

**MILENA CHARLEAUX**

**O ensino de Geometria por meio de atividades investigativas: uma experiência com  
alunos do primeiro ano do Ensino Médio**

**MILENA CHARLEAUX**

**O ensino de Geometria por meio de atividades investigativas: uma experiência com alunos do primeiro ano do Ensino Médio**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza

Guaratinguetá  
2015

Charleaux, Milena

C474e O ensino de Geometria por meio de atividades investigativas: uma experiência com alunos do primeiro ano do Ensino Médio / Milena Charleaux – Guaratinguetá, 2015.

47 f : il.

Bibliografia: f. 46-47

Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2015.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza

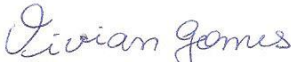
1. Geometria – Estudo e ensino 2. Matemática – Estudo e ensino  
3. Pesquisa qualitativa 4. Aprendizagem por atividades I. Título

CDU 514:371.3

**Milena Charleaux**

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO  
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE  
“GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA”

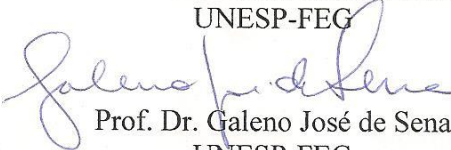
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE  
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

  
Profa. Dra. Vivian Martins Gomes  
Coordenadora

**BANCA EXAMINADORA:**

  
Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza  
Orientador/UNESP-FEG

  
Profa. Dra. Rosa Monteiro Paulo  
UNESP-FEG

  
Prof. Dr. Galeno José de Sena  
UNESP-FEG

**Dezembro de 2015**

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Antônio Carlos de Souza por todo o auxílio, ajuda e paciência (e pelos risos também). E, também, a sua esposa e filhos por todas as horas de convívio familiar entre vocês que acabei roubando enquanto era orientada neste trabalho.

Agradeço à minha mãe Sheila Maria e à minha avó Maria, por cuidarem tão bem de mim até hoje.

Agradeço à Amanda, por todo o carinho, por ter confiado em mim e me incentivado o tempo todo! Ah, e é claro por ter aguentado e me acalmado de todos os meus chilikos!

Agradeço à Viviellen, por todo suporte, amizade e broncas que me mantiveram no eixo.

E por fim agradeço a todas as pessoas que me ensinaram ao longo da minha vida, pois sem elas eu não chegaria até aqui.

*Um pouco de perfume sempre fica  
nas mãos de quem oferece flores.*

Provérbio chinês

CHARLEAUX, M. **O ensino de Geometria por meio de atividades investigativas: uma experiência com alunos do primeiro ano do Ensino Médio.** 2015. 48 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

## RESUMO

Esse trabalho de cunho qualitativo foi desenvolvido com a participação de uma turma de alunos matriculados no primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual de São Paulo, situada na cidade de Taubaté. Seu objetivo foi verificar como os alunos lidam com tarefas de Geometria em aulas investigativas. Para nortear esta pesquisa, foi elaborada a seguinte questão: *“Como os alunos do primeiro ano do Ensino Médio expressam seus conhecimentos sobre construção de triângulos e quadriláteros em atividades de aulas investigativas?”*. A opção por atividade de cunho investigativo se deu por esta potencializar a participação do aluno e assim gerar uma maior possibilidade dele não ser guiado somente pelo “o que o professor deseja”, mas sim por sua própria curiosidade e usando ferramentas próprias para isso. No processo de análise dos dados destaca-se o interesse gerado nos alunos por esse tipo de atividade e a postura que mantiveram ao longo do trabalho, mobilizando seus conhecimentos para responder às questões propostas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Educação Matemática. Triângulos. Quadriláteros. Pesquisa Qualitativa.

CHARLEAUX, M. **The teaching geometry through investigative activities: an experience with the juniors.** 2015. 48 f. Graduate work (Major in Mathematics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

### **ABSTRACT**

This qualitative nature of work was developed with the participation of a group of students enrolled in the first year of high school from a public school of the state of São Paulo, in the city of Taubaté. Their goal was to determine how students deal with geometry tasks in investigative classes. To guide this research was drawn up the following question: "As students of the first year of high school express their knowledge of building triangles and quads in classes of investigative activities?". The choice of investigative nature of this activity occurred by enhancing student participation and thus generate a greater chance of it not be guided only by "what the teacher wants," but by his own curiosity and using their own tools for this. In the data analysis process stands out the interest generated in students for this type of activity and posture maintained throughout the work, mobilizing their expertise to answer the questions posed.

**KEYWORDS:** Education Mathematics. Triangles. Quads. Qualitative research.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1– Mapa da sala no primeiro dia de atividades.....	26
Figura 2– Mapa da sala no segundo dia de atividades.....	28
Figura 3– Triângulos recortados pelos alunos V e W.....	33
Figura 4– Anotações dos alunos V e W.....	34
Figura 5– Triângulo Retângulo.....	35
Figura 6– Anotações dos alunos R e S.....	36
Figura 7– Anotações das alunas J e K.....	38
Figura 8– Construções das alunas J e K.....	41

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>09</b>
<b>2</b>	<b>ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL.....</b>	<b>11</b>
2.1	BREVE HISTÓRICO.....	11
2.2	O ENSINO DE GEOMETRIA NA VISÃO DE LORENZATO E PAVANELLO.....	14
<b>3</b>	<b>AULAS INVESTIGATIVAS: INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICA.....</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>22</b>
4.1	O QUE É PESQUISAR?.....	22
4.2	PESQUISA QUALITATIVA.....	22
4.3	OS PARTICIPANTES E A COLETA DE DADOS.....	24
4.4	AS ATIVIDADES.....	25
4.4.1	Atividade 1.....	25
4.4.2	Atividade 2.....	27
4.4.3	Atividade 3.....	29
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DA PESQUISA .....</b>	<b>31</b>
5.1	ATIVIDADE 1.....	32
5.2	ATIVIDADE 2.....	37
5.3	ATIVIDADE 3.....	39
<b>6.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>44</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>46</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Quando eu entrei na faculdade logo nos primeiros meses, ao assistir às aulas da disciplina de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva, uma paixão foi se instalando no meu peito. A Geometria além de ser uma parte importante da Matemática é uma ferramenta poderosa para compreender o mundo favorecendo, por exemplo, a abstração e a generalização das relações que percebemos em tudo que nos cerca segundo Mocrosky, Mondini e Estephan (2012).

Decidi assim que meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) seria sobre Geometria, mais especificamente sobre ensino de Geometria, pois a área da Educação sempre me agradou muito. Mas então ainda havia um mundo de coisas que poderiam ser trabalhadas e pesquisadas, era necessário um foco.

Os anos de faculdade foram passando e essa ideia continuou fixa na minha cabeça, alimentada sempre que eu percebia, em textos ou no convívio cotidiano com algumas escolas públicas da Rede Estadual de Ensino do Estado de São Paulo, como a Geometria era pouco vista nas escolas de Educação Básica devido ao seu gradual abandono nas últimas décadas (PAVANELLO, 1993) e simultaneamente quando eu via a dificuldade, não só minha, mas, também, dos meus colegas do curso de Licenciatura em Matemática quando trabalhávamos com a Geometria. E isso foi realmente me incomodando.

Perguntava-me o porquê de termos, como afirma Pavanello (1993), essa ausência da Geometria nas escolas. Eu queria saber o peso que isso poderia ter na vida dos alunos, pois para mim era claro que havia um peso enorme.

Chagado o momento de elaborar o TCC, em meio a tantas dúvidas que eu tinha sobre o ensino de Geometria, como eu poderia formular uma pergunta que me norteasse para a realização deste trabalho?

Após algumas leituras, reuniões de orientação e discussões, cheguei a seguinte questão de pesquisa: “Como alunos do primeiro ano do Ensino Médio expressam seus conhecimentos sobre construção de triângulos e quadriláteros em atividades de aulas investigativas?”, a qual contribuiu na busca do objetivo que era verificar como os alunos lidam com tarefas de Geometria em aulas investigativas.

Esse trabalho foi elaborado buscando responder a essa pergunta, mantendo sempre em vista que não só a resposta é importante no processo de resolução de uma questão investigativa, mas também todo o caminho percorrido para se chegar até ela.

Quanto à sua estrutura, o trabalho (além da introdução), está dividido em quatro capítulos e considerações finais, ao final são apresentadas as referências bibliográficas.

No primeiro capítulo, intitulado “Ensino de Geometria no Brasil” vamos abordar como a Geometria veio sendo lecionada ao longo dos anos no Brasil. No capítulo seguinte – Aulas Investigativas –, buscamos de forma sucinta embasar nossa escolha por esse tipo de atividade na presente pesquisa.

O capítulo 3 (Metodologia) apresenta o embasamento teórico sobre o significado de pesquisa qualitativa. Também é apresentada a forma como os dados foram coletados, juntamente com uma breve descrição de como foram desenvolvidas as atividades.

Já o capítulo 4 refere-se às análises dos dados coletados.

## 2 ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

### 2.1 BREVE HISTÓRICO

O ensino no Brasil se inicia enquanto ainda éramos colônia de Portugal, com a Companhia Jesuítica. Nessa época a Matemática era tida como uma ferramenta que desenvolvia certos tipos de raciocínio, necessários para entendimento da Física que era a ciência capaz de explicar o mundo (MOCROSKY; MONDINI; ESTEPHAN 2012). Na época do descobrimento do Brasil, Portugal não valorizava certas áreas da ciência como Geometria e Astronomia, considerando-as divertimentos vãos (DAINVILLE, 1978 apud VALENTE, 1999) e esse modo de pensar trouxe ao ensino brasileiro um estilo e organização de acordo com as necessidades portuguesas.

Com o aumento da população na Colônia, anos após o descobrimento do país, e com os senhores constituindo família e ansiando por se estabelecerem no Brasil, tornou-se necessário a formalização do ensino. Assim houve uma expansão das escolas jesuíticas.

Segundo Silva (1992 apud MOCROSKY; MONDINI; ESTEPHAN 2012) as primeiras escolas criadas foram em 1549 na Bahia e 1550 em São Vicente. Em 1573, com a inauguração do Colégio do Rio de Janeiro a Matemática foi incluída, pois antes só a alfabetização fazia parte do programa.

Assim sendo o ensino de Matemática no Brasil teve início com o ensino dos algarismos e das quatro operações básicas. O ensino de Matemática foi sendo morosamente instituído desde os cursos elementares até a graduação, que ocorreu somente em 1757, na Bahia, com a Matemática, enfim, ganhando *status* de faculdade.

Os conteúdos ensinados na faculdade de Matemática eram doutrinados pela Universidade de Coimbra, sempre enfatizando o que era importante para a Corte Portuguesa, não refletindo os avanços vividos pelo continente europeu na época.

