{I} = T_{\hat{I},e}(g)$ . Como  $\int \hat{I} = \hat{I}^2$ , então  $\hat{I}^2 = T_{\hat{I},e}(g)$  e, assim,

$$\hat{I}^2 \equiv \left\langle \frac{\partial g}{\partial w} \right\rangle \pmod{\mathcal{M}_s \hat{I}^2}. \quad (3.7)$$

Pela Equação 3.7, podemos concluir que

$$\frac{\hat{I}^2}{\mathcal{M}_s \hat{I}^2} = \frac{\left\langle \frac{\partial g}{\partial w} \right\rangle}{\mathcal{M}_s \hat{I}^2} = E.$$

Pelo Lema 3.1.5,  $B = \{z_i z_j \mid 1 \leq i \leq j \leq t\}$  é uma base para  $E$  e pela Equação 3.5,  $C = \left\{ \sum_{i \leq j} \alpha_{ij,k} z_i z_j \mid 1 \leq i \leq j \leq t \right\}$  também é base para  $E$ . Logo, o número de elementos de  $B$  e  $C$  são iguais. Como em  $B$  temos  $\frac{t(t+1)}{2}$  elementos (final da demonstração da Proposição 3.1.6) temos que  $C$  também tem  $\frac{t(t+1)}{2}$  elementos. Assim, como para cada  $k = 1, \dots, r$  temos um elemento da base  $C$  segue que  $r = \frac{t(t+1)}{2}$ .

Considere as matrizes  $M_B$  e  $M_C$  como sendo as matrizes colunas contendo ordenadamente os elementos das bases  $B$  e  $C$ , respectivamente, e

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11,1} & \dots & \alpha_{11,k} & \dots & \alpha_{11,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1t,1} & \dots & \alpha_{1t,k} & \dots & \alpha_{1t,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{tt,1} & \dots & \alpha_{tt,k} & \dots & \alpha_{tt,r} \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz  $A$  é quadrada e  $M_C = A M_B$ . Logo,  $\det M_C = \det A \cdot \det M_B$ . Como  $\det M_C \neq 0$ , pois  $M_C$  é obtida a partir dos elementos da base  $C$ , segue que  $\det A \neq 0$ . Logo,  $A$  é inversível.

Tome  $J = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$ . Assim, pela Observação 1.2.13,  $J$  é gerado por uma  $\mathcal{O}_s$ -sequência. Então, considerando  $w_{ij} = \sum_{ij,k} \alpha_{ij,k} w_k$  para  $1 \leq i \leq j \leq t$ , como  $A$  é inversível, pela Proposição 1.1.58 segue que  $\{w_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq t\}$  é uma  $\mathcal{O}_s$ -sequência. Como  $\mathcal{O}_s$  é regular (Observação 1.2.14) segue que  $\mathcal{O}_s$  é Cohen-Macaulay (Proposição 1.2.33). Então, pela Proposição 1.1.64 temos que  $\{w_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq t\}$  é parte de um sistema regular de parâmetros de  $\mathcal{O}_s$ . Logo,  $w_{ij} (1 \leq i \leq j \leq t)$  são coordenadas em  $(\mathbb{C}^s, 0)$ .

Seja  $x_{ij} = \sum_k a_{ijk}(w, z) w_k + \sum_l b_{ijl}(w, z) z_l$ . Assim,

$$\begin{aligned} x_{ij} - w_{ij} &= \sum_k a_{ijk}(w, z) w_k + \sum_l b_{ijl}(w, z) z_l - \sum_{ij,k} \alpha_{ij,k} w_k \\ &= \sum_k (a_{ijk}(w, z) - \alpha_{ij,k}) w_k + \sum_l b_{ijl}(w, z) z_l \in \mathcal{M}_s^2 + \hat{I}. \end{aligned}$$

Consideremos  $\tilde{g} = \sum_{i \leq j} w_{ij} z_i z_j$ , que é uma singularidade do tipo  $D(q, t)$  pois temos que  $w_{ij} (1 \leq i \leq j \leq t), z_1, \dots, z_t$  são coordenadas locais.

Notemos que

$$\begin{aligned} g - \tilde{g} &= \sum_{i \leq j} x_{ij} z_i z_j - \sum_{i \leq j} w_{ij} z_i z_j = \sum_{i \leq j} (x_{ij} - w_{ij}) z_i z_j \in (\mathcal{M}_s^2 + \hat{I}) \hat{I}^2 \\ &= (\mathcal{M}_s^2 + \hat{I}) \int \hat{I} = \mathcal{M}_s^2 \int \hat{I} + \hat{I} \int \hat{I} \subset \mathcal{M}_s^2 \int \hat{I} + \mathcal{M}_s \int \hat{I} \subset \mathcal{M}_s \int \hat{I}. \end{aligned}$$

Como  $c_{\hat{I},e}(g) = 0$  temos pela Proposição 2.3.10 que  $c_{\hat{I}}(g) < \infty$ . Então, pelo Corolário 2.4.7 segue que  $g$  é  $\hat{I}$ -finitamente determinado e assim, como  $g - \tilde{g} \in \mathcal{M}_s \int \hat{I}$  concluímos pela Observação 2.4.4 que  $g \sim_{\mathcal{R}_{\hat{I}}} \tilde{g}$ .

Logo, como  $\tilde{g}$  é do tipo  $D(q, t)$  então  $g$  é do tipo  $D(q, t)$  e portanto  $f$  é do tipo  $D(q, t)$ .

Reciprocamente, suponha  $f$  do tipo  $D(q, p)$  para algum  $p$ , ou seja, existem coordenadas locais  $x_{ij}, (1 \leq i \leq j \leq p), y_1, \dots, y_{p+k}$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  tais que

$$f(x, y) = g(x, y) + \sum_{l=p+1}^{p+k} y_l^2, \text{ com } x = (x_{ij}), y = (y_1, \dots, y_{p+k}) \text{ e } g(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} x_{ij} y_i y_j.$$

Consideremos  $\bar{I} = \langle y_1, \dots, y_p \rangle$ . Assim,  $g \in \int \bar{I}$ . Então, pelo Lema 3.1.1, temos que  $c_{I,e}(f) = c_{\bar{I},e}(g)$ . Agora, utilizando a Proposição 3.1.6, concluímos que  $c_{\bar{I},e}(g) = 0$ . Logo,  $c_{I,e}(f) = 0$ .

*ii)* Se  $c_I(f) = 0$ , então  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\int I}{T_I(f)} = 0$ .

Como  $T_I(f) \subset T_{I,e}(f)$  concluímos que  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\int I}{T_{I,e}(f)} = 0$ , ou seja,  $c_{I,e}(f) = 0$ .

Pelo item *i)* temos que  $f$  é do tipo  $D(q, p)$  para algum  $p$ .

Analogamente ao que foi feito na recíproca do item *i)* concluímos usando o Lema 3.1.1 e a Proposição 3.1.6 que  $c_I(f) = c_{\bar{I}}(g)$  e  $c_{\bar{I}}(g) = \frac{p(p+1)}{2}$ .

Como  $c_I(f) = 0$  então,  $\frac{p(p+1)}{2} = 0$ . Assim,  $p = 0$  e, portanto,  $f$  é do tipo  $D(q, 0)$ .

Reciprocamente, seja  $f$  do tipo  $D(q, 0)$ . Então existem coordenadas  $y_1, \dots, y_n$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  tais que

$$f(y) = g(y) + \sum_{l=1}^n y_l^2 \text{ com } y = (y_1, \dots, y_n) \text{ e } g \text{ identicamente nula.}$$

Considere  $I = \langle y \rangle \mathcal{O}_n = \tilde{I} \mathcal{O}_n + \langle y \rangle \mathcal{O}_n$ , onde  $\tilde{I} = \langle 0 \rangle$ .

Como  $g \in \int \tilde{I}$  segue, pelo Lema 3.1.1, que  $c_I(f) = c_{\tilde{I}}(g)$ .

Agora, pela Proposição 3.1.6, temos que  $c_{\tilde{I}}(g) = \frac{p(p+1)}{2}$ . Como  $p = 0$  então  $c_{\tilde{I}}(g) = 0$ . Assim,  $c_I(f) = 0$ . ■

## 3.2 $\mathcal{R}_I$ -estabilidade

Sejam  $I \subseteq \mathcal{O}_n$  e  $f \in \int I$ . Conseguiremos nesta seção relacionar o conceito de  $\mathcal{R}_I$ -estabilidade com germes do tipo  $D(q, p)$  para o caso em que  $I$  é um ideal radical que define um germe de uma intersecção completa quase homogênea com singularidade isolada, pois, neste caso veremos que é possível descrever os geradores de  $I$  ou é possível concluir que  $f$ , sendo  $\mathcal{R}_I$ -estável, é  $\mathcal{R}_I$ -equivalente a uma  $D(q, p)$ -singularidade.

**Definição 3.2.1** *Sejam  $I \subseteq \mathcal{O}_n$ . Um germe  $f \in \int I$  é  $\mathcal{R}_I$ -estável quando  $c_I(f) = 0$ .*

Assim, quando  $I$  é um ideal de  $\mathcal{O}_n$  tal que  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é regular, os germes do tipo  $D(q, 0)$  são  $\mathcal{R}_I$ -estáveis (Teorema 3.1.7 item *ii*).

Para obter a relação mencionada, precisamos do resultado a seguir, que por ser muito técnico omitiremos a demonstração:

**Lema 3.2.2** *Seja  $f$  quase homogênea do tipo  $(w_1, \dots, w_n; d)$  com  $f = z_1^2 + \dots + z_q^2 + \sum_{i,j=q+1}^p g_{ij} f_i f_j$ , onde  $g_{ij}, f_i, f_j$  só dependem das variáveis  $z_{q+1}, \dots, z_n$ .*

*Se  $p - q \geq 2$  então  $f_{q+1}^2, \dots, f_p^2$  não podem pertencer simultaneamente a  $\mathcal{L} + C.E(f)$ , onde  $\mathcal{L} = \mathcal{M}_n \langle f_{q+1}, \dots, f_p \rangle^2 + \langle z_1, \dots, z_q \rangle \langle f_{q+1}, \dots, f_p \rangle + \langle z_1, \dots, z_q \rangle^2$ ,  $C = \{h \in \mathcal{O}_n \mid h \notin \langle z_1, \dots, z_q \rangle\}$  e  $E$  é o campo de Euler.*

A demonstração pode ser vista em [6, Teorema 7.47].

**Teorema 3.2.3** *Sejam  $I \subseteq \mathcal{O}_n$  um ideal radical definindo um germe de intersecção completa quase homogênea em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  com singularidade isolada e  $f \in \int I$  um germe  $\mathcal{R}_I$ -estável. Então podemos escolher as coordenadas  $(z_1, \dots, z_n)$  de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  tais que:*

- i)  $f$  é  $\mathcal{R}_I$ -equivalente a uma  $D(k, 0)$ -singularidade, para algum  $k \in \mathbb{N}$ , ou*
- ii) existem  $k \in \{1, \dots, n\}$  e  $g_k, h_k \in \mathcal{O}_n$  com  $g_k$  um germe quase homogêneo com singularidade isolada tais que  $I = \langle z_1, \dots, z_{k-1}, g_k \rangle$  e  $f = z_1^2 + \dots + z_{k-1}^2 + h_k g_k^2$ .*

### Demonstração:

Como  $\mathcal{O}_n$  é noetheriano (Observação 1.2.12),  $I$  é finitamente gerado (Proposição 1.1.30).

Consideremos  $I = \langle g_1, \dots, g_p \rangle$  onde  $g_1, \dots, g_p$  é um conjunto mínimo de geradores quase homogêneos de  $I$ .

Temos que  $\frac{I + \mathcal{M}_n^2}{\mathcal{M}_n^2}$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. Seja  $q = \dim_{\mathbb{C}} \frac{I + \mathcal{M}_n^2}{\mathcal{M}_n^2}$ . Pela Proposição 1.1.7 temos que  $\frac{I + \mathcal{M}_n^2}{\mathcal{M}_n^2} \cong \frac{I}{I \cap \mathcal{M}_n^2}$ , então  $q = \dim_{\mathbb{C}} \frac{I}{I \cap \mathcal{M}_n^2}$ . Como  $I$  tem  $p$  geradores então  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{I}{I \cap \mathcal{M}_n^2} \leq p$ , ou seja,  $q \leq p$ . Assim,  $q = p$  ou  $q < p$ .

Caso 1:  $q = p$ .

