



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.007/08

**Fluxo do grupo de Renormalização dos modelos- σ e as
Álgebras de Lie Contínuas**

Alexis Roa Aguirre.

Orientador

Prof. Dr. Abraham H. Zimmerman

Julho de 2008

Resumo

Este trabalho é basicamente uma revisão de alguns aspectos de integrabilidade em duas dimensões discutidos no artigo “Renormalization group flows and continual Lie algebras” do professor Ioannis Bakas. A idéia é estudar o fluxo do grupo de renormalização das métricas bi-dimensionais nos modelos- σ usando a função beta a 1-loop, e mostrar que elas fornecem análogos contínuos das equações de campo de Toda nas coordenadas conformemente planas do espaço target. Nesta formulação algébrica, a escala logarítmica de comprimento da folha mundo é interpretada como o parâmetro de Dynkin num sistema de raízes de uma álgebra de Lie contínua, denotada por $\mathcal{G}(\frac{d}{dt}; \mathbb{I})$, com um kernel de Cartan generalizado anti-simétrico $K(t, t') = \delta(t - t')$. Usando o formalismo de curvatura zero construiremos a solução geral do fluxo do grupo de renormalização em termos das configurações de campo livre por meio de transformações de Bäcklund. A validade desta solução geral como uma expansão em série de potência será testada com alguns exemplos especiais que incluem o modelo “sausage”, as métricas de curvatura constante negativa e a queda de singularidades cônicas.

Palavras Chaves: Grupo de Renormalização; Modelo- σ não-linear ; Sistemas de Toda; Álgebras de Lie.

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos ; Física Matemática

Abstract

This work is basically a review of some aspect of the integrability in two dimensions discussed in the Prof. Ioannis Bakas's paper called "Renormalization group flows and continual Lie algebras". The main idea is to study the renormalization group flow of two-dimensional metrics in sigma models using the one-loop beta function, and demonstrate that they provide a continual analogue of the Toda field equations in conformally flat coordinates in the target space. In this algebraic frame, the logarithm of the world-sheet length scale t is interpreted as Dynkin parameter on the root system of a continual Lie algebra, denoted by $\mathcal{G}(\frac{d}{dt}; \mathbb{I})$, with a anti-symmetric generalized Cartan kernel $K(t, t') = \delta(t - t')$. Using the zero curvature formalism, we construct a general solution of the renormalization group flow in terms of the free field configurations via Bäcklund transformations. The validity of these general solutions as a power series expansion is verified in some special examples including the sausage model, the constant negative curvature metrics and the decay of conical singularities.

Key Words: Renormalization group; Non-linear sigma model; Toda systems; Lie algebras.

Índice

Introdução	1
1 Grupo de Renormalização	3
1.1 Idéias Básicas da Renormalização	3
1.2 Função- β e Liberdade Assintótica	8
1.3 Modelo- σ $O(N)$	10
1.4 Fluxo do Grupo de Renormalização dos Modelos- σ Generalizados . .	11
1.5 Aspectos Topológicos	13
1.6 Fluxo de Ricci em duas dimensões	15
1.7 Transformações de Bäcklund	18
2 Estruturas algébricas	21
2.1 Equações de Toda para álgebras de Lie simples	21
2.2 Álgebras de Lie Contínuas	25
2.2.1 Fundamentos Axiomáticos	25
2.2.2 Exemplos Principais	27
2.2.3 Sistemas de Toda Associados	32
2.2.4 Solução Formal de Leznov-Saveliev	34
2.3 Fluxo de Ricci	35
3 Soluções da Equação de Toda Contínua	40
3.1 Deformações do Modelo- σ $O(3)$	40
3.2 Deformação das Métricas de Curvatura Negativa	48
3.2.1 Classificação das Métricas com $R < 0$	48
3.2.2 Deformação das Soluções Hiperbólicas	51
3.2.3 Deformação das Soluções Parabólicas	58
3.2.4 Deformação das Soluções Elípticas	60
4 Queda das Singularidades Cônicas	64
4.1 Queda de um Cone Plano	64

Conclusão e Perspectivas

72

Referências

74

Introdução

Nesta dissertação buscamos além de estudar as deformações ou transições induzidas pelo fluxo do grupo de renormalização dos modelos- σ bi-dimensionais tomando em conta só a contribuição a 1-loop das equações da função beta, também vamos introduzir a construção sistemática da solução geral usando a relação existente com a equação de campo de Toda, a qual é integrável. Esta equação surge para espaços fundo puramente métricos ou gravitacionais, nas coordenadas conformemente planas e fornece uma generalização não-linear da equação do calor no espaço “target”. A reformulação algébrica é feita usando uma álgebra de Lie de dimensão infinita com um kernel de Cartan generalizado $K(t, t') = \delta(t - t')$, a qual pertence a uma classe geral conhecida como *álgebras de Lie contínuas* [1, 2, 3]. A variável de Cartan t faz o papel da escala logarítmica de energia da folha mundo, ou seja, o parâmetro do fluxo do grupo de renormalização. As equações de fluxo admitem uma formulação em curvatura zero como um sistema bi-dimensional integrável no espaço “target” baseada na álgebra de Lie contínua.

Este trabalho tem-se organizado em quatro capítulos. No primeiro capítulo, iniciamos com uma introdução aos conceitos básicos da renormalização. Continuando, formulamos as equações do grupo de renormalização para espaços fundo métricos em diferentes referenciáveis. Estas equações assumem formas simples para espaços “target” bi-dimensionais nas coordenadas conformemente planas, onde podem ser formalmente descritas como sistemas de Toda. Nesta apresentação elas fornecem uma generalização não-linear da equação do fluxo do calor, cujas propriedades básicas são estudadas.

No capítulo dois, introduzimos uma descrição tanto algébrica quanto sistemática do fluxo do grupo de renormalização como um sistema integrável de Toda, identificando o parâmetro de Dynkin das raízes de uma álgebra de Lie contínua com o “tempo” do grupo de renormalização. Uma definição formal das álgebras de Lie contínuas e alguns exemplos básicos são apresentados. Neste ponto, a estrutura de uma nova álgebra de Lie contínua que vamos chamar de álgebra loop contínua é estudada. Após, usando a formulação de curvatura zero das equações da função beta, as soluções gerais são apresentadas em termos de campos livres por meio das

transformações de Bäcklund. A solução geral é expressida como uma expansão em serie de potência, usando a representação de peso mais alto da álgebra, em analogia com os sistemas de Toda usuais.

O terceiro capítulo aplica as idéias dos dois primeiros a espaços “target” bi-dimensionais bem simples. Primeiro, estudaremos as deformações do modelo- σ $O(3)$ sob o fluxo do grupo de renormalização. Este exemplo mostra quanto é util a expansão formal em serie de potência da solução geral da equação de campo de Toda. A segunda seção deste capítulo é dedicada às métricas de curvatura constante negativa. Discutiremos as deformações geométricas das configurações hiperbólicas, parabólicas e elípticas. No limite infravermelho, a geometria destas configurações assumem a forma de uma “cana”, exceto para o caso elíptico onde existe uma singularidade cônica na curvatura.

No ultimo capítulo, vamos considerar soluções da equação de campo de Toda contínua que descrevem a queda das singularidades cônicas sob o fluxo do grupo de renormalização. A transição do cone \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n para \mathbb{C}/\mathbb{Z}_m , com $m < n$, e no final para o plano bi-dimensional, serve como protótipo para estudar o comportamento da solução geral perto das singularidades da curvatura. O ponto final do fluxo corresponderá à regularização da singularidade a qual dissipa-se no plano tudo. Este trabalho encerra-se com uma breve discussão da relação da queda das singularidades cônicas com o problema da condensação de táquions na teoria de cordas fechada.

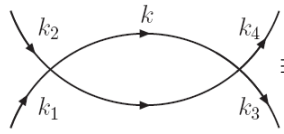
Esperamos que esta monografia tenha cumprido com seu papel principal de abordar numa forma não trivial um assunto certamente interessante, e que possa contribuir futuramente ao aprendizado de outros alunos do Instituto de Física Teórica.

Capítulo 1

Grupo de Renormalização

1.1 Idéias Básicas da Renormalização

O grupo de renormalização representa um dos conceitos mais importantes na teoria quântica dos campos (TQC) que surgiram simultâneamente tanto na area de física de altas energia quanto em materia condensada nas últimas seis décadas . Desde as primeiras fases da teoria, o tratamento perturbativo da TQC tem encarado problemas com algumas quantidades infinitas que aparecem após o cálculo de loops internos nos diagramas de Feynman, como por exemplo na teoria $\lambda\phi^4$, a amplitude de espalhamento de dois mesons (particulas associadas com o campo escalar ϕ) na ordem λ^2 [4],


$$\mathcal{M} \equiv \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k_1 + k_2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (1.1)$$

claramente possui divergência logaritmica, isto é, para grandes valores de k o integrando tende a $1/k^4$ e por esta razão a integral diverge como,

$$\mathcal{M} \sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \sim \log(k) \quad \text{quando } k \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Já que a divergência está associada com valores grandes de k conhece-se como *divergência ultravioleta*. Em geral, as teorias de campo também apresentam divergências para valores pequenos de k , conhecidas como *divergências infravermelhas*, mas por enquanto não trataremos este problema.

A forma como estas divergências foram direcionadas desde a década dos quarenta é bem similar à interpretação das quantidades observáveis na mecânica quântica. Isto é, a magnitude observada das quantidades físicas (como a carga do elétron) pode surgir da soma de um valor não-observável (“bare”) mas correções quânticas. O fato

que ambas dessas quantidades erão divergentes não era um problema pois só sua soma finita é uma quantidade observável. Em outras palavras, para tratar as divergências requere-se a introdução de alguns procedimentos de *regularização* os quais basicamente “curtam” as integráris divergentes em alguma escala de momentum Λ , isto é, o valor físico de um observável está dado por

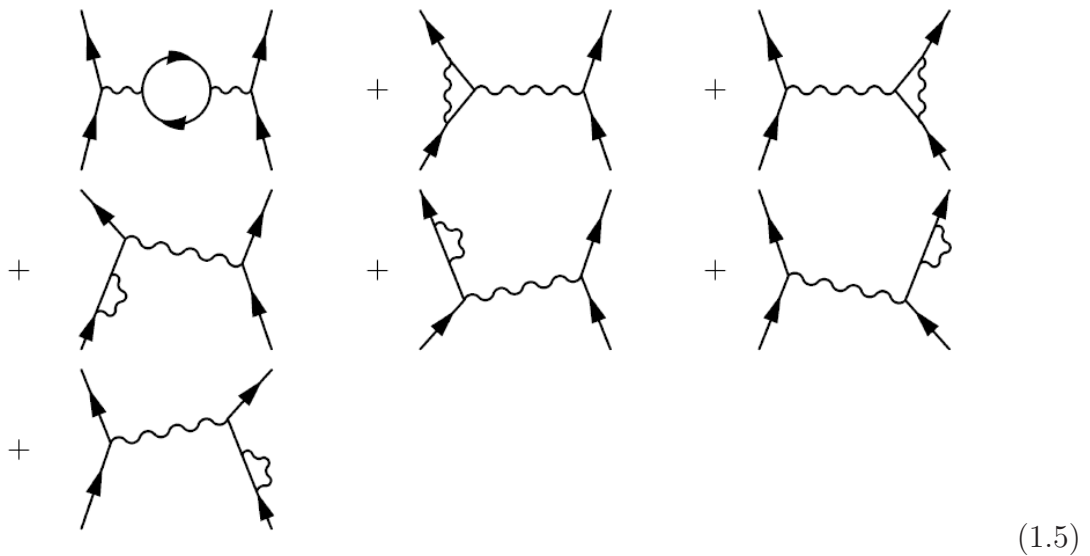
$$\mathcal{O}_f = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [\mathcal{O}(\Lambda)_{\text{bare}} + \Delta\mathcal{O}(\Lambda)_{\hbar}] \quad , \quad (1.3)$$

onde \mathcal{O}_f denota o valor físico do observável e $\Delta\mathcal{O}(\Lambda)_{\hbar}$ representa as correções quânticas regularizadas.

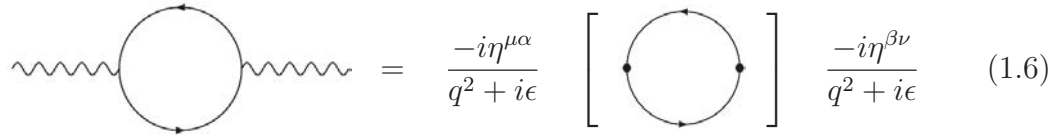
Para entender melhor esta discussão vamos considerar as correções à carga elétrica na eletodinâmica quântica (QED). No processo de aniquilação de um par elétron-pósitron para crear um par muon-antimuon, $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$, o unico diagrama que contribui na ordem mais baixa da teoria de perturbação é



Entretanto, as correções da ordem e^4 para este resultado precisa do cálculo de mais sete diagramas dados por,

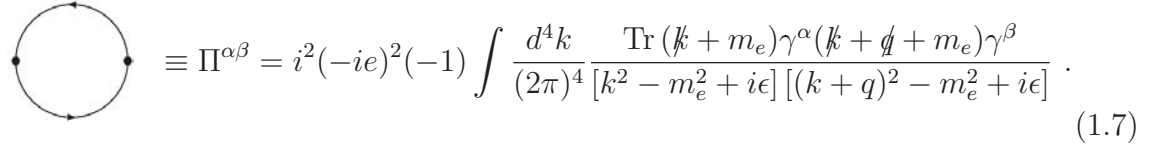


Para calcularmos a renormalização da carga consideraremos o primeiro diagrama o qual representa a primeira correção ao propagador do fóton virtual devido à polarização do vácuo. Começaremos calculando o seguinte diagrama,



$$\text{Diagram} = \frac{-i\eta^{\mu\alpha}}{q^2 + i\epsilon} \left[\text{Diagram} \right] \frac{-i\eta^{\beta\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad (1.6)$$

onde o loop entre brackets está dado por



$$\text{Diagram} \equiv \Pi^{\alpha\beta} = i^2(-ie)^2(-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}(\not{k} + m_e)\gamma^\alpha(\not{k} + \not{q} + m_e)\gamma^\beta}{[k^2 - m_e^2 + i\epsilon][(k+q)^2 - m_e^2 + i\epsilon]} \quad (1.7)$$

Fisicamente este diagrama inclui a correção ao propagador devido à polarização do vácuo, isto é, à criação de um par virtual elétron-pósitron por um fóton se propagando. O momentum q é o momentum total do par elétron-pósitron.

Antes de avaliar este diagrama de Feynman é instrutivo considerar a sua interpretação desde o ponto de vista da teoria de perturbação na mecânica quântica não relativística. Em cada vértice a interação consiste da aniquilação(*respectivamente criação*) de um fóton e a criação(*respectivamente aniquilação*) de um par elétron-pósitron. Isto pode ser implementado pela interação Hamiltoniana

$$H_{\text{int}} = e \int d^3x \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (1.8)$$

Todos os campos dentro do integrando podem ser expressados em termos dos correspondentes operadores de criação e aniquilação para os fótons, elétrons e pósitrons. Na mecânica quântica, a mudança na função de onda em primeira ordem na perturbação H_{int} está dado por

$$|\gamma, \text{ini}\rangle = |\gamma, \text{ini}\rangle_0 + \sum_n \frac{\langle n|H_{\text{int}}|\gamma, \text{ini}\rangle_0}{E_{\text{in}} - E_n} |n\rangle \quad (1.9)$$

e similarmente para $|\gamma, \text{fin}\rangle$, onde todos os estados possíveis do par elétron-pósitron tem sido denotados por $|n\rangle$. Pelo fato que estes estados são todos ortogonais a $|\gamma, \text{ini}\rangle$ e $|\gamma, \text{fin}\rangle$, na ordem e^2 temos que

$$\langle \gamma, \text{ini}|\gamma', \text{fin}\rangle = {}_0\langle \gamma, \text{in}|\gamma', \text{fin}\rangle_0 + \sum_n \frac{{}_0\langle \gamma, \text{ini}|H_{\text{int}}|n\rangle \langle n|H_{\text{int}}|\gamma', \text{fin}\rangle_0}{(E_{\text{ini}} - E_n)(E_{\text{fin}} - E_n)} + \mathcal{O}(e^4) \quad (1.10)$$

Nesta forma fica claro que o diagrama da Eq.(1.6) corresponde à correção ao propagador do fóton $\langle \gamma, \text{ini} | \gamma', \text{fin} \rangle$ na ordem e^2 , isto é,

$$\begin{aligned}
 \text{~~~~~} & \longrightarrow {}_0 \langle \gamma, \text{in} | \gamma', \text{fin} \rangle_0 \\
 \text{~~~~~} \bigcirc \text{~~~~~} & \longrightarrow \sum_n \frac{{}_0 \langle \gamma, \text{ini} | H_{\text{int}} | n \rangle \langle n | H_{\text{int}} | \gamma', \text{fin} \rangle_0}{(E_{\text{ini}} - E_n)(E_{\text{fin}} - E_n)} \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

Uma vez entendido o significado físico dos diagramas de Feynman a serem calculados, pode-se começar a sua avaliação. Em princípio não existe problema nenhum em calcularmos a integral na Eq. (1.7) para valores não zero da massa do elétron, mas aqui pode-se tomar $m_e = 0$ pois estamos interessados em ver como a divergência da integral aparece numa renormalização da carga dependente da escala. Então, depois de fazer alguns calculos usando tecnicas de matrizes- γ não é complicado mostrar que o tensor de polarização $\Pi_{\mu\nu}(q)$ definido na Eq.(1.7) pode ser escrito como

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2) \quad , \quad (1.12)$$

com

$$\Pi(q^2) = \frac{4e^2}{3q^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + k \cdot q}{[k^2 + i\epsilon] [(k+q)^2 + i\epsilon]} \quad . \quad (1.13)$$

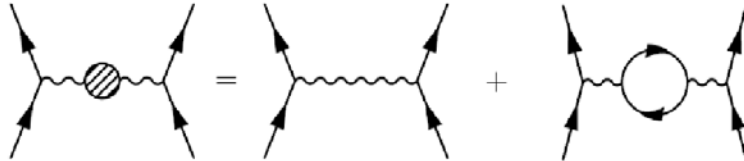
Um simples conteo de potências (*power counting*) mostra que a anterior integral tem divergência quadrática aparente, mas esta divergência na verdade pode ser cancelada e só ficaremos com a logaritmica. Para tratar esta integral divergente devemos encontrar algum procedimento para ela virar finita. Isto pode ser feito de varias formas, mas aqui vamos escolher “curtar” a integral numa escala alta de energia Λ , onde a nova física pode trabalhar para $|p| < \Lambda$. Este procedimento, conhecido como regularização, nos dá o seguinte resultado

$$\Pi(q^2) \simeq \frac{e^2}{12\pi^2} \log \left(\frac{q^2}{\Lambda^2} \right) + \text{termos finitos} \quad . \quad (1.14)$$

Quando o cutoff vá para infinito $\Lambda \rightarrow \infty$ a divergência colapsa, por tanto ainda tem que se fazer alguma coisa com isto.

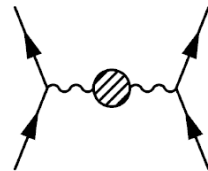
Para que todo isto tenha sentido, devemos voltar à questão física de calcularmos a Eq.(1.7). Nosso objetivo principal é calcular as correções ao processo de aniquilação

de dois elétrons indo para dois muons. Incluindo agora a correção ao propagador do fóton virtual, temos que



$$\begin{aligned}
 &= \eta_{\alpha\beta} (\bar{v}_e \gamma^\alpha u_e) \frac{e^2}{4\pi q^2} (\bar{v}_\mu \gamma^\beta u_\mu) + \eta_{\alpha\beta} (\bar{v}_e \gamma^\alpha u_e) \frac{e^2}{4\pi q^2} \Pi(q^2) (\bar{v}_\mu \gamma^\beta u_\mu) \\
 &= \eta_{\alpha\beta} (\bar{v}_e \gamma^\alpha u_e) \left\{ \frac{e^2}{4\pi q^2} \left[1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \log \left(\frac{q^2}{\Lambda^2} \right) \right] \right\} (\bar{v}_\mu \gamma^\beta u_\mu). \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

Agora, podemos imaginar que o processo $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ tem energia do centro de massa μ . A partir do resultado anterior podemos deduzir a carga efetiva das partículas em esta escala de energia, digamos $e(\mu)$, como



$$= \eta_{\alpha\beta} (\bar{v}_e \gamma^\alpha u_e) \left[\frac{e(\mu)^2}{4\pi q^2} \right] (\bar{v}_\mu \gamma^\beta u_\mu) \quad (1.16)$$

Esta carga, $e(\mu)$, é a quantidade que é fisicamente medível nos experimentos. Agora, podemos entender o resultado divergente (1.15) assumindo que a carga que aparece na Lagrangiana classica da QED é justamente um valor “bare” (não medível) que depende da escala na qual a teoria é “curtada”, $e \equiv e(\Lambda)_{\text{bare}}$. Para reconciliar o resultado (1.15) com o resultado físico (1.16), devemos assumir que a dependência da carga $e(\Lambda)_{\text{bare}}$ no cutoff Λ está determinada pela identidade

$$e(\mu)^2 = e(\Lambda)_{\text{bare}}^2 \left[1 + \frac{e(\Lambda)_{\text{bare}}^2}{12\pi^2} \log \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) \right] \quad (1.17)$$

Se ainda insistimos em remover o cutoff, $\Lambda \rightarrow \infty$ devemos enviar a carga “bare” a zero de modo que o acoplamento efetivo tenha valor finito dado pelo experimento na escala de energia μ . Isto não representa um problema, pois a carga “bare” é bem pequena para valores grandes do cutoff, devido a que a unica quantidade medível é a carga efetiva que permanece finita. Por esta razão todas as quantidades observáveis podem ser expressadas na teoria de perturbação como uma serie de potências no acoplamento físico $e(\Lambda)^2$ e não no acoplamento “bare” $e(\Lambda)_{\text{bare}}$ o qual é não-físico.

1.2 Função- β e Liberdade Assintótica

Vamos tratar a discussão da seção anterior desde um ponto de vista diferente, em particular a equação (1.17). Para resolver o problema com os infinitos foi introduzido à força uma dependência da constante de acoplamento com a escala de energia na qual o processo trabalha. Na verdade a partir da expressão do acoplamento físico em termos da carga “bare” (1.17) pode-se eliminar o cutoff Λ , pois no final o seu valor não vá afetar o valor da quantidade física. Tendo em conta que estamos trabalhando em teoria de perturbação em $e(\mu)^2$, pode-se exprimir a carga bare $e(\Lambda)_{\text{bare}}^2$ em termos de $e(\mu)^2$ da seguinte forma

$$e(\Lambda)_{\text{bare}}^2 = e(\mu)^2 \left[1 + \frac{e(\mu)^2}{12\pi^2} \log \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) \right] + \mathcal{O}[e(\mu)^6] \quad . \quad (1.18)$$

Esta expressão permite eliminar toda a dependência do cutoff na expressão da carga efetiva na escala μ substituindo $e(\Lambda)_{\text{bare}}$ na equação (1.17) pela que obtem-se de (1.18) para uma escala de energia de referência μ_0 ,

$$e(\mu)^2 = e(\mu_0)^2 \left[1 + \frac{e(\mu_0)^2}{12\pi^2} \log \left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) \right] \quad . \quad (1.19)$$

A partir desta equação pode-se calcular, em esta ordem de teoria de perturbação, o valor efetivo da constante de acoplamento na energia μ , conhecendo seu valor para alguma energia referência μ_0 . É conveniente então saber como é que muda a “constante” de acoplamento com a escolha da escala de energia. Certamente isto pode-se expressar por meio de uma *equação de fluxo* diferencial, dada neste caso por

$$\mu \frac{d}{d\mu} e(\mu) = \frac{1}{12\pi^2} e(\mu)^3 + \mathcal{O}(e(\mu)^5) \quad . \quad (1.20)$$

Vemos que a constante de acoplamento eletromagnética aumenta com o aumento da escala de energia, isto é, o eletromagnetismo torna-se mais forte com o aumento da energia (ou distâncias curtas). Este fenômeno pode ser entendido fisicamente lembrando que o efeito da polarização do vácuo mostrado na figura da Eq. (1.6) equivale à criação de uma nuvem de pares elétrons-pósitrons ao redor da localização da carga. Estes pares virtuais comportam-se como dipolos que, num meio dielétrico, tendem a proteger esta carga e decrescer sua intensidade a distâncias longas (ou energias baixas).

É importante notar que em TQC nem sempre é possível eliminar a dependência da constante de acoplamento no cutoff Λ . Aquelas teorias de campo nas quais isto é possível são conhecidas como *teorias renormalizáveis*, e a QED é um bom exemplo desta tipo de teorias.

