



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Clayton Eduardo Lente da Silva

Equações diferenciais ordinárias não suaves
autônomas e não autônomas

São José do Rio Preto
2016

Clayton Eduardo Lente da Silva

Equações diferenciais ordinárias não suaves
autônomas e não autônomas

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva

São José do Rio Preto
2016

Silva, Clayton Eduardo Lente da.

Equações diferenciais ordinárias não suaves autônomas e não autônomas / Clayton Eduardo Lente da Silva. -- São José do Rio Preto, 2016

76 f. : il.

Orientador: Paulo Ricardo da Silva

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Geometria. 4. Topologia. 5. Filippov, Sistemas de. 6. Equações diferenciais ordinárias. I. Silva, Paulo Ricardo da. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Clayton Eduardo Lente da Silva

Equações diferenciais ordinárias não suaves
autônomas e não autônomas

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Marcelo Messias
UNESP – Presidente Prudente

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira
UNICAMP – Campinas

Prof. Dr. Douglas Duarte Novaes
UNICAMP – Campinas

São José do Rio Preto
20 de maio de 2016

*Aos meus pais, Rubens e Sonia,
e aos meus avós,
Josias e Maria de Lourdes,
Leonardo e Maria José,
dedico.*

Agradecimentos

Aos professores doutores Paulo Ricardo da Silva e Alain Jacquemard, pela orientação e co-orientação, respectivamente.

Aos meus pais Rubens Izidoro da Silva e Sonia Maria Lente da Silva, por todo o apoio proporcionado.

À minha irmã Alessandra Renata Lente da Silva e ao meu sobrinho Miguel David Lente da Silva, pelo carinho.

Aos meus amigos Carlos Custódio da Silva, Italo Antonio Rissi e Renan Eduardo Soares Gonçalves, pela companhia e incentivo de cada um a seu tempo e modo.

Aos professores doutores Márcio Ricardo Alves Gouveia e Claudio Gomes Pessoa, por algumas valiosas discussões referentes ao trabalho.

Aos professores doutores Claudio Aguinaldo Buzzi e Aparecida Francisco da Silva, pelo apoio.

Aos colegas da pós-graduação, Bruno Domiciano Lopes, Rubens Pazim Carnevarolo Junior, Rodrigo Donizete Euzébio e Jaime Rezende de Moraes, pelos bons momentos e frutíferas discussões.

Aos colegas e amigos que fiz na França, especialmente Doglas Lubarino e Betânia Medeiros, que conheci na Université de Bourgogne, e Josy Cardoso Roy e Joanice Sfay, que conheci na cidade de Dijon.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

À Deus, por tudo.

Resumo

Nesta tese estudamos sistemas dinâmicos não suaves autônomos e não autônomos. Consideramos inicialmente sistemas quadráticos positivamente limitados autônomos planares e damos condições sobre os campos para que o sistema de Filippov correspondente seja limitado. Também estudamos uma classe de sistemas quadráticos e provamos que, sob algumas restrições nos coeficientes da parte linear, os sistemas de Filippov relacionados são limitados. Em seguida, consideramos sistemas não autônomos e damos condições para a existência de soluções periódicas de uma classe de equações diferenciais ordinárias não autônomas. Por fim, consideramos equações diferenciais ordinárias não autônomas de segunda ordem genéricas, relacionadas a sistemas não suaves e não autônomos, estudamos o conceito de solução destas equações e damos condições analíticas que são satisfeitas por soluções típicas, como as soluções deslizantes, por exemplo. A unicidade de soluções para estas equações também é estudada.

Palavras-chave: Sistemas de Filippov, sistemas não suaves, campos de vetores descontínuos, equações diferenciais ordinárias não suaves, equações diferenciais ordinárias por partes, sistemas limitados, campos limitados, sistemas quadráticos, campos quadráticos, variedade de descontinuidade, soluções deslizantes, soluções permanentes, soluções alternantes.

Abstract

In this thesis we study autonomous and non-autonomous non-smooth dynamical systems. We initially consider planar autonomous positively bounded quadratic systems. We give conditions on the vector fields for that the correspondent Filippov system be bounded. We also study a class of quadratic systems and we prove that, under some restrictions on the coefficients of linear part, the related Filippov systems are bounded. We then consider non-autonomous systems and we give conditions for the existence of periodic solutions of a certain class of non-autonomous ordinary differential equations. Finally we consider generic non-autonomous second order differential equations and we study the concept of solution of these equations and determine analytical conditions that are satisfied by typical solutions, sliding solutions for instance. Moreover, the uniqueness of solutions for these equations is studied.

Keywords: Filippov systems, non-smooth systems, discontinuous vector fields, non-smooth ordinary differential equations, piecewise ordinary differential equations, bounded systems, bounded vector fields, quadratic systems, quadratic vector fields, sliding solutions, sewing solutions, flat solutions.

Sumário

Introdução	8
1 Sistemas de Filippov quadráticos e limitados no plano	16
1.1 Teoria introdutória de sistemas de Filippov	16
1.2 Campos de vetores quadráticos e limitados no plano	22
1.3 Definições e resultados preliminares	23
1.4 Resultados principais	24
2 Soluções periódicas de uma classe de equações não autônomas	31
2.1 Definições e resultados preliminares	32
2.2 A equação autônoma $y'' + \eta \operatorname{sgn}(y) = \theta y$	35
2.2.1 O caso hiperbólico $\theta > 0$	35
2.2.2 O caso elíptico $\theta < 0$	37
2.2.3 O caso parabólico $\theta = 0$ com $\eta < 0$	40
2.3 A equação não autônoma $y'' + \eta \operatorname{sgn}(y) = \theta y + \alpha \operatorname{sen}(\beta t)$	40
2.3.1 O caso hiperbólico $\theta > 0$ para $\alpha \neq 0$	40
2.3.2 O caso elíptico ressonante $\theta = -\beta^2$ para $\alpha \neq 0$	49
2.3.3 O caso elíptico $-\beta^2 \neq \theta < 0$ para $\alpha \neq 0$	53
2.3.4 O caso parabólico $\theta = 0$ com $\eta < 0$ para $\alpha \neq 0$	59
3 Soluções deslizantes de equações de segunda ordem não-autônomas	63
3.1 Definições e resultados preliminares	63
3.2 Correspondência de uma D2DE com Sistemas de Filippov	68
3.3 Soluções deslizantes e unicidade de soluções	71
3.4 Algoritmo para a construção de uma solução de uma D2DE	73

Introdução

Sistemas dinâmicos não suaves aparecem em um grande número de problemas de Engenharia Elétrica, Mecânica, Sistemas Biológicos, Teoria de Controle, Teoria dos Jogos, entre outros. Alguns modelos destes problemas são descritos por um sistema de equações diferenciais com lado direito dado por partes, de classe C^r em cada parte, $r \geq 1$:

$$x' = Z(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

Sistemas do tipo (1) são constituídos por duas ou mais zonas, que são regidos por expressões distintas de Z em cada um deles. Trabalhamos apenas com duas zonas. Quando o sistema em questão é *autônomo*, ou seja, independe de t , em cada um dos domínios atuam diferentes campos de vetores, X e Y . A fronteira comum entre estas duas zonas, denotada por Σ , é chamada de *variedade de descontinuidade*. Há diferentes maneiras de definir a dinâmica do sistema autônomo sobre Σ , porém adotamos a convenção de *Filippov* [1], razão pela qual tais sistemas também são chamados *sistemas de Filippov* e denotados simplesmente por $Z = (X, Y)$.

O estudo de sistemas dinâmicos não suaves é relativamente recente e muito esforço tem sido empregado para verificar a validade e/ou adequação de resultados da teoria clássica nesta nova teoria.

No Capítulo 1, consideramos preliminarmente sistemas *quadráticos* autônomos. Tais sistemas foram discutidos em uma das primeiras ocasiões por Büchel [2], através de uma coleção de exemplos. Aparecem, como modelo, na teoria de competição entre duas espécies [3], por exemplo.

Conforme literatura sobre o assunto [4, 5, 6], os sistemas que estudamos são os do tipo

$$x' = Ax + f_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

em que A é uma matriz constante, $f_2(x) \not\equiv 0$ e as componentes de $f_2(x)$ são polinômios quadráticos homogêneos em $x = (x_1, x_2)$. Dentre estes sistemas, é conhecido (em [5, 6])

que os *limitados* para $t \geq 0$ são os que têm parte quadrática, a menos equivalência, na forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_2^2 \\ -x_1 x_2 + c x_2^2 \end{pmatrix}, \quad |c| < 2; \quad (3)$$

com determinadas restrições nos coeficientes da matriz A (parte linear do sistema). Para detalhes sobre tais restrições, consultar o Capítulo 1. Entendemos por limitado para $t \geq 0$, um sistema em que cada órbita permanece em um conjunto compacto (para cada órbita), para todo $t \geq 0$. A propriedade de um sistema ser limitado é de extrema importância, por exemplo, na análise da dinâmica de crescimento populacional [7], dentre outros.

Uma questão natural é considerar dois campos limitados bidimensionais e distintos X, Y e perguntar se o sistema de Filippov resultante $Z = (X, Y)$ é limitado. A resposta para tal questão é negativa, conforme observamos na Figura 1.

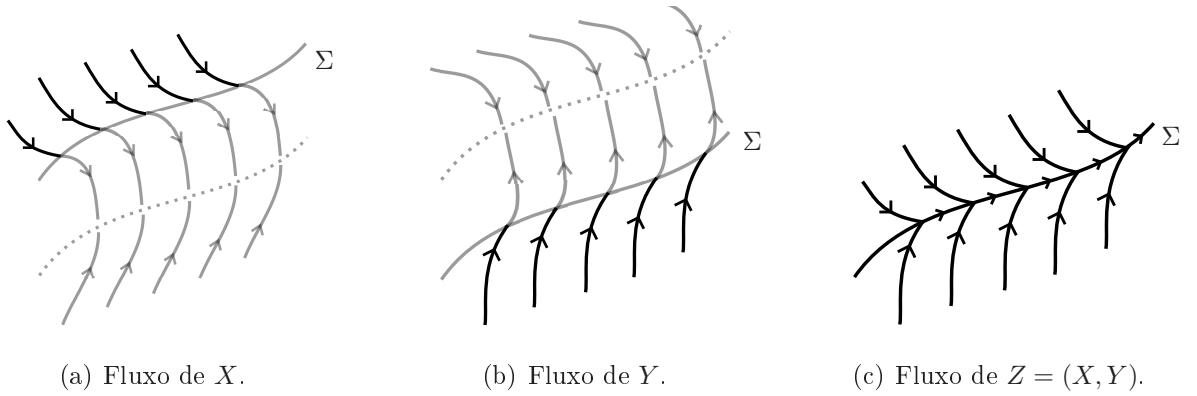


Figura 1: Campos X, Y quadráticos limitados com Sistema de Filippov $Z = (X, Y)$ ilimitado.

Distinguimos em Σ , regiões de *costura* Σ_c , *delize* Σ_s e *escape* Σ_e , bem como o conjunto de pontos nas quais as trajetórias de quaisquer dos campos X, Y tangenciam a variedade de descontinuidade, chamado conjunto de pontos de *tangência* Σ_t e o conjunto de *pseudo-equilíbrios* Σ_p , constituído por equilíbrios do campo de Filippov Z_s , quando este existir. Tais conjuntos estão representados na Figura 2.

A dinâmica na variedade de descontinuidade Σ é crucial para que o sistema não seja limitado. Assim, o primeiro resultado do Capítulo 1 estabelece condições suficientes sobre Σ para que o sistema de Filippov $Z = (X, Y)$ seja limitado, sendo X, Y campos bidimensionais quadráticos e cada um deles limitado.

Resultado A. *Seja $Z = (X, Y)$ o sistema de Filippov em que os campos X, Y são quadráticos limitados bidimensionais, cuja variedade de descontinuidade Σ é o eixo coordenado horizontal. Caracterizamos os sistemas quadráticos por partes $Z = (X, Y)$*

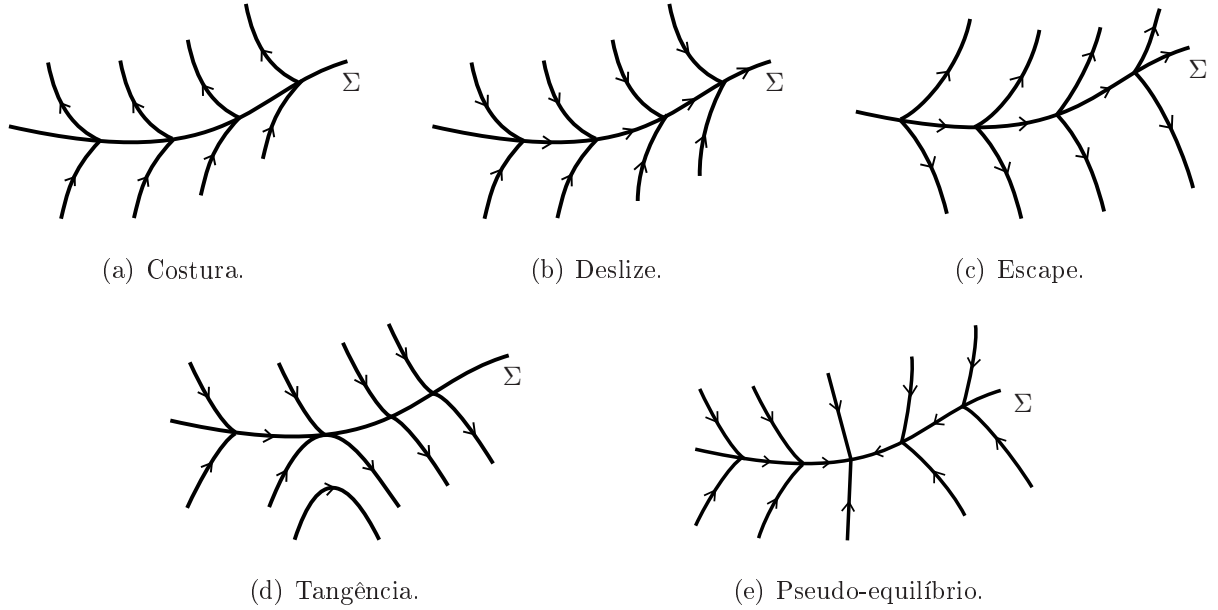


Figura 2: Variedade de descontinuidade Σ representada por regiões distintas. O campo de Filippov Z_s está definido apenas em regiões de deslize ou de escape.

limitados. — Ver Teorema 1.4.1 (página 25).

Agora, consideramos X, Y campos quadráticos, com parte quadrática em uma das formas dadas em (3) e com condições sobre os coeficientes da parte linear estabelecidas em [6] (consultar o Teorema 1.2.1, página 22). Outra questão que surge é dar condições suficientes sobre os coeficientes das partes lineares de X e Y que garantam que o sistema de Filippov $Z = (X, Y)$ seja limitado:

Resultado B. *Seja $Z = (X, Y)$ o sistema de Filippov em que os campos X, Y são quadráticos limitados bidimensionais, com parte quadrática em uma das formas (3) e com variedade de descontinuidade Σ dada pelo eixo coordenado horizontal. Exibimos condições sobre X e Y para que Z seja limitado.* — Ver Teorema 1.4.2 (página 26).

Os resultados do Capítulo 1 já foram publicados em [8].

Nos demais capítulos da tese, trabalhamos com sistemas *não autônomos*, ou seja, temos uma dependência explícita da variável t , na equação (1).

O Capítulo 2 apresenta uma equação diferencial que é um importante modelo de problema de *controle automático* (ver [9], página 504, para maiores detalhes):

$$y'' + \eta \operatorname{sgn}(y) = \theta y + \alpha \operatorname{sen}(\beta t) \quad (4)$$

em que todos os parâmetros $\eta, \theta, \alpha, \beta$ são constantes reais e $\eta \neq 0$. A função $u \mapsto \operatorname{sgn}(u)$ é a função sinal: $\operatorname{sgn}(u) = -1$ se $u < 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$, $\operatorname{sgn}(u) = 1$ se $u > 0$.

O principal objetivo deste capítulo é discutir a existência de soluções periódicas para a equação (4). Consideramos valores arbitrários dos parâmetros e mostramos que existem limites explícitos que garantem a existência de soluções periódicas *típicas*.

Iniciamos com o estudo de soluções da equação autônoma, em que não há o termo *forçante* $\alpha \sin(\beta t)$. Tal equação produz um sistema autônomo planar ($x_1 = y, x_2 = y'$) com a propriedade de *reversibilidade* para campos de vetores descontínuos, introduzido por Jacquemard e Teixeira em [10]. Obtemos, a depender do sinal de η , um *contínuo* de órbitas periódicas, conforme a Figura 3.

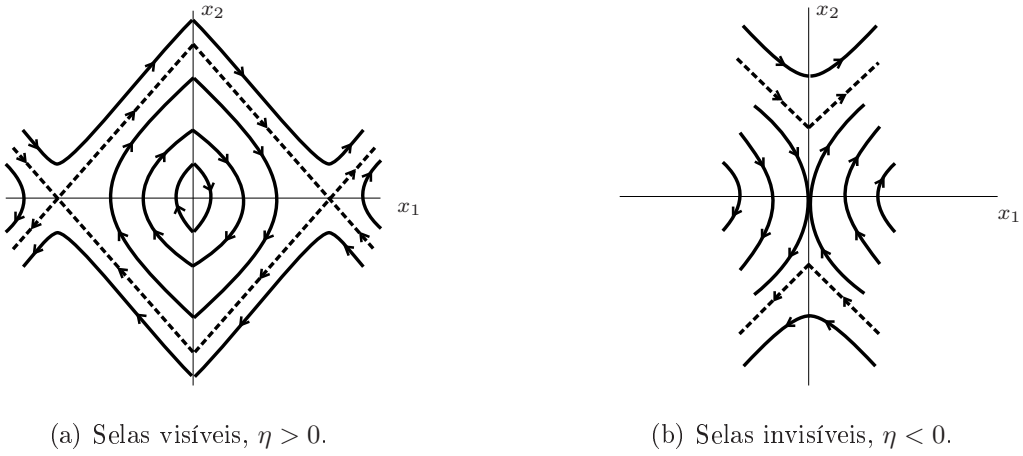


Figura 3: Retratos de fase da equação (4) com $\alpha = 0$ e $\theta > 0$.

Quando a equação autônoma é *perturbada* por uma função real $t \mapsto F(t)$, contínua e T -periódica, uma questão natural é estudar a persistência e o surgimento de soluções periódicas para a nova equação. A Figura 4 ilustra algumas destas soluções.

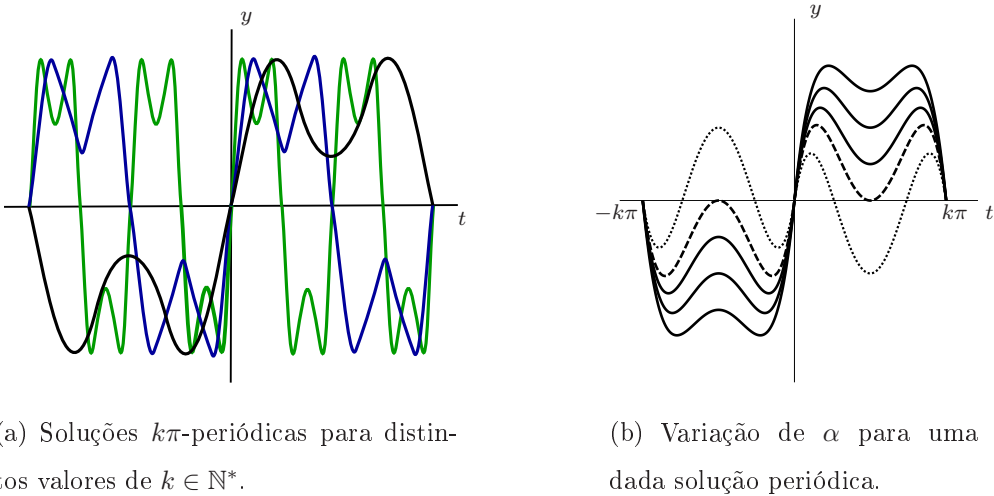


Figura 4: Soluções periódicas da equação (4) com $\eta > 0$ e $\theta > 0$.

No modelo particular de controle automático para embarcações, F corresponde a uma

ondulação periódica do mar. A escolha do termo forçante $\alpha \sin(\beta t)$ justifica-se por certa propriedade de simetria, podendo-se tomar F como uma função ímpar, e pela expansão de F em série de Fourier, admitindo o primeiro termo desta série como uma primeira “aproximação” para tal função.

A dinâmica da equação (4) é estudada em torno da origem, que é uma *singularidade típica* de sistemas dinâmicos não suaves. Por isso, consideramos as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = \rho$. Quando $\theta < 0$, mostramos que os casos $\eta > 0$ e $\eta < 0$ são similares. Já se $\theta \geq 0$, a dinâmica é drasticamente diferente quando η troca de sinal.

Admitimos α como o parâmetro para uma família de soluções. Variando este parâmetro, encontramos soluções que são e que não são periódicas. Na sub-família de soluções periódicas, existe um limitante α^* que, extrapolado, faz com que a solução perca a sua periodicidade. Na figura 4(b) a solução correspondente a α^* é a tracejada.

Temos então, os principais resultados do Capítulo 2, reunidos no enunciado abaixo.

Resultado C. *Considere a equação (4) com condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = \rho$. Para η, θ fixos, encontramos condições em $\alpha = \alpha(\eta, \theta, \rho)$ para a existência de soluções periódicas da equação (4) — Ver Teorema (A), Teorema 2.3.1, Teorema 2.3.2, Teorema 2.3.3, Teorema 2.3.4, Teorema 2.3.5 e Teorema 2.3.6.*

O estudo realizado no Capítulo 2 é uma complementação do trabalho feito em [11] e gerou um artigo, cuja referência é [12].

No Capítulo 3, consideramos equações diferenciais ordinárias de segunda ordem não autônomas por partes

$$x'' = f(t, x, x') = \begin{cases} f_1(t, x, x') & \text{se } h(t, x, x') \leq 0 \\ f_2(t, x, x') & \text{se } h(t, x, x') \geq 0 \end{cases}, \quad (5)$$

sendo f_1, f_2, h funções reais de classe C^{r-1} , $r \geq 2$. Analisamos o conceito de solução deste tipo de equação e determinamos condições analíticas que são satisfeitas por soluções típicas. Além disso, a existência e unicidade de soluções e soluções do tipo *deslizante* são estudadas.

A questão inicial deste capítulo é compreender o que se entende por solução da equação (5). Considere, por exemplo, $h(t, x, x') = x'$ e $t \mapsto x_i(t)$ a solução de $x'' = f_i(t, x, x')$ tal que $x(t_0) = 0$, $x'(t_0) = 0$ para $i = 1, 2$, conforme a Figura 5.

No caso representado na Figura 5(a), podemos compreender como solução da equação diferencial, uma função que alterna de x_2 para x_1 no instante $t = t_0$. Uma solução

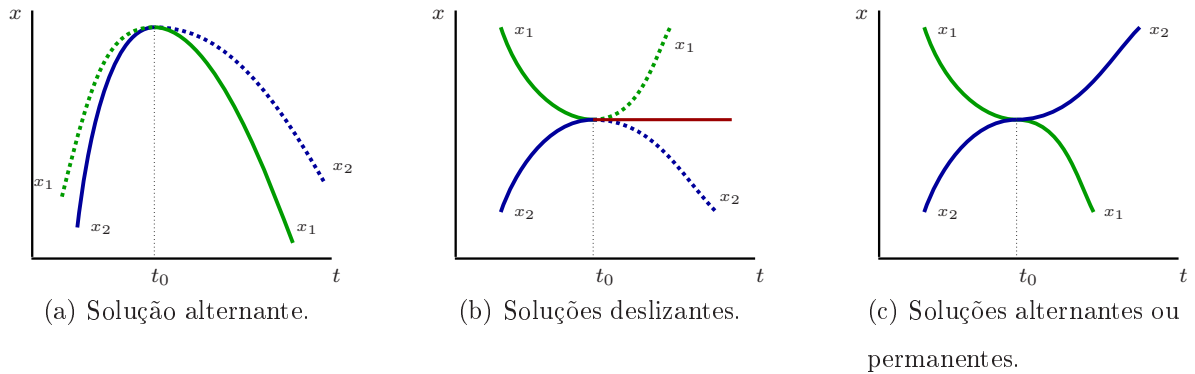


Figura 5: Algumas possibilidades de solução da equação (5) com $x(t_0) = x'(t_0) = 0$.

deste tipo é chamada de solução *alternante* ou *de troca*. Já no caso da Figura 5(b), quando $t \geq t_0$ temos uma impossibilidade tanto para x_1 quanto para x_2 . Nesse caso, consideramos a solução de $x' = 0$ até que uma das impossibilidades seja vencida. Quando isto ocorre, dizemos que a solução é *deslizante* ou *de deslize*. Na Figura 5(c) temos outras possibilidades, em que a solução pode ou não alternar de uma para outra. Se não alterna, dizemos que a solução é *permanente*.

Os últimos dois casos da Figura 5 mostram que o problema não tem unicidade de soluções. E isto ocorre apenas em pontos da curva solução para os quais $h(t, x, x') = 0$, o que torna importante a análise de tal curva.

O conjunto de funções diferenciáveis que satisfazem a equação implícita $h(t, x, x') = 0$ é chamado *conjunto descontinuidade* da equação (5).

Muitos estudos [11, 13, 14, 15, 16] lidam com o problema de determinar soluções periódicas deste tipo de equação em que $h(t, x, x') = x - g(t)$ para alguma função g de classe \mathcal{C}^1 . Todavia, as soluções obtidas neste caso (como as do Capítulo 2) não são do tipo deslizante, que são as consideradas neste capítulo.

Nos trabalhos [17, 18, 19] os autores consideraram um caso particular de (5), o oscilador com atrito (ver Figura 6) descrito pela equação

$$x'' + x + F \operatorname{sgn}(x') = \gamma \operatorname{sen}(\omega t) \quad (6)$$

em que os parâmetros F, γ, ω são constantes reais que correspondem, respectivamente, à intensidade da fricção, amplitude e frequência do termo *forçante*. O conjunto de descontinuidade, que é dado por soluções de $x' = 0$, corresponde fisicamente à ausência de movimento no oscilador.

As soluções da equação (6) podem ser tais que $x' < 0$ ou $x' > 0$. Porém há uma

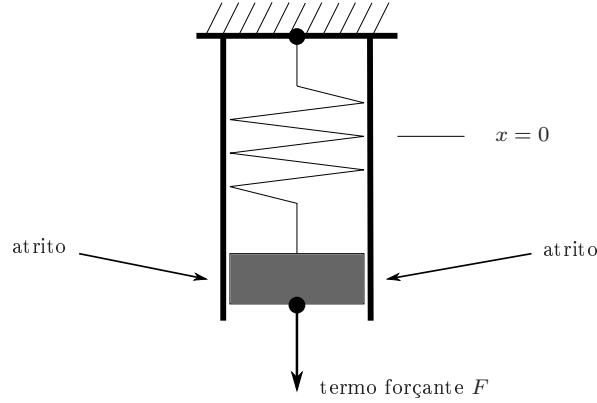


Figura 6: Oscilador com atrito.

terceira possibilidade $x' = 0$ na qual a solução pode “estacionar” por algum instante de tempo. O termo “estacionar” pode ser entendido como “deslizar” no contexto do Capítulo 3 e significa que a solução satisfaz para algum intervalo de tempo, a equação implícita $h(t, x, x') = 0$. Provamos então o primeiro resultado do Capítulo 3, que dá uma condição necessária para a existência de soluções deslizantes:

Resultado D. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ e $U \subset \mathbb{R}^2$ abertos. Considere $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável e $h : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, sendo 0 um valor regular de h . Se o conjunto $H_x = \{t \in I \mid h(t, x(t), x'(t)) = 0\}$ tem medida positiva então existe $t^* \in H_x$ tal que $h_{x'}(t^*, x(t^*), x'(t^*)) \neq 0$. — Ver Proposição 3.1.1 (página 64).*

Este resultado diz que se $h_{x'} \equiv 0$ então H_x tem medida nula, ou seja, as soluções da equação (5) não são deslizantes. Isto ocorre com as soluções da equação estudada no Capítulo 2, já que $h(t, x, x') = x$. Em seguida, damos condições suficientes para uma solução ser do tipo deslizante:

Resultado E. *Considere a equação (5) e $p = (t_0, x_0, x'_0) \in I \times U$ tal que $h(p) = 0$ e $h_{x'}(p) \neq 0$. Se*

$$\min_{i=1,2} \{f_i(p)\} < -\frac{h_t(p) + x'_0 h_x(p)}{h_{x'}(p)} < \max_{i=1,2} \{f_i(p)\}$$

então uma solução $x(t)$ que satisfaz $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = x'_0$ é uma solução deslizante e $q = (t_0, x_0)$ é um ponto de deslize no gráfico de x . — Teorema 3.3.1 (página 71).

Ao final do Capítulo 3, damos condições para o problema ter unicidade de soluções:

Resultado F. *Considere a equação (5) satisfazendo $x(t_0) = x_0$ e $x'_0(t_0) = x'_0$. Determinamos condições para a existência e unicidade local de soluções de (5). — Teorema 3.3.2 (página 72).*

O estudo do Capítulo 3 gerou o artigo de referência [20].

Capítulo 1

Sistemas de Filippov quadráticos e limitados no plano

Estudamos neste capítulo sistemas de Filippov $Z = (X, Y)$ quadráticos bidimensionais. Damos condições para que tais sistemas sejam positivamente limitados.

Nas duas primeiras seções abordamos de modo introdutório a teoria de Filippov para campos de vetores descontínuos e apresentamos resultados conhecidos sobre campos quadráticos, da teoria clássica.

Após a parte introdutória descrita no parágrafo anterior, apresentamos definições e conceitos preliminares para, enfim, enunciar e demonstrar os resultados principais.

