



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.005/09

Aspectos clássicos de teorias de segunda ordem

Pedro José Pompeia

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Dedico este trabalho à minha esposa e à minha filha

Agradecimentos

À minha família pelo eterno incentivo e em especial aos meus pais, à Carla e à Anna Sophia, por tudo.

Ao Prof. Pimentel por sua orientação, paciência, esforço e sinceridade tanto em assuntos acadêmicos, como em assuntos particulares.

Ao Prof. Marc de Montigny pela colaboração durante o doutorado-sanduíche no Canadá e à sua família que tão bem recebeu a mim e à minha família. Ao Prof. Khanna, que também muito contribuiu com sua experiência durante este período.

A todo o pessoal do IFI pelo incentivo e apoio ao meu aprimoramento profissional.

Aos amigos Cássius, Léo e Rodrigo pelas tantas discussões e colaborações.

Aos funcionários do IFT pelo apoio prestado.

Aos tantos amigos que não foram citados, mas que de forma alguma foram esquecidos, e que, de modo direto ou indireto, contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro para a realização do doutorado-sanduíche.

Resumo

Neste trabalho foram estudados aspectos clássicos e semiclássicos de teorias de segunda ordem. Primeiramente foi feita a formulação da teoria de gauge para sistemas em que a Lagrangiana do campo de gauge depende de suas componentes e de suas derivadas primeira e segunda e aplicações desta estrutura para os casos $U(1)$ - a eletrodinâmica generalizada de Podolsky - e $SU(N)$ - Lagrangiana efetiva de Alekseev, Abuzov e Baikov. O uso desta estrutura para o caso do grupo de Lorentz $SO(3, 1)$ foi feito em separado e uma análise da solução estática e isotrópica no regime linear foi conduzida para um caso particular. Na sequência, analisou-se como a teoria de Podolsky poderia ser vinculada de três maneiras distintas, a partir de dados experimentais disponíveis na literatura. Finalmente, estudou-se regimes não relativísticos da eletrodinâmica de Podolsky, utilizando-se o formalismo galileano em 5 dimensões. Os limites elétrico e magnético da teoria foram analisados.

Palavras Chaves: Teoria de gauge, Teorias de Segunda Ordem na Derivada, Gravitação, Eletrodinâmica Generalizada de Podolsky, Covariância Galileana.

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos, Gravitação.

Abstract

In this work, classical and semiclassical aspects of second order theories were analyzed. First the formulation of a gauge theory for systems whose Lagrangian for the gauge field depends on the field itself and its first and second derivatives was proposed. Applications of this structure for the $U(1)$ group - Podolsky generalized electrodynamics - and for $SU(N)$ - Alekseev, Abuzov e Baikov effective Lagrangian - were made. The Lorentz group $SO(3,1)$ was also analyzed and an isotropic and static solution in linear approximation was obtained for a particular case. Next it was analyzed how Podolsky theory could be constrained in three different ways using experimental data available on the literature. Finally the non-relativistic limits of Podolsky electrodynamics were analyzed on the 5-dimensional galilean formalism. The electric and magnetic limits were obtained.

Sumário

1	Introdução	1
2	Teorias de gauge à la Utiyama	7
2.1	A formulação de Utiyama - o caso de primeira ordem	8
2.1.1	Invariância Local e o Campo A	8
2.1.2	Equações de campo para A livre	12
2.1.3	Campos em Interação	13
2.1.4	O grupo de Lorentz e o campo gravitacional	15
2.2	Teoria de gauge de segunda ordem	22
2.2.1	A Lagrangiana do campo de gauge livre em segunda ordem	23
2.2.2	Teoria de segunda ordem- o caso gravitacional	29
2.3	Vinculando-se a Eletrodinâmica de Podolsky	34
2.3.1	A corrente de segunda ordem e a massa do fóton	35
2.3.2	Interferometria de íons	36
2.3.3	O átomo de Hidrogênio	40
2.4	Artigos e preprints	43
2.4.1	Teoria de gauge de segunda ordem	43
2.4.2	Formulação de gauge para gravidade de ordem superior	66
2.4.3	Como investigar a Eletrodinâmica de Podolsky?	77
3	Formalismo covariante de Galilei	90
3.1	Os limites não relativísticos da teoria de Maxwell	95
3.1.1	A abordagem de Lévy-Leblond	95
3.1.2	A abordagem 5-dimensional	99
3.2	A Eletrodinâmica generalizada de Podolsky e seus limites não relativísticos	105
3.2.1	O limite magnético	106
3.2.2	O limite elétrico	110

Capítulo 1

Introdução

É comum se dizer que os dois pilares da Física Moderna desenvolvida ao longo do século XX são a Teoria Quântica de Campos (TQC) e a Relatividade Geral (RG). A primeira descreve com bastante propriedade a Física em escalas microscópicas, desde seus constituintes mais elementares e suas interações, sendo um dos grandes sucessos o Modelo Padrão da Física de Partículas Elementares. A segunda, sendo uma teoria de gravitação, descreve bem os fenômenos em escalas macroscópicas, dando conta de fenômenos que ocorrem em dimensões da ordem de centímetros a escalas cósmicas, sendo o Modelo Padrão da Cosmologia um dos grandes frutos desta teoria. Tanto a TQC, quanto a RG, tiveram seus desenvolvimentos associados ao estudo de um outro conceito, que se tornou paradigma da Física do século XX: *Simetria*.

Duas simetrias normalmente correm por trás de uma teoria de campos. Uma é a simetria do grupo cinemático, que diz respeito à simetria do espaço-tempo em que o sistema físico é considerado, sendo este último normalmente descrito por campos que sejam representações irredutíveis do grupo cinemático [1]. Esta simetria geralmente é suficiente para descrever campos livres, sem interação com outros campos, como por exemplo o campo de Dirac, Proca, Klein-Gordon, sem interação com campos como o eletromagnético, gravitacional, *etc.*

Ao longo do século XX, a construção das teorias de campos foi feita com o grupo de Lorentz sendo o grupo cinemático na grande maioria das vezes. Esta escolha se justifica uma vez que a simetria de Lorentz é aquela que descreve adequadamente sistemas em regimes relativísticos; deve-se considerar ainda que, com esta simetria, é possível também se analisar os regimes não relativísticos, o que normalmente é feito quando se considera o limite $c \rightarrow \infty$. Foi apenas em 1967 [1], cerca de 60 anos depois que a Relatividade Restrita havia sido apresentada por Einstein, que o questionamento sobre esta prescrição para o estudo de regimes não relativísticos (*i.e.* $c \rightarrow \infty$) foi feita por Lévy-Leblond. Em sua opinião, a forma adequada de estudar estes regimes deveriam levar em conta a simetria de Galilei como o grupo cinemático no lugar da simetria de Lorentz. Em [1] Lévy-Leblond mostrou, por exemplo, que é possível descrever um campo de Dirac com simetria

de Galilei (levando ao questionamento sobre o spin ser uma propriedade puramente relativística) e mais tarde, em 1973 [2], em um trabalho com Le Bellac, verificou que existem dois limites não relativísticos para o eletromagnetismo contemplando a simetria de Galilei. Estes limites foram chamados de *limite elétrico* e *limite magnético* e se caracterizam pelas dominâncias dos efeitos elétrico e magnético, respectivamente. Estes trabalhos abriram caminho para novos desenvolvimentos, em particular para o estudo da simetria de Galilei em 5 dimensões, como os trabalhos desenvolvidos por Takahashi [3, 4] na década de 1980, recuperando uma idéia já proposta pelo menos 20 anos antes [5]. Este formalismo galileano em 5 dimensões possui uma característica interessante, que consiste em apresentar uma estrutura covariante para as equações, as quais se assemelham muito em forma àquela obtida no caso lorentziano. Esta semelhança permitiu a construção de um algoritmo para o estudo de regimes não relativísticos de diversos sistemas físicos, a partir das equações nas suas formas relativísticas [6, 7].

A simetria do grupo cinemático, seja ela a do grupo de Lorentz ou Galilei, seja em 4 ou 5 dimensões, no entanto, não é suficiente para descrever sistemas em interação com um campo externo, como, por exemplo, a interação de um campo escalar complexo com um campo eletromagnético. Para isso, um outro grupo de simetria é necessário: o grupo de simetria de calibre, ou *simetria de gauge*. As teorias de gauge foram um dos tópicos mais importantes para o desenvolvimento da Física Moderna no século XX. Sua construção teve início com trabalhos de Weyl [8], quem, inspirado pelos trabalhos de Einstein em Relatividade Geral, acreditava que a interação eletromagnética estaria associada à substituição de uma simetria de fase global por uma local. A forma final para a teoria de gauge [9] foi apresentada por Utiyama [10], quase 30 anos depois do trabalho de Weyl, e incorporava os dois casos de teoria de gauge conhecidos à época, quais sejam a teoria de Maxwell e a de Yang-Mills [11], e ainda apresentava a gravitação na forma de uma teoria de gauge. Esta última, por sua vez, possui uma característica interessante: une em uma mesma estrutura as simetrias do grupo cinemático e de interação.

É interessante perceber que as teorias de grande reconhecimento na comunidade científica são aquelas construídas com Lagrangianas de primeira ordem na derivada dos campos envolvidos¹. Isto possui suas razões, pois teorias cujas Lagrangianas são de ordem superior apresentam sérios problemas, dentre os quais se destacam a não unitariedade da teoria e a presença de estados fantasmas com norma negativa [13]. Por outro lado, boas propriedades destas teorias também foram obtidas, o que ainda motiva o seu estudo hoje em dia - veja referências em [14]. O que é importante atentar é que a escolha por Lagrangianas de primeira ordem não são amparadas/motivadas por argumentos de simetria, ou seja, é possível construir teorias com derivadas de ordem superior que preservem as simetrias sobre o grupo cinemático e o grupo de interação.

Teorias de ordem superior possuem seu interesse em Física, particularmente do ponto de vista

¹A Relatividade Geral é uma excessão, no sentido de que a Lagrangiana depende de termos de segunda derivada do tensor métrico; todavia estes termos podem ser agrupados na forma de um termo de superfície - a chamada Lagrangiana "Gama-Gama" [12], de forma que as equações de campo continuam sendo de segunda ordem.

de *teorias efetivas*, que são aquelas que exploram a existência de escalas em sistemas físicos [15]. São teorias que servem para descrever um determinado sistema em uma dada escala de energia/comprimento/momento. Este tipo de construção geralmente não é adequado para descrever o sistema em qualquer situação. Considere-se um exemplo retirado de Ref.[16] para ilustrar esta situação, qual seja o de dois corpos interagindo gravitacionalmente, sendo um dos corpos muito maior do que o segundo - *e.g.* uma maçã interagindo gravitacionalmente com a Terra, em sua superfície. Para escalas de distâncias que variam muito pouco, comparadas ao raio da Terra, um potencial gravitacional que mostra-se bastante adequado para descrever o movimento desta maçã é dado por

$$V_{eff} = mgh, \quad (1.1)$$

em que m é a massa da maçã, h é a altura com respeito à superfície terrestre e g é aceleração da gravidade, sendo esta uma quantidade que pode ser determinada experimentalmente. À medida em que h começa a tomar valores cada vez maiores, o potencial acima precisa ser corrigido, por exemplo pela soma de um termo do tipo

$$V_{eff} = mgh - mgR \frac{h^2}{R^2}, \quad (1.2)$$

em que R é o raio da Terra. É sabido que o potencial mais fundamental para descrever esta situação é aquele dado pelo potencial newtoniano,

$$V = -m \frac{GM}{h + R}, \quad (1.3)$$

em que M é a massa da Terra e G a constante universal da gravitação. Porém, os potenciais de Eq.(1.1) e Eq. (1.2) acima descrevem com boa exatidão diversos casos e podem facilitar muito a descrição do sistema. Na verdade, dependendo dos valores de M e R (aqui não mais para o caso da Terra, mas para algum outro corpo celeste), o potencial dado por Eq.(1.3) ainda poderia ser visto como um potencial efetivo, em que a teoria mais fundamental seria a Relatividade Geral.

É em contextos como o do exemplo acima que as teorias de ordem superior possuem interesse, ou seja, problemas em que existem escalas de energia bem definidas. Nestes casos, os problemas já citados, como a não unitariedade da teoria, não possuem tanta relevância como para uma teoria fundamental, uma vez que elas não seriam adequadas para descrever todo o espectro de energia, mas apenas parte dele. O interesse neste trabalho está voltado para as teorias cujas Lagrangianas dependem da segunda derivada do campo, e em particular para as Lagrangianas que descrevem o campo de gauge. Exemplos deste caso são encontrados na literatura, dentre os quais destacam-se a Lagrangiana efetiva de Alekseev, Arbutov e Baikov [17], que descrevem o regime infravermelho do glúon na QCD, as teorias de gravitação do tipo R^2 , motivadas pela não renormalizabilidade da Relatividade Geral (no contexto da quantização da teoria) [18], e a Eletrodinâmica Generalizada de Podolsky [19], que foi proposta como uma forma para se controlar as divergências ultravioletas do eletromagnetismo, em uma época em que a renormalização ainda

não era um procedimento estabelecido em teoria de campos, entre outras [20]. A Eletrodinâmica de Podolsky possui particular interesse aqui, por ser a teoria de segunda ordem no campo de gauge mais simples que pode ser construída e a que mais possui mais resultados conhecidos [14, 21] e, por esta razão, será revisitada nos diferentes estudos realizados aqui.

A intenção aqui é explorar aspectos relacionados às simetrias do grupo cinemático e do grupo de gauge para teorias de segunda ordem, focando aplicações como teorias efetivas. Na primeira parte desta tese será feita uma revisão da teoria de gauge para o caso em que a Lagrangiana do campo de gauge depende apenas da derivada de primeira ordem deste, como estudado por Utiyama. Em seguida, será apresentada a generalização desta estrutura para o caso de uma teoria de segunda ordem no campo de gauge. Como exemplos, a Eletrodinâmica de Podolsky e a Lagrangiana de Alekseev, Arbuzov e Baikov serão analisadas, com o intuito de se verificar se elas atendem os requisitos de teorias de gauge. Na sequência, considerar-se-á a aplicação desta estrutura de segunda ordem para o grupo de Lorentz homogêneo, no estudo do campo gravitacional, que é o caso em que a simetria do grupo cinemático e a do grupo de interação se interligam. Neste caso serão analisadas algumas Lagrangianas invariantes de gauge e dentre elas, uma será escolhida como estudo de caso - as equações de campo serão obtidas e obter-se-á uma solução para o regime linear no caso estático e isotrópico. Um dos problemas das teorias efetivas é determinar as constantes introduzidas nos termos efetivos que, essencialmente, determinam as escalas de energia de validade da teoria. Isso normalmente é feito por ajustes a dados experimentais [16]. Na sequência do estudo do campo gravitacional, serão analisadas três formas diferentes de vincular a constante de Podolsky a partir de dados experimentais.

Na segunda parte desta tese, a intenção é estudar regimes não relativísticos da Eletrodinâmica de Podolsky, não pela prescrição usual de se tomar o limite $c \rightarrow \infty$, mas pela mudança do grupo cinemático, do grupo de Lorentz para o grupo de Galilei. O formalismo galileano em 5 dimensões será então introduzido e, para efeito de comparação, os resultados de Le Bellac e Lévy-Leblond para os limites não relativísticos do eletromagnetismo em 4 dimensões [2] e os resultados equivalentes obtidos no formalismo em 5 dimensões [7] também serão apresentados, os quais servirão de guia para o estudo do caso de Podolsky.

Por fim, serão apresentadas as conclusões e as perspectivas de futuros desenvolvimentos.

A notação empregada no capítulo 1 será: índices do grupo de gauge serão identificadas por índices latinos; índices de espaço-tempo (4 dimensões) são dados por letras gregas. No capítulo 2, os índices de espaço-tempo são identificados por letras gregas ($\mu, \nu = 1, 2, \dots, 5$) e letras latinas ($i, j = 1, 2, 3$).

Referências Bibliográficas

- [1] J. M. Lévy-Leblond - *Commun. Math. Phys.* **6**, 286 (1967).
- [2] M. Le Bellac e J. M. Lévy-Leblond - *Nuov. Cim. B* **14**, 217 (1973).
- [3] Y. Takahashi - *Fortschr. Phys.* **36**, 63 (1988); Y. Takahashi - *Fortschr. Phys.* **36**, 83 (1988).
- [4] M. Omote, S. Kamefuchi, T. Takahashi, Y. Ohnuki - *Fortschr. Phys.* **37**, 933 (1989).
- [5] G. Pinski - *J. Math. Phys.* **9**, 1927 (1968).
- [6] A. E. Santana, F. C. Khanna e Y. Takahashi - *Prog. Theor. Phys.* **99**, 327 (1988).
- [7] E. S. Santos, M. de Montigny, F. C. Khanna e A. E. Santana - *J. Phys. A* **37**, 9771 (2004).
- [8] H. Weyl - *Sitzungsber. Preuss. Akad. Berlin* 465 (1918); H. Weyl - *Zeit. f. Physik* **330**, 56 (1929).
- [9] L. O'Rayfeartaigh - *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton University Press (1997).
- [10] R. Utiyama - *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).
- [11] C. N. Yang e R. L. Mills - *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
- [12] P. A. M. Dirac - *Proc. Roy. Soc. A* **246**, 333 (1958).
- [13] A. Pais, G. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **79**, 145 (1950).
- [14] J. Barcelos-Neto, C.A.P. Galvão, C.P. Natividade - *Z. Phys. C* **52**, 559 (1991); L.V. Belvedere, C.P. Natividade, C.A.P. Galvão - *Z. Phys. C* **56**, 609 (1992).
- [15] U. van Kolck - *arXiv: nucl-th/9902015v1* (1999).
- [16] U. van Kolck, L. J. Abu-Raddad e D. M. Cardamone - *arXiv: nucl-th/0205058v1* (1999).
- [17] A. I. Alekseev, B. A. Arbuzov e V. A. Baikov - *Theor. Math. Phys.* **52**, 739 (1982); A. I. Alekseev e B. A. Arbuzov - *Theor. Math. Phys.* **59**, 372 (1984).

- [18] K. S. Stelle - *Gen. Rel. Grav.* **9**, 353 (1978); I. L. Buchbinder e S. L. Lyahovich - *Class. Quantum Grav.* **4** 1487 (1987) L. Querella - *Tese de Doutorado*, Universidade de Liège (1998); A. Accioly, A. Azeredo e H. Mukai - *J. Math. Phys.* **43**, 473 (2002).
- [19] B. Podolsky - *Phys. Rev.* **62**, 68 (1942); B. Podolsky e C. Kikuchi - *Phys. Rev.* **65**, 228 (1944); B. Podolsky e P. Schwed - *Rev. Mod. Phys.* **20**, 40 (1948).
- [20] T. Itoh e P. Oh - *Phys. Rev. D* **63**, 025019 (2000); A. Bilal- *Nucl. Phys. B* **618**, 21 (2001); T. P. Sotiriou, V. Faraoni - *arXiv:0805.1726* (2008).
- [21] D.J. Montgomery - *Phys. Rev.* **69**, 117 (1946); A.E.S. Green - *Phys. Rev.* **72** 628 (1947); A.E.S. Green - *Phys. Rev.* **73**, 26 (1948); C.A.P. Galvão e B.M. Pimentel - *Can. J. Phys.* **66**, 460 (1988); J. Frenkel - *Phys. Rev. E* **54** 5859 (1996); B.M. Pimentel e R.G. Teixeira - *Nuov. Cim. B* **113**, 805 (1998); J. Frenkel - *Int. J. Mod. Phys.* **13**, 315 (1999); M.C. Bertin, B.M. Pimentel e P.J. Pompeia - *Ann. Phys.* **323**,527 (2008); H. Torres-Silva - *Rev. Chil. Ing.* **16**, 65 (2008).

Capítulo 2

Teorias de gauge à la Utiyama

O desenvolvimento das chamadas *teorias de gauge* ocorreu ao longo de praticamente 60 anos, tendo este duas fases bem definidas [1]. A primeira fase, que culminou com o que se chama hoje de *teoria de gauge abeliana*, foi construída ao longo de cerca de 11 anos por Weyl. Inspirado pelo trabalho de Einstein em Relatividade Geral [2], em que o mesmo, ao substituir transformações de Lorentz por transformações gerais de coordenadas, era capaz de descrever a interação gravitacional, Weyl tentou mostrar que a interação eletromagnética também poderia ser introduzida com a substituição de uma outra simetria global por uma simetria local - no caso, a de transformação de fase. O primeiro trabalho nesta linha de pesquisa foi publicado por Weyl em 1918 [3], mas ainda não contemplava os objetivos de forma satisfatória. O estudo foi sendo amadurecido até que, em 1929 [4], uma forma final para a intenção de Weyl foi atingida, encerrando a primeira fase de construção das teorias de gauge.

O uso de simetrias para descrever interações nucleares, que marca o segundo período de desenvolvimento, foi ocorrer 25 anos mais tarde, com o trabalho de Yang e Mills [5]. A idéia deles era tornar local a simetria de isospin, de uma maneira análoga ao procedimento de Weyl em seu artigo de 1929. Este foi o primeiro trabalho em *teoria de gauge não abeliana*, que na mesma época estava sendo investigada, em contextos diferentes, por Pauli [6] e Shaw [7]. Neste mesmo período, Utiyama também fazia seus estudos no tema, tentando estabelecer relações entre a gravitação na formulação de tetradas e o eletromagnetismo. Porém, ao entrar em contato com o trabalho de Yang e Mills durante uma visita a Princeton, Utiyama engavetou seu trabalho, em função das semelhanças de seus resultados com os do primeiro. Foi só algum tempo depois que Utiyama percebeu que sua construção era válida para um grupo de Lie qualquer, diferentemente do caso de Yang e Mills, e que ainda contemplava o caso gravitacional. Este trabalho foi publicado em 1956 [8] e é considerado por alguns autores [1] como a forma final para o tratamento de teorias de gauge. É esta construção que será mostrada a seguir.

2.1 A formulação de Utiyama - o caso de primeira ordem

Em seu trabalho de 1956 [8], Utiyama queria entender a relação entre campos em interação e a exigência de invariância da Lagrangiana associada a esses campos, sob transformações a parâmetros dependentes do ponto. Para isso ele estabeleceu o seguinte conjunto de hipóteses: considere-se um sistema de campos $Q^A(x)$ invariante sob um grupo de transformação G (de Lie) dependente de n parâmetros ϵ^c ; suponha-se que o grupo G seja substituído por um outro grupo G' em que os parâmetros ϵ^c (do grupo G) são trocados por um conjunto de funções arbitrárias $\epsilon^c(x)$; considere-se ainda que o sistema permaneça invariante por este grupo mais geral G' através da introdução de um novo campo $A(x)$. A partir destas considerações, cinco perguntas deveriam ser respondidas:

- (1) Que tipo de campo $A(x)$ deve ser introduzido para garantir a invariância?
- (2) Como este campo se transforma sob G' ?
- (3) Que forma toma a interação entre o campo $A(x)$ e o campo original $Q^A(x)$?
- (4) Como determinar a nova Lagrangiana $L'(Q, A)$ a partir da Lagrangiana original $L(Q)$?
- (5) Que tipo de equações de campo são permitidas para A ?

Este foi o roteiro proposto por Utiyama e as respostas para estas perguntas seguem abaixo.

2.1.1 Invariância Local e o Campo A

Considere-se um sistema físico descrito por um conjunto de campos $Q^A(x)$, ($A = 1, 2, \dots, N$), e por uma densidade Lagrangiana $L(Q^A, \partial_\mu Q^A)$, em que $\partial_\mu Q^A = \frac{\partial Q^A}{\partial x^\mu}$, e cujas equações de campo são

$$\frac{\partial L}{\partial Q^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} \right) = 0. \quad (2.1)$$

Postule-se que integral de ação, $I = \int_\Omega L d^4x$, seja invariante sob a seguinte transformação infinitesimal:

$$\begin{aligned} Q^A &\rightarrow Q^A + \delta Q^A, \\ \delta Q^A &= T_{(a),B}^A \epsilon^a Q^B, \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que ϵ^a são parâmetros infinitesimais independentes de x ($a = 1, 2, \dots, n$) e $T_{(a),B}^A$ são coeficientes constantes (geradores do grupo). Assuma-se ainda que a transformação (2.2) é um grupo de Lie G dependente dos n parâmetros ϵ^a . Assim, deve haver um conjunto de constantes f_{ac}^b , as “constantes de estrutura”, definidas por

$$[T_{(a)}, T_{(b)}]_B^A = T_{(a),C}^A T_{(b),B}^C - T_{(b),C}^A T_{(a),B}^C = f_{ab}^c T_{(c),B}^A, \quad (2.3)$$

as quais satisfazem as seguintes propriedades

$$f_{ab}^m f_{mc}^l + f_{bc}^m f_{ma}^l + f_{ca}^m f_{mb}^l = 0, \quad (2.4)$$

$$f_{ab}^c = -f_{ba}^c, \quad (2.5)$$

esta última vinda da própria definição (2.3), enquanto a anterior segue da identidade de Jacobi para o comutador.

Assumindo-se que a ação I seja invariante pela transformação infinitesimal no campo (2.2) em qualquer domínio Ω do espaço-tempo ¹ e levando-se em conta que os ϵ^a são independentes, tem-se

$$\delta L = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial Q^A} T_{(a),B}^A Q^B + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} T_{(a),B}^A \partial_\mu Q^B = 0. \quad (2.6)$$

Aqui admite-se lícita a troca da ordem na operação variação pela derivação ordinária.

A condição $\delta L = 0$ pode ser escrita, utilizando-se a regra de Leibniz, de forma a se obter a lei de conservação de uma corrente J_a^μ ,

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0, \quad J_a^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} T_{(a),B}^A Q^B, \quad (2.7)$$

que é válida quando a equação de campo é satisfeita.

Agora considere-se a transformação infinitesimal, com parâmetro dependente do ponto:

$$\begin{aligned} \delta Q^A(x) &= T_{(a),B}^A \epsilon^a(x) Q^B, \\ \epsilon^a(x) &= \text{função arbitrária infinitesimal}(a = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que $T_{(a),B}^A$ permanecem como coeficientes constantes. Neste caso,

$$\delta L = \{(2.6)\}_a \epsilon^a(x) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} T_{(a),B}^A Q^B \partial_\mu \epsilon^a(x), \quad (2.9)$$

Admitindo-se que a expressão Eq.(2.6) permaneça válida mesmo quando $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$, i.e. $\{(2.6)\}_a = 0$, então δL não se anula devido à presença do último termo da expressão acima e, portanto, o sistema perde sua invariância.

Uma forma de preservar a invariância da Lagrangiana sob (2.8), forçando $\delta L = 0$, é introduzir um novo campo

$$A'^J(x), \quad J = 1, 2, \dots, M,$$

que se transforme como

$$\delta A'^J = U_{(a),K}^J A'^K \epsilon^a(x) + C_{,a}^{J\mu} \partial_\mu \epsilon^a, \quad (2.10)$$

na esperança de que este procedimento cancele o segundo termo do segundo membro de Eq.(2.9). Na Eq. (2.10), os coeficientes U e C são constantes a serem determinadas.

Postule-se agora que a ação $I' = \int_\Omega d^4x L'(Q^A, \partial_\mu Q^A, A'^J)$, seja invariante sob a transformação de Eq.(2.10) e de Eq.(2.8). Usando-se o fato de que as funções $\epsilon^a(x)$ são arbitrárias, e por isso

¹Esta relação independe do comportamento de Q^A e $\partial_\mu Q^A$, ou seja $\delta L = 0$, qualquer que seja o caráter do campo (escalar, vetorial, espinorial, etc.).

assume-se que $\epsilon^a(x)$ e suas derivadas $\partial_\mu \epsilon^a$ são independentes, cada coeficiente de $\epsilon^a(x)$ e $\partial_\mu \epsilon^a$ deve se anular independentemente, o que leva a:

$$\frac{\partial L'}{\partial Q^A} T_{(a),B}^A Q^B + \frac{\partial L'}{\partial (\partial_\mu Q^A)} T_{(a),B}^A \partial_\mu Q^B + \frac{\partial L'}{\partial A'^J} U_{(a),K}^J A'^K = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial (\partial_\mu Q^A)} T_{(a),B}^A Q^B + \frac{\partial L'}{\partial A'^J} C_{,a}^{J\mu} = 0. \quad (2.12)$$

O número de componentes de A'^J deve ser igual ao número de equações² de Eq.(2.12), no caso, $M = 4n$. Esta exigência é necessária para que se determine univocamente a dependência de L' com relação a A'^J .

Com o intuito de tornar explícita a dependência de L' com relação a A'^J exige-se que $C_{,a}^{J\mu}$ seja não-singular, de forma que exista uma inversa de C tal que

$$\begin{aligned} C_{,a}^{J\mu} (C^{-1})_{\mu,K}^a &= \delta_K^J \\ (C^{-1})_{\mu,J}^a C_{,b}^{J\nu} &= \delta_b^a \delta_\mu^\nu. \end{aligned}$$

Esta inversa de C é usada para se definir

$$A_\mu^a \equiv (C^{-1})_{\mu,J}^a A'^J,$$

com o qual se reescreve Eq.(2.12):

$$\frac{\partial L'}{\partial A_\mu^a} + \frac{\partial L'}{\partial (\partial_\mu Q^A)} T_{(a),B}^A Q^B = 0.$$

Esta equação é satisfeita se a dependência de L' em relação a $\partial_\mu Q^A$ e A_μ^a ocorrer através da combinação

$$\nabla_\mu Q^A \equiv \partial_\mu Q^A - T_{(a),B}^A Q^B A_\mu^a = \partial_\mu Q^A - Q^B (C^{-1})_{\mu,J}^a A'^J. \quad (2.13)$$

Agora a nova Lagrangiana tem a forma

$$L'(Q^A, \partial_\mu Q^A, A'^J) = L''(Q^A, \nabla_\mu Q^A).$$

e a sua variação, $\delta L'' = \frac{\partial L''}{\partial Q^A} \delta Q^A + \frac{\partial L''}{\partial \nabla_\mu Q^A} \delta \nabla_\mu Q^A$, considerando-se a independência de $\epsilon^a(x)$ e a lei de transformação para A_μ^a , leva a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L''}{\partial Q^A} T_{(a),B}^A Q^B + \frac{\partial L''}{\partial \nabla_\mu Q^A} T_{(a),B}^A \nabla_\mu Q^B + \\ &+ \frac{\partial L''}{\partial \nabla_\mu Q^A} Q^B A_\nu^b \left\{ [T_{(a)}, T_{(b)}]_B^A \delta_\mu^\nu - S_{(a)\mu,b}^{c,\nu} T_{(c),B}^A \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

²Quatro equações para os índices de espaço-tempo, para cada um dos n índices que rotulam as funções da transformação (2.8).

A lei de transformação para A_μ^a é obtida a partir da Eq.(2.10),

$$\delta A_\nu^c = S_{(a)\nu,b}^{c,\mu} A_\mu^b \epsilon^a(x) + \partial_\nu \epsilon^c, \quad (2.15)$$

onde se definiu

$$S_{(a)\nu,b}^{c,\mu} \equiv (C^{-1})_{\nu,J}^c U_{(a),K}^J C_{,b}^{K\mu}.$$

Note-se que os termos com $\partial_\mu \epsilon^a$ anularam-se exatamente em Eq.(2.14), conforme desejado quando se introduziu o campo A'^J .

Para se compreender melhor o resultado obtido em Eq.(2.14) é importante analisar o comportamento de L'' quando se toma o limite do campo A nulo. Nessa circunstância,

$$L''(Q^A, \nabla_\mu Q^A) = L''(Q^A, \partial_\mu Q^A).$$

Fisicamente espera-se que, ao tomar o campo A igual a zero, a situação original, em que a Lagrangiana do campo era $L(Q^A, \partial_\mu Q^A)$, seja recuperada. Conclui-se assim que $L''(Q^A, \partial_\mu Q^A) = L(Q^A, \partial_\mu Q^A)$, motivando a identificação

$$L''(Q^A, \nabla_\mu Q^A) = L(Q^A, \nabla_\mu Q^A).$$

Dessa expressão vê-se que, ao se introduzir o campo A , deve-se substituir a derivada ordinária na Lagrangiana de partida $L(Q^A, \partial_\mu Q^A)$ pela “derivada covariante”, $\nabla_\mu Q^A$. O caráter covariante deste objeto será verificado adiante. Este tipo de construção é conhecida como prescrição do acoplamento mínimo, semelhante à que aparece em Relatividade Geral (RG). Na RG, o acoplamento mínimo é empregado para a descrição da interação do campo gravitacional com o campo de matéria. No presente caso, esta prescrição descreve a interação entre o campo Q e o campo A .

Fazendo uso do acoplamento mínimo, $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$, deve-se exigir que a Eq. (2.6), que agora se torna

$$\frac{\partial L}{\partial Q^A} T_{(a),B}^A Q^B + \frac{\partial L}{\partial \nabla_\mu Q^A} T_{(a),B}^A \nabla_\mu Q^B = 0,$$

continue válida. Confrontando-se esta expressão com Eq.(2.14), fazendo $L'' = L$, conclui-se que

$$\frac{\partial L}{\partial \nabla_\mu Q^A} Q^B A_\nu^b \left\{ [T_{(a)}, T_{(b)}]_{,B}^A \delta_\mu^\nu - S_{(a)\mu,b}^{c,\nu} T_{(c),B}^A \right\} = 0,$$

e os coeficientes $S_{(a)\mu,b}^{c,\nu}$ ficam determinados³

$$S_{(a)\mu,b}^{c,\nu} = f_{ab}^c \delta_\mu^\nu. \quad (2.16)$$

Nesta última expressão utilizou-se a definição das constantes de estrutura.

³Observe-se que ao trabalhar com A_ν^b em lugar de A'^J , troca-se o problema de se encontrar as constantes $U_{(a),K}^J$ e $C_{,b}^{K\mu}$ pelo problema de determinar apenas $S_{(a)\mu,b}^{c,\nu}$.

A partir da determinação de S , a lei de transformação de A_μ^a torna-se

$$\delta A_\nu^c = f_{ab}^c A_\nu^b \epsilon^a(x) + \partial_\nu \epsilon^c, \quad (2.17)$$

e daí fica explícito o caráter covariante da derivada $\nabla_\mu Q^A$, cuja lei de transformação é

$$\delta \nabla_\mu Q^A = T_{(a),B}^A \nabla_\mu Q^B \epsilon^a(x).$$

2.1.2 Equações de campo para A livre

Para discutir quais equações são permitidas para o campo A , admite-se, na construção de Utiyama, que a Lagrangiana para A livre contenha somente derivadas de primeira ordem, i.e.

$$L_0(A_\mu^a, \partial_\nu A_\mu^a), \quad \partial_\nu A_\mu^a \equiv \frac{\partial A_\mu^a}{\partial x^\nu},$$

e que esta Lagrangiana seja invariante pela transformação dada por Eq.(2.15). Assim, a variação de L_0 ,

$$\delta L_0 = \frac{\partial L_0}{\partial A_\mu^a} \delta A_\mu^a + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} \delta (\partial_\nu A_\mu^a) = 0,$$

leva ao seguinte conjunto de equações, quando se considera a independência de ϵ e suas derivadas⁴:

$$\frac{\partial L_0}{\partial A_\mu^a} f_{cb}^a A_\mu^b + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} f_{cb}^a \partial_\nu A_\mu^b \equiv 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial A_\mu^a} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\mu A_\nu^c)} f_{ab}^c A_\nu^b \equiv 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\mu A_\nu^a)} \equiv 0. \quad (2.20)$$

A partir da Eq.(2.20) conclui-se que a dependência de L_0 com respeito à derivada de A ocorre através da combinação

$$A_{[\mu, \nu]}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a. \quad (2.21)$$

Com este resultado, a Eq.(2.19) é reescrita como sendo⁵:

$$\frac{\partial L_0}{\partial A_\mu^a} - \frac{\partial L_0}{\partial (A_{[\nu, \mu]}^c)} 2f_{ab}^c A_\nu^b = 0. \quad (2.22)$$

A partir desta equação, conclui-se que a dependência da Lagrangiana com respeito a $A_{[\mu, \nu]}^a$ deve ocorrer através de um novo objeto:

⁴Para escrever Eq.(2.20) emprega-se a propriedade de simetria de $\frac{\partial^2 \epsilon^a}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$.

⁵Entenda-se aqui que $L_0(A_\mu^a, \partial_\nu A_\mu^a) \rightarrow L_0'(A_\mu^a, A_{[\mu, \nu]}^a)$. No entanto, para não carregar a notação, a linha será omitida. Esse mesmo tipo de construção será feito adiante.

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - \frac{1}{2} f_{bc}^a (A_\mu^b A_\nu^c - A_\mu^c A_\nu^b). \quad (2.23)$$

Finalmente, ao substituir Eq.(2.19) em Eq.(2.18) obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L_0}{\partial F_{\nu\mu}^a} f_{cb}^a F_{\nu\mu}^b = 0. \quad (2.24)$$

Para obter este resultado é necessário o uso da identidade de Jacobi para as constantes de estrutura (Eq.(2.4)). A expressão Eq.(2.24) define como deve ser a dependência de L_0 com respeito a $F_{\nu\mu}^a$ - somente as lagrangianas que satisfazem esta condição são consistentes com a condição de invariância da Lagrangiana. Porém, ainda pode existir uma dependência de L_0 com respeito a A , $L_0(A_\mu^a, F_{\mu\nu}^a)$. Para se determinar como deve ser esta dependência, deve-se conhecer a lei de transformação de $F_{\nu\mu}^a$, a qual é obtida utilizando-se Eq.(2.17):

$$\delta F_{\mu\nu}^a = \epsilon^c(x) f_{cb}^a F_{\mu\nu}^b. \quad (2.25)$$

A variação da Lagrangiana,

$$\delta L_0 = \left. \frac{\partial L_0}{\partial A_\mu^a} \right|_F \delta A_\mu^a + \left. \frac{\partial L_0}{\partial (F_{\mu\nu}^a)} \right|_A \delta (F_{\mu\nu}^a) = 0,$$

leva ao seguinte par de equações quando se considera a independência de $\partial_\mu \epsilon^a$ e $\epsilon^c(x)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L_0}{\partial A_\mu^a} \right|_F &= 0 \\ \left. \frac{\partial L_0}{\partial A_\mu^a} \right|_F f_{cb}^a A_\mu^b + \left. \frac{\partial L_0}{\partial (F_{\mu\nu}^a)} \right|_A f_{cb}^a F_{\mu\nu}^b &= 0. \end{aligned}$$

A primeira dessas equações informa que L_0 não deve ter dependência explícita com relação a A - toda dependência em A deve ocorrer somente através de F . A segunda equação nada mais é do que a Eq.(2.24), quando se leva em conta o resultado da primeira.

2.1.3 Campos em Interação

O sistema completo, composto dos campo A e Q agora passa a ser descrito pela Lagrangiana total:

$$L_T = L_A^{livre} + L_Q^{livre} + L^{interação} = L_0(F) + L(Q, \nabla Q).$$

Considerando-se que a integral de ação deve ser invariante pelas transformações em A e Q , segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta L_T}{\delta Q^A} \delta Q^A + \frac{\delta L_T}{\delta A_\mu^a} f_{bc}^a \epsilon^b A_\mu^c - \partial_\mu \left(\frac{\delta L_T}{\delta A_\mu^a} \right) \epsilon^a + \\ &+ \partial_\mu \left\{ \frac{\partial L_T}{\partial \nabla_\mu Q^A} \delta Q^A + \frac{\partial L_0}{\partial F_{\mu\nu}^a} \delta A_\nu^a + \frac{\delta L_T}{\delta A_\mu^a} \epsilon^a \right\}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

em que $\frac{\delta L_T}{\delta Q^A} \equiv \frac{\partial L_T}{\partial Q^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\mu Q^A)} \right)$ e $\frac{\delta L_T}{\delta A_\mu^a} \equiv \frac{\partial L_T}{\partial A_\mu^a} - \partial_\nu \left(\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} \right)$. Como esta expressão deve ser válida para qualquer região de espaço-tempo, conclui-se que o termo de superfície em Eq.(2.26) deve se anular independentemente do termo volumétrico, portanto,

$$\frac{\delta L_T}{\delta Q^A} \delta Q^A + \frac{\delta L_T}{\delta A_\mu^a} f_{bc}^a \epsilon^b A_\mu^c - \partial_\mu \left(\frac{\delta L_T}{\delta A_\mu^a} \right) \epsilon^a = 0 \quad (2.27)$$

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial L_T}{\partial \nabla_\mu Q^A} \delta Q^A + \frac{\partial L_0}{\partial F_{\mu\nu}^a} \delta A_\nu^a + \frac{\delta L_T}{\delta A_\mu^a} \epsilon^a \right\} = 0 \quad (2.28)$$

Explicitando-se as variações de Eq.(2.28), e considerando-se a independência de ϵ e suas derivadas segue o seguinte conjunto de equações:

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial L_T}{\partial \nabla_\mu Q^A} T_{(a),B}^A Q^B + \frac{\partial L_0}{\partial F_{\mu\nu}^b} f_{ac}^b A_\nu^c + \frac{\delta L_T}{\delta A_\mu^a} \right\} = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial L_T}{\partial \nabla_\mu Q^A} T_{(a),B}^A Q^B + \frac{\partial L_0}{\partial F_{\mu\nu}^b} f_{ac}^b A_\nu^c + \frac{\partial L_T}{\delta A_\mu^a} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial F_{\mu\nu}^a} + \frac{\partial L_0}{\partial F_{\nu\mu}^a} = 0.$$

Esta última expressão (proveniente do termo proporcional à segunda derivada de ϵ) é um trivialidade em função da antissimetria de F . Defina-se a corrente

$$J_a^\mu \equiv \frac{\partial L_T}{\delta A_\mu^a}. \quad (2.31)$$

Substituindo-se esta definição em Eq.(2.30), encontra-se

$$J_a^\mu = - \left(\frac{\partial L_T}{\partial \nabla_\mu Q^A} T_{(a),B}^A Q^B + \frac{\partial L_0}{\partial F_{\mu\nu}^b} f_{ac}^b A_\nu^c \right). \quad (2.32)$$

E usando-se este resultado em Eq.(2.29), conclui-se que a corrente J_a^μ é uma quantidade conservada,

$$\partial_\mu J_a^\mu \equiv \partial_\mu \left\{ \frac{\delta L_T}{\delta A_\mu^a} \right\} = 0, \quad (2.33)$$

quando a equação de campo para A é satisfeita.

A partir deste ponto, Utiyama passa a considerar os casos do campo eletromagnético ($U(1)$), do campo de Yang-Mills (spin isotrópico - $SU(2)$) e o caso do campo gravitacional ($SO(3,1)$). Apenas este último será mostrado aqui.

2.1.4 O grupo de Lorentz e o campo gravitacional

O caso da interação gravitacional é bastante interessante do ponto de vista do estudo das simetrias, pois é o caso em que a simetria do grupo cinemático mistura-se com a simetria do grupo de interação. Este será o tópico tratado a seguir e que também foi considerado por Utiyama.

Seja I a integral de ação

$$I = \int L(Q^A, \partial_k Q^A) d^4x$$

invariante sob transformações de coordenadas de Lorentz x^k ($k = 1, 2, 3, 4$),

$$x^k \rightarrow x^k + \epsilon^k_l x^l, \quad \epsilon^{kl} = -\epsilon^{lk},$$

identificadas por letras latinas. Note-se que apenas as transformações homogêneas (i.e. rotações no espaço-tempo) estão sendo consideradas.

Para o caso do grupo de Lorentz, além do sistema x , Utiyama introduz um sistema de coordenadas curvilíneas u^μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), descritos por letras gregas. Um campo de *tetradas*, h^k_μ e h_k^μ , deve ser introduzido para estabelecer uma relação⁶ entre o espaço de coordenadas curvas e o espaço plano de coordenadas x , de forma que as métricas $g_{\mu\nu}$ e g_{ik}^* ($g_{ik}^* = \text{diag}\{1, 1, 1, -1\}$) dos dois espaços se relacionem por

$$g_{\mu\nu}(u) = g_{ik}^* h^i_\mu h^k_\nu, \quad (2.34)$$

$$g_{ik}^* = g_{\mu\nu} h_i^\mu h_k^\nu, \quad (2.35)$$

e, de onde segue que

$$h_k^\rho h^\nu_k = \delta^\rho_\nu, \quad (2.36)$$

$$h^l_\nu h_k^\nu = \delta^l_k. \quad (2.37)$$

A relação $g = \det(g_{\mu\nu}) = -h^2$, em que $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ e $h \equiv \det(h^k_\mu)$, segue das expressões acima. O significado geométrico das tetradas é: a cada ponto do espaço curvo, chamado a seguir também de ponto de mundo, o conjunto de quatro vetores de mundo $h_1^\mu, h_2^\mu, h_3^\mu, h_4^\mu$ fixa um referencial local de Lorentz. Reciprocamente, ao se fixar o índice de mundo, tem-se quatro vetores de Lorentz, $h_k^1, h_k^2, h_k^3, h_k^4$. O espaço-tempo plano pode ser interpretado, portanto, como sendo o espaço tangente a cada ponto de mundo.

