



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.007/07

Construção Exata de Sólitons de Hopf

André Correia Risério do Bonfim

Orientador

Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira

Julho de 2007

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Agradeço ao meu orientador Prof. Luiz Agostinho pela disposição e acessibilidade nas muitas discussões frutíferas que tivemos sobre Física.

Por fim, agradeço à minha família pelo apoio financeiro e emocional neste período.

Resumo

Nosso objeto de estudo são teorias clássicas de campo que possuem sólitons topológicos e um número infinito de quantidades conservadas. Em particular, nossos modelos exibem a assim chamada "carga de Hopf". Esta carga surge porque, para soluções com energia finita, nossas teorias definem mapeamentos de um espaço-tempo compactificado em um espaço alvo S^2 . Demonstramos que o conjunto de quantidades conservadas de nossos modelos está relacionado com a invariância da Lagrangiana sob os difeomorfismos de área do espaço alvo. Nossos modelos são bastante relacionados com o modelo de Skyrme-Faddeev e, portanto, apresentamos uma breve introdução a este modelo. Usando o método de Lie, foram descobertas as simetrias das equações de Euler-Lagrange para os citados modelos, para um espaço-tempo curvado genérico. A condição de simetria se relaciona com a solução da equação de Killing para um dado espaço-tempo. Então as equações correspondentes são solucionadas para alguns exemplos específicos como os espaços-tempos euclidiano, $S^3 \times \mathbb{R}$ e de Minkowski. A seguir, para os modelos em $S^3 \times \mathbb{R}$, usando as simetrias recém descobertas, encontramos sistemas de coordenadas para os quais existem ansätze levando à separação de variáveis e a redução das equações (inicialmente EDPs) à EDOs. As EDOs são lineares e, portanto, sua resolução é obtida a partir da qual calculamos todas as quantidades físicas relevantes como a energia, a carga de Hopf e as cargas de Noether. Também explicamos porque o ansatz escolhido leva à uma EDO linear em nosso caso e porque o algoritmo de Lie funciona.

Palavras Chaves: Soluções Exatas, Modelos Exatamente Integráveis, Sistemas não-lineares, Sólitons, Carga de Hopf, Teorias de Campo.

Áreas do conhecimento:

Abstract

Our object of study are classical field theories which possess topological solitons and have an infinite number of conserved quantities. In particular our models have what is known as "Hopf charge". This charge appears because, for finite energy solutions, our theories define mappings of a compactified space time in a S^2 target space. We show that our models' set of conserved quantities are related to the invariance of the Lagrangian under area preserving diffeomorphisms of the target space. Our models are closely related to the Skyrme-Faddeev model and so we give a brief introduction to it. Using Lie's method we find the symmetries of the Euler-Lagrange equations of such models, for an arbitrary curved space time. The symmetry condition turns out to be related with the solution of the Killing equations in a given space time. We then solve the corresponding equations for some specific examples, like the Euclidean, Minkowski and the $S^3 \times \mathbb{R}$ space times. Then, for the $S^3 \times \mathbb{R}$ models, using the symmetries already found, we are able to find systems of coordinates for which there exists an ansatz leading to separations of variables and to the reduction of the Euler-Lagrange equations (initially PDEs) to ODEs. These ODEs are linear and so we are able to integrate them and also to calculate all of the physically meaningful conserved quantities, as the energy, Hopf charge, angular momentum. We also explain why such an ansatz leads to a linear ODE in this particular case and why the Lie integration algorithm works.

Índice

1	Introdução	vi
2	O Modelo de Skyrme e de Skyrme-Faddeev	1
2.1	O Modelo de Skyrme	1
2.2	O modelo de Skyrme-Faddeev	4
3	Quantidades conservadas, Integrabilidade e Modelos na Esfera	7
3.1	Sólitons e Integrabilidade	7
3.1.1	Teorema de Stokes Não-abeliano	8
3.2	Caso Multidimensional	10
3.2.1	Caso tridimensional	11
3.2.2	Uma forma de condição local	14
3.3	Modelos em $SU(2)/U(1)$	16
3.3.1	Exemplo: O modelo de Skyrme-Faddeev	19
3.4	Correntes Conservadas e Difeomorfismos da Esfera	20
4	Simetrias, Linearização e Construção de Ansatz	24
4.1	Modelos com solução tipo Hopfion	24
4.2	O caso euclidiano	25
4.2.1	Simetrias do espaço-tempo	26
4.2.2	Simetrias do espaço alvo	27
4.2.3	Soluções	28
4.3	Teoria em Espaços Curvos	32
4.3.1	Simetria em espaço curvo qualquer	32
4.3.2	Solução da Equação de Killing Conforme em Casos Especiais	36
4.3.3	Simetria e Ansatz no espaço-tempo de Minkowski	44
4.4	Geometria e linearização das equações de movimento	46
4.5	A construção do ansatz	48

5	O Modelo em $S^3 \times \mathbf{R}$	54
5.1	Definição do modelo	54
5.1.1	Equações de movimento e novo Ansatz	56
5.1.2	Soluções dependentes do tempo	56
5.2	A carga topológica de Hopf	72
5.3	As cargas de Noether	73
5.4	O Momento Angular	76
5.5	Energia	80
6	O Modelo no espaço-tempo de Minkowski	83
6.1	A equação de movimento	83
6.2	Condições de contorno	85
6.3	A carga de Hopf	88
6.4	A Hamiltoniana	90
A	Álgebra das Rotações na Esfera S^3	93
B	Caso euclidiano em 5D	97
	Referências	101

Capítulo 1

Introdução

Um dos temas importantes em física não-linear é o da construção de modelos exatamente integráveis. Estes modelos aparecem em vários ramos da física, como na mecânica estatística, na física do estado sólido e em teorias de campo. Nosso objeto de estudo é uma classe de modelos integráveis que ocorre na física de teorias de campo. Estes modelos possuem algumas características típicas que iremos descrever brevemente. Em primeiro lugar, estudamos teorias *clássicas* de campo, as quais, apesar disso, possuem características que as colocam como aproximações bastante significativas das teorias *quânticas* de campo. Uma referência bastante completa é [1]

De forma mais específica, vamos analisar modelos com os seguintes ingredientes. Teremos sempre equações de movimento (equações de Eule-Lagrange) não-lineares. A não-linearidade destas equações nos leva a utilizar um método específico para sua resolução, baseado na procura de simetrias e sua posterior utilização na introdução de ansatz [2][3]. É pertinente observar aqui que, dada a dificuldade representada pela existência de equações altamente não-lineares, não buscamos a solução geral e sim soluções particulares invariantes por algumas das simetrias das citadas equações.

Outra característica marcante destes modelos é a existência de soluções tipo sóliton. Estas soluções possuem as assim chamadas cargas topológicas, que são quantidades conservadas independentemente dos detalhes da dinâmica do sistema, ou seja, das equações de movimento. Estas quantidades conservadas não são, portanto, resultado de leis de conservação derivadas do teorema de Noether, como ocorre com as cargas tradicionais da teoria clássica de campo, como a energia, o momento angular, etc. Sua existência é consequência de propriedades geométricas do espaço-tempo, especificamente em nosso caso do processo de compactificação do espaço-tempo plano em esferas S^n . Como nossos modelos têm espaços alvo que são por construção esferas (ou espaços hiperbólicos) existe um mapeamento de esferas em esferas no qual surgem naturalmente as citadas cargas topológicas [4][1].

De forma geral, a integrabilidade de nossos modelos se expressa na existência de

infinitas cargas conservadas. A teoria geral que explica detalhadamente a origem e propriedades destas cargas foi primeiramente desenvolvida em [5] e todos os modelos estudados são casos particulares que se enquadram na análise feita na citada referência. De modo geral podemos observar que as cargas têm origem em propriedades geométricas do espaço alvo dos modelos, notadamente a invariância por difeomorfismos de área[6].

Do ponto de vista histórico, o início deste tipo de modelo pode ser traçado até o final dos anos 50 e início dos 60 do século XX, quando surge o modelo de Skyrme[7], o qual é o primeiro a possuir cargas topológicas. A partir daí temos, nos anos 70, uma série de modelos em teoria de campo com esta propriedade, como o modelo de Skyrme-Faddeev, modelos de vórtices, instantons e monopolos magnéticos não-abelianos. O modelo de Skyrme-Faddeev será analisado mais detalhadamente uma vez que possui grande semelhança com nossos modelos.

O modelo de Skyrme-Faddeev foi proposto em 1975 por Faddeev como uma variação do modelo de Skyrme. O modelo de Skyrme tenta descrever o núcleo atômico do ponto de vista hadrônico. Ou seja, não é feita menção alguma à existência de quarks, os quais, aliás, não eram conhecidos à época que o modelo foi inicialmente proposto. Apesar disso, existem trabalhos do início dos anos 80 sugerindo que o modelo de Skyrme pode ser visto como um limite da QCD em baixa energia[8]. De forma análoga, existem muitos trabalhos que tentam conectar o modelo de Skyrme-Faddeev com a parte bosônica da QCD, ou seja, a teoria de Yang-Mills. Isto é feito através da “decomposição de Cho-Faddeev-Niemi” do potencial A_μ . Embora esta abordagem seja muito frutífera e importante ainda tem uma interpretação física polêmica de forma que não iremos detalhá-la, indicando, ao invés disto, a bibliografia relevante ao leitor interessado[9] [10][11][12][13][14][15]. No primeiro capítulo desta tese faremos uma breve revisão dos modelos de Skyrme e de Skyrme-Faddeev dando ênfase especial à descrição da carga de Hopf, a qual é uma quantidade crucial para nossos modelos.

No segundo capítulo, temos uma descrição detalhada de como surgem as infinitas quantidades conservadas existentes em nossos modelos. É utilizado um argumento essencialmente geométrico nesta análise. Um resultado fundamental para se obter o resultado é o teorema de Stokes não abeliano, o qual tem sua demonstração rapidamente reproduzida numa seção específica. Um problema técnico que surge é que a partir de nosso argumento geométrico obtemos em geral quantidades conservadas *não locais*. Assim, é elaborada uma condição algébrica que permite a construção de quantidades conservadas *locais* em nossos modelos. Finalmente, estudamos as propriedades de modelos com espaço alvo dado pela esfera S^2 , já que este é o caso estudado em detalhe em nossa análise posterior. Como um exemplo desta análise,

retomamos o modelo de Skyrme-Faddeev e procedemos à sua classificação dentro deste esquema.

A seguir, analisamos as simetrias das equações de movimento através do método de Lie. Obtemos condições para existência de simetria num espaço-tempo curvo qualquer. O resultado obtido mostra que encontrar as simetrias equivale à resolução da equação de Killing conforme. Esta equação é resolvida para alguns casos concretos, a saber, o espaço-tempo euclidiano, o espaço-tempo de Minkowski e o espaço-tempo $S^3 \times \mathbb{R}$. A álgebra é calculada explicitamente no caso de Minkowski e a construção de ansatz feita explicitamente no caso euclidiano. Aqui é relevante frisar que obtemos como resultado *original* uma generalização da abordagem restrita ao caso euclidiano levada à cabo em [16], já que executamos o cálculo para um espaço curvo *qualquer* além de resolver a equação de Killing em $S^3 \times \mathbb{R}$. Um outro resultado original foi obtido quando justificamos teoricamente o algoritmo utilizado na citada referência para construção do ansatz além de explicar a linearização das equações de movimento a partir da utilização dos ansatz citados.

De forma mais detalhada, trabalhamos com modelos dados em princípio por um funcional qualquer da quantidade h^2/γ^2 . Define-se $h^2 = h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ onde

$$h_{\mu\nu} = \partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u^* \partial_\mu u \quad (1.1)$$

O campo escalar complexo $u(x^\mu)$ é, em geral, definido em um espaço-tempo curvo genérico. Este campo $u(x^\mu)$ assume valores em um espaço alvo S^2 o qual pode ser descrito por um vetor real e unitário \vec{n} relacionado com o campo $u(x^\mu)$ pela projeção estereográfica usual. O fator γ depende da geometria do espaço alvo sendo que temos γ^2 dado por $1 + |u|^2$ no caso de S^2 . É possível provar que para as equações de movimento possuírem simetrias a Lagrangiana deve ser da forma $(h^2/\gamma^2)^\alpha$ com α um expoente constante. No caso euclidiano, escolhemos $\alpha = d/4$ (d =dimensão do espaço tempo) levando em conta o Teorema de Derrick [17][1] e no caso de $S^3 \times \mathbb{R}$ escolhemos $\alpha = 1$, já que neste caso procuramos soluções dependentes do tempo e o citado teorema não se aplica. As transformações de simetria que obtemos são as transformações conformes, nos três casos estudados. A resolução da equação de Killing em $S^3 \times \mathbb{R}$ é um resultado importante também obtido*.

Também obtivemos dois resultados teoricamente relevantes. O primeiro se relaciona com a questão da linearização das equações de movimento. Após a mudança de coordenadas é proposto um ansatz dado por

*Os geradores da álgebra já foram listados em [18], porém em um outro sistema de coordenadas e num contexto físico completamente diferente.

$$u = \sqrt{\frac{1-g}{g}} e^{i\theta}$$

onde $g(z)$ é, em geral, uma função de uma coordenada com imagem no intervalo $[0, 1]$ e θ é da forma $\theta = m_i \alpha_i$ onde os α_i são ângulos e os m_i números inteiros. Nossa observação é que $g(z)$ e θ são coordenadas tipo Darboux [19] deste sistema e que $h_{\mu\nu}$ fica sendo dada por

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu g \partial_\nu \theta - \partial_\nu g \partial_\mu \theta$$

o que acarreta uma considerável simplificação nas equações de Euler-Lagrange levando à linearização na EDO residual.

O outro resultado obtido é um argumento que explica a necessidade de se utilizar simetrias dadas por operadores que comutam entre si na construção do ansatz. Este resultado surge enquanto é feita uma breve elaboração teórica justificando nosso procedimento para integrar a equação de movimento. De forma sucinta, a idéia básica é achar soluções particulares que são *invariantes por um subgrupo* do grupo de simetria total da equação. Após a escolha deste subgrupo obtém-se condições que devem ser respeitadas pela solução procurada que se realizam sempre como equações diferenciais *lineares* para a função desejada. Como agora resolvemos uma equação linear em vez da (possivelmente) equação não-linear inicial a integração é enormemente facilitada. Ao utilizar várias simetrias simultaneamente é que surge a condição de comutatividade já mencionada.

Os últimos dois capítulos são dedicados ao uso dos procedimentos acima para o modelo em $S^3 \times \mathbb{R}$ e para Minkowski. Para o modelo em $S^3 \times \mathbb{R}$ obtemos resultados totalmente originais. No primeiro caso, além de resolver as equações de movimento, calculamos todas as quantidades físicas relevantes, a saber, a carga de Hopf, a energia, o momento angular e outras cargas de Noether. Um fato a ser observado é que, como a cada instante temos um mapa $S^3 \rightarrow S^2$ a carga topológica sempre está bem definida para qualquer mapeamento diferenciável definido pela solução do modelo. No espaço-tempo de Minkowski já havia sido publicada uma solução anteriormente, mas agora utilizamos um ansatz diferente e obtemos uma solução original. A equação de movimento foi resolvida e a expressão da carga de Hopf calculada.

Os resultados do capítulo 5 estão publicados em [20]. Outros dois artigos estão sendo submetidos à publicação com os resultados originais dos capítulos 4 e 6.

Capítulo 2

O Modelo de Skyrme e de Skyrme-Faddeev

2.1 O Modelo de Skyrme

Vamos inicialmente descrever o modelo de Skyrme, utilizando as referências [7][1]. Quando este modelo foi proposto, sabia-se que o núcleo era composto de férmions (prótons e nêutrons) e de bósons (mésons). A inspiração do modelo era tentar descrever os bósons como um campo fundamental e obter os férmions como resultado da interação dos bósons e não como um campo fundamental. Portanto, a Lagrangiana deveria poder ser escrita em termos de campos escalares. Além disso, havia resultados experimentais indicando a existência de uma simetria aproximada entre os nucleons, o chamado isospin, que pode ser descrito por representações do grupo $SU(2)$. A Lagrangiana do modelo é dada por

$$L = \int \frac{F_\pi^2}{H} Tr [\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger] + \frac{1}{32e^2} Tr [\partial_\mu U U^\dagger, \partial_\nu U U^\dagger]^2 dx^3 \quad (2.1)$$

ou seja,

$$L = \int -\frac{1}{2} Tr [R_\mu^2] + \frac{1}{16} Tr ([R_\mu, R_\nu]^2) d^3x. \quad (2.2)$$

Na primeira expressão acima F_π^2 e e^2 são constantes que devem ser determinadas experimentalmente. Para nossos propósitos é conveniente usar unidades de energia e comprimento dadas por $F_\pi^2/4e$ e $2/eF_\pi$ o que resulta nos fatores que aparecem na segunda expressão. Também introduzimos o elemento da álgebra $su(2)$ dado por $R_\mu = \partial_\mu U U^\dagger$.

A equação de Euler-Lagrange correspondente é:

$$\partial_\mu (R^\mu + \frac{1}{4} [R^\nu [R_\nu, R^\mu]]) = 0. \quad (2.3)$$

Agora impomos a condição de contorno $U(x) \longrightarrow I$, quando $|x| \longrightarrow \infty$. O vácuo é dado então por $U(x) = I$.

O modelo definido acima possui uma simetria definida por $(SU(2) \times SU(2))/Z_2 = SO(4)$ correspondendo a transformações do tipo $U \rightarrow O_1 U O_2$ com O_1 e O_2 elementos constantes de $SU(2)$. Porém, levando-se em conta a condição de contorno acima, resta apenas uma simetria de isospin dada por $U \rightarrow O U O^\dagger$ com $O \in SU(2)$.

Podemos utilizar uma representação baseada nas matrizes de Pauli τ que conecta o modelo explicitamente com a teoria dos mésons- π . Fazemos isto parametrizando $U = \sigma + i \vec{\pi} \cdot \tau$ onde τ denota as três matrizes de Pauli, $\vec{\pi}$ representa os campos do pión e σ é um novo campo definido por $\sigma^2 + \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} = 1$. Esta condição é necessária já que $U \in SU(2)$. As condições de contorno sobre $\vec{\pi}$ e σ são $\vec{\pi}(\infty) = 0$ e $\sigma(\infty) = 1$. Pode-se observar que, no modelo acima, os píons não têm massa e, de fato, é possível acrescentar um termo à Lagrangiana que cria uma massa m_π após a quantização, mas este termo é irrelevante para nossos propósitos de tal forma que nós nos restringiremos ao modelo definido acima.

No caso de campos estáticos a energia do modelo é

$$E = \frac{1}{12\pi^2} \int \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}[R_i R_i] + \frac{1}{16} \text{Tr}([R_i, R_j][R_i, R_j]) \right) dx^3, \quad (2.4)$$

onde o fator $1/(12\pi^2)$ é introduzido por conveniência. As soluções estáticas do modelo de Skyrme são mínimos ou pontos de sela desta energia.

Sabemos que se $U \in SU(2)$ então U pode ser descrito usando três parâmetros livres reais, que são os mesmos necessários para descrever uma esfera S^3 . Então $SU(2) \cong S^3$. Portanto, U para um tempo fixo seria um mapa $\mathbb{R}^3 \rightarrow S^3$. Porém, as condições de contorno resultam na *compatificação* de \mathbb{R}^3 em S^3 : $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong S^3$. O que ocorre aqui, na verdade, é que estamos escolhendo as soluções que possuem a propriedade de assumirem um valor constante quando fazemos o limite do infinito espacial ($|x| \longrightarrow \infty$). Desta forma, estas soluções estáticas do modelo são mapeamentos $S^3 \longrightarrow S^3$. A consequência relevante desta construção geométrica é a existência de uma quantidade conservada denominada carga topológica. Esta carga é chamada de topológica, pois é conservada independentemente dos detalhes da dinâmica do sistema.

De uma forma mais detalhada, podemos dizer que o *grupo de homotopia* destes mapeamentos é $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ ou seja os mapas $S^3 \longrightarrow S^3$ se separam em classes de homotopia indexadas por um inteiro que chamaremos de B . Como este B é um invariante topológico, ele é conservado para qualquer deformação contínua do campo **inclusive para a evolução temporal, o que resulta na carga conservada**. Ele tem a interpretação geométrica de medir *quantas vezes* a esfera S^3 da imagem (ou

seja dos campos) é percorrida quando percorremos a esfera S^3 do domínio (ou seja do espaço físico R^3) uma *única* vez. Este tipo de invariante é análogo ao winding number de um mapeamento $S^1 \rightarrow S^1$. É esta quantidade que foi identificada com o número bariônico quando o modelo foi originalmente proposto e é dada por

$$B = \frac{1}{24\pi^2} \int \varepsilon_{ijk} \text{Tr}(R_i R_j R_k) d^3x. \quad (2.5)$$

Temos que analisar a estabilidade do sóliton tendo em vista o teorema de Derrick [17]. A energia estática do modelo é dada por $E = E_2 + E_4$, ou seja, termos quadráticos e quárticos nas derivadas espaciais do campo. É justamente esta combinação que leva à estabilidade pois fazendo um reescalonamento das coordenadas $x \rightarrow \lambda x$ a energia se torna $E(\lambda) = E_2/\lambda + \lambda E_4$. Observamos que estes termos se escalam de forma oposta levando a um sóliton com energia mínima para $\lambda \neq 0$ o qual terá tamanho bem definido. Usando este argumento, pode-se entender porque que o modelo sigma não-linear (dado apenas pelo primeiro termo do nosso modelo) não possui sólitons estáveis em 3D. Logicamente, qualquer termo de ordem 4 ou mais nas derivadas espaciais faria o mesmo efeito mas o nosso termo é o único invariante de Lorentz com ordem 4 e com equação de movimento de segunda ordem em derivadas temporais.

Para $B = 1$ existe uma parametrização explícita para a variável U . Neste setor o Skyrmion é esfericamente simétrico o que significa que o efeito de uma rotação espacial pode ser compensado por uma transformação de isospin a qual, por sua vez, implica que a densidade de energia e a densidade bariônica são invariantes sobre esta simetria. Isto não quer dizer que o campo seja uma função apenas da coordenada radial já que isto significaria que $B = 0$.

A parametrização é a famosa “hedgehog form”:

$$U(x) = \exp(if(r)\hat{x} \cdot \tau). \quad (2.6)$$

Em termos de $\vec{\pi}$ e σ temos $\vec{\pi} = \cos(f(r))\hat{x}$ e $\sigma = \sin(f(r))$. O nome hedgehog (porco-espinho) resulta do fato de que os campos piônicos desta configuração apontam radialmente para fora a partir da origem em todos os pontos do espaço, ou seja, $\hat{\pi} = \hat{x}$. f é uma função radial real com condições de contorno $f(0) = \pi$ e $f(\infty) = 0$. A última condição garante que $U(\infty) = I$ e a primeira que $U(0)$ é bem definida e que $B = 1$. O valor de B é confirmado por substituição do hedgehog ansatz :

$$B = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f' \sin^2(f) dr = \frac{1}{\pi} f(0) = 1. \quad (2.7)$$

A equação de movimento para f é:

$$(r^2 + 2 \sin^2 f) f'' + 2r f'' + \sin(2f)(f'^2 - 1 - \frac{\sin^2 f}{r^2}) = 0 \quad (2.8)$$

a qual precisa ser resolvida numericamente. É interessante observar que a energia para $B = 1$, dada pela expressão

$$E = \frac{1}{3\pi} \int \left[r^2 f'^2 + 2 \sin^2(f)(1 + f'^2) + \frac{\sin^4 f}{r^2} \right] dr \quad (2.9)$$

tem o valor numérico $E = 1.232$ e portanto excede o limite inferior citado em 23 por cento.

2.2 O modelo de Skyrme-Faddeev

Uma modificação deste modelo foi proposta por Faddeev [1]. Nesta nova versão os sólitons topológicos são cordas fechadas. O modelo pode ser visto como uma modificação do modelo sigma não-linear $O(3)$ com a inclusão de um termo com derivada de quarta ordem.

Podemos obter explicitamente o modelo de Skyrme-Faddeev a partir do modelo de Skyrme restringindo os valores do campo à esfera S^2 que representa o equador de S^3 . Teremos, desta maneira, um mapeamento $M : S^3 \rightarrow S^2$. O campo pode ser agora representado por um vetor tridimensional $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ com módulo unitário ($|\vec{n}| = 1$). Substituindo o campo de Skyrme $U = i \vec{n} \cdot \vec{\tau}$, obtemos a seguinte Lagrangiana:

$$L = \int (\partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n}) - \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n}) \cdot (\partial^\mu \vec{n} \times \partial^\nu \vec{n}) d^3x. \quad (2.10)$$

O segundo termo também pode ser escrito como $H_{\mu\nu}^2$, com $H_{\mu\nu} = (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n}) \cdot \vec{n}$. Ele mantém o papel de fornecer estabilidade às soluções de mesma forma que no modelo de Skyrme.

A energia de uma solução estática é proporcional à soma (com a e b constantes):

$$E \sim a \int (\partial_\mu \vec{n}) \cdot \vec{n} d^3x + b \int (H_{ik})^2 d^3x. \quad (2.11)$$

Analisando esta expressão, é fácil concluir que para se obter energia finita \vec{n} deve tender a um valor constante no infinito espacial $|x| \rightarrow \infty \implies \partial_\mu \vec{n} \rightarrow 0$. E então $\vec{n} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = n_0 = (0, 0, 1)$, onde, por convenção, se escolhe o valor $(0, 0, 1)$ no infinito.

Como temos agora um mapeamento $S^3 \rightarrow S^2$ em vez de um mapeamento $S^3 \rightarrow S^3$, a carga topológica associada é outra, sendo conhecida como carga

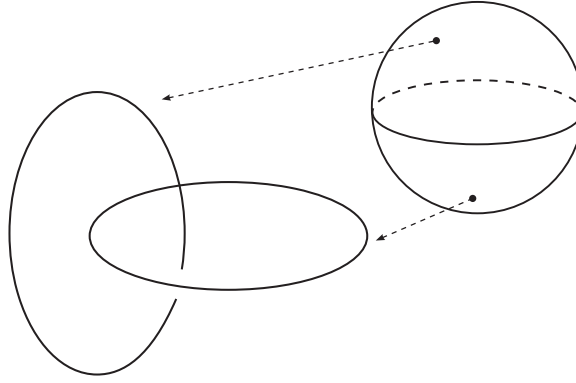


Figura 2.1: mapa de Hopf e pré-imagens (para o caso $Q_H = 1$)

de Hopf. Um argumento simples para se demonstrar a existência de uma carga topológica neste modelo é o seguinte.[10]

O tensor $H_{\mu\nu} = (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n}) \cdot \vec{n}$ é fechado, ou seja, $\partial_\rho H_{\mu\nu} + \partial_\mu H_{\nu\rho} + \partial_\nu H_{\rho\mu} = 0$. Então existe um campo vetorial c_μ tal que $H_{\mu\nu} = \partial_\mu c_\nu - \partial_\nu c_\mu$.

A corrente dada por $J_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} H_{\nu\rho} c_\sigma$ é conservada ($\partial_\mu J^\mu = 0$) e tem a carga de Hopf associada $Q_H = \int d^3x J_0$. Observamos que esta lei de conservação é topológica, pois não é necessário utilizar as equações de movimento ou a lagrangiana para sua dedução.

De uma maneira mais formal temos que, como $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ existe um inteiro N associado ao mapeamento que é a carga de Hopf. A sua definição é a seguinte. Seja ω uma 2-forma de área no espaço alvo S^2 e seja $f = \mathbf{n}^* \omega$ seu pull-back sob \mathbf{n} para S^3 . Como ω é fechada isto implica que f também é fechada. Como $H^2(S^3) = 0$ este pull-back é uma forma fechada dada por $f = da$. A carga de Hopf é dada pela integral

$$N = \frac{1}{4\pi^2} \int_{S^3} f \wedge a. \quad (2.12)$$

Uma interpretação geométrica simples de Q_H é a seguinte: como temos um mapa $S^3 \rightarrow S^2$ a pré imagem de um ponto qualquer em S^2 é, em geral, uma curva fechada em S^3 . A quantidade Q_H mede o número de vezes que as pré-imagens de dois pontos distintos \vec{n}_1 e \vec{n}_2 de S^2 são enlaçadas em S^3 .

Os sólitons deste modelo foram calculados numericamente para vários valores de N . Todos podem ser representados por curvas fechadas entrelaçadas com linking number N , mas conforme este N aumenta, deixamos de visualizar o laço simples do caso $N = 1$ (como na figura 2.1) para obter configurações cada vez mais intrincadas. É

importante ressaltar que a "posição" aqui se refere à pré-imagem do ponto $-\vec{n} = (0, 0, -1)$ do target space S^2 que é o antípoda do valor de vácuo do modelo. A rigor, todos os pontos de S^2 possuem uma pré-imagem que sempre se entrelaça com a pré-imagem de qualquer outro ponto de S^2 exatamente N vezes. O modelo de Skyrme-Faddeev tem simetria $O(3)$, mas a escolha do valor do vácuo n^∞ quebra esta simetria, sobrando apenas uma simetria $O(2)$ a qual atua como uma rotação de n_1 e n_2 . Desta forma, n_3 e a densidade de energia são invariantes por esta simetria.

Assim como no modelo de Skyrme, no modelo de Skyrme-Faddeev também existe um valor mínimo para a energia estática em termos da carga topológica. A relação é dada por

$$E_{estático} \geq c |N|^{\frac{3}{4}} \quad (2.13)$$

com $c = 16\pi^2 3^{\frac{3}{8}}$. Este tipo de desigualdade é relevante, pois numa teoria física a energia do sistema deve sempre possuir um mínimo. Também é interessante observar que o valor $3/4$ é bastante incomum para este tipo de desigualdade.

Uma forma de se construir campos com carga de Hopf não nula é a seguinte: um campo com carga N pode ser obtido aplicando-se a projeção de Hopf standart em um mapa $U : S^3 \rightarrow S^3$, ou seja, num campo do modelo de Skyrme. Se $U(x)$ é um campo de Skyrme então já sabemos que ele é dado por $R^3 \rightarrow SU(2)$ com R^3 compactificado pelo vínculo $U \rightarrow I$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Vamos supor que U tem degree B . Escrevendo U explicitamente em termos de dois números complexos Z_0 e Z_1 temos

$$U = \begin{pmatrix} Z_0 & -\bar{Z}_1 \\ Z_1 & \bar{Z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

com $|Z_0|^2 + |Z_1|^2 = 1$. Portanto, a imagem do mapa de Hopf pode ser escrita em termos do vetor coluna $Z = (Z_0, Z_1)^t$ como $n = Z^\dagger \tau Z$. Segue que n é um vetor unitário do espaço euclidiano tridimensional e satisfaz $n(\infty) = n^\infty$. Também pode-se demonstrar que a carga de Hopf neste caso é igual ao número bariônico do campo de Skyrme ou seja $B = N$.

Capítulo 3

Quantidades conservadas, Integrabilidade e Modelos na Esfera

3.1 Sólitons e Integrabilidade

Nossos modelos têm a propriedade de possuir soluções tipo sóliton. Tal característica está relacionada à integrabilidade da teoria de campo em questão. Iremos abordar brevemente alguns conceitos matemáticos fundamentais para a compreensão de nossos modelos, seguindo a abordagem de [21].

O primeiro conceito importante é o de sistema integrável. O critério relevante é o critério de Liouville, proposto inicialmente, no contexto do formalismo Hamiltoniano da mecânica clássica. De forma resumida, um sistema é integrável segundo Liouville, quando o número de graus de liberdade do sistema é igual ao número de quantidades conservadas em involução. Então, existe uma transformação canônica que permite reescrever as equações de movimento do sistema em termos de novas variáveis denominadas tradicionalmente Ângulo e Ação. Nestas novas variáveis as equações são solúveis por quadratura. A dificuldade desta abordagem se localiza na descoberta da transformação canônica adequada para a integração do sistema. Uma abordagem equivalente, mas mais adequada aos nossos propósitos é a abordagem dos operadores de Lax [22].

O próximo passo é a formulação de Zakharov e Shabat [23], a chamada condição de curvatura nula

$$[\partial_0 + A_0, \partial_1 + A_1] = 0, \quad (3.1)$$

a qual é bastante utilizada em nosso trabalho.

Uma observação muito importante é a que segue. Como as teorias de campo possuem infinitos graus de liberdade é de se esperar que, tendo em vista o critério de Liouville, seja necessária a existência de infinitas quantidades conservadas para

que a teoria seja integrável. De fato, foi elaborado um critério[5] para a busca de teorias com infinitas cargas conservadas.

Historicamente, foi em 1+1 dimensões que surgiram os primeiros sucessos nesta área. Tal fato está relacionado às especificidades das teorias bidimensionais. Um exemplo disto é a invariância conforme. Em duas dimensões a invariância conforme está relacionada às funções analíticas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Então, pode-se usar todas as ferramentas da análise complexa, o que permite simplificar consideravelmente o estudo deste caso. Em mais dimensões a invariância conforme ainda é uma propriedade muito importante, mas não existe mais uma conexão com a análise complexa a que se possa recorrer.

Porém, existem alguns métodos que *podem ser* generalizados para mais dimensões. Neste caso, podemos incluir a construção de um número infinito de quantidades conservadas. Isto ocorre porque esta construção baseia-se em uma lei de conservação tipo Gauss a qual é definida em termos de conceitos geométricos que *não são* restritos à duas dimensões.

Faremos agora uma breve exposição do teorema de Stokes não-abeliano o qual desempenha um papel fundamental nos cálculos a seguir[24].

3.1.1 Teorema de Stokes Não-abeliano

Podemos fazer a demonstração independentemente do número de dimensões do espaço-tempo. Portanto, todos os índices $\mu, \nu \dots$ variam de 0 a d . Temos, então, uma curva Γ , parametrizada por σ , de tal forma que $\sigma = 0$ e $\sigma = 2\pi$ correspondem exatamente às extremidades de Γ . W é definido por

$$\frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0 \tag{3.2}$$

onde a condição inicial é $W(0) = I$. Temos que A_μ é uma conexão tomando valores numa álgebra de Lie \mathcal{G} de um grupo de Lie G .