1.1 Teoria introdutória de sistemas de Filippov

Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^n com fecho compacto e Σ uma subvariedade mergulhada de codimensão 1 de \mathbb{R}^n dada por $\Sigma = h^{-1}(0)$, em que $h : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe \mathcal{C}^r , $r \geq 1$. Admita que 0 é um valor regular de h , ou seja, o vetor gradiente de h é não nulo em cada ponto da variedade de codimensão 1: $\nabla h(x) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \in h^{-1}(0)$.

Denote por $\mathfrak{X}^{n,r}(\Omega)$ ao conjunto de campos de vetores sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de classe \mathcal{C}^r . Ao escrevermos r , fica subentendida a condição $r \geq 1$.

Considere os conjuntos $\Sigma^- = h^{-1}((-\infty, 0])$ e $\Sigma^+ = h^{-1}([0, +\infty))$, dados pelas imagens inversas dos referidos intervalos pela função h . A fronteira comum destes conjuntos é a variedade Σ , que divide o aberto Ω em duas partes.

Definição 1.1.1. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}^{n,r}(\Omega)$. Um campo de vetores descontínuo sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação*

$$Z(x) = \begin{cases} X(x) & \text{se } x \in \Sigma^- \\ Y(x) & \text{se } x \in \Sigma^+ \end{cases}. \quad (1.1)$$

O conjunto de campos de vetores descontínuos sobre um aberto Ω de \mathbb{R}^n é denotado por $\mathfrak{X}^{n,r}(\Omega, h)$. A variedade $\Sigma = h^{-1}(0)$ é chamada de *variedade de descontinuidade*. Observe que $Z|_{\Sigma^-} = X$, $Z|_{\Sigma^+} = Y$ e $\Sigma = \Sigma^- \cap \Sigma^+$.

Definição 1.1.2. *Um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem*

$$x' = Z(x) \quad (1.2)$$

em que $Z \in \mathfrak{X}^{n,r}(\Omega, h)$, com as convenções de Filippov [1], é chamado de sistema de Filippov e é denotado simplesmente por $Z = (X, Y)$.

Apesar de já citado na observação acima, o termo *órbita* de um sistema de Filippov carece de um entendimento mais claro, uma vez que não estamos na presença de continuidades e das condições de Lipschitz. Foi Filippov [1] quem sistematizou o conceito de órbitas para tais sistemas. Sua ideia foi dar regras, conhecidas como “convenções de Filippov”, para a transição de órbitas entre as regiões Σ^- e Σ^+ passando através da variedade de descontinuidade Σ e, também, para a permanência das órbitas na mesma. São três as convenções de Filippov, uma para cada tipo de ação dos campos distintos $X, Y \in \mathfrak{X}^{n,r}(\Omega)$ na variedade de descontinuidade Σ .

As ações dos campos na variedade de descontinuidade se dá em termos dos ângulos formados por cada campo com o vetor gradiente da variedade. Consideramos então as derivadas de Lie em um ponto $x \in \Sigma = h^{-1}(0)$:

$$X_i h(x) = \langle X_i(x), \nabla h(x) \rangle, \quad X_i^j h(x) = \langle X_i(x), \nabla X_i^{j-1} h(x) \rangle, \quad j \geq 2,$$

para $1 \leq i \leq 2$, com $X_1 = X$, $X_2 = Y$, $X_i^1 h = X_i h$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno usual em \mathbb{R}^n .

Distinguimos na variedade de descontinuidade Σ as seguintes regiões:

- (i) Σ_c é uma região de *costura* se $Xh \cdot Yh > 0$ em Σ ;
- (ii) Σ_d é uma região de *deslize* se $Xh > 0$ e $Yh < 0$ em Σ ;
- (iii) Σ_e é uma região de *escape* se $Xh < 0$ e $Yh > 0$ em Σ .

Em uma região de costura convencionam-se que uma órbita de $Z = (X, Y)$ que contém um ponto $x \in \Sigma$ é composta por uma órbita do campo que atinge a variedade Σ no ponto x e por uma órbita do campo que deixa a variedade Σ no mesmo ponto x . Tal órbita cruza Σ , daí o nome de costura. Ver a Figura 1.1.

$$\Sigma_c = \{x \in \Sigma \mid Xh(x) \cdot Yh(x) > 0\}$$

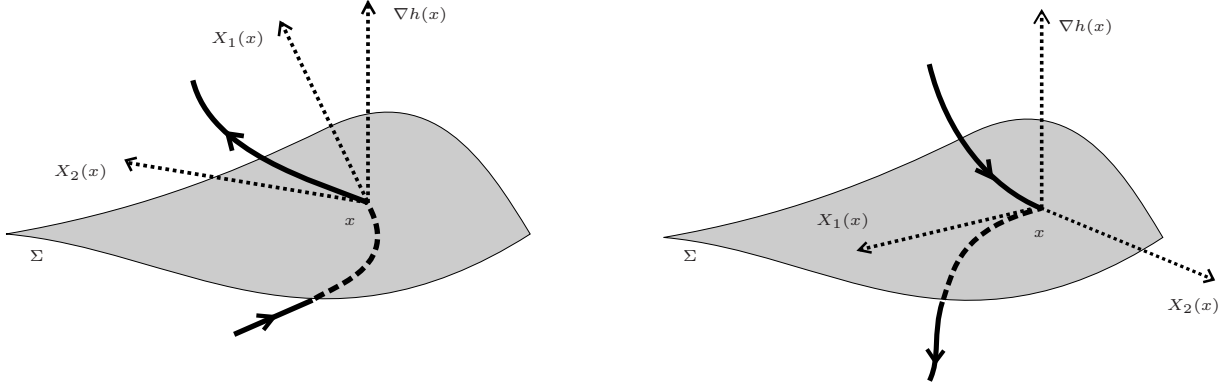


Figura 1.1: Um ponto x de costura para $n = 3$ em uma variedade de descontinuidade que é uma superfície de dimensão 2: $X_1h(x), X_2h(x) > 0$ (à esquerda) e $X_1h(p), X_2h(p) < 0$ (à direita).

A convenção em uma região de deslize é de que ambas as órbitas dos distintos campos X, Y atigem a variedade Σ no ponto x . Quando isto ocorre, surge uma terceira órbita que permanece em Σ , daí o nome de deslize.

$$\Sigma_d = \{x \in \Sigma \mid Xh(x) > 0, Yh(x) < 0\}$$

Já em uma região de escape a convenção é que ambas as órbitas dos distintos campos X, Y deixam a variedade Σ no ponto x , daí o nome de escape. Por questão de consistência matemática relacionada ao fluxo regressando no tempo, considera-se uma terceira órbita que também permanece em Σ .

$$\Sigma_e = \{x \in \Sigma \mid Xh(x) < 0, Yh(x) > 0\}$$

A Figura 1.2 ilustra as duas situações acima mencionadas.

Tanto em Σ_d quanto em Σ_e define-se um campo que é tangente à variedade Σ e que se escreve como combinação linear dos campos X e Y .

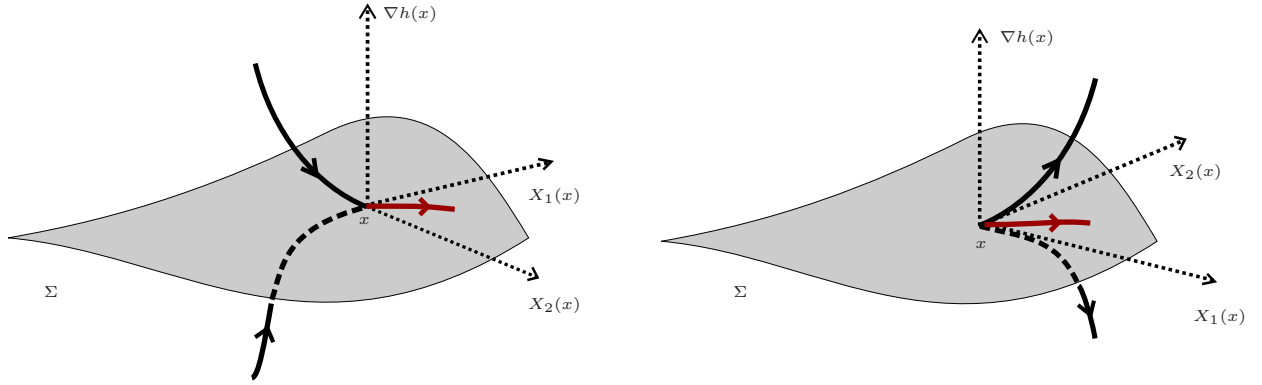


Figura 1.2: Um ponto x de deslize (à esquerda) e de escape (à direita) para $n = 3$ em uma variedade de descontinuidade que é uma superfície de dimensão 2: $X_1h(p) > 0, X_2h(p) < 0$ (à esquerda) e $X_1h(p) < 0, X_2h(p) > 0$ (à direita).

Definição 1.1.3. Um campo de vetores deslizante associado a $Z = (X, Y)$ é um campo n -dimensional Z_s sobre $\Sigma_s = \Sigma_d \cup \Sigma_e$ que é tangente a Σ , definido por

$$Z_s(x) = \begin{cases} Z_e(x) = p - x & \text{se } x \in \Sigma_e \\ Z_d(x) = -(-Z)_e(x) & \text{se } x \in \Sigma_d \end{cases},$$

onde p é o ponto do segmento que liga $x + X(x)$ a $x + Y(x)$ tal que $p - x$ é tangente a Σ .

A Figura 1.3 ilustra um campo deslizante.

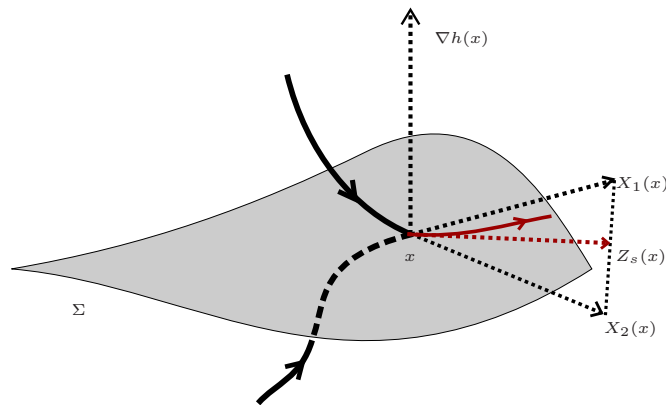


Figura 1.3: Um campo de vetores deslizante Z_s em um ponto $x \in \Sigma_s$.

Observação 1.1.1. Em regiões de costura não há campo deslizante. Este apenas está definido em pontos cujo produto das derivadas de Lie é negativo: $Xh(x) \cdot Yh(x) < 0$.

Os pontos da variedade de descontinuidade Σ são classificados da maneira que se segue. Dizemos que $x \in \Sigma$ é um ponto regular se

- $x \in \Sigma_c$ ou
- $x \in \Sigma_s$ e $Z_s(x) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

Os pontos de Σ que não são regulares são chamados de pontos *singulares*. Distinguimos dois subconjuntos do conjunto de pontos singulares, a saber: Σ_p e Σ_t . Um ponto $x \in \Sigma_p$ é chamado de *pseudo-equilíbrio* de Z e é caracterizado por $Z_s(x) = 0$. Um ponto $x \in \Sigma_t$ é chamado de *tangência* de Z e é caracterizado por $Xh(x) \cdot Yh(x) = 0$ (neste caso x é um ponto de contato tangente entre as órbitas de X e/ou Y com Σ).

As singularidades típicas de um sistema de Filippov são os pontos $x \in \Sigma$ que são pseudo-equilíbrios de Z (equilíbrios do campo deslizando) ou as tangências:

- $x \in \Sigma_s$ tal que $Z_s(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$ ou
- $x \in \Sigma$ tal que $Xh(x) \cdot Yh(x) = 0$.

Para um dado campo $W \in \mathfrak{X}^{n,r}(\Omega)$, dizemos que m é a *ordem de contato* da respectiva órbita Γ_W com a variedade Σ , em x , se $W^k h(x) = 0, \forall k = 0, \dots, m-1$ e $W^m h(x) \neq 0$. Para $W = X$ (respec. Y), dizemos que $x \in \Sigma$ é uma tangência *invisível* se a ordem de contato m de Γ_X (respec. Γ_Y) passando por x é par e $X^m h(x) > 0$ (respec. $Y^m h(x) < 0$). Dizemos que $x \in \Sigma$ é uma tangência *visível*, para $W = X$ (respec. $W = Y$), se a ordem de contato m de Γ_X (respec. Γ_Y) passando por x é ímpar apenas ou é par e $X^m h(x) < 0$ (respec. $Y^m h(x) > 0$). A Figura 1.4 ilustra um ponto de tangência visível com contato de ordem par.

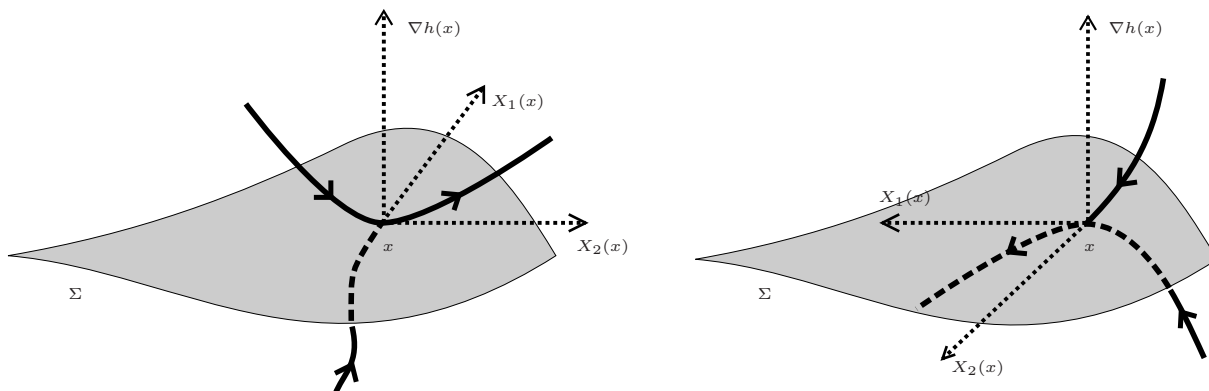


Figura 1.4: Um ponto $x \in \Sigma$ de tangência visível, onde $X_2h(x) = 0$ (à esquerda) e $X_1h(x) = 0$ (à direita). O ponto x tem ordem de contato par com Σ .

Vamos agora formalizar o conceito de órbita para um campo de vetores descontínuo.

Seja $W \in \mathfrak{X}^{n,r}(\Omega)$. Denotamos o fluxo de W por $\phi_W(t, x)$. Então

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_W(t, x) = W(\phi_W(t, x)), \\ \phi_W(0, x) = x, \end{cases}$$

em que $t \in I = I(x, W) \subset \mathbb{R}$, I um intervalo que depende de p e W .

Definição 1.1.4. *Seja V uma vizinhança de $x \in \Sigma$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Uma órbita local $\phi_Z(t, x)$ de um campo de vetores de Filippov é definido da seguinte maneira, onde $\phi_Z(0, x) = x$:*

- *Para $x \in \Sigma^- \setminus \Sigma$ e $x \in \Sigma^+ \setminus \Sigma$, a órbita local é dada por $\phi_Z(t, x) = \phi_X(t, x)$ e $\phi_Z(t, x) = \phi_Y(t, x)$, respectivamente, com $t \in I$.*
- *Para $x \in \Sigma_c$ tal que $Xh(x) > 0$ e $Yh(x) > 0$, a órbita local é dada por $\phi_Z(t, x) = \phi_X(t, x)$ para $t \in I \cap \{t \leq 0\}$ e $\phi_Z(t, x) = \phi_Y(t, x)$ para $t \in I \cap \{t \geq 0\}$. Para o caso $Xh(x) < 0$ e $Yh(x) < 0$ a definição é a mesma, invertendo o tempo.*
- *Para $x \in \Sigma_e$, a órbita local é dada por $\phi_Z(t, x) = \phi_{Z_s}(t, x)$ para $t \in I \cap \{t \leq 0\}$ e $\phi_Z(t, x)$ é uma das órbitas $\phi_X(t, x)$, $\phi_Y(t, x)$ ou $\phi_{Z_s}(t, x)$ para $t \in I \cap \{t \geq 0\}$. Para $x \in \Sigma_d$ a definição é a mesma, porém invertendo o tempo.*
- *Para $x \in \Sigma_t$, a órbita local é dada por $\phi_Z(t, x) = \phi_1(t, x)$ para $t \in I \cap \{t \leq 0\}$ e $\phi_Z(t, x) = \phi_2(t, x)$ para $t \in I \cap \{t \geq 0\}$, onde ϕ_1, ϕ_2 é uma das órbitas ϕ_X, ϕ_Y ou ϕ_{Z_s} .*
- *Para $x \in \Sigma_p$, a órbita local é dada por $\phi_Z(t, x) = x$ para todo $t \in I$.*

Definição 1.1.5. *Uma órbita global $\Gamma_Z(t, x)$ de $Z \in \mathfrak{X}^{n,r}(\Omega, h)$ tal que $\Gamma_Z(0, x) = x$ é a união*

$$\Gamma_Z(t, x) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \{\sigma_i(t, x_i) \mid t_i \leq t \leq t_{i+1}\},$$

de órbitas locais $\sigma_i(t, p_i)$, preservando orientação e satisfazendo

$$\sigma_i(t_{i+1}, p_i) = \sigma_{i+1}(t_{i+1}, p_{i+1}) = p_{i+1}$$

e $t_i \rightarrow \pm\infty$ para $i \rightarrow \pm\infty$. Uma órbita global é dita positiva (respec. negativa) se $i \in \mathbb{N}$ (respec. $-i \in \mathbb{N}$) e $t_0 = 0$.

1.2 Campos de vetores quadráticos e limitados no plano

Nesta seção fazemos breves considerações sobre campos quadráticos e limitados no plano. Para estudos detalhados indicamos os trabalhos [4, 5, 6, 7].

Definição 1.2.1. *Seja $X \in \mathfrak{X}^{n,r}(\Omega)$. Um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem autônomo $x' = X(x)$ (ou apenas o campo X) é dito limitado se cada órbita permanece em um compacto para $t \geq 0$. Caso contrário, o sistema (ou o campo) é dito ilimitado.*

Considere um sistema de equações diferenciais ordinárias autônomo planar, sendo a origem $(0, 0)$ um ponto de equilíbrio:

$$x' = Ax + f_2(x), \quad (1.3)$$

em que $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ é uma matriz com coeficientes reais constantes, $f_2(x) = (P(x), Q(x)) \neq 0 \in \mathbb{R}^2$, $P(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ e $Q(x) = dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2$ com a, b, c, d, e, f constantes reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ e $d^2 + e^2 + f^2 \neq 0$.

Dentre estes sistemas é sabido (ver [5, 6]) que, a menos de equivalência, os limitados (para $t \geq 0$) são os que têm parte quadrática na forma $f_2(x) = (0, x_1x_2)$, $f_2(x) = (x_2^2, 0)$ ou $f_2(x) = (x_2^2, -x_1x_2 + cx_2^2)$ com $|c| < 2$ e restrições sobre os coeficientes da matriz A :

Teorema 1.2.1. *Seja $x' = Ax + f_2(x)$ um sistema quadrático autônomo planar, com um ponto de equilíbrio na origem $(0, 0)$, com parte quadrática como acima e com condição inicial $x(0) = x_0$.*

- (a) *Se $f_2(x) = (x_1x_2 + x_2^2, x_2^2)$, então o sistema tem uma órbita ilimitada (quando $t \rightarrow \infty$) para algum $x_0 \in \mathbb{R}^2$.*
- (b) *Se $f_2(x) = (0, x_1x_2)$, então o sistema tem todas as suas órbitas limitadas (para $t \geq 0$) se, e somente se, $a_{12} = 0$, $a_{11} < 0$ e $a_{22} \leq 0$.*
- (c) *Se $f_2(x) = (x_2^2, 0)$, então o sistema tem todas as suas órbitas limitadas (para $t \geq 0$) se, e somente se, $a_{21} = 0$, $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$ e $a_{11} + a_{22} < 0$.*
- (d) *Se $f_2(x) = (x_2^2, -x_1x_2 + cx_2^2)$, então o sistema tem todas as suas órbitas limitadas (para $t \geq 0$) se, e somente se, $|c| < 2$ e satisfaz uma das seguintes condições: (i) $a_{11} < 0$; (ii) $a_{11} = 0$ e $a_{21} = 0$; ou (iii) $a_{11} = 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{12} + a_{21} = 0$ e $ca_{21} + a_{22} \leq 0$.*

Demonstração. Ver [5, 6]. □

Denotamos por $\mathcal{Q}^2(\Omega) \subset \mathfrak{X}^{2,r}(\Omega)$ ao conjunto de campos de vetores quadráticos planares.

1.3 Definições e resultados preliminares

Definição 1.3.1. *Um sistema de Filippov $Z = (X, Y)$ (ou um campo descontínuo) é quadrático se os campos X, Y são quadráticos.*

Definição 1.3.2. *Um sistema de Filippov (ou um campo descontínuo) $Z = (X, Y)$ é limitado se todas as suas órbitas globais permanecem em um compacto para $t \geq 0$. Caso contrário, $Z = (X, Y)$ é dito ilimitado.*

A partir de agora, consideraremos a variedade de descontinuidade

$$\Sigma = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}.$$

A primeira questão que surge é a seguinte:

$$X, Y \text{ limitados} \implies Z = (X, Y) \text{ limitado?}$$

A proposição abaixo nos diz que a resposta, em geral, é negativa.

Proposição 1.3.1. *Existem campos $X, Y \in \mathcal{Q}^2$ limitados tal que $Z = (X, Y)$ não é limitado.*

Demonstração. Considere $h(x_1, x_2) = x_2$ e $Z = (X, Y)$ dado por

$$X(x_1, x_2) = (2 + 3x_2 + x_2^2, -1 - x_2) \quad \text{e} \quad Y(x_1, x_2) = (-1 + x_2^2, 2 - 2x_2).$$

Aplicando o item (c) do Teorema 1.2.1, concluímos que X e Y são limitados. A variedade Σ , formada pelos pontos $(x_1, 0)$, é tal que $\Sigma = \Sigma_d$ e o campo deslizante é $Z_s(x_1, 0) = (1, 0)$. Este campo não tem equilíbrio e sua órbita é ilimitada. Portanto $Z = (X, Y)$ é ilimitado. □

Denotamos por $\mathcal{Q}^2(\Omega, h)$ ao conjunto de campos de vetores descontínuos quadráticos planares.

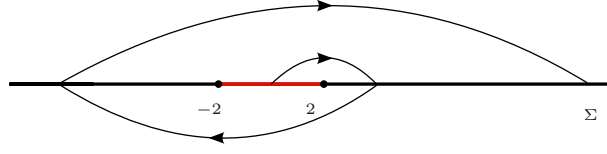


Figura 1.5: Uma órbita global ilimitada de $Z = (X, Y)$ passando por pontos de costura, com X e Y limitados.

Sejam $x = (x_1, x_2)$, $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ pontos de \mathbb{R}^2 e considere $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$ e f_2, g_2 dadas como em (1.3).

A variedade de descontinuidade neste capítulo é a curva (dimensão 1) em \mathbb{R}^2 dada por $\Sigma = h^{-1}(0)$ com $h(x_1, x_2) = x_2$. O sistema de Filippov $Z = (X, Y)$ considerado é

$$Z(x) = \begin{cases} X(x) = A(x - p) + f_2(x - p) & \text{se } x_2 \geq 0 \\ Y(x) = B(x - q) + g_2(x - q) & \text{se } x_2 \leq 0 \end{cases}. \quad (1.4)$$

Já mencionamos que o fato de X, Y serem campos quadráticos limitados não é suficiente para que $Z = (X, Y)$ seja limitado. O exemplo considerado nos deu a ilimitação na região de deslize Σ_d . Porém, $Z = (X, Y)$ também pode ser ilimitado com órbitas globais passando apenas por regiões de costura Σ_c .

Segunda demonstração da Proposição 1.3.1. Considere o campo $Z \in \mathcal{Q}^2(\Omega, h)$ dado por

$$Z(x_1, x_2) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x_2 + 1)^2 \\ -(x_1 - 1)(x_2 + 1) \end{pmatrix} & \text{se } x_2 \geq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (x_2 - 1)^2 \\ -(x_1 + 1)(x_2 - 1) \end{pmatrix} & \text{se } x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Os pontos das retas $x_2 = -1$ e $x_2 = 1$ são equilíbrios de X e Y , respectivamente. Temos $\Sigma_t = \{-2, 2\}$, $\Sigma_e = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < x_1 < 2\}$ e $\Sigma_c = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < -2 \text{ ou } x_1 > 2\}$. O campo deslizante Z_s é limitado porém o campo descontínuo Z é ilimitado. A Figura 1.5 ilustra esta situação. \square

1.4 Resultados principais

O primeiro resultado deste capítulo estabelece condições suficientes sobre os campos X e Y e sobre o campo deslizante Z_s (em Σ) para que o sistema de Filippov $Z = (X, Y)$

seja limitado, onde X, Y são campos quadráticos e limitados.

Teorema 1.4.1. *Seja $Z = (X, Y) \in \mathcal{Q}^2(\Omega, h)$ com X, Y limitados e $h(x_1, x_2) = x_2$.*

(a) *Se $\Sigma = \Sigma_s$, ou a cardinalidade de Σ_t (denotada por $\#\Sigma_t$) é 1 e Σ_s é ilimitado, ou $\#\Sigma_t \geq 2$ e Σ_c é limitado, então Z é limitado se, e somente se, o campo unidimensional Z_s^* identificado ao campo deslizante Z_s é tal que $Z_s^*(x_1) \leq 0$ próximo de $x_1 = +\infty$ e $Z_s^*(x_1) \geq 0$ próximo de $x_1 = -\infty$.*

(b) *Se $\Sigma = \Sigma_c$ então $Z = (X, Y)$ é limitado.*

Demonstração. (a) Suponha que $\Sigma = \Sigma_s$. Então, o campo deslizante Z_s é identificado a um campo unidimensional Z_s^* . Portanto Z é limitado se, e somente se, $Z_s^*(x_1) \leq 0$ próximo de $x_1 = +\infty$ e $Z_s^*(x_1) \geq 0$ próximo de $x_1 = -\infty$. Seja $\#\Sigma_t = 1$ e Σ_s ilimitado. Denote $(x^t, 0) \in \Sigma_t$. A única possibilidade de Z_s ser ilimitado acontece em regiões de deslize ou escape pois se Z tem uma órbita global ilimitada passando pela região de costura Σ_c , necessariamente existem pelo menos dois pontos distintos $(z, 0)$ e $(w, 0)$ de Σ_c com $Xh(z, 0), Yh(z, 0) > 0$ e $Xh(w, 0), Yh(w, 0) < 0$. Logo, existe $y^t \neq x^t$ tal que $Xh(y^t, 0) \cdot Yh(y^t, 0) = 0$, o que não é possível pois $\#\Sigma_t = 1$. No último caso, $\#\Sigma_t \geq 2$ e Σ_c limitado, a demonstração é análoga aos casos anteriores.

(b) Se $\Sigma = \Sigma_c$ então a única possibilidade de uma órbita global ser ilimitada acontece se ela contiver pelo menos dois pontos distintos de Σ_c . Assim, existe x_1 tal que $Xh(x_1, 0) = 0$ ou $Yh(x_1, 0) = 0$ e, portanto, $\Sigma_t \neq \emptyset$, o que é impossível pois $\Sigma = \Sigma_c$. Portanto Z é limitado. \square

Consideremos agora $Z = (X, Y)$ onde X (respec. Y) é dado por $Ax + f_2(x)$ (respec. $Bx + g_2(x)$) como no Teorema 1.2.1 itens (b), (c) ou (d). Seja

$$Q_i^p = \{F_i \in \mathfrak{X}^{2,r}(\Omega) \mid F_i(x) = A^{(i)}(x - p) + f_2^{(i)}(x - p)\} \text{ para } i = 1, \dots, 5$$

o conjunto de campo de vetores quadráticos que satisfazem as seguintes condições

$$A^{(1)} = (a_{ij})_{2 \times 2} \text{ com } a_{11} < 0, a_{12} = 0, a_{22} \leq 0;$$

$$A^{(2)} = (a_{ij})_{2 \times 2} \text{ com } a_{11} \leq 0, a_{21} = 0, a_{22} \leq 0, a_{11} + a_{22} < 0;$$

$$A^{(3)} = (a_{ij})_{2 \times 2} \text{ com } a_{11} < 0;$$

$$A^{(4)} = (a_{ij})_{2 \times 2} \text{ com } a_{11} = a_{21} = 0;$$

$$A^{(5)} = (a_{ij})_{2 \times 2} \text{ com } a_{11} = 0, a_{21} \neq 0, a_{12} + a_{21} = 0, ca_{21} + a_{22} \leq 0;$$

$$\begin{aligned}
f_2^{(1)}(y) &= (0, y_1 y_2); \\
f_2^{(2)}(y) &= (y_2^2, 0); \\
f_2^{(3)}(y) &= f_2^{(4)}(y) = f_2^{(5)}(y) = (y_2^2, -y_1 y_2 + c y_2^2).
\end{aligned}$$

A constante c nas expressões de $f_2^{(3)}$, $f_2^{(4)}$, $f_2^{(5)}$ é tal que $|c| < 2$, de acordo com o Teorema 1.2.1 e $y = x - p$ com $y = (y_1, y_2)$.

Defina $Q^p = \bigcup_{i=1}^5 Q_i^p$. Para $p, q \in \mathbb{R}^2$ denote $Q^{pq} = Q^p \times Q^q$. Assim $Q^{pq} = \bigcup_{i,j=1}^5 B_{ij}$ com $B_{ij} \cap B_{kl} = \emptyset$ se $i \neq k$ ou $j \neq l$ onde $B_{ij} = Q_i^p \times Q_j^q$.