⁶A construção mostrada aqui difere daquela apresentada por Utiyama, quem introduz as tetradas como sendo $h^k_\mu(u) = \frac{\partial x^k}{\partial u^\mu}$, $h_k^\mu(u) = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^k}$. Porém, com esta definição, a relação $\partial_\nu h^k_\mu = \partial_\mu h^k_\nu$ deve ser necessariamente satisfeita e as tetradas não seriam, portanto, campos independentes. Para contornar este problema, Utiyama estabelece todas as relações que lhe interessam, com sua definição de tetradas, e depois a abandona para garantir a independência dos campos. Aqui as tetradas serão introduzidas *a priori* como campos independentes. Em outros desenvolvimentos como aquele feito por Kibble [11], a tetradas é introduzida como sendo um campo de gauge, advindo da simetria de translação - Kibble considera o grupo de Poincaré, ao invés do grupo homogêneo de Lorentz.

Por conta das propriedades geométricas discutidas, tensores de mundo podem ser transformados em tensores do espaço tangente utilizando-se as tetradas; a recíproca também é verdadeira. Por exemplo para um campo vetorial,

$$Q^k(x(u)) = h^k{}_\nu(u) Q^\nu(u), \quad Q^\nu(u) = h_k{}^\nu(u) Q^k(x(u)),$$

de forma que $Q^\nu(u)$ é o correspondente de $Q^k(x(u)) = Q^k(x(u))$ no espaço-tempo curvo. É importante perceber que uma correspondência deste tipo não pode ser estabelecida para qualquer campo, como e.g. o campos espinoriais. Por esta razão, o índice de Lorentz no campo Q^A será preservado.

A densidade Lagrangiana $L(Q^A, \partial_k Q^A)$ é reescrita como sendo

$$L(Q^A(x), \partial_k Q^A(x)) = L(Q^A(u), h_k{}^\mu \partial_\mu Q^A(u)),$$

e a integral de ação torna-se

$$I = \int L(Q^A, \partial_k Q^A) d^4x = \int \mathcal{L}(Q^A(u), h_k{}^\mu \partial_\mu Q^A(u)) d^4u,$$

onde

$$\mathcal{L} \equiv L(Q^A(u), h_k{}^\mu \partial_\mu Q^A(u)) h. \quad (2.38)$$

A ação é, agora, invariante por dois tipos de transformações:

(1) transformações de Lorentz no espaço tangente,

$$\begin{aligned} \delta h^k{}_\mu(u) &= \epsilon^k{}_l h^l{}_\mu(u), \quad \epsilon^k{}_l \text{ constantes,} \\ \delta Q^A(u) &= \frac{1}{2} T_{[kl]}{}^A{}_B Q^B \epsilon^{kl} \\ u^\mu &= \text{fixo} \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde $T_{[kl]}{}^A{}_B = -T_{[lk]}{}^A{}_B$ é o elemento (A, B) da matriz $(N \times N)$ $T_{[kl]}$, a qual é a representação do gerador do grupo de Lorentz. A constante de estrutura agora possui seis índices

$$[T_{[kl]}, T_{[mn]}] = \frac{1}{2} f_{kl, mn}{}^{ab} T_{[ab]};$$

(2) transformações gerais de coordenadas (TGC) na variedade de mundo⁷

$$\begin{aligned} u^\mu \rightarrow u'^\mu &= u^\mu + \lambda^\mu(u), \quad \lambda^\mu(u) \text{ é função arbitrária de } u, \\ h'^k{}_\mu &= \frac{\partial u^\nu}{\partial u'^\mu} h^k{}_\nu = h^k{}_\mu + \delta' h^k{}_\mu, \quad \delta' h^k{}_\mu = -\frac{\partial \lambda^\nu}{\partial u'^\mu} h^k{}_\nu, \end{aligned}$$

⁷Como dito, Q^A é um campo sob transformações de Lorentz e, portanto, um invariante com respeito a transformações gerais de coordenadas.

$$\delta' Q^A(u) \equiv Q^{A'}(u') - Q^A(u) = 0.$$

Para descrever a interação gravitacional, os parâmetros ϵ^{ik} devem passar a ser dependentes do ponto de mundo, ou seja, $\epsilon^{ik} \rightarrow \epsilon^{ik}(u)$ em Eq.(2.39). Portanto, os campos Q^A e h^k_μ transformam-se como

$$\begin{aligned} \delta Q^A(u) &= \frac{1}{2} \epsilon^{kl}(u) T_{[kl]}^A Q^B \\ \delta h^k_\mu(u) &= \epsilon^k_l(u) h^l_\mu, \end{aligned} \quad (2.40)$$

sob Lorentz e estas leis de transformação serão chamadas de *transformações de Lorentz generalizadas*.

Para manter a invariância da teoria, o campo

$$A^{kl}_\mu(u) = -A^{lk}_\mu(u),$$

cuja antissimetria nos índices de Lorentz decorre da antissimetria nos índices de ϵ^{kl} , deve ser introduzido, obedecendo à seguinte lei de transformação:

$$\delta A^{kl}_\mu = \frac{1}{4} f_{ab, \quad hg}^{kl} \epsilon^{ab}(u) A^{hg}_\mu + \partial_\mu \epsilon^{kl}.$$

A constante de estrutura do grupo de Lorentz é

$$f_{ab, \quad hg}^{kl} = 4 (g_{ga}^* \delta_h^l \delta_b^k - g_{bh}^* \delta_a^l \delta_g^k), \quad (2.41)$$

e sua inserção em δA^{kl}_μ dá

$$\delta A^{kl}_\mu = \epsilon^k_m(u) A^{ml}_\mu + \epsilon^l_m(u) A^{km}_\mu + \frac{\partial \epsilon^{kl}}{\partial u^\mu}. \quad (2.42)$$

A derivada covariante pela transformação do grupo de Lorentz (e não por transformações gerais de coordenadas) do campo Q^A é

$$\nabla_\mu Q^A = \partial_\mu Q^A - \frac{1}{2} A^{kl}_\mu T_{[kl]}^A Q^B. \quad (2.43)$$

Com a prescrição do acoplamento mínimo, a densidade Lagrangiana passa a ser dada por

$$\mathcal{L}(Q^A, \nabla_\mu Q^A, h^k_\mu) = hL \{Q^A, (h^k_\mu \nabla_\mu Q^A)\}. \quad (2.44)$$

Geometrização

Até este ponto nada foi mencionado sobre o tipo de espaço curvo. Ao tratar da geometrização da teoria, constatar-se-á que a variedade mais conveniente é aquela de Riemann-Cartan. Isto é feito ao se estabelecer uma relação entre a derivada covariante associada às *transformações de Lorentz generalizadas* e a derivada covariante por *transformações gerais de coordenadas* na variedade curva.

Para isso, considere-se o caso em que o campo Q^A é um tensor de segunda ordem, $Q^A \rightarrow Q^{kl}(u)$, cuja derivada covariante, explicitando-se $T_{[mm], ab}^{kl}$, é dada por

$$\nabla_\mu Q^{kl} = \partial_\mu Q^{kl} - A^{km}_\mu Q^l - A^{lm}_\mu Q^k.$$

Expressando-se Q^{kl} como $h^l_\nu Q^{k\nu}$ segue

$$[\nabla_\mu h^l_\nu] Q^{k\nu} + h^l_\nu \nabla_\mu Q^{k\nu} = h^l_\nu [\partial_\mu Q^{k\nu} - A^{km}_\mu Q^\nu + (h^\nu_j \partial_\mu h^j_\sigma - h_{l\sigma} h_m^\nu A^{lm}_\mu) Q^{k\sigma}].$$

Impondo-se o anulamento da derivada covariante da tetrada,

$$\nabla_\mu h^l_\nu = 0, \quad (2.45)$$

e definindo-se

$$\Gamma'_{\sigma\mu}{}^\nu \equiv h^\nu_j \partial_\mu h^j_\sigma - h_{l\sigma} h_m^\nu A^{lm}_\mu, \quad (2.46)$$

tem-se

$$\nabla_\mu Q^{k\nu} = \partial_\mu Q^{k\nu} - A^{km}_\mu Q^\nu + \Gamma'_{\sigma\mu}{}^\nu Q^{k\sigma}. \quad (2.47)$$

Note-se que a “derivada covariante” de um objeto com índices mistos opera como a derivada covariante no contexto de transformações gerais de coordenadas de um tensor de segunda ordem,

$$\delta_\mu Q^{\rho\nu} = \partial_\mu Q^{\rho\nu} + \Gamma_{\sigma\mu}{}^\rho Q^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\mu}{}^\nu Q^{\rho\sigma}$$

com a exceção de que, para índices latinos, insere-se o campo auxiliar A^{km}_μ no lugar da conexão afim $\Gamma_{\sigma\mu}{}^\rho$, e, para índices gregos, $\Gamma'_{\sigma\mu}{}^\nu$ deve ser usado no lugar de $\Gamma_{\sigma\mu}{}^\nu$.

Para um tensor com vários índices é possível verificar que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu Q_{ab\dots\alpha\beta\dots}^{kl\dots\rho\sigma\dots} &= \partial_\mu Q_{ab\dots\alpha\beta\dots}^{kl\dots\rho\sigma\dots} - A^k_{i\mu} Q_{ab\dots\alpha\beta\dots}^{il\dots\rho\sigma\dots} - A^l_{i\mu} Q_{ab\dots\alpha\beta\dots}^{ki\dots\rho\sigma\dots} - \dots \\ &+ A^i_{a\mu} Q_{ib\dots\alpha\beta\dots}^{kl\dots\rho\sigma\dots} + A^i_{b\mu} Q_{ai\dots\alpha\beta\dots}^{kl\dots\rho\sigma\dots} + \dots \\ &+ \Gamma'_{\lambda\mu}{}^\rho Q_{ab\dots\alpha\beta\dots}^{kl\dots\lambda\sigma\dots} + \Gamma'_{\lambda\mu}{}^\sigma Q_{ab\dots\alpha\beta\dots}^{kl\dots\rho\lambda\dots} + \dots \\ &- \Gamma'_{\alpha\mu}{}^\lambda Q_{ab\dots\lambda\beta\dots}^{kl\dots\rho\sigma\dots} - \Gamma'_{\beta\mu}{}^\lambda Q_{ab\dots\alpha\lambda\dots}^{kl\dots\rho\sigma\dots} - \dots \end{aligned} \quad (2.48)$$

Em particular, se o tensor for a métrica do espaço plano, segue

$$\nabla_\mu g^{*kl} = \partial_\mu g^{*kl} - A^k_{m\mu} g^{*ml} - A^l_{m\mu} g^{*km} = 0,$$

uma vez que $\partial_\mu g^{*kl} = 0$ e que o campo auxiliar é antissimétrico em seus índices de Lorentz. Por outro lado, considerando-se Eq. (2.45), segue que

$$\nabla_\mu g^{*kl} = \nabla_\mu (h^k_\rho h^l_\nu g^{\rho\nu}) = h^k_\rho h^l_\nu \nabla_\mu g^{\rho\nu} = 0 \Rightarrow \nabla_\mu g^{\rho\nu} = 0. \quad (2.49)$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$\nabla_\mu g^{\rho\nu} = \partial_\mu g^{\rho\nu} + \Gamma'_{\sigma\mu}{}^\rho g^{\sigma\nu} + \Gamma'_{\sigma\mu}{}^\nu g^{\rho\sigma} = 0, \quad (2.50)$$

e, a partir dela, é possível mostrar que

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\rho = \{\mu\nu{}^\rho\} - (B'_{\nu\mu}{}^\rho + B'_{\mu\nu}{}^\rho + B'_{\mu\nu}{}^\rho), \quad (2.51)$$

em que

$$\{\mu\nu{}^\lambda\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (2.52)$$

é o símbolo de Christoffel e $B'_{\nu\alpha}{}^\beta \equiv \Gamma'_{[\nu\alpha]}{}^\beta$. A identificação desta conexão Γ' com a conexão afim de mundo, $\Gamma'_{\mu\nu}{}^\beta = \Gamma_{\mu\nu}{}^\beta$, implica na identificação da relação Eq.(2.49) como sendo a condição de metricidade,

$$\delta_\mu g^{\rho\nu} = 0. \quad (2.53)$$

Esta condição caracteriza a variedade como sendo de Riemann-Cartan. Com esta escolha, Eq.(2.46) estabelece uma relação entre a conexão de Riemann-Cartan $\Gamma_{\sigma\mu}{}^\nu$, a tetrada h^ν_j e o campo auxiliar $A^{lm}{}_\mu$. Observa-se ainda que a derivada covariante ∇_μ é covariante sob os dois tipos de transformações em questão, quais sejam, transformações de Lorentz no tangente e TGC no espaço curvo.

Se, em particular, o tensor de torção, $B_{\mu\nu}{}^\beta$, for tomado como sendo nulo, a variedade passa a ser um espaço riemanniano e a conexão é completamente determinada em termos do tensor métrico, *via* símbolos de Christoffel. Note-se todavia que esta é uma escolha feita “a mão” e não surge por nenhum argumento de simetria.

A Lagrangiana \mathcal{L}_0 do Campo A Livre

A Lagrangiana do campo de gauge livre agora é do tipo

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(h^k{}_\mu, A^{kl}{}_\mu, \partial_\nu A^{kl}{}_\mu).$$

A presença de $h^k{}_\mu$ é necessária para que se possa construir uma verdadeira densidade escalar.

De acordo com o desenvolvimento feito por Utiyama, \mathcal{L}_0 deve depender de A e ∂A apenas na forma

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(h^k{}_\mu, F^{kl}{}_{\mu\nu})$$

onde F é

$$F^{kl}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{kl}{}_\nu - \partial_\nu A^{kl}{}_\mu + A^{ak}{}_\mu A^l{}_{a\nu} - A^{ak}{}_\nu A^l{}_{a\mu}, \quad (2.54)$$

expressão esta obtida quando usada a forma explícita da constante de estrutura, e \mathcal{L}_0 deve obedecer a condição:

$$\frac{1}{8} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^{ab}{}_{\mu\nu}} f_{ij}{}^{ab}{}_{kl} F^{kl}{}_{\mu\nu} = 0.$$

É interessante observar que o tensor $F^{kl}{}_{\mu\nu}$ está relacionado ao tensor de curvatura de mundo, $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$, pela expressão

$$F^{kl}{}_{\mu\nu} = h^l{}_\rho h^{k\sigma} R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}, \quad (2.55)$$

onde

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\rho. \quad (2.56)$$

Conclui-se assim que, do ponto de vista geométrico, a Lagrangiana do campo de gauge livre deve ser uma densidade escalar determinada pela tetrada e pela curvatura.

Campos em Interação

Tomando-se o espaço-tempo curvo como sendo uma variedade riemanniana, a prescrição do acoplamento mínimo implica que a Lagrangiana Total, ou seja, a Lagrangiana que descreve o campo de matéria em interação, é do tipo

$$\mathcal{L}_T(Q^A, \nabla_\mu Q^A, h, \partial h, \partial^2 h) = \mathcal{L}(Q^A, \nabla_\mu Q^A, h) + \mathcal{L}_0(h, F).$$

Atente-se para o fato de que a escolha da variedade riemanniana implica na dependência da Lagrangiana total com a derivada segunda da tetrada, o que acontece tendo em vista que em R ocorrem derivadas de Γ , que é função de ∂h .

A variação da Lagrangiana total pode ser escrita como a soma de um termo volumétrico e um termo de superfície, os quais devem se anular independentemente

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta Q^A} \delta Q^A + \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta h^i{}_\mu} \delta h^i{}_\mu = 0, \quad (2.57)$$

$$\partial_\mu \mathcal{M}^\mu = 0, \quad (2.58)$$

onde \mathcal{M}^μ é

$$\mathcal{M}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \nabla_\mu Q^A} \delta Q^A + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial_\mu h^i{}_\rho)} \delta h^i{}_\rho + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu h^i{}_\rho)} \delta (\partial_\nu h^i{}_\rho) - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu h^i{}_\rho)} \right) \delta h^i{}_\rho. \quad (2.59)$$

A primeira destas equações é identicamente satisfeita quando se considera as equações de campo. Já a segunda, Eq.(2.58), quando explicitadas as variações em termos dos parâmetros da transformação de Lorentz, leva a um conjunto de equações, devido à independência de ϵ e suas derivadas. O termo proporcional à segunda derivada de ϵ^{ik} implica em:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu h^i{}_\rho)} h_{l\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu h^l{}_\rho)} h_{i\rho} = 0.$$

Este resultado permite escrever as outras duas expressões, proporcionais a ϵ e $\partial\epsilon$, respectivamente, como sendo

$$\partial_\mu \mathcal{M}^\mu{}_{il} = 0, \quad (2.60)$$

$$\mathcal{M}^\mu{}_{il} = 0,$$

onde

$$\mathcal{M}^\mu_{il} = \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \nabla_\mu Q^A} T_{[il]}^A Q^B + \left[\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial_\mu h^i{}_\rho)} h_{l\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu h^i{}_\rho)} \partial_\nu h_{l\rho} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu h^i{}_\rho)} \right) h_{l\rho} - (i \longleftrightarrow l) \right].$$

Note-se que \mathcal{M}^μ pode ser escrito como sendo

$$\mathcal{M}^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{il} \mathcal{M}^\mu_{il}.$$

Perceba-se que $\partial_\mu \mathcal{M}^\mu_{il} = 0$ é trivialmente satisfeita, considerando-se que $\mathcal{M}^\mu_{il} = 0$. Note-se também que, neste desenvolvimento, não se fez uso das equações de campo, o que significa que essas não desempenham nenhum papel na derivação da corrente, diferentemente do que ocorre com outros grupos de simetria.

Aplicação: a Lagrangiana de Einstein-Hilbert

Considere-se, em particular, a densidade Lagrangiana para o campo auxiliar

$$\mathcal{L}_0 = hR,$$

onde

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = h_k{}^\mu h_l{}^\nu F_{\mu\nu}^{kl}$$

é o escalar de curvatura da variedade Riemanniana.

A variação de $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(h^k{}_\mu, F^{kl}{}_{\mu\nu})$ pode ser feita em termos da tetrada ou da métrica, uma vez que

$$\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta h^i{}_\mu} \delta h^i{}_\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta g_{\mu\nu}} h_{i\mu} \delta h^i{}_\nu + 2\partial_\rho \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} (\partial_\sigma h_{i\mu}) \delta h^i{}_\nu \right\}. \quad (2.61)$$

Para o caso particular $\mathcal{L}_0 = hR$,

$$\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta g_{\mu\nu}} = -h \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = -\mathfrak{G}^{\mu\nu},$$

ou

$$-\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h^i{}_\nu} = -\mathfrak{G}^{\mu\nu} h_{i\mu}.$$

Definindo-se

$$\mathfrak{T}_i{}^\nu = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h^i{}_\nu},$$

segue

$$\mathfrak{T}_i{}^\nu = -\mathfrak{G}^{\mu\nu} h_{i\mu},$$

ou simplesmente

$$\mathfrak{G}^{\rho\sigma} = -\mathfrak{T}^{\rho\sigma}.$$

Note-se que o objeto do lado esquerdo desta equação é uma densidade tensorial simétrica, o que implica na simetria da densidade tensorial energia-momento $\mathfrak{T}^{\rho\sigma}$. Isto pode ser verificado quando se leva em conta o anulamento de Eq. (2.57) e o fato de que $\delta\mathcal{L}/\delta Q^A = 0$, de onde tem-se

$$-\mathfrak{T}_{ij} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta h^i{}_{\mu}} h_{j\mu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta h^j{}_{\mu}} h_{i\mu} = -\mathfrak{T}_{ji}.$$

Na sequência, será apresentada a construção em que a Lagrangiana do campo livre L_0 depende também da segunda derivada do campo de gauge.

2.2 Teoria de gauge de segunda ordem

Nesta seção é considerado o caso em que a Lagrangiana do campo de gauge livre possui dependência com o campo A_{μ}^a e com a primeira e segunda derivadas do mesmo. Como já mencionado anteriormente, o uso de Lagrangianas de primeira ordem na derivada não advém de nenhum requisito de simetria, mas apenas por questões de conveniência. Ao longo do século XX algumas teorias considerando a derivada segunda do campo de gauge foram desenvolvidas, como a Eletrodinâmica Generalizada de Podolsky [9], cuja intenção era eliminar divergências ultravioletas do eletromagnetismo, ou a Lagrangiana de Alekseev, Arbutov e Baikov [10], que procurava descrever o comportamento infravermelho da QCD. Ambas as teorias podem ser entendidas hoje no contexto de teorias efetivas, que procuram descrever um regime específico de um dado sistema físico.

É interessante observar que estes dois casos exploram a invariância de gauge das teorias, mas até recentemente não havia uma formalização da estrutura de uma teoria de gauge de segunda ordem para o campo de gauge, como a desenvolvida por Utiyama. A intenção desta seção é mostrar esta estrutura, que foi desenvolvida em Ref. [12].

A construção feita a seguir explora a mesma estrutura do trabalho de Utiyama, como mostrado acima. Como a intenção é analisar a dependência de segunda ordem no campo de gauge, e não no campo de matéria, é imediato perceber que a prescrição do acoplamento mínimo não se altera, i.e. a interação entre o campo de matéria e o campo de gauge é a mesma do caso de primeira ordem.

Para a Lagrangiana do campo de gauge livre, verifica-se que, além da introdução do campo $F_{\mu\nu}^a$, que no caso de primeira ordem contém toda a dependência do campo e de sua derivada, deve-se introduzir um outro objeto, $G_{\rho\mu\nu}^a$, que contém a segunda derivada de A_{μ}^a . Seguindo ainda a proposta de Utiyama, uma corrente conservada é obtida, mas ao comparar com a corrente de Noether, observa-se que ela difere desta por termos topológicos (também chamados de correntes impróprias). É importante ressaltar que estes termos topológicos não são propostos por conveniência, mas surgem de maneira natural, na construção feita aqui.

A aplicação para o caso $U(1)$ mostra que a Eletrodinâmica de Podolsky possui todos os requisitos de uma teoria de gauge de segunda ordem e que todas as Lagrangianas do tipo $L_P \sim G^2$ diferem daquela proposta por Podolsky por termos de superfície. Neste sentido, mostrou-se que a teoria de Podolsky é única (para teorias de segunda ordem), no sentido de preservar o caráter linear das equações de campo. A partir da nova definição de corrente, uma estimativa para a massa do modo massivo de Podolsky foi obtida, mas este resultado só será mostrado na próxima seção.

A análise do grupo $SU(N)$ permite concluir que a Lagrangiana efetiva obtida por Alekseev, Arbuzov e Baikov para o estudo do regime infravermelho da QCD também satisfaz os requisitos de uma teoria de gauge.

O caso gravitacional não é analisado neste capítulo, e será apresentado mais adiante.

Nesta seção a assinatura $\eta = \text{diag}(1, -1, -1 - 1)$ para o tensor métrico é adotada.

2.2.1 A Lagrangiana do campo de gauge livre em segunda ordem

Considere-se que a Lagrangiana do campo livre é da forma

$$L_0(A_\mu^a, \partial_\nu A_\mu^a, \partial_\alpha \partial_\nu A_\mu^a),$$

e que a mesma é invariante pelas transformações do campo A , dadas por Eq.(2.17). Como no caso de primeira ordem, a independência entre os parâmetros da transformação e suas derivadas implica em um conjunto de equações que devem ser resolvidas de forma hierárquica, primeiramente por aquela que advém do termo com a mais alta ordem de derivada para a menor, de forma decrescente. O conjunto de equações para o caso de segunda ordem é:

$$\frac{\partial L_0}{\partial A_\mu^a} f_c^a b A_\mu^b + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} f_c^a b \partial_\nu A_\mu^b + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\alpha \partial_\nu A_\mu^a)} f_c^a b \partial_\alpha \partial_\nu A_\mu^b = 0, \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial A_\nu^c} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} f_c^a b A_\mu^b + \left(\frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu \partial_\alpha A_\mu^a)} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\alpha \partial_\nu A_\mu^a)} \right) f_c^a b \partial_\alpha A_\mu^b = 0, \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A_\alpha^c)} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\alpha A_\nu^c)} + \left(\frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu \partial_\alpha A_\mu^a)} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\alpha \partial_\nu A_\mu^a)} \right) f_c^a b A_\mu^b = 0, \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\alpha \partial_\nu A_\mu^a)} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu A_\alpha^a)} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\mu \partial_\alpha A_\nu^a)} = 0. \quad (2.65)$$

A última equação, que envolve apenas as variações da Lagrangiana em função da segunda derivada de A , deve ser resolvida primeiro. Esta equação implica que a dependência de L_0 com $\partial\partial A$ deve ser através de um objeto $R_{\alpha\nu\mu}^a$ satisfazendo uma condição de ciclicidade,

$$R_{\alpha\nu\mu}^a + R_{\nu\mu\alpha}^a + R_{\mu\alpha\nu}^a = 0. \quad (2.66)$$

Um objeto que satisfaz esta condição é

$$R^a_{\alpha\nu\mu} = \partial_\nu \partial_\alpha A^a_\mu - \partial_\alpha \partial_\mu A^a_\nu. \quad (2.67)$$

L_0 é, portanto, uma função do tipo $L_0^{(1)}(A, \partial A, R)$, que deve ser usada para reescrever Eq.(2.64):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L_0^{(1)}}{\partial (\partial_\nu A^c_\alpha)} + \left[\frac{\partial L_0^{(1)}}{\partial (R^a_{\nu\alpha\mu})} - \frac{\partial L_0^{(1)}}{\partial (R^a_{\alpha\mu\nu})} \right] f^a_{c\ b} A^b_\mu + \\ & + \frac{\partial L_0^{(1)}}{\partial (\partial_\alpha A^c_\nu)} + \left[\frac{\partial L_0^{(1)}}{\partial (R^a_{\alpha\nu\mu})} - \frac{\partial L_0^{(1)}}{\partial (R^a_{\nu\mu\alpha})} \right] f^a_{c\ b} A^b_\mu = 0. \end{aligned}$$

Esta equação possui uma simetria pela troca $\nu \leftrightarrow \alpha$, que deve usada para se construir a solução, que agora deve envolver um objeto contendo R , ∂A e A . Como este novo objeto envolverá R , a combinação deve satisfazer a ciclicidade da equação anterior. Conclui-se assim que esta combinação deve ser através de

$$Q^d_{\beta\rho\sigma} \equiv R^d_{\beta\rho\sigma} - f^d_{c\ b} [A^b_\sigma \partial_\rho A^c_\beta - A^b_\rho \partial_\sigma A^c_\beta]. \quad (2.68)$$

Assim passa-se de $L_0^{(1)}(A, \partial A, R)$ para $L_0^{(2)}(A, \partial A, Q)$. A dependência de $L_0^{(2)}$ com ∂A leva a equação Eq.(2.64) a ser escrita como

$$\left[\frac{\partial L_0^{(2)}}{\partial (\partial_\nu A^c_\alpha)} + \frac{\partial L_0^{(2)}}{\partial (\partial_\alpha A^c_\nu)} \right]_Q = 0,$$

que implica que a dependência de L_0 com ∂A deve ocorrer através da combinação

$$A^c_{[\nu\alpha]} \equiv \partial_\nu A^c_\alpha - \partial_\alpha A^c_\nu.$$

Assim, vai-se de $L_0^{(2)}(A, \partial A, Q)$ para $L_0^{(3)} = L_0^{(3)}(A^a_\mu, A^c_{[\nu\alpha]}, Q^d_{\beta\rho\sigma})$. A equação Eq.(2.63) torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L_0^{(3)}}{\partial A^a_\nu} + \frac{\partial L_0^{(3)}}{\partial A^d_{[\rho\sigma]}} (\delta^\nu_\rho \delta^\sigma_\alpha - \delta^\nu_\sigma \delta^\rho_\alpha) f^d_{a\ e} A^e_\alpha + \\ & + \frac{\partial L_0^{(3)}}{\partial Q^d_{\beta\rho\sigma}} \left[(\delta^\nu_\sigma A^c_{[\rho\beta]} + \delta^\nu_\beta A^c_{[\rho\sigma]} + \delta^\nu_\rho A^c_{[\beta\sigma]}) f^d_{a\ c} + A^e_\beta (A^b_\sigma \delta^\nu_\rho - A^b_\rho \delta^\nu_\sigma) f^d_{b\ c} f^c_{a\ e} \right] = 0, \end{aligned}$$

e a solução desta equação sugere que a Lagrangiana deva ser da forma $L_0^{(4)} = L_0^{(4)}(F^{\rho\sigma}_d, G^d_{\beta\rho\sigma}, A^a_\nu)$, em que

$$F^d_{\rho\sigma} \equiv A^d_{[\rho\sigma]} + f^d_{a\ e} A^e_\rho A^a_\sigma, \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} G^d_{\beta\rho\sigma} \equiv & Q^d_{\beta\rho\sigma} - \left\{ (\delta^\lambda_\sigma A^c_{[\rho\beta]} + \delta^\lambda_\beta A^c_{[\rho\sigma]} + \delta^\lambda_\rho A^c_{[\beta\sigma]}) f^d_{g\ c} A^g_\lambda + \right. \\ & \left. - (A^b_\sigma \delta^\lambda_\rho - A^b_\rho \delta^\lambda_\sigma) f^d_{b\ c} f^c_{g\ e} A^g_\lambda A^e_\beta \right\}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

A dependência em A é eliminada pelo uso de $L_0^{(4)}$ na própria Eq.(2.63), que implica:

$$\left. \frac{\partial L_0^{(4)}(F, G, A)}{\partial A^a_\nu} \right|_{F, G} = 0.$$

Com esta forma para a Lagrangiana, a equação Eq.(2.62) torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_d^{\rho\sigma}} f_s^h \left(\frac{\partial F_d^{\rho\sigma}}{\partial A^h_\nu} A^b_\nu + \frac{\partial F_d^{\rho\sigma}}{\partial (\partial_\nu A^h_\zeta)} \partial_\nu A^b_\zeta \right) + \\ & + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G^d_{\beta\rho\sigma}} f_s^h \left(\frac{\partial G^d_{\beta\rho\sigma}}{\partial A^h_\nu} A^b_\nu + \frac{\partial G^d_{\beta\rho\sigma}}{\partial (\partial_\nu A^h_\zeta)} \partial_\nu A^b_\zeta + \frac{\partial G^d_{\beta\rho\sigma}}{\partial (\partial_\xi \partial_\nu A^h_\zeta)} \partial_\xi \partial_\nu A^b_\zeta \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.71)$$

que estabelece que a Lagrangiana deve satisfazer a seguinte condição:

$$\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F^d_{\rho\sigma}} f_c^h F^h_{\rho\sigma} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G^d_{\beta\rho\sigma}} f_c^h G^h_{\beta\rho\sigma} = 0. \quad (2.72)$$

É possível verificar que o objeto G nada mais é do que a derivada covariante de F :

$$G^a_{\beta\rho\sigma} = \partial_\beta F^a_{\rho\sigma} + f_c^a A^e_{\beta} F^c_{\rho\sigma} = D^a_{c\beta} F^c_{\rho\sigma}, \quad (2.73)$$

que, como se sabe, satisfaz a identidade de Bianchi

$$G^a_{\beta\rho\sigma} + G^a_{\rho\sigma\beta} + G^a_{\sigma\beta\rho} = D^a_{c\beta} F^c_{\rho\sigma} + D^a_{c\rho} F^c_{\sigma\beta} + D^a_{c\sigma} F^c_{\beta\rho} = 0, \quad (2.74)$$

em acordo com o requisito exigido por Eq.(2.65). Este objeto é covariante pelo grupo de Lie, como verificado pela sua lei de transformação

$$\delta G^a_{\beta\rho\sigma} = \epsilon^d(x) f_d^a G^c_{\beta\rho\sigma}. \quad (2.75)$$

A corrente de segunda ordem

Para analisar a corrente pelo procedimento estabelecido por Utiyama, deve-se considerar a variação da Lagrangiana total, composta pelo campo de matéria em interação com o campo de gauge, dada por

$$L_T(Q^A, \nabla_\mu Q^A, A, \partial A, \partial^2 A) = L(Q^A, \nabla_\mu Q^A) + L_0(F, G).$$

A variação possui um termo volumétrico e um termo de superfície, que devem se anular independentemente:

$$\delta L_T = \left[\frac{\delta L_T}{\delta A^a_\mu} f_{cb}^a A^b_\mu \epsilon^c - \partial_\mu \left(\frac{\delta L_T}{\delta A^a_\mu} \right) \epsilon^a + \left(\frac{\delta L_T}{\delta Q^A} \right) \delta Q^A \right] + \partial_\nu M^\nu,$$

em que

$$M^\nu \equiv N_c^\nu \epsilon^c + O_a^{\nu\mu} \partial_\mu \epsilon^a + \frac{1}{2} P_a^{\rho\nu\mu} \partial_\rho \partial_\mu \epsilon^a ,$$

com

$$\begin{aligned} N_c^\nu &\equiv \frac{\delta L_T}{\delta A^c_\nu} + \frac{\partial L_T}{\partial (\nabla_\nu Q^A)} T_{(c) B}^A Q^B + \\ &+ \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{[\nu\mu]}^a} + f_a^d A^b_\rho \left(\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^d} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^d} \right) \right] f_{ce}^a A^e_\mu + \\ &- \frac{1}{2} \partial_\rho \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^a} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^a} \right] f_{ce}^a A^e_\mu + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^a} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^a} \right] f_{cb}^c \partial_\rho A^b_\mu ; \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} O_a^{\nu\mu} &\equiv \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{[\nu\mu]}^a} + f_a^d A^b_\rho \left(\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^d} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^d} \right) + \\ &- \frac{1}{2} \partial_\rho \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^a} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^a} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\mu\rho]}^c} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\mu[\nu\rho]}^c} \right] f_{ab}^c A^b_\rho ; \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$P_a^{\rho\nu\mu} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^a} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\mu[\nu\rho]}^a} \right) . \quad (2.78)$$

A nulificação do termo de superfície implica em uma hierarquia de equações

$$\partial_\nu N_c^\nu = 0, \quad (2.79)$$

$$N_c^\nu + \partial_\mu O_c^{\mu\nu} = 0, \quad (2.80)$$

$$O_a^{(\nu\mu)} + \partial_\rho P_a^{\nu\rho\mu} = 0, \quad (2.81)$$

$$P_a^{\rho\nu\mu} + P_a^{\nu\mu\rho} + P_a^{\mu\rho\nu} = 0, \quad (2.82)$$

sendo que as duas últimas são trivialmente satisfeitas, em função das simetrias de F e G , enquanto as duas primeiras estabelecem a definição da corrente e a lei de conservação.

Duas definições de corrente são feitas a seguir. A primeira, chamada aqui de *corrente quasi-conservada*, é motivada pela definição feita por Utiyama no caso de primeira ordem:

$$\begin{aligned} J_c^\nu &\equiv \frac{\delta L_T}{\delta A^c_\nu} = - \frac{\partial L_T}{\partial (\nabla_\nu Q^A)} T_{(c) B}^A Q^B - \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{[\nu\mu]}^a} f_{ce}^a A^e_\mu - \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu\rho\mu}^d} f_{cb}^d F_{\rho\mu}^b + \\ &+ \left(D_{a\rho}^a \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^d} \right) f_{cb}^a A^b_\mu - \partial_\rho \left(\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^a} f_{cb}^a A^b_\mu \right), \end{aligned} \quad (2.83)$$

que, substituída em Eq.(2.79), leva a

$$\partial_\nu J_c^\nu = \partial_\nu \frac{\delta L_T}{\delta A^c_\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\rho \left(\left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^d} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^d} \right] f_{cb}^d A^b_\mu \right). \quad (2.84)$$

Sob equações de movimento, obtém-se uma quasiconservação da corrente, no sentido de que a integral desta quantidade se anula sob condições de contorno apropriadas, sendo esta uma conservação global. Esta definição de corrente no caso de primeira ordem coincide com a corrente de Noether, mas não aqui no caso de segunda ordem.

A segunda corrente definida aqui, e chamada de *corrente conservada*, é também inspirada pelo trabalho de Utiyama, e define-se como sendo a derivada funcional uma ordem inferior ao do caso considerado (no caso de primeira ordem, a derivada funcional de ordem “zero” é a expressão utilizada na primeira definição):

$$\begin{aligned}
\bar{J}_c^\nu &\equiv \frac{\partial L_T}{\partial A^c_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\mu A^c_\nu)} = \\
&= -\frac{\partial L_T}{\partial (\nabla_\nu Q^A)} T_{(c) \ B}^A Q^B - \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{[\nu\mu]}^a} f_{c \ e}^a A^e_\mu - \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu\rho\mu}^d} f_{c \ b}^d F_{\rho\mu}^b + \\
&+ \left(D_{a \ \rho}^d \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^d} \right) f_{c \ b}^a A^b_\mu - \partial_\mu \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{[\mu\nu]}^c} + f_{c \ b}^d A^b_\rho \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\mu\nu]}^d} \right]. \tag{2.85}
\end{aligned}$$

Esta corrente é estritamente conservada,

$$\partial_\nu \bar{J}_c^\nu = \partial_\nu \left(\frac{\delta L_T}{\delta A^c_\nu} \right) = 0,$$

quando as equações de campo são levadas em conta.

Nenhuma das duas definições acima coincide com a corrente de Noether em segunda ordem. Isto fica evidente quando elas são reescritas na forma

$$\begin{aligned}
J_c^\nu &= -\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\nu Q^A)} T_{(c) \ B}^A Q^B - \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu \partial_\rho A^a_\mu)} f_{c \ b}^a \partial_\rho A^b_\mu + \\
&+ \left[\partial_\rho \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A^a_\mu)} - \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} \right] f_{c \ b}^a A^b_\mu + \partial_\mu \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_{[\mu} A^c_{\nu]})}, \\
\bar{J}_c^\nu &= -\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\nu Q^A)} T_{(c) \ B}^A Q^B - \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu \partial_\rho A^a_\mu)} f_{c \ b}^a \partial_\rho A^b_\mu + \\
&+ \left[\partial_\rho \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A^a_\mu)} - \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} \right] f_{c \ b}^a A^b_\mu - \partial_\mu \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_{[\mu} A^c_{\nu]})},
\end{aligned}$$

que são imediatamente comparáveis à corrente de Noether

$$\begin{aligned}
(J_N)_c^\nu &= -\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\nu Q^A)} T_{(c) \ B}^A Q^B - \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu \partial_\rho A^a_\mu)} f_{c \ b}^a \partial_\rho A^b_\mu + \\
&+ \left[\partial_\rho \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A^a_\mu)} - \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} \right] f_{c \ b}^a A^b_\mu.
\end{aligned}$$

Comparando-se \bar{J} com J_N é imediato ver que elas diferem apenas pela presença de um termo topológico (também chamada de corrente imprópria), i.e. um termo de divergente nulo, que não faz diferença do ponto de vista da lei de conservação, mas que pode fazer diferença na definição das cargas conservadas. A comparação de J com J_N mostra a presença de um termo extra na definição da primeira, o qual é o responsável pela sua quasiconservação.

O caso $SU(N)$ - a Lagrangiana efetiva AAB

A Lagrangiana efetiva construída por Alekseev, Arbuzov e Baikov [10] para o estudo do regime infravermelho da QCD é dada por

$$L_{eff} = \frac{1}{4M^2} G_{\lambda\mu\nu}^a G_a^{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{6M^2} f_{bc}^a F^{b\lambda\mu} F_{a\mu}{}^\tau F_{\tau\lambda}^c,$$

onde M está associada a um modo massivo do campo de gauge no regime de validade da teoria efetiva. Em [10] os autores fazem o estudo para o grupo $SU(N)$, apesar do interesse ser voltado para o grupo $SU(3)$. A expressão acima mostra apenas os termos efetivos, os quais devem ser somados com a Lagrangiana usual de primeira ordem, $L_{1ord} = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{a\mu\nu}$, para o tratamento da teoria (efetiva) completa. Esta Lagrangiana L_{eff} satisfaz os requisitos mostrados aqui de só depender do campo de gauge e de suas derivadas através das combinações F e G . O passo seguinte consiste em verificar se a condição Eq.(2.72) é satisfeita, o que é prontamente verificado, quando se utiliza a propriedade de total antissimetria das constantes de estrutura dos grupo $SU(N)$.

A corrente \bar{J}_{eff} , obtida com a Eq.(2.85), para L_{eff} é dada por :

$$\begin{aligned} (\bar{J}_{eff})_c^\nu &= \frac{1}{M^2} f_{cb}^a \left(A_\mu^b [D_a^d{}_\rho G_d^{\rho\nu\mu} + f_{ae}^d F^{e\mu\tau} F_{d\tau}{}^\nu] - \frac{1}{2} F_{\rho\mu}^b G_a^{\nu\rho\mu} \right) + \\ &+ \frac{1}{M^2} f_{cb}^d \partial_\mu (A_\rho^b G_d^{\rho\nu\mu} + F^{b\mu\tau} F_{d\tau}{}^\nu). \end{aligned}$$

Esta corrente é conservada e difere daquela obtida em [10], que é a corrente de Noether, apenas por termos topológicos.

O grupo $U(1)$ - a Eletrodinâmica generalizada de Podolsky

A Eletrodinâmica generalizada de Podolsky foi proposta em 1942 [9] com o objetivo de eliminar divergências ultravioletas. Na época, o procedimento de renormalização das teorias de campo não era conhecido e, na opinião de Podolsky, as divergências eram indicio de que termos com derivadas de ordem superior deveriam ser considerados. A generalização mais simples consistia em incluir termos uma ordem acima, portanto, termos de segunda ordem, de forma que o caráter linear da teoria fosse preservado. Podolsky propôs a Lagrangiana:

$$L_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\alpha^2}{2} G_{\mu\nu}^\nu G_\rho^{\mu\rho}, \quad (2.86)$$

em que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad G_{\beta\rho\sigma} = \partial_\beta F_{\rho\sigma}.$$

Esta Lagrangiana satisfaz a condição necessária para uma teoria de gauge de segunda ordem, uma vez que ela só depende de F e G . No caso $U(1)$, diferentemente dos outros grupos, a condição Eq. (2.72) é trivialmente satisfeita, uma vez que o grupo é abeliano e possui, portanto, constante de estrutura nula. O termo na Lagrangiana de Podolsky que depende apenas de G , $L_0^P = \frac{a^2}{2} G_{\mu\nu}^\nu G_{\rho}^{\mu\rho}$, possui ainda uma propriedade interessante: qualquer outra combinação quadrática envolvendo G difere de L_0^P por termos de superfície. Por exemplo, a contração

$$L_G = b^2 G^{\beta\rho\sigma} G_{\beta\rho\sigma} = 4 \frac{b^2}{a^2} L_0^P + 2b^2 [\partial_\sigma (\partial^\beta F^{\rho\sigma} F_{\rho\beta}) - \partial^\beta (\partial_\sigma F^{\rho\sigma} F_{\rho\beta})]$$

mostra o que foi afirmado. Essa propriedade ocorre em função da identidade de Bianchi e da antissimetria nos dois últimos índices de G , de forma que qualquer outra contração de índices, como e.g. $G^{\beta\rho\sigma} G_{\rho\beta\sigma}$, recai neste caso. Isso prova que a única generalização da teoria de Maxwell em segunda ordem a preservar a linearidade das equações de campo é dada pela Lagrangiana de Podolsky.

2.2.2 Teoria de segunda ordem- o caso gravitacional

Finalmente, para completar o estudo de teorias de gauge de segunda ordem, um último caso é estudado, qual seja o do campo gravitacional. Aqui o grupo de invariância considerado é o grupo de Lorentz homogêneo, no contexto de uma descrição riemanniana para o campo gravitacional, nos moldes do que foi mostrado no caso de primeira ordem.

Modificações na teoria da Relatividade Geral (RG) são propostas desde a sua concepção por Einstein em 1916 [2], passando pela introdução da constante cosmológica [13], às teorias do tipo R^2 [14] (quadráticas no tensor de curvatura e motivadas por problemas na quantização da RG) e às teorias $f(R)$ [15] (funções do escalar de curvatura). Atualmente muitas destas propostas tentam explicar alguns dos problemas da RG, como a expansão acelerada do Universo, que possui fortes evidências experimentais, ou ainda o problema de curvas de rotação de galáxias. Dentre estas modificações, as do tipo R^2 e $f(R)$ já são teorias de segunda ordem quando se considera a métrica como campo fundamental da teoria. Porém, quando analisadas do ponto de vista da conexão, estas teorias são na verdade de primeira ordem. Do ponto de vista de uma teoria de gauge, ao menos nos moldes como visto aqui, o campo de gauge introduzido no caso gravitacional é a conexão e não a métrica e é a imposição de condições feitas à mão que possibilita a fixação da conexão em termos do tensor métrico⁸. A proposta feita a seguir considera a teoria em segunda ordem na derivada da conexão, o que a diferencia completamente das teorias supracitadas.