Suponha que o ponto inicial $x^\mu(\sigma = 0)$ seja mantido fixo. Vamos analisar como W varia sob deformações de Γ nestas condições. Temos, portanto,

$$\frac{d\delta W}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta W + \delta \left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) W = 0. \tag{3.3}$$

A expressão que define W implica que

$$\frac{dW^{-1}}{d\sigma} - W^{-1} A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} = 0. \tag{3.4}$$

Multiplicando a esquerda por W^{-1} , obtemos que o termo $\frac{d}{d\sigma}(W^{-1}\delta W)$ é dado por

$$\frac{d}{d\sigma}(W^{-1}\delta W) = -W^{-1}\left(\partial_\lambda A_\mu \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} + A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\sigma}\right)W \quad (3.5)$$

Integrando por partes a expressão acima, obtemos

$$W^{-1}\delta W = -W^{-1}A_\mu W \delta x^\mu + \int_0^\sigma d\sigma W^{-1}F_{\mu\nu}W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \quad (3.6)$$

onde se define

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (3.7)$$

A seguir, fazendo variações de Γ com o ponto final em $\sigma = 2\pi$ também fixo, resulta da expressão acima para $W^{-1}\delta W$:

$$W^{-1}(2\pi)\delta W(2\pi) = \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1}F_{\mu\nu}W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu. \quad (3.8)$$

Agora, vamos considerar Γ uma curva fechada ($x_0 \equiv x^\mu(0) = x^\mu(2\pi)$), Σ uma superfície bidimensional cuja fronteira é Γ . Σ pode ser percorrida com loops que se iniciam e terminam em um ponto fixo x_0 ; portanto, estes loops podem ser parametrizados por ϑ de modo que $\vartheta = 0$ corresponda ao loop infinitesimal em torno de x_0 e $\vartheta = 2\pi$ corresponda à própria Γ . Vamos variar W de modo que a variação corresponda à deformações de um loop em outro, ou seja, $\delta = \delta\vartheta \frac{d}{d\vartheta}$. Desta forma, a última equação pode ser escrita como

$$\frac{dW(2\pi)}{d\vartheta} - W(2\pi) \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1}F_{\mu\nu}W \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\vartheta} = 0. \quad (3.9)$$

Porém W , para um dado loop, pode ser determinado tanto pela equação acima como pela primeira equação desta seção. Esta equivalência é o teorema de Stokes não abeliano. Integrando estas equações temos a igualdade

$$P \exp \left(\int_\Gamma d\sigma A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) = P_S \exp \left(\int_\Sigma d\sigma d\vartheta W^{-1}F_{\mu\nu}W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\vartheta} \right) \quad (3.10)$$

onde P significa ordenamento no caminho e P_S ordenamento na superfície. Na expressão acima foi omitida de ambos os lados $W(x_0)$, que é a constante de integração multiplicativa correspondente ao valor inicial de W .

As quantidades conservadas surgem da seguinte forma: inicialmente, seja um espaço-tempo dado por um cilindro. Para t_0 fixo considere um loop γ_0 que começa e termina em x_0 . Para um instante posterior t_1 , considere outro loop γ_1 também iniciando e terminando em x_0 . Então, γ_{01} é um caminho que conecta (t_0, x_0) com (t_1, x_0) . Usando a conexão plana, podemos integrar a equação de transporte paralelo ao longo de dois caminhos diferentes, resultando em $W(\gamma_0) = W(\gamma_{01})^{-1}W(\gamma_1)W(\gamma_{01})$. Portanto, $W(\gamma_0)$ é transformado por uma transformação de gauge $g(x)$ como $W(\gamma_0) \rightarrow g(x_0)W(\gamma_0)g(x_0)^{-1}$. As quantidades conservadas precisam ser invariantes de gauge. Se \varkappa é um caracter para o grupo G , isto significa que $\varkappa(W(\gamma_0))$ é invariante de gauge, e também implica que $\varkappa(W(\gamma_0)) = \varkappa(W(\gamma_1))$. Assim, temos uma quantidade conservada invariante de gauge dada por $\varkappa(W(\gamma_0))$ para cada caracter independente do grupo. Estas quantidades são justamente as constantes de movimento na construção de curvatura nula. Todas as informações necessárias para o cálculo de $\varkappa(W(\gamma_0))$ são determinadas no instante inicial t_0 .

É importante observar que estas quantidades conservadas *não são* locais, pois a conexão A_μ pode pertencer a uma álgebra não abeliana. Porém, é possível em alguns casos obter leis de conservação locais, quando através de uma transformação de gauge coloca-se A_μ numa subálgebra abeliana .

3.2 Caso Multidimensional

Para analisar o caso em mais dimensões, seguiremos a abordagem de [5], cuja principal conclusão é fornecer uma extensão da condição de curvatura nula. A equação $[\partial_0 + A_0, \partial_1 + A_1] = 0$ representa a condição de compatibilidade ou integrabilidade para derivadas covariantes.

Seja um espaço-tempo de dimensão $d+1$. É introduzido um tensor anti-simétrico de ordem d , e define-se o análogo de W (como definimos na seção anterior) como sendo a integração deste tensor sob uma superfície d dimensional. Procuramos, então, uma lei de Gauss para conexões de ordem superior. Precisamos, porém, de condições *locais* para a independência da superfície . Além disso, estas condições devem ser tais que contenham a estrutura das equações de movimento de sistemas que são não-lineares. No caso em que nosso tensor de ordem d pertence a uma álgebra abeliana, a independência da superfície resulta do teorema de Stokes abeliano e apenas mostra que a derivada exterior deste tensor se anula. A condição neste caso é local porém incapaz de descrever teorias não-lineares. No caso onde o tensor pertence à uma álgebra não abeliana, obtem-se uma condição não-linear para independência da superfície.

Iremos a seguir descrever em detalhe o caso tridimensional do teorema de Stokes não abeliano. Este caso possui todas as características fundamentais para a generalização da curvatura nula. Não iremos descrever o caso de dimensões quaisquer, que é semelhante ao caso tridimensional. O leitor interessado poderá encontrar uma descrição bastante detalhada em [5].

3.2.1 Caso tridimensional

Agora, teremos superfícies no lugar da curva Γ e volumes ao invés de superfícies. Seja V , definido de modo análogo à W dado por

$$\frac{dV}{d\vartheta} - VT(B, A, \vartheta) = 0 \quad (3.11)$$

com $T(B, A, \vartheta)$ definido por

$$T(B, A, \vartheta) \equiv \int_0^{2\pi} d\vartheta d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\vartheta}. \quad (3.12)$$

Vamos estudar o comportamento de V conforme deformamos a superfície Σ (na qual ϑ parametriza os vários loops que varrem Σ , e σ parametriza cada loop). Encontra-se uma equação para as variações de V sob deformações de uma superfície. A partir da condição de que V seja independente de deformações de ϑ que mantenha Γ fixo, obtemos condições não-locais sobre A_μ e $B_{\mu\nu}$ dadas explicitamente pelo fato de que a curvatura destas duas conexões é nula. Para A_μ isto implica que $F_{\mu\nu} = 0$. No caso de $B_{\mu\nu}$, temos, porém, que sua curvatura é não local sendo dada por

$$\begin{aligned} \kappa = \int d\sigma W^{-1} (D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu}) W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\vartheta} \frac{dx^\lambda}{d\zeta} \\ - [T(B, A, \vartheta), T(B, A, \zeta)]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A questão agora é escolher A_μ e \tilde{B}^μ (definido por $\tilde{B}^\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho}$) de tal forma que a condição (3.13) se torne local. Uma forma de se fazer isto é escolher $D_\mu \tilde{B}^\mu = 0$ e $F_{\mu\nu} = 0$ com $F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$, onde $D_\mu \equiv \partial_\mu + [A_\mu, \cdot]$. O fator A_μ pertence a uma álgebra de Lie G , e \tilde{B}^μ pertence um ideal abeliano desta álgebra. A curvatura de A_μ deve ser zero para termos V independente da forma pela qual Σ é percorrida.

Seja Σ uma superfície com fronteira Γ . Temos que x_0 é um ponto de base em Γ , e Σ é percorrida com loops passando por x_0 os quais são parametrizados por ϑ , de tal forma que $\vartheta = 0$ corresponde ao loop infinitesimal em torno de x_0 , e $\vartheta = 2\pi$ corresponde à fronteira Γ . Por sua vez σ parametriza cada um dos loops de tal forma que tanto $\sigma = 0$ como $\sigma = 2\pi$ correspondem à x_0 .

Neste ponto introduzimos um potencial vetor A_μ e um tensor antissimétrico de ordem dois $B_{\mu\nu}$ o qual se transforma pela representação adjunta do grupo. Definimos, então, V pela equação

$$\frac{dV}{d\vartheta} - VT(B, A, \vartheta) = 0 \quad (3.14)$$

na qual $T(B, A, \vartheta) \equiv \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\vartheta}$.

Nossa condição inicial é dada por $V(\vartheta = 0) = I$. Temos que W se relaciona com A_μ da forma já definida anteriormente. V deve independe da forma escolhida para percorrer Σ através de loops que passam por x_0 . Desta maneira, deve-se ter que

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0, \quad (3.15)$$

ou seja, a conexão A_μ é plana.

Esta condição implica na independência de W em relação ao caminho de integração, quando os extremos são fixos. Um certo ponto em Σ pertence a apenas um loop do conjunto que percorre Σ . Define-se W em um dado ponto de Σ através da integração de (3.2), percorrendo um loop que é iniciado em x_0 e que possui o ponto em questão. Quando se percorre Σ de outra maneira o valor de W associado a cada ponto de Σ fica constante, pois a condição $F_{\mu\nu} = 0$ assegura a independência de W em relação ao caminho já que x_0 fica fixo. Desta forma, o integrando na definição de $T(B, A, \vartheta)$ passa a ser uma função local de Σ . Obtém-se, assim, um V integrando a equação (3.14) o qual é independente da maneira pela qual percorre-se Σ , já que mudar a varredura é o mesmo que mudar as coordenadas (σ, ϑ) em Σ uma vez que a quantidade $W^{-1} B_{\mu\nu} W$ é uma função apenas dos pontos de Σ e não função do loop.

Usando a condição inicial $W(x_0) = I$, podemos calcular W de forma unívoca em qualquer ponto integrando $\frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0$ e a partir disto resulta que

$$A_\mu = -\partial_\mu W W^{-1}. \quad (3.16)$$

Vamos analisar como V se transforma quando deformamos Σ , mantendo, porém, a fronteira Γ fixa. Variamos então os loops que percorrem Σ , de tal forma que estas variações sejam perpendiculares a Σ . A partir da equação que define V , obtemos que

$$\frac{dV^{-1}}{d\vartheta} + T(B, A, \vartheta)V^{-1} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{d\vartheta}(\delta V V^{-1}) = V \delta T(B, A, \vartheta) V^{-1}. \quad (3.17)$$

Agora precisamos calcular $\delta T(B, A, \vartheta)$. Para isto usamos a expressão para $W^{-1}\delta W$ deduzida na seção anterior além do fato de que $F_{\mu\nu} = 0$ para obter $\delta W = -A_\mu W \delta x^\mu$. Temos que $\delta x^\mu(\sigma = 0) = \delta x^\mu(\sigma = 2\pi) = \delta x^\mu(\vartheta = 0) = \delta x^\mu(\vartheta = 2\pi) = 0$. Usamos a derivada δx^μ numa integração por partes, além da equação que define W , porém com derivadas em relação à ϑ em vez de derivadas em relação à τ , pois ambas fornecem variações do contorno. Então obtemos uma expressão para $\delta V(\vartheta)V^{-1}(\vartheta)$ dada por

$$\begin{aligned} \delta V(\vartheta)V^{-1}(\vartheta) &= V(\vartheta) \left(\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \right) V^{-1} + \int_0^\vartheta d\vartheta V(\vartheta) \times \\ &\times \left(\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} (D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu}) W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\vartheta} \delta x^\lambda \right. \\ &\left. - [T(B, A, \vartheta'), \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu] \right) V^{-1}(\vartheta'). \end{aligned}$$

Na expressão acima, a derivada covariante $D_\lambda B_{\mu\nu}$ é dada por $D_\lambda B_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda B_{\mu\nu} + [A_\lambda, B_{\mu\nu}]$.

Fazendo $\vartheta = 2\pi$ na expressão para $\delta V(\vartheta)V^{-1}(\vartheta)$ acima, obtemos usando as condições para δx^μ do parágrafo anterior que o primeiro termo no lado direito da expressão se anula.

Seja agora Σ uma superfície fechada na qual o loop Γ colapsou no ponto fixo x_0 . Temos um volume Ω com fronteira Σ . Percorremos Ω usando superfícies fechadas as quais possuam o ponto x_0 em comum. Parametrizamos estas superfícies com uma variável ζ de tal forma que $\zeta = 0$ corresponde à superfície infinitesimal em torno de x_0 e a fronteira Σ corresponde à $\zeta = 2\pi$. Vamos analisar variações de V representando deformações de uma dada superfície fechada numa outra. Denotando V definido numa superfície fechada por V_c e usando que $\delta \equiv d\zeta \frac{d}{d\zeta}$ resulta

$$\frac{dV_c}{d\zeta} - \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta V \kappa V^{-1} \right) V_c = 0 \quad (3.18)$$

onde κ é definido por

$$\begin{aligned} \kappa \equiv & \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} (D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu}) W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\vartheta} \frac{dx^\lambda}{d\zeta} \\ & - [T(B, A, \vartheta), T(B, A, \zeta)]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

O passo final é a integração de (3.14) e (3.18) o que resulta em

$$P \exp \left(\int_\Sigma d\sigma d\vartheta W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\vartheta} \right) = P_S \exp \left(\int_\Omega d\vartheta d\zeta V \kappa V^{-1} \right). \quad (3.20)$$

Esta expressão pode então ser utilizada para construir cargas conservadas. Para isto, temos que ter V independente da superfície. Basta para tal que a quantidade κ definida acima se anule. Porém κ é uma quantidade não local. Nosso problema é então obter condições para que κ se anule **localmente**.

Existem duas formas possíveis de se obter κ nulo de forma local. A primeira delas parte do caso aonde $D_\lambda B_{\mu\nu} = 0$ e $F_{\mu\nu} = 0$. Denotando $B_{\mu\nu}$ em um certo ponto do espaço-tempo por $B_{\mu\nu}^{(0)}$ pode-se escrever $B_{\mu\nu}(x) = W^{-1}(x) B_{\mu\nu}^{(0)} W(x)$. Se todas as componentes de $B_{\mu\nu}^{(0)}$ comutarem entre si, pode-se concluir que κ se anula. A partir daí, podem ser construídas quantidades conservadas. Não iremos detalhar aqui este tipo de condição já que para o nosso trabalho o segundo tipo é bem mais relevante. Para detalhes desta construção indicamos a bibliografia já citada neste capítulo.

3.2.2 Uma forma de condição local

Consideramos uma álgebra de Lie não semi-simples com um ideal abeliano P . Se A_μ pertence a esta álgebra e $B_{\mu\nu}$ pertence ao ideal abeliano, resulta que a quantidade $W^{-1} B_{\mu\nu} W$ também pertence ao ideal. Daí obtemos que $[T(B, A, \vartheta), T(B, A, \zeta)] = 0$. Usando a condição $D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu} = 0$, obtemos imediatamente que $\kappa = 0$. Então $\delta V V^{-1}$ é zero e V fica independente de Σ caso a fronteira seja fixa.

Iremos analisar mais detalhadamente o caso tridimensional. Então, nosso A_μ é escrito explicitamente $A_\mu = A_\mu^a T_a$ e $B_{\mu\nu}$ é dado por $B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}^i P_i$. As relações de comutação entre os geradores são:

$$[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c \quad (3.21)$$

$$[T_a, P_i] = P_j R_{ji}(T_a) \quad (3.22)$$

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (3.23)$$

onde R_{ji} é uma representação matricial da álgebra. É importante observar que a álgebra acima é não-semisimples. Que R é, de fato, uma representação matricial pode ser verificado a partir da identidade de Jacobi. Além disso, pode ser provado que se G é uma álgebra não semisimples de dimensão finita e se P é seu ideal maximamente solúvel, pode-se escrever $G = H + P$ onde H é uma subálgebra semisimples de G . No caso tridimensional, é conveniente introduzir o dual de $B_{\mu\nu}$ definido por

$$\tilde{B}^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho}. \quad (3.24)$$

As condições *locais* de integrabilidade (que fazem V independente da superfície) são, portanto:

$$D_\mu \tilde{B}^\mu = 0, \quad F_{\mu\nu} = 0. \quad (3.25)$$

Pode-se dizer que "o preço a se pagar" para obter condições locais é a introdução de uma álgebra de Lie não semisimples, embora esta álgebra possua uma subálgebra a qual por sua vez é semisimples. A partir das condições acima, podemos finalmente construir as quantidades conservadas que estamos procurando. Temos que as correntes definidas por

$$J_\mu \equiv W^{-1} \tilde{B}_\mu W \quad (3.26)$$

são conservadas, ou seja,

$$\partial^\mu J_\mu = 0. \quad (3.27)$$

Um fato importante é que como $B_{\mu\nu}$ pertence à uma subálgebra *abeliana* não é necessário utilizar o ordenamento de superfície nos cálculos do teorema de Stokes.

As condições de curvatura nula $D_\mu \tilde{B}^\mu = 0$ e $F_{\mu\nu} = 0$ são invariantes sob a transformação de gauge (3.28-3.29)

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu \quad (3.28)$$

$$B_{\mu\nu} \longrightarrow B_{\mu\nu} + D_{\mu\nu} \alpha_\nu - D_\nu \alpha_\mu \quad (3.29)$$

onde α_μ é um vetor que assume valores no ideal abeliano P . Esta invariância resulta de que $[D_\mu, D_\nu] = 0$, isto é, a conexão A_μ é plana.

Estas condições também são invariantes sob as transformações (3.30-3.31)

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu^g = g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \quad (3.30)$$

$$B_{\mu\nu} \longrightarrow B_{\mu\nu}^g = gB_{\mu\nu}g^{-1} \quad (3.31)$$

onde g é um elemento do grupo $g \equiv \exp G$. As correntes J_μ são invariantes em relação à segunda dupla de transformações acima. Isto ocorre pois estas transformações implicam que $W(x) \longrightarrow g(x)W(x)g(x_0)^{-1}$ com $x_0 = \infty$. Fazendo $g(\infty) = 1$ resulta $J_\mu \rightarrow J_\mu$. Já em relação à primeira dupla (3.28-3.29) tem-se

$$J_\mu \longrightarrow J_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\nu (W^{-1} \alpha^\rho W). \quad (3.32)$$

A álgebra das transformações (3.28-3.29) é abeliana. Já a álgebra das transformações (3.30-3.31) é isomorfa à algebra dos T 's. Estas duas duplas não comutam entre si. De fato, fazendo (3.30-3.31) e depois (3.28-3.29) resulta

$$A_\mu \longrightarrow gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \quad (3.33)$$

$$B_{\mu\nu} \longrightarrow gB_{\mu\nu}g^{-1} + D_\mu^{A^g} \alpha_\nu - D_\nu^{A^g} \alpha_\mu. \quad (3.34)$$

Fazendo (3.28-3.29) e depois (3.30-3.31) fica

$$A_\mu \longrightarrow gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \quad (3.35)$$

$$B_{\mu\nu} \longrightarrow gB_{\mu\nu}g^{-1} + g(D_\mu^A \alpha_\nu - D_\nu^A \alpha_\mu)g^{-1}, \quad (3.36)$$

onde tem-se que $D_\mu^{A^g} \alpha_\nu = g(D_\mu^A (g^{-1} \alpha_\nu g))g^{-1}$.

No caso infinitesimal (com $g \sim 1 + \varepsilon$) temos

$$[\delta_\varepsilon, \delta_\alpha] A_\mu = 0 \quad (3.37)$$

$$[\delta_\varepsilon, \delta_\alpha] B_{\mu\nu} = D_\mu^A [\varepsilon, a_\nu] - D_\nu^A [\varepsilon, a_\mu] \quad (3.38)$$

e resulta que a álgebra total de (3.28-3.29) e (3.30-3.31) é isomorfa à álgebra G definida no início desta subseção.

3.3 Modelos em $SU(2)/U(1)$

Vamos analisar nesta tese especificamente modelos com campos definidos na esfera S^2 . Estes campos são denotados por $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ com $|\vec{n}|^2 = 1$. Podemos utilizar também a famosa projeção estereográfica no plano com u sendo um campo escalar complexo

$$\vec{n} = \frac{1}{(1 + |u|^2)} (u + u^*, -i(u - u^*), |u|^2 - 1) \quad (3.39)$$

Descreveremos brevemente as características da variedade S^2 com relação à teoria de grupos[25]. A esfera S^2 é difeomórfica ao coset $SO(3)/SO(2)$. Apesar disso, S^2 não admite uma estrutura de grupo. Se analisarmos a ação de $SO(3)$ em \mathbb{R}^3 , observamos que $SO(3)$ age transitivamente em S^2 , ou seja, quaisquer dois pontos de S^2 podem ser conectados pela ação de um elemento de $SO(3)$. Poder-se-ia fazer de forma ingênua a identificação $SO(3) \simeq S^2$. Porém, ocorre que $SO(3)$ possui um "excesso de parâmetros livres" em relação ao número de parâmetros necessários para descrever S^2 . Uma forma simples de verificar este fato é analisar a ação do subgrupo $SO(2) \in SO(3)$ em relação, por exemplo, ao ponto $(1, 0, 0)$ na esfera unitária. Ora, este ponto fica inalterado pela ação de $SO(2)$. De uma maneira mais formal, dizemos que $SO(2)$ é o *grupo de isotropia* deste elemento de S^2 . Então, a identificação correta é $S^2 \simeq SO(3)/SO(2)$. Como $SO(2)$ não é um subgrupo normal de $SO(3)$ pode ser provado que S^2 não admite uma estrutura de grupo. Temos também que $SO(3) \simeq SU(2)/Z_2$. Nesta expressão, Z_2 é o grupo cíclico finito de ordem 2. Agora, os elementos do subgrupo $U(1)$ no coset $SU(2)/U(1)$ são dados simplesmente por $g = \exp(i\theta T_3)$ (T_3 gerador). Desta forma, temos que $g(0)=1$ e $g(2\pi) = -1$ de tal forma que $U(1)$ tem o dobro dos elementos de $SO(2)$. Portanto, $SO(2) \simeq U(1)/Z_2$. Obtemos finalmente que $S^2 \simeq SU(2)/U(1)$. Este fato é importante para a construção explícita das condições de curvatura nula neste espaço.

Temos que $U(1)$ é invariante sob a seguinte transformação[26]

$$\sigma(T_3) = T_3 \quad \sigma(T_{\pm}) = -T_{\pm}, \quad (3.40)$$

já que seus elementos dependem apenas de T_3 . Nesta transformação T_3, T_{\pm} são os geradores usuais de $SU(2)$ com as relações de comutação bem conhecidas $[T_3, T_{\pm}] = \pm T_{\pm}$ e $[T_+, T_-] = 2T_3$. A transformação acima é classificada como um automorfismo involutivo de $SU(2)$ e aplicada em um elemento genérico T da álgebra resulta em

$$\sigma(T) = \exp(i\pi T_3)T \exp(-i\pi T_3). \quad (3.41)$$

O próximo passo é observar que $SU(2)/U(1)$ pode ser parametrizado por uma variável definida como $x(g) \equiv g\sigma(g)^{-1}$ onde g é um elemento de $SU(2)$ como consequência do fato de que $x(g) = x(kg)$ se $k \in U(1)$. Também observa-se que $\sigma(x) = x^{-1}$.

Inicialmente iremos descrever A_{μ} e \tilde{B}_{μ} na representação definidora de $SU(2)$, calculando as correntes conservadas resultantes. Depois indicaremos o resultado numa

representação genérica. Para tal propósito, escolhemos o elemento de grupo W como

$$W \equiv \exp(iuT_+) \exp(\varphi T_3) \exp(iu^*T_-), \quad \varphi = \ln(1 + |u|^2). \quad (3.42)$$

Escrevendo W explicitamente na representação definidora de $SU(2)$, obtém-se

$$R(W) = \frac{1}{\sqrt{1 + |u|^2}} \begin{pmatrix} 1 & iu \\ iu^* & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Já sabemos que $A_\mu = -\partial_\mu W W^{-1}$. Usando nossa decomposição de W , iremos escrever A_μ explicitamente em termos dos geradores T 's da álgebra. Além disso, vamos escrever \tilde{B}_μ em termos de $P_{\pm 1}^{(1)}$ que são os autoestados de T_3 (na representação de triplete) com autovalor ± 1 . Portanto,

$$A_\mu = \frac{1}{(1 + |u|^2)} (-i\partial_\mu u T_+ - i\partial_\mu u^* T_- + (u\partial_\mu u^* - u^*\partial_\mu u) T_3) \quad (3.44)$$

$$\tilde{B}_\mu = \frac{1}{(1 + |u|^2)} (\kappa_\mu P_{+1}^{(1)} - \kappa_\mu^* P_{-1}^{(1)}) \quad (3.45)$$

Na expressão para \tilde{B}_μ temos que κ_μ é um funcional qualquer de u , u^* e de suas derivadas. A condição $F_{\mu\nu} = 0$ é satisfeita automaticamente devido à escolha feita para A_μ . Embora a condição para A_μ não imponha nenhum vínculo para os campos, iremos supor que a condição seguinte é válida

$$\text{Im}(\kappa_\mu \partial_\mu u^*) = 0 \quad (3.46)$$

A partir desta condição, usando $D_\mu \tilde{B}_\mu = 0$ resulta

$$(1 + |u|^2) \partial^\mu \kappa_\mu - 2u^* \kappa_\mu \partial^\mu u = 0 \quad (3.47)$$

e o complexo conjugado desta equação.

Existem três correntes conservadas correspondendo aos três estados da representação de triplete que são

$$J_\mu^{(1)} = \sum_{m=-1}^1 J_\mu^{(1,m)} P_m^{(1)} \quad (3.48)$$

onde

$$J_\mu^{(1,1)} = \frac{\kappa_\mu + \kappa_\mu^* u^2}{(1 + |u|^2)^2} \quad (3.49)$$

$$J_\mu^{(1,0)} = \frac{i\sqrt{2}(\kappa_\mu^* u - \kappa_\mu u^*)}{(1 + |u|^2)^2} \quad (3.50)$$

$$J_\mu^{(1,-1)} = -J_\mu^{(1,1)*} \quad (3.51)$$

Agora, para uma representação genérica de spin j de $sl(2)$, temos as relações de comutação

$$[T_3, P_m^{(j)}] = mP_m^{(j)}$$

$$[P_m^{(j)}, P_{m'}^{(j')}] = 0$$

$$[T_\pm, P_m^{(j)}] = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} P_{m \pm 1}^{(j)}$$

nas quais, como usual, $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$. Portanto, teríamos $2j+1$ correntes conservadas. Contudo, como j pode ser escolhido livremente, temos na realidade *infinitas correntes conservadas*. Podemos ver isto escrevendo explicitamente $A_\mu = A_\mu^a T_a$ (e portanto A_μ não depende da representação) e $\tilde{B}^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho}$ com $B_{\nu\rho} = B_{\nu\rho}^i P_i$. Como $B_{\nu\rho}$ vive numa representação temos $2j+1$ elementos distintos quando $m \in [-j, j]$ e portanto as $2j+1$ cargas conservadas. Como a representação é qualquer segue o resultado.

3.3.1 Exemplo: O modelo de Skyrme-Faddeev

Reescrevendo a Lagrangiana do modelo de Skyrme (seção 1.1) na forma mais conveniente para nossos propósitos atuais, obtemos

$$L = m^2 (\partial \vec{n})^2 - \eta_0 \frac{H_{\mu\nu}^2}{e^2} + \lambda (\vec{n}^2 - 1) \quad (3.52)$$

onde o vínculo é explicitado pelo multiplicador de Lagrange λ e $\eta_0 = \pm 1$ determina a assinatura da métrica de Minkovski.

As equações de movimento são dadas por

$$(1 + |u|^2) \partial^\mu L_\mu - 2u^* (L^\mu \partial_\mu u) = 0. \quad (3.53)$$

Nesta equação, L_μ é definido por

$$L_\mu \equiv m^2 \partial_\mu u - \eta_0 \frac{4}{e^2} \frac{K_\mu}{(1 + |u|^2)^2} \quad (3.54)$$

e K_μ é dado por $K_\mu = (\partial^\nu u^* \partial_\nu u) \partial_\mu u - (\partial_\nu u)^2 \partial_\mu u^*$.

Podemos observar que $\text{Im}(L_\mu \partial_\mu u^*) = 0$. Portanto, se fizermos a correspondência $\kappa_\mu \rightarrow L_\mu$ a condição de integrabilidade é satisfeita e o modelo tem uma representação

de curvatura nula em termos de A_μ e \tilde{B}_μ [26]. As correntes associadas são justamente as correntes J_μ da seção anterior e são as correntes de Noether relacionadas à invariância do modelo sob a simetria $O(3)$. Porém, no modelo de Skyrme-Faddeev temos

$$L_\mu \partial^\mu u = m^2 (\partial u)^2$$

e para se obter infinitas correntes deveríamos ter $L_\mu \partial^\mu u = 0$ (já que identificamos $\kappa_\mu \rightarrow L_\mu$). De fato, como

$$J_G^\mu = i \left(\kappa^\mu \frac{\partial G}{\partial u} - \kappa^{\mu*} \frac{\partial G}{\partial u^*} \right)$$

usando que $\partial^\mu L_\mu = 0$ e $L^\mu \partial_\mu u = 0$, obtemos imediatamente $\partial_\mu J_G^\mu = 0$. Para se obter esta condição, pode-se impor $(\partial u)^2 = 0$ ou $m^2 = 0$. Inicialmente foi proposta em [26] a opção por um submodelo com $(\partial u)^2 = 0$, já que a segunda opção ($m^2 = 0$) leva à soluções estáticas que são instáveis por transformações de escala no caso de 3+1 dimensões (instabilidade pelo teorema de Derrick). Porém, pode-se observar que este problema pode ser contornado utilizando-se um submodelo com $L = \frac{\eta_0}{e^2} (H_{\mu\nu}^2)^{3/4}$ onde o expoente 3/4 provê a estabilidade necessária. Esta abordagem foi levada a termo no caso euclidiano inicialmente em [16]. Esta é a linha de pesquisa desenvolvida nesta tese. Além disso, é importante observar que, ao procurar soluções que *não são* estáticas (como fazemos em $S^3 \times \mathbb{R}$), a análise precedente sobre estabilidade não se aplica.

3.4 Correntes Conservadas e Difeomorfismos da Esfera

Os modelos estudados nesta tese possuem uma Lagrangiana da forma

$$L \sim L \left(\frac{h^2}{\gamma^2} \right) \tag{3.55}$$

na qual $h^2 = h_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$ onde $h_{\mu\nu} = \partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u^* \partial_\mu u$. As equações de movimento são do tipo

$$\partial^\mu (\text{fatores} \times K_\mu) = 0, \tag{3.56}$$

onde $K_\mu = (\partial^\nu u^* \partial_\nu u) \partial_\mu u - (\partial_\nu u)^2 \partial_\mu u^*$. Conforme nossa análise anterior, sabemos que teremos infinitas correntes conservadas dadas por

$$J_G^\mu = i \left(\kappa^\mu \frac{\partial G}{\partial u} - \kappa^{\mu*} \frac{\partial G}{\partial u^*} \right) \tag{3.57}$$

com G sendo uma função qualquer de u e u^* , mas *não* de suas derivadas. O fator imaginário foi colocado por conveniência já que obteremos uma corrente real se G for real. Pode-se provar que estas correntes são de fato conservadas, utilizando a equação de movimento acima e as seguintes identidades para K_μ

$$K^\mu \partial_\mu u = 0 \quad (3.58)$$

$$\text{Im}(K^\mu \partial_\mu u^*) = 0. \quad (3.59)$$

A idéia é calcular a álgebra destas correntes sob o parênteses de Poisson e mostrar que, na verdade, esta álgebra é a *álgebra dos difeomorfismos que preservam a área de S^2* [6]. Ou seja, temos uma interpretação geométrica para as correntes J_G^μ . Escolhemos a título de ilustração o modelo dado pela Lagrangiana[6]

$$L = -\frac{2}{3} \left(\frac{H_{\mu\nu}^2}{8} \right)^{3/4}.$$

O modelo no espaço euclidiano é o mesmo exceto por mudanças triviais nas constantes. No caso $S^3 \times R$ não temos o fator $3/4$, mas o raciocínio é completamente análogo.

Para executar este programa, inicialmente calculamos π , o momento canonicamente conjugado ao campo u .

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{1}{(1 + |u|^2)^3 (K \partial u^*)^{1/4}} \left[\dot{u}^* (\nabla u \nabla u^*) - \dot{u} (\nabla u^* \nabla u^*) \right] \quad (3.60)$$

A expressão para $\pi^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^*}$ é obtida trivialmente por conjugação complexa. Os parênteses de Poisson não nulos para tempos iguais são

$$\{u(\vec{x}), \pi(\vec{y})\} = \{u^*(\vec{x}), \pi^*(\vec{y})\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \vec{x}, \vec{y} \in R^3. \quad (3.61)$$

As componentes temporais das correntes são escritas em termos dos momentos como

$$J_G^0 = i(1 + |u|^2)^2 \left(\pi \frac{\partial G}{\partial u^*} - \pi^* \frac{\partial G}{\partial u} \right) \quad (3.62)$$

e, a partir daí, se obtém

$$\{J_{G_1}^0(\vec{x}), J_{G_2}^0(\vec{y})\} = J_{G_{12}}^0(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.63)$$

com

$$G_{12} = i(1 + |u|^2)^2 \left(\frac{\partial G_1}{\partial u} \frac{\partial G_2}{\partial u^*} - \frac{\partial G_1}{\partial u^*} \frac{\partial G_2}{\partial u} \right). \quad (3.64)$$

Calculando os parênteses de Poisson para as cargas associadas, obtemos que $\{Q_{G_1}, Q_{G_2}\} = Q_{G_{12}}$ e, portanto, nossa álgebra fecha.