Nesse período Portugal vivia sob a ameaça de Napoleão Bonaparte, imperador da França, que ameaçava invadir Portugal se este não parasse de fornecer para Inglaterra, suas matérias primas vindas da colônia brasileira. Mas era justamente o dinheiro oriundo da Inglaterra que sustentava a elite portuguesa. Então era de suma importância se proteger do exército de Napoleão. Com esse intuito os ensinamentos de guerra foram propagados e especialistas contratados para iniciar a aula de Fortificação e Arquitetura Militar. O Brasil, como não poderia deixar de ser, continuou seguindo os interesses de Portugal. De acordo com

Mocrosky, Mondini e Estephan (2012), em 1699 foi criada a aula de fortificação no Rio de Janeiro, mas não teve início nessa data por falta de material didático e instrumentos.

Segundo Valente (1999) em 19 de agosto de 1738, com a Ordem Régia, nasceu o ensino militar e todo cidadão que quisesse ser oficial do exército deveria concluir o curso e passar na aula de artilharia e fortificação.

A Geometria no ensino brasileiro veio no caminho dessa formação de defesa e ataque, tendo então a guerra como enfoque. Mas as dificuldades para o ensino ainda eram as mesmas de 1699.

José Fernandes Pinto Alpoim atuou no Brasil de 1738 a 1765, como o primeiro engenheiro militar, e com sua experiência tentou minimizar as necessidades didáticas como professor e autor dos dois primeiros livros didáticos brasileiros, intitulados Exame de Artilharia (1744) e Exame de Bombeiros (1748). Segundo Ferreira (2005) foi nas obras de Alpoim que a geometria apareceu pela primeira vez.

Seus livros foram escritos nos moldes de perguntas e respostas, no primeiro eram tratadas a Aritmética, a Geometria e a Artilharia e no segundo a Geometria e a Trigonometria. Sendo que ambas as obras abordavam o conteúdo de forma primária, ao que, segundo Mocrosky, Mondini e Estephan (2012), “nos leva a associar ao que hoje é previsto no Ensino Fundamental e Médio, respectivamente”.

O crescimento científico europeu, juntamente com a criação de cinco escolas militares na França, deixaram os portugueses apreensivos. Com a desestruturação que ocorria em Portugal, desde o século XVIII, a Coroa investiu em um exército melhor preparado para defender suas divisas e a colônia. Em 1763 com a inserção de três livros de Bêlidor<sup>1</sup>, ocorreu uma nova organização no exército lusitano.

Se na corte a situação era crítica, no Brasil era ainda mais precária. Cópias das obras de Bêlidor foram enviadas ao Brasil e em 1767, no Rio de Janeiro, a aula de fortificação deu lugar à aula de regimento e artilharia.

Em 1792, no Rio de Janeiro, foi criada a Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho. Para as aulas o livro de geometria prática de Bêlidor e aritmética de Bézout<sup>2</sup> eram utilizados, sendo que suas obras houve a preocupação de deixar claro como e onde cada teorema e proposição poderiam ser aplicados.

---

<sup>1</sup> BÉLIDOR, B. F. 1742. *Novo Curso de Mathematica, para uso dos officiaes engenheiros e d' artilharia, por Mr. Bêlidor*. Trad. Miguel Luis Jacob. Manuscrito: Biblioteca da fundação Calouste Gulbenkian de Paris.

<sup>2</sup> BÉZOUT, E. 1781. *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine*. Première Partie: *Éléments D'Arithmétique*. Paris: Ph.-D. Pierres.

Pode se dizer, segundo Mocrosky, Mondini e Estephan (2012), que em suas obras Béliador e Bézout apresentaram riqueza de detalhes em seus conteúdos, mas faltava formalidade e rigor matemáticos. Além disso, em suas obras notou-se uma dicotomia entre Geometria e Aritmética e essas disciplinas passaram a ser ensinadas em separado.

Nesse intervalo de tempo houve a invasão de Portugal por Napoleão e a fuga da família real para a colônia brasileira, gerando assim grandes alterações no ensino de Matemática.

Em 1809 a Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho foi substituída pela Academia Real Militar, e, a Academia Real dos Guarda-Marinha teve os trabalhos iniciados. Na primeira os textos de Bézout deram lugar aos de Lacroix<sup>3</sup> e Legendre<sup>4</sup>, sendo estes considerados mais consistentes na apresentação dos elementos matemáticos. Já na segunda os textos de Bézout foram ampliados.

Com os cursos superiores novas mudanças consideráveis de material didático e caracterização do ensino escolar surgiram exigindo um tratamento diferente para com a Matemática. Em 1827 com o surgimento dos vestibulares e cursos preparatórios, a Matemática passa a figurar como cultura geral nas escolas e deixa de ser um saber técnico.

Essas novidades inauguraram a produção de textos por brasileiros e na segunda metade do século XIX houve uma reformulação nessas produções, que eram releituras das obras francesas. A obra mais importante da época foi escrita por Cristiano Benedito Ottoni<sup>5</sup>.

Nesse caminho, com a evolução da Matemática europeia como pretexto, houve um movimento buscando acrescentar à obra de Ottoni exercícios e tratamento mais didático.

Na década de mil novecentos e trinta, baseado nas ideias de Félix Klein, onde a Matemática era focada na Lógica, a Aritmética, Álgebra e Geometria foram integradas e intituladas matemáticas. Com isso surge à demanda de novos livros didáticos e Euclides Roxo é um dos primeiros a atender essa necessidade, elaborando um curso e um livro didático, que passa a ser adotado em todo Brasil. Seu livro de Geometria segue a ordem: hipótese, demonstração e tese.

Segundo Mocrosky, Mondini e Estephan (2012), até por volta da década de 60, as obras brasileiras de Educação Básica eram pautadas em conteúdos seguidos de definição, teorema e corolário, num molde próximo da formalidade da Geometria Euclidiana.

---

<sup>3</sup> LACROIX, S. F. 1803. *Éléments de Géométrie a l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations*. Paris: Coucier.

<sup>4</sup> LEGENDRE, A. M. 1809. *Elementos de Geometria*. Trad. Manoel Ferreira de Araújo Guimarães. Rio de Janeiro: Imprensa Régia.

<sup>5</sup> OTTONI, C. B. 1853. *Elementos de geometria e Trigonometria Rectiliana*. 1ª edição. Rio de Janeiro: Eduardo & Henrique Laemmert.

Contudo na década de 60 o Movimento da Matemática Moderna, que teve suas ideias iniciais introduzidas desde os anos trinta, mudou as estruturas do ensino, inclusive nos cursos de formação de professores. Esse movimento tentou tornar a matemática escolar mais parecida com a matemática científica.

Segundo Pavanello (1993) a Geometria, no Movimento da Matemática Moderna, adquiriu um papel secundário, se tornando assim o início do processo de esquecimento desse conteúdo em sala de aula. Nesse primeiro momento acentuou-se nos livros didáticos “as noções de figuras geométricas e de intersecção de figuras como conjunto de pontos no plano, adotando-se, para sua representação, a linguagem da teoria dos conjuntos.” (PAVANELLO 1993, p. 13).

A Geometria aqui trabalha com a utilização dos teoremas como postulados, sem haver uma preocupação com uma sistematização partindo de noções primitivas elaboradas de modo empírico, ainda segundo Pavanello (1993).

O movimento acaba exigindo que a Geometria seja trabalhada com foco nas transformações o que aumenta ainda mais a dificuldade dos professores de abordar o tema e com a “Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Graus”, a 5692/71, que permitia que os professores montassem seus programas educacionais de acordo com a demanda local, muitos docentes acabaram por deixar de lecionar Geometria para seus alunos sobre qualquer enfoque.

Segundo Mocrosky, Mondini e Estephan (2012), com o fim da matemática moderna, inicia-se um novo modelo e essa nova fase começa a apresentar o que hoje consideramos Educação Matemática.

## 2.2 O ENSINO DE GEOMETRIA NA VISÃO DE LORENZATO E PAVANELLO

O ensino de Geometria, em comparação com outras áreas da Matemática, tem sofrido mais alterações desorganizadas, culminando em modismos radicais e apanhando alunos, professores, autores de livro didático e pesquisadores de surpresa (LORENZATO, 1995).

A Geometria está quase ou completamente ausente da sala de aula, sendo ela quase sempre relegada ao fim do ano onde não há garantias de que haverá tempo de ser lecionada para os alunos. Segundo Pavanello (1993), esse abandono gradual do ensino de Geometria vem inquietando os educadores matemáticos brasileiros “e que, embora reflita uma tendência geral, é mais evidente nas escolas públicas” (PAVANELLO, 1993 p.7).



Mas por que essa irregularidade? Segundo Lorenzato (1995) são inúmeras as razões para isso acontecer, porém duas atuam mais direta e intensamente em sala de aula. A primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos necessários para ensinar Geometria e por não a conhecer bem, esses professores não enxergam sua importância na formação do cidadão. Assim sendo, concordamos com Lorenzato (1995) ao dizer que esses professores ficam presos no dilema de “tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensina-la” (LORENZATO, 1995 p.4).

Ainda segundo Lorenzato (1995) a segunda causa é a importância exagerada que o livro didático tem na vida do professor, seja devido à sua formação docente, seja devido a jornada de trabalho exaustiva a que os professores são submetidos. Ainda segundo o autor nos livros didáticos a Geometria aparece de forma frágil, sendo reduzida a nomes, definições e a poucas fórmulas banais, completamente desligadas de contextos históricos ou lógicos. Considerando também, que a Geometria quase sempre é deixada para a parte final do livro, onde corre o risco de, por falta de tempo, não ser estudada pelos alunos.

Lorenzato (1995) argumenta ainda que há outras razões para esse descuido com a Geometria, que mesmo distantes de sala de aula, podem ser considerados o currículo de formação dos professores, onde a Geometria tem delicada posição. Os programas e guias curriculares que em geral deixam a Geometria como um complemento e totalmente separada de Álgebra e Aritmética.

Há também a contribuição do Movimento da Matemática Moderna onde foi proposta a algebrização da Geometria. Antes desse movimento o ensino de Geometria no Brasil era “marcadamente lógico-dedutivo com demonstrações e os alunos o detestavam” (LORENZATO, 1995 p.4). Já com o surgimento da Matemática Moderna, segundo Pavanello (1993), a abordagem da Geometria mudou, optando-se num primeiro momento por intensificar nos livros...

...“as noções de figuras geométricas e de intersecção de figuras como conjunto de pontos do plano, adotando-se, para sua representação a linguagem da teoria dos conjuntos. [...] Não existe qualquer preocupação com a construção de uma sistematização a partir das noções primitivas e empiricamente elaboradas.” (Pavanello, 1993, p. 13).

Desse modo, se o ensino de Geometria, mesmo com a abordagem utilizada antes do Movimento da Matemática Moderna, já enfrentava problemas com o conhecimento dos professores e com os métodos empregados, esses problemas se tornaram ainda maiores com as proposições do programa da Matemática Moderna, onde “a Geometria é desenvolvida sob o enfoque das transformações” (PAVANELLO, 1993, p. 13).

De acordo com Lorenzato (1995), a algebrização da Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, gerando assim um vazio nas práticas pedagógicas que dura até hoje.

No próximo capítulo iremos abordar o que são investigações matemáticas e qual a importância de trabalharmos com nossos alunos as atividades investigativas em sala de aula. Discutiremos também como podemos conduzir uma aula com atividades de cunho investigativo e a postura que o professor deve abordar.