⁸Como visto, sem a imposição da nulificação da torção, a variedade de mundo seria uma variedade de Riemann-Cartan e não de Riemann.

A intenção a seguir é identificar os entes geométricos envolvidos e prosseguir com a contagem das Lagrangianas quadráticas possíveis de serem construídas com F e G e que preservem a invariância de gauge. Como estudo de caso, as equações de campo serão obtidas para uma Lagrangiana que difere daquela de Einstein-Hilbert por um termo de segunda ordem análogo ao termo de Podolsky. Para estas equações estudar-se-á a solução para o caso estático e isotrópico em uma aproximação linear. Este resultados foram apresentados em Ref. [16].

A Lagrangiana do campo de gauge livre

A Lagrangiana para o campo de gauge considerada aqui é do tipo

$$L_0 = L_0(\omega_\mu^{ef}, \partial_\nu \omega_\mu^{ef}, \partial_\rho \partial_\nu \omega_\mu^{ef}),$$

porém, para estar em consonância com o princípio de invariância de gauge, ela deve poder ser reescrita como

$$L_0 = L_0(F, G),$$

em que

$$F_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} - \eta_{cd} \omega_\mu^{ac} \omega_\nu^{db} + \eta_{cd} \omega_\nu^{ac} \omega_\mu^{db}, \quad (2.87)$$

$$G_{\beta\rho\sigma}^{ab} = D_\beta F_{\rho\sigma}^{ab} = \partial_\beta F_{\rho\sigma}^{ab} - \eta_{fd} \omega_\beta^{af} F_{\rho\sigma}^{db} + \eta_{fd} \omega_\beta^{af} F_{\rho\sigma}^{bd}. \quad (2.88)$$

Com as mesmas hipóteses feitas no caso de primeira ordem com respeito à geometrização da teoria, é possível associar os objetos F e G a entes geométricos. Para o caso do tensor F , a identificação é a mesma do caso de primeira ordem,

$$F_{\beta\sigma}^{eg} = \eta^{gc} h_c^\alpha h_\gamma^e R_{\sigma\beta\alpha}{}^\gamma,$$

em que $R_{\sigma\beta\alpha}{}^\gamma$ é o tensor de curvatura de Riemann; já G é mapeado na derivada covariante (sobre TGC) do tensor de Riemann

$$G_{\beta\rho\sigma}^{ab} = h_\mu^a h_\nu^b g^{\nu\alpha} \delta_\beta R_{\sigma\rho\alpha}{}^\mu.$$

A condição Eq.(2.72) em termos das variáveis de gauge torna-se

$$\frac{\partial L_0}{\partial F_{\rho\sigma}^{ad}} [\eta_{cg} \delta_b^a - \eta_{bg} \delta_c^a] F_{\rho\sigma}^{gd} + \frac{\partial L_0}{\partial G_{\beta\rho\sigma}^{ad}} [\eta_{cg} \delta_b^a - \eta_{bg} \delta_c^a] G_{\beta\rho\sigma}^{gd} = 0, \quad (2.89)$$

ou, em termos das variáveis geométricas,

$$\frac{\partial L_0}{\partial R_{\sigma\rho\beta}{}^\theta} [\delta_\nu^\theta g_{\gamma\lambda} - \delta_\gamma^\theta g_{\nu\lambda}] R_{\sigma\rho\beta}{}^\lambda + \left[\frac{\partial L_0}{\partial (\delta_\beta R_{\sigma\rho\alpha}{}^\gamma)} g_{\nu\lambda} - \frac{\partial L_0}{\partial (\delta_\beta R_{\sigma\rho\alpha}{}^\nu)} g_{\gamma\lambda} \right] \delta_\beta R_{\sigma\rho\alpha}{}^\lambda = 0. \quad (2.90)$$

As Lagrangianas invariantes de gauge

A seguir são analisadas quais são as Lagrangianas invariantes de gauge possíveis de se construir com combinações quadráticas (com exceção da Lagrangiana de Einstein-Hilbert) do tipo FF e GG ; nenhuma combinação do tipo FG é considerada.

Em princípio todas as combinações possíveis são consideradas. No entanto, devido às antissimetrias de F ($F_{\mu\nu}^{ab} = -F_{\mu\nu}^{ba}$ e $F_{\nu\mu}^{ab} = -F_{\nu\mu}^{ab}$) e de G ($G_{\rho\mu\nu}^{ab} = -G_{\rho\mu\nu}^{ba}$ e $G_{\rho\mu\nu}^{ab} = -G_{\rho\nu\mu}^{ab}$) e devido às identidades de Bianchi, $R^{\sigma\chi\rho\beta} + R^{\chi\rho\sigma\beta} + R^{\rho\sigma\chi\beta} = 0$ e $\delta^\mu R^{\sigma\chi\rho\beta} + \delta^\sigma R^{\chi\mu\rho\beta} + \delta^\chi R^{\mu\sigma\rho\beta} = 0$, que valem em função da variedade ser riemanniana, o número de invariantes independentes se reduz a apenas 7, os quais são resumidos na tabela abaixo:

Lagr.	Forma de Gauge	Forma Geométrica
$L_0^{(R_1)}$	$(F_{ba}^{ab})^n$	R^n , $n = 1, 2$
$L_0^{(R_2)}$	$F_{b\mu a}^a F_c^{b\mu c}$	$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$
$L_0^{(R_3)}$	$F_{\mu\nu}^{ab} F_{ab}^{\mu\nu}$	$R_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\alpha\beta\rho\sigma}$
$L_0^{(G_1)}$	$G_{ab\beta}^{\beta a} G_{cb}^{\mu c}{}_{\mu c}$	$\delta^\rho R_{\rho\chi} \delta_\mu R^{\mu\chi}$
$L_0^{(G_2)}$	$G_{\mu a \sigma}^{ab} G_{cb}^{\mu c \sigma}$	$\delta_\beta R_{\sigma\chi} \delta^\beta R^{\sigma\chi}$
$L_0^{(G_3)}$	$G_{a\sigma}^{abe} G_{deb}^{d\sigma}$	$\delta_\beta R_{\sigma\chi} \delta^\chi R^{\sigma\beta}$
$L_0^{(G_4)}$	$G_{\mu\nu\lambda}^{ab} G_{ab}^{\mu\nu\lambda}$	$\delta_\beta R_{\sigma\rho\chi\kappa} \delta^\beta R^{\sigma\rho\chi\kappa}$

(2.91)

Entenda-se acima que a aparição de um índice de Lorentz, onde em princípio deveria ser um índice de mundo, representa uma contração do índice de mundo com uma tetrada, e.g. $F_{ba}^{ab} = F_{\mu\nu}^{ab} h_b^\mu h_a^\nu$. Qualquer outra combinação de contração de índices se reduz a uma das formas acima, as quais, por sua vez, satisfazem individualmente a condição Eq.(2.89), ou equivalentemente Eq.(2.90). Assim sendo, qualquer função dos invariantes acima que admita expansão em série de Taylor satisfaz os requisitos para ser considerada teoria de gauge. Note-se, todavia, que as quantidades acima são todas escalares e que, para se compor a integral de ação, cada um destes invariantes deve ser multiplicado por $h = \sqrt{-g}$ e então integrado.

Equações de campo

Considere-se agora um caso particular em que a teoria é descrita por uma Lagrangiana que é a combinação da Lagrangiana usual de Einstein-Hilbert com a Lagrangiana $L_0^{(G_1)}$ dada acima, escrita na forma

$$\mathcal{L}_0^{(G_1)} = \frac{1}{2} h h_\sigma^a h_c^\nu G_{ab\beta}^{\beta\sigma} G_{cb}^{\mu c}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{8} h \delta^\rho R \delta_\rho R.$$

Note-se que $\mathcal{L}_0^{(G_1)}$, escrita como $\mathcal{L}_0^{(G_1)} = \frac{1}{2} h \delta^\rho R_{\rho\chi} \delta_\mu R^{\mu\chi}$, é análoga ao termo extra proposto por Podolsky na sua eletrodinâmica generalizada, $L_{Podolsky} \propto \partial^\rho F_{\rho\chi} \partial_\mu F^{\mu\chi}$. A escolha por esta Lagrangiana é motivada por esta analogia, mas quando escrita em termos da derivada do escalar de curvatura, este invariante pode ser interpretado como um termo cinético para R , sendo também

análogo ao termo cinético dos campos escalares usuais. Além disso, esta Lagrangiana, a menos de um termo de superfície, aparece na ação efetiva proposta por Schwinger e De Witt no estudo do campo escalar em espaços curvos [17].

As equações de campo obtidas para a ação

$$S_T = \int d^n x \left(-\frac{\hbar R}{2\chi} - \frac{\beta}{\chi} \mathcal{L}_0^{(G_1)} + \hbar \mathcal{L}_{matter} \right)$$

são

$$R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\nu} R + \beta \left[\delta_\lambda \delta_\nu (\diamond R) + \frac{1}{2} \delta_\lambda R \delta_\nu R - R_{\lambda\nu} \diamond R - g_{\lambda\nu} \diamond (\diamond R) - \frac{1}{4} g_{\lambda\nu} \delta^\rho R \delta_\rho R \right] = \chi T_{\lambda\nu} ,$$

onde $\diamond \equiv \delta_\beta \delta^\beta$ e $T_{\lambda\nu} \equiv \frac{2}{\hbar} \frac{\delta(\hbar \mathcal{L}_{matter})}{\delta g^{\lambda\nu}}$ é o tensor energia-momento. Estas equações são obtidas fazendo-se variações com respeito à métrica, mas equações equivalentes seriam obtidas tomando-se variações com respeito às tetradas:

$$G^b{}_\nu + \beta H^b{}_\nu = \chi T^b{}_\nu , \quad (2.92)$$

com

$$H^b{}_\nu \equiv \hbar^{b\lambda} \delta_\lambda \delta_\nu [\diamond R] + \frac{1}{2} \hbar^{b\lambda} \delta_\lambda R \delta_\nu R - R^b{}_\nu \diamond R - \hbar^b{}_\nu \delta_\beta \delta^\beta [\diamond R] - \frac{1}{4} \hbar^b{}_\nu \delta^\rho R \delta_\rho R , \quad (2.93)$$

em que $G^b{}_\nu \equiv \eta^{ba} \hbar_a{}^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R)$. Note-se que estas equações são de sexta ordem na derivada da métrica.

A conservação covariante do tensor energia-momento pode ser verificada. Ao se tomar o divergente covariante da equação de campo,

$$\delta^\nu G_{\nu\alpha} + \beta \delta^\nu H_{\nu\alpha} = \chi \delta^\nu T_{\nu\alpha} ,$$

verifica-se que

$$\delta^\nu G_{\nu\alpha} = 0 ,$$

como já conhecido do caso de primeira ordem. Ainda pode-se constatar, a se utilizar a relação $[\delta_\nu, \delta_\alpha] A^\tau = R_{\alpha\nu}{}^{\tau\xi} A_\xi$ e a segunda identidade de Bianchi, que

$$\delta^\nu H_{\nu\alpha} = R_{\alpha\xi} \delta^\xi \diamond R - R_{\nu\alpha} \delta^\nu \diamond R + \frac{1}{2} \delta_\nu R \delta^\nu \delta_\alpha R - \frac{1}{2} \delta^\rho R \delta_\alpha \delta_\rho R = 0 .$$

Desta forma, a conservação covariante de $T_{\mu\nu}$ é obtida

$$\delta^\mu (G_{\mu\nu} + \beta H_{\mu\nu}) \equiv 0 \implies \delta^\mu T_{\mu\nu} = 0 .$$

A solução estática e isotrópica

Considere-se a métrica estática e isotrópica

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

análoga àquela proposta por Schwarzschild no contexto da Relatividade Geral. Tomando-se as equações de campo em aproximação linear, tem-se

$$\begin{aligned} & \nu'' + \frac{2}{r}\nu' + \\ & + \beta \left(\nu^{(6)} + \frac{6}{r}\nu^{(5)} - \frac{2}{r}\lambda^{(5)} - \frac{2}{r^2}\lambda^{(4)} + \frac{8}{r^3}\lambda''' - \frac{24}{r^4}\lambda'' + \frac{48}{r^5}\lambda' - \frac{48}{r^6}\lambda \right) = 0, \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda'}{r} - 2\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\nu'}{r} - \nu'' \right) + \\ & - \beta \left(\nu^{(6)} + \frac{3}{r}\nu^{(5)} - \frac{12}{r^2}\nu^{(4)} + 12\frac{\nu'''}{r^3} - \frac{2}{r}\lambda^{(5)} + \frac{4}{r^2}\lambda^{(4)} + 8\frac{\lambda'''}{r^3} - 48\frac{\lambda''}{r^4} + 96\frac{\lambda'}{r^5} - 96\frac{\lambda}{r^6} \right) = 0, \end{aligned}$$

onde a notação $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dr^n}$ é utilizada.

Por serem consideradas em aproximação linear, o método de Frobenius pode ser aplicado:

$$\nu(r) = \sum_n \nu_n r^{s+n}, \quad \lambda(r) = \sum_n \lambda_n r^{s+n}.$$

A solução encontrada é dada por

$$\begin{aligned} \nu(r) &= \sum_{m=0}^3 \nu_m r^{m-1} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{nm} \right), \\ \lambda(r) &= \sum_{m=0}^3 \lambda_m r^{m-1} - \sum_{m=0}^3 \nu_m r^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+m-2)(4n+3+m)}{2(4n+1+m)} c_{nm}, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} c_{nm} &\equiv \left(-\frac{r^4}{2\beta} \right)^{n+1} \frac{(m+1)!}{(4n+m+4)!} \frac{(4n+m+1)!!!!}{(m+1)!!!!} \frac{(m-\frac{9}{2})!!!!}{(4n+m-\frac{1}{2})!!!!}, \\ &(a+4)!!!! = (a+4) .a!!!! . \end{aligned}$$

Note-se a escolha por $s = -1$; ela se justifica quando se escolhe que o comportamento newtoniano do potencial deve ser resgatado. Nas soluções encontradas, ν_m e λ_m , $m \in \{0, 1, 2, 3\}$, são constantes de integração a serem determinadas por condições de contorno. Note-se que a solução para λ é determinada em termos das constantes para ν , sendo isto decorrência do acoplamento das equações de campo. A convergência da série pode ser verificada pelo teste da razão e verifica-se que ela possui raio de convergência infinito.

A solução, em primeira ordem em r^4/β é dada por

$$\begin{aligned}\nu(r) &= \frac{\nu_0}{r} \left(1 + \frac{1}{24\beta} r^4\right) + \nu_1 \left(1 - \frac{1}{60\beta} r^4\right) + \\ &\quad + \nu_2 r \left(1 - \frac{1}{360\beta} r^4\right) + \nu_3 r^2 \left(1 - \frac{1}{1050\beta} r^4\right) + \mathcal{O}\left(\left(r^4/\beta\right)^2\right), \\ \lambda(r) &= -\frac{\nu_0}{r} + \lambda_1 + \lambda_2 r + \lambda_3 r^2 + \frac{1}{6\beta} \left(-\frac{\nu_0}{4} r^3 + \frac{\nu_1}{10} r^4 + \frac{\nu_2}{60} r^5 + \frac{\nu_3}{175} r^6\right) + \mathcal{O}\left(\left(r^4/\beta\right)^2\right).\end{aligned}\tag{2.94}$$

Note-se que, para pequenas distâncias, o comportamento dominante é dado pelo termo $\frac{\nu_0}{r}$, que é do tipo newtoniano, conforme esperado pela escolha $s = -1$, o que leva a identificar $\nu_0 = 2GM/c^2$. As outras constantes, ν_1 , ν_2 , ν_3 , multiplicam termos representando correções ao potencial newtoniano e cada uma delas estabelece a escala de distância onde as contribuições constante, linear e quadrática em r , começam a ser significantes. A constante ν_1 pode ser entendida como um potencial constante; ν_2 pode ser interpretada como uma força constante; e ν_3 pode representar o "gradiente" de uma força. A partir da potência terceira de r , quem estabelece a magnitude da contribuição é a constante β . A fixação completa destas constantes deve ser feita por meio de dados experimentais.

2.3 Vinculando-se a Eletrodinâmica de Podolsky

Um dos problemas em teorias efetivas, que, como mencionado, seria o caso das teorias de segunda ordem, é fixar as constantes introduzidas na Lagrangiana, as quais essencialmente estabelecem as escalas de energia/distância onde as teorias possuem validade. Este processo de vinculação dos parâmetros é feito assumindo-se que a teoria efetiva é válida em uma dada escala de energia, na qual é possível se realizar medições. Nesta seção a intenção é tomar como estudo de caso a Eletrodinâmica de Podolsky [9] e ver como o parâmetro a pode ser vinculado por dados experimentais ou experimentos já existentes. A escolha pela teoria de Podolsky se justifica pela simplicidade da mesma, comparada às demais estudadas aqui, e pela quantidade de dados experimentais/experimentos existentes no eletromagnetismo.

Três estimativas para a serão feitas a seguir e é importante observar que os resultados independem um dos outros. Essencialmente, estes testes são realizados em diferentes escalas de energia, de forma que os resultados obtidos não são comparáveis entre si, mas apenas indicam quais seriam os valores permitidos para a , caso a teoria fosse válida na referida escala de energia.

Antes de prosseguir com os cálculos, é importante fazer algumas observações. A Lagrangiana de Podolsky,

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial_\rho F^{\rho\mu} \partial_\sigma F^\sigma{}_\mu,$$

conduz a um conjunto de equações de campo,

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu F^{\nu\mu} = 0,$$

as quais, sob a condição de Lorenz generalizada⁹ [18],

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu(x) = 0,$$

e sob uma transformada de Fourier, podem ser expressas como

$$p^2 (1 - a^2 p^2) A_\mu(p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p^2 = 0 \\ p^2 - \frac{1}{a^2} = 0 \end{cases},$$

em que $p^2 = p_\mu p^\mu$. Esta expressão permite a identificação de dois modos para o campo A_μ , um modo massivo e um não massivo. Isto torna-se claro quando as duas relações são dadas em termos do trivetor momento e da energia:

$$\begin{aligned} E^2 - \mathbf{p}^2 &= 0, \\ E^2 &= \mathbf{p}^2 + \frac{1}{a^2}, \quad m = \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Esta última, por sua vez, mostra explicitamente a relação entre a massa do modo massivo na teoria de Podolsky e a constante a . Perceba-se que esta relação só existe para $a \neq 0$.

2.3.1 A corrente de segunda ordem e a massa do fóton

Na teoria geral para Lagrangianas de segunda ordem no campo de gauge, duas formas para a corrente foram propostas, dadas por Eq.(2.83) e Eq.(2.85), sendo esta última a satisfazer uma verdadeira lei de conservação. Para o grupo $U(1)$, Eq. (2.83) coincide com a corrente do caso de primeira ordem, j^ν ,

$$J^\nu = j^\nu = -\frac{\partial L_T}{\partial (\nabla_\nu Q^A)} T_B^A Q^B,$$

enquanto Eq.(2.85) difere desta por um termo topológico (impróprio),

$$\bar{J}^\nu = j^\nu - \partial_\mu \frac{\partial L_0}{\partial F_{[\mu\nu]}} = j^\nu - \partial_\mu F^{\nu\mu}.$$

No caso de um campo estático na presença de uma carga puntual, a equação de campo sob uma condição de Lorenz generalizada torna-se

$$\begin{aligned} -(1 - a^2 \nabla^2) \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) &= 4\pi \rho(\mathbf{r}), \\ \rho(\mathbf{r}) &= -e\delta(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Esta equação pode ser resolvida, por exemplo *via* transformada de Fourier, e, dada a simetria esférica do sistema, encontra-se:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{e}{r} (1 - e^{-\frac{r}{a}}).$$

⁹A condição de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ também conduz à mesma identificação dos modos massivo e não massivo. Todavia, esta escolha implica na transversalidade do campo e de seu momento, que pode não ser necessariamente a mais apropriada para a teoria, em função da existência do modo massivo. Veja Ref.[18] para uma discussão mais aprofundada.

Esta solução é a combinação de um potencial do tipo coulombiano com um potencial do tipo Yukawa.

Com esta solução encontra-se a seguinte expressão para a corrente:

$$\bar{J}^0(\mathbf{r}) = -e \left(\delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{a^2 r} e^{-\frac{r}{a}} \right), \quad \bar{J}^k = 0.$$

A integração da componente \bar{J}^0 em todo o espaço permite a obtenção de uma carga conservada, dada por

$$q = -e(1 - 4\pi),$$

que representa uma renormalização da carga “nua”, e . No entanto, a teoria quântica de um elétron não relativístico estabelece um corte (*cutoff*) natural em distâncias muito pequenas, cuja magnitude é da ordem do comprimento de onda Compton, ε [19]. Com esta idéia em mente, a integração de \bar{J}^0 deve ser feita não a partir de $r = 0$, mas a partir de $r = \varepsilon$, o que leva à seguinte carga efetiva:

$$q_{eff} = -e \left(1 - 4\pi \left[\frac{a + \varepsilon}{a} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right) \right] \right). \quad (2.96)$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$\sigma_e^{rel} \equiv \frac{q_{eff} - e_{el}}{e} = 4\pi \frac{a + \varepsilon}{a} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right).$$

Esta quantidade pode ser interpretada como sendo a incerteza relativa da carga do elétron. Desta forma, conhecendo-se σ_e^{rel} , tem-se uma equação transcendental para a , a qual pode ser resolvida numericamente. Utilizando-se dados experimentais disponíveis em Ref.[20] e usando uma propagação de incertezas simples e ignorando as incertezas de σ_e^{rel} , é possível fazer uma estimativa de a e da massa do fóton correspondente, através da relação $m = \frac{\hbar}{ac}$:

$$a = 1,105\,868\,617(14) \times 10^{-11} \text{ cm},$$

$$m = 3,180\,913\,40(16) \times 10^{-30} \text{ kg} = 1,784\,361\,72(92) \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

No contexto de uma teoria clássica efetiva, esta massa não deve ser interpretada como sendo uma massa de repouso do fóton, mas como caracterizando a escala de energia em que a teoria se torna relevante, de uma maneira análoga ao modo como o fônon caracteriza as vibrações em um cristal [21]. Note-se ainda que duas condições são necessárias para a obtenção do resultado acima: o uso de uma região blindada e o uso da corrente Eq.(2.85). Se a corrente de Noether tivesse sido utilizada, esta estimativa não seria obtida.

2.3.2 Interferometria de íons

Nesta seção, propõe-se a medição da constante de Podolsky no contexto de um experimento que faz uso de interferometria de íons. O experimento foi proposto originalmente em [22] para medir a massa do fóton no contexto do modelo de Proca.

É importante observar que a maioria dos experimentos que se propõem a medir a massa do fóton, normalmente o fazem através da procura por desvios da lei de Coulomb - em geral um potencial do tipo $1/r^{1+\delta}$ é proposto e δ é avaliado a partir de dados experimentais. No entanto, este tipo de potencial é posto à mão nas equações, ou seja, ele não é deduzido a partir uma teoria ou modelo mais fundamental, como e.g. o potencial de Coulomb, que pode ser derivado na teoria de Maxwell, ou como o modelo de Proca. A idéia dos autores em [22] é justamente evitar este tipo de problema e, desta forma, eles assumem que, se o fóton possui massa, ela deve manifestar-se dentro do contexto do modelo de Proca. Para realizar a medição desta massa, um experimento foi proposto, em que um feixe de íons passa por um tubo, no qual diferentes tensões são aplicadas, e, se o fóton possui massa, espera-se uma diferença de fase em um interferômetro, que se encontra ao fim do tubo.

A existência de uma massa do fóton é um problema para os físicos teóricos, pois, como já visto anteriormente, as teorias de gauge preveem que a massa do campo de gauge, como é o caso do fóton, seja nula. Caso seja verificada a existência desta massa, no contexto do experimento acima com o modelo de Proca, então teorias como a Eletrodinâmica Quântica, que faz uso da estrutura de gauge, terão de ser revistas, ou pelo menos reinterpretadas à luz de novos mecanismos (como é o caso do mecanismo de Higgs em teorias não abelianas).

Todavia, se a teoria subjacente for considerada como sendo a de Podolsky, a existência de um modo massivo para o fóton poderia explicar o desvio no interferômetro, sem ter que se abrir mão do uso de uma teoria de gauge. Esta é a idéia que será desenvolvida a seguir: como se medir a Eletrodinâmica generalizada de Podolsky no contexto do experimento de interferometria de íons.

No experimento proposto em [22], uma tensão variável é aplicada a um cilindro condutor, o qual se encontra alojado dentro de um segundo cilindro, que por sua vez está aterrado. Um feixe de íons passa pelo cilindro interno através de três grades igualmente espaçadas, formando um interferômetro Mach-Zehnder. O feixe inicialmente entra no condutor por uma cavidade na base do cilindro e passa a viajar paralelamente ao eixo deste. Após passar pela primeira grade, o feixe é separado em dois braços, um dos quais continua a se mover em paralelo ao eixo a uma distância r_0 deste, enquanto o outro passa a viajar em diagonal (i.e. com um componente de sua velocidade na direção axial e outro na direção radial). Ao atingir a segunda grade, o braço que viajava na direção axial passa a viajar em diagonal, enquanto o que viajava diagonalmente passa a se propagar paralelo ao eixo a uma distância $r_0 + s$ do mesmo. Quando os dois braços chegam na terceira grade, os feixes são unidos em um único feixe, que por sua vez passa a viajar na direção axial até atingir o interferômetro, conforme a figura Fig.1.

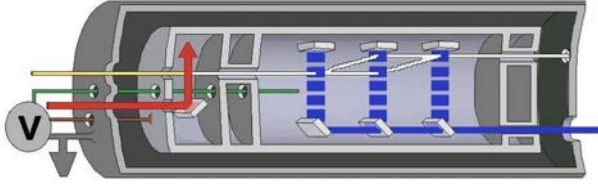


Fig. 1 - Representação do experimento com feixe de íons. A linha superior representa o feixe de íons (a ionização do feixe ocorre dentro do segundo cilindro com um laser, representado pela flecha).

Se houver campo elétrico dentro do cilindro, então os segmentos do feixe que viajaram paralelamente ao eixo (em r_0 e r_{0s}) passam por potenciais diferentes, de forma que se espera que haja uma diferença de fase no interferômetro. Os braços que viajam em diagonal, por sua vez, não induzem uma diferença de fase, pois ambos passam pelos mesmos potenciais, uma vez que as grades são equidistantes. Note-se que a diferença de fase no interferômetro não é esperada na teoria de Maxwell, uma vez que o cilindro interno é condutor, e portanto o potencial deveria ser constante em qualquer ponto interno a este tubo.

A equação de campo para o potencial, na situação estática, é

$$(1 - a^2 \nabla^2) \nabla^2 \phi = 0.$$

A solução desta equação em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\phi\left(\frac{r}{a}\right) = a^2 A I_0\left(\frac{r}{a}\right) + a^2 B K_0\left(\frac{r}{a}\right) + D \ln \frac{r}{a} + C, \quad (2.97)$$

em que se admite que o problema possui simetria angular e que a aproximação de tubo infinito é aplicável, dadas as dimensões do cilindro. Nesta expressão, I_0 e K_0 são funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipo, respectivamente. Para determinar as quatro constantes de integração (número esperado para uma equação de quarta ordem), são fixadas condições de contorno. A primeira é a de que o potencial no limite $r \rightarrow 0$ seja finito. Com as formas assintóticas de I_0 e K_0 [24, 23], conclui-se que $D = a^2 B$. Outra condição de contorno consiste em utilizar o potencial em $r = R$, em que R é o raio do cilindro interno. Se V_0 é a diferença de tensão aplicada entre o tubo interno e o externo, cuja tensão desconhecida é V_g , então

$$V_0 + V_g = a^2 A \left[I_0\left(\frac{R}{a}\right) + g(a) \left[K_0\left(\frac{R}{a}\right) + \ln \frac{R}{a} \right] + f(a) \right],$$

em que as constantes B e C são redefinidas como $B = g(a) A$ e $C = f(a) a^2 A$. Com esta expressão pode-se fixar A em função de f e g . Uma terceira condição a ser empregada consiste em tomar o campo elétrico \mathbf{E} em $r = 0$, como sendo nulo. Esta escolha se justifica, pois do contrário, haveria uma discontinuidade do campo elétrico, sem uma razão física, pois não há cargas no eixo do cilindro. Todavia esta condição é imediatamente satisfeita, e com ela não se pode fixar nenhuma constante. No entanto, se o mesmo argumento for aplicável ao divergente do campo elétrico, então

fixa-se $g(a) = 0$. Finalmente, para se definir a constante $f(a)$, utiliza-se uma medição que não é prevista em Ref.[22], que consiste na medição do potencial em $r = 0$. Assumindo-se que esta medição forneça uma expressão do tipo $\phi(0) = (V_0 + V_g)\epsilon$, com $0 \leq \epsilon \leq 1$, conclui-se que¹⁰

$$f(a) = \frac{\epsilon I_0\left(\frac{R}{a}\right)}{(1 - \epsilon)}.$$

O potencial finalmente é dado por

$$\phi\left(\frac{r}{a}\right) = (V_0 + V_g) \left[\frac{I_0\left(\frac{r}{a}\right)}{I_0\left(\frac{R}{a}\right)} (1 - \epsilon) + \epsilon \right].$$

A fase induzida no interferômetro, devido à diferença de potencial $\Delta\phi$ entre $r = r_0$ e $r = r_0 + s$, é dada por

$$\Phi = \frac{e\tau}{\hbar} \Delta\phi + \Phi_0 = \frac{e\tau}{\hbar} (V_0 + V_g) \left[\frac{I_0\left(\frac{r_0+s}{a}\right) - I_0\left(\frac{r_0}{a}\right)}{I_0\left(\frac{R}{a}\right)} \right] (1 - \epsilon) + \Phi_0,$$

em que Φ_0 é a fase indicada no interferômetro quando $V_0 + V_g = 0$, e é a carga do íon, e τ é o tempo gasto pelos íons para percorrerem os segmentos horizontais. É possível eliminar as constantes desconhecidas V_g e Φ_0 se duas diferenças de potenciais entre os tubos, V_0 e $V_0 + \Delta V$, forem tomadas, de modo que

$$\Delta\Phi = \frac{e\tau}{\hbar} \Delta V \left[\frac{I_0\left(\frac{r_0+s}{a}\right) - I_0\left(\frac{r_0}{a}\right)}{I_0\left(\frac{R}{a}\right)} \right] (1 - \epsilon).$$

Esta expressão pode ser invertida para fornecer a em termos das quantidades mensuráveis. Para tanto, admitir-se-á que a constante de Podolsky é muito pequena comparada às dimensões envolvidas no problema, de forma que a forma assintótica para I_0 possa ser utilizada, $I_0(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x}$, o que conduz a

$$a = \frac{R - (r_0 + s)}{\ln(1 - \epsilon) - \ln\left(\frac{\hbar \Delta\Phi}{e\tau \Delta V} \sqrt{\frac{r_0 + s}{R}}\right)}. \quad (2.98)$$

Para proceder com estimativas numéricas, usam-se dados fornecidos em Ref.[22] para íons de $^1H^+$ e $^{133}Cs^+$. Estes íons viajam a velocidades v de $311 m/s$ e $27 m/s$ respectivamente, e, como a separação entre as grades é de $1 m$, obtêm-se τ , $\tau = L/v$ para cada um dos íons. A diferença de potencial ΔV pode ser fixada em $400 kV$ e os valores de R , r_0 e s são fixados como $R = 27 cm$, $r_0(^1H^+) = 24,4 cm$, $r_0(^{133}Cs^+) = 24,9 cm$, e $s(^1H^+) = 6,4 mm$, $s(^{133}Cs^+) = 0,56 mm$. Utiliza-se ainda a resolução do interferômetro como sendo da ordem de 10^{-4} e o fato de que, com multímetros comerciais disponíveis atualmente, uma precisão de no máximo 10^{-8} possa ser

¹⁰Note-se que o caso $\epsilon = 1$ corresponde, fisicamente, ao caso em que teoria subjacente é a Eletrodinâmica de Maxwell, em que $a = 0$. Assim o limite $\epsilon \rightarrow 1$ deve ser feito concomitantemente com o limite $a \rightarrow 0$, de forma que a divergência em $f(a)$ pode ser controlada.

atingida para a medição de ϵ . É possível fazer estimativas numéricas para a tomando-se diferentes valores para ϵ , $\Delta\Phi$, e o que se obtém são vínculos sobre os valores de a : $a_{Cs^+} \geq 0,033 \text{ cm}$ no caso do feixe de $^{133}Cs^+$ e $a_{H^+} \geq 0,069 \text{ cm}$ para o feixe de íons de $^1H^+$. Valores desta magnitude justificam o uso da forma assintótica da função de Bessel empregada anteriormente. As estimativas para as massas do modo massivo ficam vinculadas: $m_\gamma^{^{133}Cs^+} \leq 1,06 \times 10^{-39} \text{ kg} = 5,98 \times 10^{-4} \frac{eV}{c^2}$ e $m_\gamma^{^1H^+} \leq 5,10 \times 10^{-40} \text{ kg} = 2,85 \times 10^{-4} \frac{eV}{c^2}$.

É importante perceber que o valor de a não depende do íon utilizado e que a notação usada acima apenas ilustra os valores de a acessíveis por cada um dos íons utilizados. Com relação às previsões numéricas de a , deve-se notar que se a fosse de fato da ordem de centésimos de centímetros, como é o melhor caso obtido aqui, então ela já teria sido observada por outros experimentos. A conclusão é que, embora do ponto de vista da formulação do experimento seja possível estimar valores para a , as ordens de energia e distâncias envolvidas neste problema, inviabilizam uma medição de a que seja compatível com o esperado de que a Eletrodinâmica de Podolsky represente pequenos desvios com relação à teoria de Maxwell. Com isso justifica-se, de maneira quantitativa, a inadequabilidade deste experimento para a medição da teoria de Podolsky.

2.3.3 O átomo de Hidrogênio

Uma outra forma de vincular a constante de Podolsky será apresentada a seguir e consiste em assumir que esta teoria seja válida em escalas atômicas. O caso mais simples para ser analisado é o estado fundamental do átomo de Hidrogênio, como descrito pela Mecânica Quântica. Para tanto o potencial eletrostático coulombiano será substituído pelo potencial eletrostático de Podolsky,

$$\phi(r) = -\frac{e}{r} (1 - e^{-\frac{r}{a}}),$$

na Hamiltoniana, $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + e\phi(r)$, e o método variacional será aplicado para se obter uma solução perturbativa àquela normalmente obtida. Considerar-se-á $\hbar = 1$ durante o desenvolvimento, mas, quando necessário, as unidades serão restauradas. A solução tentativa é

$$\psi(r) = Ne^{-\gamma r},$$

com $N^2 = \frac{\gamma^3}{\pi}$ sendo uma constante de normalização da função de onda e γ uma constante a ser determinada pelo método variacional. A energia, dada por

$$E = \int dV \psi^*(r) \hat{H} \psi(r) = \frac{\gamma^2}{2m} - e^2 \gamma + e^2 \frac{4\gamma^3}{(2\gamma + \frac{1}{a})^2},$$

deve ser minimizada, levando à condição

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma} = \frac{8a^3}{m} \gamma^4 + \frac{12a^2}{m} \gamma^3 + \frac{6a}{m} \gamma^2 - 6ae^2 \gamma + \frac{\gamma}{m} - e^2 = 0. \quad (2.99)$$

Se a é assumido ser muito pequeno, então, em primeira ordem em a , tem-se $\gamma_+ = me^2$ e $\gamma_- = -\frac{1}{6a}$. As energias obtidas com estes valores de γ são

$$E(\gamma_+) = -\frac{me^2}{2}e^2 \left(1 - 2(2mae^2)^2\right) + O(a^3), \quad E(\gamma_-) = \frac{9ame^2 + 1}{72a^2m}.$$

A energia $E(\gamma_-)$ é positiva e torna-se muito grande para pequenos valores de a , inviabilizando a descrição de um estado ligado. Portanto, esta solução deve ser excluída. Já $E(\gamma_+)$ só pode ser avaliada para um dado valor de a . Porém, se a for muito pequeno, o termo proporcional a a^2 na energia torna-se apenas uma perturbação na energia do estado fundamental, como previsto quando do uso do potencial coulombiano, em que $E = -\frac{me^4}{2}$. Para dados compatíveis com resultados experimentais dados na literatura, o termo perturbativo $2(2mae^2)^2$ deve ser menor ou igual à incerteza relativa da energia do estado fundamental do átomo de H, ou seja,

$$a \leq \frac{r_B}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{E_0}}{2|E_0|}},$$

em que $r_B = \frac{1}{me^2}$ é o raio de Bohr. Usando dados disponíveis na literatura [25], encontra-se

$$a \leq 5,56 \text{ fm} \quad \text{or} \quad m_\gamma \geq 6,33 \times 10^{-29} \text{ kg} = 35,51 \frac{\text{MeV}}{c^2}. \quad (2.100)$$

Referências Bibliográficas

- [1] L. O’Raifeartaigh - *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton University Press (1997).
- [2] A. Einstein - *Ann. d. Phys.* **49** (1916).
- [3] H. Weyl - *Sitzungsber. Preuss. Akad. Berlin* **465** (1918).
- [4] H. Weyl - *Zeit. f. Physik* **330**, 56 (1929).
- [5] C. N. Yang e R. L. Mills - *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
- [6] W. Pauli - *Comunicação pessoal* (conforme capítulo 7 de Ref.[1]).
- [7] R. Shaw - *Tese de Doutorado*, Universidade de Cambridge (1955).
- [8] R. Utiyama - *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).
- [9] B. Podolsky - *Phys. Rev.* **62**, 68 (1942); B. Podolsky e C. Kikuchi - *Phys. Rev.* **65**, 228 (1944);
B. Podolsky e P. Schwed - *Rev. Mod. Phys.* **20**, 40 (1948).
- [10] A. I. Alekseev, B. A. Arbuzov e V. A. Baikov - *Theor. Math. Phys.* **52**, 739 (1982); A. I.
Alekseev e B. A. Arbuzov - *Theor. Math. Phys.* **59**, 372 (1984).
- [11] T. W. B. Kibble - *J. Math. Phys.* **2**, 212 (1961).
- [12] R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo e P. J. Pompeia - *Ann. Phys.* **322**, 1211 (2007).
- [13] S. Weinberg - *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [14] K. S. Stelle - *Gen. Rel. Grav.* **9**, 353 (1978); I. L. Buchbinder e S. L. Lyahovich - *Class.
Quantum Grav.* **4** 1487 (1987); L. Querella - *Tese de Doutorado*, Universidade de Liège (1998);
A. Accioly, A. Azeredo e H. Mukai - *J. Math. Phys.* **43**, 473 (2002).
- [15] T. P. Sotiriou e V. Faraoni - *arXiv 0805.1726* (2008).
- [16] R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo, L. G. Medeiros e P. J. Pompeia - *Eur. Phys. J. C* **53**, 99
(2008).

- [17] I. G. Avramidi - *Heat Kernel and Quantum Gravity*, Springer (2000).
- [18] C. A. P. Galvão e B. M. Pimentel - *Can. J. Phys.* **66**, 460 (1988).
- [19] E. J. Moniz e D. H. Sharp - *Phys. Rev. D* **10**, 1133 (1974); **15**, 2850 (1977).
- [20] S. Eidelman *et al.* - *Phys. Lett. B* **592**, 1 (2004).
- [21] R. Kubo e T. Nagamiya - *Solid State Physics*, McGraw-Hill (1968).
- [22] B. Neyenhuis, D. Christensen e D. S. Durfee - *Phys. Rev. Lett.* **99**, 200401 (2007) .
- [23] E. Butkov - *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company (1968).
- [24] G.B. Arfken e H.J. Weber - *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (1995).
- [25] C. Amsler *et al.*, *Phys. Lett. B* **667**, 1 (2008); site - <http://pdg.lbl.gov/>.

2.4 Artigos e preprints

A seguir são apresentados os artigos e preprints em que foram publicados, ou estão em via de publicação, os resultados mostrados anteriormente neste capítulo.

2.4.1 Teoria de gauge de segunda ordem

Uma teoria de gauge de segunda ordem nas derivadas do campo auxiliar é construída, seguindo-se o programa de Utiyama. Um novo campo de força, $G = \partial F + fAF$, surge ao lado daquele de primeira, $F = \partial A - \partial A + fAA$. A corrente conservada associada é obtida, e ela possui uma nova característica: termos topológicos são determinados a partir de requisitos de invariância local. A Eletrodinâmica generalizada de Podolsky é derivada como um caso particular em que a Lagrangiana do campo de gauge é do tipo $L_P \propto G^2$. Nesta aplicação, estima-se a massa do fóton. O regime infravermelho do caso $SU(N)$ é analisado por meio da Lagrangiana de Alekseev-Arbuzov-Baikov.

Second order gauge theory

R.R. Cuzinatto^a, C.A.M. de Melo^{a,*}, P.J. Pompeia^{a,b}

^a Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, Rua Pamplona 145,
CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brazil

^b Comando-Geral de Tecnologia Aeroespacial, Instituto de Fomento e Coordenação Industrial, Praça Mal,
Eduardo Gomes 50, CEP 12228-901, São José dos Campos, SP, Brazil

Received 19 June 2006; accepted 26 July 2006

Available online 8 September 2006

Abstract

A gauge theory of second order in the derivatives of the auxiliary field is constructed following Utiyama's program. A novel field strength $G = \partial F + fAF$ arises besides the one of the first order treatment, $F = \partial A - \partial A + fAA$. The associated conserved current is obtained. It has a new feature: topological terms are determined from local invariance requirements. Podolsky Generalized Electrodynamics is derived as a particular case in which the Lagrangian of the gauge field is $L_P \propto G^2$. In this application the photon mass is estimated. The $SU(N)$ infrared regime is analysed by means of Alekseev–Arbuzov–Baikov's Lagrangian.

© 2006 Elsevier Inc. All rights reserved.

PACS: 11.15.–q

Keywords: Gauge theory; Higher order field theory

1. Introduction

Symmetry is one of the most important concepts in physics. Group theoretical methods are used to find complete solutions for many systems, particles were found by symmetry arguments, from Noether's work we learn how to relate symmetries to conservation laws.

* Corresponding author. Fax: +551131779080.

E-mail addresses: rodrigo@ift.unesp.br (R.R. Cuzinatto), cassius.anderson@gmail.com (C.A.M. de Melo), pompeia@ift.unesp.br (P.J. Pompeia).

In this context a natural question is: by imposing to a system a generalized version of some previous existent symmetry, would it be possible to determine new features? In particular, starting from a kinetic Lagrangian with a global symmetry, would it be possible generate interactions via localization of the symmetry? In other words, could local kinematical symmetries also imply dynamics?

The general answer to these questions is yes, if the local symmetry is represented by a general Lie group, and it was found by Utiyama [1] in 1956 showing that it is possible to keep the action invariant under point dependent transformations of the matter field if one introduces a new field, the gauge potential, and derives a minimal coupling prescription which determines the fundamental interactions. Some years later, Ogievetski and Polubarinov [2] presented a criticism to this *gauge principle* by means of what is known today as B-Field formalism [3,4]. Notwithstanding, gauge principle remains as a cornerstone of modern physics.

On the other hand, if one assumes that the equations of motion are derivable from some Lagrangian, a natural way to generalize a given theory is to suppose that the Lagrangian of the field contains terms involving derivatives of higher order. Poincaré in 1901, when discussing the law of inertia, already called our attention to the importance of higher order equations [5]: “(. . .) *the law of inertia (. . .) is not imposed on us a priori (. . .) . If a body is not acted upon by a force, instead of supposing that its velocity is unchanged we may suppose that its position or its acceleration is unchanged. (. . .) In the second case, [we may suppose] that the variation of the acceleration of a body depends only on the position of the body and of neighbouring bodies, on their velocities and accelerations; or, in mathematical terms, the differential equations of motion would be of (. . .) third order (. . .) .*” The non-singular Hamilton–Lagrange theory was extended to arbitrary order by Ostrogradsky [6] in 1850, generalizing the form of canonical momenta. Following this reasoning, Bopp [7] and Podolsky [8] independently proposed a generalization of electrodynamics containing second order derivatives. Quantization of the theory resulted in finite energies in 1-loop approximation. This leads to the idea that some quantum field corrections would be simulated by the Podolsky’s effective term. This generalized electrodynamics was able also to explain the 4/3 factor in Abrahaam–Lorentz theory [9] as an electromagnetic mass term by means of an appropriate gauge choice and a Lorentz invariant cutoff induced by quantum effects. This cutoff provides an natural mechanism to estimate the photon mass in the Podolsky generalized electrodynamics, as we will show in Section 5.2—the presence of this massive mode does not violate the gauge invariance as it occurs in the first order approach, and it is an intrinsic feature of the second order gauge theory. Inspired by Podolsky’s work, Green [10] included another term involving the second derivative obtaining a generalized meson-field theory with finite energies at 1-loop. The relative success of these achievements motivated some authors to propose finite extensions of Quantum Chromodynamics (QCD) [11] and also to advocate that higher order terms would be able to explain the quark confinement. The undesired feature of the Podolsky’s theory is the lack of unitarity at 1-loop for its quantum version, and it is an open question if this characteristic can be ruled out in a nonperturbative scheme. Besides all these motivations we emphasize that, from a theoretical point of view, higher order theories have many interesting features that justify their study by itself.