Agora iremos demonstrar que esta álgebra é a álgebra de Lie do grupo de difeomorfismos que preserva a área da esfera. Para tal, decompomos a função complexa u como $u = u^1 + iu^2$. Por definição, a forma de área é dada por

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{\det g} \varepsilon_{ab} du^a \wedge du^b. \quad (3.65)$$

Na igualdade acima g é o determinante da métrica g_{ab} e ε_{ab} é o símbolo de Levi-Civita usual ($\varepsilon_{12} = 1$). A métrica em termos de u_1 e u_2 é diagonal

$$g_{ab}(u) = \frac{4}{(1 + (u^1)^2 + (u^2)^2)^2} \delta_{ab} \quad (3.66)$$

e, com seu auxílio, podemos escrever a área explicitamente como

$$A = \frac{2}{(1 + (u_1)^2 + (u_2)^2)^2} \varepsilon_{ab} du^a \wedge du^b. \quad (3.67)$$

Seja ϕ um difeomorfismo de área da esfera. Impomos a seguinte condição para que a forma de área seja invariante:

$$\sqrt{\det g(\phi(u))} \det \left| \frac{\partial \phi^a(u)}{\partial u^b} \right| = \sqrt{\det g(u)}. \quad (3.68)$$

Como queremos construir uma álgebra de Lie, é necessário analisar o caso infinitesimal da transformação $\phi^a = u^a + \varepsilon X^a(u)$ e obter a forma infinitesimal da igualdade a qual se reduz à seguinte equação diferencial para os geradores $X^a(u)$:

$$\partial_a \left(\sqrt{\det g(u)} X^a(u) \right) = 0. \quad (3.69)$$

Esta equação é facilmente resolvida em termos de uma função arbitrária $F(u^1, u^2)$, sendo sua solução geral

$$X_F^a(u) = \frac{1}{\sqrt{\det g(u)}} \varepsilon^{ab} \frac{\partial F}{\partial u^b}. \quad (3.70)$$

Calculando o comutador, temos $[X_{F_1}, X_{F_2}] = X_{F_{12}}$ onde F_{12} é

$$F_{12}(u) = -\frac{1}{\sqrt{\det g(u)}} \varepsilon^{ab} \frac{\partial F_1}{\partial u^a} \frac{\partial F_2}{\partial u^b}. \quad (3.71)$$

Para estabelecer o isomorfismo entre as álgebras, basta retornar às variáveis u e u^* e fazer a correspondência $X_{F/2} \leftrightarrow Q_F$ pois

$$F_{12} = \frac{i}{2} (1 + |u|^2)^2 \left(\frac{\partial F_1}{\partial u} \frac{\partial F_2}{\partial u^*} - \frac{\partial F_1}{\partial u^*} \frac{\partial F_2}{\partial u} \right). \quad (3.72)$$

As correntes J_G^μ são, na verdade, correntes de Noether conservadas devido à invariância da Lagrangiana em relação aos difeomorfismos de área. Para explicitar este fato, escrevemos a forma de área em termos de u e u^* como

$$A = \frac{2i}{(1 + |u|^2)^2} du \wedge du^* \quad (3.73)$$

e observamos que

$$\frac{1}{2} h_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{i}{(1 + |u|^2)^2} (\partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u^* \partial_\mu u) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{2i}{(1 + |u|^2)^2} du \wedge du^*. \quad (3.74)$$

Na expressão acima, é imediato que $\frac{1}{2} h_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ é o pull-back da forma de área de S^2 e, portanto, invariante sob seus difeomorfismos de área. Como a Lagrangiana é construída a partir de $h_{\mu\nu}$, ela também é invariante, e finalmente concluímos que as correntes são correntes de Noether.

Capítulo 4

Simetrias, Linearização e Construção de Ansatz

4.1 Modelos com solução tipo Hopfion

Serão analisados modelos com soluções solitônicas que possuam as características explicadas no capítulo anterior. Nossos modelos sempre são definidos a partir de Lagrangianas $L = L(H_{\mu\nu}^2)$, conforme já definimos. Estes modelos possuem soluções tipo sólton com a assim chamada carga de Hopf, além das cargas de Noether que são usuais nas teorias clássicas de campo. Iremos, inicialmente, considerar como espaço alvos as variedades bidimensionais S^2, \mathbb{R}^2 além do plano hiperbólico.

Já é sabido que esta classe de modelos possui infinitas correntes conservadas e, portanto, deve ser integrável. Porém, resta a questão de como resolver as equações de movimento altamente não-lineares que são obtidas. Para isto, utilizaremos uma variante do método clássico de Lie [2]. O procedimento é descobrir as simetrias das equações de movimento e, a partir destas simetrias, propor ansatz que as solucionem. Dado o caráter não-linear destas equações, a procura de soluções gerais é um problema extremamente complexo. Porém, a descoberta de soluções particulares com propriedades interessantes já é de grande interesse físico. Nesta linha de pesquisa no artigo [16], foram construídas soluções tipo Hopfion para um espaço \mathbb{R}^n qualquer.

Nesta tese generalizamos o procedimento do citado artigo para um espaço-tempo curvo *geral*, encontrando as condições de simetria para as equações de movimento. A motivação para esta generalização foi a observação de que era possível propor ansatz dependentes do tempo no espaço-tempo $S^3 \times \mathbb{R}$. Ocorre que o tempo é uma coordenada obviamente não compacta e a teoria desenvolvida antes [16] utilizava apenas coordenadas compactas. Esta questão é tratada no final deste capítulo. Então resolvemos explicitamente estas condições para alguns casos particulares como o espaço-tempo de Minkowski e o espaço-tempo $S^3 \times \mathbb{R}$. A partir disto, foi construída uma solução explícita no caso de $S^3 \times \mathbb{R}$ a qual foi publicada em [20]. No capítulo 5, propomos um novo ansatz para o espaço-tempo de Minkowski, o qual já foi estudado

em[27]

Inicialmente iremos fazer uma revisão dos resultados de [16] já que é o caso conceitualmente mais simples, uma vez que o espaço-tempo é suposto euclidiano. Depois faremos a citada generalização para um espaço-tempo genérico. Além disso, serão explicadas algumas peculiaridades da Lagrangiana e das equações de movimento resultantes as quais possibilitam a construção de ansatz levando à separabilidade das equações de movimento e portanto à sua resolução. Finalmente, em capítulos posteriores explicaremos em detalhe os resultados já citados em $S^3 \times \mathbb{R}$.

4.2 O caso euclidiano

As equações de movimento obtidas a partir da condição de curvatura nula para nossa classe de teorias são da forma

$$\kappa^\mu \partial_\mu u^* = 0 \quad \kappa_\mu \partial^\mu u = 0 \quad \partial^\mu u^* \kappa_\mu - \partial^\mu u \partial^\mu \kappa_\mu^* = 0, \quad (4.1)$$

com κ_μ uma função complexa de u , u^* e de suas derivadas. Como possuímos cinco equações reais para somente dois campos (reais) o sistema é vinculado. Porém, existe um conjunto de funcionais κ_μ para o qual os vínculos são automaticamente satisfeitos. Este conjunto é

$$\kappa_\mu = F h_{\mu\nu} \partial^\nu u \quad (4.2)$$

com $F(u, u^*)$ uma função *real*. A quantidade acima resolve identicamente as duas últimas equações acima. Foi provado em [16] que as únicas teorias sem vínculos *com Lagrangiana* são aquelas da forma $L(h^2/f^2)$ onde f^2 é uma função real de u u^* e $h^2 = h_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$. No caso citado, foram analisadas teorias com soluções estáticas em $d + 1$ dimensões. Neste caso, levando em conta o teorema de Derrick [17][1], foi escolhida a forma

$$L = \left(\frac{h^2}{2f^2} \right)^{\frac{d}{4}} \quad (4.3)$$

com d dimensões espaciais.

Foi executada uma análise detalhada das simetrias das equações de movimento. Estas simetrias se dividem em dois conjuntos, a saber, as simetrias do espaço-tempo e as simetrias do espaço alvo. Estes dois tipos de simetrias sempre comutam entre si. Para soluções estáticas, as simetrias espaço-temporais correspondem ao grupo conforme $O(d+1, 1)$. Para soluções não estáticas, resta apenas uma simetria de escala além do grupo de Poincaré. As simetrias do espaço alvo consistem dos difeomorfismos

de área esperados tendo em vista nossa análise anterior, além de uma simetria extra das equações de movimento somente (não da Lagrangiana).

É interessante observar que no caso tridimensional é possível utilizar o procedimento acima com o grupo conforme $O(4, 1)$ para introduzir duas variáveis angulares e obter uma EDO, a qual pode ser solucionada levando à hopfions em \mathbb{R}^3 [26] e explicando a origem do ansatz utilizado nas referências citadas.

Portanto, o modelo que foi estudado em [16] é definido em um espaço tempo de dimensão $d + 1$ com Lagrangiana

$$L = \left(\frac{h^2}{2f^2} \right)^{\frac{d}{4}}, \quad (4.4)$$

com h^2 definido de forma usual e $f^2 = (1 + uu^*)^2$ no caso do espaço alvo S^2 . Da Lagrangiana acima obtemos a equação de movimento

$$\varepsilon = (d - 4)h_{\mu\nu}\partial^\nu u\partial^\mu h^2 + 4h^2\partial^\mu h_{\mu\nu}\partial^\nu u + (d - 2)(h^2)^2\partial_{u^*}\log f = 0$$

Procederemos, a seguir, ao estudo das simetrias desta equação. Vamos separar as simetrias em dois conjuntos: simetrias espaço-temporais e simetrias do espaço alvo.

4.2.1 Simetrias do espaço-tempo

Fazendo a transformação $x^\rho \longrightarrow x^\rho + \xi^\rho$ temos que, para uma equação diferencial dada

$$\varepsilon(x, u(x), \partial_\mu u(x), \partial_{\mu\nu} u(x)) = 0, \quad (4.5)$$

o campo vetorial

$$V = \sum_{\rho} \xi^\rho \partial_\rho \quad (4.6)$$

gera uma simetria das equações de movimento se

$$\delta\varepsilon(x, u(x), \partial_\mu u(x), \partial_{\mu\nu} u(x)) = \Lambda_1\varepsilon + \Lambda_2\varepsilon^*, \quad (4.7)$$

com variações dadas por

$$\delta x^\rho = \xi^\rho$$

$$\delta u = 0$$

$$\delta(\partial_\mu u) = -\partial_\mu \xi^\nu \partial_\nu u$$

$$\delta(\partial_\nu \partial_\mu u) = -(\partial_\nu \partial_\mu \xi^\rho) \partial_\rho u - \partial_\mu \xi^\rho \partial_\rho \partial_\nu u - \partial_\mu \xi^\rho \partial_\rho \partial_\mu u$$

Pode-se observar que na expressão acima já levamos em conta o fato de $\varepsilon = 0$ ser uma equação complexa. Os detalhes da dedução podem ser encontrados na referência [16]. Aqui, iremos reproduzir o resultado

$$\delta\varepsilon = -8D\varepsilon - 4(d - d_{\text{eff}})h^2 \partial^\mu D h_{\mu\nu} \partial^\nu u. \quad (4.8)$$

O índice *eff* na dimensão d tem o significado explicado a seguir. É relevante analisar soluções que, embora definidas num espaço-tempo $d + 1$ dimensional, são independentes de algumas das coordenadas deste espaço-tempo. Isto ocorre, por exemplo, quando consideramos soluções estáticas.

Analisando a expressão acima, podemos concluir que:

- se $d_{\text{eff}} = d$, ou seja, para soluções estáticas, a equação define uma simetria das equações de movimento para todo D
- se $d_{\text{eff}} \neq d$, a equação define uma simetria apenas se $\partial^\mu D = 0$

Desta forma

$$\partial_\mu \partial_\nu D = 0 \quad \forall u, v. \quad (4.9)$$

Portanto, a função $D(x^\mu)$ deve ser linear em x^μ . Neste caso, os campos vetoriais $\xi^{(\mu)\nu}$ com componentes

$$\xi^{(\mu)\nu} = x^\mu x^\nu - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} x^2 \quad (4.10)$$

são soluções das equações no caso $D^{(\mu)} = x^\mu$. Quando $D = \text{constante}$, a solução é simplesmente $\xi^\nu = x^\nu$. Esta solução representa uma dilatação. Se a constante for nula, ($D = 0$) a solução corresponde ao grupo de Poincaré. Finalmente, se $d_{\text{eff}} \neq d$, as transformações acima não participam e restam apenas as simetrias de Poincaré e dilatações.

4.2.2 Simetrias do espaço alvo

Agora supomos $\delta x^\mu = 0$ e nosso operador é dado por

$$V = \phi(u, u^*) \partial_u + \phi^*(u, u^*) \partial_u^* . \quad (4.11)$$

Fazendo as variações de ε , obtemos

$$\delta\varepsilon = (4\partial_\mu\phi + 3\partial_{u^*}\phi^*)\varepsilon - \partial_{u^*}\phi\varepsilon^* - (d-2)Q(h^2)^2 \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{aligned} Q &= \partial_{u^*}(\partial_u\phi + \partial_{u^*}\phi^*) - \partial_u \log f \partial_{u^*}\phi \\ &\quad - \partial_{u^*} \log f \partial_{u^*}\phi^* - \partial_u \partial_{u^*} \log(f\phi) \\ &\quad - \partial_{u^*} \partial_{u^*} \log(f\phi^*). \end{aligned}$$

O caso $d = 2$ é trivial, já que temos uma simetria para qualquer difeomorfismo no espaço alvo. No caso $d \neq 2$ temos uma simetria apenas se $Q = 0$.

O resultado final é que as simetrias correspondem a duas possibilidades. Uma delas é que as simetrias são os difeomorfismos do espaço alvo que preservam a área.

O outro caso é de uma transformação que não preserva a área definida por $\phi = (1 + uu^*)u$. Porém, esta transformação não é uma simetria da ação. No entanto, ela pode ser combinada com a simetria espaço-temporal de escala para se obter uma simetria da ação e uma corrente de Noether extra. Este caso é tratado em detalhe em [16].

4.2.3 Soluções

Vamos considerar as soluções estáticas. Neste caso temos $d_{\text{eff}} = d$. Então, as simetrias da equação de movimento são

$$x'^i = x^i + (\varepsilon \cdot x)x^i - \frac{1}{2}x^2\varepsilon^i \quad i = 1, \dots, d \quad (4.13)$$

Estas são as simetrias conformes no espaço euclidiano d dimensional e serão utilizadas para encontrar soluções estáticas das equações de movimento. Iremos, portanto, definir as simetrias conformes em \mathbb{R}^n [16]. Para fazer isto, consideramos os pontos do espaço euclidiano como esferas de raio zero. A equação para esferas é

$$\alpha \vec{x}^2 - 2\vec{\beta} \cdot \vec{x} + \gamma = 0 \quad (4.14)$$

que pode ser colocada na forma conveniente

$$\left(\vec{x} - \frac{\vec{\beta}}{\alpha} \right)^2 = \frac{\vec{\beta}^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2} \quad (4.15)$$

Então o espaço euclidiano é descrito pelo par de equações

$$\vec{\beta}^2 - \alpha\gamma = 0 \quad (4.16)$$

$$\vec{x} = \frac{\vec{\beta}}{\alpha} \quad (4.17)$$

Qualquer transformação linear nos parâmetros α , $\vec{\beta}$ e γ que preserva (4.16) age em \vec{x} através de (4.17). Estas são as transformações conformes. Podemos escrever (4.16) na forma

$$\vec{\beta}^2 - \alpha\gamma = \sum_{i=1}^d \beta_i^2 + \left(\frac{a\alpha - a^{-1}\gamma}{2} \right)^2 - \left(\frac{a\alpha + a^{-1}\gamma}{2} \right)^2 \quad (4.18)$$

onde a define uma escala arbitrária. O grupo que deixa esta forma quadrática invariante é o grupo conforme $O(d+1, 1)$. A partir deste conjunto de simetrias da equação diferencial determinamos o ansatz usando o procedimento a seguir. Em primeiro lugar, sabemos que o grupo conforme pode ser expresso como "rotações" num espaço com parâmetros extras conforme deduzido acima. A seguir, determinamos o número máximo de "rotações" que comutam entre si conforme ao fato da dimensão do espaço-tempo ser par ou ímpar. Escrevendo $d = 2n$ ou $d = 2n - 1$ se d é par ou ímpar, vemos que o número máximo de rotações *comutantes* é n . Aqui é importante ressaltar que, embora em [16] tenham sido utilizadas apenas transformações compactas, tal condição não é necessária para a construção do ansatz, conforme provaremos adiante. Ou seja, o que importa é que temos um conjunto de simetrias que comutam entre si.

Assim, são definidos campos vetoriais $\partial_{\theta_i} = x_{2i} \partial_{x_{2i-1}} - x_{2i-1} \partial_{x_{2i}}$ ($i = 1, \dots, n-1$) e $\partial_{\theta_n} = \frac{x_{2n-1}}{a} \sum_{i \neq 2n-1} x_i \partial_{x_i} + \frac{1}{2a} \left(a^2 + x_{2n-1}^2 - \sum_{i \neq 2n-1} x_i^2 \right) \partial_{x_{2n-1}}$. É feita uma mudança de coordenadas de tal forma que as novas coordenadas θ_i atuam de forma comutativa $\partial_{\theta_i} \partial_{\theta_j} = \partial_{\theta_j} \partial_{\theta_i}$. Então, é imposta a condição ($(j = 1, \dots, n)$) de invariância por um subgrupo

$$[\partial_{\theta_j} - im_j(u \partial_u - u^* \partial_{u^*})]u = 0 \quad (4.19)$$

a partir da qual se obtém os ansatz $u = R(\zeta_l) e^{im_j \theta_j}$ se a dimensão for ímpar e $u = S(\rho_l) e^{im_j \theta_j}$ se a dimensão foi par, onde temos diferenças nas definições de ζ_l e ρ_l . É interessante detalhar a origem da expressão (4.19). Ela representa invariância pelo subgrupo $(U_\theta(1) \times U_\alpha(1))_{diag}$. A intuição geométrica que levou à esta condição é de

que as rotações no espaço-tempo seriam "compensadas" por rotações no espaço alvo, ficando o campo invariante como um todo. Portanto, a expressão (4.19) usada para determinar a forma funcional de $u(x^\mu)$ corresponde *exatamente* a impor que $u(x^\mu)$ seja invariante em relação ao subgrupo diagonal $H = (U_\theta(1) \times U_\alpha(1))_{diag}$, onde $U_\theta(1)$ representa as "rotações" que comutam no espaço-tempo e $U_\alpha(1)$ as transformações de fase $u' = e^{i\alpha}u$, que são rotações no espaço alvo, como podemos verificar facilmente fazendo a projeção estereográfica de S^2 no plano complexo. Este subgrupo tem geradores dados por $T = \partial_\theta - im(u\partial_u - u^*\partial_{u^*})$ e a condição $Tu = 0$ é justamente a equação diferencial (4.19). Detalhando o procedimento delineado acima, temos os seguintes casos .

No caso de d ímpar, as primeiras $n - 1$ rotações podem ser tomadas nos planos $(\beta_{2j-1}, \beta_{2j})$, ou seja,

$$\delta\beta_{2j-1} = \beta_{2j}, \quad \delta\beta_{2j} = -\beta_{2j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (4.20)$$

A última é a rotação $(\beta_{2n-1}, \frac{a\alpha - a^{-1}\gamma}{2})$

$$\delta\beta_{2n-1} = \frac{a\alpha - a^{-1}\gamma}{2} \quad (4.21)$$

$$\delta\frac{a\alpha - a^{-1}\gamma}{2} = -\beta_{2n-1} \quad (4.22)$$

$$\delta\frac{a\alpha + a^{-1}\gamma}{2} = 0. \quad (4.23)$$

No caso de d par temos 2 possibilidades. Na primeira, tomamos n rotações comutantes como em (4.20), mas com $j = 1, \dots, n$. No outro caso, não usamos a coordenada β_{2n} e escolhemos as n rotações como no caso ímpar, ou seja, (4.20) e (4.21 -4.22-4.23) .

Quando as rotações (4.20) são transportadas para o espaço \vec{x} usando (4.17), obtemos

$$\delta x_{2j-1} = x_{2j}, \quad \delta x_{2j} = -x_{2j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (4.24)$$

Para transportar (4.21-4.22-4.23) observamos que, usando (4.17) e (4.21-4.22-4.23) obtêm-se

$$\delta\beta_{2n-1} = \frac{a\alpha}{2} - \frac{a^{-1}}{2\alpha} \vec{\beta}^2 \quad (4.25)$$

$$\delta\alpha = -a^{-1}\beta_{2n-1}, \quad (4.26)$$

$$\delta\gamma = a\beta_{2n-1} \quad . \quad (4.27)$$

No caso de d par, a variável β fica inalterada, ou seja,

$$\delta\beta_{2n} = 0. \quad (4.28)$$

Nos dois casos temos

$$\delta x_i = a^{-1} \frac{\beta_i \beta_{2n-1}}{\alpha^2} = \frac{x_i x_{2n-1}}{a} \quad i \neq 2n-1, \quad (4.29)$$

$$\delta x_{2n-1} = \frac{a}{2} - \frac{a^{-1}}{2\alpha^2} \vec{\beta}^2 + a^{-1} \frac{\beta_{2n-1}^2}{\alpha^2} = \frac{1}{2a} \left(x_{2n-1}^2 - \sum_{i \neq 2n-1} x_i^2 \right) + \frac{a}{2} \quad . \quad (4.30)$$

Recupera-se uma de nossas transformações conformes com $\varepsilon^i = \varepsilon \delta_{i,2n-1}$, além de uma translação na direção x_{2n-1} . Define-se os campos vetoriais seguintes correspondendo à rotações

$$\partial_{\theta_i} = x_{2i} \partial_{x_{2i-1}} - x_{2i-1} \partial_{x_{2i}} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.31)$$

$$\partial_{\theta_n} = \frac{x_{2n-1}}{a} \sum_{i \neq 2n-1} x_i \partial_{x_i} + \frac{1}{2a} \left(a^2 + x_{2n-1}^2 - \sum_{i \neq 2n-1} x_i^2 \right) \partial_{x_{2n-1}} \quad . \quad (4.32)$$

Como já antecipado, impomos a condição

$$[\partial_{\theta_j} - im_j(u\partial_u - u^*\partial_{u^*})]u = 0 \quad (4.33)$$

com m_j inteiros. No caso ímpar temos como solução

$$u = R(\zeta_l) e^{i \sum_{j=1}^n m_j \theta_j}$$

com $\zeta_l = \frac{a^2(x_{2l-1}^2 + x_{2l}^2)}{(a^2 + r^2)^2}$ ($l = 1, \dots, n-1$) (e temos $\partial_{\theta_j} \zeta_l = 0$ e $r^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$). No caso de dimensão d par existe uma coordenada extra dada por $\zeta_l = \frac{a^2 x_{2n}^2}{(a^2 + r^2)^2}$. No caso par temos uma segunda opção para as rotações comutantes e um segundo ansatz dado

por $u = S(\rho_l) e^{i \sum_{j=1}^n m_j \theta_j}$ com $\rho_l = \frac{\sqrt{x_{2l-1}^2 + x_{2l}^2}}{a}$ (e $\partial_{\theta_j} \rho_l = 0$ e $l = 1, \dots, n-1$).

Na referência citada [16] foi utilizado o conjunto dos operadores ∂_{θ_i} , os quais representam transformações comutantes e **compactas**. No caso de $S^3 \times \mathbb{R}$, temos o ansatz dado por $u = \sqrt{\frac{1-g(z)}{g(z)}} e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \omega t)}$ onde a coordenada temporal é obviamente *não compacta*. Porém, conforme explicado ao final deste capítulo, o procedimento funciona neste caso também.

4.3 Teoria em Espaços Curvos

Far-se-á a generalização para espaços curvos da análise precedente. Dividiremos nossa análise em duas partes. Na primeira, calculamos explicitamente as simetrias das equações de movimento em espaços-curvedos genéricos, obtendo a equação de Killing conforme como condição de simetria. Então, resolvemos esta equação explicitamente para $S^3 \times \mathbb{R}$ e para o espaço-tempo de Minkowski. Na segunda parte, explicaremos como as características geométricas de nossa Lagrangiana levam à uma EDO *linear* para a profile function $g(z)$, quando substituimos o nosso ansatz no espaço-tempo $S^3 \times \mathbb{R}$. Em princípio, como partimos de uma EDP não-linear, não haveria razão para se esperar que tal fato ocorresse. A linearidade da equação final é importante, pois facilitou enormemente sua resolução, conforme detalhamos no capítulo correspondente.

4.3.1 Simetria em espaço curvo qualquer

Procedemos à generalização da condição de simetria das equações de movimento.

Como já dito, consideramos um modelo definido pela seguinte ação:

$$S = \int d^a x \sqrt{g} L\left(\frac{h^2}{\gamma^2}\right) . \quad (4.34)$$

Este modelo tem um campo escalar complexo $u(x^\mu)$ definido em um espaço-tempo curvo genérico, cujo tensor métrico é $g_{\mu\nu}$ com determinante \sqrt{g} e elemento de volume $d^a x$. Este campo $u(x^\mu)$ assume valores em um espaço alvo S^2 . O campo em S^2 pode ser descrito por um vetor real e unitário \vec{n} que se relaciona com o campo $u(x^\mu)$ por uma projeção estereográfica:

$$\vec{n} = \frac{1}{1 + |u|^2} (u + u^*, -i(u - u^*), |u|^2 - 1). \quad (4.35)$$

A Lagrangiana $L(\frac{h^2}{\gamma^2})$ é, em princípio, uma função qualquer de h^2/γ^2 . Define-se $h^2 = h_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$ com

$$h_{\mu\nu} = \partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u^* \partial_\mu u \quad (4.36)$$

e γ^2 é uma função de $|u|^2$, dada por $1 + |u|^2$ no caso de S^2 .

A equação de movimento é

$$\partial_\mu \left(L' \sqrt{g} \frac{h^{\mu\nu} \partial_\nu u}{\gamma} \right) = 0, \quad (4.37)$$

onde L' significa diferenciação com respeito a variável $x = h^2/\gamma^2$.

A seguir, faremos uma análise cuidadosa das equações de movimento procurando suas simetrias espaço-temporais e encontrando as condições sobre a forma funcional de $L(\frac{h^2}{\gamma^2})$ para que tais simetrias existam. Se denotarmos $\delta A(x, g^{\mu\nu}, u) = A(x', g^{\mu\nu}(x'), u'(x')) - A(x, g^{\mu\nu}(x), u(x))$ para qualquer função A resulta que $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \xi^\mu$ e $\delta u = u'(x') - u(x) = 0$. A condição de simetria é exatamente a mesma do caso em espaço plano.

A transformação $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ é simetria de uma dada equação diferencial

$$\varepsilon(x, g^{\mu\nu}(x), u(x), \partial_\mu u(x), \partial_\mu \partial_\nu u(x)) = 0 \quad (4.38)$$

se, quando $u(x)$ for uma solução, $u'(x) = u(x - \xi)$ também ser.

Desta forma,

$$\varepsilon(x, g^{\mu\nu}(x), u'(x), \partial_\mu u'(x), \partial_\mu \partial_\nu u'(x)) = 0. \quad (4.39)$$

Em geral,

$$\partial'_\mu = \partial_\mu - \partial_\mu \xi^\rho \partial_\rho$$

e a variação para um escalar qualquer A é

$$\delta \partial_\mu A = \partial_\mu \delta A - \partial_\mu \xi^\rho \partial_\rho A.$$

Usando estas relações, é possível mostrar mostrar que

$$\delta \partial_\mu u = -\partial_\mu \xi^\rho \partial_\rho u,$$

$$\delta \partial_\mu \partial_\nu u = -\partial_\nu \xi^\rho \partial_\mu \partial_\rho u - \partial_\mu \xi^\rho \partial_\rho \partial_\nu u - \partial_\mu \partial_\nu \xi^\rho \partial_\rho u.$$

Antes de calculamos explicitamente a variação $\delta \epsilon$ da equação de movimento, é conveniente colocá-la numa forma mais expandida. Calculando as derivadas obtemos

$$\epsilon = \frac{1}{\gamma} \left[L'' \partial_\mu \left(\frac{h^2}{\gamma^2} \right) K^\mu - 2 \partial_\mu \ln \gamma \left(\frac{h^2}{\gamma^2} \right) L'' K^\mu + L' \partial_\mu K^\mu - \partial_\mu \ln \gamma K^\mu L' + \partial_\mu \ln \sqrt{g} L' K^\mu \right] \quad (4.40)$$

e usando as identidades $K^\mu \partial_\mu u^* = -\frac{h^2}{2}$ e $K^\mu \partial_\mu u = 0$ podemos reescrever ϵ como

$$\epsilon = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{L''}{\gamma^2} (\partial_\mu h^2 K^\mu + (h^2)^2 \partial_{u^*} \ln \gamma) + L' \left(\partial_\mu K^\mu + \frac{h^2}{2} \partial_{u^*} \ln \gamma + \frac{\partial_\mu \ln g}{2} K^\mu \right) \right] \quad (4.41)$$

Em um espaço curvo

$$\delta g_{\mu\nu} = \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} \quad . \quad (4.42)$$

Para $h_{\mu\nu} = \partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u^* \partial_\mu u$, obtemos

$$\delta h_{\mu\nu} = -\partial_\mu \xi^\rho h_{\rho\nu} - \partial_\nu \xi^\rho h_{\mu\rho} \quad , \quad (4.43)$$

$$\delta h^{\mu\nu} = -(\partial^\mu \xi^\lambda - \xi^\rho \partial_\rho g^{\mu\lambda}) h_\lambda^\nu - (\partial^\nu \xi^\lambda - \xi^\rho \partial_\rho g^{\nu\lambda}) h^\mu_\lambda \quad , \quad (4.44)$$

$$\delta h^2 = -2(\partial^\mu \xi^\lambda + \partial^\lambda \xi^\mu - \xi^\rho \partial_\rho g^{\mu\lambda}) g_{\lambda\sigma} h^{\sigma\nu} h_{\mu\nu} \quad . \quad (4.45)$$

Impondo a condição

$$\partial^\mu \xi^\lambda + \partial^\lambda \xi^\mu - \xi^\rho \partial_\rho g^{\mu\lambda} = 2Dg^{\mu\lambda} \quad , \quad (4.46)$$

onde $D = D(x^\mu)$ é uma função das coordenadas, encontraremos

$$\delta h^2 = -4Dh^2. \quad (4.47)$$

As últimas duas expressões serão usadas para o cálculo da variação dos termos da equação de movimento como, por exemplo, $\partial_\mu K^\mu$ e $\partial_\mu h^2 K^\mu$. É fácil ver que $\delta\gamma = 0$ porque $\gamma = \gamma(|u|^2)$ e $\delta u = 0$. Então resulta

$$\delta(h^{\mu\nu} \partial_\nu u) = -4Dh^{\mu\nu} \partial_\nu u + \partial_\lambda \xi^\mu h^{\lambda\nu} \partial_\nu u \quad .$$

Para uma matriz M qualquer

$$\partial_\mu \ln \det M = \text{Tr}(M^{-1} \partial_\mu M)$$

e obtemos

$$\partial_\mu \ln g = g^{\rho\sigma} \partial_\mu g_{\rho\sigma}$$

$$\delta(\partial_\mu \ln g) = \xi^\lambda \partial_\lambda (g^{\rho\sigma} \partial_\mu g_{\rho\sigma}).$$

Além disso,

$$\delta(\partial_\mu K^\mu) = -4D\partial_\mu K^\mu - 4\partial_\mu DK^\mu + \partial_\mu \partial_\lambda \xi^\mu K^\lambda \quad (4.48)$$

$$\delta(\partial_\mu h^2 K^\mu) = -4\partial_\mu (Dh^2)K^\mu - 4D\partial_\mu h^2 K^\mu. \quad (4.49)$$

Agora é importante notar que, a partir de

$$\partial^\mu \xi^\lambda + \partial^\lambda \xi^\mu - \xi^\rho \partial_\rho g^{\mu\lambda} = 2Dg^{\mu\lambda} \quad (4.50)$$

podemos obter

$$2\partial_\lambda \xi^\lambda - g_{\mu\lambda} \xi^\rho \partial_\rho g^{\mu\lambda} = 2D\delta_\lambda^\lambda \quad (4.51)$$

e, usando que $g_{ik} \partial g_{kj}^{-1} = -(\partial g g^{-1})_{ij}$ e definindo $\delta_\lambda^\lambda = d_{\text{eff}}$, finalmente chegamos a

$$\partial_\mu \partial_\lambda \xi^\lambda = d_{\text{eff}} \partial_\mu D - \frac{1}{2} \partial_\mu (\xi^\lambda \partial_\lambda \ln g), \quad (4.52)$$

que é usado para o cálculo. Nosso espaço-tempo tem dimensão a como pode ser visto a partir do elemento de volume da ação. A quantidade d_{eff} é chamada de “dimensão efetiva”. Ela surge porque podemos considerar soluções das equações de movimento que dependam da dimensão $d+1$ do espaço-tempo, mas não de algumas das outras coordenadas. Isto ocorre ao se considerar soluções estáticas. As variações da Lagrangiana são, por exemplo, $\delta L' = L'' \frac{\delta h^2}{\gamma^2}$ e uma expressão similar para $\delta L''$.

