



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Equações diferenciais autônomas e aplicações

**Éverton de Toledo Hanser**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora  
**Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti**

**2016**

517.384 Hanser, Éverton T.  
H249e Equações diferenciais autônomas e aplicações/ Éverton de Toledo  
Hanser- Rio Claro: [s.n.], 2016.  
87 f. il., gráfs., fots

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientadora: Marta Cilene Gadotti

1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. Análise. 3. Teoria Qualitativa. I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Éverton de Toledo Hanser

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS AUTÔNOMAS E APLICAÇÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti  
Orientadora

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira  
Departamento de Matemática - Unesp - Rio Claro

Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita  
Departamento de Matemática - Unesp - São José do Rio Preto

**Rio Claro, 02 de Junho de 2016**



*Aos meus pais, Claudemir e Ângela  
e minha irmã, Kátia.*



# Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por todas as bênçãos concedidas a mim e meus familiares.

À UNESP - Rio Claro, que me proporcionou inúmeras amizades e alguns dos melhores anos vividos até hoje.

Aos meus familiares, que sempre me incentivaram e apoiaram a continuidade nos estudos, tendo paciência e ensinando valores, os quais me ajudam a viver com garra e dignidade.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UNESP - Rio Claro, por contribuírem na minha formação das mais diferentes maneiras.

Às secretárias Elisa, Ana e Inajara, e às bibliotecárias, em especial Suzi, Rejane, Gislaine e Josimeire, pela amizade e auxílio sempre quando necessário.

Aos meus colegas de graduação e pós-graduação, pela convivência e amizade durante todo o curso e pelos momentos de descontração vivenciados dentro e fora do ambiente acadêmico.

E especialmente, meus sinceros agradecimentos à minha orientadora, Marta, pela paixão que demonstra pelo ensino e imenso conhecimento da matemática, pela paciência, dedicação, "prosas", amizade e incentivo para prosseguir com o estudo realizado neste trabalho.





*Jamais considere seus estudos como uma obrigação,  
mas como uma oportunidade invejável para aprender a  
conhecer a influência libertadora da beleza do reino do  
espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito  
da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.*

Albert Einstein



# Resumo

O objetivo principal deste trabalho é o estudo da teoria de sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas e suas aplicações em modelos matemáticos, enfatizando os sistemas bidimensionais.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Ordinárias, Análise, Teoria Qualitativa.



# Abstract

The main objective of this work is to study the theory of autonomous ordinary differential equations and their applications in mathematical models, emphasizing the two-dimensional systems.

**Keywords:** Ordinary Differential Equations, Analysis, Qualitative Theory.



# Lista de Figuras

2.1	Gráfico de $f_n(t)$ .	20
3.1	Caso i: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ .	47
3.2	Caso ii: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ .	48
3.3	Caso iii: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .	48
3.4	Caso iv: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$ .	49
3.5	Caso v: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$ .	49
3.6	Caso vi: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ .	50
3.7	Caso vii: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ .	51
3.8	Caso i: $\lambda < 0$ .	52
3.9	Caso ii: $\lambda > 0$ .	52
3.10	Caso iii: $\lambda = 0$ .	53
3.11	Caso i: $a = 0$ .	54
3.12	Caso ii - Foco instável.	54
3.13	Caso iii - Foco estável.	55
4.1	Gráficos do Modelo de Malthus.	66
4.2	Modelo de Verhulst.	68
4.3	Modelo de Lotka-Volterra.	70
4.4	Broca da cana - Disponível em [16].	70
4.5	Vespa do gênero <i>Trichogramma galloi</i> - Disponível em [17].	71
4.6	Caso i) - $P_1$ assintoticamente estável	75
4.7	Caso ii) - $P_2$ estável	75
4.8	Caso iii) - $P_3$ estável	76
4.9	Pêndulo simples.	77





# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Teoria Básica das Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>19</b>
2.1	Preliminares . . . . .	19
2.2	Conceitos Básicos . . . . .	24
2.2.1	Resultados Centrais das Equações Diferenciais Ordinárias . . . .	27
2.2.2	Dependência Contínua . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Equações Autônomas</b>	<b>37</b>
3.1	Sistemas Autônomos . . . . .	37
3.2	Sistemas Lineares Autônomos . . . . .	39
3.3	Sistemas Bidimensionais . . . . .	43
3.3.1	Estudo qualitativo de sistemas autônomos $2 \times 2$ . . . . .	45
3.4	Estudo de Estabilidade de Sistemas Autônomos . . . . .	55
3.5	Equações Não Lineares Autônomas . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>65</b>
4.1	Modelo de Malthus . . . . .	65
4.2	Modelo de Verhulst . . . . .	66
4.3	Modelo de Lotka-Volterra . . . . .	68
4.4	Modelo matemático de controle biológico da broca da cana de açúcar .	70
4.5	Pêndulo Simples . . . . .	76
	<b>Referências</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Conceitos de Álgebra Linear</b>	<b>81</b>



# 1 Introdução

As equações diferenciais constituem uma importante ferramenta na modelagem de problemas naturais e sociais. É possível observar que diversos problemas físicos, químicos, biológicos e econômicos são descritos através das equações diferenciais. Dentre estes, há vários casos em que a taxa de variação envolvida não depende explicitamente do tempo. São os casos autônomos.

Atualmente, o estudo sobre o comportamento das soluções de determinadas equações diferenciais é objeto de pesquisa de vários matemáticos e está em constante desenvolvimento. Portanto, conhecer os resultados básicos e aplicações de equações diferenciais ordinárias é extremamente importante para quem deseja compreender e se aprofundar nessa área da Matemática.

Este trabalho apresenta os resultados centrais da Teoria das Equações Diferenciais, os Teoremas de Existência e Unicidade de soluções e posteriormente os principais conceitos das Equações Diferenciais Ordinárias Autônomas, explicitando algumas de suas aplicações, assim como um estudo qualitativo das mesmas.

Dessa maneira, o texto está organizado da seguinte forma: no capítulo 2, abordamos os resultados básicos sobre existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial, assim como a dependência contínua e os principais teoremas da Análise Matemática necessários ao entendimento do trabalho; no capítulo 3, tratamos essencialmente de sistemas autônomos e no capítulo 4, realizamos algumas aplicações clássicas, como modelos populacionais, bem como um modelo de controle biológico e um modelo do pêndulo simples.



# 2 Teoria Básica das Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo serão apresentados alguns dos principais conceitos e resultados sobre Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e também alguns tópicos de Análise e Espaços Métricos, visando facilitar a leitura dos próximos capítulos. Para este estudo, foram utilizadas as referências [1], [2], [6], [7], [9], [10], [12], [13] e [14].

## 2.1 Preliminares

Apresentamos primeiramente definições, propriedades e resultados referentes aos espaços métricos.

**Definição 2.1.** *Dado um espaço vetorial  $M$ , dizemos que  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma métrica em  $M$  se satisfaz:*

$$i) d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M \text{ e } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$ii) d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M.$$

$$iii) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M.$$

**Definição 2.2.** *Um espaço vetorial  $M$  munido de uma métrica  $d$  é chamado de **espaço métrico** e é denotado por  $(M, d)$ .*

**Exemplo 2.1.** Considere o  $\mathbb{R}^n$  munido da métrica  $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ , onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Logo,  $(\mathbb{R}^n, d)$  é um espaço métrico.

**Definição 2.3.** *Uma **sequência** em um espaço métrico  $(M, d)$  é uma função*

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M$$

que associa a cada  $n \in \mathbb{N}$ , um elemento  $x_n \in M$ .

Notação:  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou simplesmente  $(x_n)$ .

**Definição 2.4.** Seja  $(x_n)$  uma sequência em  $(M, d)$ . Dizemos que  $(x_n)$  **converge** para  $x \in M$  quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

**Definição 2.5.** Uma sequência  $(x_n)$  em  $(M, d)$  é chamada de **Cauchy** quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / m > n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

**Observação 2.1.** Toda sequência convergente é de Cauchy. Porém a recíproca não é sempre válida.

Por exemplo, considere o conjunto das funções contínuas  $C([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; \text{contínuas}\}$ , com a métrica

$$d(f, g) = \|f - g\| = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

Considere a sequência  $(f_n)$ , em que

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < t \leq 1. \end{cases}$$

Os gráficos de  $(f_n)$  estão esboçados na Figura 2.1.

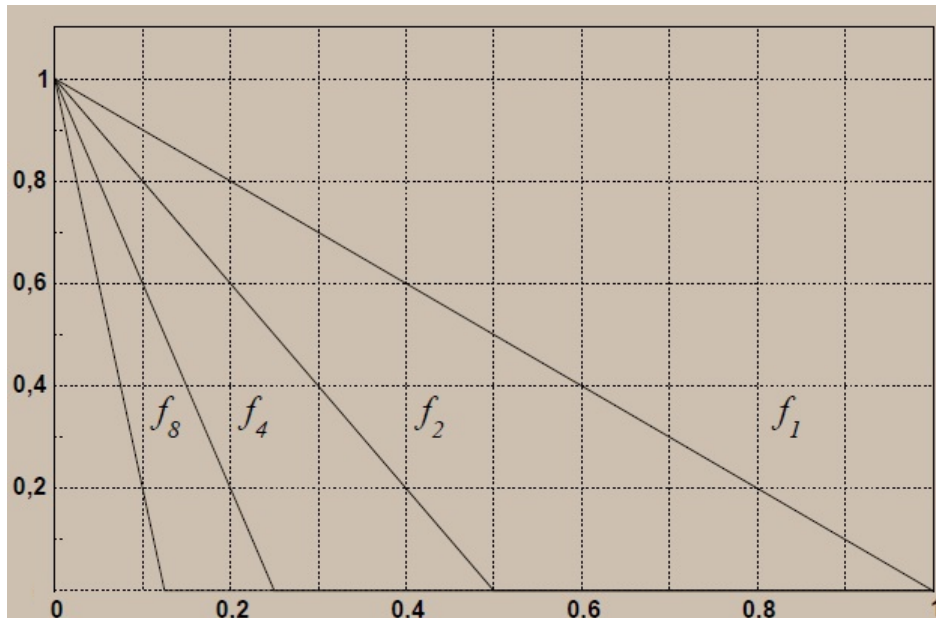


Figura 2.1: Gráfico de  $f_n(t)$ .

Note que a distância dada pela integral é igual à área do triângulo resultante. Assim, tomando  $n \leq m$ , temos  $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{m}$  e assim:

$$d(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) < \frac{1}{2n} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo,  $(f_n)$  é de Cauchy. No entanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Portanto,  $f$  não é contínua em  $t = 0$  e  $(f_n)$  não é convergente em  $C([0, 1], \mathbb{R})$ .

**Definição 2.6.** *Seja  $E$  um espaço vetorial sobre um corpo  $K$ . Uma norma em  $E$  é uma função  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  que satisfaz:*

i)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , para todo  $x \in E$  e todo  $\lambda$  em  $K$ .

iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , para quaisquer  $x, y \in E$ .

Um espaço normado é um espaço vetorial  $E$  munido de uma norma  $\|\cdot\|$ . Para ressaltarmos a norma  $\|\cdot\|$  utilizada no espaço  $E$ , algumas vezes empregaremos a notação  $(E, \|\cdot\|)$ .

**Observação 2.2.** Todo espaço normado é métrico.

**Definição 2.7.** *Dizemos que um espaço métrico  $M$  é **completo** se toda sequência de Cauchy em  $M$ , converge em  $M$ .*

**Exemplo 2.2.** Seja agora  $C = C([0, 1], \mathbb{R})$ , munido da métrica

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Neste caso,  $C$  é completo.

**Exemplo 2.3.** O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  não é um espaço métrico completo. Basta tomarmos a sequência de números racionais  $x_1 = 1, x_2 = 1,4, x_3 = 1,41, \dots$ , com  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$ . Assim, a sequência converge em  $\mathbb{R}$ , porém não é convergente em  $\mathbb{Q}$ .

**Definição 2.8.** *Um espaço normado  $(E, \|\cdot\|)$  completo com respeito à métrica induzida pela norma, isto é,  $d(x, y) = \|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in E$ , é chamado **Espaço de Banach**.*

**Definição 2.9.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Dizemos que  $f : X \rightarrow X$  é uma **contração** se existir  $\beta \in \mathbb{R}, 0 \leq \beta < 1$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq \beta d(x, y)$ ,  $\forall x, y \in X$ .*

**Exemplo 2.4.** Seja  $X = [1, +\infty[$  e considere  $f : X \rightarrow X$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ . Temos  $\sqrt{x} \geq 1$  e  $\sqrt{y} \geq 1$  e, conseqüentemente,  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}$ . Assim, tomando por exemplo  $\beta = \frac{1}{2}$ , segue que

$$d(f(x), f(y)) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2} |x - y| = \beta d(x, y).$$

Logo,  $f$  é uma contração.

**Lema 2.1. (de Contração)** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $F : X \rightarrow X$  uma contração. Então, existe um único ponto fixo  $p$  de  $F$ , isto é,  $F(p) = p$ . Mais ainda,  $p$  é um atrator de  $F$ , isto é,  $F^n(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ , para todo  $x$ .  $F^n(x)$  é definido por  $F(F^{n-1}(x))$ .*

*Demonstração.* A prova deste resultado pode ser encontrado em [14]. □

Temos a seguinte consequência do Lema de Contração.

**Corolário 2.1.** *Seja  $X$  um espaço métrico completo. Se  $F : X \rightarrow X$  é contínua e, para algum  $m$ ,  $F^m$  é uma contração, então existe um único ponto  $p$  fixo de  $F$ . Mais ainda,  $p$  é um atrator de  $F$ .*

**Definição 2.10.** *Sejam  $A$  e  $B$  espaços de Banach. Uma aplicação contínua  $f : A \rightarrow B$  é dita **completamente contínua** quando para todo conjunto limitado  $K \subset A$  tem-se  $f(K)$  compacto em  $B$ .*

**Teorema 2.1. (Teorema do Ponto Fixo de Schauder)** *Sejam  $A$  um conjunto convexo e compacto no Espaço de Banach  $C = C([a, b], \mathbb{R}^n)$ , com a norma do supremo, e  $f : A \rightarrow A$  uma função contínua. Então,  $f$  tem um ponto fixo em  $A$ , ou seja, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = x$ .*

Temos a seguinte consequência do Teorema de Schauder.

**Corolário 2.2.** *Se  $A$  é um conjunto fechado, limitado e convexo do Espaço de Banach  $C = C([a, b], \mathbb{R}^n)$  e  $f : A \rightarrow A$  é completamente contínua, então  $f$  tem um ponto fixo em  $A$ .*

**Definição 2.11.** *Sejam  $K$  um espaço métrico compacto,  $M$  um espaço métrico e  $C(K, M)$  o conjunto das aplicações contínuas de  $K$  em  $M$ . Um conjunto  $C'(K, M) \subset C(K, M)$  é equicontínuo se, para todo  $\epsilon > 0$ , existir um  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $d(x, y) < \delta$ , implica  $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ ,  $\forall f \in C'(K, M)$ .*

**Definição 2.12.** *Um ponto  $a$  diz-se aderente a um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  quando  $d(a, X) = 0$ , isto é, para todo  $\epsilon > 0$ , tem-se  $B(a, \epsilon) \cap X \neq \emptyset$ .*

**Exemplo 2.5.** Se  $X = [0, 1)$  na reta  $\mathbb{R}$ , então 1 é aderente a  $X$ .



**Definição 2.13.** O fecho (ou aderência) de um conjunto  $X$  num espaço métrico  $M$  é o conjunto  $\bar{X}$  dos pontos de  $M$  que são aderentes a  $X$ .

**Exemplo 2.6.** Considere os intervalos  $(0, 1)$ ,  $[0, 1)$ ,  $(0, 1]$  na reta  $\mathbb{R}$ . Em todos os casos, o fecho é o intervalo  $[0, 1]$ .

**Definição 2.14.** Seja  $X$  um espaço métrico completo e  $K$  um espaço métrico tal que  $K \subset X$ . Dizemos que  $K$  é relativamente compacto em  $X$  se  $\bar{K}$  é um subconjunto compacto de  $X$ .

**Teorema 2.2.** Sejam  $K$  um espaço métrico compacto,  $M$  um espaço métrico e  $C'(K, M) \subset C(K, M)$  tais que:

i) Para cada  $x \in K$ , o conjunto  $\epsilon(x) = \{f(x) \in M, f \in C'(K, M)\}$  é relativamente compacto.

ii)  $C'(K, M)$  é equicontínuo.

Então,  $C'(K, M)$  é relativamente compacto.

**Definição 2.15.** Uma aplicação  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diz-se limitada quando sua imagem  $f(X) \subset \mathbb{R}^m$  é um conjunto limitado, isto é, quando existe  $c > 0$  tal que  $|f(x)| \leq c$  para todo  $x \in X$ .

**Exemplo 2.7.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  é limitada, pois  $f(\mathbb{R}) = ]0, 1]$ . Assim, por exemplo, basta tomarmos  $c \geq 1$ .

**Definição 2.16.** Uma aplicação  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é lipschitziana relativamente à segunda componente quando existe  $c > 0$  tal que  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq c|x - y|$  para quaisquer  $(t, x), (t, y) \in \Omega$ .

**Teorema 2.3. (Ascoli-Arzelá)** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Seja  $F$  uma família equicontínua de funções  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $F$  é uniformemente limitada (isto é, existe  $M > 0$  tal que  $|\varphi| < M$  para toda  $\varphi \in F$ ), então toda sequência  $(\varphi_n)$  de elementos de  $F$  tem uma subsequência  $(\varphi_{n_k})$  uniformemente convergente em  $X$ .

Para finalizar esta seção, relembremos os conceitos de conjuntos linearmente dependentes e linearmente independentes.

**Definição 2.17.** Dizemos que um conjunto de funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  é **linearmente dependente** em um intervalo  $I$  se existem constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  não todas nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0,$$

para todo  $x$  no intervalo.