Como os  $\mathbb{C}$ -espaços vetoriais  $\frac{I}{I \cap \mathcal{M}_n^2}$  e  $I$  (pensado como  $\mathbb{C}$ -módulo) são tais que  $\frac{I}{I \cap \mathcal{M}_n^2} \subset I$  e têm a mesma dimensão então  $\frac{I}{I \cap \mathcal{M}_n^2} = I$ . Assim,  $g_1, \dots, g_p$  possuem termos lineares pois  $g_1, \dots, g_p \notin \mathcal{M}_n^2$ . Logo,  $g_1, \dots, g_p$  são submersões e, pelo Teorema da forma local das submersões, temos que existe um sistema de coordenadas locais  $z_1, \dots, z_n$  tal que  $g_j = z_j$  com  $j = 1, \dots, p$ .

Logo,  $I = \langle z_1, \dots, z_p \rangle$  e, com isso,  $I$  é gerado por um subconjunto do sistema regular de parâmetros de  $\mathcal{O}_n$ , pois  $\{z_1, \dots, z_n\}$  é um sistema regular de parâmetros de  $\mathcal{O}_n$  (Observação 1.2.14). Logo, como  $\mathcal{O}_n$  é regular, pela Proposição 1.1.63,  $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$  é regular. Além disso, como  $f$  é  $\mathcal{R}_I$ -estável segue que  $c_I(f) = 0$  e então, pelo item *ii*) do Teorema 3.1.7,  $f$  é do tipo  $D(k, 0)$  para algum  $k$ . Como  $f \sim_{\mathcal{R}_I} f$  concluímos que  $f$  é  $\mathcal{R}_I$ -equivalente a uma  $D(k, 0)$ -singularidade, para algum  $k$ . Portanto, o item *i*) está provado.

Caso 2:  $q < p$ .

Neste caso  $\frac{I}{I \cap \mathcal{M}_n^2} = \langle f_1, \dots, f_q \rangle$  onde  $f_j$  são quase homogêneos para  $j = 1, \dots, q$ . (para cada  $j$ , existe  $g_{ij}$  tal que  $g_{ij} = f_j + h_j$  com  $h_j \in \mathcal{M}_n^2$  e  $f_j \notin \mathcal{M}_n^2$ ).

Temos que  $f_1, \dots, f_q$  possuem termos lineares pois  $f_1, \dots, f_q \notin \mathcal{M}_n^2$ . Assim,  $f_1, \dots, f_q$  são submersões e, pelo Teorema da forma local das submersões, temos que existe um sistema de coordenadas locais  $z_1, \dots, z_n$  tal que  $f_j = z_j$  com  $j = 1, \dots, q$ .

Assim, pelo Teorema do Completamento para espaços vetoriais, podemos pensar em  $I = \langle f_1, \dots, f_q, f_{q+1}, \dots, f_p \rangle$ , onde  $f_i \notin \mathcal{M}_n^2$  para  $i = 1, \dots, q$  e  $f_i \in \mathcal{M}_n^2$  para  $i = q+1, \dots, p$ .

Além disso, podemos supor que  $f_i$ , para  $i = q+1, \dots, p$ , não depende das coordenadas  $z_1, \dots, z_q$  pois se dependesse o trocaríamos por um germe  $h_i$  obtido da combinação adequada dos  $f_j = z_j$  e  $f_i$  para  $j = 1, \dots, q$ .

Como  $I$  é ideal radical e define uma intersecção completa, pela Proposição 2.2.10, temos que  $\int I = I^2$ . Assim, como  $f \in \int I$  então,  $f \in I^2$  e, por isso, podemos escrever  $f$  da seguinte forma

$$f = \sum_{i,j=1}^p g_{ij} f_i f_j, \text{ com } g_{ij} \in \mathcal{O}_n \text{ e } g_{ij} = g_{ji}.$$

Seja  $r$  o posto da matriz  $(g_{ij}(0))_{i,j=1,\dots,q}$ .

Como  $f_1 = z_1, \dots, f_q = z_q$  e  $f_{q+1}, \dots, f_p \in \mathcal{M}_n^2$  temos que

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} (0) \right) = \begin{pmatrix} g_{11}(0) & g_{12}(0) & \cdots & g_{1q}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ g_{12}(0) & g_{22}(0) & \cdots & g_{2q}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{1q}(0) & g_{2q}(0) & \cdots & g_{qq}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Logo,  $r$  também é o posto da matriz Hessiana  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} (0) \right)$  e claramente temos que  $r \leq q$ .

De acordo com o Lema 1.2.51 podemos obter um sistema  $\tilde{z}$  de coordenadas, com  $\tilde{z}_j = z_j$  para  $j > q$ , tal que  $I$  é gerado por  $\tilde{f}_1 = \tilde{z}_1, \dots, \tilde{f}_q = \tilde{z}_q, \tilde{f}_{q+1} = f_{q+1}, \dots, \tilde{f}_p = f_p$  e tal que

$$f = \tilde{z}_1^2 + \dots + \tilde{z}_r^2 + \sum_{i,j=r+1}^p \tilde{g}_{i,j} \tilde{f}_i \tilde{f}_j, \quad (3.8)$$

com  $\tilde{g}_{i,j} = \tilde{g}_{j,i}$  e com  $\tilde{g}_{i,j} \tilde{f}_i \tilde{f}_j \in \mathcal{M}_n^3$ .

Temos que existem  $h_{i,j} = h_{i,j}(\tilde{z}_{r+1}, \dots, \tilde{z}_n)$  para  $i, j \geq r+1$  tais que

$$\sum_{i,j=r+1}^p \tilde{g}_{i,j} \tilde{f}_i \tilde{f}_j = \sum_{i,j=r+1}^p h_{i,j} \tilde{f}_i \tilde{f}_j + \sum_{i,j=r+1}^p \tilde{\beta}_{i,j} \tilde{f}_i \tilde{f}_j \text{ com } h_{i,j} \tilde{f}_i \tilde{f}_j \in \mathcal{M}_n^3.$$

Notemos que para todo  $k \geq 2$  podemos escrever

$$\sum_{i,j=r+1}^p \tilde{\beta}_{i,j} \tilde{f}_i \tilde{f}_j = \sum_{i,j=r+1}^p \tilde{\beta}_{i,j}^1 \tilde{f}_i \tilde{f}_j + \sum_{i,j=r+1}^p \tilde{\beta}_{i,j}^2 \tilde{f}_i \tilde{f}_j$$

tal que  $\tilde{\beta}_{i,j}^2 \in \mathcal{M}_n^k$  e  $\tilde{\beta}_{i,j}^1 \in \mathcal{M}_n^{k_0}$  onde  $k_0 < 2$ .

Tomemos

$$g_k = \tilde{z}_1^2 + \dots + \tilde{z}_r^2 + \sum_{i,j=r+1}^p h_{i,j} \tilde{f}_i \tilde{f}_j + \sum_{i,j=r+1}^p \tilde{\beta}_{i,j}^1 \tilde{f}_i \tilde{f}_j.$$

Então  $f - g_k = \tilde{\beta}_{i,j}^2 \tilde{f}_i \tilde{f}_j \in \mathcal{M}_n^k \int I$  para todo  $k \geq 2$ . Logo, pela Observação 2.4.4,  $f \sim_{\mathcal{R}_I} g_k$  para todo  $k \geq 2$ .

Como  $c_I(f) = 0$ , então pelo Corolário 2.4.7 temos que existe um  $d$  tal que  $f$  é  $(d, I)$ -finitamente determinado. Como  $f \sim_{\mathcal{R}_I} g_k$  para todo  $k$  segue que  $f \sim_{\mathcal{R}_I} g_d$ . Logo, usando o Lema 2.4.2 concluímos que  $g_d$  é  $(d, I)$ -finitamente determinado.

Como  $g_d - l = \sum_{i,j=r+1}^p \tilde{\beta}_{i,j}^1 \tilde{f}_i \tilde{f}_j \in \mathcal{M}_n^{k_0}$  onde  $k_0 < 2$  e  $l = \tilde{z}_1^2 + \dots + \tilde{z}_r^2 + \sum_{i,j=r+1}^p h_{i,j} \tilde{f}_i \tilde{f}_j$  então  $g_d \sim_{\mathcal{R}_I} l$ . Portanto,  $f \sim_{\mathcal{R}_I} l$  e, assim, podemos supor que na Equação (3.8) que os germes  $\tilde{g}_{i,j}$  não dependem de  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r$ .

Para simplificar as notações vamos escrever a sequência  $z$  para  $\tilde{z}$ ,  $f_j$  para  $\tilde{f}_j$  e  $g_{ij}$  para  $\tilde{g}_{i,j}$ . Como  $c_I(f) = 0$ , temos que  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\int I}{T_I(f)} = 0$  e, então,  $T_I(f) = \int I$ . Como  $\int I = I^2$ , temos que  $I^2 = T_I(f)$ . Provaremos que essa igualdade implica que  $r = q = p - 1$ .

Como  $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$  é intersecção completa quase homogênea em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  com singularidade isolada, então o  $\mathcal{O}_n$ -módulo  $Der_I$  de campos de vetores de  $I$  é gerado pelos campos de vetores mencionados na Proposição 2.1.9:

i) campos de vetores  $f_i \frac{\partial}{\partial z_j}$ , com  $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n$ ;

ii) campo de Euler, ou seja,  $E = \sum_{i=1}^n w_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ , onde  $w_i$  são os pesos da  $F = (f_1, \dots, f_p) :$

$(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  nas variáveis  $z_i$  para  $i = 1, \dots, n$  e

iii) campos de vetores triviais, ou seja, os menores  $(p+1) \times (p+1)$  da matriz  $A =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial z_n} \end{pmatrix} \text{ associados para todos os pares } (i_1, i_2, \dots, i_{p+1}), \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{i_{p+1}}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_{i_{p+1}}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial z_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial z_{i_{p+1}}} \end{vmatrix},$$

satisfazendo  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p+1} \leq n$ .

Seja  $Der_I(f) := \{\xi(f) \text{ com } \xi \in Der_I\}$ . Já vimos que  $T_I(f) := \{\xi(f) \mid \xi \in Der_I, \xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ e } \xi_j \in \mathcal{M}_n \text{ para } j = 1, \dots, n\}$ . Assim, claramente  $T_I(f) \subset Der_I(f)$ .

De acordo com as descrições dos geradores de  $Der_I$  é fácil ver que  $Der_I(f) \subset T_I(f)$ .

Portanto,  $Der_I(f) = T_I(f)$ .

Queremos mostrar que  $r = q$ . Como  $r \leq q$ , vamos supor que  $r < q$ .

Considerando os campos do  $Der_I$  da forma  $\xi_{ij} = f_i \frac{\partial}{\partial z_j}$  o termo  $z_q^2$  tem coeficiente zero para  $i = 1, \dots, q-1$  e  $j$  qualquer pois  $f_i = z_i$  e também é zero para  $i = q+1, \dots, p$  e  $j$  qualquer pois  $f_i$  não depende de  $z_q$  e  $f_i \in \mathcal{M}_n^2$ .

Consideremos o caso  $f_q \frac{\partial f}{\partial z_j}$  para  $j = 1, \dots, n$ .

Para  $j = 1, \dots, r$  temos  $f_q \frac{\partial f}{\partial z_j} = 2f_q z_j$  e então o coeficiente de  $z_q^2$  é zero.

Para  $j = q+1, \dots, n$  como  $f_i \in \mathcal{M}_n^2$  para  $i = q+1, \dots, p$  então  $\frac{\partial f}{\partial z_j} \in \mathcal{M}_n$  e assim o coeficiente de  $z_q^2$  é zero.

Para  $j = r+1, \dots, q-1$  como  $f_i = z_i$  para  $i = 1, \dots, q$  e  $f_i \in \mathcal{M}_n^2$  para  $i = q+1, \dots, p$  temos que o coeficiente de  $z_q^2$  é zero.

Assim basta analisar  $j = q$ . Temos

$$f_q \frac{\partial f}{\partial z_q} = z_q \left( \frac{\partial g_{qq}}{\partial z_q} z_q^2 + 2z_q g_{qq} + \dots + \frac{\partial g_{pp}}{\partial z_q} f_p^2 + 2f_p g_{pp} \frac{\partial f_p}{\partial z_q} \right).$$

Como estamos olhando para  $z_q^2$  a única possibilidade seria  $2g_{qq} z_q^2$ . Assim para que  $z_q^2$  pertença a um dos geradores de i) temos que  $g_{qq}$  tem que ser constante, mas olhando para a expressão de  $f$  como  $g_{qq} f_q^2 \in \mathcal{M}_n^3$  e  $f_q = z_q$  então  $g_{qq}$  não é constante. Portanto, o coeficiente de  $z_q^2$  é zero para todo gerador do item i).