The scope of the present work is to construct a gauge theory for Lagrangians of second order on the auxiliary field, following Utiyama’s procedure. Section 2 is devoted to fixing the notation, to reviewing how the gauge potential A appears and why it ensures the

invariance of the action integral. In the next section, we assume a Lagrangian of the type $L(A, \partial A, \partial^2 A)$ for the gauge potential and show that this Lagrangian must depend on A and its derivatives only through the usual field strength $F = \partial A - \partial A + fAA$ and a second field strength $G = \partial F + fAF$, a new quantity that naturally turns up in the second order theory. The covariance of F and G under the gauge transformation is proved in the same Section 3 and the Bianchi identities for these two objects are also deduced.

After settling the basis of the general theory, we proceed to the analysis of the current derived from the total Lagrangian—the matter one plus the gauge Lagrangian—in Section 4. If Utiyama's definition of current is kept, one obtains a *quasi* conserved current instead of a conserved one. An alternative choice is to define the current in a different fashion to enforce conservation.

As an application, in Section 5.1, it is demonstrated that the Podolsky Generalized Electrodynamics can be derived from the second order gauge theory from a Lagrangian of the type $L_P \propto G^2$. Section 5.3 deals with a particular non-abelian case.

2. Local invariance and the gauge field

Let $Q^A(x)$ ($A = 1, 2, \dots, N$) be a general matter field whose Lagrangian density is

$$L(Q^A, \partial_\mu Q^A), \quad \partial_\mu Q^A = \frac{\partial Q^A}{\partial x^\mu}$$

with equation of motion given by

$$\frac{\partial L}{\partial Q^A} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} = 0. \quad (1)$$

We postulate the action integral

$$I = \int_\Omega L d^4x,$$

to be invariant under the global infinitesimal transformation

$$\begin{aligned} Q^A &\rightarrow Q^A + \delta Q^A, \\ \delta Q^A &= T_a^A{}_B \epsilon^a Q^B, \end{aligned} \quad (2)$$

where ϵ^a is an infinitesimal parameter independent of x ($a = 1, 2, \dots, n$) and $T_a^A{}_B$ are constant matrices. In what follows, we assume that the transformation (2) belongs to a Lie group G dependent on n parameters ϵ^a . Then the structure constants $f_a^b{}_c$ are defined by

$$[T_a, T_b]^A{}_B = f_a^c{}_b T_c^A{}_B, \quad (3)$$

satisfying

$$f_a^m{}_b f_{mc}^l + f_b^m{}_c f_{ma}^l + f_c^m{}_a f_{mb}^l = 0, \quad (4)$$

which is the same as Jacobi identity, and

$$f_a^c{}_b = -f_b^c{}_a, \quad (5)$$

in accordance with (3).

From the invariance of the action under (2) in any spacetime volume Ω , it results

$$\delta L \equiv \frac{\partial L}{\partial Q^A} \delta Q^A + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} \delta (\partial_\mu Q^A) \equiv 0. \quad (6)$$

Using the independence of the parameters we find,

$$\frac{\partial L}{\partial Q^A} T_a^A{}_B Q^B + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} T_a^A{}_B \partial_\mu Q^B \equiv 0. \quad (7)$$

In order to write (7) we consider a variation δ which is strictly functional, i.e., the space-time point is not changed.

Rewriting (6) by using Leibniz rule,

$$\left\{ \frac{\partial L}{\partial Q^A} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} \right\} \delta Q^A + \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} \delta Q^A \right) = 0.$$

The field equation (1) must be satisfied, so that

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0, \quad J_a^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} T_a^A{}_B Q^B. \quad (8)$$

Now let us consider the following infinitesimal transformation with a *point dependent* parameter $\epsilon^a(x)$ ($a = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \delta Q^A(x) &= T_a^A{}_B \epsilon^a(x) Q^B, \\ T_a^A{}_B &= \text{constant coefficients.} \end{aligned} \quad (9)$$

In this case,

$$\delta L \equiv \left\{ \frac{\partial L}{\partial Q^A} T_a^A{}_B Q^B + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} T_a^A{}_B \partial_\mu Q^B \right\} \epsilon^a(x) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} T_a^A{}_B Q^B \partial_\mu \epsilon^a(x), \quad (10)$$

or

$$\delta L \equiv \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu Q^A)} T_a^A{}_B Q^B \partial_\mu \epsilon^a(x). \quad (11)$$

We see in this case that δL does not vanish—still assuming that (7) is valid even when $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$.

If one wants to preserve invariance of the Lagrangian under (9), it is necessary to introduce a new field [1], called *gauge potential*, $A_\mu^a(x)$, which transforms as

$$\delta A_\mu^c = f_a^c{}_b A_\mu^b \epsilon^a(x) + \partial_\mu \epsilon^c, \quad (12)$$

appearing in a new Lagrangian $L'(Q^A, \partial_\mu Q^A, A_\mu^a)$ through the combination

$$\nabla_\mu Q^A \equiv \partial_\mu Q^A - T_a^A{}_B Q^B A_\mu^a. \quad (13)$$

This new object is covariant, since it transforms exactly as the original field, i.e.,

$$\delta(\nabla_\mu Q^A) = T_a^A{}_B \nabla_\mu Q^B \epsilon^a(x)$$

and it substitutes the ordinary derivative in the original Lagrangian, in a prescription named *minimal coupling* for description of the interaction,

$$L'(Q^A, \partial_\mu Q^A, A_\mu^a) = L(Q^A, \nabla_\mu Q^A).$$

Usual derivatives are replaced, in the original Lagrangian, by the *covariant derivative* given by (13).

3. Gauge field second order Lagrangian

Let us take a Lagrangian for the auxiliary field as a functional kernel dependent up to second order derivatives

$$L_0(A^a_{\mu}, \partial_\nu A^a_{\mu}, \partial_\alpha \partial_\nu A^a_{\mu}), \quad \partial_\nu A^a_{\mu} \equiv \frac{\partial A^a_{\mu}}{\partial x^\nu}.$$

We will impose that this kernel is invariant under (12), so

$$\delta L_0 \equiv \frac{\partial L_0}{\partial A^a_{\mu}} \delta A^a_{\mu} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A^a_{\mu})} \delta (\partial_\nu A^a_{\mu}) + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\alpha \partial_\nu A^a_{\mu})} \delta (\partial_\alpha \partial_\nu A^a_{\mu}) \equiv 0.$$

Substituting the transformation law for the gauge potential in this equation and since ϵ^a and its derivatives must be functionally independent, we are led to:

$$\frac{\partial L_0}{\partial A^a_{\mu}} f^a_{\ b} A^b_{\ \mu} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A^a_{\mu})} f^a_{\ b} \partial_\nu A^b_{\ \mu} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\alpha \partial_\nu A^a_{\mu})} f^a_{\ b} \partial_\alpha \partial_\nu A^b_{\ \mu} \equiv 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial A^c_{\ \nu}} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A^a_{\mu})} f^a_{\ b} A^b_{\ \mu} + \left(\frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu \partial_\alpha A^a_{\mu})} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\alpha \partial_\nu A^a_{\mu})} \right) f^a_{\ b} \partial_\alpha A^b_{\ \mu} \equiv 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu A^c_{\ \alpha})} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\alpha A^c_{\ \nu})} + \left(\frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu \partial_\alpha A^a_{\mu})} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\alpha \partial_\nu A^a_{\mu})} \right) f^a_{\ b} A^b_{\ \mu} \equiv 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\alpha \partial_\nu A^a_{\mu})} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu A^a_{\ \alpha})} + \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\mu \partial_\alpha A^a_{\ \nu})} \equiv 0. \quad (17)$$

This set of equations forms a hierarchy informing us about the dependence of the Lagrangian with respect to the gauge potential and its derivatives. To solve this hierarchy is the main aim of Utiyama's general program. The solution of the above system gives the covariant objects of the theory as well as the functional dependence of the Lagrangian on these objects.

3.1. Hierarchical equations solution

3.1.1. Solution of Eq. (17)

Once Eq. (17) involves only the dependence of the Lagrangian density on the second derivatives of the gauge potential, one may propose that this dependence appears through an object $R^a_{\ \alpha\nu\mu}$ which *must* have a cyclic permutation symmetry

$$R^a_{\ \alpha\nu\mu} + R^a_{\ \nu\mu\alpha} + R^a_{\ \mu\alpha\nu} \equiv 0. \quad (18)$$

The most general linear object constructed from $\partial^2 A$ with this property is given by

$$R^a_{\ \alpha\nu\mu} = \partial_\nu \partial_\alpha A^a_{\ \mu} - \partial_\alpha \partial_\mu A^a_{\ \nu}, \quad (19)$$

where we chose $A \equiv 1$ without loss of generality.

3.1.2. Solution of Eq. (16)

Let us consider now the Eq. (16) written in terms of $L_0^{(1)}(A, \partial A, R)$:

$$\frac{\partial L_0^{(1)}}{\partial(\partial_\nu A^c_\alpha)} + \left[\frac{\partial L_0^{(1)}}{\partial(R^a_{\nu\alpha\mu})} - \frac{\partial L_0^{(1)}}{\partial(R^a_{\alpha\mu\nu})} \right] f_c^a{}^b A^b{}_\mu + \frac{\partial L_0^{(1)}}{\partial(\partial_\alpha A^c_\nu)} + \left[\frac{\partial L_0^{(1)}}{\partial(R^a_{\alpha\nu\mu})} - \frac{\partial L_0^{(1)}}{\partial(R^a_{\nu\mu\alpha})} \right] f_c^a{}^b A^b{}_\mu \equiv 0.$$

This equation shows a symmetry in $\nu \leftrightarrow \alpha$, which must be present in its solution. Also, the solution will be construct from R and then it must respect the cyclic symmetry as dictated by (17). Therefore, the solution for this functional partial differential equation is such that the functional dependence of $L_0^{(1)}$ with respect to R shall be through the object

$$Q^d{}_{\beta\rho\sigma} \equiv R^d{}_{\beta\rho\sigma} - f_c^d{}^b [A^b{}_\sigma \partial_\rho A^c{}_\beta - A^b{}_\rho \partial_\sigma A^c{}_\beta]. \quad (20)$$

With this new quantity we pass from $L_0^{(1)}(A, \partial A, R)$ to $L_0^{(2)}(A, \partial A, Q)$.

A second independent solution to (16) can be found if one rewrites it in terms of $L_0^{(2)}(A, \partial A, Q)$, i.e.

$$\left[\frac{\partial L_0^{(2)}}{\partial(\partial_\nu A^c_\alpha)} + \frac{\partial L_0^{(2)}}{\partial(\partial_\alpha A^c_\nu)} \right]_Q \equiv 0.$$

In this case, the dependence on the second derivative is eliminated and the dependence on the first derivative can figure only via the combination

$$A^c_{[\nu\alpha]} \equiv \partial_\nu A^c{}_\alpha - \partial_\alpha A^c{}_\nu.$$

Thus, when we construct Q we are actually selecting a sector of the gauge potential Lagrangian. Here we have introduced the antisymmetric operation $O_{[\mu\nu]} \equiv O_{\mu\nu} - O_{\nu\mu}$ for a general $O_{\mu\nu}$. So, one goes from $L_0^{(2)}(A, \partial A, Q)$ to

$$L_0^{(3)} = L_0^{(3)}(A^a{}_\mu, A^c_{[\nu\alpha]}, Q^d{}_{\beta\rho\sigma}).$$

3.1.3. Solution of the Eq. (15)

Our next step is to rewrite the Eq. (15) in terms of the new functional dependence of the Lagrangian, $L_0 = L_0^{(3)}(A, A_{[\]}, Q)$

$$\frac{\partial L_0^{(3)}}{\partial A^a{}_\nu} + \frac{\partial L_0^{(3)}}{\partial A^d_{[\rho\sigma]}} (\delta^a_\rho \delta^d_\sigma - \delta^a_\sigma \delta^d_\rho) f_a^d{}^e A^e{}_\alpha + \frac{\partial L_0^{(3)}}{\partial Q^d{}_{\beta\rho\sigma}} [(\delta^d_\sigma A^c_{[\rho\beta]} + \delta^d_\beta A^c_{[\rho\sigma]} + \delta^d_\rho A^c_{[\beta\sigma]}) f_a^d{}^c + A^e{}_\beta (A^b{}_\sigma \delta^d_\rho - A^b{}_\rho \delta^d_\sigma) f_b^d{}^c f_a^c{}^e] \equiv 0.$$

The solution of this equation utters that the functional form of the Lagrangian density depends on three objects:

$$F^d{}_{\rho\sigma} \equiv A^d_{[\rho\sigma]} + f_a^d{}^e A^e{}_\rho A^a{}_\sigma, \quad (21)$$

$$G^d{}_{\beta\rho\sigma} \equiv Q^d{}_{\beta\rho\sigma} - \left\{ (\delta^d_\sigma A^c_{[\rho\beta]} + \delta^d_\beta A^c_{[\rho\sigma]} + \delta^d_\rho A^c_{[\beta\sigma]}) f_g^d{}^c A^g{}_\lambda - (A^b{}_\sigma \delta^d_\rho - A^b{}_\rho \delta^d_\sigma) f_b^d{}^c f_g^c{}^e A^g{}_\lambda A^e{}_\beta \right\} \quad (22)$$

and A_μ^a itself. Keeping in mind $L_0^{(4)} = L_0^{(4)}(F_d^{\rho\sigma}, G_{\beta\rho\sigma}^d, A_v^a)$, we reexpress (15)

$$\frac{\partial L_0^{(4)}(F, G, A)}{\partial A_v^a} = 0.$$

Due to this, the Lagrangian kernel cannot be explicitly dependent on the gauge potential A , which is the real reason why gauge fields are massless. Therefore, the presence of massive terms is only possible if the gauge symmetry is broken.

3.1.4. Solution of Eq. (14)—condition on the Lagrangian

After all that, we must put the Eq. (14) in terms of the new objects F and G

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_d^{\rho\sigma}} f_s^h{}^b \left(\frac{\partial F_d^{\rho\sigma}}{\partial A_v^h} A_v^b + \frac{\partial F_d^{\rho\sigma}}{\partial (\partial_v A_\zeta^h)} \partial_v A_\zeta^b \right) \\ & + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\beta\rho\sigma}^d} f_s^h{}^b \left(\frac{\partial G_{\beta\rho\sigma}^d}{\partial A_v^h} A_v^b + \frac{\partial G_{\beta\rho\sigma}^d}{\partial (\partial_v A_\zeta^h)} \partial_v A_\zeta^b + \frac{\partial G_{\beta\rho\sigma}^d}{\partial (\partial_\xi \partial_v A_\zeta^h)} \partial_\xi \partial_v A_\zeta^b \right) \equiv 0, \end{aligned} \quad (23)$$

or, applying the Leibniz rule and the Jacobi identity

$$\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{\rho\sigma}^d} f_c^d{}^h F^h{}_{\rho\sigma} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\beta\rho\sigma}^d} f_c^d{}^h G^h{}_{\beta\rho\sigma} \equiv 0. \quad (24)$$

This is a condition on the Lagrangian of the gauge potential which *must* be satisfied for the local symmetry to hold.

3.2. New expression for G and the Bianchi identity

In order to reduce the number of independent objects in the expressions above we will write G in terms of F and A . To do so, let us consider initially that, from (19) and (21), we get

$$R_{\beta\rho\sigma}^h = \partial_\beta F_{\rho\sigma}^h + f_e^h{}^b \partial_\beta (A_\rho^e A_\sigma^b).$$

Using these informations to evaluate G it results

$$\begin{aligned} G_{\beta\rho\sigma}^h &= \partial_\beta F_{\rho\sigma}^h + f_c^h{}^b \left[A_\rho^c \partial_\beta A_\sigma^b + A_\rho^b \partial_\sigma A_\beta^c \right] + f_c^h{}^b \left(A_\beta^b A_{[\rho\sigma]}^c + A_\rho^b A_{[\beta\sigma]}^c \right) \\ &\quad - f_g^h{}^b f_c^g{}^f A_\beta^f \left(A_\sigma^b A_\rho^c - A_\rho^b A_\sigma^c \right), \end{aligned}$$

that, with (21) and the Jacobi identity, conduct us to

$$G_{\beta\rho\sigma}^a = \partial_\beta F_{\rho\sigma}^a + f_c^a{}^e A_\beta^e F_{\rho\sigma}^c = D_{c\beta}^a F_{\rho\sigma}^c, \quad (25)$$

where D_β is a kind of Fock–Ivanenko derivative [12]

$$D_{c\beta}^a \equiv \delta_c^a \partial_\beta - \omega_{c\beta}^a, \quad \omega_{c\beta}^a \equiv f_e^a{}^c A_\beta^e. \quad (26)$$

This kind of structure in terms of a Fock–Ivanenko-like derivative is exhibited also by F when written as

$$F_{\rho\sigma}^d = D_{a\rho}^d A_{\sigma}^a - D_{a\sigma}^d A_{\rho}^a \equiv D_{a[\rho}^d A_{\sigma]}^a, \quad (27)$$

in which

$$D_{a\rho}^d = \delta_a^d \partial_{\rho} - \omega_{a\rho}^d; \quad \omega_{a\rho}^d \equiv \frac{1}{2} f_e^d{}^a A_{\rho}^e, \quad (28)$$

with a factor 1/2 in the spin connection $\omega_{a\rho}^d$, different from Eq. (26). This difference refers to the fact that A^e is a connection and not a vector like F^d .

With this new expression for G we immediately verify that it is antisymmetric in its last two spacetime indices. This is consistent with the antisymmetry property required by Eq. (16). On the other hand, Eq. (17) stabilises that a cyclic property must be present in those objects containing the second derivative of the gauge field. In fact, starting from (25) and with the expression of $F_{\rho\sigma}^d$ and the Jacobi identity we find

$$G^a{}_{\beta\rho\sigma} + G^a{}_{\rho\sigma\beta} + G^a{}_{\sigma\beta\rho} = D_{c\beta}^a F_{\rho\sigma}^c + D_{c\rho}^a F_{\sigma\beta}^c + D_{c\sigma}^a F_{\beta\rho}^c = 0, \quad (29)$$

the so called Bianchi identity.

Thereafter, the Bianchi identity (29) is a natural consequence of the local symmetry in the second order formalism as dictated by the hierarchical equations (14)–(17), and not just an a priori equality constructed with F .

This identity and the manifest skew-symmetry of $F_{\mu\nu}^a$ in its spacetime indices, allow us to rewrite G as

$$G^a{}_{\beta\rho\sigma} = D_{c[\sigma}^a F_{\rho]\beta}^c, \quad (30)$$

in the same suggestive form as (27) for F . This kind of structure will be explored below in Section 6.1.

3.3. Transformation laws

Next, we construct the transformation law for G . Remembering [1], we have

$$\delta A_{\mu}^a = f_c^a{}^b A_{\mu}^b \epsilon^c(x) + \frac{\partial \epsilon^a}{\partial x^{\mu}}$$

and

$$\delta F_{\mu\nu}^a = \epsilon^c(x) f_c^a{}^b F_{\mu\nu}^b. \quad (31)$$

Therefore

$$\delta G^a{}_{\beta\rho\sigma} = \epsilon^d f_d^a{}^g \partial_{\beta} F_{\rho\sigma}^g + \epsilon^d f_c^a{}^e f_d^c{}^g A_{\beta}^e F_{\rho\sigma}^g + f_d^a{}^g F_{\rho\sigma}^g \partial_{\beta} \epsilon^d + f_c^a{}^e \delta A_{\beta}^e F_{\rho\sigma}^c$$

and, applying the transformation law for the gauge potential and the Jacobi identity

$$\delta G^a{}_{\beta\rho\sigma} = \epsilon^d(x) f_d^a{}^c G^c{}_{\beta\rho\sigma}. \quad (32)$$

Then just like F , G is also *covariant* under the action of the local Lie group,¹ i.e., it transforms like a vector under the action of the Lie group.

¹ We could have arrived at the same conclusion with a glance at (24), $\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F^d{}_{\rho\sigma}} f_c^d{}^h F_{\rho\sigma}^h + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G^d{}_{\beta\rho\sigma}} f_c^d{}^h G^h{}_{\beta\rho\sigma} \equiv 0$, which is nothing but the invariance condition of the Lagrangian $\delta L_0^{(4)} \equiv 0$, $\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F^d{}_{\rho\sigma}} \delta F^d{}_{\rho\sigma} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G^d{}_{\beta\rho\sigma}} \delta G^d{}_{\beta\rho\sigma} \equiv 0$, and so,

$\delta F_{\rho\sigma}^d = \epsilon^c f_c^d{}^h F_{\rho\sigma}^h$; $\delta G^d{}_{\beta\rho\sigma} = \epsilon^c f_c^d{}^h G^h{}_{\beta\rho\sigma}$, where we have used the fact that the Lagrangian is a kernel functional of F and G alone.

4. Second order current

From the minimal coupling prescription the total Lagrangian is

$$L_T(Q^A, \nabla_\mu Q^A, A, \partial A, \partial^2 A) = L(Q^A, \nabla_\mu Q^A) + L_0(F, G).$$

Observe that the total Lagrangian is a function of the second derivatives of A , by means of G in L_0 .

From the variational calculus:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta Q^A} &= \frac{\partial L_T}{\partial Q^A} - \partial_\nu \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\nu Q^A)}, \\ \frac{\delta L_T}{\delta A^a{}_\mu} &= \frac{\partial L_T}{\partial A^a{}_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\nu A^a{}_\mu)} \right) + \partial_\nu \partial_\lambda \left(\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\nu \partial_\lambda A^a{}_\mu)} \right). \end{aligned}$$

The vanishing of the variation of the total Lagrangian results in an equation composed of two terms: a volumetric and a surface one, which must be null independently, in a development similar to Noether theorem.

4.1. The variation of the total Lagrangian

The variation of $L_T = L_T(Q^A, \partial Q^A, A, \partial A, \partial^2 A)$ is

$$\delta L_T \equiv \left[\frac{\delta L_T}{\delta A^a{}_\mu} f_c{}^a{}_{b\mu} A^b \epsilon^c - \partial_\mu \left(\frac{\delta L_T}{\delta A^a{}_\mu} \right) \epsilon^a + \left(\frac{\delta L_T}{\delta Q^A} \right) \delta Q^A \right] + \partial_\nu M^\nu,$$

where

$$\begin{aligned} M^\nu &= \frac{\delta L_T}{\delta A^a{}_\nu} \epsilon^a + \frac{\partial L_T}{\partial (\nabla_\nu Q^A)} \delta Q^A + \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{[\nu\mu]}^a} + f_a{}^d{}_{b\rho} A^b \left(\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^d} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^d} \right) \right] \delta A^a{}_\mu \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial_\rho \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^a} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^a} \right] \delta A^a{}_\mu + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^a} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^a} \right] \partial_\rho (\delta A^a{}_\mu), \end{aligned}$$

or

$$M^\nu \equiv N_c{}^\nu \epsilon^c + O_a{}^{\nu\mu} \partial_\mu \epsilon^a + \frac{1}{2} P_a{}^{\rho\nu\mu} \partial_\rho \partial_\mu \epsilon^a$$

with

$$\begin{aligned} N_c{}^\nu &\equiv \frac{\delta L_T}{\delta A^c{}_\nu} + \frac{\partial L_T}{\partial (\nabla_\nu Q^A)} T_{(c)B}^A Q^B + \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{[\nu\mu]}^a} + f_a{}^d{}_{b\rho} A^b \left(\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^d} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^d} \right) \right] f_c{}^a{}_{e\mu} A^e{}_\mu \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial_\rho \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^a} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^a} \right] f_c{}^a{}_{e\mu} A^e{}_\mu + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^a} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^a} \right] f_c{}^a{}_{b\rho} \partial_\rho A^b{}_\mu; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
O_a{}^{\nu\mu} \equiv & \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{[\nu\mu]}^a} + f_a{}^d{}_b A^b{}_\rho \left(\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^d} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^d} \right) - \frac{1}{2} \partial_\rho \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^a} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^a} \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\mu\rho]}^c} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\mu[\nu\rho]}^c} \right] f_a{}^c{}_b A^b{}_\rho; \tag{34}
\end{aligned}$$

and

$$P_a{}^{\rho\nu\mu} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^a} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\mu[\nu\rho]}^a} \right). \tag{35}$$

4.2. Hierarchical equations for the current

The vanishing of the volumetric term in $\delta L_T = 0$ gives the equations of motion

$$\frac{\delta L_T}{\delta Q^A} = 0, \quad \frac{\delta L_T}{\delta A^a{}_\mu} = 0.$$

By the same way from the vanishing of the surface term

$$\partial_\nu M^\nu \equiv 0, \tag{36}$$

we have the following set of hierarchical equations:

$$\partial_\nu N_c{}^\nu \equiv 0, \tag{37}$$

$$N_c{}^\nu + \partial_\mu O_c{}^{\mu\nu} \equiv 0, \tag{38}$$

$$O_a{}^{(\nu\mu)} + \partial_\rho P_a{}^{\nu\rho\mu} \equiv 0, \tag{39}$$

$$P_a{}^{\rho\nu\mu} + P_a{}^{\nu\mu\rho} + P_a{}^{\mu\rho\nu} \equiv 0. \tag{40}$$

These equations constitute a hierarchical set of equations which governs the conservation law associated to the local symmetry, in a similar way that Eqs. (14)–(17) determined the functional form of the Lagrangian L_0 .

4.3. Solution of the hierarchical equations for the current

Eqs. (40) and (39) are automatically satisfied by virtue of the symmetries in $F_{\mu\nu}^c$ and $G_{\mu\rho\nu}^d$.

Condition (38) will be used to define the current, while the Eq. (37) sets the conservation law.

4.3.1. Quasiconserved current

Let us define, as done by Utiyama,

$$\begin{aligned}
J_c{}^\nu & \equiv \frac{\partial L_T}{\partial A^c{}_\nu} \\
& = - \frac{\partial L_T}{\partial (\nabla_\nu Q^A)} T_{(c)B}^A Q^B - \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{[\nu\mu]}^a} f_c{}^a{}_e A_\mu^e - \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu\rho\mu}^d} f_c{}^d{}_b F_{\rho\mu}^b + \left(D^a{}_{d\rho} \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^d} \right) f_c{}^a{}_b A_\mu^b \\
& \quad - \partial_\rho \left(\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^a} f_c{}^a{}_b A_\mu^b \right). \tag{41}
\end{aligned}$$

This definition is inspired by the most direct experimental sense of current, as a measure of the response of the system under a variation of the field.

The condition (37) now gives

$$\partial_\nu J_c{}^\nu = \partial_\nu \frac{\delta L_T}{\delta A^c{}_\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\rho \left(\left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^d} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^d} \right] f_c{}^d{}_{b} A_\mu^b \right). \quad (42)$$

On the mass shell it follows the *quasi*conservation of the current J_a^μ . The term “*quasi*” is understood in the sense that if one takes the integral of (42) and chooses boundary conditions such that

$$\int_{\partial\Omega} d\sigma_\nu \partial_\rho \left(\left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu[\rho\mu]}^d} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^d} \right] f_c{}^d{}_{b} A_\mu^b \right) = 0,$$

the *conservation* of J_a^ν is globally recovered. For instance, this kind of boundary condition occurs when A_ρ^e and its first derivative are null on the boundary $\partial\Omega$.

It is interesting to notice that in the case of an abelian group this conservation is also achieved. The same occurs in the first order approach, and that is because Utiyama’s definition coincides with Noether’s current. This does not happen in the second order theory, as one can immediately see from the non-conservation of J_a^ν . In order to establish a conserved current in the second order approach, we must build another one based on Utiyama’s proposal, which is later compared with the standard Noether’s current. This is done in the following section.

4.3.2. Conserved current

An alternative definition for the current is

$$\begin{aligned} \bar{J}_c{}^\nu &\equiv \frac{\partial L_T}{\partial A^c{}_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\mu A^c{}_\nu)} \\ &= -\frac{\partial L_T}{\partial (\nabla_\nu Q^A)} T_{(c)A}{}^B Q^B - \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{[\nu\mu]}^a} f_c{}^a{}_{e} A^e{}_\mu - \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\nu\rho\mu}^d} f_c{}^d{}_{b} F_{\rho\mu}^b \\ &\quad + \left(D_a{}^d{}_\rho \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\nu\mu]}^d} \right) f_c{}^a{}_{b} A_\mu^b - \partial_\mu \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{[\mu\nu]}^c} + f_c{}^d{}_{b} A_\rho^b \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\mu\nu]}^d} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Therefore

$$\partial_\nu \bar{J}_c{}^\nu = \partial_\nu \left(\frac{\delta L_T}{\delta A^c{}_\nu} \right) = 0$$

under the equations of motion, showing that the current (43) is *strictly* conserved.

4.4. Concerning the Utiyama and Noether’s currents

In the current (41) the first two terms are the current obtained by Utiyama in the first order formalism [1], the third and fourth terms are of second order, and the last one is the *quasi*conservation term.

On the other hand the current (43) is composed by first two terms of the first order current, plus second order terms involving G , and the last is a topological term [13], in the sense that it is conserved independently of the equations of motion.

It is worth to remember that these topological terms cannot have their origins explained by the dynamics, but the general local invariance scheme brings them with it.

We can evaluate the transformation laws for (41) and (43):

$$\begin{aligned}\delta J_c^v &= -\epsilon^e f_e^a{}^c J_a^v + \left[\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial F_{[v\mu]}^a} + f_a^d{}^h A^h{}_\rho \left(\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[v\mu]}^d} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\mu[v\rho]}^d} \right) \right] f_e^a{}^c \partial_\mu \epsilon^e + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[v\mu]}^a} f_e^a{}^c \partial_\rho \partial_\mu \epsilon^e, \\ \delta \bar{J}_c^v &= -\epsilon^e f_e^a{}^c \bar{J}_a^v + \partial_\mu \left(\frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\mu v]}^a} + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\mu[\rho v]}^a} \right) f_e^a{}^c \partial_\rho \epsilon^e + \frac{\partial L_0^{(4)}}{\partial G_{\rho[\mu v]}^a} f_e^a{}^c \partial_\mu \partial_\rho \epsilon^e.\end{aligned}$$

As expected from $J_c^v \equiv \frac{\partial L_T}{\partial A^c{}^v}$ and $\bar{J}_c^v \equiv \frac{\partial L_T}{\partial A^c{}^v} - \partial_\mu \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\mu A^c{}^v)}$ both currents are not covariant. However, one can define a *covariant* current:

$$j_c^\mu \equiv \frac{\partial L(Q, \nabla Q)}{\partial A^c{}_\mu} = -\frac{\partial L_T}{\partial (\nabla_\mu Q^A)} T_c{}^A{}^B Q^B, \quad (44)$$

which is not strictly conserved, but only *covariantly* conserved

$$D_c{}^a{}_\mu j_a{}^\mu = 0. \quad (45)$$

We conclude that covariance and conservation never can be obtained simultaneously; in order to maintain one we must sacrifice the other.

To compare the proposed currents J_c^v and \bar{J}_c^v with Noether's one, we rewrite them as

$$\begin{aligned}J_c^v &= -\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_v Q^A)} T_{(c), A}{}^B Q^B - \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_v \partial_\rho A^a{}_\mu)} f_c{}^a{}^b \partial_\rho A^b{}_\mu + \left[\partial_\rho \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\rho \partial_v A^a{}_\mu)} - \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_v A^a{}_\mu)} \right] f_c{}^a{}^b A^b{}_\mu \\ &\quad + \partial_\mu \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\mu A^c{}^v)}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\bar{J}_c^v &= -\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_v Q^A)} T_{(c), A}{}^B Q^B - \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_v \partial_\rho A^a{}_\mu)} f_c{}^a{}^b \partial_\rho A^b{}_\mu + \left[\partial_\rho \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\rho \partial_v A^a{}_\mu)} - \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_v A^a{}_\mu)} \right] f_c{}^a{}^b A^b{}_\mu \\ &\quad - \partial_\mu \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\mu A^c{}^v)},\end{aligned}$$

which are directly comparable with the Noether's second order current

$$\begin{aligned}(J_N)_c^v &= -\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_v Q^A)} T_{(c), A}{}^B Q^B - \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_v \partial_\rho A^a{}_\mu)} f_c{}^a{}^b \partial_\rho A^b{}_\mu \\ &\quad + \left[\partial_\rho \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\rho \partial_v A^a{}_\mu)} - \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_v A^a{}_\mu)} \right] f_c{}^a{}^b A^b{}_\mu.\end{aligned}$$

Then, one easily sees that the expressions of \bar{J} and J_N differ between them only by the presence of topological terms, while in J there is a quasiconservation term, $\partial_\mu \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\mu A^c{}^v)}$, which does not contribute in the first order case.

Therefore, in the first order approach, Utiyama and Noether's currents coincide, but in the second order case it is necessary to perform a generalization in order to accomplish the conservation, giving rise to the presence of topological currents. These topological factors are naturally introduced by the presence of the additional term $\partial_\mu \frac{\partial L_T}{\partial(\partial_\mu A^c_\nu)}$ in \bar{J}_c^ν , which can be interpreted as a flux of gauge potential, extending the usual definition of current as a variation of “energy” L_T with respect to the external field A^c_ν , $\frac{\partial L_T}{\partial A^c_\nu}$.

Another way to see how to implement this generalization is to remember that the conservation law of the current is intimately related to the last of the hierarchical equations. For instance, in the first order approach

$$J_c^\nu = \frac{\partial L_T}{\partial A^c_\nu} = \partial_\mu \frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\mu A^c_\nu)},$$

where we have used the equations of motion, and from where follows the conservation as a direct consequence of the equation:

$$\frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\mu A^c_\nu)} + \frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\nu A^c_\mu)} \equiv 0.$$

Analogously, in the second order case we extract from the equation of motion

$$\bar{J}_c^\nu = \frac{\partial L_T}{\partial A^c_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\mu A^c_\nu)} = -\partial_\rho \partial_\mu \frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\rho \partial_\mu A^c_\nu)},$$

which again is conserved by virtue of Eq. (17).

On the other hand, Noether's procedure for the calculation of the current imply exactly the first of our hierarchical equations, (37), giving the Noether's current in terms of F and G as just the $N_c^\nu - \frac{\delta L_T}{\delta A^c_\nu}$ quantity. We observe again that this, up to topological terms and a global signal, is the conserved current \bar{J}_c^ν . Therefore, we see that the Utiyama's systematic method leads to the expected result and gives the bonus of finding topological currents. We conclude that far from being arbitrary, this topological current is *induced* by the structure of the hierarchical equations, arising from the local gauge invariance principle and has direct *observable* consequences for the charges. This will be illustrated in the next section.

5. Applications

5.1. $U(1)$ group: Podolsky's generalized electrodynamics

Usually in the literature [9] Podolsky's electrodynamics is supposed to be the simplest generalization of Maxwell theory whose Lagrangian, containing second-order derivatives of the electromagnetic potentials, is gauge and Lorentz invariant and still leads to linear local field equations. In fact, here we will show that the second order gauge theory is able to prove that Podolsky's electrodynamics is the unique theory which has such properties.

Podolsky's second order theory for the electromagnetism consider the Lagrangian density [8]

$$L_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\nu F_{\mu\nu} \partial_\beta F^{\mu\beta}. \quad (46)$$

We will check that the Podolsky's theory fulfills the condition for a second order gauge theory. The equations to be satisfied are (14)–(17). The first equation is automatically verified for the $U(1)$ group by virtue of the nullification of the structure constants. Therefrom, for this group any scalar constructed with the tensors F and G is a possible Lagrangian, in principle.

The next two equations are identical to the first order ones

$$\frac{\partial L_0}{\partial A_\nu} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} + \frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)} \equiv 0,$$

and consequently hold in the case of Podolsky Lagrangian (46).

It remains to be verified the last of the hierarchical equations. From (46)

$$\frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma A_\tau)} = a^2 \eta^{\tau\rho} (\partial^\sigma \partial^\epsilon A_\epsilon - \partial^\epsilon \partial_\epsilon A^\sigma) - \tau \leftrightarrow \sigma,$$

and by cyclic permutation

$$\frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma A_\tau)} + \frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\sigma \partial_\tau A_\rho)} + \frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\tau \partial_\rho A_\sigma)} = 0$$

and we see that the Podolsky's theory is in fact a second order gauge theory *a la* Utiyama.

Alternatively, one can start straight ahead from the second order gauge theory for the $U(1)$ group and write the G tensor (25)

$$G_{\beta\rho\sigma} = \partial_\beta F_{\rho\sigma},$$

from which we can construct a vector, e.g.,

$$G^\beta{}_{\rho\beta} = \partial^\beta F_{\rho\beta} = \mathcal{G}_\rho$$

and obtain a second order Lagrangian equivalent to the additional term proposed by Podolsky

$$L_0^P = \frac{a^2}{2} \mathcal{G}^\rho \mathcal{G}_\rho = \frac{a^2}{2} \partial^\beta F_{\rho\beta} \partial_\lambda F^{\rho\lambda}.$$

Notwithstanding, there are other possible Lagrangians densities. For instance, consider²

$$L_G = b^2 G^{\beta\rho\sigma} G_{\beta\rho\sigma} = b^2 \partial^\beta F^{\rho\sigma} \partial_\beta F_{\rho\sigma},$$

which satisfies all the hierarchical equations by the same arguments given before.

Using the Bianchi identity (29) one concludes

$$G^{\beta\rho\sigma} G_{\beta\rho\sigma} = 2 \partial^\beta F^{\rho\sigma} \partial_\sigma F_{\rho\beta}.$$

Perceive that this is the Podolsky Lagrangian apart from a surface term

$$\partial^\beta F^{\rho\sigma} \partial_\sigma F_{\rho\beta} = \partial_\sigma (\partial^\beta F^{\rho\sigma} F_{\rho\beta}) - \partial^\beta (\partial_\sigma F^{\rho\sigma} F_{\rho\beta}) + \partial_\sigma F^{\rho\sigma} \partial^\beta F_{\rho\beta}.$$

Then L_G is equivalent to Podolsky's taking $2b^2 = \frac{a^2}{2}$.

² Of course the *complete* Lagrangian for the gauge field is the Maxwell one *plus* the term under discussion.

We can explore another order of contraction to the indices of G

$$\tilde{L}_G = c^2 G^{\beta\rho\sigma} G_{\rho\beta\sigma} = c^2 \partial^\beta F^{\sigma\rho} \partial_\rho F_{\sigma\beta}.$$

By the cyclicity symmetry (29)

$$\tilde{L}_G = c^2 \partial^\beta F^{\sigma\rho} \partial_\rho F_{\sigma\beta}.$$

Again, this is Podolsky Lagrangian, except by a surface term, with $c^2 = \frac{a^2}{2}$.

Therefore we can infer that *all* the quadratic Lagrangian in G are reducible to the Podolsky's form since there are only two possible cases for indices contractions with respect to the derivative of F : or the indices in the derivatives are contracted between them or they are contracted with one of the FF . In the first case one uses the Bianchi identity, which reduce all contractions to the second case. But the second case is just Podolsky's, or can be put in this form by an adequate surface term.

For these reasons, we see that the most general Lagrangian for the $U(1)$ group in a theory *a la* Utiyama is

$$L_0 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\beta F_{\rho\beta} \partial_\lambda F^{\rho\lambda},$$

which is the Podolsky Electrodynamics Lagrangian.

This proves that Podolsky Lagrangian is the unique linear second order generalization from Maxwell theory compatible with the gauge principle.

5.2. $U(1)$ currents and the mass of the photon

With (41) for the case $U(1)$,

$$J^v = j^v = -\frac{\partial L_T}{\partial(\nabla_\nu Q^A)} T_B^A Q^B$$

and this means that the second order formalism has no effect on the current if the symmetry is $U(1)$.

Now if we employ (43),

$$\bar{J}^v = j^v - \partial_\mu \frac{\partial L_0}{\partial F_{[\mu\nu]}} = j^v - \partial_\mu F^{\nu\mu},$$

which differs from J^v by a topological term.

The equation of motion, in vacuum, for Podolsky's electrodynamics is

$$(1 + a^2 \square) \partial_\lambda F^{\mu\lambda}(x) = 0,$$

which, with the Lorentz gauge condition, $\partial_\mu A^\mu = 0$, reduces to

$$(1 + a^2 \square) \square A^\mu(x) = 0. \tag{47}$$

Extracting the Fourier transform, we find two possible dispersion relations:

$$p^2 = 0,$$

$$p^2 - \frac{1}{a^2} = 0.$$

The first one corresponds to a massless mode, $E^2 - \mathbf{p}^2 = 0$, while the second is a massive solution:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{a^2}, \quad m = \frac{1}{a}. \quad (48)$$

In the case of a static isolated point charged particle, Eq. (47) gives:

$$\begin{aligned} -(1 - a^2 \nabla^2) \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) &= 4\pi \rho(\mathbf{r}), \\ \rho(\mathbf{r}) &= -e \delta(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

We have selected a Lorentz gauge such that $A^\mu = (\varphi, \mathbf{0})$, and used the signature $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Via Fourier transform, we find

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{e}{r} (1 - e^{-\frac{r}{a}}).$$

The finite reach of the massive mode suggests the presence of a shielded region around the point particle.

The conserved current is given by

$$\bar{J}^0(\mathbf{r}) = -e \left(\delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{a^2 r} e^{-\frac{r}{a}} \right), \quad \bar{J}^k \equiv 0.$$

Integrating this density over the whole space, we obtain the conserved charge

$$q = -e(1 - 4\pi)$$

which is just a simple renormalization of the naked charge. However, following Moniz and Sharp [14], the quantum theory of the nonrelativistic electron provides a natural cutoff at short distances whose magnitude is of the order of the Compton length ε . Employing this idea of a shielded region, the effective conserved charge obtained is

$$q_{\text{eff}} = -e \left(1 - 4\pi \left[\frac{a + \varepsilon}{a} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right) \right] \right). \quad (49)$$

This effective charge can be applied to estimate the mass of the photon, according to (48). Eq. (49) can be rewritten as

$$\sigma_e^{\text{rel}} \equiv \frac{q_{\text{eff}} - e}{e} = 4\pi \frac{a + \varepsilon}{a} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right).$$

This quantity can be interpreted as the relative uncertainty of the electron charge. Solving this transcendental equation for Podolsky's parameter a , we find a measure of mass for the massive photon

$$m = \frac{\hbar}{ac}.$$

With experimental data from [15] and a simple propagation of errors neglecting the uncertainty in σ_e^{rel} , we obtain

$$\begin{aligned} a &= 1.105\,868617(14) \times 10^{-11} \text{ cm}, \\ m &= 1.985\,37021(17) \times 10^{-13} \text{ eV}. \end{aligned}$$

This estimative cannot be ruled out in accordance with experimental data reported in [15,16] considering null tests of Coulomb law. These references give $m <$

$(9.0 \pm 8.1) \times 10^{-10}$ eV. In the context of an effective classical theory, this mass must be interpreted as an energy scale characterizing the regime where the Podolsky's electrodynamics becomes relevant, in a similar way as the phonon mass characterizes the effects of particle excitations in a crystal [17]. It is meaningless to think of a rest mass for a phonon, since it is an excitation of the vibrations in a crystal. The same interpretation can be applied for the photon in Podolsky's theory.

We emphasize that these results were derived using a completely classical approach and not following a construction of effective classical theories from their quantum versions. This is the reason why the renormalized charge is found and no estimative for the photon mass can be made in the absence of a shielded region. Even taking a shielded region, if Noether's current was considered, the effective charge would be just e and, again, no mass for the photon could be found, as well no renormalization for the charge would be obtained.

5.3. $SU(N)$ group: The Lagrangian AAB

As a non-abelian example we apply the second order gauge theory to the description of Alekseev–Arbuzov–Baikov's effective Lagrangian [18] proposed to eliminate infrared divergences in $SU(N)$ theories. In our notation, it is

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{4M^2} G_{\lambda\mu\nu}^a G_a^{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{6M^2} f_b^a F^{b\lambda\mu} F_{a\mu}{}^\tau F_{\tau\lambda}^c,$$

where M is the mass scale of the infrared gluon. This scalar density satisfies the condition (24), a fact verified after using the total antisymmetry of the structure constants.