### 3 AULAS INVESTIGATIVAS: INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICA

Investigar pode ter um significado muito parecido com pesquisar e inquirir, ou seja, buscar saber aquilo que ainda não se conhece. De acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2009) os matemáticos profissionais empenham-se em descobrir as relações entre os objetos matemáticos, quer sejam conhecidos ou não, buscando identificar suas propriedades.

De modo semelhante, segundo Paulo e Silva (2011) quando os professores adotam em sala de aula uma postura investigativa eles objetivam levar seus alunos a fazerem descobertas que por vezes “se revelam tão ou mais importantes do que encontrar a solução para o problema proposto” (PAULO e SILVA, 2011 p.2).

Braumann (2002 apud PONTE; BROCADO; OLIVEIRA 2009 p.19) nos diz que “aprender Matemática sem forte intervenção de sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem.”. Dessa forma, podemos perceber como tarefas de investigação matemática são importantes para os alunos.

As características das atividades investigativas, que requerem a participação ativa dos alunos, tendem, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009) a favorecer o envolvimento dos estudantes e esse envolvimento ativo é primordial para a aprendizagem.

Assumindo-se, então, que a Investigação Matemática é um tipo de atividade que deve ser experimentada por todos os alunos, fica a pergunta – elaborada por Ponte, Brocado e Oliveira (2009) –, como será realizada uma aula com investigação matemática? Os mesmos autores apresentam a resposta de que numa aula de investigação matemática podemos programar como a aula começará, mas nunca como acabará, já que são vários caminhos que os alunos seguem, com todas as turbulências e calmarias.

Normalmente uma atividade de investigação matemática se desenvolve em três etapas:

- I – Introdução da tarefa.
- II – Realização da investigação.
- III – Discussão dos resultados.

Há também que se falar sobre o papel do professor numa aula assim, pois diferentemente do que muitos pensam, o professor continua sendo o elemento chave, “cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo” (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA; 2009, p.26).

O professor tem que garantir o entendimento da tarefa por parte de todos os alunos, mas não deve explicar demasiadamente o que deve ser feito para evitar condicionar seus alunos.

É de suma importância, também, que os alunos sintam-se a vontade para exprimir suas ideias e sintam que as mesmas são valorizadas, não sendo necessário que o professor as fique validando. É necessário que os alunos saibam que tudo que fizerem, será compartilhado com os colegas, para que isso sirva de estímulo e valorização pessoal.

Para o desenvolvimento da aula investigativa, tendo a tarefa sido compreendida pelos alunos o professor terá um papel mais distante dos “holofotes” buscando ficar nos bastidores da atividade, mas deixando claro que ele está ali para dar suporte, em outras palavras cabendo-lhe “procurar compreender como o trabalho dos alunos se vai processando e prestar o apoio que for sendo necessário” (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA; 2009, p. 29).

Espera-se que os alunos sejam capazes de usar de forma consistente (ou o mais consistente possível) processos que caracterizam a investigação matemática (IM), tais como gerar questões, formular conjecturas, teste e reformulação das conjecturas e justificativas das conjecturas.

Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009) as situações de trabalho em grupo podem potencializar o surgimento de alternativas para as explorações. Muitas vezes os alunos serão levados a começar gerando mais dados e subsequentemente a organizá-los e depois passam a formular questões. Às vezes conjecturas surgem nesse ponto.

As conjecturas podem surgir de diferentes modos, como pela manipulação dos dados ou por analogias com outras conjecturas. Para Ponte, Brocado e Oliveira (2009) o teste de conjecturas é um tópico da atividade investigativa que os alunos tendem a compreender facilmente. Contudo os estudantes tendem a aceitar as conjecturas fazendo pouquíssimos testes.

O professor precisa estar atento ao processo de teste e formulação de conjecturas, para garantir que os alunos evoluirão nas investigações, cabendo ao professor gerar questões e estimular os alunos a olharem de outras formas e a refletirem sobre o que estão fazendo naquele momento.

Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2009) é comum que os alunos tomem suas conjecturas por conclusões, sem, contudo, terem passado por um processo de justificativa. A justificativa é uma das vertentes da investigação matemática que tende a ser deixada num plano secundário ou até ser esquecida por completo. Entretanto é substancial que o professor ajude os alunos a compreender que suas conjecturas são provisórias, que os testes por si só

não conferem o *status* de conclusão para seus resultados e a ideia de prova matemática pode ser introduzida gradativamente.

Dessa maneira, em conformidade com Ponte, Brocado e Oliveira (2009) ao fim das investigações a discussão do trabalho realizado pelo aluno ou grupo de alunos é importante para a partilha dos conhecimentos. Os alunos, mediados pelo professor, podem confrontar suas conjecturas e justificativas. É nessa fase que é realizada a sistematização das ideias principais e uma reflexão sobre o trabalho feita. É também um bom momento para mostrar para os alunos a importância da justificação matemática.

Esta fase é fundamental para que os alunos entendam o que é investigar e para se tornarem capazes (gradativamente) de se comunicar matematicamente, refletir sobre seu trabalho e seu poder argumentativo. Nesta fase será feito um balanço do trabalho realizado. Os alunos colocarão em confronto suas ideias e se questionarão mutuamente, cabendo ao professor ser o moderador e garantir que sejam ditos os processos, mais significativos da investigação feita. Para Ponte, Brocado e Oliveira (2009) pode se afirmar que sem a discussão final corre-se o risco de perder o sentido da investigação feita.

Além disso, o professor tem um papel decisivo nas aulas de investigação, mas é bem diferente do que acontece nas aulas usuais, como denominam os autores, o que o leva a deparar com situações difíceis e dilemas. O docente deve buscar o equilíbrio entre dar autonomia necessária para não comprometer a autoria dos alunos na investigação e garantir que o trabalho flua e seja significativo do ponto de vista matemático.

Sem perder esta dupla meta de vista, o professor deve: “desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles (alunos)” (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA; 2009, p.47), sendo fundamental garantir que os alunos se sintam motivados, criando um ambiente adequado ao trabalho investigativo. Mas o professor não pode esquecer-se de dar atenção especial à própria tarefa, escolhendo questões, situações iniciais que se tornem, potencialmente, um desafio para os alunos.

Deve combater a tendência dos alunos de serem mais afirmativos que interrogativos demonstrando que é “possível interrogar matematicamente as situações e formular boas questões”. (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA; 2009, p.48). O professor também deve estar atento às coisas que os alunos fazem e motivá-los para que eles não parem na primeira dificuldade.

Quanto à avaliação do progresso dos alunos, Ponte, Brocado e Oliveira (2009) afirmam que é necessário recolher, desde o início da investigação, informações de como vai se encadeando o trabalho dos alunos. Ter certeza se os alunos compreenderam bem o que é

para ser feito e ficar atento para que eles não busquem uma “simples” resposta como se fosse um exercício rotineiro.

O professor deve compreender o pensamento dos alunos e perceber onde eles querem chegar. Mas, como frequentemente os alunos fazem anotações desorganizadas, ele deve fazer boas perguntas e com paciência e esforço compreender os alunos, evitando corrigir cada uma das afirmações dos alunos onde haja alguma falha de conceito matemático.

A partir do avanço de cada aluno ou grupo de alunos será mais fácil para o professor adotar uma estratégia de interação com os alunos mais adequada a aquela situação como, por exemplo, “conceder mais tempo à realização da investigação, fazer uma pequena discussão intermediária com toda turma ou, até mesmo, passar à discussão final.” (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA; 2009, p. 49).

O docente deve ter uma propensão a manifestar seu raciocínio abertamente com os alunos, pois desse modo os alunos podem aprender mais sobre o processo de investigar e como se abordar um teste de conjecturas.

Ainda de acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2009) se as fases de formulação e teste de conjecturas não criaram grandes problemas para o professor, a fase de justificativa dessas conjecturas pode se mostrar realmente desafiadora. Mesmo em níveis mais elementares de ensino, os alunos podem formular conjecturas que apresentam um processo de prova muito difícil, mesmo para o professor. É nesse ponto que se deve analisar se o melhor para o desenvolvimento da atividade é parar para pensar ou deixar para um momento futuro.

Dessa forma, é importante se pensar no apoio aos alunos na realização de seus trabalhos. Alguns dos papéis do professor em atividades investigativas estão diretamente atrelados ao apoio que ele deve fornecer aos alunos visando garantir que todos os objetivos da atividade serão atingidos. No decorrer das investigações o professor deve manter o equilíbrio da participação dos alunos, incidindo sobre “duas áreas principais: a exploração matemática da tarefa proposta e a gestão da situação didática.” (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2009, p. 51).

Na condução da atividade o professor deve permanecer atento aos aspectos característicos do processo de investigação. Seu apoio deve assumir algumas formas como: “colocar questões mais ou menos diretas, fornecer ou recordar informação relevante, fazer síntese e promover a reflexão dos alunos” (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2009, p. 52).

De acordo com os autores, o professor deve assumir uma postura interrogativa e suas questões podem assumir vários objetivos, como por exemplo, clarear suas ideias ou as da turma inteira.

Quando os alunos se depararem com dúvidas e/ou impasses e não sabem como continuar a tarefa, cabe ao professor fazer perguntas abertas, evitando assim dizer-lhes o próximo passo que devem dar. Quando os alunos colocarem uma questão, o mais adequado é devolvê-la levando os estudantes a pensar melhor sobre seus questionamentos.

Uma das vantagens desta postura investigativa por parte do professor é ajudar os alunos a perceberem que ele está ali para apoiá-los e não só para avaliá-los. Portanto para Ponte, Brocado e Oliveira (2009) as perguntas do tipo “é isso que o professor quer?” devem se tornar cada vez menos frequentes conforme os alunos percebem qual é seu papel e qual é o do professor em aulas investigativas.

Outro ponto importante no papel do professor ao apoiar seus alunos é promover a reflexão deles sobre seu trabalho, ajudá-los a sintetizar a atividade, descrevendo seu processo. Neste ponto é crucial que o professor questione se os alunos compreenderam que aquilo que se pretende com a atividade não é que eles afirmem ter entendido, mas que reflitam sobre o processo investigativo para que assim possam aprender com ele.

No próximo capítulo abordamos a metodologia de pesquisa que foi utilizada nesse trabalho.

## 4 METODOLOGIA

### 4.1 O QUE É PESQUISAR?

Podemos definir, segundo Gil (2007 apud: GERHARD e SOUZA, 2009), pesquisa como sendo:

(...) procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa desenvolve-se por um processo constituído de várias fases, desde a formulação do problema até a apresentação e discussão dos resultados. (GIL 2007 apud GERHARD e SOUZA, 2009, p. 12)

Assim sendo só iniciamos uma pesquisa se existe uma inquietação, uma pergunta para a qual se deseja muito obter uma resposta. Quando pesquisamos, vasculhamos territórios que podem já ter sido muito explorados, mas quando damos a esse território o nosso olhar crítico permeamos por um novo leque de possibilidades que se abre e nele podemos achar novos significados e as respostas para as nossas perguntas.