Claramente considerando um campo qualquer no item ii) como este será um determinante e assim é formado por termos que são produtos das derivadas parciais da  $f$  e  $f_i$  para  $i = 1, \dots, p$  com  $\frac{\partial f_j}{\partial z_k} \in \mathcal{M}_n$  para  $k = 1, \dots, n$  e  $j = q+1, \dots, p$  temos que o coeficiente de  $z_q^2$  é zero.

Consideremos agora  $E = \sum_{j=1}^n w_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ . Temos que  $E(f) = \sum_{j=1}^n w_j z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}$ .

Como estamos analisando o coeficiente de  $z_q^2$  temos que olhar para

$$w_q z_q \frac{\partial f}{\partial z_q} = w_q z_q \left( \frac{\partial g_{qq}}{\partial z_q} z_q^2 + 2z_q g_{qq} + \dots + \frac{\partial g_{pp}}{\partial z_q} z_p^2 + 2f_p g_{pp} \frac{\partial f_p}{\partial z_q} \right)$$

e assim a única possibilidade de se obter  $z_q^2$  é no termo  $2w_q g_{qq} z_q^2$ . Assim para que  $z_q^2$  pertença a um dos geradores de iii) temos que  $g_{qq}$  tem que ser constante, mas olhando para a expressão de  $f$  como  $g_{qq} f_q^2 \in \mathcal{M}_n^3$  e  $f_q = z_q$  então  $g_{qq}$  não é constante. Logo, o coeficiente de  $z_q^2$  é zero para todo gerador do item iii).

Portanto para qualquer  $\xi \in \text{Der}_I$  temos ao olhar para  $\xi(f)$  que o coeficiente de  $z_q^2$  é zero. Então  $z_q^2 \notin \text{Der}_I(f)$ . Logo,  $z_q^2 \notin T_I(f) = I^2$ , que é uma contradição. Isto prova que  $r = q$ .

Se  $\xi \in \text{Der}_I$  é um dos geradores do item i) então  $\xi = f_i \frac{\partial}{\partial z_j}$  com  $i = 1, \dots, p$  e  $j = 1, \dots, n$ . Temos 4 casos a considerar.

Caso 1.  $\xi(f) = f_i \frac{\partial f}{\partial z_j}, i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, q.$

Então  $\xi(f) = 2z_i z_j \in \langle z_1, \dots, z_q \rangle^2, i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, q.$

Caso 2.  $\xi(f) = f_i \frac{\partial f}{\partial z_j}, i = 1, \dots, q, j = q + 1, \dots, n.$

Então  $\xi(f) = \sum_{l,k=q+1}^p \left( z_i \frac{\partial g_{lk}}{\partial z_j} f_l f_k + z_i \frac{\partial f_l}{\partial z_j} g_{lk} f_k + z_i \frac{\partial f_k}{\partial z_j} g_{lk} f_l \right) \in \langle z_1, \dots, z_q \rangle \langle f_{q+1}, \dots, f_p \rangle$   
para  $i = 1, \dots, q$  e  $j = q + 1, \dots, n$ .

Caso 3.  $\xi(f) = f_i \frac{\partial f}{\partial z_j}, i = q + 1, \dots, p, j = 1, \dots, q.$

Então  $\xi(f) = 2f_i z_j \in \langle z_1, \dots, z_q \rangle \langle f_{q+1}, \dots, f_p \rangle, i = q + 1, \dots, p, j = 1, \dots, q.$

Caso 4.  $\xi(f) = f_i \frac{\partial f}{\partial z_j}, i = q + 1, \dots, p, j = q + 1, \dots, n.$

Então  $\xi(f) = \sum_{l,k=q+1}^p \left( f_i \frac{\partial g_{lk}}{\partial z_j} f_l f_k + f_i \frac{\partial f_l}{\partial z_j} g_{lk} f_k + f_i \frac{\partial f_k}{\partial z_j} g_{lk} f_l \right) \in \mathcal{M}_n \langle f_{q+1}, \dots, f_p \rangle^2$  para

$i = q + 1, \dots, p$  e  $j = q + 1, \dots, n$ , pois como  $f_k \in \mathcal{M}_n^2$  e  $f_l \in \mathcal{M}_n^2$  temos que  $\frac{\partial f_k}{\partial z_j} \in \mathcal{M}_n$  e  $\frac{\partial f_l}{\partial z_j} \in \mathcal{M}_n$  para  $k, j, l = q + 1, \dots, n$ .

Portanto,  $\xi(f) \in \mathcal{L} := \mathcal{M}_n \langle f_{q+1}, \dots, f_p \rangle^2 + \langle z_1, \dots, z_q \rangle \langle f_{q+1}, \dots, f_p \rangle + \langle z_1, \dots, z_q \rangle^2$ .

Se  $\xi \in \text{Der}_I$  é um dos geradores do item iii) então  $\xi(f)$  é determinante de uma matriz menor  $(p + 1) \times (p + 1)$  da seguinte matriz  $(p + 1) \times n$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial z_q} & \frac{\partial f}{\partial z_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_q} & \frac{\partial f_1}{\partial z_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial z_q} & \frac{\partial f_q}{\partial z_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_{q+1}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_{q+1}}{\partial z_q} & \frac{\partial f_{q+1}}{\partial z_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{q+1}}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial z_q} & \frac{\partial f_p}{\partial z_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial z_q} & \frac{\partial f}{\partial z_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial z_n} \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial f_{q+1}}{\partial z_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{q+1}}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial f_p}{\partial z_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial z_n} \end{pmatrix}.$$

Caso exista um menor cujas colunas sejam exatamente algumas ou todas as  $n-q$  últimas colunas temos que seu determinante é nulo pois a matriz conterá linhas nulas.

Calculando o determinante dos menores que contenham ao menos uma das primeiras  $q$  colunas, ele será uma soma de termos envolvendo o produto de  $\frac{\partial f}{\partial z_j}$  por  $\frac{\partial f_d}{\partial z_i}$  para  $i, j, d = q+1, \dots, p$ . Como

$$f = z_1^2 + \cdots + z_q^2 + \sum_{i,j=q+1}^p g_{ij} f_i f_j, \text{ temos } \frac{\partial f}{\partial z_j} = \sum_{l,k=q+1}^p \left( \frac{\partial g_{lk}}{\partial z_j} f_l f_k + \frac{\partial f_l}{\partial z_j} g_{lk} f_k + \frac{\partial f_k}{\partial z_j} g_{lk} f_l \right).$$

Assim, se fizermos o produto de  $\frac{\partial f}{\partial z_j}$  por  $\frac{\partial f_d}{\partial z_i}$ , então os termos da soma mencionada envolvem

$$\sum_{l,k=q+1}^p \left( \frac{\partial f_d}{\partial z_i} \frac{\partial g_{lk}}{\partial z_j} f_l f_k + \frac{\partial f_d}{\partial z_i} \frac{\partial f_l}{\partial z_j} g_{lk} f_k + \frac{\partial f_d}{\partial z_i} \frac{\partial f_k}{\partial z_j} g_{lk} f_l \right).$$

De acordo com as contas do determinante temos que os termos envolvendo

$\sum_{l,k=q+1}^p \left( \frac{\partial f_d}{\partial z_i} \frac{\partial f_l}{\partial z_j} g_{lk} f_k + \frac{\partial f_d}{\partial z_i} \frac{\partial f_k}{\partial z_j} g_{lk} f_l \right)$  desaparecem, restando apenas termos envolvendo  $\sum_{l,k=q+1}^p \left( \frac{\partial f_d}{\partial z_i} \frac{\partial g_{lk}}{\partial z_j} f_l f_k \right) \in \mathcal{M}_n \langle f_{q+1}, \dots, f_p \rangle^2$ , pois como  $f_d \in \mathcal{M}_n^2$  para  $d = q+1, \dots, p$  segue que  $\frac{\partial f_d}{\partial z_i} \in \mathcal{M}_n$ , para  $i = q+1, \dots, p$ . Assim,  $\xi(f) \in \mathcal{M}_n \langle f_{q+1}, \dots, f_p \rangle^2 \subset \mathcal{L}$ .

Por outro lado, para qualquer germe  $g \in \langle z_1, \dots, z_q \rangle$  e lembrando que  $E$  é o campo de Euler, temos

$$\begin{aligned} (gE)(f) &= g \sum_{m=1}^n w_m z_m \frac{\partial f}{\partial z_m} = g \left( \sum_{k=1}^q w_k z_k \frac{\partial f}{\partial z_k} + g \sum_{l=q+1}^n w_l z_l \frac{\partial f}{\partial z_l} \right) = \\ &= g \left( \sum_{k=1}^q w_k z_k 2z_k + \sum_{l=q+1}^n w_l z_l \left( \sum_{i,j=q+1}^p \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial z_l} f_i f_j + \frac{\partial f_i}{\partial z_l} g_{ij} f_j + \frac{\partial f_j}{\partial z_l} g_{ij} f_i \right) \right) \right) = \\ &= g \sum_{k=1}^q 2z_k^2 w_k + g \sum_{l=q+1}^n w_l z_l \left( \sum_{i,j=q+1}^p \frac{\partial g_{ij}}{\partial z_l} f_i f_j \right) + g \sum_{l=q+1}^n w_l z_l \left( \sum_{i,j=q+1}^p \frac{\partial f_i}{\partial z_l} g_{ij} f_j \right) + \\ &= g \sum_{l=q+1}^n w_l z_l \left( \sum_{i,j=q+1}^p \frac{\partial f_j}{\partial z_l} g_{ij} f_i \right) \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Seja  $C = \{h \in \mathcal{O}_n \mid h \notin \langle z_1, \dots, z_q \rangle\}$ . Então  $Der_I(f) \subseteq \mathcal{L} + C.E(f)$ .



Se  $p - q \geq 2$  pelo Lema 3.2.2  $f_{q+1}^2, \dots, f_p^2$  não podem pertencer simultaneamente ao  $Der_I(f) = T_I(f) = I^2$ , o que é uma contradição. Como  $q < p$  e  $p - q < 2$  então  $p - q = 1$ . Logo,  $r = p - 1 = q$ .

Assim,  $I = \langle z_1, \dots, z_q, f_p \rangle$ , onde  $f_p = f_p(z_{q+1}, \dots, z_n)$ , e  $f = z_1^2 + \dots + z_q^2 + g_{pp}f_p^2$ . Como  $I$  define uma intersecção completa com singularidade isolada então  $f_p$  tem singularidade isolada. Portanto, o item *ii*) está provado. ■

## Números de Lê de singularidades do tipo $D(q, p)$

Dado um germe de função analítica em  $\mathbb{C}^n$  com singularidade não isolada cujo conjunto crítico tenha dimensão  $s$ , Massey em [13] introduz  $s + 1$  números associados a este germe e estes números são chamados de números de Lê do germe. Quando  $s = 0$ , o número associado é o número de Milnor deste germe. No caso de singularidade isolada ( $s = 0$ ), mostra-se que o número de Milnor associado é a codimensão do germe com relação ao grupo  $\mathcal{R}$  (ver [8]). No caso de singularidades não isoladas não há resultados relacionando os números de Lê e a codimensão do germe com relação ao grupo  $\mathcal{R}_I$ , para algum  $I$ . Para finalizar este trabalho, vamos apresentar a definição de números de Lê e calculá-los para as singularidades do tipo  $D(q, p)$ .

### 4.1 Números de Lê

Vimos que  $\mathcal{O}_n$  é o anel dos germes de funções analíticas em  $\mathbb{C}^n$  na origem. Da mesma forma e com as mesmas propriedades podemos obter o anel dos germes de funções analíticas em  $\mathbb{C}^n$  em um ponto qualquer  $p$ , que vamos denotar por  $(\mathcal{O}_n)_p$ . Também podemos, dada uma variedade analítica, obter o seu germe em um ponto qualquer  $p$ .

Assim, dada uma variedade analítica  $X$ , vamos denotar por  $\mathcal{O}_{X,p} := \frac{(\mathcal{O}_n)_p}{I_p(X)}$ , onde  $I_p(X)$  é ideal de  $(\mathcal{O}_n)_p$  associado ao germe de variedade analítica de  $X$  em  $p$ .

**Definição 4.1.1** *Sejam  $X$  uma variedade analítica e  $p$  um ponto em  $X$ . A **multiplicidade** de  $X$  é definida como o comprimento do anel  $\mathcal{O}_{X,p}$ .*

Seja  $S$  um conjunto não vazio. Consideremos o conjunto  $\mathbb{Z}(S) = \{f : S \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(s) = 0 \text{ para quase todo } s \in S \text{ exceto para um número finito}\}$ .