The conserved current for this theory can be obtained from (43)

$$\begin{aligned} (\bar{J}_{\text{eff}})^{\nu}{}_c &= \frac{1}{M^2} f_c^a{}_b \left(A_\mu^b \left[D_{a\rho}^d G_d^{\rho\nu\mu} + f_a^d{}_e F^{e\mu\tau} F_{d\tau}{}^\nu \right] - \frac{1}{2} F_{\rho\mu}^b G_a^{\nu\rho\mu} \right) \\ &+ \frac{1}{M^2} f_c^d{}_b \partial_\mu \left(A_\rho^b G_d^{\rho\nu\mu} + F^{b\mu\tau} F_{d\tau}{}^\nu \right), \end{aligned}$$

which differs from the current in [11] only by topological terms.

The equivalence of 1-loop infrared regime and the second order gauge theory shows that an analysis of high order gauge theories could give more information about higher loop expansions.

6. General remarks

In this work we saw how Utiyama's approach to gauge theory can be extended to include second order derivatives of the gauge potential. The development showed the need for the introduction of a new object $G_{\beta\rho\sigma}^c$, as well as the already familiar field strength $F_{\beta\sigma}^e$. Both are covariant and have a Bianchi identity associated with it, which was derived from hierarchical equations for the auxiliary field Lagrangian.

The nullification of the variation of the total Lagrangian conducted us to conserved currents that have two possible definitions. The first one was defined as in the first order treatment, but it is only *quasi* conserved. Conversely, we could define a new current, which differs structurally from the one proposed by Utiyama, but is characterized by its conservation. Another advantage of the general Utiyama's procedure is the obtainment of

topological currents from a *local* invariance. It is a new tool to study topological aspects of gauge theories from their local symmetry, and must be better investigated in the future. These topological currents are not arbitrary, but rather *implied* by the very structure of the field and hierarchical equations, as will be better discussed in the Section 6.1.

We also saw how the second order development can be implemented in the case of the $U(1)$ group leading to the well-known Podolsky Generalized Electrodynamics, whose Lagrangian was demonstrated to be the unique possible extension up to surface terms. As an example for the more complicated case of a non-abelian theory, we applied the second order gauge theory to the Alekssev–Arbuzov–Baikov effective Lagrangian valid in the infrared regime, demonstrating that the conserved current (43) and the one obtained in [11] differ by surface terms. In this way, we have shown that 1-loop effective terms in the action can be found from first-principle calculations imposing the gauge symmetry to second order Lagrangians. In addition, an extension of Utiyama’s method to higher orders derivatives could give important information about higher loop expansions.

The conserved current laws were used to estimate the energy scale of the photon massive mode, in the electrostatic regime, and the result is in accordance with the present observed limits. This massive mode was engendered by the topological terms in the conserved current (43) in accordance with the known fact that topological terms are responsible for dynamic mass generation mechanisms [19]. Besides, the conserved current \bar{J} gives the *renormalized charge*, which is quite natural in view of the equivalence among second order gauge theory and 1-loop expansions. On the other hand, the Noether’s current only gives bare charges. Notice that in the $U(1)$ case both J and \bar{J} are conserved.

Among the perspectives opened by this work we can cite another natural extension to Utiyama’s work allowing the Lagrangian to depend also on the second derivative of the matter field $\partial^2 Q$, which is presently under study. Other possibilities are commented in the next sections.

6.1. Generalization for higher order theories

In order to get a generalization to higher orders, we note that some structures apparently repeat themselves in the first and second order formalisms. For example, the introduction of the gauge potential as a compensator to achieve the local invariance and the hypothesis $L_0 = L_0(A, \partial A)$ leads to conclude that the derivative of A must respect the symmetry

$$\frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} + \frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} \equiv 0. \quad (50)$$

In the second order extension one finds that the second derivative accomplishes

$$\frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\alpha \partial_\nu A^a_\mu)} + \frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu A^a_\alpha)} + \frac{\partial L_0}{\partial(\partial_\mu \partial_\alpha A^a_\nu)} \equiv 0. \quad (51)$$

Therefore, it seems natural to suppose for a n th-order theory the higher order derivative appearing only in an object

$$R^a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \equiv \sum_{P\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}} C^{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} A^a_{\alpha_n}$$

carrying a cyclic permutation symmetry

$$\sum_{P_{\text{cycl}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}} R^a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \equiv 0,$$

where $P\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ is to denote the permutation of indices and $P_{\text{cycl}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ the cyclic one. This identity might be understood as a generalization of the Bianchi identity.

Other recurrent structures are as follows. Introduced the auxiliary field A , the tensor F can be written as (27)

$$F^e_{\beta\sigma} = D^e_{f[\beta} A^f_{\sigma]}.$$

In the second order case a new object comes into place (30)

$$G^a_{\beta\rho\sigma} = D^a_{c[\beta} F^c_{\rho]\sigma}.$$

In time, we may conjecture for a third order theory the emerging of a new object whose functional form is

$$H^a_{\alpha\beta\rho\sigma} = D^a_{c[\mu} G^c_{\beta]\rho\sigma},$$

respecting, as said before, a Bianchi identity

$$H^a_{\mu\beta\rho\sigma} + H^a_{\beta\rho\sigma\mu} + H^a_{\rho\sigma\mu\beta} + H^a_{\sigma\mu\beta\rho} = 0.$$

Remembering that for a general Lie group vector,

$$D^a_{c[\mu} G^c_{\beta]\rho\sigma} = [D_\mu, D_\beta]^a_d F^d_{\rho\sigma} = f^a_{de} F^e_{\mu\beta} F^d_{\rho\sigma},$$

one finds

$$\begin{aligned} H^a_{\mu\beta\rho\sigma} + H^a_{\beta\rho\sigma\mu} + H^a_{\rho\sigma\mu\beta} + H^a_{\sigma\mu\beta\rho} &= D^a_{c[\mu} G^c_{\beta]\rho\sigma} + D^a_{c[\beta} G^c_{\rho]\sigma\mu} + D^a_{c[\rho} G^c_{\sigma]\mu\beta} + D^a_{c[\sigma} G^c_{\mu]\beta\rho} \\ &= f^a_{de} F^e_{\mu\beta} F^d_{\rho\sigma} + f^a_{de} F^e_{\beta\rho} F^d_{\sigma\mu} - f^a_{de} F^d_{\rho\sigma} F^e_{\mu\beta} - f^a_{de} F^d_{\sigma\mu} F^e_{\beta\rho} \\ &= 0 \end{aligned}$$

and the structure is in fact consistent. It is important to note that this is not a rigorous proof of the third order structure, but a significant indication of its form.

We have seen that the local gauge invariance condition on the first order Lagrangian is [1]

$$\frac{\partial L_0}{\partial F^d_{\rho\sigma}} f^d_{ch} F^h_{\rho\sigma} \equiv 0$$

and we have proved for the second order theory the generalization

$$\frac{\partial L_0}{\partial F^d_{\rho\sigma}} f^d_{ch} F^h_{\rho\sigma} + \frac{\partial L_0}{\partial G^d_{\beta\rho\sigma}} f^d_{ch} G^h_{\beta\rho\sigma} \equiv 0.$$

Therefore, it appears natural to expect the restriction

$$\frac{\partial L_0}{\partial F^d_{\rho\sigma}} f^d_{ch} F^h_{\rho\sigma} + \frac{\partial L_0}{\partial G^d_{\beta\rho\sigma}} f^d_{ch} G^h_{\beta\rho\sigma} + \frac{\partial L_0}{\partial H^d_{\alpha\beta\rho\sigma}} f^d_{ch} H^h_{\alpha\beta\rho\sigma} \equiv 0$$

on the third order Lagrangian of the auxiliary field.

The structures identified until now indicate that for still higher order theories one can hope for objects given in terms of Fock–Ivanenko derivatives of the quantities of the former order. Another feature is that the higher order objects also are supposed to satisfy a Bianchi-like identity.

Regarding conservation laws, Utiyama defined the current

$$J_a{}^\mu \equiv \frac{\partial L_T}{\partial A^a{}_\mu}$$

which is a conserved quantity for the first order theory, $L_0 = L_0(A, \partial A)$, under the equation of motion

$$\frac{\delta L_0}{\delta A^a{}_\mu} = \frac{\partial L_T}{\partial A^a{}_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\nu A^a{}_\mu)} = 0.$$

We have seen that this definition of current is not appropriate for the second order approach, $L_0 = L_0(A, \partial A, \partial^2 A)$, since it is not a conserved object. To solve this problem we defined

$$\bar{J}_a{}^\mu \equiv \frac{\partial L_T}{\partial A^a{}_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\nu A^a{}_\mu)}$$

as the expression of the conserved current valid on mass shell, which in this case reads

$$\frac{\delta L_0}{\delta A^a{}_\mu} = \frac{\partial L_T}{\partial A^a{}_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\nu A^a{}_\mu)} + \partial_\rho \partial_\nu \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu A^a{}_\mu)} = 0.$$

Notice that in each case we have just isolated the last term in the Euler–Lagrange equation and defined the remaining terms as the conserved current. The conservation is, in fact, assured by the symmetry imposed by the last of the hierarchical equations in each case, namely (50) and (51), respectively.

This reasoning may be applied to extended theories: in a n -order theory $L_0 = L_0(A, \partial A, \dots, \partial^n A)$ the current may be defined as the first n terms of the Euler–Lagrange equation. The currents constructed following this recipe would differ from the Noether’s one by topological terms, a fact that reflects upon the values of the charges. Which values is the correct one stands to be selected by experience.

6.2. Geometrical aspects

Geometrical aspects are not evident in the Utiyama’s approach since it is essentially an algebraic implementation of the local symmetry principle. A geometrical interpretation of G could help one to understand the recurrent emergence of the Fock–Ivanenko derivative and the general structure of higher orders Lagrangians outlined above.

Moreover, the comprehension of the geometry seems to be fundamental if one wants to describe *higher order gravitation* as a direct application of Utiyama’s second order procedure, a work now under construction by the authors. This could also illuminate some features of the nonrenormalizability problem in gravitation.

6.3. Application to QCD

Besides the analysis of the AAB Lagrangian, it would be interesting to perform an 1-loop calculation and check if the cancelling present in Podolsky Electrodynamics [8] is also manifested in QCD.

However, one must consider which quadratic form in G will be explored. Due to the nonlinearity of the theory, it is possible that *all* combinations be necessary in order to obtain a renormalizable theory. Another probable feature is the impossibility of closing the number of derivatives (counterterms), as in the case of gravitational field. Some tentative works in this direction were undertaken in [11].

An additional point is to investigate if higher order terms gives more information about the confinement phenomenon using, for example, Wilson criterion, as noted in [11]. Once more, to recognize the geometrical connection which defines the holonomies would be a good guide.

6.4. Constraint analysis

The local gauge symmetry imply the existence of constraints in any order of derivatives which require a special attention in order to construct the Hamiltonian description.

The analysis of the constraints for a second order Lagrangian can be implemented using several approaches, such as that in [20] for Podolsky Electrodynamics. Nevertheless, the study of an specific Lagrangian for non-abelian groups is interesting in view of the applications for QCD and gravitation. This study is presently under implementation by means of Hamilton-Jacobi technique [21].

Acknowledgments

R.R.C. and C.A.M.M. are grateful to Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de S. Paulo (FAPESP) for support (Grants 02/05763-8 and 01/12584-0, respectively) and P.J.P. thanks to CTA staff for the incentive. The authors acknowledge Prof. B.M. Pimentel for introducing them to the original Utiyama's work, Prof. R. Aldrovandi for the careful reading of the original manuscript and useful suggestions and Prof. J.A. Accioly for the enthusiastic incentive to this project.

References

- [1] R. Utiyama, Phys. Rev. 101 (1956) 1597.
- [2] V.I. Ogievetski, I.V. Polubarinov, Nuovo Cim. 23 (1962) 173.
- [3] N. Nakanishi, I. Ojima, Covariant operator formalism of gauge theories and quantum gravity, in: Lecture Notes in Physics, vol. 27, World Scientific, 1991.
- [4] C.A.M. de Melo, B.M. Pimentel, P.J. Pompeia, Nuovo Cim. B121 (2006) 193.
- [5] H. Poincaré, Science and Hypothesis, Dover, 1952.
- [6] M. Ostrogradsky, Mem. Acad. St. Petersburg 6 (4) (1850) 385;
E.T. Whittaker, Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1959.
- [7] F. Bopp, Ann. Physik 38 (1940) 345.
- [8] B. Podolsky, Phys. Rev. 62 (1942) 68;
B. Podolsky, C. Kikuchi, Phys. Rev. 65 (1944) 228;
B. Podolsky, P. Schwed, Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 40.

- [9] J. Frenkel, *Phys. Rev. E* 54 (1996) 5859;
J. Frenkel, R.B. Santos, *Int. J. Mod. Phys. B* 13 (1999) 315.
- [10] A. Green, *Phys. Rev.* 73 (1948) 26;
Phys. Rev. 75 (1949) 1926.
- [11] A.I. Alekseev, B.A. Arbuzov, *Theor. Math. Phys.* 59 (1984) 372;
M. Baker, J.S. Ball, F. Zachariasen, *Nucl. Phys. B* 229 (1983) 45.
- [12] V.A. Fock, *Z. Phys.* 57 (1929) 261.
- [13] B. Felsager, *Geometry, Particles, and Fields*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [14] E.J. Moniz, D.H. Sharp, *Phys. Rev. D* 10 (1974) 1133;
Phys. Rev. D 15 (1977) 2850.
- [15] S. Eidelman et al., *Phys. Lett. B* 592 (2004) 1.
- [16] J.J. Ryan, F. Accetta, R.H. Austin, *Phys. Rev. D* 32 (1985) 802.
- [17] R. Kubo, T. Nagamiya, *Solid State Physics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [18] A.I. Alekseev, B.A. Arbuzov, V.A. Baikov, *Theor. Math. Phys.* 52 (1982) 739.
- [19] G. Dvali, R. Jackiw, So-Young Pi, Topological mass generation in four dimensions, Report-no: MIT-CTP-3704 [hep-th/0511175].
- [20] C.A.P. Galvão, B.M. Pimentel, *Can. J. Phys.* 66 (1988) 460.
- [21] Y. Güler, *Il Nuovo Cimento B*107 (1992) 1398;
B.M. Pimentel, R.G. Teixeira, J.L. Tomazelli, *Ann. Phys.* 267 (1998) 75.

2.4.2 Formulação de gauge para gravidade de ordem superior

Este trabalho é uma aplicação da teoria de gauge de segunda ordem para o grupo de Lorentz, onde uma descrição da interação gravitacional é obtida, a qual inclui derivadas da curvatura. Analisamos a forma do segundo campo de força, $G = \partial F + fAF$, em termos de variáveis geométricas. Todas as Lagrangianas independentes possíveis de se construir com contrações quadráticas de F e contrações quadráticas de G são analisadas. Calcula-se as equações de movimento para uma Lagrangiana particular, a qual é análoga ao termo de Podolsky em sua Eletrodinâmica generalizada. Encontrou-se a solução estática e isotrópica na aproximação linear, a qual exhibe o comportamento Newtoniano usual a pequenas distâncias, bem como modificações a médias e grandes escalas de distâncias.

Gauge formulation for higher order gravity

R.R. Cuzinatto^{1,a}, C.A.M. de Melo^{1,2,b}, L.G. Medeiros^{1,c}, P.J. Pompeia^{1,3,d}

¹ Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, Rua Pamplona 145, CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brazil

² Universidade Vale do Rio Verde de Três Corações, Av. Castelo Branco, 82 – Chácara das Rosas, P.O. Box 3050, CEP 37410-000, Três Corações, MG, Brazil

³ Comando-Geral de Tecnologia Aeroespacial, Instituto de Fomento e Coordenação Industrial, Praça Mal. Eduardo Gomes 50, CEP 12228-901, São José dos Campos, SP, Brazil

Received: 30 July 2007 / Revised version: 28 August 2007 /
© Springer-Verlag / Società Italiana di Fisica 2007

Abstract. This work is an application of the second order gauge theory for the Lorentz group, where a description of the gravitational interaction is obtained that includes derivatives of the curvature. We analyze the form of the second field strength, $G = \partial F + fAF$, in terms of geometrical variables. All possible independent Lagrangians constructed with quadratic contractions of F and quadratic contractions of G are analyzed. The equations of motion for a particular Lagrangian, which is analogous to Podolsky's term of his generalized electrodynamics, are calculated. The static isotropic solution in the linear approximation was found, exhibiting the regular Newtonian behavior at short distances as well as a meso-large distance modification.

PACS. 11.15.-q; 11.30.Cp; 04.20.Cv; 04.50.+h

1 Introduction

Nowadays there are many proposals to modify gravitation in order to solve several problems, as the present day accelerated expansion of the universe [1–6], or to accommodate corrections of a quantum nature that arise from the classical effective backreaction of quantum matter in a curved background [7–10]. The effective action is widely used in quantum field theory as a powerful method of calculation. Podolsky generalized electrodynamics, for instance, can be viewed as an effective description of the quantum correction to the classical Maxwell Lagrangian [11–13].

For gravitation, usually higher orders terms are introduced by means of Lagrangian contributions quadratic in the Riemann tensor and their contractions [14, 15]. This is inspired by one-loop corrections in the Einstein–Hilbert action in the quantized weak field approximation, or in the equivalent Feynman construction of a spin-2 field on a flat Minkowski background [16]. Besides this, at the quantum level, the S matrix for the Einstein theory is finite at one-loop level but diverges at the two-loop order [17], which motivates the introduction of derivative terms in the Riemann tensor for the action [18, 19].

On the other hand, recently was proposed a second order construction of gauge theories based on Utiyama's

approach [20], which gives exactly the same correction terms as in Podolsky's electrodynamics, but now arising from the principle of local gauge invariance [21]. Therefore, a connection between quantum corrections and higher order gauge terms in the action was conjectured, which was proved to be fulfilled also for the effective Alekseev–Arbuzov–Baikov Lagrangian of the infrared regime of QCD [22].

Here, we analyze the gauge formulation of the gravitational field based on the framework of the second order gauge theory. The simplest gauge group is given by the Lorentz homogeneous group in the context of a Riemannian description of the gravitational field. Since the gauge field is given in such a case by the local spin connection, a higher order in the gauge field naturally involves the derivative of the curvature tensor. In this sense, the actual higher order gravitational Lagrangian should be constructed from invariants using the covariant derivative of the Riemann tensor instead of the usual quadratic terms in the curvature.

The relationship between the algebraic gauge description and the geometrical one is settled by means of the introduction of the tetrad field, and the construction of the covariant derivatives associated with both symmetries: local Lorentz and global diffeomorphic coordinate transformations. We use Latin indexes, a, b, \dots , for the internal Lorentz group and Greek indexes for the tangent space of the space-time manifold.

The paper is structured as follows. In Sect. 2 we review some results relating gauge invariance and gravitation. The field strengths F and G of the second order treat-

^a e-mail: rodrigo@ift.unesp.br

^b e-mail: cassius.anderson@gmail.com

^c e-mail: leo@ift.unesp.br

^d e-mail: pompeia@ift.unesp.br

ment are introduced in Sect. 3, where they are also written in their geometrical counterparts: the Riemann curvature tensor and its covariant derivative.

Section 4 deals with the possible quadratic invariants of the type F^2 and G^2 . All the possible contractions are studied and only the independent invariants are kept. This counting is made in the same spirit as the systematic selection of the independent Riemann monomials done in [23, 24]. In the following section, Sect. 5, these invariants are shown to satisfy the identity which restricts the theories that may be called of gauge type.

Among all invariants, we select $L_P = \frac{1}{2}h\delta^\rho R_{\rho\chi}\delta_\mu R^{\mu\chi}$, the Podolsky-like Lagrangian, for calculating the equation of motion of the gravitational field. This higher order gravity application is done in Sect. 6. For this Lagrangian, we calculate the static isotropic solution in the linear regime at Sect. 6.2, finding the regular Newtonian potential at short scales, but with a modified potential at intermediary scales.

Final remarks are given in Sect. 7.

2 Gauge interaction and covariance

In 1956 Utiyama [20] has shown how to implement a gauge description for the gravitational interaction with matter fields $Q^A(x)$ transforming according to

$$\delta Q^A(x) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}(x)(\Sigma_{ab})^A_B Q^B, \quad (1)$$

as an implementation of the local invariance exigency of the action under continuous proper Lorentz transformations, which are characterized by the generators Σ_{ab} satisfying the operation of a typical Lie group,

$$[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] = \frac{1}{2}f_{ab,cd}^{ef}\Sigma_{ef}, \quad (2)$$

where the

$$f_{ab,cd}^{ef} = \{ [\eta_{bc}\delta_a^e - \eta_{ac}\delta_b^e]\delta_d^f - [\eta_{bd}\delta_a^e - \eta_{ad}\delta_b^e]\delta_c^f \} - e \leftrightarrow f$$

are the structure constants, obeying the Jacobi identity. $\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$ are the parameters of the local transformation. The capital Latin indexes are for the components of the matter field.

It was clearly shown that one needs to introduce the compensating field $\omega_\mu^{ab}(x)$ transforming as a connection,

$$\delta\omega_\mu^{ef} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}(x)f_{ab,cd}^{ef}\omega_\mu^{cd} + \partial_\mu\varepsilon^{ef}(x). \quad (3)$$

To ensure the covariance under coordinate transformations it was necessary to define a space-time connection whose behavior under infinitesimal diffeomorphisms is

$$\bar{\delta}\Gamma_{\mu\alpha}^\nu = \frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\lambda}\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda - \frac{\partial\delta x^\lambda}{\partial x^\mu}\Gamma_{\lambda\alpha}^\nu - \frac{\partial\delta x^\lambda}{\partial x^\alpha}\Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \frac{\partial^2\delta x^\nu}{\partial x^\mu\partial x^\alpha}.$$

The invariance of the theory implies that the compensating field must appear through the *gauge covariant derivative*

$$D_\mu Q^A \equiv \partial_\mu Q^A - \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}(\Sigma_{ab})^A_B Q^B, \quad (4)$$

i.e.,

$$\delta D_\mu Q^A = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}(\Sigma_{ab})^A_B D_\mu Q^B, \quad (5)$$

and the space-time connection must appear through the space-time covariant derivative,

$$\delta_\mu Q^{\lambda\nu} \equiv \partial_\mu Q^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda Q^{\beta\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu Q^{\lambda\alpha}, \quad (6)$$

and the total covariant derivative:

$$\nabla_\mu Q^{i\nu} = \partial_\mu Q^{i\nu} - \omega_\mu^{ib}\eta_{bk}Q^{k\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu Q^{i\alpha}. \quad (7)$$

This total derivative must commute with the mapping to the tangent space of the manifold,¹

$$Q^{i\mu} \equiv h_j^\mu Q^{ij}, \quad Q^{ij} = h_\nu^j Q^{i\nu}, \quad (8)$$

$$\nabla_\mu Q^{i\nu} \equiv h_j^\nu \nabla_\mu Q^{ij}, \quad (9)$$

where we have introduced the tetrad field h :

$$\begin{aligned} h_\nu^j h_j^\mu &= \delta_\nu^\mu, & h_\nu^i h_j^\nu &= \delta_j^i, \\ g_{\mu\nu} &= \eta_{ij} h_\nu^i h_\mu^j, & \eta_{ij} &= h_i^\mu h_j^\nu g_{\mu\nu}, \\ h &= \sqrt{\det h_\mu^j} = \sqrt{-g}. \end{aligned}$$

The definition (9) implies the absolute parallelism of the tetrad:

$$\nabla_\mu h_\alpha^j \equiv 0, \quad (10)$$

which can be solved for the compensating field,

$$\omega_{i\mu}^j \equiv h_i^\alpha (\delta_\mu h_\alpha^j)$$

or for the space-time connection,

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\nu \equiv h_j^\nu (D_\mu h_\alpha^j). \quad (11)$$

We will restrict our analysis to a symmetric space-time connection in order to approach the Riemannian description. The extension to the Riemann–Cartan case is quite natural, but it would imply different types of invariants as admissible Lagrangians (see discussion below).

3 Gauge field Lagrangian

The basic hypothesis we will assume is that the Lagrangian for the free gauge potential depends on the

¹ Note that the action of the total derivative on a tangent space field is defined by $\nabla_\mu Q^i \equiv D_\mu Q^i$.

field, its first and second order derivatives and $L_0 = L_0(\omega_\mu^{ef}, \partial_\nu \omega_\mu^{ef}, \partial_\rho \partial_\nu \omega_\mu^{ef})$ obeys local invariance under (3). This enables us to use the results presented elsewhere [21] to construct a gauge formulation for higher order gravitation theories.

3.1 The field strengths

According to [21], we can re-express

$$\begin{aligned} \delta L_0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial L_0}{\partial \omega_\mu^{ef}} \delta \omega_\mu^{ef} + \frac{1}{2} \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\nu \omega_\mu^{ef})} \delta \partial_\nu \omega_\mu^{ef} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\rho \partial_\nu \omega_\mu^{ef})} \delta \partial_\rho \partial_\nu \omega_\mu^{ef} \\ &\equiv 0, \end{aligned}$$

splitting it into a set of four hierarchical equations after substituting (3) and claiming the independence of the parameters ε^{ab} and their derivatives. Three of these functional equations are used to conclude that

$$L_0 = L_0(F, G); \quad \frac{\partial L_0}{\partial \omega_\mu^{ab}} \equiv 0, \quad (12)$$

where

$$F_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} - \eta_{cd} \omega_\mu^{ac} \omega_\nu^{db} + \eta_{cd} \omega_\nu^{ac} \omega_\mu^{db} \quad (13)$$

and

$$G_{\beta\rho\sigma}^{ab} = D_\beta F_{\rho\sigma}^{ab} = \partial_\beta F_{\rho\sigma}^{ab} - \eta_{fd} \omega_\beta^{af} F_{\rho\sigma}^{db} + \eta_{fd} \omega_\beta^{af} F_{\rho\sigma}^{bd}. \quad (14)$$

The remaining hierarchical equation put in terms of the gauge fields F and G ,

$$\frac{\partial L_0}{\partial F_{\rho\sigma}^{ad}} f_{bc,gh} F_{\rho\sigma}^{gh} + \frac{\partial L_0}{\partial G_{\beta\rho\sigma}^{ad}} f_{bc,gh} G_{\beta\rho\sigma}^{gh} \equiv 0, \quad (15)$$

imposes restrictions upon the functional form eventually chosen for L_0 . Substituting the structure constants, this condition can be explicitly written as

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L_0}{\partial F_{\rho\sigma}^{ad}} [\eta_{cg} \delta_b^a - \eta_{bg} \delta_c^a] F_{\rho\sigma}^{gd} \\ &\quad + \frac{\partial L_0}{\partial G_{\beta\rho\sigma}^{ad}} [\eta_{cg} \delta_b^a - \eta_{bg} \delta_c^a] G_{\beta\rho\sigma}^{gd} \equiv 0. \end{aligned} \quad (16)$$

3.2 Geometrical variables

In this section we will show how to interpret all objects and conditions of the previous sections in terms of a geometrical point of view. From (10) we read

$$\omega_\sigma^{eg} = \eta^{gc} h_c^\alpha (\partial_\sigma h_\alpha^e - \Gamma_{\sigma\alpha}^\nu h_\nu^e)$$

and therefore the field strength F is written as

$$F_{\beta\sigma}^{eg} = \eta^{gc} h_c^\alpha h_\gamma^e [\partial_\sigma \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma - \partial_\beta \Gamma_{\sigma\alpha}^\gamma + \Gamma_{\beta\alpha}^\nu \Gamma_{\sigma\nu}^\gamma - \Gamma_{\sigma\alpha}^\nu \Gamma_{\beta\nu}^\gamma],$$

where we recognize the expression of the Riemann tensor [26],

$$R_{\sigma\beta\alpha}^\gamma \equiv \partial_\sigma \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma - \partial_\beta \Gamma_{\sigma\alpha}^\gamma + \Gamma_{\beta\alpha}^\nu \Gamma_{\sigma\nu}^\gamma - \Gamma_{\sigma\alpha}^\nu \Gamma_{\beta\nu}^\gamma,$$

i.e.,

$$F_{\beta\sigma}^{eg} = \eta^{gc} h_c^\alpha h_\gamma^e R_{\sigma\beta\alpha}^\gamma. \quad (17)$$

The easiest way to find the geometrical counterpart of G is to apply the geometrizing relations (6) and (8):

$$\begin{aligned} h_a^\mu h_b^\nu G_{\beta\rho\sigma}^{ab} &= h_a^\mu h_b^\nu D_\beta F_{\rho\sigma}^{ab} = \delta_\beta F_{\rho\sigma}^{\mu\nu}; \\ F_{\rho\sigma}^{\mu\nu} &= h_a^\mu h_b^\nu F_{\rho\sigma}^{ab} \end{aligned}$$

and use (17). We arrive at

$$G_{\beta\rho\sigma}^{ab} = h_a^\mu h_b^\nu g^{\nu\alpha} \delta_\beta R_{\sigma\rho\alpha}^\mu, \quad (18)$$

which is the most natural equation one would expect in view of the relation (14) between F and G .

By means of the geometrical descriptions (17) and (18), we are able to find

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial F_{\rho\sigma}^{ad}} &= \frac{\partial L_0}{\partial R_{\lambda\beta\alpha}^\gamma} \frac{\partial R_{\lambda\beta\alpha}^\gamma}{\partial F_{\rho\sigma}^{ad}} = \frac{\partial L_0}{\partial R_{\sigma\rho\alpha}^\gamma} \eta_{bd} h_\alpha^b h_a^\gamma, \\ \frac{\partial L_0}{\partial G_{\beta\rho\sigma}^{ad}} &= \frac{\partial L_0}{\partial (\delta_\lambda R_{\gamma\nu\alpha}^\mu)} \frac{\partial (\delta_\lambda R_{\gamma\nu\alpha}^\mu)}{\partial G_{\beta\rho\sigma}^{ad}} = \frac{\partial L_0}{\partial (\delta_\beta R_{\sigma\rho\alpha}^\mu)} g_{\alpha\omega} h_a^\mu h_d^\omega. \end{aligned}$$

With these derivatives, the condition (15) for the gauge Lagrangian is put in the form

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L_0}{\partial R_{\sigma\rho\beta}^\theta} [\delta_\nu^\theta g_{\gamma\lambda} - \delta_\gamma^\theta g_{\nu\lambda}] R_{\sigma\rho\beta}^\lambda \\ &\quad + \left[\frac{\partial L_0}{\partial (\delta_\beta R_{\sigma\rho\alpha}^\gamma)} g_{\nu\lambda} - \frac{\partial L_0}{\partial (\delta_\beta R_{\sigma\rho\alpha}^\nu)} g_{\gamma\lambda} \right] \delta_\beta R_{\sigma\rho\alpha}^\lambda \equiv 0. \end{aligned} \quad (19)$$

This is a fundamental restriction upon the Lagrangians tentatively proposed for the theory, and it is quite useful in order to choose a specific suitable invariant.

4 Quadratic Lagrangian counting

Our goal here is to determine all possible independent quadratic Lagrangians constructed with the field strength tensors F and G considering their various symmetries. By quadratic Lagrangians we mean invariants of the type FF or GG , but not mixed terms like FG (obviously with the proper contraction of indices). We will also compute the linear case of the Einstein–Hilbert Lagrangian.

4.1 First order invariants

The symmetries to be considered in the construction of the invariants of the type FF are those inherited from F . Thus we have skew-symmetry in each pair of indices:

$F_{\mu\nu}^{ab} = -F_{\mu\nu}^{ba}$ and $F_{\mu\nu}^{ab} = -F_{\nu\mu}^{ab}$. Besides these, there is another one, which is unveiled by the geometrical form of F , (17), namely

$$R_{\sigma\beta\alpha}^{\gamma} + R_{\beta\alpha\sigma}^{\gamma} + R_{\alpha\sigma\beta}^{\gamma} \equiv 0,$$

the familiar first Bianchi identity, met with in the context of the general relativity.

Once algebra and space-time indices can be transformed into each other by means of a tetrad, we will consider a compact representation for F :

$$F_{\mu\nu}^{ab} \rightarrow F_{\mu\nu}^{ab} h_c^{\mu} h_d^{\nu} \equiv (abcd).$$

Since the Lagrangians are all of the form F^2 with all allowed orders of contractions, it is always possible to rename dummy indices in such a way that the first F will keep its indices in alphabetic order. In the table below follow all available permutations for the second F :

	Fix. a	Fix. b	Fix. c	Fix. d	
cyclic	$(abcd)$	$(bacd)$	$(cabd)$	$(dabc)$	(20)
	$(acdb)$	$(bcda)$	$(cbda)$	$(dbca)$	
	$(adbc)$	$(bdac)$	$(cdab)$	$(dcab)$	
non-cyclic	$(abdc)$	$(badc)$	$(cadb)$	$(dacb)$	
	$(acbd)$	$(bcad)$	$(cbad)$	$(dbac)$	
	$(adcb)$	$(bdca)$	$(cdba)$	$(dcba)$	

By means of a change in one pair of indices, one can see that the non-cyclic permutations are all proportional to the cyclic ones. Considering only the cyclic permutations and changing two pairs of indices, the table is reduced to

	Fix. a	Fix. b	Fix. c	Fix. d
cyclical	$(abcd)$	—	—	—
	$(acdb)$	$(bcda)$	—	—
	$(adbc)$	$(bdac)$	$(cdab)$	—

The skew-symmetries of the first F (which has been taken in alphabetic order) leads one to restrict once more the possible contractions to the three quadratic invariants:

$$\begin{aligned} I_1^F &= (abcd)(abcd), \\ I_2^F &= (abcd)(acdb), \\ I_3^F &= (abcd)(cdab). \end{aligned} \quad (21)$$

We now analyze the invariants constructed with one trace of F . The only non-null type of trace concerns those obtained by contracting one index of the first pair with one index of the second pair, in view of the skew-symmetry of this object. All possibilities are proportional to

$$\text{Tr} F \rightarrow h_c^{\nu} F_{\mu\nu}^{ca} h_b^{\mu} \equiv (\cdot ab \cdot) \text{ or } (\circ ab \circ).$$

The quadratic invariants are given by

$$\begin{aligned} I_1^{\text{Tr} F} &= (\cdot ab \cdot)(\circ ab \circ), \\ I_2^{\text{Tr} F} &= (\cdot ab \cdot)(\circ ba \circ). \end{aligned} \quad (22)$$

Still, one can construct a linear invariant taking a double trace of F :

$$I^{\text{TrTr} F} = h_c^{\nu} F_{\mu\nu}^{ca} h_a^{\mu} \equiv (\cdot \circ \circ \cdot).$$

4.2 Second order invariants

Let us introduce a notation similar to the one used in the case of F , i.e.,

$$G_{\beta\rho\sigma}^{ab} \rightarrow h_c^{\beta} h_d^{\rho} h_e^{\sigma} G_{\beta\rho\sigma}^{ab} \equiv [abcde],$$

where we identify the following symmetries:

- (i) antisymmetry by permutation of indices in the first pair and the last,

$$[abcde] = -[bacde] = -[abcd];$$

- (ii) the Bianchi identity for the last three indices,

$$[abcde] + [abdec] + [abecd] = 0.$$

4.2.1 Invariants of GG kind

The quadratic combinations are now in a larger amount than in the F^2 case. In fact, we have five tables like (20), one to each letter labeling, since we can associate

$$[abcde] = c(abde).$$

Using the symmetries cited above, one finds that the 5! G^2 invariants are reduced to just two kinds:

$$\begin{aligned} I_1^G &= [abcde][abcde], \\ I_2^G &= [abcde][debac]. \end{aligned}$$

The detailed and cumbersome calculations are made in Appendix A.

4.2.2 Invariants involving traces

There are three independent types of traces for G :

$$\begin{aligned} T_{abc}^{(1)} &= h_d^{\beta} G_{\beta\rho\sigma}^{da} h_b^{\rho} h_c^{\sigma} \equiv [\cdot a \cdot bc], \\ T_{abc}^{(2)} &= h_d^{\rho} G_{\beta\rho\sigma}^{da} h_b^{\beta} h_c^{\sigma} \equiv [\cdot ab \cdot c], \\ T_{abc}^{(3)} &= g^{\beta\rho} G_{\beta\rho\sigma}^{ab} h_c^{\sigma} \equiv [ab \cdot \cdot c]. \end{aligned} \quad (23)$$

Again using symmetries (see Appendix A) we arrive at

$$\begin{aligned} \text{Tr} \mathcal{G}_3 &= [\cdot ab \cdot c][\cdot a \cdot bc], & \text{Tr} \mathcal{G}_{11} &= [\cdot ab \cdot c][\cdot bc \cdot a], \\ \text{Tr} \mathcal{G}_5 &= [\cdot ab \cdot c][\cdot c \cdot ab], & \text{Tr} \mathcal{G}_{14} &= [\cdot ab \cdot c][\cdot ab \cdot c], \\ \text{Tr} \mathcal{G}_6 &= [ab \cdot \cdot c][\cdot a \cdot bc], & \text{Tr} \mathcal{G}_{17} &= [ab \cdot \cdot c][ab \cdot \cdot c], \\ \text{Tr} \mathcal{G}_{10} &= [\cdot ab \cdot c][\cdot ba \cdot c], & \text{Tr} \mathcal{G}_{18} &= [ab \cdot \cdot c][ac \cdot \cdot b], \end{aligned} \quad (24)$$

while for double traces we have

$$\begin{aligned} \text{TrTr} \mathcal{G}_1 &= [\cdot \circ b \cdot \circ][\cdot \circ b \cdot \circ], \\ \text{TrTr} \mathcal{G}_2 &= [\circ b \cdot \cdot \circ][\circ b \cdot \cdot \circ], \\ \text{TrTr} \mathcal{G}_3 &= [\cdot \circ b \cdot \circ][\circ b \cdot \cdot \circ]. \end{aligned} \quad (25)$$

4.3 Bianchi identities

As we already said, until now we have not used the first Bianchi identity:

$$R^{\sigma\chi\rho\beta} + R^{\chi\rho\sigma\beta} + R^{\rho\sigma\chi\beta} \equiv 0. \quad (26)$$

In geometrical variables, the cyclic property of G is translated to the second Bianchi identity:

$$\delta^\mu R^{\sigma\chi\rho\beta} + \delta^\sigma R^{\chi\mu\rho\beta} + \delta^\chi R^{\mu\sigma\rho\beta} \equiv 0.$$

These identities reduce the number of independent invariants, since $F \propto R$ and $G \propto \delta R$.

4.3.1 Reducing invariants

Let us begin by invariants of form F^2 . The first three are (21)

$$\begin{aligned} I_1^F &= R_{\sigma\rho\chi\kappa} R^{\sigma\rho\chi\kappa}, \\ I_2^F &= R_{\sigma\rho\chi\kappa} R^{\sigma\chi\rho\kappa}, \\ I_3^F &= R_{\sigma\rho\chi\kappa} R^{\chi\kappa\sigma\rho}. \end{aligned}$$

As a consequence of the first Bianchi identity (26) and the skew-symmetries, the curvature tensor obeys

$$R_{\sigma\rho\chi\kappa} = R_{\chi\kappa\sigma\rho}. \quad (27)$$

Then

$$I_3^F = R_{\sigma\rho\chi\kappa} R^{\chi\kappa\sigma\rho} = R_{\sigma\rho\chi\kappa} R^{\sigma\rho\chi\kappa} = I_1^F,$$

while for I_2^F one finds

$$\begin{aligned} I_2^F &= R_{\sigma\rho\chi\kappa} R^{\sigma\chi\rho\kappa} = -(R_{\rho\chi\sigma\kappa} + R_{\chi\sigma\rho\kappa}) R^{\sigma\chi\rho\kappa} \\ &= -R_{\chi\rho\sigma\kappa} R^{\chi\sigma\rho\kappa} + R_{\chi\sigma\rho\kappa} R^{\chi\sigma\rho\kappa} \\ &= -I_2^F + I_1^F, \\ 2I_2^F &= I_1^F, \end{aligned}$$

which leaves us with only one invariant of this kind, I_1^F .

Now, we translate the trace-like invariants (22) in a geometrical form:

$$\begin{aligned} I_1^{\text{Tr}F} &= R_{\rho\mu\nu}^\rho R^{\mu\nu\sigma}, \\ I_2^{\text{Tr}F} &= R_{\rho\mu\nu}^\rho R^{\nu\mu\sigma}. \end{aligned}$$

Since the Ricci tensor $R_{\mu\nu} \equiv R_{\rho\mu\nu}^\rho$ is symmetric,² we have in fact only one invariant, $I_1^{\text{Tr}F} = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$.

At last, the only invariant of double traced form in F is

$$I^{\text{TrTr}F} = R.$$

Analogously, in view of the Bianchi identities, only four invariants of the type G^2 remain (see Appendix A):

$$\begin{aligned} I_1^G &= \delta_\beta R_{\sigma\rho\chi\kappa} \delta^\beta R^{\sigma\rho\chi\kappa}, & \text{TrTr}\mathcal{G}_2 &= \delta^\rho R_{\rho\chi} \delta_\mu R^{\mu\chi}, \\ \text{Tr}\mathcal{G}_{10} &= \delta_\beta R_{\sigma\chi} \delta^\chi R^{\sigma\beta}, & \text{Tr}\mathcal{G}_{14} &= \delta_\beta R_{\sigma\chi} \delta^\beta R^{\sigma\chi}. \end{aligned}$$

5 Gauge invariance condition

With the invariants constructed above we collect seven types of Lagrangians for the gravitational field:

Lagr.	Inv.	Gauge Form	Geom. Form
$L_0^{(R_1)}$	$(I^{\text{TrTr}F})^n$	$(F_{ba}^{ab})^n$	$R^n, n = 1, 2$
$L_0^{(R_2)}$	$I_1^{\text{Tr}F}$	$F_{b\mu a}^a F_c^{b\mu c}$	$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$
$L_0^{(R_3)}$	I_1^F	$F_{\mu\nu}^{ab} F_{ab}^{\mu\nu}$	$R_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\alpha\beta\rho\sigma}$
$L_0^{(G_1)}$	$\text{TrTr}\mathcal{G}_2$	$G_{ab\beta}^{\beta a} G_{\mu c}^{cb\mu}$	$\delta^\rho R_{\rho\chi} \delta_\mu R^{\mu\chi}$
$L_0^{(G_2)}$	$\text{Tr}\mathcal{G}_{14}$	$G_{\mu a \sigma}^{ab} G_{cb}^{\mu c \sigma}$	$\delta_\beta R_{\sigma\chi} \delta^\beta R^{\sigma\chi}$
$L_0^{(G_3)}$	$\text{Tr}\mathcal{G}_{10}$	$G_{a\sigma}^{abe} G_{deb}^{d\sigma}$	$\delta_\beta R_{\sigma\chi} \delta^\chi R^{\sigma\beta}$
$L_0^{(G_4)}$	I_1^G	$G_{\mu\nu\lambda}^{ab} G_{ab}^{\mu\nu\lambda}$	$\delta_\beta R_{\sigma\rho\chi\kappa} \delta^\beta R^{\sigma\rho\chi\kappa}$

(28)

We are considering Lagrangians only up to quadratic order in F and/or G , which also includes the linear invariant $I^{\text{TrTr}F} = R$ and the square R^2 . Actually, one can observe that if any invariant fulfills the gauge invariance condition, then any of its powers will, since this condition is linear in the derivatives $\partial L_0 / \partial F$ and $\partial L_0 / \partial G$. For instance,

$$L_0 = I^n, \quad \frac{\partial L_0}{\partial F} = n I^{n-1} \frac{\partial I}{\partial F}.$$

Therefore,

$$\frac{\partial I}{\partial F}[\dots]F = 0 \Rightarrow \frac{\partial L_0}{\partial F}[\dots]F = 0,$$

and the same follows for G .

Using the skew-symmetry $\nu \leftrightarrow \gamma$ of (19) and the symmetry properties of the Riemann tensor, one can easily verify that all Lagrangian densities listed in (28) accomplish the gauge invariance condition. Then, any function of these invariants expressible in a Taylor series also will fulfill the gauge invariance condition.

6 Equations of motion

Here we will concentrate our attention on the effect of the term

$$L_0^{(G_1)} = \frac{1}{2} h h_\sigma^a h_c^\nu G_{ab\beta}^{\beta\sigma} G_{\mu\nu}^{cb\mu} = \frac{1}{8} h \delta^\rho R \delta_\rho R$$

on a gravitational theory based on the Einstein–Hilbert action plus the $L_0^{(G_1)}$ term. This Lagrangian density is equivalent, by the Bianchi identity, to the form $L_P = \frac{1}{2} h \delta^\rho R_{\rho\chi} \delta_\mu R^{\mu\chi}$, which is clearly analogous to Podolsky's second order term for electrodynamics ($L_{\text{Podolsky}} \propto \partial^\rho F_{\rho\chi} \partial_\mu F^{\mu\chi}$). The choice of the particular Lagrangian $L_0^{(G_1)}$ is mainly motivated by this analogy. Besides this, the $L_0^{(G_1)}$ term also can be viewed as a kind of kinetic term for the scalar curvature, which approximates such a description to the usual scalar fields. Moreover, this scalar

² This is a consequence of the first Bianchi identity.

is, up to a surface term, present in the Schwinger–DeWitt renormalized effective action for a scalar field on a curved background [27]. Therefore, the field theory constructed on the basis on $L_0^{(G_1)}$ can be considered an effective gravitational theory.