A partir de agora, usamos a_{ij} para nos referirmos aos coeficientes da matriz da parte linear do campo X e usamos b_{ij} para nos referirmos aos coeficientes da parte linear do campo Y .

Teorema 1.4.2. *Seja $Q^{pq} = Q^p \times Q^q$ um subconjunto de $\mathcal{Q}^2(\Omega, h)$ como descrito acima e $\Sigma = h^{-1}(0)$ onde $h(x_1, x_2) = x_2$. Existe $B_{ij}^L \subset B_{ij}$, $B_{ij}^L \neq \emptyset$, tal que qualquer $Z = (X, Y) \in B_{ij}^L$ é limitado. Além disso, a limitação é caracterizada pelo sinal de funções racionais que dependem dos parâmetros $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22})$.*

O Teorema 1.4.2 caracteriza os campos descontínuos $Z = (X, Y) \in Q^{pq}$ que são limitados. Para sua demonstração usamos os lemas abaixo.

Nos resultados abaixo denotamos por Q_t^0 o conjunto de campos descontínuos $Z \in Q^{pq}$ sem pontos de tangência, por Q_t^1 o conjunto de campos descontínuos que têm exatamente um ponto de tangência e por Q_t^2 o conjunto de campos descontínuos com exatamente dois pontos de tangência. Usamos a notação $[Xh \cdot Yh](x_1)$ para representar $Xh(x_1, 0) \cdot Yh(x_1, 0)$ com $(x_1, 0) \in \Sigma$.

Lema 1.4.1. *Considere $Z = (X, Y) \in Q^{pq}$. Se $[Xh \cdot Yh](x_1) \neq 0$ para algum $x_1 \in \mathbb{R}$ então $\#\Sigma_t = 0, 1$ ou 2 . Além disso, se $Xh \cdot Yh \equiv 0$ então Z é limitado.*

Demonstração. Seja $Z = (X, Y) \in \mathcal{Q}^2(\Omega, h)$ e suponha que $[Xh \cdot Yh](x_1) \neq 0$ para algum $x_1 \in \mathbb{R}$. Então Z tem no máximo 4 pontos de tangência. De fato, os pontos de tangência são soluções da equação $Xh(x) \cdot Yh(x) = 0$ com $x = (x_1, 0)$. Escrevemos

$$Z(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 y_1^2 + a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2 \\ a_4 y_1^2 + a_5 y_1 y_2 + a_6 y_2^2 \end{pmatrix} & \text{se } x_2 \geq 0, \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 z_1^2 + b_2 z_1 z_2 + b_3 z_2^2 \\ b_4 z_1^2 + b_5 z_1 z_2 + b_6 z_2^2 \end{pmatrix} & \text{se } x_2 \leq 0, \end{cases}$$

com $x = (x_1, x_2)$, $y_1 = x_1 - p_1$, $y_2 = x_2 - p_2$, $z_1 = x_1 - q_1$, $z_2 = x_2 - q_2$ onde $p = (p_1, p_2)$ e $q = (q_1, q_2)$ são pontos de equilíbrio de X e Y respectivamente. Assim

$$\begin{aligned} Xh(x_1, 0) &= \langle X(x_1, 0), \nabla f(x_1, 0) \rangle = \\ &= a_4 x_1^2 + (a_{21} - 2a_4 p_1 - a_5 p_2) x_1 + (a_4 p_1^2 - a_{21} p_1 - a_{22} p_2 + a_5 p_1 p_2 + a_6 p_2^2), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Yh(x_1, 0) &= \langle Y(x_1, 0), \nabla f(x_1, 0) \rangle = \\ &= b_4 x_1^2 + (b_{21} - 2b_4 q_1 - b_5 q_2) x_1 + (b_4 q_1^2 - b_{21} q_1 - b_{22} q_2 + b_5 q_1 q_2 + b_6 q_2^2). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} Xh(x_1, 0) \cdot Yh(x_1, 0) &= a_4 b_4 x_1^4 + [a_4 (b_{21} - 2b_4 q_1 - b_5 q_2) + b_4 (a_{21} - 2a_4 p_1 - a_5 p_2)] x_1^3 + \\ &+ [a_4 (b_4 q_1^2 - b_{21} q_1 - b_{22} q_2 + b_5 q_1 q_2 + b_6 q_2^2) + b_4 (a_4 p_1^2 - a_{21} p_1 - a_{22} p_2 + a_5 p_1 p_2 + a_6 p_2^2) + \\ &+ (a_{21} - 2a_4 p_1 - a_5 p_2) (b_{21} - 2b_4 q_1 - b_5 q_2)] x_1^2 + \dots \end{aligned}$$

Observe que $Xh(x_1, 0) \cdot Yh(x_1, 0)$ é um polinômio de grau menor do que ou igual a 4, dependendo dos coeficientes. Logo este polinômio tem no máximo 4 raízes reais.

Se $Z = (X, Y) \in Q^{pq}$ e $[Xh \cdot Yh](x_1) \neq 0$ para algum $x_1 \in \mathbb{R}$, então o campo descontínuo Z tem no máximo 2 pontos de tangência. De fato, isso segue imediatamente pois $a_1 = a_2 = a_4 = b_1 = b_2 = b_4 = 0$ em cada um dos casos para Q_i^p .

Provamos agora a limitação de Z quando $Xh \cdot Yh \equiv 0$ em Σ . Neste caso, concluímos que $\Sigma = \Sigma_t$. Se uma trajetória de $Z = (X, Y)$ é ilimitada então uma órbita global passa por região de costura e retorna ou a órbita escapa pelo campo deslizante. Uma vez que $\Sigma_c = \Sigma_s = \emptyset$, isso não pode ocorrer. \square

Observação 1.4.1. *O número 4 na prova do Lema 1.4.1 é realizável. Façamos a seguinte escolha: $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = b_4 = a_{11} = a_{21} = b_{22} = p_2 = q_1 = 1$, $a_3 = a_6 = -2$, $b_1 = b_{12} = b_{21} = 2$, $b_2 = b_5 = p_1 = 0$, $b_3 = -21$, $b_6 = -4$, $a_{12} = 3$, $a_{22} = q_2 = -1$ e $b_{11} = 4$. Assim obtemos $\Sigma_t = \{\pm 1, \pm\sqrt{3}\}$.*

Lema 1.4.2. *Considere $Z \in Q^{pq} \cap Q_t^0$. Então $\Sigma = \Sigma_s$ ou $\Sigma = \Sigma_c$.*

(a) *Se $\Sigma = \Sigma_s$ então $Z \in B_{ij}$ é limitado se, e somente se, $R_{ij}^{pq} = A_n/B_m < 0$ onde A_n é o coeficiente do termo de maior grau de $\det[X, Y](x_1, 0)$ com $n = \partial(\det[X, Y])$, onde ∂ é a notação para o grau de um polinômio e B_m é o coeficiente do termo de*

maior grau de $Y_2(x_1, 0) - X_2(x_1, 0)$ com $m = \partial(Y_2 - X_2)$ e $n \geq m$. Se Σ_s é composto somente por pontos de equilíbrio de Z_s então Z é trivialmente limitado.

(b) Se $\Sigma = \Sigma_c$ então Z é limitado.

Demonstração. Por hipótese $\#\Sigma_t = 0$ ($\Sigma_t = \emptyset$). Isto implica que $\Sigma_s = \emptyset$ ou $\Sigma_c = \emptyset$, caso contrário (se $\Sigma_s \neq \emptyset$ e $\Sigma_c \neq \emptyset$) deveríamos ter pelo menos um ponto de tangência, pois $Xh \cdot Yh$ é uma função contínua, $[Xh \cdot Yh](z) > 0$ e $[Xh \cdot Yh](w) < 0$ para $(z, 0) \in \Sigma$ e $(w, 0) \in \Sigma$. Portanto $\Sigma = \Sigma_s$ ou $\Sigma = \Sigma_c$.

(a) Provamos apenas o caso $i = j = 1$. Os outros casos são similares. Temos $Z = (X, Y) \in B_{11} = Q_1^p \times Q_1^q$ onde

$$Q_1^p = \{F_1 \in \chi^r(\Omega) : F_1(x) = A^{(1)}(x - p) + f_2^{(1)}(x - p)\},$$

$$Q_1^q = \{F_1 \in \chi^r(\Omega) : F_1(x) = B^{(1)}(x - q) + f_2^{(1)}(x - q)\},$$

e $A^{(1)} = (a_{ij})_{2 \times 2}$ com $a_{11} < 0, a_{12} = 0, a_{22} \leq 0$, $B^{(1)} = (b_{ij})_{2 \times 2}$ com $b_{11} < 0, b_{12} = 0, b_{22} \leq 0$, $f_2^{(1)}(y) = (0, y_1 y_2)$ com $y = (y_1, y_2)$.

Se $\Sigma = \Sigma_s$, a expressão do campo deslizante Z_s (visto como um campo unidimensional) é

$$Z_S(x_1) = \frac{(x_1 - p_1)[(a_{11}(b_{21} - q_2) - b_{11}(a_{21} - p_2))(x_1 - q_1) - a_{11}b_{22}q_2] + b_{11}a_{22}p_2(x_1 - q_1)}{[(b_{21} - q_2) - (a_{21} - p_2)]x_1 - q_1(b_{21} - q_2) + p_1(a_{21} - p_2) - b_{22}q_2 + a_{22}p_2}.$$

(i) Suponha que $b_{21} \neq q_2$ e $a_{21} \neq p_2$. Assim $A_2 = a_{11}(b_{21} - q_2) - b_{11}(a_{21} - p_2)$ e $B_1 = (b_{21} - q_2) - (a_{21} - p_2)$. Temos

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} Z_S(x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{a_{11}(b_{21} - q_2) - b_{11}(a_{21} - p_2)}{(b_{21} - q_2) - (a_{21} - p_2)} x_1,$$

em que o símbolo ∞ representa $\pm\infty$. Portanto Z é limitada se, e somente se,

$$R_{11}^{pq} = \frac{a_{11}(b_{21} - q_2) - b_{11}(a_{21} - p_2)}{(b_{21} - q_2) - (a_{21} - p_2)} < 0.$$

(ii) Considere agora $b_{21} = q_2$ e $a_{21} = p_2$. Assim $A_1 = b_{11}a_{22}p_2 - a_{11}b_{22}q_2$, $B_0 = a_{22}p_2 - b_{22}q_2$ e temos

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} Z_S(x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{b_{11}a_{22}p_2 - a_{11}b_{22}q_2}{a_{22}p_2 - b_{22}q_2} x_1.$$

Portanto Z é limitado se, e somente se,

$$R_{11}^{pq} = \frac{b_{11}a_{22}p_2 - a_{11}b_{22}q_2}{a_{22}p_2 - b_{22}q_2} < 0.$$

(b) Se $\Sigma = \Sigma_c$ então $\Sigma_t = \Sigma_s = \emptyset$. A única possibilidade de uma órbita global de Z ser ilimitada acontece se ela contiver pelo menos dois pontos distintos de Σ_c . Se isto ocorre, existe z tal que $Xh(z, 0) = 0$ ou $Yh(z, 0) = 0$ e assim $(z, 0) \in \Sigma_t$. Portanto Z é limitado. \square

Lema 1.4.3. *Considere $Z \in Q^{pq} \cap Q_t^1$. Então $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_t \cup \Sigma_c$ com Σ_s e Σ_c ilimitados, $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_t$ ou $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_t$. Se $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_t \cup \Sigma_c$ com Σ_s e Σ_c ilimitados ou $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_t$ então $Z \in B_{ij}$ é limitado se, e somente se, $R_{ij}^{pq} = A_n/B_m < 0$ onde A_n é o coeficiente do termo de maior grau de $\det[X, Y](x_1, 0)$ com $n = \partial(\det[X, Y])$, B_m é o coeficiente do termo de maior grau de $Y_2(x_1, 0) - X_2(x_1, 0)$ com $m = \partial(Y_2 - X_2)$ e $n \geq m$. Se Σ_s é composto somente por pontos de equilíbrio de Z_S então Z é trivialmente limitado.*

Demonstração. Como $\#\Sigma_t = 1$ ($\Sigma_t = \{x^t\}$) então $[Xh \cdot Yh](x_1)$ é um polinômio de grau 1 ou 2. No primeiro caso, temos $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_t \cup \Sigma_c$ com Σ_s e Σ_c ilimitados. No outro caso, $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_t$ ou $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_t$. A única possibilidade de Z ser ilimitado, acontece em Σ_s pois se Z tem uma órbita global ilimitada passando por região de costura Σ_c então existe pelo menos dois pontos distintos $(z, 0)$ e $(w, 0)$ de Σ_c com $Xh(z, 0), Yh(z, 0) > 0$ e $Xh(w, 0), Yh(w, 0) < 0$. Deste modo, existe $y^t \neq x^t$ tal que $Xh(y^t) \cdot Yh(y^t) = 0$. O restante da demonstração é análogo à prova do item (a) do Lema 1.4.2. \square

Observação 1.4.2. *Se $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_t$ não podemos garantir que o sistema é limitado, conforme o seguinte exemplo.*

Exemplo 1.4.1. *Considere o campo descontínuo Z dado por*

$$Z(x_1, x_2) = \begin{cases} E \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x_2 + 1)^2 \\ -(x_1 - 1)(x_2 + 1) + (x_2 + 1)^2 \end{pmatrix} & \text{se } x_2 \geq 0, \\ F \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (x_2 - 1)^2 \\ -(x_1 - 3)(x_2 - 1) + (x_2 - 1)^2 \end{pmatrix} & \text{se } x_2 \leq 0, \end{cases}$$

com

$$E = -F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os pontos das retas $x_2 = -1$ e $x_2 = 1$ são equilíbrios de X e Y respectivamente. Temos $\Sigma_t = \{3\}$, $\Sigma_s = \emptyset$ e $\Sigma_c = \{x_1 \in \mathbb{R} : x_1 \neq 3\}$. A Figura 1.6 mostra uma órbita global ilimitada quando $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_t$.

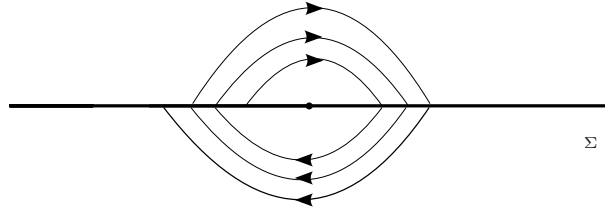


Figura 1.6: Um órbita global ilimitada de $Z = (X, Y)$ passando por pontos de costura, com X e Y limitados.

Lema 1.4.4. *Considere $Z \in Q^{pq} \cap Q_t^2$. Então $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_c \cup \Sigma_t$ com Σ_c limitado ou $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_c \cup \Sigma_t$ com Σ_s limitado. Se $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_c \cup \Sigma_t$ com Σ_c limitado então $Z \in B_{ij}$ é limitado se, e somente se, $R_{ij}^{pq} = A_n/B_m < 0$ onde A_n é o coeficiente do termo de maior grau de $\det[X, Y](x_1, 0)$ com $n = \partial(\det[X, Y])$, B_m é o coeficiente do termo de maior grau de $Y_2(x_1, 0) - X_2(x_1, 0)$ com $m = \partial(Y_2 - X_2)$ e $n \geq m$. Se Σ_s é composto somente por equilíbrios de Z_S então Z é trivialmente limitado.*

Demonstração. Para verificar que $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_c \cup \Sigma_t$ com Σ_c limitado ou $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_c \cup \Sigma_t$ com Σ_s limitado, basta fazer o estudo do sinal de $Xh \cdot Yh$. A prova é análoga à prova do item(a) do Lema 1.4.2. □

Observação 1.4.3. *Se $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_c \cup \Sigma_t$ não podemos garantir que o sistema é limitado. O exemplo na segunda demonstração da Proposição 1.3.1 ilustra esta situação.*

Demonstração do Teorema 1.4.2. Para definir o conjunto B_{ij}^L , consideramos o conjunto de sistemas quadráticos $(X, Y) \in B_{ij}$ que satisfazem as condições dadas nos Lemas 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3 e 1.4.4. Conclui-se assim a demonstração do Teorema 1.4.2. □

Capítulo 2

Soluções periódicas de uma classe de equações não autônomas

Neste capítulo investigamos a existência de soluções periódicas da equação

$$y'' + \eta \operatorname{sgn}(y) = \theta y + \alpha \operatorname{sen}(\beta t) \text{ com } \eta, \theta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \eta \neq 0, \beta > 0. \quad (2.1)$$

O estudo de conjuntos minimais típicos para equações diferenciais ordinárias autônomas e não autônomas, dadas por partes (cujos sistemas correspondentes são não suaves) tem atraído muitos esforços nos últimos anos. Equações desta natureza modelam muitos problemas em sistemas mecânicos e eletrônicos. Por exemplo, a equação $y'' + \operatorname{sgn}(y) = -y$ é um modelo particular de piloto automático para embarcações (ver [9], página 504). Em [14], foram dadas condições para a existência de soluções periódicas de sistemas dados pela equação $y'' + G(y) = F(t)$, em que F é uma função contínua e G é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mas não em 0.

Em muitas aplicações, busca-se compreender propriedades de simetria de modelos matemáticos dados por equações diferenciais ordinárias por partes. O conceito de *reversibilidade* para campos de vetores descontínuos foi introduzido em [10]. Em [21], a reversibilidade desempenha um importante papel no estudo dos sistemas acoplados para equações de segunda ordem. O trabalho [13] mostra como a teoria KAM pode ser usada para a análise de sistemas representados por $y'' + \eta \operatorname{sgn}(y) = -y + F(t)$, em que F é uma função periódica de classe \mathcal{C}^6 .

A função sinal $u \mapsto \operatorname{sgn}(u)$ introduzida nos trabalhos mencionados e neste capítulo, é definida por $\operatorname{sgn}(u) = -1$ se $u < 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$, $\operatorname{sgn}(u) = 1$ se $u > 0$.

Iniciamos o estudo considerando a equação autônoma $y'' + \eta \operatorname{sgn}(y) = \theta y$ com $\eta, \theta \in \mathbb{R}$, $\eta \neq 0$. Em seguida, perturbamos esta equação através de uma função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e T -periódica e, então, estudamos a existência de soluções periódicas para a equação $y'' + \eta \operatorname{sgn}(y) = \theta y + F(t)$. No modelo de piloto automático para embarcações, o termo *forçante* $F(t)$ corresponde à ondulação periódica da água.

Devido a propriedades de simetria na equação autônoma, assumimos que F é uma função ímpar, dada pela série de Fourier $\sum_n b_n \operatorname{sen}(2\pi n T^{-1}t)$. Consideramos então, o primeiro termo da série, que é uma aproximação para F , assumindo diretamente $F(t) = \alpha \operatorname{sen}(\beta t)$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. A razão da escolha do primeiro termo da série se deve à dificuldade (cada vez maiores) nos cálculos se considerarmos mais termos na série.

A hipótese $\beta > 0$ considerada na Eq. (2.1) não representa uma restrição ao problema, uma vez que se $\beta < 0$, a análise já está considerada na equação $y'' + \eta \operatorname{sgn}(y) = \theta y + \tilde{\alpha} \operatorname{sen}(\tilde{\beta}t)$ com $\tilde{\alpha} = -\alpha$ e $\tilde{\beta} = -\beta > 0$.

Fazendo um paralelo com o caso autônomo, lidamos principalmente com soluções periódicas $t \mapsto y(t)$ da Eq. (2.1) quando a função sinal $y \mapsto \operatorname{sgn}(y)$ é considerada e y anula-se duas vezes por período.

A dinâmica do sistema autônomo correspondente se dá em torno da origem, que é uma singularidade típica (um ponto de tangência) de sistemas dinâmicos não suaves. Portanto, consideramos para a Eq. (2.1), as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = \rho \in \mathbb{R}$.

O estudo apresentado neste capítulo estende a análise de [11], onde foi considerado o caso $\theta = 0$, $\eta > 0$.

2.1 Definições e resultados preliminares

Considere a equação dada em (2.1) com $\eta, \theta, \alpha, \beta$ constantes reais e $\eta \neq 0$.

Definição 2.1.1. *Uma função $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita solução da Eq. (2.1) se $y''(t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$ e $y''(t) + \eta = \theta y(t) + \alpha \operatorname{sen}(\beta t)$ em $\{t \in \mathbb{R} \mid y(t) > 0\}$ e $y''(t) - \eta = \theta y(t) + \alpha \operatorname{sen}(\beta t)$ em $\{t \in \mathbb{R} \mid y(t) < 0\}$.*

Definição 2.1.2. *Uma solução periódica $t \mapsto y(t)$ da Eq. (2.1) é dita simples quando a função $y \mapsto \operatorname{sgn}(y)$ é considerada e y anula-se duas vezes por período.*

Definição 2.1.3. *Seja $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução da Eq. (2.1). A solução y é dita singular se existe $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $y(t^*) = y'(t^*) = 0$. Caso contrário, y é dita regular.*

Para o caso autônomo ($\alpha = 0$), quando $\eta > 0$, a Eq. (2.1) $_{\theta=0}$ tem uma família de soluções periódicas que passam pela origem com inclinação não nula. Se perturbamos a equação autônoma, ou seja, se consideramos $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta=0}$, para $\eta > 0$, obtemos um conjunto discreto de soluções periódicas:

Proposição (A). *Se $\eta > 0$, a Eq. (2.1) $_{\theta=0}$ com $\alpha = 0$, tem uma família a um parâmetro de soluções periódicas. Além disso, para cada $\rho > 0$, existe uma única solução $t \mapsto y(t)$ tal que $y(0) = 0$ e $y'(0) = \rho$, de período $4\rho\eta^{-1}$.*

Teorema (A). *Assuma $\alpha \neq 0, \eta > 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta=0}$. Defina*

$$\kappa(\alpha, \eta) = \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \eta^2}}{\eta\pi}.$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \kappa(\alpha, \eta)$, existe uma única solução periódica simples $t \mapsto y_{[k]}(t)$ da Eq. (2.1) $_{\theta=0}$ tal que $y_{[k]}(0) = 0$, $y'_{[k]}(0) > 0$, de período $2k\pi\beta^{-1}$. Esta solução regular satisfaz $y'_{[k]}(0) = \frac{1}{2}(\eta k\pi - 2\alpha)\beta^{-1}$.

Estes resultados foram estabelecidos em [11]. A condição $y'(0) > 0$ não é uma restrição uma vez que uma solução da Eq. (2.1) $_{\theta=0}$ tal que $y(0) = 0$, $y'(0) < 0$ corresponde a uma solução $t \mapsto -y(t)$ da Eq. (2.1) $_{\theta=0}$ com derivada positiva na origem, considerada para o valor do parâmetro $-\alpha$.

O Teorema (A) dá um limite inferior tal que $k > \kappa(\alpha, \eta)$ é uma condição suficiente ($|\alpha| < \frac{1}{2}\eta\sqrt{k^2\pi^2 - 4}$) para a existência de uma solução regular periódica simples. Esta condição não é necessária, como pode ser visto no seguinte resultado (ver [11]):

Proposição (B). *Assuma $\eta > 0$ e $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta=0}$. Se $\alpha < \frac{1}{8}\eta\pi^2$, existe uma única solução periódica simples $t \mapsto y_{[1]}(t)$ tal que $y_{[1]}(0) = 0$, $y'_{[1]}(0) > 0$, de período $2\pi\beta^{-1}$. Esta solução regular satisfaz $y'_{[1]}(0) = \frac{1}{2}(\eta\pi - 2\alpha)\beta^{-1}$.*

A seguir, justificamos a escolha não restritiva $y'(0) \geq 0$, reduzimos os parâmetros da Eq. (2.1) através de um reescalonamento do tempo e tratamos da questão de simetria da Eq. (2.1), analisando a reversibilidade para o sistema não suave correspondente. Todo esse trabalho implica na redução da análise do problema.

Lema 2.1.1. *Uma função $t \mapsto y(t)$ é uma solução de $y'' + \eta \operatorname{sgn}(y) = \theta y + \alpha \operatorname{sen}(\beta t)$ com $y(0) = 0, y'(0) = \rho$ se, e somente se, $t \mapsto \tilde{y}(t) = -y(t)$ é uma solução de $y'' + \eta \operatorname{sgn}(y) = \theta y + \tilde{\alpha} \operatorname{sen}(\beta t)$ com $\tilde{y}(0) = 0, \tilde{y}'(0) = -\rho$ e $\tilde{\alpha} = -\alpha$.*

Demonstração. Segue imediatamente de $\text{sgn}(\tilde{y}(t)) = -\text{sgn}(y(t))$, $\tilde{y}'(t) = -y'(t)$ e $\tilde{y}''(t) = -y''(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. \square

O Lemma 2.1.1 permite assumir sem perda de generalidade que $\text{sgn}(y)(0^+) = 1$.

Lema 2.1.2. *Seja $y : [0, u[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y(0) = 0$ e sinal de y constante em $]0, u[$. Então $t \mapsto y(t)$ é uma solução da Eq. (2.1) se, e somente se, $s \mapsto x(s)$ definida em $[0, u\beta[$ por $x(s) = \beta^2 y(s\beta^{-1})$ é uma solução de*

$$x'' + \eta \text{sgn}(x) = \delta x + \alpha \text{sen}(s), \quad \delta = \theta\beta^{-2}. \quad (2.2)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade assumimos $y(t) > 0, \forall t \in]0, u[$. O caso $y(t) < 0$ é análogo. Se $x(s) = \beta^2 y(s\beta^{-1})$ então $t = s\beta^{-1}$, $x'(s) = \beta y'(t)$ e $x''(s) = y''(t)$. Temos também $\text{sgn}(x(s)) = \text{sgn}(\beta^2 y(t)) = \text{sgn}(y(t))$. Portanto $y''(t) + \eta = \theta y(t) + \alpha \text{sen}(\beta t)$ se, e somente se, $x''(s) + \eta = \theta\beta^{-2}x(s) + \alpha \text{sen}(s)$. Assim $y(t)$ é uma solução da Eq. (2.1) se, e somente se, $x(s)$ é uma solução da Eq. (2.2). A condição inicial $y(0) = 0, y'(0) = \rho$ é equivalente a $x(0) = 0, x'(0) = r$ com $r = \beta\rho$. \square

O próximo lema trata da questão de reversibilidade para a equação autônoma.

Considerando a mudança $y_1 = y, y_2 = y'$, associamos a Eq. (2.1), $\alpha = 0$, ao campo bidimensional descontínuo

$$Z_0 = y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + [\theta y_1 - \eta \text{sgn}(y_1)] \frac{\partial}{\partial y_2},$$

cujos conjunto de descontinuidade é $D(Z_0) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = 0\}$. Este campo descontínuo é reversível (ver [11]), ou seja, dada a *involução* $\varphi : (y_1, y_2) \mapsto (-y_1, y_2)$, o campo Z_0 satisfaz:

1. $\text{Fix}(\varphi) \subset D(Z_0)$;
2. $\forall p \in \mathbb{R}^2 \setminus D(Z_0), \varphi * Z_0(p) = -Z_0 \circ \varphi(p)$.

Lema 2.1.3. *Assuma $\alpha = 0$ na Eq. (2.1). O campo descontínuo Z_0 obtido por $y_1 = y, y_2 = y'$ é φ -reversível, onde $\varphi : (y_1, y_2) \mapsto (-y_1, y_2)$.*

Demonstração. De $y_1 = y, y_2 = y'$ escrevemos $Z_0(y_1, y_2) = (y_2, \theta y_1 - \eta \text{sgn}(y_1))$ com conjunto de descontinuidade $D(Z_0) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = 0\}$. Defina $\text{Fix}(\varphi) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(y_1, y_2) = (y_1, y_2)\}$. Então, claramente $\text{Fix}(\varphi) \subset D(Z_0)$. Consideramos agora $p \in \mathbb{R}^2 \setminus D(Z_0), p = (y_1, y_2)$. Assim, $(\varphi * Z_0)(y_1, y_2) = \varphi(y_2, \theta y_1 - \eta \text{sgn}(y_1)) = (-y_2, \theta y_1 - \eta \text{sgn}(y_1)) = -(y_2, -\theta y_1 + \eta \text{sgn}(y_1)) = -Z_0(-y_1, y_2) = -(Z_0 \circ \varphi)(y_1, y_2)$. Portanto Z_0 é φ -reversível. \square

Daqui em diante, neste capítulo, analisamos a Eq. (2.1) separando-a em dois casos: autônomo e não autônomo. Cada caso será dividido em três partes, a saber: *hiperbólico* ($\theta > 0$), *elíptico* ($\theta < 0$) e *parabólico* ($\theta = 0$) com $\eta < 0$. Em todos os casos, quando a equação autônoma é perturbada, são dadas condições para a existência de soluções periódicas, bem como uma obstrução para a existência de tais soluções, que é uma solução cujo gráfico tangencia o eixo $y = 0$, de descontinuidade da equação. Tal solução é singular.

Usamos as notações $\sinh(z)$, $\cosh(z)$, $\tanh(z)$ e $\operatorname{sech}(z)$ para representar as imagens de z pelas funções seno, cosseno, tangente e secantes hiperbólicas. Denotamos ainda $\operatorname{arctanh}(z)$ e $\operatorname{arcsech}(z)$ as imagens de z pelas funções inversas de tangente e secante hiperbólicas.

2.2 A equação autônoma $y'' + \eta \operatorname{sgn}(y) = \theta y$

Nesta seção analisamos as soluções da Eq. (2.1) sem a perturbação dada pelo termo forçante, ou seja, $\alpha = 0$. A equação corresponde a um sistema autônomo não suave e reversível. A depender do parâmetro θ , cada campo do sistema não suave ou tem um equilíbrio que é uma sela (visível ou invisível, a depender de η) no caso hiperbólico, ou um centro (visível ou invisível, a depender de η) no caso elíptico. No caso parabólico os campos não têm equilíbrio.

