



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.003/07

Mistura de Sabor e Violação de CP

Celso Chikahiro Nishi

Orientador

Prof. Dr. Juan Carlos Montero

Março de 2007.

Lo cierto es que vivimos postergando todo lo postergable; tal vez todos sabemos profundamente que somos inmortales y tarde o temprano, todo hombre hará todas las cosas y sabrá todo.

Funes el memorioso – *Jorge Luis Borges.*

Agradecimentos

Muitas pessoas contribuíram direta ou indiretamente para o andamento e conclusão deste trabalho. Primeiramente, agradeço ao meu orientador Prof. Juan Carlos Montero, pela sua paciência, dedicação durante o transcorrer deste trabalho e, principalmente, pela liberdade com que me deixou conduzir minha pesquisa. Em segundo, agradeço ao Prof. Vicente Pleitez e todos os integrantes do Grupo das Interações Fundamentais na escala dos TeVs (GIFT), com os quais tive inúmeras discussões. Em terceiro, agradeço a todos os meus amigos que me ajudaram a passar esses longos, mas também curtos, quatro anos em São Paulo. São eles, Gabriel, Casana, Luís Carlos, Gino, João, Doff, Gadelha, Dafni, Daniel, Ricardo, Mário, William, German, Teófilo, Luciana, Marcelo, Hitoshi, Jair, Irineu. Em especial, quero agradecer as inúmeras e frutíferas discussões que tive, tanto de Física como de coisas alheias à Física, com Gabriel e Casana. Também quero agradecer à Gracienne, pelo companheirismo. Em quarto, quero agradecer aos professores e funcionários do IFT, em particular ao Prof. Bruto Max Pimentel e ao Prof. Luís Agostinho, com quem tive o privilégio de ter aulas muito instrutivas. Em quinto, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro. Por último, quero agradecer à minha família, em especial, aos meus pais, por todo o apoio que recebi ao longo da minha vida.

Resumo

Esta tese visa ao estudo das propriedades de violação de CP e mistura de sabor no Modelo Padrão (MP) e em extensões do mesmo. Estudaremos a conexão entre os dois fenômenos e a relação com os espaços formados pela replicação de multipletos de gauge, os quais chamaremos de espaços horizontais, presentes nos modelos. A presença de tais espaços em teorias de gauge é condição necessária para o aparecimento de mistura de sabor ao nível lagrangiano. Esta pode introduzir novas fontes de violação de CP, como no mecanismo de violação espontânea de CP (VECP), bem como, às vezes, dificultar a análise das propriedades de CP da teoria devido à liberdade de “rotação” nesses espaços (transformações horizontais). A relação entre replicação de multipletos escalares e violação de CP é investigada em extensões do MP com N dubletos de Higgs. No potencial escalar desses modelos as condições necessárias e suficientes para a violação explícita e espontânea de CP são estudadas e invariantes ímpares por CP, como o invariante de Jarlskog no MP, são encontrados. Nessa mesma classe de modelos, o mecanismo de violação espontânea de CP é ilustrado nos modelos com dois e três dubletos, conjuntamente com as restrições impostas pela necessidade de supressão das correntes neutras que trocam sabor. A violação *soft* de CP é ilustrada em um modelo baseado no grupo de gauge eletrofraco $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ e mostrado que pode acomodar a fenomenologia de violação de CP no sistema dos káons neutros mesmo quando o mecanismo CKM é desligado e toda a assimetria CP é proveniente da troca de férmions exóticos. O fenômeno de mistura de sabor é investigado no âmbito da oscilação de neutrinos, sob o ponto de vista de campos clássicos relativísticos, que incluem aspectos de localização, a fim de procurar por novos efeitos e desvios mensuráveis das fórmulas usuais de oscilação, bem como esclarecer certos aspectos do formalismo. Comparações são feitas em relação a abordagens de segunda quantização.

Palavras Chaves: violação de CP; mistura de sabor; quebra de simetria; invariantes de refase; oscilação de neutrinos.

Áreas do conhecimento: física das partículas elementares; física de altas energias; teoria de campos.

Abstract

The aim of this thesis is the study of the properties of CP violation and flavor mixing in the Standard Model (SM) and in some of its extensions. We study the connection between both phenomena and their relation with the space formed by the replication of gauge multiplets, which will be called horizontal spaces, present in the models. The presence of such spaces in gauge theories is a necessary condition for the appearance of flavor mixing at the Lagrangian level. These identical multiplets can introduce new sources of CP violation, as in the mechanism of spontaneous CP violation (SCPV), and, sometimes, make difficult the analysis of the CP properties of the theory, due to the freedom to “rotate” the basis of such spaces. The relation between the replication of scalar multiplets and CP violation is investigated in extensions of the SM with N-Higgs-doublets. In the scalar potential of these models the necessary and sufficient conditions for explicit and spontaneous CP violation are studied and CP odd invariants, like the Jarlskog invariant in the SM, are found. In these class of models, the SCPV mechanism is illustrated in the 2-Higgs- and 3-Higgs-doublet models, and the restrictions imposed by the suppression of flavor changing neutral currents are also exposed. The soft CP violation is illustrated in a model based in the gauge group $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ and it is shown that it can accommodate the phenomenology of the CP violation of the neutral kaons system even when the CKM mechanism is switched off and all CP violation effects are mediated by exotic fermions. The flavor mixing phenomenon is investigated through neutrino flavor oscillations from the perspective of classical relativistic field theories taking localization aspects into account to search for new effects and observable deviations from the usual oscillation formulas, and to clarify certain aspects of the formalism as well. The results are compared with second quantized approaches.

Keywords: CP violation; flavor mixing; symmetry breaking; rephasing invariants; neutrino oscillations.

Índice

1	Introdução	1
2	Violação de CP através do mecanismo CKM	7
2.1	O modelo padrão eletrofraco (MPEF)	7
2.1.1	Termo de massa dos quarks: origem da violação de CP	11
2.2	Matriz de mistura dos quarks (CKM) e invariantes de refase	16
2.2.1	Violação de CP com 3 famílias: parametrizações da matriz CKM	20
2.2.2	Formalismo de comutadores	23
2.3	A descrição do sistema $K^0-\bar{K}^0$ no MP	25
2.3.1	Fenomenologia	25
2.3.2	Troca de dois W	32
2.3.3	Bósons de Goldstone	34
2.3.4	Lagrangiana efetiva para $K^0-\bar{K}^0$	36
2.3.5	Cálculo no espaço de coordenadas	38
3	Outros mecanismos de violação de CP	41
3.1	Violação espontânea de CP (VECP)	43
3.1.1	O modelo de Lee	44
3.1.2	Modelos com dois e três dubletos de Higgs	56
3.1.3	Modelos gerais com N dubletos de Higgs e transformações horizontais	59
3.2	Violação <i>soft</i> de CP	60
4	Mistura de sabor em neutrinos	61
5	Conclusões e perspectivas	67
A	Notações e convenções	73
A.1	Matrizes gama	73
A.2	Diagonalização de matrizes 2×2	74

A.3	Determinante em termos de traços	76
A.4	Integrais	76
A.5	Funções	78
A.6	Regras de Feynman	79
B	C, P, CP e CPT	81
B.1	Convenções para as transformações de P, C e CP	81
B.2	Implementação quântica	84
B.3	Transformações de CP em multipletos fermiônicos	86
B.4	Propriedades das cargas conservadas sobre C, CP e CPT	87
B.5	Transformação de CP como automorfismo em grupos de gauge	89
C	Revisão de espinores e representações do grupo de Lorentz	94
C.1	Teoria livre para uma partícula de Majorana (férmion neutro)	103
D	Condições para violação CP em modelos com N dubletos de Higgs	109
E	Violação de CP “soft” no sistema dos mésons K	127
F	Abordagens de primeira quantização para oscilação de neutrinos e segunda quantização	137
G	Derivação simples de identidades gerais do tipo Fierz	153
	Referências	159

Capítulo 1

Introdução

O entendimento da pequena violação da simetria conjunta de conjugação de carga e inversão espacial (CP) na natureza ainda representa um grande desafio na física de partículas. A sua confirmação inicial em 1964 [1] foi antecedida pela descoberta da violação da simetria de inversão espacial, ou simetria de paridade (P), em 1957 [2], que estava contra todas as expectativas e preconceitos teóricos da época [3]. Historicamente, o fenômeno de violação de CP foi observado no mesmo sistema em que era prevista a ocorrência da oscilação de estranheza, i.e., no sistema $\tau - \theta$ [4], hoje conhecido como o sistema de mésons $K^0 - \bar{K}^0$ cuja nomenclatura evidencia a relação partícula-antipartícula desconhecida na época. Igualmente desafiadora é a origem da mistura de sabor entre quarks introduzida através da matriz de Cabibbo em 1963 [5] para descrever a não conservação da estranheza nas interações fracas. A predição do quark *charm* deveu-se exatamente à unitariedade da matriz de Cabibbo e a estrutura do grupo de gauge do agora estabelecido Modelo Padrão das partículas elementares (MP), mais precisamente, a parte eletrofraca do modelo proposta por Glashow, Weinberg e Salam, ou seja, o Modelo Padrão Eletrofraco (MPEF), levando à noção de famílias para classificar as partículas elementares.

Hoje em dia, sabemos que existem três famílias de quarks, fato que levou ao alargamento do MP, estendeu a matriz de Cabibbo para a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [6] e trouxe consigo o fenômeno de violação de CP, possível somente com a presença de três ou mais famílias de quarks. A oscilação de sabor e a violação de CP no sistema dos káons neutros são ambas consequência da ocorrência da mistura de sabor entre as três famílias de quarks na Lagrangiana de corrente carregada que contém a matriz CKM, não diagonal e intrinsecamente complexa. Este último fato, mais precisamente, a presença de uma única fase não removível na matriz CKM, é, surpreendentemente, o responsável por todos os fenômenos de violação de CP observados até hoje, tanto nos mésons K [7] como nos mésons B [8, 9]. A presença da matriz CKM, contudo, é meramente descritiva no MP, e não dá nenhuma

informação mais preditiva acerca da existência das três famílias, nem sobre as massas dos constituintes de cada família e nem sobre a relação das massas das diferentes famílias. Tal matriz não pode ser prevista pelo MP, a não ser a sua propriedade de unitariedade, devendo ser medida experimentalmente. A extração precisa de seus elementos constitui um dos atuais objetivos perseguidos pelos experimentalistas a fim de procurar inconsistências e sinais de física além do MP [10, 11, 12]. Desse modo, no contexto do MP, ambos os fenômenos, mistura de sabor e violação CP, estão intimamente conectados com a presença de espaços horizontais, i.e., espaços constituídos por dois ou mais multipletos do grupo de gauge idênticos, diferenciados apenas pelas massas (três famílias de quarks). De fato, a replicação de famílias é um problema antigo na física de partículas ainda a ser entendido.

Ao contrário da violação das simetrias de conjugação de carga (C) e paridade (P) que são violadas maximalmente na interação entre os férmions e o bóson de gauge W devido à natureza quiral do grupo de gauge do MPEF [$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$], a origem da pequena violação de CP ainda é desconhecida e sua descrição, através de uma matriz de mistura complexa *ad hoc*, está longe de ser satisfatória. A fim de explicar a minúscula violação de CP observada na natureza e atribuir à sua origem o mesmo mecanismo de quebra espontânea de simetria, responsável pela quebra das simetrias contínuas de gauge, em 1973, T. D. Lee propôs o primeiro modelo capaz de realizar tal idéia: a chamada violação espontânea de CP (VECP) [13]. Após a proposição da idéia, vários modelos foram construídos para descrever a violação de CP na natureza, em particular, a extensão mínima do MP que realiza a idéia, e ainda suprime as correntes neutras que trocam sabor (FCNC)* [14] de maneira natural, requer a existência de três dubletos de Higgs [15, 16], ao invés de um no MP. Então a implementação mínima da VECP requer dubletos adicionais de Higgs, introduzindo um novo espaço horizontal no setor escalar.

Nesse contexto, surge então a questão natural: a violação de CP está realmente ligada ao mecanismo de mistura de sabor (quarks) ou sua interconexão no MP é meramente acidental? De fato, o modelo constituído de três dubletos de Higgs, que exhibe VECP, consegue dissociar o mecanismo de mistura de sabor (quarks) com a fonte de violação de CP [15, 16]. Nesse modelo, a mistura entre quarks continua sendo descrita pela interação de corrente carregada com uma matriz CKM que é real, e portanto CP invariante, enquanto que a violação de CP é gerada pela troca de escalares carregados que se misturam através de uma matriz de mistura complexa, análoga à matriz CKM. No entanto, experimentalmente, o mecanismo CKM parece ser a fonte dominante de violação de CP a baixas energias [17]. Mesmo assim, fontes

*Do inglês *Flavour Changing Neutral Currents*.

adicionais de violação de CP advindos de física nova podem existir e ser induzidas por VECP a altas energias, gerando a matriz CKM complexa do MP [18]. Para construir modelos nessa direção deve-se levar em conta o comprometimento restritivo entre VECP, mecanismo CKM realístico a baixas energias e supressão de FCNC [18]. Por outro lado, a extensão do MP que considera dois dubletos de Higgs (2HDM) [19] também tem sido estudada extensivamente nos últimos tempos devido ao fato de que o Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MSSM) requer dois dubletos de Higgs pela supersimetria [20, 21].

Assim, tanto no MP com três famílias de quarks como em extensões com N-dubletos de Higgs, existe uma relação íntima entre violação de CP e espaços horizontais. De fato, em geral, as transformações de CP podem envolver, em adição às transformações que dependem somente da natureza dos campos, p.ex., escalar, vetorial ou espinorial, as transformações de gauge e rotações nesses espaços horizontais. Com essas definições mais abrangentes, as transformações de CP podem ser vistas como automorfismos no grupo de gauge [22]. Além disso, pode ser mostrado em nível clássico, que teorias de gauge com férmions, escalares e bósons de gauge interagindo via acoplamento mínimo são sempre invariantes por CP. São as interações de Yukawa e o potencial escalar que podem violar CP [22] (em teorias de campos quantizados existe ainda a possibilidade dos termos tipo $F\tilde{F}$ [23]).

Tendo em vista a generalização envolvendo os espaços horizontais, a análise das propriedades de CP de uma teoria fica, então, mais complicada, pois, tais transformações horizontais podem modificar a Lagrangiana, fazendo com que parâmetros reais sejam substituídos por valores complexos, mascarando suas propriedade sob CP. Contudo, a física não deve depender de tais transformações de variáveis (campos), de modo que, é interessante encontrar quantidades que sejam invariantes por tais transformações, propriedade que qualquer observável físico deve possuir. No MP, sabe-se que toda a violação de CP contida na matriz CKM pode ser quantificada por um invariante J , o invariante de Jarlskog [24], que é invariante por redefinições de fase nos campos dos quarks. Tais redefinições formam um subgrupo do grupo de transformações horizontais nas três famílias de quarks tipo *up* e tipo *down*, mas um observável invariante por todo o grupo de transformações horizontais pode ser construído através de comutadores (veja o artigo de C. Jarlskog na Ref. [25] e a Sec. 2.82 mais adiante).

Tal método, de quantificar a violação de CP através de invariantes por transformações horizontais, foi posteriormente aplicado em vários outros modelos incluindo os das Refs. [26, 27], inclusive em modelos com N dubletos de Higgs [28, 29, 30] (NHDMs). No modelo com dois [20, 30, 31] e três [30] dubletos de Higgs, todas as

propriedades de violação/invariância (espontânea/explicita) da simetria CP no potencial escalar podem ser formuladas em termos de alguns invariantes. Isso é muito útil para examinar as propriedades de CP em teorias efetivas a baixas energias, sem se preocupar em encontrar uma base apropriada para análise ou construção.

Existe outro setor do MP que possui um espaço horizontal análogo ao setor dos quarks: o setor dos léptons. Esse setor possui uma estrutura de famílias e múltiplos de gauge eletrofracos muito parecida com a do setor de quarks. A diferença básica era devida à inexistência de massa para os neutrinos, que era automática pela ausência de neutrinos de mão direita singletos no modelo, e portanto, impedia o aparecimento de mistura de sabor nas interações de corrente carregada dos léptons. Contudo, recentemente, as evidências para existência de massa e mistura para os neutrinos foram consolidadas através de inúmeros experimentos [32, 33, 34, 35, 36, 37] explicados através das oscilações de neutrinos [38, 39]. Tais evidências impulsionaram a procura por modelos que explicassem naturalmente as pequeninas mas desconhecidas massas (embora saibamos as diferenças de massas quadradas Δm^2) dos neutrinos e a matriz de mistura com ângulos de mistura grandes [40], diferentemente da matriz de mistura dos quarks que possui uma forma hierárquica, com os maiores valores ao longo da diagonal [11]. A existência de mistura entre os neutrinos, cuja matriz de mistura é chamada de matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) [41], em clara analogia com o setor de quarks, levanta a questão natural da possibilidade da violação de CP também no setor leptônico [42, 43]. Infelizmente, alguns elementos da matriz PMNS ainda estão sendo extraídos experimentalmente. Por exemplo, o ângulo θ_{13} ainda não foi medido, mas possui um limite superior muito pequeno e seu anulamento sugere uma forma tri-bi-maximal para a matriz PMNS [40].

Outra propriedade ainda a ser experimentalmente verificada se refere à natureza dos neutrinos. Visto que os neutrinos não possuem carga elétrica, estes podem ser tanto partículas de Majorana, i.e., autoconjugadas, quanto partículas de Dirac, como as outras partículas do MP. Embora, a natureza de Majorana dos neutrinos automaticamente viole o número leptônico, é sabido que o número leptônico (L) e o número bariônico (B) são simetrias clássicas acidentais (globais) do modelo, que, em nível quântico, não são conservados separadamente no MP por serem anômalas; somente a combinação $B - L$ é livre de anomalias [44]. Infelizmente, experimentos de oscilação não podem distinguir a natureza dos neutrinos. Para tal distinção, experimentos como o duplo decaimento beta sem neutrinos, são necessários [45]. Ao mesmo tempo em que a escala absoluta das massas dos neutrinos não é conhecida, existe ainda uma ambigüidade entre possíveis hierarquias de massas, ambas as hierarquias, normal ou invertida, são ainda possíveis [36].

Do ponto de vista da construção de modelos, a atribuição de massa para os neutrinos já representa uma janela para extensões do MP [37, 46, 47]. E a melhor maneira de acomodar as minúsculas massas dos neutrinos ainda representa um desafio, apenas agravando o mistério de por que o espectro do MP abarca tão variadas escalas de energia. Possivelmente, o mecanismo *seesaw* [45], dentro de um contexto de grande unificação, seja o mecanismo mais provável para explicar a pequenez das massas dos neutrinos [48]. Nesse contexto, a presença de neutrinos adicionais singletos [$SU(2)_L$], de mão direita, se torna mais natural. Dentre outras coisas, ao mesmo tempo em que tais neutrinos de mão direita pesados explicam as pequenas massas dos neutrinos ativos do MP através do mecanismo *seesaw*, elas podem ser as partículas responsáveis pelo mecanismo de leptogênese [49]. É sabido que a violação de CP no MP não é suficiente para gerar toda a assimetria entre matéria e antimatéria do Universo [50]. Por outro lado, neutrinos de mão direita mais leves podem ter conseqüências observáveis tanto nos experimentos de oscilação de neutrinos como na largura invisível no decaimento do Z^0 [51], e seriam uma possível solução para a anomalia encontrada no experimento de LSND [52]. Nesse contexto, uma dedução mais detalhada das fórmulas de oscilação, considerando neutrinos de mão direita e levando em conta aspectos de localização, se torna necessária. A necessidade de considerar neutrinos localizados surge porque geralmente a oscilação de neutrinos, que tanto tem contribuído para o entendimento da natureza dos mesmos, se baseia num formalismo simplificado de ondas planas, embora seja sabido que a coerência necessária para oscilação depende crucialmente da localização das partículas que criam e detectam os neutrinos [53]. Tais formalismos envolvendo pacotes de onda já foram extensivamente desenvolvidos, tanto no contexto de Mecânica Quântica [54, 55, 56, 57, 58, 59], Mecânica Quântica Relativística [60, 61], como em Teoria de Campos [62, 63, 64]. Embora alguns aspectos não sejam completamente claros [61].

Desse modo, devido à íntima relação entre violação de CP e mistura no setor de quarks, léptons e escalares, possível apenas na presença de espaços horizontais, estudaremos os dois mecanismos, a violação de CP e a mistura de sabor, para verificar ou refutar a inescapável inter-relação entre elas. Para isso, revisaremos no Cap. 2 o mecanismo CKM de violação de CP e todos os elementos do MP necessários para entendê-lo. Isso nos permitirá entender a não trivialidade do sucesso do MP em descrever todos os fenômenos que violam CP através de apenas uma fonte de violação, uma fase complexa na matriz CKM. Também calcularemos no MP a Lagrangiana efetiva com $\Delta S = 2$, responsável pela mistura entre K^0 e \bar{K}^0 e a definição dos parâmetros de violação de CP nesse sistema, que foram as primeiras quantidades

atestando as assimetrias CP medidas.

No Cap. 3, estudaremos o mecanismo de VECF proposto por T. D. Lee, sua aplicação para extensões do MP com dois, três e N dubletos de Higgs. Nesse contexto, veremos a relação entre mistura no setor escalar e violação de CP, i.e., como a presença de espaços horizontais modifica as propriedades sob CP do modelo através do potencial escalar. Também analisaremos as propriedades de CP nos potenciais escalares em termos de invariantes por transformações horizontais.

No Cap. 4, estudaremos a mistura de sabor nos neutrinos que possibilita a oscilação dos mesmos, mecanismo responsável pela maior fonte de informações acerca da natureza dos neutrinos nos últimos tempos. Faremos um estudo das fórmulas de oscilação do ponto de vista da teoria clássica de campos (primeira quantização), para campos de spin 0 e $\frac{1}{2}$, e discutiremos as modificações encontradas, bem como compararemos tais abordagens com algumas de segunda quantização.

O Cap. 5 contém as conclusões e as perspectivas do trabalho aqui desenvolvido. Os apêndices contêm vários resultados auxiliares, não necessariamente originais. Em particular, o Ap. B.5 ilustra a noção de transformações de CP como automorfismo do grupo de gauge [22] em teorias de gauge gerais.

Por fim, é importante salientar que tanto o setor escalar do MP como as propriedades dos neutrinos vão ser extensivamente testados nos próximos anos, sendo que o primeiro depende, principalmente, do funcionamento do LHC. A interseção teórica entre esses dois setores reside nas possibilidades de violação de CP no setor leptônico e nos possíveis mecanismos de geração de massa para os neutrinos. O estudo de tal interseção pode nos dar pistas para os antigos e fundamentais problemas da física de partículas, como a relação entre quarks e léptons, replicação de famílias e o problema de CP forte. Desse modo, o estudo dessa interseção é importante tanto do ponto de vista fenomenológico como do ponto de vista da construção de modelos e, logo, para um melhor entendimento das interações fundamentais da natureza.

Capítulo 2

Violação de CP através do mecanismo CKM

O primeiro objetivo desse Capítulo é revisar as partes do MP necessárias para analisar o fenômeno de violação de CP, frisando que todas as observações de violação de CP feitas até hoje envolvendo os mésons K [7] (principalmente o sistema neutro $K^0-\bar{K}^0$) e, mais recentemente, os mésons B [8], podem ser descritas pelo mecanismo CKM [10, 11] que está embutido no modelo padrão das partículas elementares (MP). Uma lista das principais observações dos efeitos de violação de CP, tanto nos mésons K como nos mésons B , pode ser encontrada na p.146 da Ref. [11]. O segundo objetivo é ilustrar, usando o MP, que a definição das transformações de CP são dependentes de convenção e determinam, p.ex., qual a parte do modelo que viola tal simetria. Essa ilustração leva ao terceiro objetivo que é o de analisar o modelo de maneira a identificar quantidades que são independentes de convenção e, portanto, mais apropriadas à sua adoção como observáveis da teoria; no MP com três famílias, existe um único invariante de refase, o invariante de Jarlskog [25, 24]. Como quarto objetivo, mostraremos como o MP consegue descrever a mistura entre $K^0-\bar{K}^0$, sendo este um exemplo de conexão entre um modelo mais fundamental, ou microscópico, com uma descrição mais fenomenológica independente de modelo.

2.1 O modelo padrão eletrofraco (MPEF)

A descrição atual do fenômeno de violação de CP deve fazer uso do modelo padrão das partículas elementares* que tem descrito com muito sucesso os fenômenos de altas energias observados até hoje [11, 65]. Desse modo, o estudo do MP é imperativo para a identificação de possíveis desvios do mesmo.

O MP consiste de duas partes distintas: o modelo eletrofraco (EF) de Glashow-Weinberg-Salam e a Cromodinâmica Quântica (QCD) que descreve as interações

*Este nome pode não ser tão apropriado devido à visão cada vez mais difundida de que o MP deve ser uma teoria efetiva em energias da ordem ou abaixo da escala eletrofraca.

fortes. A violação de CP pode ter origem independente nessas duas partes. Entretanto, todos os fenômenos de violação de CP observados até hoje [11, 66] têm origem no setor eletrofraco da teoria; a dificuldade no setor da QCD é exatamente explicar o porquê da não observação da violação de CP em quantidades como o dipolo elétrico do nêutron. Este é o chamado “problema” CP forte [67, 68]. Sendo assim, nos concentraremos, neste momento, somente na violação de CP eletrofraca [25].

A Lagrangiana eletrofraca pode ser escrita como soma de várias contribuições:

$$\mathcal{L}_{EF} = \mathcal{L}(f, G) + \mathcal{L}(f, H) + \mathcal{L}(G) + \mathcal{L}(H, G) - \mathcal{V}(H) , \quad (2.1)$$

onde f, G, H denotam, respectivamente, os férmions (quarks e leptons), os bósons de gauge (W e B) e os escalares de Higgs (um físico e três de Goldstone absorvidos por certas combinações dos bósons de gauge via mecanismo de Higgs).

O MPEF baseia-se em uma teoria de gauge invariante sob as transformações de gauge locais não abelianas do grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Desse modo, esta teoria viola, explícita e maximalmente, as simetrias de C e P, separadamente no setor $\mathcal{L}(f, G)$, já que as interações de gauge atuam de maneira diferente nas componentes de mão direita (R) e de mão esquerda (L). Ainda assim, surpreendentemente, o conteúdo de partículas é tal que temos o cancelamento de anomalias axiais [69].

Vejamus como a violação de C e P ocorre no modelo. Analisaremos a parte hadrônica (quarks) do modelo tendo em mente que a parte leptônica pode ser tratada de maneira análoga se considerarmos a existência de neutrinos de mão direita ν_R . Caso não existam neutrinos de mão direita, a violação das simetrias C e P é mais evidente pela ausência dos graus de liberdade resultantes da aplicação dessas operações.

Primeiramente, definimos os dubletos de mão esquerda (L) e singletos de mão direita (R) de $SU(2)_L$ para cada família $j = 1, \dots, n_f \equiv 3$:

$$Q_{jL} = \begin{pmatrix} u_{jL} \\ d_{jL} \end{pmatrix} \equiv \text{dublete } SU(2)_L , \quad u_{jR}, d_{jR} \equiv \text{singleto } SU(2)_L , \quad (2.2)$$

$$\text{onde } q = \psi_q(x) \equiv q(x) , \quad \begin{cases} q_R \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5)q \\ q_L \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5)q \end{cases} , \quad (2.3)$$

o campo q se refere a qualquer um dos quarks tipo *up* u_j ou tipo *down* d_j . Usaremos também a notação

$$U \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} , \quad D \equiv \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} , \quad (2.4)$$

para denotar o vetor coluna correndo nos índices de família. Analogamente, a notação Q , sem índice, indica um vetor coluna onde $Q_j = (u_j, d_j)^\top$, com $j = 1, 2, 3$. A não identificação da quiralidade em Q_j significa que este é redutível em relação a $SU(2)_L$ e não forma um dubleto exatamente.

Com essa notação podemos escrever explicitamente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f, G) &= \sum_{j=1}^{n_f} \{ \bar{Q}_{jL} i \gamma^\mu [\partial_\mu \mathbb{1} - ig W_\mu - ig'(\frac{1}{6}) \mathbb{1} B_\mu] Q_{jL} \\ &\quad + \bar{u}_{jR} i \gamma^\mu [\partial_\mu - ig'(\frac{2}{3}) B_\mu] u_{jR} + \bar{d}_{jR} i \gamma^\mu [\partial_\mu - ig'(-\frac{1}{3}) B_\mu] d_{jR} \} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{Q}_L i [\not{\partial} \mathbb{1} - ig W - ig' Y_L \not{B}] Q_L \\ &\quad + \bar{Q}_R i [\not{\partial} \mathbb{1} - ig' Y_R \not{B}] Q_R, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $W_\mu \equiv \frac{1}{2} \tau_a W_{a\mu}$, $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$, para qualquer quadrivetor A_μ , e os números entre parênteses na primeira equação representam as hipercargas (Y), definidas a partir da carga de cada quark pela relação

$$Q = I_3 + Y, \quad Q \begin{pmatrix} u_j \\ d_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & \\ & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ d_j \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Identifica-se, então, que $Y_L = 1/6 \times \mathbb{1}_2$ e $Y_R = \text{diag}(2/3, -1/3)$ para os quarks, sabendo-se que $I_3 \equiv \tau_3/2 = \text{diag}(1/2, -1/2)$. Neste trabalho, serão consideradas somente teorias de gauge com grupos de Lie compactos onde não há diferença entre índices de grupo covariantes ou contravariantes, de modo que os índices de grupo serão sempre subscritos, como em $\tau_a W_{a\mu}$.

Podemos ver que $\mathcal{L}(f, G)$ viola as simetrias C e P já que as projeções quirais dos espinores de Dirac se transformam como

$$\psi_{\frac{R}{L}}(x) \xrightarrow{\text{P}} \gamma_0 \psi_{\frac{L}{R}}(\hat{x}), \quad (2.8)$$

$$\psi_{\frac{R}{L}}(x) \xrightarrow{\text{C}} C \overline{(\psi_{\frac{L}{R}})^\top}(x). \quad (2.9)$$

A matriz C é tal que $C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^\top$ e $C \gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^\top$ de modo que $\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 \xrightarrow{\text{C}} -\bar{\psi}_2 \gamma_\mu \psi_1$ e $\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_2 \xrightarrow{\text{C}} \bar{\psi}_2 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_1$. (A convenção adotada para as transformações de C, P e T, e combinações, pode ser encontrada no Ap. B.) Desse modo, as operações de P e C trocam as componentes R e L entre si. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{jR}(x) &= \bar{u}_{jR} \gamma^\mu i [\partial_\mu - ig'(\frac{2}{3}) B_\mu(x)] u_{jR}(x) \\ &\xrightarrow{\text{P}} \bar{u}_{jL} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 i [\partial_\mu - ig'(\frac{2}{3}) (\tilde{I} B)_\mu(\hat{x})] u_{jL}(\hat{x}) \\ &= [\bar{u}_{jL} i \gamma^\mu [\partial_\mu - ig'(\frac{2}{3}) B_\mu] u_{jL}]_{\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}} \\ &\neq \mathcal{L}_{jR}(\hat{x}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $\hat{x} = \tilde{I}x = (t, -\mathbf{x})$ se $x = (t, \mathbf{x})$, $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger} = \tilde{I}_\nu^\mu\gamma^\nu$ e $B_\mu(x) \xrightarrow{P} \tilde{I}_\mu^\nu B_\nu(\hat{x})$ sob P; $\tilde{I} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a matriz de inversão espacial. As interações que atuavam sobre as componentes R , atuam, depois da troca, sobre as componentes L e vice-versa. Uma troca similar acontece com a operação C.

Ao atuarmos com a operação conjunta de CP (P, depois C) podemos verificar a invariância da interação da Eq. (2.6), observando que a transformação

$$\psi_R(x) \xrightarrow{CP} -C\psi_R^*(\hat{x}), \quad (2.11)$$

deixa as componentes L, R invariantes. Para os bilineares, que formam as correntes quirais, a operação de CP acima leva a

$$\bar{\psi}_1\gamma_\mu R\psi_2 \xrightarrow{CP} -\tilde{I}_\mu^\nu\bar{\psi}_2\gamma_\nu R\psi_1(\hat{x}), \quad (2.12)$$

[ver Eq. (B.9)]. Então podemos observar que a Lagrangiana de interação da Eq. (2.6) envolvendo os bósons B é invariante por CP se $B_\mu(x) \xrightarrow{CP} -(\tilde{I}B)_\mu(\hat{x})$, como na QED [campos vetoriais trocam de sinal sob C, ver Eq. (B.3)]. Para a interação entre os quarks e os bósons W , a invariância sob CP requer uma lei de transformação diferente para os W s. A Lagrangiana de interação é dada por

$$\mathcal{L}_W(x) = g\bar{Q}_{jL}WQ_{jL} = g\bar{Q}_j(\frac{1}{2}\tau_a \otimes \gamma^\mu\frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5))Q_jW_{a\mu}. \quad (2.13)$$

Aplicando as transformações da Eq. (2.12) sobre a Eq. (2.13), considerando a estrutura de dubleto de Q_j (ver Ap. B.3), ou aplicando as transformações para cada termo do dubleto explicitamente, obtemos a transformação

$$\bar{Q}_{jL}(\frac{1}{2}\tau_a \otimes \gamma^\mu)Q_{jL} \xrightarrow{CP} -\tilde{I}_\nu^\mu\bar{Q}_{jL}(\frac{1}{2}\tau_a^\top \otimes \gamma^\nu)Q_{jL}(\hat{x}). \quad (2.14)$$

Notamos que $-\tau_a^\top = \eta_{ab}\tau_b$ se $\eta = \text{diag}(-1, 1, -1)$, o que garante que a transformação dos bósons W sob CP

$$W_{a\mu}(x) \xrightarrow{CP} \eta_{ab}\tilde{I}_\mu^\nu W_{b\nu}(\hat{x}), \quad (2.15)$$

deixa a Lagrangiana da Eq. (2.13) invariante. Inferimos, então, que a transformação dos bósons W sob C é dada por

$$W_{a\mu}(x) \xrightarrow{C} [R_2(\pm\pi)]_{ab}W_{b\mu}(x), \quad (2.16)$$

onde $R_2(\theta)$ denota uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo 2 no espaço tridimensional dos bósons de gauge W_a^μ (representação adjunta).

A invariância de \mathcal{L}_W , Eq. (2.13), sob as transformações de CP dadas pelas Eqs. (2.11) e (2.15) é uma ilustração de um resultado mais geral que garante que qualquer teoria de gauge – contendo férmions (ou escalares) em qualquer representação

do grupo de gauge, acoplados minimamente com os bósons de gauge – é invariante por CP [22]. (Ver também o Ap. B.5.) A particularidade na transformação da Eq. (2.15) é que esta pertence ao conjunto de transformações de simetria do grupo de gauge global $SU(2)_L$ [$R_2(\pm\pi)$ está na representação adjunta do grupo]. Essa propriedade garante diretamente a invariância sob C e CP da Lagrangiana bosônica $\mathcal{L}(G)$ que é invariante de gauge (global) por construção. De fato poderíamos transferir a transformação R_2 para os férmions, acrescentando a transformação de gauge $i\tau_2$, e fazer com que a transformação dos bósons W sob C seja a identidade. Por consistência, a transformação do dubleto de Higgs sob C também deve incluir a transformação de gauge $i\tau_2$, exceto por fatores multiplicativos. Tal lei de transformação, contudo, não deixa mais invariante o potencial escalar após a quebra espontânea da simetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ para $U(1)_{EM}$, pois a mesma modifica o valor esperado do vácuo, não sendo condizente com a simetria eletromagnética remanescente. Desse modo, a transformação da Eq. (2.16) deve ser mantida. A lei de transformação da Eq. (2.16) também está de acordo com a definição da carga eletromagnética definida na Eq. (2.7) e também faz com que os campos do fóton ($\propto gI_3W_3 + g'YB$) e dos bósons carregados W^+, W^- se transformem apropriadamente sob C . Obviamente, estamos efetuando esta análise na base em que somente a segunda componente do dubleto de Higgs $H = (\phi^+, \phi^0)^\top$ assume um valor esperado no vácuo real.

2.1.1 Termo de massa dos quarks: origem da violação de CP

Como pôde ser inferido na seção anterior, as Lagrangianas $\mathcal{L}(G)$, $\mathcal{L}(f, G)$, $\mathcal{L}(H)$ e $\mathcal{L}(H, G)$ na Eq. (2.1), são invariantes por CP. Isso ocorre em qualquer teoria de gauge onde a interação de gauge decorre do acoplamento mínimo [22]. Toda violação (explícita) de CP do MPEF provém de $\mathcal{L}(f, H)$. Ressalta-se que outro setor que possivelmente poderia violar CP, o potencial escalar $\mathcal{V}(H)$, não acomoda nenhuma fase complexa não trivial devido à invariância de gauge e à presença de somente um dubleto de Higgs. Para mais de um dubleto há outras fontes de violação de CP, como veremos no Cap. 3.

A Lagrangiana $\mathcal{L}(f, H)$ para os quarks é, explicitamente,

$$-\mathcal{L}(f, H) = (\bar{Q}_L \tilde{H}) \tilde{\Gamma} U_R + (\bar{Q}_L H) \Gamma D_R + h.c. , \quad (2.17)$$

onde

$$Q_{jL} = \begin{pmatrix} u_{jL} \\ d_{jL} \end{pmatrix} , \quad H \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} , \quad \tilde{H} \equiv i\tau_2 H^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} , \quad \text{dubletos de } SU(2)_L. \quad (2.18)$$

$$\Gamma \equiv \{\Gamma_{jk}\} , \quad \tilde{\Gamma} \equiv \{\tilde{\Gamma}_{jk}\} , \quad \text{acoplamentos de Yukawa complexos.} \quad (2.19)$$

Sob CP, os termos genéricos de $\mathcal{L}(f, H)$ se transformam como:

$$\bar{Q}_{jL}\tilde{H}u_{kR} = \bar{u}_{jL}u_{kR}\phi^{0*} - \bar{d}_{jL}u_{kR}\phi^- \xrightarrow{\text{CP}} \bar{u}_{kR}u_{jL}\phi^0 - \bar{u}_{kR}d_{jL}\phi^+ = \bar{u}_{kR}\tilde{H}^\dagger Q_{jL}, \quad (2.20)$$

$$\bar{Q}_{jL}Hd_{kR} = \bar{u}_{jL}d_{kR}\phi^+ + \bar{d}_{jL}d_{kR}\phi^0 \xrightarrow{\text{CP}} \bar{d}_{kR}u_{jL}\phi^- + \bar{d}_{kR}d_{jL}\phi^{0*} = \bar{d}_{kR}H^\dagger Q_{jL}, \quad (2.21)$$

onde os últimos membros das Eqs. (2.20) e (2.21) podem ser identificados como os respectivos conjugados hermitianos dos primeiros membros. Note-se que cada um dos termos viola, separadamente, C e P. Então,

$$(\bar{Q}_L\tilde{H})\tilde{\Gamma}U_R + h.c. = \bar{U}_R\tilde{\Gamma}^{\dagger*}(\tilde{H}^\dagger Q_L) + h.c. , \quad (2.22)$$

o que indica que se $\tilde{\Gamma}_{jk} \neq \tilde{\Gamma}_{jk}^*$, então $\mathcal{L}(f, H)$ viola CP. [Note-se que $((\bar{Q}_L\tilde{H})\tilde{\Gamma}U_R)^\dagger = \bar{U}_R\tilde{\Gamma}^\dagger(\tilde{H}^\dagger Q_L)$.] Contudo, como veremos na Sec. 2.2, a seguir, é mais preciso dizer que há violação de CP somente quando não existe nenhuma redefinição de fase sobre os campos dos quarks, transformação que será comumente chamada de transformação de refase, capaz de deixar a Lagrangiana invariante, já que tais fases podem ser incorporadas às transformações de CP.

No MPEF o mecanismo de Higgs é implementado para gerar massas aos férmions e alguns bósons de gauge. Esse mecanismo envolve a quebra espontânea de simetria (QES):

$$\begin{aligned} \phi^0 &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(h + v) , \quad v \in \mathbb{R} , \\ -\mathcal{L}(f, H) &\xrightarrow{\text{QES}} [\bar{U}_L\tilde{M}U_R + \bar{D}_LMD_R + h.c.] \left(1 + \frac{1}{v}h\right) , \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde, $M = \frac{v}{\sqrt{2}}\Gamma$, $\tilde{M} = \frac{v}{\sqrt{2}}\tilde{\Gamma}$, $v = 246$ GeV é a escala eletrofraca fixada pela fenomenologia, $h^* = h$ e outros três escalares reais são absorvidos como componentes longitudinais dos bósons W^+ , W^- , Z^0 no gauge unitário. A QES da simetria eletrofraca mantém o caráter assimétrico do modelo quanto às simetrias de C, P e CP. Vejamos, p. ex., o termo de massa dos quarks tipo *down*:

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^D \equiv \bar{D}_LMD_R + \bar{D}_RM^\dagger D_L = \frac{1}{2}\bar{D}[(M + M^\dagger)\mathbb{1} + (M - M^\dagger)\gamma_5]D , \quad (2.24)$$

$$\xrightarrow{\text{P}} \frac{1}{2}\bar{D}(\hat{x})[(M + M^\dagger) - (M - M^\dagger)\gamma_5]D(\hat{x}) , \quad \text{inv. se } M = M^\dagger , \quad (2.25)$$

$$\xrightarrow{\text{C}} \frac{1}{2}\bar{D}(x)[(M + M^\dagger)^\top + (M - M^\dagger)^\top\gamma_5]D(x) , \quad \text{inv. se } M = M^\top , \quad (2.26)$$

$$\xrightarrow{\text{CP}} \frac{1}{2}\bar{D}(\hat{x})[(M + M^\dagger)^\top - (M - M^\dagger)^\top\gamma_5]D(\hat{x}) , \quad \text{inv. se } M = M^* , \quad (2.27)$$

onde $\hat{x}^\mu = (x^0, -\mathbf{x})$. A dependência em x está subentendida quando não escrita explicitamente.

Para obter os campos “físicos” associados aos estados físicos é preciso escrever os mesmos na base em que as matrizes de massa são diagonais. A diagonalização é

efetuada utilizando-se as transformações biunitárias

$$\mathcal{U}_L M \mathcal{U}_R^\dagger = \text{diag}(m_i) , \quad (2.28)$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_L \tilde{M} \tilde{\mathcal{U}}_R^\dagger = \text{diag}(\tilde{m}_i) . \quad (2.29)$$

Tais relações são invariantes por $\mathcal{U}_{L,R} \rightarrow \Phi \mathcal{U}_{L,R}$, e o mesmo para $\tilde{\mathcal{U}}_{L,R}$, onde Φ é uma matriz diagonal de fases. Note-se que se M é hermitiano, $\mathcal{U}_R = \mathcal{U}_L$ é suficiente para a diagonalização, mas não garante a positividade dos autovalores, i.e., é preciso fixar as fases. Note-se, porém, que na Lagrangiana de Dirac o sinal do termo de massa não tem significado físico, podendo ser eliminado por transformações quirais (ver Ap. C).

Em geral, da teoria de matrizes complexas [70], existe uma decomposição única (i.e., dada a matriz M , as matrizes H e \mathcal{E} são únicas) para qualquer matriz quadrada não singular M :

$$M = H \mathcal{E} = \mathcal{E}' H' , \quad (2.30)$$

onde H, H' são matrizes hermitianas e positivo definidas enquanto que $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ são unitárias. A decomposição da Eq. (2.30) é a versão matricial da decomposição polar $z = |z|e^{i\theta z}$ para o número complexo z . Para encontrar as matrizes unitárias A e B que diagonalizam M ,

$$AMB^\dagger = \text{diag}(m_i) , \quad m_i > 0 , \quad (2.31)$$

podemos notar que essas matrizes diagonalizam

$$\begin{cases} AMM^\dagger A^\dagger = AH^2 A^\dagger = \text{diag}(m_i^2) , \\ BM^\dagger MB^\dagger = BH'^2 B^\dagger = \text{diag}(m_i^2) . \end{cases} \quad (2.32)$$

(As matrizes MM^\dagger e $M^\dagger M$ possuem os mesmos autovalores porque estas são conectados por uma transformação de similaridade como veremos a seguir.) Contudo, a Eq. (2.32) somente garante que

$$\begin{aligned} AMB^\dagger &= AHA^\dagger A \mathcal{E} B^\dagger = A \mathcal{E}' B^\dagger B H' B^\dagger \\ &= \text{diag}(m_i) A \mathcal{E} B^\dagger = A \mathcal{E}' B^\dagger \text{diag}(m_i) . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Para conseguirmos a Eq. (2.31), precisamos da relação adicional

$$B = A \mathcal{E} , \quad (2.34)$$

onde \mathcal{E} pode ser encontrada por $\mathcal{E} = H^{-1}M$ enquanto que $H = (MM^\dagger)^{1/2}$ [70]. Então, encontrar as matrizes A e B que satisfazem a Eq. (2.32) não é suficiente para garantir a Eq. (2.31). Por exemplo, dadas A e B que satisfazem as Eqs. (2.31) e (2.32), qualquer $A' = \Phi_A A$ e $B' = \Phi_B B$, sendo $\Phi_{A,B}$ matrizes diagonais de fases

arbitrárias, continuam satisfazendo a Eq. (2.32) mas a Eq. (2.31) deixa de ser verdade se $\Phi_A \neq \Phi_B$.

As relações das Eqs. (2.28) e (2.29) definem os campos físicos U'_L e D'_L como sendo

$$U'_L = \tilde{\mathcal{U}}_L U_L, \quad D'_L = \mathcal{U}_L D_L. \quad (2.35)$$

Os campos de mão direita U_R e D_R são transformados da mesma maneira pelas respectivas matrizes $\tilde{\mathcal{U}}_R$ e \mathcal{U}_R . Mas, uma vez definidos os campos físicos de mão direita, as matrizes \mathcal{U}_R e $\tilde{\mathcal{U}}_R$ não se manifestam na teoria em nenhum outro lugar, e, portanto, não são mensuráveis. As matrizes de mão esquerda \mathcal{U}_L e $\tilde{\mathcal{U}}_L$, por outro lado, se manifestam na teoria após a QES somente através da matriz de mistura de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) que será definida a seguir.

Uma observação importante deve ser feita acerca da implicação da Eq. (2.34). Por construção, o conhecimento total de M leva ao conhecimento total das matrizes $\mathcal{U}_L, \mathcal{U}_R$, exceto pelas transformações $\mathcal{U}_L \rightarrow \Phi \mathcal{U}_L$ e $\mathcal{U}_R \rightarrow \Phi \mathcal{U}_R$, discutidas anteriormente. Pela Eq. (2.34), as matrizes \mathcal{U}_R e \mathcal{U}_L não são independentes se queremos que o termo de massa tenha massas positivas provenientes das Eqs. (2.28) e (2.29). De fato, essas matrizes estão relacionadas por $\mathcal{U}_R = \mathcal{U}_L \mathcal{E}(M)$, sabendo-se que a decomposição $M = H \mathcal{E}$ garante que as componentes sejam função da matriz de massa original $\mathcal{E} = \mathcal{E}(M) = H^{-1}M$, $H = H(M) = (MM^\dagger)^{1/2}$. Sendo que \mathcal{U}_L é definida pela relação $\mathcal{U}_L M M^\dagger \mathcal{U}_L^\dagger = \text{diag}(m_i^2)$ ou $\mathcal{U}_L H \mathcal{U}_L^\dagger = \text{diag}(m_i)$, concluímos que se $\{m_i\}$ não são degenerados, \mathcal{U}_L é unicamente definida pelos seus autovetores (convenciona-se $0 < m_1 < m_2 < m_3$), exceto por fases globais dos autovetores. Então, $\mathcal{U}_L = \mathcal{U}_L(M)$ é indefinida por operações de refase, $\mathcal{U}_L \rightarrow \Phi \mathcal{U}_L$, onde Φ é uma matriz diagonal de fases. As mesmas relações são válidas para as matrizes relacionadas aos quarks tipo *up* marcados com um til (\sim). Como pode ser visto num exemplo de uma matriz 2×2 (Ap. A.2), no limite de autovalores degenerados, a matriz de diagonalização tende à matriz identidade, só as fases globais são indefinidas. Portanto a degenerescência de massas leva à inexistência de violação de CP. Essa condição poderá ser expressa de maneira explícita usando-se o formalismo de comutadores, como veremos na Sec. 2.2.2.

A Lagrangiana da Eq. (2.17), escrita em termos dos campos físicos, é dada por

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}'(f, H) &= \left(1 + \frac{h}{v}\right) \left[m_u \bar{u} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) u + m_c \bar{c} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) c + m_t \bar{t} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) t \right. \\ &\quad \left. + m_d \bar{d} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) d + m_s \bar{s} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) s + m_b \bar{b} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) b \right] + h.c. \\ &= \left(1 + \frac{h}{v}\right) \left[m_u \bar{u} u + m_c \bar{c} c + m_t \bar{t} t + m_d \bar{d} d + m_s \bar{s} s + m_b \bar{b} b \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Escrita dessa maneira, a Lagrangiana acima é invariante pelas transformações de C, P e CP. Mas, o que aconteceu com a violação das simetrias e as condições da

Eq. (2.24), sob as matrizes de massa? Uma observação deve ser feita quanto a isso. Note-se que

$$D' = D'_L + D'_R = [\mathcal{U}_L \otimes L + \mathcal{U}_R \otimes R] D, \quad (2.37)$$

onde $R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5)$ e $L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5)$ são os projetores quirais. Podemos ver que D' não se transforma, sob P, como D , pois

$$\left. \begin{array}{l} D_L \xrightarrow{P} \gamma^0 D_R(\hat{x}) \\ D_R \xrightarrow{P} \gamma^0 D_L(\hat{x}) \end{array} \right\} \Rightarrow D' \xrightarrow{P} \begin{array}{l} \mathcal{U}_L \gamma^0 D_R(\hat{x}) + \mathcal{U}_R \gamma^0 D_L(\hat{x}) \\ = \gamma^0 [\mathcal{U}_L D_R(\hat{x}) + \mathcal{U}_R D_L(\hat{x})] \\ \neq \gamma^0 D'(\hat{x}). \end{array} \quad (2.38)$$

De forma análoga, sob C

$$\left. \begin{array}{l} D_L \xrightarrow{C} C \gamma_0^\top D_R^*(x) \\ D_R \xrightarrow{C} C \gamma_0^\top D_L^*(x) \end{array} \right\} \Rightarrow D' \xrightarrow{C} \begin{array}{l} C \gamma_0^\top [\mathcal{U}_L^* D_R^* + \mathcal{U}_R^* D_L^*] \\ \neq C \gamma_0^\top D'^* , \end{array} \quad (2.39)$$

enquanto que sob CP (P, depois C)

$$\left. \begin{array}{l} D_L \xrightarrow{CP} -C D_L^*(\hat{x}) \\ D_R \xrightarrow{CP} -C D_R^*(\hat{x}) \end{array} \right\} \Rightarrow D' \xrightarrow{CP} \begin{array}{l} -C [\mathcal{U}_L D_L^*(\hat{x}) + \mathcal{U}_R D_R^*(\hat{x})] \\ \neq -C D'^*(\hat{x}). \end{array} \quad (2.40)$$

Então, a menos que $\mathcal{U}_L = \mathcal{U}_R$, D e D' se transformam de maneiras diferentes sob P (o mesmo acontece sob C e CP). Devido a essa incompatibilidade, é preciso escolher qual dos campos se transforma sob P, C e CP da maneira canônica (ver Ap. B.1). Obviamente, escolhemos D' , já que esses campos representam os campos físicos de massa definida. Dessa forma, a análise feita na Eq. (2.24) deve ser revista. Mesmo assim, ela é válida como indicativo da existência de violação de CP na teoria como um todo. A escolha de D' como sendo aquela que se transforma sob C, P e CP da maneira usual, implica numa redefinição das transformações em D antes da QES; outra fonte de violação de CP deve surgir, restrita à mesma condição que foi conseguida na Eq. (2.24). Essa fonte de violação será a matriz CKM na interação de corrente carregada dos quarks. Note-se que a mesma discussão se aplica aos campos tipo up , U e U' . A rotação dos campos da simetria de gauge para os autoestados de massa é irrelevante, dentro do contexto de teorias clássicas, contudo, para campos quantizados, as transformações da Eq. (2.35) de fato afetam a ação efetiva quântica, devido às anomalias axiais, e estão intimamente ligadas ao problema de CP forte [69, p.253].

Se redefinirmos as transformações de CP e P de forma que D' e U' satisfaçam as transformações usuais, $\mathcal{L}(f, H)$ será invariante por C, P e CP. Feito isso, devemos escrever $\mathcal{L}(f, G)$ em termos dos campos físicos definidos anteriormente. Para as

interações de corrente neutra temos

$$\mathcal{L}_B(x) = \bar{Q}_{R,L}[\not{\partial} - ig'Y_{R,L}\mathcal{B}]Q_{R,L} \quad (2.41)$$

$$= \bar{Q}'_{R,L}[\not{\partial} - ig'Y_{R,L}\mathcal{B}]Q'_{R,L} = \text{invariante} . \quad (2.42)$$

A mesma invariância pode ser observada na interação com o bóson W^3 trocando-se $g'Y_{R,L}\mathcal{B} \rightarrow \frac{1}{2}gW_3\tau_3$. A partir, disso observamos que não há correntes neutras que trocam sabor (FCNC) ao nível de árvore. Essa propriedade no MP é relacionada ao mecanismo de GIM [71]. (Não há mistura entre L e R e as matrizes $\mathcal{U}_{R,L}$ e $\tilde{\mathcal{U}}_{R,L}$ são unitárias). De forma direta, podemos ver também que as interações neutras, escritas em termos dos bóson de gauge físicos A^μ e Z^μ , também conservam sabor.

Para correntes carregadas, no entanto, a situação é diferente:

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\bar{U}_L\gamma^\mu D_L + h.c. \quad (2.43)$$

$$= \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\bar{U}'_L\gamma^\mu\tilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{U}_L^\dagger D'_L + h.c. \quad (2.44)$$

$$\equiv \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+J_c^\mu + h.c. , \quad (2.45)$$

onde $W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{1\mu} \mp iW_{2\mu})$ e definimos a corrente carregada

$$J_c^\mu \equiv \bar{U}'_L\gamma^\mu V D'_L , \quad V = \tilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{U}_L^\dagger = \text{matriz CKM} \in U(n_f) , \quad (2.46)$$

que contém a matriz de mistura dos quarks, i.e., a matriz CKM em sua definição. A transformação da Eq. (2.45) sob CP é dada por

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{4}(W_\mu^1 - iW_\mu^2)\bar{u}'_j\gamma^\mu V_{jk}(\mathbb{1} - \gamma_5)d'_k + (W_\mu^1 + iW_\mu^2)\bar{d}'_k\gamma^\mu V_{jk}^*(\mathbb{1} - \gamma_5)u'_j , \quad (2.47)$$

$$\xrightarrow{\text{CP}} \frac{g}{4}(W_\mu^1 + iW_\mu^2)\bar{d}'_k\gamma^\mu V_{jk}(\mathbb{1} - \gamma_5)u'_j + (W_\mu^1 - iW_\mu^2)\bar{u}'_j\gamma^\mu V_{jk}^*(\mathbb{1} - \gamma_5)d'_k , \quad (2.48)$$

que, em geral, não é invariante. Na próxima subseção, veremos mais detalhadamente as condições que V deve satisfazer para que haja violação de CP. O importante é notar que a violação de CP, que inicialmente era associada a $\mathcal{L}(f, H)$, fora transferida para \mathcal{L}_{CC} , após a redefinição dos campos físicos, depois da QES, e da redefinição das respectivas transformações de CP sobre os campos.

2.2 Matriz de mistura dos quarks (CKM) e invariantes de refase

Vamos analisar nesta seção como a redefinição das transformações de CP sobre os campos altera as condições impostas sobre a teoria. Como discutido na seção

anterior, a Lagrangiana de interação via corrente carregada, Eq. (2.44), quando os campos de quarks se transformam canonicamente, é a única parte do MPEF envolvendo os quarks que, possivelmente, viola CP classicamente. A violação se dá de maneira que $\delta\mathcal{L} \neq 0$ se $V \neq V^*$, conforme a Eq. (2.48). Podemos, no entanto, redefinir os campos, que são complexos, adicionando fases complexas, transformações as quais são chamadas de transformações de “refase” (*rephasing transformations*),

$$u_{iL} \rightarrow e^{i\tilde{\phi}_i} u_{iL}, \quad d_{iL} \rightarrow e^{i\phi_i} d_{iL}, \quad i = 1, \dots, n_f. \quad (2.49)$$

Note-se que as mesmas transformações de refase são necessárias para as componentes de mão direita u_{iR} e d_{iR} para manter a Lagrangiana $\mathcal{L}(f, H)$, Eq. (2.36), invariante.

A liberdade acima expressa que a descrição física é invariante pela transformação (para $n_f = 3$ famílias)

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\text{CP}} \text{diag}(e^{-i\tilde{\phi}_k}) V \text{diag}(e^{i\phi_k}) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\tilde{\phi}_u} & & \\ & e^{-i\tilde{\phi}_c} & \\ & & e^{-i\tilde{\phi}_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi_d} & & \\ & e^{i\phi_s} & \\ & & e^{i\phi_b} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Devido à unitariedade, V tem n_f^2 parâmetros independentes reais [$V \in U(n_f)$], enquanto o número de fases que podem ser eliminados pelo uso da Eq. (2.50) é $2n_f - 1$ (embora tenhamos $2n_f$ fases na transformação da Eq. (2.50), uma delas não é independente devido ao fato de que das duas fases globais, uma à esquerda e outra à direita, somente a diferença importa, como veremos a seguir). Desse modo, V tem $n_f^2 - (2n_f - 1) = (n_f - 1)^2$ parâmetros físicos independentes. Se subtrairmos os $n_f(n_f - 1)/2$ ângulos do tipo Euler de $SO(n_f)$, chegamos a $(n_f - 1)^2 - n_f(n_f - 1)/2 = (n_f - 1)(n_f - 2)/2$ fases físicas independentes. Isso quer dizer que o número mínimo de famílias para a possível presença de violação de CP é $n_f = 3$. Assim no MP existe somente uma fase física observável responsável por toda a violação de CP. Podemos quantificar tal fase de maneira invariante pelas transformações de refase da Eq. (2.50). Tal quantidade é chamada de invariante de Jarlskog [24] e será obtida a seguir.

Sabemos que V é uma matriz unitária [$\in U(n_f)$] e, portanto, pode ser separada em

$$V = e^{i\bar{\alpha}} \bar{V}, \quad (2.52)$$

onde $\bar{V} \in SU(n_f)$ e $\bar{\alpha}$ pode ser obtida de $\det V = e^{in_f\bar{\alpha}}$. Do mesmo modo, as transformações de refase também podem ser separadas em

$$\text{diag}(\tilde{\phi}_k) = \tilde{\phi}_0 \mathbb{1} + \text{diag}(\tilde{\phi}'_k), \quad (2.53)$$

$$\text{diag}(\phi_k) = \phi_0 \mathbb{1} + \text{diag}(\phi'_k), \quad (2.54)$$

onde $\phi_0 \equiv \frac{1}{n_f} \sum_{k=1}^{n_f} \phi_k$, $\phi'_k \equiv \phi_k - \phi_0$ e as mesmas relações são válidas para as fases $\tilde{\phi}_0$ e $\tilde{\phi}'_k$. Veja que o efeito de considerar $\phi_0 \neq 0$ e $\tilde{\phi}_0 \neq 0$ é a modificação $\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\alpha} + \phi_0 - \tilde{\phi}_0$, na componente $U(1)$ de V , de modo que somente a diferença $\Delta\phi_0 \equiv \phi_0 - \tilde{\phi}_0$ importa. Assim, a transformação de refase mais geral que pode ser efetuada sobre V é

$$V \rightarrow e^{i\Delta\phi_0} \text{diag}(e^{-i\tilde{\phi}'_k}) V \text{diag}(e^{i\phi'_k}), \quad (2.55)$$

onde

$$\sum_k \tilde{\phi}'_k = \sum_k \phi'_k = 0. \quad (2.56)$$

A transformação da Eq. (2.55) possui $1 + 2(n_f - 1)$ parâmetros livres, como havíamos analisado.

Podemos, então, desconsiderar o efeito das transformações $U(1)$, geradas por ϕ_0 e $\tilde{\phi}_0$, pois sabemos que invariantes sob tais transformações podem ser obtidos por qualquer combinação $V_{ij}V_{kl}^*$, para quaisquer dois elementos de V , e, por isso, contêm a mesma informação que $\bar{V}_{ij}\bar{V}_{kl}^*$ obtida de \bar{V} . Assim, podemos considerar somente os mapeamentos que levam \bar{V} de $SU(n_f)$ para $SU(n_f)$

$$\bar{V} \rightarrow \text{diag}(e^{-i\tilde{\phi}_k}) \bar{V} \text{diag}(e^{i\phi_k}) \in SU(n_f), \quad (2.57)$$

onde

$$\sum_k \tilde{\phi}_k = \sum_k \phi_k = 0. \quad (2.58)$$

Como a transformação da Eq. (2.57) somente envolve elementos de $SU(n_f)$ que são diagonais, o conjunto de todas elas forma o subgrupo de Cartan G_r nessa representação. Isto nos permite escrever a Eq. (2.57) na forma

$$\bar{V} \rightarrow e^{-i\tilde{a}_k h_k} \bar{V} e^{i a_k h_k}, \quad (2.59)$$

onde o conjunto $\{h_k\}$ gera a subálgebra de Cartan (SAC), cuja representação explícita para $SU(3)$ pode ser dada pelas matrizes de Gell-Mann $\{h_k\} = \{\lambda_3/2, \lambda_8/2\}$. (Representações explícitas para $SU(n_f)$ podem ser encontradas no Ap. D.) Em linguagem matemática (ver Ap. D e Ref. [72]), a Eq. (2.59) define uma órbita invariante pelo subgrupo de Cartan de $SU(n_f)$, aplicado pela direita e pela esquerda, que contém uma das possíveis matrizes CKM, \bar{V} . É essa órbita que é fisicamente significativa. As transformações da Eq. (2.59) também definem *cosets* G/G_r e $G \setminus G_r$ [73].

Da análise feita até agora podemos ver que qualquer quantidade

$$\text{Tr}[(\text{diag})V(\text{diag})V^\dagger], \quad \text{Tr}[(\text{diag})V(\text{diag})V^\dagger(\text{diag})V(\text{diag})V^\dagger], \quad \dots, \quad (2.60)$$

onde (diag) denota qualquer matriz diagonal, é invariante sob as transformações de refase na Eq. (2.55) e não é trivial quando (diag) $\neq \mathbf{1}$, do contrário a unitariedade de

V ($VV^\dagger = \mathbb{1}$) removeria qualquer informação. Sabemos também que os invariantes de segunda ordem, combinações de $V_{ij}V_{ij}^* = |V_{ij}|^2$, e portanto reais, não servem para a quantificação da violação de CP. Então, precisamos examinar os invariantes de quarta ordem e, de fato, os invariantes de Jarlskog [25] são exatamente

$$J_{ijkl} \equiv \text{Im Tr}[e_{ii}V e_{jj}V^\dagger e_{kk}V e_{ll}V^\dagger], \quad (2.61)$$

onde $\{e_{ij}\}$ é o conjunto da base canônica para as matrizes $n_f \times n_f$ definidos por $(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Por exemplo, $J_{1122} = \text{Im}(V_{11}V_{21}^*V_{22}V_{12}^*)$ é claramente invariante sob as transformações da Eq. (2.50). Note-se que, para $n_f = 3$, dos elementos diagonais $\{e_{11}, e_{22}, e_{33}\}$, podemos escolher dois deles como sendo independentes, p. ex., os dois primeiros, pois $e_{33} = \mathbb{1} - e_{11} - e_{22}$. Isto leva à conclusão de que os invariantes na Eq. (2.61) envolvendo o índice 3 podem ser escritos em termos dos invariantes envolvendo os índices 1 e 2 e em termos de invariantes de segunda ordem (devido à identidade), que são reais e não contribuem para a parte imaginária. Por exemplo, $J_{1133} = J_{1122} = -J_{1123}$. Convencionaremos, então, o uso dos índices 1 e 2 como aqueles independentes (envolvendo os quarks u, d e c, s).

A quantidade J_{ijkl} possui algumas características interessantes: (i) pela propriedade cíclica do traço e (ii) pela propriedade $\text{Im}a = -\text{Im}a^*$ dos números complexos observamos que

$$(i) \quad J_{ijkl} = J_{klij},$$

$$(ii) \quad J_{ijkl} = -J_{ilkj},$$

o que leva às igualdades $J_{ijkl} = J_{klij} = -J_{ilkj} = -J_{kjil}$. Para $n_f = 3$, podemos escolher que os índices de J_{ijkl} assumam os valores $i, j, k, l = 1, 2$, ou seja, $n_f - 1 = 2$ possibilidades. Devido às propriedades acima, existe somente uma quantidade independente

$$J_{1122} = J_{2211} = -J_{1221} = -J_{2112} \equiv J, \quad (2.62)$$

enquanto todos os outros são nulos, pois pode-se mostrar que estes são iguais aos seus opostos. Por exemplo, da propriedade (ii) acima $J_{1212} = -J_{1212} = 0$.

Do ponto de vista da teoria de grupos, contudo, poderíamos igualmente ter definido, ao invés da Eq. (2.61), as quantidades

$$\tilde{J}_{ijkl} \equiv \text{Im Tr}[h_i V h_j V^\dagger h_k V h_l V^\dagger]. \quad (2.63)$$

Para $n_f = 3$, podemos usar as matrizes de Gell-Mann $h_1 = \lambda_3/2$ e $h_2 = \lambda_8/2$ como geradores diagonais da álgebra de $SU(3)$. Veja que as propriedades (i) e (ii) acima continuam valendo para a Eq. (2.63) desde que as matrizes $\{h_i\}$ sejam reais. Se

identificarmos $h_1 = \frac{1}{2}\lambda_3 = \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22})$, $h_2 = \frac{1}{2}\lambda_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(e_{11} + e_{22} - e_{33})$ e lembrando que a adição da identidade, $h_i \rightarrow h_i + c\mathbb{1}$ ($c \in \mathbb{R}$), não afeta a parte imaginária, podemos usar ao invés de $\{h_1, h_2\}$ as matrizes

$$h_1 \quad \text{e} \quad h_2 + \frac{\mathbb{1}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(e_{11} + e_{22}). \quad (2.64)$$

Assim, obtemos a identificação

$$\tilde{J}_{1122} = 3J_{1122} = 3J, \quad (2.65)$$

em conformidade com a definição do invariante de Jarlskog propriamente dito [25], exceto por uma indefinição de sinal.

A existência de somente um invariante para $n_f = 3$ nos permite escrever de forma geral

$$\text{Im}\{V_{\alpha j}V_{\beta k}V_{\alpha k}^*V_{\beta j}^*\} = J \sum_{\gamma, l} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{jkl}, \quad (2.66)$$

sem a soma dos índices repetidos. Essa definição já leva em conta as propriedades (i) e (ii) acima.

Para um número qualquer de famílias n_f (no passado $n_f = 3$ não tinha o grau de confiabilidade que tem hoje), vemos das propriedades (i) e (ii) que para obter $J_{ijkl} \neq 0$ (para qualquer base escolhida para a diagonal, sem a identidade) devemos ter $i \neq k$ e $j \neq l$. Além disso, trocar i por k , ou j por l , apenas troca o sinal do invariante e trocar o par (ik) por (jl) leva ao mesmo invariante. Temos então $\frac{1}{2}[r(r-1)/2][r(r-1)/2 + 1]$ invariantes de refase de quarta ordem independentes. Observe-se que para $n_f = 3$, ou seja, $r = 2$, há somente um invariante e uma fase complexa. Para $n_f > 3$ o número de invariantes de Jarlskog é maior que o número de fases complexas não triviais $r(r-1)/2$. Por exemplo, para $n_f = 4$, temos para J_{ijkl} as possibilidades $(ik) = (12), (13), (23)$ e $(jl) = (12), (13), (23)$, onde mantivemos $i < k$ e $j < l$ para eliminar as degenerescências e obtemos 6 combinações.

2.2.1 Violação de CP com 3 famílias: parametrizações da matriz CKM

Revisaremos brevemente aqui algumas parametrizações possíveis para a matriz CKM, V , e a conseqüente parametrização do invariante de Jarlskog. A matriz CKM possui 3 ângulos e 1 fase (fase CKM ou CP), somando 4 parâmetros físicos independentes. É preciso ressaltar que a análise baseia-se na consideração de que não há degenerescência de massa entre quarks de mesmo tipo (*up* ou *down*). Tal degenerescência introduziria uma simetria adicional, eliminando a fase CKM de V .

Uma classe de parametrizações utilizada freqüentemente para a matriz CKM faz uso de 3 ângulos de Euler e uma fase adicional, como, por exemplo,

$$V = R_{23}(\theta_3, \delta)R_{12}(\theta_1, 0)R_{23}(\theta_2, 0) , \quad (2.67)$$

onde define-se

$$R_{12}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{i\phi} & \\ -\sin \theta e^{-i\phi} & \cos \theta & \\ & & 1 \end{pmatrix} , \quad R_{23}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos \theta & \sin \theta e^{i\phi} \\ & -\sin \theta e^{-i\phi} & \cos \theta \end{pmatrix} , \quad (2.68)$$

sendo $0 \leq \theta_j \leq \pi/2$ e $0 \leq \delta \leq 2\pi$ para que essas representações sejam fiéis e bijetoras. Em geral, esse tipo de parametrização possui a forma

$$V = R_{ij}(\)R_{kl}(\)R_{mn}(\) , \quad \text{onde } (i, j), (m, n) \neq (k, l) . \quad (2.69)$$

A igualdade na condição anterior implicaria na comutação entre os R s. Outro exemplo que merece ser mencionado é a parametrização utilizada pelo PDG: $V_{\text{CKM}} = R_{23}(\theta_{23}, 0)R_{13}(\theta_{13}, -\delta_{13})R_{12}(\theta_{12}, 0)$ [74, p.175]. Para que tenhamos violação de CP é preciso que

$$\delta \neq 0, \pi , \quad \theta_j \neq 0, \pi/2 . \quad (2.70)$$

Essas condições podem ser verificadas facilmente, p. ex., se $\delta = 0, \pi$ ou $\theta_3 = 0$, então $V \in \mathbb{R}$. Isso introduz 14 condições sobre os ângulos. É importante enfatizar que o efeito de violação de CP na teoria deve independer da parametrização usada para V . De fato, no MP, todos os efeitos de violação de CP dependem apenas do invariante de Jarlskog que, usando a parametrização da Eq. (2.67), é dado por

$$J \equiv \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \delta = \sin \delta \sin \theta_1 \frac{\sin 2\theta_1}{2} \frac{\sin 2\theta_2}{2} \frac{\sin 2\theta_3}{2} , \quad (2.71)$$

de onde concluímos que o maior valor que J pode assumir é $J_{\text{max}} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$, que ocorre para $\sin \delta = \sin 2\theta_2 = \sin 2\theta_3 = 1$ e $\cos \theta_1 = 1/\sqrt{3}$. Por completeza, o valor atual conforme o MP é $J_{\text{MP}} = (2, 88 \pm 0, 33) \cdot 10^{-5}$ [11].

Outra parametrização de interesse teórico faz uso dos módulos dos elementos de matriz, $|V_{jk}|$, que obviamente são invariantes por refase. Tal parametrização, no entanto, não é muito interessante como ferramenta para restringir e quantificar a violação de CP devido aos erros na determinação desses módulos. Mesmo assim, se tivéssemos conhecimento absoluto de todos $|V_{jk}|$, teríamos conhecimento de V . Note-se que o número de módulos independentes restringidos pela unitariedade é $(n_f - 1)^2$, já que as 6 equações $(VV^\dagger)_{ii} = 1$ e $(V^\dagger V)_{ii} = 1$ permitem escrever os

módulos de uma linha e uma coluna em termos do restante dos módulos, estabelecendo a dependência de $2n_f - 1$ módulos. Tal número de módulos independentes é igual ao número de parâmetros de qualquer matriz unitária pertencente a $U(n_f)$, restringido pelas transformações de refase [29, 75]. Essa característica é particular ao mecanismo CKM e valeria para qualquer número de famílias n_f , não sendo verdade, por exemplo, em modelos com simetria *left-right* [75, 76]. Para $n_f = 3$ precisamos então de apenas quatro módulos independentes, com os quais podemos escrever todos os outros módulos. De fato, o invariante J , exceto por uma indefinição de sinal, pode ser escrito em termos dos módulos dos elementos utilizando a parametrização

$$J = J(|V_{\alpha j}|) \longrightarrow 4J^2 = -\lambda(a^2, b^2, c^2), \quad (2.72)$$

onde $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$. A escolha de a, b e c pode ser feita, p. ex., removendo-se uma linha ou coluna e escolhendo

$$a = |V_{11}V_{13}|, \quad b = |V_{21}V_{23}|, \quad c = |V_{31}V_{33}|. \quad (2.73)$$

A prova da Eq. (2.72) está relacionada com os triângulos unitários, descritos a seguir.

Uma representação visual, comumente utilizada para quantificar o efeito de violação de CP, pode ser obtida a partir da relação de unitariedade dos elementos de matrizes, como, por exemplo [74, p.176]

$$(V^\dagger V)_{bd} = V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0. \quad (2.74)$$

A relação anterior pode ser visualizada no plano complexo como a soma de 3 números complexos que formam um triângulo: o triângulo unitário. Em geral, normaliza-se um dos lados do triângulo unitário à unidade, por exemplo, para a Eq. (2.74) temos após a normalização do primeiro termo,

$$1 + \frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*} + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*} = 0. \quad (2.75)$$

Podemos ver que existem 6 triângulos unitários correspondentes a $(V^\dagger V)_{ij} = 0$ para $i \neq j = 1, 2, 3$, cujas áreas são dadas por

$$\begin{aligned} \text{área} &= \frac{1}{2} |\text{Im}[(V^\dagger e_{11} V)_{ij} (V^\dagger e_{22} V)_{ij}^*]| \\ &= \frac{1}{2} |\text{Im} \text{Tr}[e_{ii} V^\dagger e_{11} V e_{jj} V e_{22} V^\dagger]| \\ &= \frac{1}{2} |J_{i1j2}| = \frac{1}{2} |J|, \quad \forall i \neq j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.76)$$

(Lembramos que a área de um triângulo no plano complexo com três lados z_i , é dada por: área = $\frac{1}{2} |\text{Im}(z_i z_j^*)|$, com $i \neq j$.) Ou seja, a área de todos os triângulos é idêntica.

Além disso, esta relação mostra que a área dos triângulos unitários quantifica a violação de CP; se CP fosse conservada os triângulos colapsariam em retas. Os triângulos sofrem rotações quando se redefinem as fases dos campos dos quarks, mas a área continua invariante. Observe-se que pode haver uma ambigüidade de sinal na determinação de J a partir da área devida à orientação global dos triângulos.