**Exemplo 2.8.** As funções  $f_1(x) = \sin(2x)$  e  $f_2(x) = \sin x \cos x$  são linearmente dependentes no intervalo  $(-\infty, +\infty)$ , pois  $c_1 \sin(2x) + c_2 \sin x \cos x = 0$  é satisfeita para todo  $x$  real se  $c_1 = \frac{1}{2}$  e  $c_2 = -1$ .

**Definição 2.18.** Dizemos que um conjunto de funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  é **linearmente independente** em um intervalo  $I$  se ele não é linearmente dependente no intervalo.

Em outras palavras, um conjunto de funções é linearmente independente em um intervalo se as únicas constantes para as quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0,$$

para todo  $x$  no intervalo, são  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ .

**Exemplo 2.9.** As funções  $f_1(x) = x$  e  $f_2(x) = e^x$  são linearmente independentes no intervalo  $(-\infty, +\infty)$ , pois  $c_1 x + c_2 e^x = 0$  é satisfeita somente para  $c_1 = c_2 = 0$ .

**Observação 2.3.** No caso da dependência ou independência linear, o intervalo no qual as funções estão definidas é importante. Por exemplo, se tomarmos  $f_1(x) = x$  e  $f_2(x) = |x|$ , elas são l.i. no intervalo  $(-\infty, +\infty)$ , porém são l.d. se considerarmos o intervalo  $(0, +\infty)$ .

## 2.2 Conceitos Básicos

A seguir, introduziremos a teoria básica das equações diferenciais ordinárias e, para isto, precisaremos introduzir algumas notações.

Sejam  $\Omega$  um subconjunto do espaço  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , onde  $\mathbb{R}$  é a reta real e  $\mathbb{R}^n$  é o espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Um ponto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  será denotado por  $(t, x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Em todo o trabalho denotaremos a derivada de uma função  $y = y(x)$  por

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x).$$

Em particular, quando a função for dependente do tempo, isto é,  $y = y(t)$ , utilizaremos a notação  $\dot{y}(t)$  para indicar a derivada de  $y$  com respeito a  $t$ .

Para a próxima definição, consideraremos  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua e  $I$  um intervalo não degenerado da reta, isto é, um subconjunto conexo de  $\mathbb{R}$  não reduzido a um ponto, podendo ser aberto ou fechado.

**Definição 2.19.** Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação. A equação

$$f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) = 0$$

é chamada de equação diferencial ordinária (EDO).

Quando a equação for de primeira ordem, ela será escrita na forma

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \tag{2.1}$$

podendo ser denotada abreviadamente por  $\dot{x} = f(t, x)$ , onde  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A ordem de uma EDO é dada pelo índice da ordem da maior derivada na equação.



**Exemplo 2.12.** Dada a equação diferencial linear homogênea  $\ddot{u} + 0,5\dot{u} + 2u = 0$ , fazendo  $x_1 = u$ ,  $x_2 = \dot{u}$ , temos  $\dot{x}_2 = \ddot{u}$ . Substituindo na equação inicial, temos  $\dot{x}_2 + 0,5x_2 + 2x_1 = 0$ . Assim:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 0,5x_2. \end{cases}$$

Ainda podemos escrever matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Avaliar se as funções  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são l.i. ou l.d. em  $I$  é importante para o estudo proposto. Para tanto, apresentamos abaixo um resultado útil, que depende da seguinte definição:

**Definição 2.22.** Seja  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  um conjunto de funções pelo menos  $n - 1$  vezes diferenciáveis num intervalo  $I$ . O determinante

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \dots & f_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

é chamado **Wronskiano** do conjunto de funções.

**Teorema 2.4.** Suponha que  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  é um conjunto de funções pelo menos  $n - 1$  vezes diferenciáveis num intervalo  $I$ . Se  $W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) \neq 0$  em pelo menos um ponto  $x$  do intervalo, então o conjunto de funções será linearmente independente no intervalo.

*Demonstração.* Provaremos o teorema por contradição no caso em que  $n = 2$ .

Suponha que  $W(f_1, f_2)(x_0) \neq 0$  para um  $x_0$  fixado no intervalo  $I$  e que,  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  sejam linearmente dependentes no intervalo. O fato de que as funções são linearmente dependentes significa que existem constantes  $c_1$  e  $c_2$ , não ambas nulas, para as quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0,$$

para todo  $x$  em  $I$ . Derivando essa combinação, temos

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0.$$

Obtemos então um sistema de equações lineares

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0. \end{cases}$$

Mas a dependência linear de  $f_1$  e  $f_2$  implica que o sistema possui uma solução não trivial para cada  $x$  no intervalo. Logo,

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

para todo  $x$  em  $I$ . Isso contradiz a suposição de que  $W(f_1, f_2)(x_0) \neq 0$ . Concluimos então que  $f_1$  e  $f_2$  são linearmente independentes.  $\square$

**Exemplo 2.13.** As funções  $f_1(x) = e^x$ ,  $f_2(x) = xe^x$  e  $f_3(x) = x^2e^x$  são linearmente independentes em qualquer intervalo do eixo  $x$ , pois

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & xe^x + e^x & x^2e^x + 2xe^x \\ e^x & xe^x + 2e^x & x^2e^x + 4xe^x + 2e^x \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

não se anula em ponto algum.

Para uma EDO linear homogênea de ordem  $n$ , encontrar  $n$  soluções linearmente independentes nos remete à solução geral da equação.

Considere a equação linear homogênea

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (2.2)$$

e sejam  $y_1, y_2, \dots, y_n$   $n$  soluções linearmente independentes para a equação (2.2) em um intervalo  $I$ . É possível demonstrar que o conjunto solução da equação (2.2) é um espaço vetorial  $n$ -dimensional (ver [6]) e assim, uma solução geral para a equação no intervalo é dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

em que os  $c_i = 1, 2, \dots, n$  são constantes arbitrárias.

**Teorema 2.5.** *O conjunto solução da equação diferencial (2.2) é um espaço vetorial de dimensão  $n$ .*

### 2.2.1 Resultados Centrais das Equações Diferenciais Ordinárias

Um problema de Cauchy consiste de uma EDO do tipo (2.1) e dados iniciais  $(t_0, x_0) \in \Omega$  tais que

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

**Observação 2.6.** Este problema é também denominado como Problema de Valor Inicial (PVI).

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, prova-se que uma função contínua  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cujo gráfico está em  $\Omega$ , é solução de (2.3) se, e somente se, é solução de

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \forall t \in I. \quad (2.4)$$

**Teorema 2.6. (Peano)** *Seja  $f$  contínua em  $\Omega = I_a \times B_b$ , onde  $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$  e  $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq b\}$ . Se  $|f| < M$  em  $\Omega$ , então*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*admite pelo menos uma solução em  $I_\alpha$ , onde  $\alpha = \min \{a, \frac{b}{M}\}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $R = R(\alpha, \beta, t_0, x_0) = \{(t, x) \in \Omega / |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\}$  e  $A = A(\alpha, \beta, t_0, x_0) = \{\phi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n / \phi \text{ é contínua, } |\phi(t) - x_0| \leq \beta, \text{ para todo } t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \phi(t_0) = x_0\}$ .

Note que  $A \subset C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$ .

Consideramos  $\alpha, \beta$  de modo que  $R \subset \Omega$ . Assim, definimos  $T : A \rightarrow A$  por

$$T(\phi(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Para que  $T(A) \subset A$ , consideramos  $\alpha$  de modo que  $M\alpha \leq \beta$ , onde  $M = \sup_{(t,x) \in R} |f(t, x)|$ .

É claro que  $T(\phi)$  é contínua e  $T(\phi(t_0)) = x_0$ . Note que

$$|T(\phi(t)) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \phi(s))| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq \beta.$$

Portanto,  $T(A) \subset A$ .

Afirmamos que  $A$  é convexo, fechado e limitado. Provemos isso:

i)  $A$  é convexo.

Sejam  $\phi, \psi \in A$  e  $\theta \in [0, 1]$ . Então,

$$(1 - \theta)\phi(t_0) + \theta\psi(t_0) = (1 - \theta)x_0 + \theta x_0 = x_0.$$

E, além disso,

$$\begin{aligned} |(1 - \theta)\phi(t) + \theta\psi(t) - x_0| &= |(1 - \theta)\phi(t) + \theta\psi(t) - (1 - \theta)x_0 - \theta x_0| = \\ &= |(1 - \theta)(\phi(t) - x_0) + \theta(\psi(t) - x_0)| \leq (1 - \theta)|\phi(t) - x_0| + \theta|\psi(t) - x_0| \leq \\ &\leq (1 - \theta)\beta + \theta\beta = \beta, \forall t \in I_\alpha. \end{aligned}$$

Portanto,  $A$  é convexo.

ii)  $A$  é fechado.

Seja  $\phi \in \bar{A}$ . Então, existe uma sequência  $(\phi_n) \subset A$  tal que  $\phi_n \rightarrow \phi$ .

Assim,

(1)  $x_0 = \phi_n(t_0) \rightarrow \phi(t_0) \Rightarrow \phi(t_0) = x_0.$

Para cada  $n$ ,  $|\phi_n(t) - x_0| \leq \beta$ ,  $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ . Daí,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n(t_0) - x_0| \leq \beta$ , donde:

(2)  $|\phi(t) - x_0| \leq \beta$ , para  $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

(3) Além disso,  $\phi$  é contínua, pois cada  $\phi_n$  é contínua e  $\phi_n$  converge para  $\phi$  uniformemente.

Por (1), (2) e (3), concluímos que  $\phi \in A$ .

iii)  $A$  é limitado.

Para qualquer  $\phi \in A$ , temos  $\|\phi\| = \sup_{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} |\phi(t)| \leq \beta + |x_0|.$

Ressaltando,  $|\phi(t)| - |x_0| \leq |\phi(t) - x_0| \leq \beta$ , uma vez que  $\phi \in A$ . Daí,  $|\phi(t)| \leq \beta + |x_0|$ , para qualquer  $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

Mostremos agora que  $T$  é contínua em  $A$ .

Note que

$$|T(\phi(t)) - T(\psi(t))| \leq \left| \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s)) ds \right|, \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Como  $f$  é contínua em  $R$  e  $R$  é compacto, então  $f$  é uniformemente contínua em  $R$ .

Logo, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $|(s, x) - (s, y)| < \delta \Rightarrow |f(s, x) - f(s, y)| < \epsilon.$

Assim,

$$|T(\phi(t)) - T(\psi(t))| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \epsilon ds \right| = \epsilon |t - t_0| \leq \epsilon \alpha,$$

para  $|\phi(s) - \psi(s)| < \delta$ ,  $s \in [t_0, t_0 + \alpha]$ .

Mostremos que  $T$  é compacto.

Basta mostrar que  $T(B)$  é relativamente compacto,  $\forall B \subset A$ , limitado.

Para tal, usaremos Teorema 2.2.

Como  $T(B) \subset A$  e  $A$  é limitado, temos que  $T(B)$  é limitado. Resta mostrar que  $T(B)$  é equicontínuo. Note que, dada  $\phi \in B$ ,

$$\begin{aligned} |T(\phi(t)) - T(\phi(s))| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds - \int_{t_0}^s f(z, \phi(z)) dz \right| \leq \\ &\leq \left| \int_s^t f(z, \phi(z)) dz \right| \leq \left| \int_s^t |f(z, \phi(z))| dz \right| \leq M |t - s|. \end{aligned}$$

Portanto, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \frac{\epsilon}{M}$  tal que

$$|t - s| < \delta \Rightarrow |T(\phi(t)) - T(\phi(s))| < \epsilon, \forall \phi \in A.$$

Por conseguinte,  $T$  tem um ponto fixo, ou seja, o PVI.

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tem pelo menos uma solução em  $I_\alpha$ .

□

Vejam os um exemplo em que existe uma solução para a equação diferencial, porém a mesma não é única.

**Exemplo 2.14.** Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} = \sin(2t)y^{\frac{1}{3}}$$

Note que existe solução ( $y(t) = 0$ ), porém esta não é única. Reescrevendo a equação, temos

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}} \frac{dy}{dt} = \sin(2t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{3y^{\frac{2}{3}}}{2} = \sin(2t) \Rightarrow \frac{3y^{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{1 - \cos(2t)}{2} = \sin^2(t).$$

Assim, obtemos  $y(t) = \pm \sqrt{\frac{8}{27}} \sin^3(t)$  como soluções da equação. Note que o problema está no lado direito da equação, uma vez que  $y$  não tem derivada parcial contínua em  $y = 0$  e por isso não há garantia da solução ser única.

Para a garantia da unicidade da solução, temos o seguinte teorema:

**Teorema 2.7. (Picard)** *Sejam  $a, b > 0$  e  $f$  contínua e lipschitziana relativamente à segunda variável em  $\Omega = I_a \times B_b$ , onde  $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$  e  $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$ . Se  $|f| \leq M$  em  $\Omega$ , então existe uma única solução de (2.3) em  $I_\alpha$ , onde  $\alpha = \min \{a, \frac{b}{M}\}$ .*

*Demonstração.* Seja  $X = C(I_\alpha, B_b)$  o espaço métrico completo das funções contínuas  $\varphi : I_\alpha \rightarrow B_b$ , com a métrica

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Para  $\varphi \in X$ , seja  $F(\varphi) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por:

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, t \in I_\alpha.$$

Destacamos as seguintes propriedades de  $F$ :

- (1)  $F(X) \subseteq X$



De fato, para todo  $t \in I_\alpha$ ,

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \right| \leq \\ &\leq M \left| \int_{t_0}^t ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq M \frac{b}{M} \leq b. \end{aligned}$$

(2)  $F^n$  é uma contração, para  $n$  suficientemente grande.

Para todo par  $\varphi_1, \varphi_2 \in X$  e todo  $n \geq 1$ , mostremos que

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq K^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), t \in I_\alpha, \quad (2.5)$$

onde  $K$  é a constante de Lipschitz de  $f$ .

Façamos tal verificação utilizando indução sobre  $n$ .

Para  $n = 1$ , temos

$$\begin{aligned} |F(\varphi_1)(t) - F(\varphi_2)(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s)) ds - (x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_2(s)) ds) \right| = \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t K|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \right| \leq Kd(\varphi_1, \varphi_2) \left| \int_{t_0}^t 1 ds \right| = K|t - t_0|d(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Suponhamos que a desigualdade (2.5) seja válida para  $k$ . Então,

$$\begin{aligned} |F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)| &= |F(F^k((\varphi_1)(t))) - F(F^k((\varphi_2)(t)))| = \\ &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, F^k(\varphi_1)(s)) ds - (x_0 + \int_{t_0}^t f(s, F^k(\varphi_2)(s)) ds) \right| \leq \\ &= K \left| \int_{t_0}^t K^k \frac{|s - t_0|^k}{k!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| = K \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{k!} K^k \left| \int_{t_0}^t |s - t_0| ds \right| = \\ &= K \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{k!} K^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{k+1} = \frac{K^{k+1}|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade (2.5) vale para todo  $n \geq 1$ .

Segue disto que

$$d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Portanto,  $F^n$  é uma contração para  $n$  suficientemente grande, já que para  $n$  suficientemente grande,

$$\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1. \quad (2.6)$$

A desigualdade (2.6) é decorrente dos fatos de que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K^n \alpha^n}{n!} = 0$  e a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n \alpha^n}{n!}$  converge pelo Teste da Razão. Assim, para  $n$  suficientemente grande, podemos afirmar que  $\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1$ .

Pelo **Corolário 2.1**, existe uma única  $\varphi \in X$  tal que  $F(\varphi) = \varphi$ , ou seja, existe uma única função  $\varphi : I_\alpha \rightarrow B_b$  tal que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

concluindo a demonstração. □

**Observação 2.7.** Se exigirmos  $\frac{\partial f}{\partial x}$  contínua, então  $\exists L > 0$  t.q.  $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq L$  em  $R$ . Neste caso, segue naturalmente que  $f$  é lipschitziana com respeito à segunda componente.

O próximo resultado será útil no estudo da dependência contínua em respeito aos parâmetros iniciais.

**Lema 2.2. (Gronwall)** *Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  e  $u, v$  funções contínuas não negativas em  $[a, b]$  que satisfazem*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s) ds, t \in [a, b].$$

Então

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)u(s) ds}, t \in [a, b].$$

Em particular, se  $\alpha = 0$ , então  $u \equiv 0$ .

*Demonstração.* Se  $\alpha > 0$ , para

$$\omega(t) = \alpha + \int_a^t v(s)u(s) ds,$$

temos  $\omega(a) = \alpha$ ,  $\omega(t) \geq \alpha > 0$ .

De  $\omega'(t) = v(t)u(t) \leq v(t)\omega(t)$ , temos  $\omega'(t)/\omega(t) \leq v(t)$ . Integrando entre  $a$  e  $t$ , obtemos

$$\int_a^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)} ds \leq \int_a^t v(s) ds \Rightarrow \ln(\omega(t)) - \ln(\omega(a)) \leq \int_a^t v(s) ds$$

$$\ln\left(\frac{\omega(t)}{\alpha}\right) \leq \int_a^t v(s) ds \Rightarrow \omega(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds},$$

donde

$$u(t) \leq \omega(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}.$$

Se  $\alpha = 0$ , segue imediatamente. □

## 2.2.2 Dependência Contínua

Uma solução  $\phi$  do sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.7)$$

passando pelo ponto  $(t_0, \eta)$  depende não apenas de  $t$ , mas também do ponto inicial  $(t_0, \eta)$ . Quando desejamos enfatizar essa dependência, escrevemos a solução como  $\phi(t, t_0, \eta)$ . Mostraremos que, sob certas hipóteses,  $\phi$  depende continuamente dos valores iniciais e que de fato  $\phi$  é uma função contínua da terna  $(t, t_0, \eta)$ .