2.2.1 O caso hiperbólico $\theta > 0$

Considere a Eq. (2.1) com $\alpha = 0$. Mostramos que se $\eta > 0$, existe uma família de órbitas periódicas no retrato de fases, enquanto que se $\eta < 0$, todas as órbitas não triviais são ilimitadas. Ver a Figura 2.1.

Proposição 2.2.1. *Assuma $\alpha = 0, \eta > 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta > 0}$. Para cada $\rho > 0$, existe uma única solução periódica simples $t \mapsto y(t)$ com $y(0) = 0$, $y'(0) = \rho$ se, e somente se, $0 < \rho < \frac{\eta}{\sqrt{\theta}}$. Esta solução regular tem período $\frac{4}{\sqrt{\theta}} \operatorname{arctanh}(\rho \eta^{-1} \sqrt{\theta})$.*

Demonstração. Considere $\alpha = 0, \eta > 0$. Da mudança $y_1 = y$ e $y_2 = y'$ na Eq. (2.1) $_{\theta > 0}$ obtemos o campo bidimensional descontínuo $Z_0(y_1, y_2) = (y_2, \theta y_1 - \eta \operatorname{sgn}(y_1))$. Denote por $t \mapsto \Phi_{Z_0}^t$ o fluxo de Z_0 . Então, para $\rho > 0$, a órbita pelo ponto $(0, \rho)$ no retrato de fases é $\Phi_{Z_0}^t(0, \rho) = (y_1(t), y_2(t)) =$

$$\left(\frac{-\eta}{\theta} \cosh(\sqrt{\theta}t) + \frac{\rho}{\sqrt{\theta}} \sinh(\sqrt{\theta}t) + \frac{\eta}{\theta}, \frac{-\eta}{\sqrt{\theta}} \sinh(\sqrt{\theta}t) + \rho \cosh(\sqrt{\theta}t) \right).$$

Qualquer trajetória do fluxo para frente (restrita a tempos positivos) iniciando de um ponto $(0, \rho)$, com $\rho > 0$, permanece no semi-plano $y_1 > 0$ e retorna novamente a $y_1 = 0$, somente para $0 < \rho < \eta/\sqrt{\theta}$, no ponto $(0, -\rho)$, com o tempo (de troca de soluções) $(2/\sqrt{\theta}) \operatorname{arctanh}(\rho\sqrt{\theta}/\eta)$. Por reversibilidade, o fluxo para trás (restrito a tempos negativos) de $(0, \rho)$, com $0 < \rho < \eta/\sqrt{\theta}$, permanece no semi-plano $y_1 < 0$ e retorna novamente a $y_1 = 0$ no ponto $(0, -\rho)$ com o tempo de troca $-(2/\sqrt{\theta}) \operatorname{arctanh}(\rho\sqrt{\theta}/\eta)$. Portanto, se $0 < \rho < \eta/\sqrt{\theta}$, a órbita $\Phi_{Z_0}^t(0, \rho)$ é periódica de período $(4/\sqrt{\theta}) \operatorname{arctanh}(\rho\sqrt{\theta}/\eta)$. Usando identidades hiperbólicas, reescrevemos

$$y_1(t) = -2 \sinh(\sqrt{\theta} \cdot t/2) \left[(\eta/\theta) \sinh(\sqrt{\theta} \cdot t/2) - (\rho/\sqrt{\theta}) \cosh(\sqrt{\theta} \cdot t/2) \right].$$

Assim, $y_1(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$ ou $\tanh(\sqrt{\theta} \cdot t/2) = \rho\sqrt{\theta}/\eta$. Para $\eta > 0, \rho > 0$ não existe $t^* \neq 0$ tal que $\tanh(\sqrt{\theta} \cdot t^*/2) = \rho\sqrt{\theta}/\eta$ com $\rho \geq \eta/\sqrt{\theta}$, pois $-1 < \tanh(\sqrt{\theta} \cdot t/2) < 1$. A solução $y(t) = y_1(t)$ da Eq. (2.1) $_{\theta>0}$ tal que $y(0) = 0$, $y'(0) = \rho$, com $0 < \rho < \eta/\sqrt{\theta}$, é uma solução periódica simples regular, de período $(4/\sqrt{\theta}) \operatorname{arctanh}(\rho\sqrt{\theta}/\eta)$. Além disso, a origem $(0, 0)$ é um ponto de sela do campo $\tilde{Z}_0(z_1, z_2) = (z_2, \theta z_1)$ (os autovalores do sistema são reais com sinais opostos). Considere a mudança $z_1 = y_1 - (\eta/\theta) \operatorname{sgn}(y_1)$ e $z_2 = y_2$. Deste modo, se $\eta > 0$, para cada campo associado que corresponde a $y_1 < 0$ e a $y_1 > 0$, temos um ponto de sela visível: $(-\eta/\theta, 0)$ e $(\eta/\theta, 0)$. As separatrizes do campo que corresponde a $y_1 < 0$ cruza o eixo y_2 nos valores $-\eta/\sqrt{\theta}$ e $\eta/\sqrt{\theta}$. As separatrizes do campo que corresponde a $y_1 > 0$ também cruza o eixo y_2 nos mesmos valores. Por simetria, existe um contínuo de órbitas periódicas em torno da origem, de período $(4/\sqrt{\theta}) \operatorname{arctanh}(\rho\sqrt{\theta}/\eta)$ se, e somente se, $0 < \rho < \eta/\sqrt{\theta}$. \square

Proposição 2.2.2. *Assuma $\alpha = 0, \eta < 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta>0}$. Todas as soluções não triviais são ilimitadas e a solução nula é a única solução periódica.*

Demonstração. Considere $\alpha = 0, \eta < 0$. A solução da Eq. (2.1) $_{\theta>0}$ tal que $y(0) = \lambda \geq 0$, $y'(0) = \rho \geq 0$ é

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\lambda - \frac{\eta}{\theta} - \frac{\rho}{\sqrt{\theta}} \right) e^{-\sqrt{\theta}t} + \left(\lambda - \frac{\eta}{\theta} + \frac{\rho}{\sqrt{\theta}} \right) e^{\sqrt{\theta}t} \right] + \frac{\eta}{\theta}.$$

Observe que, como $\lambda - \eta/\theta + \rho/\sqrt{\theta} > 0$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$. A solução da Eq. (2.1) $_{\theta>0}$ tal que $y(0) = \lambda \leq 0$, $y'(0) = \rho \geq 0$ é

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\lambda + \frac{\eta}{\theta} - \frac{\rho}{\sqrt{\theta}} \right) e^{-\sqrt{\theta}t} + \left(\lambda + \frac{\eta}{\theta} + \frac{\rho}{\sqrt{\theta}} \right) e^{\sqrt{\theta}t} \right] - \frac{\eta}{\theta}.$$

Como $\lambda + \eta/\theta - \rho/\sqrt{\theta} < 0$, temos $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty$. O caso $\rho \leq 0$ é análogo. \square

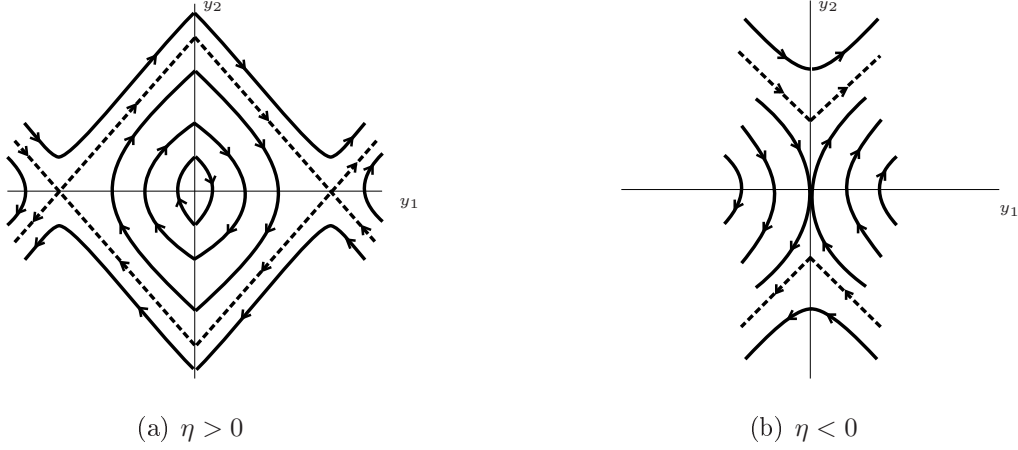


Figura 2.1: Retrato de fases da equação (2.1) com $\theta > 0$ e $\alpha = 0$; (a) A equação tem um contínuo de órbitas periódicas delimitado por uma região; (b) Todas as órbitas são ilimitadas.

2.2.2 O caso elíptico $\theta < 0$

Considere a Eq. (2.1) com $\alpha = 0$. Se $\eta > 0$, o sistema tem uma família de órbitas periódicas no retrato de fases e a origem é um *centro descontínuo*. Já se $\eta < 0$, existem duas soluções periódicas simples singulares, duas soluções periódicas singulares e uma família de soluções periódicas que não se anulam. Ver a Figura 2.2.

Proposição 2.2.3. *Assuma $\alpha = 0, \eta > 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta < 0}$. Para cada $\rho > 0$, existe uma única solução periódica simples $t \mapsto y(t)$ tal que $y(0) = 0$, $y'(0) = \rho$, de período $\frac{4}{\sqrt{-\theta}} \arctan(\rho\eta^{-1}\sqrt{-\theta})$.*

Proposição 2.2.4. *Assuma $\alpha = 0, \eta < 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta < 0}$. Para cada $\rho > 0$, existe uma única solução periódica simples $t \mapsto y(t)$ tal que $y(0) = 0$, $y'(0) = \rho$, de período $\frac{4}{\sqrt{-\theta}} [\arctan(\rho\eta^{-1}\sqrt{-\theta}) + \pi]$. Além disso, existem duas soluções periódicas simples singulares, duas soluções periódicas singulares e uma família de soluções periódicas que não se anulam.*

Demonstração das Proposições 2.2.3 e 2.2.4. Considere $\alpha = 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta < 0}$. Colocamos $y_1 = y$ e $y_2 = y'$ para associar a Eq. (2.1) $_{\theta < 0}$, com o campo bidimensional descontínuo

$Z_0(y_1, y_2) = (y_2, \theta y_1 - \eta \operatorname{sgn}(y_1))$. Denote por $t \mapsto \Phi_{Z_0}^t$ o fluxo de Z_0 . Então, para $\rho > 0$, a órbita por $(0, \rho)$ no retrato de fases é $\Phi_{Z_0}^t(0, \rho) = (y_1(t), y_2(t)) =$

$$\left(\frac{-\eta}{\theta} \cos(\sqrt{-\theta}t) + \frac{\rho}{\sqrt{-\theta}} \sin(\sqrt{-\theta}t) + \frac{\eta}{\theta}, \frac{-\eta}{\sqrt{-\theta}} \sin(\sqrt{-\theta}t) + \rho \cos(\sqrt{-\theta}t) \right).$$

Qualquer trajetória do fluxo para frente (restrita a tempos positivos) iniciando de um ponto $(0, \rho)$, com $\rho > 0$, permanece no semi-plano $y_1 > 0$ e retorna novamente a $y_1 = 0$ no ponto $(0, -\rho)$ com o tempo (de troca de soluções) $(2/\sqrt{-\theta}) \arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta)$ para $\eta > 0$. e $(2/\sqrt{-\theta}) [\arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta) + \pi]$ para $\eta < 0$. Por reversibilidade, o fluxo para trás (restrito a tempos negativos) de $(0, \rho)$, com $\rho > 0$, permanece no semi-plano $y_1 < 0$ e retorna novamente a $y_1 = 0$ no ponto $(0, -\rho)$, com o tempo $(-2/\sqrt{-\theta}) \arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta)$ para $\eta > 0$ e com o tempo $(-2/\sqrt{-\theta}) [\arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta) + \pi]$ para $\eta < 0$. Portanto, em ambos casos, a origem é um centro descontínuo quando $\rho > 0$. Assim, a órbita $\Phi_{Z_0}^t(0, \rho)$ é periódica de período $(4/\sqrt{-\theta}) \arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta)$ para cada $\rho > 0$, com $\eta > 0$, e é periódica de período $(4/\sqrt{-\theta}) [\arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta) + \pi]$ para cada $\rho > 0$, com $\eta < 0$. Usando identidades trigonométricas, reescrevemos

$$y_1(t) = 2 \sin(\sqrt{-\theta} \cdot t/2) [(\eta/\theta) \sin(\sqrt{-\theta} \cdot t/2) + (\rho/\sqrt{-\theta}) \cos(\sqrt{-\theta} \cdot t/2)].$$

Então $y_1(t) = 0$ se, e somente se, $t = (2/\sqrt{-\theta})n\pi$ ou $\tan(\sqrt{-\theta} \cdot t/2) = \sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta$, com $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Os primeiros tempos $t > 0$ são dados por $n = 1$ e por $t = (2/\sqrt{-\theta}) \arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta)$ para $\eta > 0$, e $t = (2/\sqrt{-\theta}) [\arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta) + \pi]$ para $\eta < 0$. Se $\eta > 0$ então $\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta > 0$ e

$$(2/\sqrt{-\theta}) \arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta) < (2/\sqrt{-\theta})(\pi/2) = (\pi/\sqrt{-\theta}) < (2/\sqrt{-\theta})\pi.$$

Assim, o tempo de troca é

$$t = (2/\sqrt{-\theta}) \arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta)$$

quando $\eta > 0$. Agora, se $\eta < 0$ então $\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta < 0$ e

$$(2/\sqrt{-\theta}) [\arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta) + \pi] < (2/\sqrt{-\theta})\pi.$$

Assim, o tempo de troca é

$$t = (2/\sqrt{-\theta}) [\arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta) + \pi]$$

quando $\eta < 0$. Deste modo, se $\eta > 0$ a equação tem uma única solução periódica simples $y(t)$ com $y(0) = 0$, $y'(0) = \rho$ para cada $\rho > 0$ de período $(4/\sqrt{-\theta}) \arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta)$, e se $\eta < 0$ a equação tem uma única solução periódica simples $y(t)$ com $y(0) = 0$, $y'(0) = \rho$

para cada $\rho > 0$ de período $(4/\sqrt{-\theta}) [\arctan(\sqrt{-\theta} \cdot \rho/\eta) + \pi]$. Como na demonstração da Proposição 2.2.1, vemos que a origem $(0, 0)$ é um centro para $\tilde{Z}_0(z_1, z_2) = (z_2, \theta z_1)$ (os autovalores do sistema são complexos conjugados). Se consideramos a mudança $z_1 = y_1 - (\eta/\theta) \operatorname{sgn}(y_1)$ e $z_2 = y_2$, os centros $(-\eta/\theta, 0)$ e $(\eta/\theta, 0)$ de cada campo, são visíveis quando $\eta < 0$ e invisíveis quando $\eta > 0$. Agora vamos provar que, para $\eta < 0$, existem duas soluções periódicas simples singulares, duas soluções periódicas singulares e uma família de soluções periódicas regulares que não se anulam. A solução da Eq. (2.1) $_{\theta < 0}$ tal que $y(0) = \lambda$ e $y'(0) = \rho$ é

$$y(t) = \left(\lambda - \frac{\eta}{\theta} \right) \cos(\sqrt{-\theta} \cdot t) + \frac{\rho}{\sqrt{-\theta}} \sin(\sqrt{-\theta} \cdot t) + \frac{\eta}{\theta}.$$

Quando $\lambda = \rho = 0$, as duas soluções simples singulares são dadas por

$$y(t) = \frac{\epsilon\eta}{\theta} [1 - \cos(\sqrt{-\theta}t)],$$

uma para $\epsilon \cdot t > 0$ e outra para $\epsilon \cdot t < 0$. Também temos duas soluções singulares dadas por $y(t) = \frac{\eta}{\theta} [1 - \cos(\sqrt{-\theta} \cdot t)]$ e $y(t) = \frac{-\eta}{\theta} [1 - \cos(\sqrt{-\theta} \cdot t)]$. As expressões $y_1(t) = y(t) = \frac{\eta}{\theta} [1 - \cos(\sqrt{-\theta} \cdot t)]$ e $y_2(t) = y'(t) = \frac{-\eta}{\sqrt{-\theta}} \sin(\sqrt{-\theta} \cdot t)$ para $\lambda = \rho = 0$ são equações paramétricas da elipse

$$\frac{(y_1 - \eta/\theta)^2}{(\eta/\theta)^2} + \frac{(y_2 - 0)^2}{(-\eta/\sqrt{-\theta})^2} = 1.$$

Basta considerar condições iniciais que satisfazem $|\lambda|, |\rho| < \min\{\eta/\theta, -\eta/\sqrt{-\theta}\}$, $\lambda \neq 0$, para produzir uma família de soluções periódicas regulares que não se anulam. \square

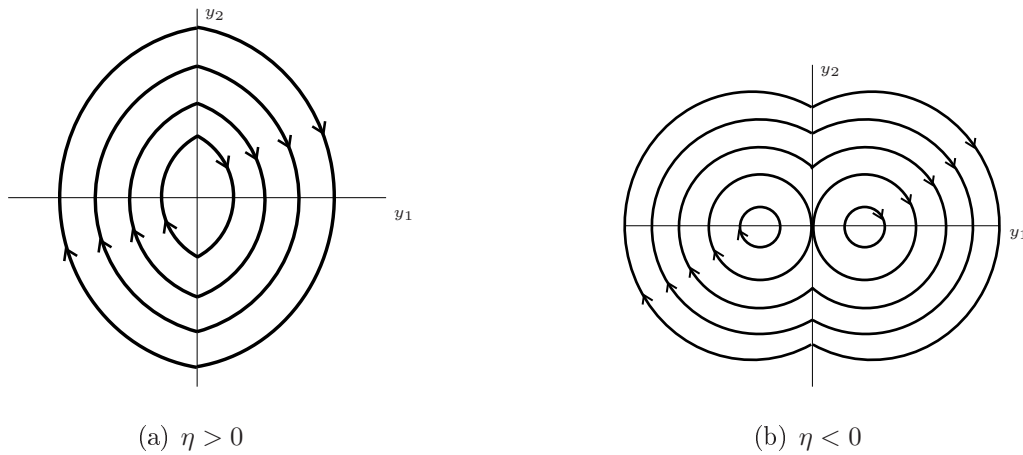


Figura 2.2: Retrato de fases da Eq. (2.1) com $\theta < 0$ e $\alpha = 0$; (a) Um centro descontínuo; (b) A origem é um centro descontínuo se $\rho \neq 0$.

2.2.3 O caso parabólico $\theta = 0$ com $\eta < 0$

Lembramos que o caso $\theta = 0, \eta > 0$ foi o que motivou a extensão para $\theta \neq 0$ e é encontrado em [11]. Quando consideramos a Eq. (2.1) com $\theta = 0, \eta < 0$, vemos que todas as soluções não triviais são ilimitadas:

Proposição 2.2.5. *Assuma $\alpha = 0, \eta < 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta=0}$. Todas as soluções não triviais são ilimitadas e a solução nula é a única solução periódica.*

Demonstração. Segue imediatamente da expressão de $y(t)$. □

2.3 A equação não autônoma $y'' + \eta \operatorname{sgn}(y) = \theta y + \alpha \operatorname{sen}(\beta t)$

Nesta seção consideramos a Eq. (2.1) com $\alpha \neq 0$. Apresentamos condições para a existência de soluções periódicas. Mesmo nos casos em que a equação autônoma não apresenta soluções periódicas não triviais, após a perturbação, temos o surgimento de soluções que são periódicas.

Em cada um dos casos que são analisados abaixo, usamos os Lemas 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.3 a fim de reduzir nossa análise e demonstrar os resultados principais.

2.3.1 O caso hiperbólico $\theta > 0$ para $\alpha \neq 0$

Considere $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta>0}$. A equação perturbada apresenta famílias discretas de soluções periódicas para $\eta > 0$. A Figura 2.3 mostra uma família de soluções 2π -periódicas simples, porém existe um valor α_1 tal que a respectiva solução toca o eixo de descontinuidade (solução singular). Se $\alpha > \alpha_1$ o tempo de troca de soluções é menor do que π e a solução deixa de ser periódica. Para $\eta < 0$, a equação tem uma única família de soluções periódicas simples. A Figura 2.4 mostra algumas destas soluções. Tais fatos correspondem aos resultados abaixo.

Teorema 2.3.1. *Assuma $\alpha \neq 0, \eta > 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta>0}$. A equação tem um conjunto discreto de soluções periódicas simples. Para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, defina*

$$\sigma_k(\beta, \theta, \eta) = \eta(1 + \theta\beta^{-2}) \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}k\pi\beta^{-1}\sqrt{\theta}\right).$$

Se $|\alpha| < \sigma_k(\beta, \theta, \eta)$, existe uma única solução periódica simples $t \mapsto y_{[k]}(t)$, de período $2k\pi\beta^{-1}$, tal que $y_{[k]}(0) = 0, y'_{[k]}(0) > 0$. Além disso, esta solução regular satisfaz $y'_{[k]}(0) = \frac{\eta}{\sqrt{\theta}} \tanh\left(\frac{1}{2}k\pi\beta^{-1}\sqrt{\theta}\right) - \frac{\alpha\beta}{\beta^2 + \theta}$.

Teorema 2.3.2. *Assuma $\alpha \neq 0, \eta < 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta>0}$. A equação tem no máximo uma família de solução periódica simples. Defina*

$$\sigma_1(\beta, \theta, \eta) = \frac{\eta(\beta + \theta\beta^{-1})}{\sqrt{\theta}} \tanh\left(\frac{1}{2}\pi\beta^{-1}\sqrt{\theta}\right).$$

Se $\alpha < \sigma_1(\beta, \theta, \eta)$, existe uma única solução periódica simples $t \mapsto y_{[1]}(t)$, de período $2\pi\beta^{-1}$, tal que $y_{[1]}(0) = 0, y'_{[1]}(0) > 0$. Além disso, esta solução regular satisfaz $y'_{[1]}(0) = \frac{\eta}{\sqrt{\theta}} \tanh\left(\frac{1}{2}\pi\beta^{-1}\sqrt{\theta}\right) - \frac{\alpha\beta}{(\beta^2 + \theta)}$. Se $\alpha = \sigma_1(\beta, \theta, \eta)$, existe uma solução periódica simples singular $y_{[1]}$ de período $2\pi\beta^{-1}$.

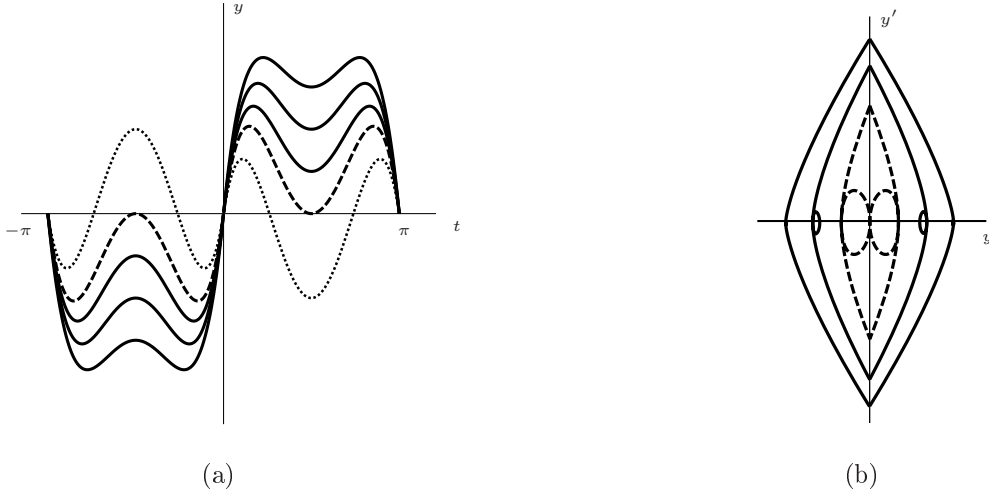


Figura 2.3: (a) Uma família de soluções 2π -periódicas simples $t \mapsto y_\alpha(t)$ com $\eta > 0$ e $\alpha < \sigma_1^*(1, 1, 1)$ dado na Proposição 2.3.1. Para $\alpha = \sigma_1^*(1, 1, 1)$, a correspondente solução é singular. Quando $\alpha > \sigma_1^*(1, 1, 1)$, a solução (curva pontilhada) troca em um tempo menor do que π e deixa de ser periódica; (b) O respectivo retrato de fase.

Em alguns casos é possível procurar um limitante mais específico $\sigma_k^*(\beta, \theta, \eta)$ que é melhor do que $\sigma_k(\beta, \theta, \eta)$, e tal que existe uma solução periódica para todo α tal que $|\alpha| < \sigma_k^*(\beta, \theta, \eta)$. Por exemplo, com $k = 1$, damos explicitamente um limitante melhor:

Proposição 2.3.1. *Assuma $\alpha \neq 0, \eta > 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta>0}$. Se $\alpha < \sigma_1^*(\beta, \theta, \eta)$, onde*

$$\sigma_1^*(\beta, \theta, \eta) = \eta(\beta^2 + \theta)\theta^{-1} \left[1 - \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\pi\beta^{-1}\sqrt{\theta}\right) \right],$$

existe uma única solução periódica simples regular $t \mapsto y_{[1]}(t)$, de período $2\pi\beta^{-1}$, tal que $y_{[1]}(0) = 0, y'_{[1]}(0) > 0$. Além disso, esta solução satisfaz

$$y'_{[1]}(0) = \frac{\eta}{\sqrt{\theta}} \tanh\left(\frac{1}{2}\pi\beta^{-1}\sqrt{\theta}\right) - \frac{\alpha\beta}{\beta^2 + \theta}.$$

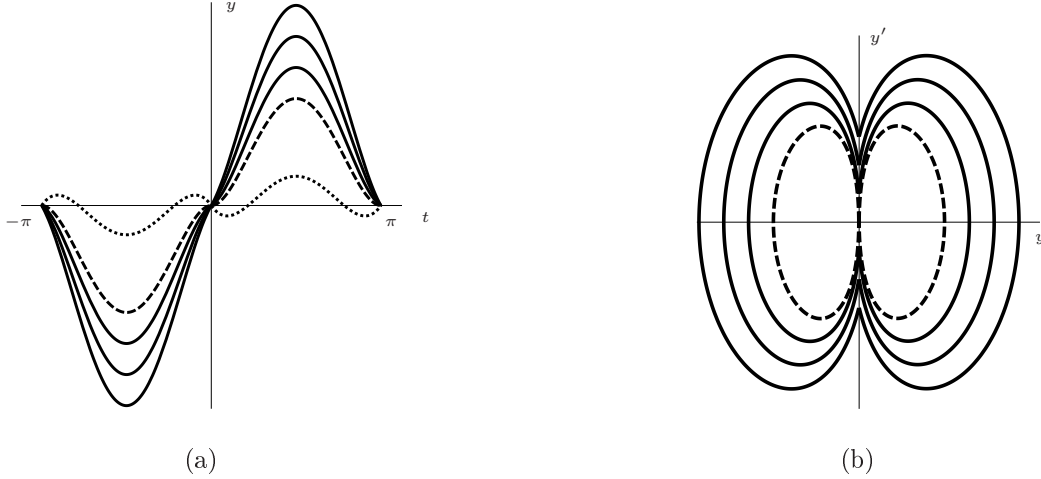


Figura 2.4: (a) A única família de soluções 2π -periódicas $t \mapsto y_\alpha(t)$ com $\eta < 0$ e $\alpha < \sigma_1(1, 1, -1)$ dado no Teorema 2.3.2. Para $\alpha = \sigma_1(1, 1, -1)$, a solução correspondente é uma solução singular. Quando $\alpha > \sigma_1(1, 1, -1)$, a solução (curva pontilhada) é tal que $y'_\alpha(0) < 0$ e deixa de ser periódica; (b) O respectivo retrato de fase.

O limitante apresentado na Proposição 2.3.1 é maximal. Ilustramos isto no seguinte resultado:

Proposição 2.3.2. *Assuma $\alpha \neq 0, \eta > 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta>0}$. Se $\alpha = \sigma_1^*(\beta, \theta, \eta)$ dado na Proposição 2.3.1, então a Eq. (2.1) $_{\theta>0}$ tem uma solução periódica singular de período $2\pi\beta^{-1}$.*

As Proposições 2.3.1 e 2.3.2 estão ilustradas na Figura 2.3.

Demonstramos estes resultados usando a sequência de lemas abaixo.

Lema 2.3.1. *Seja x uma solução de (2.2) $_{\delta>0}$ tal que $x(0) = 0, x'(0) = r, \text{sgn}(x)(0^+) = \epsilon$. Então, para $\epsilon \cdot s > 0, x(s) = f_\epsilon(s) =$*

$$= \frac{-\epsilon\eta}{\delta} \cosh(\sqrt{\delta}s) + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(r + \frac{\alpha}{1+\delta} \right) \sinh(\sqrt{\delta}s) + \frac{\epsilon\eta}{\delta} - \frac{\alpha}{1+\delta} \sin(s).$$

Demonstração. Integração elementar da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$. □

Damos agora condições necessárias para x ser uma solução periódica, estudando o sistema de equações que correspondem a condições para uma órbita ser fechada no retrato de fases.