Podemos agora entender a Eq. (2.72), notando que os três lados do triângulo unitário da Eq. (2.74) têm exatamente comprimentos $|z_1| = a$, $|z_2| = b$ e $|z_3| = c$. Assim, vemos que $-4J^2 = \lambda(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2) = \lambda(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_1 + z_2|^2)$ é idêntico a $-4J^2 = -4[\text{Im}(z_1 z_2^*)]^2 = (z_1 z_2^* - z_1^* z_2)^2$, quando expandido em termos de z_1, z_2, z_1^*, z_2^* apenas.

É de interesse fenomenológico e teórico verificar se o triângulo da Eq. (2.74) realmente descreve a natureza. Em caso contrário novas fontes de violação de CP além do mecanismo de CKM poderão ser necessárias, abrindo uma janela para física além do MP. Um teste para checar a unitariedade da matriz CKM pode ser feito verificando a validade experimental da soma dos três ângulos internos do triângulo da Eq. (2.74) [10, 11],

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad (2.77)$$

onde

$$\alpha = \arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*}\right), \quad (2.78)$$

$$\beta = \arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*}\right), \quad (2.79)$$

$$\gamma = \arg\left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right). \quad (2.80)$$

2.2.2 Formalismo de comutadores

Podemos unificar todas as condições para violação de CP, a saber, a não degenerescência das massas e o não colapso dos triângulos unitários, através de

$$\det C \neq 0, \quad \text{onde } [\tilde{M}\tilde{M}^\dagger, MM^\dagger] = iC, \quad C^\dagger = C. \quad (2.81)$$

Explicitamente, a condição acima nos dá

$$\det C = -2J(m_t^2 - m_c^2)(m_c^2 - m_u^2)(m_u^2 - m_t^2)(m_b^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_d^2)(m_d^2 - m_b^2). \quad (2.82)$$

Se $M^\dagger = M$ e $\tilde{M}^\dagger = \tilde{M}$, e estas são positivo definidas, então deveríamos usar como medida de violação de CP a quantidade

$$\det C' = \det(-i[\tilde{M}, M])$$

$$= -2J(m_t - m_c)(m_c - m_u)(m_u - m_t)(m_b - m_s)(m_s - m_d)(m_d - m_b). \quad (2.83)$$

Mostraremos a seguir, que no MP podemos escolher as matrizes de massa M e \tilde{M} hermitianas sem perda de generalidade.

A prova dessas relações pode ser mostrada utilizando a teoria de matrizes. Primeiramente, nota-se que a matriz C é hermitiana, $C = C^\dagger$, e de traço nulo, $\text{Tr}C = 0$ (como qualquer traço de comutador). A Eq.(2.83) pode ser verificada utilizando uma identidade matricial válida para matrizes 3×3 sem traço (ver Ap. A.3)

$$\begin{aligned} \det C' &= \frac{1}{3} \text{Tr} C'^3 = \frac{(-i)^3}{3} \text{Tr}([\tilde{M}, M]^3) \\ &= i \text{Tr}[(\tilde{M}M)^2 M \tilde{M} - (M\tilde{M})^2 \tilde{M} M] \\ &= -2 \text{Im} \text{Tr}[\tilde{M}^2 M^2 \tilde{M} M] \\ &= -2 \text{Im} \text{Tr}[\text{diag}(\tilde{m}_i^2) V \text{diag}(m_i^2) V^\dagger \text{diag}(\tilde{m}_i) V \text{diag}(m_i) V^\dagger] \\ &= -2 \sum_{\alpha j \beta k} \text{Im}[\tilde{m}_\alpha^2 m_j^2 \tilde{m}_\beta m_k V_{\alpha j} V_{\beta j}^* V_{\beta k} V_{\alpha k}^*] \\ &= -2J \sum_{\gamma^l} \left(\sum_{\alpha j \beta k} \epsilon_{\alpha \beta \gamma} \epsilon_{j k l} \tilde{m}_\alpha^2 m_j^2 \tilde{m}_\beta m_k \right), \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde $\mathcal{U}_L M \mathcal{U}_R^\dagger = \text{diag}(m_i)$, $\tilde{\mathcal{U}}_L \tilde{M} \tilde{\mathcal{U}}_R^\dagger = \text{diag}(\tilde{m}_i)$, $\tilde{\mathcal{U}}_L \mathcal{U}_L^\dagger = V$ e os determinantes de Vandermonde nos dão o produto das diferenças de massas

$$\begin{aligned} \sum_{jkl=1}^3 \epsilon_{jkl} m_j^2 m_k &= \det \begin{pmatrix} m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} m_1^2 - m_2^2 & m_2^2 - m_3^2 & m_3^2 \\ m_1 - m_2 & m_2 - m_3 & m_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (m_2 - m_1)(m_3 - m_2)(m_1 - m_3). \end{aligned} \quad (2.85)$$

A prova da relação da Eq. (2.82) segue de forma análoga, trocando-se $M \rightarrow MM^\dagger$, $m_i \rightarrow m_i^2$ e efetuando as respectivas trocas para \tilde{M} e seus autovalores. Com a quantidade definida na Eq. (2.82) pode-se definir a noção de violação máxima de CP, embora a violação no MP não seja máxima segundo tal definição [ver Eq. (13.3) no artigo de C. Jarlskog da Ref. [25]].

Por último, dadas as interações de Yukawa na Eq. (2.17), podemos ver que as transformações horizontais antes da QES

$$Q_L \rightarrow \mathcal{U}_L Q_L, \quad (2.86)$$

$$D_R \rightarrow \mathcal{U}_R D_R, \quad U_R \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_R U_R, \quad (2.87)$$

representam uma mudança de variáveis (e deixam o restante da Lagrangiana do MP invariante) que não modifica o conteúdo físico da teoria e, por isso mesmo, deixa a quantidade na Eq. (2.82) invariante, pelas transformações induzidas

$$\begin{aligned} M &\rightarrow M' = \mathcal{U}_L^\dagger M \mathcal{U}_R, \\ \tilde{M} &\rightarrow \tilde{M}' = \mathcal{U}_L^\dagger \tilde{M} \tilde{\mathcal{U}}_R. \end{aligned} \quad (2.88)$$

As transformações horizontais das Eqs. (2.86) e (2.87) comutam com as transformações de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ e como a violação de CP é explícita no MP, sem fontes adicionais de violação provenientes da QES, a quantidade na Eq. (2.82) quantifica toda a violação de CP da teoria. Devido à arbitrariedade de \mathcal{U}_R e $\tilde{\mathcal{U}}_R$ na Eq. (2.88), podemos sempre escolhê-los de maneira a deixar as matrizes M e \tilde{M} ou os respectivos coeficientes de Yukawa hermitianos. Mais do que isso, podemos escolher as transformações na Eq. (2.88) de tal forma que, p. ex., a matriz de massa M seja diagonal. Tal liberdade mostra que muitos dos parâmetros de M e \tilde{M} são espúrios e não observáveis no MP, em concordância com o número de parâmetros físicos contidos no conhecimento de $\text{diag}(m_i)$, $\text{diag}(\tilde{m}_i)$ e V (CKM). Observe-se também que as transformações da Eqs. (2.86) e (2.87) mantêm a não invariância de CP nas interações de Yukawa, conservando o resto da Lagrangiana do MP invariante sob CP. São as transformações horizontais após a QES, não mais invariantes por $SU(2)_L$, que ao diagonalizarem as matrizes de massa dos quarks requerem que as transformações para os quarks d_{iL} (\mathcal{U}_L) sejam diferentes da transformação para os quarks u_{iL} ($\tilde{\mathcal{U}}_L$), transferindo a violação de CP do setor de Yukawa para as correntes carregadas. Esta análise para o MP pode ser também encontrada na Ref. [26].

2.3 A descrição do sistema $K^0-\bar{K}^0$ no MP

Após uma revisão da descrição fenomenológica para o sistema dos káons neutros, primeiro sistema no qual foi observada a violação de CP, calcularemos as Lagrangianas efetivas responsáveis pela transição $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ (equivalente a $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$) no MP, baseados nas Refs. [77] e [69, p. 235]. Será utilizada a nomenclatura da Ref. [77]. Para isso, basta calcular os diagramas das Figs. 2.1 (a), (b) e diagramas equivalentes substituindo-se os bósons W por bósons de Goldstone [77]. Há diagramas adicionais com correções gluônicas que poderiam concorrer com tais diagramas mas estimativas mostram que estas podem ser desprezadas [ver diagramas (c) e (d) na p. 235 da Ref. [69] e a discussão em seguida].

2.3.1 Fenomenologia

Revisaremos a descrição fenomenológica do sistema dos káons neutros $K^0-\bar{K}^0$.

Embora o MP seja o contexto natural para a descrição de todos os fenômenos envolvendo partículas elementares, os graus de liberdade fundamentais do MP, que interagem através das interações fortes, são os quarks dos quais são constituídos mésons e bárions, que são os estados físicos observáveis na natureza. Isso se deve ao fenômeno de confinamento no setor da QCD, que não permite o aparecimento de quarks livres na natureza. Tal fato complica enormemente a descrição dos fenômenos envolvendo hádrons (bárions e mésons) através do MP. Também por uma questão histórica, antes do advento da QCD, a descrição fenomenológica, mais próxima da linguagem da Mecânica Quântica não relativística, se mostra mais útil e efetivo na descrição do sistema dos káons neutros. A definição de vários parâmetros fenomenológicos como ϵ_K e ϵ' depende dessa descrição.

O sistema $K^0-\bar{K}^0$ também se mostra muito interessante para se estudar aspectos fundamentais de Mecânica Quântica. Como se trata de um sistema formado por partícula-antipartícula, as quais possuem a mesma massa, a cinemática do sistema é simples e permite, p. ex., o estudo do emaranhamento quântico (*entanglement*) e desigualdades de Bell para partículas massivas e com tempos de vida finitas [78, 79], diferentemente do sistema correlacionado de fótons comumente utilizado na ótica quântica.

Como os processos que violam CP devem envolver as três famílias de quarks, os efeitos de violação de CP nos káons são naturalmente pequenos porque tais processos, necessariamente, envolvem diagramas em *loops* devido à massa intermediária do quark s , pertencente à segunda família. A escala de massa intermediária também limita enormemente os canais possíveis de decaimento para os mésons K , se comparados aos mésons B , o que também explica a grande diferença entre os tempos de vida dos autoestados de vida curta (K_S) e longa (K_L), com $\tau_L/\tau_S \approx 580$, que decaem predominantemente em dois e três píons, respectivamente, devido à conservação aproximada de CP [80]. Por outro lado, para os mésons B_d , $\tau_L/\tau_S \approx O(1)$ enquanto que para os mésons B_s , $\tau_L/\tau_S \approx 1$ [80].

Considerando que os mésons K^0 e \bar{K}^0 devem misturar-se, pelo menos através do seu canal comum de decaimento em dois píons, podemos descrever o sistema de káons neutros como um sistema de dois níveis onde o estado geral pode ser escrito na forma [69, p.232]

$$|\psi(t)\rangle \equiv a(t)|K^0\rangle + b(t)|\bar{K}^0\rangle \equiv \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad (2.89)$$

cuja evolução temporal é ditada por

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \left(M - \frac{i}{2}\Gamma\right)|\psi(t)\rangle, \quad (2.90)$$

onde, até segunda ordem em teoria de perturbação, a quantidade entre parênteses é chamada de **matriz de massa** e é dada por

$$\begin{aligned} \left[M - \frac{i}{2}\Gamma \right]_{ij} &\equiv \frac{\langle i | \mathcal{H}_{\text{eff}} | j \rangle}{2m_K} \\ &= m_K^{(0)} \delta_{ij} + \frac{\langle i | \mathcal{H}_w | j \rangle}{2m_K} + \frac{1}{2m_K} \sum_n \frac{\langle i | \mathcal{H}_w | n \rangle \langle n | \mathcal{H}_w | j \rangle}{m_K^{(0)} - E_n + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

O fator $1/2m_K$ advém da normalização dos estados $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, $|1\rangle \equiv |K^0\rangle$ e $|2\rangle \equiv |\bar{K}^0\rangle$. Com o uso da identidade

$$\frac{1}{E \pm i\epsilon} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{E}\right) \mp i\pi\delta(E), \quad (2.92)$$

podemos ver que a parte absorptiva

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2m_K} \sum_n \langle i | \mathcal{H}_w | n \rangle \langle n | \mathcal{H}_w | j \rangle 2\pi\delta(E_n - m_K), \quad (2.93)$$

envolve somente estados intermediários físicos. As matrizes M e Γ são hermitianas e possuem a forma geral

$$M - \frac{i}{2}\Gamma = \begin{pmatrix} A & p^2 \\ q^2 & A \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

sendo A, p^2 e q^2 , em geral, complexos e que a igualdade dos elementos diagonais segue da invariância sob CPT: $\langle \bar{K}^0 | \mathcal{H}_{\text{eff}} | \bar{K}^0 \rangle = \langle \Theta K^0 | \mathcal{H}_{\text{eff}} | \Theta K^0 \rangle = \langle K^0 | \Theta^{-1} \mathcal{H}_{\text{eff}} \Theta | K^0 \rangle^* = \langle K^0 | \mathcal{H}_{\text{eff}} | K^0 \rangle$, onde $\Theta \equiv \mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{T}$ é o operador CPT que é antiunitário. Os estados $|K^0\rangle$ e $|\bar{K}^0\rangle$ são conectados pela operação de CP, cujos operadores serão denotados por \mathcal{C} e \mathcal{P} , respectivamente:

$$\mathcal{C} \mathcal{P} |K^0\rangle = \xi_K |\bar{K}^0\rangle, \quad |\xi_K| = 1. \quad (2.95)$$

Adotaremos como convenção $\xi_K = -1$ (pode-se adotar, p. ex., o valor oposto [81]). Da transformação acima concluímos prontamente que $p = q$ se a invariância sob CP fosse válida. Como esse não é o caso, a expansão dos estados físicos, autoestados da Hamiltoniana efetiva da Eq. (2.94), são dados por

$$|K_{L/S}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}} [p|K^0\rangle \pm q|\bar{K}^0\rangle], \quad (2.96)$$

e seus respectivos autovalores

$$M_{L/S} - \frac{i}{2}\Gamma_{L/S} = A \pm pq. \quad (2.97)$$

A expansão da Eq. (2.96) pode ser obtida através da normalização das colunas da matriz na Eq. (A.29), usando-se a correspondência $p^2 = b$, $q^2 = c$. Os rótulos L/S

se referem aos autoestados de vida longa (*long*) e vida curta (*short*). Devido a não hermiticidade da Hamiltoniana efetiva da Eq.(2.94), os autoestados não são ortogonais

$$\langle K_L | K_S \rangle = \frac{|p|^2 - |q|^2}{|p|^2 + |q|^2} \neq 0. \quad (2.98)$$

Antes da descoberta da minúscula violação de CP na natureza [1], pensava-se que os autoestados de vida curta e longa fossem, respectivamente, os autoestados par e ímpar por CP [4]

$$|K_{\pm}^0\rangle \equiv \frac{|K^0\rangle \mp |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.99)$$

que decaem, respectiva e predominantemente, nos estados de CP definido de dois píons (CP par) e três píons (CP ímpar), dentro da aproximação de CP conservada. Como o espaço de fase do primeiro canal é bem maior que o do segundo, o tempo de vida do primeiro é bem menor que o do segundo. No entanto, a expansão correta dos autoestados físicos deve levar em conta a correção devida à violação de CP,

$$|K_{\pm}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\bar{\epsilon}|^2}} [|K_{\pm}^0\rangle + \bar{\epsilon} |K_{\mp}^0\rangle], \quad (2.100)$$

onde

$$\frac{p}{q} = \frac{1 + \bar{\epsilon}}{1 - \bar{\epsilon}}, \quad (2.101)$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{p - q}{p + q} = \frac{i \operatorname{Im} M_{12} - i \operatorname{Im} \Gamma_{12}/2}{2 \operatorname{Re} M_{12} - i \operatorname{Re} \Gamma_{12}/2} \approx i \frac{\operatorname{Im} M_{12} - i \operatorname{Im} \Gamma_{12}/2}{\Delta M + \frac{i}{2} \Delta \Gamma}. \quad (2.102)$$

Foram utilizadas as definições das quantidades positivas $\Delta \Gamma \equiv \Gamma_S - \Gamma_L = \Gamma_S(1 - \tau_S/\tau_L) = 7,338 \cdot 10^{-12} \text{MeV}$ e $\Delta M \equiv M_L - M_S = (3,483 \pm 0,006) \cdot 10^{-12} \text{MeV}$ (ver p. 48 da Ref. [74]), e a aproximação $\Delta M + i\Delta\Gamma/2 = 2pq \approx 2\operatorname{Re}M_{12} - i\operatorname{Re}\Gamma_{12}$, válida quando $|\operatorname{Re}\Gamma_{12}| \gg |\operatorname{Im}M_{12}|$ e $|\operatorname{Re}M_{12}| \gg |\operatorname{Im}\Gamma_{12}|$. Note-se que $\Delta M/\Delta\Gamma \approx 1/2$ permite aproximar

$$\frac{i}{\Delta M + \frac{i}{2}\Delta\Gamma} \approx \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\Delta M}. \quad (2.103)$$

Uma medida da violação de CP advinda somente da contaminação do estado de CP par em K_L , que é predominantemente ímpar por CP, é dada pela assimetria no decaimento semileptônico

$$\delta_L \equiv \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu) - \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu})}{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu) + \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu})} \quad (2.104)$$

$$= \frac{|p|^2 - |q|^2}{|p|^2 + |q|^2} = \langle K_L | K_S \rangle \quad (2.105)$$

$$= \frac{2\operatorname{Re}\bar{\epsilon}}{1 + |\bar{\epsilon}|^2} \approx \frac{1}{4} \operatorname{Im} \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}. \quad (2.106)$$

Se CP fosse conservada, K_L seria autoestado de CP, os dois canais seriam conjugados por CP e a assimetria seria nula. Experimentalmente, temos $\delta_L = (3, 27 \pm 0, 12) \cdot 10^{-3}$ [11].

Agora, precisamos analisar a violação de CP nos canais de decaimento dos káons. Os estados de dois píons na onda S (momento angular orbital relativo nulo) $|\pi^0\pi^0\rangle$ e $|\pi^+\pi^-\rangle$ são pares por CP devido a $\mathcal{CP}|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle$ e $\mathcal{CP}|\pi^\pm\rangle = -|\pi^\mp\rangle$. Os estados de dois píons podem ser classificados de acordo com o isospin total, que é aproximadamente conservado pelas interações fortes, pela decomposição $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$, dos quais somente $\mathbf{0}$ e $\mathbf{2}$ são permitidos devido à simetria bosônica:

$$|\pi\pi : I = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[|\pi^+\rangle|\pi^-\rangle + |\pi^-\rangle|\pi^+\rangle - |\pi^0\rangle|\pi^0\rangle], \quad (2.107)$$

$$|\pi\pi : I = 2, I_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}[|\pi^+\rangle|\pi^-\rangle + |\pi^-\rangle|\pi^+\rangle + 2|\pi^0\rangle|\pi^0\rangle], \quad (2.108)$$

$$|\pi\pi : I = 2, I_3 = 2\rangle = |\pi^+\rangle|\pi^+\rangle, \quad (2.109)$$

$$|\pi\pi : I = 2, I_3 = -2\rangle = |\pi^-\rangle|\pi^-\rangle, \quad (2.110)$$

$$|\pi\pi : I = 2, I_3 = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\pi^+\rangle|\pi^0\rangle + |\pi^0\rangle|\pi^+\rangle], \quad (2.111)$$

$$|\pi\pi : I = 2, I_3 = -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\pi^-\rangle|\pi^0\rangle + |\pi^0\rangle|\pi^-\rangle]. \quad (2.112)$$

Na linguagem de Teoria Quântica de Campos (TQC), na qual todos os estados livres são gerados a partir da aplicação de operadores de criação, devemos efetuar as substituições $|\pi^0\rangle|\pi^0\rangle \rightarrow |\pi^0\pi^0\rangle$ e $(|\pi^+\rangle|\pi^-\rangle + |\pi^-\rangle|\pi^+\rangle) \rightarrow \sqrt{2}|\pi^+\pi^-\rangle = \sqrt{2}|\pi^-\pi^+\rangle$. Com isso, podemos efetuar a decomposição das amplitudes [ver Eqs. (43) e (44) da Ref. [82]]:

$$A(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) = \sqrt{\frac{2}{3}}A_0e^{i\delta_0} + \frac{1}{\sqrt{3}}A_2e^{i\delta_2}, \quad (2.113)$$

$$A(K^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}A_0e^{i\delta_0} + \sqrt{\frac{2}{3}}A_2e^{i\delta_2}, \quad (2.114)$$

$$A(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) = -\sqrt{\frac{2}{3}}A_0^*e^{i\delta_0} - \frac{1}{\sqrt{3}}A_2^*e^{i\delta_2}, \quad (2.115)$$

$$A(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) = \frac{1}{\sqrt{3}}A_0^*e^{i\delta_0} - \sqrt{\frac{2}{3}}A_2^*e^{i\delta_2}, \quad (2.116)$$

onde os rótulos $I = 0, 2$ se referem ao isospin total dos estados de dois píons, $A_I = \langle \pi\pi : I | \mathcal{H}_w | K^0 \rangle$ são as amplitudes de decaimento devidas às interações fracas e δ_I são os deslocamentos de fase na onda S , pares por CP, devidos às interações fortes. A parametrização das amplitudes com isospin definido pode ser escrita,

usando o teorema de Watson [69, p. 510][82], como:

$$\langle I|\mathcal{T}|K^0\rangle = A_I e^{i\delta_I}, \quad (2.117)$$

$$\langle I|\mathcal{T}|\bar{K}^0\rangle = -A_I^* e^{i\delta_I}. \quad (2.118)$$

Devemos, no entanto, tomar cuidado com redefinições de fase nos campos dos káons. Por exemplo, uma transformação de estranheza $e^{-i\lambda S}$ sobre os estados $|K^0\rangle$ e $|\bar{K}^0\rangle$ induz as fases

$$|K^0\rangle \rightarrow e^{i\lambda}|K^0\rangle, \quad |\bar{K}^0\rangle \rightarrow e^{-i\lambda}|\bar{K}^0\rangle, \quad (2.119)$$

e modificam as amplitudes de espalhamento

$$\frac{\text{Im}A_I}{\text{Re}A_I} \rightarrow \frac{\text{Im}A_I}{\text{Re}A_I} + \lambda, \quad (2.120)$$

quando $\lambda \ll 1$ e $\frac{\text{Im}A_I}{\text{Re}A_I} \ll 1$. Devemos, então, adotar definições invariantes de convenção de fase para os observáveis [83, 84]. Seguindo a Ref. [83], definimos a quantidade invariante por convenção de fases,

$$\eta_f \equiv \frac{\langle f|\mathcal{T}|K_L\rangle\langle K^0|K_S\rangle}{\langle f|\mathcal{T}|K_S\rangle\langle K^0|K_L\rangle}. \quad (2.121)$$

Da mesma forma, podemos definir as amplitudes (não observáveis) para o estado final de dois píons, classificado de acordo com o isospin

$$\eta_I \equiv \frac{\langle \pi\pi : I|\mathcal{T}|K_L\rangle\langle K^0|K_S\rangle}{\langle \pi\pi : I|\mathcal{T}|K_S\rangle\langle K^0|K_L\rangle}, \quad (2.122)$$

que tem como caso especial o parâmetro

$$\epsilon_K \equiv \eta_{I=0}. \quad (2.123)$$

Definimos também

$$\omega \equiv \frac{\langle \pi\pi : 2|\mathcal{T}|K_S\rangle}{\langle \pi\pi : 0|\mathcal{T}|K_S\rangle} = \frac{\text{Re}A_2}{\text{Re}A_0} \left[\frac{1 + i\bar{\epsilon}\xi_2}{1 + i\bar{\epsilon}\xi_0} \right], \quad (2.124)$$

que quantifica a regra $\Delta I = 1/2$, pois $|\omega| \approx |\text{Re}A_2/\text{Re}A_0| = 1/22, 2$. Definiu-se também $\xi_I \equiv \text{Im}A_I/\text{Re}A_I$. Podemos escrever:

$$\epsilon_K = \frac{\bar{\epsilon} + i\xi_0}{1 + i\bar{\epsilon}\xi_0} \approx \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \frac{\text{Im}M_{12} - i\text{Im}\Gamma_{12}/2}{\Delta M} + i\xi_0 \quad (2.125)$$

$$\approx \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\text{Im}M_{12}}{\Delta M} + \xi_0 \right] = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\text{Im}M_{12}}{\Delta M} + \frac{\text{Im}A_0}{\text{Re}A_0} \right], \quad (2.126)$$

onde foi utilizada a aproximação [69, p.240]

$$\text{Im}\Gamma_{12} \approx \xi_0 \Gamma_S \approx 2\xi_0 \Delta M, \quad (2.127)$$

devido à dominância do decaimento dos káons em dois píons com isospin nulo. Observe-se que $\bar{\epsilon}$ e ξ_I são dependentes de convenção de fase, mas a combinação que forma ϵ_K não. Escrita dessa forma, podemos ver que $\bar{\epsilon} + i\xi_0$ possui contribuições tanto da violação indireta de CP (na mistura $K^0-\bar{K}^0$), como da violação direta de CP (nos decaimentos). Pode-se definir também

$$\epsilon' \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\langle \pi\pi : 2 | \mathcal{T} | K_L \rangle}{\langle \pi\pi : 0 | \mathcal{T} | K_S \rangle} - \frac{\langle \pi\pi : 0 | \mathcal{T} | K_L \rangle \langle \pi\pi : 2 | \mathcal{T} | K_S \rangle}{\langle \pi\pi : 0 | \mathcal{T} | K_S \rangle \langle \pi\pi : 0 | \mathcal{T} | K_S \rangle} \right] \frac{\langle K^0 | K_S \rangle}{\langle K^0 | K_L \rangle} \quad (2.128)$$

$$= \frac{\omega}{\sqrt{2}} (\eta_2 - \eta_0) \quad (2.129)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} \omega (1 - \bar{\epsilon}^2) \frac{\xi_2 - \xi_0}{(1 - \bar{\epsilon}\xi_0)(1 - \bar{\epsilon}\xi_2)} \quad (2.130)$$

$$\approx \frac{i\omega e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\text{Im}A_2}{\text{Re}A_2} - \frac{\text{Im}A_0}{\text{Re}A_0} \right]. \quad (2.131)$$

Podemos ver que o parâmetro ϵ' quantifica genuinamente a violação direta de CP, com $\Delta S = 1$, sendo não nulo somente se existe diferença de fase nas amplitudes dos dois canais de decaimento para dois píons com isospin definido. Uma discussão de várias convenções adotadas para os parâmetros ϵ e ϵ' pode ser encontrada na Ref. [83].

A confrontação da fenomenologia e dados experimentais com o MP, ou modelos de física nova, requer ferramentas de cálculo mais sofisticadas como a aplicação da teoria de perturbação quiral ou o uso de QCD na rede. Uma revisão da aplicação da teoria de perturbação quiral para o sistema dos káons pode ser encontrada na Ref. [82]. A aplicação de Lagrangianas efetivas para a confrontação com a teoria eletrofraca e procura de física nova pode ser encontrada na Ref. [85]. Em geral, como no caso dos káons, a parte real das amplitudes de decaimento $\text{Re}A_I$ pode ser obtida de experimentos, enquanto a parte imaginária tem que ser calculada utilizando o MP. A extração precisa dos elementos da matriz CKM depende crucialmente da calculabilidade dos observáveis: muitos fenômenos envolvendo hádrons ainda apresentam sérias dificuldades relacionadas à pobre calculabilidade da QCD a baixas energias, principalmente no sistema dos káons.

Dada a variedade de possíveis fenômenos que violam CP, tanto no sistema dos mésons K como nos mésons B , é interessante obter uma classificação para esses vários fenômenos. Podemos classificá-los em violação de CP (i) na matriz de mistura, (ii) nas amplitudes de decaimento e (iii) na interferência entre mistura e decaimento [80]. A terminologia violação *direta* e *indireta* de CP, mais comum no

sistema dos káons, pode ser definida da seguinte maneira: a violação indireta de CP refere-se aos efeitos que podem ser completamente atribuídos à mistura devido a M_{12} ; por outro lado, todos os efeitos, que não podem ser atribuídos à mistura e, explicitamente, requerem fases de violação de CP nas amplitudes de decaimento, são chamados de violação direta. Uma revisão dos fenômenos de violação de CP no sistema dos mésons B pode ser encontrada nas Refs. [80] e [86], inclusive a extração precisa do ângulo β , que pode ser diretamente relacionado a parâmetros na matriz CKM.

Por fim, ilustraremos uma propriedade geral de observáveis de violação de CP. Para quantificar a violação de CP do caso (ii), podemos generalizar a assimetria da Eq. (2.104) para qualquer decaimento $K \rightarrow f$ e seu conjugado sob CP, $\bar{K} \rightarrow \bar{f}$, na forma

$$\delta(K \rightarrow f) \equiv \frac{\Gamma(K \rightarrow f) - \Gamma(\bar{K} \rightarrow \bar{f})}{\Gamma(K \rightarrow f) + \Gamma(\bar{K} \rightarrow \bar{f})} \quad (2.132)$$

$$= \frac{|A(K \rightarrow f)|^2 - |A(\bar{K} \rightarrow \bar{f})|^2}{|A(K \rightarrow f)|^2 + |A(\bar{K} \rightarrow \bar{f})|^2} \quad (2.133)$$

$$= \frac{4 \sin(\xi_1 - \xi_2) \sin(\delta_1 - \delta_2)}{\left| \frac{A_1}{A_2} \right| + \left| \frac{A_2}{A_1} \right| + 4 \cos(\xi_1 - \xi_2) \cos(\delta_1 - \delta_2)}, \quad (2.134)$$

quando

$$A(K \rightarrow f) = |A_1| e^{i\xi_1} e^{i\delta_1} + |A_2| e^{i\xi_2} e^{i\delta_2}, \quad (2.135)$$

$$A(\bar{K} \rightarrow \bar{f}) = -|A_1| e^{-i\xi_1} e^{i\delta_1} - |A_2| e^{-i\xi_2} e^{i\delta_2}. \quad (2.136)$$

Isso ilustra a propriedade geral de que a violação de CP só é observável em processos que contenham tanto fases pares por CP quanto fases ímpares por CP. Apenas uma delas não é suficiente: no caso do decaimento do K^0 em dois píons, a diferença nos deslocamentos de fase forte nos dois estados de isospin total é essencial, apesar da interação forte conservar CP.

2.3.2 Troca de dois W

Primeiramente, calcularemos o diagrama de caixa (a) da Fig.2.1 onde há troca de dois bósons W .

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}^{WW} = & \sum_{ij=ust} C_{ij} \bar{v}_s(p_2) \gamma^\mu L(\not{k} + \not{p}_1 + m_i) \gamma^\nu L u_d(p_1) \\ & \times \bar{u}_s(q_1) \gamma^\alpha L(\not{k} + \not{q}_1 + m_j) \gamma^\beta L v_d(q_2) \\ & \times D(k + p_1, m_i) D(k + q_1, m_j) \end{aligned}$$

$$\times D_{\mu\beta}(k + p_1 + p_2, m_W; \xi) D_{\nu\alpha}(k, m_W; \xi) \quad (2.137)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{ij=ust} C_{ij} 4(R(k + m_d)) [(k + m_s)L] D_{ij}^4 \quad (2.138)$$

$$\stackrel{(**)}{=} \sum_{ij=ust} C_{ij} (\gamma^\mu L) [\gamma_\mu L] \frac{1}{m_W^2} \frac{i}{(4\pi)^2} g_1 \left(\frac{m_i^2}{m_W^2}, \frac{m_j^2}{m_W^2} \right), \quad (2.139)$$

onde, $C_{ij} = (g/\sqrt{2})^4 V_{is}^* V_{id} V_{js}^* V_{jd}$,

$$D_{ij}^4 \equiv D(k + p_1, m_i) D(k + q_1, m_j) D(k + p_1 + p_2, m_W) D(k, m_W), \quad (2.140)$$

e a integração $[(2\pi)^{-4} \int d^4k]$ sobre o momento interno k , implícita nas Eqs. (2.137) e (2.138), nos dá

$$\int \widehat{d}k k^\mu k^\nu D_{ij}^4 \Big|_{p_i=q_i=0} = \frac{g^{\mu\nu}}{4} B_4(0; m_i, m_j, m_W, m_W; k^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{4m_W^2} \frac{i}{(4\pi)^2} g_1 \left(\frac{m_i^2}{m_W^2}, \frac{m_j^2}{m_W^2} \right), \quad (2.141)$$

onde a função (funcional) B_4 é definida na Eq. (A.37) e a função g_1 é definida na Eq. (A.57). Os propagadores utilizados na Eq. (2.137) são, exceto por fatores $(\pm i)$,

$$D(p, m) \equiv \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.142)$$

$$D_{\mu\nu}(p, m; \xi) \equiv \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + i\epsilon}) + \xi \frac{1}{p^2 - \xi m^2 + i\epsilon} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + i\epsilon}, \quad (2.143)$$

$$D_{\mu\nu}(p, m) \equiv D_{\mu\nu}(p, m; 1) = g_{\mu\nu} D(p, m). \quad (2.144)$$

A notação () [] também utilizada no Ap. G indica que não estamos interessados nos espinores explícitos (partícula ou antipartícula) mas somente nos bilineares de Dirac aos quais estão contraídos; são estes que ditam a estrutura operatorial na Lagrangiana efetiva, que levará em conta todas as contribuições (*crossing symmetry*). A definição explícita dos propagadores e vértices que aparecem nas regras de Feynman utilizadas aqui pode ser encontrada no Ap. A.6. Nas equações acima foram utilizadas as seguintes restrições ou aproximações indicadas por: ^(*) $\xi = 1$ (gauge de Feynman), Eq. (A.7) e as equações de movimento livre dos quarks externos; ^(**) limite de momentos e massas nulas para os quarks externos. Já que o diagrama (b) leva ao mesmo resultado final dentro das mesmas aproximações, as contribuições dos diagramas (a) e (b) podem ser de fato gerados pela Lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}_{\text{ef}}^{WW} = -\frac{1}{4} \mathcal{M}^{WW(a)}|_{\text{op}} - \frac{1}{4} \mathcal{M}^{WW(b)}|_{\text{op}} = -\frac{1}{2} \mathcal{M}^{WW(a)}|_{\text{op}} \quad (2.145)$$

$$= \sum_{ij=ust} \frac{G_F}{\sqrt{2}} \chi V_{is}^* V_{id} V_{js}^* V_{jd} 2E_{\square}^{(a)}(x_i, x_j) (\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2. \quad (2.146)$$

Lembramos que

$$\frac{C_{ij}}{(4\pi)^2 m_W^2} = 2 \frac{G_F}{\sqrt{2}} \chi V_{is}^* V_{id} V_{js}^* V_{jd} = 8 \frac{G_F^2}{(4\pi)^2} m_W^2 V_{is}^* V_{id} V_{js}^* V_{jd}, \quad (2.147)$$

provém das relações $\frac{g^2}{2} = 2\sqrt{2}G_F m_W^2$, $g^2 = e^2/\sin^2\theta_W = 4\pi\alpha/\sin^2\theta_W$ e $\chi \equiv \frac{\alpha}{4\pi\sin^2\theta_W}$. Note-se que devido à forma do operador de quatro férmions ser o produto de dois operadores iguais, $\bar{s}_L\gamma^\mu d_L$, existem quatro maneiras de se contrair tal operador com dois anti-quarks d e dois quarks s : duas contrações idênticas que levam à contribuição do diagrama (a) e outras duas contrações idênticas levam à contribuição do diagrama (b); o fator 1/2 da Eq. (2.145) é compensado e obtemos efetivamente a soma das contribuições dos diagramas (a) e (b), usando a Lagrangiana efetiva acima. Para assegurar que os coeficientes da Lagrangiana efetiva da Eq. (2.146) estão corretos podemos refazer os cálculos no espaço de coordenadas diretamente da Lagrangiana eletrofraca, sem fazer menção a nenhum diagrama. Tal procedimento é ilustrado na Sec. 2.3.5.

A função $E_{\square}^{(a)}$ está definida na Ref. [77] e é dada por

$$E_{\square}^{(a)}(x, y) = \frac{1}{2} g_1(x, y). \quad (2.148)$$

A Ref. [77], contudo, contém um sinal global (-) em relação ao resultado acima porém, este é corrigido na respectiva errata [77]. Inami e Lim invertem o sinal das funções g_0 [Eq. (A.58)] e g_1 [Eq. (A.57)] na sua errata mas aqui optamos por inverter o sinal das funções E_{\square} . Esse sinal se propaga em todas as funções de caixa a seguir:

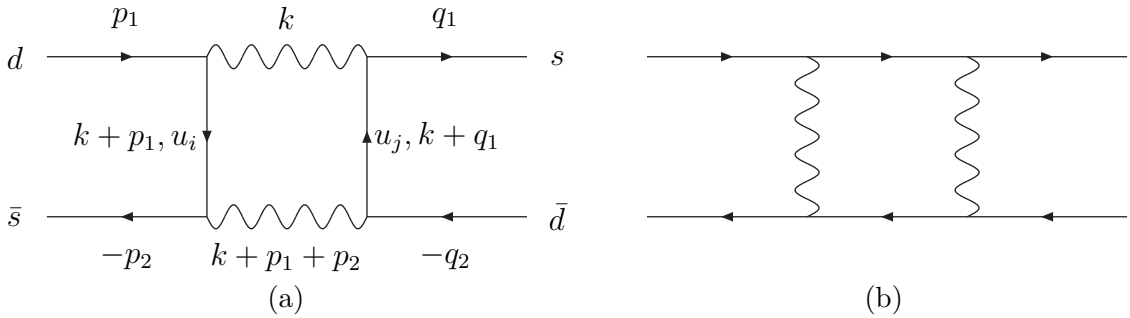


Figura 2.1: Diagramas de caixa com a troca de dois bósons W .

2.3.3 Bósons de Goldstone

A contribuição dos bósons de Goldstone pode não ser desprezível quando a massa dos férmions virtuais que circulam no diagrama de caixa não são pequenas, comparadas com a massa do bóson vetorial (neste caso, m_W). Esse comportamento viola o

teorema de Appelquist-Carrazzone (AC) [87] devido à quebra espontânea de simetria que gera vértices proporcionais à massa do férmion virtual para o bóson de Goldstone. É importante notar que a necessidade de considerar a contribuição dos bósons de Goldstone surge porque estamos utilizando um gauge covariante, Eq.(2.143), para os bósons vetoriais. Caso utilizássemos o gauge unitário, a contribuição dos bósons de Goldstone não seria necessária mas, por outro lado, teríamos que lidar com a mistura de potências de perturbação nos momentos internos.

Se trocarmos um dos bósons W virtuais do diagrama (a) da Fig.2.1, p.ex., o bóson inferior, por um bóson de Goldstone carregado, obtemos a amplitude

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M}^{WG} &= \sum_{ij=ust} \frac{C_{ij}}{m_W^2} \bar{v}_s(p_2)(m_s L - m_i R)(\not{k} + \not{p}_1 + m_i)\gamma^\nu L u_d(p_1) \\
&\quad \times \bar{u}_s(q_1)\gamma^\alpha L(\not{k} + \not{q}_1 + m_j)(Rm_d - Lm_j)v_d(q_2)iD(k+p_1, m_i) \\
&\quad \times iD(k+q_1, m_j)D(k+p_1+p_2, \sqrt{\xi}m_W)D_{\nu\alpha}(k, m_W; \xi) \quad (2.149)
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(*)}{=} - \sum_{ij=ust} \frac{C_{ij}}{m_W^2} m_i^2 m_j^2 (\gamma^\mu L)[\gamma_\mu L] B_4(0; m_i, m_j, m_W, m_W; 1) . \quad (2.150)$$

Novamente em $(*)$ particularizamos para o gauge de Feynman ($\xi = 1$) e tomamos o limite de momentos e massas externas nulos.

A contribuição de dois diagramas do tipo (a) e dois do tipo (b) pode ser gerada pela Lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}_{\text{ef}}^{WG} = -2\frac{1}{2}\mathcal{M}^{WG}|_{\text{op}} \quad (2.151)$$

$$= \sum_{ij=ust} 2\frac{G_F}{\sqrt{2}} \chi V_{is}^* V_{id} V_{js}^* V_{jd} 2E_{\square}^{(b)}(x_i, x_j) (\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2 , \quad (2.152)$$

onde

$$E_{\square}^{(b)}(x_i, x_j) = -\frac{1}{2}x_i x_j m_W^4 \frac{(4\pi)^2}{i} B_4(0; m_i, m_j, m_W, m_W; 1) \quad (2.153)$$

$$= -\frac{1}{2}x_i x_j g_0(x_i, x_j) , \quad (2.154)$$

sendo $x_i \equiv m_i/m_W$ e $x_j \equiv m_j/m_W$.

Resta-nos calcular os diagramas de caixa com troca de dois bósons de Goldstone. Trocando os dois bósons W , por dois bóson de Goldstone, no diagrama (a) da Fig.2.1, obtemos a amplitude

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M}^{GG} &= \sum_{ij=ust} \frac{C_{ij}}{m_W^4} \bar{v}_s(p_2)(m_s L - m_i R)(\not{k} + \not{p}_1 + m_i)(m_d R - m_i L)u_d(p_1) \\
&\quad \times \bar{u}_s(q_1)(m_s L - m_j R)(\not{k} + \not{q}_1 + m_j)(Rm_d - Lm_j)v_d(q_2)D(k+p_1, m_i)
\end{aligned}$$

$$\times D(k + q_1, m_j) D(k + p_1 + p_2, \sqrt{\xi} m_W) D_{\nu\alpha}(k, m_W; \xi) \quad (2.155)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{ij=ust} \frac{C_{ij}}{m_W^4} m_i^2 m_j^2 (\gamma^\mu L) [\gamma_\mu L] \frac{1}{4} B_4(0; m_i, m_j, m_W, m_W; k^2). \quad (2.156)$$

Novamente em $(*)$ particularizamos para o gauge de Feynman ($\xi = 1$) e tomamos o limite de momentos e massas externas nulos.

A respectiva Lagrangiana efetiva é

$$\mathcal{L}_{\text{ef}}^{GG} = -\frac{1}{2} \mathcal{M}^{GG}|_{\text{op}} \quad (2.157)$$

$$= \sum_{ij=ust} \frac{G_F}{\sqrt{2}} \chi V_{is}^* V_{id} V_{js}^* V_{jd} 2E_{\square}^{(d)}(x_i, x_j) (\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2, \quad (2.158)$$

onde

$$E_{\square}^{(d)}(x, y) = \frac{1}{8} xy m_W^2 \frac{(4\pi)^2}{i} B_4[k^2] \quad (2.159)$$

$$= xy \frac{1}{8} g_1(x, y). \quad (2.160)$$

2.3.4 Lagrangiana efetiva para $K^0 - \bar{K}^0$

A soma de todas as contribuições dos diagramas de caixa das Figs. 2.1 (a) e (b) com troca de dois bósons W , dois bósons de Goldstone G , e um bóson G e um bóson W , resulta em:

$$\mathcal{L}_{ds} = -\frac{i}{2} \sum_{ij=uct} C_{ij} B_4(0; m_i, m_j, m_W, m_W; k^2(1 + \frac{1}{4}) - 2m_W^2 x_i x_j) (\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2 \quad (2.161)$$

$$= \sum_{ij=uct} \frac{C_{ij}}{(4\pi)^2 m_W^2} \frac{1}{2} E_{\square}(x_i, x_j) (\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2 \quad (2.162)$$

$$= \sum_{ij=ct} \frac{C_{ij}}{(4\pi)^2 m_W^2} \frac{1}{2} \bar{E}(x_i, x_j) (\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2 \quad (2.163)$$

$$= \frac{G_F^2}{(4\pi)^2} m_W^2 [(V_{cd}^* V_{cs})^2 \bar{E}(x_c, x_c) + (V_{td}^* V_{ts})^2 E_{\square}(x_t, x_t) + 2(V_{cd}^* V_{cs} V_{td}^* V_{ts}) \bar{E}(x_c, x_t)] 4(\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2, \quad (2.164)$$

onde foram utilizadas as definições

$$E_{\square}(x, y) \equiv [(1 + \frac{1}{4}xy)g_1(x, y) - 2xyg_0(x, y)] \quad (2.165)$$

$$= -\frac{1}{x-y} \left\{ \frac{x^2}{(x-1)^2} \left[1 - 2y + \frac{1}{4}xy \right] \ln x - (x \leftrightarrow y) \right\}$$

$$-\frac{1}{(x-1)(y-1)}\left[1 - \frac{7}{4}xy\right], \quad (2.166)$$

$$\bar{E}(x, y) \equiv E_{\square}(x, y) - E_{\square}(x, 0) - E_{\square}(0, y) + E_{\square}(0, 0) \quad (2.167)$$

$$= -xy \left\{ \frac{1}{x-y} \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right] \ln x + (x \leftrightarrow y) - \frac{3}{4} \frac{1}{(x-1)(y-1)} \right\}, \quad (2.168)$$

$$E_{\square}(x, 0) = - \left[\frac{1}{1-x} + \frac{x}{(x-1)^2} \ln x \right] = E_{\square}(0, x) \quad (2.169)$$

$$E_{\square}(0, 0) = -1. \quad (2.170)$$

A Eq. (2.165) é idêntica à Eq. (C.7) da Ref. [77] com uma troca de sinal global; a expressão explícita é mostrada na Eq. (2.166) para evitar confusão. A Eq. (2.167) é idêntica à Eq. (2.12) da Ref. [77], que tem a forma dada devida a $x_u = m_u^2/m_W^2 \approx 0$ e ao uso da unitariedade de V para escrever a contribuição do quark u em termos das contribuições dos quarks c e t .

Podemos comparar o resultado da Eq. (2.164) com o resultado encontrado na p. 235 da Ref. [69] sem correções de curto alcance da QCD ($\eta_i = 1$):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ds} = & \frac{G_F^2}{(4\pi)^2} m_W^2 [(V_{cd}^* V_{cs})^2 x_c H(x_c) + (V_{td}^* V_{ts})^2 x_t H(x_t) \\ & + 2(V_{cd}^* V_{cs} V_{td}^* V_{ts}) x_c \bar{G}(x_c, x_t)] 4(\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2, \end{aligned} \quad (2.171)$$

onde

$$H(x) = \left[\frac{1}{4} + \frac{9}{4} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-x)^2} \right] - \frac{3}{2} \frac{x^2}{(1-x)^3} \ln(x) \quad (2.172)$$

$$= \lim_{y \rightarrow x} \bar{G}(x, y), \quad (2.173)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}(x, y) = & y \left[-\frac{1}{y-x} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4} \frac{1}{(1-x)^2} \right) \ln x \right. \\ & \left. + (y \leftrightarrow x) - \frac{3}{4} \frac{1}{(1-x)(1-y)} \right]. \end{aligned} \quad (2.174)$$

Devido à igualdade $x\bar{G}(x, y) = -\bar{E}(x, y)$, podemos ver que o resultado da Eq. (2.164) está de acordo com o resultado da Eq. (2.171). Essas funções são idênticas às encontradas na p. 319 da Ref. [88], com a correspondência $S(x, y) = x\bar{G}(x, y)$ e $S(x) = xH(x)$. Sendo $x_c \ll 1$, pode-se expandir as funções acima em x_c mantendo somente as termos de ordem x_c e $x_c \ln x_c$ (ver as funções S_0 na p. 25 da Ref. [85]). Um detalhe importante que deve ser mencionado é o fato que a soma de todos os diagramas de caixa independe da escolha do gauge, i.e., do parâmetro ξ [77].

Agora estamos em posição para calcular aproximadamente a diferença de massa ΔM dos káons [69, p.238]

$$\Delta M \approx 2\text{Re}M_{21} = \text{Re} \frac{\langle \bar{K}^0 | \mathcal{H}_{\text{eff}} | K^0 \rangle}{m_K} \approx \frac{G_F^2}{16\pi} m_c^2 \text{Re}(V_{cd}^* V_{cs})^2 \frac{\langle \bar{K}^0 | 4(\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2 | K^0 \rangle}{m_K}, \quad (2.175)$$

onde o último elemento de matriz envolve cálculos não perturbativos, mas pode ser estimado usando-se o método de inserção do vácuo (ver Ap. C da Ref. [66]):

$$\frac{\langle \bar{K}^0 | 4(\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)^2 | K^0 \rangle}{m_K} = \frac{8}{3} f_K^2 m_K. \quad (2.176)$$

Em geral, o valor real é parametrizado multiplicando-se o valor acima por um parâmetro B_K [69, p.236], que deve ser extraído aplicando-se as técnicas da teoria de perturbação quiral ou de cálculos de QCD na rede. Uma predição teórica precisa para ΔM é limitada por efeitos não calculáveis de longa distância, que podem ser tão grandes quanto os efeitos de curta distância calculados nas seções anteriores [69, p.238]. Desse modo, é costumeiro utilizar o valor experimental de ΔM nos cálculos dos efeitos de violação de CP. Valores atualizados do parâmetro B_K , levando em conta correções da QCD e grupo de renormalização, podem ser encontrados na Ref. [89]. Na mesma referência, expressões para os parâmetros ϵ_K e ϵ' , calculados no MP, podem ser encontrados. O parâmetro ϵ_K , por exemplo, pode ser estimado pela relação da Eq. (2.126), calculando-se $\text{Im}M_{12}$ e desprezando-se o termo contendo $\text{Im}A_0$. Abordagens para calcular quantidades não perturbativas que entram na razão dos parâmetros, ϵ'/ϵ_K , podem ser encontradas na Ref. [90].

2.3.5 Cálculo no espaço de coordenadas

Calcularemos, novamente nesta seção, a Lagrangiana efetiva na Eq. (2.146) utilizando um procedimento diferente, mas equivalente, daquele utilizado nas seções anteriores. Obteremos a Lagrangiana efetiva diretamente da Lagrangiana da corrente carregada eletrofraca

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} V_{ij} : \bar{u}_i \gamma^\mu L d_j W_\mu^+ : + h.c. \equiv \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^\dagger. \quad (2.177)$$

Como estamos interessados em encontrar a Lagrangiana efetiva responsável pelas contribuições da Fig. 2.1, dentro da aproximação de quarks livres, i.e., sem correções da QCD, precisamos considerar somente a Lagrangiana acima. Obviamente se também quiséssemos levar em conta a troca dos bósons de Goldstone, teríamos de incluir a Lagrangiana correspondente.

A idéia principal consiste em calcular a contribuição real da Lagrangiana da Eq. (2.177) responsável pelas transições da Fig. 2.1, e usar uma aproximação que leve

em conta o curto alcance da interação fraca, representada pelas trocas de bósons W e de quarks tipo u virtuais. Mais precisamente, curto alcance, neste caso, quer dizer curto em relação à escala característica dos mésons K (p. ex., $m_K^{-1}, \Lambda_{\text{QCD}}^{-1} \gg m_W^{-1}$). Desse modo, os diagramas da Fig. 2.1 são responsáveis pela transição $K^0-\bar{K}^0$, mas seus efeitos de curto alcance podem ser apropriadamente modelados pela Lagrangiana efetiva local da Eq. (2.146).

Vejam os como as idéias mencionadas acima se refletem nos cálculos. A contribuição em mais baixa ordem responsável pelos diagramas da Fig. 2.1 é de quarta ordem na Lagrangiana da Eq. (2.177) e, devido à sua forma particular, somente os termos mistos, a seguir, contribuem na matriz S :

$$\begin{aligned} \frac{i^4}{4!} T \langle \mathcal{L}_{CC} \rangle^4 &= \frac{i^4}{4!} T \langle \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^\dagger \rangle^4 \\ &\rightarrow \frac{i^4}{4!} 3! T \langle \mathcal{L}_1 \rangle^2 \langle \mathcal{L}_1^\dagger \rangle^2 \\ &= \frac{1}{4} T \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \mathcal{L}_1(x_1) \mathcal{L}_1(x_2) \mathcal{L}_1^\dagger(x_3) \mathcal{L}_1^\dagger(x_4) . \end{aligned} \quad (2.178)$$

O símbolo $\langle \ \rangle$ indica integração nas variáveis espaço-temporais. A expressão da Eq. (2.178) contém, via teorema de Wick, todas as combinações de operadores em ordem normal e contraídos [91, p.181]. Contudo, estamos interessados somente nos termos com os dois bosóns W^+ , contraídos com dois bosóns W^- , e dois quarks tipo u , contraídos com dois antiquarks tipo u :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} T \langle \mathcal{L}_1 \rangle^2 \langle \mathcal{L}_1^\dagger \rangle^2 &\rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^4 V_{ji} V_{jk}^* V_{j'i'} V_{j'k'}^* T \langle : \bar{d}_k(2) \gamma^\nu LS(2-3; m_j) \gamma^{\mu'} L d_i(3) \\ &\quad \times \bar{d}_{k'}(4) \gamma^{\nu'} LS(4-1; m_{j'}) \gamma^\mu L d_{i'}(1) \\ &\quad \times D_{\mu\nu}(1-2) D_{\nu'\mu'}(3-4) : \rangle_{1234} , \end{aligned} \quad (2.179)$$

onde as variáveis x_i estão agora representadas simplesmente pelos números $i = 1, 2, 3, 4$.

Neste ponto é que podemos efetuar a aproximação de longo alcance mencionada anteriormente. Para isso realizamos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2}, & \delta x &= x_1 - x_2, & x_1 &= X + \delta X/2 + \delta x/2, \\ \bar{y} &= \frac{x_3 + x_4}{2}, & \delta y &= x_3 - x_4, & x_2 &= X + \delta X/2 - \delta x/2, \\ X &= \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, & \delta X &= \bar{x} - \bar{y}, & x_3 &= X - \delta X/2 + \delta y/2, \\ & & & & x_4 &= X - \delta X/2 - \delta y/2. \end{aligned} \quad (2.180) \quad (2.181)$$

As novas variáveis independentes são $\{X, \delta X, \delta x, \delta y\}$, para as quais o jacobiano é unitário. Após essa mudança de variáveis, vê-se que somente os campos dos quarks d_i dependem da variável central X , enquanto todas as outras funções dependem apenas de $\delta X, \delta x$ e δy . Então, a aproximação de longo alcance para os operadores consiste em expandir os campos na Eq. (2.179) em torno de X . O primeiro termo da expansão, $d(x_i) \approx d(X)$, nos leva a Lagrangiana efetiva da Eq. (2.146) através da relação

$$i \int dX \mathcal{L}_{\text{eff}}(X) = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^4 V_{ji} V_{jk}^* V_{j'i'} V_{j'k'}^* C_{jj'} \times T \int dX : (\bar{d}_k(X))_\alpha (d_i(X))_\beta (\bar{d}_{k'}(X))_{\alpha'} (d_{i'}(X))_{\beta'} : , \quad (2.182)$$

onde $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ são índices espinoriais, também presentes em $C_{jj'}$, mas omitidos. Esse coeficiente é dado por

$$\begin{aligned} C_{jj'} &= \int d\delta X d\delta x d\delta y (\gamma^\nu LS(\delta X - \delta x/2 - \delta y/2; m_j) \gamma^{\mu'} L)_{\alpha\beta} \\ &\quad \times (\gamma^{\nu'} LS(-\delta X - \delta x/2 - \delta y/2; m_{j'}) \gamma^\mu L)_{\alpha'\beta'} D_{\mu\nu}(\delta x) D_{\nu'\mu'}(\delta y) \\ &= \int \widehat{d}p (\gamma^\nu LS(p; m_j) \gamma^{\mu'} L)_{\alpha\beta} (\gamma^{\nu'} LS(p; m_{j'}) \gamma^\mu L)_{\alpha'\beta'} D_{\mu\nu}(p; m_W^2) D_{\nu'\mu'}(p; m_W^2). \end{aligned} \quad (2.183)$$

O coeficiente na Eq. (2.183) é exatamente o mesmo coeficiente na Eq. (2.137), no limite de momentos externos nulos. Após simplificações algébricas, particularização para o gauge de Feynman, $(k, i) = (k', i') = (s, d)$ e integração no momento, obtaremos a mesma Lagrangiana efetiva da Eq. (2.146).

Como observações finais, deve-se dizer que os termos subseqüentes da aproximação dão origem a operadores de dimensão maior. Às vezes, os termos subseqüentes da expansão devem ser calculados se o primeiro termo é pequeno ou nulo. Tal expansão exemplifica uma expansão de produto de operadores (OPE)[85, 92].

Capítulo 3

Outros mecanismos de violação de CP

A fim de analisar outros possíveis mecanismos para a implementação da violação de CP, precisamos revisar novamente a estrutura geral das Lagrangianas de teorias de gauge contendo férmions (f), escalares (H) e bósons de gauge (G). Tais Lagrangianas podem ser escritas em nível clássico da seguinte forma geral:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(f, G) + \mathcal{L}(H, G) + \mathcal{L}(G) + \mathcal{L}(f, H) - \mathcal{V}(H). \quad (3.1)$$

Os primeiros dois termos correspondem às Lagrangianas contendo os termos cinemáticos e interação via acoplamento mínimo para os férmions e escalares, respectivamente. O terceiro termo corresponde ao setor de puro gauge, o quarto às interações de Yukawa e o último ao potencial escalar. Pode-se mostrar que os três primeiros termos são sempre invariantes por CP [22] enquanto os dois últimos são os setores que possivelmente violam CP em nível Lagrangiano*. Para o setor eletrofraco do MP, Eq. (3.1), antes da QES, somente o termo de Yukawa $\mathcal{L}(f, H)$ viola CP. O potencial escalar $\mathcal{V}(H)$ é CP invariante devido à simetria de gauge e presença de apenas um dubleto de Higgs. Em extensões do MP, p.ex., com dois dubletos de Higgs, já é possível implementar a violação de CP no potencial escalar [13, 19]. Nesse caso, a violação de CP pode ter duas origens: a violação explícita [19] ou a violação espontânea [13]. Modelos que implementam violação espontânea de CP (VECP) são muito atrativos, comparados com modelos com violação explícita, porque conseguem explicar a violação de uma simetria discreta da mesma forma que simetrias de gauge contínuas são quebradas pelo mecanismo de QES. Além disso, se toda violação de CP adviesse do setor escalar, a pequena violação de CP na natureza seria explicada pela grande escala de massa dos escalares responsáveis pela violação [15, 16]. Contudo, os modelos mínimos, onde toda a violação de CP provém do setor escalar, foram descartados por gerar uma violação direta de CP bem maior

*Em teorias de gauge quantizadas existe a possibilidade para os termos do tipo $F\tilde{F} \equiv \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$ [23] em $\mathcal{L}(G)$ que estamos desconsiderando aqui.

que a observada [93, 94, 95].

Desse modo, os fenômenos de mistura de sabor e violação de CP, tanto no MP como em outros modelos, como os com N dubletos de Higgs, são conseqüências da presença de espaços horizontais, i.e., da replicação de multipletos de gauge, fermiônicos ou escalares. No MP, os espaços horizontais são constituídos pelas três famílias de quarks do tipo *up* e do tipo *down* (após QES), enquanto que em modelos com N dubletos de Higgs são os mesmos que formam o espaço horizontal (antes da QES). Ao mesmo tempo, os espaços horizontais mascaram as propriedades de CP dos modelos devido à possibilidade de “rotação” nesses espaços. No MP, são rotações desse tipo que são responsáveis pela transferência da violação de CP das interações de Yukawa para as interações de corrente carregada, após a quebra espontânea de simetria e a diagonalização das matrizes de massa dos quarks. Nesse caso, nem todas as fases complexas da matriz CKM são físicas, devido à possibilidade de redefinir os campos dos quarks por fases (refase), como na Eq. (2.49). Contudo, os fenômenos observáveis não devem depender de tais convenções, de modo que os observáveis devem ser invariantes de refase. Um único invariante de refase que quantifica a violação de CP na matriz CKM é o chamado invariante de Jarlskog [25, 24] mostrado na Eq. (2.66). Contudo, invariantes por transformações horizontais gerais, nas três famílias de quarks, também podem ser definidas através de comutadores [25] (Sec. 2.2.2); as transformações de refase formam apenas um subgrupo de tais transformações horizontais. Assim, é fácil imaginar que invariantes de transformações horizontais também possam ser definidos em outros contextos onde há presença de espaços horizontais, tais como o modelo com N dubletos de Higgs.

Devemos também mencionar que a violação de CP pode ser induzida radiativamente, cujo mecanismo é conhecido como violação radiativa de CP [96, 97, 98]. Nesse esquema, a violação de CP é induzida por correções quânticas embora, em nível lagrangiano, CP seja uma boa simetria. Apesar de ser uma idéia muito interessante, esse mecanismo é de difícil implementação fenomenológica porque este requer a presença de escalares não massivos que não são bósons de Goldstone. Assim sendo, esse mecanismo não será abordado aqui.

Ilustraremos na Sec. 3.1 a idéia geral da violação espontânea de CP. Em particular, na Sec. 3.1.1, revisaremos o primeiro modelo de VECP proposto por T. D. Lee [13]. Em seguida, trataremos de extensões do MP com 2, 3 (Sec. 3.1.2) e N (Sec. 3.1.3) dubletos de Higgs, que podem conter mecanismos adicionais de violação de CP no setor escalar, implementados explícita ou espontaneamente. Para o caso geral com N dubletos de Higgs estudaremos a íntima relação entre mistura de sabor, violação de CP e espaços horizontais. Nesse contexto, estudaremos como trans-

formações generalizadas de CP podem depender das transformações horizontais e podem ser vistas como automorfismos do grupo de gauge. Também mostraremos que a noção de automorfismo pode ser muito útil para se determinar as propriedades sob CP de teorias contendo espaços horizontais e encontrar invariantes ímpares por CP que qualificam e quantificam a violação de CP. Na Sec. 3.2 revisaremos brevemente a noção de violação *soft* de simetrias e estudaremos um modelo particular, baseado no grupo de gauge $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$, e sua compatibilidade com os observáveis de violação de CP no sistema dos káons neutros. Tal modelo também implementa a idéia de que a violação de CP possa ser induzida pela troca de escalares (ou outras partículas externas ao MP mínimo), mas os processos que trocam sabor devem ser predominantemente descritos pelas interações de corrente carregada contendo uma matriz de mistura real.

3.1 Violação espontânea de CP (VECP)

Ilustraremos, nesta seção, a idéia da violação espontânea de CP (VECP), proposta por T. D. Lee [13]. Suponhamos uma teoria invariante por uma simetria de gauge G , possuindo escalares que quebram a simetria de gauge de G para $G' \subset G$ quando o multipletto escalar Φ , cuja representação pode ser redutível ou irredutível[†], adquire um valor esperado no vácuo não nulo, $\langle \Phi \rangle \neq 0$. Podemos distinguir duas classes de modelos com VECP, i.e., modelos com escalares Φ em representações de gauge (irredutíveis) (i) reais e (ii) complexos. Nos modelos (i), um único multipletto contendo uma componente neutra é capaz de implementar a VECP [13]. Nos modelos (ii), um único multipletto contendo um campo neutro complexo não é suficiente, pois, qualquer fase atribuída ao valor esperado do vácuo pode ser absorvida pela transformação de gauge, como acontece no MP. Dois ou mais campos neutros, pertencentes ou não às mesmas representações do grupo de gauge, são necessários [13]. Observamos, então, a íntima relação entre a implementação da VECP e a adição de multipletos escalares. Se existe mais de um multipletto escalar pertencente à mesma representação do grupo de gauge, i.e., possuindo os mesmos números quânticos, diremos que tais replicações de multipletos formam **espaços horizontais** [22]. Para o caso (i), ainda é possível construir modelos com VECP sem quebrar simetrias contínuas, mostrando que é possível desvincular o mecanismo de VECP da quebra espontânea de simetrias de gauge (QES) [13, b].

[†]Geralmente trabalhamos com representações irredutíveis e a presença de representações redutíveis é equivalente a dizer que existe mais de um multipletto correspondente a uma representação irredutível.

3.1.1 O modelo de Lee

O *toy model* a ser considerado será uma teoria com simetria de gauge abeliana $U(1)$ [13, a], contendo dois escalares complexos ϕ_1, ϕ_2 e um bóson de gauge B , que se transformam sob a simetria de gauge local como

$$\phi_a(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi_a(x), \quad a = 1, 2, \quad (3.2)$$

$$B_\mu(x) \rightarrow B_\mu(x) + g^{-1}\partial_\mu\alpha(x). \quad (3.3)$$

A Lagrangiana desse setor, então, é dada por

$$\mathcal{L} = (\mathbb{D}_\mu\phi_a)^\dagger\mathbb{D}^\mu\phi_a - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - V(\Phi), \quad (3.4)$$

onde

$$\mathbb{D}_\mu \equiv \partial_\mu + igB_\mu, \quad (3.5)$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (3.6)$$

O potencial escalar possui a forma

$$\begin{aligned} V(\Phi) = & \mu_1\phi_1^*\phi_1 + \mu_2\phi_2^*\phi_2 + A(\phi_1^*\phi_1)^2 + B(\phi_2^*\phi_2)^2 + C(\phi_1^*\phi_1)(\phi_2^*\phi_2) \\ & + \frac{1}{2}[(\phi_1^*\phi_2)(D\phi_1^*\phi_2 + E\phi_1^*\phi_1 + F\phi_2^*\phi_2) + h.c.], \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde os 8 parâmetros $\mu_1, \mu_2, A, \dots, F$ são todos reais, de modo que o potencial é obviamente invariante sob CP. No Ap.D [30], mostra-se que qualquer potencial invariante sob CP pode ser escrito nessa forma após uma mudança de variáveis apropriada, i.e., encontrando a base real ($\tilde{\Lambda}$ diagonal) e diagonalizando Y na Eq. (12) do mesmo apêndice. Observe-se que a Lagrangiana da Eq. (3.4) é invariante pelas simetrias discretas C e P

$$\begin{aligned} \phi_a & \xrightarrow{C} e^{i\alpha_C}\phi_a^*, \\ B_\mu & \xrightarrow{C} -B_\mu, \\ \phi_a(x) & \xrightarrow{P} e^{i\alpha_P}\phi_a(\hat{x}), \\ B_\mu(x) & \xrightarrow{P} (\tilde{I}B)_\mu(\hat{x}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

para quaisquer fases α_C e α_P comuns a ϕ_1 e ϕ_2 .

Para usar uma notação mais compacta, escrevemos os dois campos escalares em um multipletto redutível

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Devido à simetria de gauge podemos parametrizar os graus de liberdade de Φ nas formas

$$\Phi \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_1 e^{i\xi} \\ v_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 e^{i\xi} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

onde $v_a \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Qualquer Φ pode ser escrito nas formas acima, após alguma transformação de gauge. Convencionaremos a adoção da segunda parametrização na Eq. (3.10), embora a referência original use a primeira [13]. Temos, então, uma parametrização de Φ , em termos de duas variáveis não limitadas (v_a) e uma variável angular limitada ξ . Com essas variáveis, a Ref. [13] faz uma analogia do modelo com uma molécula triangular de lados v_1, v_2 e ângulo ξ entre eles, o que permite a associação dos graus de liberdade do modelo com os modos de vibração da molécula. É possível também utilizar uma parametrização com apenas uma variável não limitada (radial) e duas variáveis angulares.

Com ambas as parametrizações da Eq. (3.10) podemos escrever o potencial da Eq. (3.7) na forma

$$V(v_a, \xi) = \frac{1}{2}(\mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2) + \frac{1}{4}(p v_1^4 + q v_2^4 + 2r v_1^2 v_2^2) + \frac{1}{2} D v_1^2 v_2^2 (\cos \xi - \delta)^2, \quad (3.11)$$

onde

$$\begin{aligned} p &\equiv A - \frac{E^2}{8D}, & r &\equiv \frac{1}{2} \left(C - D - \frac{EF}{4D} \right), \\ q &\equiv B - \frac{F^2}{8D}, & \delta &\equiv -\frac{E v_1^2 + F v_2^2}{4D v_1 v_2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para que o potencial seja limitado por baixo, i.e., $V \rightarrow \infty$ quando $v_1, v_2 \rightarrow \infty$, é preciso que

$$p > 0, \quad q > 0, \quad pq > r^2. \quad (3.13)$$

A última condição garante que a matriz

$$\begin{pmatrix} p & r \\ r & q \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

seja positivo definida. Para $D > 0$, podemos ver que o mínimo angular (ξ) acontece quando

$$\cos \xi = \delta, \quad (3.15)$$

desde que $|\delta| \leq 1$. Nesse caso, a Eq. (3.15) possui duas soluções: para ξ e $-\xi$. Caso $|\delta| > 1$, o mínimo se situa em $\cos \xi = \delta/|\delta|$ enquanto o máximo se situa em $\cos \xi = -\delta/|\delta|$. Para $D < 0$, a condição da Eq. (3.15) representa um máximo, enquanto que os mínimos estão nas bordas do espaço de parâmetros que satisfaz

$|\cos \xi| \leq 1$, i.e., $\xi = 0$ ou $\xi = \pi$. Nos casos em que o mínimo está em $\xi = 0, \pi$ não há VECP e, por isso, $D > 0$ e $|\delta| < 1$ são condições necessárias para VECP.

No mínimo definido pela Eq. (3.15), considerando que $v_a \neq 0$, as equações de minimização são

$$\frac{\partial V}{\partial(v_1^2)} = \frac{1}{2}(\mu_1 + pv_1^2 + rv_2^2), \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial(v_2^2)} = \frac{1}{2}(\mu_2 + rv_1^2 + qv_2^2), \quad (3.17)$$

que implicam que o mínimo do potencial está em

$$\begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p & r \\ r & q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{pq - r^2} \begin{pmatrix} q & -r \\ -r & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

desde que as soluções acima para v_a^2 sejam positivas, o que requer que ao menos $\mu_1 < 0$ ou $\mu_2 < 0$. Desse modo, as Eqs. (3.15) e (3.18) definem o valor esperado do vácuo (VEV), $\langle \Phi \rangle$.

Por completeza, podemos verificar que a solução na Eq. (3.18) de fato corresponde a um mínimo local, calculando a matriz de segundas derivadas

$$\left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial v_a \partial v_b} \right\}_{\langle \Phi \rangle} = 2 \text{diag}(v_1, v_2) \begin{pmatrix} p & r \\ r & q \end{pmatrix} \text{diag}(v_1, v_2), \quad (3.19)$$

assumindo-se que $v_a \neq 0$ e utilizando as relações

$$\frac{\partial V}{\partial v_a} = 2v_a \frac{\partial V}{\partial(v_a^2)}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_a \partial v_b} = 2\delta_{ab} \frac{\partial V}{\partial(v_a^2)} + 4v_a v_b \frac{\partial^2 V}{\partial(v_a^2) \partial(v_b^2)}. \quad (3.21)$$

Então, a condição já imposta de que a matriz na Eq. (3.14) seja positivo definida garante que a matriz na Eq. (3.19) seja positivo definida, o que verifica a propriedade desejada. Além disso, pode-se substituir a solução da Eq. (3.18) diretamente no potencial da Eq. (3.11), e verificar que para tal solução o valor do potencial é negativo. Tal fato garante que a solução da Eq. (3.18) seja o mínimo absoluto.

Podemos refazer a análise desenvolvida até agora, utilizando uma mudança de variáveis que facilitará os cálculos e a interpretação dos resultados. Primeiramente, notamos que podemos efetuar a seguinte transformação sem modificar o conteúdo físico da teoria:

$$\Phi \rightarrow U\Phi, \quad (3.22)$$

onde U é uma matriz unitária que pode ser restrita às matrizes $SU(2)_H$, pois, o fator $U(1)$ é a simetria de gauge. Este é um exemplo de uma transformação

horizontal (TH) que representa uma mudança de variáveis no espaço horizontal formado por ϕ_1, ϕ_2 . Em seguida, ao invés de utilizarmos as variáveis quadráticas $\{\phi_1^\dagger\phi_1, \phi_2^\dagger\phi_2, \phi_1^\dagger\phi_2, \phi_1\phi_2^\dagger\}$, utilizaremos as combinações reais

$$\mathbb{A}_\mu \equiv \frac{1}{2}\Phi^\dagger\sigma_\mu\Phi, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (3.23)$$

onde $\sigma_\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma})$. O subíndice com letras gregas não se refere a índices espaço-temporais, o que significa que não há distinção entre índices covariantes ou contravariantes, mas a convenção de soma sobre índices repetidos será utilizada. Os índices que assumem os valores $\mu = i = 1, 2, 3$ são índices no espaço da álgebra de Lie de $SU(2)_H$, i.e., na representação adjunta, e $\mu = 0$ refere-se à componente trivial singlete. A mudança de base explícita é dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 &= \frac{\phi_1^*\phi_1 + \phi_2^*\phi_2}{2}, & \mathbb{A}_1 &= \frac{\phi_1^*\phi_2 + \phi_2^*\phi_1}{2} = \text{Re}(\phi_1^*\phi_2), \\ \mathbb{A}_3 &= \frac{\phi_1^*\phi_1 - \phi_2^*\phi_2}{2}, & \mathbb{A}_2 &= \frac{\phi_1^*\phi_2 - \phi_2^*\phi_1}{2i} = \text{Im}(\phi_1^*\phi_2), \end{aligned} \quad (3.24)$$

que pode ser facilmente invertida e inserida no potencial da Eq. (3.7), resultando em

$$V(\mathbb{A}) = M_\mu\mathbb{A}_\mu + \frac{1}{2}\mathbb{A}_\mu\Lambda_{\mu\nu}\mathbb{A}_\nu, \quad (3.25)$$

onde

$$\{M_\mu\} = (\mu_1 + \mu_2, 0, 0, \mu_1 - \mu_2), \quad (3.26)$$

$$\Lambda = \{\Lambda_{\mu\nu}\} = \left(\begin{array}{c|ccc} 2(A+B+C) & E+F & 0 & 2(A-B) \\ \hline E+F & 2D & 0 & E-F \\ 0 & 0 & -2D & 0 \\ \hline 2(A-B) & E-F & 0 & 2(A+B-C) \end{array} \right). \quad (3.27)$$

A mudança de variáveis na Eq. (3.23) efetua o *branching* $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \sim \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$ de $\phi_a^\dagger\phi_b$. Podemos, então, expandir a Eq. (3.25) em termos de quantidades que se transformam como $\mathbf{3}$ e $\mathbf{1}$

$$V(\mathbb{A}) = M_0\mathbb{A}_0 + \frac{1}{2}\Lambda_{00}(\mathbb{A}_0)^2 + M_i\mathbb{A}_i + \Lambda_{0i}\mathbb{A}_0\mathbb{A}_i + \frac{1}{2}\mathbb{A}_i\tilde{\Lambda}_{ij}\mathbb{A}_j. \quad (3.28)$$

Fazendo isso, identificamos dois escalares M_0, Λ_{00} , dois vetores $\mathbf{M} \equiv \{M_i\}, \mathbf{\Lambda}_0 \equiv \{\Lambda_{0i}\}$ e um tensor de ordem dois $\tilde{\Lambda} = \{\Lambda_{ij}\}$ com respeito à representação $\mathbf{3}$. Com isso, podemos trabalhar exclusivamente com a representação $\text{adj}SU(2) \sim SO(3)$. O mapeamento dois para um, $SU(2) \rightarrow SO(3)$, é dado pela transformação induzida pela Eq. (3.22) sobre as variáveis \mathbb{A}_μ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_0 &\rightarrow \mathbb{A}_0, \\ \mathbb{A}_i &\rightarrow O_{ij}(U)\mathbb{A}_j,\end{aligned}\tag{3.29}$$

onde

$$O_{ij}(U) \equiv \frac{1}{2}\text{Tr}[U^\dagger \sigma_i U \sigma_j], \quad \in SO(3).\tag{3.30}$$

Se $U = \exp(i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta}/2)$, então $O_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = [\exp(i\theta_k J_k)]_{ij}$, onde $(iJ_k)_{ij} = \varepsilon_{kij}$ são os geradores de $SU(2)$ [$SO(3)$] na representação adjunta.

