

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

**RAFAEL CUNHA DE CARVALHO**

# **POTENCIAL GRAVITACIONAL LUNAR**

Guaratinguetá  
2015

RAFAEL CUNHA DE CARVALHO

## Potencial Gravitacional Lunar

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

Guaratinguetá  
2015

C331p Carvalho, Rafael Cunha de  
Potencial gravitacional lunar / Rafael Cunha de Carvalho –  
Guaratinguetá, 2015.  
54 f : il.  
Bibliografia: f. 53-54

Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática –  
Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de  
Guaratinguetá, 2015.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

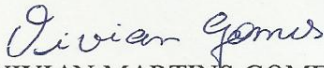
1. Gravidade (Física) 2. Lua 3. Potencial gravitacional 4. Satélites –  
Órbitas 5. Campos gravitacionais I. Título

CDU 531.5

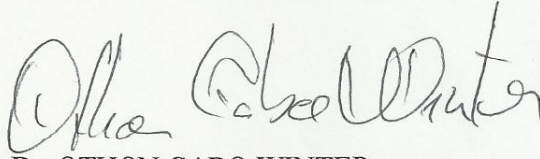
**RAFAEL CUNHA DE CARVALHO**

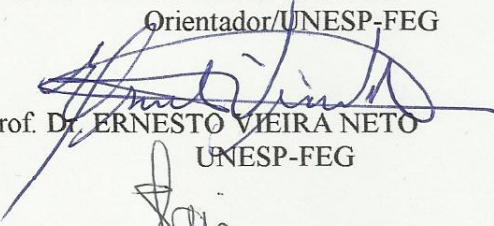
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO  
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE  
"GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA"

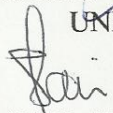
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE  
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

  
Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. VIVIAN MARTINS GOMES  
Coordenadora

**BANCA EXAMINADORA:**

  
Prof. Dr. OTHON CABO WINTER  
Orientador/UNESP-FEG

  
Prof. Dr. ERNESTO VIEIRA NETO  
UNESP-FEG

  
Prof. Dr. RAFAEL SFAIR DE OLIVEIRA  
UNESP-FEG

**Dezembro de 2015**

## Dados Curriculares

### **RAFAEL CUNHA DE CARVALHO**

NASCIMENTO 27.05.1986 - APARECIDA / SP

FILIAÇÃO Oswaldo Pereira de Carvalho  
Maria Laura Cunha de Carvalho

#### FORMAÇÃO

2009 - 2015 Curso de Graduação  
Licenciatura em Matemática - Faculdade de Engenharia  
campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista

*Dedico esse trabalho à Dona Laura, mãe, amiga e exemplo,  
por sua infinita paciência comigo.*

# Agradecimentos

Agradeço a todos que conseguiram conviver comigo (o que sei não ser fácil). Todos que de alguma forma estiveram envolvidos nesse trabalho merecem agradecimentos especiais, pelo apoio, pela confiança, orientação e pela insistência.

Agradeço:

A paciência e comprometimento de ensinar e orientar do Prof. Dr. Othon Cabo Winter,  
À Colaboradora Dr<sup>a</sup>. Walkiria Schulz, que desenvolveu e apresentou o programa inicial,  
Ao Prof. Dr. Rafael Sfair de Oliveira por sempre ter me auxiliado (cluster, latex, gráficos etc) quando solicitado,

Aos amigos, Thamiris Santana, Marcos, Higor e Márcio, por terem deixado o curso mais agradável.

À Sheila Campos por sempre estar disposta a compartilhar risadas e me dizer o que eu precisava estudar.

Em especial a Stelamarys Modenutte, por nunca ter me deixado desistir desse trabalho e de mim. E obrigado pela fundamental ajuda na elaboração desse trabalho.

À minha mãe, que sempre esteve ao meu lado.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro que tornou possível a realização desse trabalho.

“Que haverá com a Lua  
que sempre que a gente a olha  
é com o súbito espanto da primeira vez?”  
Mario Quintana.



CARVALHO, R.C. **Potencial Gravitacional Lunar**. 2015. f. Trabalho de Graduação (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

## Resumo

Sabemos que a órbita de um satélite lunar e, conseqüentemente, seu tempo de vida orbital é influenciado principalmente pelo campo gravitacional da Lua, Terra e Sol. Neste trabalho estudaremos o Potencial Gravitacional Lunar e sua influência sobre o campo gravitacional. Nós adaptamos um programa que possibilite mapear o campo gravitacional lunar. Nesse intuito foi necessário desenvolver um programa que permita a simulação e o mapeamento do potencial lunar completo. Nosso programa foi desenvolvido baseado no programa elaborado por Hélio Kuga, e adaptado para nosso caso (Lua). Utilizando o modelo proposto por Konopliv et al. 2001, propusemos diversas expansões de grau e ordem dos harmônicos esféricos que nos serviram para comparar e validar nosso programa.

**Palavras-chave:** Potencial, Campo, Lua.

CARVALHO, R.C. **Potencial Gravitacional Lunar**. 2015. f. Trabalho de Graduação (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

## Abstract

We know that the orbit of a lunar satellite, and consequently its orbital lifetime is mainly influenced by the gravitational field of the Moon, Earth and Sun. In this text we study the Lunar gravitational potential and its influence on the gravitational field. We adapted a program in order to map the Moon gravitational field. To that end it was necessary to develop a program that allows the simulation and mapping the lunar full potential. Our program was based on the program developed by Hélio Kuga, and adapted to our case (Moon). We used the model proposed by Konopliv et al. 2001, we proposed various degree and order expansions of spherical harmonics that served us to compare and validate our program.

**Keywords:** Potencial, Field, Moon.

# Lista de Figuras

1.1	Superfície da Lua . . . . .	13
1.2	Representação Artística da Lunar Prospector. . . . .	14
1.3	Potencial Gravitacional Lunar. . . . .	15
1.4	Potencial Gravitacional Ambas as Faces da Lua . . . . .	16
1.5	Tempo de Vida Orbital . . . . .	18
1.6	Ilhas de Estabilidade. . . . .	19
1.7	Tempo de Vida. . . . .	21
1.8	Variando Expansões. . . . .	22
1.9	Expansão 50x50 e 60x60. . . . .	23
1.10	Tempo de Vida Periapsis . . . . .	24
1.11	Tempo de Vida Excentricidade. . . . .	24
2.1	Potencial Gravitacional no Ponto P. . . . .	27
2.2	Corpo Esférico. . . . .	28
2.3	Polinômio de Legendre de Ordem Ímpar (1, 3, 5) . . . . .	32
2.4	Polinômios de Legendre de Ordem Par (2,4) . . . . .	33
2.5	Funções Associadas de Legendre. . . . .	33
2.6	Harmônicos Zonais. . . . .	34
2.7	Harmônicos Tesserais. . . . .	34
2.8	Harmônicos Setoriais. . . . .	34
2.9	Coordenadas Selenográficas . . . . .	44
3.1	Análise do Potencial Gravitacional Lunar . . . . .	46
3.2	Região Seleccionada Programa2. . . . .	47
3.3	Região Seleccionada Konopliv. . . . .	47
3.4	Superfície Esférica da Lua . . . . .	48
3.5	Gráfico gerado com expansão de ordem e grau 50. . . . .	48
3.6	Ordem e Grau 50. Excluindo o termo J2 . . . . .	49
3.7	Expansão de Ordem e Grau 100 . . . . .	49
3.8	Expansão de Ordem e Grau 50, excluído J2. . . . .	50
3.9	Potencial Completo . . . . .	50

# Lista de Tabelas

1.1	Propriedades físicas da Lua. Massa (M), Raio (R). . . . .	13
-----	---	----

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
1.1	LUA . . . . .	12
1.2	ARTIGOS DE MOTIVAÇÃO . . . . .	13
1.2.1	Recentes Modelos Gravitacionais com Resultado da Missão Lunar Prospector, Konopliv et al. . . . .	14
1.2.2	Análise da Vida Órbital e Observação das Condições para Satélites Lunares, Zeile et al. . . . .	17
1.2.3	Efeitos da Altitude, Nodo Ascendente e Inclinação no Tempo de Vida nas Órbitas Lunares Circulares, Gupta et al. . . . .	20
<b>2</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>25</b>
2.1	ATRAÇÃO GRAVITACIONAL ENTRE DOIS CORPOS DE DIMENSÕES FINITAS . . . . .	26
2.1.1	Expressão para o Potencial Gravitacional . . . . .	27
2.2	HARMÔNICOS ESFÉRICOS . . . . .	29
2.2.1	Representação dos Harmônicos esféricos . . . . .	29
2.2.2	Fórmulas Recursivas para o Cálculo do Potencial Gravitacional . . . . .	32
2.2.3	Normalização dos Coeficientes e Polinômios . . . . .	35
2.3	PROGRAMAS . . . . .	35
2.3.1	Primeiro Programa: Programa1 . . . . .	36
2.3.2	Segundo Programa: Programa2 . . . . .	39
2.3.3	Dados Gerais sobre o Programa2 . . . . .	43
<b>3</b>	<b>DISCUSSÕES E RESULTADOS</b>	<b>45</b>
3.1	INFLUÊNCIA DO POTENCIAL NA ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL LUNAR . . . . .	45
3.2	ESTUDOS FUTUROS . . . . .	51
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>52</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 LUA

A Lua, nosso objeto de estudo, é o único satélite natural da Terra. O maior satélite natural de um planeta no sistema solar em relação ao tamanho do seu corpo primário, tendo 27% do seu diâmetro (Tabela 1.1). Estima-se que a formação da Lua tenha ocorrido há cerca de 4,5 bilhões de anos, relativamente pouco tempo após a formação da Terra.

A Lua, figura 1.1 devido a sua proeminência no céu sempre despertou a curiosidade e o interesse da humanidade. Inspirando desde a antiguidade a arte (musica, poesia, contos e historias), a mitologia e claro a ciência.

Também foi muito importante para o desenvolvimento dos calendários. Assim, sempre foi alvo da curiosidade e observação das sociedades. E porque não dizer influenciando as sociedades e culturas.

A sua distância orbital, cerca de trinta vezes o diâmetro da Terra, faz com que no céu o satélite pareça ter o mesmo tamanho do Sol, permitindo-lhe cobri-lo por completo, em alguns casos, durante um eclipse solar total. A Lua também foi o único corpo celeste além da Terra no qual os seres humanos já estiveram, tendo um homem registrado ao por seus pés na Lua “Um pequeno passo para um homem, um salto gigantesco para a humanidade” (Neil Armstrong, 1969). Na busca por respostas sobre o Universo, vários países desenvolveram programas de pesquisa enviando sondas para sua observação e coleta de dados. O Programa Luna, da União Soviética, foi o primeiro a atingir a Lua com sondas não tripuladas em 1959. O Programa Apollo, do governo dos Estados Unidos, permitiu a realização das únicas missões tripuladas até hoje ao satélite natural. Desde 2004, Japão, China, Índia, Estados Unidos e a Agência Espacial Européia enviaram sondas espaciais ao satélite natural. Estas sondas espaciais têm contribuído para o avanço em seu conhecimento. Na corrida para a exploração da Lua, futuras missões estão sendo planejadas, através de esforços de governos e do financiamento privado. Assim notamos que a Lua ainda segue fascinando as artes e culturas. Mas principalmente fascina a ciência na busca para a compreensão do universo em que vivemos.

Portanto é muito importante para sua exploração, a utilização de satélites artificiais, que desempenharam as mais diversas funções como monitoramento, observação, coleta de dados, etc. Para tanto torna-se, necessário um estudo detalhado e profundo do potencial gravitacional lunar, visando a otimização de futuras viagens que minimizarão custos, apresentando trajetórias que possibilitem obter o menor consumo de combustível em manobras para manter a estabilidade na órbita, e o maior tempo de vida orbital.

No estudo sobre o potencial gravitacional da Lua devemos considerar sua não esfe-

Figura 1.1: Superfície da Lua



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Lua>

Tabela 1.1: Propriedades físicas da Lua. Massa (M), Raio (R).

	$M$	$R$
<i>Lua</i>	$(10^{22}kg)$	$(km)$
	7,349	1738,0

Fonte: Próprio Autor.

ricidade e o fato de apresentar distribuição de massa muito heterogênea. Este trabalho tem o objetivo de estudar e apresentar um programa que forneça dados sobre o potencial gravitacional lunar.

Para tanto inicialmente apresento alguns artigos que nos auxiliaram. Sendo estes, muito ricos em informações e exemplos. Servindo hora como ferramenta de pesquisa, hora como material para comparação com resultados gerados por este trabalho. Estes artigos são elaborados sobre o mesmo objeto de nossos estudos, a Lua.

No capítulo metodologia, discutimos os estudos matemáticos sobre o Potencial Gravitacional, bem como sua relação com os Harmônicos esféricos, Polinômios e Funções Associadas de Legendre e os coeficientes harmônicos esféricos. Partindo desse estudo matemático sobre o assunto, discutimos sua implementação numérica, e as singularidades que tiveram que ser superadas. Assim como o problema das órbitas polares para latitudes  $\pm 90^\circ$  e a normalização para evitar erros computacionais.

Depois discutiremos os programas que foram utilizados neste trabalho. Seu desenvolvimento, adaptações e problemas que tivemos que contornar. Por fim discutimos nossos resultados, e o quanto podem ser confiáveis.

## 1.2 ARTIGOS DE MOTIVAÇÃO

Neste capítulo será apresentado alguns artigos que foram estudados para elaborar esse trabalho. Estes artigos tiveram caráter didático e informativo. Foram elaborados por

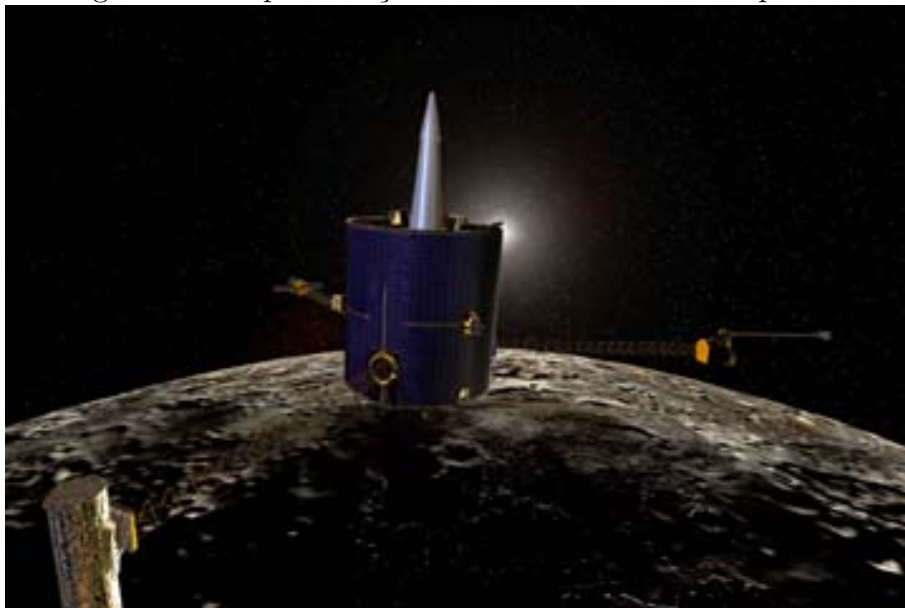
autores que tem como objeto de estudo o potencial gravitacional lunar. Assim, através deles podemos observar como foi a evolução no estudo do potencial gravitacional, quais foram as dificuldades que tiveram que ser vencidas, quais as singularidades que tiveram que ser contornadas e quais os modelos que ao longo dos anos de estudos e análises nos permitem hoje utiliza-los com confiança.

### 1.2.1 Recentes Modelos Gravitacionais com Resultado da Missão Lunar Prospector, Konopliv et al.

No artigo “Recent Gravity Models as a Result of the Lunar Prospector Mission”. Konopliv et al. (2001), nos é apresentado um estudo sobre o potencial gravitacional Lunar. Para nosso trabalho foi um artigo muito didático, pois explica como foi elaborado o estudo do campo gravitacional Lunar e quais foram as missões mais importantes para coletar os dados que temos hoje. Iremos utilizar o modelo gravitacional e expansão de ordem e grau proposto neste artigo, para compararmos nossos resultados. Sendo que a comparação entre os resultados de ambos os trabalhos nos permitiu confiármos em nosso programa. (Programa2, como será apresentado).

Aprendemos através deste artigo também, que: o campo gravitacional lunar é determinado a partir dos dados de rastreamento de missões anteriores à Lua. Com a Missão Lunar Prospector 1998-1999 (LP) (figura 1.2), analisada neste Artigo. A LP fez a primeira medição do campo gravitacional em baixa altitude em órbita circular polar. Assim através dela obteve-se uma cobertura completa em alta resolução de todo face próximo da Lua. Importante observar que uma vez que não há nenhuma medição direta da face oculta da Lua, nem da LP, ou qualquer outra missão anterior, ainda não foi possível detalhar o campo gravitacional com precisão do lado afastado, mesmo assim, é possível observar que há mascons sobre o lado afastado da Lua. Mascons são grandes concentrações de massa, que causa grande perturbação no campo gravitacional.

Figura 1.2: Representação Artística da Lunar Prospector.