Para Bicudo (2011) é possível entender o “pesquisar” como perquirir, ou seja, perscrutar, examinar com minúcia, afínco e rigor em busca da compreensão de algo que nos inquieta e causa perplexidade.

Portanto fica claro aqui que a pesquisa tem duas partes, sendo a primeira o questionamento, a inquietação, que é o passo fundamental, pois é esse incomodo que gera a busca minuciosa de respostas. Já a segunda parte é a busca em si.

É nesse ponto, da perquisição, que entra o método, a metodologia de pesquisa, onde é necessário ter planejamento. Para pesquisar temos que elaborar os procedimentos a serem seguidos, como a escolha do tema, a definição do problema norteador e a definição inicial dos objetivos, a construção de hipóteses e a metodologia a ser seguida (GERHARD e SOUZA, 2009).

Nesse trabalho a metodologia escolhida foi a Pesquisa Qualitativa a seguir explicaremos o que é uma Pesquisa Qualitativa.

### 4.2 PESQUISA QUALITATIVA

Segundo disse o Professor George Brown<sup>6</sup> (NATIONAL HE STEM PROGRAMME, 2012), durante uma sessão liderada por ele em um *workshop*<sup>7</sup>, a pesquisa

---

<sup>6</sup> George Brown é PhD em Psicologia. Lecionou na Universidade de Nottingham por 34 anos (1975-2009) onde trabalhava com pesquisas na área da educação. Após sua aposentadoria tem prestado consultorias e workshops sobre investigação pedagógica.



qualitativa nos dá primeiramente palavras como resposta e então dessas palavras se extrai uma interpretação, um significado pessoal.

Quando se faz uma pesquisa qualitativa os resultados obtidos por ela irão variar de pesquisador para pesquisador, por mais que a mesma pesquisa seja feita com o mesmo grupo e com a mesma pergunta norteadora, dois pesquisadores diferentes obterão resultados diferentes, pois na análise dos dados as experiências de vida e os conhecimentos acumulados pelo pesquisador irão interferir na sua avaliação dos dados obtidos.

Esse tipo de pesquisa se preocupa em saber o *como* um determinado evento acontece, como por exemplo: como uma criança aprende a diferenciar um quadrado de um triângulo. A pesquisa qualitativa visa sempre o aprofundamento nessas questões procedimentais de como e porque as coisas acontecem de um determinado modo. Mas a pesquisa qualitativa não quantifica esses dados nem os submetem a provas, pois esses valores não são numeráveis.

A pesquisa qualitativa portanto se preocupa, segundo Minayo (2001 apud GERHARD e SOUZA, 2009), com particularidades da realidade que não podem ser quantificados, pois esses dados convergem para o esclarecimento e explicação da dinâmica das relações. Esse tipo de pesquisa labora com o universo de valores, atitudes e significados que conduzem a um ponto mais profundo das relações, processos e fenômenos, não podendo assim ser resumido a operacionalizações de variáveis.

O desenvolvimento da pesquisa qualitativa é imprevisível, por isso as questões podem ser reformuladas no caminho e assim o ponto aonde se pode e pretende chegar pode ser alterado.

As características de uma pesquisa qualitativa são, segundo Bogdan e Biklen (1994 apud ARAÚJO e BORBA, 2006):

- O ambiente natural é a fonte de dados e o pesquisador é o principal instrumento.
- Possui caráter descritivo.
- O interesse está mais no processo do que no resultado final ou produtos.
- A análise dos dados, geralmente, é feita de forma indutiva.
- O significado tem vital importância.

Esta pesquisa possui características de um estudo de caso, pois, de acordo com Godoy (1995, apud NEVES, 1996), em um estudo de caso é feita uma profunda análise da unidade de estudo, visando à observação detalhada do ambiente, de um sujeito ou de uma situação particular. Já Yin (1994), diz que essa modalidade se adequa a investigação em

---

<sup>7</sup> Esse workshop sobre prática acadêmica e pesquisa pedagógica em ciências (7 e 8 de junho 2012) foi uma parceria entre o National HE STEM Programme e Royal Society of Chemistry.

educação quando o investigador está em busca de respostas para “*como?*” e “*por quê?*”, dedicado a eventos de baixa possibilidade de controle ou quando o fenômeno só faz sentido dentro de um contexto determinado.

#### 4.3 OS PARTICIPANTES E A COLETA DE DADOS

A escola foi escolhida, especificamente, devido ao fato de a pesquisadora estar, à época, realizando ali seu estágio supervisionado do Ensino Médio. É uma escola pública estadual situada na cidade de Taubaté, no interior do estado de São Paulo, com apenas sete salas de aula e que atende a bairros periféricos da cidade.

Foi necessário pedir autorização a direção da escola para a realização da pesquisa, mas tudo ocorreu de forma tranquila em uma conversa entre a pesquisadora e a diretora da escola. Ficou acordado, também, com a professora da turma, que as aulas de regência do estágio supervisionado seriam propícias para a realização das atividades investigativas com os alunos.

A pesquisadora participava das aulas de quatro turmas distintas de primeiro ano devido ao estágio supervisionado e por isso conhecia os alunos e algumas de suas dificuldades com a Matemática.

Optou-se por realizar as atividades em uma única turma de primeiro ano. A escolha se deu pelo fato desta ser a única classe que apresentava aulas duplas da disciplina de Matemática nos dias em que a pesquisadora podia estar na escola.

A preferência por realizar as atividades em aula dupla veio da necessidade de tempo que, por vezes, uma atividade investigativa pode demandar, de acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2009) citado anteriormente no capítulo “Aulas Investigativas”, onde é mencionada que dependendo do decorrer da atividade é necessário que o professor ofereça mais tempo aos alunos para que possam realizar as investigações.

Além do que já foi dito sobre a turma que participou da atividade, cabe dizer que esta é bem heterogênea e seus alunos são oriundos de diferentes escolas. A turma apresentava, por exemplo, um aluno que em uma determinada aula, acompanhada pela pesquisadora no estágio de observação, demonstrou dificuldades com o conceito de fração, não reconhecendo que a representação simbólica um sobre dois representa a ideia de meio, assim como duas alunas com mais desenvoltura nas aulas e com certa disposição a ajudar seus colegas na realização das tarefas.

Já em relação à coleta dos dados, a pesquisadora recolheu ao final de cada atividade uma folha onde os alunos anotaram suas ideias e conjecturas durante o processo de investigação. Somado a isso a investigadora transitava entre os grupos conversando com os alunos e fazendo breves anotações dos pontos que eles levantavam. Também foram feitas gravações em áudios dessas conversas.

Ao final de cada atividade, além da folha com as observações dos alunos, a pesquisadora também recolhia o material que eles usaram para fazer suas investigações.

#### 4.4 AS ATIVIDADES

Ficou acordado com a professora da turma que as atividades seriam desenvolvidas em três dias distintos, sempre em aulas duplas. Para cada atividade foi dado um nome diferente. A primeira atividade recebeu o nome de *Triângulos*, a segunda ficou com o nome de *Quadriláteros* e, por fim, a terceira foi chamada de *Pontos*.

No primeiro dia em que seria desenvolvida a atividade com os alunos, antes de dar início ao que deveria ser feito a pesquisadora explicou para a classe que como estagiária de Matemática deveria ministrar algumas aulas e assim cumprir o estágio de regência. Esclareceu também, aos estudantes, que estava concluindo sua graduação em Licenciatura em Matemática e que para tanto ela deveria realizar um trabalho de conclusão de curso (TCC). Por fim disse aos alunos que, em comum acordo com a professora e a diretora da escola, considerou que seria propício aplicar as atividades do TCC nas aulas de regência daquela turma.

Apresentamos a seguir, de forma breve, as atividades como foram apresentadas aos alunos.

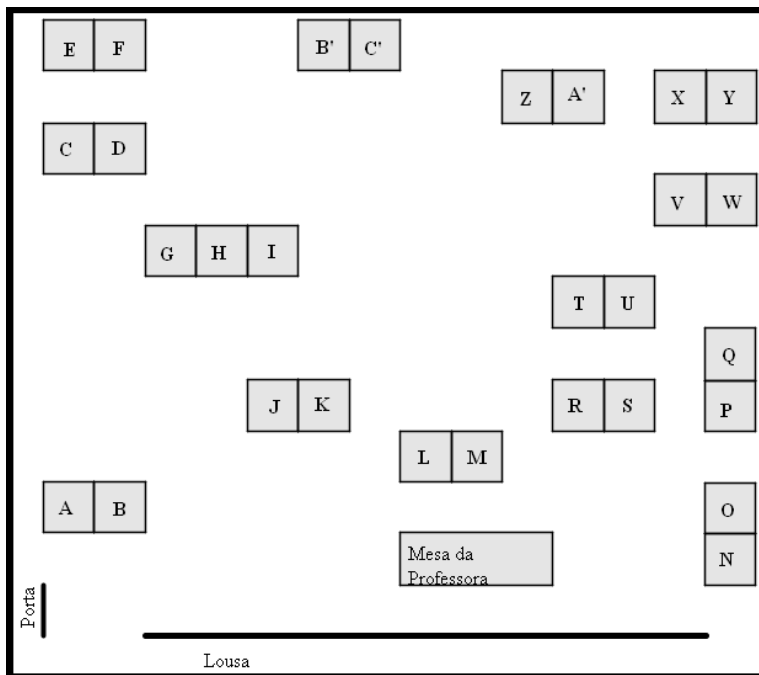
##### 4.4.1 Atividade 1

Para a realização da atividade 1, Triângulos, foi solicitado que os alunos se dividissem em duplas de acordo com as próprias afinidades para que eles pudessem se sentir mais a vontade ao longo do processo. Como no dia em que essa primeira atividade foi aplicada havia 29 alunos presentes, houve a necessidade de se formar um trio, desse modo a classe ficou dividida entre 13 duplas e um trio.

De modo natural esses grupos de alunos se espalharam pela sala formando pequenos nichos e como a pesquisadora tem dificuldade em guardar o nome dos alunos e que de todo modo não se poderia usar seus nomes sem autorização, optou-se em usar a distribuição dos alunos na sala para fazer um mapa e atribuir a cada um deles uma letra.

Vale constar que por haver um número maior de alunos do que letras no alfabeto atribuímos um apóstrofo as letras repetidas. Para facilitar a visualização do leitor, desenvolvemos um mapa da sala que será apresentado a seguir na Figura 1.

**Figura 1:** Mapa da sala no primeiro dia de atividades.



Fonte: Desenvolvido pela pesquisadora.

Para cada grupo de alunos foi entregue uma folha contendo a atividade que deveria executar, juntamente com algumas folhas de papel para que eles pudessem recortar, uma folha pautada para suas anotações e uma tesoura por dupla. A atividade, tal qual foi entregue aos alunos apresenta-se a seguir.

### *Triângulos*

- Recortar um triângulo qualquer usando apenas dois cortes na folha.
- Repetir esse processo até esgotar todas as possibilidades de triângulos a serem feitos.
- Classificar e organizar os triângulos.
- Anotar, ao longo do processo, suas hipóteses e depois suas conclusões.