As equações de minimização das Eqs. (3.16) e (3.17) são agora substituídas por

$$\left. \frac{\partial}{\partial \phi_a^*} V(\Phi) \right|_{\Phi=\langle \Phi \rangle} = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbb{A}_\mu} V(\mathbb{A}) \frac{\partial \mathbb{A}_\mu}{\partial \phi_a^*} \right|_{\Phi=\langle \Phi \rangle} = (M_\mu + \Lambda_{\mu\nu} \langle \mathbb{A}_\nu \rangle) \frac{1}{2} (\sigma_\mu)_{ab} \langle \phi_b \rangle = 0,\tag{3.31}$$

onde

$$\langle \mathbb{A}_\mu \rangle \equiv \frac{1}{2} \langle \Phi^\dagger \rangle \sigma_\mu \langle \Phi \rangle.\tag{3.32}$$

Definindo

$$\mathbb{M} \equiv \frac{1}{2} \sigma_\mu (M_\mu + \Lambda_{\mu\nu} \langle \mathbb{A}_\nu \rangle),\tag{3.33}$$

podemos reescrever a Eq. (3.31) em notação compacta

$$\mathbb{M} \langle \Phi \rangle = 0.\tag{3.34}$$

A solução para a Eq. (3.34), impondo $\langle \Phi \rangle \neq 0$ (QES), requer que $\langle \mathbb{A}_\mu \rangle$ satisfaça

$$\det \mathbb{M} = 0.\tag{3.35}$$

Pela equação secular de \mathbb{M} , dada por (ver Ap. A.2)

$$\det(\mathbb{M} - \lambda \mathbb{1}) = \lambda(\lambda - \text{Tr} \mathbb{M}),\tag{3.36}$$

pode-se verificar que \mathbb{M} possui um autovalor nulo cujo autovetor é proporcional a $\langle \Phi \rangle$ e um autovalor não nulo dado por

$$m^2 = \text{Tr} \mathbb{M}.\tag{3.37}$$

Se utilizarmos a segunda parametrização da Eq. (3.10) para $\langle \Phi \rangle$, escrita em termos dos ângulos,

$$\langle \Phi \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_v}{2} \\ \sin \frac{\theta_v}{2} e^{i\xi} \end{pmatrix},\tag{3.38}$$

a parametrização correspondente para $\langle \mathbb{A}_\mu \rangle$ é

$$\langle \mathbb{A}_\mu \rangle = \frac{v^2}{4} (1, \sin \theta_v \cos \xi, \sin \theta_v \sin \xi, \cos \theta_v),\tag{3.39}$$

onde $v^2 = v_1^2 + v_2^2$ e $\tan \frac{\theta_v}{2} = \frac{v_2}{v_1}$. Podemos ainda escrever a Eq. (3.38) na forma

$$\langle \Phi \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_v}{2} & -\sin \frac{\theta_v}{2} e^{-i\xi} \\ \sin \frac{\theta_v}{2} e^{i\xi} & \cos \frac{\theta_v}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v}{\sqrt{2}} U_v \hat{e}_1. \quad (3.40)$$

A segunda coluna da matriz U_v acima nos dá a direção do autovetor de \mathbb{M} correspondente ao autovalor m^2 dado pela Eq. (3.37), perpendicular a $\langle \Phi \rangle$. Da mesma forma, a Eq. (3.39) pode ser escrita como

$$\langle \mathbb{A} \rangle_i = \frac{v^2}{4} (O_v)_{ij} (e_3)_j, \quad (3.41)$$

onde $(e_i)_j = \delta_{ij}$ são os versores em três dimensões e

$$O_v \equiv O_1 O_2 O_1^\top, \quad (3.42)$$

$$O_1 \equiv \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & 0 \\ \sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

$$O_2 \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_v & 0 & \sin \theta_v \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_v & 0 & \cos \theta_v \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

em acordo com a Eq. (3.30).

Uma vez encontrados os VEVs $\langle \Phi \rangle \neq 0$ ($\langle \mathbb{A}_\mu \rangle \neq 0$) que minimizam o potencial, o potencial após a QES pode ser conhecido substituindo-se

$$\Phi \rightarrow \Phi + \langle \Phi \rangle, \quad (3.45)$$

$$\mathbb{A}_\mu \rightarrow \mathbb{A}_\mu + \langle \mathbb{A}_\mu \rangle + \mathbb{B}_\mu, \quad (3.46)$$

onde

$$\mathbb{B}_\mu \equiv \frac{1}{2} \langle \Phi \rangle^\dagger \sigma_\mu \Phi + \frac{1}{2} \Phi^\dagger \sigma_\mu \langle \Phi \rangle, \quad (3.47)$$

$$\langle \mathbb{A}_\mu \rangle \equiv \frac{1}{2} \langle \Phi \rangle^\dagger \sigma_\mu \langle \Phi \rangle. \quad (3.48)$$

Assim, após a QES, o potencial da Eq. (3.25) é dado por

$$V(\Phi + \langle \Phi \rangle) = V(\mathbb{A}) + V(\langle \mathbb{A} \rangle) + \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu} \mathbb{B}_\mu \mathbb{B}_\nu + \Lambda_{\mu\nu} \mathbb{A}_\mu (\langle \mathbb{A}_\nu \rangle + \mathbb{B}_\nu) \quad (3.49)$$

$$= V(\langle \mathbb{A} \rangle) + V_2(\Phi) + V_3(\Phi) + V_4(\Phi), \quad (3.50)$$

onde

$$V_2(\Phi) = \Phi^\dagger \mathbb{M} \Phi + \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu} \mathbb{B}_\mu \mathbb{B}_\nu, \quad (3.51)$$

$$V_3(\Phi) = \Lambda_{\mu\nu} \mathbb{A}_\mu \mathbb{B}_\nu, \quad (3.52)$$

$$V_4(\Phi) = V(\Phi) \Big|_{\Phi^4} = \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu} \mathbb{A}_\mu \mathbb{A}_\nu, \quad (3.53)$$

e a condição $(M_\mu + \Lambda_{\mu\nu}\langle\mathbb{A}_\nu\rangle)\mathbb{B}_\mu = 0$, derivada da Eq. (3.34), foi utilizada.

Para saber o espectro da teoria precisamos analisar a matriz de massa contida em V_2 , na Eq. (3.51). Isso pode ser feito mais facilmente na base em que

$$\Phi' = U_v^\dagger \Phi, \quad (3.54)$$

$$\langle\Phi'\rangle = U_v^\dagger \langle\Phi\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \hat{e}_1, \quad (3.55)$$

$$\langle\mathbb{A}'_i\rangle = (O_v^\top)_{ij} \langle\mathbb{A}_j\rangle = \frac{v^2}{4} (e_3)_i, \quad (3.56)$$

$$\mathbb{M}' = U_v^\dagger \mathbb{M} U_v = \text{diag}(0, m^2). \quad (3.57)$$

Obtemos, então,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}'_0 &= \frac{v}{\sqrt{2}} \text{Re}\phi'_1, & \mathbb{B}'_1 &= \frac{v}{\sqrt{2}} \text{Re}\phi'_2, \\ \mathbb{B}'_2 &= \frac{v}{\sqrt{2}} \text{Im}\phi'_2, & \mathbb{B}'_3 &= \frac{v}{\sqrt{2}} \text{Re}\phi'_1. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Enquanto que os termos quadráticos são dados por

$$V_2(\Phi') = m^2 \phi_2'^* \phi_2' + \frac{v^2}{2} \left[\frac{1}{2} \Lambda_{00} (\text{Re}\phi'_1)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re}(\phi'_1) \Lambda'_{0i} t'_i + \frac{1}{4} t'_i \Lambda'_{ij} t'_j \right] \quad (3.59)$$

$$\equiv \frac{1}{2} t'_i M_{ij}^r t'_j, \quad (3.60)$$

onde

$$\{t'_i\} \equiv \frac{2}{v} \{\mathbb{B}'_i\} = \sqrt{2} (\text{Re}\phi'_2, \text{Im}\phi'_2, \text{Re}\phi'_1), \quad (3.61)$$

$$M^r \equiv \text{diag}(m^2, m^2, 0) + \frac{v^2}{4} \tilde{\Lambda}' + \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Lambda'_{01} \\ 0 & 0 & \Lambda'_{02} \\ \Lambda'_{01} & \Lambda'_{02} & \Lambda_{00} + 2\Lambda'_{03} \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Concluimos, então, que $\text{Im}\phi'_1$ tem massa nula e corresponde ao bóson de Goldstone da teoria, que é absorvido como componente longitudinal de B_μ através do mecanismo de Higgs, dando uma massa $m_B^2 = g^2 v^2$ ao bóson B . Em nível de árvore, em termos das variáveis originais, reobtemos os resultados da Ref. [13]:

$$G \equiv \sqrt{2} \text{Im}\phi'_1 = \sqrt{2} \text{Im}(U_v^\dagger \Phi)_1 = \cos \frac{\theta_v}{2} I_1 + \sin \frac{\theta_v}{2} I_2, \quad (3.63)$$

$$I \equiv \sqrt{2} \text{Im}(e^{-i\xi} \phi'_2) = -\sin \frac{\theta_v}{2} I_1 + \cos \frac{\theta_v}{2} I_2, \quad (3.64)$$

onde I é a combinação ortogonal a G [13] e a parametrização

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} R_1 + iI_1 \\ (R_2 + iI_2) e^{i\xi} \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

é utilizada. Na base definida pela Eq. (3.54), a parametrização é

$$\Phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t'_3 + iG \\ t'_1 + it'_2 \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

Os campos físicos massivos t_i são combinações lineares dos campos t'_i , obtidos através da diagonalização da matriz M^r na Eq. (3.62).

Precisamos, agora, reanalisar as propriedades de transformação dos campos sob as simetrias discretas C e CP, pois P continua sendo uma simetria após a QES. A transformação C original para os campos Φ era aquela mostrada na Eq. (3.8):

$$\begin{aligned} \Phi &\xrightarrow{C} e^{i\alpha_C} \Phi^*, \\ \mathbb{A}_0 &\xrightarrow{C} \mathbb{A}_0, \\ \mathbb{A}_i &\xrightarrow{C} (\eta_2)_{ij} \mathbb{A}_j, \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde $\eta_2 = \text{diag}(1, -1, 1)$ é a matriz de reflexão na direção 2. É fácil verificar que a última transformação na Eq. (3.67) representa uma simetria de $V(\mathbb{A})$ dada pela Eq. (3.25), pois, de acordo com as Eqs. (3.26) e (3.27), $M_2 = 0$ e $\Lambda_{\mu 2} \propto \delta_{\mu 2}$. Em termos dos campos reais da Eq. (3.65), a primeira transformação na Eq. (3.67), com $\alpha_C = 0$, significa trocar o sinal de I_1 e $(I_2 \cos \xi + R_2 \sin \xi)$, deixando as combinações ortogonais invariantes. Então, a operação complexo conjugada sob campos complexos é traduzida como reflexão em certas componentes reais (em duas combinações das quatro independentes).

Após a QES, verifica-se que a primeira das transformações na Eq. (3.67) não representa mais uma simetria, pois, $V(\Phi^* + \langle \Phi \rangle) = V(\Phi + \langle \Phi \rangle^*) \neq V(\Phi + \langle \Phi \rangle)$ se $\langle \Phi \rangle \neq \langle \Phi \rangle^*$, a menos de transformações de fase globais. Por isso, dizemos que a simetria discreta de C (CP) é quebrada espontaneamente. Note-se, contudo, que com a QES do $U(1)$ inicial, não há mais nenhuma carga conservada que troca de sinal sob uma operação de conjugação de carga, de modo que tal operação não é bem definida, mesmo no sentido aproximado, pois a transformação original não é nem aproximadamente uma simetria. Então, para descrevermos a violação espontânea de C (CP), devemos adicionar campos possuindo cargas (aproximadamente conservadas). Desse modo, devemos introduzir os férmions adicionais $l_L(x)$ e $l_R(x)$, que se acoplam com o bóson de gauge B de acordo com as cargas $U(1)$ de gauge: $q_L = g$ e $q_R = 0$, respectivamente. As Lagrangianas envolvendo esses campos são

$$\mathcal{L}(l, B) = \bar{l}_L \gamma^\mu (i\partial_\mu + gB_\mu) l_L + \bar{l}_R i \not{\partial} l_R, \quad (3.68)$$

$$\mathcal{L}(l, \phi) = -(\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2) \bar{l}_L l_R + h.c., \quad (3.69)$$

com λ_1, λ_2 reais, mantendo a invariância sob CP, Eq. (3.67), das interações antes da QES. Os férmions l_R, l_L se transformam usualmente por CP. (Outras implementações

da VECP são possíveis [13], mas escolhemos esse exemplo por causa de sua similaridade com o MP.) As transformações $l_L \rightarrow e^{i\xi}l_L$, $l_R \rightarrow e^{i\xi}l_R$ também constituem uma simetria das Lagrangianas nas Eqs. (3.68) e (3.69). É a conjugação da carga associada a essa simetria que será violada na teoria estendida.

Após a QES a Lagrangiana da Eq. (3.69) gera um termo de massa para o férmion l da forma

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_M(l) &= m_l[e^{i\alpha_l}\bar{l}_L l_R + e^{-i\alpha_l}\bar{l}_R l_L] \\ &= m_l\bar{l}(e^{i\alpha_l\gamma_5})l \\ &= m_l\bar{\psi}\psi, \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde

$$m_l e^{i\alpha_l} \equiv \lambda^\dagger \langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 \lambda_1 + v_2 \lambda_2 e^{i\xi}), \quad (3.71)$$

$$\psi(x) \equiv e^{i\alpha_l/2\gamma_5} l(x), \quad (3.72)$$

$$l(x) = l_L(x) + l_R(x), \quad (3.73)$$

$$\lambda^\top \equiv (\lambda_1, \lambda_2). \quad (3.74)$$

Para verificar a Eq. (3.70), escrevemos l_L, l_R em termos de espinores de Weyl, na representação de Weyl para as matrizes de Dirac:

$$l_L \equiv \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

$$l_R \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi} \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

de forma que

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_M(l) &= m_l[e^{i\alpha_l}\bar{\chi}^\dagger \xi + e^{-i\alpha_l}\xi^\dagger \bar{\chi}] \\ &= m_l \begin{pmatrix} \xi^\dagger & \bar{\chi}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha_l} \\ e^{i\alpha_l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (3.77)$$

a matriz quadrada na equação acima é exatamente $\gamma_0 e^{i\alpha_l\gamma_5}$.

Então, a Lagrangiana de interação na Eq. (3.69) pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}(\psi, \chi) &= \mathcal{L}_M(l) - \mathcal{L}(l, \phi) \\ &= \lambda^\dagger \Phi \bar{l} R l + h.c. \\ &= \lambda^\dagger \Phi \bar{\psi} R e^{-i\alpha_l\gamma_5} \psi + h.c. \\ &= \frac{1}{2}(\lambda^\dagger \Phi e^{-i\alpha_l} + \Phi^\dagger \lambda e^{i\alpha_l}) \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2}(\lambda^\dagger \Phi e^{-i\alpha_l} - \Phi^\dagger \lambda e^{i\alpha_l}) \bar{\psi} \gamma_5 \psi \\ &\equiv \frac{|\lambda|}{\sqrt{2}}(\chi_1 \bar{\psi} \psi + i\chi_2 \bar{\psi} \gamma_5 \psi), \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde $\lambda^\Gamma \equiv (\lambda_1, \lambda_2)$, $|\lambda| \equiv \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ e

$$\chi_1 \equiv \frac{\sqrt{2}}{|\lambda|} \text{Re}(\lambda^\dagger \Phi e^{-i\alpha_l}) \quad (3.79)$$

$$= \frac{\lambda_1}{|\lambda|} (\cos \alpha_l R_1 + \sin \alpha_l I_1) + \frac{\lambda_2}{|\lambda|} [\cos(\xi - \alpha_l) R_2 - \sin(\xi - \alpha_l) I_2], \quad (3.80)$$

$$\chi_2 \equiv \frac{\sqrt{2}}{|\lambda|} \text{Im}(\lambda^\dagger \Phi e^{-i\alpha_l}). \quad (3.81)$$

Podemos verificar que a amplitude de espalhamento $\psi + \psi \rightarrow \psi + \psi$ viola CP. Para fazer isso, recorremos ao fato que, em geral, qualquer amplitude de transição pode ser decomposta sob CP em uma parte par (+) e uma parte ímpar (-), na forma

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_+ + \mathcal{M}_-, \quad (3.82)$$

onde

$$\mathcal{M}_\pm = \frac{\mathcal{M} \pm \overline{\mathcal{M}}}{2} \quad (3.83)$$

e $\overline{\mathcal{M}}$ denota a amplitude de transição do processo conjugado por CP. Essa decomposição é aplicável para qualquer operação discreta como C ou P, trocando-se a operação associada à barra. Assim, a assimetria é dada por

$$\frac{|\mathcal{M}|^2 - |\overline{\mathcal{M}}|^2}{|\mathcal{M}|^2 + |\overline{\mathcal{M}}|^2} = \frac{2\text{Re}(\mathcal{M}_+ \mathcal{M}_-^*)}{|\mathcal{M}_+|^2 + |\mathcal{M}_-|^2}, \quad (3.84)$$

sabendo-se que $\overline{\mathcal{M}_\pm} = \pm \mathcal{M}_\pm$. Conclui-se, então, que os efeitos de violação de CP são apenas mensuráveis nos processos que possuem os dois tipos de amplitudes, i.e., uma parte par e outra ímpar sob CP; apenas uma delas não é suficiente para se ter uma assimetria não nula. Além disso, se ambas \mathcal{M}_\pm são reais, a assimetria da Eq. (3.84) é proporcional à parte ímpar da amplitude. A assimetria da Eq. (3.84) é uma outra formulação da propriedade exibida na Eq. (2.132). Podemos, ainda, escrever de maneira geral

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}(i \rightarrow f)(2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) &= \langle f | S | i \rangle, \\ -i\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{f})(2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) &= \langle \bar{f} | S | \bar{i} \rangle \\ &= \langle f | (\mathcal{C} \mathcal{P})^{-1} S (\mathcal{C} \mathcal{P}) | i \rangle, \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde \mathcal{C} , \mathcal{P} são os operadores unitários responsáveis pela operação de C e P, assumindo-se que estes existam e sejam bem definidos.

Portanto, voltando para o caso específico, a única Lagrangiana de interação que contribui em nível de árvore e que não é invariante por CP é dada pela Eq. (3.78).

Nesse caso a parte ímpar por CP da amplitude de espalhamento de dois férmions $\psi + \psi \rightarrow \psi + \psi$ é dada por

$$-i\mathcal{M}_-(2\psi \rightarrow 2\psi) = \frac{i^2}{2} \langle 2\psi | T \langle \mathcal{L}(\psi, \chi) \rangle^2 | 2\psi \rangle \Big|_{\text{ímpar}} \quad (3.86)$$

$$= -\frac{|\lambda|^2}{2} \int d^4x d^4y \langle 2\psi | : (\bar{\psi}\psi)(x) (i\bar{\psi}\gamma^5\psi)(y) : | 2\psi \rangle \times \langle 0 | T(\chi_1(x)\chi_2(y)) | 0 \rangle. \quad (3.87)$$

Claramente, a combinação de operadores dentro do primeiro “bracket” da Eq. (3.87) é ímpar por CP, e, pode-se verificar que a única contribuição em nível de árvore é dada pela Eq. (3.87). A amplitude par por CP tem contribuições de $\langle \mathcal{L}(l, B) \rangle^2$ (troca do bóson B) e de $\langle \mathcal{L}(\psi, \chi) \rangle^2$ restritas às contribuições não incluídas na Eq. (3.87). O efeito de violação de CP, nesse caso, é quantificado pela contração (último termo) na Eq. (3.87), que pode ser calculada sabendo-se que

$$\chi_1 = \frac{v}{m_l|\lambda|} \text{Re}\{\mathbf{v}_{\parallel}^{\dagger}\Phi|\lambda^{\dagger}\mathbf{v}_{\parallel}|^2 + \mathbf{v}_{\perp}^{\dagger}\Phi(\lambda^{\dagger}\mathbf{v}_{\perp})(\lambda^{\dagger}\mathbf{v}_{\parallel})\} \quad (3.88)$$

$$= \frac{\sqrt{2}m_l}{v|\lambda|} \sqrt{2}\text{Re}(\mathbf{v}_{\parallel}^{\dagger}\Phi) + \sqrt{2}\text{Re}(ze^{-i\xi}\mathbf{v}_{\perp}^{\dagger}\Phi) \quad (3.89)$$

$$\equiv a'_i t'_i, \quad (3.90)$$

$$\chi_2 = \frac{v}{m_l|\lambda|} \text{Im}\{\mathbf{v}_{\parallel}^{\dagger}\Phi|\lambda^{\dagger}\mathbf{v}_{\parallel}|^2 + \mathbf{v}_{\perp}^{\dagger}\Phi(\lambda^{\dagger}\mathbf{v}_{\perp})(\lambda^{\dagger}\mathbf{v}_{\parallel})\} \quad (3.91)$$

$$\equiv \gamma G + b'_i t'_i, \quad (3.92)$$

onde

$$\mathbf{a}' = (\text{Re}(ze^{-i\xi}), -\text{Im}(ze^{-i\xi}), \gamma), \quad (3.93)$$

$$\mathbf{b}' = (\text{Im}(ze^{-i\xi}), \text{Re}(ze^{-i\xi}), 0), \quad (3.94)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}m_l}{v|\lambda|}, \quad (3.95)$$

$$z = \frac{e^{i(\xi-\alpha_l)}}{|\lambda|} \lambda_i (U_v)_{i2}. \quad (3.96)$$

Foram utilizadas as Eqs. (3.79) e (3.81), com $e^{-i\alpha_l} = \langle \Phi \rangle^{\dagger} \lambda / m_l$ e a expansão

$$\sqrt{2}\Phi = \sqrt{2}(\mathbf{v}_{\parallel}^{\dagger}\Phi)\mathbf{v}_{\parallel} + \sqrt{2}(\mathbf{v}_{\perp}^{\dagger}\Phi)\mathbf{v}_{\perp} \quad (3.97)$$

$$= (t'_3 + iG)\mathbf{v}_{\parallel} + (t'_1 + it'_2)\mathbf{v}_{\perp}, \quad (3.98)$$

com $(\mathbf{v}_{\parallel})_i \equiv (U_v)_{i1}$ e $(\mathbf{v}_{\perp})_i \equiv (U_v)_{i2}$; \mathbf{v}_{\parallel} é a direção de $\langle \Phi \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_{\parallel}$ no espaço horizontal e \mathbf{v}_{\perp} a direção perpendicular. Pode-se verificar que as relações

$$a'_i a'_i = |z|^2 + \gamma^2 = 1, \quad b'_i b'_i = 1 - \gamma^2, \quad a'_i b'_i = 0, \quad (3.99)$$

são válidas e se mantêm para os coeficientes a_i e b_i da expansão de χ_1 e χ_2 em termos dos modos físicos t_i . Desse modo, obtemos

$$|\lambda|^2 \langle 0 | \chi_1(x) \chi_2(0) | 0 \rangle = |\lambda|^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} a_k \frac{i}{p^2 - m_k^2 + i\epsilon} b_k, \quad (3.100)$$

que a momento nulo é proporcional à transformada de Fourier de

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 |a_k m_k^{-2} b_k| &= |\lambda|^2 |a_2 b_2 (m_2^{-2} - m_1^{-2}) + a_3 b_3 (m_3^{-2} - m_1^{-2})| \\ &\leq |\lambda|^2 (m_3^{-2} - m_1^{-2}) |a_1 b_1| \leq |\lambda|^2 (m_3^{-2} - m_1^{-2}) \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}{2} \\ &= \frac{|\lambda|}{2} \sqrt{|\lambda|^2 - 2g^2 \frac{m_l^2}{m_B^2}} (m_3^{-2} - m_1^{-2}), \end{aligned} \quad (3.101)$$

mantendo-se as relações da Eq. (3.99) fixas, em particular, $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$, e as massas também fixas, com ordenamento $m_1 > m_2 > m_3$. [Também utilizamos $|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})| \leq \frac{1}{2} |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, para quaisquer vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} satisfazendo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ e $|\mathbf{c}| = 1$.] Então, se as massas m_k dos modos físicos t_k são muito grandes, o efeito de violação de CP se torna pequeno.

Por último, verificaremos através de um exemplo que as contribuições radiativas que violam CP são finitas [99]. O exemplo a ser utilizado será a contribuição para a auto-energia do férmion ψ , que pode ser obtida através de

$$\begin{aligned} i\mathbb{S}(x-y) &= \langle \Omega | T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) | \Omega \rangle = iZ_2 (S - \Sigma)^{-1}(x-y) \\ &= \langle 0 | T(\psi^{(0)}(x) \bar{\psi}^{(0)}(y)) | 0 \rangle \\ &\quad + \langle 0 | T(\psi^{(0)}(x) \bar{\psi}^{(0)}(y) \frac{i^2}{2} \langle \mathcal{L}_{int}^2 \rangle | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$= iS(x-y) + \langle iS(x-z)(-i)\Sigma(z-z')iS(z'-y) \rangle_{zz'} + \dots \quad (3.103)$$

A contribuição ímpar por CP da auto-energia, a um *loop*, pode ser obtida facilmente das Eqs. (3.87) e (3.102),

$$\begin{aligned} -i\Sigma_-(z-z') &= iS(z-z') \gamma_5 \frac{|\lambda|^2}{2} \langle 0 | T(\chi_1(z) \chi_2(z')) | 0 \rangle \\ &\quad + \gamma_5 iS(z-z') \frac{|\lambda|^2}{2} \langle 0 | T(\chi_1(z') \chi_2(z)) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$-i\Sigma_-(p) = i|\lambda|^2 m_l \gamma_5 \frac{i}{(4\pi)^2} a_j b_j \int_0^1 dx \ln [m_l^2 x + m_j^2 (1-x) - p^2 x(1-x)]. \quad (3.105)$$

A ortogonalidade $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ elimina a divergência e a dependência na escala de renormalização. A integral na Eq. (A.56), no Ap. A, foi utilizada.

Isto conclui o estudo deste exemplo para ilustrar o mecanismo de VECP.

3.1.2 Modelos com dois e três dubletos de Higgs

Para implementar a VECP no MP é preciso considerar o grupo de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Nesse caso, são necessários dois dubletos Φ_1 e Φ_2 , ao invés de um apenas no MP, exercendo as funções dos campos escalares ϕ_1 e ϕ_2 da Sec. 3.1.1.

O potencial escalar pode ser escrito na forma [13]

$$\begin{aligned} V(\Phi) = & \mu_1 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 \\ & + A(\Phi_1^\dagger \Phi_1)^2 + B(\Phi_2^\dagger \Phi_2)^2 + C(\Phi_1^\dagger \Phi_1)(\Phi_2^\dagger \Phi_2) + \bar{C}(\Phi_1^\dagger \Phi_2)(\Phi_2^\dagger \Phi_1) \\ & + \frac{1}{2} [(\Phi_1^\dagger \Phi_2)(D\Phi_1^\dagger \Phi_2 + E\Phi_1^\dagger \Phi_1 + F\Phi_2^\dagger \Phi_2) + h.c.], \end{aligned} \quad (3.106)$$

com todos os coeficientes reais. O potencial da Eq. (3.106) é idêntico ao da Eq. (3.7), acrescido do termo proporcional a \bar{C} . Os dubletos são constituídos de dois campos complexos

$$\Phi_a \equiv \begin{pmatrix} \phi_a^+ \\ \phi_a^0 \end{pmatrix}, \quad (3.107)$$

onde os rótulos das cargas dependem explicitamente da convenção escolhida para a direção da QES eletrofraca, mostrada a seguir, quando a simetria eletromagnética (EM) é ainda preservada. Para ter VECP, as condições da Eq. (3.13) devem ser satisfeitas, juntamente com

$$D > \bar{C}. \quad (3.108)$$

Nesse caso, o valor esperado do vácuo pode ser parametrizado como:

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} \langle \Phi_1 \rangle \\ \langle \Phi_2 \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ 0 \\ v_2 e^{i\xi} \end{pmatrix}. \quad (3.109)$$

O VEV acima ainda mantém o padrão de QES do MP de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ para $U(1)_{EM}$ (vácuo neutro). Para dois dubletos, VEVs que também quebram a simetria eletromagnética poderiam ser possíveis mas na Ref. [13] pode ser encontrada a prova de que o mínimo neutro situa-se abaixo dos mínimos que quebram a simetria EM para o potencial real da Eq. (3.106). Para potenciais com coeficientes complexos, o mínimo neutro ainda situa-se abaixo dos mínimos que quebram a simetria EM [100]. O estudo detalhado das condições de estabilidade (potencial limitado por baixo) e quebra de simetria para potenciais gerais, contendo dois dubletos de Higgs, pode ser encontrada na Ref. [101]. (A condição de extremização de V no caso do 2HDM[‡] se resume à $\det(\mathbb{M} \otimes \mathbb{1}) = \det^2 \mathbb{M} = 0$, equivalente à Eq. (3.35), com a ressalva

[‡]do inglês *Two Higgs Doublet Model*.

de que nesse caso a desigualdade $\langle \mathbb{A}_0 \rangle^2 - \sum_i \langle \mathbb{A}_i \rangle^2 \geq 0$ é válida [102], ao invés da igualdade, válida para o caso da Sec. 3.1.1.) Intuitivamente, é fácil imaginar porque com a presença de dois dubletos, existe a possibilidade de quebrar a simetria EM: se fizermos uma analogia com a simetria de rotação no espaço tridimensional $SO(3)$ [$\sim SU(2)$], a existência de uma direção preferencial ainda deixa uma simetria planar $SO(2)$, mas a presença de dois vetores não colineares não deixa nenhuma simetria contínua remanescente.

O potencial na Eq. (3.106) pode ser escrito na forma da Eq. (3.25), substituindo os elementos $\Lambda_{11} = 2D \rightarrow 2\bar{C} + 2D$ e $\Lambda_{22} = -2D \rightarrow 2\bar{C} - 2D$ de Λ na Eq. (3.27) (compare-se com a Eq. (10) do Ap. D). Após a QES, obtém-se a Eq. (3.50) com

$$\mathbb{B}_\mu = \frac{1}{2}\Phi^\dagger(\sigma_\mu \otimes \mathbb{1})\langle\Phi\rangle + \frac{1}{2}\Phi^\dagger(\sigma_\mu \otimes \mathbb{1})\langle\Phi\rangle \quad (3.110)$$

$$= \frac{1}{2}\Phi^{(0)\dagger}\sigma_\mu\langle\Phi^{(0)}\rangle + \frac{1}{2}\langle\Phi^{(0)\dagger}\rangle\sigma_\mu\Phi^{(0)}, \quad (3.111)$$

onde a identidade na Eq. (3.110) refere-se ao espaço de representação dubleto de $SU(2)_L$, enquanto que na Eq. (3.111), $\Phi^{(0)} = (\phi_1^0, \phi_2^0)^\top$ é a projeção nas componentes neutras. Assim, \mathbb{B} só depende das componentes neutras dos dubletos, para o caso do VEV dado pela Eq. (3.109), de modo que a massa do escalar físico carregado só depende do primeiro termo da Eq. (3.51). Na base em que

$$\langle\Phi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v}{\sqrt{2}} e_1 \otimes e_2, \quad (3.112)$$

obtida de transformações idênticas às Eqs. (3.54)–(3.57), obtemos para a parte quadrática do potencial

$$V_2(\Phi) = m^2 H^+ H^- + \frac{1}{2} t'_i M_{ij}^r t'_j, \quad (3.113)$$

onde M^r está dada na Eq. (3.62) e t'_i é obtido da Eq. (3.61) acrescentando-se o rótulo de carga neutra, p. ex., $\phi'_1 \rightarrow \phi_1^0$. Conclui-se então que a parametrização física é dada por

$$\Phi' = \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(t'_3 + iG^0) \\ H^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(t'_1 + it'_2) \end{pmatrix}, \quad (3.114)$$

onde G^+, G^0 são os bósons de Goldstone absorvidos respectivamente pelos bósons W^+, Z^0 , através do mecanismo de Higgs. Os campos neutros físicos t_i são novamente obtidos como combinação linear dos campos t'_i , através da diagonalização da matriz M^r , e a massa do H^+ é dada pela raiz quadrada de m^2 dada na Eq. (3.37).

Para completar a análise do modelo que exhibe VECP com dois dubletos de Higgs, é preciso introduzir as interações de Yukawa entre os escalares e os quarks:

$$-\mathcal{L}(f, H) = (\overline{Q}_L \tilde{\Phi}_a) \tilde{\Gamma}^{(a)} U_R + (\overline{Q}_L \Phi_a) \Gamma^{(a)} D_R + h.c., \quad (3.115)$$

com coeficientes reais para manter a invariância sob CP, antes da QES. O grande problema enfrentado por teorias com o setor de Higgs estendido é a possibilidade de processos que trocam sabor serem mediados por escalares neutros, contribuindo fortemente para as correntes neutras que trocam sabor (FCNC) [14]. Experimentalmente, tais processos são fortemente suprimidos [14]. A supressão natural desses tipos de processos pode ser obtida através da imposição de simetrias discretas apropriadas [14], ou através do requerimento de que os processos com FCNC sejam mediados por escalares pesados. O primeiro mecanismo também é conhecido como conservação natural de sabor (NFC)[§] [16]. A NFC pode ser implementada, por exemplo, com a imposição da simetria

$$R : \Phi_1 \rightarrow -\Phi_1, \quad D_{iR} \rightarrow -D_{iR}, \quad (3.116)$$

e todos os outros campos invariantes. Tal simetria faz com que os dubletos Φ_1 e Φ_2 se acoplem somente com os quarks tipo d e u , respectivamente. Essa simetria discreta também elimina os termos com coeficientes E e F , no potencial da Eq. (3.106). O resultado final é a invariância sob CP da teoria, mesmo quando $\langle \Phi \rangle$ adquire a configuração

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ 0 \\ \pm i v_2 \end{pmatrix}, \quad (3.117)$$

que é possível quando $D > 0$ [16]. Pode-se ver que o valor complexo $e^{i\xi} = \pm i$ no VEV é uma fase espúria porque podemos efetuar uma mudança de variáveis

$$\Phi \rightarrow e^{\pm i\sigma_3\pi/4} \Phi, \quad (3.118)$$

no espaço horizontal, e obtemos na nova base $\xi' = 0, \pi$. Assim, não há violação de CP e a matriz CKM é real devido ao fato dos coeficientes de Yukawa serem reais. Ou seja, neste caso, a imposição de NFC proíbe a VECP que era, em princípio, possível.

É, contudo, possível implementar a VECP mantendo a NFC se introduzirmos um terceiro dubleto Φ_3 [15, 16] que contribui somente no potencial escalar, mas não entra nas interações de Yukawa. A NFC pode ser garantida pela imposição

[§]Do inglês *Natural Flavor Conservation*.

da simetria discreta $\Phi_3 \rightarrow -\Phi_3$, mantendo os outros campos invariantes [16]. A implementação explícita para três dubletos pode ser encontrada na Ref. [16]. Nesse caso há VECP, e toda a violação de CP é induzida pela troca de escalares, enquanto que a matriz CKM continua real. Foi constatado recentemente que esse esquema, onde toda a violação de CP é proveniente do setor escalar, não é condizente com os dados experimentais. Os dados apontam fortemente para uma matriz de mistura de quarks complexa [17], indicando que, a baixas energias (abaixo da escala eletrofraca), a fonte dominante de violação de CP deve ser o mecanismo CKM. Isso impõe severas condições para a construção de modelos que exibam VECP a altas energias, com supressão de FCNC [18].

Além de ser um ótimo *toy model* para se estudar o mecanismo de VECP, o interesse pelo 2HDM tem aumentado recentemente [20, 31, 103, 104] devido ao fato de que o Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MSSM) requer dois dubletos de Higgs pela supersimetria [21, 105]. Assim, é de interesse fenomenológico varrer todo o espaço dos parâmetros possíveis para descrever realisticamente a violação de CP na natureza, que advém, a baixas energias, predominantemente do mecanismo CKM. Contudo, não podemos descartar pequenos desvios que possam ser previstos e medidos.

3.1.3 Modelos gerais com N dubletos de Higgs e transformações horizontais

Como ilustrado de maneira simples na Eq. (3.118), transformações horizontais podem mascarar as propriedades sob CP de uma teoria. (Uma outra visão sobre a invariância de CP do 2HDM com NFC pode ser encontrado na Ref. [16].) Isso acontece de maneira geral na presença de espaços horizontais, p. ex., um potencial escalar contendo somente coeficientes reais é obviamente invariante sob CP mas, se transformações horizontais complexas são permitidas, podemos reescrever o potencial numa forma que apresente coeficientes complexos. Contudo, a invariância sob CP do potencial é preservada. Isso indica que se um potencial escalar, com coeficientes complexos, que depende de campos na mesma representação complexa do grupo de gauge, é invariante sob CP, tal invariância garante a existência de uma transformação que leve esse potencial para uma forma em que todos os coeficientes são reais [66]. A recíproca também é válida em geral [66].

A fim de estudar a relação entre espaços horizontais e a violação explícita ou espontânea de CP, no nosso trabalho [30], que está em anexo no Ap. D, foram investigadas detalhadamente as condições para a violação de CP, explícita ou espontânea, em potenciais de modelos com N dubletos de Higgs (NHDMs). Utilizando um ferram

mental de teoria de grupos, foi possível achar o conjunto mínimo de condições para a violação explícita, ou espontânea, para a mais simples das extensões do MP, o modelo com dois dubletos de Higgs (2HDM), embora uma análise inicial já tivesse sido feita [20, 31]. Tais condições podem ser formuladas de modo geométrico em termos de invariantes ímpares por CP, que envolvem quantidades que se transformam sob a representação adjunta do grupo de transformações da base dos dois dubletos. Quando o potencial é invariante por CP, podem ser encontradas explicitamente a base real e as transformações de CP. Na tentativa de generalizar tal resultado para potenciais gerais com N dubletos, conseguimos ainda achar condições necessárias, bastante restritivas, para que o potencial seja CP invariante. Invariantes ímpares por CP também puderam ser construídos mas a suficiência das condições não pôde ser verificada, a não ser para o caso $N = 3$. Esse modelo também se mostra muito interessante para o estudo de transformações de CP como automorfismos do grupo de gauge [22].

3.2 Violação *soft* de CP

Como ilustrado no cálculo da auto-energia do férmion ψ na Sec. 3.1.1, a VECP exibe a propriedade de que a quebra de simetria é *soft*, i.e., os efeitos de violação são corrigidos radiativamente de maneira suave, com contribuições finitas [99]. É possível implementar a violação *soft* de simetrias contínuas e discretas sem vinculá-las com a QES. Na prática, tal violação é conseguida fazendo com que os termos que violem explicitamente a simetria sejam de ordem menor que quatro, em quatro dimensões espaço-temporais. É sabido que no caso de violação explícita *soft* existem sutilezas relacionadas à renormalizabilidade da teoria e contratermos de *tadpoles* devem ser levados em conta para assegurar a finitude das correções que violam CP [106].

Um modelo que exibe quebra *soft* de CP [107] pode ser construído para a simetria de gauge $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$ [108], onde há violação explícita de CP, antes da QES, advinda somente de um termo trilinear complexo no setor escalar. A matriz CKM é real e toda a violação de CP advém da interação entre os quarks usuais com um férmion exótico e um escalar duplamente carregado, enquanto que os processos que conservam CP, mas trocam de sabor, continuam tendo contribuição dominante da interação de corrente carregada, propriedade esta que também é compartilhada pelo 3HDM da Ref. [16]. A compatibilidade do modelo com as medidas experimentais de violação de CP no sistema dos káons neutros, manifestada na mistura $K^0 - \bar{K}^0$ e em canais de decaimentos, é mostrada no Ap. E [109].

Capítulo 4

Mistura de sabor em neutrinos

O fenômeno de mistura de sabor está intimamente conectado com o fenômeno de violação de CP no MP, pois a primeira advém da forma não diagonal da matriz CKM, enquanto que a segunda deve-se à presença de fases complexas não removíveis nessa mesma matriz. Sem mistura de sabor não haveria violação de CP no MP, embora o contrário seja possível, como acontece com o 2HDM, com conservação natural de sabor. A matriz CKM é a responsável por toda uma miríade de processos que trocam de sabor e assegura a validade do mecanismo de GIM [71], que atesta que processos que trocam de sabor são suprimidos, mesmo em nível de *loops*, e que seriam nulos se todas as massas dos quarks fossem iguais.

A existência de mistura entre os léptons parametrizada pela matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) [41], em clara analogia com o setor de quarks, levanta a questão natural: a simetria CP também é violada no setor leptônico? [42, 43]. Da forma como o MP é construído, parece natural que o setor leptônico também possua matrizes de mistura complexas [42], com a dificuldade adicional de que os neutrinos possam ser férmions de Majorana, o que aumenta as fases disponíveis para a violação de CP. Tais fases de Majorana, porém, não podem ser medidas em experimentos de oscilação mas influenciam fenômenos como o duplo decaimento beta sem neutrinos [110, 111]. Outra diferença entre a mistura leptônica e a mistura entre os quarks são os grandes ângulos de mistura presentes na matriz PMNS, ao contrário da matriz CKM que possui uma forma hierárquica e pequenos ângulos de mistura. Presentemente, alguns elementos da matriz PMNS ainda estão sendo extraídos experimentalmente. Por exemplo, o ângulo θ_{13} ainda não foi medido, mas possui um limite superior muito pequeno e seu anulamento sugere uma forma tri-bi-maximal para a matriz PMNS [40, 43, 112]. Por outro lado, a observabilidade da violação de CP em experimentos de oscilação de neutrinos (fases de Dirac) depende crucialmente da finitude do ângulo θ_{13} [112].

Outra grande distinção entre a mistura no setor de léptons e no setor de quarks

é a ausência das interações fortes no primeiro. Além de introduzir grandes dificuldades de calculabilidade e previsibilidade, a presença das interações fortes impede a observação assintótica dos quarks, que são os objetos fundamentais que se misturam. Por outro lado, os léptons são observáveis como estados assintóticos e os neutrinos, além disso, apenas interagem no MP via interações fracas de corrente carregada e neutra. Essas propriedades fazem com que os neutrinos sejam o sistema fundamental mais adequado para o estudo do fenômeno de mistura que, nesse caso, possibilita as oscilações de neutrinos. Nesse contexto podemos nos perguntar se o fenômeno de oscilação é um fenômeno estritamente cinemático: consequência somente do princípio de superposição e da afortunada existência de interações que criam e detectam estados (partículas) que são superposição de mais de um autoestado da Hamiltoniana total do sistema (autoestados de massa), ou está relacionado com fenômenos mais fundamentais. Por exemplo, a descrição de mistura de sabor no contexto de Teoria Quântica de Campos pode requerer o uso de representações inequivalentes, as quais aparecem quando tenta-se definir autoestados de sabor da mesma maneira que autoestados de massa livres [64]. Caso a descrição cinemática seja a descrição completa, as oscilações de neutrinos estão em pé de igualdade com, p. ex., a oscilação de estranheza no sistema dos káons neutros, que são estados compostos, mas são não relativísticos e com tempos de vida finitos. As pequenas massas dos neutrinos, no entanto, requerem um tratamento estritamente relativístico do problema e isso pode complicar a descrição do fenômeno de mistura.

Após um período de férteis descobertas acerca das propriedades dos neutrinos e de suas interações, conseguidas a partir de experimentos de conversão de sabor (oscilação de sabor), várias questões ainda permanecem não resolvidas. Um observável que não pode ser acessado através de experimentos de conversão de sabor é a escala absoluta da massa dos neutrinos [110, 113]. Devido às desprezíveis massas dos neutrinos, o efeito cinemático não é facilmente observável e os experimentos de oscilação somente nos dão a diferença de massas ao quadrado, $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$, dos neutrinos. Em alguns casos, somente o módulo das diferenças de massas ao quadrado é observável, limitando a distinção entre duas possíveis hierarquias de massas, as hierarquias normal e invertida [36]. Muitos experimentos terrestres, por exemplo, como os que envolvem o decaimento beta do trítio e o duplo decaimento beta sem neutrinos, podem nos dar pistas acerca de tal escala, mas ainda não foram capazes de medir as massas diretamente [36]. Por outro lado, da cosmologia, robustos vínculos para a soma das massas dos neutrinos [114] podem ser obtidos, garantindo que a soma das massas de todos os neutrinos não ultrapasse valores em torno de 2 eV.

Do ponto de vista da construção de modelos, a atribuição de massa para os neutrinos já representa um grande desafio porque necessariamente requer alguma extensão do MP [37, 46, 112]. E a melhor maneira de acomodar as minúsculas massas dos neutrinos parece ser através do mecanismo *seesaw* [45] (ver Ap.C.1 para uma ilustração desse mecanismo) dentro de um contexto de grande unificação [48]. Tal mecanismo sugere que a minúscula massa dos neutrinos seja predominantemente gerada pela troca de férmions ou escalares muito pesados, acessíveis somente a altas energias. Uma das possibilidades, o chamado mecanismo *seesaw* do tipo I, é ter neutrinos de Majorana pesados na teoria. Nesse contexto, a presença de neutrinos adicionais singletos ($SU(2)_L$), de mão direita, é necessária. Dentre outras coisas, ao mesmo tempo em que tais neutrinos de mão direita pesados explicam as pequenas massas dos neutrinos ativos do MP, os mesmos podem ser as partículas responsáveis pelo mecanismo de leptogênese [49, 47]. É sabido que a violação de CP no MP não é suficiente para gerar toda a assimetria entre matéria e antimatéria no Universo [50]. Por outro lado, neutrinos de mão direita mais leves podem ter conseqüências observáveis tanto nos experimentos de oscilação de neutrinos como na largura invisível no decaimento do Z^0 [51, 115, 116], e seriam uma possível solução para a anomalia encontrada no experimento de LSND [52, 112, 115].

O MP pode ser unicamente definido como um exemplar de uma teoria de gauge renormalizável com o grupo de gauge e conteúdo de matéria fixos. Sendo assim, alguma extensão do MP é necessária para se acomodar a massa dos neutrinos. As modificações mínimas envolvem a extensão do conteúdo de matéria, em particular, do setor escalar ou do setor leptônico [45]. Existem inúmeras maneiras de atribuir massas aos neutrinos, mantendo ainda o grupo de gauge do MP, mas desistindo da conservação do número leptônico que, de qualquer modo, é uma simetria acidental do MP. Na ausência de dados experimentais claros que norteiem a escolha da extensão correta, podemos nos basear em argumentos de plausibilidade teórica. Considerando que o MP seja uma teoria efetiva, que a baixas energias não manifesta seus graus de liberdade (partículas) de massas muito grandes, se incluirmos todos os operadores não renormalizáveis, respeitando a simetria de gauge, podemos ver que o de menor dimensão corresponde a um único operador de dimensão 5 que nos leva a um termo de massa de Majorana para os neutrinos ativos, após a quebra espontânea da simetria eletrofraca [117]. Tal operador pode ser gerado, por exemplo, pela presença de neutrinos de mão direita, singletos sob $SU(2)_L$, com massas muito grandes [118]. Outras possibilidades envolvem o uso de tripletos de Higgs, ou escalares singletos em loops [119], simetrias entre famílias e dimensões extras [43]. Pode-se gerar explicitamente termos de massa de Majorana para os neutrinos ativos do MP

através da adição de um tripleto de Higgs, o que é classificado como mecanismo de *seesaw* do tipo II.

Na frente experimental, entramos numa fase onde maior precisão é requerida para se extrair novos dados. A extração precisa dos elementos da matriz PMNS representa um dos principais objetivos dos experimentos atuais e em planejamento. Nos experimentos que medem conversão de sabor, planeja-se a extração do ângulo θ_{13} e, possivelmente, a fase de violação de CP de Dirac. A escala absoluta de massas será inferida de diferentes observáveis como as “massas” envolvidas nos experimentos de duplo decaimento beta sem neutrinos ou a “massa” envolvida no decaimento beta do trítio. A observação de eventos de duplo decaimento beta sem neutrinos pode determinar a natureza dos neutrinos: Dirac ou Majorana. Por esses motivos, as previsões teóricas também são pressionadas a atingir um grau de precisão maior, possivelmente levando à necessidade de considerar efeitos subdominantes.

Visto que os experimentos de conversão de sabor foram os responsáveis pela descoberta do fenômeno de oscilação de sabor, e também os que mais nos forneceram dados a respeito da natureza dos neutrinos nos últimos tempos, é muito importante estudar o fenômeno de oscilação de sabor em detalhes a fim de procurar por desvios da descrição atual e por efeitos subdominantes. Nesse contexto, uma dedução mais detalhada das fórmulas de oscilação, considerando neutrinos de mão direita e levando em conta aspectos de localização, seria desejável. A necessidade de considerar neutrinos localizados surge porque geralmente a oscilação de neutrinos baseia-se num formalismo simplificado de ondas planas, embora seja sabido que a coerência necessária para oscilação dependa crucialmente da localização das partículas que criam e detectam os neutrinos [53]. Tais formalismos envolvendo pacotes de onda já foram extensivamente desenvolvidos, tanto no contexto de Mecânica Quântica [54, 55, 56, 57, 58, 59], Mecânica Quântica Relativística [60, 61], como em Teoria de Campos [62, 63, 64]. Contudo há ainda pontos não entendidos [61].

No trabalho desenvolvido na Ref. [61], em anexo no Ap. F [61], mostramos que desvios das fórmulas de oscilação podem ser encontrados no contexto de teorias clássicas de campos (primeira quantização), requerendo naturalmente causalidade e completeza. No mesmo, comparam-se as fórmulas de oscilação para férmions de Dirac e escalares relativísticos com a fórmula usual. Termos de oscilações com frequências muito maiores que a frequência usual de oscilação de sabor aparecem tanto para os férmions de Dirac como para os escalares relativísticos devido à mistura entre estados de frequência positiva e negativa [60]. É possível evitar tais termos em um formalismo simplificado de teoria de campos livres (segunda quantização) mas, nesse caso, existe uma minúscula violação inicial de sabor. Foi mostrado também

que nas abordagens de pacotes de onda externos, onde o neutrino é considerado como partícula virtual, e que sua propagação se dá conforme o propagador de Feynman, este pode conter contribuições tanto de partículas como de antipartículas, embora somente contribuições *onshell* sejam relevantes a grandes distâncias. Dentro da aproximação utilizada, a exclusão da propagação do neutrino ou do antineutrino tem que ser feita *ad hoc* para excluir contribuições que, embora pequenas, não são físicas. Outro efeito considerado foi o fenômeno de troca de quiralidade durante a propagação no vácuo do neutrino massivo, que é criado como férmion de mão esquerda. Esse fenômeno também é conhecido como oscilação quiral [120]. Isso modifica os fenômenos de oscilação de sabor mas é desprezível quando a mistura ocorre entre neutrinos muito leves pois o efeito é proporcional a $(m/E)^2$ [61]. Tais efeitos, porém, podem ser importantes quando há mistura com neutrinos mais massivos. Esses efeitos subdominantes podem se tornar mensuráveis em experimentos futuros, principalmente se a anomalia LSND for confirmada pelo experimento Mini-Boone [112], abrindo a possibilidade da existência de um ou mais neutrinos estéreis pesados [121, 122, 123].

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Nesta tese, estudamos a íntima relação entre violação de CP e mistura de sabor presente em vários contextos. Primeiramente, ilustramos como os fenômenos de mistura de sabor e violação de CP são descritos conjuntamente no MP através da matriz de mistura CKM, não diagonal e complexa. Nesse contexto é importante identificar a única fonte de violação (explícita) de CP e como essa fonte é transferida do setor de Yukawa para as interações dos quarks com os bósons W . Em segundo, estudamos o mecanismo de violação espontânea de CP (VECP) e como, muitas vezes, ela requer a replicação de multipletos escalares para sua implementação, quando a representação desses multipletos é complexa. Quando os multipletos são idênticos dizemos que formam um espaço horizontal, condição necessária para a mistura. Esses espaços horizontais, antes e depois da QES, podem diferir e sua presença pode modificar a manifestação da violação de CP, como no MP, ou adicionar novas fontes, como no mecanismo de VECP. Para exemplificar a relação entre mistura e violação de CP, vimos, p. ex., que no modelo de Lee para VECP, tratado na Sec. 3.1.1, é a mistura entre os bósons χ_1, χ_2 que é responsável pelos efeitos de violação de CP na teoria. A presença de tais espaços horizontais também complica significativamente o estudo da violação de CP de uma teoria. Isso é ilustrado pelo estudo do potencial escalar em modelos com N dubletos de Higgs. Nestes modelos, a mera presença de coeficientes complexos não indica necessariamente que a teoria não possua uma simetria sob CP. Se existe uma transformação horizontal capaz de deixar o potencial com todos os coeficientes reais, então uma transformação de CP que deixa a teoria invariante pode ser encontrada. Por outro lado, no potencial do 2HDM com coeficientes reais, pode haver VECP mas, na base em que somente um dos dubletos adquire valor esperado no vácuo não nulo, os coeficientes são complexos, o vácuo parece invariante por CP e parece haver violação explícita de CP, quando na realidade a teoria antes da QES possui uma simetria CP não canônica, que envolve transformações horizontais.

Outra questão investigada detalhadamente no contexto dos NHDMs e no MP é o uso de invariantes por transformações horizontais, ímpares por CP, para a qualificação e quantificação da violação de CP. O exemplo do invariante de Jarlskog no MP ilustra como quantidades invariantes (por refase) podem ser encontradas para quantificar a violação de CP, de forma invariante e independente de convenção de fase ou parametrização. Para potenciais escalares gerais dos 2HDMs as condições mínimas, necessárias e suficientes, para violação de CP foram encontradas, sendo estas passíveis de serem formuladas em termos de invariantes por transformações horizontais. Além disso, quando o potencial é invariante sob CP, o procedimento, para achar as transformações explícitas de CP, e a base *real* puderam ser encontrados. Para potenciais gerais de NHDMs ($N \geq 3$), somente quando $N = 3$, as condições necessárias e suficientes para violação de CP puderam ser encontradas, embora o procedimento para checar tal violação ou invariância possa, talvez, ser reduzido a condições mais restritivas e em menor número. Para $N > 3$, somente condições necessárias para invariância sob CP puderam ser encontradas. A questão de como complementar tais condições de forma que se tornem suficientes é uma questão em aberto. O procedimento sistemático para encontrar a base canônica também está em aberto para os casos $N > 2$.

Embora, não pudéssemos concluir a classificação completa das propriedades dos potenciais nos NHDMs, o método apresentado em nosso trabalho [30] ilustra que, usando a representação adjunta como a representação mínima não trivial, podemos ter vantagem substancial sobre os tratamentos que utilizam somente a representação fundamental mínima, para tratar a liberdade de transformação de base dentro de espaços horizontais grandes. Inerente a esse estudo está a noção de transformações de CP como autormorfismos do grupo de gauge e mapeamento das representações do grupo horizontal para as representações complexo conjugadas. Tal noção foi útil para distinguir as propriedades de invariância/violação (explícita/espontânea) de CP das teorias e para construir os invariantes ímpares por CP. Pudemos ver que no caso geral dos potenciais de NHDMs, existe uma base canônica de CP [22] mas, em geral, as transformações sob CP dos escalares envolvia transformações horizontais. Em, geral, quando o espaço horizontal é constituído de multipletos em representações complexas, o grupo de transformações horizontais vai ser sempre $SU(N)_H$ para N multipletos idênticos, com o acréscimo possível do fator abeliano. Então, o estudo realizado com os NHDMs pode ser generalizável para teorias de gauge baseadas em outros grupos. Como ressalva, deve-se dizer que teorias com a presença de espaços horizontais não são mínimas por não explicarem a replicação dos multipletos, deixando a desejar como modelos fundamentais, assim como o MP

falha na explicação da existência das três famílias de quarks e léptons.

Do ponto de vista da construção de modelos que exibem VECP, o uso de invariantes não é muito interessante porque sempre podemos utilizar a base real na qual todos os coeficientes de Yukawa e do potencial escalar são reais. Contudo, quando estamos analisando um modelo efetivo a baixas energias, que exhibe quebra explícita de CP, mas que se supõe proveniente de algum modelo com VECP, o uso de invariantes pode ser útil. Uma discussão de como gerar uma matriz CKM realística, e portanto complexa, proveniente de teorias com VECP a energias mais altas, pode ser encontrada na Ref. [18]. No mesmo trabalho, é argumentado que não é possível gerar uma matriz CKM complexa realística através de um modelo com VECP na escala eletrofraca. Para construir modelos realísticos com VECP, é preciso gerar a assimetria sob CP a energias mais altas, imitando uma teoria a baixas energias com quebra explícita de CP. Por exemplo, é possível construir modelos exibindo VECP, a energias muito acima da escala eletrofraca, embebidos em modelos baseados no grupo $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ [18]. Nesses modelos, é possível relacionar as escalas de VECP, da quebra espontânea de paridade e do *seesaw*. Contudo, o uso mais imediato que pode ser feito com os invariantes é para eliminar os graus espúrios de liberdade para analisar o espaço de parâmetros de algum modelo que exhiba violação explícita de CP. Para fenomenologia, essas ferramentas podem ser muito úteis para efetuar análises preliminares, sem se preocupar em encontrar a base ou parametrização adequadas. Outro caso em que o uso de invariantes pode ser útil, é quando há quebras sucessivas de simetria e os invariantes podem ser utilizados para “seguir” as fontes de violação de CP. Nesse contexto, seria interessante desenvolver um procedimento para conseguir acompanhar as fases de CP ao longo de sucessivas quebras espontâneas de simetria e estudar as restrições para a implementação da violação espontânea de CP. Adicionalmente, o uso de invariantes para se estudar a violação de CP no setor leptônico pode requerer ingredientes diferentes do setor de quarks, devido à possibilidade de fases de Majorana para os neutrinos. Embora, para neutrinos, o estudo de invariantes de refase para a oscilação no vácuo e na matéria [43, 124] já exista.

A fim de generalizar os resultados obtidos em [30], podemos seguir em duas direções: (i) aplicação dos conceitos em outros modelos com presença de espaços horizontais adicionais e possível tratamento geral, independente de modelo para o potencial escalar; (ii) contextualização das técnicas de verificação e quantificação da violação de CP em modelos que contêm o MP, inclusive modelos de grande unificação, que não necessariamente contenham espaços horizontais mas que, efetivamente, levem ao aparecimento de multipletos de gauge idênticos a baixas energias.

No contexto (i), o tratamento geral para o potencial escalar não foi ainda alcançado devido à dificuldade de tratar mistura de representações, mesmo quando restrito a potenciais renormalizáveis, cujas possibilidades são muito mais variadas que em outros setores das teorias de gauge, que possuem formas bastante restritas devido, exatamente, à simetria de gauge e à renormalizabilidade. No contexto (ii), a quantificação da violação de CP, através de invariantes ímpares por CP, pode ser uma ferramenta potencialmente útil para análise das propriedades de CP, independentemente da base.

Considerando que todo modelo com VECF exibe violação *soft* de CP, já que a QES para potenciais renormalizáveis, originalmente invariantes de CP, apenas podem manifestar violação de CP através dos termos que contenham valores esperados no vácuo, e tais termos só podem ser trilineares ou bilineares nos campos (veja o exemplo do 2HDM). Os coeficientes desses termos possuem, então, dimensões positivas de energia; quando esses termos violam alguma simetria, dizemos que tal violação é *soft*. Nesses modelos, os efeitos de violação da simetria são finitos. Obviamente, podemos construir modelos com violação *soft*, mas explícita, de CP. Nesse contexto, a finitude dos efeitos de violação de CP pode envolver a contribuição, muitas vezes esquecida, dos *tadpoles* [106]. A relação entre renormalizabilidade e violação *soft*, ou espontânea, de CP também não foi totalmente explorada e merece estudos mais detalhados [106]. Um modelo baseado no grupo de gauge $SU(3)_L \otimes U(1)_N$, que exibe quebra explícita *soft* de CP, foi analisado em nosso trabalho [109]. Pudemos verificar que o modelo pode descrever a violação de CP no sistema dos káons neutros através da troca de férmions e escalares exóticos sem o mecanismo CKM, i.e., com uma matriz de mistura para os quarks real.

No setor leptônico, onde sabemos que existe mistura de sabor, pelo menos com manifestação nas oscilações de neutrinos, estudamos detalhadamente este fenômeno sob o ponto de vista de teorias clássicas de campos (relativísticos). Verificamos alguns resultados já presentes na literatura como a presença de interferência entre frequências positivas e negativas. Nesse contexto, também é interessante mencionar que a natureza quiral das interações fracas, que produzem os neutrinos, pode modificar as fórmulas de oscilação, mas seus efeitos são proporcionais a m^2/E^2 , o que dificulta sua observabilidade para neutrinos leves. Contudo, assim como não há interferência entre frequências positivas e negativas para um férmion de Dirac livre quantizado, se efetuarmos um cálculo simplificado com férmions livres de Dirac, que se misturam, não observaremos mais tais termos de interferência. Dentro do contexto de QFT, também efetuamos um cálculo com uma abordagem baseada em pacotes de onda externos [62], onde o neutrino é considerado como uma

partícula virtual. Nela, para distâncias macroscópicas, a maior contribuição advém dos neutrinos *onshell*, mas ainda pode haver tanto contribuições de partícula como de antipartícula. Nesse caso, duas posturas podem ser tomadas: 1) esse efeito é físico e sua não observabilidade é meramente técnica, devido à pequenez dos efeitos [125], ou 2) tais efeitos não são físicos e devem ser eliminados do formalismo. Escolhemos a segunda postura, pois os efeitos não físicos advinham de processos que são cinematicamente impossíveis quando considerados separadamente na produção ou detecção. O procedimento para eliminar tais contribuições foi mostrado no mesmo trabalho. No contexto de TQC, há tentativas de se utilizar para os autoestados de sabor, representações não equivalentes em relação aos autoestados de massa definida [64]. Esse formalismo também modifica as fórmulas de oscilação, misturando as contribuições de partícula e antipartícula. Embora se trate de uma descrição de neutrinos quase livres, que não leva em conta as interações que os criam e detectam, essas representações inequivalentes são inerentes ao formalismo de mistura e a escolha da representação correta deve ser feita pela física do problema.

Como continuação do trabalho em [61], podemos investigar mais a fundo o formalismo de oscilação de neutrinos e oscilação de sabor em TQC e encontrar possíveis desvios mensuráveis das fórmulas de oscilação. Independentemente da natureza do neutrino, a fórmula de oscilação deve depender dos módulos e das diferenças de massa ao quadrado Δm_{ij}^2 dos neutrinos, devido à sua criação com quiralidade negativa (L), mas a evolução temporal envolve a troca de quiralidade para férmions massivos. Esse pode ser um possível sinal para ter acesso às escalas absolutas de massa em experimentos de oscilação de neutrinos. Visto que neutrinos de mão direita, pesados, surgem naturalmente com a implementação do mecanismo de *seesaw*, em contextos de grande unificação e da necessidade de implementação da leptogênese, é interessante analisar com mais detalhes as fórmulas de oscilação para n neutrinos de mão esquerda e m de mão direita [51], incluindo aspectos de localização. A presença de neutrinos leves ou pesados também pode ter consequências na largura invisível do bóson Z^0 , ou no fluxo total do experimento de SNO. Vínculos de unitariedade da matriz PMNS também podem ser estudados nesse contexto [115]. A necessidade de neutrinos estéreis leves pode ser confirmada ou descartada no experimento de MiniBoone, projetado para verificar a anomalia encontrada no experimento de LSND [36, 112]. Outras fontes astrofísicas como a distribuição anômala de velocidades de pulsares [126] também podem indicar a presença de neutrinos estéreis.

Visto que os cálculos da Ref. [61] levaram à presença de violação direta de sabor nas oscilações de neutrinos, ou seja, conversão de sabor à distância zero, é importante efetuar um cálculo mais detalhado nessa direção. Esses efeitos, mesmo que peque-

nos, poderiam levar a uma alteração das fórmulas de oscilação e possível modificação na descrição da anomalia LSND que envolvia uma curta distância. Também, estes, podem depender da escala absoluta de massa dos neutrinos. Igualmente necessário é considerar a inclusão explícita das interações que criam e detectam os neutrinos, i.e., as interações de corrente neutra e corrente carregada, e possíveis novas interações. Esse estudo também poderia esclarecer, ou mesmo, resolver, divergências acerca do estado em que os neutrinos são criados ou detectados [61], com energias iguais, com momentos iguais ou nenhum dos dois. Este último, mais provável, tem de ser consequência da cinemática do problema e da distribuição de momentos da partícula de criação (detecção) visto que quando a partícula de criação possui energia e momento muito bem definidos, não há fenômeno de interferência como a oscilação de sabor [53]. Desse modo, aspectos de localização podem exercer um papel importante.

Como última interseção entre violação de CP e mistura de sabor no setor leptônico, está a relação entre os mecanismos de VECP e *seesaw*. Essa conexão é de muito interesse dentro do contexto de leptogênese, quando o neutrino de mão direita pesado, responsável pelo *seesaw*, também decai em léptons do MP, gerando uma assimetria de número leptônico que seria convertida em assimetria de número bariônico. Mas o mecanismo VECP também requer a extensão do setor escalar, podendo haver a necessidade de considerar o mecanismo de seesaw do tipo I e II conjuntamente [119]. É, então, interessante investigar como a violação de CP no setor escalar é transferida para o setor de quarks e léptons, e saber como estas se relacionam, com a restrição de gerar a matriz de mistura leptônica realisticamente.

Como pano de fundo que permeia todos os tópicos discutidos neste trabalho está a relação entre mistura de sabor e violação de CP. Esses dois fenômenos tem conexão íntima em todos os contextos mencionados e o entendimento de tal conexão pode nos dar pistas a respeito de outros problemas fundamentais, como a replicação das famílias, relação entre quarks e léptons ou o problema CP forte. Enquanto isso, o setor leptônico será melhor conhecido com a extração dos elementos da matriz PMNS, que aparece na mistura de sabor dos neutrinos, proporcionando mais dados para entender o fenômeno de mistura. Por outro lado, as primeiras evidências experimentais acerca do setor escalar do MP, ou extensões, pode vir do LHC que está para entrar em funcionamento. Tanto a violação de CP como a massa dos neutrinos podem estar relacionadas com o setor escalar de extensões do MP.

Apêndice A

Notações e convenções

A.1 Matrizes gama

A convenção para as matrizes gama segue a Ref. [91]:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma_5 \equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma^5, \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma_5\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.4})$$

onde a métrica de Minkowski utilizada é dada por $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ enquanto que $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$ define o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita.

Os 16 bilineares de Dirac geram todo o espaço das matrizes complexas 4×4 e formam uma base tal que vale a relação de ortogonalidade

$$\text{Tr}[\Gamma_A \Gamma^B] = \delta_A^B, \quad (\text{A.5})$$

quando $\Gamma_A = \{\mathbb{1}, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}\}$ e $\Gamma^A \equiv (\Gamma_A)^\dagger$. Usando a relação de ortogonalidade acima, podemos calcular, p. ex., o produto de três gamas

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha = g^{\mu\nu}\gamma^\alpha - g^{\mu\alpha}\gamma^\nu + g^{\nu\alpha}\gamma^\mu - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\beta\gamma_5. \quad (\text{A.6})$$

Podemos também verificar

$$(\gamma^\mu \not{a} \gamma^\nu L)[\gamma_\nu \not{b} \gamma_\mu L] = 4(\not{a}L)[\not{b}L], \quad (\text{A.7})$$

$$(\gamma^\mu \not{a} \gamma^\nu L)[\gamma_\mu \not{b} \gamma_\nu L] = 4a \cdot b (\gamma^\mu L)[\gamma_\mu L]. \quad (\text{A.8})$$

Outro resultado útil para se calcular identidades de Fierz quirais [128] (Ap. G) é

$$\text{Tr}_L[R\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\alpha\beta}] = 2(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} \pm i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}). \quad (\text{A.9})$$

Os coeficientes podem ser verificados nos casos $(\mu\nu) = (\alpha\beta)$ e $(\mu\nu\alpha\beta) = (0123)$.

A seguir, listamos algumas identidades de Fierz quirais úteis, que podem ser obtidas seguindo a metodologia da Ref. [128], (Ap. G)

$$({}_L R \gamma_\mu) [{}_L R \gamma^\mu] = -({}_L R \gamma_\mu) [{}_L R \gamma^\mu], \quad (\text{A.10})$$

$$({}_L R \gamma_\mu) [{}_R L \gamma^\mu] = 2({}_L R) [{}_R L], \quad (\text{A.11})$$

$$({}_L R) [{}_L R] = \frac{1}{8}({}_L R \gamma_\nu \gamma_\mu) [{}_L R \gamma^\mu \gamma^\nu] \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{1}{2}({}_L R) [{}_L R] + \frac{1}{2}({}_L R \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}) [{}_L R \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}], \quad (\text{A.13})$$

$$({}_L R \gamma_\mu) [{}_R L] = \frac{1}{2}({}_L R \gamma^\nu) [{}_R L \gamma_\nu \gamma_\mu]. \quad (\text{A.14})$$

Algumas das identidade acima foram utilizadas nos cálculos do Ap. E [109].

A.2 Diagonalização de matrizes 2×2

Seja uma matriz geral 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.15})$$

O polinômio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \quad (\text{A.16})$$

$$= \lambda^2 - \text{Tr} A \lambda + \det A, \quad (\text{A.17})$$

que leva aos autovalores

$$\lambda_{\pm} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a + d}{2}\right)^2 - (ad - bc)} = \frac{1}{2} \text{Tr} A \pm \sqrt{(\text{Tr} A / 2)^2 - \det A}. \quad (\text{A.18})$$

Podemos expandir A em termos das matrizes $\{\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}\}$

$$A = A_0 \mathbb{1} + \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad A_i \in \mathbb{C}, \quad (\text{A.19})$$

onde $A_i = \frac{1}{2} \text{Tr}(A \sigma_i)$ e $A_0 = \frac{1}{2} \text{Tr}[A]$. Explicitamente,

$$\begin{aligned} A_0 &= (a + d)/2, & A_3 &= (a - d)/2, \\ A_1 &= (b + c)/2, & A_2 &= i(b - c)/2. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Em termos dos coeficientes da Eq.(A.19), os autovalores da Eq. (A.18) são

$$\lambda_{\pm} = A_0 \pm \sqrt{\mathbf{A}^2}. \quad (\text{A.21})$$

A matriz que diagonaliza A na forma

$$U^{-1}AU = \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-), \quad (\text{A.22})$$

é dada por

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}(\mathbf{A}^2)^{\frac{1}{4}}(\sqrt{\mathbf{A}^2} + A_3)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} A_3 + \sqrt{\mathbf{A}^2} & -b \\ c & A_3 + \sqrt{\mathbf{A}^2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

enquanto sua inversa, geralmente diferente do hermitiano conjugado, é dada por

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}(\mathbf{A}^2)^{\frac{1}{4}}(\sqrt{\mathbf{A}^2} + A_3)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} A_3 + \sqrt{\mathbf{A}^2} & b \\ -c & A_3 + \sqrt{\mathbf{A}^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

A matriz U pode ser decomposta na forma

$$U = U_1 U_2 U_1^\dagger, \quad (\text{A.25})$$

onde

$$U_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{b}{c}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{c}{b}} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = e^{-i\alpha\sigma_3/2}, \quad (\text{A.26})$$

$$U_2 = \frac{1}{(\mathbf{A}^2)^{\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix} (a-d)/2 & -\sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & (a-d)/2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = e^{-i\beta\sigma_2/2}, \quad (\text{A.27})$$

com $\tan \alpha = \frac{A_2}{A_1}$, $\tan \beta = \frac{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}{A_3}$ e os ângulos podem ser complexos. Note-se que $A_1^2 + A_2^2 = bc$ e $2\sqrt{\mathbf{A}^2} = \lambda_+ - \lambda_-$.