Fonte: [inpe.br/50anos/linha\\_tempo/98.html](http://inpe.br/50anos/linha_tempo/98.html)

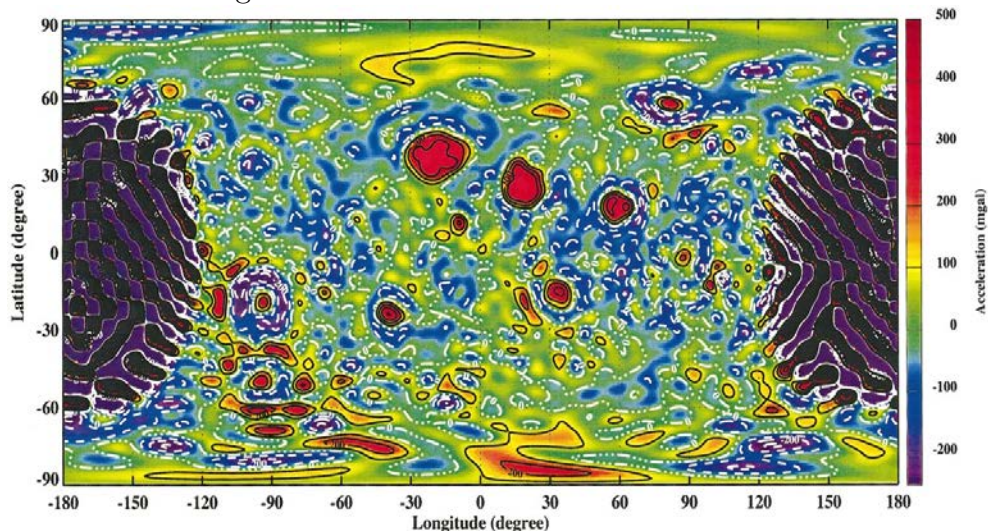


- **A Lunar Prospector (LP) (Figura 1.2)**, foi a terceira missão da classe de missões Discovery da NASA, que teve seu início em 6 de janeiro de 1998 (lançamento da sonda) e depois de realizar uma série de manobras foi colocada em órbita circular em 15 de janeiro, a uma altitude de 100 km. A LP permaneceu em órbita polar (inclinação  $90^\circ$ ) por cerca de um ano o que proporcionou uma cobertura global do campo gravitacional Lunar. Em 19 de dezembro de 1998, a altitude do LP foi reduzido para 40 km para calibrar o campo gravitacional em preparação para uma nova missão, que teve início em 29 janeiro de 1999, quando a sonda reduziu para 30km a altitude, afim de obter maior resolução do campo gravitacional e coletar dados magnéticos. Em 31 de Julho de 1999, a sonda LP impactou-se com a superfície lunar em uma tentativa mal sucedida de detectar vapor d'água na poeira levantada.

**Características da Sonda:** A nave espacial LP é um cilíndrico com altura de 1,3m e um diâmetro de 1,4m. É coberta com três painéis solares igualmente espaçadas de 2,5m. (veja [lunar.arc.nasa.gov](http://lunar.arc.nasa.gov) ou [www.pds.wustl.edu](http://www.pds.wustl.edu) para mais informações sobre a nave espacial e a missão LP). A massa inicial da sonda foi de 158kg. Após manobras de inserção na órbita desejada (órbita circular polar com 100km de altitude), ainda permaneceu 33 kg de combustível, para futuras manobras, dos quais 14kg foi utilizado ao longo da missão.

A falta de dados da face oculta da Lua é, sem duvida, o maior desafio no processamento de dados e elaboração de uma solução para um campo gravitacional confiável. Com a falta de precisão a diferença entre os dados coletados e a superfície real é de cerca de 33%. Originalmente um subsatelite foi proposto para a missão LP fornecer medições direta do campo gravitacional da face oculta, porém foi cancelado para reduzir custos.

Figura 1.3: Potencial Gravitacional Lunar.



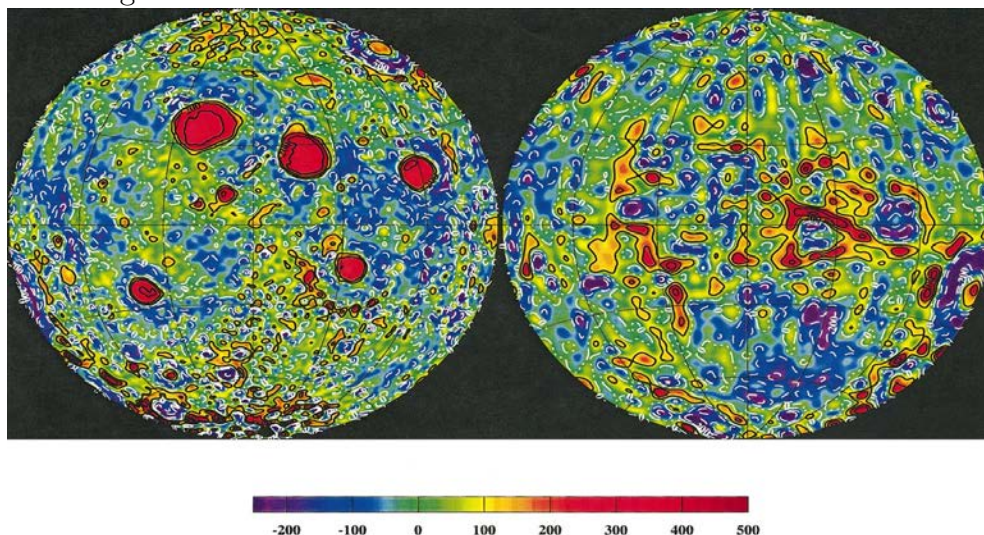
Fonte: Konopliv et al. (2001). Nessa figura é analisado o potencial gravitacional Lunar. O gráfico gerado com modelo LP utilizando expansão de ordem e grau 50. Apresenta a defazagem de dados para a face oculta da Lua.

A Figura 1.3 mostra o gráfico elaborado com os resultados do campo gravitacional lunar utilizando os dados da missão LP, utilizando expansão de ordem e grau 50 (LP50PNOAP). As grandes flutuações no campo gravitacional (região roxo/preto) mostram

claramente a falta de dados sobre o potencial gravitacional no lado afastado. Onde não há grandes flutuações, o campo gravitacional está bem determinado.

Neste Artigo nos é apresentado também a evolução histórica das missões Lunares. Começando em 1966 com a missão russa Luna 10 (Akim 1966) que foi seguida em agosto do mesmo ano, pela primeira Lunar Orbiter EUA (LO-I), em agosto de 1967, quatro sondas adicionais (LO-II, III,IV, e V) foram enviadas e colocados em órbita com inclinações e excentricidades variadas. O que permitiu a coleta de dados sobre diversos aspectos da Lua, gerando muitos estudos sobre o Lua. Como nosso trabalho visa estudar o campo gravitacional, nos foi muito útil observar neste artigo a evolução dos modelos sobre o potencial gravitacional lunar ao longo dos anos, quais os modelos utilizando e a evolução das expansões dos harmônicos esféricos. Como por exemplo, Lorell e Sjogren et al.(1968) produziu um modelo de 8 x 4, Liu e Laing (1971) um modelo de 15 x 8, e Michael e Blackshear (1972) um modelo de 13 x 13. Muller e Sjogren (1968), usando novas técnicas, produziu um mapa que mostrava grandes anomalias positivas de gravidade. Esta inesperada descoberta foi oposta a qualquer modelo geofísico conhecido até aquele momento, o que iniciou o desenvolvimento de novos estudos para a elaboração de modelos sobre a Lua. Essas anomalias foram chamados de mascons (abreviação de "concentrações de massa").

Figura 1.4: Potencial Gravitacional Ambas as Faces da Lua



Fonte: Konopliv et al. (2001). Visão do potencial gravitacional. Calcula-se a aceleração com raio medio da Lua 1738km, distribuição de massa uniforme, como referência. A partir desses dados é feito comparações com as acelerações encontrados em cada ponto, utilizando o calculo do potencial através das expansões de ordem e grau. Efetuando assim toda varedura da superfie da Lua, latitude e longitude.

A resolução das soluções foram limitadas devido ao extenso tempo computacional exigido. No entanto, com o passar do tempo e a melhoria dos recursos computacionais na década de 1990, o modelo gravitacional Lun60d de Konopliv et ai. (1993) estendeu a resolução para uma expansão de ordem e grau 60, utilizando todos os dados disponíveis (Lunar Orbiter I-V e Apollo 15 e 16 subsatélites). Apesar deste primeiro modelo de alta resolução prevêr o comportamento orbital com precisão, ainda apresentava ruídos.

Contudo, quando os mapas da superfície são gerados apenas através da expansão de ordem e grau 50, são removidos grande parte do ruído, permitindo uma melhor interpretação geofísica de sua superfície e de seu campo gravitacional.

Os modelos iniciais, que incluíam os dados anteriores a missão LP tiveram expansão até ordem e grau 75 (LP75D e LP75G, consulte Konopliv et al. (1998)) e após a missão tiveram seus modelos expandidos para ordem e grau 100 (LP100J e LP100K). Estes modelos estão disponíveis a partir do Sistema de Dados Planetários (PDS) Geociências Node ([www.pds.wustl.edu](http://www.pds.wustl.edu)). Antes da missão LP, todos mascons (grandes concentrações de massa) conhecidos estavam no lado próximo e associadas a grandes bacias de impacto.

Todos os modelos LP também incluem os dados disponíveis das missões anteriores do Lunar Orbiter I-V, a Apollo 15 e 16 subsatélites, Clementina como descrito por Konopliv et al. (1993) e Lemoine et al. (1997). Os modelos LP100J e LP100K provavelmente fornecem a melhor precisão de órbitas em relação ao tempo computacional necessário para determiná-las. Por tanto estes modelos são sugeridos para o uso em futuras missões. O modelo gravitacional LP165P fornece uma melhor precisão, porém pode levar um tempo computacional excessivo devido a elevada expansão em ordem e grau.

O mapa gerado sobre a superfície lunar utilizando o modelo gravitacional LP165P, é limpo para a expansão de ordem e grau 110 para o face próximo. A Figura 1.4 mostra a gravidade vertical com raio 1738,0 km sem o coeficiente J2, utilizando expansão de ordem e grau 110 para face próximo, e ordem e grau 60 para a face afastado, afim de diminuir o ruído, permitindo uma maior nitidez no mapa deixando a resolução parcial dos resultados mais claras. Haverá sempre uma grande quantidade de ruído nos dados coletados da face afastada, até que sejam realizadas observações diretas.

### **1.2.2 Análise da Vida Órbital e Observação das Condições para Satélites Lunares, Zeile et al.**

No Artigo, “ANALYSES OF ORBITAL LIFETIME AND OBSERVATION CONDITIONS OF SMALL LUNAR SATELLITES.” Zeile et al, (2008) nos é apresentado um projeto de missão para a Lua do Instituto de Sistemas Espaciais (IRS), da Universitaet Stuttgart. Tal projeto desenvolveu uma missão que pretende lançar a Lua uma pequena nave espacial chamada Lunar Mission BW1. A espaçonave tem forma cubica com aresta de 1m e uma massa de 150 kg, visando uma fase operacional de pelo menos 180 dias. Para tanto, o projeto precisa conhecer a influência do campo gravitacional Lunar, sobre um pequeno satélite, que por não disponibilizar de muito espaço, terá que escolher uma órbita estável para reduzir o consumo de combustível. Por apresentar grande heterogeneidade na distribuição de massa o tempo de vida do satélite será fortemente influenciado. No caso de naves espaciais pequenas a influencia sobre o tempo de vida deve ser considerada como um fator muito importante, pois devido a sua massa limitada tem pouco ou nenhum espaço para reserva de combustível para manobras de manutenção orbital. Por isso, pode ser favorável para a escolha de uma órbita, não as que apresentam condições ideais de observação, mas sim a que necessitem de menos gasto para sua manutenção orbital. Para caracterizar esses fatores limitantes, simulações e análises de modelos gravitacional com variação de ordem e grau foram realizados. Neste artigo são apresentados os resultados de simulações, que analisam o potencial gravitacional. Além disso, são discutidos as órbitas de longa duração para pequenos satélites lunares.

Assim como nosso projeto inicial, este artigo utiliza o mesmo modelo, o LP165P, da missão Lunar Prospector, desenvolvido e proposto por Konopliv et al. (2001), e com

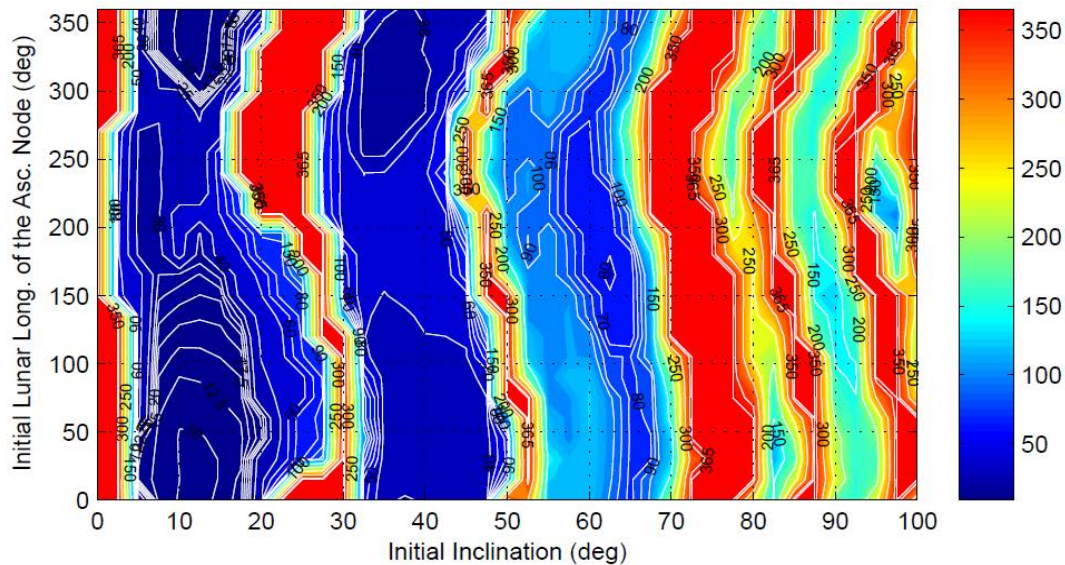
expansão de ordem e grau 100, reduzida para otimizar o tempo computacional. Apesar de ser possível a expansão de ordem e grau 165, Konopliv et al. (2001) propoe uma aproximação confiável dos resultados utilizando expansão de ordem e grau até 110 para o lado próximo e a expansão de ordem e grau até grau 60 para o lado afastado.

O foco principal deste artigo, e por isso foi escolhido como referência para nosso trabalho, foi mostrar a dependência do tempo de vida orbital em relação aos parâmetros iniciais da órbita (inclinação e nó ascendente).

Por se tratar de um satélite pequeno, com pouca capacidade de armazenar combustível, após atingir órbita desejada, o satélite terá pouco combustível disponível para manobras, por isso, é necessário a escolha de uma órbita com pouca demanda de combustível para manobras de manutenção.

Para todos os cálculos apresentados neste artigo, foi utilizado uma orbita circular com 100 km de altitude ( $a = 1837,1$  km). O tempo de vida orbital é principalmente dependente da inclinação da órbita. E as áreas mais estáveis são dada por Wang e Liu et al. (2005) para uma inclinação de  $0^\circ$ ,  $27^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $77^\circ$ ,  $85^\circ$ ,  $95^\circ$ , e  $103^\circ$ , nesse artigo são confirmados estes resultados, (observe figura 1.5), e estudada a dependência do nó ascendente incluindo o efeito gravitacional da Terra e os efeitos gravitacionais incluindo Terra e Sol.

Figura 1.5: Tempo de Vida Orbital



Fonte: Zeile et al (2008). Estudo realizado utilizando o Modelo gravitacional, LP165P, proposto por Konopliv et al. (2001), com expansão de ordem e grau 100. O gráfico apresenta o tempo de vida útil de um satélite, com órbita circular e altitude de 100km. Levando em consideração os efeitos gravitacionais da Terra e Sol.