Em geral, em uma TQC com constante de acoplamento g , a informação da variação desta constante de acoplamento com a energia está dada pela *Função beta* definida pela equação diferencial de primeira ordem

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu} \equiv \frac{dg}{dt} \quad , \quad (1.21)$$

onde normalmente define-se $t = \log(\mu/\mu_0)$. Esta equação é conhecida como a *Equação do Grupo de Renormalização*. No caso da QED a função beta calculada foi

$$\beta(e)_{\text{QED}} = \frac{e^3}{12\pi^2} \quad . \quad (1.22)$$

Isto significa que se começamos em uma energia onde o acoplamento elétrico é o suficientemente pequeno como para que nosso tratamento perturbativo seja válido, a carga efetiva crescerá com a energia. Esse crescimento da constante de acoplamento com a energia significa que a QED está bem definida na região infravermelha, pois as aproximações perturbativas dão bons resultados quando vamos para energias mais baixas. Por outro lado se acrescentamos a escala de energia, o acoplamento $e(\mu)^2$ cresce até alguma escala de energia onde o acoplamento é da ordem de 1 e a aproximação perturbativa não vale mais. Na QED isto é conhecido como o polo de Landau.

Se em uma teoria de campo existem constantes de acoplamento g_i , com $i = 1, \dots, N$, então temos

$$\frac{dg_i}{dt} = \beta_i(g_1, \dots, g_N) \quad . \quad (1.23)$$

Pode-se pensar de $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_N)$ como as coordenadas de uma partícula num espaço N -dimensional, t como um tempo, e $\beta(g_1, \dots, g_N)$ como o campo de velocidade dependente da posição. Os pontos \mathbf{g}^* onde $\beta(\mathbf{g}^*)$ é zero são conhecidos como *pontos fixos*. Se o campo de velocidade ao redor de um ponto fixo \mathbf{g}^* é tal que a partícula move-se em direção a esse ponto, o ponto fixo é chamado de *atractivo* ou *estável*. Por tanto, para o estudo do comportamento assintótico das teorias quânticas de campos em altas energias só precisamos encontrar os pontos fixos sob o fluxo do grupo de renormalização, o qual na pratica é difícil de implementar. Em particular \mathbf{g}^* pode ter um valor grande, associado com os pontos fixos do acoplamento forte, sendo a teoria de perturbação e os diagramas de Feynman não tão úteis para esta tarefa. Afortunadamente, para qualquer teoria de campos sabemos que $\mathbf{g}^* = 0$ é um ponto fixo no qual a teoria de perturbação é aplicável. Então é possível avaliar perturbativamente

$$\frac{dg_i}{dt} = c_i^{jk} g_j g_k + d_i^{jkl} g_j g_k g_l + \dots \quad . \quad (1.24)$$

Por tanto, o comportamento assintótico ou a altas energías depende fortemente do sinal da função beta em (1.23).

Agora, nem todas as teorias quânticas de campos têm esse mesmo comportamento da QED. Precisamente, nos sessenta quando uma serie de experimentos de espalhamento inelástico profundo foram feitos mostrou que os quarks comportavam-se livremente no interior dos hadrons, este aparente problema surgiu pois em aquele momento não existia uma teoria que descrevesse esse comportamento a distâncias curtas. Não obstante, em 1973 David Gross e Frank Wilczek [5] e David Politzer [6] mostraram que as teorias de gauge não-abelianas podiam realmente apresentar esse comportamento procurado. Eles encontraram a função beta para a cromodinâmica quântica QCD, a qual está dada por [7]

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f \right] \quad . \quad (1.25)$$

Em particular, para a QCD real ($N_c = 3, N_f = 6$) obtemos que $\beta(g) = -\frac{7g^3}{16\pi^2} < 0$. Isto significa que para uma teoria fracamente acoplada em uma escala de energia μ_0 a constante de acoplamento decresce quando a energia acrescenta-se $\mu \rightarrow \infty$. Este fato explica a aparente liberdade dos quarks no interior dos hadrons. Este fenômeno é conhecido como *liberdade assintótica*.

Em altas energías a constante de acoplamento das teorias assintoticamente livres aproxima-se a zero, em quanto que para baixas energías tornam-se fortemente acopladas. Em outras palavras, as teorias assintoticamente livres são bem tratáveis na região ultravioleta mas na região infravermelha são bem complicadas e ainda não existe um bom entendimento deste problema mesmo na QCD.

1.3 Modelo- σ $O(N)$

O interesse nas propriedades do grupo de renormalização dos modelos sigma bi-dimensionais naceu com o trabalho de Polyakov sobre modelos sigma $O(N)$ [8], cuja ação tem a seguinte forma :

$$S = \frac{1}{g^2} \int d^2w (\partial\vec{n})^2 \quad (1.26)$$

onde \vec{n} é um vetor unitário N-dimensional. Esta teoria é perturbativamente renormalizável e a função beta $\beta(g^2)$ é negativa para todos os grupos não-abelianos com $N \geq 3$, por causa da curvatura positiva da variedade fundo (“espaço Target”) $\mathbf{S}^{N-1} = \mathbf{SO}(N)/\mathbf{SO}(N-1)$. Introduzindo um cut-off ultravioleta Λ , a constante

de acoplamento muda da seguinte forma :

$$\tilde{g}^2(\Lambda) = g^2(\Lambda) \left[1 + \frac{N-2}{4\pi} g^2(\Lambda) \log \left(\frac{\tilde{\Lambda}}{\Lambda} \right) \right]^{-1}, \quad (1.27)$$

$$\beta(g^2) = - \left(\frac{N-2}{4\pi} \right) g^4(\Lambda) . \quad (1.28)$$

Na região ultravioleta $\tilde{\Lambda} \gg \Lambda$ temos que

$$\tilde{g}^2(\Lambda) = \frac{4\pi}{(N-2)} \left[\log \left(\frac{\tilde{\Lambda}}{\Lambda} \right) \right]^{-1}, \quad (1.29)$$

a teoria é assintoticamente livre como acontece nas teorias de gauge não abelianas em quatro dimensões.

Para $N = 2$ a teoria é conforme e descreve a física de um só campo escalar em duas dimensões. No estudo das equações do grupo de renormalização existem algumas extensões para métricas arbitrárias no espaço de fundo que permitem estudar as consequências a distâncias longas. Aqui vamos considerar a estrutura das equações do grupo de renormalização distante dos pontos fixos e algumas idéias sobre a sua integrabilidade no espaço de fundo para o caso mais simples de variedades bi-dimensionais.

1.4 Fluxo do Grupo de Renormalização dos Modelos- σ Generalizados

Agora consideremos os modelos sigma bi-dimensionais generalizados, isto é, definidos sobre um espaço “target” sendo uma variedade riemanniana arbitrária. Classicamente estes modelos são descritos pela ação :

$$S = \frac{1}{2} \int d^2w \sqrt{h} h^{ij} (\partial_i X^\mu) (\partial_j X^\nu) G_{\mu\nu} , \quad (1.30)$$

onde $w^i (i = 1, 2)$ são as coordenadas da folha mundo Σ , e $X^\mu (\mu = 1, \dots, n)$ as coordenadas do espaço de fundo M . A quantização é feita via teoria de perturbações. Quando a curvatura do “target” é bem pequena, o modelo sigma é perturbativamente renormalizável e pode ser considerado adicionando contra-termos da seguinte forma :

$$S_{ct} = \frac{1}{2} \int d^2w \sqrt{h} h^{ij} (\partial_i X^\mu) (\partial_j X^\nu) \mathcal{T}_{\mu\nu} , \quad (1.31)$$

onde $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico que depende da curvatura e pode ser calculado a 1-loop ou a ordens maiores. As equações do grupo de renormalização dos modelos sigma bi-dimensionais são [9],

$$\Lambda^{-1} \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial \Lambda^{-1}} \equiv -\beta(G_{\mu\nu}) = -R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\mu\rho\sigma\tau} R_{\nu}^{\rho\sigma\tau} + \dots \quad , \quad (1.32)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci do “target” e dá a contribuição a 1-loop de $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ (aqui $2\pi\alpha' = 1$). Os termos quadráticos dão as contribuições a 2-loops e estão determinados pelo tensor de Riemann. Λ^{-1} é o parâmetro de escala de renormalização da folha mundo. Introduzindo uma escala logarítmica $t = \log \Lambda^{-1}$ a equação do grupo de renormalização na ordem mais baixa em teoria de perturbações toma a forma

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial t} = -R_{\mu\nu} \quad , \quad (1.33)$$

de um *Fluxo de Ricci*¹. Esta é uma equação diferencial não-linear de segunda ordem para as componentes da métrica de uma variedade riemanniana n-dimensional [10, 11].

Uma solução simples que ilustra as principais propriedades do fluxo de Ricci para uma dimensão arbitrária pode ser dada considerando uma métrica inicial $G_{\mu\nu}(0)$ de curvatura de Ricci constante $R_{\mu\nu} = aG_{\mu\nu}$. Então, a evolução produz um reescalamiento da métrica em todas as direções, como

$$G_{\mu\nu}(t) = (1 - at)G_{\mu\nu}(0) \quad . \quad (1.34)$$

A métrica tem curvatura de Ricci constante para qualquer tempo, mas a magnitude depende do sinal de a ; se $a > 0$ a métrica contrai-se uniformemente até a formação de uma singularidade, enquanto que se $a < 0$ a métrica expande-se suavemente para todo valor de t .

A interpretação física da equação (1.33) na teoria de renormalização dos modelos sigma pode ser entendida no sentido que ela descreve como as variações da escala logarítmica da folha de mundo mudam a geometria do espaço “target”. Usando esta variável, o limite ultravioleta(U.V) corresponde a $t \rightarrow -\infty$, enquanto $t \rightarrow +\infty$ corresponderá ao limite infravermelho(I.V). Em duas dimensões este sistema de equações é integrável, sendo possível encontrar uma trajetória de métricas riemannianas. A integrabilidade do sistema fica mais clara reescrevendo as equações do grupo de renormalização no formalismo de curvatura zero para álgebras de Lie de dimensão

¹Daqui em diante vamos considerar o fluxo de Ricci e o fluxo do grupo de renormalização dos modelos sigma a 1-loop indiferentemente.

infinita.

Por outro lado as equações do fluxo de Ricci admitem uma generalização natural quando inclui-se reparametrizações das coordenadas do espaço “target” $\delta X_\mu = -\xi_\mu$, ou seja via elementos do grupo de difeomorfismos da variedade M os quais são gerados por campos vetoriais ξ_μ que dependem das coordenadas do “target”, e também do parâmetro do fluxo t . A equação considerando só a métrica assume a forma :

$$-\beta(G_{\mu\nu}) \equiv \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial t} = -R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \quad . \quad (1.35)$$

Para as reparametrizações associadas com campos de Killing temos que

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad ,$$

por tanto não existem termos adicionais. Agora, para entendermos melhor esses termos adicionais, consideremos o modelo sigma incluindo um dilaton,

$$S = \frac{1}{2} \int d^2 w \sqrt{h} \left(h^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu}(x) + R \tilde{\Phi}(x) \right) \quad (1.36)$$

Neste caso as equações do grupo de renormalização estão dadas por [12, 13],

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial t} &= -R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu - 2\nabla_\mu \nabla_\nu \tilde{\Phi} \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} &= -(\nabla_\mu \tilde{\Phi})(\nabla^\mu \tilde{\Phi}) + \frac{1}{2} \nabla^2 \tilde{\Phi} + \xi_\mu \nabla^\mu \tilde{\Phi} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Então, sempre é possível escolher uma reparametrização apropriada gerada pelo campo vetorial $\xi_\mu = \partial_\mu \tilde{\Phi}$, de modo que o sistema de equações escreve-se da seguinte forma :

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial t} = -R_{\mu\nu} \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} = -(\nabla_\mu \tilde{\Phi})(\nabla^\mu \tilde{\Phi}) \quad (1.38)$$

Sendo uma extensão simples da equação da função beta para a métrica só, pode-se observar que o efeito do dilaton é semelhante ao de uma reparametrização gerada pelo campo vetorial ξ_μ .

1.5 Aspectos Topológicos

Vamos discutir alguns resultados gerais que podem ser obtidos para a ação do fluxo do grupo de renormalização sobre os parâmetros dos modelos sigma bi-dimensionais. Na literatura matemática é comum considerar os fluxos de Ricci normalizados como uma variação na forma da equação (1.33). Para motivarmos a sua definição consideraremos o volume do espaço “target” M :

$$V = \int_M \sqrt{\det G} d^n X \quad . \quad (1.39)$$

A sua variação sob o fluxo do grupo de renormalização está dada pela ação de Einstein-Hilbert do espaço “target” em qualquer dimensão n , isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int_M d^n X \sqrt{\det G} G^{\mu\nu} \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \int_M d^n X \sqrt{\det G} G^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int_M d^n X \sqrt{\det G} R[G] \quad . \end{aligned} \quad (1.40)$$

Desta forma, o volume de uma variedade fechada não é preservado sob o fluxo. Este decresce se a curvatura escalar $R > 0$, e cresce se $R < 0$, em total concordância com o comportamento da solução (1.34) que descreve as deformações dos espaços com curvatura constante no “tempo” t . As deformações que preservam o volume do espaço “target” são definidas considerando o *fluxo de Ricci normalizado*

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial t} = -R_{\mu\nu} + \frac{1}{n} \bar{R} G_{\mu\nu} \quad , \quad (1.41)$$

onde \bar{R} é a curvatura escalar média da variedade M ,

$$\bar{R} = \frac{1}{V} \int_M d^n X \sqrt{\det G} R[G] \quad , \quad (1.42)$$

a qual é independente das coordenadas da variedade e pode só depender do tempo t . Por esta razão, o fluxo de Ricci normalizado é geometricamente mais útil, pois as suas soluções têm maiores chances de existir para intervalos maiores de tempo e assim converger para métricas de curvatura constantes as quais correspondem aos pontos fixos da equação (1.41).

Existe porém uma relação entre o fluxo de Ricci e o fluxo de Ricci normalizado, a qual se obtém considerando uma reparametrização no tempo e um reescalamento da métrica por uma função do tempo simultaneamente. O reescalamento da métrica por uma função arbitrária do tempo, $\tilde{G}_{\mu\nu} = f(t)G_{\mu\nu}$, não muda o tensor de Ricci, mas transforma sim o fluxo de Ricci normalizado

$$\frac{\partial \tilde{G}_{\mu\nu}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{R}_{\mu\nu} + \lambda(\tilde{t})\tilde{G}_{\mu\nu} \quad , \quad (1.43)$$

onde a nova variável \tilde{t} e a função $\lambda(\tilde{t})$ estão dadas por,

$$\tilde{t} = \int dt f(t) \quad , \quad \lambda(\tilde{t}) = \frac{f'(t)}{f^2(t)} \quad . \quad (1.44)$$

Claramente o fluxo de Ricci normalizado (1.41) corresponde à escolha $\lambda(\tilde{t}) = \bar{R}/n$, e desta forma obtemos que $\partial V/\partial t = 0$.

Para o caso simples de um espaço “target” bi-dimensional, $n = 2$, a ação de Einstein-Hilbert corresponde ao número de Euler da variedade M (a menos um fator) :

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi} \int_M d^2 X \sqrt{\det G} R[G] \quad . \quad (1.45)$$

Desta forma encontramos que o volume tem uma dependência linear com o parâmetro do fluxo t :

$$V(t) = 2\pi(t_0 - t) \chi(M) \quad , \quad (1.46)$$

onde t_0 corresponde à escala do grupo renormalização para $V(t_0) = 0$. Isto é, as equações do grupo de renormalização dizem que a variedade M contrai-se para um tamanho zero em um “tempo” $t = t_0$ finito, aparecendo singularidades onde a curvatura é muito alta e por tanto a equação para essa ordem de perturbação não vale mais. Neste caso o fluxo está bem definido para $t \in (-\infty, t_0)$, o que é característico dos espaços compactos com $\chi(M) > 0$ como por exemplo a 2-esfera, onde $\chi(S^2) = 2$, que está relacionado com o modelo $O(3)$ também conhecido como modelo “Sausage”.

Para espaços compactos com $\chi(M) < 0$, como por exemplo as superfícies de Riemann com “genus” $g \geq 2$, tem sentido considerar o grupo de renormalização definido na região infravermelha $t \in (t', \infty)$. En quanto que para $\chi(M) = 0$, o volume não muda, obtendo assim uma teoria de campo bidimensional conforme com uma métrica que não flui.

É importante também saber se a topologia do “target” muda sob o fluxo do Ricci. No caso de duas dimensões $\partial\chi(M)/\partial t = 0$, pois o tensor de curvatura de Ricci está dado simplesmente por $R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}R/2$. Desta forma, temos duas quantidades conservadas sob o fluxo do grupo renormalização dadas por,

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = 0 \quad com \quad \begin{cases} I_1 = \chi(M) \\ I_2 = V(t) + 2\pi t I_1 \end{cases} \quad . \quad (1.47)$$

Podem existir muitas outras integrais de movimento que o autor não conhece no momento, mas que sem duvida são de uma importância relevante tanto no lado formal matemático, quanto na sua interpretação física.

1.6 Fluxo de Ricci em duas dimensões

Nesta seção vamos considerar a equação do fluxo de Ricci num espaço “target” bi-dimensional nas coordenadas conformemente planas. A métrica sempre pode-se

escrever localmente da seguinte forma :

$$ds_t = 2e^{\Phi(z_+, z_-, t)} dz_+ dz_- = \frac{1}{2} e^{\Phi(z_+, z_-, t)} \left((dX)^2 + (dY)^2 \right) \quad . \quad (1.48)$$

As componente não nulas do tensor de Ricci são

$$R_{+-} = -\partial_+(e^{-\Phi}\partial_-e^{\Phi}) \equiv -\nabla^2\Phi \quad . \quad (1.49)$$

As equações do grupo de renormalização simplificam-se à seguinte equação diferencial não linear para $\Phi(X, Y, t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{\Phi(X, Y, t)} = \nabla^2 \Phi(X, Y, t) \quad . \quad (1.50)$$

Esta equação pode-se interpretar como uma generalização não-linear da equação do calor no plano bi-dimensional,

$$\frac{\partial \Theta(X, Y, t)}{\partial t} = \nabla^2 \Theta(X, Y, t) \quad , \quad (1.51)$$

quando $\Phi(X, Y, t)$ é muito pequeno, isto é, quando a métrica do “target” é aproximadamente plana e suave,

$$G_{\mu\nu} \simeq \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad h_{\mu\nu} \ll 1 \quad \text{e} \quad \partial h_{\mu\nu} \ll 1 \quad . \quad (1.52)$$

Isto acontece normalmente para a região infravermelha (I.V.) do fluxo do grupo de renormalização, onde $\Theta(X, Y, t)$ é muito pequeno e suave,

$$\Phi(X, Y, t) \simeq \Theta(X, Y, t) \quad , \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty \quad . \quad (1.53)$$

Por tanto, sob condições apropriadas a equação do calor fornece uma linearização da equação do grupo de renormalização no limite I.V., onde pequenas flutuações ao redor da correspondente CFT estão bem definidas na aproximação de campo fraco. A solução fundamental da equação do calor numa dimensão espacial é um pulso Gaussiano com largura $\frac{1}{\sqrt{t}}$ e comprimento \sqrt{t} , em quanto em duas dimensões é dada explicitamente por,

$$\Theta(X, Y, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-(X^2+Y^2)/4t} \quad (1.54)$$

Esta começa com uma singularidade no tempo $t = 0$ e depois expande-se quando $t \rightarrow \infty$, diminuindo a sua largura. Essas são as propriedades dissipativas da equação de calor que resolve a singularidade no tempo, e podemos esperar um comportamento análogo para a equação não -linear do campo de Toda na aproximação de campo fraco. O exemplo mais simples que é um análogo da solução da equação do calor é o *cone bi-dimensional* \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n . Esta geometria é plana em todas partes a

menos um ponto, o vértice do cone, onde a curvatura tem uma singularidade tipo delta. Para este caso existe uma solução exata das equações do grupo de renormalização, as quais descrevem a queda da singularidade cônica inicial, expandindo-se sua curvatura no espaço.

Por outro lado, a equação (1.50) admite uma interpretação natural como uma *teoria de campo de Toda*, isto é,

$$\nabla^2 \Phi(X, Y, t) = \int dt' K(t, t') e^{\Phi(X, Y, t)} \quad , \quad (1.55)$$

onde $K(t, t')$ é o kernel antissimétrico

$$K(t, t') = \frac{\partial}{\partial t} \delta(t - t') \quad . \quad (1.56)$$

Este fato é bem importante e constitui a ideia principal de integrabilidade neste presente trabalho. As equações de Toda são um sistema integrável de equações diferenciais não lineares em duas dimensões. Na teoria de Toda usual considera-se uma coleção de campos não-lineares $\{\phi_i\}$, os quais são rotulados pelas raízes simples de uma álgebra de Lie dada e interagem através da matriz de Cartan da álgebra de Lie da seguinte forma,

$$\nabla^2 \phi_i(X, Y) = \sum_j K_{ij} e^{\phi_j(X, Y)} \quad . \quad (1.57)$$

Os índices i, j são discretos, mas existem generalizações para variáveis contínuas associadas a algumas álgebras de Lie de dimensão infinita, as quais podem ser obtidas substituindo a coleção de campos de Toda bi-dimensionais $\{\phi_i\}$ por um só campo “mestre” $\Phi(z_+, z_-, t)$, a matriz de Cartan K_{ij} por um kernel de Cartan $K(t, t')$, e as somas sobre j por uma integral sobre t' . Nesta descrição, a equação do grupo de renormalização (1.50) pode ser considerada como o caso limite de um sistema de Toda usual com matriz de Cartan

$$K_{ij} = \delta_{i+1, j} - \delta_{i, j+1} \quad . \quad (1.58)$$

Por tanto, a solução geral da equação do grupo de renormalização para o modelo sigma num espaço “target” bi-dimensional nas coordenadas conformemente planas pode-se escrever formalmente com a ajuda da interpretação da teoria dos sistemas de Toda. Em analogia à teoria usual de Toda, as configurações não lineares podem-se construir via **Transformações de Bäcklund**, usando famílias arbitrárias de campos livres em duas dimensões.

1.7 Transformações de Bäcklund

As transformações de Bäcklund apareceram originalmente no estudo das superfícies de curvatura constante negativa [14]. Elas são tipicamente um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem relacionando duas funções. Em outras palavras, dada um equação diferencial de ordem superior na variável $u(x, t)$,

$$\mathcal{P}(u(x, t)) = 0 \quad , \quad (1.59)$$

uma transformação de Bäcklund é uma transformação numa nova variável $v(x, t)$ definida por um par de equações de primeira ordem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(u(x, t), v(x, t)) \quad (1.60)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(u(x, t), v(x, t)) \quad , \quad (1.61)$$

onde f e g dependem de u, v e suas derivadas de tal modo que a equação de ordem superior apareça como uma condição de integrabilidade (*consistência*) das duas equações de primeira ordem.

Uma transformação de Bäcklund pode relacionar uma equação diferencial parcial não-linear com uma equação diferencial parcial linear mais simples, como no exemplo da *equação de Liouville*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = e^{u(x, t)} \quad . \quad (1.62)$$

Esta equação pode-se reescrever nas coordenadas do cone de luz $x^\pm = t \pm x$, da seguinte forma :

$$\partial_+ \partial_- u(x^+, x^-) = e^{u(x^+, x^-)} \quad . \quad (1.63)$$

Então para este exemplo podemos definir a correspondente transformação de Bäcklund para a variável $v(x^+, x^-)$ assim,

$$\partial_+ u = -\partial_+ v + \alpha e^{\frac{1}{2}(u-v)} \quad (1.64)$$

$$\partial_- u = +\partial_- v + \frac{2}{\alpha} e^{\frac{1}{2}(u+v)} \quad , \quad (1.65)$$

onde α é uma constante arbitrária. Então, tomando a derivada de (1.64) em relação a x^- obtemos

$$\begin{aligned} \partial_- \partial_+ u &= -\partial_- \partial_+ v + \frac{\alpha}{2} (\partial_- u - \partial_- v) e^{\frac{1}{2}(u-v)} \\ &= -\partial_- \partial_+ v + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2}{\alpha} e^{\frac{1}{2}(u+v)} \right) e^{\frac{1}{2}(u-v)} \\ &= -\partial_- \partial_+ v + e^u \quad , \end{aligned} \quad (1.66)$$

e de (1.65) em relação a x^+ ,

$$\begin{aligned}\partial_+\partial_-u &= \partial_+\partial_-v + \frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\partial_+u + \partial_+v\right)e^{\frac{1}{2}(u+v)} \\ &= \partial_+\partial_-v + \frac{1}{\alpha}\left(\alpha e^{\frac{1}{2}(u-v)}\right)e^{\frac{1}{2}(u+v)} \\ &= \partial_+\partial_-v + e^u \quad .\end{aligned}\tag{1.67}$$

De modo que a condição de integrabilidade das equações (1.66) e (1.67), dá as seguintes equações,

$$\partial_+\partial_-u = e^u \quad , \quad \text{Equação de Liouville}\tag{1.68}$$

$$\partial_+\partial_-v = 0 \quad , \quad \text{Equação da Onda}\tag{1.69}$$

Por tanto, a transformação neste caso liga as soluções da equação de Liouville com as soluções da equação da Onda. A solução geral da equação da onda é uma superposição de ondas movendo-se à esquerda e à direita,

$$v(x^+, x^-) = f^+(x^+) + f^-(x^-).\tag{1.70}$$

Substituindo na equação (1.64), obtemos :

$$\begin{aligned}\partial_+u &= -\partial_+(f^+ + f^-) + \alpha e^{\frac{1}{2}(u-f^+-f^-)} \\ \partial_+(u + f^+) &= \alpha e^{\frac{1}{2}(u-f^+-f^-)} \quad .\end{aligned}\tag{1.71}$$

Esta equação pode-se reescrever assim,

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f^+-f^-)} \partial_+(u + f^+ - f^-) = \alpha e^{-f^+(x^+)}\tag{1.72}$$

Agora, integrando na variável x^+ , obtemos,

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f^+-f^-)} = \alpha P(x^+) + a(x^-) \quad , \quad \text{onde} \quad P(x^+) = -\frac{1}{2} \int^{x^+} dy^+ e^{-f^+(y^+)}.\tag{1.73}$$

Analogamente, a partir da equação (1.65) obtemos,

$$e^{-\frac{1}{2}(u+f^+-f^-)} = \frac{2}{\alpha}Q(x^-) + b(x^+) \quad , \quad \text{com} \quad Q(x^-) = -\frac{1}{2} \int^{x^-} dy^- e^{f^-(y^-)}.\tag{1.74}$$

Igualando as expresões temos que,

$$a(x^-) = \frac{2}{\alpha}Q(x^-) \quad , \quad e \quad b(x^+) = \alpha P(x^+) \quad .\tag{1.75}$$

Finalmente, encontramos que a forma da solução da equação de Liouville que se obtem a partir das soluções da equação da onda é ,

$$u(x^+, x^-) = -f^+(x^+) + f^-(x^-) - 2 \log \left[\alpha P(x^+) + \frac{2}{\alpha}Q(x^-) \right] \quad .\tag{1.76}$$

No caso da equação do grupo de renormalização no espaço “target” bi-dimensional (1.50), podemos considerar o sistema de Bäcklund,

$$\partial_- \Psi = e^\Phi \quad (1.77)$$

$$\partial_+ \Phi = K(\Psi) = \int dt' K(t, t') \Psi(x^+, x^-, t) \quad . \quad (1.78)$$

Por tanto, tomando a derivada em relação a x^- na equação (3.45), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_- \partial_+ \Phi &= \int dt' K(t, t') \partial_- \Psi = \int dt' K(t, t') e^\Phi \\ \partial_- \partial_+ \Phi &= \frac{\partial}{\partial t} e^\Phi \quad , \end{aligned} \quad (1.79)$$

por tanto, a equação do fluxo do grupo de renormalização aparece como uma condição de integrabilidade para a transformação de Bäcklund (1.77) e (3.45), quando o kernel é $K(t, t') = \partial_t \delta(t - t')$.