Lema 2.3.2. *Seja x uma solução 2τ -periódica da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$ tal que $x(0) = 0, x'(0) = r, \text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Então $r = \frac{\eta}{\sqrt{\delta}} \tanh\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta}\right) - \frac{\alpha}{1+\delta}$. Além disso, se $\alpha \neq 0$ existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\tau = k\pi$.*

Demonstração. Seja x uma solução da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$ tal que $x(0) = 0$, $x'(0) = r$, $\text{sgn}(x)(0^+) = \epsilon$, $\text{sgn}(x)(0^-) = -\epsilon$. Denotamos por τ^ϵ o tempo de troca correspondente a ϵ (que é o tempo $s \neq 0$ tal que $x(s) = 0$, s tem sinal ϵ , e s é o de menor valor absoluto) e denotamos por $\tau^{-\epsilon}$ o tempo de troca correspondente a $-\epsilon$. Com as notações do Lema 2.3.1, observe que $-f_\epsilon(s) = f_{-\epsilon}(-s)$ e $f'_\epsilon(s) = f'_{-\epsilon}(-s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$. E então, condições necessárias para obter uma solução periódica, são $f_\epsilon(\tau^\epsilon) = f_{-\epsilon}(\tau^{-\epsilon}) = 0$ e $f'_\epsilon(\tau^\epsilon) = f'_{-\epsilon}(\tau^{-\epsilon})$. Por simetria, estas condições são reduzidas a $f_\epsilon(\tau^\epsilon) = 0$ e $f'_\epsilon(\tau^\epsilon) = f'_{-\epsilon}(\tau^{-\epsilon})$, que implicam $f_\epsilon(\tau^\epsilon) = 0$ e $\tau^\epsilon = -\tau^{-\epsilon}$. Coloque $\tau = |\tau^\epsilon|$ por simplicidade. Usando identidades hiperbólicas, reescrevemos $x(s) = f_\epsilon(s) =$

$$2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\delta}s}{2}\right) \left[\frac{-\eta}{\delta} \sinh\left(\frac{\sqrt{\delta}s}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(r + \frac{\alpha}{1+\delta}\right) \cosh\left(\frac{\sqrt{\delta}s}{2}\right) \right] - \frac{\alpha}{1+\delta} \sin(s).$$

Uma vez que x é 2τ -periódica, obtemos da Eq. (2.2) que $\alpha \sin(s + 2\tau) = \alpha \sin(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Assim, para $\alpha \neq 0$, $2\tau = 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Mas $\tau > 0$ implica $\tau = k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pela equação anterior, $f_\epsilon(\tau) = 0$ se, e somente se, $r = \frac{\eta}{\sqrt{\delta}} \tanh\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta}\right) - \frac{\alpha}{1+\delta}$, pois $\sinh\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta}\right) > 0$ e $\sin(\tau) = 0$. \square

Sem perda de generalidade, focamos nosso estudo em soluções x tais que $x(0) = 0$ e $x(s) > 0$ para $s \in (0, \tau)$. O próximo lema nos dá restrições sobre o parâmetro α que são consequências do sinal da primeira derivada em 0 e τ .

Lema 2.3.3. *Assuma $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.2) $_{\delta>0}$. Seja x uma solução periódica simples de semi-período $\tau = k\pi$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e satisfazendo $x(0) = x(\tau) = 0$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$.*

(a) *Para $\eta > 0$:*

- *Se k é ímpar, $\alpha \leq \frac{\eta}{\sqrt{\delta}}(1 + \delta) \tanh\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta}\right)$;*
- *Se k é par, $|\alpha| \leq \frac{\eta}{\sqrt{\delta}}(1 + \delta) \tanh\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta}\right)$.*

(b) *Para $\eta < 0$:*

- *Se k é ímpar, $\alpha \leq \frac{\eta}{\sqrt{\delta}}(1 + \delta) \tanh\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta}\right)$;*
- *Se k é par, não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x'(0) \geq 0$.*

Demonstração. De $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$, obtemos $x'(0) = r \geq 0$. Pelo Lema 2.3.2, $r \geq 0$ se, e somente se, $\alpha \leq \frac{\eta}{\sqrt{\delta}}(1 + \delta) \tanh\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta}\right)$. Mas $x(s) \geq 0$, $\forall s \in (0, \tau)$. Assim $x'(\tau) \leq 0$. Se k é ímpar, uma solução da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$ satisfaz $x(\tau - s) = x(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Em particular $x'(0) = -x'(\tau)$ e $x'(\tau) \leq 0$ é equivalente a $x'(0) \geq 0$. Se k é par, a propriedade não é válida. Após alguns cálculos, temos $x'(\tau) \leq 0$ se, e somente se, $-\frac{\eta}{\sqrt{\delta}}(1 + \delta) \tanh\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta}\right) \leq \alpha$. \square

Observe que uma violação das condições do Lema 2.3.3 implica $x'(0) < 0$. O Lema 2.3.2 nos diz que uma solução periódica da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$ tem semi-período $\tau = k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Isto implica que em $[0, \tau]$, x deve trocar quando $s = \tau$ e nunca antes. Quando $\alpha = 0$, esta condição é realizada. No próximo lema, damos um limitante para α em que esta condição permanece válida.

Lema 2.3.4. *Assuma $\alpha \neq 0, \eta > 0$ na (2.2) $_{\delta>0}$. Seja x uma solução periódica simples de semi-período $\tau = k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e satisfazendo $x(0) = x(\tau) = 0$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Uma condição necessária para a existência de $s \in (0, \tau)$ tal que $x(s) = x'(s) = 0$ é $|\alpha| \geq \eta(1 + \delta) \text{sech}(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta})$.*

Demonstração. Segue dos Lemas 2.3.1 e 2.3.2 que a equação $x'(s) = 0$, $s \in (0, \tau)$, é equivalente a $f(s) = g(s)$, $s \in (0, \tau)$, onde $f(s) = \alpha \cos(s)$ e $g(s) = (-\eta/\sqrt{\delta})(1 + \delta)[\sinh(\sqrt{\delta}s) - \tanh(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta}) \cosh(\sqrt{\delta}s)]$. O valor $s = \frac{\tau}{2}$ é a única raiz de g . A função g é estritamente decrescente para $\eta > 0$ e estritamente crescente para $\eta < 0$. Vamos assumir que $|\alpha| < \eta(1 + \delta) \text{sech}(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta})$. Para $\alpha > 0$, a restrição $0 < \alpha < \eta(1 + \delta) \text{sech}(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta})$ é equivalente a $f'(\frac{\pi}{2}) > g'(\frac{\tau}{2})$ e para $\alpha < 0$, a restrição $-\eta(1 + \delta) \text{sech}(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta}) < \alpha < 0$ é equivalente a $f'(\frac{3\pi}{2}) > g'(\frac{\tau}{2})$. Cada uma destas condições implicam que $x'(s) = 0$ tem somente uma raiz em $(0, \tau)$. Então $x(s) > 0$ para todo $s \in (0, \tau)$, caso contrário, como $x(0) = x(\tau) = 0$, a equação $x'(s) = 0$ deve ter pelo menos duas raízes em $(0, \tau)$ e isto não é possível. Mas $x(s) > 0$ em $(0, \tau)$ contradiz a hipótese que $x(s) = x'(s) = 0$ para algum $s \in (0, \tau)$. Portanto $|\alpha| \geq \eta(1 + \delta) \text{sech}(\frac{1}{2}\tau\sqrt{\delta})$. \square

A condição para a existência de $s \in (0, \tau)$ tal que $x(s) = x'(s) = 0$, apresentada no Lema 2.3.4, é necessária mas não é suficiente. Provamos a existência de soluções periódicas simples regulares para valores α que estão acima do limitante do Lema 2.3.4, por exemplo no Lema 2.3.9.

Lema 2.3.5. *Assuma $\alpha \neq 0, \eta < 0$ na Eq. (2.2) $_{\delta>0}$. Seja x uma solução periódica simples de semi-período $\tau = k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e satisfazendo $x(0) = x(\tau) = 0$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Então $\tau = \pi$.*

Demonstração. Admita que exista uma solução $2k\pi$ -periódica x da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$. Consideramos sua restrição a $[0, k\pi]$, tal que $x(0) = 0$ e $x'(0) \geq 0$. Observamos então que, para $l \in \mathbb{N}$ com $0 < l < k$,

$$x(l\pi) = -\eta\delta^{-1} \cosh(l\pi\sqrt{\delta}) + \eta\delta^{-1} \tanh\left(\frac{1}{2}k\pi\sqrt{\delta}\right) \sinh(l\pi\sqrt{\delta}) + \eta\delta^{-1}.$$

Portanto $x(l\pi) < 0$, o que contradiz o fato de que $k\pi$ é o tempo de troca. Assim, k deve ser igual a 1. \square

Nosso principal objetivo é mostrar que uma solução periódica obtida para $\alpha = 0$ é deformada para uma solução periódica da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$, pela variação da amplitude do termo forçante. Podemos deformar a solução até que a amplitude do termo forçante α atinja um valor especial que corresponde a um valor α tal que uma solução torna-se tangente ao eixo de descontinuidade. Para valores acima (em valor absoluto) deste valor especial, o tempo de troca não é $k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Se $\eta < 0$ e x é uma solução 2π -periódica ($\tau = \pi$) isto não ocorre. Podemos mover a amplitude do termo forçante α como quisermos, respeitando a condição do Lema 2.3.3, que a solução nunca será tangente ao eixo de descontinuidade em $(0, \pi)$.

Lema 2.3.6. Denote por $E(\alpha)$ a equação $x'' + \eta = \delta x + \alpha \sin(s)$, $\delta > 0$, e assuma $\tau = k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(a) Existe uma única solução $s \mapsto x_\alpha(s)$ de $E(\alpha)$ tal que $x_\alpha(0) = x_\alpha(\tau) = 0$ e $\text{sgn}(x_\alpha)(0^+) = 1$.

(b) Se existe uma amplitude μ satisfazendo as condições do Lema 2.3.3 e s_μ tal que $x_\mu(s_\mu) < 0$, então existe $s_\mu^* \in (0, \tau)$ tal que $x_\mu(s_\mu^*) < 0$ e $x'_\mu(s_\mu^*) = 0$.

Demonstração. (a) Segue imediatamente dos Lemas 2.3.1 e 2.3.2; (b) Assuma que existe $\mu \in \mathbb{R}$ satisfazendo as condições do Lema 2.3.3 e $s_\mu \in (0, \tau)$ tal que $x_\mu(s_\mu) < 0$. Como $x_\mu(0) = x_\mu(\tau) = 0$, existe s_μ^1 e s_μ^2 (com $0 < s_\mu^1 < s_\mu^2 < \tau$) tal que $x_\mu(s_\mu^1) = x_\mu(s_\mu^2) = 0$. Podemos assumir que (s_μ^1, s_μ^2) é o subintervalo maximal contendo s_μ tal que $x_\mu(s) < 0$, $\forall s \in (s_\mu^1, s_\mu^2)$. Pelo Teorema de Rolle, existe $s_\mu^* \in (s_\mu^1, s_\mu^2)$ tal que $x'_\mu(s_\mu^*) = 0$. \square

Lema 2.3.7. Denote por $E(\alpha)$ a equação $x'' + \eta = \delta x + \alpha \sin(s)$ com $\delta, \eta > 0$ e assuma $\tau = k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Assuma também que existe uma amplitude γ satisfazendo as condições do Lema 2.3.3 e $s_\gamma \in (0, \tau)$ tal que $x_\gamma(s_\gamma) < 0$. Então existe μ com $0 < |\mu| < |\gamma|$ e $s_\mu \in (0, \tau)$ tal que $x_\mu(s_\mu) = x'_\mu(s_\mu) = 0$.

Demonstração. Assuma que k é ímpar e vamos considerar as soluções de $E(\alpha)$ satisfazendo as condições do Lema 2.3.3. Defina

$$\nu(\alpha) = \inf_{s \in [0, \tau]} \{x_\alpha(s)\}, \quad \mu = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha \mid \nu(\alpha) = 0\}.$$

O conjunto $A = \{\alpha \mid \nu(\alpha) = 0\}$ é tal que $A \neq \emptyset$ ($0 \in A$ pois $\nu(0) = 0$) e o Lema 2.3.3 item (a) fornece um limitante superior para A . Deste modo, μ está bem definido e $\mu \geq 0$. Seja $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência que converge a μ , com $\mu_n > \mu, \forall n \in \mathbb{N}$. Temos $\nu(\mu_n) < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, existe uma sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{\mu_n}(s_n) < 0$. Pelo Lema 2.3.6, existe uma sequência $(s_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x'_{\mu_n}(s_n^*) = 0$. Podemos encontrar uma subsequência de $(s_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge em $[0, \tau]$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $(s_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, ela própria, a um ponto $s^* \in [0, \tau]$. Por continuidade, a sequência $(x'_{\mu_n}(s_n^*))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $x'_\mu(s^*)$. Assim $x'_\mu(s^*) = 0$. Temos $x_\mu(s^*) \leq 0$. Suponha $x_\mu(s^*) < 0$. Se $\sin(s^*) = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_\alpha(s^*) = x_0(s^*) > 0$ e isto é uma contradição. Se $\sin(s^*) \neq 0$, existe $\alpha < \mu$ tal que $x_\alpha(s^*) < 0$ e isto também é uma contradição. Portanto $x_\mu(s^*) = x'_\mu(s^*) = 0$. O caso k par é similar. \square

Lema 2.3.8. Denote por $E(\alpha)$ a equação $x'' + \eta = \delta x + \alpha \sin(s)$ com $\delta > 0, \eta < 0$ e assuma $\tau = \pi$. Se a amplitude α satisfaz a condição do Lema 2.3.3, então $x_\alpha(s) > 0$ para todo $s \in (0, \pi)$.

Demonstração. Se $\alpha \leq \frac{\eta}{\sqrt{\delta}}(1 + \delta) \tanh\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\delta}\right)$, $x'_\alpha(0) = r \geq 0$, enquanto $x'_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Segue de $E(\alpha)$, que $x''_\alpha(0) > 0$ e que x''_α tem somente uma raiz em $(0, \frac{\pi}{2})$ pois $\alpha < 0$. Assim x'_α tem somente um máximo em $(0, \frac{\pi}{2})$. Deste modo, $x'_\alpha(s) > 0$ para todo $s \in [0, \frac{\pi}{2})$ e $x_\alpha(s)$ é estritamente crescente em $[0, \frac{\pi}{2})$. Como $s \mapsto \pi - s$ deixa x_α invariante, x_α é não negativa em $[0, \pi]$ e positiva em $(0, \pi)$. \square

Quando $\eta > 0$ e $\tau = \pi$, podemos calcular explicitamente o valor crítico α tal que uma solução periódica se torna tangente ao eixo de discontinuidade. Temos então, um limitante melhor do que aquele dado no Lema 2.3.4.

Lema 2.3.9. Denote por $E(\alpha)$ a equação expressa por $x'' + \eta = \delta x + \alpha \sin(s)$ com $\delta, \eta > 0$. Seja x_α uma solução de $E(\alpha)$ no intervalo $[0, \pi]$, satisfazendo $x_\alpha(0) = x_\alpha(\pi) = 0$, $\text{sgn}(x_\alpha)(0^+) = 1$. Se $\alpha < \frac{\eta}{\delta}(1 + \delta) \left[1 - \text{sech}\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\delta}\right)\right]$, o sistema $\{x_\alpha(s) = 0, x'_\alpha(s) = 0\}$ não tem solução em $[0, \pi]$.

Demonstração. Assuma $\alpha < \frac{\eta}{\delta}(1 + \delta) \left[1 - \text{sech}\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\delta}\right)\right]$. Para estes valores de α , pelo Lema 2.3.2, temos $x'(0) = -x'(\pi) \neq 0$ uma vez que

$$1 - \text{sech}\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\delta}\right) < \sqrt{\delta} \cdot \tanh\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\delta}\right).$$

Seja x_α uma solução de $E(\alpha)$ tal que $x_\alpha(0) = x_\alpha(\pi) = 0$, $\text{sgn}(x_\alpha)(0^+) = 1$. Usando o Lema 2.3.1, podemos ver que $x'_\alpha(s) = 0$ tem uma ou três raízes em $(0, \pi)$, dependendo de α . Para valores α tais que $x'_\alpha(s) = 0$ tem somente uma raiz em $(0, \pi)$, esta raiz é $s = \pi/2$ pois $x(\pi - s) = x(s)$. Neste caso $x(s) > 0$ para todo $s \in (0, \pi)$, caso contrário, teríamos uma contradição (como na demonstração do Lema 2.3.8). Para valores α tais que $x'_\alpha(s) = 0$ tem três raízes em $(0, \pi)$, pode-se verificar que a curvatura de x_α muda duas vezes e ainda que x_α tem dois máximos locais e um mínimo local em $\frac{\pi}{2}$. Temos $x_\alpha(\frac{\pi}{2}) = \frac{\eta}{\delta}[1 - \text{sech}(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\delta})] - \frac{\alpha}{1+\delta}$. Portanto, não existe raiz de $x_\alpha(s) = 0$ em $(0, \pi)$ uma vez que $\alpha < \frac{\eta}{\delta}(1 + \delta)[1 - \text{sech}(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\delta})]$. Como $x'(0) = -x'(\pi) \neq 0$, o sistema $\{x_\alpha(s) = 0, x'_\alpha(s) = 0\}$ não tem solução em $[0, \pi]$. \square

Demonstração do Teorema 2.3.1. Sejam $\alpha \neq 0, \eta > 0$. Pelo Lema 2.1.2, a Eq. (2.1) $_{\theta>0}$ pode ser escrita como a Eq. (2.2) $_{\delta>0}$. Assuma que x é uma solução periódica simples da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$ tal que $x(0) = 0$. Pelo Lema 2.1.1, podemos considerar $x'(0) = r \geq 0$. Pelo Lema 2.3.2, x tem semi-período $\tau = k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, o qual coincide com o tempo de troca de sua restrição $\bar{x} = x|_{[0, \tau]}$ ao intervalo $[0, \tau]$. Também por este lema, $r = (\eta/\sqrt{\delta}) \tanh(\sqrt{\delta} \cdot \tau/2) - \alpha/(1 + \delta)$. Como $\eta > 0$, $r = 0$ implica que $\text{sgn}(x)(0^+) = -1$, mas por hipótese $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Então $r > 0$ e dos Lemas 2.3.2 e 2.3.3, qualquer solução periódica x tal que $x(0) = x(\tau) = 0$, $x'(0) = r > 0$, $x'(\tau) < 0$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$ deve satisfazer:

- $\tau = k\pi, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- $r = (\eta/\sqrt{\delta}) \tanh(\sqrt{\delta} \cdot \tau/2) - \alpha/(1 + \delta)$;
- $\alpha < (\eta/\sqrt{\delta})(1 + \delta) \tanh(\sqrt{\delta} \cdot \tau/2)$ se k é ímpar;
- $|\alpha| < (\eta/\sqrt{\delta})(1 + \delta) \tanh(\sqrt{\delta} \cdot \tau/2)$ se k é par.

Seja x uma solução da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$ satisfazendo estas condições e considere a equação suave $x'' + \eta = \delta + \alpha \sin(s)$ como uma equação $E(\alpha)$ dependendo do parâmetro α (η, δ estão fixados) e denote por \bar{x}_α a restrição de x a $[0, \tau]$, dada pelo Lema 2.3.1. Seja \bar{x}_0 a restrição a $[0, \tau]$ da solução da equação autônoma ($\alpha = 0$) obtida na Proposição 2.2.1. Como $r = (\eta/\sqrt{\delta}) \tanh(\sqrt{\delta} \cdot \tau/2) - \alpha/(1 + \delta)$, obtemos $\bar{x}_\alpha(s) = \bar{x}_0(s) - \alpha(1 + \delta)^{-1} \sin(s)$. Usando identidades hiperbólicas podemos verificar que a solução $s \mapsto \bar{x}_0(s)$ é positiva em $(0, \tau)$. Considere μ fixado e tal que

$$0 < |\mu| < \eta(1 + \delta) \operatorname{sech}(\sqrt{\delta} \cdot \tau/2).$$

Suponha $\mu > 0$ e considere α tal que $0 < \alpha < \mu$. Assuma que exista $s \in (0, \tau)$ com $\bar{x}_\alpha(s) = 0$. Pelo Lema 2.3.4, $\bar{x}'_\alpha(s) \neq 0$. Então, existe $s' \in (0, \tau)$ próximo de s tal que $\bar{x}_\alpha(s') < 0$. Pelo Lema 2.3.7, existe $0 < \alpha' < \alpha$ tal que $\bar{x}_{\alpha'}(s_{\alpha'}) = \bar{x}'_{\alpha'}(s_{\alpha'}) = 0$. Mas pelo Lema 2.3.4 o sistema $\{\bar{x}_{\alpha'}(s) = 0, \bar{x}'_{\alpha'}(s) = 0\}$ não tem solução em $(0, \tau)$. Deste modo, $\bar{x}_\alpha(s) > 0$, para todo $s \in (0, \tau)$. Movendo α de 0 a μ , realizamos uma homotopia de funções \bar{x}_α as quais são soluções de $E(\alpha)$, onde cada função \bar{x}_α é estritamente positiva em $(0, \tau)$. Portanto, construímos uma solução da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$ que satisfaz $\bar{x}_\mu(0) = \bar{x}_\mu(\tau) = 0$. Considere agora $s \mapsto x_\mu(s)$ definida por

$$x_\mu(s) = \begin{cases} \bar{x}_\mu(s), & s \in [0, \tau] \\ -\bar{x}_\mu(-s), & s \in [-\tau, 0] \end{cases}.$$

Estendemos x_μ em uma função 2τ -periódica e x_μ é uma solução da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$. O caso $\mu < 0$ é similar. Finalmente, usando o Lema 2.1.2 provamos o resultado. \square

Demonstração do Teorema 2.3.2. Usamos a mesma técnica da demonstração do Teorema 2.3.1. Considere $\alpha \neq 0, \eta < 0$. Pelos Lemas 2.3.2, 2.3.3 e 2.3.5, qualquer solução periódica x tal que $x(0) = x(\pi) = 0$, $x'(0) = r \geq 0$, $\operatorname{sgn}(x)(0^+) = 1$, deve satisfazer $r = (\eta/\sqrt{\delta}) \tanh(\sqrt{\delta} \cdot \pi/2) - \alpha/(1 + \delta)$ e $\alpha \leq (\eta/\sqrt{\delta})(1 + \delta) \tanh(\sqrt{\delta} \cdot \pi/2)$. Seja x uma solução da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$ satisfazendo estas condições. Seja $E(\alpha)$ a equação suave $x'' + \eta = \delta + \alpha \sin(s)$. Denote por \bar{x}_α a restrição a $[0, \pi]$ da função dada pelo Lema 2.3.1, a qual é $\bar{x}_\alpha(s) = -(\eta/\delta) \cosh(\sqrt{\delta}s) + (\eta/\delta) \tanh(\sqrt{\delta} \cdot \pi/2) \sinh(\sqrt{\delta}s) + (\eta/\delta) - \alpha(1 + \delta)^{-1} \sin(s)$. Se $\alpha < (\eta/\sqrt{\delta})(1 + \delta) \tanh(\sqrt{\delta} \cdot \pi/2)$, $\bar{x}'_\alpha(0) = r > 0$, enquanto $\bar{x}'_\alpha(\pi/2) = 0$. Segue do Lema 2.3.8 que \bar{x}_α é não negativa em $[0, \pi]$ e positiva em $(0, \pi)$. Definimos $x_\alpha(s) = \bar{x}_\alpha(s)$ para $s \in [0, \pi]$ e $x_\alpha(s) = -\bar{x}_\alpha(-s)$ para $s \in [-\pi, 0]$. Estendemos agora esta solução em \mathbb{R} a uma solução 2π -periódica da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$. Finalmente, usando o Lema 2.1.2, obtemos uma solução periódica simples regular da Eq. (2.1) $_{\theta>0}$. Se $\alpha = (\eta/\sqrt{\delta})(1 + \delta) \tanh(\sqrt{\delta} \cdot \pi/2)$, pelo Lema 2.3.8, \bar{x}_α é não negativa em $[0, \pi]$, positiva em $(0, \pi)$ e satisfaz $\bar{x}_\alpha(0) = \bar{x}_\alpha(\pi) = \bar{x}'_\alpha(0) = \bar{x}'_\alpha(\pi) = 0$. Definimos então x como anteriormente (por simetria) e estendemos por periodicidade. Finalmente, pelo Lema 2.1.1, obtemos uma solução periódica simples singular da Eq. (2.1) $_{\theta>0}$. \square

Demonstração da Proposição 2.3.1. Considere $\alpha \neq 0, \eta > 0$. Usando o Lema 2.1.2, consideramos a Eq. (2.2) $_{\delta>0}$. Seja $E(\alpha)$ a equação suave $x'' + \eta = \delta + \alpha \sin(s)$ e $s \mapsto x_\alpha(s)$ a única

solução de $E(\alpha)$ em $[0, \pi]$ satisfazendo $x_\alpha(0) = x_\alpha(\pi) = 0$ e $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Se $\alpha \leq 0$, $x_\alpha(s)$ é positiva em $(0, \pi)$. Se $\alpha > 0$, realizamos uma homotopia da solução $s \mapsto x_0(s)$ de $E(0)$ à solução de $E(\alpha)$. Do Lema 2.3.9, se $\alpha < (\eta/\delta)(1 + \delta)[1 - \text{sech}(\sqrt{\delta} \cdot \pi/2)]$, o sistema $\{x_\alpha(s) = 0, x'_\alpha(s) = 0\}$ não tem solução em $[0, \pi]$. Então construímos uma solução periódica como na demonstração do Teorema 2.3.1. \square

Demonstração da Proposição 2.3.2. Considere $\alpha \neq 0, \eta > 0$. Usando o Lema 2.1.2, consideramos a Eq. (2.2) $_{\delta>0}$. Seja $E(\alpha)$ a equação suave $x'' + \eta = \delta + \alpha \sin(s)$ e $s \mapsto x_\alpha(s)$ a única solução de $E(\alpha)$ em $[0, \pi]$ satisfazendo $x_\alpha(0) = x_\alpha(\pi) = 0$ e $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Se $\alpha = (\eta/\delta)(1 + \delta)[1 - \text{sech}(\sqrt{\delta} \cdot \pi/2)]$, temos $x_\alpha(\pi/2) = x'_\alpha(\pi/2) = 0$. Construímos uma solução periódica singular da Eq. (2.2) $_{\delta>0}$ considerando suas restrições aos subintervalos $[k\pi, (k + 1)\pi]$ como para soluções regulares. Usando o Lema 2.1.2 provamos o resultado. \square

2.3.2 O caso elíptico ressonante $\theta = -\beta^2$ para $\alpha \neq 0$

A análise de $\theta < 0$ é feita em duas etapas quando $\alpha \neq 0$ pois a solução do caso autônomo pode entrar em ressonância com o termo forçante $F(t) = \alpha \text{sen}(\beta t)$. Isto ocorre quando $\theta = -\beta^2$. Ainda assim é possível construir soluções periódicas para a Eq. (2.1) $_{\theta=-\beta^2}$. Ver as Figuras 2.5 e 2.6.

Teorema 2.3.3. *Assuma $\alpha \neq 0, \eta > 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta=-\beta^2}$. Esta equação tem no máximo uma solução periódica simples regular e isto ocorre somente quando $\alpha = 4\eta\pi^{-1}$. Se $\rho > \eta(1 - \frac{2}{\pi})\beta^{-1}$, existe uma única solução periódica simples $t \mapsto y_{[1]}(t)$, de período $2\pi\beta^{-1}$, tal que $y_{[1]}(0) = 0, y'_{[1]}(0) = \rho$. Se $\rho = \eta(1 - \frac{2}{\pi})\beta^{-1}$, a Eq. (2.1) $_{\theta=-\beta^2}$ tem uma solução periódica singular de período $2\pi\beta^{-1}$.*

Teorema 2.3.4. *Assuma $\alpha \neq 0, \eta < 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta=-\beta^2}$. A equação tem uma solução periódica simples se, e somente se, $\alpha = \frac{4\eta}{k\pi}$ com k ímpar.*

(a) *Para cada k ímpar, existe uma única solução periódica simples regular $t \mapsto y_{[k]}(t)$, de período $2k\pi\beta^{-1}$, tal que $y_{[k]}(0) = 0, y'_{[k]}(0) = \rho_k$, onde $\rho_1 > 0, 0 < \rho_3 < -\eta(1 + \frac{2}{3\pi})\beta^{-1}$ e $0 < \rho_k < -\frac{2\eta}{k\pi\beta}, k \geq 5$.*

(b) *Se $\rho_3 = -\eta(1 + \frac{2}{3\pi})\beta^{-1}$, a respectiva solução periódica, de período $6\pi\beta^{-1}$, é uma solução singular.*

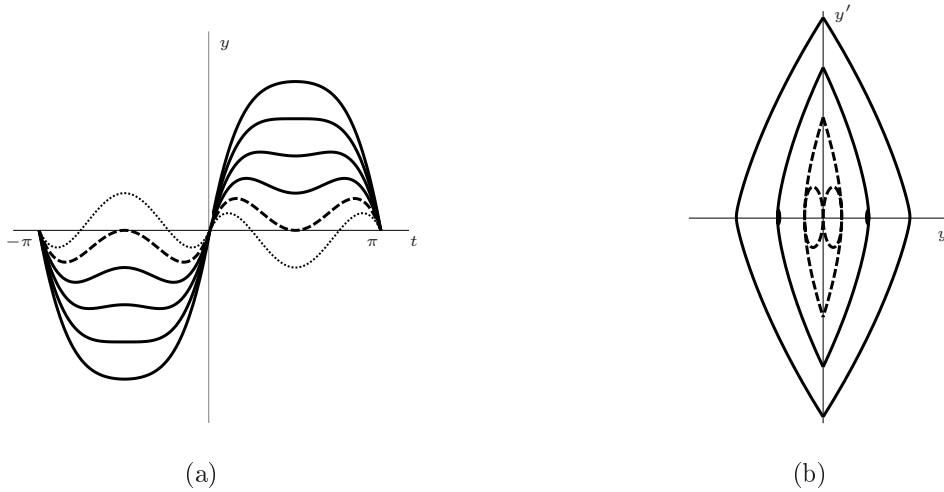


Figura 2.5: (a) Família de soluções 2π -periódicas simples $t \mapsto y(t)$ com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\alpha = \frac{4}{\pi}$ (Teorema 2.3.3). Para $\rho = 1 - \frac{2}{\pi}$, a solução é singular. Quando $\rho < 1 - \frac{2}{\pi}$, a solução (curva pontilhada) muda de sinal em um tempo menor do que π e deixa de ser periódica; (b) O respectivo retrato de fases.