A Figura 1.5 mostra os resultados do tempo de vida orbital para uma órbita circular, incluindo os efeitos do Sol e da Terra e um semieixo maior de 1.837,1 km (100 km de altitude). Neste gráfico também podemos relacionar as condições iniciais, inclinação e nó ascendente, com o tempo de vida de um satélite, (dada uma inclinação e um nó ascendente podemos observar no gráfico seu tempo de vida), assim podemos observar as

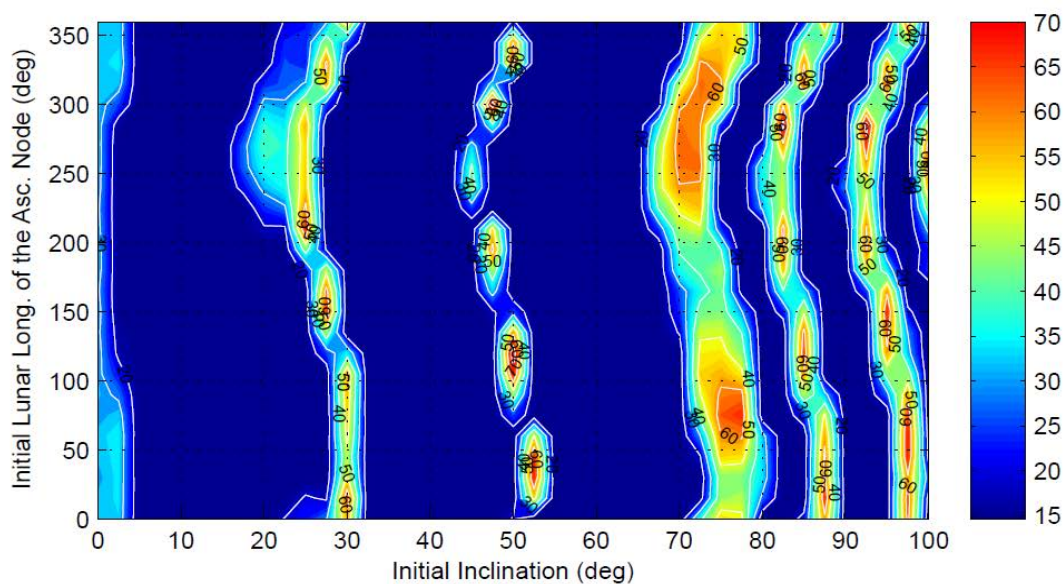
órbitas mais estáveis. Para os cálculos apresentados neste artigo, as simulações foram realizadas com intervalo de inclinação definido  $2.5^\circ$  e o intervalo do nó ascendente  $15^\circ$ , afim de reduzir tempo computacional exigido para as simuações, mesmo assim resultaram em um total de 984 simulações.

Neste artigo a órbita do satélite foi propagada por um período máximo de um ano, sendo a superfície de impacto definida para ocorrer em um raio lunar de 1.752,1 km (ou 15 km de altitude) para ter um pouco de reserva, uma vez que as maiores elevações tem em torno de 8km de altitude.

Na Figura 1.5 que utilizou para suas simulações o modelo gravitacional LP165P com grau e ordem 100. Este modelo foi escolhido porque nos fornece os dados mais recentes e completos disponíveis. Nesse estudo o grau e ordem foram reduzidos para 100, pois estudos realizados por Konopliv et al. (2001) afirma que o modelo de gravidade LP165P dá uma aproximação confiável do lado mais próximo da Lua com expansão de 110 e do lado distante até 60.

Este artigo nos é útil, pois o nosso programa principal, desenvolvido pela Dr<sup>a</sup>. Walkiria Schulz, tem o objetivo de através de inúmeras simulações gerar dados sobre o tempo de vida de um satélite em orbita circular com altitude de 100km. Tais valores iniciais foram escolhidos para gerar nossos gráficos, e comparmos com os gráficos gerados pelo estudo de Zeile et al. (2008), figura 1.5.

Figura 1.6: Ilhas de Estabilidade.



Fonte: Zeile et al (2008). Ilhas de Estabilidade. Análise das altitudes Mínimas nos permite a observação de ilhas de estabilidades nas regiões mais estáveis.

A fim de selecionar uma órbita de longa duração que apresentasse o mínimo de consumo de combustível para sua manutenção e que também fosse adequada para a medição e coleta de dados da superfície, as possíveis altitudes mínimas foram analisadas. A Figura 1.6 nos apresentou uma visão geral sobre os resultados, nela é relacionado as condições iniciais, inclinação e nó ascendente, com a altitude mínima. Assim podemos observar (figura 1.6), que dentro das regiões mais estáveis como havíamos visto na figura 1.5, ilhas

que apresenta um período de tempo com altitudes mais elevadas maior, acima de 60km. Enquanto em outras regiões o satélite chega perto de 20 km da superfície. A partir deste gráfico pode ser selecionadas órbitas que favorecem o tempo de vida orbital, o que nos permitirá futuros estudos, dentro dessas “ilha de estabilidade”. Este estudo é importante para nosso trabalho, por relacionar as condições iniciais com a estabilidade de um satélite.

### 1.2.3 Efeitos da Altitude, Nodo Ascendente e Inclinação no Tempo de Vida nas Órbitas Lunares Circulares, Gupta et al.

No artigo “Effect of Altitude, Right Ascension of Ascending Node and Inclination on Lifetime of Circular Lunar Orbits”, Gupta et al. (2011) é discutido a vida útil de um satélite e sua dependência em relação as condições iniciais, (inclinação, nódo ascendente, altitude), modelo gravitacional escolhido e expansões de ordem e grau. Nos é útil pois apresenta a influencia desses parâmetros sobre o potencial gravitacional lunar.

Assim podemos observar a consequências do potencial gravitacional no tempo de vida orbital e a influência (perturbação) dos efeitos gravitacionais da Terra e Sol, e sua relação com a altitude do satélite. Nos foi útil este artigo, pois apresenta vários estudos e referências, sendo possível fundamentar nossos estudos. Em especial podemos destacar a importância das expansões dos harmônicos esféricos, e a escolha do modelo gravitacional.

A principal perturbação em baixa altitude (100 km a 300 km) é devido ao campo gravitacional não esférico da Lua, além de apresentar uma distribuição de massa muito heterogeneia (presença de grandes concentrações de massa, os mascons), que geram anomalias em seu campo gravitacional.

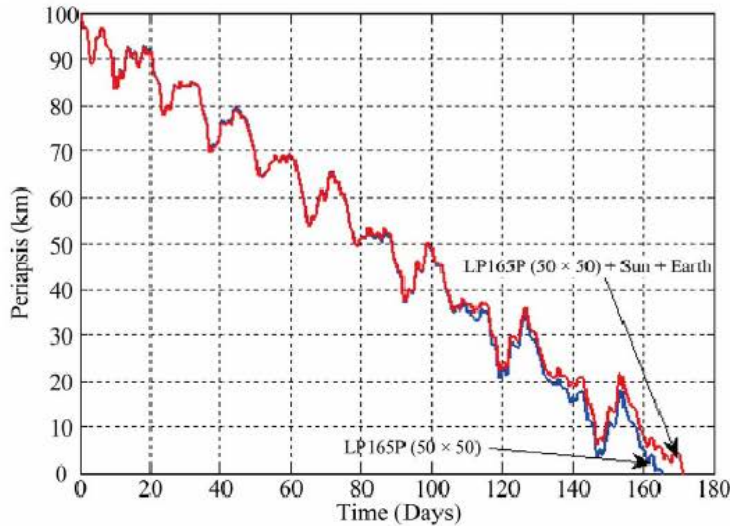
Sabemos que em uma órbita instável, um satélite irá necessitar de um consumo maior de combustível para sua manutenção, afim de evitar sua colisão com a superfície Lunar. Portanto, qualquer missão ou mesmo simulação de órbitas precisam ser projetadas de tal forma que não só atendam às condições de observação ideais, mas também devem levar em consideração o menor consumo de combustível para manutenção da órbita, afim de otimizar a missão. Assim, é crucial para a otimização de suas trajetórias conhecer fatores que afetam sua estabilidade. Vários estudos têm sido realizados para analisar o comportamento de órbitas lunares que minimizem custo, fornecendo órbitas eficientes como por exemplo, temos os autores como Tzirti, Tsiganis, Varvoglis (2010) e Melo, Winter, Vieira Neto(2005).

O tempo de vida de um satélite depende de seus parâmetros orbitais iniciais. Alguns das contribuições importantes no estudo da dependência do tempo de vida orbital são os estudos de Mayer, Buglia e Desai (1994) que analisaram a dependência das órbitas com a inclinação inicial, argumento do perigeu e sua sensibilidade aos harmônicos esféricos. Ramanan e Adimurthy (2005) analisaram os efeitos sobre da inclinação inicial em órbitas circulares de 100km de altitude. Eles também analisaram a influência dos harmônicos esféricos com maior expansão de ordem e grau no campo gravitacional Lunar. Também nos é apresentado que Wang e Lin (2005) realizou uma análise teórica detalhada sobre o tempo de vida orbital e sua relação com inclinação de um satélite em órbitas com baixa altitude.

Na figura 1.7, podemos observar um estudo realizado com o mesmo modelo gravitacional do nosso trabalho, (LP165P), com 100km de altitude e órbita circular e expansão dos harmônicos esféricos para ordem e grau 50. É possível observar através desse estudo que a inclusão dos efeitos gravitacionais da Terra e do Sol seu tempo de vida útil. O que

revela a importancia em futuros estudos da inclusão dos efeitos gravitacionais da Terra e do Sol.

Figura 1.7: Tempo de Vida.



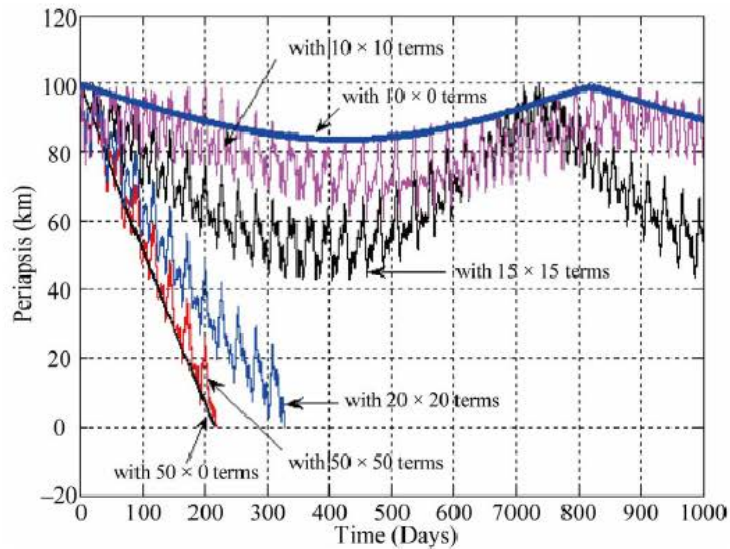
Fonte: Gupta et al. (2011). Podemos observar a diferença no tempo de vida calculado, incluindo ou negligenciando o efeito do Sol e a Terra para uma órbita circular polar, com altitude 100km. Utilizando o modelo LP165P (50x50).

Também nos foi apresentado neste artigo a dependência do tempo de vida orbital com o modelo gravitacional lunar escolhido e sua expansão (figura 1.8). A Figura 1.8 mostra a variação do periapsis, (parâmetros iniciais 100km de altitude em uma órbita circular polar), com expansão de ordem e grau: 10 x 0, 10 x 10, 15 x 15, 20 x 20, 50 x 0 e 50 x 50. Todas as expansões realizadas nos termos utilizando o modelo gravitacional lunar LP150Q. Com esse estudo podemos observar a importancia de estudar e implementar um programa que leve em consideração uma expansão de ordem e grau mais elevados. Fica claro na figura 1.8, que com a inclusão de maiores termos no somatório, o tempo de vida é fortemente influenciado. Com a omissão desses termos perdemos dados, e passamos a ter resultados não confiáveis, justificando a importancia do trabalho, em sempre buscar aprimorar o modelo gravitacional que utilize a maior expansão dos termos de ordem e grau. Observando na figura 1.8 uma grande diferença entre o tempo vida estimada pelas expansões dos termos (10 x 10) e (50 x 50).

A Figura 1.9 mostra a comparação entre os tempos de vida estimado utilizando expansões de ordem e grau 50 x 50 e 60 x 60.

Neste artigo, também são estudados os efeito da altitude, verificando que a uma altitude orbital o tempo de vida pode ser fortemente influenciado pelos efeitos do Sol e da Terra (ver figuras 1.10 e 1.11).

Figura 1.8: Variando Expansões.



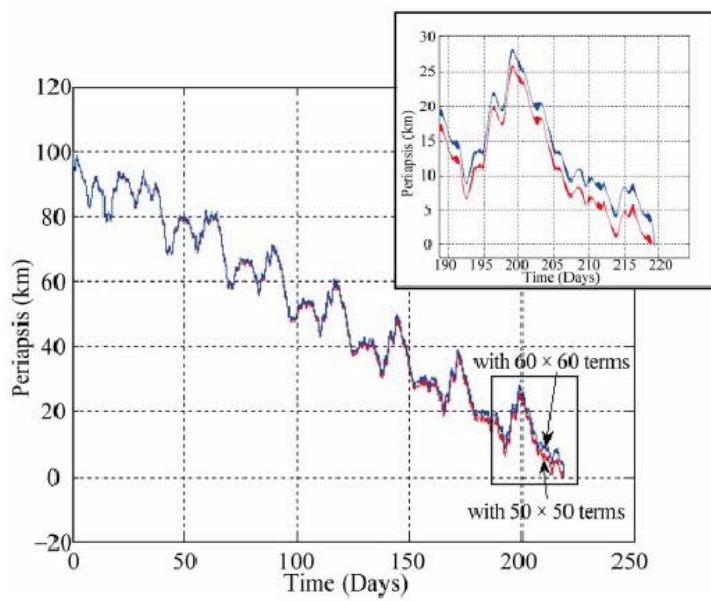
Fonte: Gupta et al. (2011). A variação do periapsis de uma órbita circular polar de altitude 100 km. Utilizando diferentes expansões dos termos de gravidade do modelo  $lp150q$ .

Como podemos ver nas figuras 1.10 e 1.11 o tempo de vida orbital em altas altitudes é influenciado pelo campo gravitacional da Terra. Em altas altitudes, as perturbações devido ao campo gravitacional da Terra tem efeito significativo sobre a vida de um satélite. Na figura 1.10 podemos observar uma órbita com altitude inicial de 1200km, circular (inclinação =  $55^\circ$ ), podemos ver a variação do periapsis. Considerando a gravidade Lua-Terra-Sol, (considerar o efeito da gravidade da Terra e do Sol), a gravidade considerando Lua-Terra, (negligenciando o efeito do Sol) e apenas a Lua. Através desse gráfico fica evidente que com altitudes elevadas o efeito gravitacional Lunar não atua sozinho sobre as órbitas de uma satélite, mas sim passa a ser fortemente perturbado pelo efeito da Terra, no mesmo gráfico podemos ver que comparando as perturbações dos efeitos da Terra e do Sol, e apenas da Terra, notamos que o Sol pode ser negligenciado. Na figura 1.11, observamos os mesmos resultados, porém na figura 1.11, é observado as perturbações da Terra e Sol em altitudes elevadas sobre a excentricidade. E podemos concluir novamente que a perturbação dos efeitos gravitacionais da Terra em altas altitudes passa a ter forte influencia.

Assim, podemos ver em ambos os gráficos (1.10 e 1.11) que o efeito da gravidade do Sol provoca pouca variação no periapsis e, conseqüentemente, no tempo de vida orbital. Portanto, o tempo de vida em altas altitudes diminui com a altitude, e podemos observar também através deste estudo que o Sol pode ser negligenciado.

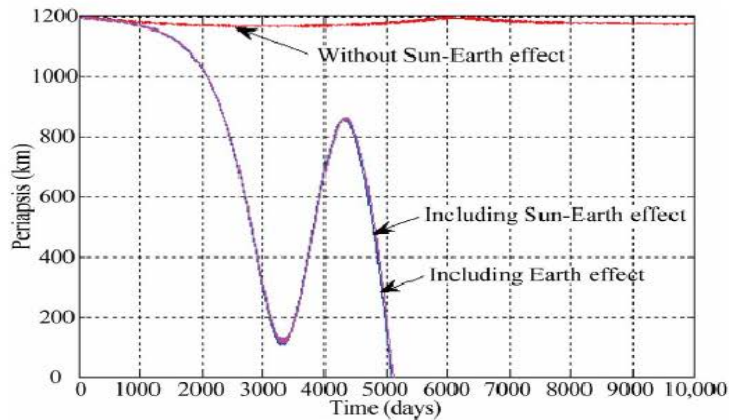


Figura 1.9: Expansão 50x50 e 60x60.



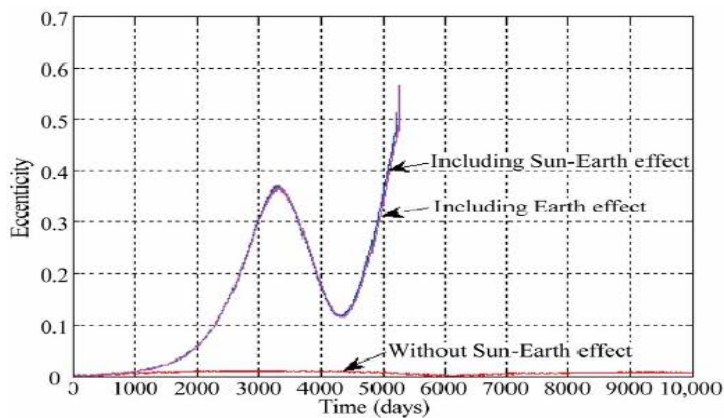
Fonte: Gupta et al. (2011). Variação do periapsis de uma órbita circular polar de altitude 100 km utilizando expansão 50x50 e 60x60.

Figura 1.10: Tempo de Vida Periapsis



Fonte: Gupta et al. (2011). Podemos ver nesse gráfico a variação do periapsis em função dos dias decorridos. Não incluindo a Terra e Sol percebemos que a órbita é mais estável. Tendo um tempo de vida orbital muito superior as simulações que incluem a Terra e Sol. Também podemos ver que incluindo ou negligenciando o Sol o tempo de vida orbital não se altera muito.

Figura 1.11: Tempo de Vida Excentricidade.