Capítulo 2

Estruturas algébricas

O objetivo básico deste capítulo é revisar as propriedades mais importantes das teorias de campo de Toda e destacar a descrição sistemática de suas soluções em termos das configurações de campo livre em duas dimensões. Primeiro, iniciamos com uma abordagem as teorias de Toda associadas com as álgebras de Lie de dimensão finita com matriz de Cartan K_{ij} . Seguindo esta linha estende-se a discussão às álgebras de Lie de dimensão infinita com uma matriz de Cartan generalizada dada por um kernel $K(t, t')$ que depende de um parâmetro contínuo t no lugar do índice discreto de Dynkin i . Estas álgebras são chamadas de *álgebras de Lie contínuas*, e fornecem uma formulação sistemática do fluxo de Ricci (*e outros fluxos geométricos* [15]) como equações de Toda em duas dimensões. Aqui, vamos apresentar a definição formal das álgebras de Lie contínuas e os sistemas de Toda associados. Particularmente vamos nos concentrar na álgebra correspondente ao kernel de Cartan antissimétrico $K(t, t') = \delta'(t - t')$, que está relacionada com o fluxo do grupo de renormalização para o fator conforme de uma métrica bi-dimensional no sistema de coordenadas conformemente planas. Aqui, o logaritmo da escala de comprimento da folha mundo associado com o “tempo” do fluxo é interpretado com um parâmetro de Dynkin contínuo no sistema de raízes dessa álgebra infinita. Também, revisa-se o algoritmo geral para obter as soluções em termos de campos livres bi-dimensionais, usando técnicas de teoria de grupos para as transformações de Bäcklund.

2.1 Equações de Toda para álgebras de Lie simples

Primeiro vamos revisar alguns conceitos essenciais sobre as teorias de Toda associadas com as álgebra de Lie \mathcal{G} simples. Lembremos que uma álgebra de Lie diz-se **simples** se não é abeliana e não contém nenhuma subálgebra de Lie própria invariante (*ideal*). Então dada uma álgebra de Lie simples \mathcal{G} de rank n , e uma coleção de campos bi-dimensionais $\{\phi_i(z_+, z_-)\}$, $i = 1, \dots, n$, os quais acoplam-se via a ma-

triz de Cartan K_{ij} , a teoria de campo de Toda é descrita pelo seguinte sistema de equações diferenciáveis não-linear com interações exponenciais

$$\partial_+ \partial_- \phi_i(z_+, z_-) = \lambda^2 \sum_{j=1}^n K_{ji} e^{\phi_j(z_+, z_-)} \quad . \quad (2.1)$$

Este sistema é integrável, isto é, admite uma formulação de curvatura zero [16, 17, 18, 19]:

$$[\partial_+ + A_+(z_+, z_-), \partial_- + A_-(z_+, z_-)] = 0 \quad , \quad (2.2)$$

onde os A_{\pm} são formas de conexão de gauge com valores na álgebra \mathcal{G} ,

$$A_+ = \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\sum_{j=1}^n K_{ij}^{-1} \partial_+ \phi_j \right) H_i + \lambda X_i^+ \right\} \quad (2.3)$$

$$A_- = \lambda \sum_{i=1}^n e^{\phi_i} X_i^- \quad . \quad (2.4)$$

Os elementos $\{H_i, X_i^{\pm}\}$, $i = 1, \dots, n$, formam o sistema de geradores de Weyl de \mathcal{G} e satisfazem as seguintes relações ,

$$[H_i, H_j] = 0 \quad (2.5)$$

$$[H_i, X_j^{\pm}] = \pm K_{ij} X_j^{\pm} \quad (2.6)$$

$$[X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij} H_j \quad . \quad (2.7)$$

Se a “constante de acoplamento” $\lambda^2 \neq 0$, pode-se reescalar os campos ϕ_i por uma quantidade igual a $2 \log \lambda$, de modo que $\lambda = \pm 1$. Se $\lambda = 0$, as equações de Toda viram lineares,

$$\partial_+ \partial_- \phi_i(z_+, z_-) = 0 \quad . \quad (2.8)$$

A estrutura completa da álgebra \mathcal{G} não é descrita só pelo sistema de geradores de Weyl, mas eles podem gerar o resto de elementos. Todos os outros geradores podem ser obtidos tomando os comutadores sucessivos dos elementos básicos. H_i gera o subespaço \mathcal{G}_0 e os X_i^{\pm} geram os subespaços $\mathcal{G}_{\pm 1}$ respectivamente, ou seja, os geradores de Weyl geram a *parte local da álgebra* $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_{+1}$.

Como um exemplo simples podemos ver como obtem-se a equação de sinh-Gordon como condição de integrabilidade no formalismo de curvatura zero. Em este caso podemos escolher as seguintes formas de conexão,

$$\begin{cases} A_x &= (-\partial_x \varphi) H + E_{+\alpha} + \lambda E_{-\alpha} \\ A_t &= e^{-2\varphi} E_{-\alpha} + \frac{1}{\lambda} e^{2\varphi} E_{+\alpha} \end{cases} \quad , \quad (2.9)$$

onde H e $E_{\pm\alpha}$ são os geradores de Weyl da álgebra $sl(2)$,

$$\begin{aligned} [H, E_{\pm\alpha}] &= \pm 2E_{\pm\alpha} \\ [E_{+\alpha}, E_{-\alpha}] &= H \end{aligned} \quad . \quad (2.10)$$

Da condição de curvatura zero fáclmente encontramos a equação de sinh-Gordon,

$$\partial_t \partial_x \varphi + e^{-2\varphi} - e^{2\varphi} = 0 \quad . \quad (2.11)$$

A invariância de gauge da equação de curvatura zero permite a existência de diferentes escolhas para as conexões. Este exemplo mostra também a forte relação entre as estruturas algébricas e as equações associadas a alguns sistemas integráveis.

Agora, para descrever a solução geral das equações de Toda introduzimos a representação de peso mais alto da álgebra de Lie, baseada no estado $|j\rangle$ de peso mais alto, de modo que,

$$H_i |j\rangle = \delta_{ij} |j\rangle \quad , \quad \langle j | X_i^- = 0 \quad (2.12)$$

$$X_i^+ |j\rangle = 0 \quad , \quad (2.13)$$

onde $\langle j | j \rangle = 1$. As equações de Toda admitem transformações de Bäcklund que relacionam a configuração geral com campos livres bi-dimensionais. Um jeito simples de descrever a realização de campo livre dos $\phi_i(z_+, z_-)$, precisa da introdução de duas matrizes que satisfazem as equações de primeira ordem,

$$\partial_{\pm} M_{\pm}(z_{\pm}) = M_{\pm} \left(\lambda \sum_{i=1}^n e^{f_i^{\pm}(z_{\pm})} X_i^{\pm} \right) \quad . \quad (2.14)$$

Aqui os $f_i^{\pm}(z_{\pm})$ são funções holomorfas e anti-holomorfas tal que os campos

$$\phi_i^{(0)}(z_+, z_-) = f_i^+(z_+) + f_i^-(z_-) \quad (2.15)$$

satisfazem a equação de campo livre bi-dimensional

$$\partial_+ \partial_- \phi_i^{(0)} = 0 \quad , \quad \forall i \quad . \quad (2.16)$$

As matrizes $M_{\pm}(z_{\pm})$ podem ser obtidas integrando as equações (2.14), tomando em conta a ordem nas integrais, pois os geradores X_i^{\pm} não comutam, isto é,

$$M_{\pm}(z_{\pm}) = \mathcal{P} \exp \left(\lambda \int^{z_{\pm}} dz'_{\pm} \sum_{i=1}^n e^{f_i^{\pm}(z'_{\pm})} X_i^{\pm} \right) \quad . \quad (2.17)$$

Aqui usamos a ordem nas exponenciais de acordo a

$$\mathcal{P} \exp \left(\int^z dz' A(z') \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \int^{z_1} dz_1 \int^{z_2} dz_2 \dots \int^{z_{m-1}} dz_m A(z_m) \dots A(z_2) A(z_1) \quad , \quad (2.18)$$

com $z_m \leq \dots \leq z_2 \leq z_1 < z$. Já que $\partial M = MA$, temos que $\partial M^{-1} = -AM^{-1}$, então para todo M e A a inversa de (2.18) é definida tomando a ordem oposta nas integrais e trocando A por $-A$.

De acordo com a literatura [17, 18, 19], a solução geral das equações de Toda está dada pela formula

$$\phi_i(z_+, z_-) = \phi_i^{(0)}(z_+, z_-) - \sum_{j=1}^n K_{ji} \log \langle j | M_+^{-1}(z_+) M_-(z_-) | j \rangle \quad , \quad (2.19)$$

a qual é uma forma bem compacta dada em termos das configurações de campo livre. Esta parametrização permite escrever os campos não-lineares de Toda como uma expansão em serie de potência no parâmetro λ . Os termos podem ser calculados expandindo as exponenciais e expressando os valores esperados $\langle j | M_+^{-1}(z_+) M_-(z_-) | j \rangle$ como uma superposição de elementos de matriz da álgebra de Lie,

$$D_j^{\{i_1, i_2, \dots, i_m; i'_1, i'_2, \dots, i'_m\}} = \langle j | X_{i_1}^+ X_{i_2}^+ \dots X_{i_m}^+ X_{i'_m}^- \dots X_{i'_2}^- X_{i'_1}^- | j \rangle \quad . \quad (2.20)$$

Os coeficientes dependem dos campos $f_i^{\pm}(z_{\pm})$. Após calcularmos esses elementos de matriz encontraremos polinomios dos elementos da matriz K_{ij} . O termo mais simples é

$$\begin{aligned} D_j^{\{i, i'\}} &= \langle j | X_i^+ X_{i'}^- | j \rangle = \langle j | ([X_i^+, X_{i'}^-] + X_{i'}^- X_i^+) | j \rangle \\ &= \delta_{ii'} \langle j | H_{i'} | j \rangle = \delta_{ii'} \delta_{i'j} \quad . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Os termos crossados $D_j^{\{i_1, i_2, \dots, i_m; i'_1, i'_2, \dots, i'_m\}}$ com $m \neq m'$ são nulos. Por exemplo :

$$\begin{aligned} D_j^{\{i; i'_1, i'_2\}} &= \langle j | X_i^+ X_{i'_1}^- X_{i'_2}^- | j \rangle = \langle j | ([X_i^+, X_{i'_1}^-] + X_{i'_1}^- X_i^+) X_{i'_2}^- | j \rangle \\ &= \delta_{ii'_1} \langle j | H_{i'_1} X_{i'_2}^- | j \rangle = \delta_{ii'_1} \langle j | ([H_{i'_1}, X_{i'_2}^-] + X_{i'_2}^- H_{i'_1}) | j \rangle \\ &= -\delta_{ii'_1} K_{i'_1 i'_2} \langle j | X_{i'_2}^- | j \rangle \\ &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Por tanto, *todos os termos da expansão podem ser determinados pela álgebra de Lie \mathcal{G} e sua representação de peso mais alto, usando os campos livres.*

Os campos de Toda então podem ser expandidos como uma serie de potência

$$\phi_i(z_+, z_-) = \phi_i^{(0)}(z_+, z_-) + \lambda^2 \phi_i^{(1)}(z_+, z_-) + \lambda^4 \phi_i^{(2)}(z_+, z_-) + \dots \quad , \quad (2.23)$$

embora não seja uma teoria de perturbação, pois o parâmetro λ^2 não é pequeno necessariamente. Por tanto, devem-se calcular todos os termos da expansão. Esse problema é um algoritmo complicado e por tal razão é útil a integrabilidade das equações de Toda.

2.2 Álgebras de Lie Contínuas

A noção das álgebras de Lie contínuas aparece naturalmente considerando um sistema de geradores de Weyl $\{H(t), X_{\pm 1}(t)\}$, que dependam de uma variável contínua t em vez de um índice de Dynkin discreto, e de modo que as relações de comutação da parte local da álgebra assumam a seguinte forma

$$\begin{aligned} [H(t), H(t')] &= 0 \\ [X_{+1}(t), X_{-1}(t')] &= \delta(t - t') H(t') \\ [H(t), X_{\pm 1}(t')] &= \pm K(t, t') X_{\pm 1}(t') \end{aligned} \quad (2.24)$$

Aqui, $K(t, t')$ é o análogo contínuo da matriz de Cartan, e pode ser até uma distribuição. As álgebras resultantes são de dimensão infinita e pode-se definir a sua representação de peso mais alto introduzindo um estado normalizado $|t\rangle$ [20], de modo que

$$X_{+1}(t')|t\rangle = 0, \quad \langle t|X_{-1}(t') = 0, \quad H(t')|t\rangle = \delta(t - t')|t\rangle, \quad (2.25)$$

com $\langle t|t\rangle = 1$. Em geral, a teoria das álgebras de Lie contínuas envolve a teoria de distribuições com valores na álgebra de Lie, e por tanto é mais natural definir a álgebra de modo que os geradores de Weyl atuem num espaço de funções arbitrárias, isto é, $\{H(\varphi), X_{\pm 1}(\varphi)\}$. Por esta razão, é conveniente dar a definição formal das álgebras de Lie, devida ao Mikhail Saveliev, et. al. [1, 2, 3], para que a idéia fique um pouco mais clara.

2.2.1 Fundamentos Axiomáticos

Seja E um espaço vetorial sobre o campo \mathbb{F} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), e $K, S : E \times E \rightarrow E$ duas aplicações bilineares. Definimos a *álgebra de Lie local* $\hat{\mathcal{G}} \equiv \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_{+1}$, onde cada \mathcal{G}_i , $i = 0, \pm 1$, é isomorfo (como espaço vetorial) a E . Isto é, os elementos de \mathcal{G}_i são parametrizados pelos vetores $\varphi \in E$ de modo que $\mathcal{G}_i = \{X_i(\varphi), \varphi \in E, i = 0, \pm 1\}$. Além disso existem as relações

$$\begin{aligned} [X_0(\varphi), X_0(\psi)] &= 0 \\ [X_0(\varphi), X_{\pm 1}(\psi)] &= \pm X_{\pm 1}(K(\varphi, \psi)) \\ [X_{+1}(\varphi), X_{-1}(\psi)] &= X_0(S(\varphi, \psi)), \quad \text{para todo } \varphi, \psi \in E \end{aligned} \quad (2.26)$$

A identidade de Jacobi para \mathcal{G} é equivalente à condição

$$\begin{cases} K(\varphi, K(\psi, \chi)) = K(\psi, K(\varphi, \chi)) \\ S(\varphi, K(\psi, \chi)) = S(K(\psi, \varphi), \chi) \end{cases} .$$

Definição 2.2.1 *Seja $\mathcal{G}'(E, K, S)$ uma álgebra de Lie livremente gerada pela parte local $\hat{\mathcal{G}}$ e J seja o maior ideal homogêneo (ideal maximal) tendo intersecção trivial com \mathcal{G}_0 , isto é $J \cap \mathcal{G}_0 = \{0\}$. Então, $\mathcal{G}(E, K, S) = \mathcal{G}'(E, K, S)/J$ é chamada **álgebra de Lie contínua** com parte local $\hat{\mathcal{G}}$ e as relações de comutação (2.26).*

Por motivos de aplicação podemos considerar E sendo uma álgebra comutativa e associativa sobre o campo \mathbb{F} e as aplicações K e S na seguinte forma linear,

$$K(\varphi, \psi) = K\varphi \cdot \psi, \quad S(\varphi, \psi) = S(\varphi \cdot \psi) \quad , \quad (2.27)$$

onde $K, S : E \rightarrow E$. Por tanto as relações (2.26) tomam a seguinte forma,

$$\begin{aligned} [X_0(\varphi), X_0(\psi)] &= 0 \\ [X_0(\varphi), X_{\pm 1}(\psi)] &= \pm X_{\pm 1}(K\varphi \cdot \psi) \\ [X_{+1}(\varphi), X_{-1}(\psi)] &= X_0(S(\varphi \cdot \psi)) \end{aligned} \quad . \quad (2.28)$$

O caso com $S = \mathbb{I}$ é especialmente importante e comumente chamado de *forma padrão*, e ao operador K chamase neste caso de *operador de Cartan*. Então, supondo que o S seja inversível, a substituição $X_0(S\varphi) \rightarrow X_0(\varphi)$ reduz as relações (2.28) à forma padrão,

$$\begin{aligned} [X_0(\varphi), X_0(\psi)] &= 0 \\ [X_0(\varphi), X_{\pm 1}(\psi)] &= \pm X_{\pm 1}(\tilde{K}\varphi \cdot \psi) \\ [X_{+1}(\varphi), X_{-1}(\psi)] &= X_0(\varphi \cdot \psi) \end{aligned} \quad , \quad (2.29)$$

com o operador de Cartan $\tilde{K} \equiv KS$.

Pode-se observar que as relações (2.29) são equivalentes às relações (2.24) simplesmente definindo a ação de um operador arbitrário A sobre o espaço de funções por,

$$A(\varphi) = \int dt \varphi(t)A(t) \quad , \quad (2.30)$$

e identificando naturalmente os elementos $X_0 \in \mathcal{G}_0$ com os geradores de Weyl $H(t)$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} [X_{+1}(\varphi), X_{-1}(\psi)] &= \int dt \int dt' \varphi(t)\psi(t') [X_{+1}(t), X_{-1}(t')] \\ &= \int dt \int dt' \varphi(t)\psi(t') \delta(t-t') H(t) \\ &= \int dt \varphi(t)\psi(t) H(t) \\ &= H(\varphi \cdot \psi) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

As álgebras de Lie contínuas são denotadas normalmente por $\mathcal{G}(K, S)$, e são \mathbb{Z} -graduadas, no sentido que

$$\mathcal{G}(K, S) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_n \quad , \quad (2.31)$$

onde a parte local corresponde a $n = 0$ e ± 1 . Os outros elementos da álgebra são construídos tomando comutadores sucessivos, de modo que

$$\mathcal{G}_n = \begin{cases} [\mathcal{G}_{n-1}, \mathcal{G}_{+1}] & , \quad \forall \quad n > 0 \\ [\mathcal{G}_{n+1}, \mathcal{G}_{-1}] & , \quad \forall \quad n < 0 \end{cases} .$$

Finalmente, um conceito importante é a dimensão dos subespaços \mathcal{G}_n em relação à subálgebra de Cartan \mathcal{G}_0 , $d_n = \dim_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_n$. Por definição, nosso caso corresponde a $d_0 = d_{\pm 1} = 1$. Quando $d_n = 1$ para todo n , a álgebra de Lie é chamada de *crescimento constante*.

2.2.2 Exemplos Principais

I. Caso Discreto

Este caso corresponde à álgebra de dimensão finita $E = \mathbb{C}^n$ com a multiplicação de coordenadas padrão. Aqui o operador de Cartan coincide a matriz de Cartan $n \times n$, e $S = \mathbb{I}$. A álgebra de Lie local $\hat{\mathcal{G}}$ tem $3n$ elementos : os geradores h_i da subálgebra de Cartan e os geradores de Chevalley $X_{\pm i}$, $1 \leq i \leq n$, com as relações

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0 & , \\ [h_i, X_{\pm j}] &= \pm K_{ji} X_{\pm j} & , \\ [X_{+i}, X_{-j}] &= \delta_{ij} h_i & . \end{aligned} \quad (2.32)$$

A condição da álgebra quociente $\mathcal{G}(E, K, S) = \mathcal{G}'(E, K, S)/J$ na definição (2.2.1) é equivalente a impormos as condições de Serre $(ad X_{\pm i})^{1-K_{ji}} X_{\pm j} = 0$, com $i \neq j$ [3].

II. Álgebras Corrente

Seja M uma variedade, E o espaço de funções C^∞ sobre M , e $K = 2\mathbb{I}$, $S = \mathbb{I}$. Então a álgebra $\mathcal{G}(E, K, S)$ corresponde à álgebra corrente $sl(2, C^\infty(M))$, e está dada pelas relações,

$$\begin{aligned} [H(\varphi), H(\psi)] &= 0 & , \\ [H(\varphi), X_{\pm 1}(\psi)] &= \pm 2 X_{\pm 1}(\varphi \cdot \psi) & , \\ [X_{+1}(\varphi), X_{-1}(\psi)] &= H(\varphi \cdot \psi) & . \end{aligned} \tag{2.33}$$

Se E é o espaço das funções vetoriais sobre M e escolhemos $\mathbb{I} \times k$ como operador de Cartan, sendo k a matriz de Cartan de uma álgebra simples \mathcal{G} , então a álgebra corrente que obtemos toma valores em \mathcal{G} , isto é, $\mathcal{G}(E, K, S) = C^\infty(M, \mathcal{G})$.

III. Kernel tipo- δ'' e as álgebras dos Brackets de Poisson

Este importante exemplo corresponde à escolha $K(t, t') = -\delta''(t - t')$, e $S(t, t') = \delta(t - t')$, que pode ser pensado como o limite contínuo mais simples da serie A_N , isto é, o operador de Cartan corresponde ao limite N grande da matriz de Cartan da álgebra de Lie simples $sl(N)$, com $k_{ij} = 2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}$. Por tanto o diagrama de Dynkin de $sl(\infty)$ é uma linha contínua parametrizada por t . Vamos ver que esta álgebra é isoforma à álgebra de difeomorfismos que preservam área de um Touro bidimensional T^2 , com o seguinte teorema :

Teorema 2.2.2 *A álgebra contínua $\mathcal{G}(E, K, S)$ com $K = -i \frac{d}{dt}$ e $S = -i \frac{d}{dt}$ é isoforma à álgebra das funções sobre T^2 com o bracket de Poisson*

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \quad . \tag{2.34}$$

Demostração. Neste caso as relações (2.28) tomam a seguinte forma

$$\begin{aligned} [X_0(\varphi), X_0(\psi)] &= 0 \\ [X_0(\varphi), X_{\pm 1}(\psi)] &= \mp i X_{\pm 1}(\varphi' \cdot \psi) \\ [X_{+1}(\varphi), X_{-1}(\psi)] &= -i X_0((\varphi \cdot \psi)') \quad , \end{aligned}$$

onde $\varphi' = d\varphi/dt$. Então $\mathcal{G}_n \simeq E$ e temos

$$[X_n(\varphi), X_m(\psi)] = i X_{n+m}(m \varphi' \cdot \psi - n \psi' \cdot \varphi) \quad . \tag{2.35}$$

Associando as funções $\varphi_n(t)e^{ins}$ sobre T^2 aos elementos $X_n(\varphi) \in \mathcal{G}$, observamos que as relações para os brackets de Poisson tomam a seguinte forma

$$\{\varphi_n(t)e^{ins}, \psi_m(t)e^{ims}\} = i (m \varphi'_n \cdot \psi_m - n \varphi_n \cdot \psi'_m) e^{i(m+n)s} \quad , \tag{2.36}$$

e isto corresponde à álgebra $\mathcal{G}(E, -i d/dt, -i d/dt) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_n$. ■

A noção das raízes para estas álgebras depende dos operadores K e S . Por exemplo para $K = S = -i d/dt$, as raízes são $n \delta'(t - t')$, em quanto que na forma padrão, para a álgebra com $K = -d^2/dt^2$ e $S = \mathbb{I}$, se tem as raízes $n \delta''(t - t')$. Esta álgebra esta relacionada com alguns sistemas integráveis especiais [21].