Foi realizada uma leitura inicial com os alunos sobre a atividade solicitada, buscando deixar o entendimento claro, mas tomando o cuidado para não interferir demais em suas interpretações e assim tirar o caráter investigativo proposto.

Nesse momento inicial da aula a pesquisadora também explicou para os alunos que ao fim de suas investigações ela iria abrir uma discussão geral para a sala toda, onde eles poderiam compartilhar com os colegas as suas conjecturas e como eles procederam em suas investigações.

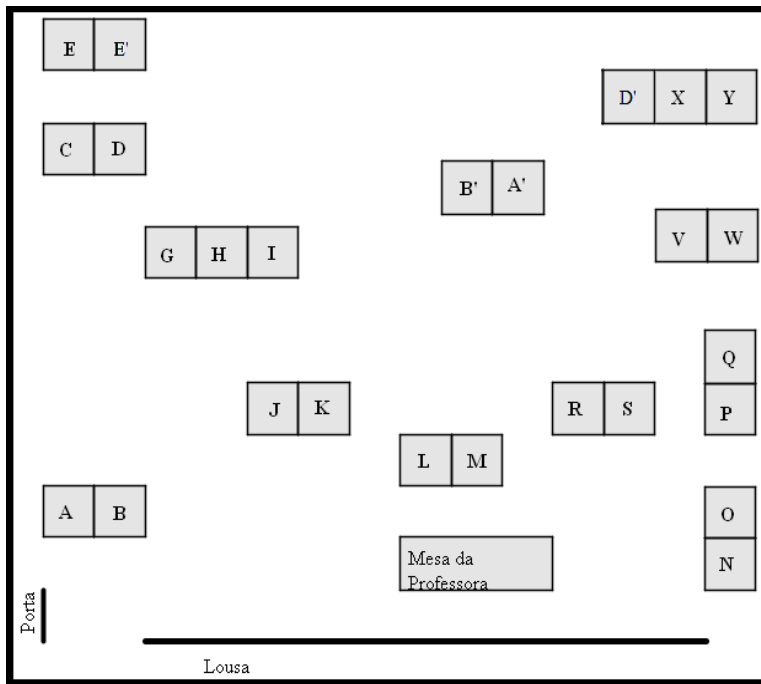
Para a realização dessa tarefa nós dispúnhamos de duas horas aula (100 minutos), nas quais foi possível realizar tudo que se pretendia.

Ao início da aula os alunos titubearam um pouco na forma de como proceder com a atividade, pois não estavam acostumados com aulas de IM, contudo com o passar do tempo por meio de sua própria curiosidade e com o incentivo da pesquisadora os alunos começaram a se soltar, recortar seus triângulos e discutir entre si. E foi nessa atmosfera que a aula transcorreu quase por inteiro.

#### **4.4.2 Atividade 2**

A turma, nesse dia com 26 alunos, foi organizada novamente em duplas, buscando manter a mesma formação da atividade anterior, porém houveram algumas alterações devido a alunos que não estavam presentes no dia da primeira atividade e alunos que estavam presentes no primeiro dia, mas não estavam presentes no segundo dia de atividades. Outra coisa que ressaltamos aqui é que devido a desentendimentos entre alguns alunos foi necessário permitir a formação de um segundo trio, mantendo o anterior e criando outro, como mostra a Figura 2 a seguir.

**Figura 2:** Mapa da sala no segundo dia de atividades



Fonte: Desenvolvido pela pesquisadora.

Ainda sobre a configuração da turma nessa atividade, para facilitar o entendimento, descrevemos aqui as alterações feitas. A dupla T e U faltou, assim como os alunos F, C' e Z. Os alunos D' e E' faltaram no primeiro dia, mas fizeram a atividade no segundo. De tal modo que os alunos A' e B' se juntaram, o aluno D' se uniu com uma dupla já existente, X e Y, e por fim, o aluno E' se uniu a aluna E que havia ficado sem colega de dupla.

A ideia inicial da pesquisadora para a duração dessa atividade era, novamente, 100 minutos, mas não foi possível, pois uma semana antes da realização da atividade, a professora da turma solicitou à pesquisadora que reduzisse o tempo, devido a atrasos do conteúdo. Alegando que feriados e imprevistos impossibilitaram que o conteúdo da disciplina fosse dado na íntegra até a data previamente combinada.

Devido a redução no tempo previsto para a realização da segunda e da terceira atividade, elas acabaram sendo realizadas juntas em uma aula dupla (100 min) e não em duas aulas duplas (200 min) como havia sido planejado anteriormente. Dessa forma algumas alterações tiveram que ser feitas.

A atividade 2 – Quadriláteros – não sofreu alterações, pois como na parte dos recortes ela era praticamente igual a anterior considerou-se que os alunos não apresentariam dificuldades em realizá-la num tempo reduzido. Segue a descrição da atividade.

### *Quadriláteros*

- Dobrar a folha ao meio e recortar triângulos usando a dobra do papel como um dos lados do triângulo.
- Repetir esse processo até esgotar as possibilidades.
- Abrir as figuras e agrupar de acordo com seus critérios.

Responder:

- a) Qual nome você daria a essas figuras? Como foram agrupadas? Por que foi escolhido esse critério?
- b) Existem outras formas de agrupar essas formas geométricas?
- c) Essas figuras têm características comuns? Quais seriam?

Juntamente com a folha contendo a atividade que era para ser realizada foi entregue aos alunos papéis para que pudessem recortar, uma tesoura por dupla e uma folha pautada para que pudessem fazer suas anotações.

Os alunos pareceram empolgados com a perspectiva de mais uma atividade investigativa, contudo após a pesquisadora fazer a leitura inicial, os estudantes reagiram afirmando que a atividade era exatamente igual a anterior. A pesquisadora teve que ressaltar para os alunos que deveriam observar a atividade mais atentamente, pois não era exatamente igual, tinha um passo diferente antes de recortar os triângulos e isso poderia fazer diferença.

Logo após esse estranhamento inicial, os alunos começaram a fazer as atividades, tentando perceber a diferença que aquela dobra poderia fazer. A falta de tempo para essa atividade gerou certa ansiedade tanto nos alunos como na pesquisadora, mas a aula ocorreu bem dentro do tempo possível.

#### **4.4.3 Atividade 3**

Como os alunos já estavam divididos e acomodados em seus lugares, então a pesquisadora entregou para eles uma folha com a Atividade 3 e mais folhas onde eles poderiam fazer o que lhes era solicitado.

Considerando a redução do tempo, mencionada anteriormente, a pesquisadora considerou que seria necessário diminuir a atividade 3 (Pontos), adequando-se assim a essa redução de tempo. A ideia inicial era de solicitar que os alunos investigassem as combinações

para ligar três pontos, depois quatro pontos e por fim cinco pontos. Contudo, as combinações para ligar cinco pontos não foram realizadas.

Ao final dessa reestruturação, os passos da Atividade 3 foram apresentados para os alunos tal qual segue logo abaixo:

#### *Pontos*

- Fazer três pontos, não colineares, na folha.
- Responder as duas perguntas abaixo:
  - a) De quantas formas diferentes estes pontos podem ser ligados?
  - b) Se mudarmos os pontos de posição fará diferença na forma que podemos ligá-los?
- Repetir o processo, acima descrito, aumentando o número de pontos para quatro. O que você consegue descobrir?
- Responder as questões abaixo:
  - a) De quantas formas diferentes estes pontos podem ser ligados?
  - b) Se mudarmos os pontos de posição fará diferença na forma que eles poderão ser ligados?

Foi feita uma leitura inicial da atividade com os alunos e uma dificuldade que já era prevista pela pesquisadora aconteceu, os alunos não sabiam o significado da palavra colinear. Deste modo a pesquisadora pegou um giz e foi ao quadro para discutir com os alunos o que eram pontos não colineares. Finda essa discussão inicial os alunos se puseram a fazer o que lhes foi solicitado, ainda esbarrando, a princípio, com a falta de familiaridade com o conceito de pontos não colineares, mas, com o decorrer da aula, isso passou e eles puderam fazer suas investigações tranquilamente.

No capítulo a seguir abordamos a análise da pesquisa realizada com os alunos, trazendo também como que ocorreram as atividades em sala de aula.



## 5 A ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA

No capítulo 2 – Aulas Investigativas –, quando falávamos sobre a opção em realizar as atividades utilizando o tempo de duas aulas seguidas (100 minutos), nos baseamos em Ponte, Brocado e Oliveira (2009), quando dizem que numa aula investigativa é importante que se tenha tempo, pois às vezes, é necessário prolongar a aula para que os alunos possam concluir suas investigações.

Haja vista que no primeiro dia de atividade, quando dispúnhamos das duas aulas foi tranquilo trabalhar com os alunos e a maioria parecia interessada, sendo possível ver que em seus semblantes transparecia uma grande satisfação ao discutir com seus colegas as suas ideias.

Infelizmente, com a necessidade de redução no tempo (pela metade) nas demais atividades, o segundo encontro não ocorreu de forma tão tranquila para a pesquisadora e alguns alunos mostravam ansiedade em “terminar” de fazer o que lhes havia sido solicitado. Tal ansiedade se apresenta como um possível indício, do que observamos durante as atividades de estágio, de um hábito em se preocupar muito com “o que o professor quer”, pois seu foco se encontra na nota que irão receber e não no conhecimento a ser construído.

Neste caso, entendemos que a falta de tempo atrapalhou e quase impossibilitou que uma das características de uma aula com atividades de IM envolvesse os alunos fazendo-os, que era perceber que o professor está ali para lhes dar apoio e não apenas para avaliá-los, (PONTE, BROCADO e OLIVEIRA, 2009).

Sobre termos optado por solicitar que os alunos trabalhassem em duplas ou em trios, nós também nos respaldamos em de Ponte, Brocado e Oliveira (2009), onde é dito que o trabalho em grupo pode potencializar as explorações dos alunos e, de fato, a pesquisadora pode perceber isso ao longo das atividades. Como poderá ser observado na discussão dos alunos V e W, sobre a existência de três ou mais tipos de triângulos. Se o aluno W estivesse sozinho ele não teria continuado as explorações para além dos três triângulos que ele cita.

Consideramos que seria importante analisar, além das falas, as produções dos alunos. Entretanto, optamos neste trabalho por analisar as produções de duas duplas.

Para a escolha, primeiramente foi feita a leitura das catorze produções. Em seguida foram excluídas cinco, pois não estavam legíveis. A etapa seguinte foi verificar quais registros apresentavam semelhanças de ideias, considerando dentre eles apenas um. Também foi considerado o que escreveram os alunos que haviam se manifestado nas discussões gerais. Com isso, chegamos às produções a serem analisadas.

Outra parte muito importante numa aula de IM é a discussão geral com a turma. Consideramos aqui que essa etapa foi prejudicada nos dois dias de atividade com os alunos, pois no primeiro dia houve uma briga e no segundo a falta de tempo era preocupante. Contudo, essa etapa não foi esquecida em nenhum dos casos.