Fonte: Gupta et al. (2011). Tempo de vida-Excentricidade. Nesse gráfico podemos observar a variação da excentricidade em função do tempo. Como a inclusão da Terra e Sol podemos observar que a excentricidade passa a ser muito instável. E que o Sol não perturba muito. Podendo ser negligenciado em alguns casos.

# Capítulo 2

## METODOLOGIA

Neste capítulo é apresentado os estudos e os métodos utilizados para a realização deste trabalho.

O tempo de vida orbital de um satélite lunar é limitado pela natureza não esférica do campo gravitacional da Lua, que é principalmente afetado pela distribuição de massa heterogênea e a presença de anomalias conhecidas como mascons. Este trabalho inicialmente pretendia relacionar e estudar as órbitas lunares e sua significativa dependência em relação aos parâmetros iniciais da órbita de um satélite, como por exemplo, sua dependência em relação a inclinação, nódo ascendente e altitude, porém, para o desenvolvimento de um programa que possibilite a simulação numérica de um satélite em sua órbita, foi necessário o estudo do potencial gravitacional lunar (conhecer os estudos já realizados) e seus efeitos na estabilidade e evolução orbital.

O projeto iniciou com o programa desenvolvido pela colaboradora Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Walkiria Schulz, que tinha o objetivo de realizar simulações de um satélite em órbita da Lua, visando estudar a estabilidade de órbitas circulares, com altitude de 100km. Para tanto tivemos que executar inúmeras simulações variando as condições iniciais (Nódo Ascendente e Inclinação), com a finalidade de modelar o campo gravitacional da Lua e otimizar órbitas para futuros estudos. O programa gerava como resultado o tempo de vida de um satélite, em função das condições iniciais. Para verificarmos se o programa era confiável, foram necessários algumas adaptações no original, tivemos que adaptá-lo para que fosse possível varrer todas as possíveis inclinações e nósodos ascendentes, assim poderíamos comparar nossos resultados com os estudos realizados por Zeile et al. (2008), utilizado a Figura 1.5. Através dessa comparação observamos que o tempo de vida orbital gerado por nosso programa estava muito abaixo do esperado. Além de apresentar regiões com estabilidade que não seriam possíveis.

O programa desenvolvido pela colaboradora Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup> Walkiria Schulz utilizava os mesmos dados iniciais (órbita circular, com altitude inicial de 100km) e modelo gravitacional (proposto por Konopliv et al. 2001), utilizados por Zeile et al. (2008), porém, como os resultados não foram satisfatórios foi necessário verificar e compreender melhor a subrotina no programa principal que calculava o potencial gravitacional. Para sua compreensão e futura implementação computacional foram necessários o estudo dos harmônicos esféricos, os Polinômios e Funções Associadas de Legendre, assim como suas utilizações para o cálculo do potencial gravitacional e principalmente as formas de contornar as possíveis singularidades de sua implementação.

Iremos discutir nesse capítulo também, o programa que calculava o potencial gravitacional. Que será dividido em 2, programa1 e programa2.

O programa1 foi elaborado inicialmente pelo Prof<sup>o</sup>. Dr. Hélio Kuga, INPE, que para contornar o problema das coordenadas esféricas nos pólos propos utilizar as derivadas dos polinômios e funções associadas de Legendre (Pines. S. 1973) e para uma otimização computacional propos a normalização e fórmulas de recorrência de (Lundberg; Schutz; 1988). Bem como, as as fórmulas de recorrência propostas por Pines. S (1973) e Lundberg, Schutz (1988).

Como o programa principal ainda apresentava resultados muito diferentes dos que esperávamos. Partimos para um novo programa (programa2) que calculava o Potencial Gravitacional, o que será detalhado nesse trabalho. Este novo programa também foi elaborado pelo Prof<sup>o</sup>. Dr. Hélio Kuga, INPE, porém este em uma forma otimizada, com fórmulas mais compactas e uma notável redução no tempo computacional exigido.

Portanto para nosso programa poder gerar dados confiáveis foi importante a escolha e teste do modelo gravitacional e do programa que calculasse o potencial gravitacional.

Neste capítulo vamos discutir a Implementação do Potencial Gravitacional e as adaptações necessárias para nosso caso (Lua).

## 2.1 ATRAÇÃO GRAVITACIONAL ENTRE DOIS CORPOS DE DIMENSÕES FINITAS

A Lei da Atração Gravitacional (Gravitação Universal de Newton) é válida para corpos com massa concentrada em seus centros de massa, que nos diz que um corpo pontual de massa  $m$  é atraído pela massa  $M$  por uma força dada por:

$$\vec{F}(r) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}, \quad (2.1)$$

onde  $G = 6.672010^{-11}m^3/(kgs^2)$  é a constante gravitacional universal,  $r$  é a distância que une as massas  $m$  e  $M$ . A força gravitacional é atrativa e atua na direção do raio vetor unitário  $\hat{r}$ .

O Potencial criado pela massa  $M$  é dado por:

$$U = \frac{GM}{r}. \quad (2.2)$$

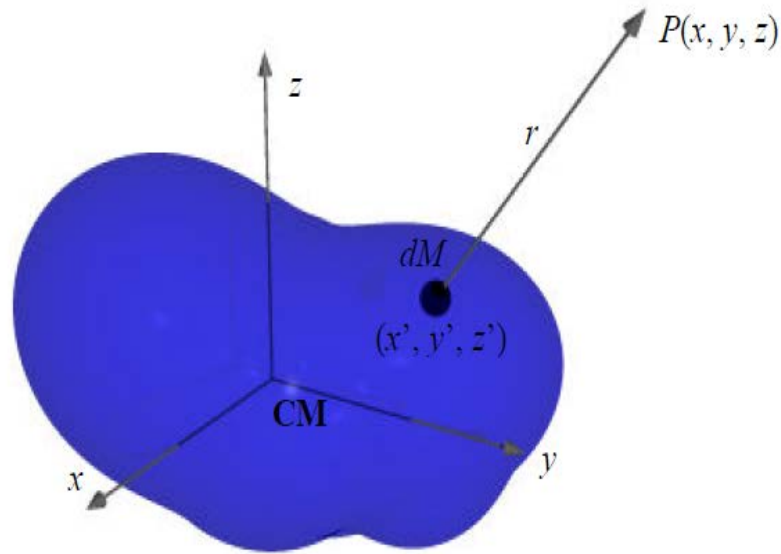
Porém, quando se trata de uma distribuição de massa não uniforme, deve-se considerar a atração que cada elemento de massa  $dM$  exerce sobre a massa de prova (fig 2.1).

$$U = G \int \frac{dM}{r}, \quad (2.3)$$

onde a integral deve ser realizada sobre todo volume do corpo de massa  $M$ , e utilizando  $r$  como a distância do ponto  $P$  ao elemnto de massa  $dM$ . E sendo  $r$ :

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (2.4)$$

Figura 2.1: Potencial Gravitacional no Ponto P.



Fonte: Kuga et al. (2000). O Potencial gravitacional num ponto P, devido à ação da massa  $dM$ . Na figura está representado um sistema de eixos coordenados XYZ e centro CM. O ponto P de massa  $m$  tem coordenadas  $(x,y,z)$ , em relação ao centro CM. O corpo de massa  $M$ , tem coordenadas centrais CM  $(X_0,Y_0,Z_0)$ . O elemento de massa  $dM$ , do corpo de massa tem coordenadas  $dM (x', y', z')$  relativas ao centro de massa CM.

### 2.1.1 Expressão para o Potencial Gravitacional

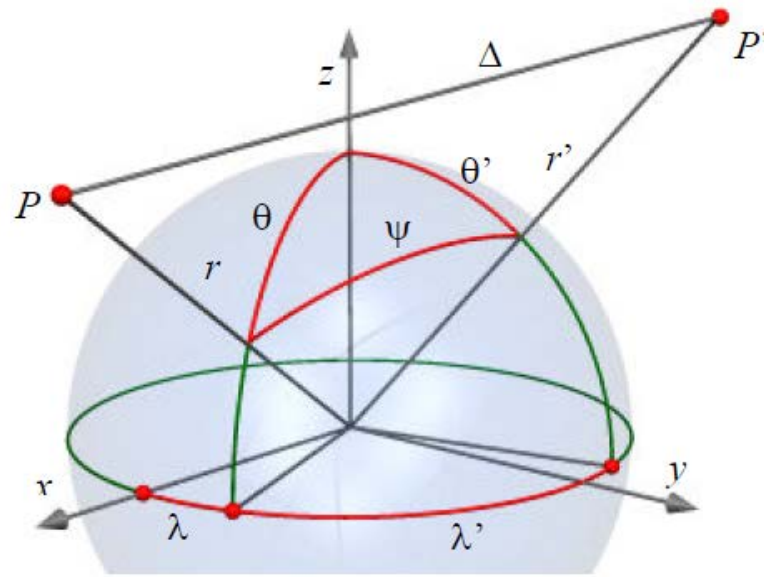
Como objetivo desse trabalho é estudar o Potencial Gravitacional Lunar e sua influência devido a distribuição de massa não uniforme, se fez necessário o estudo do potencial gravitacional entre dois corpos, não esféricos e com distribuição de massa heterogênea.

Portanto, neste capítulo iremos apresentar os estudos sobre atração gravitacional entre dois corpos de massas finitas e o desenvolvimento dos cálculos para obter a fórmula do potencial gravitacional. Desenvolvendo o estudo em coordenadas esféricas, utilizando os harmônicos esféricos, e os Polinômios e as Funções Associadas de Legendre. Este estudo está baseado em Kuga e Carrara (2000).

Considerando dos pontos P e P' dados em coordenadas esféricas  $P(r, \theta, \lambda)$  e  $P'(r', \theta', \lambda')$  como vemos na fig 2.2. onde  $r$  é a distância,  $\theta$  a colatitude e  $\lambda$  a longitude. O ângulo  $\Psi$  entre os vetores P e P' pode ser obtido diretamente pelo produto escalar entre os dois vetores:

$$\cos \Psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda - \lambda'), \quad (2.5)$$

Figura 2.2: Corpo Esférico.



Fonte: Kuga et al. (2000). Distância entre dois pontos  $P$  e  $P'$  em coordenadas esféricas

a distância  $\Delta$  é dada por:

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi, \quad (2.6)$$

extraindo a raiz quadrada de ambos os membros e invertendo  $\Delta$ , obtemos:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2\frac{r'}{r} \cos \Psi + \frac{r'^2}{r^2}}}, \quad (2.7)$$

Desenvolvendo  $\frac{1}{\Delta}$  em uma série de potência em relação a  $\frac{r'}{r}$ , teremos:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left\{ P_0(\cos \Psi) + \frac{r'}{r} P_1(\cos \Psi) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2(\cos \Psi) + \dots \right\} \quad (2.8)$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \Psi), \quad (2.9)$$

onde  $P_n(\cos \Psi)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , são os polinômios de Legendre. Ao substituirmos esta expressão no potencial de elemento de massa  $dM$  obtém-se:

$$U_{dM} = \frac{GdM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \Psi). \quad (2.10)$$

O teorema da adição de Legendre nos diz que:

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \theta) P_{nm}(\cos \theta') \cos m(\lambda - \lambda'). \quad (2.11)$$

onde  $\delta_{m0}$  é o delta de Kronecker e  $P_{nm}$  são os polinômios associados de Legendre. Utilizando a relação 2.9 com os ângulos complementares  $\phi$  e  $\phi'$  de  $\theta$  e  $\theta'$ , podemos escrever:

$$U_{dM} = \frac{GdM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \phi) P_{nm}(\sin \phi') \cos m(\lambda - \lambda') = \quad (2.12)$$

$$= f(r, \phi, \lambda, r', \phi', \lambda') \quad (2.13)$$

Em nosso caso (Lua), o corpo não é perfeitamente esférico, e tem sua distribuição de massa muito heterogênea (presença de mascons). Então seu potencial só pode ser obtido por aproximações, que por sua vez só podem ser expressas na forma de séries. Sendo assim, a expressão envolvendo a série de potência e os polinômios de Legendre em coordenadas esféricas é dada integrando a equação 2.10 em toda sua distribuição de massa. Assim temos (Kuga; Carrara; 2000):

$$U = \frac{GdM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \phi), \quad (2.14)$$

onde,

$$\begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} = \frac{(2 - \delta_{m0}) (n-m)!}{a_e^n M (n+m)!} \int_M r'^m P_{nm}(\sin \phi') \begin{bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{bmatrix} dM \quad (2.15)$$

com  $a_e$  sendo o semieixo equatorial do elipsoide,  $M$  a massa do corpo,  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  os coeficientes harmônicos esféricos e  $P_{nm}(\sin \phi)$  os Polinômios associados de Legendre. Observe que em espaço retilíneo a série de Fourier apresenta uma representação melhor, já uma superfície esférica é melhor representada por uma série de harmônicos esféricos.

## 2.2 HARMÔNICOS ESFÉRICOS

### 2.2.1 Representação dos Harmônicos esféricos

O potencial gravitacional obedece à equação de Laplace,  $\nabla^2 U = 0$ , que representada em coordenadas esféricas é:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (2.16)$$

Utilizando  $U(r, \theta, \lambda) = R(r)Y(\theta, \lambda)$ . Podemos separar a equação diferencial em duas:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + n(n+1)Y = 0 \quad (2.18)$$

onde  $n(n+1)$  é a constante de separação. A solução em  $R$  leva a:

$$R(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}. \quad (2.19)$$

$A = 0$  representa a função do potencial fora do corpo, enquanto  $B = 0$  representa o potencial dentro do corpo. Calculando o potencial na superfície do corpo, será dado pelo próprio valor  $Y$ , então temos  $A = 0$  e  $B = a_e^{n+1}$ . Assim, a função  $R$  fica:

$$R(r) = \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1}. \quad (2.20)$$

Admite-se que  $Y(\theta, \lambda)$  também possa ter separação de variáveis, na forma:

$$Y(\theta, \lambda) = P(\cos \theta)\Lambda(\lambda) \quad (2.21)$$

Escolhendo uma constante de separação  $m^2$  e substituindo  $Y$  na equação diferencial, chega-se a:

$$\frac{d^2 P}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dP}{d\theta} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} + m^2 \Lambda = 0 \quad (2.23)$$

Utilizando para obter a solução na série de funções:

$$\Lambda(\lambda) = C \cos m\lambda + S \sin m\lambda \quad (2.24)$$



A partir da análise desta solução,  $m$  deve ser inteiro, Utilizando  $x = \cos \theta$ , a primeira equação fica:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0 \quad (2.25)$$

a solução para  $m = 0$  resulta nos polinômios de Legendre, dados pela fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.26)$$

Para  $m \neq 0$  então a solução se torna uma Função Associada de Legendre de ordem  $n$  e grau  $m$ , dada por:

$$P_{nm}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n \quad (2.27)$$

Podemos relacionar as Funções Associadas com os Polinômios de Legendre e obteremos:

$$P_{nm}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad (2.28)$$

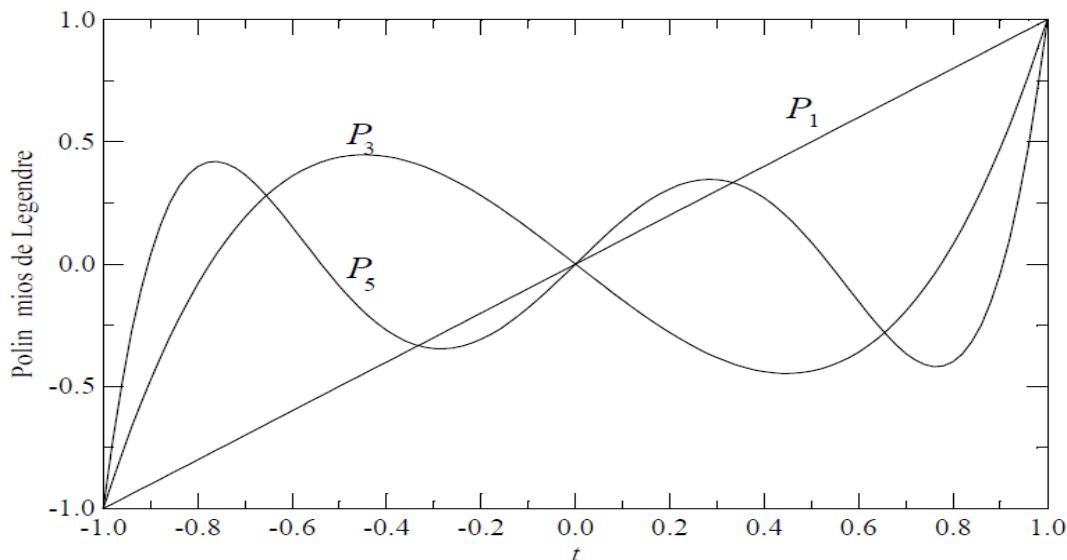
Alguns gráficos e figuras apresentados em Kuga e Carrara (2000), ilustram o desenvolvimento dessas fórmulas. Observando a equação 2.14 que calcula o potencial gravitacional, podemos observar que os Polinômios e Funções Associadas de Legendre, e a expansão dos coeficientes harmônicos esféricos, onde podemos observar que os termos dependem de  $n$  e  $m$ . Como por exemplo a Figura 2.3 mostra os polinômios de Legendre de ordem ímpar (1, 3 e 5) e a Figura 2.4 mostra os polinômios de ordem par (2 e 4). Lembrando que os polinômios apresentam apenas o termo  $n$ , sendo  $m = 0$ . Assim, as expansões dos polinômios esta relacionada apenas com o termo  $n$ , onde os termos ímpares satisfazem a condição  $P_{2k+1}(-1) = -1$ , enquanto que os pares obedecem a  $P_{2k}(-1) = 1$ , para  $k = 0, 1, 2 \dots$ . E ambos assumem valores unitários quando  $x = 1$ , ( $P_n(1) = 1$ ). A Figura 2.5 ilustra as Funções Associadas de Legendre até a ordem 3. Lembrando que a expansão da Função Associada de Legendre, considera os termos  $n$  e  $m$ .