(c) Para cada k ímpar, existe uma única solução periódica simples singular $t \mapsto y_{[k]}(t)$, de período $2k\pi\beta^{-1}$, tal que $y_{[k]}(0) = 0$, $y'_{[k]}(0) = 0$.

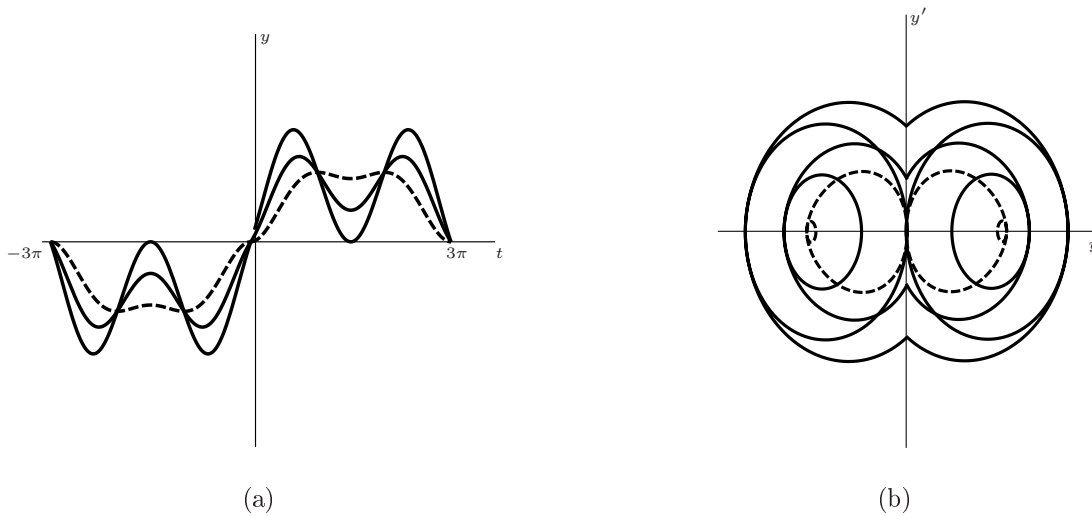


Figura 2.6: (a) Família de soluções 6π -periódicas simples $t \mapsto y(t)$ com $\eta = -1$, $\beta = 1$ e $\alpha = -\frac{4}{3\pi}$ (Teorema 2.3.4); (b) O respectivo retrato de fases.

Novamente usamos a sequência de lemas abaixo para demonstrar os resultados desta seção.

Lema 2.3.10. *Seja x uma solução da Eq. (2.2) $_{\delta=-1}$ tal que $x(0) = 0$, $x'(0) = r$, $\text{sgn}(x)(0^+) = \epsilon$. Então, para $\epsilon \cdot s > 0$,*

$$x(s) = f_\epsilon(s) = \left(\epsilon\eta - \frac{\alpha}{2}s \right) \cos(s) + \left(r + \frac{\alpha}{2} \right) \sin(s) - \epsilon\eta.$$

Demonstração. Integração elementar da Eq. (2.2) _{$\delta=-1$} . \square

Lema 2.3.11. *Seja x uma solução 2τ -periódica da Eq. (2.2) _{$\delta=-1$} tal que $x(0) = 0$, $x'(0) = r$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Então $r \geq 0$, $\alpha = \frac{4\eta}{k\pi}$ para $\alpha \neq 0$ e $\tau = k\pi$ com k ímpar.*

Demonstração. A demonstração é similar à demonstração do Lema 2.3.2, observando que $x(\tau)$ não depende de r e $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$ implica que $r \geq 0$. Além disso, se $\tau = k\pi$ com k par, então $x(\tau) \neq 0$ para $\alpha \neq 0$. \square

Observe que para η fixado e para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, α está fixado.

Lema 2.3.12. *Seja x uma solução periódica simples da Eq. (2.2) _{$\delta=-1$} de semi-período $\tau = k\pi$, que satisfaz $x(0) = x(\tau) = 0$, $x'(0) = r$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Se $\eta > 0$ então $r > 0$ e $\tau = \pi$.*

Demonstração. Assuma que exista uma solução $2k\pi$ -periódica x da Eq. (2.2) _{$\delta=-1$} , com k ímpar e $k \geq 3$. Consideramos sua restrição a $[0, k\pi]$, tal que $x(0) = 0$ e $x'(0) \geq 0$. Mas $x(\pi) = 2\eta(-1 + \frac{1}{k})$. Se $\eta > 0$, $x(\pi) < 0$, o que contradiz o fato de que $k\pi$ é o tempo de troca. Assim $k = 1$. Se $x'(0) = 0$, temos $x(\frac{\pi}{2}) = \eta(-1 + \frac{2}{\pi})$ e, para $\eta > 0$, $x(\frac{\pi}{2}) < 0$, o que contradiz o fato de que π é o tempo de troca. Portanto $r > 0$ e $\tau = \pi$. \square

Lema 2.3.13. *Assuma $\eta > 0$ na Eq. (2.2) _{$\delta=-1$} . Seja x uma solução periódica simples da Eq. (2.2) _{$\delta=-1$} de semi-período $\tau = \pi$, que satisfaz $x(0) = x(\pi) = 0$, $x'(0) = r > 0$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Uma condição necessária para a existência de $s \in (0, \pi)$ tal que $x(s) = x'(s) = 0$ é $r \leq \eta(1 - \frac{2}{\pi})$.*

Demonstração. A equação $x'(s) = 0$ é equivalente a $f(s) = g(s)$, onde $f(s) = r \cos(s)$ e $g(s) = \eta[1 - (\frac{2}{k\pi})s] \sin(s)$. Como $\eta > 0$, a função linear no lado direito desta equação, tem inclinação negativa e uma raiz $s = \frac{\pi}{2}$. Temos $x(\pi - s) = x(s)$ para todo $s \in (0, \pi)$. Temos que $x'(s) = 0$ tem uma ou três raízes em $(0, \pi)$. Se $r > \eta(1 - \frac{2}{\pi})$, temos $x(\frac{\pi}{2}) > 0$. \square

Lema 2.3.14. *Seja x uma solução periódica simples da Eq. (2.2) _{$\delta=-1$} de semi-período $\tau = k\pi$, que satisfaz $x(0) = x(\tau) = 0$, $x'(0) = 0$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Se $\eta < 0$ então $x(s) > 0$ para todo $s \in (0, k\pi)$.*

Demonstração. Dos Lemas 2.3.10 and 2.3.11, $x(s) = \eta[1 - (\frac{2}{k\pi})s] \cos(s) + (\frac{2\eta}{k\pi}) \sin(s) - \eta$. Considere $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < m < k$. Isto implica que $x'(s) = 0$ se, e somente se, $s = \frac{k\pi}{2}$ ou $s = m\pi$ com $s \in (0, k\pi)$. Mas se $\eta < 0$, $x(\frac{k\pi}{2}) > 0$ e $x(m\pi) > 0$ para todo m tal que $0 < m < k$. Concluimos então que $x(s) > 0$ para todo $s \in (0, k\pi)$. \square

Lema 2.3.15. *Assuma $\eta < 0$ na Eq. (2.2) $_{\delta=-1}$. Seja x uma solução periódica simples de semi-período $\tau = k\pi$, que satisfaz $x(0) = x(\tau) = 0$, $x'(0) = r > 0$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$.*

(a) *Se $k = 1$, $x(s) > 0$ para todo $s \in (0, \pi)$.*

(b) *Se $k = 3$, uma condição necessária para a existência de $s \in (0, 3\pi)$ tal que $x(s) = x'(s) = 0$ é $r \geq -\eta(1 + \frac{2}{3\pi})$.*

(c) *Se $k \geq 5$, uma condição necessária para a existência de $s \in (0, k\pi)$ tal que $x(s) = x'(s) = 0$ é $r \geq -\frac{2\eta}{k\pi}$.*

Demonstração. Provamos primeiramente que se $\eta < 0$, $x'(s) = 0$ tem exatamente k raízes em $(0, k\pi)$. A equação $x'(s) = 0$ é equivalente a $f(s) = g(s)$, onde $f(s) = r \cos(s)$ e $g(s) = \eta[1 - (\frac{2}{k\pi})s] \sin(s)$. Se $r > 0$, a equação $f(s) = g(s)$ é equivalente a $\cot(s) = \frac{\eta}{r}[1 - (\frac{2}{k\pi})s]$. Como $\eta < 0$, a função linear no lado direito desta equação tem inclinação positiva e raiz $s = \frac{k\pi}{2}$. É imediato que esta reta cruza o gráfico da função $s \mapsto \cot(s)$ em exatamente k pontos em $(0, k\pi)$. Temos também $x(k\pi - s) = x(s)$, para todo $s \in (0, k\pi)$ com k ímpar. (a) Se $k = 1$, $x'(s) = 0$ tem exatamente uma raiz em $(0, \pi)$ e a prova é imediata. (b) Se $k = 3$, $x'(s) = 0$ tem exatamente 3 raízes em $(0, 3\pi)$. Basta considerar $x(\frac{3\pi}{2})$ e observar que se $r < -\eta(1 + \frac{2}{3\pi})$ então $x(\frac{3\pi}{2}) > 0$. (c) Suponha $r < -\frac{2\eta}{k\pi}$. Considere $0 < s_2 < s_l \leq \frac{k\pi}{2}$ com l par tal que $x'(s_2) = x'(s_l) = 0$, $\forall s_l \in (s_2, \frac{k\pi}{2}]$. Como $\cot(s) = \frac{\eta}{r}[1 - (\frac{2}{k\pi})s]$ e $\eta < 0$ então $\cot(s_2) < \cot(s_l) \leq 0$. De $r < -\frac{2\eta}{k\pi}$ e $\cot(s_2) < \cot(s_l) \leq 0$, obtemos $0 < x(s_2) < x(s_l)$ para todo $s_l \in (s_2, \frac{k\pi}{2}]$ tal que $x'(s_l) = 0$ com l par. Isto implica que $x(s) > 0$ para todo $s \in (0, k\pi)$ pois $x(k\pi - s) = x(s)$. Portanto $r \geq -\frac{2\eta}{k\pi}$ é uma condição necessária para a existência de $s \in (0, k\pi)$ tal que $x(s) = x'(s) = 0$, com $k \geq 5$, k ímpar. \square

Demonstração do Teorema 2.3.3. Sejam $\alpha \neq 0, \eta > 0$. Pelo Lema 2.1.2, a Eq. (2.1) $_{\theta=-\beta^2}$ pode ser escrita como Eq. (2.2) $_{\delta=-1}$. Assuma que x é uma solução periódica simples da Eq. (2.2) $_{\delta=-1}$ tal que $x(0) = 0$, $x'(0) = r$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Considere \bar{x} a restrição de x ao intervalo $[0, \tau]$. Pelos Lemas 2.3.10 e 2.3.11, $\bar{x}(s) = \eta[1 - (2/k\pi)s] \cos(s) + (r + 2\eta/k\pi) \sin(s) - \eta$ com k ímpar e $r \geq 0$. Temos também $\alpha = 4\eta/\pi$. Por hipótese, $\eta > 0$. Então, pelo Lema 2.3.12, $\tau = \pi$ ($k = 1$). Pelo Lema 2.3.13 se $r > \eta(1 - 2/\pi)$ então $x(s) > 0$ para todo $s \in (0, \pi)$. Considere agora $s \mapsto x(s)$ definida por

$$x(s) = \begin{cases} \bar{x}(s), & s \in [0, \pi] \\ -\bar{x}(-s), & s \in [-\pi, 0] \end{cases}.$$

Estendemos então x em uma função 2π -periódica e x é uma solução da Eq. (2.2) $_{\delta=-1}$. Se $r = \eta(1 - 2/\pi)$ então $\bar{x}(\pi/2) = \bar{x}'(\pi/2) = 0$ e $\bar{x}(s) > 0$ para $s \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. Definimos então a solução periódica singular como anteriormente (por simetria) e estendemos a solução por periodicidade. Finalmente, usando Lema 2.1.2 provamos o resultado. \square

Demonstração do Teorema 2.3.4. Sejam $\alpha \neq 0, \eta < 0$. Pelo Lema 2.1.2, Eq. (2.1) $_{\theta=-\beta^2}$ pode ser escrita como Eq. (2.2) $_{\delta=-1}$. Pelo Lema 2.3.11, $\alpha = 4\eta/k\pi$, $\tau = k\pi$ com k ímpar e $r \geq 0$. Considere \bar{x} a restrição de x ao intervalo $[0, k\pi]$.

(a) Segue do Lema 2.3.15.

(b) Considere $k = 3$ no Lema 2.3.15. Se $r = -\eta(1 + 2/3\pi)$ temos $\bar{x}(3\pi/2) = \bar{x}'(3\pi/2) = 0$ e $\bar{x}(s) > 0$ para $s \in (0, 3\pi/2) \cup (3\pi/2, \pi)$.

(c) Segue do Lema 2.3.14.

Finalizamos então como nas demonstrações dos Teoremas 2.3.1 e 2.3.2 para obter as soluções periódicas correspondentes. \square

2.3.3 O caso elíptico $-\beta^2 \neq \theta < 0$ para $\alpha \neq 0$

Considere $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta < 0}$ com $\theta \neq -\beta^2$. Neste caso, as soluções da equação autônoma não são ressonantes com o termo forçante $F(t) = \alpha \sin(\beta t)$. Obtemos um conjunto finito de famílias de soluções periódicas para a equação perturbada, conforme o resultado abaixo. As Figuras no final da seção, ilustram este caso.

Teorema 2.3.5. *Assuma $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta < 0}$. Considere (β, θ) tal que $\beta^{-1}\sqrt{-\theta} \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0, 1\}$ e $-\beta^2 < \theta < 0$. Seja $n \in \mathbb{N}$ definido por $n < \frac{\beta}{\sqrt{-\theta}} < n + 1$. Existe um conjunto $K_n = \{m_1, \dots, m_n\}$, $m_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, em que para todo $k \in K_n$, existe α_k^* tal que, se*

1. $|\alpha| < \alpha_k^*$,

2. $\cos\left(\frac{1}{2}k\pi\beta^{-1}\sqrt{-\theta}\right) \neq 0$ e $\eta \tan\left(\frac{1}{2}k\pi\beta^{-1}\sqrt{-\theta}\right) > 0$,

a Eq. (2.1) $_{\theta < 0}$ tem uma única solução periódica simples $t \mapsto y_{[k]}(t)$, de período $2k\pi\beta^{-1}$,

tal que $y_{[k]}(0) = 0$, $y'_{[k]}(0) = \frac{\eta}{\sqrt{-\theta}} \tan\left(\frac{1}{2}k\pi\beta^{-1}\sqrt{-\theta}\right) - \frac{\alpha\beta}{\beta^2 + \theta}$.

Para demonstrar este resultado, usamos os lemas abaixo.

Lema 2.3.16. *Seja x uma solução da Eq. (2.2) $_{\delta < 0}$, $\delta \neq -1$, tal que $x(0) = 0$, $x'(0) = r$, $\text{sgn}(x)(0^+) = \epsilon$. Então, para $\epsilon \cdot s > 0$, $x(s) = f_\epsilon(s) =$*

$$= \frac{-\epsilon\eta}{\delta} \cos(\sqrt{-\delta}s) + \frac{1}{\sqrt{-\delta}} \left(r + \frac{\alpha}{1+\delta} \right) \sin(\sqrt{-\delta}s) + \frac{\epsilon\eta}{\delta} - \frac{\alpha}{1+\delta} \sin(s).$$

Demonstração. Integração elementar da Eq. (2.2) $_{\delta < 0}$ para $\delta \neq -1$. □

Lema 2.3.17. *Seja x uma solução 2τ -periódica da Eq. (2.2) $_{\delta < 0}$, $\delta \neq -1$, tal que $x(0) = 0$, $x'(0) = r$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Então*

$$r = \frac{\eta}{\sqrt{-\delta}} \tan\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}\right) - \frac{\alpha}{1+\delta}.$$

Além disso, se $\alpha \neq 0$ existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\tau = k\pi$.

Demonstração. Consideramos (como na prova do 2.3.2), as condições $f_\epsilon(\tau^\epsilon) = 0$ e $f'_\epsilon(\tau^\epsilon) = f'_{-\epsilon}(\tau^{-\epsilon})$. Como $\tau^\epsilon = -\tau^{-\epsilon}$, colocamos $\tau = |\tau^\epsilon|$ por simplicidade. Usando identidades trigonométricas, reescrevemos $x(s) = f_\epsilon(s) =$

$$2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\delta}s}{2}\right) \left[\frac{-\eta}{\delta} \sin\left(\frac{\sqrt{-\delta}s}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{-\delta}} \left(r + \frac{\alpha}{1+\delta} \right) \cos\left(\frac{\sqrt{-\delta}s}{2}\right) \right] - \frac{\alpha}{1+\delta} \sin(s).$$

Como x é 2τ -periódica, da Eq. (2.2) obtemos $\alpha \sin(s + 2\tau) = \alpha \sin(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Assim, para $\alpha \neq 0$, $2\tau = 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Mas $\tau > 0$ implica $\tau = k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. A condição $f_\epsilon(\tau) = 0$ é satisfeita se, e somente se, $\tau = \frac{2}{\sqrt{-\delta}}l_1\pi$ ou $\tau = \frac{2}{\sqrt{-\delta}}\{\arctan(C) + l_2\pi\}$, for all $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ com

$$C = \eta^{-1}\sqrt{-\delta}\left(r + \frac{\alpha}{1+\delta}\right).$$

Mas τ é o primeiro tempo positivo ao qual isto ocorre. Então $l_1 = 1$, $l_2 = 0$ quando $C > 0$ e $l_2 = 1$ quando $C < 0$. Como $\pi > \arctan(C) + l_2\pi$ para $l_2 = 0$ ($C > 0$) e $l_2 = 1$ ($C < 0$), o tempo de troca é $\tau = \frac{2}{\sqrt{-\delta}}\{\arctan(C) + l_2\pi\}$, onde $l_2 = 0$ quando $C > 0$ e $l_2 = 1$ quando $C < 0$. Portanto, em qualquer caso ($C > 0$, $C < 0$ or $C = 0$) temos $r = \frac{\eta}{\sqrt{-\delta}} \tan\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}\right) - \frac{\alpha}{1+\delta}$. □

Lema 2.3.18. *Assuma $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.2) $_{\delta < 0}$, $\delta \neq -1$. Seja x uma solução periódica simples de semi-período $\tau = k\pi$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que satisfaz $x(0) = x(\tau) = 0$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Então o parâmetro α deve ser tal que:*

(a) *Se k é ímpar,*

- $\alpha(1 + \delta)^{-1} \leq \frac{\eta}{\sqrt{-\delta}} \tan\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}\right)$.

(b) *Se k é par,*

- $\alpha(1 + \delta)^{-1} \leq \frac{\eta}{\sqrt{-\delta}} \tan\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}\right)$ and
- $\alpha(1 + \delta)^{-1} \geq -\frac{\eta}{\sqrt{-\delta}} \tan\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}\right)$.

Demonstração. De $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$, temos $x'(0) = r \geq 0$. Pelo Lema 2.3.17, $r \geq 0$ se, e somente se, $\alpha(1 + \delta)^{-1} \leq \frac{\eta}{\sqrt{-\delta}} \tan\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}\right)$. Como para $s \in (0, \tau)$, $x(s) \geq 0$, temos $x'(\tau) \leq 0$. Se k é ímpar, uma solução da Eq. (2.2) $_{\delta < 0}$, $\delta \neq -1$, satisfaz $x(\tau - s) = x(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Em particular $x'(0) = -x'(\tau)$ e $x'(\tau) \leq 0$ é equivalente a $x'(0) \geq 0$. Se k é par a propriedade não é válida. Cálculos mostram que $x'(\tau) \leq 0$ se, e somente se, $\alpha(1 + \delta)^{-1} \geq -\frac{\eta}{\sqrt{-\delta}} \tan\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}\right)$. \square

Lema 2.3.19. *Assuma $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.2) $_{\delta < 0}$, $\delta \neq -1$. Seja x uma solução periódica simples de semi-período $\tau = k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que satisfaz $x(0) = x(\tau) = 0$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$, $C = \tan\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}\right) \neq 0$. Uma condição necessária para a existência de $s \in (0, \tau)$ tal que $x(s) = x'(s) = 0$ é $|\alpha| \geq \alpha^* = \min\{K_1, K_2, K_3^\delta\}$, onde*

- $K_1 = \frac{|\eta||1 + \delta|}{\sqrt{-\delta}} \left| \tan\left(\frac{\tau\sqrt{-\delta}}{2}\right) \right|$,
- $K_2 = \frac{|\eta||1 + \delta|}{-\delta} \left(\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\tau\sqrt{-\delta}}{2}\right)} - 1 \right)$,
- $K_3^\delta = \frac{|\eta||1 + \delta|}{-\delta} \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \delta} - 1\right)^2 - \delta \left(1 + \tan^2\left(\frac{\tau\sqrt{-\delta}}{2}\right) - \frac{1}{(1 + \delta)^2}\right)}$,

com K_3^δ sendo considerado somente quando a expressão na raiz quadrada for positiva.

Demonstração. Seja x uma solução da Eq. (2.2) $_{\delta < 0}$, $\delta \neq -1$, em um intervalo $[0, \tau]$ com $\tau = k\pi$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que satisfaz $x(0) = x(\tau) = 0$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Pelos Lemas 2.3.16 e 2.3.17 o sistema $\{x(s) = 0, x'(s) = 0\}$ nos dá

$$|\alpha| = \frac{|\eta||1 + \delta|}{-\delta} \sqrt{f(\bar{s})^2 - \delta \cdot g(\bar{s})^2}$$

onde

$$\begin{cases} f(\bar{s}) = \cos(\sqrt{-\delta}\bar{s}) + \tan\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}\right) \sin(\sqrt{-\delta}\bar{s}) - 1 \\ g(\bar{s}) = \tan\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}\right) \cos(\sqrt{-\delta}\bar{s}) - \sin(\sqrt{-\delta}\bar{s}) \end{cases},$$

para algum $\bar{s} \in [0, \tau]$. Defina a função $H(s, \tau) := \frac{|\eta||1 + \delta|}{-\delta} \sqrt{f(s)^2 - \delta \cdot g(s)^2}$ para todo $s \in [0, \tau]$. Como $-\delta > 0$, $H(s, \tau) = 0$ se, e somente se, $f(s) = g(s) = 0$. Mas isto é impossível quando $\tan\left(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}\right) \neq 0$. Então, $H(s, \tau) > 0$ para todo $s \in [0, \tau]$. O número

real α^* , estritamente positivo, será o mínimo de H em $[0, \tau]$. Este mínimo é um dos possíveis valores K_1, K_2 ou K_3^δ . \square

Lema 2.3.20. Denote por $E(\alpha)$ a equação $x'' + \eta = \delta x + \alpha \sin(s)$, $\delta < 0$, $\delta \neq -1$, e assuma $\tau = k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(a) Existe uma única solução $s \mapsto x_\alpha(s)$ de $E(\alpha)$ tal que $x_\alpha(0) = x_\alpha(\tau) = 0$ e $\text{sgn}(x_\alpha)(0^+) = 1$.

(b) Se existe uma amplitude μ satisfazendo as condições do Lema 2.3.18 e s_μ tal que $x_\mu(s_\mu) < 0$, então existe $s_\mu^* \in (0, \tau)$ tal que $x_\mu(s_\mu^*) < 0$ and $x'_\mu(s_\mu^*) = 0$.

Demonstração. A demonstração é similar à demonstração do Lema 2.3.6. \square

Lema 2.3.21. Denote por $E(\alpha)$ a equação $x'' + \eta = \delta x + \alpha \sin(s)$ com $\delta < 0$, $\delta \neq -1$, e assuma $\tau = k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Assuma ainda que exista uma amplitude γ satisfazendo as condições do Lema 2.3.18 e $s_\gamma \in (0, \tau)$ tal que $x_\gamma(s_\gamma) < 0$. Então existe μ com $0 < |\mu| < |\gamma|$ e $s_\mu \in (0, \tau)$ tal que $x_\mu(s_\mu) = x'_\mu(s_\mu) = 0$.

Demonstração. A demonstração é similar à demonstração do Lema 2.3.7. \square

Lema 2.3.22. Assuma $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.2) $_{\delta < 0}$, $\delta \neq -1$. Seja x uma solução periódica simples de semi-período $\tau = k\pi$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que satisfaz $x(0) = x(\tau) = 0$. Então $\sqrt{-\delta} \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. No intervalo $[0, \tau]$, $x(s) = x_1(s) + c \cdot \sin(s)$, onde x_1 e a constante c são dadas pelo Lema 2.3.16. A função x_1 tem período $p_1 = 2\pi/\sqrt{-\delta}$, $c \cdot \sin(s)$ tem período $q_1 = 2\pi$ e x tem período $p = 2k\pi$. Suponha que $\sqrt{-\delta} \notin \mathbb{Q}$. Escrevemos $x_1(s) = x(s) - c \cdot \sin(s)$. Como $(p/q_1) = k \in \mathbb{Q}$, o período de x_1 é $p_1 = 2k\pi$. Então, $\sqrt{-\delta} = 1/k$ e isto é uma contradição. Portanto $\sqrt{-\delta} \in \mathbb{Q}$. \square

Lema 2.3.23. Assuma $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.2) $_{\delta < 0}$, $\delta \neq -1$. Considere $\tau = k\pi$. Se $\cos(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}) = 0$, então $x(\tau) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Demonstração. Segue imediatamente da expressão de $x(s)$. \square

Lema 2.3.24. Assuma $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.2) $_{\delta < 0}$, $\delta \neq -1$. Considere $C = \tan(\frac{1}{2}\tau\sqrt{-\delta}) \neq 0$. Uma condição necessária para a existência de soluções periódicas simples é $-1 < \delta < 0$ e $\eta C > 0$.

Demonstração. Suponha $\delta < -1$. Quando $C > 0$, segue do Lema 2.3.17, a restrição $0 < k < \frac{1}{\sqrt{-\delta}}$. Isto implica que $k < 1$, o que é impossível. Quando $C < 0$, temos $\frac{1}{\sqrt{-\delta}} < k < \frac{2}{\sqrt{-\delta}}$. Isto é possível apenas para $k = 1$. Mas, da expressão de $x(s)$, temos $x(\pi) \neq 0$. Portanto $-1 < \delta < 0$. Suponha agora que $-1 < \delta < 0$ e $\eta C < 0$. Quando $\eta < 0$ e $C > 0$ temos $x(\pi) < 0$ e $\tau = k\pi$ não pode ser o tempo de troca. Quando $\eta > 0$ e $C < 0$ temos $x(\pi) \leq 0$ com $x'(\pi) < 0$. Segue do Lema 2.3.17, que $\frac{1}{\sqrt{-\delta}} < k < \frac{2}{\sqrt{-\delta}}$ pois $C < 0$. Como $-1 < \delta < 0$ temos $k \neq 1$. Então, como $x(\pi) \leq 0$ e $x'(\pi) < 0$, $\tau = k\pi$, com $k \geq 2$, não pode ser o tempo de troca. Portanto $-1 < \delta < 0$ e $\eta C > 0$. \square

Demonstração do Teorema 2.3.5. Considere $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.1) com $\sqrt{-\theta} \cdot \beta^{-1} \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0, 1\}$, $-\beta^2 < \theta < 0$. Pelo Lema 2.1.2 esta equação pode ser escrita como a Eq. (2.2) com $\sqrt{-\delta} \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0, 1\}$, $-1 < \delta < 0$. Assuma que x é uma solução 2τ -periódica simples da Eq. (2.2) com $x(0) = 0$ tal que $\cos(\sqrt{-\delta} \cdot \tau/2) \neq 0$. Pelo Lema 2.1.3 podemos assumir $r \geq 0$, e pelos Lemas 2.3.16 e 2.3.17,

$$r = (\eta/\sqrt{-\delta}) \tan(\sqrt{-\delta} \cdot \tau/2) - \alpha/(1 + \delta).$$

Temos um número finito de soluções periódicas simples, pois $0 < k < 1/\sqrt{-\delta}$ quando $\eta > 0$, $\tan(\sqrt{-\delta} \cdot k\pi/2) > 0$ e $1/\sqrt{-\delta} < k < 2/\sqrt{-\delta}$ quando $\eta < 0$, $\tan(\sqrt{-\delta} \cdot k\pi/2) < 0$. Para cada k que satisfaz as respectivas restrições, o valor positivo α_k^* é dado pelo Lema 2.3.19. Finalizamos então, como nas demonstrações dos Teoremas 2.3.1 e 2.3.2. \square

Para ilustrar o resultado desta seção, consideramos a Eq. (2.1) tomando $\beta = 1$, $\eta = -\theta = 1/25 > 0$:

$$y'' + (1/25) \operatorname{sgn}(y) = -(1/25)y + \alpha \sin(t).$$

Dos Lemas 2.3.16 e 2.3.17, a solução que satisfaz

$$y(0) = 0, y'(0) = (1/5) \tan(k\pi/10) - (25/24)\alpha$$

com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, é

$$y(t) = \cos(s/5) + \tan(k\pi/10) \sin(s/5) - 1 - (25/24)\alpha \sin(t).$$

Pelo Lema 2.3.19, para cada $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, existe um número positivo

$$\alpha_k^* = \min\{K_1^{(k)}, K_2^{(k)}, K_3^{\theta, (k)}\},$$

uma vez que a condição $\eta \cdot \tan(k\pi/10) > 0$ é satisfeita somente para $\tan(k\pi/10) > 0$ e isto nos dá a restrição sobre k . Denotaremos $\alpha^* = \min\{\alpha_i^* \mid i = 1, 2, 3, 4\}$. Alguns cálculos nos dá $\alpha^* = K_3^{\theta, (1)} \cong 0.048537$. Para $|\alpha| < \alpha^*$ temos as seguintes configurações para a solução em $[0, k\pi]$, com $k = 1, 2, 3, 4$ e $k = 6, 7, 8, 9$:

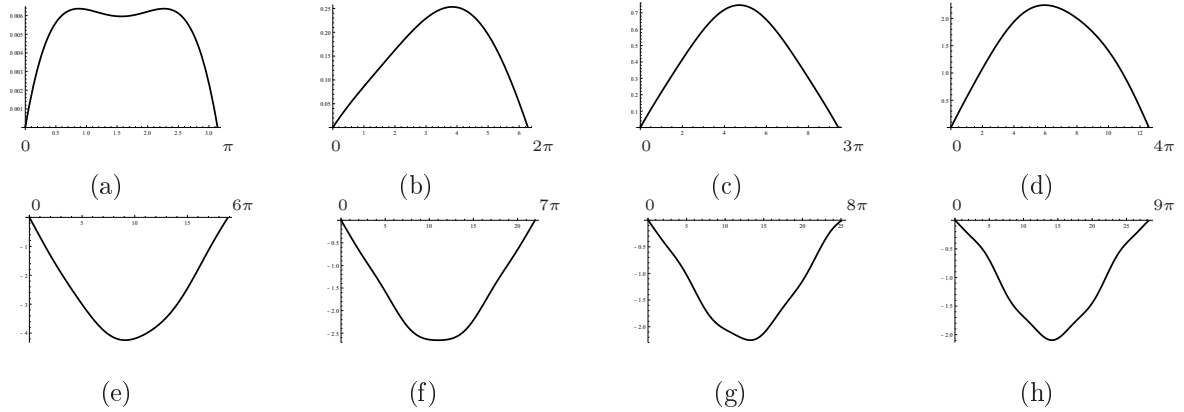


Figura 2.7: Exemplos de soluções $2k\pi$ -periódicas em $[0, k\pi]$ para $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Quando $k \in \{6, 7, 8, 9\}$ as respectivas soluções são tais que $y'(0) < 0$ e não gera uma solução da equação descontínua.