Com a adição usual de aplicações temos que  $\mathbb{Z}(S)$  é um grupo abeliano.

Dado  $f \in \mathbb{Z}(S)$  existem finitos  $s_1, \dots, s_n \in S$  tais que  $f(s_i) \neq 0$ . Denotemos  $f(s) = a_s, \forall s \in S$ . Assim cada elemento  $f \in \mathbb{Z}(S)$  pode ser escrito na forma simbólica  $\sum_{s \in S} a_s [s]$ .

**Notação:**  $f = \sum_{s \in S} a_s [s] = \sum_i a_{s_i} [s_i]$ .

Considerando a soma natural  $f + g = \sum_{s \in S} (a_s + b_s) [s]$ , onde  $f = \sum_{s \in S} a_s [s]$  e  $g = \sum_{s \in S} b_s [s]$ , temos que  $\mathbb{Z}(S)$  é um grupo abeliano livre.

Seja  $X$  uma variedade analítica de dimensão  $d$ . Dado  $0 \leq k \leq d$ , consideremos  $S_k := \{V \mid V \text{ é uma variedade analítica irredutível contida em } X \text{ e } \dim V = k\}$  e denotamos  $\mathbb{Z}(S_k)$  por  $\mathbb{Z}_k(X)$ .

Um  $k$ -ciclo é um elemento deste grupo abeliano livre gerado por  $S_k$ , isto é, é um elemento da forma  $\sum_{V \in S_k} \eta_V [V] \in \mathbb{Z}_k(X)$ .

**Notação:**  $\mathbb{Z}(X) := \bigoplus_{k=0}^d \mathbb{Z}_k(X)$ .

**Definição 4.1.2** *Sejam  $X$  uma variedade analítica com estrutura reduzida e  $X_1, \dots, X_r$  as suas componentes irredutíveis. O ciclo analítico associado a  $X$ , denotado por  $[X]$ , é o elemento  $\sum_{i=1}^r \eta_{X_i} [X_i]$  de  $\mathbb{Z}(X)$ , onde  $\eta_{X_i}$  é a multiplicidade de  $X_i$  em um ponto  $p$ .*

A respeito deste conceito, temos as seguintes considerações, feitas em [13, p.9].

**Proposição 4.1.3** *Nas condições anteriores,*

- i) o número  $\eta_{X_i}$  independe da escolha do ponto  $p$  em  $X_i$ ;*
- ii) se  $f, g \in \mathcal{O}_n$  então  $[V(fg)] = [V(f)] + [V(g)]$  e, em particular,  $[V(f^m)] = m [V(f)]$ .*
- iii) Sejam  $V$  e  $W$  variedades analíticas contidas em  $X$ . Se os ciclos  $[V]$  e  $[W]$  são iguais, então como variedades  $V$  e  $W$  são iguais a menos de componentes mergulhadas, que são as componentes irredutíveis que como germes correspondem aos primos embutidos associados.*

**Definição 4.1.4** *Um germe de variedade analítica  $X$  em  $p$  em  $\mathbb{C}^n$  é dito ser puramente  $k$ -dimensional no ponto  $p$ , se a dimensão em  $p$  de qualquer uma de suas componentes irredutíveis é  $k$  ou  $X$  não tem nenhuma componente irredutível por  $p$ .*

**Definição 4.1.5** *Sejam  $Z$  um germe de variedade analítica em  $p$  em  $\mathbb{C}^n$ ,  $U \subseteq Z$ ,  $U$  aberto,  $V \subset U$  e  $W \subset U$  dois germes de variedades analíticas em  $p$  em  $\mathbb{C}^n$  irredutíveis. Dizemos que  $V$  e  $W$  se interceptam propriamente em  $U$  se  $\text{codim } V \cap W = \text{codim } V + \text{codim } W$ .*

Definimos neste caso:  $[V] \cdot [W] := [V \cap W]$ .

**Definição 4.1.6** *Os ciclos  $\sum m_i [V_i]$  e  $\sum n_j [W_j]$  se interceptam propriamente se  $V_i$  e  $W_j$  se interceptam propriamente para todo  $i, j$ .*

Temos então a intersecção de  $\sum m_i [V_i]$  por  $\sum n_j [W_j]$  dada por

$$\sum m_i [V_i] \cdot \sum n_j [W_j] = \sum m_i n_j ([V_i] \cdot [W_j]) = \sum m_i n_j ([V_i \cap W_j]).$$

Assim, definimos a multiplicidade da intersecção de  $[V] = \sum m_i [V_i]$  por  $[W] = \sum n_j [W_j]$  em um ponto  $p$  como sendo

$$([V] \cdot [W])_p = \sum m_i n_j.$$

Para o caso onde uma das variedades analíticas é uma curva (dimensão de Krull igual a um), temos a seguinte caracterização usando parametrização da curva. (referência [13, p.10]).

**Propriedade 4.1.7** *Sejam  $U \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ ,  $U$  aberto,  $p \in U$ ,  $W$  uma curva em  $U$  que é irredutível em  $p$  e  $V(f) \subseteq U$  tais que  $V(f)$  e  $W$  se interceptam propriamente em  $p$ . Se  $\phi(t)$  é uma parametrização local de  $W$  tal que  $\phi(0) = p$ , então*

$$([W] \cdot [V(f)])_p = \text{mult}_t f(\phi(t)) = \text{o grau do menor termo não nulo.}$$

**Exemplo 4.1.8** *Sejam  $p = 0 = (0, 0) \in U \subseteq \mathbb{C}^2$  com  $U$  aberto,  $W$  a reta  $y = x$  em  $U$ . Consideremos para  $W$  a parametrização local  $\phi(t) = (t, t)$  e seja  $f = x^2 - y^3$ .*

*Notemos que codimensão de  $V(f)$  é 1 e a codimensão de  $W$  é 1. Agora,  $V(f) \cap W = (0, 0)$  e assim codimensão de  $V(f) \cap W$  é 2. Logo,  $V(f)$  e  $W$  se interceptam propriamente na origem. Portanto,*

$$([W] \cdot [V(f)])_0 = \text{mult}_t f(\phi(t)) = \text{mult}_t (t^2 - t^3) = 2.$$

Seja  $\text{Spec}(\mathcal{O}_n)$  o conjunto dos ideais primos em  $\mathcal{O}_n$ . Para cada  $f \in \mathcal{O}_n$ , considere  $U_f = \{P \in \text{Spec}(\mathcal{O}_n) \mid f \notin P\}$ . Os conjuntos  $(U_f)_{f \in \mathcal{O}_n}$  formam uma base para uma topologia em  $\text{Spec}(\mathcal{O}_n)$ .

**Definição 4.1.9** *A topologia em  $\text{Spec}(\mathcal{O}_n)$  que tem  $(U_f)_{f \in \mathcal{O}_n}$  como base é chamada de **topologia de Zariski** em  $\text{Spec}(\mathcal{O}_n)$ .*

De agora em diante consideremos  $h \in \mathcal{O}_{n+1}$ ,  $z = (z_0, \dots, z_n)$  um sistema linear de coordenadas em  $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  e  $\Sigma(h) = V\left(\frac{\partial h}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_n}\right)$ .

**Definição 4.1.10** *Para  $0 \leq k \leq n$ , a  $k$ -ésima variedade polar (relativa),  $\Gamma_{h,z}^k$ , de  $h$  com respeito a  $z$  é o fecho na topologia de Zariski de  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_k}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_n}\right) - \Sigma(h)$ , que vamos denotar por  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_k}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_n}\right) / \Sigma(h)$ . O  $k$ -ésimo ciclo polar de  $h$  com respeito a  $z$  é o ciclo analítico  $[\Gamma_{h,z}^k]$ .*

**Observação 4.1.11** *Como  $\Sigma(h) = V\left(\frac{\partial h}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_n}\right)$  concluímos que  $\Gamma_{h,z}^0 = \emptyset$ . Notemos também que  $\Gamma_{h,z}^k$  é formado pelas componentes de  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_k}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_n}\right)$  que não estão contidas em  $\Sigma(h)$ .*

**Observação 4.1.12** *Consideremos  $I_l = \left\langle \frac{\partial h}{\partial z_l}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_n} \right\rangle$  e  $I_{l+1} = \left\langle \frac{\partial h}{\partial z_{l+1}}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_n} \right\rangle$  para  $l = 0, \dots, n+1$ .*

*Claramente  $I_{l+1} \subseteq I_l$  e assim, pela Proposição 1.2.21 temos que  $V(I_l) \subseteq V(I_{l+1})$ . Então,  $V(I_l) / \Sigma(h) \subseteq V(I_{l+1}) / \Sigma(h)$ . Logo,  $\Gamma_{h,z}^l \subseteq \Gamma_{h,z}^{l+1}$ .*

*Portanto,  $\emptyset = \Gamma_{h,z}^0 \subseteq \Gamma_{h,z}^1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_{h,z}^{n+1} = U$ , onde  $U$  é um aberto contendo a origem da definição do germe  $h$ .*

**Proposição 4.1.13** *Se  $\dim_p \Sigma(h) < k$ , então  $\Gamma_{h,z}^k = V\left(\frac{\partial h}{\partial z_k}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_n}\right)$  como ciclo de  $p$ . Se, além disso,  $\dim_p \Gamma_{h,z}^k = k$ , então a igualdade acima mantém-se como germe de variedade analítica em  $p$ .*

A demonstração pode ser vista em [13, Proposição 1.8, p.12].

**Definição 4.1.14** Para  $0 \leq k \leq n$ , definimos o  $k$ -ésimo ciclo de Lê de  $h$  com respeito a  $z$ , denotado por  $[\Lambda_{h,z}^k]$ , como sendo

$$\left[ \Gamma_{h,z}^{k+1} \cap V \left( \frac{\partial h}{\partial z_k} \right) \right] - [\Gamma_{h,z}^k].$$

**Definição 4.1.15** Dizemos que o ciclo  $[\Lambda_{h,z}^k]$  tem **dimensão própria** em um ponto  $p$  se o conjunto associado a este ciclo é puramente  $k$ -dimensional em  $p$ .

Alguns resultados importantes a respeito destes ciclos.

**Proposição 4.1.16** Como conjuntos, para todo  $k$ ,  $\Gamma_{h,z}^{k+1} \cap \Sigma(h) = \cup_{i \leq k} \Lambda_{h,z}^i$ . Em particular, deixando  $k = s := \dim_p \Sigma(h)$ , como germes de conjuntos em  $p$ ,  $\Sigma(h) = \cup_{i \leq k} \Lambda_{h,z}^i$ .

A demonstração pode ser vista em [13, Proposição 1.15, p.16].

**Proposição 4.1.17** Se, para todo  $j$  com  $0 \leq j \leq k$ ,  $\Lambda_{h,z}^j$  é puramente  $j$ -dimensional em  $p$ , então  $\Gamma_{h,z}^{k+1} \cap V \left( \frac{\partial h}{\partial z_k} \right)$  é puramente  $k$ -dimensional em  $p$ , e também  $\Gamma_{h,z}^{k+1}$  é puramente  $(k+1)$ -dimensional em  $p$  e os ciclos

$$\left[ \Gamma_{h,z}^{k+1} \cap V \left( \frac{\partial h}{\partial z_k} \right) \right] \text{ e } [\Gamma_{h,z}^{k+1}] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_k} \right) \right]$$

são iguais em  $p$ . Além disso, nesse caso, toda componente  $k$ -dimensional (isolada) do conjunto crítico de  $h$  através de  $p$  está contida em  $[\Lambda_{h,z}^k]$ .

A demonstração pode ser vista em [13, Proposição 1.18, p.17].

**Observação 4.1.18** Consideremos que  $\dim \Sigma(h) = s$  e que todos os ciclos de Lê têm dimensão própria. Conseguimos a partir de  $[\Gamma_{h,z}^{s+1}]$  obter todos os outros  $[\Gamma_{h,z}^k]$  e  $[\Lambda_{h,z}^k]$  para  $k = 1, \dots, s$ :

$$\begin{aligned} [\Gamma_{h,z}^{s+1}] &= \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_{s+1}}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_n} \right) \right] \cdot \\ [\Gamma_{h,z}^{s+1}] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_s} \right) \right] &= [\Gamma_{h,z}^s] + [\Lambda_{h,z}^s] \cdot \\ [\Gamma_{h,z}^s] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_{s-1}} \right) \right] &= [\Gamma_{h,z}^{s-1}] + [\Lambda_{h,z}^{s-1}] \cdot \\ &\vdots \\ [\Gamma_{h,z}^2] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_1} \right) \right] &= [\Gamma_{h,z}^1] + [\Lambda_{h,z}^1] \cdot \\ [\Gamma_{h,z}^1] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_0} \right) \right] &= [\Lambda_{h,z}^0] \cdot \end{aligned}$$

**Definição 4.1.19** Definimos o  $k$ -ésimo número de Lê de  $h$  em  $p$  com respeito a  $z$ ,  $\lambda_{h,z}^k(p)$ , como sendo igual ao número de intersecções

$$([\Lambda_{h,z}^k] \cdot [V(z_0 - p_0, \dots, z_{k-1} - p_{k-1})])_p$$

desde que essa intersecção seja 0-dimensional em  $p$ .