Taking a functional variation of the tetrad field, one finds

$$h = \sqrt{-g}, \quad \delta h = \frac{1}{2} h g^{\lambda\nu} \delta g_{\lambda\nu} = h g^{\lambda\nu} h_{\lambda}^{\alpha} \eta_{\alpha b} \delta h_{\nu}^b$$

and

$$\begin{aligned} \delta L_0^{(G_1)} &= \frac{1}{4} \partial_{\rho} (h \partial^{\rho} R \delta R) - \frac{1}{4} \delta R \partial_{\rho} (h \partial^{\rho} R) \\ &+ \frac{1}{4} h \left[\frac{1}{2} g^{\lambda\nu} \partial^{\rho} R \partial_{\rho} R - g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \partial_{\mu} R \partial_{\rho} R \right] h_{\lambda}^{\alpha} \eta_{\alpha b} \delta h_{\nu}^b. \end{aligned}$$

On calculating the equations of motion, we must give special attention to the last term, involving

$$\begin{aligned} \delta R &= -2 R_{\mu\beta} g^{\mu\nu} g^{\beta\lambda} h_{\lambda}^{\alpha} \eta_{\alpha b} \delta h_{\nu}^b \\ &+ \frac{1}{h} \partial_{\alpha} [h (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\nu\alpha} \delta \Gamma_{\nu\beta}^{\beta})], \end{aligned}$$

which will include several integrations by parts. After these integrations and some cumbersome calculations, one finds

$$\begin{aligned} \delta L_0^{(G_1)} &= \frac{1}{2} \partial_{\theta} \mathcal{V}^{\theta} + \frac{1}{2} h \left[\delta_{\lambda} \delta_{\nu} [\diamond R] + \frac{1}{2} \delta_{\lambda} R \delta_{\nu} R - R_{\lambda\nu} \diamond R \right. \\ &\left. - g_{\lambda\nu} \diamond [\diamond R] - \frac{1}{4} g_{\lambda\nu} \delta^{\rho} R \delta_{\rho} R \right] h_{\alpha}^{\lambda} \eta^{ab} \delta h_{\nu}^b, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{\theta} &\equiv -\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\theta} - g^{\nu\theta} \delta \Gamma_{\nu\beta}^{\beta}) \partial_{\rho} (h \partial^{\rho} R) - \frac{1}{2} h \partial^{\theta} R \delta R \\ &+ \frac{1}{4} h (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta}) \delta_{\alpha} [\diamond R] \\ &\times (\delta_{\nu}^{\theta} \delta_{\mu}^{\lambda} \delta_{\beta}^{\eta} + \delta_{\mu}^{\theta} \delta_{\beta}^{\lambda} \delta_{\nu}^{\eta} - \delta_{\beta}^{\theta} \delta_{\nu}^{\lambda} \delta_{\mu}^{\eta}) \delta g_{\lambda\eta}, \end{aligned}$$

and

$$\diamond \equiv \delta_{\beta} \delta^{\beta}$$

is the Laplace–Beltrami operator on the Riemannian space.

Therefore, the second order contribution to the equation of motion will be

$$\begin{aligned} H_{\nu}^b &\equiv h^{b\lambda} \delta_{\lambda} \delta_{\nu} [\diamond R] + \frac{1}{2} h^{b\lambda} \delta_{\lambda} R \delta_{\nu} R - R_{\nu}^b \diamond R \\ &- h_{\nu}^b \delta_{\beta} \delta^{\beta} [\diamond R] - \frac{1}{4} h_{\nu}^b \delta^{\rho} R \delta_{\rho} R. \end{aligned} \quad (29)$$

Furthermore, if we include the usual first order Einstein–Hilbert and matter Lagrangian densities,

$$S_T = \int d^n x \left(-\frac{hR}{2\chi} - \frac{\beta}{\chi} L_0^{(G_1)} + h \mathcal{L}_{\text{matter}} \right),$$

the field equations become

$$G_{\nu}^b + \beta H_{\nu}^b = \chi T_{\nu}^b, \quad (30)$$

or, in geometrical form,

$$\begin{aligned} R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\nu} R + \beta \left[\delta_{\lambda} \delta_{\nu} (\diamond R) + \frac{1}{2} \delta_{\lambda} R \delta_{\nu} R - R_{\lambda\nu} \diamond R \right. \\ \left. - g_{\lambda\nu} \diamond (\diamond R) - \frac{1}{4} g_{\lambda\nu} \delta^{\rho} R \delta_{\rho} R \right] = \chi T_{\lambda\nu}, \end{aligned}$$

where G_{ν}^b is the Einstein tensor and

$$T_{\lambda\nu} \equiv \frac{2}{h} \frac{\delta (h \mathcal{L}_{\text{matter}})}{\delta g^{\lambda\nu}}$$

is the energy-momentum tensor of the matter fields written in terms of the metric field.

By analogy to the Alekseev–Arbuzov–Baikov case [22], one could expect that the higher order terms, which can be up to sixth derivative order, would be related to infrared corrections to general relativity, giving observable physical effects at large scales.

6.1 Covariant conservation of $T_{\lambda\nu}$

Taking the covariant divergence of (30), we have

$$\delta^{\nu} G_{\nu\alpha} + \beta \delta^{\nu} H_{\nu\alpha} = \chi \delta^{\nu} T_{\nu\alpha}.$$

Now, from the first order case, we know that

$$\delta^{\nu} G_{\nu\alpha} \equiv 0.$$

Applying the divergence to (29), one finds

$$\begin{aligned} \delta^{\nu} H_{\nu\alpha} &= \delta^{\nu} \delta_{\nu} \delta_{\alpha} \diamond R - g_{\nu\alpha} \delta^{\nu} \diamond [\diamond R] + \frac{1}{2} \delta_{\nu} R \delta^{\nu} \delta_{\alpha} R \\ &+ \frac{1}{2} \delta^{\nu} \delta_{\nu} R \delta_{\alpha} R - \delta^{\nu} R_{\nu\alpha} \diamond R - R_{\nu\alpha} \delta^{\nu} \diamond R \\ &- \frac{1}{4} g_{\nu\alpha} \delta^{\nu} (\delta^{\rho} R \delta_{\rho} R). \end{aligned}$$

Using the commutation relation

$$[\delta_{\nu}, \delta_{\alpha}] A^{\tau} = R_{\alpha\nu}^{\tau\xi} A_{\xi}$$

and the second Bianchi identity, we arrive at

$$\begin{aligned} \delta^{\nu} H_{\nu\alpha} &= R_{\alpha\xi} \delta^{\xi} \diamond R - R_{\nu\alpha} \delta^{\nu} \diamond R \\ &+ \frac{1}{2} \delta_{\nu} R \delta^{\nu} \delta_{\alpha} R - \frac{1}{2} \delta^{\rho} R \delta_{\alpha} \delta_{\rho} R \\ &= 0. \end{aligned}$$

Then the covariant conservation of $T_{\mu\nu}$ is established:

$$\delta^{\mu} (G_{\mu\nu} + \beta H_{\mu\nu}) \equiv 0 \implies \delta^{\mu} T_{\mu\nu} = 0,$$

as expected from the coordinate invariance of the Lagrangian density.

6.2 Static isotropic solution

In the case of a static isotropic metric,

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

in the vacuum, the equations of motion (30) are reduced, in the linear approximation, to the following coupled linear equations:

$$\begin{aligned} \nu'' + \frac{2}{r}\nu' + \beta \left(\nu^{(6)} + \frac{6}{r}\nu^{(5)} - \frac{2}{r}\lambda^{(5)} - \frac{2}{r^2}\lambda^{(4)} \right. \\ \left. + \frac{8}{r^3}\lambda''' - \frac{24}{r^4}\lambda'' + \frac{48}{r^5}\lambda' - \frac{48}{r^6}\lambda \right) = 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda'}{r} - 2\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\nu'}{r} - \nu'' \right) \\ - \beta \left(\nu^{(6)} + \frac{3}{r}\nu^{(5)} - \frac{12}{r^2}\nu^{(4)} + 12\frac{\nu'''}{r^3} - \frac{2}{r}\lambda^{(5)} \right. \\ \left. + \frac{4}{r^2}\lambda^{(4)} + 8\frac{\lambda'''}{r^3} - 48\frac{\lambda''}{r^4} + 96\frac{\lambda'}{r^5} - 96\frac{\lambda}{r^6} \right) = 0. \end{aligned}$$

To solve this system, we use the Frobenius method, based on a series expansion:

$$\nu(r) = \sum_n \nu_n r^{s+n}, \quad \lambda(r) = \sum_n \lambda_n r^{s+n}.$$

From the first terms in the series, we find $s = -1$, and the recursion relations above become

$$\begin{aligned} \lambda_{n+4} &= \frac{\nu_n(n-2)}{4\beta(n+4)(n+2)(n+1)(n-\frac{1}{2})}, \\ \nu_{n+4} &= -\frac{\nu_n}{2\beta(n+4)(n+3)(n+2)(n-\frac{1}{2})}, \end{aligned}$$

so that the solution can be written as

$$\begin{aligned} \nu(r) &= \sum_{m=0}^3 \nu_m r^{m-1} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{nm} \right), \\ \lambda(r) &= \sum_{m=0}^3 \lambda_m r^{m-1} \\ &\quad - \sum_{m=0}^3 \nu_m r^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+m-2)(4n+3+m)}{2(4n+1+m)} c_{nm}, \end{aligned}$$

where ν_m and λ_m , with $m \in \{0, 1, 2, 3\}$, are the integration constants specified by the boundary conditions, and

$$\begin{aligned} c_{nm} &\equiv \left(-\frac{r^4}{2\beta} \right)^{n+1} \frac{(m+1)!}{(4n+m+4)!} \\ &\quad \times \frac{(4n+m+1)!!!!}{(m+1)!!!!} \frac{(m-\frac{9}{2})!!!!}{(4n+m-\frac{1}{2})!!!!} \end{aligned}$$

The notation $a!!!!$ stands for

$$(a+4)!!!! = (a+4) \cdot a!!!!.$$

The convergence of the series, tested by the ratio test,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \right| &= \left| \frac{r^4}{2\beta} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| D_{n,m} \frac{1}{(4n+m+7)} \right| = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| &= \left| \frac{r^4}{2\beta} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| D_{nm} \right| \\ &\quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(4n+m+2)(4n+m+1)}{(4n+m+5)(4n+m+3)(4n+m-2)} \right| \\ &= 0, \\ D_{nm} &\equiv \frac{1}{(4n+m+8)(4n+m+6)(4n+m+\frac{7}{2})}, \end{aligned}$$

shows that both are convergent with an infinite radius of convergence.

Therefore, in the first order approximation for β , we have

$$\begin{aligned} \nu(r) &= \frac{\nu_0}{r} \left(1 + \frac{1}{24\beta} r^4 \right) + \nu_1 \left(1 - \frac{1}{60\beta} r^4 \right) \\ &\quad + \nu_2 r \left(1 - \frac{1}{360\beta} r^4 \right) + \nu_3 r^2 \left(1 - \frac{1}{1050\beta} r^4 \right) + \mathcal{O}(\beta^2) \\ \lambda(r) &= -\frac{\nu_0}{r} + \lambda_1 + \lambda_2 r + \lambda_3 r^2 \\ &\quad + \frac{1}{6\beta} \left(-\frac{\nu_0}{4} r^3 + \frac{\nu_1}{10} r^4 + \frac{\nu_2}{60} r^5 + \frac{\nu_3}{175} r^6 \right) + \mathcal{O}(\beta^2). \end{aligned} \quad (31)$$

An analysis of the solution (31) reveals the expected weak field behavior at short scales, ν_0/r , and the deviation from this for the meso-scale, since we are dealing only with the linear approximation. Correspondingly, we find $\nu_0 = 2GM/c^2$ where M is the mass of the central body.

The remaining integration constants set scale distances where modifications of the Newtonian behavior appear. For instance, consider the Einstein–Hilbert theory with cosmological constant. The static spherically symmetric solution is

$$\nu(r) = -\lambda(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2} \frac{1}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2,$$

where the cosmological constant sets a scale distance given by the de Sitter pseudo-radius.

Analogously, in our case, the ν_1 constant sets a constant potential, which can be a mean nonlocal value of the effective Lagrangian proposed, ν_2 sets a scale distance where a constant mean force appears, and ν_3 represents a gradient of force, in the same way as the cosmological constant in the example above. A similar reasoning can be developed for the other constants in the model.

The contribution of each constant to the net force could be fixed by requiring that it fits the observational data for the tests of the gravitation. This task deserves a careful investigation of its own and is presently under investigation by the authors by means of the study of galaxy rotation curves, geodesic motion, perihelion shift, gravitational lenses and redshift.

7 Conclusion

We have applied second order gauge theory [21] to local gauge theory for the homogeneous Poincaré group. It was found that the geometrical counterparts of the usual field strength F and of the second order field strength $G = DF$ are the Riemann tensor R and its (space-time) covariant derivative δR . There followed an analysis of the second order invariants composed with geometrical entities.

We demonstrate – employing the symmetry properties of the curvature tensor – that the only independent Lagrangian densities for the gravitational field in a Riemannian manifold of arbitrary dimension are the seven ones listed in (28). Linear combinations of terms proportional to powers of R , as the familiar quadratic term in the curvature, are of first order in the gauge potential ω ; therefore, in the context of the second order gauge theory, the contributions of second order in the Lagrangian density, which are those including second derivatives of the gauge potential, are of type δR .

We derived equations of motion using a particularly simple choice for the second order gauge Lagrangian inspired in Podolsky’s proposal for generalized electrodynamics. We found the static isotropic solution of these equations in the linear approximation, showing that at short distances the gravitational field behaves exactly as Newton’s law, but at meso-large distance scales the higher order contribution dominates, exhibiting a modified potential.

In the future, we will study other solutions of these field equations, searching for massive modes that do not violate local gauge symmetry. Our guide in these calculations shall be the treatment given in [21] to the $U(1)$ case, where an effective mass for the photon was derived. To do this, one naturally must concern oneself with the determination of the conserved current associated with the local Lorentz symmetry and the relationship to the global diffeomorphic invariance of the theory.

Another perspective is to apply the second order equations of motion (30) to a Friedmann–Robertson–Walker metric. The goal is to seek for accelerated regimes of the cosmological model arising from the higher order terms. This proposal is now under investigation.

Acknowledgements. R.R.C. and L.G.M. are grateful to Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de S. Paulo (FAPESP) for support (grants 02/05763-8 and 02/10263-4 respectively); P.J.P. thanks the CTA staff. C.A.M.M. thanks for the hospitality of the International Centre of Theoretical Physics, under Federation Arrangement, where part of this work was done. The authors acknowledge Prof. B.M. Pimentel, Prof. R. Aldrovandi and Prof. A.J. Accioly for the continuing incentive to this project, and an unknown referee for useful comments.

Appendix: Counting second order invariants

A.1 Counting GG invariants

First, let us analyze how many possible contractions there are of the kind GG . This is done by means of tables as in

Sect. 4.1. The first one is constructed fixing, for instance, the last index:

Fix. e	Fix. a	Fix. b	Fix. c	Fix. d
	$(abcd)$	$(bacd)$	$(cabd)$	$(dabc)$
cyclic	$(acdb)$	$(bcda)$	$(cbda)$	$(dbca)$
	$(adbc)$	$(bdac)$	$(cdab)$	$(dcab)$
	$(abdc)$	$(badc)$	$(cadb)$	$(dacb)$
non-cycl.	$(acbd)$	$(bcad)$	$(cbad)$	$(dbac)$
	$(adcb)$	$(bdca)$	$(cdba)$	$(dcba)$

Analogous tables result when we fix the indices d , c , b and a . For each table, non-cyclic permutations are equivalent to cyclic ones, giving:

Fix. e	Fix. a	Fix. b	Fix. c	Fix. d
	$(abcd)$	–	–	–
cyclic	$(acdb)$	$(bcda)$	–	–
	$(adbc)$	$(bdac)$	$(cdab)$	–

and similarly for the other four tables.

Using the cyclic permutation symmetry, one can identify elements of different tables, reducing the number of invariants. By the skew-symmetry in the first G , and renaming dummy indices, there follows

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_1 &= [abcde][abcde], & \mathcal{G}_6 &= [abcde][cdbea], \\
 \mathcal{G}_2 &= [abcde][beacd], & \mathcal{G}_7 &= [abcde][adbec], \\
 \mathcal{G}_3 &= [abcde][adceb], & \mathcal{G}_8 &= [abcde][acbde], \\
 \mathcal{G}_4 &= [abcde][aecbd], & \mathcal{G}_9 &= [abcde][acdeb], \\
 \mathcal{G}_5 &= [abcde][debac], & \mathcal{G}_{10} &= [abcde][abdce].
 \end{aligned}$$

One can further apply the cyclic permutation symmetry to the first G in these remaining invariants and reduce even more the number of independent quantities. Beginning with \mathcal{G}_{10} :

$$\mathcal{G}_{10} = -([abdec] + [abecd])[abdce] = \mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_{10} \Rightarrow 2\mathcal{G}_{10} = \mathcal{G}_1.$$

On the other hand, for \mathcal{G}_9 :

$$\mathcal{G}_9 = -([abdec] + [abecd])[acdeb] = 2\mathcal{G}_4 + \mathcal{G}_9 \Rightarrow \mathcal{G}_4 = 0.$$

Proceeding in the same way, one finds the following identities:

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{G}_{10} &= \mathcal{G}_1; & 2\mathcal{G}_6 &= \mathcal{G}_5; \\
 \mathcal{G}_2 &= \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_7 = \mathcal{G}_8 = \mathcal{G}_9 = 0.
 \end{aligned}$$

which give two independent invariants,

$$I_1^G = [abcde][abcde], \quad I_2^G = [abcde][debac].$$

A.2 Counting $(\text{Tr}G)^2$ invariants

Starting with the three independent traces listed in (23), and considering the skew-symmetries, the possible quadratic combinations are:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\mathcal{G}_1 &= [\cdot a \cdot bc][\cdot a \cdot bc], & \text{Tr}\mathcal{G}_{10} &= [\cdot ab \cdot c][\cdot ba \cdot c], \\ \text{Tr}\mathcal{G}_2 &= [\cdot a \cdot bc][\cdot b \cdot ac], & \text{Tr}\mathcal{G}_{11} &= [\cdot ab \cdot c][\cdot bc \cdot a], \\ \text{Tr}\mathcal{G}_3 &= [\cdot ab \cdot c][\cdot a \cdot bc], & \text{Tr}\mathcal{G}_{12} &= [\cdot ab \cdot c][\cdot ca \cdot b], \\ \text{Tr}\mathcal{G}_4 &= [\cdot ab \cdot c][\cdot b \cdot ac], & \text{Tr}\mathcal{G}_{13} &= [\cdot ab \cdot c][\cdot cb \cdot a], \\ \text{Tr}\mathcal{G}_5 &= [\cdot ab \cdot c][\cdot c \cdot ab], & \text{Tr}\mathcal{G}_{14} &= [\cdot ab \cdot c][ab \cdot \cdot c], \\ \text{Tr}\mathcal{G}_6 &= [ab \cdot \cdot c][\cdot a \cdot bc], & \text{Tr}\mathcal{G}_{15} &= [\cdot ab \cdot c][ac \cdot \cdot b], \\ \text{Tr}\mathcal{G}_7 &= [ab \cdot \cdot c][\cdot c \cdot ab], & \text{Tr}\mathcal{G}_{16} &= [\cdot ab \cdot c][bc \cdot \cdot a], \\ \text{Tr}\mathcal{G}_8 &= [\cdot ab \cdot c][\cdot ab \cdot c], & \text{Tr}\mathcal{G}_{17} &= [ab \cdot \cdot c][ab \cdot \cdot c], \\ \text{Tr}\mathcal{G}_9 &= [\cdot ab \cdot c][\cdot ac \cdot b], & \text{Tr}\mathcal{G}_{18} &= [ab \cdot \cdot c][ac \cdot \cdot b]. \end{aligned}$$

The last two invariants cannot be converted into any other ones using the symmetries at our disposal. Each one of the preceding $\text{Tr}\mathcal{G}$ must be analyzed, case by case, in a search for an eventual interdependence.

Take, for example, the 16th term, and rewrite it as

$$\begin{aligned} \text{Tr}\mathcal{G}_{16} &= -[\cdot acb \cdot][bc \cdot \cdot a] - [\cdot a \cdot cb][bc \cdot \cdot a] \\ &\Rightarrow 2\text{Tr}\mathcal{G}_{16} = \text{Tr}\mathcal{G}_7. \end{aligned}$$

Repeat the reasoning for, say, the 15th invariant:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\mathcal{G}_{15} &= -[\cdot acb \cdot][ac \cdot \cdot b] - [\cdot a \cdot cb][ac \cdot \cdot b] \\ &= \text{Tr}\mathcal{G}_{14} - \text{Tr}\mathcal{G}_6. \end{aligned}$$

As soon as we perform this same check for all the above invariants, only eight of them are kept:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\mathcal{G}_3 &= [\cdot ab \cdot c][\cdot a \cdot bc], & \text{Tr}\mathcal{G}_{11} &= [\cdot ab \cdot c][\cdot bc \cdot a], \\ \text{Tr}\mathcal{G}_5 &= [\cdot ab \cdot c][\cdot c \cdot ab], & \text{Tr}\mathcal{G}_{14} &= [\cdot ab \cdot c][\cdot ab \cdot c], \\ \text{Tr}\mathcal{G}_6 &= [ab \cdot \cdot c][\cdot a \cdot bc], & \text{Tr}\mathcal{G}_{17} &= [ab \cdot \cdot c][ab \cdot \cdot c], \\ \text{Tr}\mathcal{G}_{10} &= [\cdot ab \cdot c][\cdot ba \cdot c], & \text{Tr}\mathcal{G}_{18} &= [ab \cdot \cdot c][ac \cdot \cdot b]. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

A.3 Counting $(\text{TrTr}G)^2$ invariants

From $T_{abc}^{(1)} \equiv [\cdot a \cdot bc]$ one can take a trace again:

$$T_c^{(1)} \equiv [\cdot \circ \circ \circ c].$$

From $T_{abc}^{(2)} \equiv [\cdot ab \cdot c]$ one finds $T_c \equiv [\cdot \circ \circ \circ c]$, which can be reduced to $T_c^{(1)}$ using the G skew-symmetry in the first two indexes and changing dummy indexes. Another possible trace is constructed from $T_{abc}^{(2)}$:

$$T_b^{(2)} \equiv [\cdot \circ b \cdot \circ]. \quad (\text{A.2})$$

But it also is not independent of $T_c^{(1)}$:

$$\begin{aligned} T_b^{(2)} &\equiv [\cdot \circ b \cdot \circ] = -[\cdot \circ \circ \circ b] - [\cdot \circ \circ b \cdot] \\ &= -T_b^{(1)} - [\cdot \circ \circ \circ b] = -2T_b^{(1)}. \end{aligned}$$

Let us set $T_b^{(2)}$ as the independent double trace.

There is an internal double trace of $T_{abc}^{(3)} \equiv [ab \cdot \cdot c]$, which is independent of $T_c^{(2)}$:

$$T_b^{(3)} \equiv [\circ b \cdot \cdot \circ]. \quad (\text{A.3})$$

The other double trace of $T_{abc}^{(3)}$ is

$$T_b \equiv [b \circ \cdot \cdot \circ] = -T_b^{(3)}.$$

Then we have the following set of independent double traces:

$$\begin{aligned} \text{TrTr}\mathcal{G}_1 &= [\cdot \circ b \cdot \circ][\cdot \circ b \cdot \circ], \\ \text{TrTr}\mathcal{G}_2 &= [\circ b \cdot \cdot \circ][\circ b \cdot \cdot \circ], \\ \text{TrTr}\mathcal{G}_3 &= [\cdot \circ b \cdot \circ][\circ b \cdot \cdot \circ]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.4 Reducing the G^2 invariants using Bianchi identities

Consider the reduction of the number of quadratic invariants in G by means of the Bianchi identities. Using the geometric form, the first two invariants are

$$I_1^G = \delta_\beta R_{\sigma\rho\chi\kappa} \delta^\beta R^{\sigma\rho\chi\kappa}, \quad I_2^G = \delta_\beta R_{\sigma\rho\chi\kappa} \delta^\chi R^{\beta\kappa\sigma\rho}.$$

Applying the second Bianchi identity to I_2^G we have

$$\begin{aligned} I_2^G &= -\delta_\beta R_{\sigma\rho\chi\kappa} (\delta^\chi R^{\kappa\beta\rho\sigma} + \delta^\beta R^{\chi\kappa\rho\sigma}) = I_1^G - I_2^G \\ &\Rightarrow 2I_2^G = I_1^G, \end{aligned}$$

therefore, it is sufficient to consider only I_1^G .

Let us analyze now the trace invariants in G , (24):

$$\begin{aligned} \text{Tr}\mathcal{G}_3 &= \delta_\beta R_{\sigma\zeta\chi}^\zeta \delta_\mu R^{\sigma\beta\chi\mu}, & \text{Tr}\mathcal{G}_{11} &= \delta_\beta R_{\sigma\chi} \delta^\sigma R^{\chi\beta}, \\ \text{Tr}\mathcal{G}_5 &= \delta_\beta R_{\sigma\rho\chi}^\rho \delta_\mu R^{\beta\chi\sigma\mu}, & \text{Tr}\mathcal{G}_{14} &= \delta_\beta R_{\sigma\chi} \delta^\beta R^{\sigma\chi}, \\ \text{Tr}\mathcal{G}_6 &= \delta^\rho R_{\sigma\rho\chi\zeta} \delta_\kappa R^{\sigma\chi\zeta\kappa}, & \text{Tr}\mathcal{G}_{17} &= \delta^\rho R_{\sigma\rho\chi\kappa} \delta_\mu R^{\sigma\mu\chi\kappa}, \\ \text{Tr}\mathcal{G}_{10} &= \delta_\beta R_{\sigma\chi} \delta^\chi R^{\sigma\beta}, & \text{Tr}\mathcal{G}_{18} &= \delta^\rho R_{\sigma\rho\chi\kappa} \delta_\mu R^{\chi\mu\sigma\kappa}. \end{aligned}$$

Comparing $\text{Tr}\mathcal{G}_{10}$ with $\text{Tr}\mathcal{G}_{11}$ one sees that these two are the same invariant, due to the symmetry of Ricci tensor.

Using the second Bianchi identity, it follows that

$$\text{Tr}\mathcal{G}_3 = \delta_\beta R_{\sigma\chi} g_{\mu\rho} (\delta^\beta R^{\rho\sigma\chi\mu} + \delta^\sigma R^{\beta\rho\chi\mu}) = \text{Tr}\mathcal{G}_{14} - \text{Tr}\mathcal{G}_{10},$$

and in the same way

$$\text{Tr}\mathcal{G}_5 = \text{Tr}\mathcal{G}_6 = -\frac{1}{2}\text{Tr}\mathcal{G}_{17} = -\text{Tr}\mathcal{G}_{18} = -\text{Tr}\mathcal{G}_3.$$

This shows that only $\text{Tr}\mathcal{G}_{14}$ and $\text{Tr}\mathcal{G}_{10}$ can hold independently.

We apply the same technique to the double traced invariants (25):

$$\begin{aligned} \text{TrTr}\mathcal{G}_1 &= \delta_\beta R \delta^\beta R, \\ \text{TrTr}\mathcal{G}_2 &= \delta^\rho R_{\rho\chi} \delta_\mu R^{\mu\chi}, \\ \text{TrTr}\mathcal{G}_3 &= -\delta_\beta R \delta_\mu R^{\mu\beta}. \end{aligned}$$

The second Bianchi identity shows us that we have only one invariant in such a case:

$$\begin{aligned}\text{TrTr}\mathcal{G}_3 &= \delta_\zeta^\rho g^{\sigma\chi} (\delta_\sigma R_{\beta\rho\chi}^\zeta + \delta_\rho R_{\sigma\beta\chi}^\zeta) \delta_\mu R^{\mu\beta} \\ &= -2\text{TrTr}\mathcal{G}_2 = -\frac{1}{2}\text{TrTr}\mathcal{G}_1.\end{aligned}$$

References

1. P. Astier et al., *Astron. Astrophys.* **447**, 31 (2006)
2. A.G. Riess et al., *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004)
3. S. Nojiri, S.D. Odintsov, hep-th/0608008
4. S. Capozziello, *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 483 (2002)
5. S.M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden, S. Turner, *Phys. Rev. D* **70**, 043528 (2004)
6. U. Gunther, A. Zhuk, V. Bezerra, C. Romero, *Class. Quantum Grav.* **22**, 313 (2005)
7. N.D. Birrell, P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, New York, 1984)
8. R. Casana, C.A.M. de Melo, B.M. Pimentel, *Proc. Sci. WC* **2004**, 013 (2004)
9. R. Casana, C.A.M. de Melo, B.M. Pimentel, *Brazil. J. Phys.* **35**, 1151 (2005)
10. R. Casana, C.A.M. de Melo, B.M. Pimentel, *Astrophys. Space Sci.* **305**, 125 (2006)
11. B. Podolsky, *Phys. Rev.* **62**, 68 (1942)
12. B. Podolsky, C. Kikuchi, *Phys. Rev.* **65**, 228 (1944)
13. B. Podolsky, P. Schwed, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 40 (1948)
14. K.S. Stelle, *Gen. Relat. Grav.* **9**, 353 (1978)
15. A. Accioly, A. Azeredo, H. Mukai, *J. Math. Phys.* **43**, 473 (2002)
16. R.P. Feynman, *Feynman Lectures on Gravitation* (Westview Press, Boulder, 2002)
17. M.H. Goroff, A. Sagnotti, *Phys. Lett. B* **160**, 81 (1985)
18. B.S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields* (Gordon & Breach Science Pub., New York, 1965)
19. S.M. Christensen, *Phys. Rev. D* **14**, 2490 (1976)
20. R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956)
21. R.R. Cuzinatto, C.A.M. de Melo, P.J. Pompeia, *Ann. Phys.* **322**, 1211 (2007)
22. A.I. Alekseev, B.A. Arbuzov, V.A. Baikov, *Theor. Math. Phys.* **52**, 739 (1982)
23. S.A. Fulling, R.C. King, B.G. Wybourne, C.J. Cummings, *Class. Quantum Grav.* **9**, 1151 (1992)
24. Y. Décanini, A. Folacci, *Class. Quantum Grav.* **24**, 4777 (2007)
25. M. Blagojevic, *Gravitation & Gauge Symmetries* (Taylor & Francis, London, 2001)
26. V. De Sabbata, M. Gasperini, *Introduction to Gravitation* (World Scientific, Singapore, 1985)
27. I.G. Avramidi, *Heat Kernel and Quantum Gravity* (Springer, Berlin, 2000)

2.4.3 Como investigar a Eletrodinâmica de Podolsky?

Investigamos a possibilidade de se detectar a constante a da Eletrodinâmica generalizada de Podolsky. Primeiro, analisamos um aparato de interferometria de íons proposto por B. Neyenhuis *et al.* (Phys. Rev. Lett. **99**, 200401 (2007)), que olharam para desvios da lei do inverso do quadrado de Coulomb no contexto do modelo de Proca. Nossos resultados mostram que este experimento não possui precisão suficiente para medições de a . Para estabelecer limites para a , investigamos a influência do potencial eletrostático de Podolsky no estado fundamental do átomo de Hidrogênio. O valor da energia do estado fundamental do átomo de Hidrogênio estabelece que a constante de Podolsky deva ser menos do que 5,6 fm, ou em termos de energia, maior do que 35,53 MeV/ c^2 .

How to Probe Podolsky Electrodynamics?*

R. R. Cuzinato^{1,†}, C. A. M. de Melo^{2,3,‡}, L. G. Medeiros^{4,§} and P. J. Pompeia^{1,5¶}

¹*Theoretical Physics Institute, University of Alberta,
Edmonton, Alberta, Canada, T6G 2J1.*

²*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista.
Rua Pamplona 145, CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brazil.*

³*Universidade Federal de Alfenas, Campus Poços de Caldas,
Departamento de Ciência e Tecnologia,
R. Corumbá, 72 - Jardim dos Estados,
CEP 37701-100, Poços de Caldas, MG, Brazil*

⁴*Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.
Rua Xavier Sigaud 150, CEP 22290-180, Rio de Janeiro, RJ, Brazil*

⁵*Comando-Geral de Tecnologia Aeroespacial,
Instituto de Fomento e Coordenação Industrial. and
Praça Mal. Eduardo Gomes 50, CEP 12228-901, São José dos Campos, SP, Brazil.*

Abstract

We investigate the possibility of detecting the Podolsky generalized electrodynamics constant a . First we analyze an ion interferometry apparatus proposed by B. Neyenhuis, et al (Phys. Rev. Lett. 99, (2007) 200401) who looked for deviations from Coulomb's inverse-square law in the context of Proca model. Our results show that this experiment has not enough precision for measurements of a . In order to set up bounds for a we investigate the influence of Podolsky's electrostatic potential on the ground state of the Hydrogen atom. The value of the ground state energy of the Hydrogen atom requires Podolsky's constant to be smaller than 5.6 fm, or in energy scales larger than 35.51 MeV.

PACS numbers: 03.50.De

Keywords: Podolsky Electrodynamics; Ion Interferometry; Hydrogen Atom

*Corresponding author: C. A. M. de Melo; email: cassius.anderson@gmail.com ; tel +55 11 31779090; fax +55 11 31779080; address: Rua Pamplona 145, CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brazil.

†rcuzin@phys.ualberta.ca

‡cassius.anderson@gmail.com

§leogmedeiros@gmail.com

¶pompeia@ift.unesp.br. On leave from: Instituto de Física Teórica, UNESP, São Paulo, Brazil.

I. INTRODUCTION

The inference of the mass of the particles is a key problem in Physics. The Higgs mechanism is the most simple and popular way to generate massive particles from an originally gauge invariant massless theory. From the theoretical point of view the existence of a massive photon, usually considered in the context of Proca model, has many implications. One of the most important is the fact that interactions between particles are commonly described in terms of gauge theories and, as it is well known, the gauge field is supposed to be massless [1]. Since the electromagnetic interactions are described in terms of the $U(1)$ symmetry group, all Quantum Electrodynamics, which is constructed on a gauge framework, should be reviewed if a mass for the photon was verified. The same occurs for instance in Atomic Physics, where the energy spectrum is supposed to be different if a non-Coulomb potential is considered.

Although it is widely accepted by physicists (especially by the theoreticians) that the photon is a massless particle, this is not an affirmation that can be easily done from the experimental point of view since all experiments are subject to uncertainties – the experimentalists basically establish upper limits for the photon mass.

Many experiments have been proposed to measure the mass of the photon [2] and among them, several try to accomplish this by using the fact that the electric field produced by a point charge is not the one predicted by Coulomb law if the photon is supposed to be massive. They try to verify the existence of a photon mass by looking for small deviations from the Coulomb law [3] – usually a potential $1/r^{1+\delta}$ is tested, and δ is evaluated. However, as mentioned in [5], the problem with this type of potential is that it does not come from any underlying theory and usually many assumptions regarding the measurement of δ are done, so that its evaluation is strongly dependent on these hypothesis. In order to avoid these problems the authors of [5] proposed an experiment where an ion interferometry is used to measure the photon mass. The idea of the experiment consists, roughly speaking, in using interferometry of an ion beam that passes through a tube where different voltages are applied – if the mass of the photon is non-null then a difference in the interferometer phase is expected. According to the authors of [5], the experiment will be very accurate, predicting a sensitivity to the (Proca) mass of 9×10^{-50} g, “2 orders of magnitude smaller than the limit in [4]”. In their case the underlying theory is the Proca model.

However, if instead of using the Proca model, the Podolsky Generalized Electrodynamics [6] is taken into account, it is still possible to find a mass for the (massive mode of the) photon and preserve gauge symmetry. In a recent paper [7], a gauge theory for systems depending on the second

order derivative of the gauge field was developed and it was verified that the gauge Lagrangian should depend on the usual field strength, $F_{\mu\nu}^a$, and on its covariant derivative, $G_{\rho\mu\nu}^a = D_{\rho b}^a F_{\mu\nu}^b$. In particular, for the $U(1)$ group it was verified that the Podolsky Lagrangian¹,

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial_\rho F^{\rho\mu}\partial_\sigma F^\sigma{}_\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

fulfills all the requirements of a second order gauge theory with an important feature: all Lagrangians of the type G^2 for the $U(1)$ group differs from Podolsky Lagrangian only by a total divergence. The (fourth-order) field equations obtained from this Lagrangian are

$$(1 + a^2\Box)\partial_\mu F^{\nu\mu} = 0,$$

and under a generalized Lorenz condition [8], $(1 + a^2\Box)\partial_\mu A^\mu(x) = 0$, massive and massless modes for A_μ are identified:

$$p^2(1 - a^2p^2)A_\mu(p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p^2 = 0 \\ p^2 - \frac{1}{a^2} = 0 \end{cases}.$$

The massless mode should be understood as the usual photon, while the massive mode was tentatively interpreted by Podolsky as being a neutrino. This interpretation is of course outdated. Since its original formulation, several aspects of this theory have been analyzed, including its canonical structure [8, 9], quantization [10], and others [11]. Several problems of this theory have been pointed out, such as unitarity violation and the presence of ghost states with negative norm, typical of theories with higher derivatives [12], but on the other hand good properties were also obtained (see references in [10]), what motivates the study of systems of this kind nowadays, specially in the context of an effective field theory (EFT). It is as an EFT that Podolsky theory should be understood and in this sense the parameter a sets the length scale where the theory is valid. We also emphasize that only classical aspects of the Podolsky theory will be considered, so that some problems typical of the quantization procedure should not be a concern here.

Since Podolsky electrodynamics predicts the existence of a massive mode for the photon, if the experiment proposed in [5] finds a deviation in the interferometer phase, then this could be either an indicative of the existence of the photon mass in the context of the Proca model or of the existence of a non-null value for Podolsky constant, giving support to the Podolsky theory. One of the purposes of the present work is to analyze how the Podolsky constant can be determined

¹ To preserve the correct units of the Lagrangian, the constant a , henceforth referred as the Podolsky constant, has unit $\frac{1}{l}$, where l stands for length; the metric signature $(+ - - -)$ is considered.

or constrained by the ion interferometry experiment proposed in [5]. This is discussed in Section II, where the analytical solution for the problem will be analyzed and numerical estimations for Podolsky constant will be made.

On the other hand, if Podolsky theory is to be verified, then many implications in other known results are expected. As an example, the energy spectrum of the Hydrogen atom as described by Quantum Mechanics is to be altered, since the Coulomb potential should be substituted by the potential predicted by Podolsky Electrodynamics. This is the second point to be studied here. A perturbative solution for the Quantum Mechanics wave function of the electron will be obtained – see Section III – and another constraint on a will be made. Section IV presents our conclusions.

II. ION INTERFEROMETRY EXPERIMENT

In the experiment proposed in [5] a time-varying voltage is applied to a conducting cylinder that is nested inside a grounded second cylinder. A beam of ions pass through the inner conductor through three gratings, forming a Mach-Zehnder interferometer – for more details see the original paper. If there is an electric field inside the cylinder, i.e. if the ions go through different potentials, then an interferometer phase shift is expected. Notice that this is not what is predicted by Maxwell equations for a conducting shell, according to which the potential inside the apparatus should be constant.

After passing through the first grating the ion beam is split in two arms: one travels horizontally (parallel to the cylinder axis), while the second goes diagonally. When the two arms reach the second grating, the one that was advancing horizontally begins to travel diagonally while the second starts to go horizontally, until they reach the third grating, where they become one single beam travelling horizontally. Since the distance between the gratings is the same, the diagonal segments of each arm travel through the same potentials and they induce the same phase shift. However, the segments of the arms that go horizontally pass through different potentials; if there is a phase shift in the interferometer it is caused by the difference of potentials between the horizontal segments (see Fig. 1). We consider that the distances of the horizontal segments from the center of the cylinder are r_0 and $r_0 + s$. This way, what the interferometer actually does is to measure a phase shift induced by the potential difference between these horizontal segments of arms the split beam.

The first information required is the equation for the potential inside the cylinder as predicted by the theory. In [5] the authors considered the Proca model. Here we will analyze Podolsky

Electrodynamics [6], where the equation for the electrostatic potential is given by

$$(1 - a^2 \nabla^2) \nabla^2 \phi = 0.$$

To solve this equation, let us define

$$U \equiv \nabla^2 \phi.$$

First we solve the homogeneous equation for U

$$(1 - a^2 \nabla^2) U = 0, \tag{1}$$

and then consider the non-homogeneous equation for ϕ ,

$$\nabla^2 \phi = U_h, \tag{2}$$

where U_h is a solution of (1). In view of the symmetry of the problem, cylindrical coordinates are considered and no angular dependence is expected. Also, since the inner cylinder has an elongated geometry, the infinite tube approximation can be done and no longitudinal dependence exists. The solution for (1) is found under these assumptions, and Eq. (2) becomes

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = AI_0 \left(\frac{r}{a} \right) + BK_0 \left(\frac{r}{a} \right), \tag{3}$$

where I_0 and K_0 are the modified Bessel functions of the first and second kind.

The integration of Eq. (3) gives us

$$\phi \left(\frac{r}{a} \right) = a^2 AI_0 \left(\frac{r}{a} \right) + a^2 BK_0 \left(\frac{r}{a} \right) + D \ln \frac{r}{a} + C. \tag{4}$$

This solution carries a desirable feature: the homogeneous part is the usual Maxwell term and the particular solution is the Podolsky contribution. In fact, this split always occurs in the electrostatic case of Podolsky theory when vacuum is assumed.

Four integration constants appear in the solution (4), as expected from a fourth-order equation, and boundary conditions are used to fix them. First we consider that the potential in the limit $r \rightarrow 0$ should be finite. Using the asymptotic form for I_0 and K_0 [13, 14], we conclude that $D = a^2 B$. Another boundary condition that is used is the value of the potential at $r = R$, where R is the radius of the inner tube. If V_0 is the voltage applied to the inner tube relative to the outer tube, whose unknown (ground) potential is V_g , then

$$V_0 + V_g = a^2 A \left[I_0 \left(\frac{R}{a} \right) + g(a) \left[K_0 \left(\frac{R}{a} \right) + \ln \frac{R}{a} \right] + f(a) \right],$$

where B and C were redefined as $B = g(a)A$ and $C = f(a)a^2A$, and A is supposed to be non-null. This expression is used to determine A in terms of the other constants. Yet another expected boundary condition is that the electric field \mathbf{E} at $r = 0$ is null (otherwise it would be discontinuous without a physical reason). Actually with the redefinitions of B and C above, it is verified that this condition is already satisfied, so that no other constant is fixed with this condition. However, if we claim that the divergent of the electric field is finite at $r = 0$,² then we must set $g(a) = 0$. At last, in order to fix $f(a)$ we assume that the potential at $r = 0$ can be measured – this is an additional step in the experimental procedure proposed in [5] where no measurement of the potential at $r = 0$ is suggested; in our case this is essential for determining the last integration constant. We suppose that the measured $\phi(0)$ is expressed as $\phi(0) = (V_0 + V_g)\epsilon$, with $0 \leq \epsilon \leq 1$. This fixes $f(a)$ as

$$f(a) = \frac{\epsilon I_0 \left(\frac{R}{a}\right)}{(1 - \epsilon)}.$$

Finally the potential is written as

$$\phi\left(\frac{r}{a}\right) = (V_0 + V_g) \left[\frac{I_0\left(\frac{r}{a}\right)}{I_0\left(\frac{R}{a}\right)} (1 - \epsilon) + \epsilon \right].$$

Notice that if no Podolsky term is supposed to exist, then the potential inside the inner tube will be the same everywhere, i.e. $V_0 + V_g$, which means that $\epsilon = 1$.

Now the potential difference between the horizontal segments of the arms of the split beam can be evaluated as

$$\Delta\phi = \phi\left(\frac{r_0 + s}{a}\right) - \phi\left(\frac{r_0}{a}\right) = (V_0 + V_g) \left[\frac{I_0\left(\frac{r_0 + s}{a}\right) - I_0\left(\frac{r_0}{a}\right)}{I_0\left(\frac{R}{a}\right)} \right] (1 - \epsilon).$$

The interferometer phase is given by

$$\Phi = \frac{e\tau}{\hbar} \Delta\phi + \Phi_0 = \frac{e\tau}{\hbar} (V_0 + V_g) \left[\frac{I_0\left(\frac{r_0 + s}{a}\right) - I_0\left(\frac{r_0}{a}\right)}{I_0\left(\frac{R}{a}\right)} \right] (1 - \epsilon) + \Phi_0,$$

where e is the charge of the ion (in the present case e is the electron charge), τ is the time that the ion takes to travel lengths of the horizontal segments and Φ_0 is the phase indicated by the interferometer when $V_0 + V_g = 0$. In order to eliminate the two unknown constants Φ_0 and V_g , two potential differences V_0 and $V_0 + \Delta V$ can be applied to the inner tube. The difference in the phases due to this change will be

$$\Delta\Phi = \frac{e\tau}{\hbar} \Delta V \left[\frac{I_0\left(\frac{r_0 + s}{a}\right) - I_0\left(\frac{r_0}{a}\right)}{I_0\left(\frac{R}{a}\right)} \right] (1 - \epsilon).$$

² What makes the electric field flux finite at the origin.