Observe que para $k = 6, 7, 8, 9$ a solução é tal que $y'(0) < 0$ e as condições necessárias do Lema 2.3.18 não são cumpridas. Para $k = 1$, existe um valor α para o qual obtemos uma solução 2π -periódica simples singular. Este valor é dado pela condição $x(\pi/2) = 0$ e é $\alpha = (24/25) (\sec(\pi/10) - 1)$. Ver a Figura 2.8.

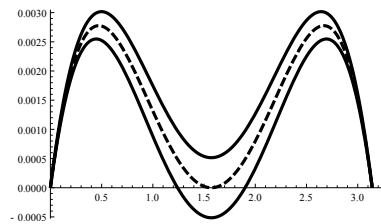


Figura 2.8: Uma solução 2π -periódica simples singular (curva tracejada) em $[0, \pi]$.

Agora, se consideramos $\eta = \theta = -1/25 < 0$, a solução que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -(1/5) \tan(k\pi/10) - (25/24)\alpha$$

com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, é

$$y(t) = -\cos(s/5) - \tan(k\pi/10) \sin(s/5) + 1 - (25/24)\alpha \sin(t).$$

Pelo Lema 2.3.19, para cada $k \in \{6, 7, 8, 9\}$, existe um número positivo

$$\alpha_k^* = \min\{K_1^{(k)}, K_2^{(k)}, K_3^{\theta, (k)}\},$$

uma vez que a condição $\eta \cdot \tan(k\pi/10) > 0$ é satisfeita somente para $\tan(k\pi/10) < 0$ e isto nos dá a restrição sobre k . Denotaremos $\alpha^* = \min\{\alpha_i^* \mid i = 6, 7, 8, 9\}$. Alguns cálculos nos dá $\alpha^* = K_3^{\theta, (9)} \cong 0.048537$. Para $|\alpha| < \alpha^*$ temos as seguintes configurações para a solução em $[0, k\pi]$, com $k = 6, 7, 8, 9$ and $k = 1, 2, 3, 4$:

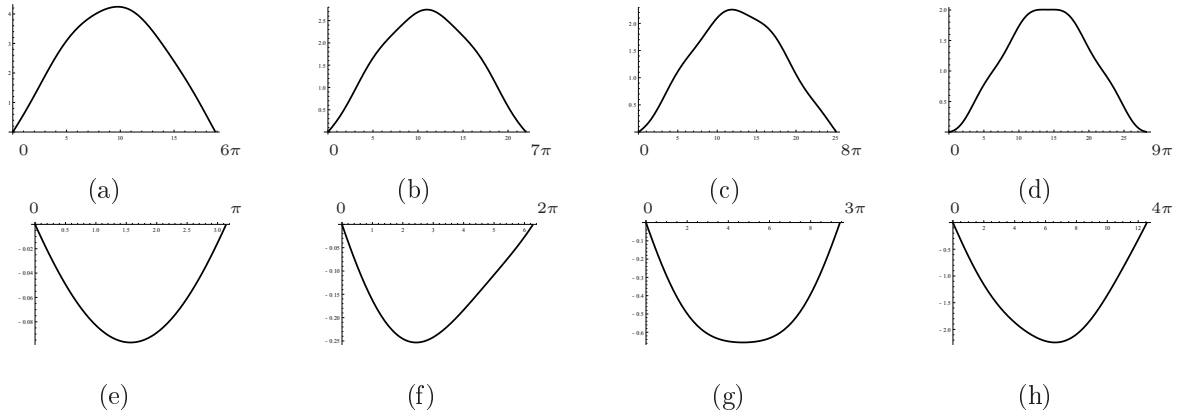


Figura 2.9: Exemplos de soluções $2k\pi$ -periódicas em $[0, k\pi]$ para $k \in \{6, 7, 8, 9\}$. Quando $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ as respectivas soluções são tais que $y'(0) < 0$ e não gera uma solução da equação descontínua.

Observe que para $k = 1, 2, 3, 4$ a solução é tal que $y'(0) < 0$ e as condições necessárias do Lema 2.3.18 não são cumpridas.

2.3.4 O caso parabólico $\theta = 0$ com $\eta < 0$ para $\alpha \neq 0$

Considere $\alpha \neq 0$ na Eq. (2.1) $_{\theta=0}$ com $\eta < 0$. Ainda que todas as soluções não triviais da equação autônoma são ilimitadas, quando consideramos a perturbação por $F(t) = \alpha \sin(\beta t)$, produzimos uma família de soluções periódicas. Este resultado está descrito abaixo e pode ser observado na Figura 2.10.

Teorema 2.3.6. *Se $\eta < 0$, a Eq. (2.1) $_{\theta=0}$ tem no máximo uma família de soluções periódicas simples. Se $|\alpha| > -\frac{\eta\pi}{2}$, existe uma única solução periódica simples $t \mapsto y_{[1]}(t)$, de período $2\pi\beta^{-1}$, tal que $y_{[1]}(0) = 0$ e $y'_{[1]}(0) \operatorname{sgn}(\alpha) > 0$. Além disso, $y'_{[1]}(0) = \frac{1}{2}(\eta\pi - 2\alpha)\beta^{-1}$. Se $|\alpha| = -\frac{\eta\pi}{2}$, existe uma solução periódica singular $t \mapsto y_{[1]}(t)$ de período $2\pi\beta^{-1}$.*

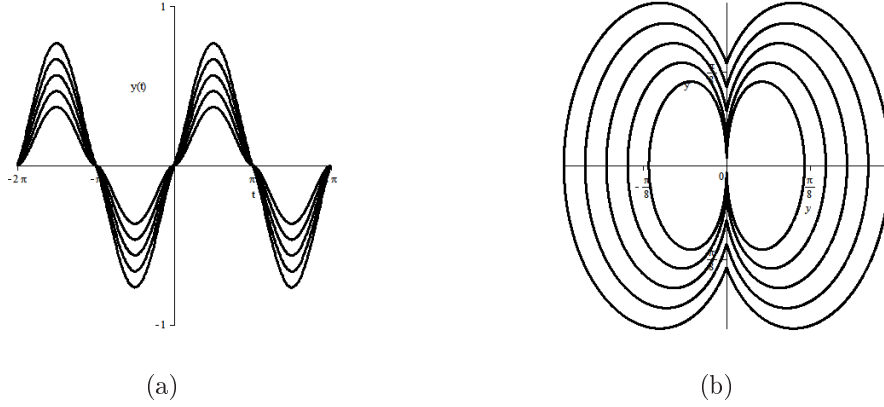


Figura 2.10: (a) Uma família de soluções 2π -periódicas da Eq. (2.1) $_{\theta=0}$ para $-2 \leq \alpha < -\frac{\pi}{2}$ ($\eta = -1, \beta = 1$) e (b) seu correspondente retrato de fases.

Nosso próximo resultado estabelece (mediante alguma condição de existência) uma conexão entre a única solução 2π -periódica da Eq. (2.1) $_{\theta=0}$ quando $\eta < 0$, com a única solução 2π -periódica da Eq. (2.1) $_{\theta=0}$ quando $\eta > 0$ (dada pela Proposição (B)). Ver a Figura 2.12.

Isto dá condições para que se possa deformar suavemente uma solução periódica do modelo parabólico com $\eta > 0$ em uma solução periódica do modelo parabólico com $\eta < 0$.

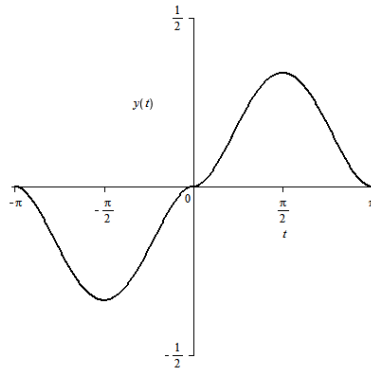


Figura 2.11: Uma solução 2π -periódica singular da Eq. (2.1) $_{\theta=0}$ ($\alpha = -\frac{\pi}{2}, \eta = -1, \beta = 1$).

Teorema 2.3.7. *Fixemos $\eta < 0$ e $\alpha \leq \frac{\eta\pi}{2}$. Existe uma única família a um parâmetro, $y_\phi, \phi \in (-\infty, 1]$, de soluções de período $2\pi\beta^{-1}$ de*

$$y'' + \phi\eta \operatorname{sgn}(y) = \alpha \sin(\beta t), \quad \beta > 0$$

tal que $y_\phi(0) = 0, y'_\phi(0) = \frac{1}{2}(\phi\eta\pi - 2\alpha)\beta^{-1}$. Se $\alpha = \frac{\eta\pi}{2}$, y_1 é uma solução singular. Caso contrário, y_1 é regular.

O contínuo de soluções periódicas y_ϕ correspondentes à transição entre os casos $\eta < 0$ e $\eta > 0$ está representado na Figura 2.13. Para valores positivos de α , há uma clara diferença entre as dinâmicas dos casos.

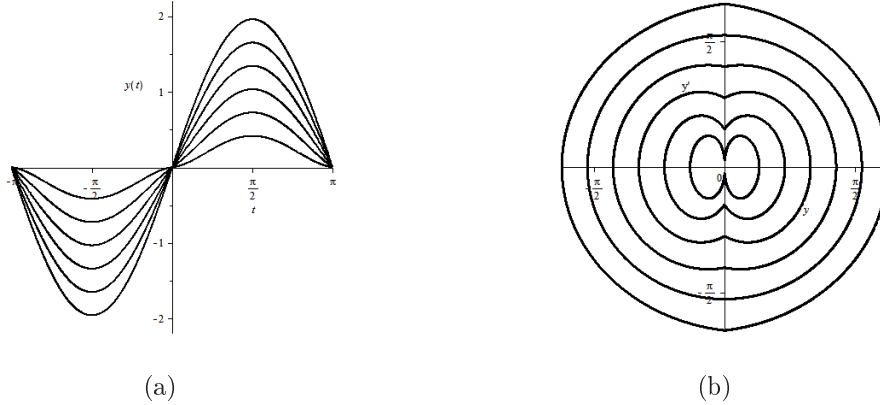


Figura 2.12: (a) Uma família de soluções 2π -periódicas de $y'' + \phi\eta \operatorname{sgn}(y) = \alpha \sin(\beta t)$ for $\eta = -1$, $\alpha = -\frac{21\pi}{40}$, $\phi \in [-\frac{1}{4}, 1]$, $\beta = 1$ e (b) seu correspondente retrato de fases.

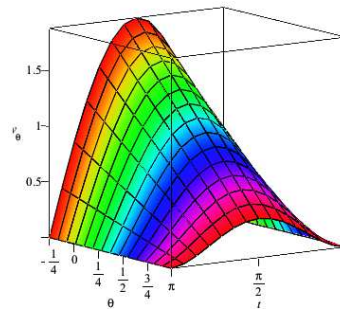


Figura 2.13: Uma família de restrições a $[0, \pi]$ de soluções 2π -periódicas de $y'' + \phi\eta \operatorname{sgn}(y) = \alpha \sin(\beta t)$ quando $\phi \in [-\frac{1}{4}, 1]$ ($\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\eta = -1$, $\beta = 1$). A superfície termina (na frente) em uma solução periódica singular (em $t = 0$ e $t = \pi$).

Para demonstrarmos estes resultados usamos os lemas abaixo, cujas provas omitidas são similares às provas dos lemas equivalentes na Seção 2.3.1.

Lema 2.3.25. *Seja x uma solução da Eq. (2.2) $_{\delta=0}$ com $\eta < 0$ tal que $x(0) = 0$, $x'(0) = r$, $\operatorname{sgn}(x)(0^+) = \epsilon$. Então, para $\epsilon \cdot s > 0$,*

$$x(s) = f_\epsilon(s) = -\epsilon\eta \frac{s^2}{2} + rs + \alpha(s - \sin(s)).$$

Lema 2.3.26. *Seja x uma solução 2τ -periódica da Eq. (2.2) $_{\delta=0}$ com $\eta < 0$ tal que $x(0) = 0$, $x'(0) = r$, $\text{sgn}(x)(0^+) = 1$. Então $r = \frac{\eta\tau}{2} - \alpha$. Além disso, se $\alpha \neq 0$ existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\tau = k\pi$.*

Lema 2.3.27. *Se x é uma solução periódica da Eq. (2.2) $_{\delta=0}$ com $\eta < 0$, no intervalo $[0, \tau]$, que satisfaz $x(0) = 0$, $\text{sgn}(x)(0^+) > 0$, então $\tau = \pi$.*

Demonstração. Assuma que exista uma solução $2k\pi$ -periódica x da Eq. (2.2) $_{\delta=0}$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$. Consideramos sua restrição a $[0, k\pi]$, tal que $x(0) = 0$ e $x'(0) \geq 0$. Observamos então que para $l \in \mathbb{N}$ tal que $0 < l < k$, $x(l\pi) = -\frac{\eta}{2}\pi^2 l(l-k)$. Deste modo, $x(l\pi) < 0$, o que contradiz o fato de que $k\pi$ é o tempo de troca. Assim, k deve ser igual a 1. □

Demonstração do Teorema 2.3.6. As técnicas de demonstração são similares às das demonstrações dos Teoremas 2.3.1 e 2.3.2 e, portanto, omitimos a demonstração. □

Demonstração do Teorema 2.3.7. Sem perda de generalidade, fixemos $\eta = -1$ e $\alpha < -\pi/2$. Para $\phi = 1$ temos uma única solução periódica y_1 que se anula em 0, da Eq. (2.1) $_{\theta} = 0$. Para $0 < \phi < 1$ temos também $\alpha < -\phi\pi/2$. Assim existe uma única solução periódica y_ϕ que se anula em 0, da Eq. (2.1) $_{\theta=0}$. Para $\phi = 0$, a única solução periódica y_0 que se anula em 0 é definida por $y_0(t) = -\alpha\beta^{-2}\sin(\beta t)$. E, para $\phi < 0$, temos $\alpha < 0 < -\phi\pi^2/8$, e pela Proposição (B) existe uma única solução periódica y_ϕ , que se anula em 0, da Eq. (2.1) $_{\theta=0}$. É simples ver que $\phi \mapsto y_\phi$ é contínua. No caso $\alpha = -\pi/2$, y_1 é apenas singular, todo o resto sendo inalterado. □

Capítulo 3

Soluções deslizantes de equações de segunda ordem não-autônomas

Consideramos equações diferenciais ordinárias (EDO) não-autônomas, de segunda ordem, com lado direito descontínuo. Primeiramente, analisamos o conceito de solução para uma equação da classe mencionada e, então, determinamos condições analíticas que são satisfeitas por soluções típicas. São estudadas soluções do tipo deslizantes e a questão da unicidade de soluções, em que também apresentamos uma correspondência com sistemas de Filippov.

3.1 Definições e resultados preliminares

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto, $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f_1, f_2, h : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe \mathcal{C}^{r-1} , $r \geq 2$. Admita que 0 é um valor regular de h , isto é, o vetor gradiente $\nabla h(p)$ é não-nulo para qualquer $p \in h^{-1}(0)$ (imagem inversa de 0).

Considere agora a EDO de segunda ordem com lado direito descontínuo

$$x'' = \begin{cases} f_1(t, x, x') & \text{se } h(t, x, x') \leq 0 \\ f_2(t, x, x') & \text{se } h(t, x, x') \geq 0 \end{cases}. \quad (3.1)$$

Adiante usamos a abreviação D2DE para representar esta equação.

Definição 3.1.1. Diz-se conjunto de descontinuidade para a D2DE (3.1) e denota-se por D_h ao conjunto de funções diferenciáveis que satisfazem a equação diferencial ordinária de primeira ordem implícita $h(t, x, x') = 0$.

Seja $z \in D_h$ e considere uma função $x : I \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos por H_x ao conjunto de tempos $t \in I$ tal que as funções z e x coincidem:

$$H_x = \{t \in I \mid h(t, x(t), x'(t)) = 0\}. \quad (3.2)$$

Em outras palavras, H_x é o conjunto de tempos para os quais a função x permanece no conjunto de descontinuidade D_h .

Dadas as funções h e x , o conjunto H_x pode ter medida nula (vazio ou discreto) ou medida positiva (contém um intervalo não-degenerado). Quando a medida de H_x é positiva, existem $z \in D_h$ e um intervalo não-degenerado $J \subset I$, $J \neq \emptyset$, tal que $x(t) = z(t)$ para todo $t \in J$.

Definição 3.1.2. *Sejam $h : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^{r-1} ($r \geq 2$) e 0 um valor regular de h . Uma função $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada deslizante se existem $z \in D_h$ e um intervalo não-degenerado $J \subset I$, $J \neq \emptyset$, tal que $x(t) = z(t)$ para todo $t \in J$.*

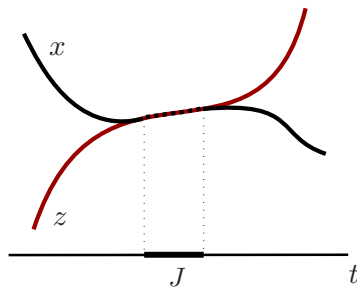


Figura 3.1: A função x é deslizante em J .

De acordo com a definição 3.1.2, para que uma dada função x seja deslizante é necessário que o conjunto H_x tenha medida positiva. Se isto ocorre para uma função x duas vezes diferenciável, prova-se que $h_{x'}(t, x(t), x'(t)) \neq 0$ para algum $t \in I$.

Proposição 3.1.1. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ conjuntos abertos. Considere $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável e $h : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k ($k \geq 1$) com 0 um valor regular de h . Se x é deslizante, existe $t^* \in H_x$ tal que $h_{x'}(t^*, x(t^*), x'(t^*)) \neq 0$.*

Demonstração. Sejam $\gamma(t) = (t, x(t), x'(t))$ e $\alpha(t) = (t, x(t))$ para todo $t \in I$. Estas funções γ e α são diferenciáveis uma vez que x é duas vezes diferenciável. Defina $\beta(t) = (h \circ \gamma)(t)$. Assim $\beta'(t) = \langle \nabla h(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual e ∇h é o vetor gradiente de h . Vamos supor que $h_{x'} \equiv 0$. Então $\beta'(t) = \langle \nabla \tilde{h}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle$ com

$\tilde{h}(\alpha(t)) = h(\gamma(t))$ para todo $t \in I$. Considere H_x dada por (3.2) e seja $t_0 \in H_x$. Temos $\beta'(t_0) = \langle \nabla \tilde{h}(\alpha(t_0)), \alpha'(t_0) \rangle$. Se $\beta'(t_0) \neq 0$ a curva α cruza a curva $z \in D_h$ no instante t_0 , conforme Figura 3.2(a). Se $\beta'(t_0) = 0$ as curvas α and $z \in D_h$ são tangentes em t_0 , conforme Figura 3.2(b). Assuma que exista uma vizinhança \tilde{J} de t_0 tal que $\beta'(t) = 0$ para todo $t \in \tilde{J}$. Então $\beta(t) = h(\gamma(t))$ é constante em \tilde{J} e $\nabla h(\gamma(t)) = (0, 0, 0)$ para todo $t \in \tilde{J}$. Isto contradiz a hipótese de que 0 é um valor regular de h . Deste modo, qualquer $t_0 \in H_x$ tal que $\beta(t_0) = h_t(\gamma(t_0)) + x'(t_0)h_x(\gamma(t_0))$ é um ponto isolado e H_x tem medida nula. Porém, isto é impossível, pois por hipótese H_x tem medida positiva. Portanto não podemos assumir que $h_{x'} \equiv 0$. Concluimos então que existe $t^* \in H_x$ tal que $h_{x'}(\gamma(t^*)) \neq 0$. \square

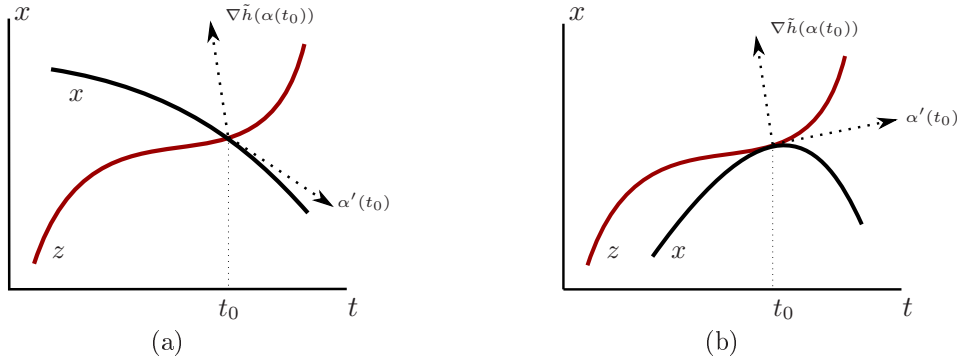


Figura 3.2: (a) $\beta(t_0) = \langle \alpha'(t_0), \nabla \tilde{h}(\alpha(t_0)) \rangle \neq 0$; (b) $\beta(t_0) = \langle \alpha'(t_0), \nabla \tilde{h}(\alpha(t_0)) \rangle = 0$.

A proposição 3.1.1 nos diz que, se $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável e $h_{x'} \equiv 0$ então H_x tem medida nula, ou seja, a função x não é deslizante.

As componentes conexas de (3.2) são

$$(\text{conjuntos discretos}) \quad H_x^0, \quad (\text{intervalos não degenerados}) \quad H_x^s. \quad (3.3)$$

Se $H_x^s = \emptyset$ o conjunto H_x tem medida nula e se $H_x^s \neq \emptyset$ o conjunto H_x tem medida positiva. Denote por H_x^1 e H_x^2 os seguintes conjuntos:

$$H_x^1 = \{t \in I \mid h(t, x(t), x'(t)) < 0\}, \quad H_x^2 = \{t \in I \mid h(t, x(t), x'(t)) > 0\}. \quad (3.4)$$

Observação 3.1.1. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ conjuntos abertos. Considere $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável e $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^k , $k \geq 1$, com 0 um valor regular de h . Então, o conjunto dado em (3.2) é tal que $H_x = H_x^0 \cup H_x^s$ com $H_x^0 \cap H_x^s = \emptyset$ e $I = H_x \cup H_x^1 \cup H_x^2$. Além disso, os conjuntos H_x , H_x^1 e H_x^2 são dois-a-dois disjuntos e pelo menos um deles é não-vazio.*

Definição 3.1.3. Sejam H_x^j , para $j \in \{0, 1, 2, s\}$, os conjuntos dados por (3.3) e (3.4) e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma função $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita solução de (3.1) se

(a) $x''(t)$ existe para todo $t \in I$;

(b) $x(t)$ satisfaz as seguintes condições:

- $x''(t) = f_1(t, x(t), x'(t))$ para $t \in H_x^1 \cup H_x^0$;
- $x''(t) = f_2(t, x(t), x'(t))$ para $t \in H_x^2 \cup H_x^0$;
- $x \in D_{h|_{H_x^s}}$ para $t \in H_x^s$.

Dizemos também que uma solução $t \mapsto x(t)$ satisfaz um problema de Cauchy, quando condições do tipo $x(t_0) = x_0$ and $x'(t_0) = x'_0$ são verificadas, para $(t_0, x_0, x'_0) \in I \times U$.

Observação 3.1.2. Na definição de solução acima, a notação $D_{h|_{H_x^s}}$ representa o conjunto de funções $z|_{H_x^s}$ (restritas a H_x^s) com $z \in D_h$.

Definição 3.1.4. Uma solução $t \mapsto x(t)$ de uma D2DE é dita solução singular se $H_x^s \neq \emptyset$. Caso contrário, a solução é dita não-singular.

Definição 3.1.5. Uma solução não-singular $t \mapsto x(t)$ é dita solução simples se $H_x = \emptyset$ e é dita não-simples se $H_x \neq \emptyset$.

Exemplo 3.1.1. Considere uma D2DE com $h(t, x, x') = x'$. O conjunto de descontinuidade D_h é formado por soluções de $x' = 0$: $D_h = \{x : I \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ é constante}\}$. Para cada função x , os conjuntos $H_x = \{t \in I \mid x'(t) = 0\}$, $H_x^1 = \{t \in I \mid x'(t) < 0\}$ e $H_x^2 = \{t \in I \mid x'(t) > 0\}$ são dados em termos da derivada de x . Denote por x_i uma solução de $x'' = f_i(t, x, x')$ para $i = 1, 2$ e suponha que $f_1 \neq f_2$. Considere as situações da Figura 3.3. Em 3.3(a), a função $x = x_1$ é solução da D2DE, uma vez que $x'(t) < 0$ para qualquer $t \in I$. Temos neste caso $H_x = H_x^2 = \emptyset$ e $H_x^1 = I$. Em 3.3(b), $x'(t) > 0$ para qualquer $t \in I$ e assim $x = x_2$ é solução. Temos $H_x = H_x^1 = \emptyset$ e $H_x^2 = I$. As funções x_1 e x_2 em 3.3(c) e 3.3(d), respectivamente, não são soluções: $x = x_1$ não é uma solução pois $x(t)$ não satisfaz $x'' = f_2(t, x, x')$ para $t \in H_x^2$. Com os mesmos argumentos observamos que $x = x_2$ não é uma solução da D2DE. Em 3.3(e), a função x formada pela parte não tracejada de x_1 junto com a parte não tracejada de x_2 , é uma solução. Neste caso, $H_x^1 \cup H_x^2 = I \setminus \{t^* \mid x'(t^*) = 0\}$ com $H_x^i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$ e $H_x = H_x^0 = \{t^*\}$. Em 3.3(f), a função $x = x_1$ é uma solução pois satisfaz a definição 3.1.3. Neste caso,

$H_x^2 = H_x^s = \emptyset$, $H_x^1 = I \setminus \{t^* \mid x'(t^*) = 0\}$ e $H_x = H_x^0 = \{t^*\}$. A função em 3.3(g) é uma solução da D2DE pois também satisfaz a definição 3.1.3: $H_x^0 = \emptyset$ e para $t \in H_x^i$ a função x é solução de $x'' = f_i(t, x, x')$ para cada $i = 1, 2$ e ainda, para $t \in H_x^s$, $x \in D_h|_{H_x^s}$. Temos $H_x^s \cup H_x^1 \cup H_x^2 = I$. Em 3.3(h) a função $x = z$, $z \in D_h$, é solução se $H_x^s = I$, isto é, $H_x^1 = H_x^2 = H_x^0 = \emptyset$. As soluções das Figuras 3.3(a) e 3.3(b) são soluções simples e as soluções das Figuras 3.3(g) e 3.3(h) são soluções deslizantes.

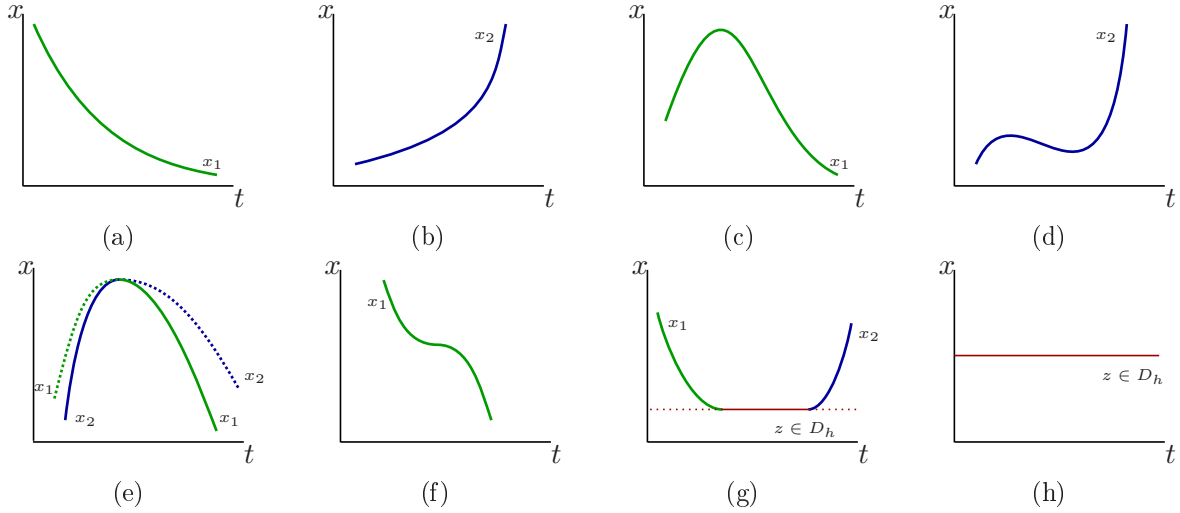


Figura 3.3: Exemplo de funções que são ou não são soluções de uma D2DE com $h(t, x, x') = x'$. As funções em (c), (d) não são soluções.