**Teorema 2.8.** *Suponha que  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) são contínuas e limitadas numa região  $D$ , com  $|f(t, x)| \leq M$ ,  $\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x_j} \right| \leq K$ , para  $(t, x)$  em  $D$ . Seja  $\phi$  uma solução de (2.7) passando pelo ponto  $(t_0, \eta)$  e seja  $\psi$  uma solução de (2.7) passando pelo ponto  $(\hat{t}_0, \hat{\eta})$ . Suponha que  $\phi$  e  $\psi$  existam em algum intervalo  $\alpha < t < \beta$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que se  $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta$  e  $|\eta - \hat{\eta}| < \delta$ , então*

$$|\phi(t) - \psi(\hat{t})| < \epsilon, \quad t, \hat{t} \in (\alpha, \beta). \quad (2.8)$$

*Demonstração.* Se  $\phi$  é solução de (2.7) passando pelo ponto  $(t_0, \eta)$ , temos, para todo  $t \in ]\alpha, \beta[$ ,

$$\phi(t) = \eta + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds. \quad (2.9)$$

Se  $\psi$  é solução de (2.7) passando pelo ponto  $(\hat{t}_0, \hat{\eta})$ , temos, para todo  $t$ ,  $\alpha < t < \beta$ ,

$$\psi(t) = \hat{\eta} + \int_{\hat{t}_0}^t f(s, \psi(s)) ds. \quad (2.10)$$

Note que

$$\int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds = \int_{t_0}^{\hat{t}_0} f(s, \phi(s)) ds + \int_{\hat{t}_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Subtraindo (2.10) de (2.9), temos

$$\phi(t) - \psi(t) = \eta - \hat{\eta} + \int_{\hat{t}_0}^t [f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))] ds + \int_{t_0}^{\hat{t}_0} f(s, \phi(s)) ds.$$

Assim,

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq |\eta - \hat{\eta}| + \left| \int_{\hat{t}_0}^t [f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right| + \left| \int_{t_0}^{\hat{t}_0} f(s, \phi(s)) ds \right|. \quad (2.11)$$

Pelas hipóteses,  $|f(t, x)| \leq M$  e  $\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x_j} \right| \leq K$ . Usando o Teorema do Valor Médio, podemos estimar o lado direito da desigualdade (2.11), obtendo

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq |\eta - \hat{\eta}| + K \left| \int_{\hat{t}_0}^t |\phi(s) - \psi(s)| ds \right| + M|\hat{t}_0 - t_0|.$$

Se  $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta$  e  $|\eta - \hat{\eta}| < \delta$ , então

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq \delta + K \left| \int_{\hat{t}_0}^t |\phi(s) - \psi(s)| ds \right| + M\delta. \quad (2.12)$$

Utilizando o Lema de Gronwall na desigualdade (2.12), temos

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq \delta(1 + M)e^{K|t - \hat{t}_0|} \leq \delta(1 + M)e^{K(\beta - \alpha)},$$

usando o fato de que  $|t - \hat{t}_0| < \beta - \alpha$ . Além disso,

$$|\psi(t) - \psi(\hat{t})| \leq \left| \int_{\hat{t}}^t |f(s, \psi(s))| ds \right| \leq M|t - \hat{t}| \leq M\delta,$$

se  $|t - \hat{t}| < \delta$ . Assim,

$$|\phi(t) - \psi(\hat{t})| \leq |\phi(t) - \psi(t)| + |\psi(t) - \psi(\hat{t})| \leq \delta(1 + M)e^{K(\beta - \alpha)} + \delta M.$$

Agora, dado  $\epsilon > 0$ , basta tomar  $\delta < \frac{\epsilon}{M + (1 + M)e^{K(\beta - \alpha)}}$  para obter a condição em (2.8), terminando a demonstração. □

Consideraremos agora, o problema da dependência das soluções em relação aos valores iniciais e parâmetros. Para maiores detalhes, consulte a referência [1].

Seja

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l), i = 1, 2, \dots, n,$$

um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em que os segundos membros

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l), i = 1, 2, \dots, n,$$

assim como suas derivadas parciais

$$f_{i(j)}^{(j)}(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l), i = 1, 2, \dots, n,$$

são definidas e contínuas num aberto  $D$  de  $\mathbb{R}^{n+1+l}$ . Vetorialmente, escreveremos

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda),$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e  $f = (f_1, \dots, f_n)$ .

**Lema 2.3.** *Suponha que  $\{f_n\}, n = 1, 2, \dots$  seja uma seqüência de funções contínuas definidas num aberto  $D$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f_0$  uniformemente num conjunto compacto de  $D$ . Suponha que  $(t_n, x_n)$  é uma seqüência de pontos em  $D$  convergindo para  $(t_0, x_0)$  em  $D$  quando  $n \rightarrow \infty$  e seja  $\phi_n(t), n = 0, 1, 2, \dots$  uma solução da equação  $\dot{x} = f_n(t, x)$  passando pelo ponto  $(t_n, x_n)$ . Se  $\phi_0(t)$  está definida em  $[a, b]$  e é única, então existe um inteiro  $n_0$  de tal modo que cada  $\phi_n(t), n \geq n_0$ , pode ser definida em  $[a, b]$  e converge para  $\phi_0(t)$  uniformemente em  $[a, b]$ .*

A prova deste resultado pode ser encontrada em [1].

**Teorema 2.9.** *Suponha que  $f(t, x, \lambda)$  é uma função contínua em relação a  $(t, x, \lambda)$  para  $(t, x)$  em um conjunto aberto  $D$  e  $\lambda$  em uma vizinhança de  $\lambda_0$  em  $\mathbb{R}^n$ . Se  $x(t, t_0, x_0, \lambda_0)$ , com  $x(t_0, t_0, x_0, \lambda_0) = x_0$  é solução de*

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda)$$

em  $[a, b]$  e é única, então existe uma solução  $x(t, s, \eta, \lambda), x(s, s, \eta, \lambda) = \eta$ , da equação  $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$  definida em  $[a, b]$  para todo  $s, \eta, \lambda$  suficientemente próximos de  $t_0, x_0, \lambda_0$  e ela é uma função contínua de  $(t, s, \eta, \lambda)$  em  $(t, t_0, x_0, \lambda_0)$ .

*Demonstração.* Pelo Lema 2.3,  $x(t, s, \eta, \lambda)$  é uma função contínua de  $s, \eta, \lambda$  em  $t_0, x_0, \lambda_0$  uniformemente em relação a  $t$  em  $[a, b]$ . Assim, para qualquer  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|x(t, s, \eta, \lambda) - x(t, t_0, x_0, \lambda_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

se  $|(s, \eta, \lambda) - (t_0, x_0, \lambda_0)| < \delta_1$ . Se  $x(t, t_0, x_0, \lambda_0)$  é uma função contínua de  $t$ , para  $t$  em  $[a, b]$ , então existe um  $\delta_2$  tal que

$$|x(t, t_0, x_0, \lambda_0) - x(\tau, t_0, x_0, \lambda_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

se  $|t - \tau| < \delta_2$ . Seja  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Então

$$\begin{aligned} |x(t, s, \eta, \lambda) - x(\tau, t_0, x_0, \lambda_0)| &= \\ &= |x(t, s, \eta, \lambda) - x(t, t_0, x_0, \lambda_0) + x(t, t_0, x_0, \lambda_0) - x(\tau, t_0, x_0, \lambda_0)| \leq \\ &\leq |x(t, s, \eta, \lambda) - x(t, t_0, x_0, \lambda_0)| + |x(t, t_0, x_0, \lambda_0) - x(\tau, t_0, x_0, \lambda_0)| < \epsilon, \end{aligned}$$

desde que  $|(s, \eta, \lambda) - (t_0, x_0, \lambda_0)| + |t - \tau| < \delta$ .

□

**Definição 2.23.** *Chama-se **solução maximal** de (2.7) a toda solução  $\varphi$  definida num intervalo  $I$ , denominado **intervalo maximal** de  $\varphi$ , tal que se  $\psi$  é uma outra solução no intervalo  $J$  com  $I \subseteq J$  e  $\varphi = \psi/I$ , então  $I = J$ . Em outras palavras,  $\varphi$  é maximal se não admite nenhuma extensão que também é solução de (2.7).*

No próximo capítulo trataremos do caso em que o sistema é autônomo, objeto de nossos estudos.



## 3 Equações Autônomas

Neste capítulo, apresentamos um estudo sobre as Equações Diferenciais Ordinárias Autônomas, baseando-se nas referências [2], [3] e [7], destacando o estudo qualitativo de sistemas bidimensionais e também abordando conceitos de estabilidade para os mesmos.

### 3.1 Sistemas Autônomos

**Definição 3.1.** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua, onde  $D$  é um aberto. Uma EDO autônoma é da forma*

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.1}$$

*ou seja, a derivada não depende explicitamente da variável independente  $t$ .*

**Exemplo 3.1.** A equação

$$\frac{dy}{dx} = -y - 2$$

é uma equação diferencial linear de primeira ordem autônoma.

Quando tratamos do comportamento qualitativo das equações diferenciais ordinárias, dois conceitos são importantes:

**Definição 3.2.** *Dada uma função contínua  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , em que  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto, consideramos a equação autônoma (3.1). Dizemos que  $D$  é o espaço de fase da equação.*

**Definição 3.3.** *Se  $x = x(t)$  é uma solução da equação (3.1) com intervalo maximal  $I$ , então o conjunto  $\{x(t) : t \in I\} \subset D$  diz-se uma órbita da equação.*

Vejamos mais algumas definições para o bom entendimento dos próximos tópicos:

**Definição 3.4.** *Um ponto  $x_0 \in D$  com  $f(x_0) = 0$  é chamado ponto crítico da equação (3.1).*

Note que a função constante  $x(t) = x_0$  é solução de (3.1) em  $\mathbb{R}$ , pois  $\dot{x}(t) = 0 = f(x_0) = f(x(t))$ . Denominamos as soluções constantes de uma equação diferencial como "pontos de equilíbrio", também chamados de soluções estacionárias.

**Observação 3.1.** Todo ponto de equilíbrio é um ponto crítico e sempre define uma órbita de uma equação diferencial.

**Definição 3.5.** Uma solução  $x = x(t)$  da equação (3.1) é chamada global se tem intervalo maximal igual a  $\mathbb{R}$ .

**Observação 3.2.** O chamado retrato de fase da equação é obtido representando as órbitas no conjunto  $D$ , juntamente com a indicação do sentido do movimento.

**Definição 3.6.** Dizemos que o ponto de equilíbrio  $x_0$  da equação  $\dot{x} = f(x)$  é estável se, dado  $\epsilon > 0$ , é possível determinar um  $\delta > 0$  dependente apenas de  $\epsilon$  tal que se  $\|\zeta - x_0\| < \delta$ , a solução  $x(t, \zeta)$  do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = \zeta \end{cases}$$

existe para todo  $t > 0$  e

$$\|x(t, \zeta) - x(t, x_0)\| = \|x(t, \zeta) - x_0\| < \epsilon.$$

Se o ponto de equilíbrio não for estável, ele é chamado de instável.

**Definição 3.7.** Dizemos que o ponto de equilíbrio  $x_0$  de  $\dot{x} = f(x)$  é assintoticamente estável se for estável e se existe um número  $\delta_0 > 0$  tal que se  $x(t, \eta)$  é solução de (3.1) satisfazendo  $|\eta - x_0| < \delta_0$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \eta) = x_0$ .

**Definição 3.8.** Um sistema de equações diferenciais de primeira ordem é chamado autônomo quando pode ser posto na forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Assim, a variável  $t$  não aparece explicitamente no membro direito das equações diferenciais.

Denotando por  $X(t)$  e  $g(X)$  os respectivos vetores coluna, isto é,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad g(X) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

o sistema autônomo (3.2) pode ser escrito na forma compacta de um vetor coluna  $\dot{X} = g(X)$ .

Na próxima seção tratamos do caso linear, bem como introduzimos o conceito de exponencial de matrizes e suas propriedades.



### 3.2 Sistemas Lineares Autônomos

**Definição 3.9.** Dada uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , onde  $M_n(\mathbb{R})$  é o espaço vetorial de todas as matrizes quadradas de ordem  $n$  com entradas reais, definimos a exponencial de  $A$  por

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k, \quad (3.3)$$

com a convenção de que  $e^0 = I$  (matriz identidade de ordem  $n$ ).

Note que  $e^A$  está bem definida devido ao seguinte resultado:

**Proposição 3.1.** A série de potências em (3.3) é convergente para qualquer  $A$ .

*Demonstração.* Consideremos as reduzidas

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k \quad \text{e} \quad S_m = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k,$$

tais que  $n > m$  e denominemos  $\|A\| = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Assim, dado  $\epsilon > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \left\| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=m}^n \frac{1}{k!} \|A\|^k = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k!} a^k < \epsilon, \text{ para } n, m > n_0, \end{aligned}$$

em que a existência de  $n_0$  é garantida pelo fato de que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge uniformemente,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Logo ela é de Cauchy, ou seja,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n, m > n_0, \left| \sum_{k=m}^n \frac{1}{k!} a^k \right| < \epsilon.$$

□

**Exemplo 3.2.** Se  $A$  é uma matriz diagonal com entradas  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  na diagonal principal, então

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Os dois resultados seguintes podem ser facilmente demonstrados usando a **Definição 3.9**.

**Proposição 3.2.** *Se a matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é da forma  $A = \lambda I + N$ , com*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então

$$e^A = e^\lambda \left( I + N + \frac{1}{2!}N^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}N^{n-1} \right).$$

**Proposição 3.3.** *Se  $A$  é uma matriz quadrada com a forma canônica de Jordan  $J$ , então*

$$e^A = e^{S^{-1}JS} = S^{-1}e^J S = S \begin{pmatrix} e^{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_k} \end{pmatrix} S^{-1},$$

onde  $S$  é uma matriz invertível de ordem  $n$  (veja o apêndice - Teorema A.3).

**Proposição 3.4.**  $(e^{At})' = Ae^{At}$ , para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Temos

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k.$$

Como a convergência é uniforme, pela Proposição 3.1, podemos derivar a série termo a termo para obter

$$(e^{At})' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k t^{k-1} A^k = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^{k-1} = Ae^{At},$$

para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ . □

Consideremos o sistema linear com coeficientes constantes

$$\dot{x} = Ax, \tag{3.4}$$

onde  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , com  $1 \leq i, j \leq n$  e  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Se  $x_1(t), x_2(t),$

$x_3, \dots, x_n(t)$  são soluções linearmente independentes da equação (3.4), então toda solução  $x(t)$  pode ser escrita da forma

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t). \tag{3.5}$$

Seja  $X(t)$  a matriz na qual as colunas são dadas por  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Então, a expressão (3.5) pode ser escrita na forma

$$x(t) = X(t).c, \text{ onde } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

**Definição 3.10.** A matriz  $X(t)$  é chamada matriz solução fundamental de (3.4) se suas colunas formam um conjunto linearmente independente de soluções de (3.4).

**Lema 3.1.** Sejam  $X(t)$  e  $Y(t)$  duas matrizes soluções fundamentais de (3.4). Então, existe uma matriz constante  $C$  tal que  $Y(t) = CX(t)$ .

*Demonstração.* Por definição, as colunas  $x^1(t), \dots, x^n(t)$  de  $X(t)$  e  $y^1(t), \dots, y^n(t)$  de  $Y(t)$  são conjuntos soluções linearmente independentes de (3.4). Em particular, portanto, cada coluna de  $Y(t)$  pode ser escrita como uma combinação linear das colunas de  $X(t)$ , isto é, existem constantes  $c_1^j, \dots, c_n^j$  tais que

$$y^j(t) = c_1^j x^1(t) + c_2^j x^2(t) + \dots + c_n^j x^n(t), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Seja  $C$  a matriz  $(c^1, c^2, \dots, c^n)$ , onde

$$c^j = \begin{pmatrix} c_1^j \\ c_2^j \\ \vdots \\ c_n^j \end{pmatrix}.$$

Então, as  $n$  equações (3.6) são equivalentes à equação matricial  $Y(t) = X(t)C$ . □

**Teorema 3.1.** Seja  $X(t)$  uma matriz solução fundamental da equação diferencial (3.4). Então,

$$e^{At} = X(t).X^{-1}(0).$$

Em outras palavras, qualquer matriz solução fundamental é escrita como produto de  $X(0)$  com  $e^{At}$ .

*Demonstração.* Seja  $X(t)$  uma matriz solução fundamental de (3.4). Então, pela Proposição 3.2 e pelo Lema 3.1, existe uma matriz constante  $C$  tal que

$$e^{At} = X(t)C.$$

Tomando  $t = 0$  na igualdade acima, segue que  $I = X(0)C$ , o que implica que  $C = X^{-1}(0)$ . Consequentemente,  $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$ . □

**Proposição 3.5.** Dados  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e  $A$  uma matriz  $n \times n$  com coeficientes constantes, a solução da equação  $\dot{x} = Ax$ , com condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , é dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0, t \in \mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema de Picard, a solução é única e como as soluções da equação tem intervalo máximo igual a  $\mathbb{R}$ , temos:

$$x(t_0) = e^{A0}x_0 = e^0x_0 = Idx_0 = x_0$$

e

$$\dot{x}(t) = Ae^{A(t-t_0)}x_0 = Ax(t).$$

□

**Exemplo 3.3.** Vamos encontrar  $e^{At}$  se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

Basta encontrarmos 3 soluções linearmente independentes da equação diferencial

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} X,$$

através do cálculo de autovalores e autovetores.

Para isto, fazemos  $\det(A - \lambda I) = 0$ , encontrando 3 diferentes autovalores (veja Definição A.8 - Apêndice):  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$  e  $\lambda_3 = 5$ . (Mais adiante, ressaltamos o método para resolvermos equações do tipo (3.4)).

Em seguida, para cada autovalor encontrado, fazemos  $(A - \lambda_i I)v = 0$ , onde  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  e 0 é o vetor nulo de  $\mathbb{R}^3$ .