This expression is inverted in order to obtain the Podolsky constant a as a function of the experimental parameters. This will be done under some assumptions. First we expect that the value of Podolsky constant is small, so that only small differences from Maxwell equations can be detected. If this is the case, then the asymptotic limit for I_0 can be used [13, 14], $I_0(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x$. This allows us to estimate the Podolsky constant as

$$a = \frac{R - (r_0 + s)}{\ln(1 - \epsilon) - \ln\left(\frac{\hbar \Delta\Phi}{e\tau \Delta V} \sqrt{\frac{r_0 + s}{R}}\right)}. \quad (5)$$

Notice that $\lim_{\epsilon \rightarrow 1} a = 0$, which means that Electrodynamics reduces to the Maxwell one.

We shall obtain numerical estimations for a considering ion beams composed by ${}^1H^+$ and ${}^{133}Cs^+$. According to [5], these ions can travel at a speed v of 311 m/s and 27 m/s respectively; the length of the horizontal segments are fixed in 1 m so that $\tau = L/v$ is determined for both cases. The potential difference ΔV can be fixed as 400 kV and the values of R , r_0 and s are set to $R = 27 \text{ cm}$, $r_0({}^1H^+) = 24.4 \text{ cm}$, $r_0({}^{133}Cs^+) = 24.9 \text{ cm}$, and $s({}^1H^+) = 6.4 \text{ mm}$, $s({}^{133}Cs^+) = 0.56 \text{ mm}$. Fig. 2 shows the numerical estimations for a for different values of ϵ and $\Delta\Phi$ for ${}^1H^+$. The range of values for ϵ was established considering the fact that a precision of 10^{-8} could be achieved with the available commercial multimeters (in the best case). Concerning $\Delta\Phi$, it was considered that phase shifts as small as 10^{-4} rad can be detected [5].

According to these numerical evaluations, the experiment would be able to detect values of the Podolsky constant $a_{Cs^+} \geq 0.033 \text{ cm}$ in the case of ${}^{133}Cs^+$ ion beam and $a_{H^+} \geq 0.069 \text{ cm}$ if the ${}^1H^+$ ion beam is used. These values seem consistent with the asymptotic limit taken for I_0 ; indeed, they are small when compared to the values of R and r_0 and therefore the ratios that appear in I_0 – namely, $\frac{R}{a_{H^+}} = 391.3$, $\frac{R}{a_{Cs^+}} = 810.81$, $\frac{r_0}{a_{H^+}} = 353.62$, $\frac{r_0}{a_{Cs^+}} = 732.73$ – are all of order of $10^2 - 10^3$.

The mass of the photon is evaluated using these values for a and the expression

$$m_\gamma = \frac{\hbar}{ac}. \quad (6)$$

As the mass scales with the inverse of the Podolsky constant, the smallest value of a that can be measured will give the greatest measurable value for the photon mass. Each ion beam will predict a different upper limit: $m_\gamma^{133Cs^+} = 1.06 \times 10^{-39} \text{ kg} = 5.98 \times 10^{-8} \text{ eV}$ and $m_\gamma^{1H^+} = 5.10 \times 10^{-40} \text{ kg} = 2.85 \times 10^{-8} \text{ eV}$.

Although Proca and Podolsky approaches predict a massive mode for the photon, there is some important difference between them. First, Podolsky Electrodynamics is a gauge theory, while Proca model explicitly break such symmetry, what could have implications for the charge conservation.

Second, in the Proca context it is expected that the photon mass, if it exist, should be very small. Conversely, the Podolsky's massive model would be very large once it is the inverse of the scale of length where the generalized theory is effective, cf. Eq. (6). That is, Proca (Podolsky) model predicts deviations from Maxwell electrodynamics in very low (high) energy regimes.

It is important to emphasize that the photon mass is independent of the nature of the ion composing the beam in the experiment. The different values for m_γ for $^{133}\text{Cs}^+$ and $^1\text{H}^+$ express only the different values of a accessed by the experiment.

One could argue that the values of a that can be measured by the ion interferometer are very high in absolute terms. In fact, one would say that if a were of order of 10^{-2} as indicated here, the deviations from the Maxwellian electromagnetism would have been detected long ago. In face of this, the conclusion would be that the experiment proposed in [5] is not appropriate for measuring the Podolsky constant and therefore the photon mass in this theory. This is indeed a strong argument, but we would like to give a quantitative justificative for ruling out the ion beam apparatus as an appropriate set to find the Podolsky mass.

In the next section we will make the hypothesis that Podolsky electrodynamics hold at the atomic scale³ and see the implications for the elementary physics of the Hydrogen atom; in particular, we will analyze the energy of the fundamental state.

III. HYDROGEN ATOM

Now we turn to the problem of considering the Hydrogen atom, as treated by Quantum Mechanics, where the electromagnetic potential is the one described by Podolsky Electrodynamics. The goal of this section is to analyze the effects of a non-null Podolsky constant and verify what are the implications of the values found for a . We consider $\hbar = 1$ to simplify the notation, but the units are restored when numerical evaluations are done.

The electrostatic potential is given by [6, 7]

$$\phi(r) = -\frac{e}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{a}}\right),$$

and the Hamiltonian operator reads $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + e\phi(r)$. The variational method will be employed so that a perturbative solution for the wave function of the ground state, $\psi(r)$ may be found. The tentative solution is

$$\psi(r) = Ne^{-\gamma r},$$

³ This is not mandatory once Podolsky's theory for the electromagnetism is an effective theory.

where N is a normalization constant set as $N^2 = \frac{\gamma^3}{\pi}$; γ is a parameter that will be determined by the variational method, according to which the energy, given by

$$E = \int dV \psi^*(r) \hat{H} \psi(r) = \frac{\gamma^2}{2m} - e^2 \gamma + e^2 \frac{4\gamma^3}{(2\gamma + \frac{1}{a})^2},$$

should be minimized:

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma} = \frac{8a^3}{m} \gamma^4 + \frac{12a^2}{m} \gamma^3 + \frac{6a}{m} \gamma^2 - 6ae^2 \gamma + \frac{\gamma}{m} - e^2 = 0. \quad (7)$$

Now suppose that the value of the Podolsky constant is actually small, then Eq. (7) can be solved considering only terms up to first order in a . The solution found for γ is $\gamma_+ = me^2$ and $\gamma_- = -\frac{1}{6a}$. The energies evaluated with these solutions are

$$E(\gamma_+) = -\frac{me^2}{2} e^2 \left(1 - 2(2mae^2)^2\right) + O(a^3), \quad E(\gamma_-) = \frac{9ame^2 + 1}{72a^2m}.$$

The value of $E(\gamma_-)$ gives a positive energy and for small values of a it becomes too high, therefore this result should be excluded. $E(\gamma_+)$ can only be calculated with a given value of a , but for small a it is only a perturbation on the known result given by Quantum Mechanics, $E = -\frac{me^2}{2} e^2$. If we want to find a value for a that is compatible with the known results given in the literature we should expect the perturbation $2(2mae^2)^2$ to be smaller than the relative experimental uncertainty of the energy of the ground state. Proceeding this way it follows

$$a \leq \frac{r_B}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{E_0}}{2|E_0|}},$$

where $r_B = \frac{1}{me^2}$ is the Bohr radius. Restoring the units and using values given in the literature [15] we should expect

$$a \leq 5.56 \text{ fm} \quad \text{or} \quad m_\gamma \geq 35.51 \text{ MeV} \quad (8)$$

Clearly these values for a and m_γ are not compatible with the possible values that can be found in the interferometry experiment.

IV. CONCLUSIONS

We have discussed how the ion interferometry experiment proposed in Ref. [5] could be used to measure the value of Podolsky constant a and the massive mode of the photon in the context of Podolsky Electrodynamics. The minimum value of a that could be detected – $a = 0.033 \text{ cm}$ with the $^{133}\text{Cs}^+$ ion beam – is too large as an admissible effective scale, and would lead to a mass

$m_\gamma \leq 1.06 \times 10^{-39} \text{ kg} = 5.98 \times 10^{-8} \text{ eV}$ for the photon which is excluded by current experimental data [15].

We might think of improving the accuracy of the measurements of the phase shift and/or of the potential at $r = 0$ (for instance, using some better technology in the apparatus). But the logarithmic behavior of (5) in terms of these quantities makes this possibility unlikely: great improvements in the detection of $\Delta\Phi$ and ΔV would lead to small changes in a [see Eq. (5)]. Therefore, this rules out the interferometric ion beam experiment as a suitable one for testing Podolsky Electrodynamics.

Besides gauge invariance, Podolsky Electrodynamics has another peculiar feature that distinguishes it from the Proca field: the smaller the characteristic constant a the greater the mass associated to the photon. Hence we are strongly constrained: the Maxwellian electromagnetism must hold until small scales of length, and therefore a has to be small, otherwise the additional Podolsky term in the Lagrangian for the electromagnetic field would be significant and the resulting modifications in the ordinary theory would be easily detected. These scales of length are set, for instance, by the spectroscopy of Hydrogen atom. So, we tested Podolsky's theory calculating the value of a that would be consistent with the experimental error in the energy of the fundamental level of the Hydrogen. The result, $a \leq 5.56 \text{ fm}$, clearly shows that the ion interferometer experiment does not have enough precision to measure a Podolsky constant that is this small.

The constraint $a \leq 5.56 \text{ fm}$ coming from Quantum Mechanics considerations set a high energy scale for the photon mass: 35.51 MeV. This way, if Podolsky model is correct, it is expected to engender deviations from Maxwell Electrodynamics only in high energy scales.

Acknowledgments

RRC and PJP thank the Physics Department of University of Alberta for providing the facilities. This work was supported by FAPERJ-Brazil grant E-26/100.126/2008, CNPq-Brazil and NSERC-Canada.

-
- [1] R. Utiyama, Phys. Rev. 101 (1956) 1597.
[2] J. J. Ryan, F. Accetta, R.H. Austin, Phys. Rev. D32 (1985) 802; M.A. Chernikov et al., Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 3383; E.R. Williams, J.E. Faller, H. A. Hill, Phys. Rev. Lett. 26 (1971) 721; D.D. Ryutov, Plasm. Phys. Contr. Fus. 49 (2007) B429; A. Accioly, R. Paszko, Phys. Rev. D69 (2004) 107501.

- [3] H. Cavendish, *The Electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish*, Cambridge University Press, Cambridge, 1879, pp. 104–113.
- [4] R.E. Crandall, *Am. J. Phys.* 51, (1983) 698.
- [5] B. Neyenhuis, D. Christensen, D. S. Durfee, *Phys. Rev. Lett.* 99, (2007) 200401.
- [6] B. Podolsky, *Phys. Rev.* 62 (1942) 68; B. Podolsky, C. Kikuchi, *Phys. Rev.* 65 (1944) 228; B. Podolsky, P. Schwed, *Rev. Mod. Phys.* 20 (1948) 40.
- [7] R.R. Cuzinatto, C.A.M. de Melo, P.J. Pompeia, *Ann. Phys.* 322 (2007) 1211.
- [8] C.A.P. Galvão, B.M. Pimentel, *Can. J. Phys.* 66 (1988) 460.
- [9] B.M. Pimentel, R.G. Teixeira, *Il Nuovo Cimento B* 113 (1998) 805; M.C. Bertin, B.M. Pimentel, P.J. Pompeia, *Ann. Phys.* 323 (2008) 527.
- [10] J. Barcelos-Neto, C.A.P. Galvão, C.P. Natividade, *Z. Phys. C* 52, (1991) 559, L.V. Belvedere, C.P. Natividade, C.A.P. Galvão, *Z. Phys. C* 56, (1992) 609.
- [11] D.J. Montgomery, *Phys. Rev.* 69 (1946) 117; A.E.S. Green, *Phys. Rev.* 72 (1947) 628; A.E.S. Green, *Phys. Rev.* 73 (1948) 26; J. Frenkel, *Phys. Rev. E* 54 (1996) 5859; J. Frenkel, *Int. J. Mod. Phys.* 13 (1999) 315; H. Torres-Silva, *Rev. Chil. Ing.* 16 (2008) 65.
- [12] A. Pais, G. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* 79 (1950) 145.
- [13] E. Butkov, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1968.
- [14] G.B. Arfken, H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, San Diego, 1995.
- [15] Particle Data Group, *Phys. Lett. B* 667 (2008) 1; site - <http://pdg.lbl.gov/>.

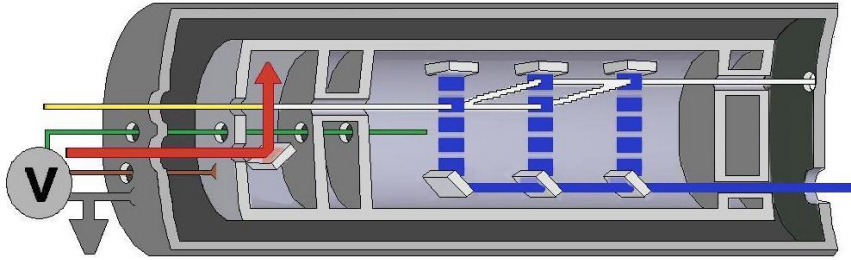


FIG. 1: Cartoon of the ion interferometry experiment. A cutaway of the cylinders is shown.

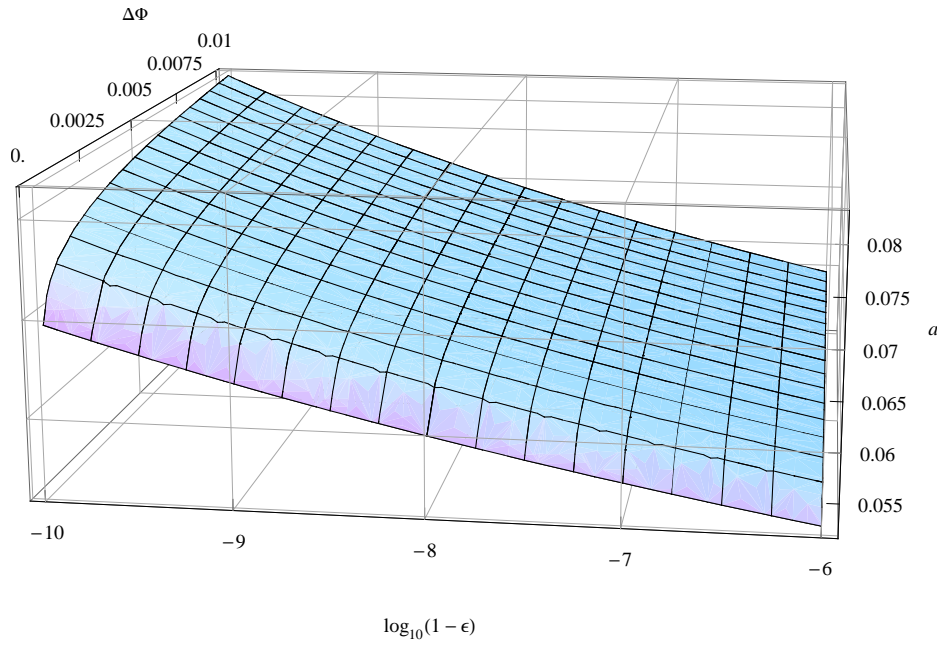


FIG. 2: Values of a (cm) for different values of ϵ (from 0.001 to 0.999) and $\Delta\Phi$ (rad) (from 10^{-4} to 10^{-2}) using ${}^1H^+$ ion beam. The graph for the ${}^{133}Cs^+$ ion beam is very similar.

Capítulo 3

Formalismo covariante de Galilei

Um dos primeiros trabalhos envolvendo o formalismo covariante galileano para Teorias de Campos foi apresentado em 1967 por Lévy-Leblond [1]. Na época, a relatividade einsteiniana já completava 60 anos e toda Teoria Quântica de Campos era construída de forma a preservar o Princípio da Relatividade (de Einstein). Nesse contexto, o estudo do comportamento não-relativístico de sistemas físicos era feito tomando-se o limite de baixas velocidades, ou o limite $c \rightarrow \infty$. A motivação de Lévy-Leblond neste trabalho era mostrar que, se sistemas relativísticos são aqueles que possuem invariância/covariância pelo grupo de Lorentz, os sistemas não-relativísticos devem ser aqueles que possuem invariância/covariância pelo grupo de Galilei. Em sua opinião, esta seria a forma correta de se aproveitar todo o arcabouço ferramental de Teoria de Grupos para descrever regimes não-relativísticos. Também esta seria uma forma consistente de se passar de uma descrição não-relativística para uma relativística de um mesmo sistema físico, em particular no contexto da Mecânica Quântica.

Tendo isso em mente, Lévy-Leblond construiu teorias de campo que possuíam invariância de Galilei e, para o campo de Schrödinger, mostrou que a invariância de Galilei manifesta-se na forma de uma transformação de fase. Mostrou ainda que é possível escrever uma equação de Dirac neste contexto, a partir de onde a interpretação de que o spin é um efeito puramente relativístico pode ser questionada.

Posteriormente, em 1973 em um trabalho com Le Bellac [2], Lévy-Leblond voltou-se para uma análise cuidadosa do caso eletromagnético. Motivados pelo fato de que, quando as equações de Maxwell são consideradas em diferentes sistemas de unidades, o limite $c \rightarrow \infty$ pode não ser trivial, e que uma análise não cuidadosa pode levar a resultados equivocados, os autores mostraram que existem duas formas de se construir teorias covariantes pelo grupo de Galilei, como será visto mais adiante. Estes limites foram chamados de *limite elétrico* e *limite magnético* e se caracterizam pela dominância dos efeitos elétrico e magnético, respectivamente. A existência destes dois limites mostra a não trivialidade de se tomar o limite não relativístico da teoria de Maxwell, uma vez que

o limite $c \rightarrow \infty$ é, aparentemente, um só.

Mais tarde, em 1988, Takahashi retomou o estudo de sistemas com invariância galileana, desta vez considerando uma formulação em 5 dimensões, resgatando uma idéia proposta por Pinski [3], 20 anos antes. Em dois artigos [4] (e em outro com outros autores [5]), Takahashi reconsiderou o campo de Schrödinger e aplicações em hidrodinâmica. Estes trabalhos inspiraram o estudo sistemático de diversas Lagrangianas explorando o formalismo covariante de Galilei em 5 dimensões [7], trabalho este realizado recentemente, e cuja estrutura será a mesma utilizada aqui.

Um dos grandes benefícios de se trabalhar em um formalismo covariante, com uma métrica invariante, é que várias similaridades com o caso lorentziano podem ser feitos. No entanto, não existe uma métrica quadridimensional invariante sobre transformações de Galilei. Isso pode ser visto quando se analisa transformações de galilei, por exemplo, em um sistema de coordenadas cartesianas, em que

$$\begin{aligned}x'^i &= x^i - v^i x^4, \\x'^4 &= x^4.\end{aligned}$$

Supondo-se que a métrica no sistema original seja dada por $g_{\mu\nu}$, no sistema de coordenadas transformadas tem-se

$$g'_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} g_{\mu\nu} \Rightarrow \begin{cases} g'_{mn} &= g_{mn}, \\ g'_{m4} &= g_{m4} + v^i g_{mi}, \\ g'_{44} &= g_{44} + g_{ij} v^i v^j + 2v^i g_{i4}, \end{cases}$$

e, portanto, verifica-se que a métrica não é invariante para $g_{mn} \neq 0$, $g_{4i} \neq 0$.

Uma das soluções encontradas para esse problema consiste na adição de coordenadas extras ao espaço-tempo quadridimensional, de forma que o espaço newtoniano (3,1) esteja, de alguma forma, imerso neste espaço estendido. Uma das motivações para o uso de coordenadas extras [5] consiste na análise da Lagrangiana de uma partícula livre sob transformações de Galilei usuais, i.e. transformações do tipo

$$\begin{cases} x'^i &= R^i_j x^j - v^i t + a^i, \\ t' &= t + b, \end{cases} \quad (3.1)$$

com R^i_j , v^i , a^i e b constantes. Neste caso, a Lagrangiana da partícula livre, $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $\dot{x}^2 = \dot{x}_i \dot{x}^i$ se transforma como

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 = L + \frac{d}{dt}f, \quad f = -mR_{im}v^i x^m + \frac{1}{2}mv_i v^i t + C,$$

em que C é uma constante, que pode ser tomada nula, sem perda de generalidade. Observa-se assim que esta Lagrangiana não é invariante pela transformação de Galilei dada por Eq.(3.1). Para torná-la invariante, pode-se definir um grau de liberdade extra, s , tal que uma nova Lagrangiana

$\bar{L} = L - m\dot{s}$ satisfaz a condição de invariância, $\bar{L}' = \bar{L}$. Para isso s deve ter a seguinte lei de transformação:

$$s' = s - R_{im}v^i x^m + \frac{1}{2}v_i v^i t. \quad (3.2)$$

Note-se que, de acordo com a expressão para \bar{L} , o momento canonicamente conjugado a s seria a massa da partícula, m . Por outro lado, motiva-se também o estudo de uma formulação em 5 dimensões quando se analisa a lei de transformação induzida por Eq.(3.1) nas contrapartes no espaço dos momentos, ainda para o caso da partícula livre, em que

$$\begin{cases} p'_i &= R_i^j p_j - v_i m, \\ m' &= m, \\ E' &= E - R_i^m v^i p_m + \frac{1}{2}v_i v^i m. \end{cases} \quad (3.3)$$

Aqui vê-se que a lei de transformação para o momento e a massa possui uma estrutura análoga àquela de Eq.(3.1), enquanto E possui uma lei de transformação similar à dada por Eq.(3.2). Ou seja, a introdução de um grau de liberdade extra ao espaço das coordenadas já possui um análogo no espaço dos momentos quando se considera apenas quantidades já conhecidas em 4 dimensões.

A proposta mais simples para a extensão do espaço-tempo consiste, portanto, em adicionar uma coordenada extra, de forma que o mesmo passe a ser descrito em 5 dimensões. Nesta estrutura espaço-temporal é possível encontrar um tensor métrico, que é único [5], dado por

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

o qual é invariante pela seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{cases} x'^i &= R_j^i x^j - v^i x^4, \\ x'^4 &= x^4, \\ x'^5 &= x^5 - R_i^m v_m x^i + \frac{1}{2}v^2 x^4. \end{cases} \quad (3.5)$$

Também é possível se definir a estrutura de tensores galileanos, em que, por exemplo, vetores A^μ transformam-se como

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \Rightarrow \begin{cases} A'^i &= R_j^i A^j - v^i A^4, \\ A'^4 &= A^4, \\ A'^5 &= A^5 - R_i^m v_m A^i + \frac{1}{2}v^2 A^4. \end{cases}$$

O produto escalar entre dois vetores A e B é realizado com a métrica dada por Eq. (3.4), chamada aqui de *métrica de Galilei*, resultando $(A|B) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - A_4 B_5 - A_5 B_4$, onde o negrito faz referência aos trivetores A^i e B^i .

O espaço agora é chamado de $\mathcal{G}_{4,1}$ e trata-se de uma variedade de Minkowski. Isso torna-se mais claro quando se considera a transformação do tipo cone de luz [6, 7],

$$\begin{cases} x'^i &= x^i, \\ x'^4 &= \frac{x^4 + x^5}{\sqrt{2}}, \\ x'^5 &= \frac{x^4 - x^5}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad (3.6)$$

em que a métrica toma a forma

$$(\eta'_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Note-se que a expressão acima é uma extensão 5-dimensional da métrica de Minkowski utilizada em teorias com invariância de Lorentz, com a quinta coordenada sendo do tipo espaço.

Essa relação entre as métricas dadas por Eq.(3.4) e Eq.(3.7) motiva a unificação dos tratamentos relativísticos (com simetria de Lorentz) e não-relativísticos (com simetria de Galilei) em um mesmo cenário. Isso é feito da seguinte forma (para maiores detalhes, veja Ref. [7]): conhecendo-se uma Lagrangiana em 5 dimensões com simetria de Galilei, aplica-se a transformação do tipo cone de luz dada por Eq. (3.6) e toma-se $x'^5 = 0$. Essencialmente, o que se faz é tomar o espaço-tempo quadridimensional como uma imersão no espaço 5-dimensional:

$$(x^i, t) \hookrightarrow (x^i, x^4, x^5) = \left(x^i, \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$

O argumento pode ser revertido: partindo-se de uma Lagrangiana conhecida em 4 dimensões com invariância de Lorentz, estende-se a mesma para 5 dimensões (5D) preservando-se a sua forma; a métrica quadridimensional, no entanto, deve ser substituída pela métrica 5-dimensional de Galilei e os 4-tensores/campos lorentzianos por 5-tensores/campos galileanos. Esse procedimento pode ser usado para se conhecer aspectos não-relativísticos de uma teoria, partindo-se da sua forma relativística. Neste ponto é importante perceber que a transformação do tipo cone de luz dada por Eq.(3.6) tranforma equações de segunda ordem nas derivadas temporal e da quinta coordenada em equações de primeira ordem nestas variáveis, i.e. $\partial_4 \partial_4, \partial_5 \partial_5 \rightarrow \partial_4 \partial_5$. É isso que permite que a prescrição acima de partir da forma relativística para a não relativística possa apresentar resultados coerentes, como se verificará adiante em alguns exemplos. Também é importante ressaltar que a transformação do tipo cone de luz, apesar de linear, não é uma transformação do tipo de Lorentz [8], tampouco de Galilei.

No caso galileano, a imersão do espaço-tempo quadridimensional é feita como mostrado abaixo:

$$(x^i, t) \hookrightarrow (x^i, x^4, x^5) = (x^i, t, s).$$

A quinta coordenada, acima chamada de s , é interpretada como um quantidade canonicamente conjugada à massa, como já antecipado, de forma que o 5-momento (no contexto de uma transformada de Fourier) é identificado como sendo:

$$p_\mu = -i\partial_\mu = (-i\nabla, -i\partial_t, -i\partial_s) = (\mathbf{p}, -E, -m),$$

sendo \mathbf{p} o trivetor momento linear, E a energia e m a massa¹. A partir da invariância da norma do 5-momento, $\eta^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = k^2$, é possível obter a relação de dispersão não relativística, $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + m$, para uma escolha conveniente² de k^2 . Outros invariantes da teoria são p_5 e $W_{5\mu}W_5^\mu$, em que $W_{\mu\nu}$ é o tensor de Pauli-Lubanski [13].

Neste formalismo, normalmente um *ansatz* para a dependência do campo com a quinta coordenada é utilizado. Para ilustrar o procedimento acima, considere-se, por exemplo, o caso de um campo escalar complexo. A Lagrangiana em 4 dimensões, com simetria de Lorentz, e as equações de campo são dadas por

$$\begin{aligned} L &= \eta_L^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + V(|\phi|), \quad \mu, \nu = 1, \dots, 4, \\ \square \phi + \frac{\delta V}{\delta \phi^*} &= \nabla^2 \phi - \partial_t^2 \phi + \frac{\delta V}{\delta \phi^*} = 0, \quad \square \phi^* + \frac{\delta V}{\delta \phi} = 0, \end{aligned}$$

em que $\eta_L^{\mu\nu}$ refere-se à métrica de Minkowski usual em 4D. Para se estudar o caso galileano, toma-se a Lagrangiana

$$L = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + V(|\phi|), \quad \mu, \nu = 1, \dots, 5,$$

em que $\eta^{\mu\nu}$ agora se refere à métrica de Galilei e considera-se o seguinte *ansatz* para a dependência com a quinta coordenada, $\phi = e^{-ims} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, em que m corresponde à massa do campo. As equações de campo obtidas são:

$$\square \phi + \frac{\delta V}{\delta \phi^*} = \nabla^2 \phi + 2im\partial_t \phi + \frac{\delta V}{\delta \phi^*} = 0, \quad \square \phi^* + \frac{\delta V}{\delta \phi} = 0,$$

que são equações do tipo Schrödinger. É importante observar que a escolha deste *ansatz* é feita de forma que o campo ϕ seja um escalar, uma vez que a função de onda ψ possui uma fase em sua lei de transformação [1], não configurando, portanto, um escalar verdadeiro sob as transformações

¹Note-se que as quantidades na expressão Eq.(3.3) correspondem a um 5-vetor contravariante, $p^\mu = \eta^{\mu\nu} p_\nu = (\mathbf{p}, m, E)$

²Outras escolhas de k^2 levam a outras relações de dispersão. Por exemplo, em Ref.[5] é feita a opção por $k^2 = 0$, que conduz a $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$.

de Galilei, o qual deveria ser invariante³. Neste exemplo, é possível perceber que é a escolha deste *ansatz* que torna possível a obtenção de uma equação do tipo Schrödinger - sem ele, a equação original permaneceria com uma derivada com respeito à quinta coordenada ainda a ser resolvida.

Outros *ansätze* são usados em outros casos. Por exemplo, para o campo eletromagnético [7], que é um campo não-massivo, o *ansatz* utilizado é $A_\mu = A_\mu(x^i, t)$, ou seja, assume-se que o potencial de gauge independe da quinta coordenada, como será visto mais adiante.

Diversas aplicações do formalismo covariante de Galilei em 5 dimensões podem ser encontradas na literatura [9, 10, 11, 12, 13], como por exemplo o estudo da quantização de campos, da estrutura algébrica da teoria e aplicações a sistemas hidrodinâmicos. Outros trabalhos, explorando também a formulação 5-dimensional, foram elaborados *e.g.* por Künzle e Duval [14], estes, porém, relacionados mais ao estudo de espaços curvos e seus aspectos formais. Ainda é possível encontrar formulações galileanas de teorias de campo em dimensões maiores do que 5, como por exemplo Ref.[15], em que o teorema CPT foi analisado.

O estudo de sistemas de segunda ordem no formalismo galileano, pelo menos no que é de conhecimento do autor, ainda não foi apresentado na literatura. Assim, é interessante considerar um caso particular e, neste contexto, a Eletrodinâmica de Podolsky mostra-se como o exemplo mais apropriado para este fim. De fato, poucas são as aplicações não relativísticas desta teoria encontradas na literatura, porém resultados importantes são obtidos, como por exemplo o problema do fator 4/3 da equação de Abraham-Lorentz no modelo eletromagnético para a estrutura do elétron [16]. Este resultado justifica o interesse pelo estudo de regimes não relativísticos da Eletrodinâmica de Podolsky e a intenção no que se segue é se estudar esta teoria neste formalismo galileano 5-dimensional e, de forma análoga ao que é feito no caso da teoria de Maxwell, estudar os limites elétrico e magnético da teoria. Alguns dos resultados importantes obtidos aqui dizem respeito à escolha de gauge - se na teoria de Maxwell a escolha do gauge de Lorenz mostra-se bastante conveniente em diversos casos (a condição $\partial_\mu A^\mu = 0$ é um escalar sobre transformações de Lorenz), aqui verifica-se que o gauge generalizado de Lorenz [17] mostra-se como a opção mais natural.

3.1 Os limites não relativísticos da teoria de Maxwell

3.1.1 A abordagem de Lévy-Leblond

No trabalho de 1973 [2], Le Bellac e Lévy-Leblond fizeram uma análise cuidadosa da invariância galileana do caso eletromagnético, usando uma abordagem em 4 dimensões. Uma das motivações dos autores consiste na análise do limite não relativístico das transformações de Lorenz dos campos

³Segundo Ref.[5], ψ é uma representação projetiva e não uma representação irredutível do grupo de Galilei. Nesta formulação em 5D é possível trabalhar com um verdadeiro escalar.

elétrico e magnético. A lei de transformação sob o grupo de Lorentz para estes campos é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + (1 - \gamma)\mathbf{v}\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{v^2}, \\ \mathbf{B}' &= \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}\right) + (1 - \gamma)\mathbf{v}\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{v^2},\end{aligned}$$

com \mathbf{v} sendo a velocidade relativa entre os referenciais. A abordagem usual na época (indicadas pela referência (2) em Ref. [2]) sugeriam que o limite não relativístico fosse tomado como sendo uma aproximação em baixas velocidades, o que levaria a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}.\end{aligned}$$

Esta expressão apresenta um problema quando analisada do ponto de vista de teoria de grupos, pois ela não satisfaz a lei de composição de grupos, como visto a seguir:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'' &= \mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' = \mathbf{E} + (\mathbf{v} + \mathbf{v}') \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}' \times \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \\ \mathbf{B}'' &= \mathbf{B}' - \frac{\mathbf{v}'}{c^2} \times \mathbf{E}' = \mathbf{B} - \frac{(\mathbf{v} + \mathbf{v}')}{c^2} \times \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}' \times \mathbf{v} \times \mathbf{B},\end{aligned}$$

ou seja, duas transformações sucessivas não conduz a uma transformação do mesmo tipo. Poderia-se argumentar que o último termo de cada expressão é quadrático na magnitude das velocidades e por esta razão poderia ser desprezado, o que levaria a uma lei de composição correta. Todavia, isto pode levar ser um equívoco. Considere-se, por exemplo, a lei de transformação do campo elétrico como dada acima. O termo $\frac{1}{c^2}\mathbf{v}' \times \mathbf{v} \times \mathbf{E}$, apesar de “quadrático” em \mathbf{v} não é necessariamente menor do que o termo $(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \times \mathbf{B}$, pois pode ocorrer que $|\mathbf{E}| \gg |c\mathbf{B}|$, de forma que $|\frac{1}{c^2}\mathbf{v}' \times \mathbf{v} \times \mathbf{E}| > |(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \times \mathbf{B}|$. Este é um dos pontos levantados por Le Bellac e Lévy-Leblond, de que os limites não relativísticos não devem apenas levar em conta apenas a magnitude das velocidades entre referenciais, mas também a magnitude dos campos envolvidos.

Le Bellac e Lévy-Leblond mostraram que existem dois limites não relativísticos para as equações de Maxwell que preservam a invariância de Galilei da teoria. Para tanto, eles verificaram inicialmente que a lei de transformação para um quadri vetor de Lorentz (u_0, \mathbf{u}) admite dois limites galileanos/não relativísticos consistentes, os quais são dados por

$$\begin{cases} u'_0 &= u_0, \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} - \frac{1}{c}\mathbf{v}u_0, \end{cases} \quad (3.8)$$

e

$$\begin{cases} u'_0 &= u_0 - \frac{1}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u}, \end{cases} \quad (3.9)$$

sendo \mathbf{v} a velocidade de transformação entre os sistemas de coordenadas. O primeiro par de leis de transformação vale para os casos em que $|\mathbf{v}/c| \ll 1$ e $|\mathbf{u}| \ll |u_0|$, enquanto o segundo é adequado para as situações em que $|\mathbf{v}/c| \ll 1$ e $|\mathbf{u}| \gg |u_0|$.

O limite elétrico

Aplicando-se as leis de transformação de Eq.(3.8) para o quadrivetor corrente $(c\rho, \mathbf{J})$, no caso em que $|c\rho| \gg |\mathbf{J}|$, espera-se que o campo elétrico seja muito mais intenso do que o campo magnético, ou seja, $|\mathbf{E}| \gg |c\mathbf{B}|$, o que conduz ao que os autores chamaram de *limite elétrico*, em que as equações de campo invariantes por Eq.(3.8) são dadas por

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_4 \mathbf{E}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Aqui as equações são consideradas em um sistema de unidades dos SI (ressalte-se que $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$). As leis de transformação dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \end{aligned}$$

que são compatíveis com a derivação dos mesmos a partir de potenciais,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \end{aligned}$$

contanto que ϕ e \mathbf{A} - o quadrivetor potencial é $(\phi, c\mathbf{A})$ - transformem-se como Eq.(3.8), *i.e.*

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi, \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \phi. \end{aligned}$$

Além das equações de campo, a teoria deve ter uma equação de força para partículas-teste, a qual é tomada como sendo a força de Lorentz (na forma relativística, $\mathbf{F} = \int d^3r [\rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]$); para se ter uma força invariante por Eq.(3.8), a força magnética deve ser desprezada, de forma que

$$\mathbf{F} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Este resultado, além de invariante, é consistente com as condições $|c\rho| \gg |\mathbf{J}|$ e $|\mathbf{E}| \gg |c\mathbf{B}|$.

Algumas observações podem ser feitas aqui: primeiramente nota-se que, ao comparar Eq.(3.10) com as equações de Maxwell, o termo de indução de Faraday é ausente na última destas equações; isso juntamente com a ausência da força magnética faz com que não haja corrente induzida na presença de campos magnéticos variáveis - transformadores, por exemplo, não podem ser bem descritos neste limite. É possível verificar que neste limite o quadrivetor corrente é localmente conservado,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

assim a corrente \mathbf{J} pode ser interpretada como uma corrente associada ao transporte de cargas.

O limite magnético

Tomando-se a outra lei de transformação para a quadricorrente, Eq. (3.9), que deve ser válida quando $|c\rho| \ll |\mathbf{J}|$, o campo magnético deve ser bem mais intenso do que o campo elétrico, $|\mathbf{E}| \ll |c\mathbf{B}|$, e Le Bellac e Lévy-Leblond obtiveram com isso o *limite magnético*. As equações de campo invariantes por Eq. (3.9) são

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_4 \mathbf{B}, \end{cases} \quad (3.11)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Em termos de potenciais, os campos elétrico e magnético são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \end{aligned}$$

com ϕ e \mathbf{A} transformando-se como

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A}. \end{aligned}$$

A força de Lorentz agora reduz-se a

$$\mathbf{F} = \int d^3r \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}),$$

para garantir a invariância sob Eq.(3.9), mantendo também a consistência com o fato de que $|\mathbf{E}| \ll |c\mathbf{B}|$ e $|c\rho| \ll |\mathbf{J}|$.

Neste caso, percebe-se a ausência da corrente de deslocamento na segunda das equações de Eq.(3.11); a corrente, em vista disso, deve ser estacionária, uma vez que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

e \mathbf{J} não pode ser associada ao transporte de cargas. Em função disso, sistemas como capacitores não podem ser descritos neste limite, uma vez que não há relação entre a corrente de um fio e a variação da carga elétrica armazenada no capacitor.

Um outro resultado bastante interessante obtido em Ref. [2] consiste na análise da covariância galileana das equações de Maxwell usando a forma em que elas são apresentadas em termos dos vetores \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} ,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \partial_4 \mathbf{D}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_4 \mathbf{B}. \end{cases}$$

Eles mostraram que, escritas com estes campos, as equações são invariantes por Galilei, contanto que estes campos, assim como ρ e \mathbf{J} , tenham leis de transformação adequadas, quais sejam

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' &= \mathbf{D}, & \mathbf{B}' &= \mathbf{B}, \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, & \mathbf{H}' &= \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}, \\ \rho' &= \rho & \mathbf{J}' &= \mathbf{J} - \mathbf{v}\rho. \end{aligned}$$

A invariância é quebrada quando as equações constitutivas, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = \mu \mathbf{B}$, são consideradas, pois as leis de transformação entre os campos relacionados por estas equações são incompatíveis.

3.1.2 A abordagem 5-dimensional

Na abordagem 5-dimensional, a Lagrangiana, como é conhecida na sua forma 4-dimensional com invariância de Lorentz, é estendida para 5 dimensões com a simetria de Lorentz substituída pela simetria de Galilei. No caso da teoria de Maxwell,

$$L = -\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} + A_\mu J^\mu,$$

em que o campo A_μ e a corrente J_μ possuem cinco componentes, identificadas como $A_\mu = (\mathbf{A}, -\phi_m, -\phi_e)$, $J_\mu = (\mathbf{J}, -\rho_m, -\rho_e)$. É importante mencionar que nestas expressões, \mathbf{A} representa o potencial vetor, ϕ_m e ϕ_e são potenciais escalares, \mathbf{J} é a densidade de corrente, enquanto ρ_m e ρ_e são densidades de carga elétrica. O tensor $F_{\mu\nu}$ é dado por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, e satisfaz a identidade de Jacobi, $\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0$.

Estas identidades, juntos com as equações de campo,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu,$$

ou em termos das componentes,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} - \partial_4 \mathbf{E}_e &= \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_e &= \rho_e, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_m - \partial_4 \partial_4 \phi_e &= \rho_m, \end{aligned}$$

compõem o conjunto completo de equações da teoria.

Aqui escolhe-se um sistema de unidades em $\epsilon_0^{(5)} = \mu_0^{(5)} = c^{(5)} = 1$, pois a intenção é verificar os aspectos formais dos limites não relativísticos entre os resultados obtidos em 5 dimensões e aqueles encontrados na seção anterior. O índice (5) deve-se ao fato de que estas quantidades são definidas em 5 dimensões e, por esta razão, não necessariamente possuem a mesma magnitude que os seus correspondentes em 4 dimensões. Todavia, de alguma forma, seja tomando-se as imersões, seja através de alguma redução dimensional, estas quantidades definidas em dimensões superiores devem se reduzir aos valores de seus correspondentes em quatro dimensões.

Os limites elétrico e magnético obtidos por Le Bellac e Lévy-Leblond em Ref.[2] são reproduzidos neste formalismo em 5D quando se fixa convenientemente as densidades de carga e os potenciais escalares. Antes, porém, é preciso fixar o *ansatz* que descreve a dependência do campo A_μ com respeito à quinta coordenada. Neste caso, devido ao caráter não massivo do campo A_μ , o *ansatz* utilizado é $A_\mu = A_\mu(x^i, t)$, ou seja, o campo independe da quinta coordenada.

O limite magnético

O limite magnético é encontrado quando se toma $\phi_e = \rho_e = 0$ e as equações de campo encontradas são

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_m &= \rho_m, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}_m &= -\partial_4 \mathbf{B}, \end{cases} \quad (3.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E}_m &= -\nabla \phi_m - \partial_4 \mathbf{A}. \end{aligned}$$

As leis de transformação, considerando-se que rotações não são aplicadas ($R_j^i = \delta_j^i$), para os potenciais são dadas por

$$\begin{aligned} A'_i &= A_i|_{\phi_e=0}, \\ \phi'_m &= [\phi_m - v^i A_i]_{\phi_e=0}, \\ J'^i &= J^j|_{\rho_e=0}, \\ \rho'_m &= [\rho_m - v_i J^i]_{\rho_e=0}, \end{aligned}$$

o que implica:

$$\mathbf{E}'_m = [\mathbf{E}_m + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_{\phi_e=0}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}|_{\phi_e=0}.$$

Perceba-se que tanto as equações de campo, como as leis de transformação, coincidem na sua forma com os resultados de Lévy-Leblond. Como consequência, a análise sobre a lei de conservação

da corrente procede de maneira análoga. É importante observar que a lei de transformação para ϕ_e , $\phi'_e = \phi_e = 0$, dá consistência para as leis de transformação acima.

O limite elétrico

O limite elétrico é obtido fixando-se $\phi_m = \rho_m = 0$, de onde segue:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_e &= \rho_e, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{J} + \partial_4 \mathbf{E}_e, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}_e &= 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$0 = \partial_4 (\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_4 \phi_e), \quad (3.14)$$

em que \mathbf{B} é o mesmo do caso anterior e $\mathbf{E}_e = -\nabla\phi_e$; as leis de transformação aqui são

$$\begin{aligned} A'_i &= A_i - v_i \phi_e, \\ \phi'_e &= \phi_e, \\ J'^i &= J^i - v^i \rho_e, \\ \rho'_e &= \rho_e, \end{aligned}$$

implicando em

$$\mathbf{E}'_e = \mathbf{E}_e, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}_e.$$

Observa-se acima que os resultados obtidos por Le Bellac e Lévy-Leblond para o limite elétrico são completamente recuperados acima, tanto do ponto de vista das equações de campo, quanto do ponto de vista das leis de transformação. Desta forma, as considerações sobre a lei de conservação da corrente é igual ao discutido anteriormente. A única diferença que surge, ao comparar os resultados acima com os de Le Bellac e Lévy-Leblond, refere-se à expressão Eq.(3.14), a qual sugere que o gauge de Lorenz seja fixado neste limite, $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_4 \phi_e = 0$; em Ref.[2], não há menção sobre a fixação de gauge, uma vez que o foco da discussão dos autores recai mais sobre a análise dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} do que os potenciais vetores. É interessante observar que o gauge de Lorenz se preserva sob transformações de Galilei

$$\nabla' \cdot \mathbf{A}' + \partial'_4 \phi'_e = \nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_4 \phi_e.$$

Um resultado que chama a atenção e que não é discutido em Ref.[7] é a lei de transformação de ϕ_m :

$$\phi'_m = \left[-v^i A_i + \frac{1}{2} v^2 \phi_e \right]_{\phi_m=0},$$

que não preserva a sua forma, assim como ρ_m , $\rho'_m = \left[-v^i J_i + \frac{1}{2} v^2 \rho_e \right]_{\rho_m=0}$.