**Exemplo 4.1.20** Seja  $h = y^2 - x^3 - tx^2$ .

Consideremos o sistema de coordenadas  $z = (t, x, y)$ .

Claramente  $\Sigma(h) = V(-x^2, -3x^2 - 2tx, 2y) = V(x, y)$ . Logo,  $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma(h) = 1$ . Agora, a dimensão de toda componente de  $V\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)$  é 2. Portanto,  $V\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)$  não possui nenhuma componente contida em  $\Sigma(h)$ . Assim, iniciamos os cálculos por  $\Gamma_{h,z}^2$ .

Notemos que  $\Gamma_{h,z}^2 = V\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) = V(2y) = V(y)$ . Assim,

$$\Gamma_{h,z}^2 \cap V\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = V(y) \cap V(-3x^2 - 2tx) = V(y, -3x^2 - 2tx) = V(x, y) \cup V(y, -3x - 2t).$$

Temos que

$$\Gamma_{h,z}^1 = \left(\Gamma_{h,z}^2 \cap V\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right) / \Sigma(h) = V(y, -3x^2 - 2tx) / V(x, y) = V(y, -3x - 2t).$$

Vamos agora calcular o ciclo de Lê,  $\Lambda_{h,z}^1$ .

$$\begin{aligned} \Lambda_{h,z}^1 &= [V(y, -3x^2 - 2tx)] - [V(y, -3x - 2t)] \\ &= ([V(y, x)] + [V(y, -3x - 2t)]) - [V(y, -3x - 2t)] \\ &= [V(y, x)]. \end{aligned}$$

Logo,  $\Lambda_{h,z}^1$  é o eixo  $t$ , ou seja, tem multiplicidade 1.

Portanto,  $\lambda_{h,z}^1(0) = [V(y, x)] \cdot [V(t)] = 1$

Calculemos agora:

$$\Lambda_{h,z}^0 = \left[\Gamma_{h,z}^1 \cap V\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)\right] = [V(y, -3x - 2t) \cap V(-x^2)] = 2[V(t, x, y)].$$

Portanto,  $\lambda_{h,z}^0(0) = 2$ .

## 4.2 Descrição para singularidades do tipo $D(q, p)$

Nesta seção vamos obter alguns números de Lê dos germes do tipo  $D(q, p)$  para um sistema de coordenadas específico.

Para o caso  $p = 2$ , e portanto  $q = 3$ , conseguimos todos os números de Lê para o sistema de coordenadas mencionado. Por isso, vamos começar por este caso.

**Proposição 4.2.1** Os números de Lê de  $f$  do tipo  $D(3, 2)$ ,  $k = 0$  e  $\tilde{z} = (x_{11} - x_{22}, 2x_{12}, x_{22}, y_1, y_2)$  são  $\lambda_{f,\tilde{z}}^4(0) = 0$ ,  $\lambda_{f,\tilde{z}}^3(0) = 1$ ,  $\lambda_{f,\tilde{z}}^2(0) = 4$ ,  $\lambda_{f,\tilde{z}}^1(0) = 4$  e  $\lambda_{f,\tilde{z}}^0(0) = 0$ .

**Demonstração:**

Se  $f$  é do tipo  $D(3, 2)$ , existem coordenadas locais  $x_{ij}$  com  $1 \leq i \leq j \leq 2$  e  $y_1, y_2$  de  $(\mathbb{C}^5, 0)$  tais que  $f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2} x_{ij} y_i y_j$ , onde  $x = (x_{11}, x_{12}, x_{22})$  e  $y = (y_1, y_2)$ .

$$\text{Assim, } f(x, y) = (Y')^t (X') (Y'), \text{ com } (X') = \begin{pmatrix} x_{11} & \frac{1}{2}x_{12} \\ \frac{1}{2}x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \text{ e } (Y') = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Tomemos o sistema de coordenadas  $\tilde{z} = (\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4) = (x_{11} - x_{22}, 2x_{12}, x_{22}, y_1, y_2)$ .

Para  $\tilde{z}$  temos  $f(\tilde{z}) = \sum_{i \neq j, 1 \leq i < j \leq 2} 2x_{ij} y_i y_j + \sum_{l=1}^2 \left( x_{ll} - \sum_{k=l+1}^2 x_{kk} \right) y_l^2 = (Y)^t (X) (Y)$ , onde

$$(X) = \begin{pmatrix} x_{11} - x_{22} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \text{ e } (Y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Para  $z = (x_{12}, x_{11}, x_{22}, y_1, y_2) = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$  denotemos  $h(z) = f(\tilde{z})$ .

Notemos que  $\lambda_{f, \tilde{z}}^i(0) = \lambda_{h, z}^i(0)$ ,  $\forall i = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Com respeito ao sistema de coordenadas  $z$ , usamos o procedimento descrito na Observação 4.1.18 para calcular os ciclos de Lê.

Temos as seguintes descrições para as derivadas parciais de  $h$ :

$$\frac{\partial h}{\partial z_0} = \frac{\partial h}{\partial x_{12}} = 2y_1 y_2,$$

$$\frac{\partial h}{\partial z_1} = \frac{\partial h}{\partial x_{11}} = y_1^2,$$

$$\frac{\partial h}{\partial z_2} = \frac{\partial h}{\partial x_{22}} = y_2^2 - y_1^2,$$

$$\frac{\partial h}{\partial z_3} = \frac{\partial h}{\partial y_1} = 2(x_{11} - x_{22})y_1 + 2x_{12}y_2,$$

$$\frac{\partial h}{\partial z_4} = \frac{\partial h}{\partial y_2} = 2x_{12}y_1 + 2(x_{22})y_2.$$

Resolvendo indutivamente  $\frac{\partial h}{\partial z_k} = 0$  para  $k = 1, 2$  temos  $y_j = 0$ ,  $\forall j = 1, 2$ . Assim,

$$\Sigma(h) = V(y_1, y_2) = \{(x_{11}, x_{12}, x_{22}, 0, 0) \mid x_{11}, x_{12}, x_{22} \in \mathbb{C}\}.$$

Vamos inicialmente calcular  $\lambda_{h, z}^4(0)$ .

Temos que a dimensão de toda componente de  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_4}\right)$  é no mínimo 4. Como  $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma(h) = 3$  então  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_4}\right)$  não pode ter nenhuma componente contida em  $\Sigma(h)$  e, portanto, pela Proposição 4.1.13 temos que  $[\Gamma_{h, z}^4] = \left[ V\left(\frac{\partial h}{\partial z_4}\right) \right]$ . Além disso,  $[\Gamma_{h, z}^5] = [U]$  pela Observação 4.1.12. Assim,

$$\Lambda_{h, z}^4 = [\Gamma_{h, z}^5] \cdot \left[ V\left(\frac{\partial h}{\partial z_4}\right) \right] - [\Gamma_{h, z}^4] = 0.$$

Logo,  $\lambda_{h,z}^4(0) = 0$ .

Agora calcularemos  $\lambda_{h,z}^0(0)$ .

Temos que  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_0}, \frac{\partial h}{\partial z_1}, \frac{\partial h}{\partial z_2}, \frac{\partial h}{\partial z_3}, \frac{\partial h}{\partial z_4}\right) = V\left(\frac{\partial h}{\partial z_0}, \frac{\partial h}{\partial z_1}, \frac{\partial h}{\partial z_2}\right) \cap V\left(\frac{\partial h}{\partial z_3}, \frac{\partial h}{\partial z_4}\right)$ .

Resolvendo indutivamente  $\frac{\partial h}{\partial z_k} = 0$  para  $k = 1, 2$  temos  $y_i = 0, \forall i = 1, 2$ . Assim,  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_0}, \frac{\partial h}{\partial z_1}, \frac{\partial h}{\partial z_2}\right) = V(y_1, y_2)$ . Então, usando a descrição de  $\frac{\partial h}{\partial z_k}$  para  $k = 3, 4$  temos que  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_0}, \frac{\partial h}{\partial z_1}, \frac{\partial h}{\partial z_2}\right) \cap V\left(\frac{\partial h}{\partial z_3}, \frac{\partial h}{\partial z_4}\right) = V(y_1, y_2)$ .

Além disso, temos que  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_1}, \frac{\partial h}{\partial z_2}, \frac{\partial h}{\partial z_3}, \frac{\partial h}{\partial z_4}\right) = V\left(\frac{\partial h}{\partial z_1}, \frac{\partial h}{\partial z_2}\right) \cap V\left(\frac{\partial h}{\partial z_3}, \frac{\partial h}{\partial z_4}\right)$ .

Resolvendo indutivamente  $\frac{\partial h}{\partial z_k} = 0$  para  $k = 1, 2$  temos  $y_i = 0, \forall i = 1, 2$ . Assim  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_1}, \frac{\partial h}{\partial z_2}\right) = V(y_1, y_2)$ . Então, novamente usando a descrição de  $\frac{\partial h}{\partial z_k}$  para  $k = 3, 4$  temos que  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_1}, \frac{\partial h}{\partial z_2}\right) \cap V\left(\frac{\partial h}{\partial z_3}, \frac{\partial h}{\partial z_4}\right) = V(y_1, y_2)$ .

Assim concluímos que  $[\Gamma_{h,z}^0] = [\Gamma_{h,z}^1] = 0$ . Logo,  $\Lambda_{h,z}^0 = 0$ . Então,  $\lambda_{h,z}^0(0) = 0$ .

Nosso objetivo agora é calcular  $\lambda_{h,z}^{3-i}(0)$  para  $i = 2, 1, 0$ .

Caso 1:  $i = 2$

$$\Lambda_{h,z}^1 = [\Gamma_{h,z}^2] \cdot \left[ V\left(\frac{\partial h}{\partial z_1}\right) \right] - [\Gamma_{h,z}^1] = [\Gamma_{h,z}^2] \cdot \left[ V\left(\frac{\partial h}{\partial z_1}\right) \right] - 0 = 2[\Gamma_{h,z}^2] \cdot [V(y_1)].$$

Notemos que  $[\Gamma_{h,z}^2] = [V(Z/\Sigma(h))]$ , onde  $Z$  é o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} y_l^2 - \sum_{k=1}^{l-1} y_k^2 = 0, & l = 2 \\ (X)(Y) = (0) \end{cases} = \begin{cases} y_2^2 - y_1^2 = 0 \\ (x_{11} - x_{22})y_1 + x_{12}y_2 = 0 \\ x_{12}y_1 + x_{22}y_2 = 0 \end{cases}$$

Da equação da primeira linha do sistema concluímos que podemos obter  $y_2 = \pm y_1$ . Denotamos por  $\phi_2^+ = y_2 + y_1$  e  $\phi_2^- = y_2 - y_1$ .

Assim  $Z = \cup_{k=1}^2 V_k$ , onde  $V_k = V(\phi_2^{k_2}, (X)(Y))$  com  $k_2$  simbolizando  $+$  ou  $-$ .

Notemos que  $V_k = V(y_1, y_2) \cup V(\phi_2^{k_2}, m_1^k, m_2^k)$  onde  $m_1^1 = (x_{11} - x_{22}) + x_{12}$ ,  $m_2^1 = x_{12} + x_{22}$ ,  $m_1^2 = (x_{11} - x_{22}) - x_{12}$  e  $m_2^2 = x_{12} - x_{22}$  ( $m_1^k$  e  $m_2^k$  são polinômios somente nas variáveis  $x_{ij}$  para  $1 \leq i \leq j \leq 2$  cujos termos são os elementos da linha  $l$  da matriz  $(X)$  a menos de constantes).

Logo,  $[\Gamma_{h,z}^2] = \sum_{k=1}^2 [\tilde{V}_k]$ , onde  $\tilde{V}_k = V(\phi_2^{k_2}, m_1^k, m_2^k)$ .

Com isso  $[\Lambda_{h,z}^1] = 2 \sum_{k=1}^2 [\tilde{V}_k] \cdot [V(y_1)]$ .

Vamos mostrar que  $\tilde{V}_2$  e  $V(y_1)$  se interceptam propriamente.