Também nos é apresentado em Kuga e Carrara (2000), algumas representações dos harmônicos esféricos. A expansão dos termos  $n$  e  $m$  na equação do potencial (2.14), também apresenta suas particularidades., como por exemplo, os harmônicos que apresentam  $m = 0$ , são polinômios de grau  $n$  e possuem  $n$  zeros, que são reais e pertencem ao intervalo  $-1 \leq t \leq 1$  ou  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Assim a representação dos harmônicos mudam seu sinal  $n$  vezes neste intervalo e não dependem da longitude  $\lambda$ , eles dividem a esfera em zonas e por isso são chamados **Harmônicos Zonais**, como mostrado na Figura 2.6. As Funções Associadas de Legendre, apresentam  $n$  e  $m$  diferentes de zero, assim em sua expansão deve-se levar em consideração os termos  $n$  e  $m$ . O que faz com que sua representação na esfera mude seu sinal  $n$  vezes no intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi$ . As funções  $\cos m\lambda$

tem  $2m$  zeros no intervalo  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ . A representação gráfica das Funções e Associadas de Legendre, divide a esfera em compartimentos nos quais são alternadamente positivos e negativos parecido com tabuleiro de xadrez, como mostrado na Figura 2.7, e são chamados **Harmônicos Tesserais** (do latim ‘tessera’ que significa mosaico). Um caso particular pode ser observado quando  $n = m$ , eles degeneram em funções que dividem a esfera em setores positivos e negativos, são chamados **Harmônicos Setoriais**, como mostrado na figura 2.8.

Quanto maior for a expansão dos termos  $n$  e  $m$  (ordem e grau), maior será a quantidade de termos a serem somados. Lembrando que por se tratar de um somatório, quanto maior for o número de termos a serem considerados e, se confiáveis, maior será a precisão que alcançaremos. Os termos  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  são os coeficientes harmônicos esféricos, que são coletados por missões já realizadas e quanto maior for a quantidade desses termos maior será precisão do modelo. Em nosso trabalho, que calcula o potencial da Lua, utilizamos o modelo LP165P, que apresenta expansão máxima de ordem e grau 165, porém, essas expansões dependem do corpo em estudo e a quantidade de dados disponíveis desse corpo.

Figura 2.3: Polinômio de Legendre de Ordem Ímpar (1, 3, 5)



Fonte: Kuga et al (2000).

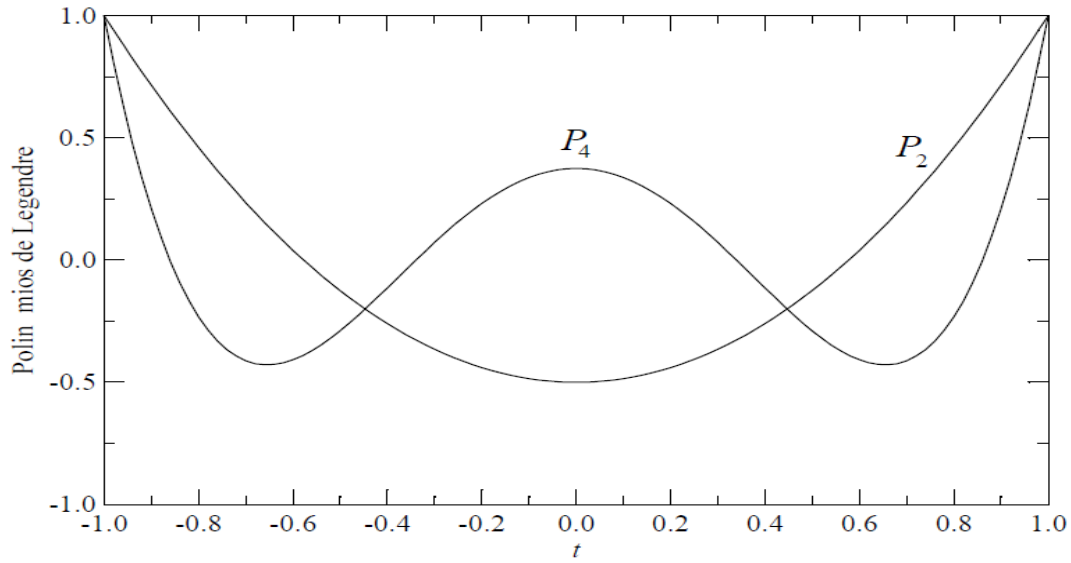
## 2.2.2 Fórmulas Recursivas para o Cálculo do Potencial Gravitacional

Como podemos ver em Kuga e Carrara (2000), os Polinômios e Funções Associadas de Legendre são definidos em termos de equações diferenciais, o que dificulta a sua utilização em cálculos feitos com o computador. No entanto são conhecidas fórmulas de recorrência que permitem a obtenção dos polinômios e funções associadas de ordem  $n$  e grau  $m$  a partir dos polinômios e funções de ordem inferior.

No caso dos polinômios zonais, as fórmulas de recorrência são dadas por:

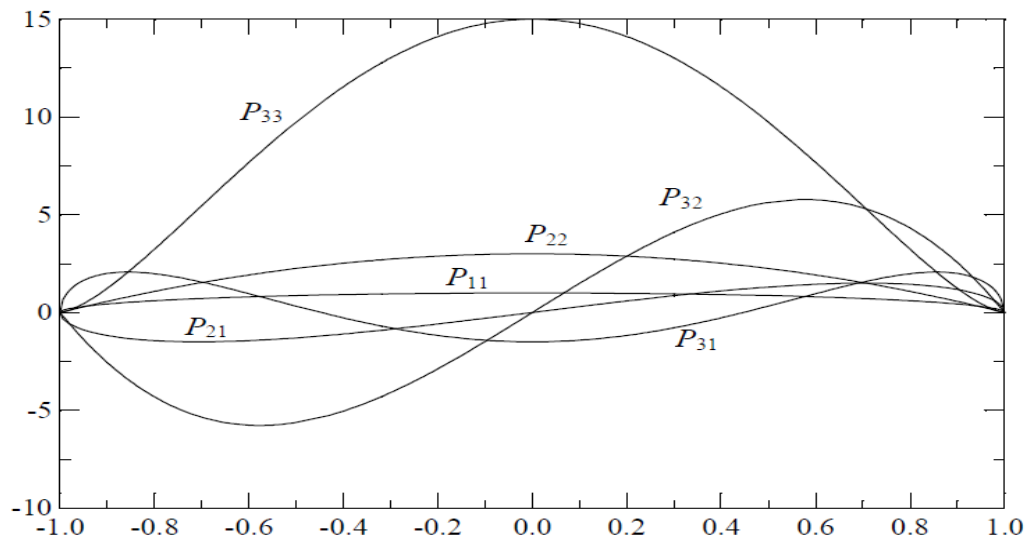
$$P_n = \frac{2n-1}{n} \sin \phi P_{n-1} - \frac{n-1}{n} P_{n-2}. \quad (2.29)$$

Figura 2.4: Polinômios de Legendre de Ordem Par (2,4)



Kuga et al. (2000)

Figura 2.5: Funções Associadas de Legendre.

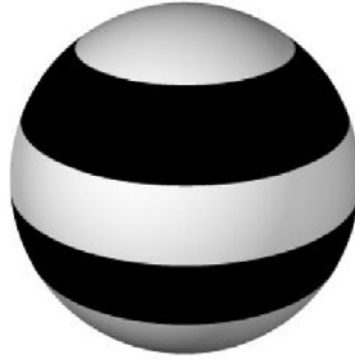


Fonte: Kuga et al. (2000). Desenvolvimento até ordem e grau 3

tendo início em  $P_0 = 1$  e  $P_1 = \sin \phi$ .Nas Funções Associadas ( $m \neq 0$ ), lembrando que  $m \leq n$ , temos:No caso de  $m = n$  (setoriais)

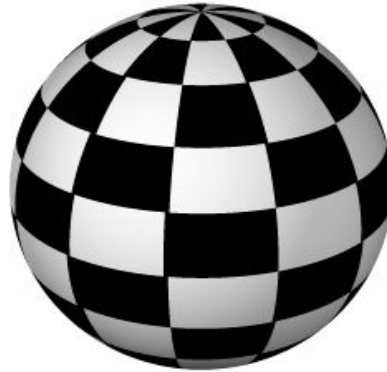
$$P_{n,n} = (2n - 1) \cos \phi P_{n-1,n-1}. \quad (2.30)$$

Figura 2.6: Harmônicos Zonais.



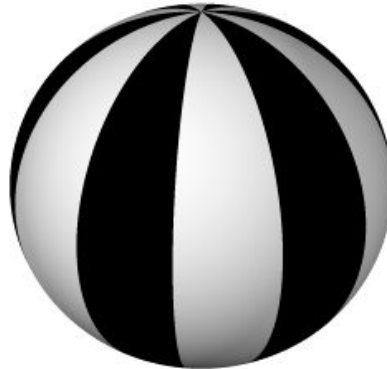
Fonte: Kuga et al. (2000). Apresentam  $m = 0$ . Dividem a esfera em  $n$  vezes.

Figura 2.7: Harmônicos Tesserais.



Fonte: Kuga et al. (2000). apresentam  $n \neq 0$   $m \neq 0$ . Dividem a esfera  $n \times m$  vezes.

Figura 2.8: Harmônicos Setoriais.



Fonte: Kuga et al. (2000). Caso particular onde  $n = m$ . Degeneram a funções e dividem a esfera em setores.

No caso  $m \leq n - 2$  (tesserais), temos:

$$P_{n,m} = (2n - 1) \sin \phi P_{n-1,n-1}. \quad (2.31)$$

e

$$P_{n,m} = \frac{2n - 1}{n - m} \sin \phi P_{n-1,m} - \frac{n + m - 1}{n - m} P_{n-2,m}. \quad (2.32)$$

Lembrando que  $P_n = P_{n,0}$  para  $m = 0$

### 2.2.3 Normalização dos Coeficientes e Polinômios

Como o potencial gravitacional reduz os valores dos coeficientes  $C$  e  $S$  à medida que a ordem e o grau dos polinômios e funções associadas aumentam, isso provoca erro de arredondamento quando calculado no computador, devido ao número de dígitos significativos ser limitado. Uma solução para minimizar esse efeito, é utilizar os coeficientes na forma completamente normalizada  $\bar{C}$  e  $\bar{S}$ . A fórmula de normalização é dada por:

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{bmatrix} = \left[ \frac{(n+m)!}{\varepsilon_m (2n+1)(n-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1; m = 0 \\ 2; m \geq 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

Comumente designamos os coeficientes  $C$  dos harmônicos esféricos de grau 0 ( $m = 0$ ) como coeficientes zonais  $J_n$ . Os coeficientes  $S_{n0}$ , são todos nulos, assim temos:

$$m = 0 \begin{cases} S_{n0} = \bar{S}_{n,0} = 0 \\ C_{n,0} = -\bar{J}_n \end{cases} \quad (2.35)$$

onde  $\bar{J}_n$  esta normalizado através de

$$\bar{J}_n = \left( \frac{1}{2n+1} \right)^{\frac{1}{2}} J_n \quad (2.36)$$

já a normalização dos polinômios e as funções associadas de Legendre é dada por:

$$\bar{P}_n = (2n+1)^{\frac{1}{2}} P_n \quad (2.37)$$

e

$$\bar{P}_{nm} = \left[ (4n+2) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_{nm} \quad (2.38)$$

Para a implementação numérica dessas fórmulas foi necessário otimizar as fórmulas e contornar algumas singularidades como veremos a partir de agora.

## 2.3 PROGRAMAS

O projeto iniciou com o programa desenvolvido pela colaboradora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Walkiria Schulz, que tinha o objetivo de realizar simulações de um satélite em órbita da Lua. Utilizando as equações do movimento, incluindo o efeito gravitacional da Terra e Sol, e por se tratar de baixa altitude (100km) os efeitos do campo gravitacional Lunar são muito relevantes. O satélite iniciaria as simulações com órbita circular, e dado uma inclinação e nó ascendente qualquer, seria gerado como resposta o tempo de vida orbital do satélite.

Se através de inúmeras simulações cobrirmos todas as possibilidades de inclinação e nódo ascendente, com os dados gerados por essas simulações teríamos um mapa que relacionaria a variação das condições iniciais com o tempo de vida orbital. Assim obteríamos um gráfico que nos permitiria realizar a comparação com os estudo realizado por Zeile et al. (2008). (ver figura 1.5). Esta comparação nos permitiria confiarmos na subrotina que calculava o potencial gravitacional. E a partir desse programa, (programa1), poderíamos estudar isoladamente o potencial gravitacional, seu campo, forma e como afetaria os satélites em órbitas. O intuito era de modelar o campo gravitacional da Lua e otimizar órbitas para futuros estudos e projetos que visam a exploração da Lua.

O programa inicial gera como resultado o tempo de vida de um satélite dado uma inclinação e um nódo ascendente qualquer, no entanto, para verificarmos se o programa é confiável, tivemos que realizar algumas adaptações sobre o programa que a Dr<sup>a</sup>. Walkiria nos forneceu, sendo necessário adaptá-lo para que fosse possível varrer (variar) todas as possíveis inclinações e nódos ascendentes. Com isso poderíamos através de inúmeras simulações e a plotagem dos dados gerados elaborar um gráfico que relacionasse todas as possíveis inclinações e nódos ascendentes com o tempo de vida do satélite, para compararmos com nossos resultados com os resultados do artigo apresentado por Zeile et al. (2008). O programa realizou as simulações utilizando os mesmos parâmetros iniciais (órbita circular, 100km de altitude, e o mesmo modelo gravitacional, LP165P e como indica Konopliv et al. (2001) como confiável, com expansão máxima de ordem e grau 100), porém com nossas simulações foi possível observar que nosso programa apresentava resultados não compatíveis com o estudo de referência (tempo de vida muito menor do que se esperava). Conseguimos observar também que o tempo de vida orbital estava muito abaixo do esperado em regiões que deveriam apresentar estabilidade e, além disso, foi apresentada regiões com estabilidade que não seria possível. O programa foi estudado e analisado na busca de identificar qual seria o problema. Para verificar melhor o programa foi necessário compreender melhor a subrotina no programa principal que calculava o potencial gravitacional. E sua implementação computacional, sendo necessário o estudo dos harmônicos esféricos, dos Polinômios e Funções Associadas de Legendre, assim como sua implementação numérica. E principalmente as formas de contornar as singularidades apresentadas em sua implementação.

A partir de agora vamos discutir os dois programas utilizados para o cálculo do potencial gravitacional. Iremos dividir em Programa1 e Programa2.

### 2.3.1 Primeiro Programa: Programa1

O programa1 nos foi fornecido pela prof. Dr<sup>a</sup> Walkiria Schulz, junto com o programa que simulava o satélite e incluía além do potencial as equações do movimento e os integradores. O programa1 que calcula o potencial gravitacional foi elaborado inicialmente pelo Prof<sup>o</sup>. Dr. Hélio Kuga, INPE. Este programa foi desenvolvido para o estudo do potencial gravitacional de corpos não esféricos e com distribuição de massa heterogênea. Foi utilizado para seu desenvolvimento alguns estudos, como para contornar o problema das coordenadas esféricas nos pólos foi proposto as derivadas dos polinômios e funções associadas de Legendre (Pines. S. 1973), e para otimização computacional foi proposta a normalização e fórmulas de recorrência dos mesmos (Lundberg; Schutz; 1988). Assim como as fórmulas de recorrência propostas por Pines. S (1973) e Lundberg, Schutz (1988).

Vamos discutir agora esses estudos.

O programa1 apresentava as seguintes características. Foram utilizadas algumas ferra-

mentas para evitar possíveis singularidades, como por exemplo, nos pólos, por se tratar de coordenadas esféricas apresentava singularidades quando  $\phi = 90$  graus, (Pines. S; 1973), e para que não houvesse a necessidade de se exigir a introdução de um novo conjunto de coeficientes gravitacionais, a expressão foi substituída por: (Pines. S; 1973):

$$U = \frac{GdM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n A_{nm}(u) [C_{nm} \cos m\lambda \cos^m \phi + S_{nm} \sin m\lambda \cos^m \phi] \right] = \quad (2.39)$$

$$= \frac{GdM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n A_{nm}(u) [C_{nm} r_{nm}(s, t) + S_{nm} i_m(s, t)] \right] \quad (2.40)$$

onde  $A_{nm}$  é a derivada da função de Legendre

$$A_{nm}(u) = \frac{d^m}{du^m} P_n(u) \quad (2.41)$$

Utilizando  $s = \frac{x}{r}$ ,  $t = \frac{y}{r}$  e  $u = \frac{z}{r} = \sin \phi$ . e  $r_m = sr_{m-1} - ti_{m-1}$ ,  $i_m = Si_{m-1} + trm - 1$ .

$$r_m(s, t) = \cos m\lambda \cos m\alpha \quad (2.42)$$

e

$$i_m(s, t) = \sin m\lambda \cos m\alpha \quad (2.43)$$

Sendo essas últimas equações discutidas e detalhadas no artigo de Pines. S (1973).