Colecionando estes resultados e calculando a variação $\delta\epsilon$, resulta que

$$\begin{aligned} \delta\epsilon = & -4D\epsilon - \frac{4D}{\gamma} \left[\partial_\mu h^2 K^\mu \left(\frac{L''' h^2}{\gamma^4} + \frac{L''}{\gamma^2} \right) \right. \\ & + (h^2)^2 \partial_{u^*} \ln \gamma \left(\frac{L''' h^2}{\gamma^4} + \frac{3L''}{2\gamma^2} \right) + \partial_\mu K^\mu \left(\frac{L''}{\gamma^2} h^2 \right) \\ & \left. \frac{\partial_\mu \ln(g) K^\mu}{2} \left(\frac{L''}{\gamma^2} h^2 \right) \right] - 4 \frac{\partial_\mu DK^\mu}{\gamma} \left(\frac{L''}{\gamma^2} h^2 + L' - \frac{d_{\text{eff}}}{4} L' \right). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Uma condição necessária para a existência da simetria é que o último termo seja igual a zero. Isto pode acontecer com $\partial_\mu D = 0$ ou ainda com $\frac{L''}{\gamma^2} h^2 + L' - \frac{d_{\text{eff}}}{4} L' = 0$. No último caso, temos que resolver a equação diferencial para L' . Esta equação é facilmente solucionada e resulta $L = c \left(\frac{h^2}{\gamma^2} \right)^{\frac{d_{\text{eff}}}{4}}$ onde c é uma constante arbitrária (uma segunda constante aditiva d é irrelevante, já que na equação só aparecem derivadas de L). Se este valor de L é substituído no termo restante do lado direito da equação, obtemos

$$\delta\epsilon = -4D \left(1 + \frac{d_{\text{eff}} - 4}{4} \right) \epsilon \quad (4.54)$$

o que prova que a condição é suficiente também. O outro caso é $\partial_\mu D = 0$, por hipótese. Se denominarmos o termo envolvendo as derivadas de L como “ Y ”, por exemplo, temos que $Y = \alpha\varepsilon$ com α uma constante arbitrária. Resolvendo a equação $Y = \alpha\varepsilon$, obtemos $L = c_1(\frac{h^2}{\gamma^2})^\alpha$. Desta maneira foi determinada a forma funcional de L .

Utilizando agora a forma funcional genérica $L = c_1(\frac{h^2}{\gamma^2})^\alpha$, mas com $\alpha = d/4$ (d uma constante qualquer) e substituindo na equação (4.53), obtemos a expressão

$$\delta\epsilon = -8D\epsilon + 4(d_{\text{eff}} - d)\partial_\mu D h^2 h^{\mu\nu} \partial_\nu u.$$

O resultado é o mesmo do caso de espaços planos e podemos reafirmar as conclusões anteriores:

- se $d_{\text{eff}} = d$, a equação define uma simetria das equações de movimento para todo D
- se $d_{\text{eff}} \neq d$, a equação define uma simetria apenas se $\partial_\mu D = 0$, ou seja, D constante

4.3.2 Solução da Equação de Killing Conforme em Casos Especiais

A igualdade $\partial^\mu \xi^\lambda + \partial^\lambda \xi^\mu - \xi^\rho \partial_\rho g^{\mu\lambda} = 2Dg^{\mu\lambda}$ é, na realidade, a equação de Killing conforme e os ξ^i s são os vetores de Killing do espaço-tempo correspondente. Sua solução foi calculada para alguns exemplos, como os espaço-tempos euclidiano, Minkowski e $S^3 \times \mathbb{R}$.

O caso $S^3 \times \mathbb{R}$

A métrica que temos em $S^3 \times \mathbb{R}$ é

$$ds^2 = c^2 dt^2 - r_0^2 \left(\frac{dz^2}{4z(1-z)} + (1-z)d\varphi_1^2 + zd\varphi_2^2 \right) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.55)$$

onde $0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 1$. Denotaremos $g_{\mu\nu} = h_\mu^2 \eta_{\mu\nu}$ com $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ e

$$\begin{aligned} h_t &= c & h_z &= \frac{r_0}{\sqrt{4z(1-z)}} \\ h_{\varphi_1} &= r_0 \sqrt{1-z} & h_{\varphi_2} &= r_0 \sqrt{z} \end{aligned} .$$

A igualdade $\partial^\mu \xi^\lambda + \partial^\lambda \xi^\mu - \xi^\rho \partial_\rho g^{\mu\lambda} = 2Dg^{\mu\lambda}$ representa um sistema de dez equações diferenciais nas cinco funções $\xi^t, \xi^z, \xi^{\varphi_1}, \xi^{\varphi_2}$ e D das variáveis $t, z, \varphi_1,$

φ_2 . Nossa estratégia para encontrar soluções será primeiro obter um subsistema envolvendo somente a função D , encontrar sua solução, substituí-la no sistema original e depois resolver o sistema resultante para $\xi^t, \xi^z, \xi^{\varphi_1}$ e ξ^{φ_2} . Escrevendo as equações de Killing explicitamente e fazendo as substituições apropriadas para $g^{\mu\nu}$ pode-se obter:

$$\partial_t \xi^t = D \quad (4.56)$$

$$\partial_z \xi^z - \frac{1}{2} \xi^z \partial_z \ln z(1-z) = D \quad (4.57)$$

$$\partial_{\varphi_1} \xi^{\varphi_1} + \frac{1}{2} \xi^z \partial_z \ln(1-z) = D \quad (4.58)$$

$$\partial_{\varphi_2} \xi^{\varphi_2} + \frac{1}{2} \xi^z \partial_z \ln z = D \quad (4.59)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \xi^z - \frac{4z(1-z)}{r_0^2} \partial_z \xi^t = 0 \quad (4.60)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \xi^{\varphi_1} - \frac{1}{r_0^2(1-z)} \partial_{\varphi_1} \xi^t = 0 \quad (4.61)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \xi^{\varphi_2} - \frac{1}{r_0^2 z} \partial_{\varphi_2} \xi^t = 0 \quad (4.62)$$

$$-\frac{4z(1-z)}{r_0^2} \partial_z \xi^{\varphi_1} - \frac{1}{r_0^2(1-z)} \partial_{\varphi_1} \xi^z = 0 \quad (4.63)$$

$$-\frac{4z(1-z)}{r_0^2} \partial_z \xi^{\varphi_2} - \frac{1}{r_0^2 z} \partial_{\varphi_2} \xi^z = 0 \quad (4.64)$$

$$-\frac{1}{r_0^2(1-z)} \partial_{\varphi_1} \xi^{\varphi_2} - \frac{1}{r_0^2 z} \partial_{\varphi_2} \xi^{\varphi_1} = 0 \quad (4.65)$$

O sistema acima pode ser colocado numa forma muito mais simétrica através das substituições seguintes. Primeiramente, de $\partial_z \xi^z - \frac{1}{2} \xi^z \partial_z \ln z(1-z) = D$ pode-se observar que $\sqrt{z(1-z)} \partial_z \left(\frac{\xi^z}{\sqrt{z(1-z)}} \right) = D$ e, então, definir $\zeta^z = \frac{\xi^z}{\sqrt{z(1-z)}}$, $\zeta^1 = \xi^{\varphi_1}(1-z)$, $\zeta^2 = \xi^{\varphi_2} z$, $x = -\frac{ct}{r_0}$, $\zeta^x = \frac{c}{r_0} \xi^t$. Agora temos uma forma mais simples, porém ainda com fatores inconvenientes como $\sqrt{z(1-z)}$. Definindo $z = \sin^2 \theta$ resulta $\sqrt{z(1-z)} \frac{d}{dz} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta}$ e com $\zeta^\theta = \frac{1}{2} \zeta^z$ finalmente obtemos

$$\partial_x \zeta^x = -D \quad (A1)$$

$$\partial_\theta \zeta^\theta = D \quad (\text{A2})$$

$$\partial_1 \zeta^1 = \cos^2 \theta D + \sin \theta \cos(\theta) \zeta^\theta \quad (\text{A3})$$

$$\partial_2 \zeta^2 = \sin^2 \theta D - \sin \theta \cos(\theta) \zeta^\theta \quad (\text{A4})$$

$$\partial_x \zeta^\theta + \partial_\theta \zeta^x = 0 \quad (\text{B1})$$

$$\partial_x \zeta^1 + \partial_1 \zeta^x = 0 \quad (\text{B2})$$

$$\partial_x \zeta^2 + \partial_2 \zeta^x = 0 \quad (\text{B3})$$

$$\partial_1 \zeta^\theta + \partial_\theta \zeta^1 = -2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \zeta^1 \quad (\text{B4})$$

$$\partial_2 \zeta^\theta + \partial_\theta \zeta^2 = 2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \zeta^2 \quad (\text{B5})$$

$$\partial_1 \zeta^2 + \partial_2 \zeta^1 = 0 \quad (\text{B6})$$

Este sistema de equações tem a seguinte estrutura : existem quatro equações do tipo $\partial_\mu \zeta^\mu = f(D)$, onde $f(D)$ é uma função de D e seis equações que não envolvem D de forma alguma. Aplicamos $\partial_\mu \partial_\nu$ nas últimas seis equações, usando escolhas apropriadas de μ e ν para cada equação e substituindo as quatro primeiras funções de D sempre que possível. Um cálculo direto resulta em um sistema de seis equações diferenciais envolvendo somente D , suas derivadas e funções trigonométricas de θ . Usando identidades trigonométricas óbvias, é possível chegar ao sistema de quatro equações para D abaixo, o qual é equivalente ao citado sistema de seis equações:

$$\partial_x^2 D + D = 0 \quad (\text{C1})$$

$$\partial_\theta^2 D + D = 0 \quad (\text{C2})$$

$$\partial_1^2 D - \sin \theta \cos(\theta) \partial_\theta D + \cos^2 \theta D = 0 \quad (\text{C3})$$

$$\partial_2^2 D + \sin \theta \cos(\theta) \partial_\theta D + \sin^2 \theta D = 0. \quad (\text{C4})$$

De (B2), (B3) e (B6) obtemos $\partial_1\partial_2\zeta^x = 0$ e usando (A1) resulta

$$\partial_1\partial_2D = 0. \quad (C5)$$

Então, (C2), (C3), (C4) e (C5) juntos implicam que, com $F(x, \varphi_2)$ e $G(x, \varphi_1)$ funções quaisquer, $\cos\theta\partial_\theta D + \sin\theta D = F(x, \varphi_2)$, $\sin\theta\partial_\theta D + \cos\theta D = G(x, \varphi_1)$ e

$$D = \sin\theta F(x, \varphi_2) - \cos\theta G(x, \varphi_1). \quad (4.67)$$

Usando esta expressão para D em (C1) (com $\theta = 0$) e em (C3) conseguimos

$$\partial_x^2 G(x, \varphi_1) + G(x, \varphi_1) = 0 \quad (4.68)$$

$$\partial_1^2 G(x, \varphi_1) + G(x, \varphi_1) = 0. \quad (4.69)$$

Existem equações análogas para $F(x, \varphi_2)$, resultando da substituição de D em (C1) (para $\theta = \frac{\pi}{2}$) e em (C4). A solução para $G(x, \varphi_1)$ é $G(x, \varphi_1) = A_+ \sin(x + \varphi_1 + \delta_+) + A_- \sin(x - \varphi_1 + \delta_-)$ com os A 's e δ 's constantes arbitrárias e novamente expressões análogas para $F(x, \varphi_2)$. Agora é uma tarefa simples reescrever G e F , usando fórmulas com senos e cosenos para chegar em

$$D = A \cos\theta \sin(x + \alpha_1) \sin(\varphi_1 + \beta_1) + B \sin\theta \sin(x + \alpha_2) \sin(\varphi_2 + \beta_2) \quad (4.70)$$

onde, novamente, α 's, β 's, A e B são constantes arbitrárias.

Voltando para as variáveis originais, temos

$$D = A\sqrt{1-z} \sin\left(\frac{ct}{r_0} + \delta_1\right) \sin(\varphi_1 + \alpha_1) + B\sqrt{z} \sin\left(\frac{ct}{r_0} + \delta_2\right) \sin(\varphi_2 + \alpha_2). \quad (4.71)$$

Resolveremos as equações para os vetores ζ^μ usando as equações (B) em ternas como se segue. Considere a terna $(x, 1, 2)$. Diferencia-se (B2) em relação a φ_2 , (B3) em relação a φ_1 e (B6) em relação a x . Resulta

$$\begin{cases} \partial_2\partial_x\zeta^1 + \partial_2\partial_1\zeta^x = 0 \\ \partial_1\partial_x\zeta^2 + \partial_1\partial_2\zeta^x = 0 \\ \partial_x\partial_1\zeta^2 + \partial_x\partial_2\zeta^1 = 0 \end{cases}$$

Tomando diferentes combinações lineares das últimas equações, obtemos

$$\partial_1\partial_2\zeta^x = 0$$

e suas permutações cíclicas. Isto pode ser repetido para $(x, \theta, 2)$ em (B1), (B3) e (B5), $(x, \theta, 1)$ em (B1), (B2), e (B4), e para $(\theta, 1, 2)$ em (B4), (B5) e (B6). Os resultados são

$$\partial_1 \partial_2 \zeta^x = 0 \quad (\text{E.a.1})$$

$$\partial_2 \partial_\theta \zeta^x = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_x \zeta^2 \quad (\text{E.a.2})$$

$$\partial_1 \partial_\theta \zeta^x = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \partial_x \zeta^1 \quad (\text{E.a.3})$$

$$\partial_2 \partial_x \zeta^\theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_x \zeta^2 \quad (\text{E.b.1})$$

$$\partial_1 \partial_x \zeta^\theta = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \partial_x \zeta^1 \quad (\text{E.b.2})$$

$$\partial_1 \partial_2 \zeta^\theta = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \partial_2 \zeta^1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_1 \zeta^2 \quad (\text{E.b.3})$$

$$\partial_x \partial_2 \zeta^1 = 0 \quad (\text{E.c.1})$$

$$\partial_\theta \partial_x \zeta^1 = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \partial_x \zeta^1 \quad (\text{E.c.2})$$

$$\partial_\theta \partial_2 \zeta^1 = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \partial_2 \zeta^1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_1 \zeta^2 \quad (\text{E.c.3})$$

$$\partial_1 \partial_x \zeta^2 = 0 \quad (\text{E.d.1})$$

$$\partial_\theta \partial_x \zeta^2 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_x \zeta^2 \quad (\text{E.d.2})$$

$$\partial_1 \partial_\theta \zeta^2 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \partial_2 \zeta^1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_1 \zeta^2 \quad (\text{E.d.3})$$

(E.c.1) e (E.c.2) implicam que

$$\partial_x \zeta^1 = \cos(\theta) H^1(x, \varphi_1), \quad (4.72)$$

e também pode-se obter a partir de (E.d.1) e (E.d.2)

$$\partial_x \zeta^2 = -\sin(\theta) H^2(x, \varphi_2). \quad (4.73)$$

De (E.c.3), (E.c1) e (B6) resulta

$$\partial_2 \zeta^1 = \cos \theta \sin \theta G(\varphi_1, \varphi_2). \quad (4.74)$$

Resumindo, podemos dizer que qualquer expressão do tipo $\partial_\mu \zeta^\nu$ com $(\mu, \nu) \neq \theta$ pode ser escrita em termos de H^1 , H^2 , G e funções de θ . O mesmo é válido para as derivadas de segunda ordem de ζ^θ como $\partial_1 \partial_2 \zeta^\theta$. Usando (A.2), $\partial_2 \partial_x \zeta^\theta = -\cos \theta H^2(x, \varphi_2)$ e $\partial_1 \partial_x \zeta^\theta = -\sin \theta H^1(x, \varphi_1)$, pode-se escrever

$$H^2 = B \cos(x + \alpha_2) \cos(\varphi_2 + \beta_2) \quad (4.75)$$

e

$$H^1 = -A \cos(x + \alpha_1) \cos(\varphi_1 + \beta_1). \quad (4.76)$$

De (A.3) e igualdades para $\partial_2 \zeta^1$, $\partial_1 \zeta^2$ e $\partial_1 \partial_2 \zeta^\theta$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} \partial_1^2 G + G = 0 \\ \partial_2^2 G + G = 0 \end{cases}$$

com solução

$$G = C \sin(\varphi_1 + \gamma_1) \sin(\varphi_2 + \gamma_2). \quad (4.77)$$

É possível obter expressões como

$$\partial_x \zeta^1 = -A \cos(\theta) \cos(x + \alpha_1) \cos(\varphi_1 + \beta_1)$$

$$\partial_2 \zeta^1 = C \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi_1 + \gamma_1) \sin(\varphi_2 + \gamma_2),$$

cuja integração simultânea resulta em

$$\zeta^1 = -A \cos(\theta) \sin(x + \alpha_1) \cos(\varphi_1 + \beta_1) + f(\theta, \varphi_1, \varphi_2) \quad (4.78)$$

e

$$\zeta^1 = -C \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi_1 + \gamma_1) \cos(\varphi_2 + \gamma_2) + g(\theta, x, \varphi_1). \quad (4.79)$$

Igualando estas expressões temos

$$\zeta^1 = (\text{expressões trigonométricas}) + h_1(\theta, \varphi_1). \quad (4.80)$$

Um raciocínio análogo resulta em expressões semelhantes para ζ^2 (com $h_2(\theta, \varphi_2)$) e ζ^x (com $h_x(\theta, x)$). Usando (A1) obtêm-se $h_x = h_x(\theta)$ e, com (A2), (A3) e (A4):

$$\partial_1 h_1 + \partial_2 h_2 = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\theta \left(\frac{\partial_1 h_1 - \partial_2 h_2}{\sin \theta \cos \theta} \right) = 0 .$$

A solução para este sistema é

$$\begin{cases} h_1 = b_1 \cos^2 \theta \\ h_2 = b_2 \sin^2 \theta \end{cases}$$

e pode-se observar também que h_x é uma constante, pois $\partial_\theta h_x = 0$.

Resumindo obtêm-se

$$D = A \cos \theta \sin(x + \alpha_1) \sin(\varphi_1 + \beta_1) + B \sin \theta \sin(x + \alpha_2) \sin(\varphi_2 + \beta_2)$$

$$\zeta^x = A \cos \theta \cos(x + \alpha_1) \sin(\varphi_1 + \beta_1) + B \sin \theta \cos(x + \alpha_2) \sin(\varphi_2 + \beta_2) + \delta_x$$

$$\begin{aligned} \zeta^\theta &= A \sin \theta \sin(x + \alpha_1) \sin(\varphi_1 + \beta_1) - B \cos \theta \sin(x + \alpha_2) \sin(\varphi_2 + \beta_2) \\ &\quad - C \cos(\varphi_1 + \gamma_1) \cos(\varphi_2 + \gamma_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta^1 &= -A \cos \theta \sin(x + \alpha_1) \cos(\varphi_1 + \beta_1) \\ &\quad - C \cos \theta \sin \theta \sin(\varphi_1 + \gamma_1) \cos(\varphi_2 + \gamma_2) + \delta_1 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= -B \sin \theta \sin(x + \alpha_2) \cos(\varphi_2 + \beta_2) \\ &\quad + C \cos \theta \sin \theta \cos(\varphi_1 + \gamma_1) \sin(\varphi_2 + \gamma_2) + \delta_2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Voltando para as variáveis originais, $x = -\frac{c}{r_0}t$ e $z = \sin^2 \theta$ e portanto

$$\begin{aligned} \xi^t &= \frac{r_0}{c} \zeta^x & \xi^z &= 2 \sin \theta \cos \theta \zeta^\theta \\ \xi^{\varphi_1} &= \frac{\zeta^1}{\cos^2 \theta} & \xi^{\varphi_2} &= \frac{\zeta^2}{\sin^2 \theta} . \end{aligned}$$

A expressão final para os vetores de Killing ξ é a seguinte:

$$D = A\sqrt{1-z} \sin\left(-\frac{c}{r_0}t + \alpha_1\right) \sin(\varphi_1 + \beta_1) + B\sqrt{z} \sin\left(-\frac{c}{r_0}t + \alpha_2\right) \sin(\varphi_2 + \beta_2)$$

$$\begin{aligned} \xi^t = \frac{r_0}{c} & \left[A\sqrt{1-z} \cos\left(-\frac{c}{r_0}t + \alpha_1\right) \sin(\varphi_1 + \beta_1) \right. \\ & \left. + B\sqrt{z} \cos\left(-\frac{c}{r_0}t + \alpha_2\right) \sin(\varphi_2 + \beta_2) + \delta_t \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi^z = & 2[A\sqrt{1-z}\sqrt{z} \sin\left(-\frac{c}{r_0}t + \alpha_1\right) \sin(\varphi_1 + \beta_1) \\ & - B\sqrt{1-z}\sqrt{z} \sin\left(-\frac{c}{r_0}t + \alpha_2\right) \sin(\varphi_2 + \beta_2) \\ & - C\sqrt{(1-z)z} \cos(\varphi_1 + \gamma_1) \cos(\varphi_2 + \gamma_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi^{\varphi_1} = & -A\frac{1}{\sqrt{1-z}} \sin\left(-\frac{c}{r_0}t + \alpha_1\right) \cos(\varphi_1 + \beta_1) \\ & - C\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1-z}} \sin(\varphi_1 + \gamma_1) \cos(\varphi_2 + \gamma_2) + \delta_{\varphi_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi^{\varphi_2} = & -B\frac{1}{\sqrt{z}} \sin\left(-\frac{c}{r_0}t + \alpha_2\right) \cos(\varphi_2 + \beta_2) \\ & + C\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z}} \cos(\varphi_1 + \gamma_1) \sin(\varphi_2 + \gamma_2) + \delta_{\varphi_2} . \end{aligned}$$

Um vetor genérico V é escrito utilizando-se os ξ s como $V = \sum \xi^\mu \partial_\mu$. Nas expressões acima existem uma série de termos do tipo $\sin(a+b)$ e $\cos(a+b)$ (a, b representando aqui as várias constantes e coordenadas do problema) multiplicados por A, B e C . Expandindo as expressões trigonométricas obteremos termos como $A \sin \alpha_1 \cos \beta_1$ e análogos multiplicando funções das coordenadas ($t, z, \varphi_1, \varphi_2$) e dos operadores diferenciais $\partial_t, \partial_z, \partial_1$ e ∂_2 . Colecionando termos iguais (e fazendo $r_0/c = 1$ já que esta constante dimensional é irrelevante para a análise que segue) obteremos que V pode ser escrito em geral como $V = \sum_{i=1}^{15} k_i X_i$, onde k_i são funções das constantes de integração $k_i = k_i(A, B, C, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_z, \delta_1, \delta_2)$ e os X_i são campos vetoriais dados por $X_i = \sum_j f_{ij} \partial_j$ onde os f_{ij} são funções das coordenadas

do espaço-tempo e temos $j = t, z, \varphi_1$ ou φ_2 . Pode-se mostrar que o conjunto dos X_i 's assim obtido é linearmente independente, constituindo, portanto, uma base para um espaço vetorial de dimensão 15, o qual deve ser a álgebra de Lie do grupo conforme de $S^3 \times \mathbb{R}$. Como $\delta x^\mu = \xi^\mu(x)$ o comutador desta álgebra é

$$[\delta, \delta'] = \delta(\delta' x^\mu) - \delta'(\delta x^\mu) \quad (4.81)$$

$$= \delta \xi'^\mu - \delta' \xi^\mu \quad (4.82)$$

$$= \frac{\partial \xi'^\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \delta x'^\nu \quad (4.83)$$

$$= \xi^\nu \partial_\nu \xi'^\mu - \xi'^\nu \partial_\nu \xi^\mu \quad (4.84)$$

$$= \delta'' x^\mu \quad (4.85)$$

e, desta forma, $\xi''^\mu = \xi^\nu \partial_\nu \xi'^\mu - \xi'^\nu \partial_\nu \xi^\mu$.

4.3.3 Simetria e Ansatz no espaço-tempo de Minkowski

Como no caso anterior, a simetria é dada pela equação de Killing conforme. Os vetores de Killing conformes no espaço-tempo de Minkowski são bem conhecidos na literatura [28] e dados explicitamente por:

- $p_\alpha = \partial_\alpha$
- $d = x^\alpha \partial_\alpha$
- $k_\alpha = 2x_\alpha x^\beta \partial_\beta - x^2 \partial_\alpha$
- $M_{\alpha\beta} = x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha$

A álgebra de Lie correspondente é dada por

$$[p_\alpha, p_\beta] = 0 \quad [k_\alpha, k_\beta] = 0 \quad [p_\alpha, k_\beta] = -M_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} d$$

$$[d, M_{\alpha\beta}] = 0 \quad [d, p_\alpha] = -p_\alpha \quad [d, k_\alpha] = k_\alpha$$

$$[M_{\alpha\beta}, p_\gamma] = \eta_{\beta\gamma} p_\alpha - \eta_{\alpha\gamma} p_\beta$$

$$[M_{\alpha\beta}, k_\gamma] = \eta_{\beta\gamma} k_\alpha - \eta_{\alpha\gamma} k_\beta$$

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = \eta_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} + \eta_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma} - \eta_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} - \eta_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma} .$$

Esta é a álgebra $SO(4, 2)$ e utilizamos $\eta_{\alpha\beta} = (-1, 1, 1, 1)$. Estes vetores de Killing são as simetrias espaço-temporais do modelo $S = \int dx^4 (H_{\mu\nu}^2)$ [27]. Foram construídos ansätze para este modelo que são dependentes do tempo. Além disso, a solução deve possuir uma simetria axial em relação ao eixo x_3 . Utilizaremos o vetor de Killing

$$M_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 = \partial_\varphi . \quad (4.86)$$

Os geradores que comutam com M_{12} são p_0, p_3, k_0, k_3, d e M_{03} . Precisamos de dois entre eles que comutem entre si. Um vetor genérico que comuta com M_{12} é dado por (com as letras gregas sendo constantes) $\alpha_1 k_3 + \beta_1 p_3 + \gamma_1 p_0 + \delta_1 k_0 + \rho_1 d + \sigma_1 M_{03}$. Existem muitas possibilidades aceitáveis em princípio para duas combinações lineares genéricas entre si. Porém, utilizando como critério a semelhança com o caso estático (ver [26], especialmente hep-th/9905079), foi escolhido o conjunto

$$\begin{aligned} -\partial_\varphi &= M_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 = -x^1\partial_2 + x^2\partial_1 \\ \partial_\xi &= k_3 + a^2 p_3 = 2x_3 x^\alpha \partial_\alpha - x^2 \partial_3 - a^2 \partial_3 \\ \partial_\zeta &= k_0 - a^2 p_0 = 2x_3 x^\alpha \partial_\alpha - x^2 \partial_0 + a^2 \partial_0 . \end{aligned}$$

A última coordenada independente é nomeada η . A partir destas relações pode ser construído o sistema de coordenadas utilizado em [27]. Este sistema é dado explicitamente por

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{a}{p} \sin \zeta \\ x^1 &= \frac{a}{p} \cos \varphi \frac{1}{\sqrt{1+y}} \\ x^2 &= \frac{a}{p} \sin \varphi \frac{1}{\sqrt{1+y}} \\ x^3 &= \frac{a}{p} \sin \xi \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+y}} \end{aligned}$$

com $p = \cos \zeta - \cos \xi (\sqrt{y}/\sqrt{1+y})$ e a uma constante com dimensão de comprimento. Temos $y \geq 0, 0 \leq \xi, \varphi \leq 2\pi$ e $0 \leq \zeta \leq \pi$. O ansatz utilizado nesta referência é

$$u = \sqrt{\frac{1-g(y)}{g(y)}} e^{i(m_1 \xi + m_2 \varphi + m_3 \zeta)} .$$

No capítulo 5 voltaremos a analisar este exemplo, usando o mesmo sistema de coordenadas (exceto por uma transformação trivial $y \rightarrow z$), porém com um ansatz diferente, dado por

$$u = \sqrt{\frac{1 - g(z, \zeta)}{g(z, \zeta)}} e^{i(m_1 \xi + m_2 \varphi)} .$$

4.4 Geometria e linearização das equações de movimento

Nesta seção será executada uma breve análise da linearização obtida nas equações de movimento. Nossa abordagem será ligeiramente mais geral, incluindo outros espaços alvo que não o S^2 . Teremos teorias de campos em espaços-tempos M , de dimensão d , não necessariamente planos, e com campos tomando valores num espaço-tempo bidimensional T . Consideramos teorias com Lagrangianas que são funcionais do pull-back da 2-forma de área em T , e estamos interessados no espaços T onde esta área pode ser escrita como

$$dA = i \frac{du \wedge du^*}{\gamma} , \quad (4.87)$$

onde u é um campo complexo parametrizando T , e γ é um funcional do módulo de u somente, ou seja $\gamma = \gamma(|u|^2)$. Em tais casos podem ser constituídas variáveis tipo Darboux em T da seguinte forma : escreve-se u como $u = f e^{i\theta}$ com θ real variando de 0 a 2π e f real e positivo. Em seguida define-se um campo real escalar g tal que

$$dg = c_T \frac{df^2}{\gamma(f)} , \quad (4.88)$$

onde c_T é um fator numérico dependendo de T . Resulta que

$$dA = \frac{1}{c_T} dg \wedge d\theta . \quad (4.89)$$

O pull-back da forma de área em M fica

$$H = H_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (4.90)$$

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu g \partial_\nu \theta - \partial_\nu g \partial_\mu \theta \quad (4.91)$$

onde $x^\mu, \mu = 0, 1, \dots, d-1$ são coordenadas em M e os fatores numéricos foram absorvidos na definição de H . As ações das teorias de campo são aquelas cujas Lagrangianas são funcionais de $H_{\mu\nu}^2$, ou seja,

$$S = \int d^d x \sqrt{-\eta} L(H_{\mu\nu}^2) \quad (4.92)$$

onde η é o determinante do tensor métrico em M , isto é, $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

Podemos listar os seguintes espaços alvos de interesse :

1. A esfera bidimensional $T = S^2$. Neste caso as partes real e imaginárias de u são as coordenadas cartesianas do plano correspondendo a projeção estereográfica de S^2 ,

$$\vec{n} = \frac{1}{(1 + |u|^2)} (u + u^*, -i(u - u^*), |u|^2) \quad (4.93)$$

e $\vec{n} \in S^2$, $\vec{n}^2 = 1$. Neste caso temos $\gamma = (1 + |u|^2)^2$ e $c_T = -1$ com $g = \frac{1}{1+f^2}$; $0 \leq g \leq 1$; $u = \sqrt{\frac{1-g}{g}} e^{i\theta}$

2. O plano $T = \mathbb{R}^2$, com coordenadas sendo as partes reais e imaginárias de u com $\gamma = 1$ e $c_T = -1$, $g = f^2$, $g \geq 0$; $u = \sqrt{g} e^{i\theta}$
3. O disco de Poincaré hiperbólico, parametrizado por u de tal forma que $|u|^2 < 1$. Neste caso, $\gamma = (1 - |u|^2)^2$ e $c_T = 1$ com $g = \frac{1}{1-f^2}$; $g \geq 1$; $u = \sqrt{\frac{g-1}{g}} e^{i\theta}$

As equações de Euler-Lagrange são

$$\partial_\mu (\sqrt{-\eta} \eta^{\mu\nu} L' K_\nu^{(i)}) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.94)$$

onde

$$L' = \frac{\delta L}{\delta H^2} \quad (4.95)$$

$$K_\mu^{(1)} = H_{\mu\nu} \partial^\nu \theta = (\partial\theta)^2 \partial_\mu g - (\partial\theta \partial g) \partial_\mu \theta \quad (4.96)$$

$$K_\mu^{(2)} = -H_{\mu\nu} \partial^\nu g = (\partial g)^2 \partial_\mu \theta - (\partial g \partial \theta) \partial_\mu g. \quad (4.97)$$

Vamos analisar agora a mudança de coordenada $dg = c_T \frac{df^2}{\gamma(f)}$ em mais detalhe, especialmente para o caso $T = S^2$.

Inicialmente, é claro que podemos sempre escrever $u = f e^{i\theta}$. A partir de argumentos utilizados na construção do ansatz sabe-se que em particular $\theta = m_j \theta_j$ onde θ_j são coordenadas (compactas ou não) e os m_j são coeficientes (necessariamente inteiros se as coordenadas forem periódicas, ou seja, coordenadas angulares).

O fato crucial na mudança $f \rightarrow g$ é que $H_{\mu\nu}$ passa a ser escrito de uma forma bem mais simples nas variáveis g e θ . Isto é muito importante pois como $L = L(H_{\mu\nu}^2)$ se L tem derivada funcional nula em relação aos campos temos uma simplificação nas equações de Euler-Lagrange. Como $H_{\mu\nu}$ é o pull-back da forma de área da variedade bidimensional observamos que variáveis (g, θ) são variáveis tipo Darboux[19].

Agora podemos compreender o seguinte fato. Quando substituimos o ansatz

$$u = \sqrt{\frac{1-g}{g}} e^{i\theta}$$

obtemos, no final, uma EDO linear para g partindo de uma EDP inicial não-linear.

Sabemos que as equações de movimento são

$$\partial_\mu (\sqrt{-\eta} L' \eta^{\mu\nu} K_\nu^{(i)}) = 0 \quad (4.98)$$

e no modelo em $S^3 \times \mathbb{R}$ tem-se $L = H_{\mu\nu}^2$ e portanto $L' = 1$. Além disso, o determinante da métrica é uma constante $(\frac{r_0^3}{2})$ e as componentes $\eta^{\mu\nu}$ dependem apenas da coordenada z . Portanto, quando fizermos as derivadas angulares $\partial_\varphi, \partial_\xi$ e ∂_ρ , elas atuarão apenas nos $K_\mu^{(i)}$. Temos que $K_\mu^{(1)} = (\partial\theta)^2 \partial_\mu g - (\partial g \partial\theta) \partial_\mu \theta$ já é linear em $g(z)$. Então, a equação para $K_\nu^{(2)}$ fica

$$\partial_\mu (\eta^{\mu\nu} K_\nu^{(2)}) = 0 \quad (4.99)$$

e como $\eta^{\mu\nu}$ é diagonal, então $\partial_\mu (f_{(\mu)}(z) K^{\mu(2)}) = 0$ e

$$\partial^\mu [f_{(\mu)}(z) ((\partial g)^2 \partial_\mu \theta - (\partial g \partial\theta) \partial_\mu g)] = 0. \quad (4.100)$$

É fácil ver que $\partial g \partial\theta = 0$ pois $\partial_z \theta = 0$ e $\partial_{\theta_i} g = 0$. O primeiro termo também dá zero pois $\partial_{\theta_i} \partial_{\theta_i} \theta = 0$ e $\partial_z \theta = 0$. Assim temos apenas uma equação linear para $g(z)$.