IV. Kernel tipo- δ' (Caso não simetrizável)

Seja $K = d/dt$, $S = \mathbb{I}$. Aqui o kernel do operador de Cartan é $\delta'(t - t')$ e não é simetrizável. Esta álgebra tem crescimento lento mas não constante. O operador de Cartan é o limite contínuo da superálgebra $sl(n|n + 1)$.

Proposição 2.2.3 *As dimensões dos subespaços \mathcal{G}_m da álgebra graduada $\mathcal{G}(E, d/dt, \mathbb{I})$ são $d_m = \dim_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_m = 2^{|m|-2}$, onde $d_{0,\pm 1} = 1$ por definição.*

A demonstração desta proposição está baseada na construção explícita de uma base para esta álgebra usando as identidades de Jacobi [3].

V. Campo Vetorial sobre uma Variedade

Seja $V \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial sobre a variedade M , $E = C^\infty(M)$ a álgebra de funções suaves sobre M e $K = S = V$ nas relações (2.28), isto é

$$K, S : \varphi(t) \longrightarrow V(\varphi(t)) \quad , \quad \text{com} \quad \varphi \in E \quad , \quad (2.37)$$

Então a álgebra contínua \mathbb{Z} -graduada está dada pelas relações

$$[X_n(\varphi), X_m(\psi)] = X_{n+m}(m \varphi V \psi - n \psi V \varphi) \quad . \quad (2.38)$$

Esta álgebra é equivalente à álgebra de funções sobre o produto $S^1 \times M$ com os brackets

$$\{\varphi, \psi\} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot V \psi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot V \varphi \quad . \quad (2.39)$$

VI. Álgebras Loop Contínuas

Como um último exemplo vamos considerar o análogo contínuo da álgebra affine a 2-loop introduzida no passado por H. Aratyn, et. al. [22],

$$\begin{aligned} [H^m(t), H^n(t')] &= \bar{k}_1 \delta(t - t') m \delta_{m+n,0} + \bar{k}_2 \delta'(t - t') \delta_{m+n,0} \\ [X_{+1}^m(t), X_{-1}^n(t')] &= \delta(t - t') H^{m+n}(t') + k_1 \delta(t - t') m \delta_{m+n,0} + k_2 \delta'(t - t') \delta_{m+n,0} \\ [H^m(t), X_{\pm 1}^n(t')] &= \pm K(t, t') X_{\pm 1}^{m+n}(t') \quad . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Agora, definindo os geradores $\{H^m(\phi), X_{\pm}^m(\phi)\}$ em relação a funções arbitrárias $\phi(t)$, via o isomorfismo usual (2.30), vamos encontrar qual é a forma que assumem as relações de comutação da parte local da álgebra. Então obtemos o seguinte,

$$\begin{aligned}
 \bullet [H^m(\phi), H^n(\psi)] &= \int dt dt' \phi(t) \psi(t') [H^m(t), H^n(t')] \\
 &= \int dt dt' \phi(t) \psi(t') \left[\bar{k}_1 \delta(t-t') m \delta_{m+n,0} + \bar{k}_2 \delta'(t-t') \delta_{m+n,0} \right] \\
 &= m \bar{k}_1 \left(\int dt dt' \phi(t) \psi(t') \delta(t-t') \right) \delta_{m+n,0} + \dots \\
 &\quad \dots + \bar{k}_2 \left(\int dt dt' \phi(t) \psi(t') \partial_t \delta(t-t') \right) \delta_{m+n,0} \\
 &= m \bar{k}_1 S(\phi \cdot \psi) \delta_{m+n,0} - \bar{k}_2 \left(\int dt dt' (\partial_t \phi(t)) \psi(t') \delta(t-t') \right) \delta_{m+n,0} \\
 &= m \bar{k}_1 S(\phi \cdot \psi) \delta_{m+n,0} - \bar{k}_2 S(\phi' \cdot \psi) \delta_{m+n,0} \\
 &= S(m \bar{k}_1 (\phi \cdot \psi) - \bar{k}_2 (\phi' \cdot \psi)) \delta_{m+n,0} \quad . \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet [X_{+1}^m(\phi), X_{-1}^n(\psi)] &= \int dt dt' \phi(t) \psi(t') [X_{+1}^m(t), X_{-1}^n(t')] \\
 &= \int dt dt' \phi(t) \psi(t') \left\{ \delta(t-t') H^{m+n}(t') + k_1 \delta(t-t') m \delta_{m+n,0} \right. \\
 &\quad \left. \dots + k_2 \delta'(t-t') \delta_{m+n,0} \right\} \\
 &= H^{m+n}(\phi \cdot \psi) + m k_1 \delta_{m+n,0} \int dt dt' \phi(t) \psi(t') \delta(t-t') + \dots \\
 &\quad \dots + k_2 \delta_{m+n,0} \int dt dt' \phi(t) \psi(t') \partial_t \delta(t-t') \\
 &= H^{m+n}(\phi \cdot \psi) + m k_1 \delta_{m+n,0} S(\phi \cdot \psi) - k_2 \delta_{m+n,0} S(\phi' \cdot \psi) \\
 &= H^{m+n}(\phi \cdot \psi) + S((m k_1 \phi - k_2 \phi') \cdot \psi) \delta_{m+n,0} \quad . \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet [H^m(\phi), X_{\pm 1}^n(\psi)] &= \int dt dt' \phi(t) \psi(t') [H^m(t), X_{\pm 1}^n(t')] \\
 &= \pm \int dt dt' \phi(t) \psi(t') K(t, t') X_{\pm 1}^{m+n}(t') \\
 &= \pm X_{\pm 1}^{m+n}(K(\phi, \psi)) \quad . \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

Aqui temos denotado $S(\phi \cdot \psi) = \phi \cdot \psi$. Por tanto a álgebra fica da seguinte forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} [H^m(\phi), H^n(\psi)] = S((m \bar{k}_1 - \bar{k}_2 \phi') \cdot \psi) \delta_{m+n,0} \\ [H^m(\phi), X_{\pm 1}^n(\psi)] = \pm X_{\pm 1}^{m+n}(K(\phi, \psi)) \\ [X_{+1}^m(\phi), X_{-1}^n(\psi)] = H^{m+n}(\phi \cdot \psi) + S((m k_1 \phi - k_2 \phi') \cdot \psi) \delta_{m+n,0} \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Agora vamos usar a identidade de Jacobi e a forma da álgebra encontrada (2.44) para determinar as relações entre os coeficientes k_1 , k_2 , \bar{k}_1 e \bar{k}_2 ,

$$\underbrace{\left[H^m(\phi), [X_{+1}^n(\psi), X_{-1}^p(\lambda)] \right]}_{(1)} + \underbrace{\left[X_{+1}^n(\psi), [X_{-1}^p(\lambda), H^m(\phi)] \right]}_{(2)} + \dots \\ \dots + \underbrace{\left[X_{-1}^p(\lambda), [H^m(\phi), X_{+1}^n(\psi)] \right]}_{(3)} = 0 \quad . \quad (2.45)$$

Vamos calcular primeiro o termo (1),

$$\begin{aligned} (1) &= \left[H^m(\phi), [X_{+1}^n(\psi), X_{-1}^p(\lambda)] \right] \\ &= \left[H^m(\phi), H^{n+p}(\psi \cdot \lambda) + S((n k_1 \psi - k_2 \psi') \cdot \lambda) \delta_{n+p,0} \right] \\ &= S\left((m \bar{k}_1 \phi - \bar{k}_2 \phi') \cdot (\psi \cdot \lambda) \right) \delta_{m+n+p,0} \quad . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Para o termo (2) obtemos,

$$\begin{aligned} (2) &= \left[X_{+1}^n(\psi), [X_{-1}^p(\lambda), H^m(\phi)] \right] = \left[X_{+1}^n(\psi), X_{-1}^{m+p}(K(\phi, \lambda)) \right] \\ &= H^{n+m+p}(\psi \cdot K(\phi, \lambda)) + S\left((n k_1 \psi - k_2 \psi') \cdot (K(\phi, \lambda)) \right) \delta_{m+n+p,0} \quad . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Para o último termo (3) temos o seguinte,

$$\begin{aligned} (3) &= \left[X_{-1}^p(\lambda), [H^m(\phi), X_{+1}^n(\psi)] \right] = \left[X_{-1}^p(\lambda), X_{+1}^{m+n}(K(\phi, \psi)) \right] \\ &= -H^{m+n+p}(K(\phi, \psi) \cdot \lambda) - S\left((m+n) k_1 K(\phi, \psi) - k_2 (K(\phi, \psi))' \cdot \lambda \right) \delta_{m+n+p,0} \quad . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Então somando estes resultados e tendo em conta que $\psi \cdot K(\phi, \lambda) = K(\phi, \psi) \cdot \lambda$, no final vamos encontrar as seguintes duas relações,

$$\bar{k}_1 \delta(t-t') = k_1 K(t, t') \quad (2.49)$$

$$\bar{k}_2 \partial_t \delta(t-t') = -k_2 \partial_{t'} K(t, t') \quad . \quad (2.50)$$

Com estes resultados as relações de comutação com os termos centrais assumem a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \left[H^m(t), H^n(t') \right] &= k_1 K(t, t') m \delta_{m+n,0} - k_2 \partial_{t'} K(t, t') \delta_{m+n,0} \\ \left[H^m(t), X_{\pm 1}^n(t') \right] &= \pm K(t, t') X_{\pm 1}^{m+n}(t') \\ \left[X_{+1}^m(t), X_{-1}^n(t') \right] &= \delta(t-t') H^{m+n}(t') + m k_1 \delta(t-t') \delta_{m+n,0} + k_2 \partial_t \delta(t-t') \delta_{m+n,0} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Para k_1 e k_2 iguais a zero esta álgebra corresponde a uma *álgebra de loop contínua*, enquanto que para k_1 e k_2 diferentes de zero esta álgebra corresponde a uma álgebra contínua de 2 loops. Os coeficientes k_1 e k_2 discutidos tendo um pouco mais de conhecimento da estrutura desta álgebra, o qual ainda não tem sido feito e pode ser interessante de fazer nos trabalhos futuros.

2.2.3 Sistemas de Toda Associados

Para generalizar naturalmente a teoria de campo de Toda para álgebras de Lie contínuas, introduzimos um campo “mestre” $\Phi(z_+, z_-, t)$ no lugar da coleção discreta de campos bidimensionais de Toda $\phi_i(z_+, z_-)$. Então o análogo contínuo das equações de Toda está dado por [23, 24]

$$\partial_+ \partial_- \Phi(z_+, z_-, t) = \lambda^2 \int dt' K(t, t') e^{\Phi(z_+, z_-, t)} \quad , \quad (2.52)$$

a qual descreve um sistema integrável em dimensões superiores embora não relativística. Em analogia ao caso das álgebras de dimensão finita, esta equação segue da condição de curvatura zero,

$$[\partial_+ + A_+(z_+, z_-), \partial_- + A_-(z_+, z_-)] = 0 \quad , \quad (2.53)$$

onde as conexões de gauge A_\pm tomam valores na parte local $\mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_{+1}$. Vamos considerar o seguinte ansatz para as conexões de gauge

$$A_\pm(z_+, z_-) = H(u_\pm) + \lambda X_{\pm 1}(f_\pm) \quad , \quad (2.54)$$

que depende das funções u_\pm e f_\pm . Algumas dessas funções podem ser eliminadas usando a invariança de gauge da condição de curvatura zero sob as transformações

$$A_+ \rightarrow g^{-1}(\partial_+ + A_+)g \quad , \quad A_- \rightarrow g^{-1}(\partial_- + A_-)g \quad , \quad (2.55)$$

com elementos de grupo arbitrários $g = e^{H(\varphi)}$. Então sempre é possível escolher o gauge

$$A_+(z_+, z_-) = H(\Psi) + \lambda X_{+1}(1) \quad , \quad A_- = \lambda X_{-1}(e^\Phi) \quad . \quad (2.56)$$

Usando as relações de comutação da álgebra $\mathcal{G}(K, S)$, obtemos o seguinte sistema de equações da condição de curvatura zero,

$$\partial_- \Psi = \lambda^2 S(1, e^\Phi) \quad , \quad \partial_+ e^\Phi = K(\Psi, e^\Phi) \quad . \quad (2.57)$$

Então, podemos eliminar a variável Ψ e usar a forma padrão, $\tilde{K} = KS$, para encontrar a equação de campo de Toda contínua,

$$\partial_+ \partial_- \Phi = \lambda^2 \tilde{K}(e^\Phi) \quad . \quad (2.58)$$

Escolhendo diferentes kernels de Cartan $K(t, t')$ encontraremos uma serie de equações integráveis, tomando $S(t, t') = \delta(t - t')$ em todos os casos :

- **Equação de Liouville :** $K(t, t') = 2\delta(t - t')$.

$$\partial_+ \partial_- \Phi(z_+, z_-, t) = 2\lambda^2 e^{\Phi(z_+, z_-, t)} \quad . \quad (2.59)$$

Esta equação está associada com a álgebra corrente $sl(2)$. Geometricamente, esta equação fornece a condição de deformação das métricas bi-dimensionais de curvatura constante no gauge conforme,

$$ds^2 = e^{\Phi(z_+, z_-)} dz_+ dz_- \quad . \quad (2.60)$$

O caso $\lambda^2 = -1$ corresponde aos espaços de curvatura positiva e $\lambda^2 = +1$ aos espaços de curvatura negativa.

- **Equação do fluxo do grupo de renormalização :** $K(t, t') = \delta'(t - t')$.

$$\partial_+ \partial_- \Phi(z_+, z_-, t) = -\lambda^2 \frac{\partial}{\partial t} e^{\Phi(z_+, z_-)} \quad . \quad (2.61)$$

Esta equação descreve a deformação geométrica das métricas bi-dimensionais sob o fluxo do grupo de renormalização no gauge conforme para $\lambda^2 = -1$. Varios exemplos de deformações geométricas associadas a esta equação serão dados no capítulo 3.

- **Equação Celestial :** $K(t, t') = -\delta''(t - t')$.

$$\partial_+ \partial_- \Phi(z_+, z_-, t) = -\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{\Phi(z_+, z_-, t)} \quad . \quad (2.62)$$

Esta equação está associada com a álgebra $sl(\infty)$, e para $\lambda^2 = 1$ aparece como uma condição de hyper-Kähler para as métricas 4-dimensionais com isometria rotacional gerada por um campo vetorial ∂_τ , usando o sistema de coordenadas [25, 26, 21, 27],

$$ds^2 = \frac{1}{\partial_t \Phi} (d\tau \pm i(\partial_+ \Phi) dz_+ \mp i(\partial_- \Phi) dz_-)^2 + (\partial_t \Phi)(e^\Phi dz_+ dz_- + dt^2) \quad . \quad (2.63)$$

2.2.4 Solução Formal de Leznov-Saveliev

Em analogia com a teoria usual de Toda, a solução geral é construída introduzindo um estado de peso mais alto normalizado $|t\rangle$ que dependa da variável contínua t ,

$$X_{+1}(t')|t\rangle = 0, \quad \langle t|X_{-1}(t') = 0, \quad H(t')|t\rangle = \delta(t-t')|t\rangle, \quad (2.64)$$

com $\langle t|t\rangle = 1$. Então, a família uniparamétrica de campos livres bi-dimensionais

$$\Phi_0(z_+, z_-, t) = f_+(z_+, t) + f_-(z_-, t), \quad (2.65)$$

que satisfazem a equação $\partial_+ \partial_- \Phi_0 = 0$, é usada para exprimir as soluções de campo de Toda [1],

$$\Phi(z_+, z_-, t) = \Phi_0(z_+, z_-, t) - \int dt' K(t, t') \log \langle t'|M_+^{-1}(z_+)M_-(z_-)|t'\rangle, \quad (2.66)$$

onde M_\pm estão dados por exponenciais ordenadas (*de acordo com* (2.18)) dos elementos da álgebra de Lie em $\mathcal{G}_{\pm 1}$ respectivamente,

$$M_\pm(z_\pm, t) = \mathcal{P} \exp \left(\lambda \int^{z_\pm} dz'_\pm \int dt' e^{f_\pm(z'_\pm, t')} X_{\pm 1}(t') \right). \quad (2.67)$$

Esta formula resume as transformações de Bäcklund dos sistema de Toda contínuos, e fornece uma realização de campo livre da sua solução geral. Os M_\pm podem ser expandidos em serie de potência e pode-se calcular o valor esperado do seu produto no estado de peso mais alto (*pelo menos formalmente*), como

$$\begin{aligned} \langle t|M_+^{-1}M_-|t\rangle &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \int^{z_+} dz_1^+ \dots \int^{z_{m-1}^+} dz_m^+ \int^{z_-} dz_1^- \dots \int^{z_{m-1}^-} dz_m^- \times \int \prod_{i=1}^m dt_i \\ &\times \int \prod_{i=1}^m dt'_i e^{f_+(z_i^+, t'_i)} e^{f_-(z_i^-, t'_i)} D_t^{\{t_1, \dots, t_m; t'_1, \dots, t'_m\}}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

com a ordem $z_\pm \geq z_1^\pm \dots \geq z_{m-1}^\pm \geq z_m^\pm$. A estrutura da álgebra $\mathcal{G}(K, S)$ pode ser determinada completamente, calculando os elementos de matriz especiais, como segue-se,

$$D_t^{\{t_1, \dots, t_m; t'_1, \dots, t'_m\}} = \langle t|X_{+1}(t_1)X_{+1}(t_2) \dots X_{+1}(t_m)X_{-1}(t'_m) \dots X_{-1}(t'_2)X_{-1}(t'_1)|t\rangle, \quad (2.69)$$

os quais dependem da escolha do operador de Cartan K . Então, usando as relações de comutação entre os geradores de Weyl da álgebra de Lie, pode-se derivar a relação recursiva para os elementos de matriz,

$$D_t^{\{t_1, \dots, t_m; t'_1, \dots, t'_m\}} = \sum_{j=1}^m \delta(t_m - t'_j) \left(\delta(t - t'_j) - \sum_{k=1}^{j-1} K(t'_j, t'_k) \right) D_t^{\{t_1, \dots, t_{m-1}; t'_1, \dots, t'_j, \dots, t'_m\}}, \quad (2.70)$$

com $D_t^{\{t_1, t'_1\}} = \delta(t - t_1)\delta(t - t'_1)$. Aqui \hat{t}'_j é usado para denotar que t'_j tem sido omitido pela contração com t_m em enquanto trocamos todos os X_{+1} à direita e os X_{-1} à esquerda. Embora não é possível iterar as relações recursivas para encontrar uma expressão compacta para os elementos de matriz na expansão, mesmo nos casos mais simples com kernels de Cartan tipo delta, os primeiros termos da expansão podem ser obtidos explicitamente começando com a normalização $\langle t|t \rangle = 1$.

Por tanto, a extensão direta dos métodos da teoria de grupos usados para a integração dos sistemas de Toda para as álgebras de Lie simples permitem construir a solução geral das equações de campo de Toda contínuo e obter uma expansão em serie de potência formal ao redor das configurações de campo livre. Nas regiões onde a exponencial de auto-interação chega ser insignificante, temos simplesmente que $\Phi \simeq \Phi_0$ para os correspondentes campos de Toda. Tal expansão pode ou não convergir no sentido matemático estrito, mas não existe uma forma geral até o momento para decidir em cada caso.

2.3 Fluxo de Ricci

De acordo com a discussão na seção (1.6), a equação do fluxo de Ricci em duas dimensões assume a seguinte forma simples no sistema de coordenadas conformemente plana (z_+, z_-) ,

$$\partial_- \partial_+ \Phi(z_-, z_+, t) = \partial_t e^{\Phi(z_-, z_+, t)} \quad , \quad (2.71)$$

onde Φ é o fator conforme da métrica sob deformações contínuas. A descrição algébrica natural para esta equação como um sistema de equações de Toda contínuas está dada pela escolha da álgebra contínua com kernel de Cartan $K(t, t') = \delta'(t - t')$ e $S(t - t') = \delta(t - t')$. A parte local da álgebra é descrita pelo sistema de relações de Weyl,

$$\begin{aligned} [H(\varphi), H(\psi)] &= 0 \quad , \\ [X_{+1}(\varphi), X_{-1}(\psi)] &= H(\varphi \cdot \psi) \quad , \\ [H(\varphi), X_{\pm 1}(\psi)] &= \mp X_{\pm 1}(\varphi' \cdot \psi) \quad . \end{aligned} \quad (2.72)$$

A álgebra \mathbb{Z} -graduada $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_n$ como é usual será gerada tomando comutadores sucessivos dos $X_{\pm 1}$. Consideremos a condição de curvatura zero,

$$[\partial_+ + A_+(z_+, z_-), \partial_- + A_-(z_+, z_-)] = 0 \quad , \quad (2.73)$$

e tomamos o ansatz mais geral para as conexões de gauge $A_{\pm}(z_+, z_-) \in \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_{\pm 1}$,

$$A_{\pm}(z_+, z_-) = H(u_{\pm}) + \lambda X_{\pm 1}(f_{\pm}) \quad , \quad (2.74)$$

onde u_{\pm} e f_{\pm} são funções de (z_+, z_-, t) . Comparando os termos da álgebra de Lie que aparecem, encontraremos o seguinte sistema de equações

$$\frac{\partial u_+}{\partial t} = -\partial_+(\log f_-) \quad , \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial u_-}{\partial t} = \partial_-(\log f_+) \quad , \quad (2.76)$$

$$\partial_+ u_- - \partial_- u_+ + \lambda^2 f_+ f_- = 0 \quad . \quad (2.77)$$

Facilmente u_{\pm} pode ser eliminado tomando as derivadas apropriadas, obtendo então

$$\partial_+ \partial_- \Phi(z_+, z_-, t) = -\lambda^2 \frac{\partial}{\partial t} e^{\Phi(z_+, z_-, t)} \quad , \quad \text{com} \quad \Phi = \log(f_+ f_-) \quad , \quad (2.78)$$

a equação de campo de Toda associada com a álgebra de Lie $\mathcal{G}(d/dt, \mathbb{I})$. Esta equação descreve o fluxo do grupo de renormalização dos modelos sigma bi-dimensional no sistema conformemente plano de coordenadas no espaço “target” (z_+, z_-) , quando $\lambda^2 = -1$.

O ingrediente principal nesta formulação é o uso da álgebra de Lie contínua para incorporar a variável de deformação t no seu sistema de raízes, embora a estrutura completa da teoria de representação destas álgebras ainda não é bem conhecida. A mesma dificuldade aparece para definirmos o significado preciso da integrabilidade para os sistemas associados com essas álgebras no sentido da construção explícita das leis de conservação no espaço bi-dimensional. O fato é que isto será relevante para a descrição algébrica de alguns problemas dinâmicos.

Agora, vamos aplicar o formalismo geral a soluções da equação do fluxo de Ricci em duas dimensões em termos de uma família uniparamétrica de campos livres $\Phi_0(z_+, z_-, t) = f_+(z_+, t) + f_-(z_-, t)$. Para a álgebra $\mathcal{G}(d/dt, \mathbb{I})$ a expressão (2.66) fica da seguinte forma

$$\Phi(z_+, z_-, t) = \Phi_0(z_+, z_-, t) - \partial_t (\log \langle t | M_+^{-1}(z_+) M_-(z_-) | t \rangle) \quad . \quad (2.79)$$

Para a expressão explícita da solução temos de encontrar recursivamente os elementos $D_t^{\{t_1, t_2, \dots, t_n; t'_1, t'_2, \dots, t'_n\}}$ a partir da relação recursiva (2.70), e substituir na expansão em serie de potência (2.68). Até a ordem $n = 2$ esses elementos são ¹

$$\begin{aligned} D_t^{\{t_1; t'_1\}} &= \delta(t - t_1) \delta(t_1 - t'_1) \quad , \\ D_t^{\{t_1, t_2; t'_1, t'_2\}} &= \delta(t - t_1) \delta(t_1 - t'_1) \delta(t_2 - t'_2) [2 \delta(t - t_2) + \partial_t \delta(t - t_2)] \quad . \end{aligned}$$

A convergência da serie (2.68) não pode ser demonstrada facilmente no sentido matemático estrito, e portanto poderíamos nos perguntar sobre a validade e o uso

¹Na referencia [28] esses elementos foram calculados até a ordem três.

prático para resolvermos as equações do grupo de renormalização. Nos próximos capítulos vamos encontrar algumas soluções algébricas da equação de campo de Toda contínua quando estudemos o fluxo do Ricci das métricas de curvatura constante com simetria axial. Esses exemplos servem para testar a validade da expansão formal em série de potência.