Assim, encontramos 3 diferentes autovetores linearmente independentes:  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , associado a  $\lambda_1$ , obtendo  $x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , associado a  $\lambda_2$ , obtendo

$x_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , associado a  $\lambda_3$ , obtendo  $x_3(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Então,  $X(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{pmatrix}$  é uma matriz fundamental. Daí,

$$X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} e^{At} &= \exp \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} t \right\} = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \\ 0 & e^{3t} & -e^{3t} + e^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.3 Sistemas Bidimensionais

Consideraremos agora o sistema (3.4), no caso em que o sistema é bidimensional linear e autônomo, ou seja, pode ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde os coeficientes  $a, b, c, d$  são considerados constantes.

Para este sistema, o ponto de equilíbrio é a origem  $(0, 0)$ , desde que  $ad - bc \neq 0$ . Este ponto é *isolado*, isto é, é o único ponto de equilíbrio no disco

$$B_\epsilon(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \epsilon\}$$

se  $ad - bc \neq 0$ . De fato, o sistema  $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$  tem solução  $(0, 0)$  única se  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ .

Note que o sistema acima pode ser representado na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

ou simplesmente,  $\dot{X} = AX$ , onde  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  é a matriz dos coeficientes constantes reais. É possível associar o sistema à equação diferencial escalar  $\dot{x} = ax$ , cuja solução

geral é dada por  $x(t) = ce^{at}$ . Isso nos sugere tentar soluções para o sistema (3.8) na forma  $X(t) = Ce^{\lambda t}$ , onde  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ .

Substituindo em (3.8), temos  $\lambda Ce^{\lambda t} = ACE^{\lambda t} \Rightarrow AC = \lambda C$ , ou seja,  $(A - \lambda I)C = 0$ . Assim, a solução  $X(t)$  é uma solução se  $\lambda$  é um autovalor com autovetor  $C$  associado.

Desta maneira, substituindo em (3.7),  $X(t) = Ce^{\lambda t} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ,  $c_1, c_2$  e  $\lambda$  devem satisfazer

$$\begin{cases} ac_1e^{\lambda t} + bc_2e^{\lambda t} = c_1\lambda e^{\lambda t} \\ cc_1e^{\lambda t} + dc_2e^{\lambda t} = c_2\lambda e^{\lambda t}, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} (a - \lambda)c_1 + bc_2 = 0 \\ cc_1 + (d - \lambda)c_2 = 0. \end{cases}$$

Como estamos interessados em soluções não triviais (i.e.,  $c_1 \neq 0$  ou  $c_2 \neq 0$  ou ambos diferentes de zero), segue-se que o determinante do sistema deve ser zero:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Como já observamos, as raízes dessa equação do segundo grau são os autovalores da matriz  $A$ . Além disso, denominamos  $P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$  como polinômio característico.

**Exemplo 3.4.** Considere o sistema  $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 8x + y \end{cases}$ . Reescrevendo-o na forma matricial, temos

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Determinemos os autovalores encontrando os zeros do polinômio característico, isto é,  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

$$\begin{vmatrix} (1 - \lambda) & 2 \\ 8 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0.$$

Resolvendo a equação, encontramos os autovalores  $\lambda_1 = 5$  e  $\lambda_2 = -3$ .

Para encontrar o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1 = 5$ , fazemos:

$$(A - 5I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 5 & 2 \\ 8 & 1 - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtendo o sistema

$$\begin{cases} -4v_1 + 2v_2 = 0 \\ 8v_1 - 4v_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Assim, } v^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para  $v_1 = 1$  o autovetor é dado por  $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e, como uma solução do sistema é dada por  $X(t) = v^{(1)}e^{\lambda t}$ , logo

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Para encontrar o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_2 = -3$ , fazemos:

$$(A - (-3)I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - (-3) & 2 \\ 8 & 1 - (-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtendo o sistema

$$\begin{cases} 4v_1 + 2v_2 = 0 \\ 8v_1 + 4v_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Assim, } v^{(2)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Para  $v_1 = 1$  o autovetor é dado por  $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  e, como uma solução do sistema é dada por  $X^{(2)}(t) = ve^{\lambda t}$ , logo

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

Verificando se  $X^{(1)}$  e  $X^{(2)}$  formam uma base para o espaço solução:

$$W(X^{(1)}, X^{(2)}) = \begin{vmatrix} e^{5t} & e^{-3t} \\ 2e^{5t} & -2e^{-3t} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Portanto,  $X^{(1)}$  e  $X^{(2)}$  são linearmente independentes e, como a solução geral é dada por  $X(t) = c_1X^{(1)}(t) + c_2X^{(2)}(t)$ , temos:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

### 3.3.1 Estudo qualitativo de sistemas autônomos $2 \times 2$

Nesta subseção iremos apresentar um estudo completo para os sistemas lineares do tipo  $\dot{X} = AX$ , onde  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Para isto, trataremos das matrizes em sua forma de Jordan (consulte o Apêndice A).

**Caso A)** Consideramos primeiro uma matriz  $A \in M_2(\mathbb{R})$  com a forma canônica de Jordan  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  com  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Sejam  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  autovetores l.i. de  $A$  associados respectivamente aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . A solução geral da equação  $\dot{X} = AX$  é escrita na forma

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \quad (3.9)$$

com  $c_1, c_2, t \in \mathbb{R}$ . Consideremos agora vários casos:

**Caso i)**  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ .

Note que, para  $c_1, c_2 > 0$ , temos:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = +\infty \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} c_2 e^{\lambda_2 t} = +\infty \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} c_2 e^{\lambda_2 t} = 0.$$

Ou seja, toda órbita não é limitada (exceto a trivial) e quando  $t \rightarrow +\infty$ , a órbita tende à origem.

Se  $c_1 \neq 0$  e  $c_2 = 0$  (ou reciprocamente  $c_2 \neq 0$  e  $c_1 = 0$ ), as órbitas permanecem na reta  $v_1$  (respectivamente  $v_2$ ) e tendem à origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

Quanto à concavidade, note que a curva  $t \mapsto (x_1(t), x_2(t)) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t})$ , contida no primeiro quadrante (assumindo  $c_1, c_2 \geq 0$ ; para outros valores de  $c_1$  e  $c_2$  a análise é análoga), tem componentes estritamente decrescentes. Podemos portanto, definir a segunda componente em função da primeira. Como

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ e } \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t},$$

segue da Regra da Cadeia que

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_1 c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}. \quad (3.10)$$

Note que  $\frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_1 c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} > 0$ . Assim, quando  $t \rightarrow -\infty$ , a equação (3.10) tende a zero e, tende a  $+\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Portanto, a função  $x_2$  é uma função crescente de  $x_1$ . O retrato de fase é dado de acordo com a Figura 3.1 e dizemos que a origem é um nó assintoticamente estável (ou atrator).



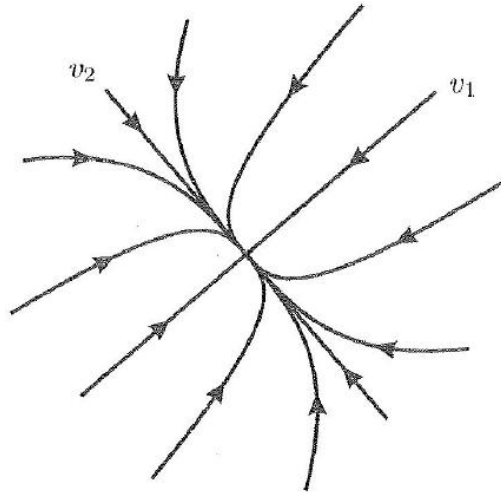


Figura 3.1: Caso i:  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ .

**Caso ii)**  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ .

Observe que toda órbita fica ilimitada conforme  $t$  varia, de acordo com os sinais de  $c_1$  e  $c_2$ . De fato:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_2}{c_1} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0.$$

E,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_2}{c_1} \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \frac{c_1}{c_2} > 0 \\ -\infty, & \text{se } \frac{c_1}{c_2} < 0. \end{cases}$$

Quanto à concavidade, observe que:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_1 c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}. \quad (3.11)$$

Quando  $t \rightarrow -\infty$ , a equação (3.11) tende a  $\pm\infty$  e quando  $t \rightarrow +\infty$ , a equação tende a zero. Portanto, conforme  $t$  varia, todas as órbitas se afastam do ponto de equilíbrio. Assim, dizemos que a origem é um nó instável e seu retrato de fase é representado na Figura 3.2.

**Caso iii)**  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

Da equação (3.9), temos:

- i) se  $c_1 = 0$ , a órbita é dada pela reta  $v_2$  e, se  $c_2 = 0$ , a órbita é dada por  $v_1$ .
- ii) se  $c_1, c_2 \neq 0$ , então as trajetórias ficam ilimitadas, quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Neste caso, a origem é denominada sela e o retrato de fase é dado de acordo com a Figura 3.3.

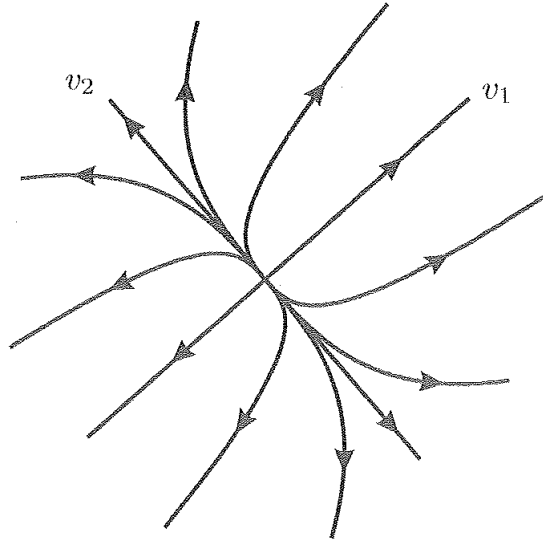


Figura 3.2: Caso ii:  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ .

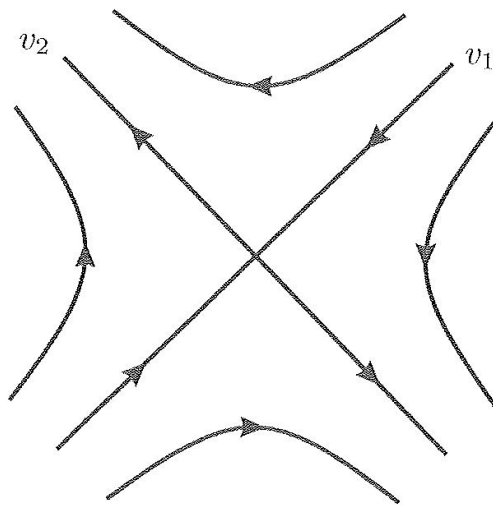


Figura 3.3: Caso iii:  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

**Caso iv)**  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 > 0$ .

A solução em (3.9) neste caso é dada por

$$x(t) = c_1 v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \quad (3.12)$$

$c_1, c_2, t \in \mathbb{R}$ .

Note que quando  $t \rightarrow +\infty$ ,  $c_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow +\infty$  e, quando  $t \rightarrow -\infty$ , a solução tende a  $c_1 v_1$ .

O retrato de fase é dado de acordo com a Figura 3.4.

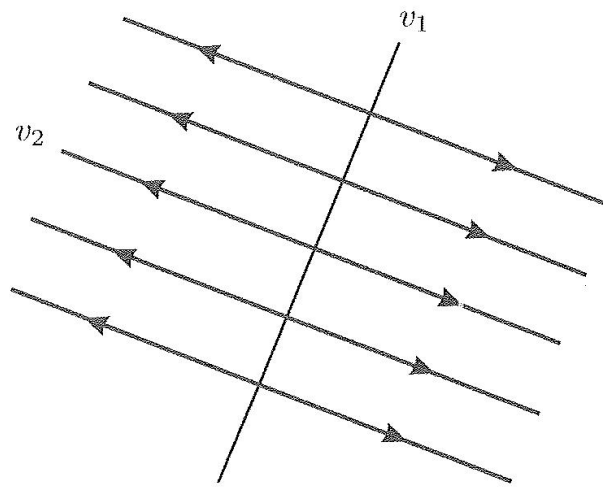


Figura 3.4: Caso iv:  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 > 0$ .

**Caso v)**  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 < 0$ .

O retrato de fase é dado de acordo com a Figura 3.5 e o caso é análogo ao anterior.

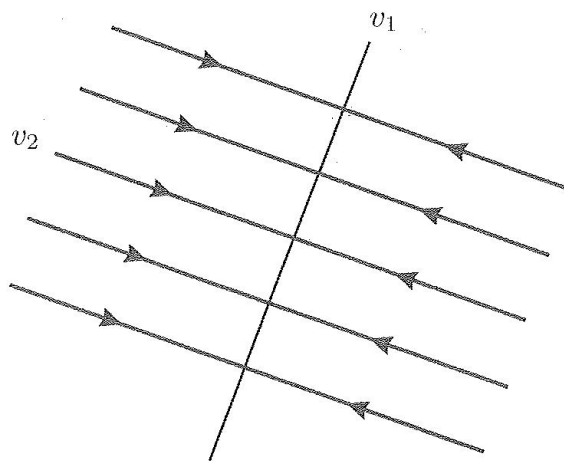


Figura 3.5: Caso v:  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 < 0$ .

**Caso vi)**  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ .

A solução geral em (3.9) neste caso é dada por

$$x(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2), \quad (3.13)$$

$c_1, c_2, t \in \mathbb{R}$ .

Temos que se  $t \rightarrow +\infty$ ,  $x(t) \rightarrow 0$  e  $t \rightarrow -\infty$ ,  $x(t) \rightarrow \infty$ .

Note que neste caso não existe nenhuma direção privilegiada, ao contrário do caso i), onde existe uma assíntota. O retrato de fase é dado de acordo com a Figura 3.6 e dizemos que a origem é um nó estável.

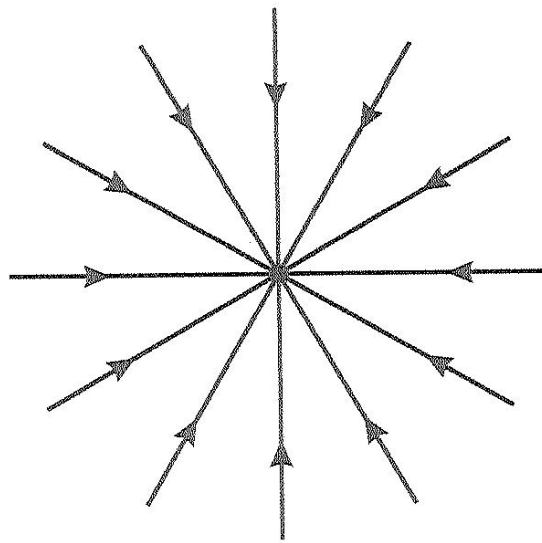


Figura 3.6: Caso vi:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ .

**Caso vii)**  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ .

O retrato de fase tem o mesmo aspecto do item vi), porém as trajetórias seguem no sentido oposto. Ele é dado de acordo com a Figura 3.7 e dizemos que a origem é um nó instável.

**Caso viii)**  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Neste caso, todos os pontos são pontos críticos.

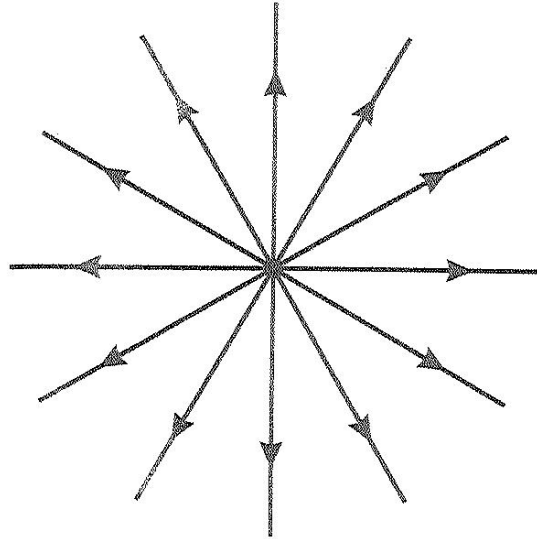


Figura 3.7: Caso vii:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ .

**Caso B)** Consideramos agora uma matriz  $A \in M_2$  com a forma canônica de Jordan  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  com  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Sejam  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  autovetores de  $A$  associados respectivamente ao autovalor  $\lambda$ . As soluções da equação  $\dot{x} = Ax$  podem ser escritas na forma

$$x(t) = [(c_1 + c_2 t)v_1 + c_2 v_2]e^{\lambda t}, \quad (3.14)$$

com  $c_1, c_2, t \in \mathbb{R}$  e os vetores  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  tais que

$$Av_1 = \lambda v_1 \quad e \quad Av_2 = \lambda v_1 + v_2. \quad (3.15)$$

Consideremos agora vários casos:

**Caso i)**  $\lambda < 0$ .

Observe que se  $t \rightarrow +\infty$ , então  $x(t) \rightarrow 0$  e se  $t \rightarrow -\infty$ ,  $x(t) \rightarrow +\infty$ . Neste caso, cada trajetória se aproxima da origem ao longo de uma reta tangente  $\theta = \theta_0$ , determinada por um autovetor de  $A$ .

O retrato de fase é dado de acordo com a Figura 3.8 e dizemos que a origem é um nó estável.

**Caso ii)**  $\lambda > 0$ .

O retrato de fase é dado de acordo com a Figura 3.9 e dizemos que a origem é um nó instável.

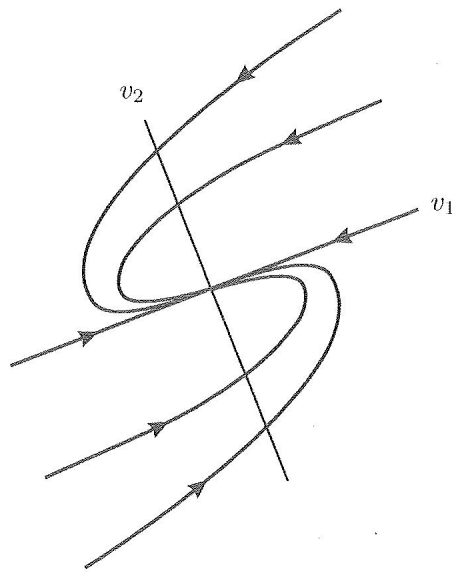


Figura 3.8: Caso i:  $\lambda < 0$ .