Para a implementação das derivadas do Polinômio e as Funções Associadas Legendre é imposto um conjunto de restrições, assim podemos reduzir a sete as relações necessárias. Por definição, as funções associadas de Legendre,  $P_{nm}(u)$ , e as derivadas das funções associadas,  $A_{nm}(u)$ , são zero para  $m > n$ . Assim, o cálculo de  $P_{nm}$  e  $A_{nm}$  para  $m \leq n$  pode ser visto como a determinação dos termos do triângulo inferior de uma matriz quadrada.

- A primeira restrição algorítmica sobre o cálculo dos termos exige que os termos da diagonal principal e os demais termos sejam utilizados para iniciar os cálculos.
- A segunda restrição algorítmica a ser imposta é que a fórmula de recursão seja definida por um ou dois outros termos. Esta condição é imposta para limitar o tempo computacional.
- A terceira restrição algorítmica exige que todas as derivadas sejam calculadas a partir de apenas uma fórmula de recorrência.

Assim as sete possíveis fórmulas de recorrência que satisfazer as restrições anteriores é dado por Lundberg; Schutz; 1988;

$$I : A_{nm} = \frac{1}{n-m} [(2n-1)uA_{n-1,m} - (n+m+1)A_{n-2,m}] \quad (2.44)$$

$$II : A_{nm} = \frac{1}{(n-m+1)(n+m)} [2(m+1)uA_{n,m+1} + (u^2-1)A_{n-2,m}] \quad (2.45)$$

$$III : A_{nm} = \frac{1}{n-m} [(n+m)uA_{n-1,m} - (u^2-1)A_{n-1,m+1}] \quad (2.46)$$

$$VI : A_{nm} = \frac{1}{n-m} (uA_{n,m+1} - A_{n-1,m+1}) \quad (2.47)$$

$$V : A_{nm} = \frac{1}{(n-m)(n-m-1)} [(n+m)(b+m-1)A_{n-2,m} + (2n-1)(u^2-1)A_{n-1,m+1}] \quad (2.48)$$

$$VI : A_{nm} = \frac{1}{(n-m)(n-m-1)} [2(m+1)A_{n-1,m+1} + (u^2-1)A_{n,m+2}] \quad (2.49)$$

$$VII : A_{nm} = \frac{1}{u(n-m)} [(n+m)A_{n-1,m} + (u^2-1)A_{n,m+1}] \quad (2.50)$$

Para sua implementação computacional, foi proposta também à introdução de fatores de normalização apresentados em Lundberg; Schutz; (1988), tanto para os coeficientes gravitacionais, como para as derivadas dos Polinômios e funções associadas de Legendre.

Para corrigir possíveis problemas computacionais, como por exemplo, a relacionada com a escala de magnitude dos parâmetros da equação, foi necessário reduzir os algarismos significativos dos resultados. Lembrando que quanto maior a expansão menor será os últimos termos do somatório.

No entanto o fator de normalização das funções de Legendre deve ser definido de tal forma que seu produto com os coeficientes gravitacionais normalizados seja correspondentes ao produto das funções de Legendre e os coeficientes gravitacionais, também proposto por Lundberg; Schutz; (1988):

$$\bar{P}_{nm}\bar{C}_{nm} = P_{nm}C_{nm}, \quad (2.51)$$

$$\bar{P}_{nm}\bar{S}_{nm} = P_{nm}C_{nm} \quad (2.52)$$

onde o Fator Normalizador:



$$N_{nm} = \left[ \frac{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0m})}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.53)$$

sendo,

$$\bar{P}_{nm} = N_{nm}P_{nm} \quad (2.54)$$

$$\bar{C}_{nm} = \frac{C_{nm}}{N_{nm}} \quad (2.55)$$

$$\bar{S}_{nm} = \frac{S_{nm}}{P_{nm}} \quad (2.56)$$

Assim o polinômio e a Função Associada de Legendre normalizado é dado por:

$$\bar{A}_n = (2n+1)^{\frac{1}{2}}A_n; m = 0. \quad (2.57)$$

$$\bar{A}_{nm} = \left[ \frac{(4n+2)(n-m)!}{(n+m)!} \right] A_{nm}; m > 0 \quad (2.58)$$

No primeiro programa utilizado para a realização das simulações de um satélite em órbita lunar, que utilizava para o cálculo potencial gravitacional o nosso programa1 não gerou os resultados esperados. Após uma longa análise na busca para detectar o problema, se estava no programa1 que apenas calculava o potencial, ou em outra subrotina, não conseguimos detectar o real problema. Então partimos para um novo programa que realizasse as simulações que nos permitiriam estudar o potencial gravitacional. Nosso novo programa otimizou as fórmulas e principalmente o tempo computacional. Sendo o programa principal, o mesmo proposto pela Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Walkiria Schutz, e a finalidade do nosso novo programa2 era verificar a existência de resultados confiáveis, partindo para integrá-lo ao programa proposto para a simulação do satélite lunar.

### 2.3.2 Segundo Programa: Programa2

Este novo programa para o cálculo do potencial gravitacional também foi elaborado pelo Prof. Dr. Hélio Kuga (INPE), sendo este detalhado no artigo “FORTRAN AND C-Codes For Higher Order and Degree Geopotential and Derivatives Computatio”. Kuga, Carrara.

Neste breve artigo nos é apresentado os principais aspectos da implementação numérica do geopotencial para ordem e grau elevados. O programa inicialmente visava estudar o potencial gravitacional da Terra, e como a Terra apresenta um modelo gravitacional estudado com mais detalhes, com uma quantidade de dados coletados (muito) superior ao da Lua (maior quantidade de coeficientes harmônicos). O programa2 foi testado até 2159 e 2190 para ordem e grau. Sendo mais que suficiente para nosso caso (Lua) que, os modelos com maiores expansões apresentam aproximadamente expansão 165 para ordem e grau. Sendo ainda que, a recomendação de Konopliv et al. (2001) é uma expansão de ordem e grau 100. Como este programa foi testado para o caso da Terra e não apresentou qualquer falha perceptível. Decidimos utilizá-lo para o caso Lua. Por ter sido já testado e apresentar dados confiáveis.

Claro que algumas singularidades ainda persistiram. Espera-se alguma degradação numérica perto dos pólos, no entanto, à 0.000001° de proximidade, ou seja, ± 89.999999°

de latitude, não houve problema.

Em nosso caso a Latitude  $\pm 90^\circ$ , teve que ser negligenciado. Caso seja incluída em uma varredura, não irá gerar dado nessa coordenada. Os códigos foram desenvolvidos em precisão dupla e estão disponíveis gratuitamente em Fortran-77 e ANSI Linguagens C.

Este programa foi elaborado para o caso Terra, e testado. O que nos gerou confiança em sua utilização, apenas tivemos que adaptá-lo ao nosso caso (Lua). O programa inicialmente está programado para gerar como resultado, a aceleração dado qualquer ponto em coordenadas retangulares  $(x, y, z)$ .

Dado o ponto de referência o programa realiza a seguinte sequência:

- Realiza a leitura dos Coeficientes Harmônicos Esféricos,
- Calcula os Polinômios e Funções Associadas de Legendre.
- Calcula o Potencial Gravitacional
- E por último, gera a aceleração gravitacional naquele ponto.

E para tanto foram utilizadas as seguintes fórmulas. Que estudaremos a partir de agora.

Dado um ponto material (corpo) sujeito à atração gravitacional de um corpo não esférico, ele sofrerá perturbações devido à distribuição não esférica e não simétrica de sua massa. Esta distribuição não uniforme de massa nos será fornecida através dos chamados coeficientes harmônicos esféricos. Dado por:

$$V = \frac{GdM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \Psi) \quad (2.59)$$

onde o fator de Normalização é:

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{bmatrix} = \left[ \frac{(n+m)!}{\varepsilon_m (2n+1)(n-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 2 & m \geq 1 \end{cases} \quad (2.61)$$

Assim o potencial gravitacional Normalizado é dado por:

$$V = \frac{GdM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \Psi) \quad (2.62)$$

Mas como podemos ver em seu novo artigo Kuga et al. será proposto uma nova implementação utilizando:

$$\bar{P}_{nm}(\theta) = a_{nm} t \bar{P}_{n-1,m}(\theta) - B_{nm} \bar{P}_{n-2,m}(\theta); n > m \quad (2.63)$$

sendo  $t = \cos \theta$ ,

$$a_{nm} = \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)}} \quad (2.64)$$

$$b_{nm} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-1)(n-m-1)}{(n-m)(n+m)(2n-3)}} \quad (2.65)$$

onde  $\theta$  é a colatitude, assim  $\theta = 90 - \Psi$ . Para simplificar as notações  $P(\theta)$  está sendo utilizada no lugar de  $P(\cos \theta)$ . Os Valores iniciais para os Polinômios e Funções Associadas são;  $\bar{P}_{0,0}(\theta) = 1$ ;  $\bar{P}_{1,0}(\theta) = \sqrt{3}t$ ;  $\bar{P}_{1,1}(\theta) = \sqrt{3}u$ . Sendo  $u = \sin \theta$ .

Assim temos:

$$\bar{P}_{n,m}(\theta) = u \sqrt{\frac{2m+1}{2m}} \bar{P}_{m+1,m+1}(\theta); m > 1 \quad (2.66)$$

Computacionalmente essa transformação produz uma melhor precisão numérica. Tendo em vista que após a normalização,  $\bar{C}$ ,  $\bar{S}$  e  $\bar{P}$  a uma melhoria numérica, o que evita problemas computacionais (grandes expoentes positivos ou negativos), propenso a overflows/underflows.

Sendo assim será utilizada para a implementação do potencial a fórmula:

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r} \sum_{m=0}^M \left[ \cos(m\lambda) \sum_{n=\mu}^M \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{C}_{nm} \bar{P}_{nm}(\theta) + \sin(m\lambda) \sum_{n=\mu}^M \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{S}_{nm} \bar{P}_{nm}(\theta) \right]. \quad (2.67)$$

Definindo os componentes do Somatório para  $m = 1, 2, 3, \dots M$ . Temos:

$$X_{mc} = \sum_{n=\mu}^M \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{C}_{nm} \bar{P}_{nm}(\theta); \quad (2.68)$$

$$X_{ms} = \sum_{n=\mu}^M \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{S}_{nm} \bar{P}_{nm}(\theta); \quad (2.69)$$

$$\Omega_m = \cos(m\lambda) X_{mc} + \sin(m\lambda) X_{ms} \quad (2.70)$$

onde  $\mu$  é um número inteiro que depende de m. Portanto temos:

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r} \sum_{m=0}^M \Omega_m \quad (2.71)$$

Calculando a Aceleração teremos:

Primeiramente será necessária a primeira derivada do polinômio de Legendre:

$$u\bar{P}_{nm}^1(\theta) = -nt\bar{P}_{nm}(\theta) + f_{nm}\bar{P}_{n-1,m}(\theta); \forall n \geq m. \quad (2.72)$$

Onde  $f_{nm}$  é dado por:

$$f_{nm} = \sqrt{\frac{(n^2 - m^2)(2n + 1)}{2n - 1}} = \frac{2n + 1}{a_{nm}} \quad (2.73)$$

Calculando o gradiente para cada termo  $\lambda, \theta, r$ , em coordenadas esféricas, temos:  
para  $\lambda$ :

$$V_\lambda \equiv \frac{\partial V}{\partial \lambda} = -\frac{GM}{r} \sum_{m=0}^M \left[ \cos(m\lambda)X_{mC} + \sin(m\lambda)X_{mS} \right] \quad (2.74)$$

$$X_{mC}^\theta \equiv \sum_{n=m}^M \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{C}_{nm} \bar{P}_{nm}^1(\theta) \quad (2.75)$$

$$X_{mS}^\theta \equiv \sum_{n=m}^M \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{S}_{nm} \bar{P}_{nm}^1(\theta) \quad (2.76)$$

para  $\theta$ :

$$V_\theta \equiv \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{GM}{r} \sum_{m=0}^M \left[ \cos(m\lambda)X_{mC}^\theta + \sin(m\lambda)X_{mS}^\theta \right] \quad (2.77)$$

$$X_{mC}^r \equiv \sum_{n=m}^M \left(\frac{a}{r}\right)^n (n+1) \bar{C}_{nm} \bar{P}_{nm}^1(\theta) \quad (2.78)$$

$$X_{mS}^r \equiv \sum_{n=m}^M \left(\frac{a}{r}\right)^n (n+1) \bar{S}_{nm} \bar{P}_{nm}^1(\theta) \quad (2.79)$$

para  $r$ :

$$V_r \equiv \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{GM}{r} \sum_{m=0}^M \left[ \cos(m\lambda)X_{mC}^r + \sin(m\lambda)X_{mS}^r \right] \quad (2.80)$$

E a transformação das coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas levando em conta as derivadas parciais obteremos para a aceleração as expressões:

$$\ddot{x} = u \cos \lambda V_r - \frac{t}{r} \cos V_\theta - \frac{\sin \lambda}{ur} V_\lambda \quad (2.81)$$

$$\ddot{y} = u \sin \lambda V_r - \frac{t}{r} \sin V_\theta - \frac{\cos \lambda}{ur} V_\lambda \quad (2.82)$$

$$\ddot{z} = t V_r + \frac{u}{r} V_\theta \quad (2.83)$$

Com esse novo programa, obtemos as informações sobre o potencial e aceleração em qualquer ponto. O Programa2 apresentava uma quantidade de fórmulas reduzida em relação ao programa1 e um tempo necessário para gerar resultados muito menor. Decidimos utilizá-lo em projetos futuros no programa proposto pela Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Walkiria Schulz, afim de verificar se nossas simulações iniciais apresentavam problemas relacionados ao programa que calculava o potencial ou se o problema não estava relacionado com o potencial, mas sim com outra subrotina ou até mesmo com algum dado não compatível.

### 2.3.3 Dados Gerais sobre o Programa2

O programa2, que foi desenvolvido originalmente pelo Prof. Dr. Hélio Kuga e que decidimos utilizar nesse trabalho, tinha a intenção de calcular o potencial gravitacional do caso Terra. Como se apresentava otimizado, redução de fórmulas e principalmente do tempo, e já tinha sido testado para a Terra e gerado resultados confiáveis, decidimos utilizá-lo para nossos estudos sobre a Lua (potencial). Porém foram necessárias algumas adaptações.

Dado um ponto qualquer em coordenadas retangulares,  $(x, y, z)$ , o programa gerava como resposta as componentes da aceleração, porém, como queríamos utilizar como referência o estudo de Konopliv et al (2001), que nos apresenta os gráficos e figuras gerados em seu artigo, em coordenadas esféricas, longitude e latitude, mais especificamente a Figura 1.3 e Figura 1.4. Nestas figuras (1.3, 1.4) nos é apresentado um estudo relacionando a aceleração, com as coordenadas da longitude e latitude de um ponto. Assim tivemos que adaptar o programa (programa2) para receber como dados iniciais não  $(x, y, z)$ , mas sim em coordenadas esféricas. Elaborando um script simples, para realizar uma varredura (gama de pontos) sobre uma região selecionada, partindo de uma longitude e latitude inicial. Assim o programa2 recebe coordenadas esféricas e nos gera como resposta a aceleração, em função da Latitude e Longitude. o que nos permite, após sua plotagem, observar esses resultados e compararmos com os estudos já realizados.

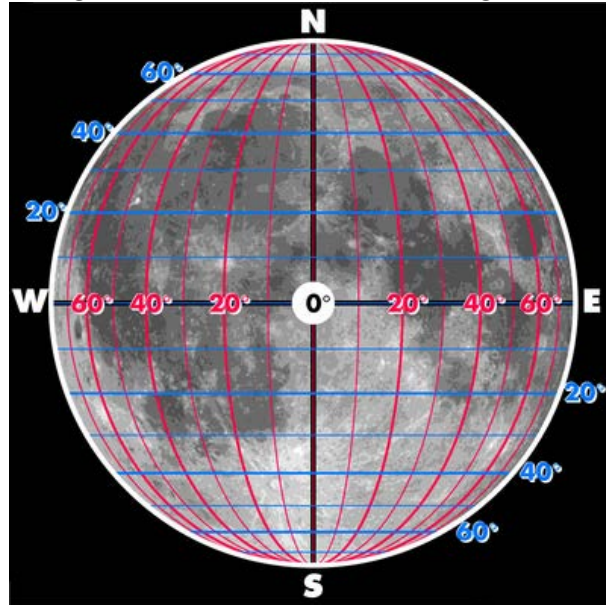
No caso da Lua nos referimos a Longitude e Latitude em Coordenadas Selenográficas, que seria o mesmo sistema utilizado para a Terra, porém, para a superfície da Lua.