4.5 A construção do ansatz

Nesta seção iremos detalhar os procedimentos utilizados na construção do nosso ansatz, utilizado para resolver a equação de movimento do modelo em $S^3 \times \mathbb{R}$. É importante frisar que a análise aqui executada tem apenas o objetivo de explicar o sucesso do ansatz utilizado em nosso caso. Para a teoria geral do método de Lie, consultar [2] e [3].

A idéia básica é achar soluções que sejam invariantes por um subgrupo do grupo total de simetria da equação diferencial em questão.

Seja G o grupo de simetria da equação diferencial

$$E(x^\mu, \partial_\mu u, \partial_\mu \partial_\nu u, \partial_\mu^{(n)} u, u) = 0. \quad (4.101)$$

Então dada uma representação g de G temos

$$gE = \alpha E \quad (4.102)$$

sendo $\alpha(x^\mu)$ uma função qualquer.

Seja $H \subset G$ um subgrupo que tem uma representação h com a propriedade de que

$$hu = u, \quad (4.103)$$

onde $u = u(x^\mu)$ é uma solução da equação diferencial. Como em termos dos elementos T da álgebra de Lie associada temos que $h = e^{\beta T}$ resulta

$$e^{\beta T} u = u \quad (4.104)$$

$$Tu = 0. \quad (4.105)$$

Resolvendo a última equação acima podemos obter ansatz para a função $u(x^\mu)$. Uma vez solucionada a equação (4.105), substituímos u novamente na equação diferencial original e ajustamos as constantes necessárias.

Para explicar o procedimento descrito acima, utilizaremos um exemplo simples [3].

Exemplo: *Seja a equação do calor dada por $\partial_t u = \partial_x^2 u$. O grupo de dilatação dado por $(x, t, u) \rightarrow (\lambda x, \lambda^2 t, u)$ é uma simetria desta equação. É fácil ver isto pois fazendo $x' = \lambda x$, $t' = \lambda^2 t$ é $u' = u$ temos que $\partial_t u = \partial_x^2 u \implies \partial_{t'} u' = \partial_{x'}^2 u'$. Além disso, ele deixa soluções invariantes pois $u' = u$. Portanto é um exemplo da teoria discutida acima.*

O gerador infinitesimal desta transformação é

$$T = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.106)$$

Então a condição sobre $u(x)$ fica

$$x \partial_x u + 2t \partial_t u = 0. \quad (4.107)$$

Agora o procedimento seria resolver o sistema dado pela equação original e por (4.107).

É importante observar que a condição acima resultante de $Tu = 0$ é uma EDP linear e de primeira ordem nas duas variáveis. No exemplo acima a equação original

era linear mas em geral podemos ter uma equação inicial não-linear extremamente complicada[2]. Vamos executar este programa em detalhe para o nosso ansatz.

Seja a seguinte simetria interna

$$u \longrightarrow e^{i\alpha}u = (1 + i\alpha + \dots)u. \quad (4.108)$$

Então $\delta_\alpha u = i\alpha u$.

Suponha agora uma simetria espaço-temporal (que possa ser escrita como uma translação infinitesimal),

$$\varphi \longrightarrow \varphi + \beta, \quad \delta\varphi = \beta, \quad (4.109)$$

onde φ é alguma coordenada do espaço-tempo. A variação de u é $\delta_\beta u = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\beta$.

Se queremos que u seja invariante pelo subgrupo diagonal, precisamos que

$$(\delta_\alpha + \delta_\beta)u = 0 \longrightarrow i\alpha u + \partial_\varphi u \beta = 0. \quad (4.110)$$

Então, $\partial_\varphi \ln u = -i\frac{\alpha}{\beta}$ e portanto,

$$\ln u = -i\frac{\alpha}{\beta}\varphi + \varpi(\text{outras coordenadas}) \quad (4.111)$$

o que implica que

$$u = ve^{-i\frac{\alpha}{\beta}\varphi}, \quad (4.112)$$

com v uma função complexa das outras coordenadas. Aqui é importante observar que este resultado mostra porque a forma funcional de $u(x^\mu)$ é exponencial. Se φ é uma variável periódica é necessário que $u(\varphi) = u(\varphi + 2\pi)$ e, portanto,

$$\frac{\alpha}{\beta}2\pi = 2\pi n \longrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = n \equiv \text{inteiro}. \quad (4.113)$$

Se φ não é periódica, esta condição não se aplica.

Observe que as transformações (4.108) constituem um grupo $U(1)$ compacto. Porém, se φ não é uma variável periódica, as transformações (4.109) não têm que ser compactas. Portanto, o subgrupo diagonal pode ser **compacto ou não compacto**.

De qualquer forma, u será periódica em φ , ou seja, quando $\varphi \longrightarrow \varphi + \frac{\beta}{\alpha}2\pi n$, $u \rightarrow u$.

Vamos explicar a origem da exigência de que as simetrias utilizadas na construção do ansatz comutem entre si.

Para fazer isto suponha que exista outra simetria do tipo espaço-temporal, ou seja, temos duas coordenadas φ_1 e φ_2 que se transformam

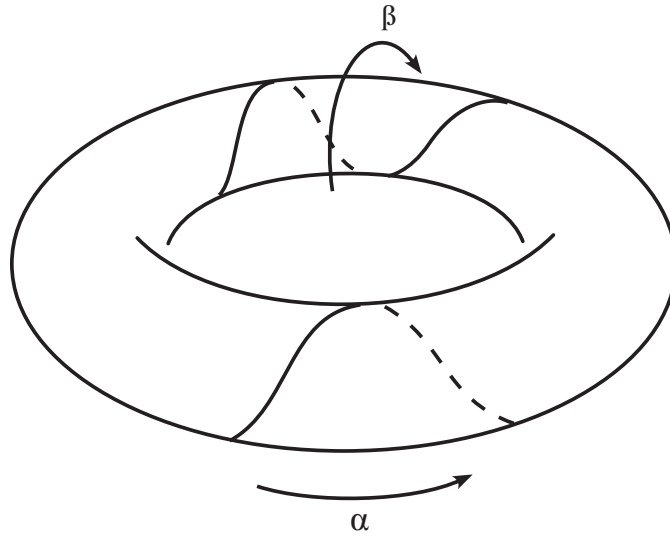


Figura 4.1: Caso compacto: quando φ é uma variável periódica temos a condição $\alpha/\beta = n$ com n inteiro

$$\varphi_1 \longrightarrow \varphi_1 + \beta_1, \quad \varphi_2 \longrightarrow \varphi_2 + \beta_2,$$

então o comutador entre elas é

$$\begin{aligned} [\delta_{\beta_1}, \delta_{\beta_2}]u &= \delta_{\beta_1} \delta_{\beta_2} u - \delta_{\beta_2} \delta_{\beta_1} u = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \frac{\partial u}{\partial \varphi_1} \right) \beta_1 \beta_2 . \end{aligned} \quad (4.114)$$

Desta forma, se duas simetrias não comutam entre si, não podemos ter φ_1 e φ_2 pertencendo ao *mesmo conjunto* de coordenadas, porque u seria neste caso uma função *não integrável* de φ_1 e φ_2 , isto é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \neq \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1} . \quad (4.115)$$

Portanto, para se utilizar duas simetrias espaço-temporais na construção do ansatz, elas têm que comutar. No caso do espaço euclidiano em d dimensões, temos uma limitação grande no número de coordenadas que podemos usar na separação de variáveis, já que o número de transformações comutantes é cerca de metade da dimensão do espaço-tempo (o número exato depende do espaço ter dimensão ímpar ou par). No caso euclidiano temos $[\partial_{\theta_j} - im_j(u\partial_u - u^*\partial_{u^*})]u = 0$ onde j vai até as n

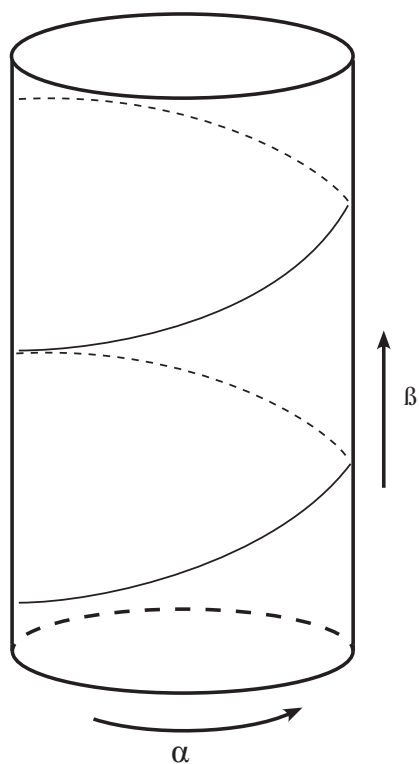


Figura 4.2: *Caso não compacto: se φ não é uma variável periódica α/β não precisa ser inteiro*

transformações comutantes que o espaço d -dimensional comporta. Como temos estas n equações é imediato propor a forma funcional $u(\theta_j, \zeta_l) = F(\zeta_1, \dots, \zeta_k) f(\theta_1) \dots f(\theta_n)$ onde obtemos separação de variáveis em todos os θ_j usando o ansatz exponencial.

Desta forma, se tivermos duas simetrias do tipo (4.110) que comutam entre si

$$(\delta_\alpha + \delta_{\beta_1})u = 0, \quad (\delta_{\alpha'} + \delta_{\beta_2})u = 0,$$

fazendo $\alpha = \alpha'$ obtemos

$$(\delta_{\beta_1} - \delta_{\beta_2})u = 0 \longrightarrow \quad (4.116)$$

$$\left(\beta_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \beta_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) u = 0 \quad (4.117)$$

e dividindo por α ,

$$\left(\frac{\beta_1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\beta_2}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) u = 0 \quad (4.118)$$

o que significa que u é uma função de $\frac{\alpha}{\beta_1} \varphi_1 + \frac{\alpha}{\beta_2} \varphi_2$, ou seja,

$$u = u \left(\frac{\alpha}{\beta_1} \varphi_1 + \frac{\alpha}{\beta_2} \varphi_2, \dots \right) \quad (4.119)$$

e, de fato, $u = v e^{i(\frac{\alpha}{\beta_1} \varphi_1 + \frac{\alpha}{\beta_2} \varphi_2)}$.

A próxima questão a ser respondida é porque estes ansätze fazem a equação de movimento ser independente de φ . A razão é simples. Como (4.109) é uma simetria das equações de movimento segue que

$$\delta_\beta \varepsilon = \Lambda \varepsilon + \bar{\Lambda} \varepsilon^* = 0 \quad (4.120)$$

on shell, onde ε e ε^* são as duas equações de movimento. Mas, quando substituimos u por $u = v e^{-i\frac{\alpha}{\beta} \varphi}$, obtemos que ε se torna um funcional de v , suas derivadas e funções explícitas das coordenadas, inclusive φ . Então:

$$\delta_\beta \varepsilon = \beta \frac{\partial}{\partial \varphi} \varepsilon = 0 \quad (4.121)$$

e ε não depende de φ .

A solução u não fica independente de φ também por causa da utilização da condição de simetria interna $u \longrightarrow e^{i\alpha} u$ na equação $(\delta_\alpha + \delta_\beta)u = 0$.

Capítulo 5

O Modelo em $S^3 \times \mathbb{R}$

Neste capítulo calculamos soluções tipo sóliton para o espaço-tempo $S^3 \times \mathbb{R}$, utilizando o procedimento delineado no capítulo anterior. A seguir calculamos todas as quantidades físicas relevantes neste caso. O desenvolvimento matemático foi bastante detalhado neste capítulo, de tal forma a exemplificar as estratégias de resolução do capítulo anterior.

5.1 Definição do modelo

Nosso modelo é definido no espaço-tempo $S^3 \times \mathbb{R}$, com um campo escalar complexo que toma valores em um dado espaço alvo. A métrica que utilizaremos para descrever $S^3 \times \mathbb{R}$ pode ser expressa num sistema de coordenadas conveniente como

$$d^2s = d^2t - r_0^2 \left(\frac{d^2z}{4z(1-z)} + (1-z)d^2\varphi_1 + zd^2\varphi_2 \right) \quad (5.1)$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é a coordenada temporal; $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 1$ são as coordenadas de S^3 e r_0 é o raio de S^3 .

A esfera S^3 vista em coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^4 é :

$$x_1 = r_0\sqrt{z} \cos(\varphi_2) \quad x_3 = r_0\sqrt{1-z} \cos(\varphi_1) \quad (5.2)$$

$$x_2 = r_0\sqrt{z} \sin(\varphi_2) \quad x_4 = r_0\sqrt{1-z} \sin(\varphi_1) \quad (5.3)$$

Nosso modelo tem uma Lagrangiana proporcional à $H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}/\gamma^2$ onde $h_{\mu\nu}$ é definido por $h_{\mu\nu} = \partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \partial_\mu u^*$ e u é um campo escalar complexo definido em detalhes abaixo. Queremos frisar agora que o fator γ^2 está relacionado com a curvatura do espaço alvo. Este fator surge, naturalmente, como resultado da parametrização

utilizada para descrever o espaço alvo, como no caso da projeção estereográfica na esfera. Em outro exemplo, se o espaço alvo fosse um plano bidimensional (o plano complexo) teríamos $\gamma^2 = 1$. Numa geometria hiperbólica teríamos $\gamma^2 < 1$ e numa esfera temos $\gamma^2 = (1 + |u|^2)$. Vamos considerar na sequência *apenas* o caso onde o espaço alvo é uma esfera S^2 e portanto assumir $\gamma^2 = (1 + |u|^2)$. A Lagrangiana neste caso é definida por

$$S = -\frac{1}{e^2} \int dt \int_{S^3} d\Sigma H_{\mu\nu}^2 \quad (5.4)$$

com

$$H_{\mu\nu} = -\frac{2i(\partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \partial_\mu u^*)}{(1 + |u|^2)^2} = \vec{n} \cdot (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n}). \quad (5.5)$$

Nesta expressão $d\Sigma = \frac{r_0^2}{2} dz d\varphi_1 d\varphi_2$ é o elemento de volume de S^3 , $u(x^\mu)$ é um campo escalar complexo assumindo valores no plano e \vec{n} ($|\vec{n}|^2 = 1$) é o vetor unitário que define a esfera S^2 . Estas duas últimas quantidades se relacionam naturalmente através da projeção estereográfica definida por

$$\vec{n} = \frac{1}{(1 + |u|^2)} (u + u^*, -i(u - u^*), |u|^2 - 1). \quad (5.6)$$

As equações de Euler-Lagrange são dadas por $\partial_\mu \kappa^\mu = 0$ e seu conjugado complexo onde definimos $\kappa_\mu = H_{\mu\nu} \partial^\nu u$. A equação de movimento e a Lagrangiana têm invariância em relação à dois grupos de transformações: o grupo de transformações conformes do espaço-tempo $S^3 \times R$, dado por $SO(4, 2)$ e o grupo dos difeomorfismos que preservam a área do espaço alvo S^2 .

A análise das simetrias espaço-temporais da equação de movimento redundam na solução da equação de Killing conforme. O caso do espaço-tempo $S^3 \times R$ já foi analisado em detalhes anteriormente. Retomando a explicação elaborada no capítulo três sobre os difeomorfismos de área podemos desenvolver o seguinte raciocínio. Neste modelo temos correntes que são conservadas independente do tipo de soluções que são encontradas a partir de um ansatz particular. São correntes conservadas devido ao fato da Lagrangiana do modelo ser construída a partir do tensor $\frac{h_{\mu\nu}}{\gamma}$.

Este tensor $\frac{h_{\mu\nu}}{\gamma}$ na verdade é o pull-back de forma de área dA no espaço alvo, a qual pode ser escrito como $dA = \frac{du du^*}{\gamma}$. Os difeomorfismos de área no espaço alvo são simetrias da Lagrangiana deste modelo, e portanto podemos esperar a existência de correntes conservadas associadas usando o teorema de Noether.

Como S^2 tem simetria por este grupo de transformações, pelo teorema de Noether, devem existir cargas conservadas. A maneira mais simples de verificar isto é verificar que as correntes

$$J_\mu^G = \frac{\delta G}{\delta u} \kappa_\mu + \frac{\delta G}{\delta u^*} \kappa_\mu^* \quad (5.7)$$

onde $G = G(u, u^*)$, são conservadas. Para isto utilizamos as equações de movimento e as identidades

$$K_\mu \partial^\mu u = 0 \quad \text{e} \quad K_\mu \partial^\mu u^* + K_\mu^* \partial^\mu u = 0. \quad (5.8)$$

Calculando $\partial^\mu J_\mu^G$ e utilizando as identidades junto com a equação de movimento obtêm-se o resultado de forma imediata.

5.1.1 Equações de movimento e novo Ansatz

Para utilizar nosso método de procura de ansatz é necessário utilizar um sistema de coordenadas apropriado. Para efetuar este procedimento utilizaremos a métrica já definida na seção anterior com o sistema de coordenadas $(t, z, \varphi_1, \varphi_2)$.

A equação de movimento é

$$\partial^\mu \left(\frac{\sqrt{-g} h_{\mu\nu} \partial^\nu u}{\gamma} \right) = 0, \quad (5.9)$$

onde $\sqrt{-g}$ é a raiz do determinante da métrica, já que estamos em um espaço curvo. No nosso caso adotamos $\gamma^2 = (1 + |u|^2)$, uma vez que já escolhemos S^2 como espaço alvo. É fácil ver que no sistema de coordenadas $(t, z, \varphi_1, \varphi_2)$ obtemos $\sqrt{-g} = r_0^2/2$.

Inicialmente faremos os cálculos utilizando o ansatz $u = f(t, z) e^{i(m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2)}$ onde $f(t, z)$ é uma função real qualquer. Este é o ansatz já utilizado em [29]. Posteriormente faremos a especialização para o caso onde $f(t, z) = H(z) e^{i\omega t}$, que é o ansatz original aqui proposto.

5.1.2 Soluções dependentes do tempo

A equação de movimento é escrita explicitamente

$$\partial_0 \left(\frac{K^0}{\gamma} \right) + \partial_i \left(\frac{K^i}{\gamma} \right) = 0 \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -h_i^2 \delta^{ij} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$K^0 = h^{0i} \partial_i u = (\partial^0 u \partial^i u^* - \partial^i u \partial^0 u^*) \partial_i u = -(\partial_0 u \nabla_i u^* - \nabla_i u \partial_0 u^*) \nabla_i u, \text{ ou seja,}$$

$$K^0 = [(\nabla u \nabla u^*) \partial_0 u - (\nabla u)^2 \partial_0 u^*] \quad \text{onde} \quad \nabla_i = \frac{\partial_i}{h_i}. \quad (5.11)$$

Por definição $K^i = h^{ij} \partial_j u + h^{i0} \partial_0 u$. Então

$$K^i = \frac{1}{h_i} \{ [(\nabla u \nabla u^*) - \partial_0 u \partial_0 u^*] \nabla_i u - [(\nabla u)^2 - (\partial_0 u)^2] \nabla_i u^* \} . \quad (5.12)$$

O ansatz utilizado inicialmente é $u = f(t, z)e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}$ onde $f(t, z)$ é uma função *real*. Substituindo resulta

$$K^0 = -\frac{1}{r_0^2} \left[(\partial_z f^* \partial_0 f - \partial_z f \partial_0 f^*) 4z(1-z) \partial_z f + \right. \quad (5.13)$$

$$\left. + [f^* \partial_0 f + f \partial_0 f^*] f \left(\frac{m_1^2}{1-z} + \frac{m_2^2}{z} \right) \right] e^{i\theta} \quad (5.14)$$

$$K^z = \frac{e^{i\theta}}{r_0^2} \left[\frac{4}{r_0^2} f \partial_z |f|^2 \Omega + 4z(1-z) \partial_0 f (\partial_0 f \partial_z f^* - \partial_0 f^* \partial_z f) \right] \quad (5.15)$$

$$K^{\varphi_1} = i \frac{e^{i\theta}}{r_0^2} \frac{m_1}{1-z} \left[z(1-z) \frac{\partial_z |f|^2 \partial_z f}{r_0^2} - \partial_0 f \partial_0 |f|^2 \right] \quad (5.16)$$

$$K^{\varphi_2} = i \frac{e^{i\theta}}{r_0^2} \frac{m_2}{z} \left[4z(1-z) \frac{\partial_z |f|^2 \partial_z f}{r_0^2} - \partial_0 f \partial_0 |f|^2 \right] \quad (5.17)$$

$$\Omega = m_1^2 z + m_2^2 (1-z). \quad (5.18)$$

Utilizando estes valores de K^i e K^0 na equação de movimento teremos

$$\begin{aligned} \partial_0 \frac{K^0}{\gamma} + \partial_i \frac{K^i}{\gamma} = \frac{e^{i\theta}}{r_0^2} \left\{ \partial_z \left[\frac{4z(1-z)(\partial_0 f \partial_z f^* - \partial_0 f^* \partial_z f) \partial_0 f}{\gamma} \right] \right. & (5.19) \\ & - \partial_0 \left[\frac{4z(1-z)(\partial_0 f \partial_z f^* - \partial_0 f^* \partial_z f) \partial_z f}{\gamma} \right] \\ & - \left(\frac{m_1^2}{1-z} + \frac{m_2^2}{z} \right) \left[\partial_0 \left(\frac{f \partial_0 |f|^2}{\gamma} \right) - \frac{\partial_0 f \partial_0 |f|^2}{\gamma} \right] \\ & \left. + \frac{4}{r_0^2} \left[\partial_z \left(\frac{f \partial_z |f|^2 \Omega}{\gamma} \right) - \Omega \left(\frac{\partial_z f \partial_z |f|^2}{\gamma} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Então a equação pode finalmente ser escrita como

$$\begin{aligned}
 & \frac{4}{r_0^2} \partial_z \left(\frac{\Omega \partial_z |f|^2}{\gamma} \right) - \left(\frac{m_1^2}{1-z} + \frac{m_2^2}{z} \right) \partial_0 \left(\frac{\partial_0 |f|^2}{\gamma} \right) \\
 & + \partial_z \left[\frac{4z(1-z)(\partial_0 f \partial_z f^* - \partial_0 f^* \partial_z f)}{\gamma} \right] \frac{\partial_0 f}{f} \\
 & - \partial_0 \left[\frac{4z(1-z)(\partial_0 f \partial_z f^* - \partial_0 f^* \partial_z f)}{\gamma} \right] \frac{\partial_z f}{f} \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

Iremos supor agora a forma funcional $f(t, z) = H(z)e^{i\omega t}$ com $H(z)$ real então $\partial_0 f \partial_z f^* - \partial_0 f^* \partial_z f = i\omega \partial_z H^2$. O último termo da equação se anula pois o fator sob a derivada temporal ∂_0 é independente do tempo. Pela mesma razão o segundo termo se anula. Desta forma

$$\frac{4}{r_0^2} \partial_z \left(\Lambda \frac{\partial_z H^2}{\gamma} \right) - \partial_z \left(\omega^2 \frac{4z(1-z) \partial_z H^2}{\gamma} \right) = 0 \quad (5.20)$$

$$\implies \partial_z \left(\Lambda \frac{\partial_z H^2}{\gamma} \right) = 0 \quad (5.21)$$

com Λ definido por $\Lambda = \Omega - r_0^2 \omega^2 z(1-z)$, ou seja, $\Lambda = m_1^2 z + m_2^2(1-z) - r_0^2 \omega^2 z(1-z)$. Note que ao contrário do termo Ω , Λ não é positivo definido.

Introduzimos

$$g = \frac{1}{1+H^2} \quad (5.22)$$

e a equação de movimento para g se reduz à forma simples

$$\partial_z (\Lambda \partial_z g) = 0, \quad (5.23)$$

e portanto

$$\partial_z g = \frac{(constante)}{\Lambda}. \quad (5.24)$$

Invertendo a relação entre g e H obteremos que $H = \sqrt{\frac{1-g}{g}}$. Nestas coordenadas $(t, z, \varphi_1, \varphi_2)$ o ansatz é dado por

$$u = \sqrt{\frac{1-g(z)}{g(z)}} e^{i(m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + \omega t)}, \quad (5.25)$$

onde m_1 e m_2 são inteiros positivos, w é uma frequência real e $g(z)$ uma função real. Como o fator $\sqrt{(1-g(z))/g(z)}$ deve ser real, é necessário impor que $0 \leq g \leq$

1. Alguns comentários são pertinentes em relação ao formato do ansatz. A explicação para a restrição de m_1 e m_2 inteiros está relacionada ao fato das coordenadas φ_1 e φ_2 serem periódicas conforme explicado na seção 4.5. Esta restrição se expressa na continuidade de $u(z, \varphi_1, \varphi_2, t)$. De fato, como $u(z, \varphi_1, \varphi_2, t)$ é uma função complexa e devemos ter $u(z, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, t) = u(z, \varphi_1 = 2\pi, \varphi_2 = 0, t)$ e $u(z, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, t) = u(z, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi, t)$ resulta que m_1 e m_2 devem ser inteiros para que u seja uma função univocamente definida.

Outro ponto importante é o fato da parte real de u ser dada por $H(z) = \sqrt{(1-g)/g}$. Ocorre que o ansatz $u = H(z)e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \omega t)}$ é uma solução da equação de movimento (que é uma EDP) o qual separa variáveis de tal forma que resta uma EDO para $H(z)$. A EDP inicial é não-linear, mas escrevendo $H(z)$ como $H(z) = \sqrt{(1-g)/g}$ obtemos uma equação diferencial ordinária linear para $g(z)$.

Podemos entender por que isto ocorre retomando a análise feita no capítulo anterior. Na nossa Lagrangiana aparece o fator

$$H_{\mu\nu} = \frac{-2ih_{\mu\nu}}{(1+|u|^2)} \quad (5.26)$$

ao quadrado. Sempre podemos escrever $u = He^{i\theta}$ então $1+|u|^2 = 1+H^2$. Em seguida fazemos a mudança de variável $dg = \frac{-dH^2}{(1+|u|^2)^2}$ ou seja, $g = \frac{1}{(1+H^2)}$.

Nestas novas variáveis, $H_{\mu\nu} = \partial_\mu g \partial_\nu \theta - \partial_\nu g \partial_\mu \theta$, o que resulta na simplificação da equação para g .

Λ é um polinômio do segundo grau em z . Então, fatorando a constante $\frac{r_0^2 \omega^2}{c^2}$, podemos escrevê-lo como $\Lambda = \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} (z - z_+)(z - z_-)$, onde z_+ e z_- são os zeros do polinômio. O caso onde $\omega = 0$ será tratado posteriormente.

Se $z_+ = z_-$ teremos que $\partial_z g = \frac{\text{constante}}{(z-z_+)^2}$ então obtemos $g \sim \frac{1}{(z-z_+)} + \text{constante}$, se $z_+ \neq z_-$ a solução será do tipo $g \sim \ln\left(\frac{z-z_+}{z-z_-}\right) + \text{constante}$. Como $z \in [0, 1]$ e temos que ter $0 \leq g \leq 1$, nenhuma das raízes z_+ ou z_- pode se anular no intervalo $[0, 1]$. Esta condição é bastante importante e determina os tipos de soluções aceitáveis no nosso modelo.

Como $\Lambda = m_1^2 z + m_2^2 z(1-z) - \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} z(1-z)$ escrevendo $p = cm_1/(r_0\omega)$ e $q = cm_2/(r_0\omega)$ resulta $\Lambda = \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} [z^2 + z(p^2 - q^2 - 1) + q^2]$.

As raízes são $z_\pm = -b \pm \sqrt{\Delta}$ com $b = (p^2 - q^2 - 1)/2$ e $\Delta = ((p^2 - q^2 - 1) - 4q^2)/2$.

Definindo $p_+ = p + q = \frac{c}{r_0\omega}(m_1 + m_2)$ e $p_- = p - q = \frac{c}{r_0\omega}(m_1 - m_2)$ pode-se escrever

$$b = \frac{(p_+ p_- - 1)}{2} \quad (5.27)$$

e, uma vez que $(p^2 - q^2 - 1) - 4q^2 = (p_-^2 - 1)(p_+^2 - 1)$, podemos colocar Δ na forma conveniente

$$\Delta = \frac{1}{4} (p_+^2 - 1) (p_-^2 - 1) \quad (5.28)$$

A seguir devemos analisar o sinal de $\Delta(p_+, p_-)$ para descobrir quais são as regiões aceitáveis. No caso $\Delta < 0$ não há problema pois não existem zeros e portanto a função $g(z)$ não poderá divergir.

Então temos que resolver a desigualdade $\Delta > 0$ e a igualdade $\Delta = 0$.

a) caso $\Delta = 0$

$\Delta = 0 \implies p_+ = \pm 1$ ou $p_- = \pm 1$ ou seja este caso corresponde a 4 retas $p_+ = 1$, $p_+ = -1$, $p_- = 1$ e $p_- = -1$.

b) caso $\Delta > 0$

$$\Delta > 0 \implies \frac{1}{4} (p_+^2 - 1) (p_-^2 - 1) > 0$$

com soluções (α) $p_+^2 - 1 > 0$ e $p_-^2 - 1 > 0$

$$(\beta) \quad p_+^2 - 1 < 0 \text{ e } p_-^2 - 1 < 0$$

A solução para (α) é $(p_+ > 1$ ou $p_+ < -1)$ e $(p_- > 1$ ou $p_- < -1)$ o que resulta em quatro regiões distintas no plano (p_+, p_-) , a saber, $p_+ > 1$ e $p_- > 1$, $p_+ > 1$ e $p_- < 1$, $p_+ < 1$ e $p_- > 1$ e por fim $p_+ < -1$ e $p_- < -1$.

A solução para o caso (β) é $-1 < p_+ < 1$ e $-1 < p_- < 1$, o que corresponde a um retângulo de lado um centrado na origem. Resumindo, temos o gráfico (5.1).

Além de analisar o sinal de Δ , precisamos verificar aonde se localizam os zeros z_+ e z_- do polinômio $\Lambda(z)$, pois nossa função $g(z)$ está definida no intervalo $0 \leq z \leq 1$ e zeros fora deste intervalo não constituem um problema.

As condições para $g(z)$ ser aceitável são

a) $\Delta < 0$, z_+ e z_- quaisquer

b) $\Delta > 0$, com $z_+ > z_- > 1$ ou $z_- < z_+ < 0$ ou $z_- < 0$ e $z_+ > 1$

c) $\Delta = 0$, com $z_+ = z_- = z_0$ com $z_0 > 1$ ou $z_0 < 0$

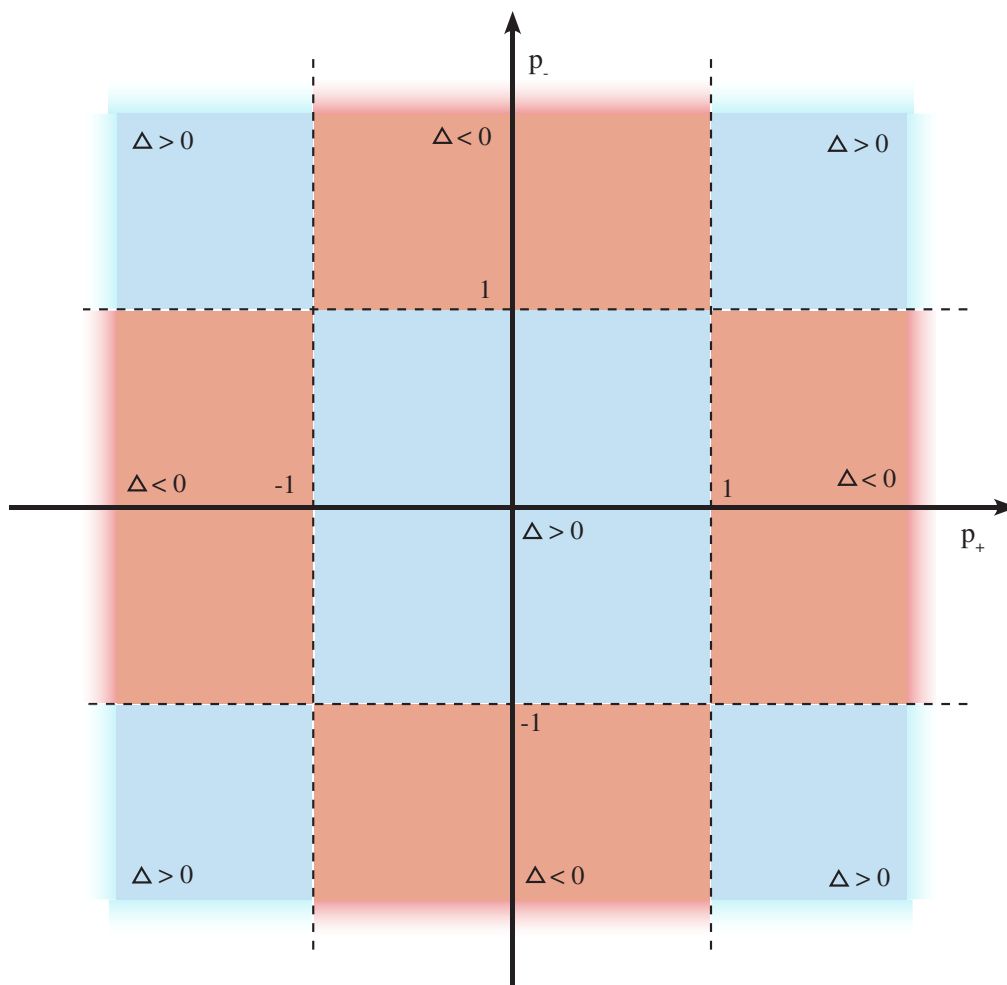


Figura 5.1: regiões do plano separadas pelo sinal de delta ($\Delta = 0$ corresponde às linhas pontilhadas)



Figura 5.2: duplas coloridas (z_+, z_-) de raízes do polinômio $\Lambda(z)$ aceitáveis em princípio (fora do intervalo $[0, 1]$)

O caso (a) acima é trivial, já que para $\Delta < 0$, g é sempre aceitável.