Se $a = d$ temos

$$\lambda_{\pm} = a \pm \sqrt{bc}, \quad (\text{A.28})$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{b}{c}} \\ \sqrt{\frac{c}{b}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

Além disso, se $c = b^*$ ($b = |b|e^{i\varphi}$),

$$\lambda_{\pm} = a \pm |b|, \quad (\text{A.30})$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

A.3 Determinante em termos de traços

Seja uma matrix A , $n \times n$ sobre \mathbb{C} . A partir da relação $\det(\mathbb{1} + A) = \exp[\text{Tr} \ln(\mathbb{1} + A)]$, tomando somente termos de ordem A^n dos dois lados, temos a relação [129]

$$\begin{aligned} \det A &= e^M \Big|_n \\ &= M_n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=n}}^n M_i M_j + \frac{1}{3!} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i+j+k=n}}^n M_i M_j M_k + \cdots + \frac{1}{(n-2)!} M_2 M_1^{n-1} + \frac{1}{n!} M_1^n, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

onde

$$M = \sum_{k=1}^n M_k = \sum_{k=1}^n -\frac{(-1)^k}{k} \text{Tr} A^k. \quad (\text{A.33})$$

Em particular, temos para

$$n = 2 : \det A = -\frac{1}{2} \text{Tr} A^2 + \frac{1}{2} (\text{Tr} A)^2 \quad (\text{A.34})$$

$$n = 3 : \det A = \frac{1}{3} \text{Tr} A^3 - \frac{1}{2} \text{Tr} A^2 \text{Tr} A + \frac{1}{3!} (\text{Tr} A)^3 \quad (\text{A.35})$$

$$n = 4 : \det A = -\frac{1}{4} \text{Tr} A^4 + \frac{1}{3} \text{Tr} A^3 \text{Tr} A + \frac{1}{8} (\text{Tr} A^2)^2 - \frac{1}{4} (\text{Tr} A)^2 \text{Tr} A^2 + \frac{1}{4!} (\text{Tr} A)^4. \quad (\text{A.36})$$

A.4 Integrais

Podemos escrever as integrais que aparecem nos diagramas de caixa na seguinte forma geral

$$B_4(p_i; m_i; f) \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k) \prod_{i=1}^4 [(k + p_i)^2 - m_i^2]^{-1} \quad (\text{A.37})$$

$$= \int_{\Delta} d^3 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f(k - \tilde{k})}{(k^2 - \tilde{k}^2 - A^2)^4}, \quad (\text{A.38})$$

$$B_4(p_i; m_i; 1) = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_{\Delta} d^3 x \frac{1}{(\tilde{k}^2 + A^2)^2}, \quad (\text{A.39})$$

$$B_4(p_i; m_i; k^\mu) = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_{\Delta} d^3 x \frac{(-\tilde{k}^\mu)}{(\tilde{k}^2 + A^2)^2}, \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned} B_4(p_i; m_i; k^\mu k^\nu) &= \frac{g^{\mu\nu} (-2i)}{4 (4\pi)^2} \int_{\Delta} d^3 x \frac{1}{\tilde{k}^2 + A^2} \\ &\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} \int_{\Delta} d^3 x \frac{\tilde{k}^\mu \tilde{k}^\nu}{(\tilde{k}^2 + A^2)^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

onde

$$\tilde{k} = p_1 + (p_2 - p_1)x + (p_3 - p_2)y + (p_4 - p_3)z,$$

$$A^2 = m_1^2 + (m_2^2 - m_1^2)x + (m_3^2 - m_2^2)y + (m_4^2 - m_3^2)z \\ - [p_1^2 + (p_2^2 - p_1^2)x + (p_3^2 - p_2^2)y + (p_4^2 - p_3^2)z], \quad (\text{A.42})$$

$$\int_{\Delta} d^3x \equiv \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz.$$

A parametrização de Feynman a seguir é necessária para obter as representações acima:

$$\prod_{i=1}^n a_i^{-1} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 x_1^{n-2} \int_0^1 dx_2 x_2^{n-3} \cdots \int_0^1 dx_{n-1} I_n(x) \quad (\text{A.43})$$

$$= (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \tilde{I}_n(x) \quad (\text{A.44})$$

$$= (n-1)! \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \frac{\delta(1 - \sum x_i)}{\left[\sum_{i=1}^n a_i x_i \right]^n}, \quad (\text{A.45})$$

$$I_n(x) = [a_n x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + a_{n-1} x_1 x_2 \cdots x_{n-2} (1 - x_{n-1}) + \cdots + a_1 (1 - x_1)]^{-n}, \quad (\text{A.46})$$

$$\tilde{I}_n(x) = [a_1 + (a_2 - a_1)x_1 + (a_3 - a_2)x_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})x_{n-1}]^{-n}. \quad (\text{A.47})$$

Se os momentos externos são desprezíveis em comparação com a maior das massas que circulam no diagrama de caixa ($p_i^2, |p_i \cdot p_j| \ll m_{\max}$), podemos desprezar $\tilde{k}^2 \ll |A^2|$ e as integrais podem ser escritas em termos das seguintes integrais e suas derivadas:

$$\int_{\Delta} d^3x [A_0 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}]^{-2} = -\frac{(A_0 + A_1) \ln\left(\frac{A_0 + A_1}{A_0}\right)}{A_1 A_2 (A_2 + A_3)} + \frac{(A_0 + A_1 + A_2) \ln\left(\frac{A_0 + A_1 + A_2}{A_0}\right)}{A_2 (A_1 + A_2) A_3} \\ - \frac{(A_0 + A_1 + A_2 + A_3) \ln\left(\frac{A_0 + A_1 + A_2 + A_3}{A_0}\right)}{A_3 (A_2 + A_3) (A_1 + A_2 + A_3)}, \quad (\text{A.48})$$

$$\int_{\Delta} d^3x [A_0 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}]^{-1} = \frac{(A_0 + A_1)^2 \ln\left(\frac{A_0 + A_1}{A_0}\right)}{2 A_1 A_2 (A_2 + A_3)} - \frac{(A_0 + A_1 + A_2)^2 \ln\left(\frac{A_0 + A_1 + A_2}{A_0}\right)}{2 A_2 (A_1 + A_2) A_3} \\ + \frac{(A_0 + A_1 + A_2 + A_3)^2 \ln\left(\frac{A_0 + A_1 + A_2 + A_3}{A_0}\right)}{2 A_3 (A_2 + A_3) (A_1 + A_2 + A_3)}, \quad (\text{A.49})$$

$$\int_{\Delta} d^3x \ln\left[\frac{A_0 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}}{A_0}\right] = -\frac{11}{36} + \frac{(A_0 + A_1)^3 \ln\left(\frac{A_0 + A_1}{A_0}\right)}{6 A_1 A_2 (A_2 + A_3)} - \frac{(A_0 + A_1 + A_2)^3 \ln\left(\frac{A_0 + A_1 + A_2}{A_0}\right)}{6 A_2 (A_1 + A_2) A_3} \\ + \frac{(A_0 + A_1 + A_2 + A_3)^3 \ln\left(\frac{A_0 + A_1 + A_2 + A_3}{A_0}\right)}{6 A_3 (A_2 + A_3) (A_1 + A_2 + A_3)}, \quad (\text{A.50})$$

onde $\int_{\Delta} d^3x \equiv \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz$ e $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \equiv A_1 x + A_2 y + A_3 z$.

Por exemplo, dentro da aproximação de momento externo desprezível, podemos calcular $B_4(0; m_i; 1)$ usando a primeira integral acima,

$$B_4(0; m_i; 1) \approx \frac{i}{(4\pi)^2} \left[-\frac{\delta_2}{\delta_{21} \delta_{32} \delta_{42}} \ln \frac{\delta_2}{\delta_1} + \frac{\delta_3}{\delta_{31} \delta_{32} \delta_{43}} \ln \frac{\delta_3}{\delta_1} - \frac{\delta_4}{\delta_{41} \delta_{42} \delta_{43}} \ln \frac{\delta_4}{\delta_1} \right], \quad (\text{A.51})$$

onde $\delta_i = m_i^2$ e $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$. Da mesma forma, a integral na Eq. (A.40) pode ser obtida da soma de derivadas $\frac{\partial}{\partial A_i}$ da integral na Eq. (A.49) enquanto que a integral na Eq. (A.41) é obtida de derivadas $\frac{\partial^2}{\partial A_i \partial A_j}$ da integral na Eq. (A.50).

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^{2m}}{[p^2 - A^2 + i\epsilon]^n} = \frac{i(-1)^{n-m}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} A^{-2(n-m-\frac{D}{2})} \frac{\Gamma(m+\frac{D}{2})\Gamma(n-m-\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(n)}, \quad (\text{A.52})$$

$$B(x, y) = \int_0^\infty dt \frac{t^{x-1} t^{x+y}}{1+t}, \quad \text{Re}x, \text{Re}y > 0 \quad (\text{A.53})$$

$$= \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1}, \quad (\text{A.54})$$

$$\int \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} = \frac{2}{\Gamma(\frac{D}{2})(4\pi)^{\frac{D}{2}}}, \quad (\text{A.55})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\mu^\epsilon}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - M^2]} &\stackrel{D=4-\epsilon}{=} \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2x + M^2(1-x) - p^2x(1-x)} \right]^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2), \\ &\stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx \ln \left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2x + M^2(1-x) - p^2x(1-x)} \right] \right\}. \quad (\text{A.56}) \end{aligned}$$

A definição da função B pode ser encontrada, p. ex., na Ref. [130].

A.5 Funções

$$g_1(x, y) = -\frac{1}{x-y} \left[\left(\frac{x}{x-1} \right)^2 \ln x - \left(\frac{y}{y-1} \right)^2 \ln y - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} \right], \quad (\text{A.57})$$

$$g_0(x, y) = -\frac{1}{x-y} \left[\frac{x}{(x-1)^2} \ln x - \frac{y}{(y-1)^2} \ln y - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} \right], \quad (\text{A.58})$$

$$g_0(x) = \lim_{y \rightarrow x} g_0(x, y) = -\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{(x-1)^3} \ln x. \quad (\text{A.59})$$

As funções g_0 e g_1 são simétricas pela troca $x \leftrightarrow y$. Estamos usando a mesma nomenclatura de Ref.[77]. Essas funções podem ser obtidas a partir das integrais das Eqs. (A.48) e (A.49) pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= \frac{(4\pi)^2}{i} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 M^2}{[k^2 - M^2]^2 (k^2 - m_1^2) (k^2 - m_2^2)} \Big|_{x = \frac{m_1^2}{M^2}, y = \frac{m_2^2}{M^2}} \\ &= -2 \int_{\Delta} d^3 x' \frac{1}{1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}'} \Big|_{A_1=x-1, A_2=-A_1, A_3=y-1}, \quad (\text{A.60}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_0(x, y) &= \frac{(4\pi)^2}{i} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M^4}{[k^2 - M^2]^2 (k^2 - m_1^2) (k^2 - m_2^2)} \Big|_{x = \frac{m_1^2}{M^2}, y = \frac{m_2^2}{M^2}} \\ &= \int_{\Delta} d^3 x' \frac{1}{[1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}']^2} \Big|_{A_1=x-1, A_2=-A_1, A_3=y-1}. \quad (\text{A.61}) \end{aligned}$$

A.6 Regras de Feynman

Os propagadores escalar $[\phi(x)]$, fermiônico $[\psi(x)]$ e vetorial $[A_\mu(x)]$, livres, são definidos respectivamente por

$$\langle 0|T(\phi(x)\phi^*(y))|0\rangle = iD(x-y) = \int \widehat{d}p e^{-ip\cdot(x-y)} iD(p, m), \quad (\text{A.62})$$

$$\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y))|0\rangle = iS(x-y) = \int \widehat{d}p e^{-ip\cdot(x-y)} iS(p, m), \quad (\text{A.63})$$

$$\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu^*(y))|0\rangle = -iD_{\mu\nu}(x-y) = \int \widehat{d}p e^{-ip\cdot(x-y)} (-i)D_{\mu\nu}(p, m; \xi), \quad (\text{A.64})$$

onde $\widehat{d}p \equiv \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ e as transformadas de Fourier

$$D(p, m) \equiv \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\text{A.65})$$

$$S(p, m) \equiv \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}, \quad (\text{A.66})$$

$$D_{\mu\nu}(p, m; \xi) \equiv \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + i\epsilon} \right) + \xi \frac{1}{p^2 - \xi m^2 + i\epsilon} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + i\epsilon}, \quad (\text{A.67})$$

$$D_{\mu\nu}(p, m) \equiv D_{\mu\nu}(p, m; 1) = g_{\mu\nu} D(p, m) \quad (\text{A.68})$$

completam a definição dos propagadores livres. A seguir, estão listadas as regras de Feynman para o setor eletrofraco do MP [131], onde $\{m_i\} \equiv \{m_d, m_s, m_b\}$ e $\{\tilde{m}_i\} \equiv \{m_u, m_c, m_t\}$ são as massas dos quarks tipo d e tipo u , respectivamente, enquanto que V é a matriz CKM.

$$\begin{array}{c}
 \mu \text{---} \text{wavy line } W \text{---} \nu \\
 \quad \quad \quad p \\
 \quad \quad \quad G^+ \\
 \text{---} \text{dashed line} \text{---} \\
 \quad \quad \quad p
 \end{array} = -iD_{\mu\nu}(p, m_W; \xi) \quad (\text{A.69})$$

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \text{dashed line} \text{---} \\
 \quad \quad \quad p
 \end{array} = -iD(p, \sqrt{\xi}m_W) \quad (\text{A.70})$$

$$\begin{array}{c}
 \text{wavy line } W_\mu \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \text{---} \text{line } d_g \quad \text{---} \text{line } u_f
 \end{array} = -i\frac{g}{\sqrt{2}}V_{fg}\gamma_\mu L \quad (\text{A.71})$$

$$\begin{array}{c}
 \text{wavy line } W_\mu \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \text{---} \text{line } u_f \quad \text{---} \text{line } d_g
 \end{array} = -i\frac{g}{\sqrt{2}}V_{fg}^*\gamma_\mu L \quad (\text{A.72})$$

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \text{dashed line } G^+ \text{---} \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \text{---} \text{line } d_g \quad \text{---} \text{line } u_f
 \end{array} = -i\frac{g}{\sqrt{2}m_W}[R(V \text{diag}\{m_i\})_{fg} - L(\text{diag}\{\tilde{m}_i\}V)_{fg}] \quad (\text{A.73})$$

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \text{dashed line } G^- \text{---} \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \text{---} \text{line } u_f \quad \text{---} \text{line } d_g
 \end{array} = -i\frac{g}{\sqrt{2}m_W}[L(\text{diag}\{m_i\}V^\dagger)_{fg} - R(V^\dagger \text{diag}\{\tilde{m}_i\})_{fg}] \quad (\text{A.74})$$

Apêndice B

C, P, CP e CPT

B.1 Convenções para as transformações de P, C e CP

Listarei a seguir as transformações dos campos sob P, C e CP, utilizados ao longo desta tese. Denotarei-as de transformações canônicas de P, C e CP, embora algumas delas, especialmente aquelas envolvendo espinores, sejam meramente convencionais em relação à adição de fases, sempre possível quando o campo é complexo.

Será utilizada a notação S, PS, D, V e PV para denotar, respectivamente, o campo escalar, pseudo-escalar, espinor de Dirac, vetor e pseudo-vetor (ou vetor axial). A métrica de Minkowski utilizada é definida pelos seus elementos não nulos $g^{00} = -g^{ii} = 1$. A inversão espacial de quadrivetores será denotado por $(\tilde{I}x)^\mu \equiv \hat{x}^\mu = (x_0, -\mathbf{x})$ que, restrita à métrica de Minkowski adotada aqui, permite a igualdade índice a índice $\hat{x}^\mu = x_\mu$, que se mostra notacional e operacionalmente útil. Também utilizaremos os projetores quirais denotados por $R \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5)$, para mão direita, e $L \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5)$, para mão esquerda. Note que com essa notação, $\psi_R \equiv R\psi$ mas $\overline{\psi}_R = \overline{\psi}L$, devido à presença da matriz γ^0 na definição de $\overline{\psi}$. O mesmo vale para ψ_L e $\overline{\psi}_L$.

- Paridade (P) ou Inversão Espacial sobre os campos

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &\rightarrow \phi(\hat{x}) & \text{S} \\
 \phi(x) &\rightarrow -\phi(\hat{x}) & \text{PS} \\
 \psi(x) &\rightarrow \gamma_0\psi(\hat{x}) & \text{D} \\
 \psi_L(x) &\rightarrow \gamma_0\psi_L(\hat{x}) & \text{D} \\
 V_\mu(x) &\rightarrow V^\mu(\hat{x}) & \text{V} \\
 A_\mu(x) &\rightarrow -A^\mu(\hat{x}) & \text{PV}
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

- Bilineares de Dirac sob P

$$x^\mu \xrightarrow{\text{P}} x_\mu$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1 \psi_2 &\xrightarrow{P} \bar{\psi}_1 \psi_2 \\
\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 &\xrightarrow{P} -\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 \\
\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 &\xrightarrow{P} \bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 \\
\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \psi_2 &\xrightarrow{P} -\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_2 \\
\bar{\psi}_1 \sigma^{\mu\nu} \psi_2 &\xrightarrow{P} \bar{\psi}_1 \sigma_{\mu\nu} \psi_2
\end{aligned} \tag{B.2}$$

- Conjugação de carga (C) sobre campos (complexos)

$$\begin{aligned}
\phi(x) &\rightarrow \phi^*(x) \quad \text{S, PS} \\
\psi(x) &\rightarrow C \bar{\psi}^\top(x) \quad \text{D} \\
\psi_{\underline{R}}(x) &\rightarrow C \overline{(\psi_{\underline{L}})^\top}(x) \quad \text{D} \\
\bar{\psi}(x) &\rightarrow -\psi^\top C^{-1} \quad \text{D} \\
\overline{\psi_{\underline{R}}}(x) &\rightarrow -(\psi_{\underline{L}})^\top C^{-1} \quad \text{D} \\
V_\mu(x) &\rightarrow -V_\mu^*(x) \quad \text{V} \\
A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu^*(x) \quad \text{A}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^\top \tag{B.4}$$

$$C^{-1} \gamma_5 C = \gamma_5^\top \tag{B.5}$$

$$C^\dagger = C^{-1} \tag{B.6}$$

- Bilineares de Dirac sob C

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1 \psi_2 &\xrightarrow{C} \bar{\psi}_2 \psi_1 \\
\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 &\xrightarrow{C} \bar{\psi}_2 \gamma_5 \psi_1 \\
\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 &\xrightarrow{C} -\bar{\psi}_2 \gamma_\mu \psi_1 \\
\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_2 &\xrightarrow{C} \bar{\psi}_2 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_1 \\
\bar{\psi}_1 \sigma_{\mu\nu} \psi_2 &\xrightarrow{C} -\bar{\psi}_2 \sigma_{\mu\nu} \psi_1
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Deve-se tomar cuidado com a anticomutação de campos fermiônicos.

- CP (aplicação do operador \mathcal{P} , depois \mathcal{C}) sobre espinores de Dirac

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\rightarrow \gamma^0 C \bar{\psi}^\top(\hat{x}) \quad \text{D} \\
\psi_{\underline{R}}(x) &\rightarrow \gamma^0 C \overline{\psi_{\underline{L}}^\top}(\hat{x}) \quad \text{D} \\
\bar{\psi}(x) &\rightarrow -\psi^\top(\hat{x}) C^{-1} \gamma^0 \quad \text{D} \\
\overline{\psi_{\underline{R}}}(x) &\rightarrow -(\psi_{\underline{L}}(\hat{x}))^\top C^{-1} \gamma^0 \quad \text{D}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

A primeira e segunda relações acima também podem ser escritas na forma $\gamma^0 C \bar{\psi}^\top(\hat{x}) = -C \psi^*(\hat{x})$.

- Bilineares de Dirac sob CP

$$\begin{aligned}
x^\mu &\xrightarrow{\text{CP}} x_\mu \\
\bar{\psi}_1 \psi_2 &\xrightarrow{\text{CP}} \bar{\psi}_2 \psi_1 \\
\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 &\xrightarrow{\text{CP}} -\bar{\psi}_2 \gamma_5 \psi_1 \\
\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 &\xrightarrow{\text{CP}} -\bar{\psi}_2 \gamma_\mu \psi_1 \\
\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \psi_2 &\xrightarrow{\text{CP}} -\bar{\psi}_2 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_1 \\
\bar{\psi}_1 \sigma^{\mu\nu} \psi_2 &\xrightarrow{\text{CP}} -\bar{\psi}_2 \sigma_{\mu\nu} \psi_1
\end{aligned} \tag{B.9}$$

- Bilineares de Dirac sob T

$$\begin{aligned}
x^\mu &\xrightarrow{\text{T}} -x_\mu \\
\text{c-number} &\xrightarrow{\text{T}} (\text{c-number})^* \\
\bar{\psi}_1 \psi_2 &\xrightarrow{\text{T}} \bar{\psi}_1 \psi_2 \\
\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 &\xrightarrow{\text{T}} -\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 \\
\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 &\xrightarrow{\text{T}} \bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 \\
\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \psi_2 &\xrightarrow{\text{T}} \bar{\psi}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_2 \\
\bar{\psi}_1 \sigma^{\mu\nu} \psi_2 &\xrightarrow{\text{T}} -\bar{\psi}_1 \sigma_{\mu\nu} \psi_2
\end{aligned} \tag{B.10}$$

- Bilineares de Dirac sob CPT

$$\begin{aligned}
x^\mu &\xrightarrow{\text{CPT}} -x^\mu \\
\text{c-number} &\xrightarrow{\text{CPT}} (\text{c-number})^* \\
\bar{\psi}_1 \psi_2 &\xrightarrow{\text{CPT}} \bar{\psi}_2 \psi_1 \\
\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 &\xrightarrow{\text{CPT}} \bar{\psi}_2 \gamma_5 \psi_1 \\
\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 &\xrightarrow{\text{CPT}} -\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 \\
\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \psi_2 &\xrightarrow{\text{CPT}} -\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \gamma_5 \psi_1 \\
\bar{\psi}_1 \sigma^{\mu\nu} \psi_2 &\xrightarrow{\text{CPT}} \bar{\psi}_2 \sigma^{\mu\nu} \psi_1
\end{aligned} \tag{B.11}$$

As propriedades dos bilineares sob CPT mostradas acima sugerem a prova do teorema CPT, que atesta que qualquer teoria de campos local, invariante de Lorentz, é invariante pela operação conjunta de CPT. Podemos ver que a transformação sob CPT, de escalares e pseudoescalares, são iguais, assim como a transformação de vetores e pseudovetores. Para serem invariantes de Lorentz, os termos que compõe a densidade de Lagrangiana devem ser escalares ou pseudoescalares, mas devido ao requerimento de hermiticidade, qualquer termo pseudoescalar é acompanhado pelo seu hermitiano conjugado, que é mapeado por CPT. Para os vetores ou pseudovetores, os mesmos devem ser contraídos entre si para formar escalares ou pseudoescalares, mas novamente tal contração é invariante ou é mapeado no seu hermitiano conjugado.

Para campos complexos poderíamos ter definido as transformações sob C, P, T com a adição de fases complexas arbitrárias, p. ex., a transformação sob P poderia ser: $\phi(x) \rightarrow \eta_P \phi(\hat{x})$. Mas é preciso frisar que as leis de transformação para os bilineares da Eq. (B.7) não é modificada se adicionarmos números complexos, de módulo unitário, às definições das lei de transformação sob C, P e T do campo espinorial livre.

Outro ponto que deve ser mencionado, é que para campos que são autoconjugados pelas operações de simetria discreta, por exemplo, escalares ou pseudoescalares sob paridade, os números quânticos associados têm sentido físico somente em teorias interagentes, sempre quando tais operações representam simetrias exatas ou aproximadas. Em teorias livres, por exemplo, qualquer autovalor (\pm) pode ser atribuída à transformação sob paridade de um campo escalar real.

B.2 Implementação quântica

Para o caso livre, é possível encontrar os operadores quânticos \mathcal{P} , \mathcal{C} e \mathcal{T} , unitários no espaço de operadores do espaço de Fock (\mathcal{T} é antiunitário), que implementam as transformações de simetria para P [Eq. (B.1)], C [Eq. (B.3)] e T. Por exemplo, para o campo escalar sob P, o operador \mathcal{P} induz a transformação

$$\mathcal{P}^{-1}\phi(x)\mathcal{P} = \phi(t, -\mathbf{x}) . \quad (\text{B.12})$$

Da expansão livre do campo escalar complexo,

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_p} [a(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}] , \quad (\text{B.13})$$

onde valem as relações de comutação

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = 2E_p \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') , \quad [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')] = [a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = 0 , \quad (\text{B.14})$$

e igualmente para b, b^\dagger , a condição da Eq. (B.12) equivale às seguintes condições sobre os operadores de destruição de partícula $a(\mathbf{p})$ e antipartícula $b(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{-1}a(\mathbf{p})\mathcal{P} &= a(-\mathbf{p}) , \\ \mathcal{P}^{-1}b(\mathbf{p})\mathcal{P} &= b(-\mathbf{p}) . \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

As relações acima nos levam ao operador de paridade

$$\mathcal{P} = \exp\{\pm i\pi \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_p} [A_-^\dagger(\mathbf{p})A_-(\mathbf{p}) \pm B_-^\dagger(\mathbf{p})B_-(\mathbf{p})]\} , \quad (\text{B.16})$$

onde definimos

$$A_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}[a(\mathbf{p}) + a(-\mathbf{p})] ,$$

$$\begin{aligned}
A_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2}[a(\mathbf{p}) - a(-\mathbf{p})], \\
B_-(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2}[a(\mathbf{p}) + a(-\mathbf{p})], \\
B_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2}[a(\mathbf{p}) - a(-\mathbf{p})].
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Esses operadores são pares (denotados pelo subíndice +) e ímpares (denotados pelo subíndice -) sob \mathcal{P} . Em termos desses operadores as Equações (B.18) podem ser escritas

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{-1}A_+(\mathbf{p})\mathcal{P} &= A_+(\mathbf{p}), \\
\mathcal{P}^{-1}A_-(\mathbf{p})\mathcal{P} &= -A_-(\mathbf{p}), \\
\mathcal{P}^{-1}B_+(\mathbf{p})\mathcal{P} &= B_+(\mathbf{p}), \\
\mathcal{P}^{-1}B_-(\mathbf{p})\mathcal{P} &= -B_-(\mathbf{p}).
\end{aligned} \tag{B.18}$$

As primeira e terceira equações indicam que \mathcal{P} comutam tanto com A_+ e B_+ . Então, \mathcal{P} só pode depender de operadores que comutam com A_+ e B_+ ; estes são A_- , A_-^\dagger e B_+ , B_+^\dagger .

Para adicionar à transformação de paridade uma fase arbitrária $\eta_P = e^{i\alpha_P}$ é preciso adicionar o operador

$$\mathcal{P}_2 = \exp \left[i\alpha_P \int \frac{d^3p}{2E_p} [a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) - b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})] \right], \tag{B.19}$$

à definição do operador de paridade $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{P}_2$. O operador acima nada mais é que o operador $e^{i\alpha_P\hat{Q}}$, onde \hat{Q} é o operador de carga.

Dessa forma, podemos encontrar todas as representações dos operadores de simetria discreta, para campos livres de spin 0, $\frac{1}{2}$ e 1. A forma explícita para o operador de paridade e conjugação de carga, para o espinor de Dirac livre, pode ser encontrada na Ref. [91, p.152].

Por último, a operação de conjugação de carga merece uma discussão mais detalhada acerca de suas propriedades, já que ela não representa uma simetria espaço-temporal como as outras simetrias discretas. Por definição, a conjugação de carga C é a operação que troca partículas por antipartículas. Em termos da expansão de um campo livre quantizado

$$\phi(x) \propto a(\mathbf{p}, \sigma) + b^\dagger(\mathbf{p}, \sigma), \tag{B.20}$$

C deve trocar o operador de criação de partículas a^\dagger pelo operador de criação de antipartículas b^\dagger . Dado o operador unitário de conjugação de carga \mathcal{C} , a condição anterior nos leva a

$$\mathcal{C}^{-1}\phi(x)\mathcal{C} = \phi(x) \Big|_{a \leftrightarrow b}. \tag{B.21}$$

O entendimento clássico (primeira quantização) da operação C pode ser conseguida da equação de Dirac. Sob as transformações de C, a Eq. de Dirac livre é invariante, enquanto que a equação acoplada com um campo eletromagnético externo

$$(i\cancel{\partial} - e\mathcal{A}_{\text{ext}} - m)\psi(x) = 0, \quad (\text{B.22})$$

é invariante se trocarmos $e \rightarrow -e$. Esse comportamento é condizente com a operação C.

B.3 Transformações de CP em multipletos fermiônicos

Seja Ψ um multipleteo espinorial de um grupo de gauge \mathcal{G} , numa dada representação n -dimensional. Para levar em conta grupos de gauge quirais, assumimos que o multipleteo Ψ seja de mão direita $\Psi = \Psi_R$, o que significa que a representação do grupo pode ser redutível. Nesta representação,

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} \psi_{1R} \\ \psi_{2R} \\ \vdots \\ \psi_{nR} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.23})$$

onde cada espinor ψ_{iR} é um espinor de Weyl ou a projeção de mão direita de um espinor de Dirac.

A transformação mais geral de CP, que pode ser efetuado sobre Ψ , é da forma

$$\Psi_R(x) \xrightarrow{\text{CP}} -(\mathcal{U} \otimes C)\Psi_R^*(\hat{x}) \quad (\text{B.24})$$

$$= (\mathcal{U} \otimes \gamma_0 C)\overline{\Psi_R}^\top(\hat{x}). \quad (\text{B.25})$$

onde C é a matriz de conjugação de carga dos espinores, \mathcal{U} é uma matriz constante unitária que atua no espaço de representação do grupo.

Em teorias de gauge, o acoplamento entre férmions e bósons de gauge ocorre através das correntes

$$J_{a\mu} = \bar{\Psi}_R(T_a \otimes \gamma_\mu)\Psi_R, \quad (\text{B.26})$$

onde T_a são os geradores do grupo de gauge.

Se aplicarmos a operação na Eq. (B.24) sobre a corrente da Eq. (B.26), obtemos

$$\begin{aligned} J_{a\mu} &\xrightarrow{\text{CP}} -\Psi_R^\top(\mathcal{U}^\dagger \otimes C^{-1}\gamma_0)(T_a \otimes \gamma_\mu)(\mathcal{U} \otimes \gamma_0 C)\overline{\Psi_R}^\top \\ &= -\Psi_R^\top(\mathcal{U}^\dagger T_a \mathcal{U}) \otimes (-\gamma_\mu^*)\overline{\Psi_R}^\top \\ &= \overline{\Psi_R}(\mathcal{U}^\dagger T_a \mathcal{U})^\top \otimes (-\gamma_\mu^\dagger)\Psi_R \\ &= -I_\mu^\nu \overline{\Psi_R}(\mathcal{U}^\dagger T_a \mathcal{U})^\top \otimes \gamma_\nu \Psi_R. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

É possível mostrar que para grupos de Lie compactos sempre é possível achar uma representação na qual $-T_a^T = \eta_{ab} T_b$, onde $\eta = \text{diag}(-\mathbb{1}_P, \mathbb{1}_Q)$ e $\eta^2 = \mathbb{1}$ [22]. Nesse caso é possível definir a transformação de CP canônica restringindo a Eq. (B.24) com $\mathcal{U} = \mathbb{1}$. Assim a relação da Eq. (B.27) pode ser reescrita

$$J_{a\mu} \xrightarrow{\text{CP}} \eta_{ab} I_\mu^\nu J_{b\nu} . \quad (\text{B.28})$$

Uma observação a respeito dessa base (chamada de base CP na Ref. [22]) é que, muitas vezes, representações reais dos grupos se tornam complexas (representações potencialmente reais). Por exemplo, a representação de spin $S = 1$ para $SU(2)$ possui matrizes complexas na forma de Weyl-Cartan, i.e., quando S_z é diagonal, mas na representação de rotações em três dimensões, a representação é real. Principalmente em relação aos multipletos escalares, deve-se tomar cuidado com as representações adotadas, sejam elas reais, pseudoreais ou complexas. No caso real, sempre pode-se achar uma base em que tanto a representação como também a transformação de CP é real.

B.4 Propriedades das cargas conservadas sobre C, CP e CPT

A íntima relação entre conjugação de carga e o operador de carga pode ser ilustrado usando-se como exemplo uma teoria fermiônica livre, descrita pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) . \quad (\text{B.29})$$

Nesta teoria simples, envolvendo apenas um férmion, existe uma simetria de gauge global baseado no grupo $U(1)$.^{*} Devido à simetria de gauge global, a Lagrangiana é invariante pelas seguintes transformações de fase sobre os campos férmionicos:

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha}\psi(x) . \quad (\text{B.30})$$

Tal simetria contínua, garante, pelo teorema de Noether, a existência de uma corrente conservada,

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \Rightarrow \partial_\mu j^\mu(x) = 0 . \quad (\text{B.31})$$

^{*}se a simetria de gauge global for estendida de modo a permitir que a fase assuma vários valores em função da coordenada do espaço tempo, será necessária a introdução de um bóson de gauge (o fóton), para que a teoria continue a exibir uma invariância por uma simetria de gauge, desta vez, local; tal teoria é a QED.

A conservação desta corrente está ligada a conservação de uma carga Q que pode ser escrita em termos dos campos da teoria:

$$\hat{Q} = \int d^3x j^0(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) . \quad (\text{B.32})$$

Este operador de carga é o gerador, em nível quântico, da transformação de simetria da Eq. (B.30), que é induzida através da aplicação de um operador unitário, na forma

$$e^{-i\alpha\hat{Q}}\psi(x)e^{i\alpha\hat{Q}} = e^{i\alpha}\psi(x) . \quad (\text{B.33})$$

Ao mesmo tempo, a Lagrangiana da Eq. (B.29) possui uma simetria discreta particular, a simetria de conjugação de carga C . Esta simetria também pode ser implementada por um operador unitário \mathcal{C} , que induz a transformação bem conhecida:

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = C\bar{\psi}^\top(x) , \quad (\text{B.34})$$

onde C é a matriz dependente de representação, definida através de $C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^\mu$.

Se aplicarmos a transformação acima na corrente da Eq. (B.31), inverteremos a corrente

$$j^\mu(x) \xrightarrow{C} -j^\mu(x) . \quad (\text{B.35})$$

Conseqüentemente, inverteremos a carga conservada da Eq. (B.32), como esperado de um operador de conjugação de carga.

Em teorias de gauge gerais, quando o grupo de gauge G é generalizado para grupos não abelianos, a relação entre carga conservada e conjugação de carga se torna menos óbvia. Escrevendo todos os multipletos fermiônicos em um único multipletto de mão direita Ψ_R , temos, nesse caso, $d = \dim G$ geradores do grupo $\{T_a\}$, e, portanto, d operadores de carga[†]

$$Q_a = \int d^3x \bar{\Psi}_R (T_a \otimes \gamma^0) \Psi_R . \quad (\text{B.36})$$

Contudo, para grupos não abelianos,

$$[Q_a, Q_b] = if_{abc}Q_c , \quad (\text{B.37})$$

de modo que, quanticamente, todas as cargas não têm realidade observável. O maior número de cargas que comutam entre si é definida pelos geradores da subálgebra de Cartan (SAC), que comumente é escrita na forma diagonal. Por exemplo, as matrizes λ_3, λ_8 formam a SAC para $SU(3)$. Se denotamos por $\{h_i\}$ os geradores

[†]Esta carga é associada à simetria de gauge global. A corrente de Noether associada à simetria de gauge local para grupos não abelianos deve envolver também os bósons de gauge.

da SAC e por Q_{h_i} suas respectivas cargas, podemos ver que especificar todos os números quânticos, em relação à SAC, define todos os estados em relação ao grupo (representação). Então, numa dada base, de acordo com a Eq. (B.28), a operação de C, ou CP, transforma as cargas

$$Q_a \xrightarrow{C} \eta_{ab} Q_b, \quad (\text{B.38})$$

onde $\eta = \text{diag}(-\mathbb{1}_P, \mathbb{1}_Q)$, de forma que algumas cargas trocam de sinal enquanto outras permanecem inalteradas. As cargas na SAC, porém, sempre trocam de sinal

$$Q_{h_i} \xrightarrow{C} -Q_{h_i}. \quad (\text{B.39})$$

Por exemplo, para $SU(3)$, as cargas associadas a $\lambda_{1,3,4,6,8}$ trocam de sinal, enquanto as cargas associadas a $\lambda_{2,5,7}$ permanecem inalteradas. Tal propriedade de transformação para as cargas é condizente com o comportamento esperado da operação de conjugação de carga, pois ela inverte todas as cargas associadas à SAC e, portanto, o operador de conjugação de carga aplicado a um estado rotulado com cargas μ , associadas à SAC (pesos da representação), mapeia o mesmo a um estado com cargas $-\mu$ [22]. O comportamento dos operadores de carga sob CP é a mesma obtida para C.

Por fim, deve ser notado que transformações gerais de C e CP não são capazes de inverter todas as cargas associadas ao grupo de gauge. Contudo a operação CPT, cujo operador Θ é antiunitário, é tal que [127]

$$\Theta^{-1} J_{a\mu}(x) \Theta = -J_{a\mu}(-x), \quad (\text{B.40})$$

e, portanto,

$$\Theta^{-1} Q_a \Theta = -Q_a. \quad (\text{B.41})$$

B.5 Transformação de CP como automorfismo em grupos de gauge

Em teorias gerais de gauge, os vários campos que formam os multipletos de férmions, escalares e bóson de gauge[‡] são conectados pela simetria de gauge. A teoria é invariante por tais transformações e, por isso, essas transformações podem ser incluídas na definição das transformações de CP, além das transformações canônicas expostas na Sec. B.1, que dependiam apenas da natureza dos campos.

[‡]O termo multipletto não é utilizado para os bósons de gauge porque eles sempre se transformam conforme a representação adjunta do grupo de gauge mas é adequado nesse contexto quando significa um conjunto de campos em uma dada representação, em geral, irredutível.

De fato, a transformação adicional sobre cada multipleteo pode até ser mais geral que uma transformação de gauge, como, por exemplo, no caso em que a representação do multipleteo é real (como na adjunta) mas o grupo mais geral em tal caso é o grupo ortogonal que pode conter como subgrupo o grupo de gauge em si. Uma generalização adicional desse tipo de redefinição das transformações de CP é possível quando uma mesma representação aparece mais de uma vez, i.e., quando há a presença de multipletos com os mesmos números quânticos, de maneira que pode-se incluir, na definição das transformações de CP, “rotações” que conectam tais multipletos dentro desse espaço de representação degenerada, espaço o qual chamaremos de **espaços horizontais** [22]. Um importante contra-exemplo, para clarificar a noção de espaço horizontal, pode ser encontrado na QED, que possui duas componentes quirais (Weyl) de mão direita independentes para cada férmion, para formar um espinor de Dirac. Transformações arbitrárias nesse espaço, porém, são proibidas, pois as duas componentes possuem cargas opostas (um espinor e seu conjugado de carga) e, portanto, eles não formam um espaço horizontal.

É sabido que transformações de CP, primariamente devido às transformações de C, envolvem uma operação de conjugação “complexa” (ou hemiteano conjugado) sobre os campos, que tem a função de trocar partícula por antipartícula. Veremos, a seguir, que a composição da operação de conjugação complexa com transformações de gauge, ou rotações nos espaços horizontais, leva à noção de automorfismos nesses grupos de transformação [22, 30].

Começaremos com as condições impostas sobre o setor de puro gauge. A Lagrangiana do setor de gauge de uma teoria invariante pelo grupo de gauge G , é dada por [22, Sec. 3]

$$\mathcal{L}(G) = -\frac{1}{4k} \text{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}], \quad (\text{B.42})$$

onde a definição dos bósons vetoriais e seus tensores é dada por

$$W_\mu \equiv W_{a\mu}T_a, \quad (\text{B.43})$$

$$\mathbb{D}_\mu \equiv \partial_\mu \mathbb{1} + igW_\mu, \quad (\text{B.44})$$

$$G_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{ig}[\mathbb{D}_\mu, \mathbb{D}_\nu]. \quad (\text{B.45})$$

As matrizes $\{T_a\}$ são os geradores de G na representação dos férmions, que obedecem as relações de comutação da álgebra,

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad (\text{B.46})$$

e são normalizados conforme

$$\text{Tr}[T_a T_b] = k\delta_{ab}. \quad (\text{B.47})$$

O grupo de gauge utilizado sempre será compacto e por isso sempre manteremos os índices de grupo subscritos, utilizando somente letras romanas do começo do alfabeto para distingui-los dos índices espaço-temporais. O fato do grupo ser compacto também garante a antissimetria da constante de estrutura $f_{abc} = -f_{bac}$ sob qualquer troca de dois índices e a invariância sobre troca cíclica $f_{abc} = f_{bca} = f_{cab}$.

A transformação mais geral que pode ser definida como transformação de CP para os bósons de gauge é

$$W_{a\mu}(x) \xrightarrow{\text{CP}} (R \otimes IW)_{a\mu} = R_{ab} I_{\mu}^{\nu} W_{b\nu}(\hat{x}) \quad \text{com } R \in O(d_G), \quad (\text{B.48})$$

onde d_G é a dimensão do grupo, que também é o número de bósons de gauge e geradores, $I_{\mu}^{\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a matriz de inversão espacial e a restrição ao grupo ortogonal advém da realidade dos campos de gauge e da invariância da parte quadrática da Lagrangiana da Eq. (B.42) [22]. Já vemos, nesse caso, que a matriz R pode não ser um membro das transformações de gauge na representação adjunta.

A parte de $G_{\mu\nu}$ na Eq. (B.45), que é bilinear nos campos e que dá origem à interação entre bósons de gauge, é da forma

$$-ig[W_{\mu}, W_{\nu}] = gf_{abc} W_{b\mu} W_{c\nu} T_a. \quad (\text{B.49})$$

Esse termo se transforma sob a Eq. (B.48) como

$$gf_{abc}(R \otimes IW)_{b\mu}(R \otimes IW)_{c\nu} T_a = gf_{a'b'c'} R_{b'b} R_{c'c} (IW)_{b\mu} (IW)_{c\nu} T_{a'}. \quad (\text{B.50})$$

Para que o tensor $G_{a\mu\nu}$ se transforme de forma uniforme

$$G_{a\mu\nu}(x) \xrightarrow{\text{CP}} R_{ab} (I \otimes IG_b)_{\mu\nu}, \quad (\text{B.51})$$

é preciso que

$$f_{a'b'c'} R_{a'a} R_{b'b} R_{c'c} = f_{abc}, \quad (\text{B.52})$$

ou seja, que R induza um automorfismo no grupo de gauge (essa é a condição A na Ref. [22]).

A condição na Eq. (B.52) tem de ser compatibilizada com as possíveis transformações de CP no setor fermiônico. Escreveremos todos os férmions em um único multiplete de mão direita ω_R , se transformando conforme a representação D , cujos geradores hermitianos são dados por $\{T_a\}$, o que pode significar que a representação D do grupo de gauge é redutível. Com essa notação, a Lagrangiana fermiônica (parte cinética e interação com os bósons de gauge) é dada por

$$\mathcal{L}(f, G) = \overline{\omega_R} [i\partial - gW] \omega_R. \quad (\text{B.53})$$

(Mesmo as componentes de mão esquerda podem ser escritas dessa forma, sem perda de generalidade.) A transformação mais geral de CP, que pode ser definida sobre o multiplete fermiônico, é dada por

$$\omega_R(x) \xrightarrow{\text{CP}} (\mathcal{U} \otimes C)\omega_R^*(\hat{x}), \quad (\text{B.54})$$

onde \mathcal{U} é uma matriz unitária constante que atua no mesmo espaço de representação de $\{T_a\}$. É possível verificar que a parte cinética se transforma sob a Eq. (B.54) como $\mathcal{L}(f, G; x) \xrightarrow{\text{CP}} \mathcal{L}(f, G; \hat{x})$ enquanto a interação de gauge leva à condição

$$-(\mathcal{U}T_b\mathcal{U}^\dagger)^\top R_{ba} = T_a. \quad (\text{B.55})$$

Repare que a hermiticidade de $\{T_a\}$ assegura a igualdade $T_a^\top = T_a^*$. Consulte a transformação da corrente fermiônica na Eq. (B.27). A Eq. (B.55) é a condição B na Ref. [22].

Já vimos que a condição da Eq. (B.52) requer que a matriz R induza um automorfismo no espaço da álgebra de Lie \mathcal{G} . Desse ponto de vista, a condição da Eq. (B.55) requer que a representação complexo conjugado de $\{T_a\}$ composto com um automorfismo, Eq. (B.52), seja equivalente (mapeável por uma transformação unitária no espaço de representação, inclusive nos espaços horizontais) à própria representação. Pode-se mostrar [22, 73] que qualquer automorfismo pode ser escrito como a composição de um automorfismo interno com um automorfismo externo. Desse modo é necessário considerar somente alguns representantes de cada coset. Quando requeremos que as transformações de CP das Eqs. (B.48) e (B.54) aja conforme a interpretação física de que a conjugação de carga deve reverter todos os números quânticos, chegamos ao automorfismo contragradiente, que mapeia a subálgebra de Cartan para seu oposto. Para representações complexas, a operação de conjugação complexa é exatamente tal automorfismo. Na representação de Weyl-Cartan para álgebras semisimples compactas, temos $-T_a^\top = \eta_{ab}T_b$, $\eta^2 = \mathbb{1}$. Para a representação fundamental de $SU(N)$, temos $\lambda_a^\top = -\eta_{ab}\lambda_b$ onde $\eta = \text{diag}(-\mathbb{1}_p, \mathbb{1}_q)$, $q = r(r-1)/2$ e $p = N^2 - 1 - q$ e $r = N - 1$ é a dimensão do grupo e q é a ordem, i.e., o número de raízes positivas da álgebra. Desse modo, escolhendo $R_{ab} = \eta_{ab}$, chegamos às transformações de CP canônicas [22]

$$W_{a\mu}(x) \xrightarrow{\text{CP}} (R \otimes I)W_{a\mu} = \eta_{ab}I_\mu^\nu W_{b\nu}(\hat{x}), \quad (\text{B.56})$$

$$\omega_R(x) \xrightarrow{\text{CP}} (\mathbb{1} \otimes C)\omega_R^*(\hat{x}), \quad (\text{B.57})$$

Por exemplo, para QED, a conjugação CP na Eq. (B.8)

$$e(x) \xrightarrow{\text{CP}} -Ce^*(x), \quad (\text{B.58})$$

pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} \chi_1(x) \\ \chi_2(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{CP}} -\sigma^3 \otimes C \begin{pmatrix} \chi_1(\hat{x}) \\ \chi_2(\hat{x}) \end{pmatrix}^*, \quad (\text{B.59})$$

dada as definições

$$\chi_{1R}(x) \equiv e_R(x), \quad \chi_{2R}(x) \equiv -\gamma_0 C e_L^*(x), \quad (\text{B.60})$$

e σ^i , com $i = 1, 2, 3$, são as matrizes de Pauli. Com as mesmas definições, a transformação de paridade

$$e(x) \xrightarrow{\text{P}} \gamma_0 e(\hat{x}) \quad (\text{B.61})$$

é escrita na forma

$$\begin{pmatrix} \chi_{1R}(x) \\ \chi_{2R}(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{P}} -i\sigma^2 \otimes C \begin{pmatrix} \chi_{1R}(\hat{x}) \\ \chi_{2R}(\hat{x}) \end{pmatrix}^*. \quad (\text{B.62})$$

Utilizando a representação de Weyl para as matrizes gama, conseguimos as leis de transformação nas Eqs. (C.72) e (C.73), escritas numa forma bem mais compacta em termos da matriz $\zeta = i\sigma^2$, 2×2 , ao invés da matriz $C = (-i\gamma^0\gamma^2)_{\text{Weyl}}$, 4×4 . Para escrever a transformação de CP na forma canônica da Eq. (B.57), é preciso efetuar a substituição $\chi_{2R} \rightarrow i\chi_{2R}$ e $C \rightarrow -C$.

Portanto, é sempre possível definir transformações de CP que deixam invariantes o setor cinético fermiônico, e por analogia, o setor cinético escalar, com acoplamento mínimo e o de puro gauge. Desses setores não há nenhuma condição sobre os espaços horizontais. Veremos na Sec. 3.1.3 (Ap. D) que, no potencial escalar, pode haver necessidade intrínseca de incluir transformações horizontais na definição da transformação CP. Para o setor de Yukawa, as condições para invariância de CP podem ser encontradas na Ref. [22].

Apêndice C

Revisão de espinores e representações do grupo de Lorentz

Sabemos que o modelo padrão (MP) das partículas elementares é um modelo quirial, i.e., ela trata de forma diferente as componentes quirais, direita e esquerda, dos férmions; isso descreve apropriadamente a violação máxima de paridade no setor eletrofraco. Para tratar adequadamente tais férmions quirais surge a necessidade de considerarmos os espinores de Weyl [91] como os blocos fundamentais que descrevem os férmions da teoria, ao invés dos costumeiros espinores de Dirac. O uso de espinores de Weyl já é muito comum, p. ex., no tratamento de supersimetria [132]. Faremos a seguir uma revisão das representações irredutíveis do grupo restrito de Lorentz [127, 133], de onde surgirá naturalmente o conceito de espinor de Weyl.

Ao grupo restrito de Lorentz L_+^\uparrow pode ser associado o grupo das matrizes complexas 2×2 de determinante unitário, que denotaremos por $Sl(2, c)$ [127]. A associação se dá da seguinte maneira: dado um quadrivetor $x^\mu \equiv (x^0, \mathbf{x})$, definimos as matrizes 2×2

$$\underline{x} \equiv x_\mu \bar{\sigma}^\mu = x^0 \mathbb{1} + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} , \quad (\text{C.1})$$

$$\tilde{x} \equiv x_\mu \sigma^\mu = x^0 \mathbb{1} - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} , \quad (\text{C.2})$$

onde $\bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbb{1}, -\boldsymbol{\sigma})$, $\sigma^\mu \equiv (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma})$, $\mathbb{1}$ é a matriz identidade e σ^i são as matrizes de Pauli usuais, enquanto que a métrica de Minkowski que rege o subir e abaixar dos índices espaço-temporais é dada por $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Em contrapartida, podemos reobter o quadrivetor a partir de

$$x^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\underline{x} \sigma^\mu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{x} \bar{\sigma}^\mu) . \quad (\text{C.3})$$

O produto interno quadrivetorial pode ser escrito em termos de

$$\det \underline{x} = x_\mu x^\mu \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} [\det(\underline{x} + \underline{y}) - \det \underline{x} - \det \underline{y}] = x_\mu y^\mu , \quad (\text{C.4})$$

(os mesmos valem para \tilde{x} e \tilde{y}) o que implica que a transformação através de uma matriz A , 2×2 , de determinante unitário ($A \in Sl(2, c)$),

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}' = A\underline{x}A^\dagger, \quad (\text{C.5})$$

preserva as normas na Eq. (C.4). Isso quer dizer que a transformação da Eq. (C.5) induz a transformação restrita de Lorentz

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(A)x^\nu. \quad (\text{C.6})$$

De fato a correspondência $A \rightarrow \Lambda(A)$ é um homomorfismo de $Sl(2, c)$ para L_+^\uparrow de dois para um, pois claramente $\Lambda(-A) = \Lambda(A)$. De forma análoga, podemos ver que

$$\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}'' = A^\dagger \tilde{x} A \quad (\text{C.7})$$

induz a transformação

$$x''^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(A^{-1})x^\nu, \quad [\Lambda^\mu{}_\nu(A^{-1}) = \Lambda_\nu{}^\mu(A)]. \quad (\text{C.8})$$

Isso pode ser verificado pelo mapeamento

$$\tilde{x} = \zeta \underline{x}^\top \zeta^{-1} = \zeta \underline{x}^* \zeta^{-1}, \quad (\text{C.9})$$

que leva à relação

$$\zeta A^\top \zeta^{-1} = A^{-1}. \quad (\text{C.10})$$

A matriz ζ deve ser proporcional a σ^2 , de forma que escolhemos, em particular, $\zeta \equiv i\sigma^2$. É útil definir a operação sobre as matrizes de $Sl(2, c)$

$$A \rightarrow \bar{A} = \zeta A^* \zeta^{-1}, \quad (\text{C.11})$$

de forma que a relação da Eq. (C.10) pode ser escrita como $(\bar{A})^\dagger = A^{-1}$. Note-se que $\zeta \sigma^{\mu*} \zeta^{-1} = \bar{\sigma}^\mu$, significando que a barra sobre σ^μ pode também ser entendido como resultado da operação na Eq. (C.11), além de ser um marcador. Finalmente, das Eqs. (C.5), (C.6), (C.7) e (C.8), juntamente com as definições das Eqs. (C.1) e (C.2), podemos ver que

$$A^\dagger \sigma^\mu A = \Lambda^\mu{}_\nu(A) \sigma^\nu, \quad (\text{C.12})$$

$$\bar{A}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \bar{A} = \Lambda^\mu{}_\nu(A) \bar{\sigma}^\nu. \quad (\text{C.13})$$

Para intuir melhor o mapeamento $A \rightarrow \Lambda(A)$, usaremos a representação

$$A(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) \equiv \exp\left[i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot (\boldsymbol{\theta} + i\boldsymbol{\xi})\right], \quad (\text{C.14})$$

que tem como conjugado

$$\bar{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) \equiv \exp\left[i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot (\boldsymbol{\theta} - i\boldsymbol{\xi})\right]. \quad (\text{C.15})$$

Por exemplo, para um rotação com $A(\theta) = \exp(i\sigma^3\theta/2)$ temos

$$A \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.16})$$

cuja matriz de transformação do lado direito da Eq. (C.16) pode ser escrita como $\Lambda(\theta) = \exp(-iJ_3\theta)$, onde $(J_3)_{ij} = -if_{3ij}$ é o gerador das rotações em torno do eixo z . Por outro lado, para um boost com $A(\xi) = \exp(-\sigma^3\xi/2)$, temos

$$A \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} A^\dagger = \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 & 0 & -\sinh \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \xi & 0 & 0 & \cosh \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.17})$$

onde a transformação de Lorentz induzida é dada por $\Lambda(\xi) = \exp(-iK_3\xi)$. Denotaremos a representação na Eq. (C.14) de $(\frac{1}{2}, 0)$ e a representação na Eq. (C.15) de $(0, \frac{1}{2})$ [133, p.24]. Note que há equivalência entre as representações $\mathcal{D}^{(\frac{1}{2}, 0)^*} \sim \mathcal{D}^{(0, \frac{1}{2})}$. Usando a propriedade $\text{Tr}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) = 2g^{\mu\nu}$ e a Eq. (C.12), podemos relacionar explicitamente

$$\Lambda^\mu{}_\nu(A) = \frac{1}{2} \text{Tr}[A^\dagger \sigma^\mu A \bar{\sigma}_\nu]. \quad (\text{C.18})$$

Neste ponto, podemos definir os espinores de Weyl como objetos que se transformam de acordo com $(\frac{1}{2}, 0)$ ou $(0, \frac{1}{2})$. Dado um espinor ξ que se transforma de acordo com $(\frac{1}{2}, 0)$, i.e.,

$$\xi \rightarrow A\xi, \quad (\text{C.19})$$

pode-se verificar que o espinor definido como

$$\bar{\xi} \equiv \zeta \xi^*, \quad [\bar{\bar{\xi}} = -\xi] \quad (\text{C.20})$$

se transforma de acordo com $(0, \frac{1}{2})$, como

$$\bar{\xi} \rightarrow \bar{A}\bar{\xi}. \quad (\text{C.21})$$

Podemos, então, ver que a combinação

$$\bar{\xi}^\dagger \xi = \xi^\top \zeta^{-1} \xi \quad (\text{C.22})$$

é invariante sob as transformações das Eqs. (C.19) e (C.21), o que corresponde a tomar a parte antissimétrica (singlete) de $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (\frac{1}{2}, 0)$.

Da mesma forma, das leis de transformação nas Eqs. (C.12) e (C.13), podemos ver que os objetos

$$\xi^\dagger \sigma^\mu \xi \rightarrow \Lambda^\mu_\nu(A) \xi^\dagger \sigma^\mu \xi, \quad (\text{C.23})$$

$$\bar{\xi}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \bar{\xi} \rightarrow \Lambda^\mu_\nu(A) \bar{\xi}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \bar{\xi} \quad (\text{C.24})$$

se transformam como vetores sob as transformações das Eqs. (C.19) e (C.21), i.e., sob $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Enfim, dado duas funções espinoriais $\xi(x)$ e $\chi(x)$ que são representações de $(\frac{1}{2}, 0)$, podemos construir equações de movimento que são covariantes [133]:

$$i\partial_\mu \sigma^\mu \xi = m\bar{\chi}, \quad (\text{C.25})$$

$$i\partial_\mu \bar{\sigma}^\mu \bar{\chi} = m\xi, \quad (\text{C.26})$$

e que, ao mesmo tempo, garante que ambos os campos satisfaçam a equação de Klein-Gordon com massa m . Esta última condição implica que devemos substituir m por m^* na Eq. (C.26) quando o parâmetro m é complexo. Obviamente, a “massa” é dada por $|m|$ nesse caso. Se juntarmos os dois espinores em um único objeto, o espinor de Dirac,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \bar{\chi}(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.27})$$

chegamos à equação de Dirac

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0, \quad (\text{C.28})$$

com as matrizes gama na representação quiral

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.29})$$

Se comparado a representação quiral de Itzykson e Zuber [91], temos a identificação $\gamma^\mu \rightarrow -(\gamma^\mu)_{IZ}$. A representação dos outros bilineares, exceto $\gamma^5 \gamma^\mu$, é a mesma, pois

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (\text{C.30})$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{C.31})$$

Nessa representação, a matriz γ^5 assume a forma

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.32})$$

A transformação de Lorentz, nesse caso, é representada por

$$\psi(x) \rightarrow S(A)\psi(\Lambda^{-1}(A)x) , \quad (\text{C.33})$$

onde

$$S(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} . \quad (\text{C.34})$$

Dado que as matrizes gama satisfazem $S^{-1}(A)\gamma^\mu S(A) = \Lambda^\mu{}_\nu(A)\gamma^\nu$, se representarmos

$$S(\omega) = \exp\left[\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right] , \quad (\text{C.35})$$

descobrimos que

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\omega) = \left(\exp\left[\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}\right]\right)^\mu{}_\nu , \quad (\text{C.36})$$

onde

$$(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \equiv i(g^{\alpha\mu}g_\nu^\beta - g_\nu^\alpha g^{\beta\mu}) \quad (\text{C.37})$$

são os geradores do grupo de Lorentz na representação definidora (adjunta).

Uma definição de quiralidade, mão esquerda ou direita, independente da representação e da definição de γ^5 , deve ser feita associando-se a quiralidade à helicidade no limite em que $m \rightarrow 0$. Nesse limite as Eqs. (C.25) e (C.26) se desacoplam nas equações de Weyl:

$$i\partial_\mu\sigma^\mu\xi(x) = (i\partial_0 + i\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi(x) = 0 , \quad (\text{C.38})$$

$$i\partial_\mu\bar{\sigma}^\mu\bar{\chi}(x) = (i\partial_0 - i\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\bar{\chi}(x) = 0 . \quad (\text{C.39})$$

Reescrevendo $\xi(x) = \xi(\mathbf{p})e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ e $\bar{\chi}(x) = \bar{\chi}(\mathbf{p})e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ obtemos

$$E\xi(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\xi(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|h\xi(\mathbf{p}) , \quad (\text{C.40})$$

$$E\bar{\chi}(\mathbf{p}) = -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\bar{\chi}(\mathbf{p}) = -|\mathbf{p}|h\bar{\chi}(\mathbf{p}) , \quad (\text{C.41})$$

onde h é o operador helicidade. Portanto, $\xi(x)$ tem helicidade positiva (mão direita) enquanto que $\bar{\chi}(x)$ tem helicidade negativa (mão esquerda) para energias positivas. Então com a definição de γ^5 na Eq. (C.31), associa-se quiralidade positiva (negativa) com a helicidade positiva (negativa) sem ambigüidades.

Se tivéssemos definido

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \bar{\chi}(x) \\ \xi(x) \end{pmatrix} , \quad (\text{C.42})$$

as matrizes gama seriam dadas pela troca $\boldsymbol{\gamma} \rightarrow -\boldsymbol{\gamma}$ e também $\gamma^5 \rightarrow -\gamma^5$, definindo a componente de mão esquerda como a primeira no ψ de Dirac (a matriz de transformação seria $U = U^{-1} = \sigma^1 \otimes \mathbb{1} = \gamma^0$). Tal definição pode ser mais conveniente

para tratar o MP, já que a componente de mão esquerda é aquela que se transforma não trivialmente sob o grupo de gauge $SU(2)_L$.

Por completeza, transporemos a linguagem matricial para a linguagem espinorial em termos dos índices “com ponto” (*dotted*) e “sem ponto” (*undotted*) [127, 132]. Nessa notação, todos os objetos são caracterizados por índices espinoriais que se transformam de acordo com $\mathcal{D}^{(\frac{1}{2},0)}$, denotados por letras romanas sem ponto, e de acordo com $\mathcal{D}^{(\frac{1}{2},0)*} \sim \mathcal{D}^{(0,\frac{1}{2})}$, denotados por letras romanas com um ponto sobre os mesmos. Por exemplo, dado um objeto $\xi_{a_1 a_2 \dots a_n \dot{b}_1 \dot{b}_2 \dots \dot{b}_m}$, simétrico na permutação de qualquer índice $\{a_i\}$ ou $\{\dot{b}_i\}$, o mesmo se transforma de acordo com

$$\xi_{a_1 a_2 \dots a_n \dot{b}_1 \dot{b}_2 \dots \dot{b}_m} \rightarrow A_{a_1}^{c_1} A_{a_2}^{c_2} \dots A_{\dot{b}_1}^* \dot{d}_1 A_{\dot{b}_2}^* \dot{d}_2 \dots \xi_{c_1 c_2 \dots c_n \dot{d}_1 \dot{d}_2 \dots \dot{d}_m} ; \quad (\text{C.43})$$

tal lei de transformação indica que $\xi_{a_1 \dots}$ forma uma representação de $\mathcal{D}^{(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})}$.

Além disso, podemos definir uma métrica no espaço espinorial, que define invariantes e pode ser usado para subir e descer índices. Visto que a combinação da Eq. (C.22) é invariante, podemos definir como tensor invariante,

$$\epsilon^{ab} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = (\zeta)_{ab} , \quad (\text{C.44})$$

e sua inversa $\epsilon_{ab} = (\zeta^{-1})_{ab} = -(\zeta)_{ab}$ de forma que $\epsilon_{ab}\epsilon^{bc} = \delta_a^c$. Dado um espinor covariante ξ_a , o espinor contravariante é definido como

$$\xi^a = \epsilon^{ab}\xi_b , \quad (\text{C.45})$$

de forma que a Eq. (C.22) pode ser reescrita

$$\xi^a \xi_a = \xi_a \xi_b \epsilon^{ba} = -\xi_a \xi^a . \quad (\text{C.46})$$

A última igualdade deriva da propriedade de anticomutação dos objetos fermiônicos $\{\xi_a, \xi_b\} = 0$. Finalmente, o espinor de Dirac na Eq. (C.27) seria denotado por

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi_a(x) \\ \chi^{\dot{a}}(x) \end{pmatrix} . \quad (\text{C.47})$$

Da mesma forma, os vetores das Eqs. (C.1) e (C.2) são denotados por

$$x_{ab} = (\underline{x})_{ab} = x_{\dot{a}\dot{b}}^* , \quad (\text{C.48})$$

$$x^{\dot{a}\dot{b}} = (\tilde{x})_{ab} = \epsilon^{\dot{a}\dot{c}} \epsilon^{bd} x_{cd}^* . \quad (\text{C.49})$$

Por último, é interessante analisar os termos de massa de Dirac e Majorana [45] sob a perspectiva dos espinores de Weyl. A massa m que aparecia nas Eqs. (C.25)

e (C.26) representa uma massa de Dirac que pode ser descrita pela Lagrangiana, invariante sob Lorentz,

$$-\mathcal{L}_D = m\bar{\chi}^\dagger \xi + m\xi^\dagger \bar{\chi} = m\bar{\psi}\psi . \quad (\text{C.50})$$

Contudo, se não há um número fermiônico conservado e se, além disso, estamos tratando campos fermiônicos anticomutantes (para campos comutantes, p. ex., funções de onda, o termo de massa de Majorana se anula), não há razão para tratar o espinor de Dirac como objeto fundamental e termos adicionais invariantes de Lorentz podem ser construídos com os espinores de Weyl, como, por exemplo, os chamados termos de massa de Majorana,

$$-\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}\mu_1(\bar{\xi}^\dagger \xi + \xi^\dagger \bar{\xi}) + \frac{1}{2}\mu_2(\bar{\chi}^\dagger \chi + \chi^\dagger \bar{\chi}) \quad (\text{C.51})$$

$$= \frac{1}{2}\mu_1\overline{\psi_R^c}\psi_R + \frac{1}{2}\mu_2\overline{\psi_L^c}\psi_L + h.c. \quad (\text{C.52})$$

Na última linha, ψ^c denota o espinor conjugado de carga, o qual é definido a seguir, na Eq. (C.65), e relacionado com os espinores de Weyl via a Eq. (C.68). Juntando ambos os termos, considerando que $\bar{\xi}^\dagger \chi = \bar{\chi}^\dagger \xi$, podemos escrever

$$-\mathcal{L}_D - \mathcal{L}_M = \frac{1}{2}(\bar{\xi}^\dagger \quad \bar{\chi}^\dagger) \begin{pmatrix} \mu_1 & m \\ m & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} + h.c. \quad (\text{C.53})$$

A extensão para n_1 férmions de mão direita (R) e n_2 férmions de mão esquerda (L) pode ser escrita na forma

$$-\mathcal{L}(\text{massa}) = \overline{\psi_{iL}}M_{ia}\psi_{aR} + \frac{1}{2}\overline{\psi_{aR}^c}\mu_{ab}\psi_{bR} + \frac{1}{2}\overline{\psi_{iL}^c}\tilde{\mu}_{ij}\psi_{jL} + h.c. \quad (\text{C.54})$$

$$= \frac{1}{2}\bar{\chi}^\dagger M\xi + \frac{1}{2}\bar{\xi}^\dagger M^\Gamma \chi + \frac{1}{2}\bar{\xi}^\dagger \mu \xi + \frac{1}{2}\bar{\chi}^\dagger \mu \chi + h.c. \quad (\text{C.55})$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{\xi} \quad \bar{\chi})^\dagger \begin{pmatrix} \mu & M \\ M^\Gamma & \tilde{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} + h.c. , \quad (\text{C.56})$$

de modo que $M, \mu, \tilde{\mu}$ são matrizes $n_2 \times n_1$, $n_1 \times n_1$ e $n_2 \times n_2$, respectivamente; enquanto que

$$\psi_{aR} = \begin{pmatrix} \xi_a \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{C.57})$$

$$\psi_{iL} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}_i \end{pmatrix} , \quad (\text{C.58})$$

onde $a = 1, \dots, n_1$ e $i = 1, \dots, n_2$. Notamos também que a matriz na Eq. (C.56), que denotaremos por \mathbb{M} , é simétrica mas pode ser complexa. Visto que os dois

vetores que são contraídos com \mathbb{M} são essencialmente iguais, podemos efetuar uma transformação de base unitária

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (\text{C.59})$$

que induz a transformação $U^\top \mathbb{M} U$ sobre a matriz de massa. É possível mostrar que para qualquer matriz complexa e simétrica \mathbb{M} , existe uma matriz unitária U que diagonaliza

$$U^\top \mathbb{M} U = \text{diag}(m_i), \quad (\text{C.60})$$

com $i = n_1 + n_2$ e $m_i \geq 0$. A prova segue da seguinte maneira: (i) Primeiramente, $\mathbb{M}^\dagger \mathbb{M}$ é diagonalizável por uma matriz unitária U_1 conforme $U_1^\dagger \mathbb{M}^\dagger \mathbb{M} U_1 = \text{diag}(m_i^2)$. (ii) Em segundo, utilizando a decomposição $\mathbb{M} = EH$ ($H^\dagger = H$ e $E^\dagger = E^{-1}$), e escrevendo $\mathbb{M}' = U_1^\top \mathbb{M} U_1 = U_1^\top E U_1 \text{diag}(m_i) \equiv U_2 \text{diag}(m_i)$, a igualdade entre $\text{diag}(m_i^2) = \mathbb{M}'^\dagger \mathbb{M}' = \mathbb{M}'^* \mathbb{M}'^\top = U_2^* \text{diag}(m_i^2) U_2^\top$ é equivalente a

$$[U_2, \text{diag}(m_i^2)] = 0, \quad (\text{C.61})$$

que garante

$$U_2 = \text{diag}(e^{i\varphi_i}), \quad (\text{C.62})$$

se os autovalores m_i não são degenerados. Caso haja degenerescências, é sempre possível escolher uma base em que U_2 é diagonal no subespaço de autovalores degenerados.* Portanto, a Eq. (C.60) é satisfeita com a identificação

$$U = \pm U_1 U_2^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.63})$$

Nesse caso, não há liberdade de fase, exceto pelo sinal \pm , diferentemente do caso somente com termos de massa de Dirac que é o caso da matriz de massa dos quarks na Sec. 2.1.1.

A discussão sobre as simetrias discretas P, C e T dentro do contexto de teorias de gauge foi feita na Sec. B. Podemos, no entanto, expor as leis de substituição para os espiniores de Weyl e Dirac sob P, C e CP.

- Dirac:

$$\psi(x) \xrightarrow{\text{P}} \gamma^0 \psi(\hat{x}) \quad (\text{C.64})$$

$$\psi(x) \xrightarrow{\text{C}} C \gamma^{0\top} \psi^*(\hat{x}) \quad (\text{C.65})$$

$$\psi(x) \xrightarrow{\text{CP}} -C \psi^*(\hat{x}) \quad (\text{C.66})$$

*Tal prova é idêntica à encontrada na Mecânica Quântica que atesta que dois operadores hermitianos que comutam entre si possuem uma base comum na qual são simultaneamente diagonais.

- Weyl:

$$\begin{pmatrix} \xi(x) \\ \bar{\chi}(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{P}} \begin{pmatrix} \bar{\chi}(\hat{x}) \\ \xi(\hat{x}) \end{pmatrix} \quad (\text{C.67})$$

$$\begin{pmatrix} \xi(x) \\ \bar{\chi}(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{C}} \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \bar{\xi}(x) \end{pmatrix} \quad (\text{C.68})$$

$$\begin{pmatrix} \xi(x) \\ \bar{\chi}(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{CP}} \begin{pmatrix} \bar{\xi}(\hat{x}) \\ \chi(\hat{x}) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.69})$$

onde $C \equiv -\sigma^3 \otimes \zeta = -\sigma^3 \otimes i\sigma^2 (= -i\gamma^0\gamma^2)$, $\hat{x} = I_s x = (x^0, -\mathbf{x})$ e “CP” denota a aplicação do operador \mathcal{P} e depois \mathcal{C} . A partir da Eq. (C.68), podemos ver que um espinor de Dirac invariante por conjugação de carga, i.e., um espinor de Majorana, é definido na notação atual pela identificação $\chi = \xi$, de forma que

$$\psi_M(x) \equiv \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \bar{\xi}(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.70})$$

Podemos reescrever as Eqs. (C.67) e (C.69) definindo

$$\underset{\sim}{\psi}(x) \equiv \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.71})$$

que se transforma sob P e CP como

$$\begin{pmatrix} \xi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{P}} \begin{pmatrix} \bar{\chi}(\hat{x}) \\ -\bar{\xi}(\hat{x}) \end{pmatrix} = i\sigma^2 \otimes \zeta \begin{pmatrix} \xi(\hat{x}) \\ \chi(\hat{x}) \end{pmatrix}^* \quad (\text{C.72})$$

$$\begin{pmatrix} \xi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{CP}} \begin{pmatrix} \bar{\xi}(\hat{x}) \\ -\bar{\chi}(\hat{x}) \end{pmatrix} = \sigma^3 \otimes \zeta \begin{pmatrix} \xi(\hat{x}) \\ \chi(\hat{x}) \end{pmatrix}^*. \quad (\text{C.73})$$

Sob uma transformação de gauge global com fase α , $\underset{\sim}{\psi}$ se transforma como

$$\underset{\sim}{\psi}(x) \longrightarrow \exp[i\alpha\sigma^3 \otimes \mathbb{1}] \underset{\sim}{\psi}(x). \quad (\text{C.74})$$

Adicionalmente, podemos reescrever

$$\bar{\psi} i \not{\partial} \psi = \psi^\dagger \begin{pmatrix} i\partial_\mu \sigma^\mu & 0 \\ 0 & i\partial_\mu \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix} \psi = \underset{\sim}{\psi}^\dagger (\mathbb{1}_2 \otimes i\partial_\mu \sigma^\mu) \underset{\sim}{\psi} + \partial_\mu (\)^\mu. \quad (\text{C.75})$$

C.1 Teoria livre para uma partícula de Majorana (férmion neutro)

Revisaremos aqui a teoria livre para uma partícula de Majorana, i.e., um férmion neutro, a fim de esclarecer certos pontos relacionados às massas de férmions na ausência de leis de conservação do número fermiônico, descritos pela Lagrangiana de massa na Eq. (C.53).

Da equação de Dirac, Eq. (C.28), na representação quirial (C.29), obtemos a solução geral

$$\psi(x) = \int \widehat{d\mathbf{p}} \left[\begin{pmatrix} \xi(\mathbf{p}) \\ \frac{p_\mu \sigma^\mu}{m} \xi(\mathbf{p}) \end{pmatrix} g_+(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \begin{pmatrix} -\frac{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}{m} \bar{\chi}(\mathbf{p}) \\ \bar{\chi}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} g_-(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right], \quad (\text{C.76})$$

onde $p_0 = E(\mathbf{p}) \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e $\widehat{d\mathbf{p}} = d^3p (2\pi)^{-3/2} (2E_{\mathbf{p}})^{-1}$. A soma sobre os graus de liberdade de spin estão implícitos.

A transformação de conjugação de carga, definida na Eq. (C.65), leva à função espinorial

$$\psi^c(x) \equiv C \bar{\psi}^\top(x) = \int \widehat{d\mathbf{p}} \left[\begin{pmatrix} \chi(\mathbf{p}) \\ \frac{p_\mu \sigma^\mu}{m} \chi(\mathbf{p}) \end{pmatrix} g_-^*(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \begin{pmatrix} -\frac{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}{m} \bar{\xi}(\mathbf{p}) \\ \bar{\xi}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} g_+^*(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right]. \quad (\text{C.77})$$

Se impusermos a condição de neutralidade

$$\psi^c(x) = \eta \psi(x), \quad (\text{C.78})$$

obtemos as condições

$$g_-^*(\mathbf{p}) = g_+(\mathbf{p}), \quad (\text{C.79})$$

$$\chi(\mathbf{p}) = \eta \xi(\mathbf{p}). \quad (\text{C.80})$$

A função de onda de Majorana livre, que satisfaz tanto a Eq. (C.28) quanto a Eq. (C.78), pode ser parametrizada por

$$\psi_M(x) = \int \widehat{d\mathbf{p}} \left[\begin{pmatrix} \xi(\mathbf{p}) \\ \frac{p_\mu \sigma^\mu}{m} \xi(\mathbf{p}) \end{pmatrix} g(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \eta^* \begin{pmatrix} -\frac{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}{m} \bar{\xi}(\mathbf{p}) \\ \bar{\xi}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} g^*(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right] \quad (\text{C.81})$$

$$= \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta^* \bar{\xi}(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.82})$$

A Eq. (C.82) indica que toda informação contida em ψ_M pode ser resumida no conhecimento do espinor de Weyl

$$\xi(x) = \int \widehat{d\mathbf{p}} [\xi(\mathbf{p}) g(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} - \eta^* \frac{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}{m} \bar{\xi}(\mathbf{p}) g^*(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}]. \quad (\text{C.83})$$

O equivalente da equação de Dirac para $\xi(x)$ é dada pelas equações redundantes

$$i\partial_\mu\sigma^\mu\xi(x) = \eta^*m\bar{\xi}(x) , \quad (\text{C.84})$$

$$i\partial_\mu\bar{\sigma}^\mu\bar{\xi}(x) = \eta m\xi(x) , \quad (\text{C.85})$$

cuja combinação implica que $\xi(x)$ satisfaz a equação de Klein-Gordon, ou seja, $(\square + m^2)\xi(x) = 0$. É importante notar que as Eqs. (C.84) e (C.85) não são lineares em $\xi(x)$, i.e., elas não são invariantes de forma pela substituição $\xi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\xi(x)$, exceto quando $\alpha = 0$. Tais equações podem ser obtidas da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \xi^\dagger i\partial_\mu\sigma^\mu\xi - \frac{1}{2}m(\eta\bar{\xi}^\dagger\xi + \eta^*\xi^\dagger\bar{\xi}) \quad (\text{C.86})$$

$$= \frac{1}{2}\xi^\dagger i\partial_\mu\sigma^\mu\xi + \frac{1}{2}\bar{\xi}^\dagger i\partial_\mu\bar{\sigma}^\mu\bar{\xi} - \frac{1}{2}m(\eta\bar{\xi}^\dagger\xi + \eta^*\xi^\dagger\bar{\xi}) + \partial_\mu(\quad)^\mu . \quad (\text{C.87})$$

Note que os campos $\xi(x)$ e $\xi^*(x)$ devem ser tratados como variáveis grassmanianas independentes: para se obter as equações de Euler-Lagrange deve-se tomar cuidado com o caráter anticomutante, p. ex., $\xi^* \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \xi^*$. Se compararmos a Lagrangiana da Eq. (C.86) para $\eta = 1$ com a Lagrangiana da Eq. (C.51), percebemos que a massa de Majorana m na Eq. (C.86) [ou μ_1 na Eq. (C.51)] nada mais é do que uma massa de Dirac para um férmion de Majorana.