Para nosso objetivo é conveniente estudar deformações geométricas axialmente simétricas. Então, as soluções podem depender somente da coordenada $z_+ + z_- := Y$ e consideremos a configuração de campo livre

$$\Phi_0(z_+, z_-; t) = c \cdot (z_+ + z_-) + d(t) \equiv cY + d(t) \quad , \quad (2.80)$$

onde c é uma constante arbitrária e $d(t)$ é uma função arbitrária de t . Então vamos calcular os correspondentes primeiros termos da expansão em série de potência (2.68),

$$\langle t | M_+^{-1} M_- | t \rangle = 1 + T_1 + T_2 + \dots \quad , \quad (2.81)$$

Então temos que o termo T_1 está dado por

$$\begin{aligned} T_1 &= \int^{z_+} dz_1^+ \int^{z_-} dz_1^- \int dt_1 \int dt_1' e^{f_+(z_1^+, t_1)} e^{f_-(z_1^-, t_1')} \underbrace{D_t^{\{t_1, t_1'\}}}_{\delta(t-t_1)\delta(t_1-t_1')} \\ &= \int^{z_+} dz_1^+ \int^{z_-} dz_1^- e^{(f_+(z_1^+, t) + f_-(z_1^-, t))} \\ &= \int^{z_+} dz_1^+ \int^{z_-} dz_1^- e^{\Phi_0(z_1^+, z_1^-, t)} = \int^{z_+} dz_1^+ \int^{z_-} dz_1^- e^{c(z_1^+ + z_1^-)} \cdot e^{d(t)} \\ &= \left(\int^{z_+} dz_1^+ e^{cz_1^+} \right) \cdot \left(\int^{z_-} dz_1^- e^{cz_1^-} \right) \cdot e^{d(t)} = \left(\frac{1}{c} e^{cz_+} \right) \cdot \left(\frac{1}{c} e^{cz_-} \right) \cdot e^{d(t)} \\ &= \frac{1}{c^2} e^{[c(z_+ + z_-) + d(t)]} \\ &= \frac{1}{c^2} e^{\Phi_0} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (2.82)$$

Agora, consideremos o termo T_2 ,

$$\begin{aligned} T_2 &= \int^{z_+} dz_1^+ \int^{z_1^+} dz_2^+ \int^{z_-} dz_1^- \int^{z_1^-} dz_2^- \int dt_1 \int dt_2 \int dt_1' \int dt_2' \left\{ e^{f_+(z_1^+, t_1)} \times \right. \\ &\quad \times e^{f_+(z_2^+, t_2)} e^{f_-(z_1^-, t_1')} e^{f_-(z_2^-, t_2')} \times \delta(t - t_1) \delta(t_1 - t_1') \delta(t_2 - t_2') [2 \delta(t - t_2) + \\ &\quad \left. + \partial_t \delta(t - t_2)] \right\} . \end{aligned}$$

Calculemos primeiro as integrais nas variáveis temporais t 's,

$$\begin{aligned}
 I &= \int dt_1 \int dt_2 \int dt'_1 \int dt'_2 \left\{ e^{f_+(z_1^+, t_1)} e^{f_+(z_2^+, t_2)} e^{f_-(z_1^-, t'_1)} e^{f_-(z_2^-, t'_2)} \delta(t - t_1) \delta(t_1 - t'_1) \right. \\
 &\quad \left. \delta(t_2 - t'_2) [2\delta(t - t_2) + \partial_t \delta(t - t_2)] \right\} \\
 &= \int dt_2 \left\{ 2\delta(t - t_2) + \underbrace{\partial_t \delta(t - t_2)}_{-\partial_{t_2} \delta(t - t_2)} \right\} e^{f_+(z_1^+, t)} e^{f_+(z_2^+, t_2)} e^{f_-(z_1^-, t)} e^{f_-(z_2^-, t_2)} \\
 &= 2 \underbrace{e^{[f_+(z_1^+, t) + f_+(z_2^+, t) + f_-(z_1^-, t) + f_-(z_2^-, t)]}}_{(I_1)} + \underbrace{e^{[f_+(z_1^+, t) + f_-(z_1^-, t)]} \cdot \partial_t e^{[f_+(z_2^+, t) + f_-(z_2^-, t)]}}_{(I_2)}.
 \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular as integrais em z^\pm do termo (I_1) ,

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_1 &= \int^{z^+} dz_1^+ \int^{z_1^+} dz_2^+ \int^{z^-} dz_1^- \int^{z_1^-} dz_2^- e^{[f_+(z_1^+, t) + f_+(z_2^+, t) + f_-(z_1^-, t) + f_-(z_2^-, t)]} \\
 &= \left[\int^{z^+} dz_1^+ \int^{z_1^+} dz_2^+ e^{c(z_1^+ + z_2^+)} \right] \left[\int^{z^-} dz_1^- \int^{z_1^-} dz_2^- e^{c(z_1^- + z_2^-)} \right] \cdot e^{2d(t)} \\
 &= \left[\frac{1}{c} \int^{z^+} dz_1^+ e^{2cz_1^+} \right] \left[\frac{1}{c} \int^{z^-} dz_1^- e^{2cz_1^-} \right] \cdot e^{2d(t)} \\
 &= \left[\frac{1}{2c^2} e^{2cz_+} \right] \left[\frac{1}{2c^2} e^{2cz_-} \right] \cdot e^{2d(t)} \\
 &= \frac{1}{4c^4} e^{2\Phi_0}.
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

Para o outro termo (I_2) temos a integral nos z^\pm , \tilde{I}_2 ,

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_2 &= \int^{z^+} dz_1^+ \int^{z_1^+} dz_2^+ \int^{z^-} dz_1^- \int^{z_1^-} dz_2^- e^{[f_+(z_1^+, t) + f_-(z_1^-, t)]} \cdot \partial_t e^{[f_+(z_2^+, t) + f_-(z_2^-, t)]} \\
 &= \left[\int^{z^+} dz_1^+ \int^{z_1^+} dz_2^+ e^{c(z_1^+ + z_2^+)} \cdot e^{d(t)} \right] \cdot \partial_t \left[\int^{z_1^+} dz_2^+ \int^{z_1^-} dz_2^- e^{c(z_2^+ + z_2^-)} \cdot e^{d(t)} \right] \\
 &= \left[\int^{z^+} dz_1^+ \int^{z_1^+} dz_2^+ e^{c(z_1^+ + z_2^+)} \right] \left[\int^{z^-} dz_1^- \int^{z_1^-} dz_2^- e^{c(z_1^- + z_2^-)} \right] \cdot e^{d(t)} \partial_t e^{d(t)} \\
 &= \frac{1}{4c^4} e^{2c(z_+ + z_-)} \cdot e^{d(t)} \cdot \partial_t e^{d(t)} \\
 &= \frac{1}{4c^4} e^{\Phi_0} \cdot \partial_t e^{\Phi_0}.
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Por tanto, obtemos que o termo T_2 está dado por,

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = 2 \left[\frac{1}{4c^4} e^{2\Phi_0} \right] + \frac{1}{4c^4} e^{\Phi_0} \cdot \partial_t e^{\Phi_0} \\
 &= \frac{1}{4c^4} e^{\Phi_0} [2e^{\Phi_0} + \partial_t e^{\Phi_0}].
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

Usando a identidade $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots$ na expressão (2.79), encontramos que a solução da serie de potência toma a seguinte forma

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{c^2} \partial_t e^{\Phi_0} + \frac{1}{4c^4} \partial_t (e^{\Phi_0} \partial_t e^{\Phi_0}) + \dots \quad , \quad (2.86)$$

até a contribuição $n = 2$. Isto pode-se entender como uma expansão de e^Φ ao redor da configuração de campo livre e^{Φ_0} , a qual vira muito pequena quando $Y \rightarrow \pm\infty$ para $c < 0$ ou $c > 0$, respectivamente.

Para finalizar esta seção podemos notar que existem outras soluções da equação de Toda contínua que também são especiais, as quais podem ser construídas a partir da solução geral da equação de Liouville,

$$e^{\Phi_L(z_+, z_-)} = \frac{\partial_+ F^+(z_+) \partial_- F^-(z_-)}{(1 \pm F^+(z_+) F^-(z_-))^2} \quad , \quad \text{com} \quad \partial_+ \partial_- \Phi_L = \mp 2 e^{\Phi_L} \quad , \quad (2.87)$$

onde cada sinal corresponde aos espaços de curvatura positiva ou negativa respectivamente. Para comparar com a nossa notação usada para descrever a realização de campo livre da teoria de Toda, escolhemos o par de funções holomorfa e anti-holomorfa

$$F^\pm(z_\pm) = \int^{z_\pm} dz'_\pm e^{f^\pm(z'_\pm)} \quad . \quad (2.88)$$

Então, temos a classe especial de soluções

$$e^{\Phi(z_+, z_-; t)} = \pm 2(t_0 - t) e^{\Phi_L(z_+, z_-)} \quad , \quad (2.89)$$

onde t_0 é uma constante arbitrária. Nos próximos capítulos veremos que estas soluções têm uma interpretação geométrica interessante. Quando $\pm(t_0 - t) \geq 0$ para um Φ real, todas as trajetórias do fluxo do grupo de renormalização que correspondem a estas soluções são conhecidas como *linhas de Liouville*.

Capítulo 3

Soluções da Equação de Toda Contínua

3.1 Deformações do Modelo- σ $O(3)$

Em esta seção vamos estudar a solução da equação de Toda contínua associada com o fluxo do grupo de renormalização dos espaços bi-dimensionais com topologia esférica S^2 . Consideremos uma família uni-paramétrica de modelos- σ axialmente simétricos dados pela seguinte ação [29]

$$S_t = \frac{1}{2} \int d^2w e^{\Phi(Y;t)} ((\partial_\mu X)^2 + (\partial_\mu Y)^2) \quad , \quad (3.1)$$

onde o fator conforme da métrica do espaço “target” está dado por,

$$e^{\Phi(Y;t)} = \frac{2}{a(t) + b(t)\cosh 2Y} \quad . \quad (3.2)$$

Aqui estamos trabalhando em coordenadas conformes, onde $0 \leq X \leq 2\pi$ é a coordenada angular que dá conta da simetria axial, pois a métrica é independente desta coordenada, enquanto Y cobre o eixo real todo, $-\infty < Y < \infty$. Para manter a métrica suave nos pontos $Y = \pm\infty$ que parametrizam os polos norte e sul da variedade M com topologia esférica, é necessário impor as condições de fronteira

$$\Phi(Y;t) \sim -2|Y| \quad \text{for } Y \rightarrow \pm\infty \quad . \quad (3.3)$$

Em relação às duas funções $a(t)$ e $b(t)$ introduzidas na Eq. (3.2) pode-se observar que a métrica deste espaço target bi-dimensional é real no caso que $a \geq -b$ e $b \geq 0$. Antes de calcularmos as correspondentes equações do fluxo de renormalização, vamos ver que este espaço target é uma esfera deformada com simetria axial considerando as seguintes duas configurações especiais :

- (i) Quando $a(t) = b(t) = 1$, este modelo sigma corresponde ao modelo sigma $O(3)$ usual com a geometria de uma esfera associada com o fator conforme

$$e^{\Phi(Y)} = \frac{1}{\cosh^2 Y} \quad . \quad (3.4)$$

Isto é evidente se consideramos a seguinte transformação de coordenadas

$$\cos\theta = \tanh Y \quad , \quad \varphi = X \quad , \quad (3.5)$$

de modo que $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Então a métrica do espaço “target” toma a seguinte forma

$$ds^2 = \frac{1}{2} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad , \quad (3.6)$$

a qual descreve uma esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ que tem uma função beta não nula.

- (ii) A segunda configuração especial corresponde a $a(t) = \gamma$, onde γ é uma constante positiva arbitrária, e $b(t) = 0$. Neste caso a métrica do espaço target toma a seguinte forma

$$ds^2 = \frac{1}{\gamma} (dX^2 + dY^2) \quad , \quad (3.7)$$

a qual descreve um modelo com dois campos escalares Y e X tomando valores nos espaços \mathbb{R} e $U(1)$, respectivamente. A teoria resultante é uma teoria de campo conforme quântica bi-dimensional denotada $\mathbb{R}U(1)_\gamma$. O raio do espaço compacto é $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, onde $0 \leq \gamma \leq \infty$. Para $\gamma = 0$, a coordenada X decompactifica-se e a geometria descreve um plano. Para $\gamma = \infty$, a coordenada X contrai-se a zero gerando uma linha uni-dimensional. Para todos os outros valores de γ , obtem-se uma geometria cilíndrica.

Agora, a partir da equação do fluxo do grupo de renormalização dada neste caso por

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = e^{-\Phi} \frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2} \quad , \quad (3.8)$$

encontramos o seguinte conjunto de equações diferenciais não-lineares de primeira ordem para as funções $a(t)$ e $b(t)$,

$$a'(t) = 2b^2(t) \quad , \quad b'(t) = 2a(t)b(t) \quad , \quad (3.9)$$

para as quais é fácil ver que a quantidade

$$\gamma^2 = a^2(t) - b^2(t) \quad (3.10)$$

é conservada sob a ação do fluxo. Então, escolhendo $\gamma \in \mathbb{R}$ como uma constante real arbitrária de modo que $a(t) \geq -b(t)$, por simples integração obtemos a seguinte solução

$$a(t) = \gamma \coth 2\gamma(t_0 - t) \quad , \quad b(t) = \frac{\gamma}{\sinh 2\gamma(t_0 - t)} \quad . \quad (3.11)$$

Aqui pode-se escolher sem perda de generalidade $\gamma \geq 0$, pois esta solução é independente do sinal de γ . A restrição $b(t) \geq 0$ implica que $\sinh 2\gamma(t_0 - t) \geq 0$ ou equivalentemente que $(t_0 - t) \geq 0$, o que significa que o modelo terá um limite ultravioleta bem definido. Este comportamento como já tínhamos anotado é propio dos espaços compactos com curvatura positiva. Por esta razão a região fisicamente relevante para o modelo corresponde a $a(t) \geq b(t) \geq 0$.

Em relação à outra constante de integração que aparece na solução t_0 , podemos notar que nesse ponto do fluxo as duas funções $a(t)$ e $b(t)$ tendem a infinito. De fato se consideramos o comportamento das funções perto de t_0 encontramos que ,

$$a(t) \simeq b(t) \simeq \frac{1}{2(t_0 - t)} \quad , \quad e^{\Phi(Y;t)} \simeq \frac{2(t_0 - t)}{\cosh^2 Y} \quad . \quad (3.12)$$

Devido a que este limite é independente do valor de γ toda trajetória do grupo de renormalização no espaço (a, b) aproxima-se à linha diagonal $a(t) = b(t)$ quando $t \rightarrow t_0^-$, isto é, todas as soluções tendem para a geometria da esfera S^2 mas com um volume zero. Por esta razão t_0 é uma cota superior para o “tempo” do grupo de renormalização. A curvatura do espaço “target” tende a infinito quando $t \rightarrow t_0$, o que não permite a aproximação de ordem mais baixa na função beta assumida desde o começo. Por outro lado, quando $t \rightarrow -\infty$ temos que

$$a(t) = \gamma \quad , \quad b(t) = 0 \quad . \quad (3.13)$$

Estes valores constantes definem a linha de pontos ultravioletas das trajetórias para todo $\gamma \geq 0$.

Da Eq. (3.10) podemos ver que as trajetórias do grupo de renormalização no espaço (a, b) (*ver fig 3.1*) são hipérbolas. Elas começam nos pontos fixos ultravioletas $(a = \gamma, b = 0)$ em $t = -\infty$, e evoluem continuamente sem ter interseção entre elas, em direção à linha diagonal $(a = b \geq 0)$ quando $t \rightarrow t_0$.

A geometria do espaço “target” muda ao longo das trajetórias de tal forma que a deformação vá desde uma esfera S^2 até uma variedade axialmente simétrica com forma parecida a uma salchicha (*Sausage*), daí vem seu apelido. Uma maneira de visualizar esta deformação é encaixar a superfície bi-dimensional no espaço Euclidiano 3-dimensional \mathbb{E}^3 . Para isto, introduz-se um campo vetorial unitário \hat{n}_i , $i = 1, 2, 3$, e $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$, dado por

$$\vec{n} = (\text{sen}\theta\text{cos}\varphi, \text{sen}\theta\text{sen}\varphi, \text{cos}\theta) \quad . \quad (3.14)$$

$b(t)$

0

$a(t)$

Figura 3.1: *Trajektorias do fluxo do modelo salchicha.*

A ação em termos destas novas variáveis toma a seguinte forma

$$S_t = \frac{1}{g^2(t)} \int d^2w \frac{(\partial \vec{n})^2}{\left(1 - \frac{\gamma^2 n_3^2}{g^2(t)}\right)} \quad ; \quad \text{com } g^2(t) = \gamma \coth \gamma (t_0 - t) \quad , \quad (3.15)$$

e descreve uma configuração “salchicha” axialmente simétrica encaixada no espaço Euclidiano 3-dimensional gerada por n_1 , n_2 e n_3 , sendo esta última a direção na qual a salchicha é deformada. Nos pontos ultravioletas a largura da salchicha tende a infinito, mudando dessa maneira a sua forma para uma cilíndrica $\mathbb{R} \times S^1$ com raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Quando t flui em direção a t_0 a sua configuração torna-se esférica mas seu tamanho tende assintoticamente a zero. Para $\gamma = 0$ temos a geometria esférica usual do modelo- σ $O(3)$ para todos os valores de t , isto é, o modelo segue a trajetória diagonal fluindo desde uma esfera de raio infinito para uma de raio zero.

Outra forma alternativa e conveniente de visualizar esta deformação é introduzir as coordenadas próprias por meio da seguinte transformação

$$\tilde{Y} = \sqrt{2} \cosh \gamma (t_0 - t) \int \frac{dY}{\sqrt{\cosh 2Y + \cosh 2\gamma (t_0 - t)}} = F(\psi; k) \quad , \quad (3.16)$$

onde $F(\psi, k)$ denota a integral elíptica incompleta de primeira forma,

$$F(\psi; k) = \int_0^\psi \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \chi}} = \int_0^{\text{sen} \psi} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \quad , \quad (3.17)$$

com os seguintes parâmetros definidos por

$$\text{sen} \chi = \tanh Y \quad , \quad k = \tanh \gamma (t_0 - t) \quad . \quad (3.18)$$

Por definição, temos que $\text{sen}\psi = \text{sn}(\tilde{Y}; k)$, onde $\text{sn}(u; k)$ é a função elíptica de Jacobi de módulo k denominada *seno de amplitude*. Para encontrar a forma da métrica nas coordenadas (X, \tilde{Y}) temos em conta que

$$(dY)^2 = \frac{1}{\text{sn}^2(\tilde{Y} + K(k); k)} (d\tilde{Y})^2 \quad , \quad e \quad \frac{1}{2}e^{\Phi(\tilde{Y}; t)} = \frac{k}{\gamma} \text{sn}^2(\tilde{Y} + K(k); k) \quad , \quad (3.19)$$

onde temos usado a identidade

$$\text{sn}^2(u + K(k); k) = \frac{1 - \text{sn}^2(u, k)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u; k)} \quad , \quad (3.20)$$

com $K(k) = F(\frac{\pi}{2}; k)$ sendo a integral elíptica completa de primeira forma. Por tanto a métrica da configuração deformada toma a seguinte forma

$$ds_t^2 = \frac{k}{\gamma} \left(d\tilde{Y}^2 + \text{sn}^2(\tilde{Y} + K(k); k) dX^2 \right) \quad , \quad (3.21)$$

a qual representa a deformação de uma esfera em uma configuração tipo “salchicha” para todo $\gamma \neq 0$, com \tilde{Y} variando desde $-K(k)$ até $K(k)$.

Devido a que a mudança de variáveis de (X, Y) para (X, \tilde{Y}) depende do parâmetro do fluxo t , devemos introduzir um termo na equação do fluxo que compensa este efeito, como foi explicado já no primeiro capítulo, que vem do campo vetorial $\xi_\mu = \partial_\mu \tilde{\Phi}$. Lembremos que neste caso a equação do fluxo grupo de renormalização toma a seguinte forma generalizada

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \tilde{\Phi} \quad . \quad (3.22)$$

Então nas coordenadas propias a métrica pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} ds_t^2 &= \frac{1}{\gamma} \left(kd\tilde{Y}^2 + \left(\frac{H_1(\tilde{Y})}{\Theta_1(\tilde{Y})} \right)^2 dX^2 \right) , \\ \tilde{\Phi}(\tilde{Y}) &= \log \Theta_1(\tilde{Y}) + \frac{1}{2} \left(\frac{E(k)}{K(k)} - \frac{1}{2} k'^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \right) \tilde{Y}^2 \quad , \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $\Theta_1(u) = \Theta(u + K(k))$ e $H_1(u) = H(u + K(k))$ são as *funções Theta de Jacobi* e satisfazem a propriedade $\text{sn}(u) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)}$; em quanto $K(k)$ e $E(k)$ são as integrais elípticas de primeira e segunda forma respectivamente. Na expressão (3.23) tem se escolhido $\Phi(\tilde{Y} = 0) = \log \Theta(K(k))$, e o parâmetro k' conhecido como o módulo complementar está dado por $(k')^2 = 1 - (k)^2$.

Nesta descrição da configuração salchicha podemos visualizar algumas propriedades interessantes. O módulo elíptico $k = \tanh \gamma(t_0 - t)$ toma valores desde 1 até 0

quando t flui desde a região ultravioleta $t \rightarrow -\infty$ até o ponto da singularidade em $t = t_0$. A função elíptica de Jacobi seno de amplitude $sn(u; k)$ é periódica em u e possui dois zeros separados a uma distância de $2K(k)$, de modo que o comprimento característico do modelo na direção \tilde{Y} está dada por $2\sqrt{k}K(k)$. Perto da região ultravioleta $k \approx 1$ temos que $K(1) \rightarrow \infty$, por tanto o comprimento característico tende a infinito e a métrica toma a forma

$$ds_{-\infty}^2 = \frac{1}{\gamma} \left((d\tilde{Y})^2 + (dX)^2 \right) , \quad (3.24)$$

de um cilindro infinito com origem em $\tilde{Y} = 0$. Para examinar o que acontece nos extremos do modelo, isto é para $k = 1$, é conveniente fazer a seguinte mudança de variáveis

$$\rho = \tilde{Y} + K(k) . \quad (3.25)$$

Todas as funções elípticas de Jacobi viram funções hiperbólicas usuais no limite $k = 1$, por exemplo $sn(u; 1) = \tanh(u)$. Por tanto, neste limite a métrica toma a seguinte forma

$$ds_{\infty}^2 = \frac{1}{\gamma} (d\rho^2 + \tanh^2 \rho dX^2) . \quad (3.26)$$

Esta métrica já é conhecida na literatura e está associada a um buraco negro bi-dimensional Euclideano [30, 31], o qual tem a aparência de um “cigarro infinito” e que assintoticamente vira um plano, $\mathbb{R} \times S^1$, quando $\rho \rightarrow +\infty$. Para o outro limite $\tilde{Y} \rightarrow -K(k)$ fazemos a mudança de variáveis $\rho = \tilde{Y} - K(k)$, mas obtemos de novo a forma da métrica (3.24) pois $sn^2(u + K(k); k) = sn^2(u - K(k); k)$. Por tanto no outro extremo a configuração também toma a forma de um “cigarro infinito”.

O campo dilaton do buraco negro de Witten está dado por [30]

$$\tilde{\Phi}(\rho) = \log(\cosh \rho) , \quad (3.27)$$

o qual anula-se para $\rho = 0$ e para $\rho = \infty$ é infinito. Em nosso caso, a partir da Eq.(3.23) encontramos que o campo dilaton é constante,

$$\tilde{\Phi}(\tilde{Y}) \simeq \log \Theta(K(k)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{2K(k)}{\pi} \right) , \quad (3.28)$$

para todo \tilde{Y} quando $k \rightarrow 1$, ou quando $k \rightarrow 0$. O segundo caso é interessante pois o campo dilaton tende a zero, fato que é consistente com a criação de uma singularidade na curvatura. Pode-se pensar nos dois buracos negros estando no começo afastados um do outro e depois eles começam-se atrair formando assim uma configuração salchicha como um estado intermédio que no final colapsa em $t = t_0$.

Para finalizar a discussão do modelo salchicha vamos estudar a realização de campo livre da sua configuração baseada na construção algébrica das soluções gerais das equações contínuas de Toda. Aqui vamos a trabalhar nas coordenadas (X, Y) . Primeiro, notamos que nas regiões assintóticas de Y , isto é $Y \rightarrow \pm\infty$, o fator conforme tende a zero na seguinte forma,

$$e^{\Phi(Y;t)} \simeq \frac{4}{b(t)} e^{-2|Y|} \quad , \quad Y \rightarrow \pm\infty \quad . \quad (3.29)$$

Veja que $\Phi(Y;t)$ é assintoticamente livre, quer dizer $\partial_Y^2 \Phi \simeq 0$. Por esta razão, podemos escolher a configuração de campo livre sendo

$$\Phi_0(Y;t) = -2Y + \log \left(\frac{4}{\gamma} \sinh 2\gamma(t_0 - t) \right) \quad , \quad (3.30)$$

e vamos construir a solução geral das equações de campo de Toda contínuo para todo Y como uma serie de potência nos campos livres baseada na álgebra de Lie contínua $\mathcal{G}(d/dt, \mathbb{I})$. A idéia então é mostrar que essa expansão algébrica coincide com a expansão em Taylor de $\Phi(Y;t)$ em potências de e^{-2Y} ordem a ordem.