Temos que  $\tilde{V}_2 \cap V(y_1) = V(y_1, y_2, (x_{11} - x_{22}) - x_{12}, x_{12} - x_{22}) = \{(2x_{22}, x_{22}, x_{22}, 0, 0)\}$  que é uma reta em  $\mathbb{C}^5$  e assim,  $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{V}_2 \cap V(y_1) = 1$ . Logo,  $\text{codim} \tilde{V}_2 \cap V(y_1) = 4$ .

Temos ainda que  $\text{codim} V(y_1) = \text{codim} \{(x_{11}, x_{12}, x_{22}, 0, y_2)\} = 1$ . Além disso,  $\tilde{V}_2 = V(y_2 - y_1, (x_{11} - x_{22}) - x_{12}, x_{12} - x_{22}) = \{(2x_{22}, x_{22}, x_{22}, y_1, y_1)\}$  que tem dimensão 2 em  $\mathbb{C}^5$ . Logo,  $\text{codim} \tilde{V}_2 = 3$ . Assim,  $\text{codim} \tilde{V}_2 \cap V(y_1) = \text{codim} \tilde{V}_2 + \text{codim} V(y_1)$ . Analogamente,  $\text{codim} \tilde{V}_1 \cap V(y_1) = \text{codim} \tilde{V}_1 + \text{codim} V(y_1)$ . Então,  $\tilde{V}_k$  e  $V(y_1)$  se interceptam propriamente.

Assim  $[\tilde{V}_k] \cdot [V(y_1)] = [V(\phi_2^{k2}, m_1^k, m_2^k, y_1)]$ .

Temos  $V(\phi_2^{k2}, m_1^k, m_2^k, y_1) = V(y_1, y_2, m_1^k, m_2^k)$ .

Assim,  $\Lambda_{h,z}^1 = 2 \sum_{k=1}^2 [V(y_1, y_2, m_1^k, m_2^k)]$ .

Notemos que  $V(y_1, y_2, m_1^2, m_2^2) \cap V(x_{12}) = V(y_1, y_2, x_{12}, x_{11}, x_{22}) = \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$ . Assim,  $\text{codim} V(y_1, y_2, m_1^2, m_2^2) \cap V(x_{12}) = 5$ .

Além disso,  $\text{codim} V(x_{12}) = \text{codim} \{(x_{11}, 0, x_{22}, y_1, y_2)\} = 1$ .

Temos ainda que  $\text{codim} V(y_1, y_2, m_1^2, m_2^2) = \text{codim} V(y_1, y_2, (x_{11} - x_{22}) - x_{12}, x_{12} - x_{22}) = \text{codim} \{(2x_{22}, x_{22}, x_{22}, 0, 0)\} = 4$ .

Assim,  $V(y_1, y_2, m_1^2, m_2^2)$  e  $V(x_{12})$  se interceptam propriamente.

Analogamente,  $V(y_1, y_2, m_1^1, m_2^1)$  e  $V(x_{12})$  se interceptam propriamente.

Logo,

$$\lambda_{h,z}^1(0) = 2 \sum_{k=1}^2 [V(y_1, y_2, m_1^k, m_2^k)] \cdot [V(x_{12})] = 4[V(y_1, y_2, x_{11}, x_{12}, x_{22})] = 4.$$

Caso 2:  $i = 1$

$$\Lambda_{h,z}^2 = [\Gamma_{h,z}^3] \cdot [V(\frac{\partial h}{\partial z_2})] - [\Gamma_{h,z}^2].$$

Temos que  $[\Gamma_{h,z}^3] = [V(Z/\Sigma(h))]$ , onde  $Z$  é o conjunto solução do sistema  $(X)(Y) = (0)$ , que pode ser visto como um sistema homogêneo de equações lineares nas variáveis  $y_1, y_2$ .

Sejam  $I = \langle (X)(Y) \rangle$  e  $J = \langle \det(X), (X)(Y) \rangle$ . Claramente  $I \subset J$ .

Logo  $V(\det(X), (X)(Y)) \subset V((X)(Y))$  (item 1. da Proposição 1.2.21). Temos que  $\det(X) \neq 0$  implica que  $(y_1, y_2) = (0, 0)$ . Como  $\Sigma(h) = V(y_1, y_2)$  e  $(X)(Y)$  pode ser visto como um sistema linear homogêneo então  $V(\det(X), (X)(Y)) \subset V((X)(Y)/\Sigma(h))$ .

Fazendo um escalonamento de  $(X)(Y)$  de cima pra baixo que elimina  $y_1$  (que é possível pois são 2 equações lineares em  $y_i$ ,  $i = 1, 2$ ), temos que a última linha será da forma  $\det(X)y_2 = 0$ . Então  $V((X)(Y)/\Sigma(h)) = V(\det(X), (X)(Y))$ .

Assim,  $[\Gamma_{h,z}^3] = [V((X)(Y)/\Sigma(h))] = [V(\det(X), (X)(Y))]$ .

Agora, usando a Proposição 4.1.17 temos que

$$[\Gamma_{h,z}^3] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_2} \right) \right] = \left[ V \left( \det(X), \frac{\partial h}{\partial z_2}, (X)(Y) \right) \right] = \\ [V(\det(X), y_2 - y_1, (X)(Y))] + [V(\det(X), y_2 + y_1, (X)(Y))].$$

Olhemos inicialmente para  $[V(\det(X), y_2 - y_1, (X)(Y))]$

$$\begin{cases} \det(X) = 0 \\ y_2 - y_1 = 0 \\ (X)(Y) = (0) \end{cases} = \begin{cases} \det(X) = 0 \\ y_2 - y_1 = 0 \\ ((x_{11} - x_{22}) + x_{12})y_1 = 0 \\ (x_{12} + x_{22})y_1 = 0 \end{cases}$$

As duas últimas linhas do sistema podem ser vistas como um sistema homogêneo com 2 equações e 1 incógnita. A solução nula  $y_1 = 0$  é uma das soluções desse sistema. Assim,  $V(\det(X), y_1, y_2)$  é uma das soluções do sistema inicial.

Logo,  $[V(\det(X), y_2 - y_1, (X)(Y))] = [V(\det(X), y_2 - y_1, (x_{11} - x_{22}) + x_{12}, x_{12} + x_{22})] + [V(\det(X), y_1, y_2)]$ .

Como  $(x_{11} - x_{22}) + x_{12} = 0$  e  $x_{12} + x_{22} = 0$  implicam que  $\det(X) = 0$  temos que  $[V(\det(X), y_2 - y_1, (X)(Y))] = [V(y_2 - y_1, (x_{11} - x_{22}) + x_{12}, x_{12} + x_{22})] + [V(\det(X), y_1, y_2)]$ .

Analogamente  $[V(\det(X), y_2 + y_1, (X)(Y))] = [V(y_2 + y_1, (x_{11} - x_{22}) - x_{12}, x_{12} - x_{22})] + [V(\det(X), y_1, y_2)]$ .

Assim,  $[\Gamma_{h,z}^3] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_2} \right) \right] = [V(y_2 - y_1, (x_{11} - x_{22}) + x_{12}, x_{12} + x_{22})] + [V(\det(X), y_1, y_2)] + [V(y_2 + y_1, (x_{11} - x_{22}) - x_{12}, x_{12} - x_{22})] + [V(\det(X), y_1, y_2)]$ .

Assim,  $\Lambda_{h,z}^2 = 2[V(\det(X), y_1, y_2)]$ .

Logo,

$$\lambda_{h,z}^2(0) = 2[V(\det(X), y_1, y_2)] \cdot [V(x_{12}, x_{11})] = 2[V(x_{22}^2, x_{11}, x_{12}, y_1, y_2)] = 4.$$

Caso 3:  $i = 0$

$$\Lambda_{h,z}^3 = [\Gamma_{h,z}^4] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_3} \right) \right] - [\Gamma_{h,z}^3] = \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_3}, \frac{\partial h}{\partial z_4} \right) \right] - \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_3}, \frac{\partial h}{\partial z_4} \right) / \Sigma(h) \right] =$$

$$[\Sigma(h)] = [V(y_1, y_2)].$$

Logo,  $\lambda_{h,z}^3(0) = 2[V(y_1, y_2)] \cdot [V(x_{12}, x_{11}, x_{22})] = [V(x_{11}, x_{12}, x_{22}, y_1, y_2)] = 1$ . ■

**Observação 4.2.2** Consideramos na proposição anterior  $k = 0$  pois se  $k \neq 0$  teríamos além dos já calculados, os seguintes números de  $L\hat{e}$ :  $\lambda_{h,z}^5(0), \dots, \lambda_{h,z}^{5+k}(0)$  e todos esses números a mais que aparecem no caso  $k \neq 0$  seriam nulos como vemos a seguir.

Se  $k \neq 0$  temos  $n = 5 + k$ ,  $f(x, y) = \sum_{1 \leq i < j \leq 2} x_{ij} y_i y_j + \sum_{l=2}^{2+k} y_l^2$ , onde  $x = (x_{11}, x_{12}, x_{22})$  e  $y = (y_1, \dots, y_{2+k})$ .

Considerando  $\tilde{z} = (\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4, \tilde{z}_5, \dots, \tilde{z}_{5+k}) = (x_{11} - x_{22}, 2x_{12}, x_{22}, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{2+k})$  temos  $f(\tilde{z}) = \sum_{i \neq j, 1 \leq i < j \leq 2} 2x_{ij} y_i y_j + \sum_{l=1}^2 \left( x_{ll} - \sum_{k=l+1}^2 x_{kk} \right) y_l^2 + \sum_{l=2}^{2+k} y_l^2$ .

Para  $z = (x_{12}, x_{11}, x_{22}, y_1, y_2, \dots, y_{2+k}) = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \dots, z_{5+k})$  denotemos  $h(z) = f(\tilde{z})$ .

Temos que

$$\frac{\partial h}{\partial z_0} = \frac{\partial h}{\partial x_{12}} = 2y_1 y_2,$$

$$\frac{\partial h}{\partial z_1} = \frac{\partial h}{\partial x_{11}} = y_1^2,$$

$$\frac{\partial h}{\partial z_2} = \frac{\partial h}{\partial x_{22}} = y_2^2 - y_1^2,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial z_3} &= \frac{\partial h}{\partial y_1} = 2(x_{11} - x_{22})y_1 + 2x_{12}y_2, \\ \frac{\partial h}{\partial z_4} &= \frac{\partial h}{\partial y_2} = 2x_{12}y_1 + 2(x_{22})y_2, \\ \frac{\partial h}{\partial z_5} &= \frac{\partial h}{\partial y_3} = 2y_3, \\ &\vdots \\ \frac{\partial h}{\partial z_{5+k}} &= \frac{\partial h}{\partial y_{2+k}} = 2y_{2+k}. \text{ Assim,}\end{aligned}$$

$$\Sigma(h) = V(y_1, \dots, y_{2+k}) = \{(x_{11}, x_{12}, x_{22}, 0, 0, \dots, 0) \mid x_{11}, x_{12}, x_{22} \in \mathbb{C}\}.$$

Para  $l = 4, \dots, 5+k$  temos que a dimensão de toda componente de  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_l}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{5+k}}\right)$  é no mínimo  $l$ . Como  $l > 3$  e  $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma(h) = 3$  segue que  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_l}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{5+k}}\right)$  não pode ter nenhuma componente contida em  $\Sigma(h)$  e, portanto, pela Proposição 4.1.13 temos que  $[\Gamma_{h,z}^l] = \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_l}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{5+k}}\right)\right]$  para  $l = 4, \dots, 5+k$ .

Assim, usando a Proposição 4.1.17 temos que

$$\begin{aligned}[\Gamma_{h,z}^{l+1}] \cdot \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_l}\right)\right] &= \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_{l+1}}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{5+k}}\right)\right] \cdot \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_l}\right)\right] = \\ &= \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_l}, \frac{\partial h}{\partial z_{l+1}}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{5+k}}\right)\right] = [\Gamma_{h,z}^l].\end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \Lambda_{h,z}^l = [\Gamma_{h,z}^{l+1}] \cdot \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_l}\right)\right] - [\Gamma_{h,z}^l] = 0.$$

Logo,  $\lambda_{h,z}^l(0) = 0$  para  $l = 4, \dots, 5+k$ .