O campo de Majorana livre é obtido pelas substituições $g_+(\mathbf{p}) \rightarrow a(\mathbf{p})$ e $g_+(\mathbf{p}) \rightarrow a^\dagger(\mathbf{p})$, que satisfazem a regra de anticomutação

$$\{a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')\} = 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') ; \quad (\text{C.88})$$

todas as outras combinações são nulas. Com essa substituição, o campo livre de Majorana pode ser descrito por

$$\xi(x) = \int \widehat{d\mathbf{p}} [\xi_+(\mathbf{p}, s)a(\mathbf{p}, s)e^{-ip \cdot x} + \eta^*\xi_-(\mathbf{p}, s)a^\dagger(\mathbf{p}, s)e^{ip \cdot x}] , \quad (\text{C.89})$$

onde

$$\xi_+(\mathbf{p}, s) \equiv \frac{m + p_\mu\bar{\sigma}^\mu}{\sqrt{2(E + m)}}\xi_s , \quad (\text{C.90})$$

$$\xi_-(\mathbf{p}, s) \equiv -\frac{m + p_\mu\bar{\sigma}^\mu}{\sqrt{2(E + m)}}\bar{\xi}_s = -\frac{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}{m}\bar{\xi}_+(\mathbf{p}, s) , \quad (\text{C.91})$$

cuja a normalização é fixada por $\xi_s^\dagger\xi_{s'} = \bar{\xi}_{s'}^\dagger\bar{\xi}_s = \delta_{ss'}$. Note que com essa normalização, o limite $m \rightarrow 0$ pode ser efetuado sem singularidades. Tais espinores satisfazem

$$\sum_s \xi_+(\mathbf{p}, s)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}, s) = \sum_s \xi_-(\mathbf{p}, s)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}, s) = p_\mu\bar{\sigma}^\mu , \quad (\text{C.92})$$

o que garante a relação de anticomutação canônica (RAC)

$$\{\xi(x), \xi^\dagger(y)\} \delta(x_0 - y_0) = \delta^4(x - y) . \quad (\text{C.93})$$

Visto que η é um fator de fase arbitrário, os observáveis físicos da teoria não podem depender desse fator. Isso pode ser verificado explicitamente para a Hamiltoniana

$$H = : \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \xi)} \partial_0 \xi + \partial_0 \xi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \xi^\dagger)} - \mathcal{L} \right] : \quad (\text{C.94})$$

$$= : \int d^3x \left[\xi^\dagger(-i) \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \xi + \frac{1}{2} m (\eta \bar{\xi}^\dagger \xi + \eta^* \xi^\dagger \bar{\xi}) \right] : \quad (\text{C.95})$$

$$= \int \frac{d^3p}{2E(\mathbf{p})} E(\mathbf{p}) \sum_s a(\mathbf{p}, s) a^\dagger(\mathbf{p}, s) . \quad (\text{C.96})$$

O ordenamento normal, denotado por $: \ :$, é necessário para eliminar infinitos espúrios.

Podemos então adotar, sem perda de generalidade, o valor particular $\eta = 1$. A Lagrangiana da Eq. (C.86) pode ser restaurada pela transformação

$$\xi(x) \rightarrow \pm e^{i\alpha/2} \xi(x) , \quad (\text{C.97})$$

que equivale, para espinores de Dirac, a uma transformação de gauge quirial:

$$\psi_M(x) \rightarrow \pm e^{i\gamma^5 \alpha/2} \psi_M(x) , \quad (\text{C.98})$$

com a identificação $\eta = e^{i\alpha}$. Veja-se que uma transformação de gauge vetorial, $\psi_M(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi_M(x)$, é inconsistente com a forma de um campo de Majorana na Eq. (C.82), exceto quando $\alpha = 0$, o que implica carga nula. Na teoria quantizada, a transformação da Eq. (C.97) pode ser gerada pelo operador

$$Q(x_0) =: \int d^3x \xi^\dagger(x) \xi(x) : , \quad (\text{C.99})$$

através de

$$e^{-i\alpha Q(x_0)} \xi(x) e^{i\alpha Q(x_0)} = e^{i\alpha} \xi(x) . \quad (\text{C.100})$$

Tal relação pode ser facilmente verificada usando a RAC da Eq. (C.93).

Por último, dada a Lagrangiana da Eq. (C.53), que descreve dois campos de Weyl livres quando acrescido dos termos cinéticos, encontraremos os campos físicos que possuem massa definida. Para isso temos de diagonalizar a matriz de massa, presente na Lagrangiana da Eq. (C.53), que denotaremos por \mathbb{M} , através da transformação ($UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$)

$$\begin{pmatrix} \phi_+(x) \\ \phi_-(x) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \quad (\text{C.101})$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_+(x) & \bar{\phi}_-(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}(x) & \bar{\chi}(x) \end{pmatrix} U^\dagger . \quad (\text{C.102})$$

Primeiramente, calculamos os autovalores de

$$\mathbb{M}^\dagger \mathbb{M} = \begin{pmatrix} |\mu_1|^2 + |m|^2 & \mu_1^* m + m^* \mu_2 \\ \mu_1 m^* + m \mu_2^* & |\mu_2|^2 + |m|^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.103})$$

considerando, sem perda de generalidade, μ_1, μ_2 reais e positivos, e $m = |m|e^{i\varphi}$,

$$m_{\frac{1}{2}}^2 = |m|^2 + \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{2}\right)^2 + |m|^2[\cos^2 \varphi (\mu_1 + \mu_2)^2 + \sin^2 \varphi (\mu_1 - \mu_2)^2]}. \quad (\text{C.104})$$

A matriz unitária U_1 , que diagonaliza $\mathbb{M}^\dagger \mathbb{M}$, é dada pela Eq. (A.23) (sem a matriz U_1^\dagger que é convencional)

$$U_1 = e^{-i\sigma_3\alpha/2} e^{-i\sigma_2\beta/2} \quad (\text{C.105})$$

onde

$$\tan \alpha = \frac{B_2}{B_1} = -\tan \varphi \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (\text{C.106})$$

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}{B_3} = \frac{2|m|}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \sqrt{\cos^2 \varphi (\mu_1 + \mu_2)^2 + \sin^2 \varphi (\mu_1 - \mu_2)^2} \quad (\text{C.107})$$

$$\mathbb{M}^\dagger \mathbb{M} \equiv B_0 \mathbb{1} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{C.108})$$

Em seguida, calculamos

$$U_1^\dagger \mathbb{M} U_1 = \frac{2|m|e^{i\varphi}}{\sqrt{(m_1^2 - m_2^2)^2 - (\mu_1^2 - \mu_2^2)^2}} \left[\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2} \mathbb{1} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2} \sigma_3 + \mu_1 \mu_2 e^{-2i\varphi} \mathbb{1} \right], \quad (\text{C.109})$$

e verificamos, após um pouco de álgebra, que

$$|(U_1^\dagger \mathbb{M} U_1)_{ii}|^2 = m_i^2, \quad (\text{C.110})$$

como deveria, pois $(U_1^\dagger \mathbb{M} U_1)^\dagger (U_1^\dagger \mathbb{M} U_1) = \text{diag}(m_i^2)$. Então,

$$U_1^\dagger \mathbb{M} U_1 = e^{i\varphi} \text{diag}(m_1 e^{-i\varphi_1}, m_2 e^{-i\varphi_2}) \equiv U_2 \text{diag}(m_1, m_2), \quad (\text{C.111})$$

onde

$$\tan \varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi + \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2\mu_1 \mu_2} \pm \frac{m_1^2 - m_2^2}{2\mu_1 \mu_2}} \quad (\text{C.112})$$

$$U_2 \equiv \text{diag}(e^{i(\varphi - \varphi_1)}, e^{i(\varphi - \varphi_2)}). \quad (\text{C.113})$$

Então $U^\dagger \mathbb{M} U = \text{diag}(m_i)$, com $m_1 > m_2 > 0$ e

$$U = \pm U_1 U_2^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.114})$$

Ao encontrarmos a forma explícita de U , concluímos o procedimento de diagonalização da matriz de massa para dois férmions de Weyl com termos de massa gerais, de Majorana e de Dirac. Obviamente, este procedimento pode ser generalizado para o caso com mais de dois espinores de Weyl, com termos de massas gerais, como na Eq. (C.56). Este exemplo também ilustra que a relação entre os campos com massas definidas e os campos originais que aparecem nas Lagrangianas, geralmente campos que possuem propriedades de transformação de gauge bem definidas, dependem de fases (U_2) que não podem ser removidas; essa é a origem das fases de Majorana como fonte de violação de CP. Repare que para dois férmions de Dirac que se misturam, a matriz de mistura pode ser sempre escolhida como real pela liberdade de redefinição dos campos de Dirac.

Para o caso especial onde $\varphi = 0, \pi$, podemos diagonalizar \mathbb{M} diretamente através de uma matriz ortogonal real O_1 e conseguimos $O_1^\top \mathbb{M} O_1 = \text{diag}(m_1, \pm m_2) = U_2 \text{diag}(m_i)$, com $m_i > 0$. Dependendo se o denominador da Eq. (C.112) é positivo ou negativo, temos as soluções $U_2 = \text{diag}(1, \pm 1)$, respectivamente. Em ambos os casos, $U = \pm O_1 U_2^{-\frac{1}{2}}$. A forma explícita dos autovalores pode ser escrita

$$m_{\frac{1}{2}} = |\bar{\mu} \pm \sqrt{m^2 + (\Delta\mu/2)^2}| = e^{i\varphi_{\frac{1}{2}}} [\bar{\mu} \pm \sqrt{m^2 + (\Delta\mu/2)^2}], \quad (\text{C.115})$$

onde $2\bar{\mu} \equiv \mu_1 + \mu_2$, $\Delta\mu \equiv \mu_1 - \mu_2$, $\varphi_1 = 0$ mas $\varphi_2 = 0$ ou π . Compare com os autovalores para o caso $\varphi \neq 0, \pi$ na Eq. (C.104).

Como os termos cinéticos são invariantes por uma transformação unitária entre ξ e χ , os campos que tem massa definida são dados por

$$\phi_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{\Delta\mu}{\Delta m})} \left[\xi(x) + \frac{2m}{\Delta m + \Delta\mu} \chi(x) \right], \quad (\text{C.116})$$

$$\phi_2(x) = -i \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{\Delta\mu}{\Delta m})} \left[\chi(x) - \frac{2m}{\Delta m + \Delta\mu} \xi(x) \right], \quad (\text{C.117})$$

onde $\Delta m = 2\sqrt{(\Delta\mu/2)^2 + m^2}$. A Lagrangiana da Eq. (C.53), escrita em termos dos campos com massa definida, assume a forma diagonal

$$-\mathcal{L}_{M+D} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} m_i (\bar{\phi}_i^\dagger \phi_i + \phi_i^\dagger \bar{\phi}_i). \quad (\text{C.118})$$

Trataremos alguns casos particulares para ilustração, a saber, o mecanismo *seesaw* e o caso dos férmions de Dirac. O mecanismo *seesaw* [45], para uma família, pode ser realizado com o uso da matriz de massa

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu & m \\ m & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.119})$$

com $\mu \gg m > 0$ reais, cujos autovalores são

$$M_+ \approx \mu + \frac{m^2}{\mu} \quad (\text{C.120})$$

$$M_- \approx \frac{m^2}{\mu} . \quad (\text{C.121})$$

A menor massa M_- seria atribuída a um neutrino ativo e sua pequenez é explicada pela supressão através da massa de Majorana μ advinda de setores de mais alta energia que o MP. Os campos de Weyl com massa definida são dados por

$$\phi_+(x) \approx \xi(x) + \frac{m}{\mu}\chi(x) , \quad (\text{C.122})$$

$$\phi_-(x) \approx -i\chi(x) + i\frac{m}{\mu}\xi(x) . \quad (\text{C.123})$$

Para tratar o caso de férmions de Dirac, basta tomar $\mu_1 = \mu_2 = 0$ na matriz de massa \mathbb{M} da Eq. (C.53) e nas Eqs. (C.115)–(C.117). Estabelece-se então a equivalência entre um férmion livre de Dirac e dois férmions livres de Majorana com massa degenerada. A equivalência se dá da seguinte maneira: dada a Lagrangiana de Dirac para um férmion de massa m e a Lagrangiana para dois férmions de Majorana com massa m , respectivamente,

$$\mathcal{L}_D = \xi^\dagger i\partial_\mu \sigma^\mu \xi + \chi^\dagger i\partial_\mu \sigma^\mu \chi - m(\xi^\dagger \bar{\chi} + \bar{\chi}^\dagger \xi) \quad (\text{C.124})$$

$$\mathcal{L}_{2M} = \phi_1^\dagger i\partial_\mu \sigma^\mu \phi_1 + \phi_2^\dagger i\partial_\mu \sigma^\mu \phi_2 - \frac{1}{2}m(\bar{\phi}_1^\dagger \phi_1 + \phi_1^\dagger \bar{\phi}_1) - \frac{1}{2}m(\bar{\phi}_2^\dagger \phi_2 + \phi_2^\dagger \bar{\phi}_2) , \quad (\text{C.125})$$

a relação entre os campos nas duas Lagrangianas é

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{\xi(x) + \chi(x)}{\sqrt{2}} , & \xi(x) &= \frac{\phi_1(x) + i\phi_2(x)}{\sqrt{2}} , \\ \phi_2(x) &= \frac{\xi(x) - \chi(x)}{i\sqrt{2}} , & \chi(x) &= \frac{\phi_1(x) - i\phi_2(x)}{\sqrt{2}} , \end{aligned} \quad (\text{C.126}) \quad (\text{C.127})$$

Note-se que a simetria de gauge permanece nas duas Lagrangianas pela invariância sob as transformações

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} . \quad (\text{C.128}) \quad (\text{C.129})$$

Veja-se que as respectivas cargas, geradoras da simetria, são dadas por

$$Q = \int d^3x \psi^\dagger \psi = \int d^3x (\xi^\dagger \xi - \chi^\dagger \chi) = i \int d^3x (\phi_1^\dagger \phi_2 - \phi_2^\dagger \phi_1) . \quad (\text{C.130})$$

A transformação da Eq. (C.126) é equivalente à transformação entre dois campos escalares reais e um campo escalar complexo.

Apêndice D

Condições para violação CP em modelos com N dubletos de Higgs

Este trabalho foi publicado como [30]: C. C. Nishi, “CP violation conditions in N-Higgs-doublet potentials,” Phys. Rev. D **74** (2006) 036003 [arXiv:hep-ph/0605153].

Addendum:

Foi levantada pelo Prof. Alex G. Dias a possibilidade de acrescentar o termo de ordem quatro $|\Phi_2^\top i\sigma_2 \Phi_1|^2$ ao potencial da Eq. (2) deste trabalho, pois o mesmo é também invariante de gauge e renormalizável. Contudo, vale a igualdade

$$|\Phi_2^\top i\sigma_2 \Phi_1|^2 = \Phi_2^\dagger \Phi_2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 - \Phi_2^\dagger \Phi_1 \Phi_1^\dagger \Phi_2, \quad (\text{D.1})$$

que permite reescrever tal termo como combinação dos termos já incluídos na Eq. (2).

***CP* violation conditions in *N*-Higgs-doublet potentials**

C. C. Nishi

Instituto de Física Teórica, UNESP—São Paulo State University Rua Pamplona, 14501405-900, São Paulo, Brazil

(Received 17 May 2006; published 10 August 2006)

Conditions for *CP* violation in the scalar potential sector of general *N*-Higgs-doublet models are analyzed from a group theoretical perspective. For the simplest two-Higgs-doublet model potential, a minimum set of conditions for explicit and spontaneous *CP* violation is presented. The conditions can be given a clear geometrical interpretation in terms of quantities in the adjoint representation of the basis transformation group for the two doublets. Such conditions depend on *CP*-odd pseudoscalar invariants. When the potential is *CP* invariant, the explicit procedure to reach the real *CP*-basis and the explicit *CP* transformation can also be obtained. The procedure to find the real basis and the conditions for *CP* violation are then extended to general *N*-Higgs-doublet model potentials. The analysis becomes more involved and only a formal procedure to reach the real basis is found. Necessary conditions for *CP* invariance can still be formulated in terms of group invariants: the *CP*-odd generalized pseudoscalars. The problem can be completely solved for three Higgs-doublets.

DOI: [10.1103/PhysRevD.74.036003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.036003)

PACS numbers: 11.30.Er, 02.20.Sv, 12.60.Fr, 14.80.Cp

I. INTRODUCTION

It is well known that group automorphisms play an important role in the *CP* violation phenomenon. In a extensive paper, Grimus and Rebelo [1] have analyzed the *CP*-type transformations as automorphisms in the gauge symmetry present in the quantum field theory (QFT) models of particle physics. They showed, at the classical level, that general gauge theories with fermions and scalars coupled to gauge bosons through minimal coupling are always *CP* invariant. In other words, a *CP*-type transformation that is a symmetry of the theory can always be found. The only terms that can possibly violate the *CP* symmetry are the Yukawa couplings and scalar potentials. In the standard model (SM), the unique source of *CP* violation comes from the complex phases in the Yukawa couplings that are transferred to the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) matrix [2] after spontaneous electroweak symmetry breaking (EWSB). Within such context the possibility of (explicit) *CP* violation is intimately connected with the presence of a horizontal space: the quarks come in three identical families distinguished only by their masses.

Another source of *CP* violation could arise in the scalar potential sector [3]. In such case two patterns can be possible, either the *CP* symmetry is violated explicitly in the theory before EWSB or the *CP* violation arises spontaneously jointly with EWSB. Several models with spontaneous *CP* violation arising from the Higgs sector were constructed after Refs. [4,5], aiming to attribute to the violation of *CP* the same origin of the broken-hidden gauge symmetries. Nonetheless, the available *CP* violation data seems to be in general accordance with the SM CKM mechanism [6,7]. Then, concerning the *CP* violation data, restricted by mixing constraints and strong suppression of flavor changing neutral currents (FCNC) [8], the challenge

is to develop a model that incorporates entirely or partially the CKM mechanism.

The scalar potential sector, although phenomenologically rich in *CP* violating sources (see, e.g., Refs. [5,9]), has not yet been analyzed for general gauge theories under a group theoretical perspective. One of the reasons for the difficulty for a general treatment is that the scalar potential involves higher order combinations of scalar fields than other sectors of gauge theories, with terms constrained only by the underlying gauge symmetries and, if required, renormalizability. Renormalizability in four dimensions constrains the highest order scalar field combination to be quartic.

Another difficulty for analyzing the *CP* violation properties for general gauge theories is the freedom to change the basis of fields used to describe the theory. The most familiar is the SM's rephasing freedom for the quark fields: this change of basis transforms the CKM matrix and the complex entries. Such ambiguity can be avoided by using rephasing invariants [10] which depend only on one physically measurable *CP* phase. More generally, for theories with horizontal spaces, there is a freedom to continuously rotate the basis of such spaces without changing the physical content. For this case, it is also possible to write the observables in a basis independent manner [11–16], or, in other words, in terms of reparametrization invariants [17]. In any case, it is important to be able to establish general conditions for *CP* violation to analyze more transparently the possible *CP* violating patterns for gauge theories with large gauge groups and/or horizontal spaces.

Following this spirit of classifying and quantifying *CP* violation based on basis invariants, it will be treated here the simplest class of extensions of the SM: the multi-Higgs-doublet models [18–21], which we shall denote by NHDM for *N* Higgs-doublets. The simplest of them is the two-Higgs-doublet model (2HDM) which has been extensively studied in the literature [9,22,23], also employing

*Electronic address: ccnishi@ift.unesp.br

the basis independent methods [12–16]. An explicit but not complete study for 3HDM potentials can be found in Ref. [16]. The recent interest is based on the fact that the 2HDM can be considered as an effective theory of the minimal supersymmetric extension of the SM (MSSM) [22], which requires two Higgs-doublets from supersymmetry.

Concerning the 2HDMs, a throughout analysis of the CP symmetry aspect of the 2HDM potentials was presented recently [14,15]. The necessary and sufficient conditions for spontaneous and explicit CP violation were presented, expressed in terms of basis independent conditions and invariants. In this respect, in Sec. II, a more compact version of such proofs will be shown. The approach used is much alike the one presented in Ref. [15]: from group theoretical analysis, the adjoint representation can be used as the minimum nontrivial representation of the transformation group of change of basis for the two doublets, i.e., the horizontal $SU(2)$ group. Working with the adjoint representation allows for an alternative formulation of the CP invariance conditions which facilitate the analysis and enables one, when the potential is CP invariant, to find the explicit CP transformation and the explicit *real basis* [12], i.e., the basis for which all the parameters in the potential are real. Such issues were not addressed in previous approaches [14–16]. The basis independent conditions are formulated in terms of pseudoscalars of the adjoint. We also obtain the necessary and sufficient conditions to have spontaneous CP violation.

In Sec. III, an extension of the method is attempted to treat general NHDMs. The analysis becomes much more involved than the $N = 2$ case and further mathematical machinery is necessary. Nevertheless, stringent necessary conditions for CP invariance can be formulated. Generalized pseudoscalars, which should be null for a CP invariant potential, can still be constructed. For $N = 3$, the conditions found are shown to be sufficient if supplemented by an additional condition. A brief account on spontaneous CP violation on NHDMs also is presented.

Finally, in Sec. IV we draw some conclusions and discuss some possible approaches for the complete classification of the CP -symmetry properties for the NHDMs. (Some useful material is also presented in the appendices.)

II. $N = 2$ HIGGS-DOUBLETS

For $N = 2$ Higgs-doublets Φ_a , $a = 1, 2$, transforming under $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ as $(2,1)$, the minimal gauge invariant combinations that can be constructed are

$$A_a = \Phi_a^\dagger \Phi_a \quad a = 1, 2, \quad B = \Phi_1^\dagger \Phi_2 \quad \text{and} \quad B^\dagger. \quad (1)$$

All other invariants can be constructed as combinations of these ones [24]. Thus the most general renormalizable 2HDM potential can be parametrized as [14]

$$\begin{aligned} V(\Phi) = & m_{11}^2 A_1 + m_{22}^2 A_2 - (m_{12}^2 B + \text{h.c.}) + \frac{\lambda_1}{2} A_1^2 \\ & + \frac{\lambda_2}{2} A_2^2 + \lambda_3 A_1 A_2 + \lambda_4 B B^\dagger \\ & + \left\{ \frac{\lambda_5}{2} B^2 + [\lambda_6 A_1 + \lambda_7 A_2] B + \text{h.c.} \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

From the Hermiticity condition, $\{m_{11}^2, m_{22}^2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ are real parameters and $\{m_{12}^2, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7\}$ are potentially complex, summing up to $6 + 2 \times 4 = 14$ real parameters.

The existence of complex parameters *per se*, though, does not mean the potential in Eq. (2) is CP violating. A $U(2)_H$ horizontal transformation can be performed on the two doublets possessing identical quantum numbers, except, perhaps, for their masses,

$$\Phi \rightarrow U\Phi \quad (3)$$

where U is a $U(2)$ transformation matrix and Φ denotes the assembly of the two doublets in

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Actually, the global phase transformation in U amounts for a hypercharge transformation under which the gauge invariants in Eq. (1) do not change. Thus only a $U \in SU(2)_H$ transformation needs to be considered. This basis transformation freedom suggests, and indeed it can be proved [3,14], that the necessary and sufficient conditions for $V(\Phi)$ to be CP invariant are equivalent to the existence of a basis reached by a transformation U (4) in which all the parameters present in the potential are real. Since these basis transformations can be reformulated as transformations on the parameters, all the analysis resumes in investigating the transformation properties of the parameters of $V(\Phi)$ under $SU(2)_H$. Indeed, the parameters can be written as higher order tensors, transforming under the fundamental representation of $SU(2)_H$ [12–14].

Instead of performing the analysis of tensors under the fundamental representation $\mathbf{2}$ of $SU(2)_H$, as in Ref. [14], we can take advantage of the form of the minimal invariants (1) that transform as $\bar{\mathbf{2}} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$, by using as the minimal nontrivial representation the adjoint $\mathbf{3}$. In fact this property does not depend on the number of doublets N , and the invariants of the type of Eq. (1) always form representations of $SU(N)_H$ with decomposition

$$\bar{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{N} = \text{adj} \oplus \mathbf{1}. \quad (5)$$

This property will be exploited in Sec. III to treat general N -Higgs-doublet potentials.

For $SU(2)_H$, the decomposition in Eq. (6) can be performed by using instead of $\{A_1, A_2, B, B^\dagger\}$ the real combinations

$$\mathbb{A}_\mu \equiv \frac{1}{2} \Phi^\dagger \sigma_\mu \Phi, \quad \mu = 0, 1, \dots, 3, \quad (6)$$

where $\sigma_\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma})$. The Greek index is not a space-time index, which means there is no distinction between cova-

riant or contravariant indices but the convention of summation over repeated indices will be used. The indices running over $\mu = i = 1, 2, 3$ are group indices in the space of the Lie algebra, i.e., in the adjoint representation and the $\mu = 0$ index is the trivial singlet component. The explicit change of basis reads

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 &= \frac{A_1 + A_2}{2}, & \mathbb{A}_3 &= \frac{A_1 - A_2}{2}, \\ \mathbb{A}_1 &= \frac{B + B^\dagger}{2} = \text{Re}B, & \mathbb{A}_2 &= \frac{B - B^\dagger}{2i} = \text{Im}B, \end{aligned} \quad (7)$$

which can be readily inverted and inserted in the potential of Eq. (2) to give compactly

$$V(\mathbb{A}) = M_\mu \mathbb{A}_\mu + \mathbb{A}_\mu \Lambda_{\mu\nu} \mathbb{A}_\nu, \quad (8)$$

where

$$\{M_\mu\} = (m_{11}^2 + m_{22}^2, -2 \text{Re}m_{12}^2, 2 \text{Im}m_{12}^2, m_{11}^2 - m_{22}^2) \quad (9)$$

$$\Lambda = \{\Lambda_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} + \lambda_3 & \text{Re}(\lambda_6 + \lambda_7) & -\text{Im}(\lambda_6 + \lambda_7) & \Delta\lambda/2 \\ \text{Re}(\lambda_6 + \lambda_7) & \lambda_4 + \text{Re}\lambda_5 & -\text{Im}\lambda_5 & \text{Re}(\lambda_6 - \lambda_7) \\ -\text{Im}(\lambda_6 + \lambda_7) & -\text{Im}\lambda_5 & \lambda_4 - \text{Re}\lambda_5 & -\text{Im}(\lambda_6 - \lambda_7) \\ \Delta\lambda/2 & \text{Re}(\lambda_6 - \lambda_7) & -\text{Im}(\lambda_6 - \lambda_7) & \bar{\lambda} - \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

and $\bar{\lambda} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Notice that all parameters in this basis are real and the criterion for CP violation have to be different of the reality condition. Furthermore, Λ is real and symmetric.

The coefficients of M can be more conveniently written as

$$M_\mu \equiv \text{Tr}[\sigma_\mu Y], \quad (11)$$

where

$$Y = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -m_{12}^2 \\ -m_{12}^{2*} & m_{22}^2 \end{pmatrix} = M_\mu \frac{1}{2} \sigma_\mu, \quad (12)$$

is the mass matrix for

$$V(\Phi)|_{\Phi^2} = \Phi^\dagger Y \Phi. \quad (13)$$

These relations can be easily extended to general N doublets by replacing the $\{\sigma_i\}$ matrices by the proper generators of $SU(N)_H$, $\{\lambda_i\}$, and the corresponding identity matrix. The relation (11) follows from the completeness of the basis $\{\sigma_\mu\}$ in the space of complex 2×2 matrices [25].

Expanding Eq. (8) in terms of the irreducible pieces of $\mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$,

$$\begin{aligned} V(\mathbb{A}) &= M_0 \mathbb{A}_0 + \Lambda_{00} (\mathbb{A}_0)^2 + M_i \mathbb{A}_i + 2\Lambda_{0i} \mathbb{A}_0 \mathbb{A}_i \\ &+ \mathbb{A}_i \tilde{\Lambda}_{ij} \mathbb{A}_j, \end{aligned} \quad (14)$$

we identify two vectors $\mathbf{M} \equiv \{M_i\}$, $\mathbf{\Lambda}_0 \equiv \{\Lambda_{0i}\}$ and one rank two tensor $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{\Lambda}_{ij}\}$ with respect to $\mathbf{3}$. Further mention to the representation will be suppressed and it will be assumed that the representation in question is the adjoint if otherwise not stated. (For example, “vectors” and “tensors” transform under the adjoint.) The tensor $\tilde{\Lambda}$ can be further reduced into irreducible pieces following $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{1}$ as

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}^{(0)} + \tilde{\Lambda}^{(5)}. \quad (15)$$

The singlet component is just $\tilde{\Lambda}^{(0)} = \frac{1}{3} \text{Tr}[\tilde{\Lambda}] \mathbb{1}_3$, and the remaining of $\tilde{\Lambda}$ is the $\mathbf{5}$ -component. This last decomposition of $\tilde{\Lambda}$, though, will not be necessary for the analysis because of the particular fact that the adjoint of $SU(2) \sim SO(3)$ and all analysis can be done considering the rotation group in three dimensions, which is very much known. The $SU(2) \rightarrow SO(3)$ two-to-one mapping is given by the transformation induced by Eq. (3) over the invariants \mathbb{A}_μ ,

$$\mathbb{A}_0 \rightarrow \mathbb{A}_0, \quad \mathbb{A}_i \rightarrow O_{ij}(U) \mathbb{A}_j, \quad (16)$$

where

$$O_{ij}(U) \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}[U^\dagger \sigma_i U \sigma_j] \in SO(3). \quad (17)$$

If $U = \exp(i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta}/2)$, $O_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = [\exp(i\boldsymbol{\theta}_k J_k)]_{ij}$, where $(iJ_k)_{ij} = \varepsilon_{kij}$ are the generators of $SU(2)$ [$SO(3)$] in the adjoint representation.

At this point we have to introduce the transformation properties of the scalar doublets under CP . One possible choice is

$$\Phi_a(x) \xrightarrow{CP} \Phi_a^*(\hat{x}), \quad (18)$$

where $\hat{x} = (x_0, -\mathbf{x})$ for $x = (x_0, \mathbf{x})$. The transformation of Eq. (18) induces in the invariants \mathbb{A}_μ the transformation

$$\mathbb{A}_0(x) \xrightarrow{CP} \mathbb{A}_0(\hat{x}), \quad \mathbb{A}_i(x) \xrightarrow{CP} (I_2)_{ij} \mathbb{A}_j(\hat{x}), \quad (19)$$

where $I_2 \equiv \text{diag}(1, -1, 1)$ represents the reflection in the 2-axis. We shall denote the transformations (18) and (19) as canonical CP -transformations and, in particular, the second equation of Eq. (19) as the canonical CP -reflection. Since horizontal transformations are also allowed, the most general CP transformation is given by the composition of Eqs. (18) and (19) with $SU(2)_H$ transformations; any additional phase can be absorbed in those transformations. Thus the CP transformation over \mathbb{A}_i involves a reflection and it does not belong to the proper

rotations $SO(3)$ induced by horizontal transformations. The question of CP invariance, then, resumes in the existence of horizontal transformations composite with a reflection that leaves the potential invariant. Since the reflection along the 2-axis can be transformed into the reflection along any axis through the composition with rotations, the natural choice of basis is the basis for which $\tilde{\Lambda}$ is diagonal: $O^{CP} \tilde{\Lambda} O^{CP\top} = \{\tilde{\lambda}_i\}$. It is always possible to find $O^{CP} \in SO(3)$ because $\tilde{\Lambda}$ is real and symmetric. Furthermore, O^{CP} is unique up to reordering of the diagonal values $\{\tilde{\lambda}_i\}$, or up to rotations in the subspace of degenerate eigenvalues in case $\{\tilde{\lambda}_i\}$ are not all different. In such basis, $\mathbb{A}_i \rightarrow \mathbb{A}'_i = O^{CP}_{ij} \mathbb{A}_j$, the potential in Eq. (14) becomes

$$V(\mathbb{A}) = M_0 \mathbb{A}_0 + \Lambda_{00} (\mathbb{A}_0)^2 + M'_i \mathbb{A}'_i + 2\Lambda'_{0i} \mathbb{A}_0 \mathbb{A}'_i + \tilde{\lambda}_i (\mathbb{A}'_i)^2, \quad (20)$$

where

$$\mathbf{M}' = O^{CP} \mathbf{M} \quad \text{and} \quad \Lambda'_0 = O^{CP} \Lambda_0. \quad (21)$$

The last term of Eq. (20) is reflection invariant along any of the principal axes of $\tilde{\Lambda}$, e'_1 , e'_2 , e'_3 (if $\tilde{\Lambda}$ does not have degenerate eigenvalues, the three principal axes are the only directions leaving the tensor invariant by reflection; with degeneracies, a continuous set of directions exist in the degenerate subspace). The only terms that must be considered are the third and the fourth ones. They depend on two vectors \mathbf{M}' and Λ'_0 : for the potential in Eq. (20) to be invariant by reflection, and consequently by CP , it is necessary that the vectors \mathbf{M}' and Λ'_0 be null for the same component. In such case, it is always possible by a suitable $\pi/2$ rotation to choose that direction to be the 2-axis. This is the canonical CP -basis (the *real basis* in Ref. [14]) which have all the parameters in the potential $V(\Phi)$ real, since there is no \mathbb{A}'_2 components, which are the only possible source of complex entries in the change of basis of Eq. (7). The CP transformation in terms of the original variables is recovered with the inverse transformation as

$$\begin{aligned} \Phi_a(x) &\xrightarrow{CP} (U^{CP\dagger} U^{CP*})_{ab} \Phi_b^*(\hat{x}), \\ \mathbb{A}_i(x) &\xrightarrow{CP} (O^{CP\top})_{ij} \mathbb{A}_j(\hat{x}), \end{aligned} \quad (22)$$

where $O^{CP} = O(U^{CP})$.

The conditions we have found rely on a systematic procedure to find the canonical CP -basis. The basis may not exist and the theory is CP violating. In this two doublet case, the change of basis can be easily achieved by a diagonalization. However, sometimes it is more useful to have a direct criterion to check if the CP invariance holds before going to the procedure of finding the CP -basis. For $N > 2$ doublets the procedure of finding the CP -basis is not straightforward and direct criteria are much more helpful. The criteria for $N = 2$ can be formulated with the

pseudoscalar invariants

$$I(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \varepsilon_{ijk} v_{1i} v_{2j} v_{3k} = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3. \quad (23)$$

It is common knowledge that the pseudoscalars defined by Eq. (23) are invariant by rotations but changes sign under a reflection or a space-inversion. Consequently, if the potential $V(\mathbb{A})$ is reflection invariant (CP -invariant), then all pseudoscalar invariants of the theory are null. The lowest order nontrivial pseudoscalars that can be constructed with two vectors $\{\mathbf{M}, \Lambda_0\}$ and one rank-2 tensor $\tilde{\Lambda}$ are

$$I_M = I(\mathbf{M}, \tilde{\Lambda} \mathbf{M}, \tilde{\Lambda}^2 \mathbf{M}), \quad (24)$$

$$I_{\Lambda_0} = I(\Lambda_0, \tilde{\Lambda} \Lambda_0, \tilde{\Lambda}^2 \Lambda_0), \quad (25)$$

$$I_1 = I(\mathbf{M}, \Lambda_0, \tilde{\Lambda} \mathbf{M}), \quad (26)$$

$$I_2 = I(\mathbf{M}, \Lambda_0, \tilde{\Lambda} \Lambda_0), \quad (27)$$

with dimensions $M^3 \Lambda^3$, Λ^6 , $M^2 \Lambda^2$, and $M \Lambda^3$, respectively.

The following statements will be proved:

- (A) If $\mathbf{M} \times \Lambda_0 \neq 0$, $I_1 = 0$ and $I_2 = 0$ are the necessary and sufficient conditions to $V(\mathbb{A})$ be CP invariant. The CP reflection direction is $\mathbf{M} \times \Lambda_0$ and it is also an eigenvector of $\tilde{\Lambda}$.
- (B) If $\mathbf{M} \parallel \Lambda_0$, $I_M = 0$ (or $I_{\Lambda_0} = 0$) is the necessary and sufficient condition to $V(\mathbb{A})$ be CP invariant. The CP reflection direction is either $\mathbf{M} \times \tilde{\Lambda} \mathbf{M}$ ($\neq 0$) or an eigenvector of $\tilde{\Lambda}$ perpendicular to \mathbf{M} (if $\tilde{\Lambda} \mathbf{M} \parallel \mathbf{M}$) and the CP reflection direction is an eigenvector of $\tilde{\Lambda}$.
- (C) All higher order pseudoscalar invariants are null if (A) or (B) is true.

The statements (A) and (B) are proved by noting that $I(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 0$ implies that $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ lie in the same plane. For (A), if $I_1 = I_2 = 0$, we can write $\tilde{\Lambda} \mathbf{M} = \alpha \mathbf{M} + \beta \Lambda_0$ and $\tilde{\Lambda} \Lambda_0 = \alpha' \mathbf{M} + \beta' \Lambda_0$, which means the application of $\tilde{\Lambda}$ on \mathbf{M} or Λ_0 lie on the plane perpendicular to $\mathbf{M} \times \Lambda_0$; $I_M = 0$ and $I_{\Lambda_0} = 0$ are automatic. Then $I_M = 0$ implies $\tilde{\Lambda}^2 \mathbf{M} = \alpha'' \mathbf{M} + \beta'' \tilde{\Lambda} \mathbf{M}$, which means $\tilde{\Lambda}^n \mathbf{M}$ remains in the plane defined by $\{\mathbf{M}, \Lambda_0\}$. The same reasoning apply to $\tilde{\Lambda}^m \Lambda_0$ from $I_{\Lambda_0} = 0$. Then, the set $\{\mathbf{M}, \Lambda_0\}$ defines a principal plane of $\tilde{\Lambda}$, i.e., a plane perpendicular to a principal axis of $\tilde{\Lambda}$, the vector $\mathbf{M} \times \Lambda_0$, which is then an eigenvector of $\tilde{\Lambda}$. The latter can be seen from $I_1 = (\mathbf{M} \times \Lambda_0) \cdot (\tilde{\Lambda} \mathbf{M}) = (\tilde{\Lambda}(\mathbf{M} \times \Lambda_0)) \cdot \mathbf{M} = 0$, and $\tilde{\Lambda}(\mathbf{M} \times \Lambda_0)$ is perpendicular to \mathbf{M} ; analogously $I_2 = 0$ implies $\tilde{\Lambda}(\mathbf{M} \times \Lambda_0)$ is also perpendicular to Λ_0 , therefore $\tilde{\Lambda}(\mathbf{M} \times \Lambda_0) \propto (\mathbf{M} \times \Lambda_0)$. At last, choose $(\mathbf{M} \times \Lambda_0)$ as the reflection direction (e'_2 -axis), then \mathbf{M} and Λ_0 have null projection with respect to that direction and the CP -basis is found. This proves that $I_1 = I_2 = 0$ is a sufficient condition. That it is also necessary, can be seen through the search of the CP -basis: a CP -basis requires both $\{\mathbf{M}, \Lambda_0\}$ to be in the

same principal plane, then $\tilde{\Lambda}^n \mathbf{M}$ or $\tilde{\Lambda}^m \Lambda_0$ remain in that plane and $I_1 = I_2 = 0$.

For the disjoint case (B), $I_1 = I_2 = 0$ is automatic. There is only one independent direction and a rank-2 tensor. $I_M = 0$ (or $I_{\Lambda_0} = 0$) implies that either $\tilde{\Lambda} \mathbf{M} \parallel \mathbf{M}$ and \mathbf{M} is an eigenvector, or $\tilde{\Lambda}^n \mathbf{M} = \alpha \mathbf{M} + \beta \tilde{\Lambda} \mathbf{M}$ and $\{\tilde{\Lambda} \mathbf{M}, \mathbf{M}\}$ defines a principal plane. Then, use either $\mathbf{M} \times \tilde{\Lambda} \mathbf{M}$ ($\neq 0$) or an eigenvector of $\tilde{\Lambda}$ perpendicular to \mathbf{M} ($\tilde{\Lambda} \mathbf{M} \parallel \mathbf{M}$) as the CP -reflection direction and the CP -basis is achieved. The converse is also true, if a CP -basis can be found, the invariants are null.

A subtlety arises when $\tilde{\Lambda}$ have degeneracies. When only two eigenvalues are equal, still one principal direction and a perpendicular principal plane is defined; every vector in the latter plane is an eigenvector and any plane containing the nondegenerate eigenvector is also a principal plane. With these extended definitions the proofs above are still valid. For the trivial case when the three eigenvalues are degenerate, $\tilde{\Lambda}$ is proportional to the identity and a CP -basis can always be found by using $\mathbf{M} \times \Lambda_0$ as the CP -reflection direction. It is also important to remark that only for $\tilde{\Lambda}$ nondegenerate, the CP -basis is unique up to a discrete subgroup of $SO(3)_H$; for the remaining cases there is a continuous infinite of possible CP -basis, when one exists. As for the CP -reflection direction, only when $\tilde{\Lambda}$ nondegenerate and $\mathbf{M} \times \Lambda_0 \neq 0$ or $\mathbf{M} \times \tilde{\Lambda} \mathbf{M} \neq 0$ ($\mathbf{M} \parallel \Lambda_0$) the direction is unique; for $\mathbf{M} \parallel \Lambda_0$ and $\mathbf{M} \parallel \tilde{\Lambda} \mathbf{M}$ ($\tilde{\Lambda}$ nondegenerate), there are two possible directions.

At last, all higher order pseudoscalar invariants are either combinations of lower order scalars or pseudoscalars, or is of the form Eq. (23) and involves vectors with further applications of $\tilde{\Lambda}$, for example, $\tilde{\Lambda}^n \mathbf{M}$; if the conditions (A) or (B) are valid, they all remain in the principal plane defined by $\{\mathbf{M}, \Lambda_0\}$ or $\{\mathbf{M}, \tilde{\Lambda} \mathbf{M}\}$, which implies all pseudoscalars of the form Eq. (23) are also null. This completes (C).

Conditions (A) and (B) solve the problem of finding the minimum set of reparametrization invariant conditions to test the CP -invariance of a 2HDM potential, a problem that was not completely solved in previous approaches [14–16].

For completeness, we compare the invariants of Eq. (24) with that of Ref. [14] and arrive at the equalities

$$\begin{aligned} I_2 &= 4I_{Y3Z}, & I_1 &= -4I_{2Y2Z}, \\ I_{\Lambda_0} &= -4I_{6Z}, & I_M &= 4I_{3Y3Z}. \end{aligned} \quad (28)$$

The proportionality is assured by dimensional counting, since these are the lowest order invariants by $SU(2)_H$ but not invariant by the corresponding CP -type transformation. The proportionality constant can be found by restricting to particular values. For example, $\lambda_6 = -\lambda_7$ [14] and $\lambda_6 = 0$ for I_{3Y3Z} . Also, the statement in Ref. [14] that it is always possible to find a basis when $\lambda_6 = -\lambda_7$ can be seen here as the possibility of rotating Λ_0 in Eq. (10) to the 3-

direction. Another example is the special point $\lambda_1 = \lambda_2$ and $\lambda_7 = -\lambda_6$, which corresponds to $\Lambda_0 = 0$ and the condition for CP invariance only imposes conditions on \mathbf{M} and $\tilde{\Lambda}$. However, from the perspective of the development of this section, we see $\mathbf{M} = 0$ is as special a point as $\Lambda_0 = 0$ is. Only if the theory is CP -violating and one wants to classify the violation in soft or hard violation [17], the two cases are different.

Conditions for spontaneous CP violation

This issue has already been investigated in Ref. [14] using as the minimal representation the fundamental representation of $SU(2)_H$. We will work out, instead, the conditions for spontaneous CP violation in the 2HDM using the adjoint representation.

We already explored the conditions to have explicit CP violation in $V(\Phi)$, Eq. (2). In such case after EWSB, the CP violating property will remain in the potential. On the other hand, if the potential is CP conserving, after EWSB, the theory could become CP violating if the vacuum is not invariant by the CP -type transformation of the original potential. We will concentrate on this spontaneously broken CP case.

Given the potential $V(\mathbb{A})$ in Eq. (8), the spontaneously broken potential is given by shifting the fields

$$\Phi \rightarrow \Phi + \langle \Phi \rangle \quad (29)$$

$$\mathbb{A}_\mu \rightarrow \mathbb{A}_\mu + \langle \mathbb{A}_\mu \rangle + \mathbb{B}_\mu, \quad (30)$$

where

$$\langle \mathbb{A}_\mu \rangle \equiv \frac{1}{2} \langle \Phi \rangle^\dagger \sigma_\mu \langle \Phi \rangle \quad (31)$$

$$\mathbb{B}_\mu \equiv \frac{1}{2} \langle \Phi \rangle^\dagger \sigma_\mu \Phi + \frac{1}{2} \Phi^\dagger \sigma_\mu \langle \Phi \rangle. \quad (32)$$

The vacuum expectation values (VEVs), invariant by the $U(1)_{EM}$, can be parametrized by

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} \langle \Phi_1 \rangle \\ \langle \Phi_2 \rangle \end{pmatrix} = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\nu_1}{\nu} \\ \frac{\nu_2}{\nu} e^{i\xi} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

where $\nu = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} = 246$ GeV. The parameters of Eq. (33) have to obey the minimization constraints

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_a^{(0)*}} V(\Phi) \Big|_{\Phi=\langle \Phi \rangle} &= \frac{\partial}{\partial \mathbb{A}_\mu} V(\mathbb{A}) \frac{\partial \mathbb{A}_\mu}{\partial \phi_a^{(0)*}} \Big|_{\Phi=\langle \Phi \rangle} \\ &= (M_\mu + 2\Lambda_{\mu\nu} \langle \mathbb{A}_\nu \rangle) \frac{1}{2} (\sigma_\mu)_{ab} \langle \phi_b^{(0)} \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

For the charged component the condition is trivial $\langle \phi_a^{(+)} \rangle = 0$. The nontrivial ($\langle \phi_a^{(0)} \rangle \neq 0$) solution for Eq. (34) is conditioned by the existence of solutions $\langle \mathbb{A}_\mu \rangle \neq 0$ of

$$\det[(M_\mu + 2\Lambda_{\mu\nu}\langle\mathbb{A}_\nu\rangle)\sigma_\mu] = (M_0 + 2\Lambda_{0\nu}\langle\mathbb{A}_\nu\rangle)^2 - (M_i + 2\Lambda_{i\nu}\langle\mathbb{A}_\nu\rangle)^2 = 0, \quad (35)$$

provided that $V(\langle\Phi\rangle) < V(0)$ and $\langle\Phi\rangle$ corresponds to an absolute minimum. When Eq. (33) is used, the parametrization of $\langle\mathbb{A}_\mu\rangle$ is

$$\langle\mathbb{A}_\mu\rangle = \frac{v^2}{2}(1, \mathbf{v}) = \frac{v^2}{2}(1, \sin\theta_v \cos\xi, \sin\theta_v \sin\xi, \cos\theta_v), \quad (36)$$

where $\tan\frac{\theta_v}{2} = \frac{v_2}{v_1}$; Eq. (36) is just the projective map of the complex number $v_2 e^{i\xi}/v_1$ to the unit sphere. Notice that the connection of the parameter θ_v used here with the more usual parameter β used in the MSSM description [13,22] is given by $\tan\frac{\theta_v}{2} = \tan\beta$.

In case the potential in Eq. (2) has a CP symmetry, it can be written in the CP -basis (or the *real basis* [14]) in the form of Eq. (20). The CP transformations are just Eqs. (18) and (19). The potential after EWSB can be written as

$$V(\Phi + \langle\Phi\rangle) = V(\mathbb{A}) + V(\langle\mathbb{A}\rangle) + \Lambda_{\mu\nu}\mathbb{B}_\mu\mathbb{B}_\nu + 2\Lambda_{\mu\nu}\mathbb{A}_\mu(\langle\mathbb{A}_\nu\rangle + \mathbb{B}_\nu), \quad (37)$$

which, in the CP -basis, have $M_2 = 0$, $\Lambda_{02} = 0$ and $\tilde{\Lambda} = \text{diag}(\{\tilde{\lambda}_i\})$. The condition $(M_\mu + 2\Lambda_{\mu\nu}\langle\mathbb{A}_\nu\rangle)\mathbb{B}_\mu = 0$, derived from Eq. (34) was used. By construction, if $\langle\Phi\rangle$ also transformed under CP as Φ , the potential in Eq. (37) would be CP invariant. However the invariance of the vacuum under any symmetry implies the VEVs have to be invariant under the CP transformation. Looking into the details, if we apply the transformations of Eqs. (18) and (19) into Eq. (37), since $V(\Phi^* + \langle\Phi\rangle) = V(\Phi + \langle\Phi\rangle^*)$ for an initial CP invariant potential, the potential remains CP invariant after EWSB if, and only if,

$$(I_2\langle\mathbb{A}\rangle)_i = \langle\mathbb{A}_i\rangle \quad (38)$$

$$\mathbb{B}_i(\langle\Phi\rangle^*) = \mathbb{B}_i(\langle\Phi\rangle). \quad (39)$$

Equation (38) implies $\langle\mathbb{A}_2\rangle = 0$ and from the parametrization of Eq. (36) it implies $\xi = 0$, π . Then Eq. (39) is automatically satisfied with $\langle\Phi\rangle^* = \langle\Phi\rangle$. Actually, any solution of the form $\langle\Phi\rangle^* = e^{i\alpha}\langle\Phi\rangle$ satisfies Eq. (38) but not Eq. (39). The parametrization of Eq. (33), however, automatically takes into account Eq. (39) when Eq. (38) is satisfied. Thus, using such parametrization the analysis can be carried out exclusively in the adjoint representation.

In a general basis, the conditions on the CP -basis investigated so far can be translated to the following condition: if $V(\Phi)$ is CP invariant and it has a nontrivial minimum $\langle\Phi\rangle \neq 0$, $V(\Phi + \langle\Phi\rangle)$ is CP invariant if, and only if, $\langle\mathbb{A}_i\rangle$ is in the principal plane defined by $\{\mathbf{M}, \Lambda_0, \tilde{\Lambda}\mathbf{M}\}$. The more specific conditions for $\{\langle\mathbb{A}_i\rangle\}$ to be in the latter principal plane are:

- (a) If $\mathbf{M} \times \Lambda_0 \neq 0$, $I(\{\langle\mathbb{A}_i\rangle\}, \mathbf{M}, \Lambda_0) = 0$.
- (b) If $\mathbf{M} \parallel \Lambda_0$ and $\tilde{\Lambda}\mathbf{M} \times \mathbf{M} \neq 0$, $I(\{\langle\mathbb{A}_i\rangle\}, \mathbf{M}, \tilde{\Lambda}\mathbf{M}) = 0$.
- (c) If $\mathbf{M} \parallel \Lambda_0$ and $\tilde{\Lambda}\mathbf{M} \parallel \mathbf{M}$, $I(\{\langle\mathbb{A}_i\rangle\}, \mathbf{M}, \tilde{\Lambda}\{\langle\mathbb{A}_i\rangle\}) = 0$.

The CP -reflection directions for (a) and (b) are the same as in (A) and (B) of Sec. II. For (c), if $\{\langle\mathbb{A}_i\rangle\} \parallel \mathbf{M}$ the CP -reflection direction is an eigenvector of $\tilde{\Lambda}$ perpendicular to \mathbf{M} ; otherwise $\{\langle\mathbb{A}_i\rangle\} \times \mathbf{M}$ is an eigenvector of $\tilde{\Lambda}$ and it is the CP -reflection direction. In the CP -basis, $\langle\Phi\rangle$ is real.

III. $N \geq 2$ HIGGS-DOUBLETS

For $N \geq 2$ Higgs-doublets Φ_a , $a = 1, \dots, N$, transforming as $(2, 1)$ under $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, the general gauge invariant potential can be written as [26]

$$V(\Phi) = Y_{ab}\Phi_a^\dagger\Phi_b + Z_{(ab)(cd)}(\Phi_a^\dagger\Phi_b)^*(\Phi_c^\dagger\Phi_d), \quad (40)$$

where

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix}. \quad (41)$$

We define then the minimal SM gauge invariants

$$A_{ab} \equiv \Phi_a^\dagger\Phi_b, \quad (42)$$

and define a column vector of length N^2 by the ordering $(ab) = (11), (12), (13), \dots, (1N), (21), \dots, (NN)$,

$$A \equiv \Phi^\dagger \otimes \Phi = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{1N} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{NN} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Additionally we denote the pair of indices as $(ab) \equiv \sigma$, running as Eq. (43), and define the operation of change of labeling $\hat{\sigma} = (ba)$, if $\sigma = (ab)$, in such a way that if $A_\sigma = A_{ab}$, then $A_{\hat{\sigma}} = A_{ba} = A_\sigma$. With this notation the quartic part of $V(\Phi)$ can be written

$$V(\Phi)|_{\Phi^4} = A_\sigma^* Z_{\sigma\sigma'} A_{\sigma'} \equiv A^\dagger Z A. \quad (44)$$

This parametrization constrains Z to be Hermitian $Z^\dagger = Z$,

$$(Z_{(ab)(cd)})^* = Z_{(dc)(ba)} \quad \text{or} \quad Z_{\sigma_1\sigma_2}^* = Z_{\sigma_2\sigma_1}. \quad (45)$$

At the same time, because of $A_{\sigma_1}^* A_{\sigma_2} = A_{\hat{\sigma}_2}^* A_{\hat{\sigma}_1}$, Z has the property

$$Z_{\sigma_1\sigma_2} = Z_{\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1}. \quad (46)$$

Thus, Z is a $N^2 \times N^2$ Hermitian matrix with the additional property of Eq. (46). To count the number of independent variables of Z we have to divide its (complex) elements

into four sets: (d1) N diagonal ($\sigma_1 = \sigma_2 \equiv \sigma$ and $\sigma = \hat{\sigma}$) and (d2) $N(N-1)$ diagonal ($\sigma_1 = \sigma_2 \equiv \sigma$ and $\sigma \neq \hat{\sigma}$) real elements because of the Hermiticity condition (45); (o1) $N(N-1)$ off-diagonal ($\sigma_1 \neq \sigma_2$ but $\sigma_1 = \hat{\sigma}_2$) and (o2) $N^2(N^2-1) - N(N-1)$ off-diagonal ($\sigma_1 \neq \sigma_2$ and $\sigma_1 \neq \hat{\sigma}_2$) complex but not all independent elements. The total is N^4 elements as it should be. The number of independent real parameters is then N (d1) + $N(N-1)/2$ (d2) in the diagonal real elements [Eq. (46) only imposes conditions on the elements in (d2)] and $N(N-1)$ (o1) + $\frac{1}{2} \times [N^2(N^2-1) - N(N-1)]$ (o2) in the off-diagonal complex elements [Eq. (46) only imposes conditions on the elements in (o2)] summing up to $N^2(N^2+1)/2$. For example, for $N=2$ there were $4(4+1)/2 = 10$ real parameters corresponding to the real and complex parameters, $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ and $\{\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7\}$, respectively.

The horizontal transformation group is now $G = SU(N)_H$; a global phase can be absorbed by $U(1)_Y$ symmetry as in the $N=2$ case. We can define new variables, equivalent to Eq. (6), as

$$\mathbb{A}_\mu \equiv \frac{1}{2} \Phi^\dagger \lambda_\mu \Phi, \quad \mu = 0, 1, \dots, d, \quad (47)$$

where $\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{N}} \mathbf{1}$ and $\{\lambda_i\}$ are the $d = \dim SU(N) = N^2 - 1$ Hermitian generators of $SU(N)_H$ in the fundamental representation obeying the normalization $\text{Tr}[\lambda_i \lambda_j] = 2\delta_{ij}$, such that $\text{Tr}[\lambda_\mu \lambda_\nu] = 2\delta_{\mu\nu}$. The new second order variables \mathbb{A}_μ transform as $\tilde{N} \otimes N = d \oplus \mathbf{1}$, where d denotes the adjoint representation. The index $\mu=0$ corresponds to the singlet component while the indices $\mu = i = 1, \dots, d$ correspond to the adjoint, transforming under $SU(N)_H$ as

$$\mathbb{A}_i \rightarrow R_{ij} \mathbb{A}_j. \quad (48)$$

The matrix R_{ij} can be obtained from the fundamental representation U , acting on Φ as Eq. (4), from the relation

$$R_{ij}(U) = \frac{1}{2} \text{Tr}[U^\dagger \lambda_i U \lambda_j]. \quad (49)$$

If $U = \exp(i\theta \cdot \lambda/2)$,

$$R_{ij}(\theta) = \exp[i\theta_k T_k]_{ij}, \quad (50)$$

where $(iT_k)_{ij} = f_{kij}$. The coefficients f_{ijk} , are the structure constants of $SU(N)_H$ defined by

$$[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k, \quad (51)$$

for any $\{T_i\}$ spanning the compact $SU(N)_H$ algebra \mathcal{G} . In particular, Eq. (51) is valid for $\{\lambda_i/2\}$, the fundamental representation generators. Since the structure constants of Eq. (51) are real, the adjoint representation of Eqs. (49) and (50) is real and thus it represents a subgroup of $SO(d)$. It is only for $N=2$ the adjoint representation is the orthogonal group itself.

The transformation matrix from A_σ (43) to \mathbb{A}_μ (47) can be obtained from the completeness relation of $\{\lambda_\mu\}$ [25]:

$$\frac{1}{2} (\lambda_\mu)_{ab} (\lambda_\mu)_{cd} = \delta_{ad} \delta_{cb}. \quad (52)$$

In the notation where $\sigma_1 = (ab)$ and $\sigma_2 = (cd)$, we can write Eq. (52) in the form

$$2C_{\mu\sigma_1} C_{\mu\sigma_2} = \delta_{\sigma_1\sigma_2}, \quad (53)$$

where

$$C_{\mu\sigma_1} \equiv \frac{1}{2} (\lambda_\mu)_{\sigma_1}. \quad (54)$$

Equation (53) implies $C_{\sigma\mu}^{-1} \equiv 2C_{\mu\hat{\sigma}}$, since the inverse is unique. The definition of Eq. (54) enable us to write Eq. (47) in the form

$$\mathbb{A}_\mu = C_{\mu\sigma} A_\sigma. \quad (55)$$

By using the inverse of Eq. (55) we can write the potential of Eq. (40) in the same form of Eq. (8),

$$V(\mathbb{A}) = M_\mu \mathbb{A}_\mu + \Lambda_{\mu\nu} \mathbb{A}_\mu \mathbb{A}_\nu, \quad (56)$$

$$= M_0 \mathbb{A}_0 + \Lambda_{00} \mathbb{A}_0^2 + M_i \mathbb{A}_i + 2\Lambda_{0i} \mathbb{A}_0 \mathbb{A}_i + \tilde{\Lambda}_{ij} \mathbb{A}_i \mathbb{A}_j, \quad (57)$$

where

$$M_\mu \equiv \text{Tr}[Y \lambda_\mu], \quad (58)$$

$$\Lambda_{\mu\nu} \equiv C_{\sigma_1\mu}^{-1*} Z_{\sigma_1\sigma_2} C_{\sigma_2\nu}^{-1}, \quad (59)$$

$$\tilde{\Lambda} = \{\Lambda_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (60)$$

Using the properties of Eqs. (45) and (46) of Z , we can see Λ is a $N^2 \times N^2$ real and symmetric matrix, hence with $N^2(N^2+1)/2$ real parameters, the same number of parameters of Z . The rank-2 tensor $\tilde{\Lambda}$ transforms under G as $(d \otimes d)_S$ and it forms a reducible representation. (See appendix D.)

The procedure to find the CP -basis can be sought in some analogy with the $N=2$ case. The difficulty for $N > 2$, however, is that the existence of a horizontal transformation on the vector \mathbb{A}_i , defined by Eq. (48), capable of diagonalizing $\tilde{\Lambda}$, is not always guaranteed and it depends on the form of $\tilde{\Lambda}$ itself.

Nevertheless, the diagonalization of $\tilde{\Lambda}$ is not strictly necessary. To see this, we have to analyze the CP properties of Φ and \mathbb{A}_i . Firstly, any CP -type transformation can be written as a combination of a horizontal transformation and the canonical CP -transformations

$$\Phi(x) \xrightarrow{CP} \Phi^*(\hat{x}), \quad (61)$$

$$\mathbb{A}_0(x) \xrightarrow{CP} \mathbb{A}_0(\hat{x}), \quad (62)$$

$$\mathbb{A}_i(x) \xrightarrow{CP} -\eta_{ij} \mathbb{A}_j(\hat{x}). \quad (63)$$

Equation (63) represents the canonical CP -reflection de-

finied by the CP -reflection matrix η given by

$$\eta_{ij} = -\frac{1}{2} \text{Tr}[\lambda_i^\top \lambda_j], \quad (64)$$

which means $\lambda_i^\top = -\eta_{ij} \lambda_j$. The mapping $\lambda_i \xrightarrow{\psi} \lambda_i^\top = \eta_{ij} \lambda_j$ is the contragradient automorphism in the Lie algebra [1], which I will denote by ψ . Such automorphism maps the fundamental representation to the antifundamental representation, $D(g) \rightarrow D^*(g)$ (these two representations are not equivalent for $N > 2$). All the irreducible representations (irreps) we are treating here [d and all components in $(d \otimes d)_S$] are self-conjugate [1,27] and, indeed, they are real representations.

To set a convention, we will use the following ordering for the basis of the Lie algebra \mathcal{G} of G :

$$\{T_{ij}\} = \{h_i, S_\alpha, \mathcal{A}_\alpha\}. \quad (65)$$

The set $\{h_i\}$ spans the Cartan subalgebra (CSA) \mathfrak{t}_r and the set $\{\mathcal{A}_\alpha\}$, denoted by \mathfrak{t}_q , are the generators of the real $H = SO(N)$ subgroup of $G = SU(N)$. The remaining subspace spanned by $\{S_\alpha\}$ will be denoted by $\tilde{\mathfrak{t}}_q$ and the sum $\mathfrak{t}_r \oplus \tilde{\mathfrak{t}}_q \equiv \mathfrak{t}_p$ represents the generators of the coset G/H . Notice that \mathfrak{t}_p and \mathfrak{t}_q are invariant by the action of the subgroup H and hence they form representation spaces for H (see appendix B). We will use the symbols $\{h_i, S_\alpha, \mathcal{A}_\alpha\}$ to denote either the abstract algebra in the Weyl-Cartan basis or the fundamental representation of them.

The dimensions of these subspaces of \mathcal{G} are, respectively, $r = \text{rank} G = N - 1$, $q = (d - r)/2 = N(N - 1)/2$ and $p = (d + r)/2 = N(N + 1)/2 - 1$; q denotes the number of positive roots in the algebra and α are the positive roots that label the generators

$$S_\alpha = \frac{E_\alpha + E_{-\alpha}}{2}, \quad (66)$$

$$\mathcal{A}_\alpha = \frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{2i}. \quad (67)$$

The E_α are the ‘‘ladder’’ generators in the Cartan-Weyl basis. For example, for the fundamental representation of $SU(3)$, we have in terms of the Gell-Mann matrices [28], $\{h_i\} = \{\lambda_3/2, \lambda_8/2\}$, $\{S_\alpha\} = \{\lambda_1/2, \lambda_6/2, \lambda_4/2\}$ and $\{\mathcal{A}_\alpha\} = \{\lambda_2/2, \lambda_7/2, \lambda_5/2\}$. The two last subspaces are ordered according to α_1 , α_2 and $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$. Notice that in such representation S_α are symmetric matrices and \mathcal{A}_α are antisymmetric matrices.

With such ordering the CP -reflection matrix is

$$\eta = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_p & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_q \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Thus, we see that the application of the automorphism ψ separates \mathcal{G} into an odd part \mathfrak{t}_p and an even part \mathfrak{t}_q , which constitutes a subalgebra [29]. The condition for CP -invariance of the term containing $\tilde{\Lambda}$ in Eq. (57) is then the existence of a group element g such that

$$\text{cond. 1: } \eta R(g) \tilde{\Lambda} R(g^{-1}) \eta = R(g) \tilde{\Lambda} R(g^{-1}), \quad (69)$$

where $R(g) \equiv R(U)$ is an element in the adjoint representation of $SU(N)$ (49). Equation (69) is equivalent, in this representation, to the statement: exists a $R(U)$ in the adjoint representation of $SU(N)$, such that $R \tilde{\Lambda} R^\top$ is block diagonal $p \times p$ superior and $q \times q$ inferior. Thus full diagonalization is not necessary.

Now suppose a g satisfying cond. 1 exists [30]. We can write Eq. (57) in the basis defined by one representative g ,

$$V(\mathbb{A}) = M_0 \mathbb{A}_0 + \Lambda_{00} \mathbb{A}_0^2 + M'_i \mathbb{A}'_i + 2\Lambda'_{0i} \mathbb{A}_0 \mathbb{A}'_i + \tilde{\Lambda}'_{ij} \mathbb{A}'_i \mathbb{A}'_j, \quad (70)$$

where $M'_i = R(g)_{ij} M_j$ and $\Lambda'_{0i} = R(g)_{ij} \Lambda_{0j}$. The necessary conditions for $V(\mathbb{A})$ to be CP invariant are

$$\text{cond. 2a: } M'_i = -\eta_{ij} M'_j \quad (71)$$

$$\text{cond. 2b: } \Lambda'_{0i} = -\eta_{ij} \Lambda'_{0j}. \quad (72)$$

Of course, there can be more than one distinct coset satisfying cond. 1, and, then, conditions (71) and (72) have to be checked for all these cosets. If for every coset satisfying cond. 1, there is no coset satisfying cond. 2a and cond. 2b, then the potential is CP violating. Otherwise, g satisfying conds. 1, 2a and 2b defines a CP -basis and the potential is CP invariant.

Let us analyze further the conds. 1,2a and 2b. To do that, we denote by $V = \mathbb{R}^d \sim \mathcal{G}$ the adjoint representation space, isomorphic to the algebra vector space. The automorphism ψ separates the space V into two subspaces $V = V_p \oplus V_q$, one odd (V_p) and one even (V_q) under the automorphism:

$$\eta \mathbf{v} = -\mathbf{v}, \quad \text{if } \mathbf{v} \in V_p, \quad \eta \mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad \text{if } \mathbf{v} \in V_q. \quad (73)$$

They correspond, respectively, to \mathfrak{t}_p and \mathfrak{t}_q , subspaces of $\mathcal{G} = \mathfrak{t}_p \oplus \mathfrak{t}_q$. The correspondence between \mathcal{G} and V is given by Eq. (A26). With this notation, considering the matrix $\tilde{\Lambda}$ is a linear transformation over V , conds. 1,2a and 2b imply that there should be two subspaces V'_p and V'_q of $V = V'_p \oplus V'_q$ invariant by $\tilde{\Lambda}$ and both \mathbf{M} and Λ_0 should be in V'_p . Moreover, the two subspaces should be connected to V_p and V_q by a group transformation, i.e., $V'_p = R(g)V_p$ and $V'_q = R(g)V_q$ for some g in G .

The explicit search for the matrices satisfying conds. 1, 2a and 2b is a difficult task. We can seek, instead, invariant conditions based on group invariants, analogously with what was done to the $N = 2$ case. For that purpose, it will be shown in the following that generalized pseudoscalar invariants [31], analogous to the true pseudoscalars (23), can still be constructed with respect do $SU(N)$ and any such quantity should be zero for a CP -invariant potential.

The generalized pseudoscalar is defined as a trilinear totally antisymmetric function of vectors in the adjoint,

defined by

$$I(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \equiv f_{ijk} v_{1i} v_{2j} v_{3k}. \quad (74)$$

We keep the same notation as in Eq. (23), noticing that Eq. (74) corresponds to a more general case. We can also define the analogous of the vector product in three dimensions, as

$$(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)_i \equiv f_{ijk} v_{1j} v_{2k}. \quad (75)$$

From Eq. (A3) and $\lambda_i^\top = -\eta_{ij} \lambda_j$ we see that

$$f_{ijk} \eta_{ia} \eta_{jb} \eta_{kc} = f_{abc}, \quad (76)$$

which means ψ indeed represents an automorphism in the algebra. However, the CP -reflection of Eq. (63) acts with the opposite sign compared to the automorphism ψ . Therefore, the quantity in Eq. (74) is invariant by $SU(N)_H$ transformations but changes sign under a CP transformation, i.e., a CP -reflection. Thus we see the trilinear function (74) behaves as a pseudoscalar under a CP -reflection. Such property means that any pseudoscalar of the form Eq. (74), constructed with the parameters of a CP -invariant potential $V(\mathbb{A})$ should be zero.

The pseudoscalar invariants of lowest order, constructed with $\{\mathbf{M}, \mathbf{\Lambda}_0, \tilde{\mathbf{\Lambda}}\}$, are of the same form as in Eqs. (24). We will see, however, that the vanishing of these quantities may not guarantee the CP -invariance of $V(\mathbb{A})$. Let us exploit further the properties of the CP -reflection (63). For that end, it is known that an additional trilinear scalar, which is totally symmetric, can be defined for $N > 2$ as

$$J(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \equiv d_{ijk} v_{1i} v_{2j} v_{3k}, \quad (77)$$

as well as a ‘‘symmetric’’ vector product

$$(\mathbf{v}_1 \vee \mathbf{v}_2)_i \equiv d_{ijk} v_{1j} v_{2k}. \quad (78)$$

The coefficient d_{ijk} is the totally symmetric rank-3 tensor of $SU(N)$ defined by Eq. (A5). The behavior of the scalar J (77) is opposite to the scalar I (74), since it changes sign under the contragradient automorphism, as can be seen by Eq. (A6), and remain invariant under a CP -type reflection.

Using the two trilinear invariants I and J , the following relations can be obtained for any $V'_p = R(g)V_p$ and $V'_q = R(g)V_q$:

$$\begin{aligned} I(V'_p, V'_p, V'_p) &= 0, & I(V'_q, V'_q, V'_p) &= 0, \\ J(V'_q, V'_q, V'_q) &= 0, & J(V'_p, V'_p, V'_q) &= 0. \end{aligned} \quad (79)$$

These relations can be proved by noting that they are invariant under transformations in G and it can be evaluated with the corresponding vectors in the original subspaces V_p and V_q . Using Eqs. (76) (for d_{ijk} the opposite sign is valid) and (73), the invariants in Eq. (79) are equal to their opposites, which imply they are null. For example, $f_{ijk} v_{1i} v_{2j} v_{3k} = f_{ijk} \eta_{ia} \eta_{jb} \eta_{kc} v_{1a} v_{2b} v_{3c} = -f_{ijk} v_{1i} v_{2j} v_{3k} = 0$ for $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ in V_p . (The relations (79) can also be proved by using the explicit representations for

f_{ijk} and d_{ijk} , appendix B.) Moreover, the relations in Eq. (79) imply

$$V'_p \wedge V'_p \subset V'_q, \quad V'_p \wedge V'_q \subset V'_p, \quad V'_q \wedge V'_q \subset V'_q, \quad (80)$$

and

$$V'_p \vee V'_p \subset V'_p, \quad V'_p \vee V'_q \subset V'_q, \quad V'_q \vee V'_q \subset V'_p, \quad (81)$$

since the choice of vectors in each subspace is arbitrary and the two subspaces are disjoint and covers the whole vector space V . The first relation in Eq. (79) confirms that if conds. 1,2.a and 2.b are satisfied, all I invariants are indeed null.

Let us now analyze cond. 1. If cond. 1 is true, $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ should have two invariant subspaces V'_p and V'_q connected to V_p and V_q by the same group element. Since $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ is real and symmetric, it can be diagonalized by $SO(d)$ transformations with real eigenvalues. The d orthonormal eigenvectors of $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$, denoted by e'_i , $i = 1, 2, \dots, d$, form a basis for V (if $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ is degenerate, find orthogonal vectors in the degenerate subspace). Any set of eigenvectors spans an invariant subspace of $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$. q of them should span a subspace connected to V_q while the remaining p eigenvectors should span the orthogonal complementary subspace connected to V_p . There is a criterion to check if a given vector \mathbf{v} is in some V'_q . For q vectors, additional criteria exist to check if they form a vector space and if they are closed under the algebra \mathcal{G} . These criteria follow from the fact that V_q is isomorphic to \mathfrak{t}_q which forms a subspace of the (i times) $N \times N$ real antisymmetric matrices. Any antisymmetric matrix M has $\text{Tr}[M^{2k+1}] = 0$. The converse is true in the sense that for M Hermitian, $\text{Tr}[M^{2k+1}] = 0$ for all $2k + 1 \leq N$ imply M can be conjugated by $SU(N)$ to an antisymmetric matrix, i.e., in \mathfrak{t}_q . (See appendix C for the proof.)

Therefore, \mathbf{v} belongs to a V'_q if, and only if,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr}[(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Lambda})^{2k+1}] &= J_{2k+1}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}) = 0, \\ &\text{for all } 2k + 1 \leq N. \end{aligned} \quad (82)$$

We have introduced the n -linear symmetric function

$$J_n(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \equiv \Gamma_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} v_{1i_1} v_{2i_2} \dots v_{ni_n}, \quad (83)$$

which depends on the rank- n totally symmetric tensor

$$\Gamma_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} \equiv \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \frac{1}{2} \text{Tr}[\lambda_{\sigma(i_1)} \lambda_{\sigma(i_2)} \dots \lambda_{\sigma(i_n)}], \quad n \geq 2, \quad (84)$$

where σ denotes permutations among n elements and the sum runs over all possible permutations. The tensor in Eq. (84) are the tensors used to construct the r Casimir

invariants of any representation of $SU(N)$ [32]. In particular, $\Gamma_{ijk}^{(3)} = d_{ijk}$ and $J_3 = J$.