Vamos analisar o caso (b). Temos **três** subcasos:

(B1) $\Delta > 0$ e $z_- > 1$. De $z_- > 1$ resulta

$$z_- > 1 \implies \sqrt{(p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1)} < -(1 + p_+p_-)$$

A desigualdade $\sqrt{(p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1)} < -(1 + p_+p_-)$ equivale por sua vez à *duas desigualdades simultâneas**

primeira: $-(1 + p_+p_-) > 0 \implies p_+p_- < -1$ e, portanto,

- se p_+ for positivo temos que $p_+ = |p_+|$, então $p_- < -1/|p_+|$
- porém se p_+ for negativo $p_+ = -|p_+|$, então $p_- > 1/|p_+|$

Ou seja, a primeira desigualdade corresponde à região hachurada no gráfico (5.3).

*sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais. As desigualdades $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ tem soluções reais dadas pelo seguinte conjunto:

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \iff 0 \leq f(x) < g(x) \quad \text{e} \quad g(x) > 0 \quad (5.29)$$

Analogamente a desigualdade $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ tem solução dada por:

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \implies \begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) < 0 \\ \text{ou} \\ f(x) > (g(x))^2 \text{ e } g(x) \geq 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

segunda: $0 \leq (p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1) < (1 + p_+p_-)^2 \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{condição (1): } 0 \leq (p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1) \\ \\ \text{corresponde à desigualdade } \Delta \geq 0, \\ \\ \text{e solução dada pelas linhas pontilha} \\ \\ \text{-das e pela região azul da figura(5.1)} \\ \\ \text{condição (2): } (p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1) < (1 + p_+p_-)^2 \\ \\ \Rightarrow (p_+ + p_-)^2 > 0 \text{ e cuja solução é dada por} \\ \\ p_+ \in R, p_- \in R, \text{ com } p_+ \neq -p_- \end{array} \right.$$

Por fim, levando em conta todas as condições, obtemos para o caso **(B1)**

- $p_+ < -1$ e $p_- > 1$ e $p_+ \neq -p_-$ ou
- $p_+ > 1$ e $p_- < -1$ e $p_+ \neq -p_-$

(B2) $\Delta > 0$ e $z_+ < 0$

Neste caso, $z_+ < 0$ e segue que:

$$0 \leq (p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1) < (p_+p_- - 1)^2 \text{ e } p_+p_- - 1 > 0.$$

Portanto, a condição para $z_+ < 0$ implica que:

(1) $0 \leq (p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1)$ é novamente $\Delta \geq 0$ com o resultado já estabelecido.

(2) $(p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1) < (p_+p_- - 1)^2 \Rightarrow (p_+ - p_-)^2 > 0$ cujo resultado é

$$p_+ \in R, p_- \in R, p_+ \neq p_-$$

(3) $p_+p_- - 1 > 0 \Rightarrow p_+p_- > 1$. Esta condição está representada no gráfico (5.4)

Como no caso anterior a condição $\Delta > 0$ elimina $p_+ = \pm 1$ e $p_- = \pm 1$.

Usando **(3)** ($p_+p_- > 1$) e **(2)** ($p_+ \neq p_-$) resulta finalmente para o caso **(B2)**:

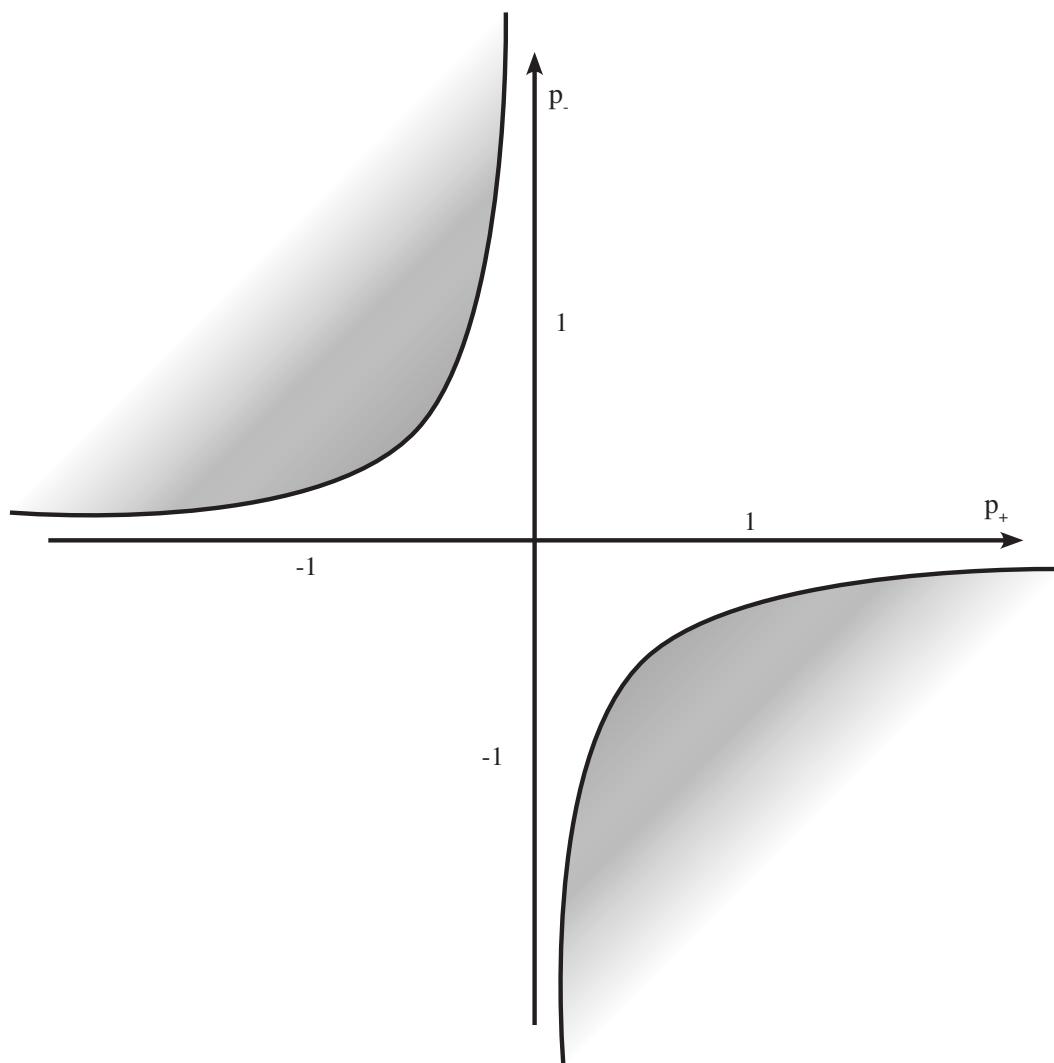


Figura 5.3: Gráfico com as regiões hachuradas representando a condição $p_+ p_- < -1$

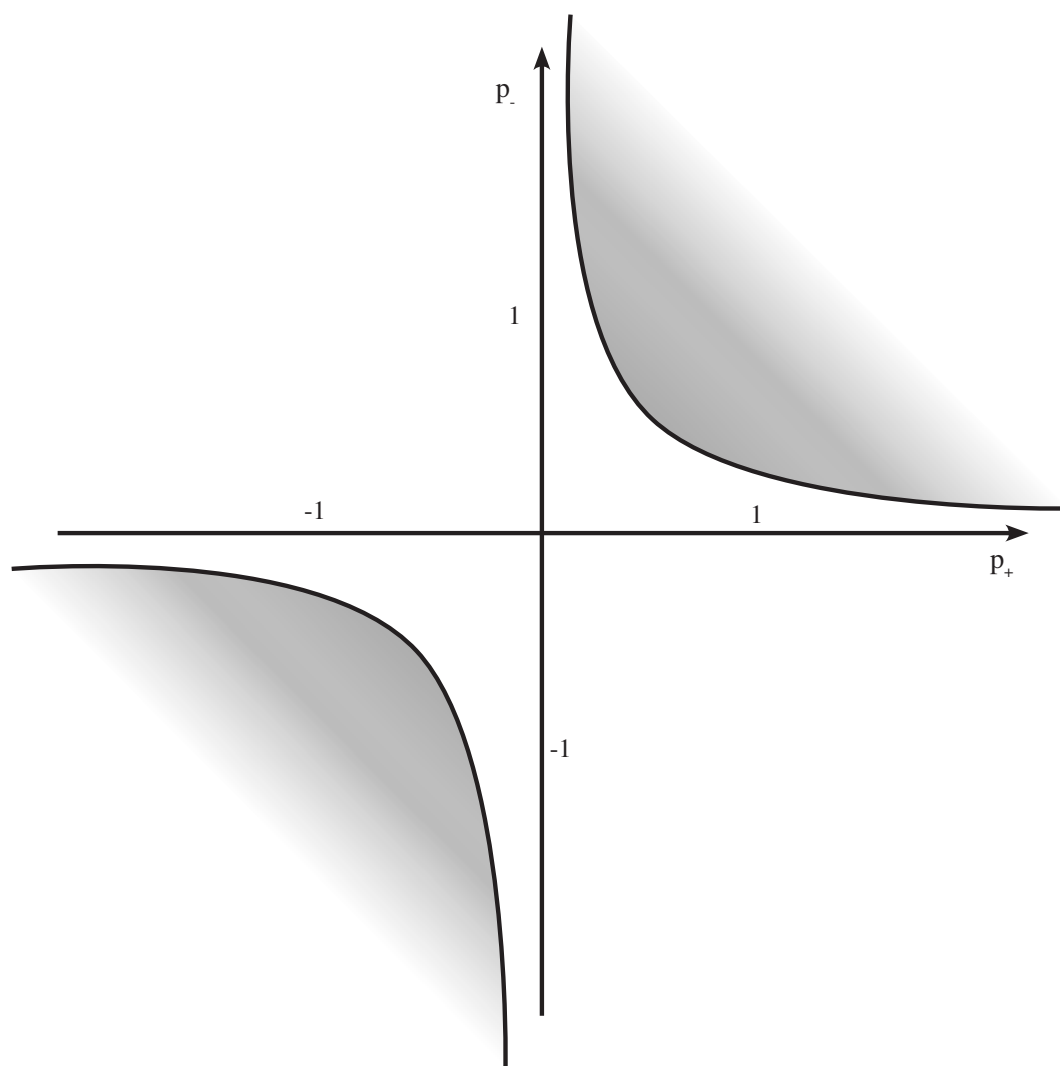


Figura 5.4: Gráfico com as regiões hachuradas representando a condição $p_+ p_- > 1$

- $(p_+ > 1$ e $p_- > 1$ com $p_+ \neq p_-)$ ou
- $(p_+ < -1$ e $p_- < -1$ com $p_+ \neq p_-)$

(B3) $\Delta > 0$, $z_- < 0$ e $z_+ > 1$

$$z_- < 0 \implies (1 - p_+p_-) < \sqrt{(p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1)}$$

$$z_+ > 1 \implies (1 + p_+p_-) < \sqrt{(p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1)}$$

portanto $z_+ > 1 \implies$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{caso (B3-i): } (p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1) \geq 0 \text{ e } (1 + p_+p_-) < 0 \\ \text{ou} \\ \text{caso (B3-ii): } (p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1) > (1 + p_+p_-)^2 \text{ e } (1 + p_+p_-) \geq 0 \end{array} \right.$$

Vamos analisar o caso **(B3-ii)**. Temos que $(p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1) > (1 + p_+p_-)^2 \implies (p_+ + p_-)^2 < 0$ e portanto não existem p_+ e p_- reais que satisfaçam **(B3-ii)**.

No caso **(B3-i)** podemos observar que a condição $(p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1) \geq 0$ mais uma vez é idêntica à condição $\Delta \geq 0$ já estudada. Ou seja, temos as cinco regiões do plano (p_+, p_-) em azul na figura (5.1) correspondente. A desigualdade $p_+p_- < -1$ representa a escolha do segundo e quarto quadrantes do plano e a exclusão do quadrado central de lado um, já que nesta região $p_+p_- \geq -1$. Então, a solução para $z_+ > 1$ é

$$z_+ > 1 \implies \left\{ \begin{array}{l} p_- > 1 \text{ e } p_+ \leq -1 \\ \\ \text{ou} \\ \\ p_- < -1 \text{ e } p_+ \geq 1 \\ \\ \text{ou} \\ \\ p_- = -1 \text{ e } p_+ > 1 \\ \\ \text{ou} \\ \\ p_- = 1 \text{ e } p_+ < -1 \end{array} \right.$$

$$z_- < 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{caso (B3-iii): } (p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1) \geq 0 \quad \text{e} \quad (1 - p_+p_-) < 0 \\ \\ \text{ou} \\ \\ \text{caso (B3-iv): } (p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1) > (1 - p_+p_-)^2 \quad \text{e} \quad 1 - p_+p_- \geq 0 \end{array} \right.$$

No caso **(B3-iii)**, temos novamente a condição $\Delta \geq 0$, agora conjugada à $p_+p_- > 1$. Desta vez resulta na área em azul do *primeiro e terceiro quadrantes* na figura (5.1) e a exclusão do quadrado central de lado um, já que teríamos $p_+p_- \leq 1$ no quadrado.

Para **(B3-iv)** $(p_+^2 - 1)(p_-^2 - 1) > (1 - p_+p_-)^2 \implies (p_+ - p_-)^2 < 0$. Portanto não existem p_+, p_- reais satisfazendo esta desigualdade.

A condição $\Delta > 0$ exclui qualquer caso onde $p_+ = \pm 1$ e $p_- = \pm 1$. Então:

- $z_+ > 1 \implies (p_- > 1 \text{ e } p_+ < -1) \text{ ou } (p_- < -1 \text{ e } p_+ > 1)$
- $z_- < 0 \implies (p_- > 1 \text{ e } p_+ > 1) \text{ ou } (p_- < -1 \text{ e } p_+ < -1)$

Portanto, como temos que ter $\Delta > 0$, $z_+ > 1$ e $z_- < 0$ *simultaneamente*, não existem valores reais de z_+ e z_- satisfazendo estas desigualdades. Ou seja, não há soluções aceitáveis $g(z)$ neste caso.

Também podemos observar que só existem soluções quando z_+ e z_- têm o mesmo sinal, o que implica que $z_+ - z_- > 0$ sempre.

Por fim, o caso **(c)** é dado por $\Delta = 0$, $z_+ = z_- = z_0$, com $z_0 > 1$ ou $z_0 < 0$ e divide-se nos subcasos a seguir

(C1) $\Delta = 0$ e $z_0 < 0$ Temos $z_0 < 0 \implies p_+ p_- > 1$ e como $\Delta = 0$ resulta que $p_+ = \pm 1$ ou $p_- = \pm 1$ necessariamente. As possibilidades que restam são

$$\left\{ \begin{array}{l} p_+ p_- > 1 \text{ e } p_+ = 1 \implies p_- > 1 \text{ e } p_+ = 1 \\ p_+ p_- > 1 \text{ e } p_+ = -1 \implies p_- < -1 \text{ e } p_+ = -1 \\ p_+ p_- > 1 \text{ e } p_+ = 1 \implies p_- = 1 \text{ e } p_+ > 1 \\ p_+ p_- > 1 \text{ e } p_- = -1 \implies p_- = -1 \text{ e } p_+ < -1 \end{array} \right.$$

(C2) $z_0 > 1$ e $\Delta = 0$. Temos que $p_+ p_- < -1$ e portanto

$$\left\{ \begin{array}{l} p_+ p_- < -1 \text{ e } p_+ = 1 \implies p_- < 1 \text{ e } p_+ = 1 \\ p_+ p_- < -1 \text{ e } p_+ = -1 \implies p_- > 1 \text{ e } p_+ = -1 \\ p_+ p_- < -1 \text{ e } p_- = 1 \implies p_- = 1 \text{ e } p_+ < -1 \\ p_+ p_- < -1 \text{ e } p_- = -1 \implies p_- = -1 \text{ e } p_+ > 1 \end{array} \right.$$

Existem 8 semi-retas com soluções permitidas. Os quatro pontos $p_+ = \pm 1$ e $p_- = \pm 1$ e os lados do quadrado central são excluídos por $p_+ p_- > 1$ ou por $p_+ p_- < -1$. Resumimos a análise efetuada no gráfico (5.5).

Iremos reescrever os intervalos de variações de p_+ e p_- explicitamente em função de m_1, m_2 e ω .

Para o caso $\Delta = 0$: $(p_+^2 = 1 \text{ e } p_-^2 > 1)$ ou $(p_+^2 > 1 \text{ e } p_-^2 = 1)$ e então

i) $(m_1 + m_2)^2 = \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2}$ e $(m_1 - m_2)^2 > \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2}$ daí resulta que $m_1 m_2 < 0$

ii) $(m_1 - m_2)^2 = \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2}$ e $(m_1 + m_2)^2 = \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2}$, desta forma $m_1 m_2 > 0$

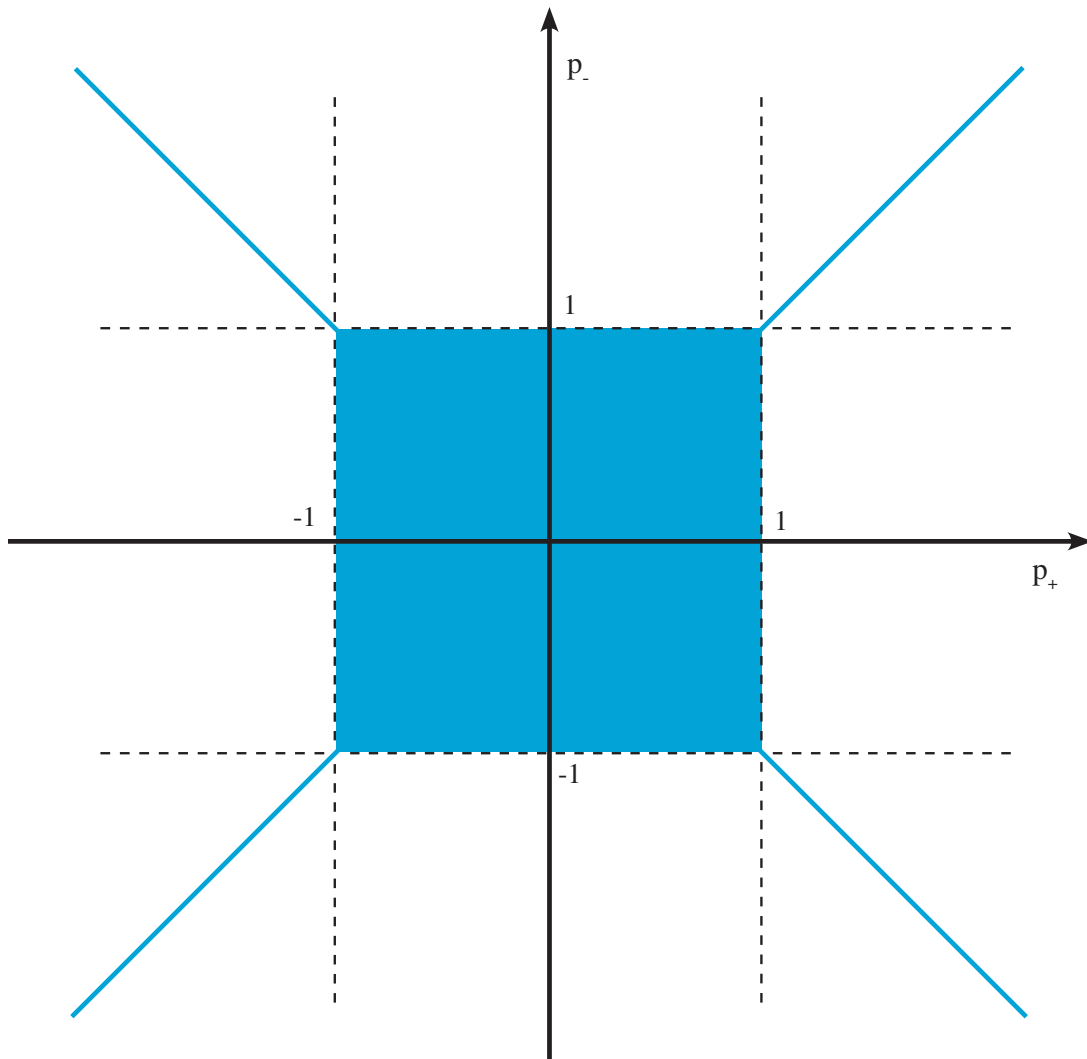


Figura 5.5: região proibida para $g(z)$ (sem solução aceitável) em azul no plano (p_+, p_-)

Sendo assim, podemos expressar (i) e (ii) de forma compacta como

$$(|m_1| - |m_2|)^2 = \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} \quad (5.31)$$

Consideremos agora os casos quando $\Delta < 0$. Neste caso

- i) $p_+^2 < 1$ e $p_-^2 > 1$ implica que $m_1 m_2 < 0$
- ii) $p_+^2 > 1$ e $p_-^2 < 1$ implica que $m_1 m_2 > 0$

Deste modo, as duas possibilidades se resumem a

$$(|m_1| - |m_2|)^2 < \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} < (|m_1| + |m_2|)^2 \quad (5.32)$$

Considere agora os casos ($\Delta > 0$), onde temos necessariamente duas desigualdades simultâneas $p_{\pm}^2 > 1$, que implicam na condição

$$(m_1 \pm m_2)^2 > \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} \quad (5.33)$$

$$\implies \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} < (|m_1| - |m_2|)^2 \quad (5.34)$$

No caso onde $\omega = 0$, $\Lambda = m_1^2 z + m_2^2 (1 - z)$. Se $m_1 = 0$, Λ se anula em $z = 0$. Se $m_1 \neq 0$ e $m_2 \neq 0$ temos que $z_0 = m_2^2 / (m_2^2 - m_1^2)$ e daí $z_0 > 1$ se $m_2^2 > m_1^2$ e $z_0 < 0$ se $m_2^2 < m_1^2$. Portanto devemos descartar os casos onde $m_2 = 0$ ou $m_1 = 0$.

As condições de contorno sobre $g(z)$ que iremos utilizar são $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$. A justificativa é a seguinte. Nossas soluções possuem carga de Hopf dada por $Q_H = m_1 m_2 (g(1) - g(0))$, onde Q_H tem que ser um *inteiro* por definição. Os fatores m_1 e m_2 são inteiros então o fator $g(1) - g(0)$ deve ser um inteiro também. Porém, $0 \leq g \leq 1$ de tal forma que as duas únicas possibilidades são $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$ ou $g(0) = 1$ e $g(1) = 0$. Utilizamos $g(1) = 1$ e $g(0) = 0$. O sinal de Q_H corresponde apenas à uma escolha puramente convencional do sentido de orientação do sistema de coordenadas utilizado.

As soluções no caso $\omega = 0$ com $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$ são dadas simplesmente por

- a) $g = z$ se $m_1^2 = m_2^2$
- b) $g = \frac{\ln[(q^2 - 1)z + 1]}{\ln q^2}$ se $m_1^2 \neq m_2^2$

onde definimos $q = \left| \frac{m_1}{m_2} \right|$.

As soluções no caso $\omega \neq 0$ dividem-se naturalmente em três tipos: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

1) Se $\Delta > 0$ temos (para $a = \frac{1}{2} \left(\frac{p_+^2 + p_-^2}{2} - 1 \right)$)

$$g = \frac{1}{\ln \left(\frac{a + \sqrt{\Delta}}{a - \sqrt{\Delta}} \right)} \left[\ln \left(\frac{z + b - \sqrt{\Delta}}{z + b + \sqrt{\Delta}} \right) - \ln \left(\frac{b - \sqrt{\Delta}}{b + \sqrt{\Delta}} \right) \right]$$

$$\frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} < (|m_1| - |m_2|)^2$$

2) Se $\Delta = 0$ temos

$$g = \frac{q}{q-1} \left(1 - \frac{1}{(q-1)z+1} \right)$$

$$(|m_1| - |m_2|)^2 = \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2}$$

3) Se $\Delta < 0$ temos (com arctan no intervalo $[0, \pi]$)

$$g = \frac{1}{\arctan \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{a} \right)} \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{b} \right) - \arctan \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{b+z} \right) \right]$$

$$(|m_1| - |m_2|)^2 < \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} < (|m_1| + |m_2|)^2$$

Podemos observar que, dados valores fixos para m_1 e m_2 , os vários tipos de funções para $g(z)$ são determinados pelo fator $(r_0 \omega)/c$. O intervalo de variação desta quantidade é determinado por estes mesmos inteiros. Portanto a velocidade angular ω de uma certa solução é inversamente proporcional ao raio r_0 da esfera S^3 . O período destas rotações ($T = 2\pi/\omega$) nunca é menor que o tempo que um raio de luz leva para viajar ao longo de um círculo máximo de S^3 .

Como o fator $\partial_z g$ aparece frequentemente nos cálculos a seguir, iremos escrevê-lo numa forma mais conveniente. O fator $\partial_z g$ é sempre dado por

$$\partial_z g = \frac{\text{constante}}{\Lambda} .$$

Definindo $w = \sqrt{\Delta}/a$ e usando $a = \frac{1}{2} \left(\frac{p_+^2 + p_-^2}{2} - 1 \right)$, podemos escrever esta constante como

$$\beta = \left(m_1^2 + m_2^2 - \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} \right) \frac{w}{\ln \left(\frac{1+w}{1-w} \right)}$$

e então fica a expressão para $\partial_z g$,

$$\partial_z g = \frac{\left(m_1^2 + m_2^2 - \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} \right)}{\Lambda} \frac{w}{\ln \left(\frac{1+w}{1-w} \right)} \quad (5.35)$$

que será utilizada futuramente.

Para $\Delta = 0$, resulta a expressão simplificada

$$\partial_z g = \frac{|m_2 m_1|}{\Lambda} . \quad (5.36)$$

Usando a projeção estereográfica, podemos visualizar a solução. Observamos que n_3 depende exclusivamente de $|u|^2$, que é função de $g(z)$. Mas $g(z)$ é uma função monotônica e portanto n_3 constante implica z constante. Então as superfícies de n_3 constante podem ser obtidas fixando z e variando φ_1 e φ_2 . Tais superfícies são as mesmas para todas as soluções. O que muda de uma solução para outra é a correspondência explícita entre z e n_3 determinada pelas constantes (m_1, m_2, ω) . É importante notar que tais superfícies não evoluem no tempo, já que $|u|^2$ é independente do tempo. Para qualquer solução, a pré-imagem do pólo norte de S^2 ($\vec{n} = (0, 0, 1)$) corresponde a um círculo de raio r_0 no plano $x^2 x^4$. Da mesma forma a pré-imagem do pólo sul $\vec{n} = (0, 0, -1)$ corresponde a um círculo no plano $x^1 x^2$. Para um \vec{n} genérico com $-1 < n_3 < 1$, temos uma superfície toroidal.

5.2 A carga topológica de Hopf

Para qualquer instante de tempo t , nossa solução define um mapa do espaço físico S^3 para o espaço alvo S^2 e portanto é um mapa de Hopf. A carga de Hopf (ou invariante de Hopf) é calculada usando o procedimento a seguir [4]. Em primeiro lugar é feito um mapeamento do espaço físico S^3 para outra esfera S^3_Z . Este mapeamento é dado explicitamente por

$$Z = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-w} e^{i(m_1 \varphi_1 + \omega t)} \\ \sqrt{w} e^{-i m_2 \varphi_2} \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

onde w_1 e w_2 são coordenadas complexas em S^3_Z com a propriedade que $|w_1|^2 + |w_2|^2 = 1$. Então é feito um segundo mapeamento $S^3_Z \rightarrow S^2$ dado por $u = w_1/w_2$. A carga de Hopf é definida pela integral

$$Q_H = \frac{1}{4\pi^2} \int_{S^3} d\Sigma \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}), \quad (5.38)$$

na qual $\vec{\nabla}$ é o gradiente no espaço físico S^3 , $d\Sigma = \frac{r^3}{2} dz d\varphi_1 d\varphi_2$ é, como usual, o elemento de volume de S^3 e o vetor \vec{A} é definido por

$$\vec{A} = \frac{i}{2} (Z^\dagger \vec{\nabla} Z - \vec{\nabla} Z^\dagger Z). \quad (5.39)$$

Calculando resulta

$$\vec{A} = -\frac{m_1 (1-g)}{r_0 \sqrt{1-z}} \hat{e}_{\varphi_1} + \frac{m_2 g}{r_0 \sqrt{z}} \hat{e}_{\varphi_2}, \quad (5.40)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{2}{r_0^2} \partial_z g (-m_2 \sqrt{1-z} \hat{e}_{\varphi_1} + m_1 \sqrt{g} \hat{e}_{\varphi_2}). \quad (5.41)$$

O fato importante aqui é que \vec{A} é constante no tempo o que nos permite afirmar que Q_H é de fato uma carga conservada. A expressão final para Q_H é

$$Q_H = m_1 m_2 (g(1) - g(0)) = m_1 m_2, \quad (5.42)$$

onde usamos as condições de contorno anteriormente discutidas. Como m_1 e m_2 são sempre diferentes de zero, temos $Q_H \neq 0$ para todas as soluções.

5.3 As cargas de Noether

Conforme já discutido anteriormente, sabemos que as correntes conservadas no espaço alvo são dadas por

$$J_\mu^G = \frac{\delta G}{\delta u} K_\mu + \frac{\delta G}{\delta u^*} K_\mu^* \quad (5.43)$$

com $K_\mu = -2i \frac{(\partial u \partial u^*) \partial_\mu u - (\partial u)^2 \partial_\mu u^*}{(1+|u|^2)^2}$. Substituindo nosso ansatz obtemos

$$K_0 = \frac{16\omega}{r_0^2 c} u z (1-z) \left(\frac{H'}{1+H^2} \right)^2. \quad (5.44)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\delta G}{\delta u} &= \frac{\delta G}{\delta |u|^2} \frac{\delta |u|^2}{\delta u} = u^* \frac{\delta G}{\delta |u|^2} = u^* \frac{\delta G}{\delta H^2} \\ &= u^* \frac{\delta G}{\delta g} \frac{\delta g}{\delta H^2} = - \frac{u^*}{(1+H^2)^2} \frac{\delta G}{\delta g} , \end{aligned}$$

resulta

$$J_0^G = \frac{16\omega}{r_0^2 c} z(1-z) \left(\frac{H'}{1+H^2} \right)^2 \left[\frac{H^2}{(1+H^2)^2} \frac{\delta G}{\delta g} + \left(\frac{H}{1+H^2} \right)^2 \frac{\delta G}{\delta g} \right] , \quad (5.45)$$

$$J_0^G = \frac{32\omega}{r_0^2 c} z(1-z) \frac{\delta G}{\delta g} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+H^2} \right)' \right) \quad (5.46)$$

$$J_0^G = \frac{8\omega}{r_0^2 c} z(1-z) \frac{\delta G}{\delta g} (\partial_z g)^2, \quad (5.47)$$

portanto

$$Q^G = \int d\Sigma J_0^G = 16\pi^2 \frac{\omega r_0}{c} \int_0^1 dz (1-z) z (\partial_z g)^2 \frac{\delta G}{\delta g} . \quad (5.48)$$

De $g = \frac{1}{1+H^2}$ resulta $\frac{H'}{1+H^2} = -\frac{1}{2} \frac{g'}{\sqrt{g(1-g)}}$ e temos a seguinte expressão para K_0 :

$$K_0 = -\frac{4\omega}{r_0^2 c} u \frac{z(1-z)}{g(1-g)} (g')^2. \quad (5.49)$$

Vamos calcular as cargas de Noether usando um funcional da forma $G = u^m (u^*)^n$. Neste caso,

$$J_0^{(m,n)} = -\frac{4\omega}{r_0^2 c} \frac{z(1-z)}{g(1-g)} (g')^2 (m+n) u^m (u^*)^n, \quad (5.50)$$

$$J_0^{(m,n)} = -(m+n) \frac{4\omega}{r_0^2 c} \frac{z(1-z)}{g(1-g)} (\partial_z g)^2 \left(\frac{1-g}{g} \right)^{\frac{(m+n)}{2}} e^{i(m-n)(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \omega t)}. \quad (5.51)$$

Podemos notar que, se $m \neq n$, a integral do fator de fase será zero, anulando a carga de Noether associada. Então as cargas não nulas serão de forma $G \sim |u|^2$, ou seja, $G \sim g$. Este conjunto de cargas têm parênteses de Poisson nulos e portanto são relacionadas à integrabilidade do modelo. Agora iremos estudar o caso $G = G(g)$. Para isto precisamos primeiramente analisar a integral

$$I = \int_0^1 dz (1-z) z (\partial_z g)^2 \frac{\delta G}{\delta g} .$$

Note-se que I não muda quando fazemos $z \rightarrow 1 - z$, pois $z' = 1 - z \rightarrow dz' = -dz$ e a troca de sinal é compensada pela troca dos limites de integração. Mudando de variável

$$y = \frac{1 - z}{z}$$

resulta

$$I = \int_0^\infty dy y (\partial_y g)^2 \frac{\delta G}{\delta g} .$$

Também pode ser observado que agora I é invariante por $y \rightarrow 1/y$ pelo mesmo argumento anterior. A função g nas novas variáveis é

$$g = \frac{\ln \left(\frac{y - y_-}{y - y_+} \right)}{\ln \left(\frac{y_-}{y_+} \right)} ,$$

com $y_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{a - b}$ sendo os zeros de $\Lambda = m_1^2(1 + y) + m_2^2 y(1 + y) - \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} y$, o qual pode ser reescrito como $\Lambda = m_2^2(y - y_+)(y - y_-)$.