A força de Lorentz

A análise sobre a força de Lorentz não é mencionada na Ref. [7], uma vez que o foco do trabalho é em teoria de campos. Uma possível generalização para a força de Lorentz em 5D é feita a seguir.

Assuma-se que a força de Lorentz possa ser escrita como

$$F^\mu = \int d^3x F^{\mu\nu}(x) \bar{J}_\nu(x),$$

em que $\bar{J}_\nu = (\bar{\mathbf{J}}, -\bar{\rho}_m, -\bar{\rho}_e)$ é um corrente de cargas que sofre a ação do campo elétrico produzido pela corrente J_μ , a qual compõe as equações de campo. Em termos dos campos elétricos, \mathbf{E}_e , \mathbf{E}_m , e magnético, \mathbf{B} , as componentes da força são

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int d^3x [\bar{\mathbf{J}}(x) \times \mathbf{B}(x) + \mathbf{E}_e(x) \bar{\rho}_m(x) + \mathbf{E}_m(x) \bar{\rho}_e(x)], \\ F^4 &= \int d^3x [\mathbf{E}_e(x) \cdot \bar{\mathbf{J}}(x) - \partial_4 \phi_e(x) \bar{\rho}_e(x)], \\ F^5 &= \int d^3x [\mathbf{E}_m(x) \cdot \bar{\mathbf{J}}(x) + \partial_4 \phi_e(x) \bar{\rho}_m(x)]. \end{aligned}$$

Limite magnético O limite magnético é obtido, além da fixação de $\phi_e = \rho_e = 0$, pela imposição de $\bar{\rho}_e = 0$, o que conduz a

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int d^3x \bar{\mathbf{J}}(x) \times \mathbf{B}(x), \\ F^4 &= 0, \\ F^5 &= \int d^3x \mathbf{E}_m(x) \cdot \bar{\mathbf{J}}(x), \end{aligned}$$

Perceba-se que as componentes trisaciais se reduzem à mesma expressão obtida por Le Bellac e Lévy-Leblond para o limite magnético. A interpretação das componentes F^4 e F^5 pode ser feita pensando-se a força como a variação temporal do 5-momento, $F^\mu = \frac{d}{d\tau} p^\mu$. Com isto em mente, F^5 estaria associada à variação temporal da energia do sistema, enquanto F^4 representaria a variação temporal da massa do sistema, que neste limite seria considerada como sendo nula. Observe-se ainda que, na expressão para a força, o integrando é invariante sobre as transformações de Galilei, resultado que segue imediatamente das leis de transformação de $\bar{\mathbf{J}}$ e de \mathbf{B} .

Limite elétrico O limite elétrico é obtido a se escolher $\phi_m = \rho_m = \bar{\rho}_m = 0$, de onde segue

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int d^3x [\bar{\mathbf{J}}(x) \times \mathbf{B}(x) + \mathbf{E}_m(x) \bar{\rho}_e(x)], \\ F^4 &= \int d^3x [\mathbf{E}_e(x) \cdot \bar{\mathbf{J}}(x) - \partial_4 \phi_e(x) \bar{\rho}_e(x)], \\ F^5 &= \int d^3x [\mathbf{E}_m(x) \cdot \bar{\mathbf{J}}(x)]. \end{aligned}$$

Em princípio, com esta forma, a expressão para a força se mantém com a mesma forma que a força de Lorentz usual e não corresponderia, portanto, ao resultado de Le Bellac e Lévy-Leblond. Todavia, se a corrente $\tilde{\mathbf{J}}$ for pensada como uma quantidade associada a $\bar{\rho}_m$ pela expressão $\mathbf{J} = \bar{\rho}_m \mathbf{v}$, então a escolha $\bar{\rho}_m = 0$ implicaria $\tilde{\mathbf{J}} = 0$, e aí seguiria

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int d^3x \mathbf{E}_m(x) \bar{\rho}_e(x), \\ F^4 &= - \int d^3x \partial_4 \phi_e(x) \bar{\rho}_e(x), \\ F^5 &= 0. \end{aligned}$$

Neste caso, a expressão para a força tornar-se-ia mais parecida, em forma, com aquela proposta por Le Bellac e Lévy-Leblond, mas com o fato de que o campo elétrico presente na força tem o índice que identifica o regime magnético. Perceba-se que neste limite $\mathbf{E}_m(x) = -\partial_4 \mathbf{A}$ e, portanto, não existiria força eletrostática. Para as outras componentes, seguindo a mesma linha de raciocínio do caso anterior, para se interpretar as componentes F^4 e F^5 , a variação temporal da energia, F^5 , seria nula (adotando-se $\mathbf{J} = \bar{\rho}_m \mathbf{v} \rightarrow 0$), enquanto a variação da massa, F^4 , seria em princípio não nula, conforme a expressão acima. Perceba-se que se $\bar{\rho}_e$ não variar no tempo, tem-se $F^4 = - \int d^3x \partial_4 [\phi_e(x) \bar{\rho}_e(x)]$, o que permite interpretar a variação temporal da massa como uma quantidade associada à variação temporal da energia eletrostática - em certo sentido, a energia eletrostática estaria associada a uma “massa eletrostática”.

Todavia, em nenhum dos casos considerados acima, obtém-se a força do limite elétrico, como considerado por Le Bellac e Lévy-Leblond. Isso seria obtido caso a força no limite elétrico se reduzisse, de alguma forma, a

$$\tilde{F}^\mu = \int d^3x F^{\mu 4}(x) \tilde{J}^4(x) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{F}} &= \int d^3x \mathbf{E}_e(x) \bar{\rho}_e(x), \\ \tilde{F}^4 &= 0, \\ \tilde{F}^5 &= - \int d^3x \partial_4 \phi_e(x) \bar{\rho}_e(x). \end{cases}$$

Neste caso as componentes trispaciais corresponderiam àquelas desejadas, enquanto a variação da densidade de massa seria nula e, para $\bar{\rho}_e$ independente do tempo, a variação da densidade de energia seria dada pela variação da densidade de energia tipo eletrostática, $\partial_4 [\phi_e(x) \bar{\rho}_e(x)]$. Neste caso, o integrando da expressão da força também é invariante sobre transformações de Galilei, como ocorre no limite magnético, mas de forma diferente do que ocorre quando do uso da outra expressão.

O campo de Proca

Antes de se analisar o caso da Eletrodinâmica de Podolsky é importante analisar o caso do campo de Proca, como estudado em Ref.[7], cuja Lagrangiana é estendida em 5 dimensões como

$$L = -\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} + k^2 A_\mu A^\mu + A_\mu J^\mu.$$

O campo e a corrente 5-dimensionais são $A_\mu = (\mathbf{A}, -\phi_m, -\phi_e)$, $J_\mu = (\mathbf{J}, -\rho_m, -\rho_e)$ e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, tensor este que satisfaz a identidade de Jacobi, $\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0$. Note-se que em Ref.[7] não há a presença da corrente, a qual foi introduzida aqui, em vista da análise que será conduzida mais adiante. A equação de campo é dada por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + k^2 A^\nu = -J^\nu,$$

a qual se reduz a

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + k^2 A^\nu = -J^\nu,$$

em virtude da condição de Lorenz, $\partial_\mu A^\mu = 0$, que segue da equação de campo, caso haja conservação da corrente J^ν . Por se tratar de um campo massivo, em analogia ao campo de Schrödinger, o *ansatz* para a dependência do campo A_μ com x^5 foi escolhida em Ref.[7] como sendo $A_\mu(x) = e^{-imx^5} A_\mu(x^i, x^4)$. Com esta escolha, a equação de campo torna-se

$$(\nabla^2 + 2im\partial_4) A^\nu + k^2 A^\nu = -J^\nu,$$

ou em termos das componentes,

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + 2im\partial_4 + k^2) \mathbf{A} &= -\mathbf{J}, \\ (\nabla^2 + 2im\partial_4 + k^2) \phi_e &= -\rho_e, \\ (\nabla^2 + 2im\partial_4 + k^2) \phi_m &= -\rho_m. \end{aligned}$$

A condição de Lorenz é, em termos das componentes,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_4 \phi_e - im\phi_m = 0.$$

É possível se definir campos elétricos e magnético,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\equiv \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E}_e &\equiv im\mathbf{A} - \nabla\phi_e, \\ \mathbf{E}_m &\equiv -\partial_4 \mathbf{A} - \nabla\phi_m, \end{aligned}$$

e escrever as equações de campo em termos deste objetos. Estes resultados são apresentados em Ref.[7]. Para a análise que se pretende realizar adiante no caso de Podolsky, é interessante considerar as equações em termos das componentes do campo.

O limite magnético, em analogia ao caso do eletromagnetismo é obtido quando se considera

$$\phi_e = 0, \quad \rho_e = 0,$$

em que as equações de campo tornam-se simplesmente

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + 2im\partial_4 + k^2) \mathbf{A} &= -\mathbf{J}, \\ (\nabla^2 + 2im\partial_4 + k^2) \phi_m &= -\rho_m, \end{aligned}$$

e a condição de Lorenz é lida como

$$\nabla \cdot \mathbf{A} - im\phi_m = 0.$$

No limite elétrico,

$$\phi_m = 0, \quad \rho_m = 0,$$

e neste caso,

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + 2im\partial_4 + k^2) \mathbf{A} &= -\mathbf{J}, \\ (\nabla^2 + 2im\partial_4 + k^2) \phi_e &= -\rho_e, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_4 \phi_e &= 0. \end{aligned}$$

3.2 A Eletrodinâmica generalizada de Podolsky e seus limites não relativísticos

O estudo dos limites não relativísticos da Eletrodinâmica generalizada de Podolsky será feito de acordo com o procedimento descrito acima, como no caso do campo eletromagnético. A Lagrangiana de Podolsky,

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu - a_P^2 \partial_\rho F^{\mu\rho} \partial_\sigma F_\mu^\sigma, \quad (3.15)$$

passa a ser considerada agora em 5 dimensões, com as mesmas identificações do caso maxwelliano, *i.e.* $A_\mu = (\mathbf{A}, -\phi_m, -\phi_e)$, $J_\mu = (\mathbf{J}, -\rho_m, -\rho_e)$ e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Recorde-se que ϕ_m e ϕ_e representam potenciais escalares e que ρ_m e ρ_e descrevem densidades de carga elétrica. As equações de campo obtidas a partir desta Lagrangiana são:

$$J^\alpha - \partial_\nu F^{\alpha\nu} + 2a_P^2 (\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5) \partial_\nu F^{\alpha\nu} = 0. \quad (3.16)$$

Definam-se os campos

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{E}_e \equiv -\partial_5 \mathbf{A} - \nabla \phi_e, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{E}_m \equiv -\partial_4 \mathbf{A} - \nabla \phi_m. \quad (3.19)$$

Acima, \mathbf{B} representa o campo magnético, enquanto \mathbf{E}_e e \mathbf{E}_m serão identificados como campos elétricos. Perceba-se que aqui, diferentemente do caso de primeira ordem, o campo \mathbf{E}_e incorpora a derivada de \mathbf{A} com respeito a x^5 em sua definição.

As equações de campo Eq.(3.16) podem ser reescritas como

$$\mathbf{J} - [1 - 2a_P^2(\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)] [\nabla \times \mathbf{B} - \partial_4\mathbf{E}_e - \partial_5\mathbf{E}_m] = 0, \quad (3.20)$$

$$\rho_e - [1 - 2a_P^2(\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)] [\nabla \cdot \mathbf{E}_e - \partial_5(-\partial_4\phi_e + \partial_5\phi_m)] = 0, \quad (3.21)$$

$$\rho_m - [1 - 2a_P^2(\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)] [\nabla \cdot \mathbf{E}_m + \partial_4(-\partial_4\phi_e + \partial_5\phi_m)] = 0. \quad (3.22)$$

para $\alpha = i, 4, 5$, respectivamente.

O tensor $F_{\mu\nu}$ ainda deve satisfazer a identidade de Jacobi,

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} = 0,$$

a qual pode ser reescrita em termos dos campos \mathbf{B} , \mathbf{E}_m , \mathbf{E}_e , ϕ_m e ϕ_e

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_m + \partial_4\mathbf{B} = 0, \quad (3.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_e + \partial_5\mathbf{B} = 0, \quad (3.25)$$

$$\nabla(-\partial_4\phi_e + \partial_5\phi_m) + \partial_5\mathbf{E}_m - \partial_4\mathbf{E}_e = 0. \quad (3.26)$$

A primeira das equações acima é a lei de Gauss magnética; a segunda é a lei de Faraday para o campo elétrico \mathbf{E}_m ; a terceira é uma lei do tipo Faraday para \mathbf{E}_e e a última não possui análogo nas leis de Maxwell. A título de completude, a Lagrangiana de Podolsky pode ser também escrita em termos dos campos elétricos e magnético e dos potenciais:

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2}(\mathbf{B})^2 + \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_e + \frac{1}{2}(-\partial_4\phi_e + \partial_5\phi_m)^2 - a_P^2 \left[(\nabla \times \mathbf{B} - \partial_5\mathbf{E}_m - \partial_4\mathbf{E}_e)^2 \right. \\ & - 2(\nabla \cdot \mathbf{E}_e - \partial_5(-\partial_4\phi_e + \partial_5\phi_m))(\nabla \cdot \mathbf{E}_m + \partial_4(-\partial_4\phi_e + \partial_5\phi_m))] + \\ & \left. + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} - \rho_e\phi_m - \rho_m\phi_e) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.2.1 O limite magnético

Como no caso do eletromagnetismo, o limite magnético é obtido quando se fixam

$$\phi_e = 0, \quad \rho_e = 0. \quad (3.28)$$

Com esta escolha, as equações de campo Eq.(3.20), Eq.(3.21), Eq.(3.22) tornam-se respectivamente

$$\mathbf{J} - [1 - 2a_P^2(\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)] [\nabla \times \mathbf{B} + \partial_4\partial_5\mathbf{A} - \partial_5\mathbf{E}_m] = 0, \quad (3.29)$$

$$\partial_5([1 - 2a_P^2(\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)] [\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_5\phi_m]) = 0, \quad (3.30)$$

$$\rho_m - [1 - 2a_P^2 (\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)] [\nabla \cdot \mathbf{E}_m + \partial_4\partial_5\phi_m] = 0. \quad (3.31)$$

Havendo dependência do campo A_μ com a quinta coordenada, a segunda das equações sugere uma fixação de gauge. Ela seria a versão galileana do gauge generalizado de Lorenz, definido pela primeira vez em Ref.[17]:

$$\{1 - 2a_P^2 \square\} \partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \{1 - 2a_P^2 [\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5]\} [\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_5\phi_m]_{\phi_e=0} = 0.$$

Não havendo a dependência com x^5 , esta expressão se tornaria uma identidade trivial. O mesmo aconteceria com duas das identidades de Jacobi,

$$\partial_5 [-\nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{B}] = 0, \quad \partial_5 [\mathbf{E}_m + \nabla\phi_m + \partial_4\mathbf{A}] = 0.$$

Mas neste caso, mesmo havendo a dependência com x^5 , elas continuam sendo apenas trivialidades, pois recuperam a definição de \mathbf{B} e \mathbf{E}_m .

As outras duas identidades de Jacobi são a lei de Gauss magnética e a lei de Faraday:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}_m + \partial_4\mathbf{B} = 0.$$

Como era de esperar, por virem da identidade de Jacobi, estas duas expressões são as mesmas do caso de primeira ordem.

Apenas para dar uma possível interpretação para o termo adicional advindo da teoria de Podolsky, considere-se o caso em que A_μ não depende da quinta coordenada. Neste caso, as equações de campo e identidades de Jacobi não triviais podem ser escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_m + \partial_4\mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_m = \rho_m.$$

em que $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - \mathbf{M}$, $\mathbf{M} \equiv 2a_P^2 \nabla^2 \mathbf{B}$ e $\mathbf{D}_m \equiv \mathbf{E}_m + \mathbf{P}_m$, $\mathbf{P}_m \equiv -2a_P^2 \nabla^2 \mathbf{E}_m$, e tal que sob uma transformação de Galilei, $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$ e $\mathbf{D}'_m = [\mathbf{D}_m + \mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{\phi_e=0}$. Estas expressões sugerem a identificação dos termos de ordem superior, \mathbf{M} e \mathbf{P}_m , como uma magnetização e uma polarização, respectivamente. Desta forma, do ponto de vista de uma teoria clássica, a Eletrodinâmica de Podolsky pode ser útil para descrever, por exemplo, os campos elétrico e magnético dentro de materiais não homogêneos. Escritas em termos destes objetos, estas equações possuem a mesma forma daquelas do caso de primeira ordem, ficando assim imediato verificar, por exemplo, que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Assim, a corrente neste limite não pode ser associada a um transporte de cargas, como no caso de Le Bellac e Lévy-Leblond. A análise da força de Lorentz, neste caso em que os campos independem de x^5 , é a mesma do que a estudada no limite magnético em 5D, uma vez

que a prescrição de acoplamento mínimo permanece a mesma do caso de primeira ordem [18] - como pode ser visto no outro capítulo, a teoria depende da derivada segunda apenas no campo de gauge - ou seja, apenas a força magnética, $\mathbf{F} = \int d^3x \mathbf{J}(x) \times \mathbf{B}(x)$, contribui efetivamente para o movimento de partículas neste campo.

Retornando ao caso geral (em que A_μ pode em princípio depender de x^5), é possível se reescrever as equações de campo Eq.(3.29) e (3.31) em termos dos potenciais, as quais, sob a condição generalizada de Lorenz (como sugerido por Eq.(3.30)), se tornam

$$[1 - 2a_p^2 (\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)] (-\nabla^2 + 2\partial_4\partial_5) \tilde{A}_\mu(x) = \tilde{J}_\mu(x),$$

onde a seguinte notação foi adotada: $\tilde{A}_\mu(x) = (\mathbf{A}(x), -\phi_m(x))$, $\tilde{J}_\mu(x) = (\mathbf{J}(x), -\rho_m(x))$, $\tilde{\mu} = 1, \dots, 4$. É possível obter, por exemplo por transformadas de Fourier, uma solução para $\tilde{A}_\mu(x)$, a qual é dada por

$$\tilde{A}_\mu(x) = \int d^5y \tilde{J}_\mu(y) \int d^5p e^{-ip(x-y)} \left[\frac{1}{(\mathbf{p}^2 - 2p_4p_5)} - \frac{1}{\left[\frac{1}{2a_p^2} + (\mathbf{p}^2 - 2p_4p_5)\right]} \right],$$

em que $p(x-y) \equiv p_\mu(x^\mu - y^\mu)$, $\mu = 1, \dots, 5$. Nesta expressão constata-se que a solução é separada em duas partes distintas,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\mu(x) &= \tilde{A}_\mu^{(NM)}(x) - \tilde{A}_\mu^{(M)}(x), \\ \tilde{A}_\mu^{(M)}(x) &= \int d^5y \tilde{J}_\mu(y) G_m^{(M)}(x-y), \\ \tilde{A}_\mu^{(NM)}(x) &= \int d^5y \tilde{J}_\mu(y) G_m^{(NM)}(x-y), \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} G_m^{(M)}(x-y) &= \int d^5p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{\left[\mathbf{p}^2 - 2p_4p_5 + \frac{1}{2a_p^2}\right]}, \\ G_m^{(NM)}(x-y) &= \int d^5p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{(\mathbf{p}^2 - 2p_4p_5)}, \end{aligned}$$

são funções de Green. Perceba-se que $G_m^{(M)}(x-y)$ e $G_m^{(NM)}(x-y)$ coincidem com as funções de Green dos operadores $\hat{O}_M \equiv -(\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5) + \frac{1}{2a_p^2}$ e $\hat{O}_{NM} \equiv -(\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)$, respectivamente, *i.e.*

$$\begin{aligned} \hat{O}_M G_m^{(M)}(x-y) &= \delta(x-y), \\ \hat{O}_{NM} G_m^{(NM)}(x-y) &= \delta(x-y). \end{aligned}$$

A versão relativística de \hat{O}_M (\hat{O}_{NM}), obtida pela transformação do tipo cone de luz, Eq.(3.6), seria um operador para um campo massivo (não massivo), com massa $m^2 = \frac{1}{2a_p^2}$ ($m^2 = 0$). Neste sentido

afirma-se que, na versão galileana da teoria de Podolsky, a solução também se separa em um modo 'massivo' e um 'não massivo'. No caso de $G_m^{(M)}(x-y)$, esta seria a função de Green da versão galileana do campo de Proca, como analisada em Ref.[7], com a identificação $k^2 = \frac{1}{2a_p^2}$, no limite magnético. Por outro lado, $G_m^{(NM)}(x-y)$ seria a função de Green do campo eletromagnético no limite magnético, como em Ref.[7], caso fosse considerada a dependência do campo com respeito a x^5 .

Em função desta separação em dois modos, um *ansatz* interessante para o campo seria

$$\tilde{A}_{\tilde{\mu}}(x^i, x^4, x^5) = \tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(NM)}(x^i, x^4) - e^{-imx^5} \tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(M)}(x^i, x^4),$$

em que o modo 'não massivo' teria a dependência com a quinta coordenada igual ao do campo eletromagnético, e a dependência com x^5 do modo 'massivo' seria a mesma proposta para o campo de Proca, ambos os *ansatz* retirados de Ref.[7]. Neste caso, esperar-se-ia que cada um dos modos satisfizesse

$$-\nabla^2 \tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(NM)} = \tilde{J}_{\tilde{\mu}}(x), \quad (3.32)$$

$$-\left[\frac{1}{2a_p^2} - (\nabla^2 + 2im\partial_4) \right] e^{-imx^5} \tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(M)}(x^i, x^4) = \tilde{J}_{\tilde{\mu}}(x). \quad (3.33)$$

Perceba-se, todavia, que na primeira equação, a corrente não deve depender de x^5 , por consistência com o fato de que $\tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(NM)} = \tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(NM)}(x^i, x^4)$, enquanto que na segunda expressão, a dependência de $\tilde{J}_{\tilde{\mu}}$ com x^5 deve ser da forma $\tilde{J}_{\tilde{\mu}}(x) = e^{-imx^5} \tilde{J}_{\tilde{\mu}}(x^i, x^4)$. Ainda, a título de completeza, note-se que se o modo 'não massivo' satisfizer a condição Eq.(3.32), então o modo 'massivo' iria satisfazer a equação

$$(\nabla^2 + im2\partial_4) \left[\frac{1}{2a_p^2} - (\nabla^2 + im2\partial_4) \right] e^{-imx^5} \tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(M)} = \nabla^2 \tilde{J}_{\tilde{\mu}}.$$

Revertendo-se o raciocínio se o modo 'massivo' satisfizesse Eq.(3.33), então $\tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(NM)}$ iria satisfazer

$$-[1 - 2a_p^2 \nabla^2] \nabla^2 \tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(NM)} = [1 + 2a_p^2 (\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)] \tilde{J}_{\tilde{\mu}}(x).$$

O desenvolvimento acima mostra que a escolha de *ansätze* diferenciados para os modos 'massivo' e 'não massivo', como conhecidos na literatura, não conduz a equações consistentes com a separação da solução nos modos massivo e não massivo.

Para completar a análise, se o *ansatz* para dependência com x^5 for

$$\tilde{A}_{\tilde{\mu}}(x^i, x^4, x^5) = e^{-imx^5} \left[\tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(NM)}(x^i, x^4) - \tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(M)}(x^i, x^4) \right], \quad (3.34)$$

então $\tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(NM)}$ e $\tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(M)}$ satisfazem as equações

$$e^{-imx^5} (-\nabla^2 - 2im\partial_4) \tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(NM)} = \tilde{J}_{\tilde{\mu}}(x),$$

$$-\left[\frac{1}{2a_p^2} - (\nabla^2 + 2im\partial_4) \right] e^{-imx^5} \tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(M)}(x^i, x^4) = \tilde{J}_{\tilde{\mu}}(x).$$

Note-se que $\tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(M)}$ satisfaz uma equação do tipo Proca, como estudado em Ref.[7], enquanto $\tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(NM)}$ obedece a uma equação do tipo Schrödinger não homogênea para partícula livre. Portanto, com este *ansatz*, $\tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{(NM)}$ não satisfaz a mesma equação obtida para o campo eletromagnético. Neste caso, a dependência de $\tilde{J}_{\tilde{\mu}}$ com x^5 deve ser da forma $\tilde{J}_{\tilde{\mu}}(x) = e^{-imx^5} \tilde{J}_{\tilde{\mu}}(x^i, x^4)$, sendo esta uma solução consistente nas duas equações.

3.2.2 O limite elétrico

O limite elétrico é obtido quando se faz as mesmas restrições do caso de primeira ordem, ou seja, quando se toma

$$\phi_m = 0, \quad \rho_m = 0.$$

As equações de campo Eqs.(3.20), (3.21) e (3.22) são reduzidas a

$$\mathbf{J} - [1 - 2a_P^2 (\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)] [\nabla \times \mathbf{B} - \partial_4 \mathbf{E}_e + \partial_4 \partial_5 \mathbf{A}] = 0, \quad (3.35)$$

$$\rho_e - [1 - 2a_P^2 (\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)] [\nabla \cdot \mathbf{E}_e + \partial_5 \partial_4 \phi_e] = 0, \quad (3.36)$$

$$- [1 - 2a_P^2 (\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)] [-\partial_4 \nabla \cdot \mathbf{A} - \partial_4 \partial_4 \phi_e] = 0. \quad (3.37)$$

Perceba-se que o campo \mathbf{E}_m foi substituído por $-\partial_4 \mathbf{A}$. As identidades de Jacobi não triviais tornam-se

$$-\partial_4 [\mathbf{E}_e + \nabla \phi_e + \partial_5 \mathbf{A}] = 0, \quad \partial_4 [-\nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{B}] = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_e + \partial_5 \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Note-se que as duas primeiras identidades nada mais são do que as definições de \mathbf{E}_e e \mathbf{B} , enquanto as outras duas fornecem uma equação do tipo lei de Faraday, com a derivada temporal substituída pela derivada com respeito à quinta coordenada, e a lei de Gauss magnética. A Eq.(3.37), por outro lado, sugere a fixação do gauge generalizado de Lorenz, na versão galileana:

$$\{1 - 2a_P^2 [\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5]\} [\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_4 \phi_e] = 0.$$

Como no limite anterior, considere-se o caso em que o campo de gauge não depende de x^5 . As equações de campo e identidades de Jacobi tornam-se

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_e = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_4 \mathbf{D}_e = \mathbf{J},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_e = \rho_e,$$

em que $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - \mathbf{M}$, $\mathbf{M} \equiv 2a_P^2 \nabla^2 \mathbf{B}$ e $\mathbf{D}_e \equiv \mathbf{E}_e + \mathbf{P}_e$, $\mathbf{P}_e \equiv -2a_P^2 \nabla^2 \mathbf{E}_e$, com leis de transformação dadas por $\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}_e$ e $\mathbf{D}'_e = \mathbf{D}_e$. Como estudado no outro limite, os termos de ordem

superior, \mathbf{M} e \mathbf{P}_e podem ser entendidos como sendo uma magnetização e uma polarização. Também como antes, as equações possuem a mesma forma do caso de primeira ordem. Destas equações seguem a conservação local da corrente,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial_4 \rho_e = 0,$$

e \mathbf{J} pode aqui ser associada a um transporte de carga, como no caso de primeira ordem. A força de Lorentz, para campos independentes de x^5 , contribui apenas com o termo elétrico, $\mathbf{F} = \int d^3x \mathbf{E}_m(x) \bar{\rho}_e(x)$, se assumida a hipótese de que a corrente que sofre a ação dos campos for composta por cargas do tipo $\bar{\rho}_m$, de maneira idêntica ao caso de primeira ordem. Essa hipótese sobre a relação entre a corrente e $\bar{\rho}_m$ pode ser ignorada, caso seja adotada a outra expressão para a força no limite elétrico, $\tilde{\mathbf{F}} = \int d^3x \mathbf{E}_e(x) \bar{\rho}_e(x)$.

Retornando ao caso geral, em função da fixação do gauge generalizado de Lorenz, as equações de movimento podem ser escritas apenas em termo das componentes do potencial de gauge,

$$[1 - 2a_P^2 (\nabla^2 - 2\partial_4\partial_5)] (-\nabla^2 + 2\partial_4\partial_5) \hat{A}_{\hat{\mu}} = \hat{J}_{\hat{\mu}}(x),$$

em que $\hat{A}_{\hat{\mu}}(x) = (\mathbf{A}(x), -\phi_e(x))$ e $\hat{J}_{\hat{\mu}}(x) = (\mathbf{J}(x), -\rho_e(x))$ ($\hat{\mu} = 1, \dots, 4$). Como no caso anterior, a solução separa-se em duas partes

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\hat{\mu}}(x) &= \hat{A}_{\hat{\mu}}^{(NM)}(x) - \hat{A}_{\hat{\mu}}^{(M)}(x), \\ \hat{A}_{\hat{\mu}}^{(M)}(x) &= \int d^5y \hat{J}_{\hat{\mu}}(y) G_m^{(M)}(x-y), \\ \hat{A}_{\hat{\mu}}^{(NM)}(x) &= \int d^5y \hat{J}_{\hat{\mu}}(y) G_m^{(NM)}(x-y), \end{aligned}$$

em que $G_m^{(M)}(x-y)$ e $G_m^{(NM)}(x-y)$ são definidos como no limite magnético, sendo estes objetos as funções de Green dos operadores \hat{O}_M e \hat{O}_{NM} , como definidos anteriormente. De forma análoga ao visto anteriormente, pode-se dizer que a solução também possui um modo 'massivo' e outro 'não massivo'. Como a equação acima possui a mesma forma que a do caso magnético, a análise de diferentes *ansätze* conduz às mesmas conclusões obtidas no limite magnético, quais sejam de que a escolha de diferentes *ansätze* para os modos 'massivo' e 'não massivo' não leva a equações condizentes com a definição destes modos; por outro lado, adotando-se um *ansatz* para $\hat{A}_{\hat{\mu}}(x)$ semelhante àquele de Eq.(3.34), concluir-se-ia que o modo 'massivo' satisfaz uma equação do tipo Proca, enquanto o modo não massivo satisfaria uma equação do tipo Schrödinger não homogênea.

Referências Bibliográficas

- [1] J. M. Lévy-Leblond - *Commun. Math. Phys.* **6**, 286 (1967).
- [2] M. Le Bellac e J. M. Lévy-Leblond - *Nuov. Cim. B* **14**, 217 (1973).
- [3] G. Pinski - *J. Math. Phys.* **9**, 1927 (1968).
- [4] Y. Takahashi - *Fortschr. Phys.* **36**, 63 (1988); Y. Takahashi - *Fortschr. Phys.* **36**, 83 (1988).
- [5] M. Omote, S. Kamefuchi, T. Takahashi, Y. Ohnuki - *Fortschr. Phys.* **37**, 933 (1989).
- [6] A. E. Santana, F. C. Khanna e Y. Takahashi - *Prog. Theor. Phys.* **99**, 327 (1988).
- [7] E. S. Santos, M. de Montigny, F. C. Khanna e A. E. Santana - *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 9771 (2004).
- [8] R. Casana, B. M. Pimentel, G. E. R. Zambrano - *arXiv:0803.2677.v1* (2008)
- [9] M. de Montigny, F. C. Khanna e A. E. Santana, E. S. Santos - *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 8901 (2001).
- [10] M. de Montigny, F. C. Khanna e A. E. Santana - *Int. J. Theor. Phys.* **42**, 649 (2003).
- [11] M. de Montigny, F. C. Khanna e A. E. Santana - *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 2009 (2003).
- [12] L. Abreu L, M. de Montigny, F. C. Khanna e A. E. Santana, E. S. Santos, *Ann. Phys.* **308**, 244 (2003).
- [13] E. S. Santos, M. de Montigny, F. C. Khanna - *Ann. Phys.* **320**, 21 (2005).
- [14] H. P. Künzle e C. Duval, em *Semantical Aspects of Spacetime Theories*, editado por U. Majer e H.J. Schmidt (1994); H. P. Künzle e C. Duval - *Class. Quant. Grav.* **6**, 957 (1986).
- [15] M. Kobayashi, M. de Montigny, F. C. Khanna - *Phys. Lett. A* **372**, 3541 (2008).
- [16] J. Frenkel - *Phys. Rev. E* **54**, 5859 (1996).

[17] C. A. P. Galvão e B. M. Pimentel - *Can. J. Phys.* **66**, 460 (1988).

[18] R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo e P. J. Pompeia - *Ann. Phys.* **322**, 1211 (2007).

Capítulo 4

Conclusões

No primeiro capítulo foi visto como o procedimento de Utiyama pode ser estendido para sistemas cujas Lagrangianas dependam da derivada segunda do campo de gauge. Foi verificado que a dependência da Lagrangiana com o campo de gauge e suas derivadas deve ocorrer apenas através dos tensores $F_{\mu\nu}^a$, já conhecido do caso de primeira ordem, e $G_{\rho\mu\nu}^a$, o qual está associado à derivada covariante de $F_{\mu\nu}^a$ e satisfaz a identidade de Jacobi. Ambos os tensores são objetos covariantes pelo grupo de gauge. A partir da hipótese de invariância da Lagrangiana total, formada pelo campo de matéria em interação com o campo de gauge, foi possível obter duas correntes distintas. A primeira delas, definida como a variação da Lagrangiana total com respeito ao campo de gauge, como proposto por Utiyama para o caso de primeira ordem, leva a uma quantidade que é *quasi*conservada (no sentido de que o divergente desta corrente iguala-se a um divergente). A segunda corrente, definida como a derivada funcional de primeira ordem da Lagrangiana total com respeito ao campo de gauge, trata-se de fato de uma corrente conservada e caracteriza-se pela presença de termos topológicos, *i.e.* vetores que são os divergentes de tensores antissimétricos e que possuem, portanto, divergente nulo. Como estudos de caso, verificou-se que a Lagrangiana AAB para o grupo $SU(N)$, proposta no estudo do regime infravermelho da QCD, satisfaz os requisitos de uma teoria de gauge de segunda ordem, assim como a Eletrodinâmica generalizada de Podolsky - grupo $U(1)$. Esta última em particular ainda possui uma característica importante: todas as Lagrangianas que diferem da Lagrangiana de Maxwell por um termo quadrático no tensor $G_{\rho\mu\nu}$ se reduz à Lagrangiana de Podolsky, a menos de um termo de superfície. Ou seja, a Eletrodinâmica de Podolsky é de fato a única extensão de segunda ordem do eletromagnetismo que preserva o caráter linear das equações de campo. Em particular, o procedimento construído para o caso de segunda ordem dá indícios de como fazer a generalização para sistemas com derivadas de ordem superior.

A estrutura de gauge em segunda ordem foi aplicada também para o caso do grupo de Lorentz. A geometrização da teoria mostra que o tensor F é mapeado no tensor de curvatura de Riemann, resultado já conhecido do caso de primeira ordem, enquanto o tensor G é mapeado na derivada

covariante, por transformações gerais de coordenadas do espaço-tempo, do tensor de curvatura. A construção de invariantes de ordem no máximo quadrática no tensor de curvatura e quadrática na derivada covariante da curvatura, *i.e.* invariantes tipo $(R)^2$ e $(\delta R)^2$ (mas não $R\delta R$), mostra que existem apenas sete combinações independentes. Como aplicação desta estrutura, um destes invariantes foi escolhido para se somar à Lagrangiana de Einstein-Hilbert, na presença de um campo de matéria, a partir da qual as equações de campo forma obtidas. Para estas equações verificou-se que os termos de ordem superior ainda corroboram com a conservação do tensor energia-momento. Uma solução para o caso estático e isotrópico foi obtida na aproximação linear, mostrando que a lei de Newton é obtida para distâncias curtas, o qual passa a ser modificado pela adição de outros termos em escala de distâncias intermediárias. A magnitude destas distâncias é dada pelas constantes de integração obtidas no processo de resolução das equações de campo e são quantidades que podem ser determinadas experimentalmente.

No contexto de teorias de segunda ordem como teorias efetivas, a fixação dos parâmetros introduzidos na Lagrangiana, multiplicando os termos considerados “efetivos” - no caso, aqueles que envolvem as derivadas segundas do campo de gauge - deve ser feita por ajustes a dados experimentais obtidos na escala de energia em que a teoria efetiva tem validade. Essa fixação de parâmetros foi feita para o caso da Eletrodinâmica de Podolsky, supondo-se que ela seria válida em diferentes escalas de energia. Devido ao fato da constante a de Podolsky estar associada a uma massa de um modo massivo do fóton, a estimativa desta massa também pode ser realizada. Enfatize-se, todavia, o fato de que esta massa não deve ser interpretada como sendo uma massa de repouso do fóton, mas como caracterizando a escala de energia em que a teoria se torna relevante. A primeira estimativa para o parâmetro a foi feita para o caso eletrostático gerado por um elétron, em que a carga foi obtida a partir da integração da componente \bar{J}^0 da corrente conservada. Para tanto admitiu-se que exista um corte natural da ordem do comprimento de onda Compton para a região de integração do termo proveniente do termo de Podolsky. Sem essa hipótese, a carga efetiva obtida seria uma renormalização da carga do elétron e . Com ela, foi possível vincular a constante a a partir da incerteza experimental da carga do elétron, levando a um valor $a = 1,105\,868\,617(14) \times 10^{-11} \text{ cm}$, que corresponde a uma massa para o modo massivo $m = 3,180\,913\,40(16) \times 10^{-30} \text{ kg} = 1,784\,361\,72(92) \frac{MeV}{c^2}$.

Na segunda proposta de se vincular a constante a , um experimento fazendo uso de um interferômetro de íons foi sugerido, em que adotou-se a hipótese de que a eletrodinâmica de Podolsky deveria ser uma pequena perturbação à teoria de Maxwell, *i.e.* a deve ser pequeno. Com os dados disponíveis na literatura sobre o experimento, o menor valor possível de detecção para a foi de $0,033 \text{ cm}$, o que corresponde a uma massa $m_{\gamma}^{1Cs^+} \leq 1,06 \times 10^{-39} \text{ kg} = 5,98 \times 10^{-4} \frac{eV}{c^2}$. Note-se que este valor de a inicialmente contraria a hipótese adotada de que a eletrodinâmica de Podolsky deveria ser uma perturbação da teoria de Maxwell, pois há diversos experimentos nesta escala de comprimento que inviabilizam um valor de a desta magnitude. Embora do ponto de vista da formulação do experimento, seja possível estimar valores para a , verifica-se, de maneira quantitativa,

a inadequabilidade deste experimento para a medição da teoria de Podolsky.

Uma terceira forma de se avaliar a magnitude de a , analisou-se, utilizando teoria de perturbação em Mecânica Quântica, qual seria a influência do potencial de eletrostático de Podolsky na energia do estado fundamental do átomo de Hidrogênio. A partir da incerteza experimental da energia deste estado, avaliou-se a constante como sendo $a \leq 5,56 fm$, ou, em termos de massa, $m_\gamma \geq 6,33 \times 10^{-29} kg = 35,51 \frac{MeV}{c^2}$.

É importante observar-se que, se a teoria de Podolsky tivesse validade nas três escalas de energia consideradas, ela já poderia ser descartada, uma vez que os dois últimos resultados são mutuamente excludentes, *i.e.* $a > 0,033 cm$ e $a < 5,56 fm$. Isso realmente reforça o fato da teoria ter que ser considerada no contexto de uma teoria efetiva. Em particular, se esta teoria deve surgir como uma perturbação da teoria de Maxwell, então devido à pequena magnitude que o parâmetro a deve ter, espera-se que ela seja mensurável em escalas de energia alta - como visto, a massa do modo massivo é proporcional ao inverso de a e, portanto, um a pequeno implica em uma massa grande.

Na segunda parte desta tese, analisou-se regimes não relativísticos, chamados de limite elétrico e magnético, da Eletrodinâmica de Podolsky utilizando-se o formalismo galileano em 5 dimensões. Inicialmente, com o intuito de se completar o estudo 5 dimensional dos limites não relativísticos da teoria de Maxwell, foi apresentada uma forma covariante para a força de Lorentz, sendo este um resultado não apresentado anteriormente na literatura. A primeira sugestão, $F^\mu = \int d^3x F^{\mu\nu}(x) \bar{J}_\nu(x)$, apresenta bons resultados para o limite magnético, recuperando a expressão proposta por Le Bellac e Lévy-Leblond. Todavia, para o estudo do limite elétrico, esta expressão falha ao não apresentar uma forma consistente para o caso eletrostático. Para se obter uma expressão que recuperasse os resultados de Le Bellac e Lévy-Leblond, uma outra expressão para a força, dada por $\tilde{F}^\mu = \int d^3x F^{\mu 4}(x) \bar{J}^4(x)$, foi proposta, apenas para o limite elétrico. Desta forma, ainda fica pendente encontrar uma expressão única que possa recuperar os dois limites simultaneamente.

Feito isso, conduziu-se a análise dos limites magnético e elétrico da Eletrodinâmica de Podolsky. Inicialmente, em cada um dos limites analisados, considerou-se o *ansatz* em que os campos não dependem da quinta coordenada. Neste caso, verificou-se que os objetos de ordem superior nas equações de campo provenientes do termo de Podolsky poderiam ser interpretados como magnetização e polarização, em ambos os limites. Este tipo de interpretação mostra como a teoria de Podolsky pode ser utilizada para a descrição de campos dentro materiais com propriedades peculiares. Com esta proposta, as equações de campo apresentaram-se em uma forma completamente similar ao do caso da teoria de Maxwell.

Em seguida, retornando às equações de campo, sem se considerar um *ansatz* específico, verificou-se que a solução para os campos, tanto no limite elétrico, como no limite magnético, se separam em duas partes, identificadas como modos 'massivo' e 'não massivo', de modo semelhante ao que ocorre no caso relativístico - o modo 'massivo' possui uma função de Green que é idêntica àquela

do campo de Proca, enquanto a do modo 'não massivo' é a mesma do campo eletromagnético, caso neste último a dependência com x^5 não fosse ignorada. A partir desta separação em dois modos, verificou-se que a proposta de um *ansatz*, em que o modo 'não massivo' é independente de x^5 (em analogia ao *ansatz* do campo eletromagnético) e o modo 'massivo' satisfaz a mesma dependência com x^5 que o campo de Proca, é inconsistente com as definições destes modos. Concluiu-se, assim, que, apesar da separação em dois modos sugerir que o modo 'não massivo' seja independente de x^5 e que o modo 'massivo' satisfaça o *ansatz* de Proca, não é possível expressões consistentes para ambos os modos - se um deles satisfaz a expressão adequada, o outro não satisfará. Esta análise vale em ambos os limites e cabe ressaltar que este é um problema obtido com os *ansätze* já propostos na literatura, os quais foram considerados para análise aqui. Por fim, verificou-se que, a se adotar o *ansatz* de Proca para ambos os modos, o modo 'massivo' satisfaz uma equação do tipo Proca, enquanto o modo 'não massivo' satisfaz uma equação do tipo Schrödinger não homogênea para partícula livre.

Durante todo o desenvolvimento apresentado aqui, a Eletrodinâmica de Podolsky foi constantemente revisitada, desde a proposta da estrutura geral de uma teoria de segunda ordem no campo de gauge, como na análise de como se vincular uma teoria efetiva de segunda ordem e no estudo dos regimes não relativísticos no formalismo galileano em 5 dimensões. Esta escolha pela teoria de Podolsky se justifica, uma vez que esta é a teoria de gauge mais simples que se pode construir, e que ainda preserva o caráter linear das equações de campo. A partir da compreensão desta estrutura é possível imaginar a análise de casos mais complicados, como seria o caso das teorias não abelianas. Dentre as possibilidades abertas aqui, destacam-se a aplicação do formalismo galileano para casos não abelianos, como uma versão não abeliana da teoria de Podolsky, em que já há evidências de que a mesma pode ser utilizada para explicar a existência de potenciais confinantes em pequenas distâncias - estes potenciais são utilizados em Física Nuclear, mas geralmente são introduzidos de forma *ad hoc*. Outra possibilidade, já em investigação, é a aplicação do formalismo galileano em gravitação. Destaca-se ainda a possibilidade de investigação da estrutura de vínculos de sistemas de ordem superior, visando a quantização da teoria, usando, por exemplo, o formalismo de Hamilton-Jacobi.

Um caso não abeliano foi considerado aqui, qual seja o do campo gravitacional, em que a solução para o regime linear das equações para o caso estático e isotrópico foi analisado. Como futura aplicação deste desenvolvimento, já está em andamento a análise de uma solução do tipo Friedmann-Robertson-Walker, bem como a procura por modos massivos na teoria gravitacional que preservem a invariância de gauge da teoria, em analogia ao que foi visto em Podolsky.