For two vectors \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 , each one satisfying Eq. (82), the linear combination $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ is also in some V'_q if, and only if,

$$\frac{1}{2} \text{Tr}[(c_1\mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\lambda} + c_2\mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\lambda})^{2k+1}] = 0, \quad (85)$$

for all $2k + 1 \leq N$.

In general,

$$\frac{1}{2} \text{Tr}[(c_1\mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\lambda} + c_2\mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\lambda})^n] = \sum_{m=0}^n \binom{m}{n} c_1^m c_2^{n-m} J_n(\underbrace{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_1}_m, \underbrace{\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_2}_{n-m}). \quad (86)$$

Since the coefficients c_1 and c_2 are arbitrary, Eq. (85), requires

$$J_{2k+1}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_2) = 0 \quad (87)$$

for $2k + 1 \leq N$ and all combinations of \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 .

The generalization for a set of q normalized eigenvectors of $\tilde{\Lambda}$, labeled as e'_{p+i} , $i = 1, \dots, q$, is straightforward. They form a q -dimensional vector space V'_q if, and only if, each vector satisfy Eq. (82) and any combination of $m \leq q$ vectors satisfy Eq. (87). To guarantee that they are closed under the algebra $\tilde{\mathcal{G}}$, compute the I invariants using any two vectors in V'_q and one vector in V'_p , as in the second relation of Eq. (79): they should all be null. This conditions attest that the vector space V'_q is q -dimensional and forms a subalgebra of $\tilde{\mathcal{G}}$. That the subalgebra isomorphic to V'_q is semisimple and compact can be checked by Cartan's criterion: the Cartan metric, as in Eq. (A4), have to be positive definite [29]. It remains to be checked if V'_q is indeed connected to V_q by a group element.

At this point, we can see an example for which the vanishing of the I -invariants (24) [generalized to $N > 2$ using Eq. (74)] does not guarantee the CP -invariance of the potential: If \mathbf{M} and Λ_0 are orthogonal eigenvectors of $\tilde{\Lambda}$, all I -invariants are null, but nothing can be said about $\tilde{\Lambda}$ satisfying cond. 1. Even if a V'_q can be found using the procedure above, if it contains at least one of \mathbf{M} or Λ_0 , the potential is CP violating.

For $N = 3$, the problem of finding the necessary and sufficient conditions for CP -invariance can be completely solved. In this case, the only nontrivial symmetric function is the J invariant in Eq. (77). The numerology is $d = 8$, $r = 2$, $q = 3$ and $p = 5$ and thus, V'_q is three dimensional. It can be proved [33] that any three dimensional subalgebra is either conjugated to the $SU(2)$ subalgebra spanned by $\{\lambda_1/2, \lambda_2/2, \lambda_3/2\}$ or to the real $SO(3)$ subalgebra spanned by $\{\lambda_2/2, \lambda_7/2, \lambda_5/2\}$, in Gell-Mann's notation. If three eigenvectors e'_6, e'_7, e'_8 of $\tilde{\Lambda}$ satisfy conditions (82) and (87), an additional condition to distinguish between the

two equidimensional subalgebras is to use [33]

$$|I(e'_6, e'_7, e'_8)| = \frac{1}{2}, \quad (88)$$

which is satisfied only if the subalgebra is conjugate to $SO(3)$. For the subalgebra conjugate to $SU(2)$ the value for Eq. (88) is unity. This fact can be understood by observing that $\{\lambda_2/2, \lambda_7/2, \lambda_5/2\}$ are half of the usual generators of $SO(3)$ in the defining representation, giving for the structure constants restricted to the subalgebra, $I(e'_{p+i}, e'_{p+j}, e'_{p+k}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk}$, $i, j, k = 1, 2, 3$, after choosing appropriately the ordering for those three vectors. In addition, if cond. 1 is true, an appropriate basis for the $V(\mathbb{A})$ can be chosen to be the one with $q \times q$ inferior block of $\tilde{\Lambda}$ diagonal. Such choice is possible because when $\tilde{\Lambda}$ is block diagonal $p \times p$ and $q \times q$, a transformation in $SO(3) \subset SU(3)$ can still make the inferior block diagonal. For $N > 3$ that procedure is no longer guaranteed since the $q \times q$ blocks is transformed by the adjoint representation of $SO(N)$, which differs from the defining representation (see appendix B).

Once the vector space V'_q is found, when such space is unique up to multiplication by the subgroup $SO(3)$, the vectors \mathbf{M} and Λ_0 should be in the orthogonal subspace V'_p , i.e., $\mathbf{M} \cdot e'_{p+i} = 0$ and $\Lambda_0 \cdot e'_{p+i} = 0$ for all $i = 1, 2, 3$. Otherwise the potential $V(\mathbb{A})$ is CP -violating.

Conditions for spontaneous CP violation

Let us briefly analyze the conditions for spontaneous CP -violation for a potential $V(\Phi)$ (56) that is CP -invariant before EWSB.

The analysis can be performed in complete analogy with Sec. II. The minimization equation in this case are identical to Eq. (34), after replacing the matrices σ_μ by the corresponding λ_μ in Eq. (47). The same replacement applies to the first member of Eq. (35). The conditions (38) and (39) in the CP -basis are replaced by

$$\langle \Phi \rangle^* = \langle \Phi \rangle, \quad (89)$$

$$\langle \mathbb{A}_i \rangle = -\eta_{ij} \langle \mathbb{A}_j \rangle. \quad (90)$$

A suitable generalization of parametrization (33) for $N > 2$ can be defined as

$$\langle \Phi \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} (U_\nu e_N) \otimes e_2, \quad (91)$$

where $e_N = (0, 0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{C}^N$, $e_2 = (0, 1)^T$ is the $SU(2)_L$ breaking direction and U_ν is a $SU(N)_H$ transformation. The parametrization (91) is justified because any vector $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)^T$ in \mathbb{C}^N can be transformed by a $SU(N)$ transformation into $z' = (0, 0, \dots, |z|)^T$ [32]. If Eq. (89) is true U_ν is real and belongs to the real subgroup $SO(N)$.

In a general basis, it is necessary that $\{\langle \mathbb{A}_i \rangle\} \in V'_p$, i.e., the vector corresponding to the VEV have to be in the same subspace as \mathbf{M} and Λ_0 , which is true if $\{\langle \mathbb{A}_j \rangle\} \cdot e'_{p+i} = 0$,

$i = 1, \dots, q$, for $\{e'_{p+i}\}$ spanning the subspace V'_q invariant by $\tilde{\Lambda}$. For $N = 3$, such conditions are sufficient to guarantee that $V(\Phi + \langle \Phi \rangle)$ is also CP -invariant.

IV. CONCLUSIONS AND DISCUSSIONS

The NHDMs are simple extensions of the SM for which the presence of a horizontal space allows the possibility of “rotating” the basis in such space without modifying the physical content of the theory, e.g., CP symmetry or asymmetry. For N similar SM Higgs-doublets, which are complex, the relevant reparametrization transformations form a $SU(N)$ group. Restricted to the scalar potential sector, due to the rather restricted bilinear form of the minimal gauge invariants, the NHDM potential can be written in terms of the adjoint representation of $SU(N)_H$. The CP -type transformations act as “reflections”, the CP -reflections, on the parameters written as vectors and tensors of the adjoint. Therefore, the scalar potential of the NHDMs are CP -invariant if, and only if, one can find a CP -reflection that leaves the potential invariant. In addition, the analysis in the adjoint representation was shown to be much easier to carry out than the tensor analysis based on the fundamental and antifundamental representations. Of course if other representations that can not be written in terms of the adjoint are present, the analysis invariably would require the fundamental representations. For example, to extend this analysis to the Yukawa sector of the NHDMs, the fundamental representation is necessary there.

For $N = 2$, with the fortunate coincidence of the adjoint of $SU(2)$ being the rotation group in three dimensions, the full analysis is facilitated by the possible geometrical description. All the necessary and sufficient conditions for CP violation can be formulated for the 2HDM scalar potential sector. Those conditions can be formulated in terms of basis invariants which coincided with previously found ones [14], except for proportionality constants. (A comparison between the invariants in Refs. [14,16] is given in Ref. [15].) For CP -invariant potentials, this method also enabled us to find the explicit CP transformation in any basis and the procedure to reach the real basis. For CP -violating potentials, the canonical form of Eq. (20) still defines a standard form, besides the physical Higgs-basis [12,20], to compare among the various 2HDMs: two 2HDM potentials are physically equivalent if they have the same form in the canonical CP -basis. (For convention, use the basis for which the eigenvalues of $\tilde{\Lambda}$ is in decreasing order.) This CP -basis also makes the soft/hard classification of CP -violation [17] easier to perform: From Eq. (20), we see the potential $V(\mathbb{A})$ violates the CP -symmetry hardly only if the fourth term is CP violating, i.e., if I_{Λ_0} (25) is not null; otherwise, the potential has soft CP violation through the third term or it is CP symmetric. From Eq. (37), we see the spontaneous CP violation only occurs softly.

For $N = 3$, the necessary and sufficient conditions for CP -violation can still be formulated in a systematic way. However, these conditions may possibly be reduced to fewer and more strict conditions. Such reduction requires a more detailed study of the relation between the invariants (24)–(27) and the described procedure to check the CP symmetry or asymmetry. In case the potential is CP -invariant, the explicit procedure to reach a real basis (among infinitely many) is also lacking in this context and for $N > 3$ as well.

For $N > 3$, necessary conditions for CP -invariance in the NHDM potential can be found but whether those conditions are sufficient or can be supplemented to be sufficient is an open question. The answer lies in the classification and perhaps parametrization of the orbital structure of the adjoint representation of the $SU(N)$ group. In any case, if a result similar to $N = 3$ can be found, i.e., if any $SO(N)$ subalgebra of the $SU(N)$ algebra is conjugated to the real $SO(N)$ subalgebra, the problem is practically solved.

Another possible approach would be the study of the automorphism properties of the irreducible representations (irreps) of $SU(N)$ contained in $\tilde{\Lambda}$ that are larger than the adjoint. For example, $\tilde{\Lambda}$ for $N \geq 3$ contains a component transforming under the adjoint representation (see Table I in appendix D and E). For this component it always exists a transformation capable of transforming it to satisfy Eq. (69). For higher dimensional irreps a detailed study is not known to the author.

To conclude, the method presented here illustrates that using the adjoint representation as the minimal nontrivial representation can have substantial advantage over the fundamental representation treatments to handle the freedom of change of basis within a large horizontal space. Inherent to that was the notion of CP -type transformations as automorphisms in the group of horizontal transformations. Such notion was useful to distinguish the CP invariance/violation (explicit/spontaneous) properties of the theory and to construct the CP -odd basis invariants.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). The author would like to thank Professor J.C. Montero and Professor V. Pleitez for pointing up Refs. [13,14] which

TABLE I. $SU(N)$ decompositions

N	$d = N^2 - 1$	$(d \otimes d)_S$	$\frac{d(d+1)}{2}$
2	3	5 \oplus 1	6
3	8	27 \oplus 8 \oplus 1	36
4	15	84 \oplus 20 \oplus 15 \oplus 1	120
5	24	200 \oplus 75 \oplus 24 \oplus 1	300
6	35	405 \oplus 189 \oplus 35 \oplus 1	630

motivated this work, and Professor L. A. Ferreira for general discussions on Lie algebras and Lie groups.

APPENDIX A: NOTATION AND CONVENTIONS

We use for the fundamental representation of $SU(N)$ the $N \times N$ traceless Hermitian matrices $\{F_a\} \equiv \{\frac{1}{2}\lambda_a\}$ normalized as

$$\text{Tr}[F_i F_j] = \frac{1}{2}\delta_{ij}. \quad (\text{A1})$$

The number of generators is $d = \dim SU(N) = N^2 - 1$. The matrices λ_a are generalizations of the Gell-Mann matrices for $SU(3)$ [28].

The compact semisimple Lie algebra is defined by

$$[F_i, F_j] = if_{ijk}F_k, \quad (\text{A2})$$

which is satisfied for any representation $D(F_a)$. By using the convention of Eq. (A1), we have the relation

$$f_{ijk} = \frac{2}{i} \text{Tr}[[F_i, F_j]F_k] = \frac{1}{4i} \text{Tr}[[\lambda_i, \lambda_j]\lambda_k]. \quad (\text{A3})$$

The Cartan metric in the adjoint representation reads

$$\sum_{j,k=1}^d f_{ajk}f_{bjk} = N\delta_{ab}. \quad (\text{A4})$$

In the enveloping algebra implicit in the fundamental representation, we have also

$$\{F_i, F_j\} = \frac{1}{2N}\delta_{ij}\mathbb{1} + d_{ijk}F_k. \quad (\text{A5})$$

The coefficients d_{ijk} are totally symmetric under exchange of indices and they are familiar for $SU(3)$ [28]. These coefficients can be obtained from the fundamental representation

$$d_{ijk} = 2 \text{Tr}[\{F_i, F_j\}F_k] = \frac{1}{4} \text{Tr}[\{\lambda_i, \lambda_j\}\lambda_k], \quad (\text{A6})$$

and obey the property

$$\sum_{j,k=1}^d d_{ajk}d_{bjk} = \frac{N^2 - 4}{N}\delta_{ab}. \quad (\text{A7})$$

Taking the trace of Eq. (A5) we obtain the value of the second order Casimir invariant

$$\begin{aligned} h = 1 & \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \\ h = 2 & \quad \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{r-1} + \alpha_r, \\ h = 3 & \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \dots, \alpha_{r-2} + \alpha_{r-1} + \alpha_r, \\ & \quad \vdots \\ h = r & \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r. \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

The height h is the sum of the expansion coefficients of the positive roots in terms of the simple roots. Only the sum of neighbor simple roots are also roots.

$$\sum_{i=1}^d (F_i)^2 = C_2(F)\mathbb{1}, \quad (\text{A8})$$

where $C_2(F) = \frac{d}{2N}$. The second order Casimir invariant for the adjoint representation is already given by Eq. (A4) which implies $C_2(\text{ad}) = N$.

1. The fundamental representation for $SU(N)$

We show here a explicit choice of matrices for the fundamental representation of $SU(N)$ in the Cartan-Weyl basis. With certain choice of phases and cocycles implicit, such choice coincides with the Gell-Mann type matrices (except for a factor one-half).

The $SU(N)$ algebra \mathcal{G} is the algebra of the Hermitian and traceless $N \times N$ matrices. This is the defining and a fundamental (and minimal) representation. An orthogonal basis for this algebra can be chosen to be the d matrices

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}} \text{diag}(\mathbb{1}_k, -k, 0, \dots, 0), \quad k = 1, \dots, r, \quad (\text{A9})$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}), \quad i < j = 1, \dots, N, \quad (\text{A10})$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2i}(e_{ij} - e_{ji}), \quad i < j = 1, \dots, N, \quad (\text{A11})$$

where $r = N - 1$, and e_{ij} denotes the canonical basis defined by $(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Each type of matrices spans the algebra subspaces $\{h_k\} \sim \mathfrak{t}_r$, $\{S_{ij}\} \sim \mathfrak{t}_q$ and $\{A_{ij}\} \sim \mathfrak{t}_q$ in Eq. (65) and the normalization satisfies Eq. (A1). If we associate $(i, j) = (i, i + 1) \leftrightarrow \alpha_i$ [$i = 1, \dots, r$], $(i, j) = (i, i + 2) \leftrightarrow \alpha_{r+i}$ [$i = 1, \dots, r - 1$], ..., $(1, N) \leftrightarrow \alpha_q$, we obtain the correspondence $S_{ij} \leftrightarrow \mathcal{S}_\alpha$ and $A_{ij} \leftrightarrow \mathcal{A}_\alpha$; $q = (d - r)/2 = N(N - 1)/2$ is the number of positive roots of the algebra denoted by α , used for labeling \mathcal{S}_α and \mathcal{A}_α . The first r roots are the simple roots. All positive roots can be written as combinations of the simple roots. Since $SU(N)$ is a simply laced algebra [27], the positive roots are given, in terms of the simple roots,

The roots live in an Euclidean r -dimensional space and explicit coordinates can be obtained from the matrices (A9)–(A11), and the relation

$$[h_k, E_\alpha] = (\alpha)_k E_\alpha. \quad (\text{A13})$$

Using $E_\alpha = e_{i,i+1}$, the simple roots α_i , which are normalized as $(\alpha_i, \alpha_i) = 1$, have coordinates

$$(\alpha_i)_k = (h_k)_{ii} - (h_k)_{i+1,i+1}. \quad (\text{A14})$$

The weight system of the fundamental representation have highest weight λ_1 , which is just the first primitive weight defined by $2(\lambda_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, r$. The $r + 1$ weights of this representation can be obtained by subtracting positive roots from the highest weight:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \lambda_1 && \sim (10 \dots 0) \\ \mu_1 &= \lambda_1 - \alpha_1 && \sim (-110 \dots 0) \\ \mu_2 &= \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 && \sim (0 - 110 \dots 0) \\ &\vdots && \vdots \\ \mu_r &= \lambda_1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_r && \sim (0 \dots 0 - 1). \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

The last column corresponds to the weights in Dynkin basis [27] $\mu_a \sim (n_1 n_2 \dots n_r)$, which are the expansion coefficients in terms of the primitive weights $\mu_a = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i$. These $r + 1 = N$ weights can label all the states, which are not degenerate in this case.

The matrices (A9) represents the Cartan subalgebra, and in the Cartan-Weyl basis they are diagonal. The diagonal elements are just the components of the weights in Eq. (A15), i.e.,

$$h_k \equiv \langle \mu | h_k | \mu' \rangle = \text{diag}(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r)_k. \quad (\text{A16})$$

2. f_{ijk} and d_{ijk} tensors

By using Eqs. (A3) and (A6) and the properties of the fundamental representation described in the preceding subsection, we can deduce some general features of the rank-3 tensors f_{ijk} and d_{ijk} with the ordering defined by Eq. (65). Firstly, we define

$$f(F_i, F_j, F_k) \equiv f_{ijk} \quad (\text{A17})$$

$$d(F_i, F_j, F_k) \equiv d_{ijk}. \quad (\text{A18})$$

Then, the following properties can be proved,

$$\begin{aligned} f(h_i, h_j, F_k) &= 0, & f(h_i, S_\alpha, S_\beta) &= 0, \\ f(h_i, \mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta) &= 0, & f(h_i, \mathcal{A}_\alpha, S_\beta) &= -(\alpha)_i \delta_{\alpha\beta}, \\ f(h_i, S_\alpha, \mathcal{A}_\beta) &= (\alpha)_i \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

The zeros above can be obtained from the general relations

$$[t_p, t_p] \subset t_q \quad [t_q, t_q] \subset t_q \quad [t_q, t_p] \subset t_p, \quad (\text{A20})$$

and

$$[t_r, t_r] = 0 \quad [t_r, t_q] \subset \tilde{t}_q \quad [t_r, \tilde{t}_q] \subset t_q, \quad (\text{A21})$$

and the fact that the trace of the product of two elements of distinct subspaces is null (orthogonality). The properties (A20) are easily seen in the fundamental representation by

the symmetric character of the elements of t_p , the anti-symmetric character of the elements of t_q , and the properties of a commutator $[A, B]^T = -[A^T, B^T]$.

For illustration, we will show how to obtain the non-null elements of Eq. (A19), knowing the properties of the fundamental representation in the Cartan-Weyl basis. The procedure is as follows,

$$\begin{aligned} f(h_i, \mathcal{A}_\alpha, S_\beta) &= \frac{2}{i} \sum_{\mu} \langle \mu | [h_i, \mathcal{A}_\alpha] S_\beta | \mu \rangle \\ &= -2(\alpha)_i \sum_{\mu} \langle \mu | S_\alpha S_\beta | \mu \rangle \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha)_i \sum_{\mu} \langle \mu | E_\alpha E_{-\beta} + E_{-\alpha} E_\beta | \mu \rangle \\ &= -(\alpha)_i \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \sum_{\mu} [\delta(\mu - \alpha) + \delta(\mu + \alpha)], \end{aligned} \quad (\text{A22})$$

where

$$\delta(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \text{ is a weight,} \\ 0, & \mu \text{ is not a weight.} \end{cases} \quad (\text{A23})$$

In addition, we have used Eqs. (66), (67), and (A13) and $\langle \mu | E_{-\alpha} E_\alpha | \mu \rangle = \delta(\mu + \alpha)$. We can see from Eq. (A15) that the last sum of Eq. (A22) gives 2 for any positive root α since there are always one positive root connecting two weights.

For d_{ijk} , the fundamental representation is essential since we can not use the Lie algebra properties. Some properties are

$$\begin{aligned} d(h_i, h_j, S_\alpha) &= d(h_i, h_j, \mathcal{A}_\alpha) = 0 \\ d(h_i, S_\alpha, \mathcal{A}_\beta) &= 0 \\ d(h_i, S_\alpha, S_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} \sum_{\mu} (\mu)_i [\delta(\mu - \alpha) + \delta(\mu + \alpha)] \\ d(h_i, \mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta) &= d(h_i, S_\alpha, S_\beta) \\ d(h_i, h_j, h_k) &= 4 \sum_{\mu} (\mu)_i (\mu)_j (\mu)_k. \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

Basis independent properties can be extracted by defining a symmetric algebra [32,33] in the space of the $N \times N$ traceless Hermitian matrices. Such space will be denoted by $\mathcal{M}_h(N, \mathbb{C})$, and it is isomorphic to a \mathbb{R}^d vector space. Given $\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{M}_h(N, \mathbb{C})$, the symmetric algebra is defined as

$$\underline{x} \vee \underline{y} \equiv \frac{1}{2} \{ \underline{x}, \underline{y} \} - \frac{1}{N} \text{Tr}[\underline{x}\underline{y}]. \quad (\text{A25})$$

Obviously $\underline{x} \vee \underline{y} \in \mathcal{M}_h(N, \mathbb{C})$. The tilde in \underline{x} means

$$\underline{x} \equiv \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\lambda} = x_i \lambda_i, \quad (\text{A26})$$

where \mathbf{x} lives in \mathbb{R}^d , in the adjoint representation space. In terms of the vectors \mathbf{x} and \mathbf{y} in the adjoint, the symmetric

algebra (A25) can be written

$$\mathbf{x} \vee \mathbf{y} \equiv (\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\lambda}, \quad (\text{A27})$$

where the \vee in the right-hand side of Eq. (A27) is the product defined on the adjoint vectors, Eq. (78). We use the same symbol for both of the products.

From the symmetric and antisymmetric nature of the elements of \mathfrak{t}_p and \mathfrak{t}_q , respectively, we can conclude that

$$\mathfrak{t}_p \vee \mathfrak{t}_p \subset \mathfrak{t}_p, \quad \mathfrak{t}_q \vee \mathfrak{t}_q \subset \mathfrak{t}_q, \quad \mathfrak{t}_q \vee \mathfrak{t}_p \subset \mathfrak{t}_q. \quad (\text{A28})$$

Then, the equality $d_{ijk} = 2\text{Tr}[\{F_i, F_j\}F_k] = 4\text{Tr}[F_i \vee F_j F_k]$ yields

$$d(\mathfrak{t}_p, \mathfrak{t}_p, \mathfrak{t}_q) = 0, \quad d(\mathfrak{t}_q, \mathfrak{t}_q, \mathfrak{t}_q) = 0. \quad (\text{A29})$$

The results above are invariant if the positions of any pair are interchanged. For particular elements of \mathcal{G} , we also have $d(F_i, F_i, F_i) = 0$, for $F_i = S_\alpha$ and $F_i = h_1$. However, any element F in \mathfrak{t}_q does not satisfy $d(F, F, F) = 0$, differently of \mathfrak{t}_q . Thus \mathfrak{t}_q forms a subspace (and subalgebra) of \mathcal{G} but not $\tilde{\mathfrak{t}}_q$.

APPENDIX B: BRANCHING OF ADJ $SU(N)$ WITH RESPECT TO REAL $SO(N)$

The separation of the $SU(N)$ algebra in \mathfrak{t}_p and \mathfrak{t}_q , as in Eq. (65), naturally induces two representations of the $SO(N)$ subalgebra generated by $\mathfrak{t}_q = \{\mathcal{A}_\alpha\}$.

One of them is just the adjoint of $SO(N)$ carried by the real antisymmetric $N \times N$ matrices spanned by $\{i\mathcal{A}_\alpha\}$, for which the subgroup action is

$$e^{i\theta_\alpha \mathcal{A}_\alpha} (a_\beta i\mathcal{A}_\beta) e^{-i\theta_\alpha \mathcal{A}_\alpha} = i\mathcal{A}_\alpha D_1(e^{i\theta \cdot \mathcal{A}})_{\alpha\beta} a_\beta. \quad (\text{B1})$$

The representation D_1 is just the lower $q \times q$ block of the adjoint representation of $\exp(\theta_\alpha D(i\mathcal{A}_\alpha))$ of $SU(N)$ with the ordering (65). This is an irrep of dimension $q = N(N-1)/2$.

The other representation is carried by the real $N \times N$ symmetric traceless matrices spanned by $\mathfrak{t}_p = \{h_i, S_\alpha\}$. The subgroup action is given by

$$e^{i\theta_\alpha \mathcal{A}_\alpha} (a_i h_i + b_\beta S_\beta) e^{-i\theta_\alpha \mathcal{A}_\alpha} = (h_i, S_\alpha) D_2(e^{i\theta \cdot \mathcal{A}}) \begin{pmatrix} a_i \\ b_\beta \end{pmatrix}. \quad (\text{B2})$$

The representation D_2 is just the upper $p \times p$ block matrix in the adjoint representation $\exp(\theta_\alpha D(i\mathcal{A}_\alpha))$ of $SU(N)$ whose dimension is $p = N(N+1)/2 - 1$ and it is irreducible.

APPENDIX C: PROPERTIES OF MATRICES SIMILAR TO ANTISYMMETRIC MATRICES

The following proposition will be proved: For any complex or real $n \times n$ diagonalizable [34] matrix X ,

$$\text{Tr}[X^{2m+1}] = 0 \quad \text{for all } 2m+1 \leq n \quad (\text{C1})$$

imply X is similar to an antisymmetric matrix $A = UXU^{-1}$. The converse is trivial since the trace of a matrix is equal to the trace of the transpose.

For the proof, we need the characteristic equation [33]

$$\det(X - \lambda \mathbb{1}) = (-1)^n \left[\lambda^n - \sum_{k=1}^n \gamma_k(X) \lambda^{n-k} \right], \quad (\text{C2})$$

where

$$\gamma_1(X) = \text{Tr}[X], \quad (\text{C3})$$

$$\gamma_2(X) = \frac{1}{2} \text{Tr}[X^2 - \gamma_1(X)X], \quad (\text{C4})$$

$$\gamma_3(X) = \frac{1}{3} \text{Tr}[X^3 - \gamma_1(X)X^2 - \gamma_2(X)X], \quad (\text{C5})$$

$$\vdots \quad (\text{C6})$$

$$\gamma_n(X) = \frac{1}{n} \text{Tr} \left[X^n - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(X) X^{n-k} \right]. \quad (\text{C7})$$

The same coefficients enter in the matricial equation

$$X^n - \sum_{k=1}^n \gamma_k(X) X^{n-k} = 0, \quad (\text{C8})$$

for which $X^0 = \mathbb{1}_n$ is implicit.

If Eq. (C1) is satisfied, all odd coefficients $\gamma_{2k+1}(X) = 0$ and the characteristic equation reads

$$\det(X - \lambda \mathbb{1}) = (-1)^n \left[\lambda^n - \gamma_2(X) \lambda^{n-2} - \gamma_4(X) \lambda^{n-4} - \dots - \gamma_n(X) \right]. \quad (\text{C9})$$

If n even we rewrite $n = 2m$ and Eq. (C9) yields

$$\det(X - \lambda \mathbb{1}) = (\lambda^2)^m - \sum_{k=1}^m \gamma_{2k}(X) (\lambda^2)^{m-k} = f(\lambda^2). \quad (\text{C10})$$

If n odd we rewrite $n = 2m+1$ and Eq. (C9) yields

$$\begin{aligned} \det(X - \lambda \mathbb{1}) &= -\lambda \left[(\lambda^2)^m - \sum_{k=1}^m \gamma_{2k}(X) (\lambda^2)^{m-k} \right] \\ &= -\lambda f(\lambda^2). \end{aligned} \quad (\text{C11})$$

For both Eqs. (C10) and (C11), $f(\lambda^2)$ is a polynomial in λ^2 of order m and it has, including degeneracies, m (complex) roots λ_i^2 , $i = 1, 2, \dots, m$. Then

$$f(\lambda^2) = \prod_{i=1}^m (\lambda^2 - \lambda_i^2) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)(\lambda + \lambda_i), \quad (\text{C12})$$

which implies that for each eigenvalue λ_i of X an opposite eigenvalue $-\lambda_i$ exists (both might be zero), except for a

unique additional zero eigenvalue when n is odd, as can be seen from Eq. (C11).

The existence of opposite eigenvalues guarantees the existence of a similarity transformation U_1 that leads X to the diagonal form

$$U_1 X U_1^{-1} = \begin{cases} \text{diag}(\lambda_1 \sigma_3, \lambda_2 \sigma_3, \dots, \lambda_m \sigma_3) & \text{for } n = 2m, \\ \text{diag}(\lambda_1 \sigma_3, \lambda_2 \sigma_3, \dots, \lambda_m \sigma_3, 0) & \text{for } n = 2m + 1. \end{cases} \quad (\text{C13})$$

Then, one can use the matrix

$$U_2 = \begin{cases} \mathbb{1}_m \otimes e^{-i\sigma_1 \pi/4} & \text{for } n = 2m, \\ \text{diag}(\mathbb{1}_m \otimes e^{-i\sigma_1 \pi/4}, 0) & \text{for } n = 2m + 1, \end{cases} \quad (\text{C14})$$

to transform Eq. (C13) into antisymmetric form

$$U_2 U_1 X U_1^{-1} U_2^{-1} = \begin{cases} \text{diag}(\lambda_1 \sigma_2, \lambda_2 \sigma_2, \dots, \lambda_m \sigma_2) & \text{for } n = 2m, \\ \text{diag}(\lambda_1 \sigma_2, \lambda_2 \sigma_2, \dots, \lambda_m \sigma_2, 0) & \text{for } n = 2m + 1. \end{cases} \quad (\text{C15})$$

When X is Hermitian, U_1 can be unitary and the eigenvalues λ_i are real. For X in the $SU(N)$ algebra, condition (C1) is necessary and sufficient for X to be in the orbit of an element in \mathfrak{t}_q .

APPENDIX D: THE DECOMPOSITION OF $(d \otimes d)_S$ OF $SU(N)$

In the last term of Eq. (57), $\tilde{\Lambda}$ transforms under the $(d \otimes d)_S$ representation of $SU(N)_H$. Such representation is reducible. Though, unlike the $N = 2$ case, it has more than two components, as shown in the Table I for $N = 2, \dots, 6$. (It can be proved that the number of components are at most four.) Table I shows the branchings of the direct product representation $d \otimes d$ for the symmetric part denoted by the subscript S [27]; the last column shows the dimension of the representation space of $(d \otimes d)_S$, which is just the space of the real symmetric $d \times d$ matrices.

APPENDIX E: REAL SYMMETRIC ADJOINT REPRESENTATION IN $(d \otimes d)_S$

We know the adjoint representation for a Lie group can be obtained from the vector space spanned by the algebra itself in any representation. In particular, any compact semisimple Lie algebra can be represented by the $d \times d$ real antisymmetric matrices given by the structure constants $i(T_i)_{jk} = f_{ijk}$.

In contrast, there is also a $d \times d$ real symmetric representation spanned by the real symmetric matrices $\{d_i\}$ given by

$$(d_i)_{jk} = d_{ijk}, \quad (\text{E1})$$

which is the rank-3 totally symmetric tensor from Eq. (A6).

That $\{d_i\}$ represents the $SU(N)$ in the adjoint representation can be seen by

$$[T_i, d_j] = i f_{ijk} d_k. \quad (\text{E2})$$

Equation (E2) can be proved by using Eqs. (A3) and (A6) and the completeness relation of Eq. (52). Moreover

$$d_{ijk} T_j T_k = -\frac{N}{2} d_i. \quad (\text{E3})$$

Thus, for $N \geq 3$, the component in the adjoint of the tensor $\tilde{\Lambda}$ can be extracted as

$$\tilde{\Lambda}|_{\text{ad}} = \tilde{\Lambda}_i^{(\text{ad})} d_i, \quad (\text{E4})$$

where, from Eq. (A7),

$$\tilde{\Lambda}_i^{(\text{ad})} = \frac{N}{N^2 - 4} \text{Tr}[\tilde{\Lambda} d_i] = \frac{N}{N^2 - 4} d_{ijk} \tilde{\Lambda}_{jk}. \quad (\text{E5})$$

This is a practical way of extracting the symmetric adjoint representation of $(d \otimes d)_S$.

- [1] W. Grimus and M. N. Rebelo, Phys. Rep. **281**, 239 (1997).
- [2] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963); M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [3] G. C. Branco, L. Lavoura, and J. P. Silva, *CP Violation* (Oxford University, New York, 1999).
- [4] T. D. Lee, Phys. Rev. D **8**, 1226 (1973); Phys. Rep. **9**, 143 (1974).
- [5] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **37**, 657 (1976).

- [6] S. Eidelman *et al.* (Particle Data Group), Phys. Lett. B **592**, 1 (2004).
- [7] J. Charles *et al.* (CKMfitter Group), Eur. Phys. J. C **41**, 1 (2005).
- [8] S. L. Glashow and S. Weinberg, Phys. Rev. D **15**, 1958 (1977).
- [9] Y.-L. Wu and L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. **73**, 1762 (1994); J. Liu and L. Wolfenstein, Nucl. Phys. **B289**, 1 (1987).

- [10] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. **55**, 1039 (1985). Also, Phys. Rev. D **35**, 1685 (1987); I. Dunietz, O. W. Greenberg, and D. d. Wu, Phys. Rev. Lett. **55**, 2935 (1985); J. Bernabeu, G. C. Branco, and M. Gronau, Phys. Lett. **169B**, 243 (1986).
- [11] F. J. Botella and J. P. Silva, Phys. Rev. D **51**, 3870 (1995).
- [12] S. Davidson and H. E. Haber, Phys. Rev. D **72**, 035004 (2005); **72**, 099902(E) (2005).
- [13] H. E. Haber and D. O'Neil, hep-ph/0602242.
- [14] J. F. Gunion and H. E. Haber, Phys. Rev. D **72**, 095002 (2005).
- [15] I. P. Ivanov, Phys. Lett. B **632**, 360 (2006).
- [16] G. C. Branco, M. N. Rebelo, and J. I. Silva-Marcos, Phys. Lett. B **614**, 187 (2005).
- [17] I. F. Ginzburg and M. Krawczyk, Phys. Rev. D **72**, 115013 (2005).
- [18] G. C. Branco, Phys. Rev. Lett. **44**, 504 (1980).
- [19] A. Mendez and A. Pomarol, Phys. Lett. B **272**, 313 (1991).
- [20] L. Lavoura and J. P. Silva, Phys. Rev. D **50**, 4619 (1994).
- [21] More recent NHDMs and extensions include, e.g., Y. Koide and M. Tanimoto, Z. Phys. C **72**, 333 (1996); S. L. Adler, Phys. Rev. D **59**, 015012 (1999); **59**, 099902 (1999); C. I. Low, Phys. Rev. D **70**, 073013 (2004); A. Ghosal, K. Bandyopadhyay, and A. K. Ray, Phys. Rev. D **51**, 1314 (1995); C. Liu, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 4307 (1996); A. G. Dias, V. Pleitez, and M. D. Tonasse, Phys. Rev. D **67**, 095008 (2003).
- [22] M. Carena and H. E. Haber, Prog. Part. Nucl. Phys. **50**, 63 (2003).
- [23] Y. L. Wu, hep-ph/9404241.
- [24] There can be the quartic vector-vector interaction $(\Phi_a^\dagger \vec{\tau} \Phi_a)(\Phi_b^\dagger \vec{\tau} \Phi_b)$ (see, e.g., Ref. [5]) but it can be reduced to the form (2) by using the completeness relation Eq. (52) for the generators of $SU(2)_L$.
- [25] C. C. Nishi, Am. J. Phys. **73**, 1160 (2005).
- [26] Note that this definition differs from Ref. [14].
- [27] R. Slansky, Phys. Rep. **79**, 1 (1981).
- [28] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [29] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (John Wiley & Sons, New York, 1974).
- [30] If a g satisfying cond. 1 exists, all hg , where h is an element of the real subgroup $H = SO(N)$, also satisfies cond. 1. Then, cond. 2 defines a condition for the right cosets G/H . Furthermore, since the p and q blocks are irreps of H , it preserves the norm of each vector in the $t_p(V_p)$ and $t_q(V_q)$ subspaces; only elements in G/H promote the transition between $t_p(V_p)$ and $t_q(V_q)$.
- [31] Generalized, in the sense that the number of reflected directions in the CP -reflection (63) is q which can be even. The adjoint representation space is isomorphic to \mathbb{R}^d and true pseudoscalars should be invariant by $SO(d)$ but should change sign under any reflection of an odd number of directions.
- [32] L. O'Raifeartaigh, *Group Structure of Gauge Theories* (Cambridge University, Cambridge, England, 1986).
- [33] L. Michel and L. Radicati, Ann. Inst. H. Poincaré **18**, 185 (1973).
- [34] This means that in the canonical Jordan form X does not have any off-diagonal element different from zero.

Apêndice E

Violação de CP “soft” no sistema dos mésons K

Este trabalho foi publicado como [109]: J. C. Montero, C. C. Nishi, V. Pleitez, O. Ravinez and M. C. Rodriguez, “Soft CP violation in K-meson systems,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 016003 [arXiv:hep-ph/0511100].

Soft CP violation in K -meson systemsJ. C. Montero,^{1,*} C. C. Nishi,^{1,†} V. Pleitez,^{1,‡} O. Ravinez,^{2,§} and M. C. Rodriguez^{3,||}¹*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, Rua Pamplona, 145 01405-900– São Paulo, Brazil*²*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería UNI, Avenida Tupac Amaru S/N apartado 31139 Lima, Peru*³*Departamento de Física, Fundação Universidade Federal do Rio Grande/FURG, Av. Itália, km 8, Campus Carreiros 96201-900, Rio Grande, RS, Brazil*

(Received 1 November 2005; published 17 January 2006)

We consider a model with soft CP violation which accommodates the CP violation in the neutral kaons even if we assume that the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa mixing matrix is real and the sources of CP violation are three complex vacuum expectation values and a trilinear coupling in the scalar potential. We show that for some reasonable values of the masses and other parameters the model allows us to explain all the observed CP violation processes in the K^0 - \bar{K}^0 system.

DOI: [10.1103/PhysRevD.73.016003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.016003)

PACS numbers: 11.30.Er, 12.60.-i, 13.20.Eb

I. INTRODUCTION

Until some time ago, the only physical system in which the violation of the CP symmetry was observed was the neutral kaon system [1]. Besides, only the indirect CP violation described by the ϵ parameter was measured in that system. Only recently has clear evidence for direct CP violation parametrized by the ϵ' parameter been observed in laboratory [2]. Moreover, the CP violation in the B -mesons system has been finally observed as well [3]. It is in fact very impressive that all of these observations are accommodated by the electroweak standard model with a complex Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) mixing matrix [4,5] when QCD effects are also included. In the context of that model, the only way to introduce CP violation is throughout its hard violation due to complex Yukawa couplings, which imply a surviving phase in the charged current coupled to the vector boson W^\pm in the quark sector. In the neutral kaon system, despite the CKM phase being $O(1)$, the breakdown of that symmetry is naturally small because its effect involves the three quark families at the one loop level [6]. This is not the case of the B mesons where the three families are involved even at the tree level and the CP violating asymmetries are $O(1)$ [7].

Notwithstanding, if new physics does exist at the TeV scale it may imply new sources of CP violation. In this context the question if the CKM matrix is complex becomes nontrivial since at least part of the CP violation may come from the new physics sector [8]. For instance, even in the context of a model with $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ gauge symmetry, we may have spontaneous CP violation through the complex vacuum expectation values (VEVs). This is the case of the two Higgs doublets extension of the standard model if we do not impose the suppression of flavor-

changing neutral currents (FCNCs), as in Ref. [9]. The CP violation may also arise throughout the exchange of charged scalars if there are at least three doublets and no FCNCs [10]. Truly soft CP violation may also arise throughout a complex dimensional coupling constant in the scalar potential and with no CKM phase [11]. In fact, all these mechanisms can be at work in multi-Higgs extensions of the standard model [12]. Hence, in the absence of a general principle, all possible sources of CP violation must be considered in a given model. However, it is always interesting to see the potentialities of a given source to explain by itself all the present experimental data. This is not a trivial issue since, for instance, CP violation mediated by Higgs scalars in models without flavor changing neutral currents have been almost ruled out even by old data [13–17].

Among the interesting extensions of the standard model there are the models based on the $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ gauge symmetry called 3-3-1 models for short [18–20]. These models have shown to be very predictive not only because of the relation with the generation problem, some representation content of these models allows three and only three families when the cancellation of anomalies and asymptotic freedom are used; they also give some insight about the observed value of the weak mixing angle [21]. The 3-3-1 models are also interesting context in which new theoretical ideas as extra dimensions [22] and the little Higgs mechanism can be implemented [23].

In the minimal 3-3-1 model [18] both mechanisms of CP violation, hard [24] and spontaneous [25] have already been considered. In this paper we analyze soft CP violation in the framework of the 3-3-1 model of Ref. [19] in which only three triplets are needed for breaking the gauge symmetry appropriately and give mass to all fermions. Although it has been shown that in this model pure spontaneous CP violation is not possible [25], we can still implement soft CP violation if, besides the three scalar VEVs, a trilinear parameter in the scalar potential is allowed to be complex. In this case a physical phase survives violating

*Electronic address: montero@ift.unesp.br†Electronic address: ccnishi@ift.unesp.br‡Electronic address: vicente@ift.unesp.br§Electronic address: opereyra@uni.edu.pe||Electronic address: microdriguez@fisica.furg.br

the CP symmetry. This mechanism was developed in Ref. [26] but there a detailed analysis of the CP observables in both kaons and B -mesons was not given. Here we will show that all the CP violating parameters in the neutral kaon system can be explained through this mechanism, leaving the case of the B -mesons for a forthcoming paper.

The outline of this paper is as follows. In Sec. II we briefly review the model of Ref. [26] in which we will study a mechanism for soft CP violation. In Sec. III we review the usual parametrization of the CP violating parameters of the neutral kaon system, ϵ and ϵ' , establishing what is in fact being calculated in the context of the present model. In Sec. IV we calculate ϵ , and in Sec. V we do the same for ϵ' . The possible values for those parameters in the context of our model are considered in Sec. VI, while our conclusions are in the last section. In the appendix we write some integrals appearing in box and penguin diagrams.

II. THE MODEL

Here we are mainly concerned with the doubly charged scalar and its Yukawa interactions with quarks since this is the only sector in which the soft CP violation arises in this model [26]. The interaction with the doubly charged vector boson will be considered when needed (Sec. V). As expected, there is only a doubly charged would be Goldstone boson, G^{++} , and a physical doubly charged scalar, Y^{++} , defined by

$$\begin{pmatrix} \rho^{++} \\ \chi^{++} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} |v_\rho| & -|v_\chi|e^{-i\theta_\chi} \\ |v_\chi|e^{i\theta_\chi} & |v_\rho| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{++} \\ Y^{++} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where $N = (|v_\rho|^2 + |v_\chi|^2)^{1/2}$; the mass square of the Y^{++} field is given by

$$m_{Y^{++}}^2 = \frac{A}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{|v_\chi|^2} + \frac{1}{|v_\rho|^2} \right) - \frac{a_8}{2} (|v_\chi|^2 + |v_\rho|^2), \quad (2)$$

where we have defined $A \equiv \text{Re}(fv_\eta v_\rho v_\chi)$ with f a complex parameter in the trilinear term $\eta\rho\chi$ of the scalar potential and a_8 is the coupling of the quartic term $(\chi^\dagger\rho) \times (\rho^\dagger\chi)$ in the scalar potential. For details and notation see Ref. [26]. Notice that since $|v_\chi| \gg |v_\rho|$, it is ρ^{++} which is almost Y^{++} .

In Ref. [26] it was shown that all CP violation effects arise from the singly and/or doubly charged scalar-exotic quark interactions. Notwithstanding, the CP violation in the singly charged scalar is avoided by assuming the total leptonic number L (or $B + L$, see below) conservation and, in this case, only two phases survive after the redefinition of the phases of all fermion fields in the model: a phase of the trilinear coupling constant f and the phase of a vacuum expectation value, say v_χ . Among these phases, actually only one survives because of the constraint equation

$$\text{Im}(fv_\chi v_\rho v_\eta) = 0, \quad (3)$$

which implies $\theta_\chi = -\theta_f$.

Let us briefly recall the representation content of the model [26] with a little modification in the notation. In the quark sector we have $Q_{iL} = (d_i, u_i, j_i)_L^T \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}^*, -1/3)$, $i = 1, 2$, $Q_{3L} = (u_3, d_3, J)_L^T \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}, 2/3)$; $U_{\alpha R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3)$, $D_{\alpha R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j_{iR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -4/3)$ and $J_R \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 5/3)$, and the Yukawa interactions are written as:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L} = & \sum_{i\alpha} \overline{Q}_{iL} (F_{i\alpha} \rho^* U_{\alpha R} + \tilde{F}_{i\alpha} D_{\alpha R} \eta^*) + \overline{Q}_{3L} (F_{3\alpha} U_{\alpha R} \eta \\ & + \tilde{F}_{3\alpha} D_{\alpha R} \rho) + \sum_{im} \lambda_{im} \overline{Q}_{iL} j_{mR} \chi^* \\ & + \lambda_3 \overline{Q}_{3L} J_R \chi + H.c., \end{aligned} \quad (4)$$

where all couplings in the matrices F, \tilde{F} , and λ 's are in principle complex. Although the fields in Eq. (4) are symmetry eigenstates we have omitted a particular notation. Here we will assume that all the Yukawa couplings in Eq. (4) are real in such a way that we may be able to test to what extension only the phase θ_χ can describe the CP violation parameters in the neutral kaon system, ϵ and ϵ' .

In order to diagonalize the mass matrices coming from Eq. (4), we introduce real and orthogonal left- and right-handed mixing matrices defined as

$$U'_{L(R)} = \mathcal{O}'_{L(R)} U_{L(R)}, D'_{L(R)} = \mathcal{O}'_{L(R)} D_{L(R)}, \quad (5)$$

with $U = (u, c, t)^T$ etc.; the primed fields denote symmetry eigenstates and the unprimed ones mass eigenstates, being the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrix defined as $V_{\text{CKM}} = \mathcal{O}'_{L^T} \mathcal{O}'_L$.

In terms of the mass eigenstates the Lagrangian interaction involving exotic quarks, the known quarks, and doubly charged scalars is given by [26]:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y = & \sqrt{2} \bar{J} \left[e^{-i\theta_\chi} \frac{|v_\chi|}{N} \frac{M_\alpha^d}{|v_\rho|} R - e^{+i\theta_\chi} \frac{|v_\rho|}{N} \frac{m_J}{|v_\chi|} L \right] \\ & \times (\mathcal{O}'_L)_{3\alpha} d_\alpha Y^{++} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (6)$$

where N is the same parameter appearing in Eq. (1), i.e., $N = (|v_\rho|^2 + |v_\chi|^2)^{1/2}$ and now, unlike Eq. (4), all fields are mass eigenstates, $L = (1 - \gamma_5)/2$, $R = (1 + \gamma_5)/2$, with $m_J = \lambda_3 |v_\chi| / \sqrt{2}$. In writing the first term of Eq. (6) we have used $\tilde{F}_{3\alpha} = \sqrt{2} (\mathcal{O}'_L^d M^d \mathcal{O}'_R^d)_{3\alpha} / |v_\rho|$, where M^d is the diagonal mass matrix in the d -quark sector and we have omitted the summation symbol in α so that $d_\alpha = d, s, b$. The Eq. (6) contains all CP violation in the quark sector once we have assumed that all the Yukawa couplings are real. Unlike in multi-Higgs extensions of the standard model [9–17] there is no Cabibbo suppression since in this model only one quark, J , contributes in the internal line, i.e., we have the replacement $u, c, t, \rightarrow J$.

Notice that in Eq. (6) the suppression of the mixing angle in the sector of the doubly charged scalars [see Eq. (1)] has been written explicitly. We will use as illustrative values $|\nu_\rho| \leq 246$ GeV and $|\nu_\chi| \gtrsim 1$ TeV. In this situation the CP violation in the neutral kaon system will impose constraints only upon the masses m_J , m_Y , and, in principle, on m_U the mass of the doubly charged vector boson. Although \mathcal{O}_L^j has free parameters since the masses $m_{j_{1,2}}$ are not known, the exotic quarks $j_{1,2}$ do not play any role in the CP violation phenomena of K mesons.

We should mention that it was implicit in the model of Ref. [26] the conservation of the quantum number $B + L$ defined in Refs. [19,20]. Only in this circumstance (or by introducing appropriately a Z_2 symmetry) we can avoid terms like $\epsilon(\Psi_{aL})^c \Psi_{bL} \eta$ and $(l_{aL})^c E_{bR}$, where Ψ_L , l_R and E_R denote the left-handed lepton triplet, and the usual right-handed components for usual and exotic leptons. These interactions imply mixing among the left- and right-handed components of the usual charged leptons with the exotic ones [27]. The quartic term $\chi^\dagger \eta \rho^\dagger \eta$ in the scalar potential which would imply CP violation throughout the single charged scalar exchange is also avoided by imposing the $B + L$ conservation. In fact, this model has the interesting feature that when a Z_2 symmetry is imposed, the Peccei-Quinn $U(1)$, the total lepton number, and the baryon number are all automatic symmetries of the classic Lagrangian [28].

III. CP VIOLATION IN THE NEUTRAL KAONS

First of all let us say that in the present model there are tree level contributions to the mass difference $\Delta M_K = 2\text{Re}M_{12}$ (where $M_{12} = \langle K^0 | \mathcal{H}_{\text{eff}} | \bar{K}^0 \rangle / 2m_K$). This is because the existence of the flavor changing neutral currents in the model in both the scalar sector and in the couplings with the Z^0 . The H^0 's contributions to ΔM_K have been considered in Ref. [25]. For $m_H \sim 150$ GeV the constraint coming from the experimental value of ΔM_K implies $(\mathcal{O}_{L^d}^d)_{dd}(\mathcal{O}_{L^d}^d)_{ds} \lesssim 0.01$. There are also tree-level contributions to ΔM_K coming from the Z' exchange which were considered in Ref. [18,29]. However, since there are 520 diagrams contributing to ΔM_K , we will use in this work the experimental value for this parameter. In this vain *a priori* there is no constraints on the matrix elements of \mathcal{O}_L^d .

The definition for the relevant parameters in the neutral kaon system is the usual one [30–33]:

$$\begin{aligned} \epsilon' &= \frac{e^{i(\delta_2 - \delta_0 + \pi/2)}}{\sqrt{2}} \frac{\text{Re}A_2}{\text{Re}A_0} \left[\frac{\text{Im}A_2}{\text{Re}A_2} - \frac{\text{Im}A_0}{\text{Re}A_0} \right], \\ \epsilon &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\text{Im}A_0}{\text{Re}A_0} + \frac{\text{Im}M_{12}}{\Delta M_K} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

We shall use the $\Delta I = 1/2$ rule for the nonleptonic decays which implies that $\text{Re}A_0/\text{Re}A_2 \approx 22.2$ and that the phase $\delta_2 - \delta_0 \approx -\pi/4$ is determined by hadronic parameters following Ref. [34] and it is, therefore, model independent.

The ϵ parameter has been extensively measured and its value is reported to be [33]

$$|\epsilon_{\text{exp}}| = (2.284 \pm 0.014) \times 10^{-3}. \quad (8)$$

More recently, the experimental status for the ϵ'/ϵ ratio has stressed the clear evidence for a nonzero value and, therefore, the existence of direct CP violation. The present world average (wa) is [33]

$$|\epsilon'/\epsilon|_{\text{wa}} = (1.67 \pm 0.26) \times 10^{-3}, \quad (9)$$

where the relative phase between ϵ and ϵ' is negligible [35]. These values of $|\epsilon|$ and $|\epsilon'/\epsilon|$ imply

$$|\epsilon'_{\text{exp}}| = 3.8 \times 10^{-6}. \quad (10)$$

On the other hand, we can approximate

$$|\epsilon| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\text{Im}M_{12}}{\Delta M_K} \right|, \quad (11a)$$

$$|\epsilon'| \approx \frac{1}{22.2\sqrt{2}} \left| \frac{\text{Im}A_0}{\text{Re}A_0} \right|. \quad (11b)$$

In the prediction of ϵ'/ϵ , $\text{Re}A_0$ and ΔM_K are taken from experiments, whereas $\text{Im}A_0$ and $\text{Im}M_{12}$ are computed quantities [36]. The experimental values used in this work are $\text{Re}A_0 = 3.3 \times 10^{-7}$ GeV and $\Delta M_K = 3.5 \times 10^{-15}$ GeV.

Let us finally consider the condition with which we will calculate the parameters ϵ and ϵ' . The main $\Delta S = 1$ contribution for the ϵ' parameter comes from the gluonic penguin diagram in Fig. 1 that exchanges a doubly charged scalar. The electroweak penguin is suppressed as in the SM and will not be considered. On the other hand the $\Delta S = 2$ and CP violating parameter ϵ has only contributions coming from box diagrams involving two doubly charged scalars Y^{++} [see Fig. 2(a)] and box diagrams involving one doubly charged scalar and one vector boson U^{++} [see Fig. 2(b)]. The relevant vertices for the calculations are

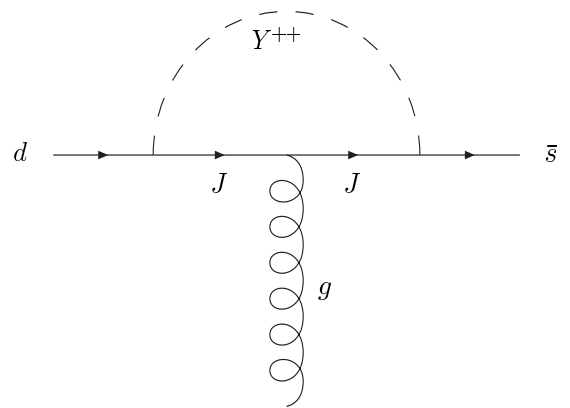


FIG. 1. Dominant CP violating penguin diagram contributing to the decay $K^0 \rightarrow \pi\pi$.

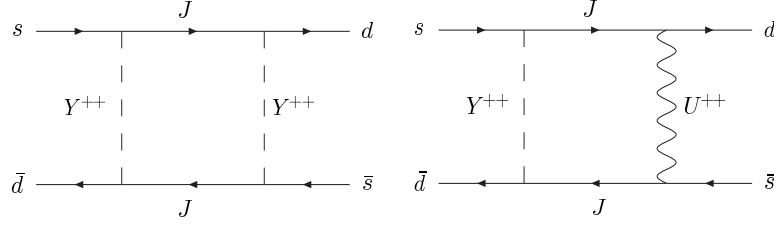


FIG. 2. (a) One of the box diagrams responsible for the transition $\bar{K}^0 \rightarrow K^0$ that involves the exchange of two doubly charged scalars Y^{++} . (b) One of the box diagrams responsible for the transition $\bar{K}^0 \rightarrow K^0$ that involves the exchange of a doubly charged scalar Y^{++} and a doubly charged vector boson U^{++} .

given in Eq. (6) and we will use the unitary gauge in our calculations. In other renormalizable R_ξ gauges we must take into account the would be Goldstone contributions and notice that, according to Eq. (1), the component of $\chi^{++} \sim O(1)G^{++}$.

The hadronic matrix elements will be taken from literature and whenever possible we also take, for the reasons we expose at the beginning of this section, from the experimental data or as free parameters. One of the features of this model is that there is no GIM mechanism since the only CP violation source comes from the vertices involving a d -type quark, an exotic quark, and a single doubly charged scalar.

IV. DIRECT CP VIOLATION

The dominant contributions to the ϵ' parameter come from the penguin diagram showed in Fig. 1 [32,37]. The part of the Lagrangian that takes into account this amplitude is obtained from Eq. (6) and the corresponding imaginary effective interaction is given by

$$\text{Im}\mathcal{L}_{\epsilon'} = \frac{g_s}{16\pi^2 N^2} C_{ds} m_s \left[\bar{s} \sigma^{\mu\nu} \frac{\lambda_a}{2} \left(L - \frac{m_d}{m_s} R \right) d \right] G_{\mu\nu}^a \times \frac{1}{2} [h(x) - xh'(x)] \sin 2\theta_\chi, \quad (12)$$

where we have defined $C_{ds} = (\mathcal{O}_L^d)_{3d} (\mathcal{O}_L^s)_{3s}$, and $G_{\mu\nu}^a$ in the context of the effective interactions is just $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a$, $x = m_Y^2/m_J^2$ and the function $h(x)$ is given in the appendix, and the prime denotes first derivative.

Neglecting the γ, Z contributions, i.e., the amplitudes with $I = 2$, and using the values for the other parameters given above, Eq. (11b) leads to

$$|\epsilon'| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{22.2} \frac{|\text{Im}A_0|}{|\text{Re}A_0|} \approx 9.6 \times 10^4 \frac{|\text{Im}A_0|}{1 \text{ GeV}}, \quad (13)$$

where we have used $\text{Re}A_0 = 3.3 \times 10^{-7} \text{ GeV}^{-1}$, with,

$$|\text{Im}A_0| = \sqrt{3} \frac{g_s}{16\pi^2} \frac{m_s}{N^2} C_{ds} \left| \frac{1}{2} (h(x) - xh'(x)) \right| \times \left| P_L - \frac{m_d}{m_s} P_R \right| \sin 2\theta_\chi. \quad (14)$$

We can write $|\epsilon'|$ as follows:

$$\frac{|\epsilon'|}{|\epsilon'_{\text{exp}}|} = C_{ds} A(x) \sin 2\theta_\chi, \quad (15)$$

$$A(x) = \sqrt{3} \frac{g_s}{(4\pi)^2} \frac{m_s}{|\epsilon'_{\text{exp}}| N^2} \left| P_L - \frac{m_s}{m_d} P_R \right| \times \left| \frac{1}{2} (h(x) - xh'(x)) \right| \frac{9.6 \times 10^4}{1 \text{ GeV}}, \quad (16)$$

where we have defined the matrix elements

$$P_L = \langle \pi \pi (I=0) | \left(\bar{s} \sigma^{\mu\nu} L \frac{\lambda^a}{2} d \right) G_{\mu\nu}^a | K^0 \rangle, \quad (17)$$

$$P_R = \langle \pi \pi (I=0) | \left(\bar{s} \sigma^{\mu\nu} R \frac{\lambda^a}{2} d \right) G_{\mu\nu}^a | K^0 \rangle.$$

Using the bag model (BM) it has been obtained that $P_L = -0.5 \text{ GeV}^2$ [15]. The other term in Eq. (14) with the matrix element P_R is negligible [even if $|P_R| \approx O(|P_L|)$]

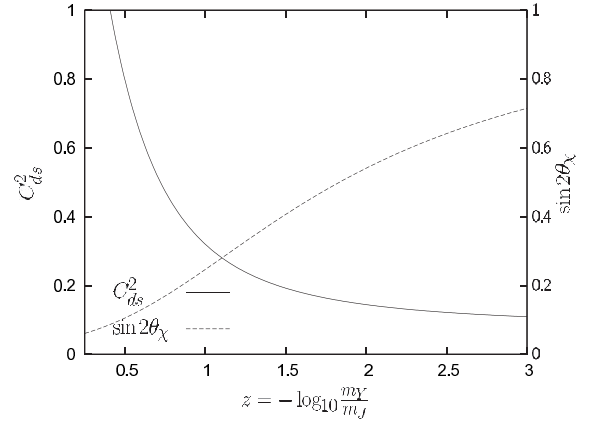


FIG. 3. Using Eq. (28) and (29) we studied the x -dependence of C_{ds}^2 (left scale) and $\sin 2\theta_\chi$ (right scale) on z , respectively, with z defined by $10^{-z} = m_Y/m_J = \sqrt{x}$. We have used $P_L = (1/2)P_L(\text{BM})$ and $B_L \rightarrow 3B_L(\text{VI})$, where BM indicates the value of P_L in the bag model, and VI means the vacuum insertion value of B_L . We have also used $N = 0.7 \text{ TeV}$ and $m_U/m_J = 1$. Notice that $\sin 2\theta_\chi$ does not depend on N .

since it has a m_d factor. We will also use the following values: $m_K = 498$ MeV, $m_d/m_s = 1/20$, $m_s = 120$ MeV, and $\alpha_s = 0.2$. The function $|h(x) - xh'(x)|$ has its maximum equal to one at $x = 0$. Both P_L and P_R matrix elements can be considered as free parameters, for instance in Fig. 3 we use $P_L = (1/2)P_L(BM)$. Of course, there is also a solution if we use the bag model value of P_L .

V. INDIRECT CP VIOLATION

The contributing diagrams for the ϵ parameter are of two types, one with the exchange of two Y^{++} and the other with

one U^{++} and one Y^{++} . They are shown in the Figs. 2(a) and 2(b), respectively. The imaginary part for this class of diagrams has been derived in Refs. [16,17]. The Higgs scalar-quark interaction is given in Eq. (6) and the gauge boson-quark Lagrangian interaction is

$$\mathcal{L}_W = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{J}(\mathcal{O}_L^d)_{3\alpha}\gamma^\mu L d_\alpha U_\mu^{++} + H.c. \quad (18)$$

The contributions to the effective Lagrangian of diagrams like that shown in Fig. 2(a) are given by

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{L}_\epsilon^{YY} = & \frac{C_{ds}^2}{(4\pi)^2} \frac{2m_K^2}{N^2} \frac{m_s^2}{N^2} \left\{ \left[\frac{\sin 4\theta_\chi}{m_K^2} \left[(\bar{s}Ld)^2 - \frac{m_d^2}{m_s^2} (\bar{s}Rd)^2 \right] \right] g_0(x) - \frac{|v_\rho|}{4|v_\chi|} \sin 2\theta_\chi \left[\bar{s}\gamma^\mu L i \vec{\partial}_\mu d \bar{s} \left(L - \frac{m_d}{m_s} R \right) d \right] \right. \\ & \left. \times \left[5g_0(x) + \frac{3}{2} x g'_0(x) \right] + \bar{s} \left(L - \frac{m_d}{m_s} R \right) i \vec{\partial}_\mu d \bar{s} \gamma^\mu L d \left[g_0(x) + \frac{3}{2} x g'_0(x) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

where $g_0(x)$ is given in the appendix.

On the other hand, the contributions to the effective Lagrangian of diagrams like that shown in Fig. 2(b) are given by

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{L}_\epsilon^{UY} = & \frac{C_{ds}^2}{(4\pi)^2} \frac{2m_K^2}{N^2} \frac{m_s^2}{N^2} \left(\frac{g^2}{2} \frac{N^2}{4m_j^2} \right) \frac{\sin 2\theta_\chi}{m_s m_K^2} \left\{ \left[\bar{s}\gamma^\mu \gamma^\nu \left(L - \frac{m_d}{m_s} R \right) i \vec{\partial}_\mu d \right] (\bar{s}\gamma_\nu L d) E_1(x, y) \right. \\ & + \bar{s}\gamma_\nu L i \vec{\partial}_\mu d \bar{s} \gamma^\mu \gamma^\nu \left(L - \frac{m_d}{m_s} R \right) d E_2(x, y) + \left[\bar{s} \left(L - \frac{m_d}{m_s} R \right) i \vec{\partial}_\mu d (\bar{s}\gamma^\mu L d) + \bar{s}\gamma^\mu L i \vec{\partial}_\mu d \bar{s} \left(L - \frac{m_d}{m_s} R \right) d \right] E_3(x, y) \\ & - \left[i \partial_\mu \left[\bar{s}\gamma^\mu \gamma^\nu \left(L - \frac{m_d}{m_s} R \right) d \right] \bar{s}\gamma_\nu L d + i \partial_\mu (\bar{s}\gamma_\nu L d) \bar{s}\gamma^\mu \gamma^\nu \left(L - \frac{m_d}{m_s} R \right) d \right] E_4(x, y) \\ & \left. - \left(i \partial_\mu \left[\bar{s} \left(L - \frac{m_d}{m_s} R \right) d \right] \bar{s}\gamma^\mu L d + i \partial_\mu (\bar{s}\gamma^\mu L d) \bar{s} \left(L - \frac{m_d}{m_s} R \right) d \right) E_5(x, y) \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

where $y = m_{U_j}^2/m_j^2$ and the functions $E_{1,2,3,4,5}$ are defined in the appendix.

Taking into account both contributions in Eqs. (19) and (20) and using

$$\text{Im}M_{12} = \frac{\text{Im}\langle \bar{K}^0 | \mathcal{L}_\epsilon(0) | K^0 \rangle}{2m_K}, \quad (21)$$

we obtain

$$\begin{aligned} \text{Im}M_{12} = & -\frac{C_{ds}^2}{(4\pi)^2} \frac{m_K^2}{N^2} \frac{f_K^2}{2N^2} \left(1 + \frac{m_d}{m_s} \right)^{-2} \left\{ \frac{5}{6} \sin 4\theta_\chi \left(1 - \frac{m_d^2}{m_s^2} \right) g_0(x) - \frac{|v_\rho|}{2|v_\chi|} \sin 2\theta_\chi \left[\frac{5}{12} \left(5g_0(x) - \frac{3}{2} g'_0(x) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{m_s + m_d}{m_K} \right)^2 \right] \left(g_0(x) + \frac{3}{2} x g'_0(x) \right) \right] + \frac{g^2}{2} \frac{N^2}{2m_j^2} \sin 2\theta_\chi \left[\frac{2}{3} (E'_1(x, y) + E_3(x, y)) - \frac{2}{3} \left(\frac{m_s + m_d}{m_K} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. \times [E_1(x, y) + E_4(x, y)] + \frac{1}{12} \left[1 - \left(\frac{m_s + m_d}{m_K} \right)^2 \right] (E_2(x, y) + E_4(x, y)) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Thus, we can calculate $|\epsilon|$ from Eq. (11a) using $f_K = 161.8$ MeV and $\Delta M_K = 3.5 \times 10^{-15}$ GeV [33]. We have used the vacuum insertion (VI) approximation, and obtained:

$$\begin{aligned}
 B_L &= \langle \bar{K}^0 | [\bar{s}L(R)d]^2 | K^0 \rangle = -\frac{5}{12} \frac{m_K^4 f_K^2}{(m_s + m_d)^2}, \\
 \langle \bar{K}^0 | [\bar{s}\gamma^\mu R(L)d]^2 | K^0 \rangle &\simeq \frac{2}{3} f_K^2 m_K^2 \langle \bar{K}^0 | \bar{s}Rd\bar{s}Ld | K^0 \rangle = \frac{1}{2} \frac{m_K^4 f_K^2}{(m_s + m_d)^2} + \frac{1}{12} m_K^2 f_K^2, \\
 \langle \bar{K}^0 | \bar{s}\gamma^\mu Ld\bar{s}L(i\partial_\mu)d | K^0 \rangle &= -\frac{5}{6} \frac{m_d m_K^4 f_K^2}{(m_s + m_d)^2}, \\
 \langle \bar{K}^0 | \bar{s}\gamma^\mu Ld(-i\partial_\mu)\bar{s}Ld | K^0 \rangle &= \frac{1}{3} \frac{m_s m_K^4 f_K^2}{(m_s + m_d)^2} + \frac{1}{12} m_s m_K^2 f_K^2, \\
 \langle \bar{K}^0 | (-i\partial_\mu)\bar{s}\gamma_\nu Ld\bar{s}\gamma^\mu u\gamma^\nu Ld | K^0 \rangle &= -\frac{2}{3} \frac{m_s m_K^4 f_K^2}{(m_s + m_d)^2}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

We have verified that the main contribution to the box diagrams in Eqs. (19) comes from the matrix element denoted by B_L . Thus, in order not to be restricted to the VI approximation, B_L can be considered a free parameter and, for instance in Fig. 3, we have used $B_L = 3B_L(VI)$, but there is also a solution using the VI value of B_L .

VI. FITTING THE EXPERIMENTAL VALUES

In order to compare the prediction of the model with the experimental data for the CP violation in the neutral kaon system we use Eqs. (13)–(17) for $|\epsilon'|$ and rewrite Eq. (22) for $|\epsilon|$ as

$$\frac{|\epsilon|}{|\epsilon_{\text{exp}}|} = C_{ds}^2 B(x) \left(\frac{1}{2} \sin 4\theta_\chi - b(x, y) \sin 2\theta_\chi \right). \tag{24}$$

where

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \frac{1}{(4\pi)^2 |\epsilon_{\text{exp}}|} \frac{m_K^2 f_K^2}{N^2 2N^2} \frac{\sqrt{2} m_K}{\Delta M_K} \left(1 + \frac{m_d}{m_s} \right)^{-2} \\
 &\times \left(1 - \frac{m_d^2}{m_s^2} \right) \frac{5}{6} g_0(x) \\
 &\approx 1.34 \times \left(\frac{1 \text{ TeV}}{N} \right)^4 g_0(x)
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 b(x, y) &= \frac{6}{5} \left(1 - \frac{m_d^2}{m_s^2} \right)^{-1} \frac{1}{g_0(x)} \frac{|1v_\rho|}{|4|v_\chi|} \left\{ \frac{5}{12} \left[5g_0(x) - \frac{3}{2} x g_0'(x) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{m_s + m_d}{m_K} \right)^2 \right] \left[g_0(x) + \frac{3}{2} x g_0'(x) \right] \right\} \\
 &\quad - \frac{g^2 N^2}{2 4m_f^2} \left\{ \frac{2}{3} \left[E_2(x, y) + E_4(x, y) \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{m_s + m_d}{m_K} \right)^2 \right. \\
 &\quad \times \left[E_1(x, y) + E_4(x, y) \right] + \frac{1}{12} \left[1 - \left(\frac{m_s + m_d}{m_K} \right)^2 \right] \\
 &\quad \left. \times (E_3(x, y) + E_5(x, y)) \right\}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Next we use the constraints

$$\left| \frac{\epsilon'(C_{ds}, x, \theta_\chi)}{\epsilon_{\text{exp}}} \right| = 1, \quad \left| \frac{\epsilon(C_{ds}, x, y, \theta_\chi)}{\epsilon_{\text{exp}}} \right| = 1. \tag{27}$$

Notice that the above conditions are the strongest since we are not considering the experimental error.

After some algebraic manipulations the constraints in Eqs. (27) imply

$$C_{ds}^2 = \frac{D^4(x)}{D^2(x) - \frac{b^2(x, y)}{A^2(x)} - \frac{b(x, y)A(x)}{B(x)}} \leq 1, \tag{28}$$

and

$$C_{ds} \sin \theta_\chi = \frac{1}{A(x)}, \tag{29}$$

where we have defined

$$D^2(x) = \frac{1}{A^2(x)} + \frac{A^2(x)}{B^2(x)}, \tag{30}$$

with $A(x)$ defined in Eq. (16), and $B(x)$ and $b(x, y)$ were defined in Eqs. (25) and (26), respectively.

It is interesting to note that

$$C_{ds} \sin 2\theta_\chi \geq \frac{1}{A(0)} = 0.072 \left(\frac{N}{1 \text{ TeV}} \right)^2, \tag{31}$$

where we have used the value of the parameters as discussed below Eq. (17).

We have study numerically Eq. (28) and (29) and verified that they are sensible to the values of the matrix elements P_L in Eq. (17) and B_L defined in Eq. (23).

The curves in Fig. 3 are curves of compatibility with experimental data according to the constraints in Eq. (27). The dashed curve shows all the allowed values for $\sin 2\theta_\chi$ while the continue curve shows the allowed values for C_{ds} as a function of x . However, these values are not independent from one another if we want to satisfy both constraints at the same time. The compatibility with the experimental data is obtained by drawing a vertical line for a given value of z . For instance using $z = 2$ (i.e., $m_f = 100m_Y$) we found $\sin 2\theta_\chi \approx 0.15$ and $C_{ds}^2 \approx 0.6$, for $z = 1$ we obtain $\sin 2\theta_\chi \approx 0.25$ and $C_{ds}^2 \approx 0.3$. Notice that from Fig. 3 we see that we have solution in the range $2.5^\circ \leq \theta_\chi \leq 22.5^\circ$.

VII. CONCLUSIONS AND DISCUSSIONS

The study showed that the 3-3-1 model considered here can account for the direct and indirect CP violation present in the $K^0 - \bar{K}^0$ system for sensible values of the unknown parameters. Within the approximations used, $N \lesssim 1\text{TeV}$ there are infinitely many possible values for C_{ds} , θ_χ and $m_{\tilde{\nu}}^2/m_j^2$ allowed by the experimental data. Although they are not all independent and the constraint $|C_{ds}| < 1$ implies a very small upper bound for the ratio $m_{\tilde{\nu}}^2/m_j^2$. Such bound becomes smaller as N becomes greater. Thus very large values of N leads to unrealistically small values of the ratio. Notice also that the constraints used in Eq. (27) are very strong. However, weaker constraints arise if a detailed analysis which take into account the experimental error in both ϵ and ϵ' is done. Of course, it is clear that in this case there will exist a solution as well.

The model implies also some contributions to the neutron electric dipole moment (EDM) as in Ref. [26]

$$d_n \simeq 4.9 \times 10^{-22} \left[\sum_{\alpha} G_{\alpha 1} (\mathcal{O}_R^u)_{1\alpha} (\mathcal{O}_L^u)_{11} \sin \theta_\chi \right] \text{ e cm}, \quad (33)$$

and we see that a value compatible with the experimental bound of [38]

$$|d_n| < 6.3 \times 10^{-26} \text{ e cm} \quad (90\% \text{CL}), \quad (34)$$

is obtained for practically any value of the phase θ_χ , if $\sum_{\alpha} G_{\alpha 1} (\mathcal{O}_R^u)_{1\alpha} (\mathcal{O}_L^u)_{11} \sim 10^{-5}$. The EDM of the charged leptons also produces results compatible with the experimental limit for a large range of the parameters of the model. In addition this model allows magnetic dipole moments for massive neutrinos in the range 10^{-13} – $10^{-11} \mu_B$ almost independently of the neutrino mass [39], which is near the experimental upper limit for the electron neutrino magnetic moment [40]

$$\mu_e < 10^{-11} \mu_B (90\% \text{CL}). \quad (35)$$

Moreover, as in the standard model the lepton charge asymmetry in the $K_{\beta 3}$ decay, δ_L , which has the experimental value (the weighted average of $\delta(\mu)$ and $\delta(e)$) [33] $\delta_L = (3.27 \pm 0.12) \times 10^{-3}$, is also automatically fitted in the present model because $|A(K^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e)| = |A(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)|$ is still valid.