Analogamente ao que foi feito na prova do teorema anterior mostra-se que

$$\lambda_{f,\tilde{z}}^3(0) = 1, \lambda_{f,\tilde{z}}^2(0) = 4, \lambda_{f,\tilde{z}}^1(0) = 4 \text{ e } \lambda_{f,\tilde{z}}^0(0) = 0.$$

A descrição dos números de Lê de singularidades do tipo  $D(q, p)$  para o caso  $p = 2$  que fizemos anteriormente está embutida na demonstração do próximo teorema em que vamos calcular alguns dos números de Lê para  $p$  qualquer. Vale ressaltar que no próximo Teorema consideraremos  $k = 0$  pois caso contrário todos os números de Lê que surgiriam com  $k \neq 0$  seriam nulos por um raciocínio análogo ao descrito pro caso  $p = 2$ .

**Teorema 4.2.3** *Seja  $f \in \mathcal{O}_n$  uma singularidade do tipo  $D(q, p)$ , onde  $n = p + q$ . Se  $\tilde{z} = (\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{p-1}, \tilde{z}_p, \tilde{z}_{p+1}, \dots, \tilde{z}_{q-1}, \tilde{z}_q, \dots, \tilde{z}_{n-1}) = ((x_{11} - \dots - x_{pp}), 2x_{12}, 2x_{13}, \dots, 2x_{1p}, (x_{22} - \dots - x_{pp}), 2x_{23}, \dots, x_{pp}, y_1, \dots, y_p)$ , então  $\lambda_{f,\tilde{z}}^{q-1}(0) = 2p$ ,  $\lambda_{f,\tilde{z}}^q(0) = 1$ ,  $\lambda_{f,\tilde{z}}^{q-p}(0) = 2^p$  e  $\lambda_{f,\tilde{z}}^i(0) = 0$  para  $i = 0, \dots, q-p-1$  e  $i = q+1, \dots, n-1$ .*

**Demonstração:**

Se  $f$  é do tipo  $D(q, p)$  com  $k = 0$  então,  $f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} x_{ij} y_i y_j = (Y')^t (X') (Y')$ , onde  $x = (x_{ij}) \in \mathbb{C}^q$ ,  $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{C}^p$ ,

$$(X') = \begin{pmatrix} x_{11} & \frac{1}{2}x_{12} & \frac{1}{2}x_{13} & \frac{1}{2}x_{14} & \cdots & \frac{1}{2}x_{1p} \\ \frac{1}{2}x_{12} & x_{22} & \frac{1}{2}x_{23} & \frac{1}{2}x_{24} & \cdots & \frac{1}{2}x_{2p} \\ \frac{1}{2}x_{13} & \frac{1}{2}x_{23} & x_{33} & \frac{1}{2}x_{34} & \cdots & \frac{1}{2}x_{3p} \\ \frac{1}{2}x_{14} & \frac{1}{2}x_{24} & \frac{1}{2}x_{34} & x_{44} & \cdots & \frac{1}{2}x_{4p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}x_{1p} & \frac{1}{2}x_{2p} & \frac{1}{2}x_{3p} & \frac{1}{2}x_{4p} & \cdots & x_{pp} \end{pmatrix} \text{ e } (Y') = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}.$$

Consideremos o sistema de coordenadas  $\tilde{z} = (\tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{n-1})$  onde  $\tilde{z}_i = y_{i-q+1}$  para  $i = q, \dots, n-1$  e  $(\tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{q-1})$  vem da seguinte igualdade de matrizes:

$$\begin{pmatrix} \tilde{z}_0 & \tilde{z}_1 & \tilde{z}_2 & \cdots & \tilde{z}_{p-1} \\ & \tilde{z}_p & \tilde{z}_{p+1} & \cdots & \tilde{z}_{2p-2} \\ & & \tilde{z}_{2p-1} & \cdots & \tilde{z}_{3p-4} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \tilde{z}_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_{11} - \dots - x_{pp}) & 2x_{12} & 2x_{13} & \cdots & 2x_{1p} \\ & (x_{22} - \dots - x_{pp}) & 2x_{23} & \cdots & 2x_{2p} \\ & & (x_{33} - \dots - x_{pp}) & \cdots & 2x_{3p} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & (x_{pp}) \end{pmatrix}.$$

Para  $\tilde{z}$  temos  $f(\tilde{z}) = \sum_{i \neq j, 1 \leq i < j \leq p} 2x_{ij}y_iy_j + \sum_{l=1}^p \left( x_{ll} - \sum_{k=l+1}^p x_{kk} \right) y_l^2 = (Y)^t(X)(Y)$ , onde

$$(X) = \begin{pmatrix} (x_{11} - x_{22} - x_{33} - \dots - x_{pp}) & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{12} & (x_{22} - \dots - x_{pp}) & \cdots & x_{2p} \\ x_{13} & x_{23} & \cdots & x_{3p} \\ x_{14} & x_{24} & \cdots & x_{4p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \cdots & (x_{pp}) \end{pmatrix} \text{ e } (Y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}.$$

Para  $z = (x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1p}, x_{23}, \dots, x_{2p}, x_{34}, \dots, x_{(p-1)p}, x_{11}, \dots, x_{pp}, y_1, \dots, y_p) = (z_0, z_1, \dots, z_{q-p-1}, z_{q-p}, \dots, z_{q-1}, z_q, z_{q+1}, \dots, z_{n-1})$  denotemos  $h(z) = f(\tilde{z})$ . Usando a forma matricial temos que

$$\begin{pmatrix} z_{q-p} & z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{p-2} \\ & z_{q-p+1} & z_{p-1} & z_p & \cdots & z_{2p-4} \\ & & z_{q-p+2} & z_{2p-3} & \cdots & z_{3p-6} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & z_q & z_{q-p-1} \\ & & & & & z_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots & x_{1p} \\ & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots & x_{2p} \\ & & x_{33} & x_{34} & \cdots & x_{3p} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & x_{(p-1)(p-1)} & x_{(p-1)p} \\ & & & & & x_{pp} \end{pmatrix}.$$

Notemos que  $\lambda_{f, \tilde{z}}^i(0) = \lambda_{h, z}^i(0)$ ,  $\forall i = 0, \dots, n-1$ .

Com respeito ao sistema de coordenadas  $z$ , usamos o procedimento descrito na Observação 4.1.18 para calcular os ciclos de Lê.

Para  $k = 0, \dots, q-p-1$  temos que  $\frac{\partial h}{\partial z_k} = 2y_{i_k}y_{j_k}$ , contendo a menos de ordem todas as possibilidades  $y_iy_j$  com  $i < j$  e  $i, j = 1, \dots, p$ .

Para  $k = q-p, \dots, q-1$  temos que  $\frac{\partial h}{\partial z_k} = y_{k-(q-p)+1}^2 - \sum_{l=1}^{k-(q-p)} y_l^2$ .

Para  $k = q, \dots, n-1$  temos que

$$\frac{\partial h}{\partial z_k} = 2 \left( \sum_{i=1}^{k-q} x_{i(k-q+1)} y_i + \left( x_{(k-q+1)(k-q+1)} - \sum_{i=k-q+2}^p x_{ii} \right) y_{k-q+1} + \sum_{i=k-q+2}^p x_{(k-q+1)i} y_i \right).$$

Analisemos  $\Sigma(h) = V \left( \frac{\partial h}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}} \right)$ .

Resolvendo indutivamente  $\frac{\partial h}{\partial z_k} = 0$  para  $k = q-p, \dots, q-1$  temos  $y_i = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ .

Assim pela descrição  $\frac{\partial h}{\partial z_k}$  para  $k = 0, \dots, q-p-1$  e  $k = q, \dots, n-1$  temos

$$\Sigma(h) = V(y_1, \dots, y_p) = \{(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{pp}, 0, \dots, 0) \mid x_{11}, \dots, x_{pp} \in \mathbb{C}\}.$$

Para  $i = q+1, \dots, n-1$  temos que a dimensão de toda componente de  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}}\right)$  é no mínimo  $i$ . Como  $i > q$  e  $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma(h) = q$  então  $V\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}}\right)$  não pode ter nenhuma componente contida em  $\Sigma(h)$  e, portanto, pela Proposição 4.1.13 temos que  $[\Gamma_{h,z}^i] = \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}}\right)\right]$ . Além disso,  $[\Gamma_{h,z}^n] = [\mathbb{C}^n]$  pela Observação 4.1.12.

Assim, usando a Proposição 4.1.17 temos que

$$\begin{aligned} [\Gamma_{h,z}^{i+1}] \cdot \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}\right)\right] &= \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_{i+1}}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}}\right)\right] \cdot \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}\right)\right] = \\ &= \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}, \frac{\partial h}{\partial z_{i+1}}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}}\right)\right] = [\Gamma_{h,z}^i]. \end{aligned}$$

Logo,  $\Lambda_{h,z}^i = [\Gamma_{h,z}^{i+1}] \cdot \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_i}\right)\right] - [\Gamma_{h,z}^i] = 0$  e, portanto,  $\lambda_{h,z}^i(0) = 0$  para  $i = q+1, \dots, n-1$ .

Para  $i = 0, \dots, q-p$ , temos que

$$V\left(\frac{\partial h}{\partial z_{q-p-i}}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{q-1}}, \frac{\partial h}{\partial z_q}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}}\right) = V\left(\frac{\partial h}{\partial z_{q-p-i}}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{q-1}}\right) \cap V\left(\frac{\partial h}{\partial z_q}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}}\right).$$

Resolvendo indutivamente  $\frac{\partial h}{\partial z_k} = 0$  para  $k = q-p, \dots, q-1$  temos  $y_j = 0, \forall j = 1, \dots, p$ .

$$\text{Assim, } V\left(\frac{\partial h}{\partial z_{q-p-i}}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{q-1}}\right) = V(y_1, \dots, y_p).$$

Então, usando a descrição de  $\frac{\partial h}{\partial z_k}$  para  $k = q, \dots, n-1$  temos

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\partial h}{\partial z_{q-p-i}}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{q-1}}, \frac{\partial h}{\partial z_q}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}}\right) &= V(y_1, \dots, y_p) \cap V\left(\frac{\partial h}{\partial z_q}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}}\right) = \\ &= V(y_1, \dots, y_p). \end{aligned}$$

Assim concluímos que  $[\Gamma_{h,z}^{q-p}] = [\Gamma_{h,z}^{q-p-1}] = [\Gamma_{h,z}^{q-p-2}] = \dots = [\Gamma_{h,z}^0] = 0$ .

Logo,  $\Lambda_{h,z}^{q-p-1} = \Lambda_{h,z}^{q-p-2} = \dots = \Lambda_{h,z}^0 = 0$ .

Portanto,  $\lambda_{h,z}^i(0) = 0$ , para  $i = 0, \dots, q-p-1$ .

Nosso objetivo agora é calcular  $\lambda_{h,z}^{q-i}(0)$ , para  $i = p, 1, 0$ .

Caso 1:  $i = p$ :

Temos que calcular

$$\Lambda_{h,z}^{q-p} = [\Gamma_{h,z}^{q-p+1}] \cdot \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_{q-p}}\right)\right] - [\Gamma_{h,z}^{q-p}] = [\Gamma_{h,z}^{q-p+1}] \cdot \left[V\left(\frac{\partial h}{\partial z_{q-p}}\right)\right] - 0 = 2[\Gamma_{h,z}^{q-p+1}] \cdot [V(y_1)].$$

Notemos que  $[\Gamma_{h,z}^{q-p+1}] = [Z/\Sigma(h)]$ , onde  $Z$  é o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} y_l^2 - \sum_{k=1}^{l-1} y_k^2 = 0, & l = 2, \dots, p \\ (X)(Y) = (0) \end{cases}$$

Das equações da primeira linha do sistema concluímos que podemos obter  $y_j = \pm c_j y_1$ ,  $j = 2, \dots, p$ . Denotamos por  $\phi_j^+ = y_j + c_j y_1$  e  $\phi_j^- = y_j - c_j y_1$ . Assim  $Z = \cup_{k=1}^{2^{p-1}} V_k$ , onde  $V_k = V(\phi_2^{k_2}, \dots, \phi_p^{k_p}, (X)(Y))$  com  $k_2, \dots, k_p$  simbolizando + ou -.

Notemos que  $V_k = V(y_1, \dots, y_p) \cup V(\phi_2^{k_2}, \dots, \phi_p^{k_p}, m_1^k, \dots, m_p^k)$  onde  $m_l^k$  para  $l = 1, \dots, p$  são polinômios somente nas variáveis  $x_{ij}$  para  $1 \leq i \leq j \leq p$  cujos termos são os elementos da linha  $l$  da matriz  $(X)$  a menos de constantes.

$$\text{Logo, } [\Gamma_{h,z}^{q-p+1}] = \sum_{k=1}^{2^{p-1}} [\tilde{V}_k], \text{ onde } \tilde{V}_k = V(\phi_2^{k_2}, \dots, \phi_p^{k_p}, m_1^k, \dots, m_p^k).$$

$$\text{Com isso } [\Lambda_{h,z}^{q-p}] = 2 \sum_{k=1}^{2^{p-1}} [\tilde{V}_k] \cdot [V(y_1)].$$

Vamos mostrar que  $\tilde{V}_k$  e  $V(y_1)$  se interceptam propriamente.