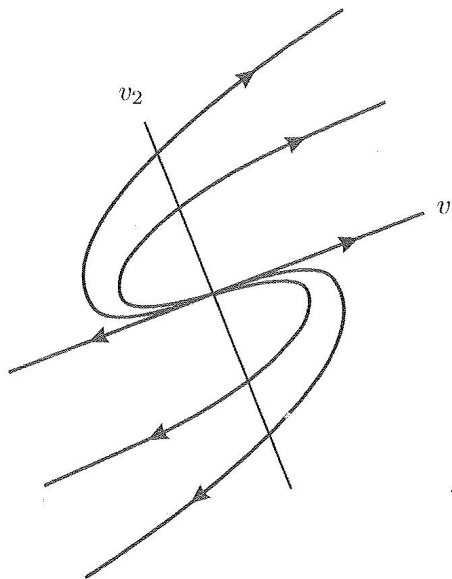


Figura 3.9: Caso ii:  $\lambda > 0$ .

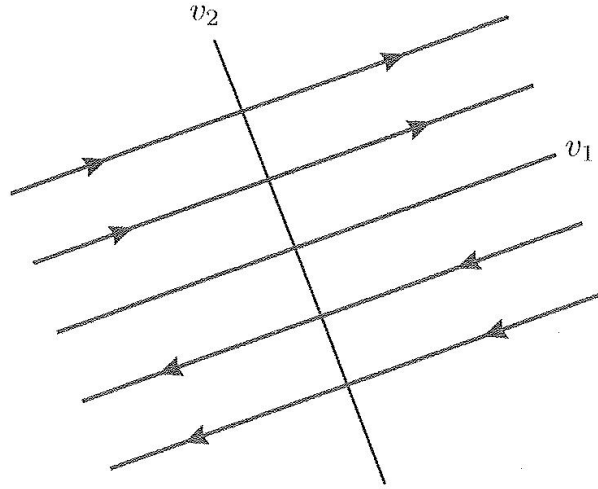
**Caso iii)**  $\lambda = 0$ .

A solução em (3.14) pode ser escrita da forma

$$x(t) = (c_1 v_1 + c_2 v_2) + c_2 t v_1, \quad (3.16)$$

$c_1, c_2, t \in \mathbb{R}$  e os vetores  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  satisfazem (3.14).

O retrato de fase é dado de acordo com a Figura 3.10.

Figura 3.10: Caso iii:  $\lambda = 0$ .

**Caso C)** Seja  $A$  uma matriz  $2 \times 2$  com autovalores  $\lambda_1 = a + ib$  e  $\lambda_2 = a - ib$ , com  $b \neq 0$ . As soluções da equação  $\dot{x} = Ax$  em  $\mathbb{C}^2$  são dadas por

$$x(t) = c_1 e^{(a+ib)t} v_1 + c_2 e^{(a-ib)t} v_2, \quad (3.17)$$

com  $t \in \mathbb{R}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  e  $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$  os autovetores associados respectivamente a  $a + bi$  e  $a - bi$ . Como a matriz  $A$  tem entradas reais, podemos tomar  $v_2 = \bar{v}_1$ . De fato, resulta de  $Av_1 = (a + ib)v_1$  que

$$A\bar{v}_1 = \overline{Av_1} = \overline{(a + ib)v_1} = (a - ib)\bar{v}_1,$$

e portanto  $\bar{v}_1$  é um autovetor associado a  $a - ib$ . Assim, tomando também  $c_2 = \bar{c}_1$ , obtemos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at} [c_1 \cos(bt) + c_1 i \operatorname{sen}(bt)] v_1 + e^{at} [\bar{c}_1 \cos(bt) - \bar{c}_1 i \operatorname{sen}(bt)] \bar{v}_1 = \\ &= 2e^{at} \cos(bt) \operatorname{Re}(c_1 v_1) - 2e^{at} \operatorname{sen}(bt) \operatorname{Im}(c_1 v_1). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Note que os vetores  $u_1 = 2\operatorname{Re}(c_1 v_1)$  e  $u_2 = -2\operatorname{Im}(c_1 v_1)$  estão em  $\mathbb{R}^2$ .

**Observação 3.3.** Para ilustrar melhor a notação utilizada acima, considere, por exemplo,  $c_1 = a + bi$  e  $v_1 = \begin{pmatrix} c + di \\ e + fi \end{pmatrix}$ . Assim,  $c_1 v_1 = (a + bi) \begin{pmatrix} c + di \\ e + fi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + yi \\ t + si \end{pmatrix}$ . Daí,  $\operatorname{Re} \begin{pmatrix} x + yi \\ t + si \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$  e  $\operatorname{Im} \begin{pmatrix} x + yi \\ t + si \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix}$ .

Consideramos agora 3 casos:

**Caso i)**  $a = 0$ . Neste caso, a solução em (3.18) pode ser escrita na forma

$$x(t) = \cos(bt)u_1 + \sin(bt)u_2.$$

O retrato de fase é obtido na Figura 3.11. Dizemos, neste caso, que a origem é um centro.

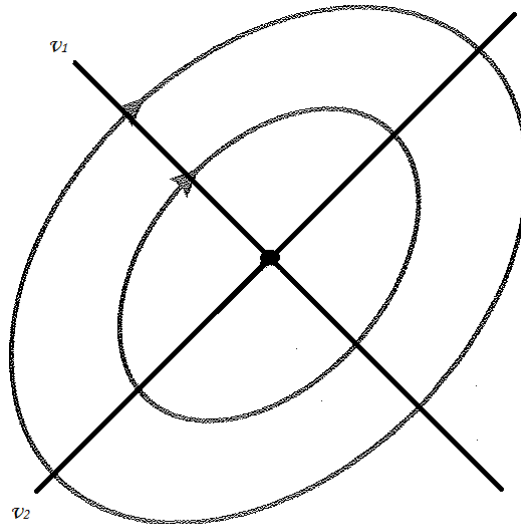


Figura 3.11: Caso i:  $a = 0$ .

**Caso ii)**  $a > 0$ . Os retratos de fase são indicados na Figura 3.12 de acordo com o sinal do coeficiente  $b$  e dizemos que a origem é um ponto espiral instável, ou ainda, foco instável.

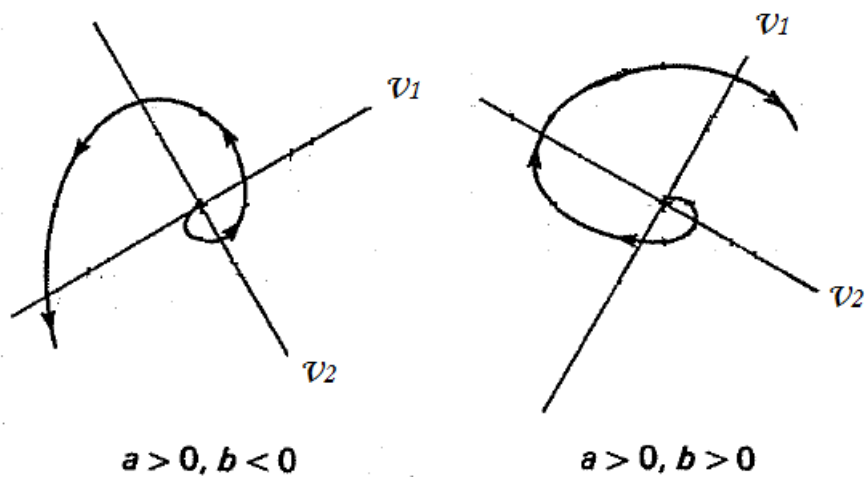


Figura 3.12: Caso ii - Foco instável.

**Caso iii)**  $a < 0$ . Os retratos de fase são indicados na Figura 3.13 de acordo com o sinal do coeficiente  $b$  e dizemos que a origem é um ponto espiral estável, ou ainda,



foco estável.

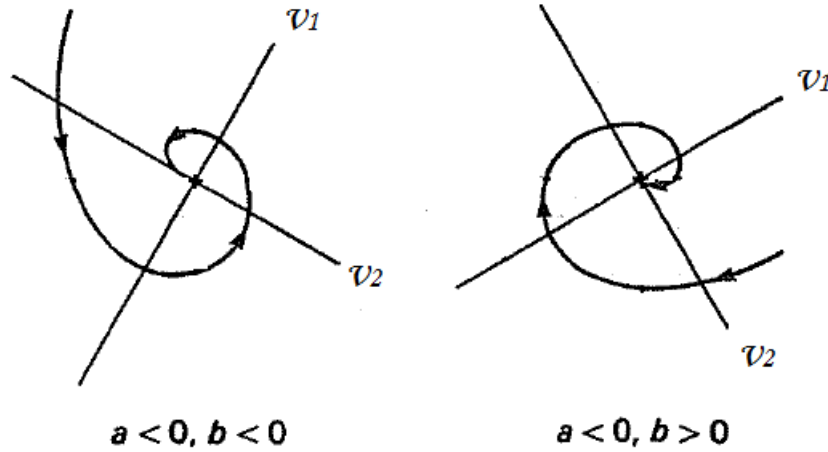


Figura 3.13: Caso iii - Foco estável.

Os casos anteriormente apresentados estão resumidos no resultado abaixo:

**Teorema 3.2.** *O sistema autônomo linear*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

tem a origem  $(0,0)$  como ponto de equilíbrio isolado quando  $(ad - bc) \neq 0$ . Este ponto crítico será:

i) *assintoticamente estável, se as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  do polinômio característico*

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

*forem reais e negativas, ou ainda, se forem complexas e tiverem parte real negativa;*

ii) *estável, se  $\lambda_1 = \beta i$  e  $\lambda_2 = -\beta i$  (imaginários puros);*

iii) *instável, se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem reais e pelo menos uma delas for positiva, ou ainda, se forem complexas e tiverem parte real positiva.*

### 3.4 Estudo de Estabilidade de Sistemas Autônomos

Nesta seção será analisada a questão da estabilidade de soluções da equação

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.19}$$

onde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $D$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 3.11.** A solução  $x = \phi(t)$  de (3.19) é estável se toda solução  $\psi(t)$  de (3.19) que se inicia suficientemente próxima de  $\phi(t)$  quando  $t = 0$  permanece próxima de  $\phi(t)$  para qualquer  $t$  futuro. Mais precisamente, a solução  $\phi(t)$  é estável se para qualquer  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que

$$|\psi_j(t) - \phi_j(t)| < \epsilon \quad \text{se} \quad |\psi_j(0) - \phi_j(0)| < \delta(\epsilon), \quad j = 1, \dots, n,$$

para toda solução  $\psi(t)$  de (3.19).

Dizemos que a solução  $\phi(t)$  é instável se existe pelo menos uma solução  $\psi(t)$  de (3.19) que se inicia próxima de  $\phi(t)$  quando  $t = 0$ , porém não permanece próxima de  $\phi(t)$  para qualquer  $t$  futuro.

Trataremos primeiramente a questão da estabilidade de sistemas lineares autônomos da forma

$$\dot{X} = AX, \quad (3.20)$$

onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  de números reais.

Para isto, consideremos os teoremas a seguir:

**Teorema 3.3.** Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  são autovalores distintos de  $A$ , onde  $\lambda_j$  tem multiplicidade  $n_j$  e  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  e se  $\rho$  é um número qualquer maior que a parte real de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , isto é,

$$\rho > \max(\operatorname{Re}\lambda_j), \quad j = 1, \dots, k, \quad (3.21)$$

então existe uma constante  $K > 0$  tal que

$$|e^{At}| \leq Ke^{\rho t} \quad (0 \leq t < \infty). \quad (3.22)$$

*Demonstração.* Já vimos que  $e^{At}$  é uma matriz solução fundamental do sistema  $\dot{x} = Ax$ .

Além disso, toda entrada de  $e^{At}$  pode ser escrita na forma  $\sum_{j=1}^k p_j(t)e^{(\lambda_j t)}$ , onde  $p_j(t)$

é um polinômio de grau menor ou igual que  $(n_j - 1)$ . Se  $\rho$  é escolhido de modo a satisfazer a inequação (3.21), então  $|t^k e^{\lambda_j t}| = t^k e^{[\operatorname{Re}\lambda_j]t} < e^{\rho t}$ , para  $t$  suficientemente

grande, e todo termo da soma  $\sum_{j=1}^k p_j(t)e^{(\lambda_j t)}$  é no máximo igual a  $Me^{\rho t}$  ( $0 \leq t < \infty$ )

para alguma constante  $M$ . Dessa maneira, como há  $n^2$  termos na matriz  $e^{At}$ , (3.22) é válida tomando-se  $K = \bar{M}n^2$ , onde  $\bar{M}$  é o maior valor dentre todos os valores de  $M$ .

□

**Corolário 3.1.** Se todos os autovalores de  $A$  possuem parte real negativa, então toda solução  $\phi(t)$  do sistema  $\dot{x} = Ax$  aproxima-se de zero quando  $t \rightarrow +\infty$ . Mais precisamente, existem constantes  $\bar{K} > 0$ ,  $\rho > 0$  tais que  $|\phi(t)| < \bar{K}e^{-\rho t}$ ,  $0 \leq t < \infty$ . Também, sob as hipóteses do corolário, existem constantes  $K > 0$ ,  $\rho > 0$  tais que  $|e^{(tA)}| \leq Ke^{-\rho t}$ ,  $0 \leq t < \infty$ .

**Teorema 3.4.** (a) Toda solução  $\phi(t)$  de (3.20) é assintoticamente estável se todos os autovalores de  $A$  tem parte real negativa.

(b) Toda solução  $\phi(t)$  de (3.20) é instável se pelo menos um autovalor de  $A$  tem parte real positiva.

(c) Suponha que todos os autovalores de  $A$  tenham parte real negativa e  $\lambda_1 = i.\sigma_1, \dots, \lambda_l = i.\sigma_l$  tenham parte real igual a zero. Seja  $\lambda_j = i.\sigma_j$  de multiplicidade  $k_j$ . Isto significa que o polinômio característico de  $A$  pode ser fatorado na forma

$$p(\lambda) = (\lambda - i.\sigma_1)^{k_1} \dots (\lambda - i.\sigma_l)^{k_l} q(\lambda),$$

onde todas as raízes de  $q(\lambda)$  tem parte real negativa. Então, toda solução  $x = \phi(t)$  de (3.20) é estável se  $A$  tem  $k_j$  autovetores linearmente independentes para cada autovalor  $\lambda_j = i.\sigma_j$ . Caso contrário, toda solução  $\phi(t)$  é instável.

*Demonstração.* Primeiramente, mostraremos que toda solução  $\phi(t)$  é estável se a solução  $x(t) = 0$  é estável e  $\phi(t)$  é instável se a solução  $x(t) = 0$  é instável. Para isto, tomaremos  $\psi(t)$  uma solução qualquer de (3.20). Note que  $z(t) = \phi(t) - \psi(t)$  é também solução de (3.20). Conseqüentemente, se a solução  $x(t) = 0$  é estável, então  $|z(t)| = |\phi(t) - \psi(t)|$  fica pequeno se  $|z(0)| = |\phi(0) - \psi(0)|$  for suficientemente pequeno. Dessa maneira, toda solução de (3.20) será estável. O caso em que  $\phi(t)$  é instável é análogo.

Mostraremos separadamente os itens na demonstração, assim como enunciado no teorema.

(a) Toda solução  $x = \psi(t)$  de (3.20) é da forma  $\psi(t) = e^{At}\psi(0)$  (veja o Teorema 3.1). Seja  $\phi_{ij}(t)$  o elemento  $ij$  da matriz  $e^{At}$  e sejam  $\psi_1^0, \psi_2^0, \dots, \psi_n^0$  as componentes de  $\psi(0)$ . Então, a  $i$ -ésima componente de  $\psi(t)$  é

$$\psi_i(t) = \phi_{i1}(t)\psi_1^0 + \dots + \phi_{in}(t)\psi_n^0 = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}(t)\psi_j^0.$$

Suponha que todos os autovalores de  $A$  tenham parte real negativa. Seja  $-\alpha_1$  o maior valor de todas as partes reais de todos os autovalores de  $A$ . Assim, podemos encontrar um número  $K$  tal que  $|\phi_{ij}(t)| \leq Ke^{-\alpha t}$ ,  $t \geq 0$ . Observe que  $\phi_{ij}(t) = p_{ij}(t)e^{a_j t}$  e que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)e^{\lambda t} = 0$ , com  $Re(\lambda) > \alpha_1$ , para qualquer autovalor  $\lambda$  de  $A$ . Assim,

$$|\psi_i(t)| \leq \sum_{j=1}^n K.e^{-\alpha t} |\psi_j^0| \leq Ke^{-\alpha t} \sum_{j=1}^n |\psi_j^0| = nKe^{-\alpha t} |\psi(0)|$$

para algumas constantes positivas  $K$  e  $\alpha$ . Note que  $|\psi_j^0| \leq |\psi(0)|$ . Conseqüentemente,

$$|\psi(t)| = \max\{|\psi_1(t)|, \dots, |\psi_n(t)|\} \leq nKe^{-\alpha t} |\psi(0)|.$$

Seja  $\epsilon > 0$  dado. Tomando  $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{nK}$ , segue que  $|\psi(t)| < \epsilon$  se  $|\psi(0)| < \delta(\epsilon)$  com  $t \geq 0$ , uma vez que

$$|\psi(t)| \leq nKe^{-\alpha t} |\psi(0)| < \frac{nK\epsilon}{nK} = \epsilon.$$

Conseqüentemente, a solução  $x(t) = 0$  é estável.