A seguir, discutiremos com mais detalhes cada uma das três atividades.

## 5.1 ATIVIDADE 1

No começo da aula os alunos, por não estarem acostumados com atividades de cunho investigativo, ficaram um pouco receosos de fazer o que lhes era pedido, sempre perguntando para a pesquisadora o que exatamente eles deveriam fazer. Essa postura dos alunos era esperada pela pesquisadora que apenas os incentivou a seguir a sua própria curiosidade. Dado o incentivo e a própria curiosidade humana por coisas as quais não estamos habituados, os estudantes foram, aos poucos, se soltando e começaram a recortar os triângulos e a conversar entre si buscando fazer a atividade.

Num dado momento da atividade os alunos de uma dupla começaram a falar um pouco mais alto que os demais, diante disso, a pesquisadora resolveu se aproximar para ouvi-los melhor, aqui vamos chamar um de V e o outro de W. A conversa que está transcrita abaixo foi obtida com as anotações do diário de campo da pesquisadora e das gravações de áudio.

**V:** Não, você não está entendendo. Não tem só três triângulos no mundo, como pode ter só três?

**W:** Claro que tem só três, são aqueles com todos os lados iguais, dois lados iguais e nenhum igual, mas não lembro o nome deles, mas são só esses.

**V:** Claro que não cara, eu tô cortando aqui e tô vendo, olha só esses triângulos (Figura 3), todos eles têm três lados diferentes e todos eles são diferentes um dos outros, então eles não são o mesmo triângulo.

**Figura 3:** Triângulos recortados pelos alunos V e W



Fonte: Registros de campo da pesquisadora

**W:** Eles parecem diferentes, mas são a mesma coisa. São triângulos com três lados diferentes e só.

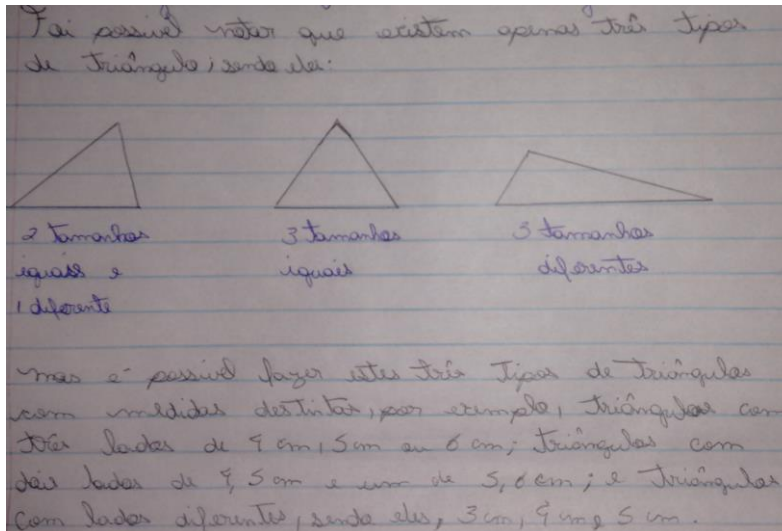
**V:** Mano, *cê tá* falando besteira, se fosse assim tanto faz você ter um *Chevette* ou uma *Ferrari*, da na mesma, é tudo carro! Mas não é a mesma coisa, *tá* vendo? Nem só porque esses triângulos têm todos os lados diferentes é que eles são iguais!

**W:** É *cê tá* certo, mas se é assim, então nunca vai acabar. A gente pode ficar cortando esses triângulos *pra* sempre (...)

Neste diálogo o aluno V demonstrava perceber a diferença entre os triângulos chegando a usar analogias para explicar para o colega que não as percebia do mesmo modo que ele. É interessante a divergência entre os alunos, enquanto um deles considerava importante dizer que existem vários triângulos diferentes quanto as suas medidas, suas características comuns permitem que eles se enquadrem em uma mesma classificação. Por exemplo, ao recortar vários triângulos escalenos, os alunos percebiam diferenças entre eles. Entretanto, somente um dos alunos classificava os triângulos em um mesmo grupo pelo fato de possuírem os três lados com medidas diferentes. O outro colega da dupla considerava que só poderiam fazer parte de um mesmo grupo os triângulos que fossem congruentes. Todavia, tanto um quanto o outro não sabia expressar a nomenclatura, escaleno e congruente, respectivamente.

Analisando os dados escritos pelos dois alunos, depois dessa discussão podemos perceber que eles chegaram a um consenso (Figura 4). Contudo, também foi constatado que eles encontraram problemas em se expressar pela forma escrita, o que poderia ter obscurecido a compreensão de suas ideias se não fosse pela discussão que eles protagonizaram durante a atividade.

**Figura 4:** Anotações dos alunos V e W



Fonte: Registros de campo da pesquisadora

Transcrição: Foi possível notar que existem apenas três tipos de triângulo, sendo eles: (...) mas é possível fazer estes três tipos de triângulos com medidas distintas, por exemplo, triângulos com três lados de 4 cm, 5 cm ou 6 cm; triângulos com dois lados de 4 e 5 cm e um de 5, 6 cm; e triângulos com dois lados de 4, 5 cm e um de 5, 6 cm; e triângulos com lados diferentes, sendo eles, 3 cm, 4 cm e 5 cm.

Na sequência da discussão a aula continuou transcorrendo bem, com os alunos fazendo algumas perguntas à pesquisadora, sempre em busca de sua aprovação, por sua vez, ela sempre buscava incentivar os alunos a continuarem sua investigação.

Ao abrir para a discussão geral com toda a turma, primeiramente a pesquisadora agradeceu aos alunos pela participação e elogiou sua determinação em fazer a atividade. Em seguida foi perguntado aos alunos se eles gostariam de falar o que haviam pensado e concluído com suas investigações.

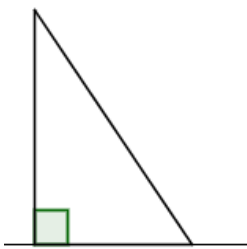
Houve certa hesitação da turma. Os alunos pareciam tímidos e inseguros de falar para a classe inteira. Mas depois de alguns instantes e o incentivo dos colegas mais próximos o aluno, V, e a aluna M, se dispuseram a falar.

Primeiro V comentou com a turma toda a discussão que ele havia tido com seu colega de dupla, sobre a existência de diferentes triângulos ou não. Ele disse que mesmo que

só existissem os três tipos básicos, com todos os lados iguais ou todos diferentes ou apenas dois lados iguais, era possível fazer vários triângulos de cada tipo desse. Disse também que achou interessante ver as coisas assim, pois eles faziam o mesmo desenho sempre, então parecia que só tinha um tipo de triângulo no mundo.

Nesse ponto cabe o comentário que durante o período em que foram realizadas as atividades de investigação, os alunos estavam estudando trigonometria no triângulo retângulo, e que da forma que as aulas eram ministradas os alunos viam e faziam o triângulo retângulo de apenas uma maneira: um cateto ficava na vertical, tomando a linha do caderno como referência e o outro na horizontal, o ângulo reto sempre ficava a esquerda e cada lado possuía uma medida diferente (triângulo escaleno). Para facilitar a visualização do leitor apresentamos abaixo na Figura 5 a representação do triângulo como os alunos estavam acostumados a desenhar.

**Figura 5:** Triângulo Retângulo

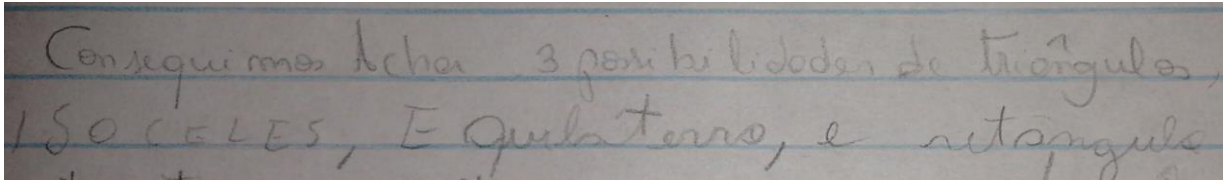


Fonte: Desenho feito pela pesquisadora no *Geogebra*.

É bem provável que, devido ao uso dessa configuração de triângulo retângulo, o aluno V havia dito que eles só usavam um (triângulo) nas aulas.

Nós consideramos importante trazer para o leitor outros pontos sobre essa turma. A pesquisadora já conhecia bem os alunos e vinha trabalhando com eles já há alguns meses, ao longo do seu estágio supervisionado, auxiliando a professora em situações em que os alunos apresentavam dificuldades na compreensão e realização de suas tarefas. De tal modo que já era de seu conhecimento que alguns alunos estavam começando a generalizar que todo triângulo retângulo era escaleno e sempre se apresentava numa mesma posição, conforme mostrado na Figura 5, como característica inerente a este tipo de triângulo. Isso se apresentou nas anotações de uma dupla, como será mostrado a seguir na Figura 6, onde será possível perceber que os alunos, não se lembrando do termo escaleno assumiram o triângulo retângulo como tal, devido ao fato de apenas ver triângulos retângulos que eram escalenos.

**Figura 6:** Anotações dos alunos R e S



Fonte: Registros de campo da pesquisadora

Transcrição: Conseguimos achar 3 possibilidades de triângulos, isósceles, equilátero e retângulo.

Quando a aluna M, falou tentando seguir a ideia iniciada por V, dizendo que achou interessante fazer outros triângulos para variar e que ela passou um bom tempo tentando fazer um triângulo equilátero que era o único que ela lembrava o nome e que sabia ter os três lados iguais.

Contudo, M não se sentiu satisfeita, pois não conseguiu fazer um que fosse realmente equilátero e ela mostrou vários triângulos para a turma. Ela ainda disse que não sabia muito bem como deveria classificar os triângulos que obteve, então juntamente com a colega de dupla, L, decidiram separar entre os que pareciam equiláteros e os que não pareciam.

No caso da aluna M, citada acima, consideramos interessante seu posicionamento perante a turma de não assumir que um triângulo era equilátero só por se parecer ser equilátero, pois como a pesquisadora pode perceber e anotar em seu diário de campo ao longo da realização da atividade, os alunos não contestavam suas figuras, se elas pareciam com algo, então elas eram esse algo.

A postura desses alunos vem exatamente de encontro com o que dizem Ponte, Brocado e Oliveira (2009), ao afirmarem que os alunos têm a tendência de assumir uma postura mais afirmativa que interrogativa e que, portanto, é importante que o professor os incentive a questionar mais. Contudo a aluna M fez isso naturalmente.

Infelizmente durante a fala da aluna M houve uma briga, com agressão física, no fundo da sala de aula e mesmo depois dos alunos envolvidos na confusão terem sido retirados de sala e os ânimos acalmados, os estudantes permaneceram muito dispersos, pois queriam falar sobre o ocorrido. Sendo assim a pesquisadora considerou por bem encerrar a atividade daquele dia.