Da forma exata da solução (3.2), expandimos e^Φ na vizinhança de $Y = +\infty^1$,

$$\begin{aligned} e^{\Phi(Y;t)} &\equiv \frac{2}{a(t) + b(t) \cosh 2Y} = \frac{4}{2a(t) + b(t)e^{2Y} + b(t)e^{-2Y}} \\ &= \frac{4}{b(t)e^{2Y}} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{2a(t)}{b(t)} e^{-2Y} + e^{-4Y} \right)} \right] \\ &= \frac{4}{b(t)} e^{-2Y} \left[1 - \left(\frac{2a(t)}{b(t)} e^{-2Y} + e^{-4Y} \right) + \left(\frac{2a(t)}{b(t)} e^{-2Y} + e^{-4Y} \right)^2 - \dots \right] \\ &= \frac{4}{b(t)} e^{-2Y} \left[1 - \frac{2a(t)}{b(t)} e^{-2Y} + \left(4 \frac{a^2(t)}{b^2(t)} - 1 \right) e^{-4Y} - \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \frac{4a(t)}{b(t)} \left(2 \frac{a^2(t)}{b^2(t)} - 1 \right) e^{-6Y} + \mathcal{O}(e^{-8Y}) \right] \quad . \quad (3.31) \end{aligned}$$

Tomando o logaritmo e usando a identidade $\log(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$, obtemos a seguinte expansão em serie de potência

$$\begin{aligned} \Phi(Y;t) &= \Phi_0(Y;t) - 2 \frac{a(t)}{b(t)} e^{-2Y} + \left(2 \frac{a^2(t)}{b^2(t)} - 1 \right) e^{-4Y} - \dots \\ &\quad \dots - \frac{2a(t)}{3b(t)} \left(4 \frac{a^2(t)}{b^2(t)} - 3 \right) e^{-6Y} + \mathcal{O}(e^{-8Y}) \quad . \quad (3.32) \end{aligned}$$

¹Pode-se trabalhar de forma similar em $Y = -\infty$

Agora, a família uni-paramétrica de métricas do modelo salchicha pertencem à classe especial de soluções da equação de campo de Toda contínua $\Phi_0(Y; t) = cY + d(t)$ com $c = -2$ e

$$d(t) = \log \left(\frac{4}{\gamma} \sinh 2\gamma(t_0 - t) \right) .$$

Lembremos que a expansão que encontramos para este tipo de soluções está dada por (2.86)

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{c^2} \partial_t e^{\Phi_0} + \frac{1}{4c^4} \partial_t (e^{\Phi_0} \partial_t e^{\Phi_0}) + \dots \quad (3.33)$$

Então, para o primeiro termo aparecendo no lado direito desta expansão temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \partial_t e^{\Phi_0} &= \frac{1}{4} \partial_t \left(e^{-2Y + \log\left(\frac{4}{\gamma} \sinh 2\gamma(t_0 - t)\right)} \right) = \frac{1}{4} e^{-2Y} \partial_t \left(\frac{4}{\gamma} \sinh 2\gamma(t_0 - t) \right) \\ &= -2 \cosh 2\gamma(t_0 - t) e^{-2Y} \\ &= -2 \frac{a(t)}{b(t)} e^{-2Y} . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para o segundo termo temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4c^4} \partial_t (e^{\Phi_0} \partial_t e^{\Phi_0}) &= \frac{1}{64} \partial_t \left[\left(\frac{4}{\gamma} \sinh 2\gamma(t_0 - t) \right) (-8 \cosh 2\gamma(t_0 - t)) \right] e^{-4Y} \\ &= -\frac{1}{4\gamma} \partial_t (\sinh 4\gamma(t_0 - t)) e^{-4Y} \\ &= \cosh 4\gamma(t_0 - t) e^{-4Y} \\ &= (2 \cosh^2 2\gamma(t_0 - t) - 1) e^{-4Y} \\ &= \left[2 \frac{a^2(t)}{b^2(t)} - 1 \right] e^{-4Y} . \end{aligned} \quad (3.35)$$

De forma análoga pode-se mostrar que o coeficiente do termo $\mathcal{O}(e^{-6Y})$ coincide com a expressão dada na Eq. (3.32). Temos mostrado então que o modelo salchicha das deformações axialmente simétricas do modelo sigma $O(3)$ é um bom exemplo para testar a validade da expansão formal em série de potência (2.86) das configurações de campo de Toda contínuas em termos dos campos livres. Nas seguintes seções vamos apresentar mais exemplos que mostraram a efetiva relação entre as deformações geométricas sob o fluxos do grupo de renormalização da métricas bi-dimensionais e a estrutura algébrica dos sistemas de Toda contínuos para a álgebra $\mathcal{G}(d/dt, \mathbb{I})$.

3.2 Deformação das Métricas de Curvatura Negativa

Nesta seção vamos discutir as deformações geométricas das métricas de curvatura constante negativa sob o fluxo do grupo de renormalização. Contrário ao caso das métricas de curvatura constante positiva, estas métricas fluem em direção a teorias de campo livres na região infravermelha. Primeiro, iniciamos com uma classificação das métricas de curvatura constante negativa em termos da monodromia das configurações da teoria de Liouville. Seguindo, vamos estudar as deformações geométricas sob o fluxo de grupo de renormalização em cada caso. Como foi feito na seção anterior só consideraremos deformações que preservem a simetria axial das configurações. Por tanto usaremos de novo funções $a(t)$ e $b(t)$ para parametrizar as trajetórias do fluxo e encontraremos suas respectivas equações de evolução.

3.2.1 Classificação das Métricas com $R < 0$.

Consideremos espaços bi-dimensionais com a métrica

$$ds^2 = 2e^{\Phi(z_+, z_-)} dz_+ dz_- = \frac{8}{\Lambda^2} \frac{\partial_+ F^+(z_+) \partial_- F^-(z_-)}{(1 - F^+(z_+) F^-(z_-))^2} dz_+ dz_- \quad , \quad (3.36)$$

onde estamos usando a solução geral da equação de Liouville (2.87) com constante de acoplamento $\frac{\Lambda^2}{2}$. Então, a curvatura escalar de Ricci está dada por,

$$R \equiv -2e^{-\Phi} \partial_+ \partial_- \Phi = -\Lambda^2 \quad , \quad (3.37)$$

mas algumas singularidades tipo delta que podem aparecer dependendo da escolha das funções $F^\pm(z_\pm)$. Aqui vamos parametrizar as coordenadas complexas de modo que

$$z_\pm = e^{Y \pm iX} \quad ; \quad -\infty < Y < +\infty \quad , \quad 0 \leq X \leq 2\pi \quad . \quad (3.38)$$

Esta aplicação envia um cilindro infinito a um plano. Um dos extremos do cilindro localizado em $Y = -\infty$ é mapeado à origem $z_+ = 0 = z_-$, em quanto o outro extremo $Y = +\infty$ é mapeado a infinito no plano.

Agora, vamos considerar fatores conformes sendo funções independentes da coordenada X , as quais classificam-se em hiperbólicas, parabólicas ou elípticas, dependendo do comportamento de $F^+(z_+)$ sob uma rotação $z_+ \rightarrow e^{2\pi i} z_+$, ou equivalentemente, $X \rightarrow X + 2\pi$. Então consideremos as três diferentes classes de soluções [32]:

(i) Soluções Hiperbólicas

Estas soluções têm a seguinte monodromia

$$F^+(z_+) \rightarrow e^{-2\pi\zeta} F^+(z_+) \quad \text{com} \quad \zeta \in \mathbb{R} \quad . \quad (3.39)$$

Escolhendo $F^+(z_+) = z_+^{i\zeta}$ e $F^-(z_-) = z_-^{i\zeta}$, temos que

$$ds^2 = \frac{2}{\Lambda^2} \frac{\zeta^2}{z_+ z_- \sin^2\left(\frac{\zeta}{2} \log z_+ z_-\right)} dz_+ dz_- = \frac{2}{\Lambda^2} \frac{\zeta^2}{\sin^2 \zeta Y} (dX^2 + dY^2) \quad , \quad (3.40)$$

onde o fator conforme satisfaz a seguinte equação

$$\partial_+ \partial_- \Phi - \frac{\Lambda^2}{2} e^\Phi = 0 \quad . \quad (3.41)$$

Esta métrica descreve efetivamente um espaço de curvatura constante negativa sem singularidades. O fator conforme é periódico na variável Y , e portanto não precisamos tomar todo os reais mas só considerar um domínio fundamental $-\frac{\pi}{\zeta} \leq Y \leq 0$. Vamos passar agora da coordenada conforme Y para a coordenada própria \tilde{Y} por meio da transformação

$$\tilde{Y} = -\log \left(\tan \left(-\zeta \frac{Y}{2} \right) \right) \quad . \quad (3.42)$$

Derivando ambos lados, podemos obter as seguintes expressões equivalentes

$$dY = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{\cosh \tilde{Y}} d\tilde{Y} \quad , \quad dY = \frac{\text{sen}(-\zeta Y)}{\zeta} d\tilde{Y} \quad . \quad (3.43)$$

Por tanto, obtemos a relação

$$\text{sen}(-\zeta Y) = \frac{1}{\cosh \tilde{Y}} \quad . \quad (3.44)$$

Com estes resultados encontramos que a métrica toma a seguinte forma,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{2}{\Lambda^2} \frac{\zeta^2}{\text{sen}^2 \zeta Y} ((dX)^2 + (dY)^2) \\ &= \frac{2}{\Lambda^2} \zeta^2 \cosh^2 \tilde{Y} \left[(dX)^2 + \frac{(d\tilde{Y})^2}{(\zeta \cosh \tilde{Y})^2} \right] \\ &= \frac{2}{\Lambda^2} \left[(d\tilde{Y})^2 + \zeta^2 \cosh \tilde{Y} (dX)^2 \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Esta métrica descreve um espaço bi-dimensional com curvatura constante negativa conhecido na literatura como “*plumbing fixture metric*”.

(ii) Soluções Parabólicas

A soluções parabólicas se caracterizam pela seguinte monodromia

$$F^+(z_+) \rightarrow F^+(z_+) - 2\pi \quad . \quad (3.46)$$

Por tanto podemos escolher $F^+(z_+) = i \log z_+$ e $F^-(z_-) = \frac{i}{\log z_-}$, de modo que a métrica toma a seguinte forma

$$ds^2 = \frac{8}{\Lambda^2} \frac{1}{z_+ z_- (\log z_+ z_-)^2} dz_+ dz_- = \frac{2}{\Lambda^2} \frac{1}{Y^2} (dX^2 + dY^2) \quad . \quad (3.47)$$

Esta métrica descreve um espaço bi-dimensional de curvatura constante negativa $-\Lambda^2$ mas tem uma singularidade em $z_+ = 0 = z_-$, isto é,

$$\log(z_+ z_-) = 2Y \longrightarrow 0 \quad .$$

Por esta razão a equação que satisfaz o fator conforme será

$$\partial_+ \partial_- \Phi - \frac{\Lambda^2}{2} e^\Phi + 2\pi \delta^2(z) = 0 \quad . \quad (3.48)$$

Perto da singularidade, a métrica não é plana por causa das correções que introduz o termo $\log(z_+ z_-)$. Aqui também vamos nos restringir ao domínio fundamental $-\infty < Y \leq 0$.

Então, passando para a coordenada própria \tilde{Y} via a transformação $\tilde{Y} = -\log(-Y)$, a métrica assume a seguinte forma

$$ds^2 = \frac{2}{\Lambda^2} \left(d\tilde{Y}^2 + e^{2\tilde{Y}} dX^2 \right) \quad . \quad (3.49)$$

Este espaço bi-dimensional tem simetria rotacional e para cada valor de \tilde{Y} temos um círculo de raio variável, começando desde zero em $\tilde{Y} \rightarrow -\infty$ e crescendo exponencialmente até infinito quando $\tilde{Y} \rightarrow +\infty$.

(iii) Soluções Elípticas

As soluções elípticas têm a monodromia

$$F^+(z_+) \longrightarrow e^{2\pi i \zeta} F^+(z_+) \quad . \quad (3.50)$$

Então escolhendo as funções $F^+(z_+) = z_+^\zeta$ e $F^-(z_-) = z_-^\zeta$, onde $0 \leq \zeta \leq 1$, obtemos a métrica

$$ds^2 = \frac{8}{\Lambda^2} \frac{\zeta^2}{(z_+ z_-)^{1-\zeta} (1 - (z_+ z_-)^\zeta)^2} dz_+ dz_- = \frac{2}{\Lambda^2} \frac{\zeta^2}{\sinh^2 \zeta Y} (dX^2 + dY^2) \quad . \quad (3.51)$$

Esta descreve um espaço de curvatura constante negativa $-\Lambda^2$ com uma singularidade em $z_+ = 0 = z_-$ onde a métrica é plana, pois $\sinh^2(\zeta Y) \rightarrow \infty$ quando $Y \rightarrow \infty$. Neste caso o fator conforme satisfaz a seguinte equação

$$\partial_+ \partial_- \Phi - \frac{\Lambda^2}{2} e^\Phi + 2\pi(1 - \zeta) \delta^{(2)}(z) = 0 \quad . \quad (3.52)$$

Aqui vamos tomar o domínio fundamental $-\infty < Y \leq 0$. Por tanto, passando para a coordenada própria via a transformação

$$\tilde{Y} = -\log \left(\tanh \left(-\frac{\zeta Y}{2} \right) \right) \quad , \quad (3.53)$$

encontramos que a métrica assume a seguinte forma

$$ds^2 = \frac{2}{\Lambda^2} \left(d\tilde{Y}^2 + \zeta^2 \sinh^2 \tilde{Y} dX^2 \right) \quad , \quad 0 \leq \tilde{Y} \leq \infty \quad . \quad (3.54)$$

Este espaço bi-dimensional também tem simetria rotacional e pode-se foliar por círculos com tamanho variável, começando desde zero em $\tilde{Y} = 0$ e cresce exponencialmente quando $\tilde{Y} \rightarrow +\infty$.

Para concluir a discussão sobre a classificação das métricas de curvatura constante negativa podemos notar que elas são de basicamente três classe dependendo da monodromia das funções $F^\pm(z_\pm)$. Em geral, todas as métricas de curvatura constante negativa sobre uma variedade diferencial M são localmente equivalentes mas não globalmente [33]. Devido a esse fato, os efeitos não perturbativos têm um aporte significativo ao procedimento de renormalização, pois não é possível distinguir entre estas métricas equivalentes. Em particular em duas dimensões as métricas hiperbólicas e parabólicas no limite infravermelho tem forma de uma “cana” de comprimento e largura variáveis, mas a métrica elíptica tem uma singularidade cônica que faz diferença no regime perturbativo.

3.2.2 Deformação das Soluções Hiperbólicas

Para estudar as deformações geométricas das soluções hiperbólicas induzidas pelo fluxo do grupo de renormalização, escolheremos trabalhar no gauge conforme com a ação

$$S_t = \frac{1}{2} \int d^2w e^{\Phi(Y;t)} \left((\partial_\mu X)^2 + (\partial_\mu Y)^2 \right) \quad . \quad (3.55)$$

Aqui o fator conforme está dado por

$$e^{\Phi(Y;t)} = \frac{2\zeta^2}{a(t) + b(t)\cos(2\zeta Y)} \quad , \quad (3.56)$$

onde a simetria axial é preservada para todo t , e $0 \leq X \leq 2\pi$. Para estas soluções lembremos que o domínio fundamental pode ser tomado com $-\frac{\pi}{\zeta} \leq Y \leq 0$. No caso que $a(t) = 1 = -b(t)$, obtemos a solução hiperbólica usual com curvatura constante negativa $-\Lambda^2$, a qual pode ser normalizada a -1 ,

$$e^{\Phi(Y;t)} = \frac{2\zeta^2}{1 - \cos(2\zeta Y)} = \frac{\zeta^2}{\sin^2(\zeta Y)} \quad . \quad (3.57)$$

Agora, quando $b(t) = 0$ obtemos a geometria de um cilindro plano com um raio que depende do $a(t)$, o qual deve então ser positivo, isto é,

$$e^{\Phi(Y;t)} = \frac{2\zeta^2}{a(t)} \implies ds^2 = -\frac{2\zeta^2}{a(t)} ((dX)^2 + (dY)^2) \quad . \quad (3.58)$$

Em geral, a métrica é definida positiva para todos os valores na região $a(t) \geq -b(t) \geq 0$. A linha $a(t) = -b(t)$ será uma fronteira dessa região, a qual consiste de todas as métricas com curvatura constante negativa $\Lambda^2 = a(t)$.

Usando este ansatz é fácil encontrar as equações de primeira ordem (*evolução*) para as funções $a(t)$ e $b(t)$ a partir da equação do fluxo do grupo de renormalização ,

$$\frac{\partial e^{\Phi}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \implies \begin{cases} a'(t) = -2b^2(t) \\ b'(t) = -2a(t)b(t) \end{cases} \quad , \quad (3.59)$$

onde temos que $\gamma^2 = a^2(t) - b^2(t)$ é conservada ao longo das trajetórias do fluxo. Essa diferença do sinal nas equações em relação ao modelo salchicha, faz neste caso o fluxo estar bem definido na região infravermelha, $t \rightarrow +\infty$. Escolhendo $0 \leq \gamma < +\infty$ sendo uma constante real não-negativa, podemos encontrar a seguinte solução das Eqs.(3.59),

$$a(t) = \gamma \coth 2\gamma(t - t_0) \quad , \quad (3.60)$$

$$b(t) = -\frac{\gamma}{\sinh 2\gamma(t - t_0)} \quad . \quad (3.61)$$

Neste modelo as trajetórias também são hiperbolas, mas estão definidas numa região deferente do modelo salchicha (*ver fig. 3.2*).

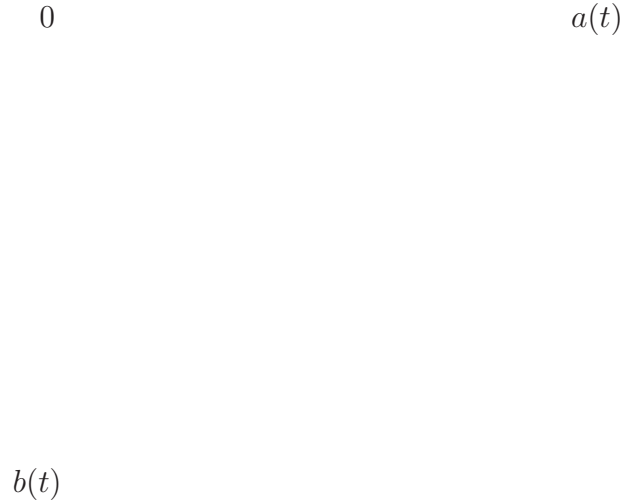


Figura 3.2: *Trajektorias do fluxo do modelo hiperbólico.*

Para esta configuração temos dois limites especiais:

- Quando $t \rightarrow t_0^+$, obtemos o seguinte comportamento

$$a(t) \simeq -b(t) \simeq \frac{1}{2(t-t_0)} \implies e^{\Phi(Y;t)} \simeq 2(t-t_0) \frac{\zeta^2}{\text{sen}^2(\zeta Y)} \quad , \quad (3.62)$$

o qual é universal pois não depende do parâmetro γ . Esta geometria começa com uma curvatura constante negativa $\Lambda^2 = \frac{1}{2(t-t_0)} \rightarrow \infty$ no ponto t_0 onde a aproximação na ordem mais baixa nas equações do grupo de renormalização não vale mais.

- Quando $t \rightarrow +\infty$ as trajetórias fluem em direção aos pontos fixos infravermelhos

$$a = \gamma \quad , \quad b = 0 \quad , \quad (3.63)$$

os quais dependem do parâmetro γ . Neste limite infravermelho a geometria está dada por um cilindro plano de raio $\frac{\zeta}{\sqrt{\gamma}}$,

$$ds^2 = \frac{\zeta^2}{\gamma} (dX^2 + dY^2) \quad . \quad (3.64)$$

Por outro lado, a trajetória fronteira $a(t) = -b(t)$ correspondendo a $\gamma = 0$, análogo ao modelo salchicha, descreve um fluxo especial,

$$e^{\Phi(Y;t)} = 2(t-t_0) \frac{\zeta^2}{\text{sen}^2(\zeta Y)} \quad , \quad (3.65)$$

o qual está associado a uma linha de Liouville do modelo hiperbólico. A geometria desta deformação pode-se visualizar facilmente pois o espaço permanece sempre hiperbólico para todo $t_0 \leq t < +\infty$, com uma curvatura constante negativa

$$R = -\Lambda^2 = \frac{1}{2(t-t_0)} \quad .$$

Esta começa com uma curvatura infinita em $t = t_0$ e flui até uma curvatura zero no limite infravermelho, onde o cilindro plano estende-se até um plano.

Agora, podemos observar que o comportamento do fator conforme perto do limite infravermelho ($\gamma = 0$) está dado por

$$e^{\Phi(Y;t)} \simeq \frac{2\zeta^2}{\gamma} (1 + \cos(2\zeta Y)e^{-2\gamma(t-t_0)} + \mathcal{O}(e^{-4\gamma(t-t_0)})) \quad \text{para } t \rightarrow +\infty \quad , \quad (3.66)$$

isto é, pequenas desvios do limite plano ($R = -\Lambda^2 \rightarrow 0$). Neste caso a perturbação à métrica é proporcional a

$$\Theta(Y;t) = \cos(2\zeta Y)e^{(-2\gamma(t-t_0))} \quad , \quad (3.67)$$

para todo Y . Logo, a equação de Toda contínua fica linear na região infravermelha e reduz-se à equação do calor para $\Theta(Y;t)$,

$$\frac{\partial e^{\Phi}}{\partial t} = \nabla^2 \Phi \quad \implies \quad \frac{2\zeta^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \Theta(Y;t) = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \Theta(Y;t) \quad . \quad (3.68)$$

O fator $\frac{2\zeta^2}{\gamma}$ que aparece no lado esquerdo da equação do calor normalizada vem da normalização da métrica nos pontos infravermelhos $e^{\Phi}|_{\text{I.V}} = \frac{2\zeta^2}{\gamma}$.

Agora, vamos decrever as deformações geométricas dos modelos hiperbólicos mudando da coordenada conforme Y para a coordenada própria \tilde{Y} por meio da seguinte transformação,

$$\tilde{Y} = \sqrt{2} \cosh \gamma (t - t_0) \int \frac{dY}{\sqrt{\cosh 2\gamma (t - t_0) - \cos 2\zeta Y}} = -\frac{1}{\zeta} F(\psi, k) \quad . \quad (3.69)$$

De novo, $F(\psi, k)$ é a integral elíptica incompleta de primeira forma com parâmetro

$$\sin \psi = \begin{cases} \cosh \gamma (t - t_0) \sqrt{\frac{1 - \cos 2\zeta Y}{\cosh 2\gamma (t - t_0) - \cos 2\zeta Y}} \quad , & \text{para } -\frac{\pi}{2\zeta} \leq Y \leq 0 \\ -\cos(\zeta Y) \quad , & \text{para } -\frac{\pi}{\zeta} \leq Y \leq -\frac{\pi}{2\zeta} \end{cases} \quad , \quad (3.70)$$

e módulo $0 \leq k \leq 1$, dado por

$$k = \frac{1}{\cosh \gamma (t - t_0)} \quad . \quad (3.71)$$

Calculando do mesmo jeito que no caso do modelo salchicha, a métrica toma a seguinte forma,

$$ds_t^2 = \begin{cases} \frac{\zeta^2}{\gamma} k'^2 \left(d\tilde{Y}^2 + \frac{1}{k'^2} \operatorname{dn}^2(\zeta\tilde{Y}; k) dX^2 \right), & \text{para } -\frac{K(k)}{2\zeta} \leq \tilde{Y} \leq 0 \\ \frac{\zeta^2}{\gamma} k'^2 \left(d\tilde{Y}^2 + \frac{1}{\operatorname{dn}^2(\zeta\tilde{Y}; k)} dX^2 \right), & \text{para } -\frac{K(k)}{\zeta} \leq \tilde{Y} \leq -\frac{K(k)}{2\zeta} \end{cases}, \quad (3.72)$$

onde o módulo complementar está dado em ambos casos por $k' = \sqrt{1 - k^2}$ e $\operatorname{dn}(u; k)$ é a função elíptica de Jacobi conhecida como *delta de amplitude*. Usando a identidade

$$\operatorname{dn}(u - K(k); k) = \frac{k'}{\operatorname{dn}(u; k)},$$

a métrica assume a seguinte forma

$$ds_t^2 = \frac{\zeta^2}{\gamma} k'^2 \left(d\tilde{Y}^2 + \frac{1}{k'^2} \operatorname{dn}^2(\zeta\tilde{Y}; k) dX^2 \right) \quad \text{com} \quad -\frac{2K(k)}{\zeta} \leq \tilde{Y} \leq 0. \quad (3.73)$$

A mudança de coordenadas (3.69) é só válida para $\cosh 2\gamma(t - t_0) > 1$, ou seja, para $t > t_0$ ou equivalentemente $k > 1$. De fato a forma da métrica resultante (3.73) não está bem definida quando $k' = 0$, que corresponde ao tempo inicial $t = t_0$ e onde a mudança de variáveis está dada simplesmente por

$$d\tilde{Y} = -\zeta \frac{dY}{\operatorname{sen}(\zeta Y)},$$

dando como resultado a forma padrão da métrica hiperbólica nas coordenadas próprias (3.45). A métrica está bem definida para todos os valores $k < 1$, e no limite infravermelho $k = 0$ das deformações toma a forma da métrica de um cilindro plano, onde $\operatorname{dn}(u; k = 0) = 1$ para todo u .