(b) Seja  $\lambda$  um autovalor de  $A$  com parte real positiva e seja  $v$  um autovetor de  $A$ , associado a  $\lambda$ . Então,  $\psi(t) = ce^{\lambda t}v$  é solução da equação (3.20) para qualquer constante  $c$ . Se  $\lambda$  é real, então  $v$  também é e  $|\psi(t)| = |c|e^{\lambda t}|v|$ . Note que  $|\psi(t)|$  tende ao infinito quando  $t$  tende ao infinito, independentemente da escolha de  $c \neq 0$ , mesmo com  $c$  muito pequeno. Conseqüentemente,  $x(t) = 0$  é instável. E, se  $\lambda = \alpha + i\beta$  é complexo, então  $v = v_1 + i.v_2$  é o autovetor complexo associado. Neste caso,

$$\begin{aligned}\psi(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t}(v_1 + iv_2) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t))(v_1 + iv_2) = \\ &= e^{\alpha t}[(v_1 \cos(\beta t) - v_2 \operatorname{sen}(\beta t)) + i(v_1 \operatorname{sen}(\beta t) + v_2 \cos(\beta t))]\end{aligned}$$

é solução complexa da equação (3.20). Conseqüentemente,

$$\operatorname{Re}(\psi(t)) = ce^{\alpha t}(v_1 \cos(\beta t) - v_2 \operatorname{sen}(\beta t))$$

é solução real da equação (3.20), para qualquer constante  $c$ . Basta observar que  $|\psi(t)|$  fica ilimitado quando  $t$  tende ao infinito se  $c, v_1$  ou  $v_2$  não forem iguais ao vetor nulo. Portanto,  $x(t) = 0$  é instável.

(c) Se  $A$  possui  $k_j$  autovetores linearmente independentes para cada autovalor  $\lambda_j = i\sigma_j$  de multiplicidade  $k_j$ , então podemos encontrar uma constante  $K$  de tal forma que  $|(e^{At})_{ij}| \leq K$ . Então,  $|\psi(t)| \leq nK|\psi(0)|$  para toda solução de (3.20). De (a), segue que  $x(t) = 0$  é estável.

Por outro lado, se  $A$  possuir uma quantidade  $k_j$  de autovetores linearmente independentes menor que a quantidade de autovalores  $\lambda_j = i\sigma_j$ , então (3.20) terá soluções  $\psi(t)$  da forma

$$\psi(t) = ce^{i\sigma_j t}[v + t(A - i\sigma_j I)v],$$

onde  $(A - i\sigma_j I)v \neq 0$ . Se  $\sigma_j = 0$ , então  $\psi(t) = c(v + tAv)$  é real. Mais ainda,  $|\psi(t)|$  é ilimitada quando  $t$  se aproxima do infinito, independentemente da escolha de  $c$  ( $c \neq 0$ ). Similarmente, ambas as partes real e imaginária de  $\psi(t)$  são ilimitadas para um valor pequeno arbitrário  $\psi(0) \neq 0$ , se  $\sigma_j \neq 0$ . Conseqüentemente, a solução de equilíbrio  $x(t) = 0$  é instável.

□

### 3.5 Equações Não Lineares Autônomas

Nesta seção, iremos considerar inicialmente um sistema não linear bidimensional do tipo (3.19), isto é,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y), \end{cases} \quad (3.23)$$

com  $f_1$  e  $f_2$  funções contínuas, com derivadas de primeira ordem também contínuas numa vizinhança de  $(\bar{x}, \bar{y})$ , em que  $(\bar{x}, \bar{y})$  é um ponto de equilíbrio deste sistema, isto é,  $f_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  e  $f_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ .

Inicialmente, mostraremos alguns exemplos deste tipo de sistema que podem ser simplificados e resolvidos utilizando o conceito de coordenadas polares. Para esta tratativa, façamos uma mudança de variáveis:  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$  e daí  $r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ . Assim,

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \quad \text{e} \quad r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}.$$

Logo, para  $r > 0$ , o sistema não linear (3.23) pode ser escrito em termos de coordenadas polares como

$$\begin{cases} \dot{r} = f_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + f_2(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta, \\ r\dot{\theta} = f_2(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - f_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta, \end{cases} \quad (3.24)$$

ou ainda

$$\frac{dr}{d\theta} = F(r, \theta) \equiv \frac{r(f_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + f_2(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta)}{f_2(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - f_1(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta}.$$

Desta maneira, o sistema descrito em coordenadas polares mostra a natureza do ponto de equilíbrio na origem com mais facilidade. Para um maior entendimento do comportamento das soluções do sistema, vejamos duas importantes definições que estão relacionadas com as definições apresentadas no estudo de sistemas autônomos com coeficientes constantes na seção 3.3.1.

**Definição 3.12.** A origem é denominada um foco estável do sistema (3.19) se existe um  $\delta > 0$  tal que  $0 < r_0 < \delta$  e  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ ,  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  e  $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . É chamada de foco instável se  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  e  $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Qualquer trajetória de (3.19) a qual satisfaz  $r(t) \rightarrow 0$  e  $|\theta(t)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$  é dita espiral em direção à origem quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

**Definição 3.13.** A origem é chamada de nó estável de (3.19) se existe um  $\delta > 0$  tal que  $0 < r_0 < \delta$  e  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ ,  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$  existe, isto é, cada trajetória em uma vizinhança da origem, exceto a própria origem, aproxima-se da origem ao longo de uma reta bem definida quando  $t \rightarrow \infty$ . A origem é chamada de nó instável se  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$  existe para todo  $r_0 \in (0, \delta)$  e  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ .

Vejamos dois exemplos utilizando as coordenadas polares.

**Exemplo 3.5.** Considere o sistema autônomo não linear

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) = -x - \frac{y}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} = f_2(x, y) = -y + \frac{x}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}, \end{cases} \quad (3.25)$$

para  $x^2 + y^2 \neq 0$  e defina  $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$ ,  $(x, y) = (0, 0)$ .

Note que  $(0, 0)$  é um ponto de equilíbrio do sistema. Para estudar a dinâmica próxima a este ponto, consideremos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

com  $r = r(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$  e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Derivando as igualdades em relação a  $t$ , obtemos

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta. \end{cases} \quad (3.26)$$

Substituindo as igualdades de (3.26) em (3.25), segue que

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = -r \cos \theta - \frac{r \sin \theta}{\ln r} \\ \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = -r \sin \theta + \frac{r \cos \theta}{\ln r}. \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \cos \theta - \frac{r \sin \theta}{\ln r} \\ -r \sin \theta + \frac{r \cos \theta}{\ln r} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema pelo método de Cramer, observa-se que a solução do mesmo é única, uma vez que o determinante  $D$  do sistema é diferente de zero ( $D = r$ ). Calculando os determinantes referentes às variáveis  $\dot{r}$  e  $\dot{\theta}$ , encontramos

$$D_{\dot{r}} = \begin{vmatrix} -r \cos \theta - \frac{r \sin \theta}{\ln r} & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta + \frac{r \cos \theta}{\ln r} & r \cos \theta \end{vmatrix} = -r^2$$

e

$$D_{\dot{\theta}} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \cos \theta - \frac{r \sin \theta}{\ln r} \\ \sin \theta & -r \sin \theta + \frac{r \cos \theta}{\ln r} \end{vmatrix} = \frac{r}{\ln r}.$$

Assim,  $\dot{r} = \frac{D_{\dot{r}}}{D} = \frac{-r^2}{r} = -r$  e  $\dot{\theta} = \frac{D_{\dot{\theta}}}{D} = \frac{\frac{r}{\ln r}}{r} = \frac{1}{\ln r}$  e, dessa maneira, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = -r \\ \dot{\theta} = \frac{1}{\ln r}, \end{cases} \quad (3.27)$$

equivalente ao sistema (3.25).

Resolvendo a primeira equação do sistema (3.27),  $\dot{r} = -r$ , tem-se  $r(t) = r_0 e^{-t}$ . Então, a segunda equação é escrita como

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\ln r} = \frac{1}{\ln(r_0 e^{-t})} = \frac{1}{\ln r_0 - t}.$$

Integrando ambos os lados da equação de 0 a  $t$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{\theta}(s) ds &= \int_0^t \frac{1}{\ln r_0 - s} ds \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + (-\ln(\ln r_0 - s))\Big|_0^t = \\ &= \theta_0 - \ln(\ln r_0 - t) + \ln(\ln r_0) = \theta_0 - \ln\left(\ln r_0 \left(1 - \frac{t}{\ln r_0}\right)\right) + \ln(\ln r_0) = \\ &= \theta_0 - \ln(\ln r_0) - \ln\left(1 - \frac{t}{\ln r_0}\right) + \ln(\ln r_0) = \theta_0 - \ln\left(1 - \frac{t}{\ln r_0}\right). \end{aligned}$$

Portanto, as soluções do sistema são:

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{-t} \\ \theta(t) = \theta_0 - \ln\left(1 - \frac{t}{\ln r_0}\right). \end{cases}$$

Note que  $r(t) \rightarrow 0$  e  $|\theta(t)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , se  $r_0 < 1$  ( $\ln r_0 < 0$ ). Neste caso, de acordo com a **Definição 3.12**, a origem é um foco estável do sistema não linear (3.25).

**Exemplo 3.6.** Considere o sistema autônomo não linear

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) = -y - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} = f_2(x, y) = x - y^3 - x^2y, \end{cases} \quad (3.28)$$

para  $x^2 + y^2 \neq 0$ , com  $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$ ,  $(x, y) = (0, 0)$ .

Note que  $(0, 0)$  é um ponto de equilíbrio do sistema. Para estudar a dinâmica próxima a este ponto, consideremos novamente

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

com  $r = r(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$  e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Derivando as igualdades em relação a  $t$ , obtemos:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta. \end{cases} \quad (3.29)$$

Substituindo as igualdades de (3.29) em (3.28), segue que:

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = -r \sin \theta - r^3 \cos^3 \theta - r^3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = r \cos \theta - r^3 \sin^3 \theta - r^3 \cos^2 \theta \sin \theta. \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \theta - r^3 \cos^3 \theta - r^3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ r \cos \theta - r^3 \sin^3 \theta - r^3 \cos^2 \theta \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema pelo método de Cramer, observa-se que a solução do mesmo é única, uma vez que o determinante  $D$  do sistema é diferente de zero ( $D = r$ ). Calculando os determinantes referentes às variáveis  $\dot{r}$  e  $\dot{\theta}$ , encontramos

$$D_{\dot{r}} = \begin{vmatrix} -r \sin \theta - r^3 \cos^3 \theta - r^3 \cos \theta \sin^2 \theta & -r \sin \theta \\ r \cos \theta - r^3 \sin^3 \theta - r^3 \cos^2 \theta \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = -r^4$$

e

$$D_{\dot{\theta}} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta - r^3 \cos^3 \theta - r^3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta - r^3 \sin^3 \theta - r^3 \cos^2 \theta \sin \theta \end{vmatrix} = r.$$

Daí,  $\dot{r} = \frac{D_{\dot{r}}}{D} = \frac{-r^4}{r} = -r^3$  e  $\dot{\theta} = \frac{D_{\dot{\theta}}}{D} = \frac{r}{r} = 1$  e, dessa maneira, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^3 \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (3.30)$$

Resolvendo a primeira equação do sistema (3.30), tem-se  $r(t) = r_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 + 2r_0^2 t}} \right)$ , para  $t > -2r_0^2$ , e a segunda equação tem como solução  $\theta(t) = \theta_0 + t$ . Note que  $r(t) \rightarrow 0$  e  $\theta(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Dessa maneira, dizemos que a origem é um foco estável do sistema (3.30).

A seguir, veremos que é possível, sob certas condições, estudar o comportamento do sistema não linear do tipo (3.23) em uma vizinhança do seu ponto de equilíbrio analisando o comportamento das órbitas nas vizinhanças do ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Mais ainda, tomaremos  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ , pois, caso contrário, fazemos uma mudança de variável dada por  $x = \bar{x} + u, y = \bar{y} + v$ . Além disso, pela Fórmula de Taylor, podemos escrever o sistema como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) = f_1(0, 0) + x \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) + y \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) + F_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) = f_2(0, 0) + x \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 0) + y \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0) + F_2(x, y), \end{cases}$$

com  $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{F_1(x, y)}{r} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{F_2(x, y)}{r} = 0$ , onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



Assim, o sistema linear associado ao sistema acima é da forma  $\dot{X} = AX$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

onde  $A$  é a matriz Jacobiana em  $(0,0)$ , que é denotada por  $A = Df(0,0)$ .

Apresentaremos em seguida mais resultados e definições relevantes para a apresentação do Teorema de Hartman-Grobman, o qual mostra que próximo a um ponto de equilíbrio hiperbólico  $x_0$  de um sistema autônomo não linear  $\dot{x} = f(x)$ , seu retrato de fase é similar ao do sistema linear  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A = Df(x_0)$ . Para estes tópicos, usamos a referência [13].

**Definição 3.14.** Um ponto de equilíbrio  $x_0$  da equação (3.19) é chamado de hiperbólico se nenhum dos autovalores da matriz  $A$  tiver parte real igual a zero. O sistema linear  $\dot{x} = Ax$  é chamado de linearização de (3.19) em  $x_0$ , em que  $A = Df(x_0)$ .

**Definição 3.15.** Um ponto de equilíbrio  $x_0$  de (3.19) é chamado de poço se todos os autovalores da matriz  $Df(x_0)$  tem parte real negativa; é chamado de fonte se os autovalores da matriz  $Df(x_0)$  tem parte real positiva; e é chamado de sela se é um ponto de equilíbrio hiperbólico e  $Df(x_0)$  tem pelo menos um autovalor com a parte real positiva e pelo menos um autovalor com a parte real negativa.

**Exemplo 3.7.** Classifiquemos os pontos de equilíbrio do sistema não linear (3.19), com  $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ .

Encontrando os pontos de equilíbrio, ou seja, fazendo  $f(x) = 0$ , temos  $x = (1,0)^T$  e  $x = (-1,0)^T$ , sendo estes os únicos pontos de equilíbrio de (3.19). Fazendo a matriz Jacobiana, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ com } A(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } A(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $(1,0)$  é uma fonte e  $(-1,0)$  é uma sela.

**Definição 3.16.** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $A$  e  $B$  subconjuntos de  $X$ . Um homeomorfismo de  $A$  em  $B$  é uma função contínua de  $A$  em  $B$  bijetora,  $h : A \rightarrow B$ , tal que  $h^{-1} : B \rightarrow A$  também é contínua. Os conjuntos  $A$  e  $B$  são chamados de homeomorfos ou topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo de  $A$  em  $B$ .

**Definição 3.17.** Sejam  $D$  um aberto,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$ , seja  $\phi(t, x_0)$  a solução do PVI  $\dot{x} = f(x)$  e  $x(0) = x_0$  definida no

intervalo maximal de existência  $I(x_0)$ . Então, para  $t \in I(x_0)$ , o conjunto de aplicações  $\phi_t$  definida por

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

é chamado de *fluxo da equação diferencial* ou *fluxo definido pela equação diferencial*.

**Definição 3.18.** *Dois sistemas de equações diferenciais autônomos dos tipos (3.19) e (3.20) são ditos topologicamente equivalentes em uma vizinhança da origem ou possuem a mesma estrutura qualitativa próximos da origem se existe um homeomorfismo  $H$  que vai de um conjunto aberto  $U$  que contém a origem num conjunto aberto  $V$  contendo a origem que mapeia as trajetórias de (3.19) em  $U$  em trajetórias de (3.20) em  $V$  e preserva a orientação do tempo no sentido em que se a trajetória é dirigida de  $x_1$  para  $x_2$  em  $U$ , então sua imagem será dirigida de  $H(x_1)$  para  $H(x_2)$  em  $V$ . Se o homeomorfismo  $H$  preserva a parametrização dada pelo tempo, então os sistemas (3.19) e (3.20) são ditos topologicamente conjugados numa vizinhança da origem.*

**Teorema 3.5. (Teorema de Hartman-Grobman)** *Seja  $E$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$  contendo a origem,  $f \in C^1(E)$ ,  $\phi_t$  o fluxo do sistema não linear  $\dot{x} = f(x)$ . Suponha  $f(0) = 0$  e que a matriz  $A = Df(0)$  não possua nenhum autovalor com parte real nula. Então, existe um homeomorfismo  $H$  de um aberto  $U$  contendo a origem em um aberto  $V$  contendo a origem tal que para cada  $x_0 \in U$ , existe um aberto  $I_0 \subset \mathbb{R}$  contendo zero tal que para todo  $x_0 \in U$  e  $t \in I_0$ ,*

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0),$$

*isto é, as trajetórias de  $\dot{x} = f(x)$  próximas à origem são levadas em trajetórias de  $\dot{x} = Ax$  próximas à origem e o tempo é preservado.*

A demonstração pode ser encontrada em [13] e [3].

Uma aplicação real do **Teorema 3.4** está descrita no capítulo seguinte, nas seções **4.3** e **4.4**.

## 4 Aplicações

Neste capítulo, apresentaremos alguns modelos matemáticos envolvendo as equações diferenciais autônomas, utilizando as referências [5],[8] e [13].

### 4.1 Modelo de Malthus

Seja  $P = P(t)$  a população de um país em um instante  $t$ . O inglês Thomas Robert Malthus tentou estimar o crescimento da população mundial considerando que em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , os nascimentos e as mortes são proporcionais ao tamanho da população e ao tamanho do intervalo, isto é, número de nascimentos =  $\alpha P(t)\Delta(t)$  e número de mortes =  $\beta P(t)\Delta(t)$ , onde  $\alpha$  é o coeficiente de natalidade e  $\beta$  é o coeficiente de mortalidade.