Os pontos do gráfico de uma solução de uma D2DE são classificados de acordo com as definições abaixo.

Definição 3.1.6. *Seja x uma solução de uma D2DE. Um ponto $q = (t_0, x(t_0))$ é dito regular se $t_0 \in H_x^i$ para $i \in \{1, 2\}$ e é dito singular se $t_0 \in H_x$.*

Definição 3.1.7. *Seja x uma solução de uma D2DE. Um ponto singular $q = (t_0, x(t_0))$ é dito ponto de deslize se $t_0 \in H_x^s$. A solução é dita deslizante se tem um ponto de deslize.*

Definição 3.1.8. *Seja x uma solução de uma D2DE. Um ponto singular $q = (t_0, x(t_0))$ é dito ponto de troca se $t_0 \in H_x^0$ e, para todo $\epsilon > 0$, $H_x^i \cap (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \neq \emptyset$ para $i = 1$ e para $i = 2$. A solução é dita alternante se os únicos pontos $(t_0, x(t_0))$ com $t_0 \in H_x$ são os de troca.*

Definição 3.1.9. *Seja x uma solução de uma D2DE. Um ponto singular $q = (t_0, x(t_0))$ é dito ponto de permanência se $t_0 \in H_x^0$ e, para todo $\epsilon > 0$, $H_x^i \cap (t_0 - \epsilon, t_0) \neq \emptyset$ e*

$H_x^i \cap (t_0, t_0 + \epsilon) \neq \emptyset$ para $i = 1$ ou para $i = 2$. A solução é dita permanente se os únicos pontos $(t_0, x(t_0))$ com $t_0 \in H_x$ são os de permanência.

Observação 3.1.3. Nas Figuras 3.3(a) e 3.3(b) todos os pontos são regulares, enquanto nas Figuras 3.3(e), 3.3(f), 3.3(g) e 3.3(h) existem pontos singulares. O ponto singular em 3.3(e) é um ponto de troca e em 3.3(f) é um ponto de permanência. Nas Figuras 3.3(g) e 3.3(h), os pontos singulares são pontos de deslize.

3.2 Correspondência de uma D2DE com Sistemas de Filippov

Considere a D2DE dada em (3.1). Escrevemos a D2DE como um sistema autônomo de primeira ordem, através da mudança $x' = y$ e $t = s$:

$$(s', x', y') = \begin{cases} X_1(s, x, y) & \text{se } h(s, x, y) \leq 0 \\ X_2(s, x, y) & \text{se } h(s, x, y) \geq 0 \end{cases}, \quad (3.5)$$

em que $X_i(s, x, y) = (1, y, f_i(s, x, y))$ para $i \in \{1, 2\}$. Os campos X_1 e X_2 não têm pontos de equilíbrio pois $s' = 1$.

Uma vez que 0 é um valor regular de h , a variedade de descontinuidade

$$\Sigma = \{(s, x, y) \in I \times U \subset \mathbb{R}^3 \mid h(s, x, y) = 0\}, \quad (3.6)$$

é uma superfície regular.

O campo X_1 atua em $G_1 = h^{-1}((-\infty, 0))$ e o campo X_2 atua em $G_2 = h^{-1}((0, +\infty))$.

Proposição 3.2.1. Seja $\Sigma = h^{-1}(0)$ a variedade de descontinuidade com $h : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^k , $k \geq 1$, e 0 um valor regular de h . Se $p \in \Sigma_s$ então $h_y(p) \neq 0$.

Demonstração. Seja $p = (s, x, y)$ um ponto de Σ_s . Se $h_y(p) = 0$ então $X_1 h(p) = X_2 h(p)$ pois a derivada de Lie $\langle X_i(p), \nabla h(p) \rangle = h_s(p) + y h_x(p)$ para $i = 1$ e para $i = 2$. Assim $X_1 h(p) \cdot X_2 h(p) \geq 0$ e concluímos que $p \notin \Sigma_s$, o que contradiz a hipótese. Portanto $h_y(p) \neq 0$. \square

A proposição 3.2.1 e o Teorema da Função Implícita nos diz que Σ_s é localmente o gráfico de uma função, isto é, $y = g(s, x)$ para $(s, x, y) \in \Sigma_s$, onde g é uma função real C^k , $k \geq 1$.

Em Σ_s definimos o *campo deslizando* associado a Z , que é o campo Z_s , tangente a Σ_s , dado por $Z_s(p) = u - p$ com u sendo o ponto do segmento que liga $p + X_1(p)$ a $p + X_2(p)$, tal que $u - p$ é tangente a Σ_s . Veja a Figura 3.4.

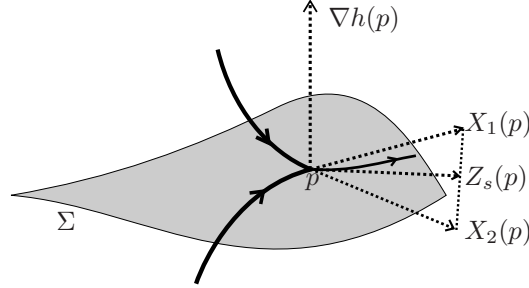


Figura 3.4: O campo deslizando Z_s em $p \in \Sigma_s$.

Em nosso caso, o campo Z_s não tem pontos de equilíbrio e é dado por

$$Z_s(s, x, y) = \left(1, y, \frac{\partial g}{\partial s}(s, x) + y \frac{\partial g}{\partial x}(s, x)\right), \quad (3.7)$$

com $y = g(s, x)$.

Usamos abaixo, a notação $\text{int}(A)$, para designar o interior do conjunto A .

Proposição 3.2.2. *Seja $\phi : t \in I \mapsto (t, x(t), y(t))$ uma órbita do fluxo de $Z = (X_1, X_2)$. Se $p = (t_0, x(t_0), y(t_0)) \in \Sigma_s$ então $q = (t_0, x(t_0))$ é um ponto de deslize, com $t_0 \in \text{int}(H_x^s)$. Se $q = (t_0, x(t_0))$ é tal que $t_0 \in \text{int}(H_x^s)$ então $p = (t_0, x(t_0), y(t_0)) \in \Sigma_s$.*

Demonstração. Primeiramente, assumimos $p = (t_0, x(t_0), y(t_0)) \in \Sigma_s$. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que $H_x \cap (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \neq \emptyset$ para qualquer $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. E isto implica que H_x tem medida positiva. Portanto $t_0 \in H_x^s$ e $q = (t_0, x(t_0))$ é um ponto de deslize, com $t_0 \in \text{int}(H_x^s)$. Agora, se $t_0 \in \text{int}(H_x^s)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $h(t, x(t), x'(t)) = 0$ para qualquer $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ e, assim, $\phi(t) = (t, x(t), y(t)) \in \Sigma$ para qualquer $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, com $y(t) = x'(t)$. Portanto $p = (t_0, x(t_0), y(t_0)) \in \Sigma_s$. \square

Se $t_0 \in H_x^s \setminus \text{int}(H_x^s)$ então $p = (t_0, x(t_0), x'(t_0)) \in \Sigma_t$ (veja Exemplo 3.2.1, $t_0 = \frac{1}{3}$).

Proposição 3.2.3. *Seja $\phi : t \in I \mapsto (t, x(t), y(t))$ uma órbita do fluxo de $Z = (X_1, X_2)$. Se $p = (t_0, x(t_0), y(t_0)) \in \Sigma_c$ então $q = (t_0, x(t_0))$ é um ponto de troca.*

Demonstração. Se $p = (t_0, x(t_0), y(t_0)) \in \Sigma_c$, para qualquer $\epsilon > 0$, $\phi(t) \in G_j$ para $t \in (t_0 - \epsilon, t_0)$ e $\phi(t) \in G_l$ para $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$, com $1 \leq j, l \leq 2$ e $j \neq l$. Tome $j = 1$

e $l = 2$ (a outra possibilidade é similar). Assim, $h(\phi(t)) < 0$ para $t \in (t_0 - \epsilon, t_0)$ e $h(\phi(t)) > 0$ para $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$. Sabemos também que $y(t) = x'(t)$ para qualquer $t \in I$. Portanto, provamos que, para qualquer $\epsilon > 0$, $H_x^i \cap (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \neq \emptyset$ para $i = 1$ e $i = 2$, isto é, $q = (t_0, x(t_0))$ é um ponto de troca. \square

Proposição 3.2.4. *Seja $\phi : t \in I \mapsto (t, x(t), y(t))$ uma órbita do fluxo de $Z = (X_1, X_2)$. Se $q = (t_0, x(t_0))$ é um ponto de permanência então $p = (t_0, x(t_0), y(t_0)) \in \Sigma_t$.*

Demonstração. Se $q = (t_0, x(t_0))$ é um ponto de permanência, para qualquer $\epsilon > 0$, $H_x^i \cap (t_0 - \epsilon, t_0) \neq \emptyset$ e $H_x^i \cap (t_0, t_0 + \epsilon) \neq \emptyset$ para $i = 1$ ou $i = 2$. Tome $i = 1$ (a outra possibilidade é similar). Temos que $p = (t_0, x(t_0), y(t_0)) \notin \Sigma_c$, caso contrário, pela Proposição 3.2.3, deveríamos ter $H_x^2 \cap (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \neq \emptyset$, isto é, existe $t^* \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, $t^* \neq t_0$, tal que $h(t^*, x(t^*), x'(t^*)) < 0$ e $h(t^*, x(t^*), x'(t^*)) > 0$. Também temos que $p = (t_0, x(t_0), y(t_0)) \notin \Sigma_s$, caso contrário, pela Proposição 3.2.2, deveríamos ter $t_0 \in H_x^s$, isto é, existe $t^* \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, $t^* \neq t_0$, tal que $h(t^*, x(t^*), x'(t^*)) < 0$ e $h(t^*, x(t^*), x'(t^*)) = 0$. Portanto $p = (t_0, x(t_0), x'(t_0)) \in \Sigma_t$. \square

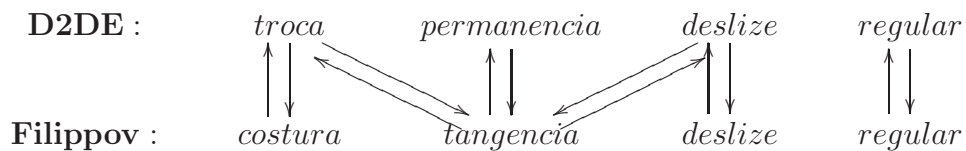
A recíproca das Proposições 3.2.3 e 3.2.4 não são verdadeiras. O Exemplo 3.2.1 é um contraexemplo.

Exemplo 3.2.1. *Considere $x'' = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, onde f é dada pelo lado direito de (3.1), com $f_1(t, x, x') = t^2$, $f_2(t, x, x') = 2t^2$ e $h(t, x, x') = x'$. A função*

$$x(t) = \begin{cases} t^4/12 & \text{se } t \leq 0 \\ t^4/6 & \text{se } t \geq 0 \end{cases},$$

satisfaz o problema de Cauchy. O ponto $q = (0, 0)$ é um ponto de troca. De fato, para qualquer $\epsilon > 0$, $H_x^i \cap (-\epsilon, +\epsilon) \neq \emptyset$ para $i = 1$ e $i = 2$ pois $H_x^1 = \{t \in \mathbb{R} \mid x'(t) < 0\} = \{t \in \mathbb{R} \mid t < 0\}$ e $H_x^2 = \{t \in \mathbb{R} \mid x'(t) > 0\} = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$. Consideramos $t = s$, $x' = y$ e reescrevemos a D2DE como um sistema autônomo de primeira ordem. O ponto $p = (0, 0, 0)$ é tal que $p \in \Sigma_t$. De fato, o produto $X_1 h(p) \cdot X_2 h(p)$ é zero.

Podemos, então, escrever um diagrama de correspondência entre pontos de uma solução de uma D2DE e pontos de uma órbita do fluxo do sistema de Filippov.



3.3 Soluções deslizantes e unicidade de soluções

Condições necessárias para a existência de soluções deslizantes x , de uma D2DE, são $h(t_0, x(t_0), x'(t_0)) = 0$ e $h_{x'}(t_0, x(t_0), x'(t_0)) \neq 0$ para algum $t_0 \in I$. Se uma dessas condições não for satisfeita, então x é não-singular.

O Teorema 3.3.1 nos dá uma condição suficiente para uma solução ser deslizante.

Teorema 3.3.1. *Considere a D2DE (3.1) e $p = (t_0, x_0, x'_0) \in I \times U$ tal que $h(p) = 0$ e $h_{x'}(p) \neq 0$. Se*

$$\min_{i=1,2} \{f_i(p)\} < -\frac{h_t(p) + x'_0 h_x(p)}{h_{x'}(p)} < \max_{i=1,2} \{f_i(p)\}$$

então uma solução x tal que $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = x'_0$ é uma solução deslizante e $q = (t_0, x_0)$ é um ponto de deslize no gráfico de x .

Demonstração. Seja $p = (t_0, x_0, x'_0)$ um ponto de $I \times U$ tal que $h(p) = 0$ e $h_{x'}(p) \neq 0$. Sem perda de generalidade, supomos que $f_1(p) < f_2(p)$ e $h_{x'}(p) > 0$. Por hipótese, $f_1(p) < -(h_t(p) + x'_0 h_x(p))/h_{x'}(p) < f_2(p)$. Assim, $h_t(p) + x'_0 h_x(p) + f_1(p)h_{x'}(p) < 0$ e $h_t(p) + x'_0 h_x(p) + f_2(p)h_{x'}(p) > 0$. Reescrevendo a D2DE como um sistema autônomo de primeira ordem, através da mudança $t = s$ e $x' = y$, o produto das derivadas de Lie é negativo: $X_1 h(p) \cdot X_2 h(p) < 0$. Portanto $p \in \Sigma_s$ e, pela Proposição 3.2.2, o ponto $q = (t_0, x_0)$ é um ponto de deslize, isto é, a solução $t \mapsto x(t)$ tal que $x(t_0) = x_0$ e $x'_0(t_0) = x'_0$ é uma solução deslizante. \square

Observação 3.3.1. *Se a função h no Teorema 3.3.1, é tal que*

$$h_t(\bar{t}, x(\bar{t}), x'(\bar{t})) + x'(\bar{t})h_x(\bar{t}, x(\bar{t}), x'(\bar{t})) = 0,$$

os pontos de deslize $(\bar{t}, x(\bar{t}))$, com $\bar{t} \in \text{int}(H_x^s)$, são dados por

$$f_1(\bar{t}, x(\bar{t}), x'(\bar{t})) \cdot f_2(\bar{t}, x(\bar{t}), x'(\bar{t})) < 0,$$

isto é, as soluções de $x'' = f_1(t, x, x')$ e $x'' = f_2(t, x, x')$ têm concavidades distintas em \bar{t} .

Outro fato importante é a unicidade de soluções. O próximo exemplo mostra que um mesmo problema de Cauchy pode ter mais do que uma solução.

Exemplo 3.3.1. *Considere o problema de Cauchy*

$$x'' = \begin{cases} 6t - 2 & \text{se } x' \leq 0 \\ 6t + 2 & \text{se } x' \geq 0 \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

O conjunto de descontinuidade consiste de funções constantes definidas em \mathbb{R} . Temos $h(0, 0, 0) = 0$ e $h_{x'}(0, 0, 0) \neq 0$. Também, $f_1(0, 0, 0) = -2$, $f_2(0, 0, 0) = 2$, $h_t(0, 0, 0) = 0$, $h_x(0, 0, 0) = 0$ e $h_{x'}(0, 0, 0) = 1$. Assim, pelo Teorema 3.3.1, $(0, 0)$ é um ponto de deslize. Se $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de deslize, então ele pertence ao gráfico de uma função do conjunto de descontinuidade, isto é, $(t, x) = (t, x_0)$ para alguma constante $x_0 \in \mathbb{R}$ e $x'(t) = 0$. Deste modo, as hipóteses do Teorema 3.3.1 estão satisfeitas. Mas $f_1(t, x_0, 0) = 6t - 2$, $f_2(t, x_0, 0) = 6t + 2$ e $-(h_t(t, x_0, 0) + 0 \cdot h_x(t, x_0, 0))/h_{x'}(t, x_0, 0) = 0$. Assim, para cada constante $x_0 \in \mathbb{R}$, se $6t - 2 < 0 < 6t + 2$, o ponto (t, x_0) é um ponto de deslize. Assim, qualquer ponto $(t, x(t)) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \times \mathbb{R}$ com $x(t) = x_0$ e $x'(t) = 0$ é um ponto de deslize. O intervalo máximo em que uma solução x desliza, é $J = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, ou seja, $H_x^s \subset J$ para qualquer solução x . Um exemplo de solução do problema de Cauchy, com $H_x^s = J$ é

$$x(t) = \begin{cases} t^3 + t^2 + t/3 + 1/27 & \text{se } t < -\frac{1}{3} \\ 0 & \text{se } -\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{3} \\ t^3 + t^2 - t + 5/27 & \text{se } t > \frac{1}{3} \end{cases} .$$

Há infinitas soluções x do problema de Cauchy com $\emptyset \neq H_x^s \subsetneq J$. Cada ponto $(t, x_0) \in [0, \frac{1}{3}) \times \{0\}$ tem duas possibilidades (além da solução dada por $x(t) = x_0$) para a construção de novas soluções ao problema de Cauchy, pois $x''(t) = f_1(t, x_0, 0) < 0$ e $x''(t) = f_2(t, x_0, 0) > 0$ para $t \in [0, \frac{1}{3})$, ou seja, cada possibilidade de solução tem concavidades distintas em (t, x_0) e, portanto, cada derivada sobre o respectivo intervalo, tem sinais distintos e x satisfaz a definição 3.1.3. Escolhemos uma das possibilidades e seguimos até um ponto $(t_0, x(t_0))$ tal que $h(t_0, x(t_0), x'(t_0)) = 0$. Se $t_0 \in [0, \frac{1}{3})$ então $(t_0, x(t_0))$ é um ponto de deslize, se $t_0 = \frac{1}{3}$ então $(t_0, x(t_0))$ é um ponto de troca ou de permanência e, se $t_0 > \frac{1}{3}$ então $(t_0, x(t_0))$ é um ponto de troca. A mesma ideia é válida retrocedendo no tempo. A Figura 3.5 ilustra este exemplo.

Teorema 3.3.2. Considere a D2DE (3.1) satisfazendo $x(t_0) = x_0$ e $x'_0(t_0) = x'_0$. Denote $p = (t_0, x_0, x'_0)$. Se uma das seguintes condições é satisfeita, então localmente existe uma única solução para o problema de Cauchy:

(i) $h(p) \neq 0$;

(ii) $h(p) = 0$ e $\prod_{i=1}^2 [h_t(p) + x'_0 \cdot h_x(p) + f_i(p)h_{x'}(p)] > 0$.

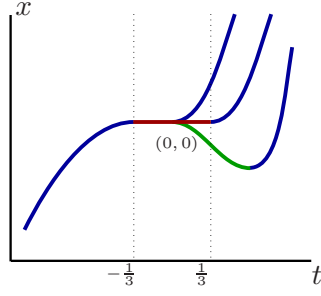


Figura 3.5: Três soluções distintas x da D2DE com $x(0) = 0$ and $x'(0) = 0$.

Demonstração. Seja $p = (t_0, x_0, x'_0) \in I \times U$. Da teoria clássica de EDO, para cada $i = 1, 2$, existe uma única solução para o problema de Cauchy $x'' = f_i(t, x, x')$, $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$.

(i) Se $h(p) \neq 0$, consideramos a respectiva solução que corresponde ao sinal de $h(p)$. Portanto, a solução $t \mapsto x(t)$ da D2DE $x'' = f(t, x, x')$, onde f é dada pelo lado direito de (3.1), satisfazendo $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = x'_0$, é única;

(ii) Por hipótese, $h(p) = 0$ e $\prod_{i=1}^2 [h_t(p) + x'_0 \cdot h_x(p) + f_i(p)h_{x'}(p)] > 0$. Pela Proposição 3.2.3, o ponto (t_0, x_0) é um ponto de troca de x . Suponha que exista uma outra solução \tilde{x} distinta de x tal que $\tilde{x}(t_0) = x_0$ e $\tilde{x}'(t_0) = x'_0$. Então $t_0 \in H_{\tilde{x}}$. Assim, o ponto (t_0, x_0) é um ponto de permanência ou de deslize ou de troca para \tilde{x} . Se (t_0, x_0) é um ponto de permanência, de acordo com a Proposição 3.2.4, $h_t(p) + x'_0 \cdot h_x(p) + f_i(p)h_{x'}(p) = 0$ para $i = 1$ ou $i = 2$ e temos uma contradição com a hipótese. Se (t_0, x_0) é um ponto de deslize, então, pelas Proposições 3.2.2 e 3.2.3, $\prod_{i=1}^2 [h_t(p) + x'_0 \cdot h_x(p) + f_i(p)h_{x'}(p)] \leq 0$, que contradiz novamente a hipótese. Se (t_0, x_0) é um ponto de troca para \tilde{x} e x , então as órbitas distintas $\phi(t) = (t, x(t), x'(t))$ e $\tilde{\phi}(t) = (t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))$ do sistema de Filippov, se interceptam em um ponto $p \in \Sigma_c$, o que é impossível. Portanto, a solução x da D2DE $x'' = f(t, x, x')$, onde f é dada pelo lado direito de (3.1) e satisfaz $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = x'_0$, é única. \square

3.4 Algoritmo para a construção de uma solução de uma D2DE

Abaixo descrevemos um algoritmo para a construção de uma solução de uma D2DE.

Considere (3.1), e as condições $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$, para $t \in [t_0, t_e]$ com $t_e > t_0$. Denote $p_k = (t_k, x(t_k), x'(t_k)) = (t_k, x_k, x'_k)$ onde $t_k \in [t_0, t_e]$ e $k \in \mathbb{N}$.

Passo 1: Calcule $h(p_k)$. Se $h(p_k) = 0$ vá ao passo 2, caso contrário vá ao passo 6;

Passo 2: Calcule $\lambda(p_k) := \prod_{i=1}^2 [h_t(p_k) + x'_k \cdot h_x(p_k) + f_i(p_k) \cdot h_{x'}(p_k)]$. Se $\lambda(p_k) > 0$ vá ao passo 3. Se $\lambda(p_k) < 0$ vá ao passo 4. Se $\lambda(p_k) = 0$ vá ao passo 5.

Passo 3: Calcule as soluções de $x'' = f_1(t, x, x')$ e $x'' = f_2(t, x, x')$ tais que $x(t_k) = x_k$ e $x'(t_k) = x'_k$. Avançando no tempo ($t > t_k$), escolha uma solução x ($i = 1$ ou $i = 2$) tal que $H_x^i \cap (t_k, t_k + \epsilon) \neq \emptyset$ para qualquer $\epsilon > 0$ e calcule H_x . Se $H_x \cap (t_k, t_e] \neq \emptyset$, encontre o primeiro tempo $t_{k+1} > t_k$ tal que $t_{k+1} \in H_x$, isto é, $h(t_{k+1}, x_{k+1}, x'_{k+1}) = 0$. Se $t_{k+1} \neq t_e$ vá ao passo 2. Se $t_{k+1} = t_e$ ou se $H_x \cap (t_k, t_e] = \emptyset$, considere esta solução e pare;

Passo 4: Calcule a função $z \in D_h$ tal que $h(t_k, z(t_k), z'(t_k)) = 0$. Para $t > t_k$, calcule o primeiro tempo $t_{k+1} > t_k$ tal que $\lambda(\tilde{p}) = 0$ onde $\tilde{p} = (t_{k+1}, z(t_{k+1}), z'(t_{k+1})) = (t_k, z_{k+1}, z'_{k+1})$ e vá ao passo 3. Se não existir $t > t_k$ tal que $\lambda(t, z(t), z'(t)) = 0$, considere esta solução e pare;

Passo 5: Calcule as soluções de $x'' = f_1(t, x, x')$ e $x'' = f_2(t, x, x')$ tais que $x(t_k) = x_k$ e $x'(t_k) = x'_k$ e calcule a função $z \in D_h$ tal que $h(t_k, z(t_k), z'(t_k)) = 0$. Para $t > t_k$, escolha uma solução x : $x = z$ ou x tal que ($i = 1$ or $i = 2$) $H_x^i \cap (t_k, t_k + \epsilon) \neq \emptyset$ para qualquer $\epsilon > 0$. Se $x = z$ vá ao passo 4. Se x é tal que $H_x^i \cap (t_k, t_k + \epsilon) \neq \emptyset$ vá ao passo 3.

Passo 6: Se $h(p_k) < 0$, considere a solução de $x'' = f_1(t, x, x')$ tal que $x(t_k) = x_k$ e $x'(t_k) = x'_k$. Se $h(p_k) > 0$, considere a solução de $x'' = f_2(t, x, x')$ tal que $x(t_k) = x_k$ e $x'(t_k) = x'_k$. Para $t > t_k$, calcule H_x . Se $H_x \cap (t_0, t_e] \neq \emptyset$, encontre o primeiro tempo $t_{k+1} > t_k$ tal que $t_{k+1} \in H_x$, isto é, $h(t_{k+1}, x_{k+1}, x'_{k+1}) = 0$. Se $t_{k+1} \neq t_e$, vá ao passo 2. Se $t_{k+1} = t_e$ ou se $H_x \cap (t_0, t_e] = \emptyset$, considere esta solução e pare;

Tomando inicialmente $k = 0$ e aplicando o algoritmo, construímos uma sequência crescente $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ no compacto $[t_0, t_e]$. Esta sequência converge a t_e e, assim, obtemos uma solução x em $[t_0, t_e]$.

Referências Bibliográficas

- [1] A. F. FILIPPOV, *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Mathematics and its Applications (Soviet Series) 18, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (1988).
- [2] W. BÜCHEL, *Zur Topologie der durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung und erster Grades definierten Kurvenschar*, *Mitteil. der Math. Gesellsch. in Hamburg* 4, (1904), 33–68.
- [3] G. F. GAUSE, *The Struggle for Existence*, Williams and Wilkins, Baltimore (1934).
- [4] W. A. COPPEL, *A survey of quadratic systems*, *J. Diff. Eq.* 2, (1966), 293–304.
- [5] L. MARKUS, *Quadratic Differential Equations and non-associative algebras*, *Ann. Math. Studies* 45, Princeton Univ. Press (1960), 185–213.
- [6] R. DICKSON, L. PERKO, *Bounded quadratic systems in the plane*, *J. Diff. Eq.* 7, (1970), 251–273.
- [7] J. D. NEISS, *Differential Dynamical Systems*, Mathematical Modeling and Computation, Philadelphia: SIAM (2007).
- [8] J. LLIBRE, C. E. L. DA SILVA, P. R. DA SILVA, *Piecewise Bounded Quadratic Systems in the Plane*, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer (2014), 51–62.
- [9] A. A. ANDRONOV, A. A. VITT AND S. E. KHAIKIN, *Theory of Oscillators*, Dover, New York (1996).
- [10] A. JACQUEMARD AND M. A. TEIXEIRA, *On singularities of discontinuous vector fields*, *Bull. Sci. Math.* **127** (2003), 611–633.

- [11] A. JACQUEMARD AND M. A. TEIXEIRA, *Periodic solutions of a class of non-autonomous second order differential equations with discontinuous right-hand side*, Physica D **241** (2012), 2003–2009.
- [12] C. E. L. DA SILVA, A. JACQUEMARD, M. A. TEIXEIRA, *Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second order differential equations*, preprint (2015).
- [13] M. KUNZE, T. KÜPPER AND J. YOU, *On the application of KAM theory to discontinuous dynamical systems*, J. Differential Equations **139** (1997), 1–21.
- [14] J. A. CID AND L. SANCHEZ, *Periodic solutions for second order differential equations with discontinuous restoring forces*, J. Math. Anal. Appl. **288** (2003), 349–364.
- [15] L. H. LIM, A. P. LOH AND W. W. TAN, *On forced and subharmonic oscillations under relay feedback*, IET Control Theory Appl. **2** (9) (2008), 829–840.
- [16] A. M. KAMACHKIN, D. K. POTAPOV, V. V. YEVSTAFYEVA, *Solution To Second-Order Differential Equations With Discontinuous Right-Hand Side*, Electronic Journal of Differential Equations (2014), No. 221, pp. 1–6.
- [17] G. CSERNÁK, G. STÉPÁN AND S. W. SHAW, *Sub-harmonic resonant solutions of a harmonically excited dry friction oscillator*, Nonlinear Dyn **50** (2007), 93–109.
- [18] P. KOWALCZYK AND P. T. PIROINEN, *Two-parameter sliding bifurcations of periodic solutions in a dry-friction oscillator*, Physica D **237** (2008), 1053–1073.
- [19] M. GUARDIA, S. J. HOGAN AND T. M. SEARA, *An Analytical Approach to Codimension-2 Sliding Bifurcations in the Dry-Friction Oscillator*, SIAM J. Applied Dynamical Systems Vol. 9, No. 3 (2010), 769–798.
- [20] C. E. L. DA SILVA, P. R. DA SILVA, A. JACQUEMARD, *Discontinuous second order differential equations with sliding*, preprint (2015).
- [21] A. JACQUEMARD AND D. J. TONON, *Coupled systems of non-smooth differential equations.*, Bull. Sci. Math. **136**, no. 3, (2012), 239–255.