A forma geral da geometria do modelo hiperbólico perto de $k = 0$ é bem parecida a uma “cana”. A distância entre as pontas da cana é igual a $\frac{2K(k)}{\zeta}$, tendendo a infinito quando $k \rightarrow 1$, e quando $k = 0$ toma o valor de $\frac{\pi}{\zeta}$. O ponto meio na região fundamental $-\frac{\pi}{\zeta} \leq Y \leq 0$, isto é $Y = -\frac{\pi}{2\zeta}$, corresponde ao ponto meio $\tilde{Y} = -\frac{K(k)}{\zeta}$ na coordenada própria, onde a cana apresenta uma pequena “lombada”. Esta lombada no limite infravermelho desaparece e a cana toma a forma de um cilindro, em particular na região fundamental será um segmento de cilindro.

Em forma análoga ao modelo salchicha, a métrica do modelo cana também pode ser reescrito tendo em conta a presença de um campo dilaton pois a transformação para

a coordenada própria depende do parâmetro do fluxo t . Usando a expressão para o fluxo do grupo de renormalização generalizado com um campo vetorial ξ , que está dado por $\xi_X = 0$ e $\xi_{\tilde{Y}} = \partial_{\tilde{Y}}\tilde{\Phi}$, encontramos a seguinte solução

$$\begin{aligned} ds_t^2 &= \frac{\zeta^2}{\gamma} k' \left(k' d\tilde{Y}^2 + \left(\frac{\Theta_1(\zeta\tilde{Y})}{\Theta(\zeta\tilde{Y})} \right)^2 dX^2 \right), \\ \tilde{\Phi}(\tilde{Y}) &= \log\Theta(\zeta\tilde{Y}) + \frac{1}{2} \left(\frac{E(k)}{K(k)} - 1 + \frac{1}{2} k^2 \left(1 + \frac{2}{\gamma} k' \right) \right) \tilde{Y}^2 . \end{aligned} \quad (3.74)$$

Para finalizar a discussão sobre as deformações do modelo hiperbólico vamos a discutir a realização de campo livre das trajetórias do fluxo do grupo de renormalização. Aqui vemos que o fator conforme tende assintoticamente a zero da seguinte forma,

$$e^{\Phi(Y;t)} \simeq \frac{4\zeta^2}{b(t)} e^{-2i\zeta|Y|} , \quad Y \rightarrow \pm\infty . \quad (3.75)$$

Então podemos escolher a configuração de campo livre como sendo

$$\Phi_0(Y;t) = 2i\zeta Y + \log \left(-\frac{4\zeta^2}{\gamma} \sinh 2\gamma(t-t_0) \right) , \quad (3.76)$$

a qual pertence à classe de especial de soluções da equação de campo de Toda contínua (2.80) com $c = 2i\zeta$. Como foi feito no caso do modelo salchicha vamos mostrar que a expansão formal em serie de potência nos campos livres baseada na álgebra de Lie contínua $\mathcal{G}(d/dt, \mathbb{I})$ coincide com a expansão em Taylor de $\Phi(Y, t)$ em potências de $e^{2i\zeta Y}$ ordem a ordem. Da forma exata da solução (3.56), expandimos e^Φ na vizinhança de $Y = -\infty$,

$$\begin{aligned} e^{\Phi(Y;t)} &\equiv \frac{2\zeta^2}{a(t) + b(t)\cos(2\zeta Y)} = \frac{4\zeta^2}{2a(t) + b(t)e^{2i\zeta Y} + b(t)e^{-2i\zeta Y}} \\ &= \frac{4\zeta^2}{b(t)} e^{2i\zeta Y} \left[1 - \frac{2a(t)}{b(t)} e^{2i\zeta Y} + \left(4\frac{a^2(t)}{b^2(t)} - 1 \right) e^{4i\zeta Y} - \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \frac{4a(t)}{b(t)} \left(2\frac{a^2(t)}{b^2(t)} - 1 \right) e^{6i\zeta Y} + \mathcal{O}(e^{8i\zeta Y}) \right] . \end{aligned} \quad (3.77)$$

Tomando o logaritmo e usando de novo a identidade do $\log(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$, obtemos a seguinte expansão

$$\begin{aligned} \Phi(Y;t) &= \Phi_0(Y;t) - 2\frac{a(t)}{b(t)} e^{2i\zeta Y} + \left(2\frac{a^2(t)}{b^2(t)} - 1 \right) e^{4i\zeta Y} - \dots \\ &\quad \dots - \frac{2a(t)}{3b(t)} \left(4\frac{a^2(t)}{b^2(t)} - 3 \right) e^{6i\zeta Y} + \mathcal{O}(e^{8i\zeta Y}) . \end{aligned} \quad (3.78)$$

Vamos agora então calcular os primeiros dois termos da expansão (2.86) para este tipo de configuração de campo livre. Para o termo de ordem $e^{2i\zeta Y}$ obtemos,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c^2} \partial_t e^{\Phi_0} &= \frac{1}{(-4\zeta)} \partial_t \left(e^{2i\zeta Y + \log\left(\frac{-4\zeta^2}{\gamma} \sinh 2\gamma(t-t_0)\right)} \right) \\
 &= \frac{1}{-4\zeta^2} e^{2i\zeta Y} \partial_t \left(\frac{-4\zeta^2}{\gamma} \sinh 2\gamma(t-t_0) \right) \\
 &= 2 \cosh 2\gamma(t-t_0) e^{2i\zeta Y} \\
 &= -2 \frac{a(t)}{b(t)} e^{2i\zeta Y} \quad , \tag{3.79}
 \end{aligned}$$

e para o segundo termo temos,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4c^4} \partial_t (e^{\Phi_0} \partial_t e^{\Phi_0}) &= \frac{1}{64\zeta^4} \partial_t \left[\left(\frac{-4\zeta^2}{\gamma} \sinh 2\gamma(t-t_0) \right) (-8\zeta^2 \cosh 2\gamma(t-t_0)) \right] e^{4i\zeta Y} \\
 &= \frac{1}{4\gamma} \partial_t (\sinh 4\gamma(t-t_0)) e^{4i\zeta Y} \\
 &= \cosh 4\gamma(t-t_0) e^{4i\zeta Y} \\
 &= (2 \cosh^2 2\gamma(t-t_0) - 1) e^{4i\zeta Y} \\
 &= \left[2 \frac{a^2(t)}{b^2(t)} - 1 \right] e^{4i\zeta Y} \quad . \tag{3.80}
 \end{aligned}$$

De forma similar podemos calcular o termo $\mathcal{O}(e^{6i\zeta Y})$ na expressão (3.78). Com isto, podemos ver que o modelo hiperbólico é outro bom exemplo para conferir a validade da expansão algébrica em serie de potência das configurações de campo de Toda contínuas. Só por complementaridade podemos estudar a forma que toma a expansão para a linha de Liouville do modelo hiperbólico, isto é, para $\gamma = 0$. Neste caso a configuração de campo livre assume a simples forma,

$$\Phi_0(Y; t) = 2i\zeta Y + \log(-8\zeta^2(t-t_0)) \quad , \tag{3.81}$$

obtendo desta maneira a seguinte expansão

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \log(-8\zeta^2(t-t_0)e^{2i\zeta Y}) + 2e^{2i\zeta Y} + e^{4i\zeta Y} + \frac{2}{3}e^{6i\zeta Y} + \dots \\
 &= \log(-8\zeta^2(t-t_0)e^{2i\zeta Y}) - 2\log(1 - e^{2i\zeta Y}) = \log\left(2(t-t_0)\frac{\zeta^2}{\sin^2\zeta Y}\right) \tag{3.82}
 \end{aligned}$$

Encontramos então que o resultado (3.82) coincide com a forma do fator conforme para esta linha de Liouville que já tínhamos considerado na Eq. (3.65). Este fato mostra igualmente que a nossa escolha da forma da configuração de campo livre é realmente acertada.

3.2.3 Deformação das Soluções Parabólicas

No estudo das deformações das soluções parabólicas sob o fluxo do grupo de renormalização consideraremos o seguinte ansatz para o fator conforme,

$$e^{\Phi(Y;t)} = \frac{1}{a(t) + b(t)Y^2} \quad . \quad (3.83)$$

Podemos ver que a família de métricas correspondente a esta escolha do fator conforme descreve também deformações axialmente simétricas. No caso do modelo parabólico o domínio fundamental escolhido foi $-\infty < Y \leq 0$. Quando $a(t) = 0$ e $b(t) = 1$ a métrica reduz-se à métrica usual de Poincaré (3.47) definido sobre o semi-plano inferior para $Y \leq 0$, ou semi-plano superior para $Y \geq 0$. Para qualquer outros valores de $a(t)$ e $b(t)$ a geometria deformada permanece conformemente plana, as quais satisfazem o seguinte sistema de equações de evolução,

$$a'(t) = 2a(t)b(t) \quad , \quad b'(t) = -2b^2(t) \quad , \quad (3.84)$$

derivadas a partir das equações do fluxo do grupo de renormalização. Aqui podemos notar que a quantidade $a(t)b(t) = \gamma^2$ é conservada, a qual pode ser escolhida a ser positiva de modo que a métrica seja definida positiva para todo valor de Y . Desta forma encontramos a seguinte solução,

$$a(t) = 2\gamma^2(t - t_0) \quad (3.85)$$

$$b(t) = \frac{1}{2(t - t_0)} \quad , \quad (3.86)$$

onde a constante de integração t_0 é o tempo limite inferior de modo que tanto $a(t)$ quanto $b(t)$ são positivas. A forma final do fator conforme será [23],

$$e^{\Phi(Y;t)} = \frac{2(t - t_0)}{4\gamma^2(t - t_0)^2 + Y^2} \quad . \quad (3.87)$$

Aqui as trajetórias do fluxo do modelo hiperbólico são hipérbolas definidas na região $a(t) \geq 0$ e $b(t) \geq 0$, começando desde o ponto $(0, \infty)$ em $t = t_0$ e fluindo até o ponto fixo infravermelho $(\infty, 0)$ para todo $\gamma \neq 0$. No caso $\gamma = 0$, a trajetória é diferente pois o modelo flui ao ponto infravermelho $(0, 0)$ (*ver fig. 3.3*).

A trajetória com $\gamma = 0$ é um fluxo especial,

$$e^{\Phi(Y;t)} = \frac{2(t - t_0)}{Y^2} \quad , \quad (3.88)$$

pois corresponde a uma linha de Liouville do modelo para todo $t \geq t_0$. Esta descreve espaços de curvatura constante negativa $\Lambda^2 = \frac{1}{2(t-t_0)}$ para todos os tempos,

$b(t)$

0

$a(t)$

Figura 3.3: Trajetórias do fluxo do modelo parabólico.

começando desde infinito e fluindo até zero no limite infravermelho $(0, 0)$. Para todas as outras trajetórias com $\gamma \neq 0$ encontramos que a métrica assume a seguinte forma

$$ds_t^2 \simeq \frac{1}{4\gamma^2(t-t_0)}(dX^2 + dY^2) \quad , \quad (3.89)$$

no limite $t \rightarrow +\infty$. Esta métrica limite descreve um cilindro degenerado com um raio caindo a zero para todo $\gamma \neq 0$. Para entender melhor esta geometria limite é conveniente mudar para a coordenada própria,

$$Y = 2\gamma(t-t_0)\sinh\left(\frac{\tilde{Y}}{\sqrt{t-t_0}}\right) \quad , \quad (3.90)$$

para $t > t_0$. Neste caso é bem fácil encontrarmos que a forma que assumida pela métrica está dada por,

$$ds_t^2 = d\tilde{Y}^2 + \frac{dX^2}{4\gamma^2(t-t_0)\cosh^2\left(\frac{\tilde{Y}}{\sqrt{t-t_0}}\right)} \quad . \quad (3.91)$$

Esta geometria parece uma “gota”, cujo tamanho diminui quando $t \rightarrow +\infty$ virando uma linha parametrizada por \tilde{Y} , ou seja, no limite infravermelho a geometria assume a forma de um cilindro de raio zero.

As deformações do modelo parabólico também podem ser estudadas usando o sistema de equações do grupo de renormalização generalizadas. Neste caso encontra-se a seguinte solução,

$$\tilde{\Phi}(\tilde{Y}) = \log \left(\cosh \frac{\tilde{Y}}{\sqrt{t-t_0}} \right) - \frac{\tilde{Y}^2}{4(t-t_0)} \quad . \quad (3.92)$$

Por outro lado, o fator conforme (3.83) neste caso tende assintoticamente a zero na seguinte forma,

$$e^{\Phi(Y;t)} \simeq \frac{1}{b(t)} Y^{-2} = \frac{2(t-t_0)}{Y^2} \quad , \quad Y \rightarrow -\infty \quad , \quad (3.93)$$

a qual corresponde à linha de Liouville (3.88). Aqui poderíamos estar tentados escolher a seguinte configuração,

$$\Phi_0 = -2 \log Y + \log 2(t-t_0) \quad , \quad (3.94)$$

como sendo a configuração de campo livre, mas como pode ser notado está não pertence à classe especial de soluções de campo de Toda contínuas (2.80), pois neste caso não existem as funções holomorfas e anti-holomorfas $f_{\pm}(z_{\pm}; t)$ tal que Φ_0 seja efetivamente da forma (2.65), fato sobre o qual está baseado totalmente o método para achar as soluções.

3.2.4 Deformação das Soluções Elípticas

Para estudar as deformações do modelo elíptico vamos assumir que o fator conforme com simetria axial está dado pelo seguinte ansatz,

$$e^{\Phi(Y;t)} = \frac{2\zeta^2}{a(t) + b(t)\cosh(2\zeta Y)} \quad , \quad (3.95)$$

o qual é bem parecido ao do modelo salchicha mas aqui o fluxo está definido para um domínio diferente. No caso $a(t) = -1$ e $b(t) = 1$, obtemos a métrica usual do modelo elíptico (3.51) com a curvatura constante negativa normalizada $\Lambda^2 = -1$. Por tanto a região fundamental para descrever as deformações deste modelo corresponde a $b(t) \geq -a(t) \geq 0$. Usando este ansatz encontramos que as equações de evolução das funções $a(t)$ e $b(t)$ são idênticas às do modelo salchicha, isto é,

$$a'(t) = 2b^2(t) \quad , \quad b'(t) = 2a(t)b(t) \quad , \quad (3.96)$$

mas neste caso a quantidade conservada é $\gamma^2 = b^2 - a^2$. Escolhendo como é usual γ sendo uma constante real positiva, encontramos a seguinte solução geral

$$a(t) = -\gamma \cot 2\gamma(t-t_0) \quad , \quad b(t) = \frac{\gamma}{\text{sen} 2\gamma(t-t_0)} \quad . \quad (3.97)$$

No espaço dos parâmetros (a, b) as órbitas do fluxo são periódicas no tempo com período igual a $\frac{\pi}{\gamma}$. Todas as trajetórias começam em $(-\infty, \infty)$. Para o tempo t_0 . Após um tempo $t = t_0 + \frac{\pi}{4\gamma}$ o coeficiente $a(t)$ é zero. Depois $a(t)$ toma valores positivos aproximando-se à linha de Liouville do modelo salchicha quando $t = t_0 + \frac{\pi}{2\gamma}$. Continuando o fluxo para valores além do tempo $t = t_0 + \frac{\pi}{2\gamma}$ encontramos que tanto $a(t)$ quanto $b(t)$ tomam valores negativos, os quais não são trajetórias físicas para nosso modelo. Esta região não física corresponde à reflexão da região fundamental ao longo do eixo $a(t)$. Após um período as trajetórias repetem-se, oscilando entre estas duas regiões. Por esta razão, as deformações geométricas do modelo elíptico não possuem um limite infravermelho neste ansatz. Este resultado pode estar ligado à existência da singularidade cônica na origem (*ver fig. 3.4*).

$b(t)$

0 $a(t)$

Figura 3.4: *Trajektorias do fluxo do modelo elíptico*

Não obstante para $\gamma = 0$ temos a solução ,

$$b(t) = -a(t) = \frac{1}{2(t - t_0)} \quad , \quad e^{\Phi(Y;t)} = 2(t - t_0) \frac{\zeta^2}{\sinh^2(\zeta Y)} \quad , \quad (3.98)$$

a qual corresponde a uma linha de Liouville do modelo elíptico. Esta trajetória especial é basicamente a fronteira da região física e descreve a deformação do modelo elíptico com métricas de curvatura constante negativa $R = -\Lambda^2 = -\frac{1}{2(t-t_0)}$ para todo t . Neste caso as trajetórias começam com uma curvatura negativa infinita e fluem até curvatura zero na região infravermelha $t \rightarrow +\infty$. Podemos então descrever as deformações na coordenada própria \tilde{Y} , definida por,

$$\tilde{Y} = -\log \left(\tanh \left(-\frac{\zeta Y}{2} \right) \right) \quad . \quad (3.99)$$

A métrica nesta coordenada assume a seguinte forma,

$$ds^2 = 2(t - t_0) \left[\zeta^2 \sinh^2 \tilde{Y} (dX)^2 + (d\tilde{Y})^2 \right] \quad , \quad (3.100)$$

onde tem sido usada a relação

$$\sinh\tilde{Y} = \frac{1}{\sinh\zeta Y} \quad , \quad (3.101)$$

a qual pode-se encontrar simplesmente derivando a transformação (3.99). Agora, insistindo em reabsorbermos o fator do tempo por meio da redefinição

$$Y' = \sqrt{2(t-t_0)}\tilde{Y} \quad , \quad (3.102)$$

encontramos que a métrica no limite infravermelho, $t \rightarrow +\infty$, toma a seguinte forma

$$ds^2 \simeq (dY')^2 + \zeta^2 Y'^2 (dX)^2 \quad . \quad (3.103)$$

Por tanto o ponto final desta trajetória especial $\gamma = 0$ é um cone plano bi-dimensional com um ângulo de abertura igual a $2\pi\zeta$. A forma da métrica (3.103) mostra que geometria deforma-se desde um cone negativamente curvado até um cone plano bi-dimensional, mas o ângulo de abertura permanece constante ao longo do fluxo. No proximo capitulo vamos discutir um pouco mais sobre a geometria dos cones bi-dimensionais.

Para completar a discussão do modelo elíptico vamos discutir a realização de campo livre das trajetórias do grupo de renormalização. Com a experiência que já temos é bem fácil mostrar que a expansão formal para a solução geral da equação de Toda coincide com a expansão em Taylor do fator conforme. Além do mais comparando os dois fatores conformes (3.56) e (3.95) pode-se notar que as soluções hiperbólicas e elípticas estão relacionadas por uma continuação analítica tanto no parâmetro ζ quanto no tempo t . Por tanto vamos seleccionar

$$\Phi_0 = 2\zeta Y + \log \left[\frac{4\zeta^2}{\gamma} \text{sen}2\gamma(t-t_0) \right] \quad , \quad (3.104)$$

como a configuração de campo livre. Esta igualmente pertence à classe especial de campos livres (2.80) com $c = 2\zeta$. Então, para esta escolha em particular obtemos a seguinte expansão

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \frac{1}{c^2} \partial_t e^{\Phi_0} + \frac{1}{4c^4} \partial_t (e^{\Phi_0} \partial_t e^{\Phi_0}) + \dots \\ &= \Phi_0 + 2\cos 2\gamma(t-t_0) e^{2\zeta Y} + (2\cos^2 2\gamma(t-t_0) - 1) e^{4\zeta Y} + \dots \\ &= \Phi_0 - 2\frac{a(t)}{b(t)} e^{2\zeta Y} + \left(2\frac{a^2(t)}{b^2(t)} - 1 \right) e^{4\zeta Y} + \dots \quad , \end{aligned} \quad (3.105)$$

a qual mostra que nossa escolha é realmente conveniente. Resumindo, mesmo que neste modelo só existe uma trajetória física que corresponde à linha de Liouville e

que possui um limite infravermelho bem definido, encontramos que a solução formal de Leznov-Saveliev nos permite construir o fator conforme, ou seja, nos dá todas as métricas correspondentes às trajetórias do fluxo do grupo de renormalização para nosso modelo elíptico.

Capítulo 4

Queda das Singularidades Cônicas

Vamos considerar outras soluções exatas das equações do grupo de renormalização que descrevem a queda das singularidades cônicas em espaços compactos. Como foi já mencionado no capítulo 1, este processo fornece uma realização não-linear das propriedades dissipativas da equação do calor, onde a geometria possui um limite infravermelho bem definido. O principal exemplo é a queda de um cone bi-dimensional \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n , com $n \geq 2$, para um espaço plano, e pode-se generalizar a uma transição para um outro cone \mathbb{C}/\mathbb{Z}_m , com $m < n$. O cone é a configuração singular mais simples onde a geometria é sempre plana a menos de um ponto. Sua curvatura tem uma singularidade tipo delta na ponta do cone de forma similar ao que acontece com a solução Gaussiana já discutida. A evolução sob o grupo de renormalização está bem descrita, mas a estrutura algébrica é bem mais complicada. Por outro lado, esta solução é interessante porque tem uma relação com o problema de condensação dos táquions na teoria de corda fechada, pois os modelos em “orbifolds” (*que nem o cone*) possuem estados taquiônicos no seu espectro [34, 35]. Por tanto este problema na teoria de cordas tem uma relação com a álgebra de dimensão infinita $\mathcal{G}(\frac{d}{dt}; \mathbb{I})$ que ainda não tem sido bem estudada.

4.1 Queda de um Cone Plano

Um cone bi-dimensional é um exemplo simples de uma “orbifold” a qual é uma estrutura topológica bem geral. Para nosso objetivo podemos entender uma “orbifold” como um espaço compactificado X/G , dado por uma variedade diferenciável X e um grupo de isometria G . A definição da orbifold sendo um espaço quociente dá surgimento a pontos de singularidade, isto é, as teoria quânticas de campo definidas sobre orbifolds apresentam singularidades nos pontos fixos da ação do grupo G . O exemplo mais simples é o cone \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 , o qual é o resultado da isometria $z \rightarrow -z$.

A geometria do cone bi-dimensional \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n em coordenadas polares está dada por,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad , \quad (4.1)$$

onde $0 \leq \phi \leq \frac{2\pi}{n}$, o ângulo de abertura é $\frac{2\pi}{n}$ e o ângulo déficit é $2\pi \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Podemos passar para as coordenadas conformemente planas por meio da seguinte transformação,

$$\rho = r^n \quad , \quad \theta = n\phi \quad , \quad (4.2)$$

por tanto a métrica assume a seguinte forma equivalente,

$$ds^2 = 2e^{\Phi(\rho)} (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2) \quad , \quad (4.3)$$

com

$$\Phi(\rho) = 2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \log \rho + \text{constant} \quad . \quad (4.4)$$

Usando as coordenadas complexas $z_{\pm} = \rho e^{\pm i\theta}$, a métrica do cone toma a seguinte forma,

$$ds^2 = \frac{2}{(z_+ z_-)^{1-1/n}} dz_+ dz_- \quad . \quad (4.5)$$

Esta métrica descreve a geometria da orbifold \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n cujo ponto fixo está na ponta do cone em $z = 0$ onde a curvatura é infinita $R \sim \delta(z)$. Por tanto espera-se o fluxo do grupo de renormalização regularizar a singularidade da curvatura na região infravermelha e induza uma transição para um plano bi-dimensional.

Agora, vamos estudar a solução exata que descreve a transição do cone para um plano. Para isso, consideraremos o fluxo do grupo de renormalização puramente gravitacional com a liberdade de difeomorfismo no target,

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial t} = -R_{\mu\nu} + \nabla_{\mu} \xi_{\nu} + \nabla_{\nu} \xi_{\mu} \quad , \quad (4.6)$$

e vamos escolher o ansatz de Minwalla, et. al. [35],

$$ds^2 = t(f^2(r)dr^2 + r^2 d\phi^2) \quad , \quad \xi_r = \frac{1}{2} r f(r) \quad , \quad \xi_{\phi} = 0 \quad . \quad (4.7)$$

Esta é uma escolha conveniente para descrever o processo da queda do cone. Aqui a dependência do tempo esta fatorizada e aparece numa forma linear. A coordenada radial toma valores em todos os reais e a coordenada angular é periodica, $0 \leq \phi \leq \frac{2\pi}{n}$.

Calculando as componentes não nulas da conexão como é usual, encontramos o seguinte resultado,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f'(r)}{f(r)} \quad , \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{f^2(r)} \quad , \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} = \Gamma_{12}^2 \quad , \quad (4.8)$$

e as componentes do tensor de Ricci,

$$R_{rr} = \frac{f'(r)}{rf(r)} \quad , \quad R_{\phi\phi} = r\frac{f'(r)}{f^3(r)} \quad , \quad R_{r\phi} = 0 \quad . \quad (4.9)$$

Por tanto, a equação do grupo de renormalização reduz-se à seguinte equação diferencial para a função $f(r)$,

$$f'(r) = rf^2(r)[1 - f(r)] \quad . \quad (4.10)$$

Se introduzimos umas novas variáveis x e y da seguinte forma,

$$x = \frac{1}{2}r^2 \quad , \quad y(x) = \frac{1}{f(x)} - 1 \quad , \quad (4.11)$$

a Eq. (4.10) simplifica-se a,

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{y(x)}{1 + y(x)} \quad . \quad (4.12)$$

A solução desta equação está dada simplesmente por,

$$\left(\frac{1}{f(x)} - 1\right) \exp\left(\frac{1}{f(x)} - 1\right) = C e^{-x} \quad , \quad (4.13)$$

onde C é uma constante de integração positiva e arbitrária que pode ser parametrizada em termos de $n \geq 1$, da seguinte forma

$$C = (n - 1) \exp(n - 1) \quad . \quad (4.14)$$

Se observamos o comportamento da função f , encontramos que para $r = 0$ ou $x = 0$ a função toma o valor de $f(0) = \frac{1}{n}$, em quanto que para $r = \infty$ ou $x = \infty$ temos que $f \rightarrow 1$.