Assim,

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) = \alpha P(t)\Delta t - \beta P(t)\Delta t = (\alpha - \beta)P(t)\Delta t,$$

ou ainda,

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = (\alpha - \beta)P(t).$$

Tomando o limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos a equação diferencial autônoma

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P. \quad (4.1)$$

Vamos resolver a equação acima colocando-a, primeiramente, na seguinte forma:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta).$$

Integrando ambos os lados em relação a  $t$ , obtemos:

$$\ln(P) = (\alpha - \beta)t + c.$$

Finalmente, a solução da equação com condição inicial  $P(0) = P_0$  é dada por

$$P(t) = P_0 e^{(\alpha - \beta)t}, P(0) = P_0.$$

Note que:

- se  $\alpha = \beta$ , os coeficientes de natalidade e mortalidade coincidem e, dessa maneira, a população permanece constante igual a  $P(0)$ .
- Se  $\alpha > \beta$ , o coeficiente de natalidade é maior que o coeficiente de mortalidade e, dessa maneira, a população cresce exponencialmente.
- Se  $\alpha < \beta$ , o coeficiente de natalidade é menor que o coeficiente de mortalidade e, dessa maneira, a população decresce exponencialmente, tendendo à extinção.

De maneira geral, o modelo de Malthus não se mostrou muito eficiente, uma vez que as populações nem sempre tinham crescimentos cada vez maiores, sendo influenciadas por fatores tais como fome, guerras e desigualdades sociais, por exemplo.

Os gráficos abaixo ilustram o comportamento do modelo de Malthus. Note que o ponto de equilíbrio  $P(t) = 0$  é único e é instável, se  $\alpha > \beta$ , e assintoticamente estável, se  $\alpha < \beta$ .

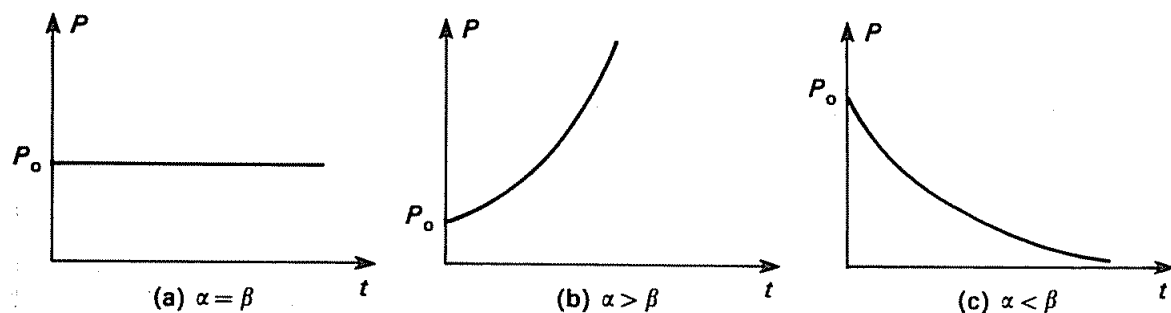


Figura 4.1: Gráficos do Modelo de Malthus.

O próximo modelo ilustra o crescimento populacional levando em conta um nível de saturação da população.

## 4.2 Modelo de Verhulst

O belga Pierre François Verhulst propôs um modelo no qual a população se estabilizaria, podendo ser considerado um modelo de Malthus aprimorado. A equação do modelo é dada por

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right), \quad (4.2)$$

onde  $P(t)$  representa o número de indivíduos no tempo  $t$ ,  $r$  é a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitante e  $K$  é o nível de saturação da população, ou seja, o número máximo de indivíduos que o ambiente suporta.

Resolvendo a equação acima, temos:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right) \Rightarrow \frac{1}{P \left( 1 - \frac{P}{K} \right)} \frac{dP}{dt} = r.$$

Utilizando o método das frações parciais no lado esquerdo da igualdade, temos:

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{1 - \frac{P}{K}} = \frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)},$$

onde  $A = 1$  e  $B = \frac{1}{K}$ .  
Por conseguinte,

$$\left( \frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{K}}{1 - \frac{P}{K}} \right) \frac{dP}{dt} = r.$$

Integrando ambos os lados, segue que

$$\ln |P| - \ln \left| 1 - \frac{P}{K} \right| = rt + c \Rightarrow \ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{K}} \right| = rt + c.$$

Utilizando a exponencial, obtemos

$$\left| \frac{P}{1 - \frac{P}{K}} \right| = e^{rt+c} = e^{rt} e^c = M e^{rt} \Rightarrow \frac{P}{1 - \frac{P}{K}} = M_1 e^{rt}.$$

Note que para termos uma condição inicial em que  $P(0) = P_0$ , devemos ter a constante  $M_1 = \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{K}}$ .

Substituindo o valor de  $M$  encontrado na igualdade anterior, determinamos  $P(t)$ , de tal forma que

$$P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0) e^{-rt}}$$

é a solução do problema de Verhulst.

A Figura 4.2 ilustra o comportamento da solução, onde os pontos de equilíbrio são dados por:  $P(t) = K$  e  $P(t) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , onde  $P(t) = 0$  é instável, enquanto  $P(t) = K$  é assintoticamente estável.

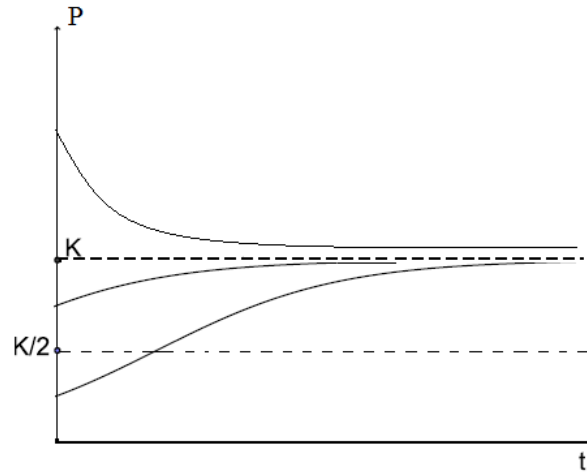


Figura 4.2: Modelo de Verhulst.

### 4.3 Modelo de Lotka-Volterra

O matemático italiano Vito Volterra e o biofísico norte-americano Alfred J. Lotka propuseram um modelo em que duas espécies vivem num mesmo habitat e interagem pela sua sobrevivência. Este modelo consiste de um sistema autônomo não linear, também conhecido como modelo presa-predador, descrito abaixo:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \alpha xy \\ \dot{y} = -by + \beta xy. \end{cases}$$

Neste modelo, têm-se que:

- $x$ : população de presas;
- $y$ : população de predadores;
- $a$ : taxa de crescimento de presas;
- $b$ : taxa de mortalidade de predadores;
- $\alpha$ : taxa de mortalidade das presas devido à interação da presa com o predador;
- $\beta$ : taxa de conversão de biomassa de presas capturadas por predadores.

Para encontrar os pontos críticos (de equilíbrio) do sistema, resolvemos o sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x(a - \alpha y) = 0 \\ f_2(x, y) = y(-b + \beta x) = 0, \end{cases}$$

encontrando 2 pontos:  $(0, 0)$  e  $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ . Utilizando o Teorema de Hartman-Grobman,

temos a matriz Jacobiana num ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$  dada por:

$$Df(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \alpha\bar{y} & -\alpha\bar{x} \\ \beta\bar{y} & -b + \beta\bar{x} \end{pmatrix}.$$

Para a origem, temos  $A = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$  e assim, o sistema linearizado equivalente é dado por  $\dot{x} = Ax$ , ou mais explicitamente por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = -by. \end{cases}$$

Note que a matriz Jacobiana já está na forma de Jordan e as raízes do polinômio característico coincidem com os valores apresentados, com  $\lambda_1 = a > 0$  e  $\lambda_2 = -b < 0$ . Assim, pelo caso **A)iii**, temos que a origem é um ponto de sela.

Para o ponto  $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ , temos  $A = Df\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha b}{\beta} \\ \frac{a\beta}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$  e assim, o sistema linearizado equivalente é dado por  $\dot{x} = Ax$ , ou mais explicitamente por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha b}{\beta}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{a\beta}{\alpha}x. \end{cases}$$

Calculando o polinômio característico  $p(\lambda) = \lambda^2 + ab$ , encontramos os autovalores  $\lambda_1 = i\sqrt{ab}$  e  $\lambda_2 = -i\sqrt{ab}$ . Pelo caso **C)i**, temos que a origem é um centro.

De fato, pela regra da cadeia, reescrevendo o sistema acima como a equação diferencial

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{a\beta}{\alpha}y}{\frac{b\alpha}{\beta}x},$$

e resolvendo-o por separação de variáveis, encontramos a equação

$$\frac{a\beta}{\alpha}x^2 + \frac{b\alpha}{\beta}y^2 = K,$$

sendo  $K$  uma constante positiva arbitrária, resultando em elipses concêntricas no ponto  $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ , representadas na Figura 4.3.

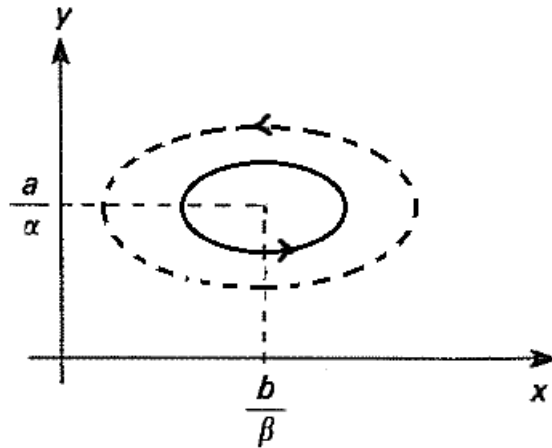


Figura 4.3: Modelo de Lotka-Volterra.

#### 4.4 Modelo matemático de controle biológico da broca da cana de açúcar

O modelo discutido a seguir foi retirado da referência [15].

No cultivo da cana de açúcar, a broca (*Diatrea saccharalis*) é considerada a principal praga. A lagarta jovem alimenta-se, inicialmente, das folhas para depois penetrar pelas partes mais moles do colmo (bainha). Ela abre galerias de baixo para cima, que podem ser longitudinais ou transversais.



Figura 4.4: Broca da cana - Disponível em [16].

A lagarta atinge seu completo desenvolvimento ao completar 40 dias, quando mede 23 milímetros de comprimento. A coloração de seu corpo é amarela-pálida e da cabeça, marrom (Figura 4.4). A fase de pupa (casulo), que segue a larval, dura de nove a 14



dias e resulta num adulto que sai pelo orifício deixado pela lagarta. O ciclo inteiro dura de 53 a 60 dias e pode resultar em quatro gerações por ano, distribuídas em outubro e novembro, dezembro e janeiro, fevereiro a abril e em maio e junho. Já a forma adulta é uma mariposa com asas amarela-palha e com 25 milímetros de envergadura. A fêmea deposita ovos na face inferior das folhas da planta.

Nas plantações, os danos causados ocorrem diretamente em função da abertura das galerias pela broca, que ocasionam perda de peso e morte de gema da cana, provocando falhas na população de colmos por hectare, caso sejam utilizados para propagação do canavial. As galerias podem ainda provocar o tombamento da cana pelo vento, além de propiciar a infestação de fungos, causando grandes impactos economicamente.

Um combate eficiente e interessante é o controle biológico da broca, através de inimigos naturais, microrganismos causadores de doenças, insetos predadores e insetos parasitoides, dispensando dessa maneira o uso de defensivos agrícolas, os quais podem ter efeitos indesejáveis, caso as técnicas adequadas não sejam seguidas.

Um parasitoide é um inseto que mata o hospedeiro e exige somente um indivíduo para completar o desenvolvimento de seu estágio larval e o adulto apresenta a vida livre. Neste modelo, trabalharemos com o parasitoide de ovos *Trichogramma galloi* (Figura 4.5), que contribui para restringir o crescimento populacional da broca-da-cana e sua ação também previne prejuízos ao colmo.



Figura 4.5: Vespa do gênero *Trichogramma galloi* - Disponível em [17].

Consideraremos um modelo de interação somente entre os dois animais, onde a broca será representada nos estágios de ovo e larval, uma vez que o parasitoide considerado atinge apenas os ovos. A seguir, apresentamos a construção do modelo.

De uma maneira geral, para os modelos matemáticos que envolvem uma relação entre parasitas e hospedeiros, a taxa na qual a infestação é adquirida é proporcional ao número de encontros entre os parasitoides e hospedeiros. Isto é, a taxa de variação de transmissão de parasitismo é dada por  $\gamma xz$ , onde  $x$  é o número de indivíduos não infectados,  $z$  o número de parasitoides e  $\gamma$  a taxa de parasitismo. Admitindo a validade

dessa relação entre os animais deste modelo e assumindo, além disso, que a população de ovos do parasitoide obedece um crescimento logístico, temos que a taxa de mudança da densidade populacional de ovos  $x_1$  é dada por:

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) x_1 - m_1 x_1 - n_1 x_1 - \gamma x_1 z, \quad (4.3)$$

onde  $x_1$  é a densidade de ovos da broca da cana,  $z$  é o número de parasitoides adultos,  $\beta$  é a taxa de reprodução,  $K$  é o espaço do meio ambiente que pode suportar a interação,  $n_1$  a fração de ovos que emergem no tempo  $t$  e  $\gamma$  a taxa de parasitismo. Na equação (4.3), deparamo-nos com o termo quadrático  $\frac{\beta x_1^2}{K}$ , que descreve a competição intraespecífica e  $m_1$  é a taxa de mortalidade natural da população de ovos.

A taxa de variação dos ovos parasitados  $x_2$  é dada pela equação

$$\frac{dx_2}{dt} = \gamma x_1 z - m_2 x_2 - n_2 x_2, \quad (4.4)$$

onde  $m_2$  é a taxa de mortalidade dos ovos parasitados e  $n_2$  é a fração de ovos parasitados dos quais emergem adultos parasitoides no tempo  $t$ .

A taxa de variação da densidade populacional de larvas  $x_3$  é dada pela equação

$$\frac{dx_3}{dt} = n_1 x_1 - m_3 x_3 - n_3 x_3, \quad (4.5)$$

onde  $m_3$  é a taxa de mortalidade da população de larvas e  $n_3$  é a fração da população de larvas que entram no estágio de pupa no tempo  $t$ .

Sabe-se que as vespas parasitoides infectam os ovos das brocas no começo de sua vida. Este fato nos permite assumir que o parasitismo no tempo  $t$  é causado somente por novos parasitoides que emergem no tempo  $t$ . Isto é,

$$z = \delta n_2 x_2, \quad (4.6)$$

onde  $\delta$  é o número de parasitoides emergentes de um ovo parasitado ( $\delta = 2$ , no caso do *Trichogramma galloi*).

Substituindo a equação (4.6) nas equações (4.3) e (4.4) e definindo  $\alpha = \gamma \delta n_2$ , encontramos o seguinte modelo matemático que descreve as interações entre a broca da cana de açúcar e seu parasitoide:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \beta \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) x_1 - m_1 x_1 - n_1 x_1 - \alpha x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha x_1 x_2 - m_2 x_2 - n_2 x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = n_1 x_1 - m_3 x_3 - n_3 x_3. \end{cases}$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema, igualamos as equações a zero, obtendo:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 \left( \beta - \frac{\beta \bar{x}_1}{K} - m_1 - n_1 - \alpha \bar{x}_2 \right) = 0, \\ \bar{x}_2 (\alpha \bar{x}_1 - m_2 - n_2) = 0, \\ n_1 \bar{x}_1 - \bar{x}_3 (m_3 + n_3) = 0. \end{cases}$$

Daí, tiramos três pontos:

$$P_1 = (0, 0, 0),$$

$$P_2 = \left( \frac{K(\beta - m_1 - n_1)}{\beta}, 0, \frac{n_1 K(\beta - m_1 - n_1)}{\beta(m_3 + n_3)} \right),$$

$$P_3 = \left( \frac{m_2 + n_2}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta(m_2 + n_2)}{\alpha^2 K} - \frac{m_1 + n_1}{\alpha}, \frac{n_1(m_2 + n_2)}{\alpha(m_3 + n_3)} \right).$$

**Observação 4.1.** Note que para o ponto  $P_2$ , devemos ter  $\beta > m_1 + n_1$  para assegurar que a população de larvas não seja um valor negativo e para o ponto  $P_3$ , é necessário  $\beta > m_1 + n_1 + \frac{\beta(m_2 + n_2)}{\alpha K}$ , ou mais explicitamente,  $\beta > \frac{\alpha K(m_1 + n_1)}{\alpha K - (m_2 + n_2)}$  para não haver um valor negativo da população de ovos parasitados, que não tem sentido biológico.

Encontrando a matriz Jacobiana do sistema, temos:

$$\begin{aligned} Df(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \beta - \frac{2\beta \bar{x}_1}{K} - m_1 - n_1 - \alpha \bar{x}_2 & -\alpha \bar{x}_1 & 0 \\ \alpha \bar{x}_2 & \alpha \bar{x}_1 - m_2 - n_2 & 0 \\ n_1 & 0 & -m_3 - n_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analisemos a estabilidade de cada um dos pontos:

Para o ponto  $P_1$ , a matriz linearizada será igual a

$$A = \begin{pmatrix} \beta - m_1 - n_1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 - n_2 & 0 \\ n_1 & 0 & -m_3 - n_3 \end{pmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico, encontramos

$$P(\lambda) = (\beta - n_1 - m_1 - \lambda)(-\lambda - n_2 - m_2)(-\lambda - n_3 - m_3)$$

e igualando-o a zero, encontramos os autovalores  $\lambda_1 = \beta - m_1 - n_1$ ,  $\lambda_2 = -m_2 - n_2$ ,  $\lambda_3 = -m_3 - n_3$ .

Pelo **Caso A - item i) - subseção 3.3.1**, o ponto  $P_1$  é estável se  $\beta < m_1 + n_1$ , ou seja, quando todos os autovalores são negativos.