Recent analysis on CP violation indicates that the phase of the CKM matrix, which is $O(1)$, is the dominant contribution to the CP violation in both K and B mesons so, new phases coming from physics beyond the standard model must be small perturbations. The CKM mechanism is also at work in the present model but we switch it off in order to study the possibilities of the extra phase of the model. Concerning the K meson and EDM for elementary particles it seems that the model does well. Presently we are working out the case of B decays; if the model is not able to fit these data it implies that CKM phase must be

switched on. It is still possible that new phases may be at work if decays based on $b \rightarrow s$ gluonic dominated transition really need new physics [7]. Either way, the extra phase in the model could be important for other CP violation parameters like the EDM or if new CP violation observables in B -mesons will not be fitted by the CMK mechanism.

Finally, some remarks concerning the masses of the extra particles in 3-3-1 models. First, let us consider the Z' vector boson it contributes to the ΔM_K at the tree level so that there is a constraint over the quantity [41,42]

$$(\mathcal{O}_L^d)_{3d} (\mathcal{O}_L^d)_{3s} \frac{M_Z}{M_{Z'}}, \quad (36)$$

which must be of the order of 10^{-4} to have compatibility with the measured ΔM_K . This can be achieved with $M_{Z'} \sim 4 \text{ TeV}$ if we assume a Fritzsche-structure $\mathcal{O}_{Lij}^d = \sqrt{m_j/m_i}$ or, since there is no *a priori* reason for \mathcal{O}_L^d having the Fritzsche-structure, it is possible that the product of the mixing angles saturates the value 10^{-4} [41], in this case Z' can have a mass near the electroweak scale. However, in 3-3-1 models there are flavor-changing neutral currents in the scalar sector implying new contributions to ΔM_K which are of the form

$$(\mathcal{O}_L^d)_{d3} \Gamma_{3\beta}^d (\mathcal{O}_R)_{\beta s} \frac{M_Z}{M_H} \quad (37)$$

that involve the mass of the scalar M_H , the unknown matrix elements \mathcal{O}_R^d , and also the Yukawa coupling Γ^d , so their contributions to ΔM_K can have opposite sign relative to that of the Z' contribution. This calculation has not been done in literature, where only the latter contribution has been taken into account [41,42]. The model has also doubly charged scalars that are important in the present CP violating mechanism. The lower limit for the mass of doubly charged scalars is a little bit above 100 GeV [43]. Concerning the doubly charged vector boson, if they have masses above 500 GeV they can be found (if they really do exist) by measuring left-right asymmetries in lepton-lepton scattering [44]. Fermion pair production at LEP, and lepton flavor violating of the charged leptons suggest a low bound of 750 GeV for the U^{--} mass [45]. In e^+e^- , $e\gamma$, $\gamma\gamma$ colliders the detection of bileptons with masses between 500 GeV and 1 TeV [46] is favored, while if their masses are of the order of $\lesssim 1 \text{ TeV}$ they could be also observed at hadron colliders like LHC [47]. Muonium-antimuonium transitions would imply a lower bound of 850 GeV on the masses of the doubly charged gauge bileptons, U^{--} [48]. However, this bound depends on assumptions on the mixing matrix in the lepton charged currents coupled to U^{--} and also it does not take into account that there are in the model doubly charged scalar bileptons which also contribute to that transition [49]. The muonium fine structure only implies $m_U/g > 215 \text{ GeV}$ assuming only the vector bilepton contributions [50]. Concerning the exotic quark

masses, there is no lower limit for their masses but if they are in the range of 200–600 GeV they may be discovered at the LHC [51]. A search for free stable color triplets quarks has been carried out in a $p\bar{p}$ collider at an energy of 1.8 GeV, excluding these particles in the range 50–139 GeV, 50–116 GeV, and 50–140 GeV for the electric charges of +1, 2/3, and 4/3, respectively [52]. We can conclude that the masses for the extra degrees of freedom which distinguish 3-3-1 models with respect to the standard model may be accessible at the energies of the colliders of the next generations.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by CNPq under the processes 141874/03-1 (CCN), 305185/03-9 (JCM) and 306087/88-0 (VP) and by FAPESP (MCR and OR).

APPENDIX: INTEGRALS

$$g_0(x, y) = -\frac{1}{x-y} \left[\left(\frac{x}{x-1} \right)^2 \ln x - \left(\frac{y}{y-1} \right)^2 \ln y - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} \right] \quad (\text{A1})$$

$$g_1(x, y) = -\frac{1}{x-y} \left[\frac{x}{(x-1)^2} \ln x - \frac{y}{(y-1)^2} \ln y - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} \right] \quad (\text{A2})$$

$$g_0(x) = \lim_{y \rightarrow x} g_0(x, y) = -\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{(x-1)^3} \ln x \quad (\text{A3})$$

$$h(x) = -\frac{x}{(x-1)^2} \ln x + \frac{1}{x-1}, \quad (\text{A4})$$

$$h'(x) = \frac{2-2x+(1+x)\ln x}{(x-1)^3},$$

$$E_1(x, y) = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{4}(x\partial_x + y\partial_y) \right) g_0(x, y) - \frac{5}{8y} g_1(x, y) \quad (\text{A5})$$

$$E_2(x, y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x\partial_x + y\partial_y) \right) g_0(x, y) - \frac{1}{8y} g_1(x, y) \quad (\text{A6})$$

$$E_3(x, y) = \frac{3}{4y} (1 + x\partial_x + y\partial_y) g_1(x, y), \quad (\text{A7})$$

$$E_4(x, y) = \frac{1}{4} \left[(x\partial_x - y\partial_y) g_0(x, y) + \frac{1}{2y} g_1(x, y) \right] \quad (\text{A8})$$

$$E_5(x, y) = -\frac{1}{4y} (3 + x\partial_x - y\partial_y) g_1(x, y) \quad (\text{A9})$$

-
- [1] J. Christenson, J. Cronin, V. Fitch, and R. Turlay, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 138 (1964); J.M. Gaillard *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 20 (1967); J. Cronin *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 25 (1967).
- [2] A. Alavi-Harati *et al.* (KTEV Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **83**, 22 (1999); G.D. Barr, *et al.* (NA31 Collaboration), *Phys. Lett. B* **317**, 233 (1993); V. Fanti *et al.* (NA48 Collaboration), *Phys. Lett. B* **465**, 335 (1999); A. Lai *et al.* (NA48 Collaboration), *Eur. Phys. J. C* **22**, 231 (2001).
- [3] B. Aubert *et al.* (BABAR Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **87**, 091801 (2001); **89**, 201802 (2002); **93**, 131801 (2004); K. Abe *et al.* (Belle Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **87**, 091802 (2001); *Phys. Rev. D* **66**, 071102 (2002); Y. Chao *et al.* (Belle Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **93**, 191802 (2004).
- [4] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652 (1973).
- [5] J. Charles *et al.* (CKMfitter Group), *Eur. Phys. J. C* **41**, 1 (2005); see also <http://www.slac.stanford.edu/xorg/ckmfitter>.
- [6] B. Kayser, in *Proceedings of the Summer School in High Energy Physics and Cosmology*, ICTP-Trieste, June-July, 1995 (unpublished); hep-ph/9702264 and references therein.
- [7] A. Soni, in *Results and Perspective in Particle Physics*, La Thuille, Acosta Valley, 2005 (unpublished); hep-ph/0509180 and references therein.
- [8] F.J. Botella, G.C. Branco, M. Nebot, and M.N. Rebelo, *Nucl. Phys.* **B725**, 155 (2005), and references therein.
- [9] T.D. Lee, *Phys. Rev. D* **8**, 1226 (1973); *Phys. Rep.* **9**, 143 (1974).
- [10] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 657 (1976).
- [11] L. Lavoura, *Int. J. Mod. Phys. A* **9**, 1873 (1994).
- [12] Y.-L. Wu and L. Wolfenstein, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1762 (1994).
- [13] N. Desphande, *Phys. Rev. D* **23**, 2654 (1981)
- [14] A. Sanda, *Phys. Rev. D* **23**, 2647 (1981).
- [15] J.F. Donoghue, J.S. Hagelin, and B.R. Holstein, *Phys. Rev. D* **25**, 195 (1982).
- [16] J. Liu and L. Wolfenstein, *Nucl. Phys.* **B289**, 1 (1987).
- [17] D. Chang, *Phys. Rev. D* **25**, 1318 (1982).
- [18] F. Pisano and V. Pleitez, *Phys. Rev. D* **46**, 410, (1992); P.H. Frampton, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2889, (1992); R. Foot,

- O. F. Hernandez, F. Pisano, and V. Pleitez, Phys. Rev. D **47**, 4158, (1993).
- [19] V. Pleitez and M.D. Tonasse, Phys. Rev. D **48**, 2353 (1993).
- [20] J. C. Montero, F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. D **47**, 2918 (1993).
- [21] A. G. Dias, R. Martinez, and V. Pleitez, Eur. Phys. J. **C39**, 101 (2005); A. G. Dias, Phys. Rev. D **71**, 015009 (2005).
- [22] S. Dimopoulos and D. E. Kaplan, Phys. Lett. B **531**, 127 (2002); W.-F. Chang and J.N. Ng, Phys. Rev. D **69**, 056005 (2004).
- [23] M. Schmaltz, J. High Energy Phys. **08** (2004)056; T. Roy and M. Schaltz, hep-ph/0509357; Z. Berezhiani, P.H. Chankowski, A. Falkowski, and S. Pokorski, hep-ph/0509311, and references therein.
- [24] T. T. Liu and D. Ng, Phys. Rev. D **50**, 548 (1994).
- [25] L. Epele, H. Fanchiotti, C. Garcia Canal, and D. Gomez Dumm Phys. Lett. B **343**, 291 (1995).
- [26] J.C. Montero, V. Pleitez, and O. Ravinez, Phys. Rev. D **60**, 076003 (1999).
- [27] One of us (VP) would like to thanks A.G. Dias for calling to his attention about this issues.
- [28] A. G. Dias, V. Pleitez, and M. D. Tonasse, Phys. Rev. D **67**, 095008 (2003); A. G. Dias and V. Pleitez, Phys. Rev. D **69**, 077702 (2004).
- [29] D. Gómez Dumm, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 887 (1996).
- [30] F. Gilman and M. Wise, Phys. Rev. D **20**, 2392 (1979).
- [31] G.C. Branco, L. Lavoura, and J.P. Silva, *CP Violation*, (Clarendon Press, Oxford, 1999).
- [32] S. Bertolini, M. Fabbrichesi, and O.J. Oeg, Rev. Mod. Phys. **72**, 65 (2000).
- [33] S. Eidelman, *et al.* (Particle Data Group), Phys. Lett. B **592**, 1 (2004).
- [34] Y. Nir, *CP Violation—A New Era*, 55 Scottish Universities Summer School in Physics—Heavy Flavor Physics, 2001 (unpublished).
- [35] M. S. Sozzi and Eur. Phys. J. C **36**, 37 (2004).
- [36] M. Ciuchini and G. Martinelli, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. **B99**, 27 (2001).
- [37] A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, and A. Shifman, Nucl. Phys. **B120**, 315 (1977); Zh. Eksp. Teor. Fiz. **22**, 123 (1975) [Sov. Phys. JETP **22**, 55 (1975)].
- [38] P.G. Harris, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 904 (1999).
- [39] J.C. Montero and V. Pleitez, Mod. Phys. Lett. A **16**, 1605 (2001).
- [40] C. Cerna *et al.* (MUNU Collaboration), Phys. Lett. B **615**, 153 (2005).
- [41] D.G. Dumm, F. Pisano, and V. Pleitez, Mod. Phys. Lett. A **9**, 1609 (1994); J.T. Liu, Phys. Rev. D **50**, 542 (1994).
- [42] J.-Alexis Rodriguez and M. Sher, Phys. Rev. D **70**, 117702 (2004).
- [43] V.M. Abazov, *et al.* (D0 Collaboration), Phys. Rev. Lett. **93**, 141801 (2004).
- [44] J.C. Montero, V. Pleitez, and M. C. Rodriguez, Phys. Rev. D **58**, 094026 (1998); **58**, 097505 (1998); M. Capdequi-Peyranere and M. C. Rodriguez, Phys. Rev. D **65**, 035001 (2002).
- [45] M. B. Tully and G. C. Joshi, Phys. Lett. B **466**, 333 (1999); M. Raidal, Phys. Rev. D **57**, 2013 (1998); F. Cuyppers and M. Raidal, Nucl. Phys. **B501**, 3 (1997).
- [46] N. Lepare, B. Thomdyke, H. Nadeu, and D. London, Phys. Rev. D **50**, 2031 (1994); E. M. Gregores, A. Gusso, and S.F. Novaes, Phys. Rev. D **64**, 015004 (2001).
- [47] K. Sasaki, K. Tokushuku, S. Yamada, and Y. Yamazaki, Phys. Lett. B **345**, 495 (1995); B. Dion, T. Gregoire, D. London, L. Marleau, and H. Nadeu, Phys. Rev. D **59**, 075006 (1999).
- [48] L. Willmann *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 49 (1999); B.L. Roberts, M. Grassi, and A. Sato, in Summary Talk, NuFact05, Frascati, 2005; hep-ex/0510055.
- [49] V. Pleitez, Phys. Rev. D **61**, 057903 (2000).
- [50] H. Fujii, Y. Mimura, K. Sasaki, and T. Sasaki, Phys. Rev. D **49**, 559 (1994).
- [51] Y.A. Coutinho, P.P. Queiroz Filho, and M.D. Tonasse, Phys. Rev. D **60**, 115001 (1999); P. Das, P. Jain, and D. W. McKay, Phys. Rev. D **59**, 055011 (1999).
- [52] F. Abe *et al.* (CDF Collaboration), Phys. Rev. D **46**, R1889 (1992).

Apêndice F

Abordagens de primeira quantização para oscilação de neutrinos e segunda quantização

Este trabalho foi publicado como [61]: C. C. Nishi, “First quantized approaches to neutrino oscillations and second quantization,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 053013 [arXiv:hep-ph/0506109].

First quantized approaches to neutrino oscillations and second quantization

C. C. Nishi*

Instituto de Física Teórica, UNESP–São Paulo State University, Rua Pamplona, 145, 01405-900–São Paulo, Brazil
(Received 13 September 2005; published 30 March 2006)

Neutrino oscillations are treated from the point of view of relativistic first quantized theories and compared to second quantized treatments. Within first quantized theories, general oscillation probabilities can be found for Dirac fermions and charged spin 0 bosons. A clear modification in the oscillation formulas can be obtained and its origin is elucidated and confirmed to be inevitable from completeness and causality requirements. The left-handed nature of created and detected neutrinos can also be implemented in the first quantized Dirac theory in the presence of mixing; the probability loss due to the changing of initially left-handed neutrinos to the undetected right-handed neutrinos can be obtained in analytic form. Concerning second quantized approaches, it is shown in a calculation using virtual neutrino propagation that both neutrinos and antineutrinos may also contribute as intermediate particles. The sign of the contributing neutrino energy may have to be chosen explicitly without being automatic in the formalism. At last, a simple second quantized description of the flavor oscillation phenomenon is devised. In this description there is no interference terms between positive and negative components, but it still gives simple normalized oscillation probabilities. A new effect appearing in this context is an inevitable but tiny violation of the initial flavor of neutrinos. The probability loss due to the conversion of left-handed neutrinos to right-handed neutrinos is also presented.

DOI: [10.1103/PhysRevD.73.053013](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.053013)

PACS numbers: 14.60.Pq, 03.65.Pm, 03.70.+k

I. INTRODUCTION

Compelling experimental evidence [1] has shown that neutrinos undergo flavor oscillations in vacuum. Consequently, this fact requires massive neutrinos with mixing. These ingredients are not present in the standard model of elementary particles. For this reason, on the one hand, neutrino oscillations can provide a direct window to probe physics beyond the standard model [2]. On the other hand, some theoretical studies of mixing in the context of quantum field theory (QFT) by Blasone and Vitiello (BV) [3,4] show the mixing problem may be related to more fundamental issues such as unitarily inequivalent representations and the vacuum structure, and its study is theoretically interesting for its own sake.

Nevertheless, the simpler plane-wave quantum mechanical descriptions [5,6] seemed to be in accordance, in certain realistic limits, with more refined descriptions, including various ingredients, such as localization aspects [7–9], flavor current densities [10], influence of creation and detection processes [11,12], time-dependent perturbation theory [13], and intermediate neutrinos with path integrals [14]. Moreover, many treatments within the QFT framework were also proposed [15–21], aiming to solve the various unclear aspects of the quantum mechanics of neutrino oscillations [10,13].

It has been known for a long time that the coherence necessary for neutrino oscillations depends crucially on localization aspects of the particles involved in the production of neutrinos [7]. This point of view can be

supported by QFT arguments [19] as well. It raises then the question of how the coherent superposition of mass eigenstate neutrinos, which is called a “flavor” eigenstate, is created [20]. One way that became customary to avoid the ambiguities involving the question on how neutrinos are created and detected is to use an *external* (E) wave packet (WP) approach [17], in contrast to an *intermediate* (I) WP approach. According to Ref. [17], the IWP treatments are the simpler first quantized ones treating the propagation of neutrinos as free localized wave packets. In contrast, EWP approaches consider localized wave packets for the sources and detection particles while the neutrinos were considered intermediate virtual particles. The central issue distinguishing the general IWP and EWP approaches is: Despite its direct unobservability, is the intermediate neutrino a real (on-shell) particle propagating freely? If the answer is affirmative, the IWP approaches would be a good approximation of the oscillation phenomena.

On the other hand, another classification scheme can be used to classify the various existing treatments considering a more physical criterion irrespective of the use of WPs. Consider the descriptions of neutrino oscillations that (A) include explicitly the interactions responsible for the mixing and (B) those that only treat the propagation of neutrinos, i.e., the mixing is an *ad hoc* ingredient. A more subtle aspect in between would be the (explicit or phenomenologically modeled) consideration of the production (and detection) process(es). In general, the IWP approaches are of type (B). The EWP approaches are of type (A). The BV approach, although in the QFT formalism, is of type (B) since mixing is introduced without

*Electronic address: ccnishi@ift.unesp.br

explicitly including the interaction responsible for it. The type (B) approaches have the virtue that they can be formulated in a way in which total oscillation probability in time is always conserved and normalized to one [3,9]. This feature will be present in all first quantized approaches treated here (Secs. II and III and in a second quantized version (Sec. IVA). If different observables are considered, or a modeling of the details of the production and detection processes is attempted, further normalization is necessary [4,8,12]. In such cases, the oscillating observable might differ from the oscillation probability. On the other hand, type (A) approaches tend to be more realistic and can account for the production and detection processes giving experimentally observable oscillation probabilities [21]. Of course, they are essential to the investigation of how neutrinos are produced and detected [11,20]. We are not directly interested in these matters here.

Considering first quantized type (B) approaches, some recent works treating the flavor oscillation for spin one-half particles [22,23] have already found additional oscillatorial effects compared to usual oscillation formulas with WPs [8,9]. These effects are investigated and it is shown in Sec. II how these additional oscillatorial behaviors, which have characteristic frequencies much greater than usual oscillation frequencies, come from the interference between positive and negative frequency components of the initial WP. It can be understood as a consequence of the impossibility to simultaneously exclude all negative energy contributions of the initial spinorial wave function with respect to bases characterized by different masses. Moreover, these rapid oscillations are always present, independently of the initial WP, if a well-defined flavor is attributed to the initial WP.

To make clear the origin of the additional oscillatory contributions, we calculate, in Sec. III, the oscillation formula for a charged spin 0 particle in the Sakata-Taketani Hamiltonian formalism [24], which is equivalent to the Klein-Gordon scalar wave equation. (The explicit analysis with the mixed Klein-Gordon equation is made in Ref. [25], paying special attention to the relativistic initial value problem.) The oscillation formula in this case also possesses the additional interference terms between positive and negative frequency parts, very similar to the one obtained in the spin 1/2 case. From this example we will see that these interference terms are inevitable from a relativistic classical field theory perspective where covariance and causality is required. It is not specially associated to the spin degree of freedom.

Another particular ingredient of neutrino oscillations can be included naturally within Dirac theory: the left-handedness of neutrinos created and detected through weak interactions. This fact, for a Dirac neutrino [26], implies an additional probability loss due to conversion of left-handed neutrinos into right-handed neutrinos, which is possible because chirality is no longer a constant of

motion for massive Dirac particles [27]. Although previous calculations [23] have shown an approximate contribution to this effect, we calculate in Sec. II A the complete effect.

Concerning type (A) approaches, specifically the EWP description, we are interested to analyze further the propagation of intermediate virtual neutrinos. The framework where the investigations on first quantized approaches are made here is based on the calculation of the evolution kernels for free theories in presence of mixing. This enables us to deduce general oscillation probabilities in which there is explicit decoupling from the oscillating part (where all the oscillation information rests) and the initial wave packet. Another advantage of doing the calculations this way is that it resembles the propagator methods in covariant perturbation theory, which EWP approaches are based on. The free evolution kernel for fermions have a close relationship with the Feynman propagator used in QFT. What is common to both is that both particle and antiparticle parts contribute to the evolution or propagation. The necessity of the negative frequency part in the free evolution kernel is required from completeness and causality arguments but it also leads to the interference of positive and negative frequencies in flavor oscillation, treated in Secs. II and III. Then the question also arises in EWP approaches: Are there contributions from both particles and antiparticles in the propagation of virtual neutrinos? In a simple microscopic scattering process, this question is meaningless since virtual particles are usually off-shell particles and must naturally have both contributions. However, in EWP approaches the neutrinos propagate through macroscopic distances and, indeed, it can be shown [19,20] that the virtual neutrinos are on-shell particles. There is no discussion, though, about the possibility of neutrino and antineutrino contributions to the process; both can be on-shell. This investigation is carried on in Sec. IV calculating explicitly the amplitude of production/propagation/detection process in an EWP approach.

As a last task, we develop a simple, type (B), second quantized description of flavor oscillation in Sec. IVA using the free second quantized spin 1/2 fermionic theory in the presence of mixing. This treatment has some similarities with the BV formalism but it does not require the introduction of flavor Fock spaces and Bogoliubov transformations. It means that the Fock space considered will be the one spanned by the mass eigenstates. Within this formalism it will be shown that the additional rapid oscillation contributions calculated through first quantized approaches do not survive the second quantization since only superpositions of particles (antiparticles) are used as initial neutrino (antineutrino) flavor states. Moreover, this property is not satisfied in the BV approach because the BV flavor states are mixtures of particle and antiparticle components; this is the ingredient responsible for a different oscillation probability [3].

II. FLAVOR OSCILLATION FOR DIRAC FERMIONS

It is well known that the Dirac equation can give a significantly good description of a Dirac fermion if its inherent localization is much bigger than its Compton wavelength; usually this is associated with weak external fields. For example, the spectrum for the hydrogen atom can be obtained with the relativistic corrections included (fine structure) [28], page 72. One of the terms responsible for fine structure, the Darwin term, can be interpreted as coming from the interference between positive and negative frequency parts (*zitterbewegung*) of the hydrogen eigenfunction in Dirac theory compared to the nonrelativistic theory [24]. On the other hand, a situation where the theory fails to give a satisfactory physical description is exemplified by the Klein paradox [28], page 62: The transmission coefficient for an electron moving towards a step barrier becomes negative for certain barrier heights, exactly when the localization of the electron wave function inside the barrier is comparable with its Compton wavelength.

Bearing in mind that first quantized approaches may fail under certain conditions, we will treat in this section the flavor oscillation problem using the free Dirac theory in the presence of two families mixing. The extension to treat three families of neutrinos is straightforward. A matricial notation will be used throughout the article for the first quantized approaches to express the mixing.

In matricial notation the mixing relation between flavor wave functions $\Psi_f^T(\mathbf{x}) \equiv (\psi_{\nu_e}^T(\mathbf{x}), \psi_{\nu_\mu}^T(\mathbf{x}))$ and mass wave functions $\Psi_m^T(\mathbf{x}) \equiv (\psi_1^T(\mathbf{x}), \psi_2^T(\mathbf{x}))$ is

$$\Psi_f(\mathbf{x}) \equiv U\Psi_m(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Psi_m(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Each mass wave function is defined as a four-component spinorial function $\psi_n(\mathbf{x}, t)$, $n = 1, 2$ that satisfies the free Dirac equation

$$K^D(t) = Ue^{-iH^D t}U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta e^{-iH_1^D t} + \sin^2\theta e^{-iH_2^D t} & -\cos\theta \sin\theta(e^{-iH_1^D t} - e^{-iH_2^D t}) \\ -\cos\theta \sin\theta(e^{-iH_1^D t} - e^{-iH_2^D t}) & \sin^2\theta e^{-iH_1^D t} + \cos^2\theta e^{-iH_2^D t} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

The conversion probability is then

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) &= \int d\mathbf{x} \Psi_f^\dagger(\mathbf{x}, 0) K^{D\dagger}(t) \mathbf{P}_{\nu_\mu} K^D(t) \Psi_f(\mathbf{x}, 0) \\ &= \int d\mathbf{p} \tilde{\psi}_{\nu_e}^\dagger(\mathbf{p}) (K_{\mu e}^D)^\dagger K_{\mu e}^D(\mathbf{p}, t) \tilde{\psi}_{\nu_e}(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (10)$$

satisfying the initial condition $\Psi_f^T(\mathbf{x}, 0) = (\psi_{\nu_e}^T(\mathbf{x}, 0), 0)$. Such an initial condition implies, in terms of mass eigenfunctions, $\psi_1(\mathbf{x}, 0) = \psi_2(\mathbf{x}, 0) = \psi_{\nu_e}(\mathbf{x})$, as a requirement to obtain an initial wave function with definite flavor [9]. The function $\tilde{\psi}_{\nu_e}(\mathbf{p})$ denotes the inverse Fourier transform of $\psi_{\nu_e}(\mathbf{x})$ [see Eqs. (A1) and (A2)].

Before obtaining the conversion probability for Dirac fermions, let us replace the spinorial functions $\psi_n(\mathbf{x})$ by

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(\mathbf{x}, t) = H_n^D \psi_n(\mathbf{x}, t), \quad n = 1, 2, \quad (2)$$

where the free Hamiltonian is the usual

$$H_n^D \equiv -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_n, \quad n = 1, 2. \quad (3)$$

We will work in the flavor diagonal basis. This choice defines the flavor basis vectors simply as

$$\hat{\nu}_e^T = (1, 0), \quad \hat{\nu}_\mu^T = (0, 1), \quad (4)$$

while the flavor projectors are obviously

$$\mathbf{P}_{\nu_\alpha} \equiv \hat{\nu}_\alpha \hat{\nu}_\alpha^T. \quad (5)$$

Actually, as an abuse of notation, the equivalence $U \sim U \otimes \mathbb{1}_D$ is implicit, as well as $\mathbf{P}_{\nu_\alpha} \sim \mathbf{P}_{\nu_\alpha} \otimes \mathbb{1}_D$; the symbol $\mathbb{1}_D$ refers to the identity matrix in spinorial space.

The total Hamiltonian governing the dynamics of Ψ_m is $H^D = \text{diag}(H_1^D, H_2^D)$. From the considerations above, $\Psi_f(\mathbf{x}, t)$ satisfy the equation

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_f(\mathbf{x}, t) \equiv UH^DU^{-1} \Psi_f(\mathbf{x}, t). \quad (6)$$

The solution to the equation above can be written in terms of a flavor evolution operator K^D as

$$\begin{aligned} \Psi_f(\mathbf{x}, t) &= K^D(t) \Psi_f(\mathbf{x}, 0) \\ &= \int d^3\mathbf{x}' K^D(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; t) \Psi_f(\mathbf{x}', 0), \end{aligned} \quad (7)$$

where

$$K^D(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} K^D(\mathbf{p}; t) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}. \quad (8)$$

We can calculate $K^D(t)$ in any representation (momentum or position) as

spinless one-component wave functions $\varphi_n(\mathbf{x})$ in the flavor wave function $\Psi_f^T(\mathbf{x}) \rightarrow (\varphi_{\nu_e}(\mathbf{x}), \varphi_{\nu_\mu}(\mathbf{x}))$ and mass wave function $\Psi_m^T(\mathbf{x}) \rightarrow (\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}))$. We also replace the Dirac Hamiltonian in momentum space $H_n^D(\mathbf{p})$ (3) by the relativistic energy $E_n(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}$. Inserting these replacements into Eq. (10) we can recover the usual oscillation probability [9,23]

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) &= \int d\mathbf{x} |\hat{\nu}_\mu^T \Psi_f(\mathbf{x}, t)|^2 \\ &= \int d\mathbf{p} |K_{\mu e}^S(\mathbf{p}, t) \tilde{\varphi}_{\nu_e}(\mathbf{p})|^2 \\ &= \int d\mathbf{p} \mathcal{P}(\mathbf{p}, t) |\tilde{\varphi}_{\nu_e}(\mathbf{p})|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

where $\Psi_f(\mathbf{x}, 0)^\top = (\varphi_{\nu_e}(\mathbf{x})^\top, 0)$, $K_{\mu e}^S(\mathbf{p}, t) \equiv (K^S)_{21} = -\sin\theta \cos\theta (e^{-iE_1(\mathbf{p})t} - e^{-iE_2(\mathbf{p})t})$ and

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}, t) = \sin^2 2\theta \sin^2(\Delta E(\mathbf{p})t/2) \quad (12)$$

is just the standard oscillation formula. The conversion probability (11) in this case is then the standard oscillation probability smeared out by the initial momentum distribution. If the substitution $|\tilde{\varphi}_{\nu_e}(\mathbf{p})|^2 \rightarrow \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$ is made, the standard oscillation formula is recovered: It corresponds to the plane-wave limit.

After we have checked the standard oscillation formula can be recovered for spinless particles restricted to positive energies in the plane-wave limit, we can return to the case of Dirac fermions. We can obtain explicitly the terms of the mixed evolution kernel (9) by using the property of the Dirac Hamiltonian in momentum space $H_n^{D^2} = E_n^2(\mathbf{p})\mathbb{1}_D$, which leads

$$(K_{\mu e}^D)^\dagger K_{\mu e}^D(\mathbf{p}, t) = \mathcal{P}(\mathbf{p}, t)[1 - f(\mathbf{p})]\mathbb{1}_D + \sin^2 2\theta f(\mathbf{p}) \sin^2(\bar{E}t)\mathbb{1}_D, \quad (13)$$

where

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\mathbf{p}^2 + m_1 m_2}{E_1 E_2} \right], \quad (14)$$

and $\mathcal{P}(\mathbf{p}, t)$ is the standard conversion probability function (12). A unique implication of Eq. (13), which is proportional to the identity matrix in spinorial space, is that the conversion probability (10) does not depend on the spinorial structure of the initial flavor wave function but only on its momentum density as

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) = \int d\mathbf{p} \{ \mathcal{P}(\mathbf{p}, t)[1 - f(\mathbf{p})] + \sin^2 2\theta f(\mathbf{p}) \sin^2(\bar{E}t) \} \tilde{\psi}_{\nu_e}^\dagger(\mathbf{p}) \tilde{\psi}_{\nu_e}(\mathbf{p}). \quad (15)$$

(The tilde will denote the inverse Fourier transformed function throughout this paper.) Furthermore, the modifications in Eq. (15) compared to the scalar conversion probability (11) are exactly the same modifications found in Refs. [22,23] after smearing out through a specific Gaussian wave packet.

The conservation of total probability

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) + \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) = 1, \quad (16)$$

is automatic in virtue of

$$K_{ee}^{D\dagger}(\mathbf{p}, t) K_{ee}^D(\mathbf{p}, t) + K_{\mu e}^{D\dagger}(\mathbf{p}, t) K_{\mu e}^D(\mathbf{p}, t) = \mathbb{1}_D, \quad (17)$$

and the survival and conversion probability for an initial muon neutrino are identical to the probabilities for an initial electron neutrino because of the relations

$$K_{\mu\mu}^{D\dagger}(\mathbf{p}, t) K_{\mu\mu}^D(\mathbf{p}, t) = K_{ee}^{D\dagger}(\mathbf{p}, t) K_{ee}^D(\mathbf{p}, t), \quad (18)$$

$$K_{\mu e}^{D\dagger}(\mathbf{p}, t) K_{\mu e}^D(\mathbf{p}, t) = K_{e\mu}^{D\dagger}(\mathbf{p}, t) K_{e\mu}^D(\mathbf{p}, t). \quad (19)$$

To explain the origin of the additional oscillatory terms in Eq. (15) it is instructive to rewrite the free Dirac time evolution operator, in momentum space, in the form

$$e^{-iH_n^D t} = e^{-iE_n t} \Lambda_{n+}^D + e^{iE_n t} \Lambda_{n-}^D, \quad (20)$$

where

$$\Lambda_{n\pm}^D = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1}_D \pm \frac{H_n^D}{E_n} \right) \quad (21)$$

are the projector operators to positive (+) or negative (-) energy eigenstates of H_n^D . By using the decomposition above (20), we can analyze $K_{\mu e}^D$ in Eq. (9), which contains the terms

$$e^{iH_1^D t} e^{-iH_2^D t} = e^{i\Delta E t} \Lambda_{1+}^D \Lambda_{2+}^D + e^{-i\Delta E t} \Lambda_{1-}^D \Lambda_{2-}^D + e^{i\bar{E}t} \Lambda_{1+}^D \Lambda_{2-}^D + e^{-i\bar{E}t} \Lambda_{1-}^D \Lambda_{2+}^D, \quad (22)$$

plus its Hermitian conjugate. Since $\Lambda_{1\pm}^D \Lambda_{2\mp}^D \neq 0$, it can be seen that the rapid oscillating terms come from the interference between, e.g., the positive frequencies of the Hamiltonian H_1^D and negative energies of the Hamiltonian H_2^D . One may think that by restricting the initial wave function to contain only positive energy contributions would eliminate the rapid oscillatory terms, as *zitterbewegung* disappears for superpositions of solely positive energy states in Dirac theory [28], but it does not happen. The positive energy eigenfunctions with respect to a basis characterized by a mass m_1 necessarily have non-null components of negative energy with respect to another basis characterized by m_2 (this point is illustrated in Appendix B). Thus the rapid oscillatory contributions are an inevitable consequence of this framework and it is always present independently of the initial WP, if initially a definite flavor is chosen. However, its influence, quantified by the function $f(\mathbf{p})$ in Eq. (14), is negligible for momentum distributions around ultrarelativistic values [22]. These rapid oscillatory terms will also be found for charged spin 0 particle oscillations in the next section, with contributions slightly different from the ones obtained for spin 1/2 particles.

A. Inclusion of left handedness

Until this point, we have been considering the oscillation of general flavor ‘‘particle number’’ for general Dirac neutrinos. However, due to the left-handed nature of weak interactions only left-handed components are produced and detected. To incorporate this fact into, for example, the conversion probability in Eq. (10), it is sufficient to use initial left-handed WPs and replace the kernel of Eq. (13) by the projected counterpart

$$LK_{\mu e}^{D\dagger}(\mathbf{p}, t)LK_{\mu e}^D(\mathbf{p}, t)L = \mathcal{P}^D(\mathbf{p}, t)L - \frac{1}{4}\sin^2 2\theta \\ \times \left(\frac{m_1}{E_1} \sin E_1 t - \frac{m_2}{E_2} \sin E_2 t \right)^2 L, \quad (23)$$

where $\mathcal{P}^D(\mathbf{p}, t) = K_{\mu e}^{D\dagger}(\mathbf{p}, t)K_{\mu e}^D(\mathbf{p}, t)$ is the conversion kernel of Eq. (13) and $L = (1 - \gamma_5)/2$ is the projector to left chirality. The conservation of total probability (16) no longer holds because there is a probability loss due to the undetected right-handed component,

$$LK_{\mu e}^{D\dagger}RK_{\mu e}^D(\mathbf{p}, t)L = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta \left(\frac{m_1}{E_1} \sin E_1 t - \frac{m_2}{E_2} \sin E_2 t \right)^2 L, \quad (24)$$

where $R = (1 + \gamma_5)/2$ is the projector to right chirality. We can see that the probability loss (24) is proportional to the ratio m_n^2/E_n^2 which is negligible for ultrarelativistic neutrinos. The total probability loss for an initial left-handed electron neutrino turning into right-handed neutrinos, irrespective of the final flavor, is given by the kernel

$$LK_{\mu e}^{D\dagger}RK_{\mu e}^D(\mathbf{p}, t)L + LK_{e e}^{D\dagger}RK_{e e}^D(\mathbf{p}, t)L \\ = \left[\cos^2 \theta \left(\frac{m_1}{E_1} \right)^2 \sin^2 E_1 t + \sin^2 \theta \left(\frac{m_2}{E_2} \right)^2 \sin^2 E_2 t \right] L. \quad (25)$$

To obtain the unphysical complementary kernels responsible for the conversion of right-handed component to right-handed and left-handed components, it is enough to make the substitution $L \leftrightarrow R$ in all formulas.

III. FLAVOR OSCILLATION FOR SPIN 0

The derivation of the usual conversion probability (11) takes into account only the positive frequency contributions. The mass wave function used to obtain Eq. (11) corresponds to the solutions of the wave equation

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{-\nabla^2 + m^2} \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (26)$$

which is equivalent to the Dirac equation in the Foldy-Wouthuysen representation [29], restricted to positive energies. The evolution kernel for this equation is not satisfactory from the point of view of causality [30], page 18, i.e., the kernel is not null for spacelike intervals. Moreover, the eigenfunctions restricted to one sign of energy do not form a complete set [24].

To recover a causal propagation in the spin 0 case, the Klein-Gordon wave equation must be considered. In the first quantized version, the spectrum of the solutions have positive and negative energy as in the Dirac case. However, to take advantage of the Hamiltonian formalism used so far, it is more convenient to work in the Sakata-Taketani (ST) Hamiltonian formalism [24] where each mass wave

function is formed by two components,

$$\Phi_n(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \varphi_n(\mathbf{x}, t) \\ \chi_n(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2. \quad (27)$$

The components φ and χ are combinations of the usual scalar Klein-Gordon wave function $\phi(x)$ and its time derivative $\partial_0 \phi(x)$. This is necessary since the Klein-Gordon equation is a second order differential equation in time and the knowledge of the function and its time derivative is necessary to completely define the time evolution.

The time evolution in this formalism is governed by the Hamiltonian [24]

$$H_n^{\text{ST}} = -(\tau_3 + i\tau_2) \frac{\nabla^2}{2m_n} + m_n^2, \quad (28)$$

which satisfies the condition $(H_n^{\text{ST}})^2 = (-\nabla^2 + m_n^2)\mathbb{1}_{\text{ST}}$, like the Dirac Hamiltonian (3). The τ_k represents the usual Pauli matrices and $\mathbb{1}_{\text{ST}}$ is the identity matrix.

A charge density [31] can be defined as

$$\bar{\Phi}_n \Phi_n \equiv \Phi_n^\dagger \tau_3 \Phi_n = |\varphi_n|^2 - |\chi_n|^2, \quad (29)$$

which is equivalent to the one found in Klein-Gordon notation $i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi$. Needless to say, this density (29) is only non-null for complex (charged) wave functions. The charge density $\bar{\Phi}\Phi$ is the equivalent of fermion probability density $\psi^\dagger \psi$ in the Dirac case, although the former is not positive definite as the latter. The adjoint $\bar{\Phi} = \Phi^\dagger \tau_3$ were defined to make explicit the (nonpositive definite) norm structure of the conserved charge,

$$\int d\mathbf{x} \bar{\Phi}_n(\mathbf{x}, t) \Phi_n(\mathbf{x}, t) \equiv (\Phi_n, \Phi_n) = \text{time independent.} \quad (30)$$

Consequently, the adjoint of any operator Ω can be defined as $\bar{\Omega} = \tau_3 \Omega^\dagger \tau_3$, satisfying $(\bar{\Omega} \Phi, \Phi) = (\Phi, \Omega \Phi)$. Within this notation, the Hamiltonians of Eq. (28) are self-adjoint, $\bar{H}_n^{\text{ST}} = H_n^{\text{ST}}$, and the time invariance of Eq. (30) is assured.

We can assemble, as in the previous section, the mass wave functions into $\Psi_m^\text{T} \equiv (\Phi_1^\text{T}, \Phi_2^\text{T})$ and the flavor wave functions into $\Psi_f^\text{T} \equiv (\Phi_{\nu_e}^\text{T}, \Phi_{\nu_\mu}^\text{T})$, satisfying the mixing relation $\Psi_f \equiv U \Psi_m$. The equivalence of $U \sim U \otimes \mathbb{1}_{\text{ST}}$ and of $P_{\nu_\alpha} \sim P_{\nu_\alpha} \otimes \mathbb{1}_{\text{ST}}$ is implicit without modification in the notations. Then, the time evolution of Ψ_f can be given through a time evolution operator K^{ST} acting in the same form as in Eq. (7). In complete analogy to the calculations from Eq. (8)–(11), we can define the conversion probability as

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) = \int d\mathbf{x} \bar{\Psi}_f(\mathbf{x}, 0) \overline{K^{\text{ST}}(t)} P_{\nu_\mu} K^{\text{ST}}(t) \Psi_f(\mathbf{x}, 0) \\ = \int d\mathbf{p} \bar{\Phi}_e(\mathbf{p}) \overline{K_{\mu e}^{\text{ST}}} K_{\mu e}^{\text{ST}}(\mathbf{p}, t) \Phi_e(\mathbf{p}), \quad (31)$$

where $\Psi_f(\mathbf{x}, 0)^\text{T} = (\Phi_e(\mathbf{x})^\text{T}, 0)$. The adjoint operation was

also extended to $\bar{\Psi}_f = \Psi_f^\dagger(\mathbb{1}_\theta \otimes \tau_3)$, where $\mathbb{1}_\theta$ is the identity in mixing space.

The information of time evolution, hence oscillation, is all encoded in

$$\overline{K_{\mu e}^{ST}} K_{\mu e}^{ST}(\mathbf{p}, t) = \mathcal{P}(\mathbf{p}, t)[1 - f(\mu\mathbf{p})]\mathbb{1}_{ST} + \sin^2 2\theta f(\mu\mathbf{p})\sin^2(\bar{E}t)\mathbb{1}_{ST}, \quad (32)$$

where the function $f(\mathbf{p})$ was already defined in Eq. (14) and

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\right)}. \quad (33)$$

The factor $\mu \geq 1$ determines the difference with the Dirac case in Eq. (13). The equality $\mu = 1$ holds when $m_1 = m_2$, i.e., when there is no oscillation.

IV. CONNECTION WITH QUANTUM FIELD THEORY

The main improvement of the covariant approaches developed in Secs. II and III is that the propagation kernels governed by Dirac and Sakata-Taketani Hamiltonians are causal, i.e., are null for spacelike separations [see Eqs. (A18) and (A19) and Refs. [28,30,32]]. On the contrary, the kernel of spinless particles restricted only to positive energies is not null for spacelike intervals [30]. From the point of view of relativistic classical field theories, a causal kernel guarantees, by the Cauchy theorem, the causal connection between the wave function in two spacelike surfaces at different times [32].

To compare the IWP and EWP approaches, it is useful to rewrite the Dirac evolution kernel for a fermion of mass m_n , present in Eq. (7), in the form [28], page 89,

$$\begin{aligned} K_n^D(x-y) &= \sum_s \int \frac{d^3p}{2E_n} [u_n^s(x; \mathbf{p})\bar{u}_n^s(y; \mathbf{p}) \\ &\quad + v_n^s(x; \mathbf{p})\bar{v}_n^s(y; \mathbf{p})]\gamma_0 \\ &\equiv iS(x-y; m_n)\gamma_0, \\ n &= 1, 2, \end{aligned} \quad (34)$$

where $(x-y)^0 = t$, $(x-y)^i = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^i$ when compared to the notation of Eq. (7). The spinorial functions u, v , are the free solutions of the Dirac equation and they are explicitly defined in Appendix A. (More familiar forms for the function S are also shown in Appendix A.) Clearly the function $iS(x-y; m_n) = \langle 0|\{\psi_n(x), \bar{\psi}_n(y)\}|0\rangle$ satisfies the homogeneous Dirac equation with mass m_n (2) and it is known to be null for spacelike intervals $(x-y)^2 < 0$ [30,32].

In contrast, the Feynman propagator $iS_F(x-y)$ appears in QFT. It is a Green function for the inhomogeneous Dirac equation obeying particular boundary conditions. The EWP approaches use this Green function for the propaga-

tion of virtual neutrinos. To directly compare the Feynman propagator to the kernel in Eq. (34), we can write iS_F in the form

$$\begin{aligned} iS_F(x-y; m_n) &\equiv \langle 0|T(\psi_n(x), \bar{\psi}_n(y))|0\rangle \\ &= \sum_s \int \frac{d^3p}{2E_n} [u_n^s(x; \mathbf{p})\bar{u}_n^s(y; \mathbf{p})\theta(x_0 - y_0) \\ &\quad - v_n^s(x; \mathbf{p})\bar{v}_n^s(y; \mathbf{p})\theta(y_0 - x_0)]. \end{aligned} \quad (35)$$

Although the function S_F is called causal propagator, it is not null for spacelike intervals, and it naturally arises in QFT when interactions are present and treated in a covariant fashion. Equation (35) shows that the propagator S_F describes positive energy states propagating forward in time and negative energy states propagating backward in time [28], page 91. At a first glance, both neutrino and antineutrino parts of Eq. (35) seem to contribute to the space-time integrations present in covariant perturbation theory, as neutrino-antineutrino contributions in Eq. (34) have led to Eq. (15).

In the following we will show in an EWP approach that for large separations between production and detection both neutrino and antineutrino parts may contribute as intermediate neutrinos for certain situations.

We will follow the calculations made in Ref. [20], using, instead of the scalar interaction, the effective charged-current weak Lagrangian

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= G \sum_{i,\alpha=1}^{N=3} [\bar{l}_\alpha(x)\gamma^\mu L U_{\alpha i} \nu_i(x) J_\mu(x) \\ &\quad + \bar{\nu}_i(x) U_{\alpha i}^* \gamma^\mu L l_\alpha(x) J_\mu^\dagger(x)] \end{aligned} \quad (36)$$

$$= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^\dagger, \quad (37)$$

where $G = \sqrt{2}G_F$ and J_μ is the sum of any effective leptonic or hadronic current. The Lagrangian (36) is written only in terms of physical mass eigenstate fields, which coincides with flavor eigenstate fields only for the charged leptons: $l_1(x) \equiv e(x)$, $l_2(x) \equiv \mu(x)$, ...

Suppose the process [20,33] where a charged lepton l_α hit a nucleus A turning it into another nucleus A' with emission of a neutrino (this process happens around x_A). Subsequently the neutrino travels a long distance and hit a nucleus B which transforms into B' emitting a lepton l_β (this process happens around x_B). The whole process looks like $l_\alpha + A + B \rightarrow l_\beta + A' + B'$ with transition amplitude given by

$$\langle A'(\mathbf{p}'_A), B'(\mathbf{p}'_B), l_\beta(\mathbf{p}_B) | S | A, B, l_\alpha \rangle. \quad (38)$$

The final states are momentum eigenstates while the initial states are localized [20]. The lowest order nonzero contribution of the scattering matrix S to Eq. (38) is second order in the Lagrangian (36). More explicitly, the term that contributes to the amplitude (38) comes from

$$S^{(2)} = \frac{i^2}{2} T \langle \mathcal{L}_W \rangle^2 = -\frac{1}{2} T \langle \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^\dagger \rangle^2 \quad (39)$$

$$\sim -T \langle \mathcal{L}_1 \rangle \langle \mathcal{L}_1^\dagger \rangle \quad (40)$$

$$\sim -G^2 \int d^4x d^4y \sum_{\beta\alpha} \mathcal{L}_{\beta\alpha}(x, y), \quad (41)$$

where $\langle \rangle$ stands for space-time integration and

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\beta\alpha}(x, y) \equiv & \sum_i : J_\mu(x) \bar{l}_\beta(x) \gamma^\mu L U_{\beta i} i S_F(x \\ & - y; m_i) U_{\alpha i}^* \gamma^\nu L l_\alpha(y) J_\nu^\dagger(y) :. \end{aligned} \quad (42)$$

In Eq. (40) we kept only the mixed product and in Eq. (41) we kept from all possible terms in Wick expansion [28], page 180, only the term responsible for the transition of interest.

Then the transition amplitude (38) can be calculated as

$$\begin{aligned} & -G^{-2} \langle A'(\mathbf{p}'_A), B'(\mathbf{p}'_B), l_\beta(\mathbf{p}_B) | S^{(2)} | A, B, l_\alpha \rangle \\ & = \int d^4y d^4x \langle B'(\mathbf{p}'_B) | J_\mu(y) | B \rangle \\ & \quad \times \langle A'(\mathbf{p}'_A) | J_\nu^\dagger(x) | A \rangle \bar{u}_\beta(y, \mathbf{p}_B) \gamma^\mu L \\ & \quad \times \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* i S_F(y - x; m_i) \gamma^\nu L \langle 0 | l_\alpha(x) | l_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (43)$$

$$\equiv \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* \mathcal{A}_i. \quad (44)$$

The initial states must be chosen in such a way that A, l_α are localized around $x_A = (t_A, \mathbf{x}_A)$ and B is localized around $x_B = (t_B, \mathbf{x}_B)$, since we are ultimately interested in large separations $|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A|$. We can implement explicitly those localization conditions into the wave packets

$$\begin{aligned} \langle B'(\mathbf{p}'_B) | J_\mu(y) | B \rangle & = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\widehat{\mathbf{q}}_B e^{i\mathbf{p}'_B \cdot \mathbf{y}} J_\mu^{BB'}(\mathbf{q}_B, \mathbf{p}'_B) \\ & \quad \times \psi_B(\mathbf{q}_B) e^{-iq_B \cdot (y - x_B)} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \langle A'(\mathbf{p}'_A) | J_\nu^\dagger(x) | A \rangle & = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\widehat{\mathbf{q}}_A e^{i\mathbf{p}'_A \cdot \mathbf{x}} J_\nu^{AA'}(\mathbf{q}_A, \mathbf{p}'_A) \\ & \quad \times \psi_A(\mathbf{q}_A) e^{-iq_A \cdot (x - x_A)} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\langle 0 | l_\alpha(x) | l_\alpha \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\widehat{\mathbf{q}}_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{q}_\alpha) e^{-iq_\alpha \cdot (x - x_A)}, \quad (47)$$

where $\widehat{d\mathbf{q}} = d\mathbf{q} (2E(\mathbf{q}))^{-1/2}$, $J_\mu^{BB'}(\mathbf{q}_B, \mathbf{p}'_B) = \langle B'(\mathbf{p}'_B) | J_\mu(0) | B(\mathbf{q}_B) \rangle$ and $J_\nu^{AA'}(\mathbf{q}_A, \mathbf{p}'_A) = \langle A'(\mathbf{p}'_A) | J_\nu^\dagger(0) | A(\mathbf{q}_A) \rangle$.

Following the calculations from Eq. (43) with the localization aspects of Eqs. (45)–(47) included, we arrive at

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i & = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\widehat{\mathbf{q}}_B \int d\widehat{\mathbf{q}}_A \int d\widehat{\mathbf{q}}_\alpha J_\mu^{BB'}(\mathbf{q}_B, \mathbf{p}'_B) \psi_B(\mathbf{q}_B) \\ & \quad \times J_\nu^{AA'}(\mathbf{q}_A, \mathbf{p}'_A) \psi_A(\mathbf{q}_A) e^{iq_B \cdot x_B} e^{i(q_A + q_\alpha) \cdot x_A} \bar{u}_\beta(\mathbf{p}_B) \\ & \quad \times \gamma^\mu L \left[\int d^4x d^4y e^{i\kappa_\beta \cdot y} e^{-i\kappa_\alpha \cdot x} i S_i(y - x) \right] \gamma^\nu L \psi_\alpha(\mathbf{q}_\alpha), \end{aligned} \quad (48)$$

where $\kappa_\beta = (\kappa_\beta^0, \boldsymbol{\kappa}_\beta)$, $\kappa_\alpha = (\kappa_\alpha^0, \boldsymbol{\kappa}_\alpha)$, and

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}_\beta & \equiv \mathbf{p}_B + \mathbf{p}'_B - \mathbf{q}_B, \\ \kappa_\beta^0 & \equiv E_\beta(\mathbf{p}_B) + E_B(\mathbf{p}'_B) - E_B(\mathbf{q}_B), \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}_\alpha & \equiv \mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}'_A + \mathbf{q}_A, \\ \kappa_\alpha^0 & \equiv E_\alpha(\mathbf{q}_\alpha) - E_{A'}(\mathbf{p}'_A) + E_A(\mathbf{q}_A). \end{aligned} \quad (50)$$

By using the results of Eqs. (C1) and (C2), the expression between square brackets in Eq. (48) gives

$$\begin{aligned} & 2\pi \delta(\kappa_\beta^0 - \kappa_\alpha^0) \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{-i}{4\pi r} e^{ik_\omega r} e^{-i\kappa_\beta \cdot \mathbf{y}} \\ & \quad \times e^{i\kappa_\alpha \cdot \mathbf{x}} [u_i(k_\omega \hat{\mathbf{r}}) \bar{u}_i(k_\omega \hat{\mathbf{r}}) \theta(\omega_i - m_i) \\ & \quad - v_i(-k_\omega \hat{\mathbf{r}}) \bar{v}_i(-k_\omega \hat{\mathbf{r}}) \theta(-\omega_i - m_i)], \end{aligned} \quad (51)$$

where $r \equiv |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$, $\hat{\mathbf{r}} \equiv (\mathbf{y} - \mathbf{x})/r$, $\omega_i \equiv \kappa_\beta^0 = \kappa_\alpha^0$, and $k_\omega \equiv \sqrt{\omega_i^2 - m_i^2}$. The crucial point here is that, depending on the masses and momenta of the incoming particles, both neutrinos ($u\bar{u}$) and antineutrinos ($v\bar{v}$) can contribute to the amplitude (48) depending on the sign of its energy ω_i , restricted to $|\omega_i| > m_i$; the off-shell contributions for $\omega_i \in [-m_i, m_i]$ are exponentially decreasing and then negligible for large distances (see Appendix C). We will see in the following that antineutrino contributions in this case are possible and it corresponds to unphysical contributions.

We are interested in large production—detection separations. It permits us to approximate, as in Ref. [20], $r \approx R + \hat{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}_B) - \hat{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A)$ and $\hat{\mathbf{r}} \approx \hat{\mathbf{R}}$, where $R \equiv |\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A|$ and $\hat{\mathbf{R}} \equiv (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)/R$. Such approximations inserted in Eq. (51) lead to momentum conservation on x_A and x_B vertices:

$$\begin{aligned} & 2\pi \delta(\kappa_\beta^0 - \kappa_\alpha^0) \frac{-i}{4\pi R} e^{ik_\omega R} e^{-ik_\omega \hat{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)} (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{\kappa}_\beta - k_\omega \hat{\mathbf{R}}) \\ & \quad \times (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{\kappa}_\alpha - k_\omega \hat{\mathbf{R}}) [u_i(k_\omega \hat{\mathbf{R}}) \bar{u}_i(k_\omega \hat{\mathbf{R}}) \theta(\omega_i - m_i) \\ & \quad - v_i(-k_\omega \hat{\mathbf{R}}) \bar{v}_i(-k_\omega \hat{\mathbf{R}}) \theta(-\omega_i - m_i)], \end{aligned} \quad (52)$$

At this point we have all the information to analyze whether the antineutrino part of the propagator contributes to the overall process. Neither of the isolated processes $A + l_\alpha \rightarrow A' + \bar{\nu}_i$ and $B + \bar{\nu}_i \rightarrow B' + l_\beta$ are allowed if we calculate the transition amplitude for them separately using the weak Lagrangian (36). (For Majorana neutrinos they are strongly suppressed by helicity mismatch.) So far four-momentum conservation in both x_A and x_B vertices were

automatically required from the calculations; among them the requirement of energy conservation for intermediate neutrinos with respect to the accompanying particles in vertex x_A ($\omega_i = \kappa_\alpha^0$) and in vertex x_B ($\omega_i = \kappa_\beta^0$), is already implicit. The remaining are explicit in the delta functions of Eq. (52). The on-shell condition for neutrinos ($|\omega_i|^2 - k_\omega^2 = m_i^2$) for long distance propagation was also automatic. What the calculations did not required is a definite sign for ω_i , for all possible momenta constrained by the mentioned energy-momentum conservations. To analyze if and under what conditions both signs are possible is equivalent to study the kinematics of two-body to two-body scattering allowing the sign of one particle energy to be free. Putting in equations, for vertex x_A , assuming the particle A at rest, we obtain from $(p_A - p_i)^2 = (p_{A'} - p_\alpha)^2$ the neutrino energy

$$E_i = \frac{1}{2M_A} [M_A^2 - M_{A'}^2 + m_i^2 - m_\alpha^2 + 2E_\alpha E_{A'} - 2\mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{p}'_{A'}]. \quad (53)$$

The minimum value of the right-hand side of Eq. (53) corresponds to the last two terms equal to $2m_\alpha M_{A'}$, which gives for the minimum

$$\min(E_i) = \frac{1}{2M_A} [M_A^2 - (M_{A'} - m_\alpha)^2 + m_i^2]. \quad (54)$$

The values $\omega_i = \kappa_\alpha^0$ are bounded from below by the value in Eq. (54). Imposing $\min(E_i) > m_i$ and $\min(E_i) < -m_i$ is, respectively, equivalent to

$$M_A - M_{A'} > -(m_\alpha - m_i) \quad (55)$$

$$M_A - M_{A'} < -(m_\alpha + m_i), \quad (56)$$

for $M_A > m_i$ and $M_{A'} > m_\alpha$. It is clear that, depending on the value of the masses, condition (56) may be satisfied leading to antineutrino contributions to Eq. (48) for a range

of possible incoming momenta. Of course the condition (55) is sufficient to exclude antineutrino contributions but it also excludes the cases where a threshold energy is required for the lepton l_α to initiate the production reaction. Thus to prevent antineutrino contributions, it is better to adopt the weaker condition of restricting the sign of the energy of intermediate neutrinos ω_i to be positive, keeping only the first term in Eq. (51). Analogous analysis leads to possible momenta and mass values that allow $\kappa_\beta^0 < -m_i$ for vertex x_B , still compatible with $\kappa_\alpha^0 = \kappa_\beta^0$. Notice that condition $\kappa_\alpha^0 > m_i$ is exactly the kinematical condition to allow the production of physical neutrinos in x_A and $\kappa_\beta^0 > m_i$ allow only the contribution of neutrinos with energy above threshold to trigger the detection reaction. The violation of these conditions implies in kinematically impossible contributions in production or detection.

Restricted to condition $\omega_i > 0$ we can insert the expression above into Eq. (48) which yields

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= \int d\mathbf{q}_\alpha 2\pi \delta(\kappa_\beta^0 - \kappa_\alpha^0) \theta(\omega_i - m_i) \\ &\times \frac{-i}{4\pi R} e^{ik_\omega R - i\omega_i(t_B - t_A)} e^{i(p_k + p'_k) \cdot x_B} e^{ip'_A \cdot x_A} U_k(\mathbf{p}_\beta) \\ &\times \gamma^\mu L u_i(k_\omega \hat{\mathbf{R}}) \bar{u}_i(k_\omega \hat{\mathbf{R}}) \gamma^\nu L \psi_\alpha(\mathbf{q}_\alpha) J_\mu^{BB'}(\mathbf{q}_B, \mathbf{p}'_B) \\ &\times \frac{\psi_B(\mathbf{q}_B)}{\sqrt{E_B(\mathbf{q}_B)}} J_\nu^{AA'}(\mathbf{q}_A, \mathbf{p}'_A) \frac{\psi_A(\mathbf{q}_A)}{\sqrt{E_A(\mathbf{q}_A)}} \Bigg|_{\substack{\mathbf{q}_B = \mathbf{p}_\beta + \mathbf{p}'_B - k_\omega \hat{\mathbf{R}} \\ \mathbf{q}_A = \mathbf{p}'_A - \mathbf{q}_\alpha + k_\omega \hat{\mathbf{R}}} \end{aligned} \quad (57)$$

Notice that the step function $\theta(\omega_i - m_i)$ prevents non-physical neutrinos to contribute to the process.

Particularly, if we use a unidimensional wave packet for the incoming lepton l_α

$$\psi_\alpha(\mathbf{q}) = \psi_\alpha(q_x, q_y, q_z) = \delta(q_x) \delta(q_y) \psi_{\alpha z}(q_z), \quad (58)$$

we obtain an amplitude analogous to Ref. [20]:

$$\begin{aligned} \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* \mathcal{A}_i &= \sum_i \frac{-i}{4\pi R} e^{ik_\omega R - i\omega_i(t_B - t_A)} 2\pi \left| 2\mathbf{p}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_\alpha^2} (\kappa_\beta^0 - \kappa_\alpha^0) \right|_{\mathbf{q}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha \hat{\mathbf{z}}}^{-1} e^{i(p_k + p'_k) \cdot x_B} e^{ip'_A \cdot x_A} U_{\beta i} U_{\beta}(\mathbf{p}_\beta) \\ &\times \gamma^\mu L u_i(k_\omega \hat{\mathbf{R}}) U_{\alpha i}^* \bar{u}_i(k_\omega \hat{\mathbf{R}}) \gamma^\nu L \psi_{\alpha z}(p_\alpha) J_\mu^{BB'}(\mathbf{q}_B, \mathbf{p}'_B) \frac{\psi_B(\mathbf{q}_B)}{\sqrt{E_B(\mathbf{q}_B)}} J_\nu^{AA'}(\mathbf{q}_A, \mathbf{p}'_A) \frac{\psi_A(\mathbf{q}_A)}{\sqrt{E_A(\mathbf{q}_A)}} \Bigg|_{\substack{\mathbf{q}_B = \mathbf{p}_\beta + \mathbf{p}'_B - k_\omega \hat{\mathbf{R}} \\ \mathbf{q}_A = \mathbf{p}'_A - \mathbf{p}_\alpha \hat{\mathbf{z}} + k_\omega \hat{\mathbf{R}}} \end{aligned} \quad (59)$$

where \mathbf{p}_α is the root of $f(|\mathbf{q}_\alpha| = \mathbf{p}_\alpha) = \kappa_\beta^0 - \kappa_\alpha^0 = 0$, which comes from energy conservation from the whole process; if there is no root the process is kinematically forbidden. The detection probability is proportional to the square of the amplitude (59) integrated over the final phase space $d\mathbf{p}'_A d\mathbf{p}'_B d\mathbf{p}_\beta [2E_{A'}(\mathbf{p}'_A) 2E_{B'}(\mathbf{p}'_B) 2E_\beta(\mathbf{p}_\beta)]^{-1}$. In particular, since $\mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}'_A, \mathbf{p}'_B$ are fixed, the phases that differ for different intermediate neutrinos ν_i are only $k_\omega R - \omega_i(t_A - t_B)$ which is the same result obtained in

Ref. [20] (except for terms which depend on the mean velocity of particles A and B).

So far we have shown in an EWP approach both processes in x_A and x_B should be considered real scattering processes with real neutrinos involved. The off-shell contributions are negligible to large distances and antineutrino contributions were explicitly excluded by eliminating the second term of Eq. (51). This information permits us to rewrite Eq. (57) in a slightly different form:

$$\begin{aligned}
-G^2 \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* \mathcal{A}_i &= \sum_i \int \frac{d\mathbf{p}}{2E_i(\mathbf{p})} \int d^4y \langle B'(\mathbf{p}'_B), l_\beta(\mathbf{p}_\beta) | \\
&\times \mathcal{L}_1(y) e^{i(P-\nu_i) \cdot x_B} | B, \nu_i(\mathbf{p}) \rangle \\
&\times \int d^4x \theta(y-x) \langle A'(\mathbf{p}'_A), \nu_i(\mathbf{p}) | \\
&\times \mathcal{L}_1^\dagger(x) e^{iP \cdot x_A} | A, l_\alpha \rangle, \quad (60)
\end{aligned}$$

where $P = (H, \mathbf{P})$ is the energy-momentum operator. A change of notation were made here: in Eq. (59) the states $|B\rangle$ and $|A, l_\alpha\rangle$ are centered around the origin while in Eqs. (38)–(47) they are, respectively, centered around x_B and x_A ; the translation is explicitly performed by the translation operator $e^{iP \cdot x}$. Additionally, the step function $\theta(y-x)$ is necessary to ensure that the contributions of points y around x_B should always be after the contributions of points x around x_A . By following the same steps from Eq. (43) to Eq. (58) we can arrive from Eq. (60) to (59).

Equation (60) shows us the amplitude of the entire process from production to detection in “decomposed” form (apart from the step function in time): the amplitude of production process multiplied by the amplitude of detection process summed over all possible intermediate real neutrinos of different masses m_i and momentum \mathbf{p} . (The sum over spins are implicit.)

A. A simple second quantized formulation

Considering that only real neutrinos or antineutrinos (one of them exclusively) should travel from production to detection, the possibility to use the free second quantized theory for spin 1/2 fermions to describe flavor oscillations is investigated in this section. This simple, type *B* and QFT description of flavor oscillation phenomena guarantees only particle or antiparticle propagation, keeping the nice property of giving normalized oscillation probabilities, like the first quantized examples treated in Secs. II and III.

To accomplish the task of calculating oscillation probabilities in QFT, we have to define the neutrino states that are produced and detected through weak interactions. First, we define the shorthand for the combination of fields appearing in the weak effective charged-current Lagrangian (36)

$$\nu_\alpha(x) \equiv U_{\alpha i} \nu_i(x), \quad \alpha = e, \mu. \quad (61)$$

We will restrict the problem to two flavor families and use the matrix U as the same in Eq. (1). The mass eigenfields $\nu_i(x)$, $i = 1, 2$, are the physical fields for which the mass eigenstates $|\nu_i(\mathbf{p})\rangle$ are well-defined asymptotic states. The free fields $\nu_i(x)$ can be expanded in terms of creation and annihilation operators (see Appendix A) and the projection to the one-particle space defines the mass wave function,

$$\begin{aligned}
\psi_{\nu_i}(\mathbf{x}; g_i) &= \langle 0 | \nu_i(\mathbf{x}) | \nu_i; g_i \rangle \equiv \sum_s \int d\mathbf{p} \frac{g_i^s(\mathbf{p})}{\sqrt{2E_i}} u_i^s(\mathbf{x}; \mathbf{p}), \\
i &= 1, 2, \quad (62)
\end{aligned}$$

where

$$|\nu_i; g_i\rangle \equiv \sum_s \int d\mathbf{p} g_i^s(\mathbf{p}) |\nu_i(\mathbf{p}, s)\rangle. \quad (63)$$

Since the creation operators for neutrinos (antineutrinos) can be written in terms of the free fields $\bar{\nu}_i(x)$ [$\nu_i(x)$], we can define the flavor states as the superpositions of mass eigenstates

$$|\nu_\alpha; \{g\}\rangle \equiv U_{\alpha i}^* |\nu_i; g_i\rangle \quad |\bar{\nu}_\alpha; \{g\}\rangle \equiv U_{\alpha i} |\bar{\nu}_i; g_i\rangle. \quad (64)$$

The details of creation are encoded in the functions g_i .

We can also define

$$\psi_{\nu_\alpha \nu_e}(x; \{g\}) \equiv \langle 0 | \nu_e(x) | \nu_\alpha; \{g\} \rangle = U_{ei} U_{\alpha i}^* \psi_{\nu_i}(x; g_i), \quad (65)$$

where $\psi_{\nu_i}(x)$ are then mass wave functions defined in Eq. (62). We can see from Eq. (65) that if $\psi_{\nu_1}(\mathbf{x}, t) = \psi_{\nu_2}(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x})$, for a given time t , $\psi_{\nu_e \nu_e}(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x})$ and $\psi_{\nu_\mu \nu_e}(\mathbf{x}, t) = 0$ due to the unitarity of the mixing matrix.

Although this approach does not rely on flavor Fock spaces and Bogoliubov transformations, we can use the same observables used by Blasone and Vitiello to quantify flavor oscillation [34]: the flavor charges, which are defined as

$$Q_\alpha(t) = \int d\mathbf{x} : \nu_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t) \nu_\alpha(\mathbf{x}, t) :, \quad \alpha = e, \mu, \quad (66)$$

where $::$ denotes normal ordering. Note that the $Q_e(t) + Q_\mu(t) = Q$ is conserved [3], the two flavor charges are compatible for equal times, i.e., $[Q_e(t), Q_\mu(t)] = 0$, and $\langle \nu; \{g\} | Q | \nu; \{g\} \rangle = \pm \langle \nu; \{g\} | \nu; \{g\} \rangle$ for any particle state (+) or antiparticle state (−). Notice that in the second quantized version the charges can acquire negative values, despite the fermion probability density in first quantization is a positive definite quantity. The conservation of total charge guarantees the conservation of total probability (16).

We can further split the flavor charges into left-handed (−) and right-handed (+) parts,

$$\begin{aligned}
Q_\alpha^{(\pm)}(t) &= \int d\mathbf{x} : \nu_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t) \frac{1}{2} (\mathbb{1} \pm \gamma_5) \nu_\alpha(\mathbf{x}, t) :, \\
\alpha &= e, \mu, \quad (67)
\end{aligned}$$

where $Q_\alpha^{(+)} + Q_\alpha^{(-)} = Q_\alpha$. These components will be used to calculate the left-handed to right-handed transition.

With the flavor charges defined, we can calculate, for example, the conversion probability

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) &\equiv \langle \nu_e; \{g\} | Q_\mu(t) | \nu_e; \{g\} \rangle \quad (68) \\ &= U_{\mu i} U_{\mu j}^* U_{e j} U_{e i}^* \int d\mathbf{p} e^{-i(E_i - E_j)t} \tilde{\psi}_{\nu_j}^\dagger(\mathbf{p}; g_j) \tilde{\psi}_{\nu_i}(\mathbf{p}; g_i), \quad (69) \end{aligned}$$

where the neutrino wave functions ψ_{ν_i} are defined in terms of the function $g_i(\mathbf{p})$ in Eq. (62). If we could equate the two mass wave functions in momentum space $\tilde{\psi}_{\nu_1}(\mathbf{p}; g_1) = \tilde{\psi}_{\nu_2}(\mathbf{p}; g_2) = \tilde{\psi}_{\nu_e}(\mathbf{p})$ we would obtain, from Eq. (69), the standard two family conversion probability (11)

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) = \int d\mathbf{p} \mathcal{P}(\mathbf{p}, t) \tilde{\psi}_{\nu_e}^\dagger(\mathbf{p}) \tilde{\psi}_{\nu_e}(\mathbf{p}), \quad (70)$$

where \mathcal{P} was defined in Eq. (12). However, the equality cannot hold as proved in Appendix B: Two wave functions with only positive energy components with respect to two bases characterized by different masses cannot be equal. Then, it is not possible to impose a flavor definite condition. Instead, we can write

$$g_i(\mathbf{p}, s) = \frac{u_i^{s\dagger}(\mathbf{p})}{\sqrt{2E_i(\mathbf{p})}} \tilde{\psi}_i(\mathbf{p}), \quad (71)$$

where $\tilde{\psi}_i(\mathbf{p})$ is the initial wave function associated to the neutrino of mass m_i at creation, taking care to maintain the normalization $\int d\mathbf{p} |g_i(\mathbf{p})|^2 = 1$; any transition amplitude can be written in the form Eq. (71). In general $\tilde{\psi}_i(\mathbf{p}) = \tilde{\psi}(\mathbf{p}, m_i)$, and then, for small mass differences,

$$\tilde{\psi}_i(\mathbf{p}) \approx \tilde{\psi}(\mathbf{p}, \bar{m}) \pm \frac{\Delta m}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{m}} \tilde{\psi}(\mathbf{p}, \bar{m}), \quad (72)$$

where $\bar{m} = (m_1 + m_2)/2$ and $\Delta m = m_2 - m_1$. Keeping only the first term, $\tilde{\psi}(\mathbf{p}, \bar{m}) \equiv \tilde{\psi}(\mathbf{p})$, we obtain from Eq. (69),

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) &= \int d\mathbf{p} \mathcal{P}(\mathbf{p}, t) \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{p}) \left[\mathbb{1} - \frac{1}{2} \Lambda_{1-}(\mathbf{p}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \Lambda_{2-}(\mathbf{p}) \right] \tilde{\psi}(\mathbf{p}) + \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \int d\mathbf{p} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{p}) \\ &\quad \times \left[f(\mathbf{p}) \cos(\Delta E t) - i \frac{\Delta m}{2E_1 E_2} \boldsymbol{\gamma} \right. \\ &\quad \left. \cdot \mathbf{p} \sin(\Delta E t) \right] \tilde{\psi}(\mathbf{p}). \quad (73) \end{aligned}$$

Notice that, in this case, the conversion probability is non-null for $t = 0$,

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; 0) = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(\mathbf{p}), \quad (74)$$

which implies a direct lepton flavor violation in creation. However, since $f(\mathbf{p}) \approx (\Delta m)^2/(4\mathbf{p}^2)$ for ultrarelativistic momenta, the violation is hopelessly feeble for direct measurement. Among the deviations of the conversion probability (73) compared to the standard one (70), only

the last term is of order $\Delta m/\bar{E}$, the rest is of order $(\Delta m/\bar{E})^2$ [the contributions of Λ_{i-} can be estimated by $[v_2^\dagger(-\mathbf{p}, s) u_1(\mathbf{p}, s')]^2 \sim \mathbf{p}^2 [\Delta m + \Delta E]^2 / [(m_1 + E_1)(m_1 + E_1)]$]. Even so, $\Delta m/\bar{E} \sim 10^{-9}$ for $\Delta m^2 \sim 10^{-3} \text{ eV}^2$, $\bar{m} \sim 1/2 \text{ eV}$, and $\bar{E} \sim 1 \text{ MeV}$, which cannot be seen in actual oscillation experiments. Nevertheless, it is important to note that the knowledge of Δm in conjunction with Δm^2 gives information about the absolute mass scale because of $\Delta m^2 = 2\bar{m}\Delta m$.

Using $Q_\alpha^{(-)}$ of Eq. (67) instead of Q_α in Eq. (69) and $\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = L\tilde{\psi}(\mathbf{p})$ in Eq. (70) we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu R}; t) &= \int d\mathbf{p} \left[\frac{m_1 m_2}{4E_1 E_2} \mathcal{P}(\mathbf{p}, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \left(\frac{m_1}{2E_1} - \frac{m_2}{2E_2} \right)^2 \right] \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(\mathbf{p}). \quad (75) \end{aligned}$$

The total probability loss from the conversion of initial left-handed electron neutrino to right-handed neutrinos yields

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eR}; t) + \mathcal{P}(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu R}; t) \\ = \int d\mathbf{p} \left[\cos^2 \theta \left(\frac{m_1}{2E_1} \right)^2 \right. \\ \left. + \sin^2 \theta \left(\frac{m_2}{2E_2} \right)^2 \right] \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(\mathbf{p}). \quad (76) \end{aligned}$$

Notice Eq. (76) does not depend on time in contrast to its first quantized analog in Eq. (25). Other conversion and survival probabilities can be obtained from Eq. (17) and

$$\mathcal{P}(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu R}; t) + \mathcal{P}(\nu_{eL} \rightarrow \nu_{\mu L}; t) = \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t). \quad (77)$$

The exchange of $L \leftrightarrow R$ does not modify the formulas, provided we also change the chirality of the initial wave function.