Agora vamos mostrar que essa solução é a mais geral possível com dependência no tempo linear fatorizada, considerando o ansatz generalizado,

$$\begin{aligned} ds^2 &= t(f^2(r)dr^2 + g^2(r)d\phi^2) \quad , \\ \xi_r &= \xi(r) \quad , \quad \xi_\phi = 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nesta caso as componentes do tensor de curvatura de Ricci são,

$$R_{rr} = -\frac{g''(r)}{g(r)} + \frac{f'(r)g'(r)}{f(r)g(r)}$$

$$R_{\phi\phi} = -\frac{g(r)g''(r)}{f^2(r)} + \frac{g(r)g'(r)f'(r)}{f^3(r)} \quad (4.16)$$

$$R_{r\phi} = 0 \quad (4.17)$$

Desta forma as equações do grupo de renormalização que obtem-se são,

$$f(r) = \frac{1}{g(r)} \left(\frac{g'(r)}{f(r)} \right)' + 2 \left(\frac{\xi(r)}{f(r)} \right)' ,$$

$$g(r) = \frac{1}{f(r)} \left(\frac{g'(r)}{f(r)} \right)' + 2 \frac{g'(r)}{f^2(r)} \xi(r) . \quad (4.18)$$

A partir dessa duas equações pode-se ver fácilmente que a quantidade $\frac{\xi}{fg}$ é independente de r . Sem perda de generalidade podemos escolher

$$\xi(r) = \frac{1}{2} f(r) g(r) , \quad (4.19)$$

o qual coincide com o ansatz (4.7) quando $g(r) = r$. Com isto, podemos ver que o sistema (4.18) pode-se simplificar à equação

$$f(r)g(r) = \left(\frac{g'(r)}{f(r)} + \frac{1}{2} g^2(r) \right)' . \quad (4.20)$$

Neste caso a solução geral está dada por

$$\left(\frac{g'(r)}{f(r)} - 1 \right) \exp \left(\frac{g'(r)}{f(r)} - 1 \right) = C \exp \left(-\frac{1}{2} g^2(r) \right) , \quad (4.21)$$

onde C é uma constante de integração arbitrária. O fato que $g(r)$ sempre pode-se escolher como sendo r , simplesmente redefinindo a variável radial, mostra que a solução (4.13) é mesmo a deformação do espaço cônico mais geral que preserva a simetria axial. A interpretação física da solução pode-se entender melhor introduzindo a seguinte mudança de variáveis,

$$\tilde{r} = r\sqrt{t} , \quad (4.22)$$

por tanto a métrica assume a seguinte forma,

$$d\tilde{s}^2 = f^2(\tilde{r})d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\phi^2 . \quad (4.23)$$

Então, tomando \tilde{r} fixo, pode-se ver que para o limite $t \rightarrow 0$ correspondente a $r \rightarrow \infty$, ou seja a $f = 1$, a métrica toma a seguinte forma

$$d\tilde{s}_{t \rightarrow 0}^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\phi^2 , \quad (4.24)$$

a qual descreve um cone com ângulo de abertura de $\frac{2\pi}{n}$ no tempo inicial. Agora, mantendo \tilde{r} fixo, a métrica para o limite $t \rightarrow \infty$, que corresponde a $r \rightarrow 0$ ou $f = \frac{1}{n}$, toma a seguinte forma

$$d\tilde{s}^2 = \frac{1}{n^2} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\phi^2 \quad . \quad (4.25)$$

Esta descreve a geometria de um plano bi-dimensional, a menos o fator de escala $\frac{1}{n^2}$, no limite infravermelho do fluxo do grupo de renormalização. Para valores genéricos de t , o espaço bi-dimensional é cônico em infinito e suave na origem, onde a curvatura está dada por,

$$R = \frac{2}{t} \frac{f'(r)}{r f^3(r)} \equiv \frac{2}{t} \left(\frac{1}{f(r)} - 1 \right) \quad . \quad (4.26)$$

Então para $r \rightarrow 0$, a curvatura está dada por $R = \frac{2}{t} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)$.

A solução exata (4.13) pode ser usada para descrever a transição do cone \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n para um \mathbb{C}/\mathbb{Z}_m , com $m < n$, escolhendo a constante de integração como,

$$C = \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \exp \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \quad . \quad (4.27)$$

Aqui $0 \leq \phi \leq \frac{2\pi}{n}$, o qual é o ângulo de abertura do cone \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n no tempo inicial $t = 0$. Tomando \tilde{r} fixo, no limite $t \rightarrow +\infty$ ou $r \rightarrow 0$, obtemos

$$d\tilde{s}^2 = \frac{m^2}{n^2} [d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2] \quad , \quad (4.28)$$

a métrica do cone com um ângulo de abertura igual a $\frac{2\pi}{m}$, a menos do fator de escala $\frac{m^2}{n^2}$.

A solução que descreve a transição $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}_m$ pode ser apresentada também nas coordenadas conforme considerando a seguinte mudança de variáveis,

$$\rho^2(r) = \exp \left(\frac{n}{m} \int^{r^2/2} dx \frac{f(x)}{x} \right) \quad , \quad \tilde{\phi} = \frac{n}{m} \phi \quad , \quad (4.29)$$

a qual deixa a métrica na seguinte forma conforme,

$$ds^2 = 2te^{\Phi(\rho)} \left(d\rho^2 + \rho^2 d\tilde{\phi}^2 \right) \quad (4.30)$$

com o fator $\Phi(\rho)$ dado por,

$$e^{\Phi(\rho)} = \frac{m^2}{n^2} \frac{r^2}{2\rho^2} \equiv \exp \left(\int_0^{r^2/2} \frac{dx}{x} \left(1 - \frac{n}{m} f(x) \right) \right) \quad . \quad (4.31)$$

Aqui $0 \leq \tilde{\phi} \leq \frac{2\pi}{m}$ e a métrica (4.30) está relacionada conformemente com a métrica do cone \mathbb{C}/\mathbb{Z}_m , a qual corresponde ao ponto final da transição. A mudança de coordenadas altera também a forma do campo ξ , o qual fica da seguinte forma

$$\xi_\rho = \rho \exp(\Phi/2) \quad . \quad (4.32)$$

O fato que $\xi_\rho \neq 0$ implica que $\Phi(\rho)$ não satisfaz a equação de Liouville, pois no caso contrario a métrica conforme (4.30) teria uma solução tipo linha de Liouville com a dependência de t fatorizada linearmente. Agora, absorberemos a dependência de t reescalando

$$\tilde{\rho} = \sqrt{t}\rho \quad , \quad (4.33)$$

por tanto a métrica fica da seguinte forma,

$$ds^2 = 2e^{\Phi(\tilde{\rho};t)} \left(d\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2 d\tilde{\phi}^2 \right) \quad . \quad (4.34)$$

Com a métrica nesta forma, podemos encontrar a solução da equação de campo de Toda contínua $\Phi(\tilde{\rho}; t)$ expandindo em serie de potência na variável $\tilde{\rho}$. Primeiro, vamos ver que se m e n são bem grandes a equação do fluxo do grupo de renormalização vira linear e obtemos uma equação de fluxo do calor. Definindo $m = n - k$, com k arbitrário mas finito, obtemos o seguinte,

$$\left(\frac{n}{m} - 1 \right) = \frac{k}{n} \left[1 - \frac{k}{n} \right]^{-1} \simeq \frac{k}{n} \left[1 + \frac{k}{n} \right] \quad (4.35)$$

e

$$C \simeq \frac{k}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad . \quad (4.36)$$

Por esta razão a função $f(x)$ pode ser aproximada pela função

$$f(x) \simeq 1 - \frac{k}{n} e^{-x} \quad . \quad (4.37)$$

Então usando a Eq. (4.29) obtemos

$$\begin{aligned} \rho^2(r) &= \exp\left(\frac{n}{m} \int^{r^2/2} dx \frac{f(x)}{x}\right) \\ &\simeq \exp\left[\left(1 + \frac{k}{n}\right) \int^{r^2/2} dx \frac{1}{x} \left(1 - \frac{k}{n} e^{-x}\right)\right] \\ &\simeq \frac{r^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad . \end{aligned} \quad (4.38)$$

A partir da Eq. (4.31) encontramos Φ como função de ρ na ordem mais baixa em $\frac{1}{n}$,

$$\Phi(\tilde{\rho}; t) \simeq -\frac{k}{n} \int_0^{\tilde{\rho}^2/t} \frac{dx}{x} (1 - e^{-x}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) . \quad (4.39)$$

Para todo valor de t , $\Phi(\tilde{\rho}; t)$ permanece pequeno e por tanto a equação de campo de Toda pode ser aproximada pela equação de calor. Então usando a seguinte expansão,

$$\int_0^z \frac{dx}{x} (1 - e^{-x}) \simeq C + \log z + \frac{e^{-z}}{z} \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{2!}{z^2} - \frac{3!}{z^3} + \dots\right), \quad (4.40)$$

válida para $z = \frac{\tilde{\rho}^2}{t}$ grande, encontramos que a solução (4.39) interpola-se suavemente entre a função $\Phi(\tilde{\rho}; t = 0) = -2 \left(\frac{k}{n}\right) \log \tilde{\rho}$, a qual descreve o fator conforme do cone inicial \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n no referencial do $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{n-k}$, e a função constante $\Phi(\tilde{\rho}; t = +\infty) = 0$, a qual corresponde ao ponto final da transição no mesmo referencial.

Agora, considerando m, n finitos vamos estudar o comportamento infravermelho da transição geométrica $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}_m$, expandindo a função $f(x)$ ao redor de $x = 0$. A partir da Eq. (4.13) encontramos que a serie fica da seguinte forma,

$$f(x) = \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2} \left(1 - \frac{m}{n}\right) x + \frac{1}{2} \frac{m^3}{n^3} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left(2 - 3\frac{m}{n}\right) x^2 + \dots . \quad (4.41)$$

Substituindo em (4.29), obtemos

$$\rho^2(r) = \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \frac{r^2}{2} + \frac{1}{4} \frac{m^2}{n^2} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left(4 - 5\frac{m}{n}\right) \frac{r^4}{4} + \dots\right) , \quad (4.42)$$

a qual pode ser invertida para encontrar a expansão em serie de potência de $r(\rho)$,

$$\frac{r^2}{2\rho^2} = 1 - \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \rho^2 + \frac{1}{4} \frac{m^2}{n^2} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left(4 - 3\frac{m}{n}\right) \rho^4 + \dots . \quad (4.43)$$

Tendo em conta o reescalamento (4.33) obtemos que o comportamento infravermelho do fator conforme está dado por,

$$e^{\Phi(\tilde{\rho}; t)} = 1 - \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \frac{\tilde{\rho}^2}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) . \quad (4.44)$$

Consideraremos agora a realização de campo livre da solução geral para o processo da queda do cone plano. A partir da equação do fluxo (4.13) podemos expandir a função $f(x)$ como a seguinte serie infinita

$$f(x) = 1 - Ce^{-x} + \frac{1}{2!} (2C)^2 e^{-2x} - \frac{1}{3!} (3C)^3 e^{-3x} + \frac{1}{4!} (4C)^4 e^{-4x} + \dots , \quad (4.45)$$

a qual vale para todo x e C está dado por (4.27). Esta expansão é bastante útil na região infravermelha, isto é, para $x \rightarrow \infty$. Por tanto, só considerando os primeiros termos temos que configuração de campo livre pode ser escolhida como,

$$\Phi_0(z_+, z_-; t) = - \left(1 - \frac{m}{n}\right) \log \frac{z_+ z_-}{t} , \quad \text{com } \tilde{\rho}^2 = z_+ z_- . \quad (4.46)$$

Depois de alguns cálculos pode-se conferir que esta configuração reproduz a solução da equação de campo de Toda contínua dada por (4.31), de acordo com a expansão em serie (2.68), onde as funções $f^\pm(z_\pm; t)$ podem-se escolher sendo,

$$f^\pm(z_\pm; t) = -\frac{k}{n} \log z_\pm + \frac{k}{2n} \log t \quad , \quad \text{com } k = n - m . \quad (4.47)$$

Resumindo, o processo da queda do cone \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n constitui o exemplo mais simples da ação do grupo de renormalização sobre um espaço não-compacto bi-dimensional com uma singularidade inicial, localizada na ponta do cone, e que dissipa-se após um tempo longo mas finito quando ocorre a transição para o plano bi-dimensional. Recentemente, tem-se percebido que este processo tem aplicação na teoria de cordas no estudo da condensação de táquions [34, 35]. A aproximação por fluxo do grupo de renormalização na teoria de cordas está baseada na suposição que a evolução dinâmica da teoria de cordas pode ser bem aproximada na teoria de folha mundo fluindo desde um ponto crítico até outra solução conforme mais estável. As instabilidades no espaço target são indicadas pela presença de estados taquiônicos no espectro da corda. Por exemplo, podemos considerar o vácuo da corda como sendo da forma $C = CFT_2 + R^{7,1}$, onde a parte conforme CFT_2 corresponde a uma teoria de campo sobre \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n , com carga central $c = 2$. Este vácuo é instável por causa da existência de estados taquiônicos no setor torcido da orbifold, os quais estão localizados na ponta do cone, e induzem transições para vácuos mais estáveis, reduzendo assim a ordem da singularidade. A singularidade se suaviza completamente após a transição do cone para o plano bi-dimensional como consequência do fluxo do grupo de renormalização. Em poucas palavras, a condensação dos táquions é importante para o problema da seleção do vácuo na teoria de cordas por métodos dinâmicos, e o fluxo de Ricci pode ser um bom caminho.

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho mostramos que as equações da função beta dos modelos- σ não-lineares bi-dimensionais admitem uma formulação de curvatura zero por meio da álgebra de Lie contínua de dimensão infinita $\mathcal{G}(\frac{d}{dt}; \mathbb{I})$. Os geradores de Weyl são suficientes para formularmos as deformações métricas bi-dimensionais dos espaços “target” como uma equação de campo de Toda usando o sistema de coordenadas conformemente planas no espaço target. Construímos a solução geral em termos dos campos livres bi-dimensionais por meio das transformações de Bäcklund, e descrevemos também a expansão em série de potência das configurações de campo não-lineares usando a estrutura algébrica da teoria de campo de Toda. Alguns exemplos dos fluxos do grupo de renormalização para espaços compactos e não-compactos foram examinados, e forneceram uma base para a validade da expansão formal da solução geral da equação de Toda contínua para escolhas apropriadas das configurações de campo livre.

O modelo “salchicha” surgiu no estudo das deformações que preservam a simetria axial do modelo- σ $O(3)$ padrão, e descreve a transição desde a geometria de um cilindro infinito na região ultravioleta até uma superfície esférica com o raio se anulando para um valor finito da escala de energia da folha mundo. O modelo “cana”, o qual foi introduzido por consideração das deformações que preservam simetria axial das métricas de curvatura constante negativa, descreve a transição desde um espaço com uma curvatura negativa infinita até uma geometria em forma de cana com largura e comprimento variáveis na região infravermelha. Ambos os casos foram descritos nas coordenadas próprias, onde as deformações geométricas ficaram um pouco mais fácil para visualizarmos. Deve-se aqui comentar que, as trajetórias são fisicamente válidas só nas regiões onde a curvatura permanece pequena, pois foi assim considerado na aproximação na ordem mais baixa na função beta. Finalmente, também estudamos a transição desde um cone bi-dimensional \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n para o plano, o qual mostrou a natureza dissipativa da equação de campo de Toda não-linear, a qual regulariza a singularidade cônica após um tempo finito.

As perspectivas de continuação deste trabalho são varias. Entre os assuntos que não foram abordados neste trabalho e que merecem atenção, primeiro podemos citar o estudo da estrutura geral das álgebras de Lie contínuas, particularmente a estrutura da álgebra $\mathcal{G}(\frac{d}{dt}; \mathbb{I})$. Apesar que, nosso caso esta estrutura toda não é necessaria para formularmos a equação da função beta como um sistema de Toda, a possível utilidade das equações de campo de Toda de multiple componentes, a qual pode ser naturalmente introduzida considerando condições de curvatura zero com formas de conexão tomando valores nos subespaços $\mathcal{G}_{-N} \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_N$ com $N > 1$, merece um estudo com mais detalhes. Desde o ponto de vista metemático, poderíamos estudar além da suas representações, as definições das formas bilineares e a construção das correntes conservadas, como também a construção dos sistemas de raízes e suas reflexões de uma maneira sistematica.

Outro assunto importante é o estudo das extensões supersimétricas das álgebras de Lie contínuas. Alguns trabalhos tem sido feitos em direção a este problema [36, 37]. Na referência [37] a noção de superálgebra de Lie contínua foi introduzida para estabelecer a formulação de curvatura zero do fluxo de Calabi bi-dimensional, estendendo o parâmetro t a um superespaço $R^{1|1}$ com coordenadas (t, θ) .

Finalmente seria também importante estudar se existem formulações análogas para outro tipo de fluxo, i.e. o fluxo de curvatura media, e suas relações com as álgebras de Lie contínuas e mesmos com as teorias quânticas de campo em duas o mais dimensões.

Referências

- [1] M. Saveliev, “*Integro-differential non-linear equations and continual Lie algebras*”, Commun. Math. Phys. **121** (1989) 283.
- [2] M. Saveliev e A.M. Vershik, “*New examples of continuum graded Lie algebras*”, Phys. Lett. **A143** (1990) 121.
- [3] M. Saveliev e A.M. Vershik, “*Continual analogs of contragredient Lie algebras (Lie algebras with a Cartan operator and nonlinear dynamical systems)*”, Commun. Math. Phys. **126** (1989) 367.
- [4] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton 2003.
- [5] D. J. Gross e F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of nonabelian gauge theories*, Phys. Rev.Lett. **30** (1973) 1343.
- [6] H. D. Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions ?*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [7] G. 't Hooft, *Remarks at the Colloquium on Renormalization of Yang-Mills fields and applications to particle physics*, Marseille 1972.
- [8] A.M. Polyakov, “*Interaction of Goldstone particles in two dimensions. Applications to ferromagnets and massive Yang-Mills fields*”, Phys. Lett. **B59** (1975) 79; “*Gauge Fields and Strings*”, Contemporary Concepts in Physics, **volume 3**, Harwood Academic Publishers, Chur, 1987.
- [9] D. Friedan, “*Nonlinear models in $2 + \epsilon$ dimensions*”, Phys. Rev. Lett.**45** (1980) 1057; “*Nonlinear models in $2 + \epsilon$ dimensions*”, Ann. Phys. **163** (1985) 318.
- [10] H.-D.Cao, B Chow, S.-C Chu e S.-T. Yau eds, “*Collected papers on Ricci flow*”, Series in Geometry and Topology, **vol. 37**, International Press, Somerville, 2003.
- [11] B. Chow e D. Knopf, “*The Ricci flow : An introduction*”, Mathematical Surveys and Monographs, **vol. 110**, American Mathematical Society, Providence, 2004.

- [12] L. Alvarez-Gaume e D. Freedman, “*Kähler geometry and the renormalization of supersymmetric sigma models*”, Phys. Rev. **D22** (1980) 846; L. Alvarez-Gaume, D. Freedman e S. Mukhi, “*The background field method and the ultraviolet structure of the supersymmetric nonlinear sigma model*”, Ann. Phys. **134** (1981) 85.
- [13] A. Tseytlin, “*Conformal anomaly in two-dimensional sigma model on curved background and strings*”, Phys. Lett. **B178** (1986) 34; C. Callan, I. Klebanov e M. Perry, “*String theory effective actions*”, Nucl. Phys. **B278** (1986) 78; G. Shore, “*A local renormalization group equation, diffeomorphisms, and conformal invariance in sigma models*”, Nucl. Phys. **B286** (1987) 349.
- [14] L. P. Eisenhart, “*Transformations of surfaces*”, Princeton University Press, (1923), (Reprinted by Chelsea Publishing Company, New York, 1962).
- [15] I. Bakas, “*The algebraic structure of geometric flows in two dimensions*”, JHEP **0510** (2005) 038; “*Dirichlet sigma models and mean curvature flow*”, JHEP **0706** (2007) 057.
- [16] M. Toda, “*Theory of Non-linear Lattices*”, second edition, Springer, Berlin, 1989; M. Olshanetsky e A. Perelomov, “*Classical integrable finite dimensional systems related to Lie algebras*”, Phys. Rept. **71** (1981) 313.
- [17] A. Leznov e M. Saveliev, “*Representation of zero curvature for the system of non-linear partial differential equations $x_{a,z\bar{z}} = \exp(kx)_a$ and its integrability*”, Lett. Math. Phys. **3** (1979) 489; “*Representation theory and integration of non-linear spherically symmetric equations to gauge theories*”, Commun. Math. Phys. **74** (1980) 111.
- [18] A. Leznov e M. Saveliev, “*Exactly and completely integrable nonlinear dynamical systems*”, Acta Appl. Math. **16** (1989) 1; “*Group Theoretical Methods for Integration of Non-linear Dynamical Systems*”, Birkhäuser, Basel, 1992.
- [19] P. Mansfield, “*Solution of Toda systems*”, Nucl. Phys. **B208** (1982) 277; D. Olive e N. Turok, “*Algebraic structure of Toda systems*”, Nucl. Phys. **B220** (1983) 491.
- [20] M. V. Saveliev e S. A. Savelieva, “ *W_∞ -geometry and associated continuous Toda systems*”, Phys. Lett. **B313** (1993) 55.
- [21] M. Saveliev, “*On the integrability problem of a continuous Toda system*”, Theor. Math. Phys. **92** (1992) 1024.
- [22] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomez e A. H. Zimerman, “*Kac-Moody construction of Toda type field theories*”, Phys. Lett. **254B** (1991) 372.

- [23] M. Saveliev e A.M. Vershik, “*A new class of infinite-dimensional Lie algebras (continuum Lie algebras) and associated nonlinear systems*”, in *Differential Geometric Methods in Theoretical Physics*, eds. C. Bartocci, U. Bruzzo e R. Cianci, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [24] R. Kashaev, M. Saveliev, S.A. Savelieva e A.M. Vershik, “*On nonlinear equations associated with Lie algebras of diffeomorphism groups of two-dimensional manifolds*”, in *Ideas and Methods in Mathematics and Physics, in memory of R. Hoegh-Krohn*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [25] C. Boyer e J. Finley, “*Killing vectors in self-dual Euclidean Einstein spaces*”, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 1126; J. Gegenberg e A. Das, “*Stationary Riemannian space-times with self-dual curvature*”, *Gen. Rel. Grav.* **16** (1984) 817.
- [26] I. Bakas, “*Area preserving diffeomorphisms and higher spin fields in two dimensions*”, in *Supermembranes and Physics in 2 + 1 Dimensions*, eds. M. Duff, C. Pope e E. Sezgin, World Scientific, Singapore, 1990; Q-Han Park, “*Extended conformal symmetries in real heavens*”, *Phys. Lett.* **B236** (1990) 429.
- [27] I. Bakas e K. Sfetsos, “*Toda fields of $SO(3)$ hyper-Kähler metrics and free field realizations*”, *Int. J. Mod. Phys.* **A14** (1997) 2585; “*Toda fields of $SO(3)$ hyper-Kähler metrics*”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **49** (1996) 10.
- [28] I. Bakas, “*Renormalization group flows and continual Lie algebras*”, *JHEP* **0308** (2003) 013.
- [29] V.A. Fateev, E. Onofri e A.I.B. Zamolodchikov, “*Integrable deformations of the $O(3)$ sigma model. The sausage model*”, *Nucl. Phys.* **B406** (1993) [FS] 521; L. Belardinelli, C. Destri e E. Onofri, “*A numerical study of the RG equation for the deformed $O(3)$ nonlinear sigma model*”, *Nucl. Phys.* **B443** (1995) 607.
- [30] E. Witten, “*String theory and black holes*”, *Phys. Rev.* **D44** (1991) 314.
- [31] G. Mandal, A. Sengupta e S. Wadia, “*Classical solutions of two-dimensional string theory*”, *Mod. Phys. Lett.* **A6** (1991) 1685; S. Elitzur, A. Forge e E. Rabinovici, “*Some global aspects of string compactifications*”, *Nucl. Phys.* **B359** (1991) 581.
- [32] N. Seiberg, “*Notes on quantum Liouville theory and quantum gravity*”, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **102** (1990) 319.
- [33] M. Do Carmo, “*Riemannian Geometry*”, Birkhauser, Boston, 1992.
- [34] A. Adams, J. Polchinski e E. Siverstein, “*Don't panic! Closed string tachyons in ALE space-times*”, *JHEP* **0110** (2001) 029.

-
- [35] M. Gutperle, M. Headrick, S. Minwalla e V. Schomerus, “*Space-time energy decreases under world sheet RG flow*”, JHEP **0301** (2003) 073.
- [36] M. Saveliev e P. Sorba, “*Solution of the Cauchy problem for a continuous limit of the Toda lattice and its super-extension*”, Lett. Math. Phys. **22** (1991) 119.
- [37] I. Bakas, ”*The algebraic structure of geometric flows in two dimensions*“, JHEP **0510** (2005) 038.