- **Coordenadas Selenográficas:** Como podemos ver na Figura 2.9 as Coordenadas Selenográficas são linhas imaginárias dispostas em coordenadas esféricas, como as coordenadas geográficas utilizadas na Terra. Utiliza-se como ponto de partida o equador lunar, que como na Terra, foi adotado por convenção. O meridiano primário da Lua reside no centro de seu disco, tendo como referência o disco visto da Terra (Face Próxima).

Como a Terra apresenta um grande número de coeficientes harmônicos conhecido (mais de 2000 para ordem e grau), testados e confiáveis. O programa original tinha a necessidade de otimizar a leitura desses dados, e realizar cálculo dos Polinômios e Funções de Legendre. Assim ao utiliza-lo para a Lua (adaptá-lo) se tornou mais ágil, pois em nosso caso trabalhamos com expansão de ordem e grau no máximo 165, sendo recomendado expansão até 100, como sugere Konopliv et al. (2001). Assim o programa2 foi adaptado para realizar a leitura do arquivo de dados (coeficientes harmônicos) do nosso modelo (LP165), como recomendado por Konopliv et al. (2001). Este dados foram fornecidos pela Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Walkiria Schulz. Utilizando este modelo fizemos diversas simulações, variando a expansão de ordem e grau.

Para validar nosso trabalho, utilizamos o estudo realizado por Konopliv et al. (2001). Através de varias simulações e gerações de gráficos tínhamos como objetivo reproduzir a figura 1.3 e figura 1.4, com o objetivo testarmos a confiabilidade do nosso programa.

Figura 2.9: Coordenadas Selenográficas



Fonte: [wikipedia.org/wiki/CoordenadasSelenográficas](http://wikipedia.org/wiki/CoordenadasSelenográficas). Estas coordenadas são utilizadas para fazer referência a posições na superfície da Lua. Qualquer posição na superfície lunar pode ser definida com dois valores numéricos, que são comparáveis com a latitude e longitude que se usam para definir pontos na superfície da Terra. Ambos sistemas de coordenadas se medem em graus sexagesimais.

Dado uma Latitude e uma Longitude qualquer, era calculado a aceleração no ponto utilizando  $r = 1738.0$ , com distribuição de massa concentrada num ponto, e superfície perfeitamente esférica. Em seguida era utilizando o programa2 para calcular a aceleração, utilizando as mesmas coordenadas (latitude e Longitude), altitude também  $r = 1738.0$ , no entanto com a aceleração calculada através das fórmulas descritas para o programa2, com o somatório do desenvolvimento e expansão da fórmula do potencial. (executando a leitura dos coeficientes harmônicos, calculando a expansão de ordem e grau, calculando o potencial e logo a aceleração), como foi descrito nas equações apresentadas para o programa2. Em seguida era calculada a diferença entre ambas as acelerações. Os resultados fornecidos eram transformados para unidade mgals (miligals). Essa diferença era calculada para regiões selecionadas e depois plotadas. Os gráficos gerados serviram para compararmos com os estudos apresentado por Konopliv et al.(2001).

- No sistema de unidades S.I., a medida de aceleração padrão é igual a 1 metro por segundo ao quadrado (abreviado como  $m/s^2$ ). Porém nos estudos apresentados por Konopliv et al. (2001), a unidade apresentada foi a miligals. Nosso programa gera resultados em ( $m/s^2$ ) portanto tivemos que convertê-lo para miligals. A unidade é o Gal (abreviatura de Galileu, unidade em sua homenagem), que é igual a 1 centímetro por segundo ao quadrado ( $cm/s^2$ ). Utiliza-se o mgals (miligals) ( $10^{-5}m/s^2$ ), pois a diferença entre as acelerações se apresenta nessa ordem de grandeza. O mGal é muito utilizado para representar pequenas variações do campo gravitacional.

# Capítulo 3

## DISCUSSÕES E RESULTADOS

### 3.1 INFLUÊNCIA DO POTENCIAL NA ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL LUNAR

No decorrer deste trabalho foram realizadas diversas simulações, com o propósito de verificarmos características similares com estudos já realizados. Sendo Konopliv et al. (2001), os mais relevantes para esse trabalho, ver Figura 3.1 e Figura 1.4 onde são estudados o potencial Gravitacional Lunar.

Para a elaboração desse gráfico foi calculado a aceleração com o raio da Lua 1738.0km. Dado uma Latitude e uma Longitude, é calculado a aceleração no ponto utilizando  $r = 1738.0km$ , e distribuição de massa concentrada em um ponto, e superfície perfeitamente esférica. A partir desse resultado é feito a comparação com a aceleração encontrada nesse mesmo ponto, utilizando os resultados do programa2, sendo o potencial calculado levando em consideração a superfície não esférica da Lua, e a distribuição de massa não homogênea. Utilizando as equações e implementações discutidas na apresentação do programa2. Comparando as acelerações e plotando essa variação em gráficos podemos estabelecer comparações.

Todos os gráficos desse capítulo tem o seguinte formato: eixo  $x$  será representado a Longitude, no eixo  $y$  será representado a latitude, variando de acordo com a região selecionada. Portanto teremos um gráfico de longitude por latitude (ambas em graus), tais coordenadas (selenográficas) apresentadas para a superfície da Lua. Esse gráfico irá relacionar as coordenadas selenográficas com a diferença entre a variação da aceleração. Os resultados serão apresentados numa escala que esta compreendida entre -200 a 500 mgals (miligals), representada no gráfico através da variação de cores. Iremos comparar nossos gráficos com os estudos realizados por Konopliv et al. (2001). Importante observar que a escala de cores é diferente.

Todos os nossos gráficos utilizaram o modelo proposto por Konopliv, (LP165). Sendo o arquivo com os coeficientes desse modelo, fornecido pela Colaboradora Dr<sup>a</sup> Walkiria Schulz. Se observarmos a Figura 3.2 gerada com dados do nosso programa2. Podemos observar uma região selecionada; longitude entre  $\pm 90^\circ$  e latitude variando entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  (em coordenadas Selenográficas). E compararmos com a Figura 3.3, mesma região selecionada, podemos observar as três grandes anomalias positivas. O que nos permite verificar que nossos resultados apresentam compatibilidade com o esperado. Importante observar que as escalas de cores são diferentes.

As figuras 3.5 e 3.6, apresentam os dados gerados com expansão ordem e grau 50, porém a Figura 3.6 apresenta os dados gerados sem o J2. Ambas apresentam características semelhantes, porém excluindo J2, não observamos grandes regiões com variação da aceleração negativa. E podemos compará-las a figura 3.1, onde também foi excluído o termo J2.

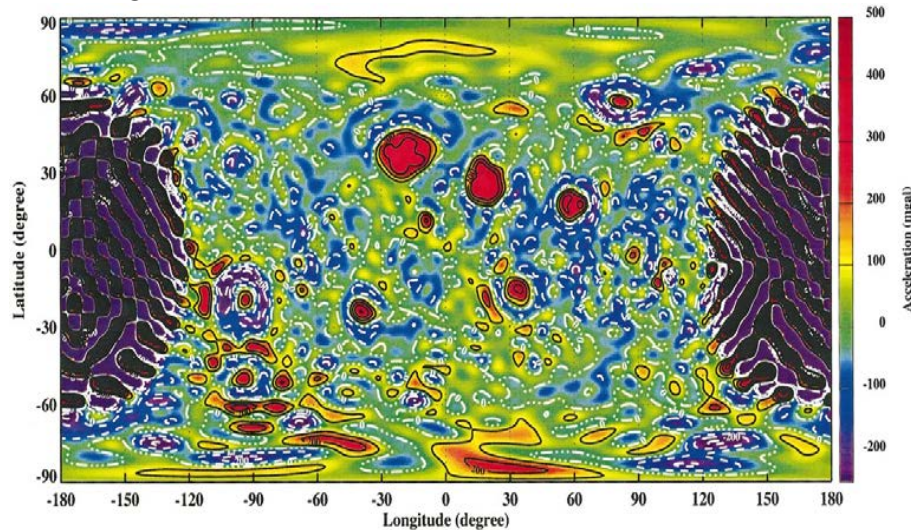
A figura 3.8, apresenta a superfície total da Lua, apresentando toda sua superfície (latitude e longitude). Nos permitindo observar, e estabelecer relações com a figura 3.1. Por apresentar regiões e estruturas similares nos permite confiarmos em nossos resultados.

Na figura 3.7, é apresentado o modelo proposto por Konopliv et al. (2001), com expansão de ordem e grau até 100, sendo proposto por apresentar a maior expansão possível com a menor quantidade de ruídos, sendo assim mais confiável para gerar resultados compatíveis com o que esperávamos. Será o provável modelo de expansão escolhido para nossos futuros estudos.

Na figura 3.9, é apresentado o gráfico completo da superfície da Lua, porém agora com expansão de ordem e grau 165 (nossos arquivo de coeficientes apresenta 165 x 165 para ordem e grau). Onde podemos observar em comparação com a expansão 100 (fig 3.7), a forte presença de ruídos. Que poderiam perturbar a estabilidade e o tempo de vida em nossos futuros estudo, onde pretendemos elaborar simulações com satélites em órbitas Lunar.

Como podemos observar através destas figuras geradas pelo programa2, e estabelecendo comparação com os estudos de Konopliv et al. 2001. Nosso programa apresenta resultados, que geram imagens com estruturas esperadas, o que nos permite confiarmos em seus resultados. Assim este programa (programa2). Será o programa escolhido para futuros estudos.

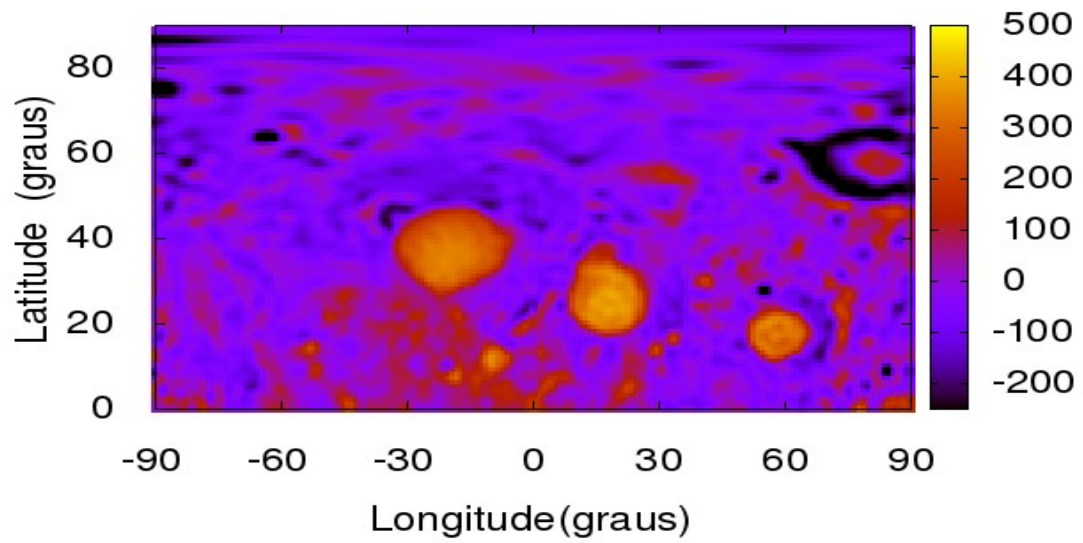
Figura 3.1: Análise do Potencial Gravitacional Lunar



Fonte: Konopliv et al. (2001). Análise do Potencial Gravitacional Lunar. O gráfico gerado com expansão de ordem e grau 50. Apresenta a defasagem de dados para a face oculta da Lua. A região que apresenta defasagem, é devido a falta de dados. Lembrando que a face oculta da Lua, por não ter sido observado pela LP, ou outra missão anterior, não apresenta dados confiáveis.

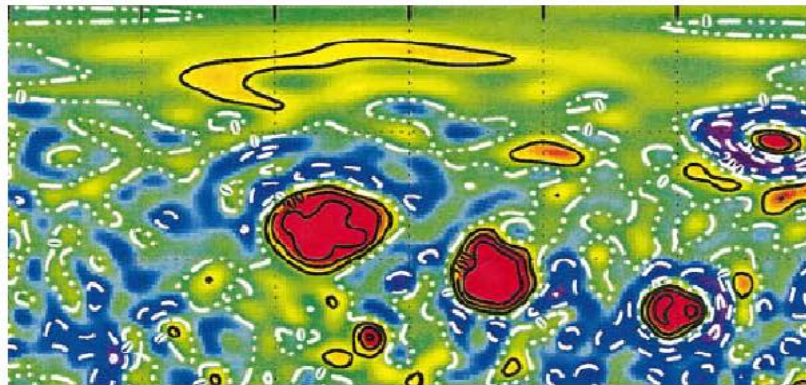


Figura 3.2: Região Seleccionada Programa2.



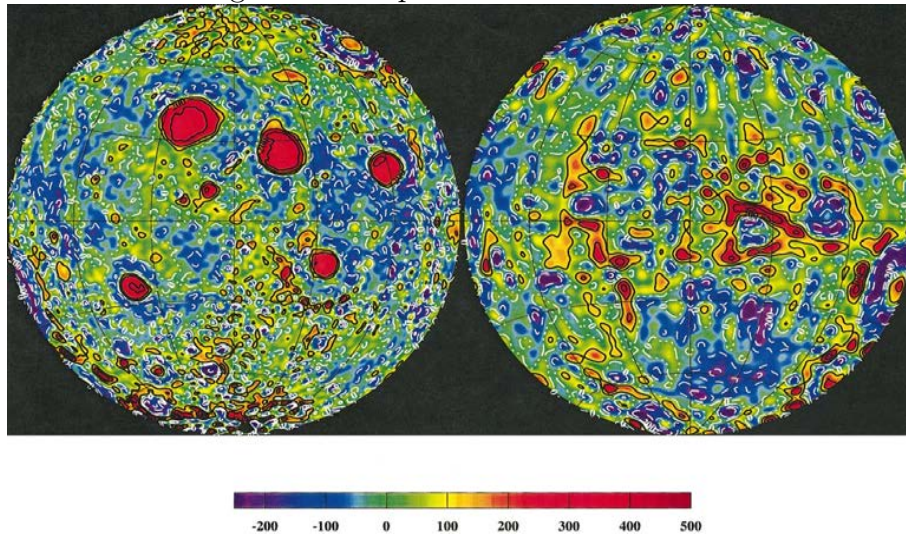
Fonte: Próprio Autor. Região Seleccionada para observar as anomalias que mais se destacam na face próxima. Ordem e Grau 100. Nos permite comparação com os estudos realizados por Konopliv et al(2001).

Figura 3.3: Região Seleccionada Konopliv.



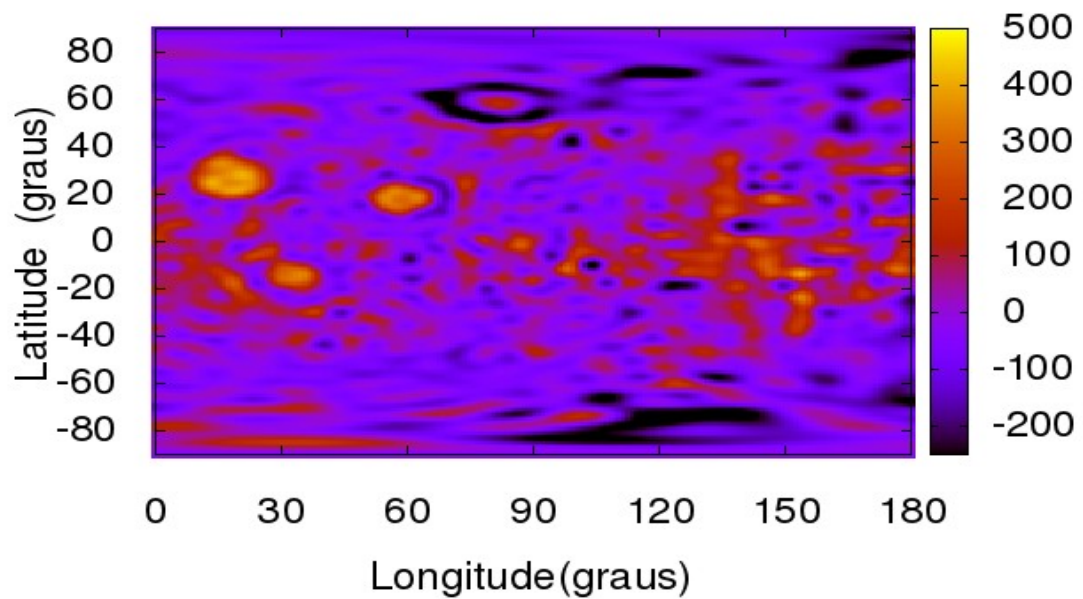
Fonte: Konopliv et al. (2001). Seleccionando a Região da figura compreendida entre mais 90graus e menos 90graus de longitude, e de 0 a 90 graus de latitude dos estudos de Konopliv podemos observar as 3 grandes anomalias que mais se destacam na face próxima.