Escolhendo agora $G = \frac{g^n}{16\pi^2 n!}$ e, usando as definições de β e w , temos que integral I pode ser escrita como

$$I = \frac{\beta^2}{16\pi^2 (n-1)! m_2^4} \frac{1}{\left[\ln \left(\frac{y_-}{y_+} \right) \right]^{n-1}} I(n)$$

com

$$I(n) = \int_0^\infty dy \frac{y}{(y - y_+)^2 (y - y_-)^2} \left[\ln \left(\frac{y - y_-}{y - y_+} \right) \right]^{n-1} .$$

A função $K(n)$ definida abaixo

$$K(n) = -\frac{(n-1)!}{(y_- - y_+)^2} \left[\frac{y_-}{y - y_-} - \frac{(-1)^n y_+}{y - y_+} - \frac{y_- + y_+}{(y_+ - y_-) n!} \left(\ln \left(\frac{y - y_-}{y - y_+} \right) \right)^n + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l!} \left[\ln \left(\frac{y - y_-}{y - y_+} \right) \right]^l p(n-1-l) \right],$$

na qual utilizamos

$$p(\text{par}) = \frac{y^2 - y_+ y_-}{(y - y_+)(y - y_-)}$$

$$p(\text{ímpar}) = \frac{(y_- + y_+)(y^2 + y_- y_+) - 4y y_+ y_-}{(y - y_-)(y - y_+)(y_- - y_+)}$$

tem derivada

$$\frac{dK(n)}{dy} = \frac{y}{(y - y_+)^2(y - y_-)^2} \left[\ln \left(\frac{y - y_-}{y - y_+} \right) \right]^{n-1},$$

e portanto a integral I é

$$I = \frac{\beta^2}{16\pi^2(n-1)!m_2^4} \frac{1}{\left[\ln \left(\frac{y_-}{y_+} \right) \right]^{n-1}} \left[|k(n)|_{y=\infty} - |k(n)|_{y=0} \right] = \frac{F^{(n)}(w)}{16\pi^2}$$

com $F^{(n)}(w)$ definido abaixo,

$$F^{(n)}(w) \equiv \left[1 / \left(\ln \frac{1+w}{1-w} \right)^{n+1} \right] \left[\sum_{l=1}^n \left(\frac{\epsilon_+(n-1)}{w} - \epsilon_-(n-l) \right) \frac{1}{l!} \left(\ln \frac{1+w}{1-w} \right)^l - 2\epsilon_-(n) \right]$$

no qual $\epsilon_{\pm}(n) = (1 \pm (-1)^n)/2$.

A carga é, finalmente,

$$Q^{(n)} = \frac{r_0\omega}{c} F^{(n)}(w) \quad (5.52)$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$. No caso $\Delta = 0$ temos simplesmente

$$Q^{(n)} = \frac{r_0\omega}{c} \frac{n}{(n+2)!} . \quad (5.53)$$

5.4 O Momento Angular

A ação do modelo é invariante em relação ao grupo conforme $SO(4, 2)$ do espaço-tempo $S^3 \times R$. Este grupo contém o subgrupo $SO(4)$ das rotações da esfera S^3 . Vamos calcular as seis cargas de Noether associadas as simetrias deste subgrupo. Começaremos analisando as translações em φ_1 e φ_2 que correspondem a rotações nos planos x^1x^2 e x^3x^4 .

Definimos $\delta\varphi_i = \epsilon_i$ com $i = 1, 2$. Para fazer o cálculo usamos o truque de fazer ϵ_i dependente das coordenadas. Como u é escalar segue que $\delta u = 0$. Porém para $\partial_\mu u$ a variação não é nula

$$\delta\partial_\mu u = - \frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\nu} . \quad (5.54)$$

Num dos casos $\xi^0 = \xi^z = \xi^{\varphi_2} = 0$, $\xi^{\varphi_1} = \varepsilon^1$ e, no outro, $\xi^0 = \xi^z = \xi^{\varphi_1} = 0$, $\xi^{\varphi_2} = \varepsilon^2$, então

$$\delta \partial_\mu u = -\frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial u}{\partial \varphi_i} . \quad (5.55)$$

O elemento de volume

$$dV = \sqrt{g} d^4 x = \frac{r_0^2}{2} dx^0 dz d\varphi_1 d\varphi_2 \quad (5.56)$$

se transforma como

$$\delta(dV) = dV \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\lambda} = dV \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial \varphi^i} \quad (\text{sem soma em } i), \quad (5.57)$$

então a variação da ação é

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{e^2} \int \delta dV H_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{e^2} \int 2dV g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta H_{\mu\nu} H_{\rho\sigma} \\ & - \frac{1}{e^2} \int dV 2\delta g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} H_{\mu\nu} H_{\rho\sigma} . \end{aligned} \quad (5.58)$$

Como a métrica não depende de φ^i obtemos $\delta g^{\mu\rho} = 0$.

O termo $H_{\mu\nu}$ varia somente como consequência das variações nas derivadas de u e u^* . Desta maneira,

$$\delta H_{\mu\nu} = -\frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x^\mu} H_{\varphi_i\nu} - \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x^\nu} H_{\mu\varphi_i} , \quad (5.59)$$

o que implica que

$$\delta S = -\frac{1}{e^2} \int dV (\delta_{\varphi_i}^\mu H_{\rho\sigma}^2 - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} H_{\varphi_i\nu} H_{\rho\sigma}) \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x^\mu} \quad (5.60)$$

e resulta

$$\delta S = -\frac{1}{e^2} \int dV J_{(i)}^\mu \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x^\mu} , \quad (5.61)$$

$$J_{(i)}^\mu = -4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} H_{\varphi_i\nu} H_{\rho\sigma} + \delta_{\varphi_i}^\mu H_{\rho\sigma}^2 . \quad (5.62)$$

Se ε é constante, $\delta S = 0$. Portanto, é uma simetria. Mas on-shell $\delta S = 0$ para qualquer variação. Desta forma,

$$\delta S = \frac{1}{e^2} \int dV \partial_\mu J_{(i)}^\mu \varepsilon^i = 0 \quad (5.63)$$

e portanto $\partial_\mu J_{(i)}^\mu = 0$. A corrente $J_{(i)}^\mu$ é escrita em termos dos H 's como

$$J_{(i)}^\mu = \left(4z(1-z) H_{\varphi_i z} H_{0z} + \frac{1}{1-z} H_{\varphi_i \varphi_1} H_{0\varphi_1} + \frac{1}{z} H_{\varphi_i \varphi_2} H_{0\varphi_2} \right) \quad (5.64)$$

e como para a configuração do ansatz $H_{\varphi_1\varphi_2} = H_{0\varphi_1} = H_{0\varphi_2} = 0$, resulta

$$H_{z0} = -4\frac{\omega}{c} \left(\frac{HH'}{(1+H^2)^2} \right), \quad (5.65)$$

$$H_{z\varphi_1} = -4m_1 \left(\frac{HH'}{(1+H^2)^2} \right), \quad (5.66)$$

$$H_{z\varphi_2} = -4m_2 \left(\frac{HH'}{(1+H^2)^2} \right). \quad (5.67)$$

Utilizando $\frac{HH'}{(1+H^2)^2} = -\frac{1}{2}\partial_z g$, obtemos

$$J_{\varphi_i}^0 = -\frac{64}{r_0^2} m_i \frac{\omega}{c} z(1-z)(\partial_z g)^2. \quad (5.68)$$

A carga associada é

$$Q_{\varphi_i} = -128\pi^2 m_i \frac{\omega}{c} r_0 \int_0^1 dz z(1-z)(\partial_z g)^2. \quad (5.69)$$

A integral que aparece acima é simplesmente o fator $F^{(1)}$ definido na seção anterior e então ($i = 1, 2$) (absorvendo o fator $(1/e^2)$ em Q_{φ_i})

$$Q_{\varphi_i} = 128\pi^2 m_i \frac{\omega}{c} r_0 F^{(1)}(w). \quad (5.70)$$

Considerando agora a transformação $\delta x^\mu = \varepsilon \xi^\mu$ com

$$\xi^t = 0 \quad (5.71)$$

$$\xi^z = -2\sqrt{z(1-z)} \cos(\varphi_1 + \gamma_1) \cos(\varphi_2 + \gamma_2) \quad (5.72)$$

$$\xi^{\varphi_1} = -\sqrt{\frac{z}{1-z}} \sin(\varphi_1 + \gamma_1) \cos(\varphi_2 + \gamma_2) \quad (5.73)$$

$$\xi^{\varphi_2} = \sqrt{\frac{1-z}{z}} \cos(\varphi_1 + \gamma_1) \sin(\varphi_2 + \gamma_2), \quad (5.74)$$

verifica-se que as variações são dadas por

$$\delta u = 0 \quad (5.75)$$

$$\delta \partial_\mu u = -\varepsilon \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\mu} \xi^\nu \frac{\partial u}{\partial x^\nu} \quad (5.76)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \varepsilon \xi^\lambda \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} \delta H_{\mu\nu} = & -\varepsilon \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu} H_{\lambda\nu} - \varepsilon \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu} H_{\mu\lambda} \\ & - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\mu} \xi^\lambda H_{\lambda\nu} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\nu} \xi^\lambda H_{\mu\lambda} . \end{aligned} \quad (5.78)$$

Consideraremos ε local para deduzir a carga de Noether. Então

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{e^2} \int \delta(dV) H_{\mu\nu}^2 - \frac{2}{e^2} \int dV \delta g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} H_{\mu\nu} H_{\rho\sigma} \\ & - \frac{2}{e^2} \int dV g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta H_{\mu\nu} H_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$\delta dV = dV \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\lambda} \varepsilon + dV \xi^\lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\lambda} . \quad (5.80)$$

Levando em conta apenas o termo com derivada em ε ,

$$\delta S = -\frac{1}{e^2} \int dV \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\mu} (\xi^\mu H_{\rho\sigma}^2 - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \xi^\lambda H_{\rho\sigma} H_{\lambda\nu}) \quad (5.81)$$

e obtemos a corrente conservada

$$J^\mu = \xi^\mu H_{\rho\sigma}^2 - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \xi^\lambda H_{\rho\sigma} H_{\lambda\nu} . \quad (5.82)$$

Agora, as densidades de carga associadas aos quatro planos restantes são

$$J^0 = 4g^{\nu\sigma} \xi^\lambda H_{0\sigma} H_{\lambda\nu} \quad (5.83)$$

$$= \frac{16}{e^2 r_0^2} z(1-z)(\partial_z g)^2 4 \frac{\omega}{c} (m_1 \xi^{\varphi_1} + m_2 \xi^{\varphi_2}) \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} J^0 = & \frac{64}{r_0^2 e^2} z(1-z)(\partial_z g)^2 \frac{\omega}{c} \left[-m_1 \sqrt{\frac{z}{1-z}} \sin(\varphi_1 + \gamma_1) \cos(\varphi_2 + \gamma_2) \right. \\ & \left. + m_2 \sqrt{\frac{1-z}{z}} \cos(\varphi_1 + \gamma_1) \sin(\varphi_2 + \gamma_2) \right], \end{aligned} \quad (5.85)$$

com $\gamma_i = 0, \pi/2$ e $i = 1, 2$.

Desta forma, as cargas associadas

$$Q = \frac{r_0^2}{2} \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 J^0 \quad (5.86)$$

se anulam, pois as integrais em φ_1 e φ_2 dão zero, já que as densidades são periódicas nestas variáveis.

5.5 Energia

Já sabemos que a Lagrangiana é dada por

$$L = -\frac{1}{e^2} H_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{e^2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} H_{\mu\nu} H_{\rho\sigma} \quad .$$

Necessitamos calcular a Hamiltoniana. Os momento canônico Π_u é

$$\Pi_u = \frac{\delta L}{\delta \dot{u}} = \frac{-2}{e^2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} H_{\rho\sigma} \frac{\delta H_{\mu\nu}}{\delta \dot{u}} \quad (5.87)$$

$$= \frac{8i}{e^2 c} g^{\nu\rho} H_{0\sigma} \frac{\partial_\nu u^*}{(1 + |u|^2)^2} \quad (5.88)$$

e, de forma análoga,

$$\Pi_{u^*} = \frac{\delta L}{\delta \dot{u}^*} = \frac{8i}{e^2 c} g^{\mu\rho} H_{\rho 0} \frac{\partial_\mu u}{(1 + |u|^2)^2} \quad . \quad (5.89)$$

Como $H = \Pi_u \dot{u} + \Pi_{u^*} \dot{u}^* - L$,

$$H = -\frac{4}{e^2} g^{\mu\rho} H_{\rho 0} H_{\mu 0} + \frac{1}{e^2} (g^{00} g^{\nu\sigma} H_{0\nu} H_{0\sigma} + g^{ij} g^{\nu\sigma} H_{i\nu} H_{j\sigma}) \quad (5.90)$$

$$H = -\frac{2}{e^2} g^{ij} H_{i0} H_{j0} + \frac{1}{e^2} g^{ij} g^{kl} H_{ik} H_{jl} \quad . \quad (5.91)$$

Substituindo nosso ansatz $u = H(z) e^{i(m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + \omega t)}$ e usando $\omega = x_0/c$, obtemos

$$H_{0z} = \frac{-2i}{(1 + H^2)^2} \left[i \frac{\omega}{c} H H' - H' \left(\frac{-i\omega}{c} H \right) \right] = 4 \frac{\omega}{c} \frac{H H'}{(1 + H^2)^2} \quad (5.92)$$

$$H_{0\varphi_1} = H_{0\varphi_2} = 0 \quad (5.93)$$

$$H_{z\varphi_1} = \frac{-2i}{(1 + H^2)^2} [H' (-im_1) H - im_1 H H'] = -4m_1 \frac{H H'}{(1 + H^2)^2} \quad (5.94)$$

$$H_{z\varphi_2} = -4m_2 \frac{H H'}{(1 + H^2)^2} \quad (5.95)$$

$$H_{\varphi_1 \varphi_2} = 0, \quad (5.96)$$

portanto

$$H = -\frac{2}{e^2} (g^{zz} H_{0z}^2 + g^{\varphi_1 \varphi_1} H_{0\varphi_1}^2 + g^{\varphi_2 \varphi_2} H_{0\varphi_2}^2) \\ + \frac{1}{e^2} (g^{zz} g^{kl} H_{zk} H_{zl} + g^{\varphi_1 \varphi_1} g^{kl} H_{\varphi_1 k} H_{\varphi_1 l} + g^{\varphi_2 \varphi_2} g^{kl} H_{\varphi_2 k} H_{\varphi_2 l}) \quad .$$

Utilizando os valores dos vários $H_{\alpha\beta}$'s e levando em conta a definição de g fica

$$H = \frac{32}{e^2 r_0^4} (\partial_z g)^2 \left[m_1^2 z + m_2^2 (1-z) + \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2} z(1-z) \right]. \quad (5.97)$$

Por definição, a energia é $E = \int_{S^3} d\Sigma H$ com $d\Sigma = (r_0^3/2) dz d\varphi_1 d\varphi_2$, então, como $\partial_z g = (\beta/\Lambda)$ resulta

$$E = \frac{16(2\pi)^2}{e^2 r_0} \left(\beta \int_0^1 dz \partial_z g + 2 \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2} \int_0^1 dz (\partial_z g)^2 z(1-z) \right) \quad (5.98)$$

$$= \frac{16(2\pi)^2}{e^2 r_0} \left(\beta(g(1) - g(0)) + 2 \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2} F^{(1)}(w) \right), \quad (5.99)$$

onde $F^{(1)}(w)$ é o mesmo da seção sobre cargas de Noether. Para soluções estáticas a expressão da energia é

$$E = \frac{64\pi^2}{e^2 r_0} |m_1 m_2| \frac{(q - 1/q)}{\ln q^2},$$

que é o resultado obtido em [29]. Quando $q \rightarrow 1$ ($m_1 \rightarrow \pm m_2$), $E \rightarrow \frac{64\pi^2}{e^2 r_0} m_1^2$, e a energia é proporcional ao módulo da carga de Hopf.

Quando $\Delta = 0$, $\beta = |m_1 m_2|$ e $F^{(1)}(0) = 1/6$. Neste caso a energia tem a forma particular

$$E = \frac{64\pi^2}{3e^2 r_0} (m_1^2 + m_2^2 + |m_1 m_2|). \quad (5.100)$$

A energia em geral é invariante pela troca independente de sinais de m_1 , m_2 e também ω , além de ser invariante pela troca $m_1 \longleftrightarrow m_2$.

Conseqüentemente, as soluções são degeneradas em relação a energia, mas a degenerescência pode ser completamente removida usando a carga de Hopf, as cargas de Noether e o momento angular.

Na figura a seguir temos um gráfico da energia em função de $(\omega^2 r_0^2)/c^2$ para alguns valores de (m_1, m_2) . Para cada conjunto (m_1, m_2, ω) , a frequência ω varia no intervalo $-(|m_1| + |m_2|) < \frac{r_0 \omega}{c} < |m_1| + |m_2|$. Podemos notar que para $\omega \rightarrow 0$

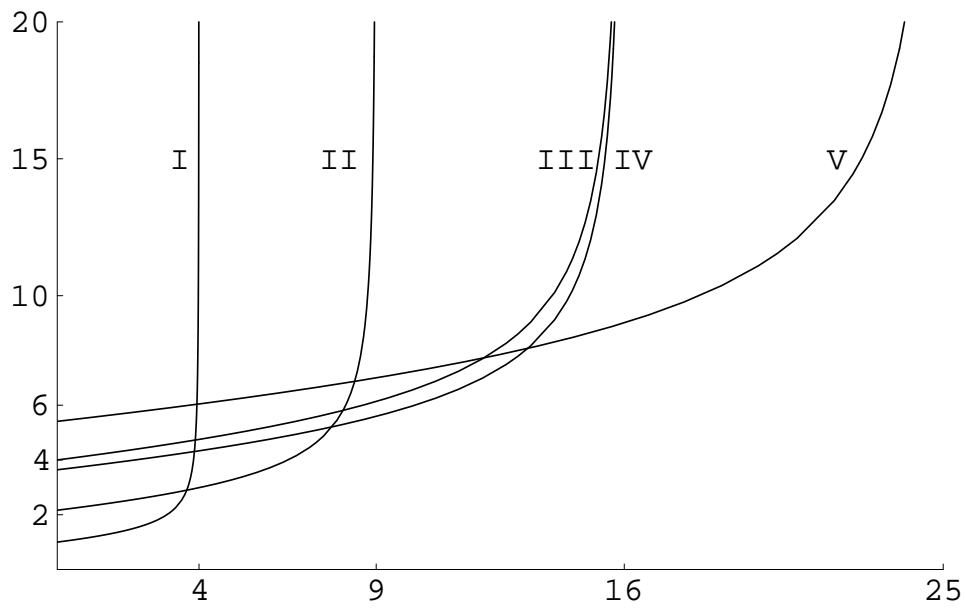


Figura 5.6: Gráfico da energia (em unidades de $64\pi^2/e^2r_0$) versus $\omega^2r_0^2/c^2$ para valores escolhidos de (m_1, m_2) . A curva I corresponde a $(m_1, m_2) = (1, 1)$, curva II a $(m_1, m_2) = (1, 2)$, curva III a $(m_1, m_2) = (1, 3)$, curva IV a $(m_1, m_2) = (2, 2)$ e a curva V a $(m_1, m_2) = (1, 4)$

a energia se aproxima do valor estático(5.100). Além disso, se a dupla (m_1, m_2) é mantida fixa, a energia cresce com ω^2 . A divergência da energia é mais acentuada se a quantidade $|m_1| + |m_2|$ for menor.

Capítulo 6

O Modelo no espaço-tempo de Minkowski

Agora descreveremos um modelo no espaço-tempo de Minkowski, usando o mesmo sistema de coordenadas de [27], porém com um ansatz diferente.

6.1 A equação de movimento

A métrica é escrita nas nossas coordenadas como

$$ds^2 = \left(\frac{a}{p}\right)^2 \left(d\zeta^2 - \frac{dy^2}{4y(1+y)^2} - \frac{y}{1+y} d\xi^2 - \frac{d\varphi^2}{1+y} \right), \quad (6.1)$$

onde $p = \cos \zeta - \cos \xi \sqrt{\frac{y}{1+y}}$. Temos que y varia no intervalo $[0, \infty[$, ζ em $[0, \pi]$, φ e ξ em $[0, 2\pi]$.

A ação é (com $H_{\mu\nu} = \partial_\mu g \partial_\nu g - \partial_\mu g \partial_\nu g$)

$$S = \int d^4x H_{\mu\nu}^2 \quad (6.2)$$

com equações de movimento

$$\partial_\mu (\sqrt{-\eta} \eta^{\mu\nu} K_\nu^{(i)}) = 0 \quad i = 1, 2, \quad (6.3)$$

nas quais $K_\mu^{(1)} = (\partial g)^2 \partial_\mu g - (\partial g \partial \theta) \partial_\mu \theta$ e $K_\mu^{(2)} = (\partial g)^2 \partial_\mu \theta - (\partial g \partial \theta) \partial_\mu g$.

Usando $g = g(y, \zeta)$ e $\theta = m_1 \xi + m_2 \varphi$ obtemos $\partial_\mu g \partial^\mu \theta = 0$. Além disso o determinante é $\sqrt{-\eta} = \left(\frac{a}{p}\right)^4 \frac{1}{2(1+y)^2}$. É fácil ver que a equação de movimento com $i=2$ é automaticamente satisfeita com as escolhas acima. Já a primeira equação ($i=1$) resulta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1+y)^2} \left(\frac{1+y}{y} m_1^2 + (1+y) m_2^2 \right) \partial_\zeta^2 g \\ & - \partial_y \left[4y \left(\frac{1+y}{y} m_1^2 + (1+y) m_2^2 \right) \partial_y g \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Fazendo a mudança de variável

$$z = \frac{y}{1+y}, \quad (6.5)$$

e denotando $\Lambda = (1-z)m_1^2 + zm_2^2$, obtemos

$$\Lambda \partial_\zeta^2 g - 4z(1-z) \partial_z (\Lambda \partial_z g) = 0. \quad (6.6)$$

Agora faremos uma separação de variáveis. É importante observar o seguinte fato: a equação de movimento envolve *somente derivadas de g* e não *g diretamente*. Isto significa que podemos adicionar uma constante α ao produto de funções da separação utilizando, portanto,

$$g = H(z)K(\zeta) + \alpha \quad (6.7)$$

e, obtendo as equações ordinárias

$$K'' + \omega^2 K = 0, \quad (6.8)$$

$$z(1-z) \partial_z (\Lambda \partial_z H) + \frac{\omega^2}{4} \Lambda H = 0. \quad (6.9)$$

Queremos que g fique no intervalo $[0, 1]$. Porém, qualquer solução para H e K que seja limitada pode ser transladada e reescalada para este intervalo. Explicitamente: sejam $(HK)_{\max}$ e $(HK)_{\min}$ o máximo e o mínimo de $H(z)K(\zeta)$ no intervalo $0 \leq z \leq 1$ e $0 \leq \zeta \leq \pi$. Então

$$g = \frac{H(z)K(\zeta) - (HK)_{\min}}{(HK)_{\max} - (HK)_{\min}} \quad (6.10)$$

obviamente fica no intervalo $[0, 1]$.

A função H satisfaz a equação de Heun [30][31]:

$$z(1-z) \partial_z (\Lambda \partial_z H) + \frac{\omega^2}{4} \Lambda H = 0. \quad (6.11)$$

Vamos fazer uma análise detalhada de seu comportamento para $z \sim 0$ e $z \sim 1$. Fazendo $z \sim \varepsilon$ obtemos

$$\varepsilon[(m_1^2 + (m_2^2 - m_1^2)\varepsilon) \partial_\varepsilon^2 H + (m_2^2 - m_1^2) \partial_\varepsilon H] + \frac{\omega^2}{4} ((m_1^2 + (m_2^2 - m_1^2)\varepsilon) H) = 0, \quad (6.12)$$

agora fazendo $z \sim 1 - \varepsilon$

$$\varepsilon[(m_2^2 + (m_1^2 - m_2^2)\varepsilon)\partial_\varepsilon^2 H + (m_1^2 - m_2^2)\partial_\varepsilon H] + \frac{\omega^2}{4}((m_2^2 + (m_1^2 - m_2^2)\varepsilon)H = 0, \quad (6.13)$$

portanto obtemos equações que se equivalem pela troca $m_1^2 \leftrightarrow m_2^2$. Fazendo $m_1 = m_a$ e $m_2 = m_b$ para $z \sim \varepsilon$, e respectivamente, $m_1 = m_b$ e $m_2 = m_a$ para $z \sim 1 - \varepsilon$ resulta

$$\varepsilon [m_a^2 \partial_\varepsilon^2 H + (m_b^2 - m_a^2) \partial_\varepsilon H] + \frac{\omega^2}{4} m_a^2 H = 0. \quad (6.14)$$

Observa-se que se $m_a \neq 0$, $m_a^2 \neq m_b^2$, $\omega \neq 0$ e se a primeira e a segunda derivadas de H são finitas em $\varepsilon = 0$, então $H(\varepsilon = 0) = 0$.

Temos que ter H limitada para obter g entre 0 e 1. Portanto H tem que ser finita em $\varepsilon \sim 0$. Então $H \sim \text{constante} + \text{termos que se anulam quando } \varepsilon \rightarrow 0$. Como $\partial_\varepsilon H$ é parte da Hamiltoniana não pode divergir em nenhum ponto. Então o cancelamento tem que ser devido à segunda derivada, ou seja, $\varepsilon \partial_\varepsilon^2 H \sim -\frac{\omega^2}{4}(\text{constante}) + \text{termos que desaparecem quando } \varepsilon \rightarrow 0$. Portanto:

$$\partial_\varepsilon H \sim -\frac{\omega^2}{4}(\text{constante}) \times \ln \varepsilon + \int \frac{d\varepsilon(\text{termos zerando em } \varepsilon \rightarrow 0)}{\varepsilon}. \quad (6.15)$$

Mas agora $\partial_\varepsilon H$ possui um termo divergente ($\ln \varepsilon$) e que não pode ser anulado pela integração no segundo termo. Então precisamos de $\text{constante} = 0$, e H se anula em $\varepsilon \sim 0$.

6.2 Condições de contorno

Foi utilizado o ansatz

$$u = \sqrt{\frac{1 - g(z, \zeta)}{g(z, \zeta)}} e^{i(m_1 \xi + m_2 \varphi)}. \quad (6.16)$$

Pode-se observar que $(\zeta = 0, z, \xi, \varphi)$ e $(\zeta = \pi, z, \xi + \pi, \varphi + \pi)$ representam o mesmo ponto em \mathbb{R}^4 . Portanto, temos a condição

$$u(\zeta = 0, z, \xi, \varphi) = u(\zeta = \pi, z, \xi + \pi, \varphi + \pi). \quad (6.17)$$

A variação de π nos ângulos dá origem a um fator de fase $\exp(i(m_1 + m_2)\pi)$, e com g variando de 0 a 1, não é possível absorvê-lo no fator $\sqrt{\frac{1-g(z,\zeta)}{g(z,\zeta)}}$. Então a única possibilidade é

$$m_1 + m_2 = \text{inteiro par} \quad g(\zeta = 0, z) = g(\zeta = \pi, z). \quad (6.18)$$

Para ter uma carga de Hopf bem definida é necessário que a solução seja constante no infinito espacial. Escolheremos esta constante como o pólo norte de S^2 . Então queremos

$$\vec{n} \rightarrow (0, 0, 1), \quad u \rightarrow \infty, \quad g \rightarrow 0 \quad \text{para } r \rightarrow \infty. \quad (6.19)$$

As coordenadas são dadas por

$$x^0 = \frac{a}{p} \sin \zeta \qquad x^2 = \frac{a}{p} \sin \varphi \sqrt{1-z}$$

$$x^1 = \frac{a}{p} \cos \varphi \sqrt{1-z} \qquad x^3 = \frac{a}{p} \sin \xi \sqrt{z},$$

com $p = \cos \zeta - \cos \xi \sqrt{z}$. Consequentemente $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ é dado por

$$r^2 = a^2 \frac{(1 + \sqrt{z} \cos \xi)(1 - \sqrt{z} \cos \xi)}{(\cos \zeta - \cos \xi \sqrt{z})^2}. \quad (6.20)$$

A única forma de ter $r \rightarrow \infty$ é o denominador se anular, portanto $\cos \zeta = \cos \xi \sqrt{z}$.

Porém, isto implica que $p \rightarrow 0$, e então x^0 diverge. Para obter $r \rightarrow \infty$ com x^0 finito temos que ter $\sin \zeta \rightarrow 0$ ou seja, $\zeta \rightarrow 0$ ou $\zeta \rightarrow \pi$. Então $\cos \zeta \rightarrow \pm 1$ e $\cos \xi \sqrt{z} \rightarrow \pm 1$, o que implica que $z \rightarrow 1$ e $\cos \xi \rightarrow \pm 1$.

Portanto existem aparentemente *duas* formas de $r \rightarrow \infty$: $z \rightarrow 1, \zeta \rightarrow 0, \xi \rightarrow 0$ ou $z \rightarrow 1, \zeta \rightarrow \pi, \xi \rightarrow \pi$

Mas desde que g em $\zeta = 0$ e $\zeta = \pi$ tem o mesmo valor precisamos que

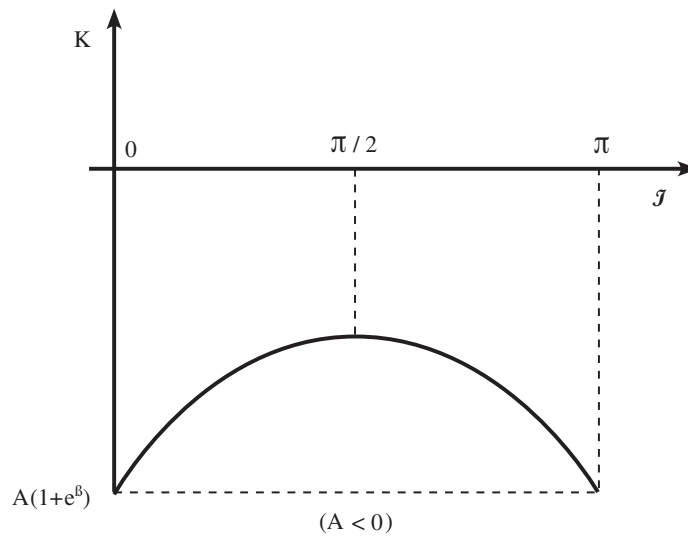
$$g(\zeta = 0, z = 1) = g(\zeta = \pi, z = 1) = 0. \quad (6.21)$$

E, quando resolvemos a equação para g por separação de variáveis $g = H(z)K(\zeta) + \alpha$, com K satisfazendo $K'' + \omega^2 K = 0$, a condição de periodicidade em g implica que

$$K(0) = K(\pi). \quad (6.22)$$

Se ω é imaginário puro ($\omega = i\lambda$) fica $K'' - \lambda^2 K = 0 \Rightarrow K = A \exp(\zeta\lambda) + B \exp(-\zeta\lambda)$ e a condição de contorno é $A + B = A \exp(\pi\lambda) + B \exp(-\pi\lambda)$. Se A ou B se anulam então a única solução é $\lambda = 0$. Denotando $x = \exp(\lambda\pi)$ obtemos $x = \frac{A+B \pm \sqrt{(A-B)^2}}{2A}$ e

$$\exp(\lambda\pi) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{B}{A} \right) \pm \left| 1 - \frac{B}{A} \right| \right]. \quad (6.23)$$


 Figura 6.1: gráfico K versus ζ para A negativo

Tanto se $\frac{B}{A} < 1$ ou $\frac{B}{A} > 1$ obtemos $\exp(\lambda\pi) = 1$ ou B/A . Existem dois casos:

$$\lambda = 0 \Rightarrow K = A + B, \quad (6.24)$$

$$\lambda = \frac{1}{\pi} \ln \frac{B}{A} \Rightarrow K = A \left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{\zeta}{\pi}} + B \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{\zeta}{\pi}}. \quad (6.25)$$

Usando $\beta = \ln(B/A)$ e $x = \zeta/\pi$, obtemos $K'(1/2) = 0$ e $K''(1/2) = 2\beta^2 A \exp(\beta/2)$ e o sinal de $K''(1/2)$ é determinado pelo sinal de A . Como $K(0) = K(1) = A(1 + \exp(\beta))$ nestes pontos o sinal de K é também dado por A . Toda a análise anterior só é válida para A e B com o mesmo sinal. Se eles tiverem sinais diferentes, $\beta = i\pi + \ln|B/A|$ e portanto K é complexo. Finalmente obtemos a solução geral para K com condição de contorno $K(0) = K(\pi)$, que é

$$K(\zeta) = A \left[\exp\left(\beta \frac{\zeta}{\pi}\right) + \exp\beta \left(1 - \frac{\zeta}{\pi}\right) \right], \quad (6.26)$$

com A e β reais quaisquer.

Se ω é real, $K'' + \omega^2 K = 0 \Rightarrow K = A \sin(\omega\zeta + \delta)$ e $K(0) = K(\pi) \Rightarrow \sin \delta = \sin(\omega\pi + \delta)$ e portanto existem duas possibilidades:

1. $\omega\pi + \delta = 2\pi N + \delta \Rightarrow \omega = 2N =$ inteiro positivo par
2. $\omega\pi + \delta = \pi - \delta + 2\pi N \Rightarrow \omega = (2N + 1) - \frac{2\delta}{\pi}$

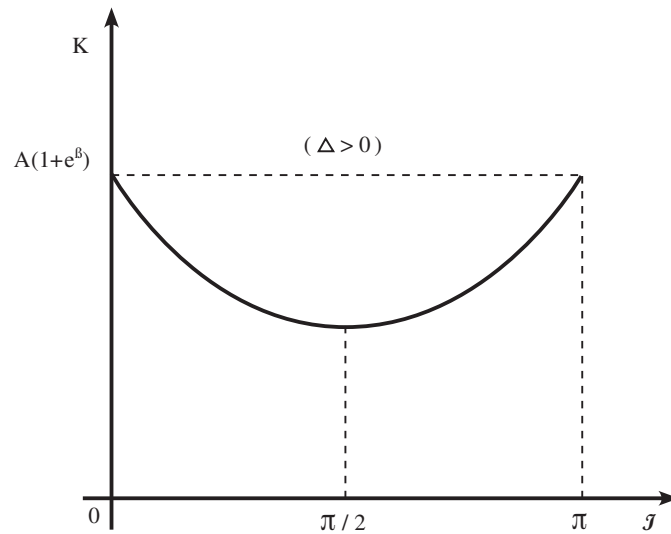


Figura 6.2: gráfico K versus ζ para A positivo

Então as soluções são

$$K = A \sin(2N\zeta + \delta) \quad \text{ou} \quad K = A \sin \left(\left(2N + 1 - \frac{2\delta}{\pi} \right) \zeta + \delta \right), \quad (6.27)$$

com A real qualquer, N inteiro qualquer e $0 \leq \delta \leq 2\pi$. Todas estas soluções são bem comportadas, ou seja, são limitadas e podem ser fitadas para obtermos $0 \leq g \leq 1$.