For completeness we calculate the additional conversion probabilities including the second term of Eq. (72)

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) &= \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \frac{\Delta m}{2} \int d\mathbf{p} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{p}) \left[\frac{H_2}{2E_2} - \frac{H_1}{2E_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta m}{2E_1 E_2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + (\Lambda_{1+} + \Lambda_{2+} \right. \\ &\quad \left. - f(\mathbf{p}) i \sin \Delta E t \right] \frac{\partial}{\partial \bar{m}} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) + \text{H.c.}, \quad (78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{P}(v_{eL} \rightarrow v_{\mu R}; t) = & \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \frac{\Delta m}{2} \int d\mathbf{p} \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{p}) \left[\left(\frac{m_2}{2E_2} \right)^2 \right. \\ & \left. - \left(\frac{m_1}{2E_1} \right)^2 + \frac{m_1 m_2}{2E_1 E_2} i \sin \Delta E t \right] \\ & \times \frac{\partial}{\partial \bar{m}} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (79)$$

which have terms of order Δm and $(\Delta m)^2$.

To calculate the conversion probability for antineutrinos $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$, it is enough to use

$$g_i^{s*}(\mathbf{p}) \equiv \tilde{\psi}_i^\dagger(\mathbf{p}) \frac{v_i^s(\mathbf{p})}{\sqrt{2E_i(\mathbf{p})}}, \quad (80)$$

instead of Eq. (71), replace $t \rightarrow -t$ and $\tilde{\psi}(\mathbf{p}) \rightarrow \frac{\alpha\mathcal{P}}{|\mathbf{p}|} \tilde{\psi}(\mathbf{p})$ in the expressions corresponding to neutrinos (69)–(79), or apply charge conjugation $\tilde{\psi}(\mathbf{p}) \rightarrow -\gamma_0 C \tilde{\psi}^*(\mathbf{p})$. These prescriptions can be inferred from direct comparison to the calculations and beware that the definition of antineutrino states are defined with $g_i^{s*}(\mathbf{p})$ (A29).

The formulas obtained in this second quantized version do not have the interference terms between positive and negative energies like in Eq. (15). Such interference terms are absent because the possible mixed terms like $b_2(\mathbf{p})a_1^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ are null for an initial flavor state superposition that contains only particle states (or only antiparticles states). Notice that the irrelevance of the initial spinorial structure no longer holds in this second quantized version, which can be seen, for example, in Eq. (73).

V. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

Using the Dirac equation which is a relativistic covariant equation we obtained oscillation probabilities respecting causal propagation. The oscillation formulas obtained had additional rapid oscillating terms depending on the frequency $E_1 + E_2$, with respect to the usual oscillation formulas with wave packets. Such additional oscillatorial character seemed to have its origin in the intrinsic spinorial character used. However, we have seen that such terms also appear in the charged spin 0 particle oscillations. In fact, the rapid oscillatorial terms arise from the interference of positive and negative frequency parts of the initial WP and they are always present independently of the initial wave packet if initially a flavor definite condition were imposed. In addition, within Dirac theory, we have shown the detailed spinorial character of the initial wave function was irrelevant for flavor oscillation, independently of the momenta involved. The inclusion of the left-handed nature of the created and detected neutrinos could also be simply achieved. It is important to stress that the modifications found in this context would have tiny observable effects to the flavor oscillation of ultrarelativistic neutrinos.

Regarding second quantized approaches (Sec. IV), in particular, EWP approaches, we can compare the propagators used in the latter to the evolution kernels in IWP

approaches. Both the free evolution kernel and the Feynman propagator for fermions contain the contribution from particles and antiparticles. From this perspective, EWP approaches could also contain both contributions from neutrinos and antineutrinos, as in the first quantized approaches presented in Secs. II and III. To analyze this point, an EWP calculation was carried out explicitly in Sec. IV following Ref. [20]. Restricted to a case where only neutrinos would be present, the calculation showed that the antineutrino contribution was not excluded automatically in the formalism but a subsidiary condition could be necessary: The sign of the frequency of the intermediate neutrinos should be restricted to be positive. In such a case, there can be interference terms between positive and negative frequencies, possibly yielding rapid oscillation terms similar to the ones obtained in Dirac theory of Sec. II. However, it should be stressed that the origin of the interference between positive and negative terms is different in the first quantized Dirac theory treated in Sec. II and in the EWP (second quantized) treated in this Sec. IV. The former comes from causality and completeness arguments in a classical field theory perspective, while the latter has its origin in the consideration of nonphysical contributions. The restriction implied by the subsidiary condition automatically guarantees that: (i) only real neutrinos that are kinematically allowed in production contributes and (ii) in detection, only neutrinos with energies above threshold to trigger the detection reaction contribute. Otherwise, kinematically forbidden reactions in production or detection could be possible through exchange of virtual antineutrinos carrying negative energy. The overall energy-momentum conservation, though, is always respected (smeared out through finite momentum distributions) through production/propagation/detection processes. Since the presence of both neutrino—antineutrino contributions is common to all EWP approaches, the subsidiary condition necessary in the EWP approach analyzed is possibly necessary in any approach with virtual neutrino propagation. [Unless a stronger condition like Eq. (55) is already implicit.] For example, in Eq. (14) of Ref. [19], the subsidiary condition (for antineutrinos) is satisfied because the detection reaction is an elastic scattering. [Although the detection electrons are off-shell (bound state), the subsidiary condition is valid.] An important remark in this respect is that the calculations of the production and detection amplitudes as separate processes take automatically into account the physical kinematical conditions (i) and (ii) through the energy-momentum delta functions. It is also important to stress that the results obtained here depended neither on particular WPs nor on the particular interaction used. The interesting point is that by imposing such subsidiary conditions beforehand enables us to write the transition amplitude for the entire production/propagation/detection process in a decomposed form, with simple physical interpretation. A more detailed discussion about the decompo-

sition of the process in separate production, propagation, and detection processes can be found in Ref. [21]. Similar conclusions can be drawn for the case where only antineutrinos should propagate: The sign to be chosen should be negative. A realistic EWP approach for antineutrino propagation is given in Ref. [19]. To conclude this part, EWP approaches for neutrino oscillations require for consistency, but do not automatically imply, real intermediate neutrinos or antineutrinos exclusively.

All the properties discussed above about EWP approaches suggest that the description of two macroscopically distant scattering processes (production and detection) as a single scattering process described by a single scattering matrix has to be treated with care. We can be confident about the use of the S matrix to describe any microscopic event through perturbation theory to any order of expansion (if the theory is renormalizable), but the extension to macroscopically distant reactions is not automatic. Actually, if the two processes are indeed not causally connected it can be proved that the S matrix decomposes as the product of the two S matrices for the two distant and independent processes [35].

From the considerations above, the positive and negative interference terms in the first quantized approaches considered seem unphysical. To support this idea, it was shown in Sec. IVA that a simple second quantized, type B, and IWP-like, approach could be devised using the second quantized free theory maintaining the simple properties of IWP approaches but eliminating the undesirable interference of positive and negative frequencies that was inevitable in the relativistic quantum mechanical context. On the other hand, new ingredients such as the direct flavor violation in creation and deviations from the standard oscillation formula were found. The deviations include the probability loss due to the conversion of left-handed neutrinos to right-handed neutrinos. Unfortunately, those new effects are tiny either because of the small mass difference or the ultrarelativistic nature of neutrinos and they are not feasible for direct observation in actual oscillation experiments.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). The author would like to thank Professor J.C. Montero for a critical reading of the manuscript.

APPENDIX A: NOTATION AND DEFINITIONS

The (scalar, spinorial, or ST) wave functions related by Fourier transforms are denoted as

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} \tilde{\varphi}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (\text{A1})$$

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (\text{A2})$$

The tilde denotes the inverse Fourier transformed function.

Using the property of the Dirac or ST Hamiltonian, $H_n^2 = (\mathbf{p}^2 + m_n)^2 \mathbb{1}$, we can write the evolution operator in the form

$$e^{-iH_n t} = \cos(E_n t) - i \frac{H_n}{E_n} \sin(E_n t), \quad (\text{A3})$$

where the momentum dependence have to be replaced by $-i\nabla$ in coordinate space.

The free neutrino field expansion used is ($i = 1, 2$)

$$\nu_i(x) = \sum_s \int \frac{d\mathbf{p}}{2E_p} [u_i^s(x; \mathbf{p}) a_i(\mathbf{p}, s) + v_i^s(x; \mathbf{p}) b_i^\dagger(\mathbf{p}, s)], \quad (\text{A4})$$

where the creation and annihilation operators satisfy the canonical anticommutation relations

$$\{a_i(\mathbf{p}, r), a_j^\dagger(\mathbf{p}', s)\} = \delta_{ij} \delta_{rs} 2E_i(\mathbf{p}) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (\text{A5})$$

$$\{b_i(\mathbf{p}, r), b_j^\dagger(\mathbf{p}', s)\} = \delta_{ij} \delta_{rs} 2E_i(\mathbf{p}) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'); \quad (\text{A6})$$

all other anticommutation relations are null. The functions u, v are defined as

$$u_i^s(x; \mathbf{p}) = u_i^s(\mathbf{p}) \frac{e^{-ip_i x}}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (\text{A7})$$

$$u_i^s(\mathbf{p}) = \frac{m_i + E_i \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{E_i + m_i}} u_0^s, \quad (\text{A8})$$

$$v_i^s(x; \mathbf{p}) = v_i^s(\mathbf{p}) \frac{e^{ip_i x}}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (\text{A9})$$

$$v_i^s(\mathbf{p}) = \frac{m_i - E_i \gamma^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{E_i + m_i}} v_0^s, \quad (\text{A10})$$

where $p_i \cdot x = E_i(\mathbf{p})t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ and they satisfy the properties

$$\bar{u}_0^r u_0^s = u_0^{r\dagger} u_0^s = -\bar{v}_0^r v_0^s = v_0^{r\dagger} v_0^s = \delta_{rs}, \quad (\text{A11})$$

$$v_0^{r\dagger} u_0^s = u_0^{r\dagger} v_0^s = 0 \quad \forall r, s, \quad (\text{A12})$$

$$\sum_s u_i^s(\mathbf{p}) \bar{u}_i^s(\mathbf{p}) = \not{p} + m_i = 2E_i(\mathbf{p}) \Lambda_{i+}^D(\mathbf{p}) \gamma^0, \quad (\text{A13})$$

$$\sum_s v_i^s(\mathbf{p}) \bar{v}_i^s(\mathbf{p}) = \not{p} - m_i = 2E_i(\mathbf{p}) \Lambda_{i-}^D(-\mathbf{p}) \gamma^0. \quad (\text{A14})$$

The Feynman propagator for fermions is

$$iS_F(x - y) \equiv \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) | 0 \rangle \quad (\text{A15})$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (\text{A16})$$

$$= (i\not{\partial} + m)i\Delta_F(x-y; m). \quad (\text{A17})$$

The function S in Eq. (34) and its equivalent for the Sakata-Taketani Hamiltonian can be written as

$$iS(x; m) = (i\not{\partial} + m)i\Delta(x; m), \quad (\text{A18})$$

$$K^{\text{ST}}(x; m) = \left[i\partial_t - \frac{\nabla^2}{2m} (\tau_3 + i\tau_2) + m^2 \right] i\Delta(x; m), \quad (\text{A19})$$

$$\begin{aligned} i\Delta(x; m) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \epsilon(p_0) e^{-ip \cdot x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2E_p} [e^{-ip \cdot x} - e^{+ip \cdot x}], \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

The free neutrino eigenstates are defined as

$$|\nu_i(\mathbf{p}, s)\rangle \equiv \frac{a_i^\dagger(\mathbf{p}, s)}{\sqrt{2E_i}} |0\rangle \quad (\text{A21})$$

$$= \int d\mathbf{x} \nu_i^\dagger(x) |0\rangle \frac{u_i(x; \mathbf{p})}{\sqrt{2E_i}}, \quad (\text{A22})$$

$$|\bar{\nu}_i(\mathbf{p}, s)\rangle \equiv \frac{b_i^\dagger(\mathbf{p}, s)}{\sqrt{2E_i}} |0\rangle \quad (\text{A23})$$

$$= \int d\mathbf{x} \frac{v_i^\dagger(x; \mathbf{p})}{\sqrt{2E_i}} \nu_i(x) |0\rangle, \quad (\text{A24})$$

whose normalization is $\langle \nu_j(\mathbf{p}, r) | \nu_i(\mathbf{p}', s) \rangle = \delta_{ij} \delta_{rs} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. The same normalization is valid for the antiparticle states. The states with finite momentum distributions are defined as

$$|\nu_i; g\rangle = \sum_s \int d\mathbf{p} g^s(\mathbf{p}) |\nu_i(\mathbf{p}, s)\rangle \quad (\text{A25})$$

$$= \int d\mathbf{x} \nu_i^\dagger(x) |0\rangle \psi_{\nu_i}(x), \quad (\text{A26})$$

$$\psi_{\nu_i}(x) \equiv \sum_s \int d\mathbf{p} g^s(\mathbf{p}) \frac{u_i^s(x; \mathbf{p})}{\sqrt{2E_i}}, \quad (\text{A27})$$

$$e^{-iHt} |\nu_i; g\rangle = \int d\mathbf{x} \nu_i^\dagger(\mathbf{x}, 0) |0\rangle \psi_{\nu_i}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A28})$$

$$|\bar{\nu}_i; g\rangle = \sum_s \int d\mathbf{p} g^{s*}(\mathbf{p}) |\bar{\nu}_i(\mathbf{p}, s)\rangle \quad (\text{A29})$$

$$= \int d\mathbf{x} \psi_{\bar{\nu}_i}^\dagger(x) \nu_i(x) |0\rangle, \quad (\text{A30})$$

$$\psi_{\bar{\nu}_i}(x) \equiv \sum_s \int d\mathbf{p} g^s(\mathbf{p}) \frac{v_i^s(x; \mathbf{p})}{\sqrt{2E_i}}, \quad (\text{A31})$$

$$e^{-iHt} |\bar{\nu}_i; g\rangle = \int d\mathbf{x} \psi_{\bar{\nu}_i}^\dagger(\mathbf{x}, t) \nu_i(\mathbf{x}, 0) |0\rangle. \quad (\text{A32})$$

APPENDIX B: DECOMPOSITION WITH RESPECT TO TWO BASES

It is possible to decompose a given spinorial function $\psi(\mathbf{x})$ in terms of bases depending on different masses m_1 and m_2 . Equating

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2E_i} [u_i^s(\mathbf{x}; \mathbf{p}) g_i^{(+)}(\mathbf{p}, s) + v_i^s(\mathbf{x}; \mathbf{p}) g_i^{(-)}(\mathbf{p}, s)], \\ i &= 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

the expansion coefficients can be obtained:

$$g_i^{(+)}(\mathbf{p}, s) = \int d\mathbf{x} u_i^{s\dagger}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) \psi(\mathbf{x}), \quad (\text{B2})$$

$$g_i^{(-)}(\mathbf{p}, s) = \int d\mathbf{x} v_i^{s\dagger}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) \psi(\mathbf{x}). \quad (\text{B3})$$

From Eq. (B3) we see that imposing the conditions

$$g_1^{(-)}(\mathbf{p}, s) = v_1^{s\dagger}(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(-\mathbf{p}) = 0, \quad (\text{B4})$$

$$g_2^{(-)}(\mathbf{p}, s) = v_2^{s\dagger}(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(-\mathbf{p}) = 0, \quad (\text{B5})$$

for all \mathbf{p} , leads to the equivalent conditions

$$[(m_1 + E_2) - (m_2 + E_2)] v_0^{s\dagger} \tilde{\psi}(-\mathbf{p}) = 0, \quad s = 1, 2, \quad (\text{B6})$$

$$\left[\frac{1}{m_1 + E_2} - \frac{1}{m_2 + E_2} \right] v_0^{s\dagger} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \tilde{\psi}(-\mathbf{p}) = 0, \quad s = 1, 2, \quad (\text{B7})$$

where the properties of Eq. (A10) and $\gamma_0 v_0^s = -v_0^s$ were used. In case $m_1 \neq m_2$, we can use the decomposition $\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \tilde{\psi}_+(\mathbf{p}) + \tilde{\psi}_-(\mathbf{p})$, where $\tilde{\psi}_\pm(\mathbf{p}) = (1 \pm \gamma_0) \tilde{\psi}(\mathbf{p})/2$, and obtain from Eqs. (B6) and (B7) the conditions

$$v_0^{s\dagger} \tilde{\psi}_-(\mathbf{p}) = 0, \quad s = 1, 2, \quad (\text{B8})$$

$$u_0^{s\dagger} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \tilde{\psi}_+(\mathbf{p}) = 0, \quad s = 1, 2, \quad (\text{B9})$$

where the properties $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_0 \gamma_5 \boldsymbol{\sigma}$ and $u_0^s = \gamma_5 v_0^s$ were used in Eq. (B9). Equations (B8) and (B9) are only satisfied if $\tilde{\psi}_+(\mathbf{p}) = \tilde{\psi}_-(\mathbf{p}) = 0$, since $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ has only non-null eigenvalues and it commutes with γ_0 . It is easier to reach this conclusion in the helicity basis $\{u_0^{(\pm)}, v_0^{(\pm)}\}$ characterized by $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_0^{(\pm)} = \pm |\mathbf{p}| u_0^{(\pm)}$, but the result is basis independent.

APPENDIX C: INTEGRALS

Splitting the Feynman propagator into positive and negative frequency parts $iS_F(x) = iS^{(+)}(x) + iS^{(-)}(x)$, the following integrals give us

$$\int dt e^{i\omega t} iS^{(+)}(\mathbf{r}, t; m) = (-i) \frac{e^{ik_\omega r}}{4\pi r} [(\omega\gamma_0 - k_\omega(\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + m]\theta(\omega - m) \quad (C1)$$

$$\int dt e^{i\omega t} iS^{(-)}(\mathbf{r}, t; m) = (-i) \frac{e^{ik_\omega r}}{4\pi r} [(\omega\gamma_0 - k_\omega(\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + m]\theta(-\omega - m), \quad (C2)$$

where $k_\omega = \sqrt{\omega^2 - m^2}$, $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, the conditions $mr, k_\omega r \gg 1$ were assumed, and terms behaving as $1/r^2$ were neglected.

To illustrate the calculations, Eq. (C1) is obtained by

$$\int dt e^{i\omega t} iS^{(+)}(\mathbf{r}, t; m) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2E(\mathbf{p})} \times \frac{i(E(\mathbf{p})\gamma_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m)}{\omega - E(\mathbf{p}) + i\epsilon} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad (C3)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{-i}{2r} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p}{E(p)} \left\{ \sin pr \frac{E(p)\gamma_0 + m}{E(p) - \omega - i\epsilon} + \left[\cos pr - \frac{\sin pr}{pr} \right] \frac{ip(\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\gamma})}{E(p) - \omega - i\epsilon} \right\}. \quad (C4)$$

In Eq. (C3) the following identity is used:

$$\int_0^{\infty} dt e^{\pm iEt} = \frac{\pm i}{E \pm i\epsilon}. \quad (C5)$$

To get to the result of Eq. (C1) it is necessary to split the functions $\sin pr$ and $\cos pr$ in Eq. (C4) into exponentials and, for the e^{ipr} part, integrate along a closed path formed by a half semicircle in the upper-half complex plane going round the branching line $[im, i\infty)$ (for the e^{-ipr} part take the path reflected by the line defined by $\text{Re}z = 0$). The contribution from the paths beside the branching line yields a function which decreases more rapidly than e^{-mr} and it is negligible for $mr \gg 1$. The contributions for $-m < \omega < m$ give a function with dependence $e^{-|k_\omega|r}$ which is also negligible for large separations r .

-
- [1] R. J. Davis, D. S. Harmer, and K. C. Hoffman, Phys. Rev. Lett. **20**, 1205 (1968); S. Fukuda *et al.* (Super-Kamiokande Collaboration), Phys. Rev. Lett. **86**, 5656 (2001); Q. R. Ahmad *et al.* (SNO Collaboration), Phys. Rev. Lett. **87**, 071301 (2001); **89**, 011301 (2002); K. Eguchi *et al.* (KamLAND Collaboration), Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003); M. H. Ahn *et al.* (K2K Collaboration), Phys. Rev. Lett. **90**, 041801 (2003).
- [2] A. Y. Smirnov, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 1180 (2004).
- [3] M. Blasone and G. Vitiello, Ann. Phys. (N.Y.) **244**, 283 (1995); **249**, 363(E) (1996).
- [4] M. Blasone and J. S. Palmer, Phys. Rev. D **69**, 057301 (2004).
- [5] B. Pontecorvo, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33**, 549 (1957) [Sov. Phys. JETP **6**, 429 (1957)]; Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962); S. M. Bilenyk and B. Pontecorvo, Phys. Rep. **41**, 225 (1978).
- [6] K. Hagiwara *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
- [7] B. Kayser, Phys. Rev. D **24**, 110 (1981).
- [8] C. Giunti, C. W. Kim, and U. W. Lee, Phys. Rev. D **44**, 3635 (1991).
- [9] S. De Leo, C. C. Nishi, and P. P. Rotelli, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 677 (2004).
- [10] M. Zralek, Acta Phys. Pol. B **29**, 3925 (1998).
- [11] K. Kiers and N. Weiss, Phys. Rev. D **57**, 3091 (1998).
- [12] C. Giunti and C. W. Kim, Phys. Rev. D **58**, 017301 (1998).
- [13] J. Rich, Phys. Rev. D **48**, 4318 (1993).
- [14] J. H. Field, Eur. Phys. J. C **30**, 305 (2003).
- [15] C. Giunti, C. W. Kim, J. A. Lee, and U. W. Lee, Phys. Rev. D **48**, 4310 (1993).
- [16] J. E. Campagne, Phys. Lett. B **400**, 135 (1997).
- [17] See, for a review, M. Beuthe, Phys. Rep. **375**, 105 (2003).
- [18] I. Y. Kobzarev, B. V. Martemyanov, L. B. Okun, and M. G. Shchepkin, Yad. Fiz. **35**, 1210 (1982) [Sov. J. Nucl. Phys. **35**, 708 (1982)].
- [19] W. Grimus and P. Stockinger, Phys. Rev. D **54**, 3414 (1996); W. Grimus, P. Stockinger, and S. Mohanty, Phys. Rev. D **59**, 013011 (1999).
- [20] A. D. Dolgov, L. B. Okun, M. V. Rotaev, and M. G. Shchepkin, hep-ph/0407189; A. D. Dolgov, O. V. Lychkovskiy, A. A. Mamonov, L. B. Okun, M. V. Rotaev, and M. G. Shchepkin, Nucl. Phys. **B729**, 79 (2005).
- [21] C. Y. Cardall, Phys. Rev. D **61**, 073006 (2000).
- [22] A. E. Bernardini and S. De Leo, Eur. Phys. J. C **37**, 471 (2004).
- [23] A. E. Bernardini and S. De Leo, Phys. Rev. D **71**, 076008 (2005).
- [24] H. Feshbach and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **30**, 24 (1958); S. Sakata and M. Taketani, Proc. Phys. Math. Soc. Jpn. **22**, 757 (1940).
- [25] M. Dvornikov, Phys. Lett. B **610**, 262 (2005).
- [26] R. N. Mohapatra and P. B. Pal, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, Lecture Notes in Physics (World Scientific, Singapore, 1991), Vol. 41, p. 1.
- [27] S. De Leo and P. Rotelli, Int. J. Theor. Phys. **37**, 2193

- (1998).
- [28] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980), p. 60.
- [29] L.L. Foldy and S.A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* **78**, 29 (1950).
- [30] B. Thaller, *The Dirac Equation* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [31] The charge here is a global U(1) charge which is conserved for $n = 1, 2$ and does not mean electric charge. Obviously the flavor charges $\alpha = e, \mu$, introduced by mixing, depend on time and quantifies the oscillation, as in Eq. (31).
- [32] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory* (Wiley, New York, 1969), pp. 27–48.
- [33] C. Giunti, *J. High Energy Phys.* 11 (2002) 017.
- [34] M. Blasone and G. Vitiello, *Phys. Rev. D* **60**, 111302(R) (1999); M. Blasone, P. Jizba, and G. Vitiello, hep-ph/0308009.
- [35] S. Weinberg, *Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995), Vol. I, Chap. 4.

Apêndice G

Derivação simples de identidades gerais do tipo Fierz

Este trabalho foi publicado como [128]: C. C. Nishi, “Simple derivation of general Fierz-type identities,” *Am. J. Phys.* **73**, 1160 (2005) [arXiv:hep-ph/0412245].

Errata: Depois da Eq. (28), o primeiro parágrafo que começa com “Then, defining a basis ...” deve ser substituído por

Then, defining a basis $\{\Gamma_A\}$ dual to Eq. (24) as the respective gamma matrices with space-time indices lowered by Minkowski metric and the position of γ_5 interchanged ($\gamma_5\gamma^\mu \rightarrow \gamma_\mu\gamma_5$),¹⁴ the orthogonality relation holds:

Simple derivation of general Fierz-type identities

C. C. Nishi^{a)}

Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, Rua Pamplona 145, 01405-900, São Paulo, SP, Brazil

(Received 17 February 2005; accepted 26 August 2005)

General Fierz-type identities are examined and their well-known connection with completeness relations in matrix vector spaces is shown. In particular, I derive the chiral Fierz identities in a simple and systematic way by using a chiral basis for the complex 4×4 matrices. Other completeness relations for the fundamental representations of $SU(N)$ algebras can be extracted using the same reasoning. © 2005 American Association of Physics Teachers.

[DOI: 10.1119/1.2074087]

I. INTRODUCTION

The Fierz identities¹ are frequently used in particle physics to analyze four-fermion operators² such as current-current operators. These reordering identities are used to write a product of two Dirac bilinears³ as a linear combination of other products of bilinears with the four constituent Dirac spinors in a different order. Because Fierz identities relate Dirac bilinears, which are objects with well defined transformation properties under the Lorentz group, and Dirac gamma matrices form a representation of the Lorentz group generators, it is not surprising that Fierz identities imply the existence of a basis of four-vectors formed by Dirac bilinears and guarantee its orthogonality and completeness properties.⁴ The converse is also possible, that is, recovering the spinor from that basis, which reveals the equivalence between spinor and tensorial representation of various quantities.

Fierz identities are only a particular set of matrix identities, valid for the Dirac bilinears which span the space of 4×4 complex matrices. General Fierz-type identities can be found for any $N \times N$ real or complex square matrices. The primary aim of this article is to show that any Fierz-type relation can be deduced using just a few ingredients such as the notion of a basis in a vector space and its properties of orthogonality and completeness. The relevant vector space in this case is the vector space of square matrices. For such a vector space, a basis and the orthogonality property between its elements can be defined through an inner product. These ideas are explained in detail in Sec. II for general square matrix vector spaces. Some particularly useful examples involving Pauli matrices [SU(2) algebra], Gell-Mann matrices [SU(3) algebra], and fundamental representations of general SU(N) algebras are given.

As a particular nontrivial application of these ideas, we will find a straightforward way to deduce the chiral Fierz identities, that is, Fierz identities involving bilinears containing left/right chiral projectors. One way to obtain the chiral Fierz identities is to use the original Fierz identities; one can find very general Fierz identities for usual bilinear in Ref. 4. However, this procedure may become quite lengthy because it requires expanding the left/right projected bilinears in terms of the usual bilinears, performing Fierz reorderings, and then rewriting them as projected bilinears. Such an approach was adopted in Ref. 5, but will not be pursued here. Instead, the chiral Fierz identities will be deduced by rederiving the Fierz identities using appropriate left/right projected bilinears as a basis (Sec. IV). The simple form of certain chiral Fierz identities is already an indication that a much simpler procedure should exist to derive them.

To exemplify the practical importance of chiral Fierz identities, I will show a situation where the reordering permitted by chiral Fierz identities can help us to better understand and more simply describe a physical system. The obvious area where the chiral Fierz identities can be important is the physics involving the weak interaction, which is a mainly left-handed interaction. The particular physical system concerns the neutrinos propagating through ordinary matter. Because ordinary matter contains electrons but is absent of muons and taus, only the electron neutrinos interact with the electrons in matter through the charged-current effective interaction Lagrangian⁶

$$\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha L \psi_{\nu_e}(x) \bar{\psi}_{\nu_e}(x) \gamma_\alpha L \psi_e(x), \quad (1)$$

where ψ_e, ψ_{ν_e} are the fields for the electron and the electron neutrino, respectively, and $L = (1 - \gamma_5)/2$ is the projector for left chirality. Using a chiral Fierz identity we can rewrite Eq. (1) in the form

$$\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{\nu_e}(x) \gamma^\alpha L \psi_{\nu_e}(x) \bar{\psi}_e(x) \gamma_\alpha L \psi_e(x). \quad (2)$$

This reordered form enables us to describe the influence of nonrelativistic electrons in matter by their average density $2 \langle \bar{\psi}_e(x) \gamma_\alpha L \psi_e(x) \rangle \sim \delta_{\alpha 0} n_e$. Such a term leads to an effective interaction acting on electron neutrinos that is different from the interactions acting on other types of neutrinos. Ultimately, it leads to a significant modification of the description of neutrino oscillations,⁶ the phenomenon responsible for the missing solar neutrino problem.⁷

Before we get into the details, let us consider the difference between the expressions in Eqs. (1) and (2) to understand better the nonintuitive nature of the Fierz identity. The spinor fields ψ_e and ψ_{ν_e} can be written as complex 4×1 matrices, while $\bar{\psi}_e$ and $\bar{\psi}_{\nu_e}$ are complex 1×4 matrices. The factors between them are 4×4 matrices and the result is a scalar. In Eq. (1), there is a 4×4 matrix between $\bar{\psi}_e$ and ψ_{ν_e} and another between $\bar{\psi}_{\nu_e}$ and ψ_e for each $\alpha = 0, 1, 2, 3$. What the Fierz identities assure you is that any expression of the form $\bar{\psi}_1 A \psi_2 \bar{\psi}_3 B \psi_4$ is equal to $\bar{\psi}_1 C \psi_4 \bar{\psi}_3 D \psi_2$ or a sum of similar terms, with $A, B \neq C, D$ in general. Amazingly, the same combination of matrices that enters into Eq. (1) also enters into Eq. (2) as a consequence of a Fierz identity.

II. MATRIX VECTOR SPACES AND COMPLETENESS RELATIONS

A vector space V is a set of elements endowed with two operations:⁸ A sum between elements and a multiplication by numbers (elements of a *ring*, in mathematical language) such as the real and complex numbers. This vector space is required to be closed under such operations.⁹ The usual N -dimensional real space, \mathbb{R}^N , and its complex extension, \mathbb{C}^N , are examples of vector spaces.

As is well known, any element of a vector space can be expanded in terms of a basis $\{e_i\}$, a set of $N=\dim V$ elements. In addition, the vector space can be equipped with an inner product (\cdot, \cdot) that defines the notion of norm and orthogonality. By using such an inner product, an orthonormal basis $\{e_i\}$ can be defined by

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}. \quad (3)$$

The canonical (column vector) representation for the orthonormal basis is

$$(e_i)_j = \delta_{ij}, \quad (4)$$

where the index j outside the parenthesis is the vector index. In matrix notation the orthogonality relation (3) can be written as

$$e_i^\top e_j = \delta_{ij}, \quad (5)$$

where \top denotes the transpose. In canonical form, the completeness relation

$$\sum_i^N e_i e_i^\top = \mathbf{1}, \quad (6)$$

is obvious. Also, Eq. (6) is invariant under an orthogonal $O(N)$ [unitary $U(N)$] transformation of a basis for $V = \mathbb{R}^N(\mathbb{C}^N)$.

Once the properties of vector spaces are given, it is easy to show that the set of all $N \times N$ square matrices over the reals, $M_N(\mathbb{R})$, or over the complex numbers, $M_N(\mathbb{C})$, form a N^2 dimensional vector space.¹⁰ In these vector spaces a canonical basis $\{e^{ij}\}$ is given by the matrices

$$(e^{ij})_{kl} = \delta_k^i \delta_l^j \quad (i, j, k, l = 1, \dots, N), \quad (7)$$

and hence, any $N \times N$ matrix can be expanded as

$$M = M_{ij} e^{ij}, \quad (8)$$

where the expansion coefficients $M_{ij} = (M)_{ij}$ are the elements of the matrix M .

In $M_N(\mathbb{R})$ we can define the (positive definite) inner product

$$(A, B) \equiv \text{Tr}[AB^\top], \quad (9)$$

for which the canonical basis satisfies

$$\text{Tr}[e^{ij} e^{kl \top}] = \delta^k i \delta^l j. \quad (10)$$

For $M_N(\mathbb{C})$ the transpose operation $(\cdot)^\top$ has to be replaced by the hermitian conjugation operation $(\cdot)^\dagger$.

An equivalent approach is to define a bilinear function on $M_N(\mathbb{R})$ without the positive definiteness requirement of an inner product. Thus, instead of defining Eq. (9), we can discard the transpose operation in the definition and regard simply the trace of the product as the relevant bilinear function.

The missing transpose operation can be transferred to the definition of a dual basis $\{e_{ij}\}$: $e_{ij} \equiv e^{ji} = e^{ij \top}$. Then the dual basis is the orthogonal counterpart of the basis $\{e^{ij}\}$ through the trace bilinear. An equivalent way is to regard the trace bilinear between two elements of $\{e^{ij}\}$ as defining a metric that can be used to lower and raise indices and to interchange the basis with its dual; an analogous construction is found in special relativity when contravariant and covariant four-vectors are defined. An inner product defines, with an appropriate basis, a metric that is the identity matrix. In general there can be nondiagonal or nonpositive definite metrics. This approach will be used to derive the Fierz identities in Sec. III and chiral Fierz identities in Sec. IV.

We use this dual basis to express the expansion coefficient in Eq. (8) as

$$M_{ij} = \text{Tr}[M e_{ij}]. \quad (11)$$

If we substitute Eq. (11) into Eq. (8) and take the respective elements of the matrix, we obtain the trivial relation

$$\delta_{km} \delta_{nl} = (e_{ij})_{kl} (e^{ij})_{nm}, \quad (12)$$

where the summation convention of repeated indices is used here and in the following. This relation follows directly from Eq. (4) and is a completeness relation analogous to Eq. (6). Equation (12) represents an identity in the space of general linear transformations over $M_N(\mathbb{R})$. This entire discussion is also valid for $M_N(\mathbb{C})$ if one extends the ring from \mathbb{R} to \mathbb{C} . Because any linear transformation over $M_N(\mathbb{R})$ can be given as a linear combination of transformations of the form

$$M \rightarrow (A \otimes B)M \equiv AMB^\top = (A)_{ij}(B)_{lk}(M)_{jk} e^{il}, \quad (13)$$

Eq. (12) implies that

$$(e_{ij} \otimes e^{ij})M = (e^{ij} \otimes e_{ij})M = M. \quad (14)$$

Although trivial with this choice of basis, a completeness relation like Eq. (12) is all that is needed to deduce Fierz-type identities.

To obtain nontrivial relations, let us take the example of $SU(2)$ and $SU(3)$ algebras in the fundamental representation. The commonly used representations for these algebras are the Pauli matrices $\{\sigma_i\}$ and the Gell-Mann matrices $\{\lambda_a\}$.^{11,12} They form vector spaces and satisfy the orthogonality relations

$$\text{Tr}[\sigma_i \sigma_j] = 2\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (15)$$

$$\text{Tr}[\lambda_a \lambda_b] = 2\delta_{ab} \quad (a, b = 1, \dots, 8). \quad (16)$$

Because they are already orthogonal and are Hermitian matrices, there is no need to define a dual basis. However, to span $M_2(\mathbb{C})$ and $M_3(\mathbb{C})$ the respective identity matrices are needed, because N^2 basis vectors are required and the Pauli and Gell-Mann matrices are traceless. Then the set $\{\mathbf{1}, \sigma_i\}$ spans $M_2(\mathbb{C})$, which means any 2×2 complex matrix can be expanded in terms of

$$X = X_0 \mathbf{1} + X_i \sigma_i, \quad \sigma^j = \sigma_j, \quad (17)$$

where

$$X_0 = \frac{1}{2} \text{Tr}[X], \quad X_i = \frac{1}{2} \text{Tr}[X \sigma_i]. \quad (18)$$

We substitute Eq. (18) into Eq. (17) and take the general elements

$$(X)_{ij} = \frac{1}{2}(X)_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{2}(X)_{lk}(\sigma_m)_{kl}(\sigma_m)_{ij}, \quad (19)$$

and obtain from the coefficients of $(X)_{lk}$, after properly inserting Kronecker deltas, the completeness relation

$$\delta_{il}\delta_{kj} = \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}(\sigma_m)_{ij}(\sigma_m)_{kl}. \quad (20)$$

Equation (20) is the identity used to deduce the Fierz identities to Weyl spinors: $(\sigma_\mu)_{ij}(\tilde{\sigma}^\mu)_{kl} = 2\delta_{il}\delta_{kj}$, where $\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma})$, and $\tilde{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})$; the lowering and raising of μ indices follows the Minkowski metric.

For the Gell-Mann matrices we have similarly,

$$\frac{1}{2}(\lambda_a)_{ij}(\lambda_a)_{kl} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} = \delta_{il}\delta_{kj}. \quad (21)$$

For any fundamental representation of $SU(N)$ algebra $\{T_a\}$ satisfying $\text{Tr}[T_a T_b] = C\delta_{ab}$, we have the completeness relation

$$\frac{1}{C}(T_a)_{ij}(T_a)_{kl} + \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl} = \delta_{il}\delta_{kj}. \quad (22)$$

For the $O(N)$ groups there is no simple relation similar to Eq. (22) because the algebra is formed by $N \times N$ antisymmetric matrices, and thus all symmetric matrices are needed to span $M_N(\mathbb{R})$.

Before introducing Dirac matrices to deduce the Fierz identities, it is better to introduce a clearer notation due to Takahashi,⁴ where we replace the matrix indices by parentheses $()$ and brackets $[]$, such that each parenthesis/bracket represents a different index in an unambiguous way. For example, using this notation the relation (22) reads

$$\frac{1}{C}(T_a)[T_a] + \frac{1}{N}([])([]) = ([]), \quad (23)$$

where the blank entry means the identity matrix. This notation clearly shows the reordering property.

III. FIERZ IDENTITIES

The starting point to derive the usual Fierz identities is the orthogonality relation among the 16 Dirac bilinears¹³ that span $M_4(\mathbb{C})$ over \mathbb{C} . The 16 Dirac bilinears are usually classified into distinct classes according to their properties under Lorentz transformations⁷ as

$$\{\Gamma^A\} = \{\mathbf{1}, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma_5 \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}\} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \quad (24)$$

where $\mu < \nu$ in $\sigma^{\mu\nu}$ to avoid redundancy. Here the convention used by Itzykson and Zuber¹⁵ is employed for the gamma matrices:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (25)$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (26)$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (27)$$

$$\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}, \quad (28)$$

where $\epsilon^{0123} = 1 = -\epsilon_{0123}$ and $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ is the Minkowski metric.

Then, defining a basis $\{\Gamma_A\}$ dual to Eq. (24) as the respective gamma matrices with space-time indices lowered by Minkowski metric,¹⁴ the orthogonality relation holds:

$$\text{Tr}[\Gamma_A \Gamma^B] = 4\delta_A^B. \quad (29)$$

This relation allow us to expand any complex 4×4 matrix X in terms of the basis (24) as

$$X = X_A \Gamma^A, \quad X_A = \frac{1}{4} \text{Tr}[X \Gamma_A]. \quad (30)$$

We combine Eqs. (29) and (30), extract each element of the matrix, and find a completeness relation analogous to Eq. (23):

$$([])([]) = \frac{1}{4}(\Gamma_A)(\Gamma^A) = \frac{1}{4}(\Gamma^A)(\Gamma_A). \quad (31)$$

This identity is sufficient to reproduce all possible Fierz identities by appropriately multiplying identity matrices by general matrices X, Y as

$$\begin{aligned} (X)(Y) &= (X\mathbf{1})(\mathbf{1}Y) = \frac{1}{4}(X\Gamma_C Y)(\Gamma^C) \\ &= \frac{1}{4^2} \text{Tr}[X\Gamma_C Y\Gamma_D](\Gamma^D)(\Gamma^C). \end{aligned} \quad (32)$$

In particular, if $X = \Gamma^A$ and $Y = \Gamma^B$, Eq. (32) leads to the Fierz identities

$$(\Gamma^A)(\Gamma^B) = \frac{1}{4^2} \text{Tr}[\Gamma^A \Gamma_C \Gamma^B \Gamma_D](\Gamma^D)(\Gamma^C). \quad (33)$$

The only remaining task is to calculate the expansion coefficients which are straightforward gamma matrix traces.¹⁵ The usual textbook Fierz identities (see, for example, Ref. 11, p. 160) can be found when Γ^A and Γ^B in Eq. (33) are chosen to form scalar quantities (under the full Lorentz transformations, including parity) such as $(\gamma_\mu)(\gamma^\mu)$ or Eq. (31) itself. An additional minus sign arises in the Fierz identities (33) when we insert anticommuting fermion fields instead of numerical spinors.

IV. CHIRAL FIERZ IDENTITIES

The Fierz identities derived in Sec. III are not quite appropriate when treating chirally projected combinations such as

$$(R\gamma^\mu)(L\gamma_\mu), \quad (34)$$

where the two chiral projectors are $R = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5)$ and $L = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5)$ because the expansion (32) applied to Eq. (34) still have some non-null coefficients to be calculated. For nonscalar combinations such as $(R\sigma^{\mu\nu})(R\gamma_\nu)$, the number of coefficients to be calculated may become large. Moreover, the relatively simple form of certain chiral Fierz identities such as the form invariants¹⁶

$$(R\gamma^\mu)(R\gamma_\mu) = -(R\gamma^\mu)(L\gamma_\mu), \quad (35a)$$

$$(L\gamma^\mu)(L\gamma_\mu) = -(L\gamma^\mu)(R\gamma_\mu), \quad (35b)$$

suggests a simpler procedure should exist.

A better way to perform Fierz transformations for combinations such as Eq. (34) consists of rederiving Fierz identities using a chiral basis

$$\{\Gamma^A\} = \{R, L, R\gamma^\mu, L\gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}\} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \quad (36)$$

where $\mu < \nu$, and its respective dual basis

$$\{\Gamma_A\} = \{R, L, L\gamma_\mu, R\gamma_\mu, \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \quad (37)$$

where $\mu < \nu$. Notice that because of the anticommuting nature of γ^μ with γ_5 and projector properties, the dual of $R\gamma^\mu$ is $L\gamma_\mu$. The orthogonality property between the bases (36) and (37) is

$$\text{Tr}[\Gamma_A \Gamma^B] = 2\delta_A^B, \quad (38)$$

which implies the completeness relation

$$\begin{aligned} (\) [] &= \frac{1}{2}(\Gamma_A [\Gamma^A] \\ &= \frac{1}{2}\{(R[R][R] + (L[L][L] + (R\gamma^\mu)[L\gamma_\mu] + (L\gamma^\mu)[R\gamma_\mu] \\ &\quad + (\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu})[\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}])\}, \end{aligned} \quad (39)$$

where the extra 1/2 in the $\sigma^{\mu\nu}$ expansion is inserted to account for the double counting due to the implicit μ, ν summation over all values and $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$. Such a completeness relation directly leads to the chiral Fierz identities

$$(\Gamma^A)[\Gamma^B] = \frac{1}{4} \text{Tr}[\Gamma^A \Gamma_C \Gamma^B \Gamma_D][\Gamma^D][\Gamma^C]. \quad (40)$$

To illustrate the usefulness of the chiral Fierz identities, we apply them to calculate the Fierz transform of the combination (34),

$$\begin{aligned} (R\gamma^\mu)[L\gamma_\mu] &= \frac{1}{4} \text{Tr}[R\gamma^\mu \Gamma_C L\gamma_\mu \Gamma_D][\Gamma^D][\Gamma^C] \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr}[R\gamma^\mu L L \gamma_\mu R](R)[L] = 2(R)[L], \end{aligned} \quad (41)$$

where the gamma matrix properties¹⁵ $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \times \mathbf{1}$, $\gamma^\mu \sigma^{\alpha\beta} \gamma_\mu = 0$, and the trace cyclic property were used. More difficult examples can be worked out, for instance,

$$\begin{aligned} (R\sigma_{\mu\nu})[R\gamma^\nu] &= \frac{1}{4} \text{Tr}[R\sigma_{\mu\nu} R R \gamma^\nu L \gamma_\rho](R\gamma^\rho)[R] \\ &\quad + \frac{1}{4} \text{Tr}[R\sigma_{\mu\nu} \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta} R \gamma^\nu L \gamma_\rho](R\gamma^\rho)[\frac{1}{2}\sigma^{\alpha\beta}] \\ &= \frac{3}{2}i(R\gamma_\mu)[R] + \frac{1}{2}(R\gamma^\nu)[R\sigma_{\nu\mu}]. \end{aligned} \quad (42)$$

Some labor can be saved by using the trace relation

$$\text{Tr}[R\sigma_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta}] = 2(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}), \quad (43a)$$

$$\text{Tr}[L\sigma_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta}] = 2(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}). \quad (43b)$$

One can check the coefficients for the cases $(\mu\nu) = (\alpha\beta)$ and $(\mu\nu\alpha\beta) = (0123)$.

Moreover, the combination of chiral Fierz identities (40) with other completeness relations such as Eq. (21) can be used to decompose four-quark operators carrying other quantum numbers like SU(3) color.²

The simplicity arises because only a few expansion coefficients are nonzero due to the projector properties of R/L and the commuting or anticommuting character of the bilinears with γ_5 . Equivalently, R/L projectors reduce the spinor vector space and the resulting projected spinors have to be the same on the two sides of the chiral Fierz identities.

V. SUMMARY

The well-known result that the Fierz identities are a consequence of the completeness of the Dirac bilinears as a basis

spanning the complex 4×4 complex matrices was reviewed. Recognizing that bases other than Dirac bilinears are equally possible permitted us to develop a better procedure to calculate the chiral Fierz identities by choosing chirally left/right projected matrices as a basis. The generality of the procedure was stressed and illustrated using the canonical basis of matrix vector spaces, which led to trivial relations in this case.

The usefulness of Fierz-type relations depends on the particular choice of basis and how nearly complete is the set of matrix objects (representations) of interest. The same unified framework was used to derive completeness relations for the generators of the SU(N) group in the fundamental representation. Other matrix representations or other algebras can be analyzed as well, although they may not be complete and hence the corresponding Fierz-type identities may not be as useful as those presented here.

ACKNOWLEDGMENT

This work was supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

^{a)}Electronic address: ccnishi@ift.unesp.br

¹M. Fierz, "Zur Fermischen Theorie des β -Zerfalls," Z. Phys. **104**, 553–565 (1937).

²J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge University Press, 1994), pp. 217 and 221.

³J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1965).

⁴Y. Takahashi, "The Fierz identities," in *Progress in Quantum Field Theory*, edited by H. Ezawa and S. Kamefuchi (North-Holland, Amsterdam, 1986), p. 121.

⁵J. F. Nieves and P. B. Pal, "Generalized Fierz identities," Am. J. Phys. **72**, 1100–1108 (2004).

⁶R. Mohapatra and P. Pal, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics* (World Scientific, Singapore, 1991), pp. 165–70.

⁷The surprising implications and experimental evidences for neutrino oscillations can be found in W. C. Haxton and B. R. Holstein, "Neutrino physics," Am. J. Phys. **68**, 15–32 (2000); also W. C. Haxton and B. R. Holstein, "Neutrino physics: An update," Am. J. Phys. **72**, 18–24 (2004); see also M. C. Gonzalez-Garcia and Y. Nir, "Neutrino masses and mixing: Evidence and implications," Rev. Mod. Phys. **75**, 345–402 (2003).

⁸See any linear algebra book, for example, I. M. Gel'fand, *Lectures on Linear Algebra* (Interscience, New York, 1961).

⁹Any operation applied to an element in the vector space must result in another element of the vector space.

¹⁰ $M_N(\mathbb{C})$ may be considered as a $2N^2$ dimensional vector space if spanned by N^2 real matrices and N^2 purely complex matrices with real expansion coefficients only, that is, over the reals \mathbb{R} .

¹¹See C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980), p. 516, for an explicit representation of Gell-Mann matrices.

¹²The SU(2) and SU(3) generators are $\{\frac{1}{2}\sigma_j\}$ and $\{\frac{1}{2}\lambda_a\}$, respectively.

¹³I will denote as Dirac bilinears the proper bilinears containing the two spinors as well as the associated matrices alone, because the Fierz identities do not depend on the spinors involved.

¹⁴The lowering of space-time indices is equivalent to the hermitian conjugation operation.

¹⁵See Ref. 11, Appendix.

¹⁶These identities were used to get from Eq. (1) to Eq. (2) with a sign difference due to the anticommutation of fermion fields.

Referências

- [1] J. H. Christenson, J. W. Cronin and R. Turlay, “Evidence For The 2π Decay Of The K_2^0 Meson,” *Phys. Rev. Lett* **13** (1964) 138.
- [2] Veja, para referências, T. D. Lee, “New insights to old problems,” arXiv:hep-ph/0605017.
- [3] Os preconceitos teóricos da época, em relação à descoberta da violação de CP, são descritos nos seminários do prêmio Nobel de 1980: J. W. Cronin, “CP Symmetry Violation: The Search For Its Origin,” *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 373 [*Science* **212** (1981) 1221]; V. L. Fitch, “The Discovery Of Charge Conjugation Parity Asymmetry,” *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 367 [*Science* **212** (1981) 989]. http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1980/index.html.
- [4] M. Gell-Mann and A. Pais, “Behavior of neutral particles under charge conjugation”, *Phys. Rev.* **97** (1955) 1387.
- [5] N. Cabibbo, “Unitary Symmetry And Leptonic Decays,” *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 531.
- [6] M. Kobayashi and T. Maskawa, “CP Violation In The Renormalizable Theory Of Weak Interaction,” *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.
- [7] Para uma revisão, veja M. Sozzi, *Kaon Physics*, lectures delivered at “PSI Zuoz Summer School on Particle Physics – Effective Theories in Particle Physics” (July 16 - 22, 2006) [<http://ltpth.web.psi.ch/zuoz2006/>].
- [8] Para uma revisão, veja U. Langenegger, *B Physics and Quarkonia*, lectures delivered at “PSI Zuoz Summer School on Particle Physics – Effective Theories in Particle Physics” (July 16 - 22, 2006, Zuoz - Switzerland) [<http://ltpth.web.psi.ch/zuoz2006/>].
- [9] B. Aubert *et al.*, [BABAR Collab.], *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 091801; K. Abe *et al.*, [Belle Collab.], *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 091802.
- [10] J. Charles *et al.* (The CKMfitter Group), *Eur. Phys. J.* **C41** (2005) 1 [arXiv:hep-ph/0406184].
- [11] S. Eidelman, *et al.* (Particle Data Group), *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **33** (2006) 1.

- [12] A. J. Buras, *Weak Hamiltonian, CP violation and rare decays*, Les Houches Lectures, to appear in “Probing the Standard Model of Particle Interactions”, F. David and R. Gupta, eds, Elsevier Science B.V. [arXiv:hep-ph/9806471]; *CP Violation and Rare Decays in the Standard Model and Beyond*, lectures at “ICTP – Summer School on Particle Physics” organized by A. Smirnov *et al.* (June 13 - 24, 2005, Trieste - Italy).
- [13] T. D. Lee, “A Theory Of Spontaneous T Violation,” *Phys. Rev. D* **8** (1973) 1226; “CP Nonconservation And Spontaneous Symmetry Breaking,” *Phys. Rep.* **9** (1974) 143.
- [14] S. L. Glashow and S. Weinberg, “Natural conservation laws for neutral currents,” *Phys. Rev. D* **15** (1977) 1958.
- [15] S. Weinberg, “Gauge Theory Of CP Violation,” *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 657.
- [16] G. C. Branco, “Spontaneous CP Nonconservation And Natural Flavor Conservation: A Minimal Model,” *Phys. Rev. D* **22** (1980) 2901.
- [17] F. J. Botella, G. C. Branco, M. Nebot and M. N. Rebelo, “New physics and evidence for a complex CKM,” *Nucl. Phys. B* **725** (2005) 155 [arXiv:hep-ph/0502133].
- [18] G. C. Branco and R. N. Mohapatra, “Complex CKM from spontaneous CP violation without flavor changing neutral current,” arXiv:hep-ph/0607271.
- [19] Y.-L. Wu and L. Wolfenstein, “Sources of CP violation in the two Higgs doublet model,” *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 1762; J. Liu and L. Wolfenstein, “Spontaneous CP Violation In The SU(2)-L X U(1)-Y Model With Two Higgs Doublets,” *Nucl. Phys. B* **289** (1987) 1.
- [20] J. F. Gunion and H. E. Haber, “Conditions for CP-violation in the general two-Higgs-doublet model,” *Phys. Rev. D* **72** (2005) 095002 [arXiv:hep-ph/0506227].
- [21] M. Carena and H. E. Haber, “Higgs boson theory and phenomenology. ((V)),” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **50** (2003) 63 [arXiv:hep-ph/0208209].
- [22] W. Grimus and M. N. Rebelo, “Automorphisms in gauge theories and the definition of CP and P,” *Phys. Rept.* **281** (1997) 239 [arXiv:hep-ph/9506272].
- [23] M. B. Einhorn and J. Wudka, “CP violation in gauge theories,” *Phys. Rev. D* **63** (2001) 077901 [arXiv:hep-ph/0007285].
- [24] C. Jarlskog, “Commutator Of The Quark Mass Matrices In The Standard Electroweak Model And A Measure Of Maximal CP Violation,” *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 1039. Also, “Matrix Representation Of Symmetries In Flavor Space, Invariant Functions Of Mass Matrices And Applications,” *Phys.*

- Rev. D **35** (1987) 1685; I. Dunietz, O. W. Greenberg and D. d. Wu, “A Priori Definition Of Maximal CP Violation,” Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 2935; J. Bernabeu, G. C. Branco and M. Gronau, “CP Restrictions On Quark Mass Matrices,” Phys. Lett. B **169** (1986) 243.
- [25] C. Jarlskog, *CP Violation*, Advanced Series on Directions in High Energy Physics – vol.3, World Sci. (1989).
- [26] F. J. Botella and J. P. Silva, “Jarlskog-like invariants for theories with scalars and fermions,” Phys. Rev. D **51** (1995) 3870 [arXiv:hep-ph/9411288].
- [27] G. C. Branco and L. Lavoura, “On The Addition Of Vector Like Quarks To The Standard Model,” Nucl. Phys. B **278** (1986) 738; G. C. Branco, L. Lavoura and M. N. Rebelo, “Majorana Neutrinos And CP Violation In The Leptonic Sector,” Phys. Lett. B **180** (1986) 264.
- [28] G. C. Branco, “Spontaneous CP Violation In Theories With More Than Four Quarks,” Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 504.
- [29] L. Lavoura and J. P. Silva, “Fundamental CP violating quantities in a SU(2) x U(1) model with many Higgs doublets,” Phys. Rev. D **50** (1994) 4619 [arXiv:hep-ph/9404276].
- [30] C. C. Nishi, “CP violation conditions in N-Higgs-doublet potentials,” Phys. Rev. D **74** (2006) 036003 [arXiv:hep-ph/0605153].
- [31] I. P. Ivanov, “Two-Higgs-doublet model from the group-theoretic perspective,” Phys. Lett. B **632** (2006) 360 [arXiv:hep-ph/0507132].
- [32] S. Fukuda *et al.* [SuperKamiokande Collaboration], Phys. Lett. **B 539** (2002) 179; Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 3999; Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 5651.
- [33] Q. R. Ahmad *et al.* [SNO Collaboration], Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 011301; Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 071301.
- [34] K. Eguchi *et al.* [KamLAND Collaboration], Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 021802.
- [35] M. H. Ahn *et al.* [K2K Collaboration], Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 041801.
- [36] V. Barger, D. Marfatia and K. Whisnant, “Progress in the physics of massive neutrinos,” Int. J. Mod. Phys. E **12** (2003) 569 [arXiv:hep-ph/0308123].
- [37] A. Y. Smirnov, “Neutrino physics: Open theoretical questions,” Int. J. Mod. Phys. A **19** (2004) 1180 [arXiv:hep-ph/0311259].
- [38] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **6** (1957) 429 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33** (1957) 549]. S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, Phys. Rept. **41** (1978) 225.
- [39] L. Wolfenstein, “Neutrino oscillations in matter,” Phys. Rev. D **17** (1978) 2369; S. P. Mikheev and A. Y. Smirnov, “Resonance enhancement of oscillati-

- ons in matter and solar neutrino spectroscopy,” *Sov. J. Nucl. Phys.* **42** (1985) 913 [*Yad. Fiz.* **42** (1985) 1441].
- [40] A. Y. Smirnov, “Neutrino masses and mixing: Leptons versus quarks,” arXiv:hep-ph/0604213.
- [41] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28** (1962) 870.
- [42] H. Minakata, “Do neutrinos violate CP?,” arXiv:hep-ph/0604088.
- [43] Z. z. Xing, “Flavor mixing and CP violation of massive neutrinos,” *Int. J. Mod. Phys. A* **19** (2004) 1 [arXiv:hep-ph/0307359].
- [44] G. t’ Hooft, “Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies,” *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 8.
- [45] R. Mohapatra and P. Pal, *Neutrino Physics*, World Scientific, Singapore, 1991.
- [46] R. D. Peccei, “Neutrinos: Windows to new physics,” arXiv:hep-ph/0609203. To appear in the proceedings of 22nd International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics (Neutrino 2006), Santa Fe, New Mexico, 13-19 Jun 2006.
- [47] H. Murayama, “Theory of neutrino masses and mixings,” *Int. J. Mod. Phys. A* **17** (2002) 3403 [arXiv:hep-ph/0201022]. Also in *Rome 2001, Lepton and photon interactions at high energies* 495-512. Talk given at 20th International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies (LP 01), Rome, Italy, 23-28 Jul 2001.
- [48] R. N. Mohapatra and A. Y. Smirnov, “Neutrino mass and new physics,” arXiv:hep-ph/0603118.
- [49] M. Fukugita and T. Yanagida, “Baryogenesis Without Grand Unification,” *Phys. Lett. B* **174** (1986) 45.
- [50] Para uma revisão, veja A. Riotto, “Theories of baryogenesis,” arXiv:hep-ph/9807454. Talk given at ICTP Summer School in High-Energy Physics and Cosmology, Miramare, Trieste, Italy, 29 Jun - 17 Jul 1998. Published in *Trieste 1998, High energy physics and cosmology* 326-436.
- [51] J. Schechter and J. W. F. Valle, “Neutrino masses in $SU(2)\otimes U(1)$ theories,” *Phys. Rev. D* **22** (1980) 2227.
- [52] C. Athanassopoulos *et al.* [LSND Collaboration], *Phys. Rev. C* **54** (1996) 2685 [arXiv:nucl-ex/9605001]; *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 3082 [arXiv:nucl-ex/9605003]; A. Aguilar *et al.*, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 112007 [arXiv:nucl-ex/0104049].
- [53] B. Kayser, “On The Quantum Mechanics Of Neutrino Oscillation,” *Phys. Rev. D* **24** (1981) 110.

- [54] C. Giunti, C. W. Kim and U. W. Lee, “When do neutrinos really oscillate?: Quantum mechanics of neutrino oscillations,” *Phys. Rev. D* **44** (1991) 3635; “Comments on the weak states of neutrinos,” *Phys. Rev. D* **45** (1992) 2414.
- [55] M. Zralek, “From kaons to neutrinos: Quantum mechanics of particle oscillations,” *Acta Phys. Polon. B* **29** (1998) 3925 [arXiv:hep-ph/9810543].
- [56] K. Kiers and N. Weiss, “Neutrino oscillations in a model with a source and detector,” *Phys. Rev. D* **57** (1998) 3091 [arXiv:hep-ph/9710289].
- [57] C. Giunti and C. W. Kim, “Coherence of neutrino oscillations in the wave packet approach,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 017301 [arXiv:hep-ph/9711363].
- [58] J. Rich, “The Quantum mechanics of neutrino oscillations,” *Phys. Rev. D* **48** (1993) 4318.
- [59] S. De Leo, C. C. Nishi and P. P. Rotelli, “Quantum oscillation phenomena,” *Int. J. Mod. Phys. A* **19** (2004) 677-694 [arXiv:hep-ph/0208086].
- [60] A. E. Bernardini and S. De Leo, “Dirac spinors and flavor oscillations,” *Eur. Phys. J. C* **37** (2004) 471 [arXiv:hep-ph/0411153].
- [61] C. C. Nishi, “First quantized approaches to neutrino oscillations and second quantization,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 053013 [arXiv:hep-ph/0506109].
- [62] See, for a review, M. Beuthe, “Oscillations of neutrinos and mesons in quantum field theory,” *Phys. Rept.* **375** (2003) 105 [arXiv:hep-ph/0109119].
- [63] C. Giunti, “Neutrino wave packets in quantum field theory,” *JHEP* **0211** (2002) 017 [arXiv:hep-ph/0205014].
- [64] M. Blasone and G. Vitiello, *Ann. Phys.* **244** (1995) 283 [Erratum-ibid. **249** (1996) 363] [arXiv:hep-ph/9501263].
- [65] A. Sirlin, “Ten years of precision electroweak physics,” in *Proc. of the 19th Intl. Symp. on Photon and Lepton Interactions at High Energy LP99* ed. J.A. Jaros and M.E. Peskin, *Int. J. Mod. Phys. A* **15S1** (2000) 398 [eConf **C990809** (2000) 398] [arXiv:hep-ph/9912227].
- [66] G. C. Branco, L. Lavoura and J. P. Silva, *CP Violation* (Oxford Univ. Press, Oxford, England, 1999).
- [67] R. D. Peccei, “The Strong CP Problem and Axions,” arXiv:hep-ph/0607268.
- [68] Veja artigo de R. D. Peccei na Ref. [25].
- [69] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge University Press, 1994).
- [70] I. M. Gel’fand, *Lectures on Linear Algebra*, Interscience tracts in pure and applied mathematics 9, Interscience Pub. (1961).

- [71] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, “Weak interactions with lepton - hadron symmetry,” *Phys. Rev. D* **2** (1970) 1285.
- [72] L. Michel and L. Radicati, “The geometry of the octet,” *Ann. Inst. H. Poincaré* **18** (1973) 185.
- [73] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (John Wiley & Sons, New York, 1974).
- [74] Booklet of Particle Data Group [11].
- [75] G. C. Branco, lecture presented at V Latin American Symposium on High Energy Physics (SILAFEA), Lima, Peru, July 12–17, 2004.
- [76] J. C. Pati and A. Salam, “Lepton Number As The Fourth Color,” *Phys. Rev. D* **10** (1974) 275; R. N. Mohapatra and J. C. Pati, “Left-Right Gauge Symmetry And An ‘Isoconjugate’ Model Of CP Violation,” *Phys. Rev. D* **11** (1975) 566, 2558; G. Senjanovic and R. N. Mohapatra, “Exact Left-Right Symmetry And Spontaneous Violation Of Parity,” *Phys. Rev. D* **12** (1975) 1502.
- [77] Inami, T. and Lim, C. S, “Effects of Superheavy Quarks and Leptons in Low-Energy Weak Processes $K_L \rightarrow \mu\bar{\mu}$, $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\nu$ and $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$,” *Prog. Theo. Phys.*, **65** (1980) 297-314. **Erratum:** *ibid* **65** (1981) 1772.
- [78] W. Grimus, “Bell inequality and CP violation in the neutral kaon system,” *Phys. Lett. A* **289** (2001) 21. [arXiv:quant-ph/0107022].
- [79] W. Grimus, “The EPR-paradox in massive systems or about strange particles,” in *Quantum unspeakables* eds. R. A. Bertlmann and A. Zeilinger, Springer Verlag (2001) p. 163-181 [arXiv:quant-ph/0106167]. Conference in Commemoration of John Bell, Vienna, 2000.
- [80] G. Buchalla, “CP violation in K and B decays,” Talk given at 6th Conference on the Intersections of Particle and Nuclear Physics (CIPANP 97), Big Sky, MT, 27 May - 2 Jun 1997. In *Big Sky 1997, Intersections between particle and nuclear physics* 49-66 [arXiv:hep-ph/9707545].
- [81] B. Kayser, “CP Violation in the K and B systems,” Proceedings of the Summer School in High Energy Physics and Cosmology, ICTP, Trieste, June-July (1995); [arXiv:hep-ph/9702264].
- [82] E. de Rafael, “Chiral Lagrangians And Kaon CP Violation,” Lectures given at Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 94): CP Violation and the limits of the Standard Model, Boulder, CO, 29 May - 24 Jun 1994. Published in Boulder TASI 1994:0015-86 (QCD161:T45:1994) [arXiv:hep-ph/9502254].
- [83] M. S. Sozzi, “On the direct CP violation parameter epsilon’,” *Eur. Phys. J. C* **36** (2004) 37 [arXiv:hep-ph/0401176].

- [84] D. D. Wu, “Comments on the review of CP violation in the Particle Data Book,” *Mod. Phys. Lett. A* **13** (1998) 1413 [arXiv:hep-ph/9801315].
- [85] A. Buras, “Weak Hamiltonian, CP Violation and Rare Decays”, hep-ph/9806471.
- [86] D. London, “CP Violation in the B System: Measuring New-Physics Parameters,” *Int. J. Mod. Phys. A***19** (2004) 5463. [arXiv:hep-ph/0405241].
- [87] T. Appelquist and J. Carrazzone, “Infrared singularities and massive fields,” *Phys. Rev. D* **11** (1975) 364.
- [88] G. Buchala, A. J. Buras and M. K. Harlander, “The anatomy Of ϵ'/ϵ in the Standard Model,” *Nucl. Phys. B* **337** (1990) 313-362.
- [89] G. Buchalla, “CP violation in neutral kaon decays,” Invited talk at Symposium on Flavor Changing Neutral Currents: Present and Future Studies (FCNC 97), Santa Monica, CA, 19-21 Feb 1997. In *Santa Monica 1997, Flavor-changing neutral currents* 171-177 [arXiv:hep-ph/9705369].
- [90] M. Ciuchini and G. Martinelli, “Theoretical status of ϵ'/ϵ ,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **99B** (2001) 27 [arXiv:hep-ph/0006056].
- [91] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [92] J. Collins, *Renormalization* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984).
- [93] J. F. Donoghue, J. S. Hagelin and B. R. Holstein, “Higgs-Boson-Exchange Models Of CP Violation And $K \rightarrow 2\pi$,” *Phys. Rev. D* **25** (1982) 195.
- [94] D. Chang, “The Mass Matrix In The Higgs Model Of CP Violation,” *Phys. Rev. D* **25** (1982) 1318.
- [95] N. G. Deshpande, “A Difficulty For Weinberg Model Of CP Nonconservation Through Higgs Exchange,” *Phys. Rev. D* **23** (1981) 2654; A. I. Sanda, “A Problem For Theories With Spontaneous CP Violation And Natural Flavor Conservation,” *Phys. Rev. D* **23** (1981) 2647.
- [96] D. Chang and W. Y. Keung, “A Scheme for radiative CP violation,” *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 1928 [arXiv:hep-ph/9409435].
- [97] H. Georgi and A. Pais, “CP - Violation As A Quantum Effect,” *Phys. Rev. D* **10** (1974) 1246.
- [98] A. Zee, “Attempt to generate the angle between the strong and weak interactions,” *Phys. Rev. D* **9** (1974) 1772; R. N. Mohapatra, “Gauge Model For Chiral Symmetry Breaking And Muon Electron Mass Ratio,” *Phys. Rev. D* **9** (1974) 3461; N. Maekawa, “Spontaneous’ CP violation in minimal supersymmetric standard model,” *Phys. Lett. B* **282** (1992) 387.

- [99] D. Chang and R. N. Mohapatra, “Nonrenormalization Of Phases, Softly Broken Peccei-Quinn Symmetry And Strong CP Problem,” *Phys. Rev. D* **32** (1985) 293.
- [100] P. M. Ferreira, R. Santos and A. Barroso, “Stability of the tree-level vacuum in two Higgs doublet models against charge or CP spontaneous violation,” *Phys. Lett. B* **603** (2004) 219 [Erratum-ibid. *B* **629** (2005) 114] [arXiv:hep-ph/0406231]. A. Barroso, P. M. Ferreira and R. Santos, “Charge and CP symmetry breaking in two Higgs doublet models,” *Phys. Lett. B* **632** (2006) 684 [arXiv:hep-ph/0507224].
- [101] M. Maniatis, A. von Manteuffel, O. Nachtmann and F. Nagel, “Stability and symmetry breaking in the general two-Higgs-doublet model,” *Eur. Phys. J. C* **48** (2006) 805 [arXiv:hep-ph/0605184].
- [102] I. P. Ivanov, “Minkowski space structure of the Higgs potential in 2HDM,” arXiv:hep-ph/0609018.
- [103] S. Davidson and H. E. Haber, “Basis-independent methods for the two-Higgs-doublet model,” *Phys. Rev. D* **72** (2005) 035004 [Erratum-ibid. *D* **72** (2005) 099902] [arXiv:hep-ph/0504050].
- [104] H. E. Haber and D. O’Neil, “Basis-independent methods for the two-Higgs-doublet model. II: The significance of $\tan(\beta)$,” arXiv:hep-ph/0602242.
- [105] J. F. Gunion, G. Kane, S. Dawson, *The Higgs Hunter’s Guide*, (Addison-Wesley, Reading, 1990).
- [106] A. Pilaftsis, “CP-odd tadpole renormalization of Higgs scalar-pseudoscalar mixing,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 096010 [arXiv:hep-ph/9803297].
- [107] J. C. Montero, V. Pleitez and O. Ravinez, “Soft superweak CP violation in a 331 model,” *Phys. Rev. D* **60** (1999) 076003 [arXiv:hep-ph/9811280].
- [108] F. Pisano and V. Pleitez, “An SU(3) x U(1) model for electroweak interactions,” *Phys. Rev. D* **46** (1992) 410 [arXiv:hep-ph/9206242]; P. H. Frampton, “Chiral dilepton model and the flavor question,” *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 2889; R. Foot, O. F. Hernandez, F. Pisano and V. Pleitez, “Lepton masses in an SU(3)-L x U(1)-N gauge model,” *Phys. Rev. D* **47** (1993) 4158 [arXiv:hep-ph/9207264].
- [109] J. C. Montero, C. C. Nishi, V. Pleitez, O. Ravinez and M. C. Rodriguez, “Soft CP violation in K-meson systems,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 016003 [arXiv:hep-ph/0511100].
- [110] P. Vogel, “Towards absolute neutrino masses,” arXiv:hep-ph/0611210.
- [111] S. R. Elliott and P. Vogel, “Double beta decay,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **52** (2002) 115 [arXiv:hep-ph/0202264].

- [112] A. de Gouvea, PASI 2006 lectures, Puerto Vallarta (Mexico), October 22th–30th, 2006. Also, “2004 TASI lectures on neutrino physics,” arXiv:hep-ph/0411274.
- [113] Y. Farzan, O. L. G. Peres and A. Y. Smirnov, “Neutrino mass spectrum and future beta decay experiments,” Nucl. Phys. B **612** (2001) 59 [arXiv:hep-ph/0105105].
- [114] J. Lesgourgues and S. Pastor, “Massive neutrinos and cosmology,” Phys. Rept. **429** (2006) 307 [arXiv:astro-ph/0603494].
- [115] S. Antusch, C. Biggio, E. Fernandez-Martinez, M. B. Gavela and J. Lopez-Pavon, “Unitarity of the leptonic mixing matrix,” JHEP **0610** (2006) 084 [arXiv:hep-ph/0607020].
- [116] C. O. Escobar, O. L. G. Peres, V. Pleitez and R. Zukanovich Funchal, “Constraints on singlet right-handed neutrinos coming from the Z_0 width,” Phys. Rev. D **47** (1993) 1747 [arXiv:hep-ph/9212282].
- [117] S. Weinberg, “Baryon and Lepton-Nonconserving processes,” Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 1566.
- [118] Willenbrock, “Symmetries of the Standard Model,” arXiv:hep-ph/0410370.
- [119] E. Ma, “Pathways to naturally small neutrino masses,” Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1171; Also hep-ph/0611181.
- [120] S. De Leo and P. Rotelli, “Neutrino chiral oscillations,” Int. J. Theor. Phys. **37** (1998) 2193 [arXiv:hep-th/9605255].
- [121] M. Cirelli, G. Marandella, A. Strumia and F. Vissani, “Probing oscillations into sterile neutrinos with cosmology, astrophysics and experiments,” Nucl. Phys. B **708** (2005) 215 [arXiv:hep-ph/0403158].
- [122] M. Sorel, J. M. Conrad and M. Shaevitz, “A combined analysis of short-baseline neutrino experiments in the (3+1) and (3+2) sterile neutrino oscillation hypotheses,” Phys. Rev. D **70** (2004) 073004 [arXiv:hep-ph/0305255].
- [123] Y. Liao, “Active - sterile neutrino mixing in the absence of bare active neutrino mass,” Nucl. Phys. B **749** (2006) 153 [arXiv:hep-ph/0604016].
- [124] C. Jarlskog, “Invariants of lepton mass matrices and CP and T violation in neutrino oscillations,” Phys. Lett. B **609** (2005) 323 [arXiv:hep-ph/0412288].
- [125] C. Y. Cardall, “Coherence of neutrino flavor mixing in quantum field theory,” Phys. Rev D **61** (2000) 073006.
- [126] A. Kusenko and G. Segre, “Velocities of pulsars and neutrino oscillations,” Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 4872 [arXiv:hep-ph/9606428]; “Pulsar kicks from neutrino oscillations,” Phys. Rev. D **59** (1999) 061302 [arXiv:astro-ph/9811144].

- [127] F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and all that*, 2nd ed., W. A. Benjamin (1964).
- [128] C. C. Nishi, “Simple derivation of general Fierz-type identities,” *Am. J. Phys.* **73** (2005) 1160 [arXiv:hep-ph/0412245].
- [129] W. Siegel, *Fields*, hep-th/9912205. Manuscript and errata also in <http://insti.physics.sunysb.edu/~siegel/errata.html>
- [130] M. Abramovitz, and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1972).
- [131] D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory* (Adam Hilger, Bristol , 1986).
- [132] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton Univ. Press, 1992).
- [133] P. A. Carruthers, *Spin and Isospin in Particle Physics*, (Gordon and Breach, N.Y., 1971).