Outro ponto a levar em conta, foi que todos os alunos consideraram os lados dos triângulos para realizar as respectivas classificações, nenhuma dupla classificou os triângulos

quanto a seus ângulos. Consideramos que tal fato se deu, possivelmente, porque os alunos estavam trabalhando com os lados dos triângulos e não focaram em seus ângulos. Também é provável que, visualmente, seja mais fácil comparar lados do que comparar ângulos.

Diante disso, ao considerar a classificação quanto aos lados, pode-se dizer que o aluno W estava correto em seu raciocínio ao afirmar que só existem três tipos de triângulos.

## 5.2 ATIVIDADE 2

Como dito anteriormente, o tempo para essa atividade foi cortado pela metade e devido a isso a pesquisadora teve receio de que não daria tempo, os alunos também demonstravam certa ansiedade com o tempo, pois sabiam que só dispunham de uma aula para aquela atividade, contudo como na parte dos recortes essa atividade de fato se assemelhava com a anterior, os alunos foram se guinando por seus passos anteriores e conseguiram fazer suas investigações dentro do prazo.

A maioria dos alunos pareceu considerar essa atividade igual a anterior, por isso no começo eles não pareciam tão empolgados em fazer suas investigações, no entanto conforme foram desdobrando as figuras, pareciam perceber que seria diferente.

Aos alunos foi solicitado que compartilhassem com todos como havia sido o seu processo investigativo e as conclusões a que chegaram. Dessa vez a hesitação da sala foi bem menor e o mesmo aluno que começou a falar na aula anterior começou a falar nessa também.

**V:** Então professora, no começo eu achei mesmo que era igual à atividade anterior, mas *dai* resolvi desdobrar o primeiro triângulo que eu recortei e percebi que dava uma figura com quatro lados, então não seria igual porque da outra vez só tinha triângulos.

Após a fala de V, a aluna I, que não havia se manifestado na aula anterior, levantou a mão e disse:

**I:** Mas nem sempre dava um quadrado ou alguma coisa com quatro lados, uns dos que eu recortei mesmo desdobrando continuavam triângulos.

**V:** É teve uns que eu fiz que depois de abrir ainda se parecia com um triângulo, mas eu *tava* falando do primeiro que eu recortei e quando eu abri esse parecia mais com uma pipa.

**I:** Entendi.

Como após a fala de I ninguém mais se manifestou. A pesquisadora deu prosseguimento à discussão dos dois alunos perguntando se todos tinham recortado figuras

que mesmo depois de abertas permaneciam sendo triângulos. Todos os grupos responderam de modo afirmativo.

A pesquisadora inquiriu ainda se eles saberiam dizer o porquê de algumas figuras permanecerem triângulos mesmo depois de desdobrar o papel, mas os alunos só balançaram negativamente a cabeça. Como o tempo era escasso a pesquisadora deixou essa discussão para um momento posterior que fosse mais oportuno.

Seguindo com a conversa geral sobre a atividade, a pesquisadora buscou saber dos alunos como eles haviam agrupado suas figuras. A aluna J resolveu se manifestar:

**J:** Bom, a gente separou entre as figuras com três lados e as com quatro lados, depois como perguntava se tinha como agrupar de outro jeito a gente separou em triângulos, em formas que pareciam uma pipa e em formas que pareciam balões.

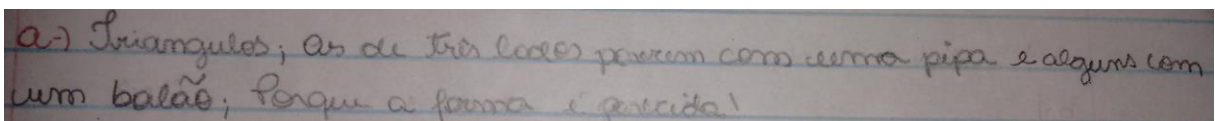
**Pesquisadora:** Muito bem, e qual foi o critério que vocês usaram para separar as figuras assim? (A resposta foi dada pela colega de dupla de J)

**K:** Bom, professora, primeiro a gente separou pelos lados, que era o mais *na cara*. Depois a gente separou pela aparência, tipo se é triângulo de um lado, se parece pipa do outro e se parece balão do outro. A gente fez errado?

**Pesquisadora:** Não, claro que não, está certo o que vocês fizeram. O critério para o agrupamento das figuras era de vocês. Obrigada por compartilha seus critérios com a turma.

Podemos perceber, de forma clara e sucinta, pela fala da aluna J como ela e sua colega de dupla haviam separado suas figuras, primeiramente pelo número de lados e depois pela aparência que essas figuras tinham, sendo pipas, triângulos e balões. Contudo olhando para as suas anotações é bem mais difícil compreender o que ela desejava dizer, como mostraremos logo a seguir:

**Figura 7:** Anotações das alunas J e K



a) Triângulos; os de três lados parecem com uma pipa e alguns com um balão; porque a forma é parecida!

Fonte: Anotações dos alunos.

**Transcrição:** “Triângulos, os de três lados parecem com uma pipa e alguns com um balão, porque a forma é parecida!”.

A pesquisadora perguntou então como os demais alunos haviam feito e todos os grupos responderam que separam pela quantidade de lados, a não ser por um grupo que além de separar pela quantidade de lados separou pelo tamanho da figura.



Essa forma que os alunos afirmaram separar suas figuras corrobora com o que a pesquisadora, tanto na fala dos alunos durante as discussões entre os integrantes das duplas e na hora da discussão geral, quanto na maneira que desenvolviam o que lhes era proposto, que os estudantes não estavam buscando características mais específicas em suas figuras, optando geralmente por agrupá-las pela aparência ou pelo número de lados.

Contudo era esperado, pela pesquisadora, que os alunos ao menos tentassem falar coisas a respeito das diagonais da figura ou então eixos de simetria, mas nenhum deles tentou se enveredar por este caminho. No entanto, voltando ao nosso referencial teórico, o caminho diferente que a aula tomou era uma possibilidade, afinal de acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2009) numa aula de IM é possível saber como a aula vai começar, mas não como ela vai terminar.

A pesquisadora tornou a perguntar para os alunos, “quais seriam as características comuns entre essas figuras?”, os alunos buscaram apenas o número de lados e a aparência correlata a objetos que eles estavam mais habituados, como as pipas. Entretanto, mesmo associando a figura com a pipa, os alunos não consideravam a existência de um quadrilátero de nome pipa. Além do mais foram poucos os alunos que se recordavam do nome da maioria das figuras.

Como os alunos pareciam não querer falar mais sobre essa atividade e devido a escassez de tempo a pesquisadora achou por bem passar para a atividade seguinte.

### 5.3 ATIVIDADE 3

Como foi dito os alunos não sabiam o que eram pontos não colineares, então a pesquisadora, pegou um giz e foi à lousa, onde fez dois pontos e perguntou aos alunos se tinha como fazer uma reta única passar por eles, ligando-os. Todos os alunos concordaram que sim sem demora, então a pesquisadora foi lá e passou uma reta por esses pontos. Em seguida a pesquisadora fez três pontos não colineares na lousa e perguntou se tinha como uma única reta ligar esses três pontos de uma vez. A sala ficou dividida na resposta e então o aluno R falou para todos:

**R:** Professora, a senhora pode ligar aqueles dois e depois os outros dois e depois os outros dois, forma um triângulo, como a gente *tava* trabalhando.

Mas o aluno W, contrapôs seu colega R.

**W:** Mas você não entendeu, é uma reta só, assim você usou três retas.

**R:** Tá bom, mas se for assim não tem jeito de ligar.

**W:** Eu sei, mas foi isso que a professora perguntou, se tinha como ligar os três de uma vez e não tem como, então não tem como, simples.

Então a pesquisadora intercedeu e explicou que era esse o significado de pontos não colineares, ou seja, esses três pontos que eles deveriam fazer, não poderia ficar na mesma reta, mas que claro eles ficariam na mesma reta dois a dois como R sugeriu. Pois, de acordo com a Geometria Euclidiana, por todo ponto P e Q, sendo Q diferente de P, existe uma única reta que passa por estes dois pontos (GREENBERG 2008). E que eles deveriam fazer o mesmo quando fossem Trabalhar com quatro pontos.

Os alunos começaram a fazer a atividade como foi pedido e alguns ainda apresentaram algumas dúvidas com relação ao que eram os pontos colineares e chamaram a pesquisadora as suas mesas. Mas isso logo foi sanado e eles continuaram suas atividades.

Em um dado momento da atividade, depois da pesquisadora passar em todas as mesas e ver como os alunos estavam fazendo a atividade, percebeu que para uma determinada configuração para os quatro pontos viria a resultar em um quadrilátero não convexo e que quando os alunos ligassem a diagonal externa ficaria parecendo um triângulo. Esta configuração foi realizada por três duplas.

No momento da discussão geral, a pesquisadora novamente agradeceu a participação dos alunos nas atividades e em seguida perguntou-lhes como foi que ligaram os três pontos e de quantas formas diferente eles fizeram isso.

A aluna Y se manifestou dizendo:

**Y:** Olha professora, dava pra ligar esses três pontos de vários jeitos, infinitos até.

O aluno B respondeu a colega, logo que esta terminou de falar.

**B:** Não é bem assim, você pode por os pontos de várias formas e escolher quais ligar primeiro, mas no final sempre vira um triângulo. Então pra mim só tem um jeito de ligar, que é fazendo triângulos.

**Y:** Tá bom, mas são triângulos diferentes.

**B:** Sim, eles são diferentes, mas o jeito de ligar é um só. E foi isso que ela perguntou. O jeito de ligar os pontos.

**Y:** Tá, mas ela perguntou, também, se quando a gente mudava os pontos de lugar mudava alguma coisa e muda. Formam triângulos diferentes.

**B:** Bom, isso é verdade.

A pesquisadora deu prosseguimento perguntando a todos se no caso dos três pontos alguém tinha algo mais para dizer, se todos tinham acabado ligando os pontos do mesmo modo e a classe concordou que sim.

Desse modo a pesquisadora perguntou aos estudantes o que eles tinham feito e pensado quando usavam quatro pontos. No mesmo instante a aluna M levantou a mão e começou a falar.

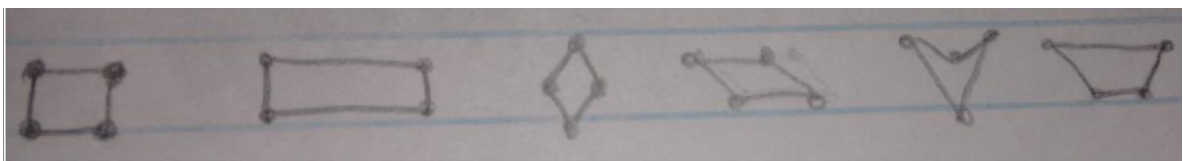
**M:** Assim, professora, esse da *pra* ligar de formas diferentes, depende de como a gente põe os pontos na folha. *Tipo* quando eram três pontos formava sempre um triângulo como eles falaram, mas *dai* com quatro pontos formam quadrados, retângulos e losangos.

Então a aluna J falou, completando a fala da colega:

**J:** A gente achou mais formas professora, além dessas que a M falou, a gente também achou outros três, mas não sabemos como se chamam. Ainda mais esse um que parece um “V”.