Notemos que  $\tilde{V}_k = V(\phi_2^{k_2}, \dots, \phi_p^{k_p}, m_1^k, \dots, m_p^k) = \{(d_2^{k_2} x_{pp}, \dots, x_{pp}, y_1, \dots, d_p^k y_1)\}$ , onde  $d_2^{k_2}, \dots, d_{p-1}^{k_{p-1}}, d_2^k, \dots, d_p^k$  são constantes. Logo,  $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{V}_k = 2$  em  $\mathbb{C}^p$  e com isso  $\text{codim} \tilde{V}_k = p - 2$ .

Por outro lado  $V(y_1) = \{(x_{11}, \dots, x_{pp}, 0, y_2, \dots, y_p)\}$  que tem dimensão  $p - 1$ . Logo  $\text{codim} V(y_1) = 1$ .

Agora,  $\tilde{V}_k \cap V(y_1) = \{(d_2^{k_2} x_{pp}, \dots, x_{pp}, 0, \dots, 0)\}$  que é uma reta em  $\mathbb{C}^p$  e assim tem dimensão 1. Logo,  $\text{codim} \tilde{V}_k \cap V(y_1) = p - 1 = \text{codim} \tilde{V}_k + \text{codim} V(y_1)$ .

Assim, estudemos  $[\tilde{V}_k] \cdot [V(y_1)] = [V(\phi_2^{k_2}, \dots, \phi_p^{k_p}, m_1^k, \dots, m_p^k, y_1)]$ .

Temos  $V(\phi_2^{k_2}, \dots, \phi_p^{k_p}, m_1^k, \dots, m_p^k, y_1) = V(y_1, \dots, y_p, m_1^k, \dots, m_p^k)$ .

Assim,  $\Lambda_{h,z}^{q-p} = 2 \sum_{k=1}^{2^{p-1}} [V(y_1, \dots, y_p, m_1^k, \dots, m_p^k)]$ . Logo,

$$\lambda_{h,z}^{q-p}(0) = 2 \sum_{k=1}^{2^{p-1}} [V(y_1, \dots, y_p, m_1^k, \dots, m_p^k)] \cdot [V(x_{12}, \dots, x_{(p-1)p})],$$

onde  $[V(x_{12}, \dots, x_{(p-1)p})]$  é formado pelos  $x_{ij}$  com  $i < j$  e  $i \neq j$ .

Portanto,  $\lambda_{h,z}^{q-p}(0) = 2 \cdot 2^{p-1} [V(y_1, \dots, y_p, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{pp})] = 2^p$ .

Caso 2:  $i = 1$ :

Temos que  $[\Gamma_{h,z}^q] = [V(Z/\Sigma(h))]$ , onde  $Z$  é o conjunto solução do sistema  $(X)(Y) = (0)$ , que pode ser visto como um sistema homogêneo de equações lineares nas variáveis  $y_1, \dots, y_p$ .

Sejam  $I = \langle (X)(Y) \rangle$  e  $J = \langle \det(X), (X)(Y) \rangle$ . Claramente  $I \subset J$ .

Logo  $V(\det(X), (X)(Y)) \subset V((X)(Y))$ .

Temos que  $\det(X) \neq 0$  implica que  $(y_1, \dots, y_p) = (0, \dots, 0)$ . Como  $\Sigma(h) = V(y_1, \dots, y_p)$  e  $(X)(Y)$  pode ser visto como um sistema linear homogêneo então  $V(\det(X), (X)(Y)) \subset V((X)(Y)/\Sigma(h))$ .

Fazendo um escalonamento de  $(X)(Y)$  de cima pra baixo que elimina, nesta ordem  $y_1, \dots, y_{p-1}$  (que é possível pois são  $p$  equações lineares em  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ ), temos a última linha será da forma  $\varphi(x_{11}, \dots, x_{pp}) \det(X) y_p = 0$ . Então,

$$V((X)(Y)/\Sigma(h)) = V(\det(X), (X)(Y)).$$

Logo,  $[\Gamma_{h,z}^q] = [V(\det(X), (X)(Y))]$ .

Agora,

$$[\Gamma_{h,z}^q] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_{q-1}} \right) \right] = [V(\det(X), (X)(Y))] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_{q-1}} \right) \right].$$

Pela Proposição 4.1.17 temos que

$$\begin{aligned} & [V(\det(X), (X)(Y))] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_{q-1}} \right) \right] = \left[ V \left( \det(X), \frac{\partial h}{\partial z_{q-1}}, (X)(Y) \right) \right] = \\ & [V(\det(X), y_p - \sqrt{y_{p-1}^2 + \dots + y_1^2}, (X)(Y))] + [V(\det(X), y_p + \sqrt{y_{p-1}^2 + \dots + y_1^2}, (X)(Y))]. \end{aligned}$$

Claramente  $[V(\det(X), y_1, \dots, y_p)]$  é componente de ambos os ciclos.

Como podemos ver  $(X)(Y) = (0)$  como um sistema linear de  $p$  equações e  $p$  incógnitas  $(y_1, \dots, y_p)$  por um resultado de álgebra linear a solução nula é a única solução se, e somente se  $\det(X) \neq 0$ .

Então,  $[V(\det(X), y_p \pm \sqrt{y_{p-1}^2 + \dots + y_1^2}, (X)(Y))] = 2[V(\det(X), y_1, \dots, y_p)] + [K_{\pm}]$ , onde  $K_{\pm}$  é um conjunto analítico que contém pontos da forma  $(x_{ij}, y_1, \dots, y_p)$  com  $y_i \neq 0$  para algum  $i$ .

Como  $\Sigma(h) = V(y_1, \dots, y_p)$  então  $K_{\pm} \not\subset \Sigma(h)$ .

$$\text{Note que } \Lambda_{h,z}^{q-1} + [\Gamma_{h,z}^{q-1}] = [\Gamma_{h,z}^q] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_{q-1}} \right) \right].$$

Logo,  $\Lambda_{h,z}^{q-1} + [\Gamma_{h,z}^{q-1}] = 2[V(\det(X), y_1, \dots, y_p)] + [K_+] + [K_-]$ .

Como  $V(\det(X), y_1, \dots, y_p) \subset \Sigma(h)$ ,  $K_+ \not\subset \Sigma(h)$  e  $K_- \not\subset \Sigma(h)$  então,

$$\Lambda_{h,z}^{q-1} = 2[V(\det(X), y_1, \dots, y_p)].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda_{h,z}^{q-1}(0) &= 2[V(\det(X), y_1, \dots, y_p)] \cdot [V(x_{12}, \dots, x_{(p-1)p}, x_{11}, \dots, x_{(p-1)(p-1)})] = \\ & 2[V(x_{pp}^p, x_{11}, \dots, x_{(p-1)p}, y_1, \dots, y_p)] = 2p. \end{aligned}$$

Caso 3:  $i = 0$ :

$$\text{Temos que calcular } \Lambda_{h,z}^q = [\Gamma_{h,z}^{q+1}] \cdot \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_q} \right) \right] - [\Gamma_{h,z}^q].$$

$$\text{Já vimos que } \Gamma_{h,z}^{q+1} = \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_{q+1}}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}} \right) / \Sigma(h) \right] = \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_{q+1}}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}} \right) \right].$$

Assim,

$$\Lambda_{h,z}^q = \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_q}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}} \right) \right] - \left[ V \left( \frac{\partial h}{\partial z_q}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_{n-1}} \right) / \Sigma(h) \right] = [V(y_1, \dots, y_p)].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda_{h,z}^q(0) &= \Lambda_{h,z}^q \cdot [V(z_0, z_1, \dots, z_{q-1})] = [V(y_1, \dots, y_p)] \cdot [V(x_{12}, \dots, x_{pp})] = \\ & [V(y_1, \dots, y_p, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{pp})] = 1. \end{aligned}$$



**Observação 4.2.4** Para  $i = 0, \dots, p$  Gaffney mostra (via blowup) em [7, Teorema 1.6, p.5] que, para um sistema linear de coordenadas genérico  $\tilde{z}$ ,

$$\lambda_{f, \tilde{z}}^{q-i}(0) = 2^i \binom{p}{p-i}.$$

e para  $l = 0, \dots, q - p - 1$ ,  $\lambda_{f, \tilde{z}}^l(0) = 0$ . Podemos ver que para  $i = 0$ ,  $i = 1$  e  $i = p$  e para  $l = 0, \dots, q - p - 1$ , os resultados que obtemos através de nossas contas coincidem com a fórmula acima.

Acreditamos que via sistema de coordenadas seja possível chegar a essa conclusão também, mas infelizmente não conseguimos provar isso usando o nosso sistema de coordenadas.



# Referências Bibliográficas

- [1] R. G. Atique e M. J. Saia, *Singularidades de germes de funções diferenciáveis*, Notas Didáticas - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- [2] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald, *Introducción al álgebra conmutativa*, ed. Reverté, S.A., 1973.
- [3] J. F. Bobadilla, *Answers to some equisingularity questions*, Invent. math. 161, 657-675, 2005.
- [4] J. Briançon and H. Skoda, *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de  $\mathbb{C}^n$* , C. R. Acad. Sci. Paris 278, 949-952, 1994.
- [5] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge studies in advanced mathematics, 1993.
- [6] A. Dimca, *Topics on real and complex singularities*, (Vieweg, Braunschweig-Wiesbader, 1987).
- [7] T. Gaffney, *Invariants of  $D(q,p)$  singularities*, arXiv.math/0508047v2 [math CV], 20 Feb 2007.
- [8] C. G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*, University of Liverpool, 1979.
- [9] R. Gunning, *Introduction to holomorphic functions of several variables V.II*, Local Theory The Wadsworth and Brooks/cole Mathematics Series Wadsworth and Brooks/cole Advanced Books and Software Monterey, C.A, 1990.
- [10] O. Haution, *Local Algebra*, Ludwig-Maximilians, Universität München, Winter semester, 2013/2014.
- [11] E. L. Lima, *Varieties diferenciáveis*, IMPA, 2007.
- [12] E. J. N. Looijenga, *Isolated Singular Points in Complete Intersections*, Cambridge University Press, 1984.
- [13] D. B. Massey, *Lê cycles and hypersurface singularities*, Lect. Notes Math., vol. 1615. Springer, 1995.
- [14] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge studies in advanced mathematics, 1986.

- [15] J. Milnor, *Morse Theory*, Ann. of Math. Studies 51, Princeton University Press, 1963.
- [16] A. J. Miranda, *Invariantes de germes de aplicações de  $\mathbb{C}^{n+m}$  em  $\mathbb{C}^m$  e ideais de Fitting* ICMC-Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP-São Carlos, 2008.
- [17] B. Oréface, *O número de milnor de uma singularidade isolada*, Universidade Federal de São Carlos, CCET-Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Programa de Pós Graduação em Matemática, 2011.
- [18] G. R. Pellikaan, *Finite determinacy of functions with non-isolated singularities*, Proc. London Math. Soc. 57:3, 357-382, 1988.
- [19] D. Perrin, *Algebraic Geometry*, Springer, London, 2008.
- [20] M. A. O. Reis, *Multiplicidades e multiplicidade mixtas de ideais  $m$ -primários*, ICMC-Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP-São Carlos, 2005.
- [21] P. Seibt, *Differential Filtrations and Symbolic Powers of Regular Primes*, Institut für Mathematik der Technischen Universität München, Arcisstr. 21, D-8000 München 2, Federal Republic of Germany, (Math. Z. 166), pp. 159-164, 1979.
- [22] D. Siersma, *Classification and deformation of singularities*, Academish Proefschrift, 1974.
- [23] D. Siersma, *Isolated line singularities*, Singularities at Arcata 1981, part 2, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 40 (American Mathematical Society, Providence, R.I., pp. 485-496, 1982.
- [24] J. N. Wahl, *Derivations, automorphisms and deformations of quasi-homogeneous singularities*, Proc. Symp. Pure Math. 40, 613-624, 1983.
- [25] A. Zaharia, *A study about singularities with non-isolated critical locus*, Geboren op 25 oktober 1959 te boekarest.
- [26] *Cálculo aulas*, <http://www.dm.ufscar.br/ppgm/attachments/article/11/CalculoAULAS>

## TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

---

Assinatura do autor