O último caso é $\omega = 0$. Neste caso, obtemos $K = a\zeta + b$ e $K(0) = K(\pi)$ implica que $K = \text{constante}$.

Se tivermos g entre 0 e 1 com $K(0) = K(\pi)$, a condição de contorno $g(\zeta = 0, z) = g(\zeta = \pi, z)$ implica que $H(1)K(0) = HK_{\min}$. Então temos que obter H e K tais que o mínimo do produto HK ocorra em $\zeta = 0$ (ou $\zeta = \pi$) e $z = 1$. Isto garante que \vec{n} vai para o pólo norte no infinito espacial.

6.3 A carga de Hopf

Usando o ansatz já introduzido anteriormente,

$$u = \sqrt{\frac{1 - g(z, \zeta)}{g(z, \zeta)}} e^{i(m_1 \xi + m_2 \varphi)}, \quad (6.28)$$

definimos $Z = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-g}e^{i(m_1\xi)} \\ \sqrt{g}e^{-m_2\varphi} \end{pmatrix}$ e $\vec{A} = \frac{i}{2}(Z^\dagger \vec{\nabla} Z - \vec{\nabla} Z^\dagger Z)$ como usual. Calculando as componentes de \vec{A} obtemos,

$$A_i = m_2 g \partial_i \varphi - m_1 (1-g) \partial_i \xi \quad (6.29)$$

$$(\nabla \times \vec{A})_i = \varepsilon_{ijk} (m_2 \partial_j g \partial_k \varphi + m_1 \partial_j g \partial_k \xi) \quad (6.30)$$

$$\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = m_1 m_2 \varepsilon_{ijk} \partial_i g \partial_j \xi \partial_k \varphi \quad (6.31)$$

A carga de Hopf é dada por $Q_H = \frac{1}{4\pi^2} \int_{S^3} d\Sigma \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$. Para calcular Q_H precisamos integrar numa superfície de **tempo fixo**. Ou seja, nossa integral é feita em fatias de tempo constante, que nada mais são que o próprio \mathbb{R}^3 espacial. A melhor forma de se fazer isto é trocar a coordenada ζ pelo tempo. Logicamente, ζ se torna uma função das outras coordenadas. Desta maneira,

$$\zeta = \zeta(\tau, y, \xi) \text{ onde } \tau = \frac{ct}{a} \quad (6.32)$$

Como g já é função de y e ζ , ele se torna $g = g(y, \zeta, \tau)$. Teríamos, em princípio,

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x^i} \quad (6.33)$$

mas devido às considerações acima,

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial g}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x^i} \right) \quad (6.34)$$

e portanto

$$\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = m_1 m_2 \varepsilon_{ijk} \partial_i y \partial_j \xi \partial_k \varphi \frac{dg}{dy} \quad (6.35)$$

Porém, $\varepsilon_{ijk} \partial_i y \partial_j \xi \partial_k \varphi = \det \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j}$ ($\omega = (y, \xi, \zeta)$) e obtemos

$$d^3 x \varepsilon_{ijk} \partial_i y \partial_j \xi \partial_k \varphi = \varepsilon dy d\xi d\varphi, \quad (6.36)$$

onde ε é o sinal do determinante. Usando este resultado em Q_H ,

$$Q_H = m_1 m_2 \frac{\varepsilon}{4\pi^2} \int dy d\xi d\varphi \frac{dg}{dy}(y, \xi, \tau) \quad (6.37)$$

$$= m_1 m_2 \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^\infty dy \int_0^{2\pi} d\xi \frac{dg}{dy}(y, \xi, \tau) \quad (6.38)$$

A integração em φ é trivial, pois nada depende desta coordenada. Obtemos finalmente

$$Q_H = m_1 m_2 \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi (g(\infty, \xi, \tau) - g(0, \xi, \tau)). \quad (6.39)$$

6.4 A Hamiltoniana

Nossa Lagrangiana é dada por $L = H_{\mu\nu}^2$. Desta forma,

$$\Pi_g = \frac{\delta L}{\delta g} \Rightarrow \Pi_g = 4L' K^{(1)0}, \quad (6.40)$$

onde $K_\mu^{(1)} = (\partial g)^2 \partial_\mu g - (\partial g \partial \theta) \partial_\mu \theta$. Da mesma maneira, obtemos para Π_θ

$$\Pi_\theta = 4L' K^{(2)0}, \quad (6.41)$$

com $K_\mu^{(2)} = (\partial g)^2 \partial_\mu \theta - (\partial g \partial \theta) \partial_\mu g$. Como $H_{\mu\nu}^2 = 2(\partial g)^2 (\partial \theta)^2 - 2(\partial g \partial \theta)^2$ e a Hamiltoniana é, por definição, $H = \Pi_g \dot{g} + \Pi_\theta \dot{\theta} - L$ resulta

$$H = -2\dot{g}^2 (\nabla \theta)^2 - 2\dot{\theta}^2 (\nabla g)^2 + 4\dot{g}\dot{\theta} (\nabla g \nabla \theta) - 2(\nabla g)^2 (\nabla \theta)^2 + 2(\nabla g \nabla \theta)^2. \quad (6.42)$$

As identidades a seguir são válidas,

$$(\dot{g}\partial_i\theta - \dot{\theta}\partial_i g)(\dot{g}\partial_i\theta - \dot{\theta}\partial_i g) = \dot{g}^2 (\nabla \theta)^2 + \dot{\theta}^2 (\nabla g)^2 - 2\dot{g}\dot{\theta} (\nabla g \nabla \theta) \quad (6.43)$$

$$(\partial_i g \partial_j \theta - \partial_j g \partial_i \theta)(\partial_i g \partial_j \theta - \partial_j g \partial_i \theta) = 2(\nabla \theta)^2 (\nabla g)^2 - 2(\nabla g \nabla \theta)^2, \quad (6.44)$$

e portanto $H = -2H_{0i}H_{0i} - H_{ij}H_{ij}$, ou seja,

$$H = -2 \sum_i H_{0i}^2 - 2 \sum_{i<j} H_{ij}^2. \quad (6.45)$$

Podemos escrever a forma compacta (sem métrica)

$$H = - \sum_{\mu,\nu} H_{\mu\nu}^2. \quad (6.46)$$

Como $H_{\mu\nu} = \partial_\mu g \partial_\nu \theta - \partial_\nu g \partial_\mu \theta$, temos a mudança de coordenadas

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial \omega^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \omega^\beta}{\partial x^\nu} H_{\alpha\beta}, \quad (6.47)$$

$$\sum_{\mu,\nu} H_{\mu\nu}^2 = \left(\frac{\partial \omega^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \omega^\gamma}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial \omega^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial \omega^\delta}{\partial x^\nu} \right) H_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta}. \quad (6.48)$$

Denotando $M_{\alpha\beta} = \sum_{\mu} \frac{\partial \omega^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \omega^{\beta}}{\partial x^{\mu}}$, obtém-se

$$H = - \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} M_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta} H_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta} . \quad (6.49)$$

A matriz M tem a propriedade de ser real e simétrica. A soma sobre os índices pode ser trocada por uma soma de pares de índices sem ordenamento, ou seja,

$$H = -2 \sum_{\substack{(\alpha\beta) \\ (\gamma\delta)}} (M_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta} - M_{\alpha\delta} M_{\beta\gamma}) H_{(\alpha\beta)} H_{(\gamma\delta)} . \quad (6.50)$$

Na expressão acima a soma é simétrica sob a troca de pares de índices, já que M é simétrica. Como existem 4 $H_{\alpha\beta}$ não nulos, temos 10 termos na soma ($\frac{4 \cdot 4 - 4}{2} + 4 = 10$). Então

$$\begin{aligned} H_{\zeta z} &= 0 & H_{z\xi} &= m_1 \partial_z g \\ H_{\zeta\xi} &= m_1 \partial_{\zeta} g & H_{z\varphi} &= m_2 \partial_z g \\ H_{\zeta\varphi} &= m_2 \partial_{\zeta} g & H_{\xi\varphi} &= 0 , \end{aligned} \quad (6.51)$$

e H pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} H &= -2[m_1^2 (\partial_{\zeta} g)^2 (M_{\zeta\zeta} M_{\xi\xi} - M_{\zeta\xi} M_{\xi\zeta}) \\ &\quad + m_2^2 (\partial_{\zeta} g)^2 (M_{\zeta\zeta} M_{\varphi\varphi} - M_{\zeta\varphi}^2) \\ &\quad + m_1^2 (\partial_z g)^2 (M_{zz} M_{\xi\xi} - M_{z\xi}^2) \\ &\quad + m_2^2 (\partial_z g)^2 (M_{zz} M_{\varphi\varphi} - M_{z\varphi}^2) \\ &\quad + 2m_1 m_2 (\partial_{\zeta} g)^2 (M_{\zeta\zeta} M_{\xi\varphi} - M_{\zeta\varphi} M_{\xi\zeta}) \\ &\quad + 2m_1^2 (\partial_{\zeta} g) (\partial_z g) (M_{\zeta z} M_{\xi\xi} - M_{\zeta\xi} M_{\xi z}) \\ &\quad + 2m_1 m_2 (\partial_{\zeta} g) (\partial_z g) (M_{\zeta z} M_{\xi\varphi} - M_{\zeta\varphi} M_{\xi z}) \\ &\quad + 2m_1 m_2 (\partial_{\zeta} g) (\partial_z g) (M_{\zeta z} M_{\varphi\xi} - M_{\zeta\xi} M_{\varphi z}) \\ &\quad + 2m_2^2 (\partial_{\zeta} g) (\partial_z g) (M_{\zeta z} M_{\varphi\varphi} - M_{\zeta\varphi} M_{\varphi z}) \\ &\quad + 2m_1 m_2 (\partial_z g)^2 (M_{zz} M_{\xi\varphi} - M_{z\varphi} M_{\xi z})] . \end{aligned} \quad (6.52)$$

Estamos atualmente prosseguindo com os cálculos, tendo como objetivo submeter em breve um artigo para publicação.

Apêndice A

Álgebra das Rotações na Esfera S^3

Vamos calcular explicitamente a álgebra $SO(4)$ associada às rotações na esfera S^3 . Conforme já ressaltamos no texto, a invariância em relação a este grupo se realiza de uma forma não trivial em relação às coordenadas φ_1 , φ_2 e z . Por exemplo, se fizermos $\theta = \sin^2 z$ a translação em θ não é uma simetria. Consideremos as seguintes transformações

$$\delta x^\mu = \xi^\mu = \xi^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = V_\xi x^\mu \quad (\text{A.1})$$

$$V_\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad , \quad (\text{A.2})$$

então o comutador é

$$[V_\xi, V_{\xi'}] = \xi^\mu \partial_\mu \xi'^\nu \partial_\nu - \xi'^\nu \partial_\nu \xi^\mu \partial_\mu \quad (\text{A.3})$$

$$= (\xi^\mu \partial_\mu \xi'^\nu - \xi'^\nu \partial_\nu \xi^\mu) \partial_\nu \quad . \quad (\text{A.4})$$

Denotamos as translações em φ_1, φ_2 por

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \quad . \quad (\text{A.5})$$

Consideramos a transformação dada por $\delta x^\mu = \varepsilon \xi^\mu$ com

$$\xi^t = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\xi^z = -2\sqrt{z(1-z)} \cos(\varphi_1 + \gamma_1) \cos(\varphi_2 + \gamma_2) \quad (\text{A.7})$$

$$\xi^{\varphi_1} = -\sqrt{\frac{z}{1-z}} \sin(\varphi_1 + \gamma_1) \cos(\varphi_2 + \gamma_2) \quad (\text{A.8})$$

$$\xi^{\varphi_2} = \sqrt{\frac{1-z}{z}} \cos(\varphi_1 + \gamma_1) \sin(\varphi_2 + \gamma_2). \quad (\text{A.9})$$

Denotaremos

$$V_{\gamma_1\gamma_2} = \xi_{\gamma_1\gamma_2}^\mu \partial_\mu \quad (\text{A.10})$$

com $\xi_{\gamma_1\gamma_2}^\mu$ dado conforme as definições acima. Os comutadores são

$$[V_1, V_{\gamma_1\gamma_2}] = V_{\gamma_1 + \frac{\pi}{2}, \gamma_2} \quad (\text{A.11})$$

$$[V_2, V_{\gamma_1\gamma_2}] = V_{\gamma_1, \frac{\pi}{2} + \gamma_2} \quad (\text{A.12})$$

$$[V_1, V_2] = 0. \quad (\text{A.13})$$

Observando que

$$V_{\gamma_1 + \pi, \gamma_2} = -V_{\gamma_1, \gamma_2} \quad (\text{A.14})$$

$$V_{\gamma_1, \pi + \gamma_2} = V_{\gamma_1, \gamma_2} \quad (\text{A.15})$$

resulta

$$[V_1, V_{\gamma_1\gamma_2} \pm iV_{\gamma_1 + \frac{\pi}{2}, \gamma_2}] = \mp i(V_{\gamma_1\gamma_2} \pm V_{\gamma_1 + \frac{\pi}{2}, \gamma_2}) \quad (\text{A.16})$$

$$[V_2, V_{\gamma_1, \gamma_2} \pm iV_{\gamma_1, \frac{\pi}{2} + \gamma_2}] = V_{\gamma_1, \frac{\pi}{2} + \gamma_2} \pm i(-1) V_{\gamma_1\gamma_2} \quad (\text{A.17})$$

portanto, os auto-estados são dados por

$$V_{\varepsilon, \eta} = V_{\gamma_1\gamma_2} + i\varepsilon V_{\gamma_1 + \frac{\pi}{2}, \gamma_2} + i\eta V_{\gamma_1, \frac{\pi}{2} + \gamma_2} - \varepsilon\eta V_{\frac{\pi}{2} + \gamma_1, \frac{\pi}{2} + \gamma_2} \quad (\text{A.18})$$

De fato, $[V_1, V_{\varepsilon, \eta}] = -i\varepsilon V_{\varepsilon, \eta}$ e $[V_2, V_{\varepsilon, \eta}] = -i\eta V_{\varepsilon, \eta}$. e, desta forma,

$$\xi_{\varepsilon\eta}^z = -2\sqrt{z(1-z)} e^{-i\varepsilon(\varphi_1 + \gamma_1)} e^{-i\eta(\varphi_2 + \gamma_2)} \quad (\text{A.19})$$

$$\xi_{\varepsilon\eta}^{\varphi_1} = -i\varepsilon \sqrt{\frac{z}{1-z}} e^{-i\varepsilon(\varphi_1 + \gamma_1)} e^{-i\eta(\varphi_2 + \gamma_2)} \quad (\text{A.20})$$

$$\xi_{\varepsilon\eta}^{\varphi_2} = i\eta \sqrt{\frac{1-z}{z}} e^{-i\varepsilon(\varphi_1 + \gamma_1)} e^{-i\eta(\varphi_2 + \gamma_2)}, \quad (\text{A.21})$$

e, finalmente, obtemos

$$V_{\varepsilon, \eta} = e^{-i\varepsilon(\varphi_1 + \gamma_1)} e^{-i\eta(\varphi_2 + \gamma_2)} \left[-2\sqrt{z(1-z)} \partial_z - i\varepsilon \sqrt{\frac{z}{1-z}} \partial_{\varphi_1} + i\eta \sqrt{\frac{1-z}{z}} \partial_{\varphi_2} \right]$$

$$V_1 = \partial_{\varphi_1} \qquad V_2 = \partial_{\varphi_2} \quad . \qquad (A.22)$$

Notamos que as fases γ_1 e γ_2 definem uma normalização e podem ser escritas como $e^{-i\varepsilon\gamma_1 - i\eta\gamma_2}$. A seguir calculamos o comutador $[V_{\varepsilon\eta}, V_{\varepsilon'\eta'}]$,

$$\begin{aligned} [V_{\varepsilon\eta}, V_{\varepsilon'\eta'}] &= -i(\varepsilon - \varepsilon')[1 - \eta\eta']\partial_{\varphi_1} \\ &\quad - i(\eta - \eta')[1 - \varepsilon\varepsilon']\partial_{\varphi_2} \\ &= i(\varepsilon - \varepsilon')(\eta - \eta')[\eta\partial_{\varphi_1} + \varepsilon\partial_{\varphi_2}]. \end{aligned} \qquad (A.23)$$

Nos casos onde $\varepsilon = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$ obtemos

$$[V_{++}, V_{--}] = -4i(\partial_{\varphi_1} + \partial_{\varphi_2}) \qquad (A.24)$$

$$[V_{+-}, V_{-+}] = -4i(\partial_{\varphi_1} - \partial_{\varphi_2}) \qquad (A.25)$$

$$[V_{++}, V_{+-}] = 0 \qquad (A.26)$$

$$[V_{++}, V_{-+}] = 0 \qquad (A.27)$$

$$[V_{--}, V_{+-}] = 0 \qquad (A.28)$$

$$[V_{--}, V_{-+}] = 0. \qquad (A.29)$$

E para V_1 e V_2 :

$$[V_1, V_{\varepsilon\eta}] = -i\varepsilon V_{\varepsilon\eta} \qquad (A.30)$$

$$[V_2, V_{\varepsilon\eta}] = -i\eta V_{\varepsilon\eta} \quad . \qquad (A.31)$$

Portanto, definindo os operadores $J_3^{(i)}$, $J_+^{(i)}$ e $J_-^{(i)}$ ($i = 1, 2$) conforme fazemos abaixo, observamos imediatamente que a álgebra se decompõe em duas álgebras $SL(2)$ que comutam entre si, o que prova que temos realmente uma álgebra $SO(4)$.

$$J_3^{(1)} = \frac{i}{2}(\partial_{\varphi_1} + \partial_{\varphi_2}) \qquad (A.32)$$

$$J_3^{(2)} = \frac{i}{2}(\partial_{\varphi_1} - \partial_{\varphi_2}) \qquad (A.33)$$

$$J_+^{(1)} = \frac{i}{2}V_{++} \qquad (A.34)$$

$$J_-^{(1)} = \frac{i}{2}V_{--} \qquad (A.35)$$

$$J_+^{(2)} = \frac{i}{2}V_{+-} \qquad (A.36)$$

$$J_-^{(2)} = \frac{i}{2}V_{-+} \qquad (A.37)$$

$$[J_3^{(i)}, J_{\pm}^{(i)}] = \pm J_{\pm}^{(i)} \quad (\text{A.38})$$

$$[J_+^{(i)}, J_-^{(i)}] = 2J_3^{(i)} \quad (\text{A.39})$$

$$[J_{3,\pm}^{(1)}, J_{3,\pm}^{(2)}] = 0 \quad (\text{A.40})$$

Apêndice B

Caso euclidiano em 5D

Neste apêndice utilizaremos nosso ansatz em ainda outro modelo. Em [16], foi elaborada a teoria geral para a construção de ansätze de separação de variáveis em espaços euclidianos de dimensão qualquer para modelos definidos pela Lagrangiana

$$L = \left(\frac{h^2}{2f^2} \right)^{\frac{d}{4}},$$

com h^2 e f^2 , conforme definições anteriormente fornecidas nesta tese. Como d é a dimensão do espaço euclidiano, no caso pentadimensional temos, então, a Lagrangiana $L = \left(\frac{h^2}{2f^2} \right)^{\frac{5}{4}}$. Iremos construir explicitamente um sistema de coordenadas no qual nosso ansatz separa três das cinco coordenadas, levando à uma EDP em apenas duas variáveis. Porém, neste caso particular, a EDP resultante é *não-linear* o que impossibilitou a sua transformação num sistema de duas EDOs e posterior integração. Apesar disso, consideramos que este modelo representa uma ilustração interessante da utilização de nosso método.

Fazendo uma analogia com o sistema de coordenadas utilizado em [26], vamos escrever as coordenadas do espaço euclidiano 5D usando uma *generalização* das *coordenadas toroidais* utilizadas na citada referência. As coordenadas são

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{a}{q} \sinh \eta \sin \theta \cos \varphi_1 \\x_2 &= \frac{a}{q} \sinh \eta \sin \theta \sin \varphi_1 \\x_3 &= \frac{a}{q} \sinh \eta \cos \theta \cos \varphi_2 \\x_4 &= \frac{a}{q} \sinh \eta \cos \theta \sin \varphi_2 \\x_5 &= \frac{a}{q} \sin \varphi_3,\end{aligned}$$

definindo $q = \cosh \eta - \cos \varphi_3$. Os ângulos φ_1 e φ_2 variam no intervalo $[0, 2\pi]$, o ângulo θ apenas em $[0, \pi/2]$, e a coordenada não compacta η vai de zero ao infinito. A coordenada φ_3 varia no intervalo $[0, 2\pi]$.

Iremos escrever o elemento de distância ds^2 neste sistema de coordenadas, extrair o tensor métrico nestas coordenadas curvilíneas, e escrever o ansatz explicitamente. Finalmente substituímos o ansatz na equação de movimento, chegando à separação de variáveis desejada.

Denotando $\zeta = (\eta, \theta, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ temos em princípio que

$$ds^2 = \sum_{a,b} \frac{\partial x^i}{\partial \zeta^a} \frac{\partial x^i}{\partial \zeta^b} d\zeta^a d\zeta^b \quad ,$$

mas obteremos na realidade

$$\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial \zeta^a} \frac{\partial x^i}{\partial \zeta^b} = h_a^2 \delta_{ab} \quad .$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^1}{\partial \theta} &= \frac{a}{q} \sinh \eta \cos \theta \cos \varphi_1 & \frac{\partial x^4}{\partial \theta} &= -\frac{a}{q} \sinh \eta \sin \theta \sin \varphi_2 \\ \frac{\partial x^2}{\partial \theta} &= \frac{a}{q} \sinh \eta \cos \theta \sin \varphi_1 & \frac{\partial x^5}{\partial \theta} &= 0 \quad , \\ \frac{\partial x^3}{\partial \theta} &= -\frac{a}{q} \sinh \eta \sin \theta \cos \varphi_2 \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{\partial x^i}{\partial \theta} \frac{\partial x^i}{\partial \theta} = \left(\frac{a}{q} \sinh \eta \right)^2 .$$

Da mesma forma, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi_1} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi_1} &= \left(\frac{a}{q} \right)^2 (\sinh \eta \sin \theta)^2 & \frac{\partial x^i}{\partial \eta} \frac{\partial x^i}{\partial \eta} &= \left(\frac{a}{q} \right)^2 \\ \frac{\partial x^i}{\partial \varphi_2} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi_2} &= \left(\frac{a}{q} \right)^2 (\sinh \eta \cos \theta)^2 & \frac{\partial x^i}{\partial \varphi_3} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi_3} &= \left(\frac{a}{q} \right)^2 \quad . \end{aligned}$$

E todos os produtos fora da diagonal são nulos, como

$$\frac{\partial x^i}{\partial \eta} \frac{\partial x^i}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial x^i}{\partial \eta} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi_1} = 0 .$$

Então resulta

$$ds^2 = \left(\frac{a}{q}\right)^2 (d\eta^2 + \sinh^2 \eta d\theta^2 + \sinh^2 \eta \sin^2 \theta d\varphi_1^2 + \sinh^2 \eta \cos^2 \theta d\varphi_2^2 + d\varphi_3^2).$$

Escrevendo agora $ds^2 = \sum_a h_a^2 d\zeta_a^2$, temos

$$h_\eta = \frac{a}{q} \quad h_\theta = \frac{a}{q} \sinh \eta$$

$$h_{\varphi_1} = \frac{a}{q} \sinh \eta \sin \theta$$

$$h_{\varphi_2} = \frac{a}{q} \sinh \eta \cos \theta \quad h_{\varphi_3} = \frac{a}{q}.$$

O gradiente de uma função qualquer A é dado por

$$\nabla A = \sum_a \frac{1}{h_a} \frac{\partial A}{\partial \zeta_a} \hat{e}_a.$$

Usando o ansatz $u = f(\eta, \theta) \exp[i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + m_3\varphi_3)]$ e definindo \vec{K} por

$$\vec{K} = (\nabla u \nabla u^*) \nabla u - (\nabla u)^2 \nabla u^*$$

obtemos

$$\begin{aligned} \vec{K} = & \left(\frac{q}{a}\right)^3 \left\{ 2if \left[(\partial_\eta f)^2 + \frac{(\partial_\theta f)^2}{\sinh^2 \eta} \right] \left[\frac{1}{\sinh \eta} \left(\frac{m_1}{\sin \theta} \hat{e}_1 + \frac{m_2}{\sin \theta} \hat{e}_2 \right) + m_3 \hat{e}_3 \right] \right. \\ & \left. + 2f^2 \left[(\partial_\eta f) \hat{e}_\eta + \frac{(\partial_\theta f)}{\sinh \eta} \hat{e}_\theta \right] \left[\frac{1}{\sinh^2 \eta} \left(\left(\frac{m_1}{\sin \theta} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{\sin \theta} \right)^2 \right) + m_3 \right] \right\} \exp i\phi, \end{aligned}$$

onde $\phi = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + m_3\varphi_3$.

Nossa Lagrangiana é

$$L = \left(\frac{h^2}{2f^2} \right)^{\frac{5}{4}},$$

a qual possui a equação de movimento correspondente a seguir,

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\gamma} L' \vec{K} \right) = 0$$

com $L' = \frac{5}{4} \left(\frac{h^2}{\gamma^2} \right)^{\frac{1}{4}}$ e portanto fica

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{h^2}{\gamma^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\vec{K}}{\gamma} \right] = 0.$$

Porém, $h^2 = -2\vec{K} \cdot \nabla u^*$ e assim

$$\vec{K} \cdot \nabla u^* = 4f^2 \left(\frac{q}{a} \right)^4 \Lambda \left[(\partial_\eta f)^2 + \frac{(\partial_\theta f)^2}{\sinh^2 \eta} \right],$$

onde *definimos* $\Lambda = \frac{1}{\sinh^2 \eta} \left(\frac{m_1^2}{\sin^2 \theta} + \frac{m_2^2}{\cos^2 \theta} \right) + m_3^2$. Agora escrevemos

$$\left(\frac{h^2}{\gamma^2} \right)^{1/4} = 2^{1/4} \frac{1}{\gamma^{1/2}} \frac{q}{a} F^{1/4},$$

com $F = \Lambda \left[(\partial_\eta f)^2 + \frac{(\partial_\theta f)^2}{\sinh^2 \eta} \right]$.

O divergente de um vetor num sistema de coordenadas curvilíneo é expresso pela fórmula:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 \dots h_5} & \left[\partial_1 (V_1 h_2 \dots h_5) + \partial_2 (V_2 h_1 h_3 \dots h_5) + \partial_3 (V_3 h_1 h_2 h_4 h_5) \right. \\ & \left. + \partial_4 (V_4 h_1 \dots h_3 h_5) + \partial_5 (V_5 h_1 \dots h_4) \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos nossa EDP em duas variáveis,

$$\begin{aligned} \partial_\eta \left(\frac{F^{1/4}}{\gamma^{1/2}} \Lambda \sinh^3 \eta \sin \theta \cos \theta f^2 \frac{\partial_\eta f}{\gamma} \right) + \partial_\theta \left(\frac{F^{1/4}}{\gamma^{1/2}} \Lambda \sinh^3 \eta \sin \theta \cos \theta f^2 \frac{\partial_\theta f}{\gamma \sinh^2 \eta} \right) \\ - \frac{F^{1/4}}{\gamma^{1/2}} \Lambda \sinh^3 \eta \sin \theta \cos \theta \frac{f}{\gamma} \left[(\partial_\eta f)^2 + \frac{(\partial_\theta f)^2}{\sinh^2 \eta} \right] = 0, \end{aligned}$$

que pode ser escrita de forma mais compacta como

$$\partial_\eta \left(G \frac{\partial_\eta f^2}{\gamma} \right) + \partial_\theta \left(G \frac{\partial_\theta f^2}{\gamma \sinh^2 \eta} \right) = 0$$

usando

$$G = \frac{F^{1/4}}{\gamma^{1/2}} \Lambda \sinh^3 \eta \sin \theta \cos \theta.$$

Referências

- [1] Nicholas Manton e Paul Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge University Press (2004)
- [2] P. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, segunda edição, Springer-Verlag (1993)
- [3] Olver, P.J., e Rosenau, P., *The construction of special solutions to partial differential equations*, Physics Letters ,Volume 114A ,número 3,(1986)
- [4] R. Bott e L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics 82, Springer-Verlag (1982).
- [5] O. Alvarez, L.A. Ferreira, J. Sanchez Guillen, *A new approach to integrable theories in any dimension*, *Nucl. Phys.* **B529** (1998) 689-736, hep-th/9710147
- [6] L.A. Ferreira, A.V. Razumov, *Hopf solitons and area preserving diffeomorphisms of the sphere.*, *Lett. Math. Phys.* **55** (2001) 143-148, hep-th/0012176
- [7] T. H. R. Skyrme, *A Nonlinear Field Theory*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **260** (1961) 127
- [8] GS Adkins, CR Nappi, E Witten, *Static properties of nucleons in the Skyrme model*, Nuclear Physics B, **228** (1983) 552-566
- [9] L. Faddeev, *40 Years in Mathematical Physics*, (World Scientific, 1995); L. D. Faddeev and A. J. Niemi, *Knots and particles*, Nature **387**, 58 (1997) [arXiv:hep-th/9610193]; R. A. Battye and P. M. Sutcliffe, *Knots as stable soliton solutions in a three-dimensional classical field theory*, Phys. Rev. Lett. **81**, 4798 (1998) [arXiv:hep-th/9808129]; J. Hietarinta and P. Salo, *Ground State In The Faddeev-Skyrme Model*, Phys. Rev. D **62**, 081701 (2000).
- [10] L.D. Faddeev, *From Yang-Mills Field to Solitons and back again*, Lecture delivered at XXXVI Summer School on Subnuclear Physics at Erice in September 1998 [arXiv:hep-th/9901037]

- [11] L. D. Faddeev e A. J. Niemi, *Partially dual variables in $SU(2)$ Yang-Mills theory*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1624 (1999) [arXiv:hep-th/9807069];
- [12] H. Gies, *Wilsonian effective action for $SU(2)$ Yang-Mills theory with Cho-Faddeev-Niemi-Shabanov decomposition*, Phys. Rev. D **63**, 125023 (2001) [arXiv:hep-th/0102026];
- [13] P. van Baal and A. Wipf, *Classical gauge vacua as knots*, Phys. Lett. B **515**, 181 (2001) [arXiv:hep-th/0105141];
- [14] L. Dittmann, T. Heinzl and A. Wipf, *A lattice study of the Faddeev-Niemi effective action*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **106**, 649 (2002) [arXiv:hep-lat/0110026];
- [15] Y. M. Cho, *A Restricted Gauge Theory*, Phys. Rev. D **21**, 1080 (1980); e *Extended Gauge Theory And Its Mass Spectrum*, Phys. Rev. D **23**, 2415 (1981).
- [16] O. Babelon and L. A. Ferreira, *Integrability and conformal symmetry in higher dimensions: A model with exact Hopfion solutions*, JHEP **0211**, 020 (2002) [arXiv:hep-th/0210154];
- [17] Derrick G H, *Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles*, J. Math. Phys. **5** 1252 (1964)
- [18] Stephen Paneitz, Irving Segal, *Analysis in space-time bundles. I General Considerations And the Scalar Bundle* J. Funct. Anal. **47** (1982)78-142; I. E. Segal, H. P. Jakobsen, B. Orsted, S. M. Paneitz, and B. Speh, *Covariant Chronogeometry and Extreme Distances: Elementary Particles*, PNAS (1981) **78** no. 9 5261-5265
- [19] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag (1978).
- [20] André Correia Risério do Bonfim e Luiz Agostinho Ferreira, *Spinning Hopf solitons on $S^3 \times R$* , JHEP **0603**, (2006) 097 [arXiv:hep-th/0602234]
- [21] Erica Emilia Leite, *Aspectos não Perturbativos e Sólitons em Teorias de Campo Integráveis*, Tese de Doutorado,IFT-Unesp (2002)
- [22] P. D. Lax, *Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves* Comm. P. Appl. Mat. **21** (1968), 467

- [23] VE Zakharov, AB Shabat, *Exact theory of two-dimensional selffocusing and one-dimensional selfmodulation of waves in nonlinear media*, Soviet Physics JETP **34** (1972) 62-69
- [24] Ya. Aref'eva, *Non-Abelian stokes formula*, Theoretical and Mathematical Physics, **43** 353 (1980) ; N.E.Bralic, *Exact computation of loop averages in two-dimensional Yang-Mills theory* Phys. Rev. D 22 (1980) 3090.
- [25] Mikio Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, Taylor and Francis (2003)
- [26] H. Aratyn, L.A. Ferreira, A.H. Zimerman, *Toroidal solitons in 3 + 1 dimensional integrable theories.*, *Phys. Lett.* **B456** (1999)162-170, hep-th/9902141. *Exact static soliton solutions of 3 + 1 dimensional integrable theory with nonzero Hopf numbers.* *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 1723-1726, hep-th/9905079
- [27] L.A. Ferreira, *Exact time dependent hopf solitons in 3+1 dimensions*, JHEP 0603 (2006) 075 [hep-th/0601235]
- [28] Yvonne Choquet-Bruhat, Cecile DeWitt-Morette e M. Dillard-Bleick *Analysis, Manifolds and Physics* North-Holland Publishing Co(1982)
- [29] E. De Carli and L. A. Ferreira, *A model for Hopfions on the space-time $S^3 \times R$* , J. Math. Phys. **46**, 012703 (2005) [arXiv:hep-th/0406244].
- [30] Ed. A.Ronveaux, *Heun's differential equations*, New York:The Clarendon Press; Oxford:Oxford University Press (1995).
- [31] L. A. Ferreira, *Euclidean 4d exact solitons in a Skyrme type model*, Phys.Lett. B **606**, 417-422,(2005) [arXiv:hep-th/0406227]