Figura 3.4: Superfície Esférica da Lua



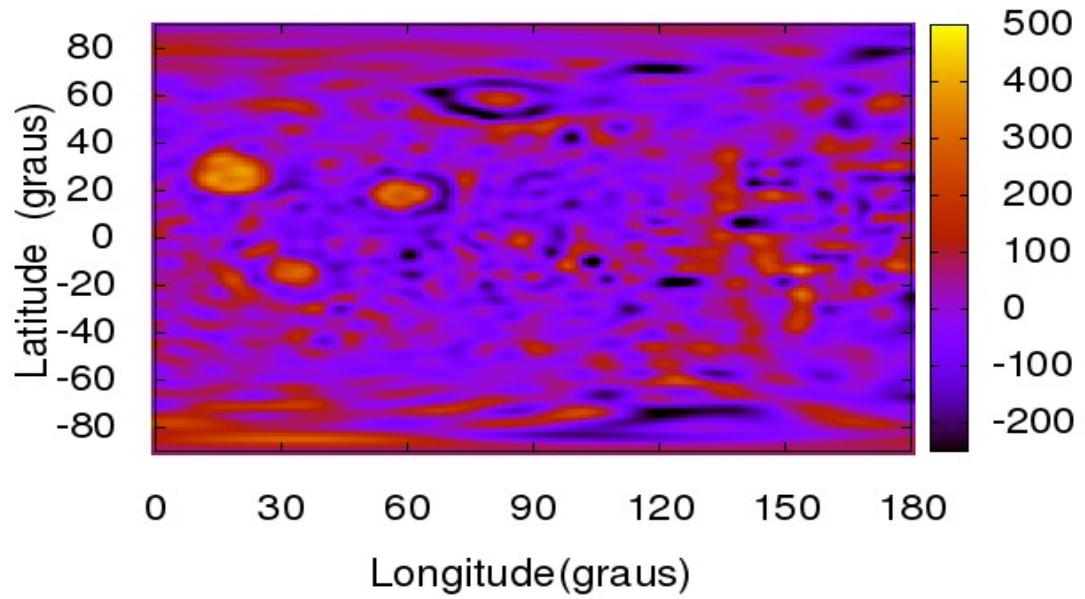
Fonte: Konopliv et al. (2001). Análise do Potencial Gravitacional Lunar. O gráfico apresenta expansão de 100 ordem e grau para face próxima (direita), e 60 para face afastada (esquerda).

Figura 3.5: Gráfico gerado com expansão de ordem e grau 50.



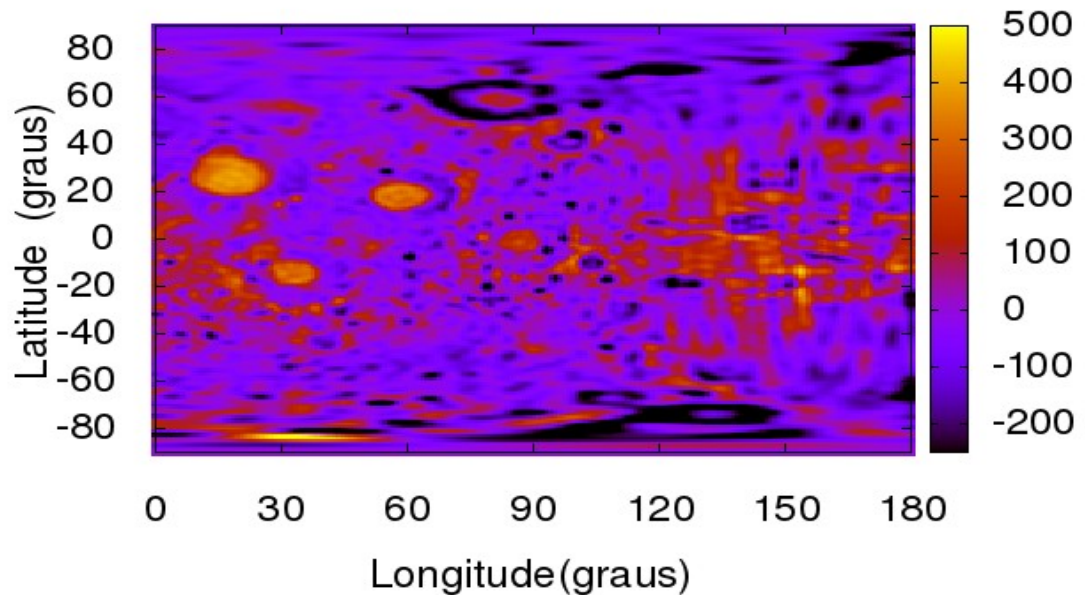
Fonte: Próprio Autor.

Figura 3.6: Ordem e Grau 50. Excluindo o termo J2



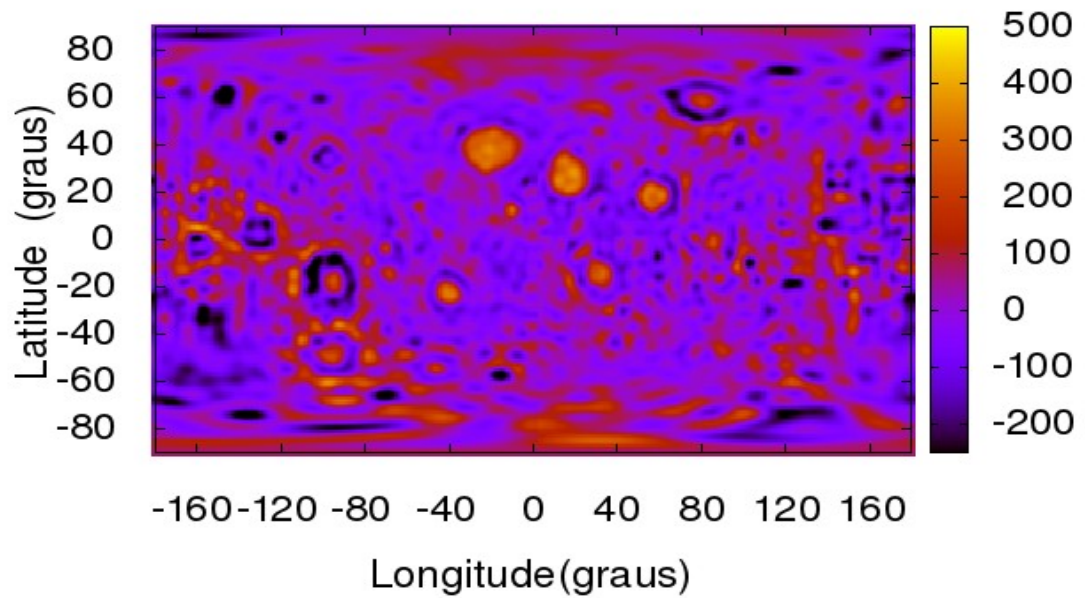
Fonte: Próprio Autor.

Figura 3.7: Expansão de Ordem e Grau 100



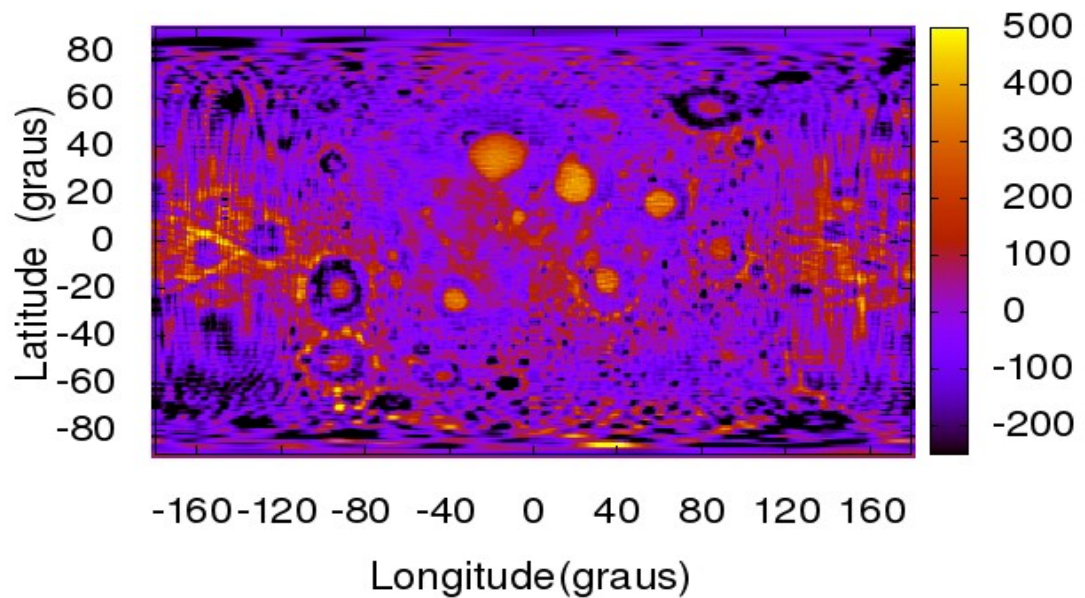
Fonte: Próprio Autor. Expansão de ordem e grau 100. Como proposto por Konopliv et al. (2001). Será o provável modelo escolhido para nossos futuros estudos.

Figura 3.8: Expansão de Ordem e Grau 50, excluído J2.



Fonte: Próprio Autor. Gráfico Completo gerado com expansão de ordem e grau 50. Excluído J2. Gráfico criado para compararmos com os estudos de Konopliv.

Figura 3.9: Potencial Completo



Fonte: Próprio Autor. Potencial Completo com expansão de ordem e grau 165, Apresenta Forte presença de Ruído.

## 3.2 ESTUDOS FUTUROS

Neste trabalho utilizamos dados fornecidos pela missão Lunar Prospector (LP), e através dos resultados gerados por Konopliv et al. (2001), pudemos comparar e validar nosso programa. Utilizamos para tanto o LP165P, com diferentes expansões para testar nosso programa (programa2). Agora, tendo o programa sido testado e gerado resultados compatíveis com os estudos de Konopliv et al. (2001), podemos partir para novos estudos utilizando dados coletados por missões mais recentes com o intuito de buscar compreender melhor o campo gravitacional lunar. Bem como, estudar e analisar os resultados já gerados por esses novos dados. As missões pós Lunar Prospector que serão estudadas são:

- SMART-1: A primeira missão lunar da Agência Espacial Europeia. Foi lançada em setembro de 2003, a sonda não tripulada chegou a órbita lunar em novembro de 2004. A missão teve seu fim em 3 de setembro de 2006.
- Kaguya (SELENE): Missão japonesa que teve seu início em setembro de 2007, entrando em órbita ao redor da Lua em menos de um mês. A missão teve fim em 10 de Junho de 2009. Durante este tempo esteve em órbita lunar, com o objetivo de compilar o mapa mais detalhado, até aquele momento, do campo gravitacional da Lua.
- Chang'e 1: A missão chinesa teve seu início quando lançou a sonda não tripulada em outubro de 2007 e orbitou a Lua até março de 2009. A China seguiu a missão com a sonda Chang'e 2, lançada em outubro de 2010 com o objetivo de viajar ao Ponto de Lagrange L1, entre a Terra e o Sol.
- Chandrayaan-1: A Índia se juntou a corrida para a exploração lunar em outubro de 2008, lançando sua sonda. A sonda permaneceu em órbita até agosto de 2009.
- Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO): Foi a primeira missão da NASA na Lua desde a era Apollo. A sonda não tripulada foi lançada em junho de 2009. Tinha entre seus objetivos o papel de mapear a superfície lunar com alta resolução 3D.
- Satélite de Detecção e Observação de Crateras Lunares (LCROSS): O Satélite de Detecção e Observação de Crateras Lunares (LCROSS, sigla para Lunar Crater Observation and Sensing Satellite) foi um satélite da NASA enviado em junho de 2009, e em outubro de 2009, a sonda não tripulada se chocou contra a superfície da Lua. Através do impacto a NASA buscava novas evidências da existência de água na Lua.
- GRAIL: A mais recente missão para Lua foi o envio das sondas gêmeas GRAIL, da NASA. Foram lançadas em 10 de setembro 2011, com o objetivo de coletar dados para um estudo completo sobre campo gravitacional lunar .

# Capítulo 4

## CONCLUSÃO

Nosso trabalho pretendia elaborar um estudo sobre o potencial gravitacional lunar. Para tanto foram necessários o estudo e elaboração de um programa que possibilitasse através de inúmeras simulações uma análise sobre potencial gravitacional em detalhes. Ao estudarmos dois programas, ambos elaborados por Dr. Hélio Kuga, observamos que o programa2 será o escolhido para futuros estudos, por apresentar uma forma mais compacta de suas fórmulas, e otimizar o tempo necessário para suas simulações.

Ao analisarmos os dois programas (programa1 e programa2), e compararmos os resultados e o tempo gasto, chegamos a conclusão que o programa2 será o escolhido para futuros estudos. O programa2 gerou resultados compatíveis com o esperado, e com uma significativa redução de tempo exigido. Agora podemos avançar sobre o assunto (potencial Lunar), e realizarmos novos estudos com confiança.

Com o programa que calcula o potencial gravitacional escolhido, adaptado e testado, podemos pensar em futuras etapas para esse programa. Uma delas seria o aperfeiçoamento e integração do programa2, com o programa que nos permitirá a realização de simulações de um satélite em órbita lunar. Voltaremos a utilizar o programa elaborado pela colaboradora Dr<sup>a</sup>. Walkiria Schulz, que inclui as equações do movimento, afim de verificar, se o problema se encontrava no cálculo do potencial ou seria em outra parte do programa. Pois agora podemos confiar em nosso programa que calcula o potencial. Substituindo o programa1, pelo programa2, pretendemos com isso, avançar em nossas pesquisas.

Com o desenvolvimento desse programa, que nos possibilitará o estudo e análise das trajetórias, tempo de vida orbital, e a evolução dos satélites lunares, poderemos avançar sobre o conhecimento sobre o Potencial Lunar. E propor novos estudos, análises, e modelos.

O estudo e desenvolvimento de novas ferramentas para o cálculo do potencial gravitacional de corpos não esféricos possibilitará sua utilização computacional, para o problema de outros corpos não esféricos. Assim o projeto encontra ampla aplicação não somente para o caso lunar, mas também para outros corpos não esféricos, possibilitando estudos para otimização de possíveis trajetórias de satélites, e o desenvolvimento de novas ferramentas para modelagem e mapeamento de corpos não esféricos com distribuição de massa não homogênea.

# Referências Bibliográficas

- [1] GUPTA, S; SHARMA, R. K. **Effect of Altitude, Right Ascension of Ascending Node and Inclination on Lifetime of Circular Lunar Orbits.** International Journal of Astronomy and Astrophysics, 2011, 1, p. 155-163.
- [2] KONOPLIV, A. S.; ASMAR, S. W.; CARRANZA, E.; SJOGREN, W. L.; YUAN, D. N. **Recent Gravity Models as a Result Of The Lunar Prospector Mission.** Icarus, vol. 150, p. 1-18, 2001.
- [3] KUGA, H.K.; RAO, K.R.; CARRARA, V. **Satélites Artificiais Movimento Orbital.** INPE. Março de 2000.
- [4] KUGA, H.K; CARRARA, V. **FORTRAN AND C-Codes For Higher Order and Degree Geopotential and Derivatives Computation** INPE
- [5] LUNDBERG, J. B.; SCHUTZ, B. E. **Recursion Formulas of Legendre Functions For Use With Nonsingular Geopotential Models.** J. Guidance, vol. 11, nº 1, p. 31-38, 1998.
- [6] MAYER, K.W; BUGLIA, J.J; DESAI, P.N. **Lifetime of Lunar Satellite Orbits,**NASA Technical Paper 3394, March 1994.
- [7] MELO, O.F; WINTER, O.C.; VIEIRA NETO, E.**Numerical Study of Low-Cost Alternative Orbits Around The Moon** Advances in Space Research, Vol. 36, No. 3, 2005, pp. 552-560
- [8] MONTENBRUCK, O; GILL, E. **Satellite Orbits: Models, Methods, and Applications.** Springer, 2000, pag 66-68.
- [9] PINES, S. **Uniform Representation of the Gravitational Potential and its Derivatives.** AIAA JOURNAL, vol. 11, nº11, p. 1508-1511. 1973.
- [10] RAMANAN, R.V.; ADIMURTHY, V. **An Analysis of near Circular Lunar Mapping Orbits** Journal of Earth System Science, Vol. 114, No. 6, 2005, pp. 619-626.
- [11] TZIRTI, S.;TSIGANIS, K.; VARVOGLIS, H.**Effect of 3rd-Degree Gravity Harmonics and Earth Perturbations on Lunar Artificial Satellite Orbits,** Astronomy, Vol. 108, No 4,2010, pp 389-404.
- [12] WANG, H. H.; LIN, L. **A study on the relationship between the Orbital Lifetime and Inclination of Low Lunar Satellites,** Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics, Vol. 5, No 6, 2005, pp. 665-670.

- [13] WINTER, O. C.; MOURÃO, D. C.; MELO, C.F.; MACAU, E.N.; FERREIRA, J. L.; CARVALHO, J. P. S. **Controlling the Eccentricity of Polar Lunar Orbits with Low-Thrust Propulsion**. Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2009, Article ID 159287, 10 pages.
- [14] ZEILE, O; LACHENMANN, M; BAUMSTARK, E; MOHR, A; BOCK, R; LAUFER, R; SNEEUW, N. ROSER, H. P. **Analyses Of Orbital Life Time and Observation Conditions Of Small Lunar Satellites**. Acta Astronautica, Vol. 66, No 3-4, 2008. pp. 516-527