A pesquisadora se aproximou da mesa da aluna para ver o desenho que ela mostrava e percebeu se tratar de formas muito parecidas com um trapézio (não retângulo), um paralelogramo e um quadrilátero não convexo (figura parecida com um “V”). Foi solicitado para que a aluna representasse suas figuras na lousa, mas tanto ela como sua colega de dupla se recusaram. As figuras feitas pelas alunas J e K, em suas anotações seguem na figura a seguir:

**Figura 8:** Construções das alunas J e K



Fonte: Registros de campo da pesquisadora

Então novamente voltando-se para a turma, a pesquisadora perguntou quem mais gostaria de se manifestar e os integrantes de um dos grupos que também havia feito um quadrilátero não convexo disse para os colegas que também tinham feito um desenho que parecia com um “V” ou um “acento de chapéu” (acento circunflexo), mas eles também não quiseram ir à lousa.

Por conhecer os alunos a pesquisadora percebeu que ninguém aceitaria ir ao quadro e como o tempo estava se esgotando ela mesma pegou um giz e desenhou as seis formas citadas até então pelos alunos: quadrado, trapézio, retângulo, losango, paralelogramo e quadrilátero não convexo, como eles haviam feito.

Alguns alunos mostraram certa surpresa ao verem na lousa formas que eles não haviam feito, principalmente o quadrilátero não convexo. Contudo não perguntaram nada para a pesquisadora que havia esperado perguntas ou pelo menos um maior interesse pelo quadrilátero não convexo por se tratar de uma figura não familiar.

A pesquisadora tornou a inquirir os alunos se eles tinham encontrado outras formas, mas todos responderam que não, que era só aquilo mesmo. Mas a aluna M tornou a falar:

**M:** É eu nem tinha pensado nesses outros que elas falaram e a senhora desenhou na lousa, mas agora vendo eles e pensando um pouco, não acho que existam outras formas professora, qualquer outra forma que a gente coloque os pontos vai ficar igual a uma desses só que maior ou menor.

A maioria dos alunos meneou a cabeça em aprovação a fala da aluna, parecendo concordar com ela. Como faltavam poucos instantes para acabar a aula e começar o intervalo dos alunos eles estavam ficando dispersos e a pesquisadora decidiu encerrar a atividade, agradecendo, novamente a participação de todos. Tão logo ela fez isso, o sinal bateu e a aula terminou mesmo.

Como foi dito, anteriormente era esperado que os alunos fizessem uma configuração de pontos tal que resultasse em um quadrilátero não convexo e essa configuração apareceu de fato em três grupos. Mas nenhum dos alunos fez as perguntas esperadas nem chegou onde era esperado que eles chegassem. Nesse ponto gostaríamos de ressaltar que as atividades de IM não eram apenas novidade para os alunos, mas também para a pesquisadora e que por isso de forma involuntária acabou criando expectativas sobre respostas que ela gostaria que os alunos dessem. Entretanto, não aprofundaremos as discussões nesse sentido, porque este não é o objetivo da pesquisa.

Contudo, parando para analisar com um pouco mais de atenção a parte escrita pelos alunos e que foi entregue ao fim da atividade, ficou um pouco mais evidente o porquê dessa ausência dos questionamentos (que eram esperados) ou pelo menos parte deles. Os alunos não ligaram os pontos como era esperado (traçando as diagonais do quadrilátero não convexo).

Pela característica das atividades investigativas, era necessário que nem as questões escritas e nem o posicionamento da pesquisadora tornassem o desenvolvimento das atividades

muito diretivo. Dessa forma, é provável que por isso os alunos não visualizaram a possibilidade de traçar as diagonais. Outro fator que pode ter contribuído para isso é a inexperiência da pesquisadora, que não soube como instiga-los a terminar de ligar os pontos e perceber que o quadrilátero acabaria “virando um triângulo”.

Outra coisa foi que nenhum aluno pareceu levar em consideração formas de quadriláteros que resultavam em trapezoides. Todos os desenhos feitos pelos alunos resultaram quadriláteros “não estranhos”. Por mais “torto” que estivesse o quadrado, era um quadrado e o mesmo aconteceu com retângulos, losangos e outros. Além do mais nenhum aluno apresentou um quadrilátero pipa, mesmo este tendo aparecido com considerável frequência na Atividade 2.

Consideramos aqui que uma possibilidade para o não surgimento de trapezoides foi a não familiaridade com esta figura. Voltando na nossa pergunta norteadora, esse fato na verdade é muito esclarecedor. Se o que buscávamos era saber como os alunos mobilizavam seus conhecimentos na realização dessas atividades de IM, ficou aparente que eles se baseiam sempre aquilo que lhes é mais familiar e sobre o qual sentem possuir certo domínio.

Outro ponto, entretanto mais difícil de constatar, seria a busca humana por regularidades e pela perfeição, os alunos buscavam a simetria em seus trabalhos, mas de uma forma menos específica, eles buscavam sempre fazer ou assumir suas figuras por coisas mais retas e certas, com propriedades definidas, mesmo que não se recordassem ou conhecessem essas propriedades.

Entretanto outro ponto de vista para essa mesma situação poderia ser a busca pelo que a professora (pesquisadora) desejava que fizessem. Se eles mantiveram isso em mente mesmo que não abertamente, poderiam buscar essas regularidades e características intrínsecas mesmo que de modo inconsciente, tentando assim “agradar” a professora.

A seguir trazemos as nossas considerações finais sobre o trabalho.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ponto de partida para este trabalho foi a minha inquietação quanto ao ensino de Geometria. Essa inquietação vinha da minha experiência em sala de aula, tanto como discente quanto como docente, onde percebia a posição frágil da geometria nas aulas de Matemática e por vezes em minha própria formação.

Esse trabalho foi desenvolvido com o objetivo de verificar como os alunos lidam com tarefas de Geometria em aulas investigativas. Além de que também contribuiu para o aumento de meus conhecimentos sobre o ensino da Geometria e sobre como os alunos poderiam expressar seus conhecimentos sobre ela.

É certo que foi preciso restringir esse questionamento ou acabaria por dar um passo maior que minhas pernas. Portanto o foco foi uma turma de alunos do primeiro ano do Ensino Médio e o trabalho foi norteado pela pergunta *“Como os alunos do primeiro ano do Ensino Médio expressam seus conhecimentos sobre construção de triângulos e quadriláteros em atividades de aulas investigativas?”*.

A opção por atividades de cunho investigativo se deu por esta potencializar a participação do aluno, afinal esse tipo de atividade tira o professor dos “holofotes” e assim gera uma maior possibilidade dos alunos não serem guiados somente pelo “o que o professor deseja”, mas sim por sua própria curiosidade e usando ferramentas próprias para isso.

Algumas dificuldades ao lidar com atividades investigativas foram encontradas, pois estava impregnado em mim o formato de aula mais expositiva o qual havia assistido e me habituado ao longo de minha formação. Entretanto, me deparar e enfrentar essas dificuldades foi importante para a minha formação docente, pois só tentando e refletindo sobre nossos erros e acertos é que aprendemos.

Dentre essas dificuldades com as atividades investigativas, ressalto a minha tendência a sempre esperar determinadas respostas o que por vezes me fazia quase esquecer do real objetivo com aquelas atividades. Houve, também, certa vontade de direcionar os passos dos alunos para a direção que gostaria ou esperava, mas isso acabaria por inviabilizar esta pesquisa.

Mesmo com essas dificuldades, considero que a pesquisa foi satisfatória para responder a pergunta norteadora e amainar, um pouco, a minhas inquietações. Foi possível perceber que os alunos tendem a buscar os padrões e formas aos quais eles estão mais acostumados, evitando enveredar por terrenos que os deixem menos seguros de suas

afirmações. Contudo, imagino que numa sequência maior de aulas essa postura poderia mudar com o auxílio do incentivo adequado.

Considero interessante poder interagir com os alunos de forma diferenciada e perceber o quanto eles podem ficar interessados em uma aula, ainda que de Matemática, que costuma ser muito pouco apreciada. Acreditamos e temos respaldo nas palavras de Ponte, Brocado e Oliveira (2009) que esse envolvimento mais participativo dos alunos com as atividades de sala de aula favorece a aprendizagem.

Por fim encerro dizendo que essa pesquisa foi enriquecedora para mim. Ao me aprofundar um pouco mais no ensino da Geometria e em atividades investigativas pude ter novas ideias e imaginar novas possibilidades de caminhos que poderei vir a seguir tanto em minha formação como em minha profissão.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos. (Org.). **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. 1 ed. São Paulo: Cortês, 2011. p. 11-28.

FERREIRA, A. C. C. **Ensino da Geometria no Brasil**: enfatizando o período do Movimento da Matemática Moderna. 2005. Disponível em: <<http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/painel/TCC136.pdf>>. Acesso em: 20 nov 2015

GERHARD, T.E.; SOUZA, A .C. O que é pesquisa. In: GERHARD, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre. Editora da UFRGS. 2009. p. 12-15. Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>>. Acesso em: 30 jul. 2015.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-euclidian geometries**: development and history. 4<sup>a</sup> ed. New York: W. H. Freeman and Company. 2008.

MOCROSKY, L.C.; MONDINI, F.; ESTEPHAN, V.M. **O ensino de geometria**: alguns aspectos da sua origem nos livros didáticos brasileiro. In: Simpósio nacional de ensino de ciência e tecnologia, 3, ponta Grossa. Disponível em: <<http://sinect.com.br/2012/down.php?id=2626&q=1>> . Acesso em 14 jul. 2015.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria?. **Educação matemática em revista**, São Paulo, v.4, p.3-13, 1995. Disponível em: <<http://www.professores.uff.br/lhaylla/material/Lab-2014.2/PqNaoEnsinarGeo.pdf>>. Acesso em: 25 mai. de 2015.

National HE STEM Programme. **Qualitative and quantitative research.mp4**. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=2is-BtwIrKI>>. Acesso em: 30 jul. 2015.

NEVES, J.L. Pesquisa qualitativa – características, usos e possibilidades. **Caderno de pesquisa em administração**, São Paulo, v.1, p. 1-5, 1996. Disponível em: <<http://www.ead.fea.usp.br/cad-pesq/arquivos/C03-art06.pdf>>. Acesso em 30 jul. 2015.



PAULO, R. M.; SILVA, R. H. G. Aulas Investigativas e a formação do professore de Matemática. **CIAEM-IACME**, Recife, Brasil. 2011. Disponível em: <<http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIICIAEM/artigos/1842.pdf>>. Acesso em 26 nov. 2015.

PAVANELLO, R.M. **O abandono do ensino de geometria no Brasil**: causas e consequências. 1993. Disponível em:<<https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2611/2353>>. Acesso em: 30 jul. 2015.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte, MG. Editora Autêntica, 2009.

VALENTE, W.R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: Annablume: FAPESP, 1999.

YIN, R.K. **Case study research**: Design and Methods. 2<sup>a</sup> ed. Thousand Oaks,: SAGE Publications, 1994. p. 1-18.