Para o ponto  $P_2$ , a matriz linearizada será igual a

$$A = \begin{pmatrix} -\beta + m_1 + n_1 & \frac{-K\alpha(\beta - m_1 - n_1)}{\beta} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha K(\beta - n_1 - m_1)}{\beta} - m_2 - n_2 & 0 \\ n_1 & 0 & -m_3 - n_3 \end{pmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico, encontramos

$$P(\lambda) = (-\lambda - \beta + m_1 + n_1) \left( -\lambda + \frac{\alpha K(\beta - n_1 - m_1)}{\beta} - m_2 - n_2 \right) (-\lambda - m_3 - n_3)$$

e igualando-o a zero, encontramos os autovalores  $\lambda_1 = m_1 + n_1 - \beta$ ,  $\lambda_2 = \frac{\alpha K(\beta - m_1 - n_1)}{\beta} - m_2 - n_2$ ,  $\lambda_3 = -m_3 - n_3$ .

Pelo **Caso A - item i) - subseção 3.3.1**, o ponto  $P_2$  é assintoticamente estável sob a condição de

$$m_1 + n_1 < \beta < m_1 + n_1 + \frac{\beta(m_2 + n_2)}{\alpha K}.$$

Para o ponto  $P_3$ , a matriz linearizada será igual a

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-\beta(m_2 + n_2)}{\alpha K} & -(m_2 + n_2) & 0 \\ \beta - \frac{\beta(m_2 + n_2)}{\alpha K} - (m_1 + n_1) & 0 & 0 \\ n_1 & 0 & -m_3 - n_3 \end{pmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico, encontramos

$$P(\lambda) = -(-m_3 - n_3 - \lambda) \left( -\lambda + \beta - \frac{\beta(m_2 + n_2)}{\alpha K} - (m_1 + n_1) \right) (-\lambda - m_2 - n_2)$$

e igualando-o a zero, encontramos os autovalores  $\lambda_1 = -m_2 - n_2$ ,  $\lambda_2 = -m_3 - n_3$ ,  $\lambda_3 = \beta - \frac{\beta(m_2 + n_2)}{\alpha K} - (m_1 + n_1)$ .

Pelo **Caso A - item i) - subseção 3.3.1**, o ponto  $P_3$  é estável sob a condição de  $\beta < m_1 + n_1 + \frac{\beta(m_2 + n_2)}{\alpha K}$ .

Fazendo três diferentes simulações numéricas para analisar o comportamento das densidades populacionais dos ovos da broca ( $x_1$ ), a densidade dos ovos parasitados ( $x_2$ ) e densidade da população de larvas ( $x_3$ ), temos:

**Caso i)**  $n_1 = 0,1$ ,  $n_2 = 0,1$ ,  $n_3 = 0,02439$ ,  $m_1 = 0,03566$ ,  $m_2 = 0,03566$ ,  $m_3 = 0,00256$ ,  $K = 25000$ ,  $\beta = 0,13$  e  $\alpha = 0,0001723$ .

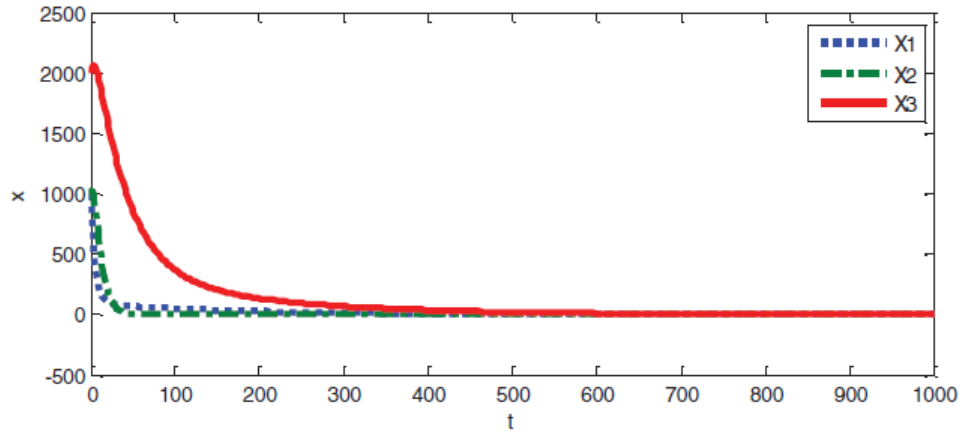


Figura 4.6: Caso i) -  $P_1$  assintoticamente estável

Note que o valor do parâmetro  $\beta$  é de suma importância para determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio. Para este caso,  $\beta$  satisfaz a condição  $\beta < m_1 + n_1$ , o ponto de equilíbrio  $P_1$  é assintoticamente estável e os outros pontos são instáveis. Assim, as populações tendem a se extinguir, conforme ilustrado na Figura 4.6.

**Caso ii)**  $n_1 = 0,1$ ,  $n_2 = 0,1$ ,  $n_3 = 0,02439$ ,  $m_1 = 0,03566$ ,  $m_2 = 0,03566$ ,  $m_3 = 0,00256$ ,  $K = 25000$ ,  $\beta = 0,139$  e  $\alpha = 0,0001723$ .

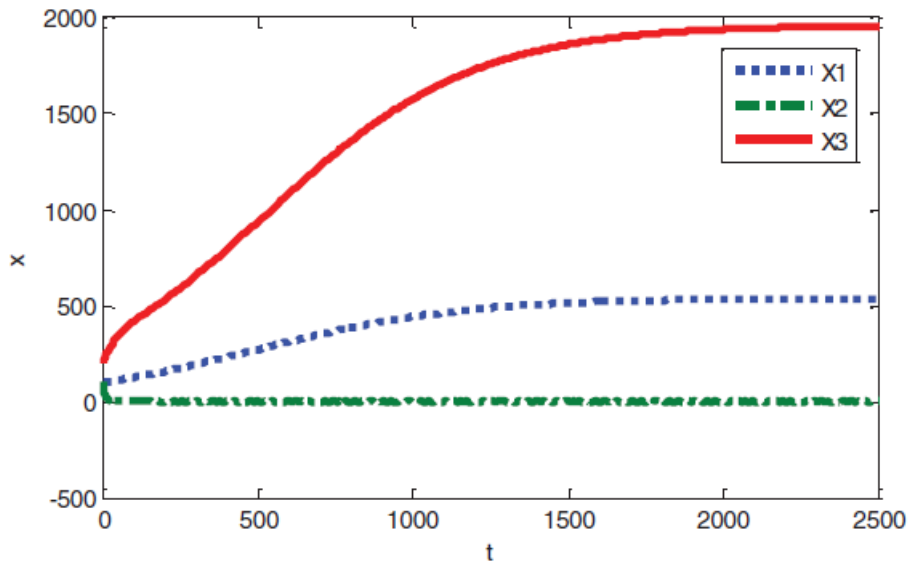


Figura 4.7: Caso ii) -  $P_2$  estável

Note que, neste caso, o parâmetro  $\beta$  satisfaz a condição

$$m_1 + n_1 < \beta < m_1 + n_1 + \frac{\beta(m_2 + n_2)}{\alpha K}.$$

Assim, o ponto de equilíbrio  $P_2$  é estável e os outros dois pontos são instáveis. Assim, a densidade populacional de ovos parasitados tende a se extinguir, enquanto que a

densidade populacional de ovos e larvas tendem a se estabilizar, conforme mostra a Figura 4.7.

**Caso iii)**  $n_1 = 0,1$ ,  $n_2 = 0,1$ ,  $n_3 = 0,02439$ ,  $m_1 = 0,03566$ ,  $m_2 = 0,03566$ ,  $m_3 = 0,00256$ ,  $K = 25000$ ,  $\beta = 0,1908$  e  $\alpha = 0,0001723$ .

Note que, neste caso, o parâmetro  $\beta$  satisfaz a condição

$$\beta > m_1 + n_1 + \frac{\beta(m_2 + n_2)}{\alpha K}.$$

Assim, o ponto de equilíbrio  $P_3$  é estável e as outras duas populações tendem a também se estabilizar e coexistir no meio. A Figura 4.8 ilustra esta situação.

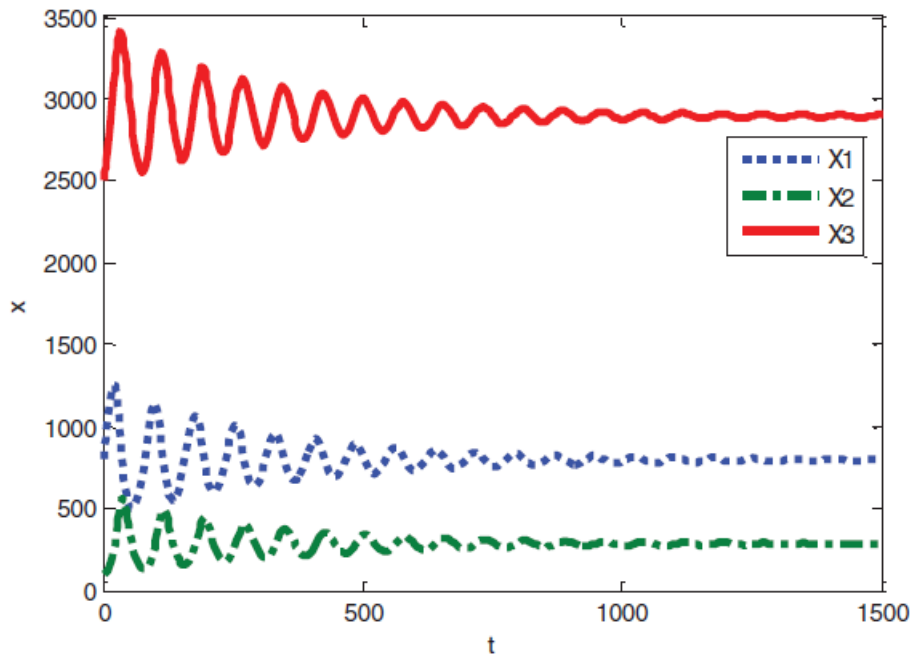


Figura 4.8: Caso iii) -  $P_3$  estável

## 4.5 Pêndulo Simples

O pêndulo simples consiste de uma partícula de massa  $m$  fixada na extremidade inferior de um fio inextensível (idealmente sem massa) de comprimento  $L$ , cuja extremidade superior está fixada. Supõe-se que o movimento se dê num plano vertical. Designamos por  $\theta$  o ângulo do fio com a vertical.

Desprezando o efeito de resistência do ar e os efeitos de atrito na articulação entre o fio e o suporte, as forças atuantes no movimento do pêndulo são: Peso ( $P$ ), dada pela relação  $P = mg$ , onde  $g$  é a força da gravidade e Tração ( $T$ ).

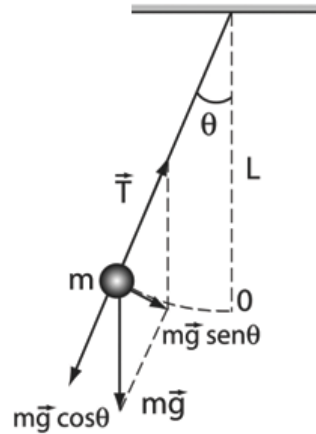


Figura 4.9: Pêndulo simples.

Inicialmente, as forças estão em equilíbrio, sem o início do movimento. Com um deslocamento  $\theta$  do pêndulo, a força Peso se decompõe segundo as direções radial ( $mg \cos \theta$ ) e tangencial ( $mg \sin \theta$ ) à trajetória, conforme ilustra a Figura 4.9.

Assim, aplicando a segunda Lei de Newton ( $F = ma$ ) a este sistema, obtemos o sistema

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T = ma_r \\ -mg \sin \theta = ma_\theta, \end{cases} \quad (4.7)$$

em que  $a_r$  e  $a_\theta$  indicam as acelerações radial e tangencial, respectivamente.

Tomando  $x = L\theta$  como o deslocamento da partícula ao longo do arco, segue que a aceleração tangencial pode ser escrita como  $a_\theta = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2(L\theta)}{dt^2} = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ . Consequentemente, podemos reescrever o sistema (4.7) como:

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T = \frac{v^2}{R} \\ -mg \sin \theta = mL \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \end{cases}$$

onde  $v$  é a velocidade escalar do pêndulo e  $R$  é o comprimento ( $L$ ) do pêndulo.

Tomando a segunda equação do sistema e reescrevendo-a adequadamente, obtemos

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, \quad (4.8)$$

denominada *equação do pêndulo*.

Supondo que  $\theta$  permaneça suficientemente pequeno, ou seja, considerando pequenas oscilações, e sabendo que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ , podemos aproximar  $\sin \theta \approx \theta$  e escrever a equação (4.8) como

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0,$$

recaindo na equação do oscilador harmônico simples (veja referência [12]).

Como é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes, basta encontrar a equação característica, dada por  $\lambda^2 + \frac{g}{L} = 0$ . Resolvendo-a, encontramos as raízes complexas conjugadas  $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{g}{L}}$  e  $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{g}{L}}$ .

Logo, a equação tem como solução  $\theta(t) = c_1 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{L}}\right) + c_2 \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{L}}\right)$ , em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes reais. Denominando de  $\omega = \frac{g}{L}$ , podemos reescrever a solução como

$$\theta(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t). \quad (4.9)$$

Tomando as condições iniciais como  $\theta(0) = 0$ , sendo a posição inicial, e  $\frac{d\theta}{dt}(0) = v_0$ , sendo a velocidade inicial, obtemos

$$\theta(0) = c_1 \cos(\omega 0) + c_2 \sin(\omega 0) \Rightarrow c_1 = 0.$$

Derivando a equação (4.9), temos  $\dot{\theta}(t) = c_2 \omega \cos(\omega t)$  e tomando  $t = 0$ , obtemos

$$\dot{\theta}(0) = c_2 \omega \cos(\omega 0) \Rightarrow c_2 = \frac{v_0}{\omega}.$$

Daí, reescrevendo a equação (4.9), temos como solução  $\theta(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$ .

**Observação 4.2.** O período das pequenas oscilações do pêndulo é dado a partir dos resultados do oscilador harmônico, sendo igual a  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ .



# Referências

- [1] SOTOMAYOR, Jorge; **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias** - IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [2] BRAUN, Martin; **Differential Equations and Their Applications** - 4th edition, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [3] VALLS, Claudia; BARREIRA, Luís; **Equações Diferenciais Ordinárias: Teoria Qualitativa** - Livraria da Física, São Paulo, 2012.
- [4] PERISSINOTTO JUNIOR, Anízio; VIEIRA, João Peres; ALVES, Carina. **Formas Elementares: Diagonal, Triangular e de Jordan**, 1a edição, Cultura Acadêmica, São Paulo, 2014.
- [5] DOERING, Claus, I.; LOPES, Artur O.; **Equações Diferenciais Ordinárias** - 2a edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [6] ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R.; **Equações Diferenciais** - 3a edição, Vol. 1, Pearson, São Paulo, 2001.
- [7] NOHEL, John A.; BRAUER, Fred.; **The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations** - W.A. Benjamin, New York, 1969.
- [8] BASSANEZI, Rodney Carlos; FERREIRA Jr., Wilson Castro; **Equações Diferenciais com Aplicações** - Harbra Ltda., São Paulo, 1988.
- [9] LIMA, Elon Lages; **Análise Real** - 8a edição, Vol. 1, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.
- [10] LIMA, Elon Lages; **Análise Real** - 8a edição, Vol. 2, IMPA, Rio de Janeiro, 1991.
- [11] LIMA, Elon Lages; **Álgebra Linear** - 8a edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2014.
- [12] FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio Freiria **Equações Diferenciais Aplicadas** - 2a edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [13] PERKO, Lawrence; **Differential Equations and Dynamical Systems** - 2th edition, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [14] LIMA, Elon Lages; **Espaços Métricos** - 3a edição, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

- [15] RAFIKOV, Marat; LIMEIRA, Elizabeth de Holanda; **Mathematical modelling of the biological pest control of the sugarcane borer** - International Journal of Computer Mathematics, v. 89, No. 8, pages 390 - 401. February, 2012.
- [16] FIGURA 4.4; <http://www.clubeamigosdocampo.com.br/artigo/controlo-biologico-de-broca-da-cana-de-acucar-1243>. Acessado em 26/03/1016.
- [17] FIGURA 4.5; <http://planetasustentavel.abril.com.br/blog/biodiversa/microexercito-macrobatalhas-282297/>. Acessado em 26/03/1016.

# A Conceitos de Álgebra Linear

Neste apêndice apresentaremos os resultados para espaços lineares de dimensão finita, baseando-se nas referências [4] e [11].

**Definição A.1.** *Um espaço vetorial  $E$  é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vetores  $u, v \in E$  faz corresponder um novo vetor  $u + v \in E$ , chamado a soma de  $u$  e  $v$ , e a multiplicação por um número real, que a cada número  $\alpha \in \mathbb{R}$  e a cada vetor  $v \in E$  faz corresponder um vetor  $\alpha.v$ , chamado o produto de  $\alpha$  por  $v$ . Essas operações devem satisfazer, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $u, v, w \in E$ , as condições abaixo, chamadas axiomas de espaço vetorial:*

- *Comutatividade:  $u + v = v + u$ ;*
- *Associatividade:  $(u + v) + w = u + (v + w)$  e  $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ ;*
- *Vetor nulo: existe um vetor  $O \in E$ , chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que  $v + O = O + v = v$  para todo  $v \in E$ ;*
- *Inverso aditivo: para cada vetor  $v \in E$ , existe um vetor  $v \in E$ , chamado inverso aditivo, ou o simétrico de  $v$ , tal que  $-v + v = v + (-v) = O$ ;*
- *Distributividade:  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$  e  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ;*
- *Multiplicação por 1:  $1.v = v$ .*

**Definição A.2.** *Uma base de um espaço vetorial  $E$  é um conjunto  $\mathfrak{B} \subset E$  linearmente independente que gera  $E$ . Isto significa que todo vetor  $v \in E$  se exprime, de modo único, como combinação linear  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$  de elementos  $v_1, \dots, v_m$  da base  $\mathfrak{B}$ . Se  $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$  é uma base de  $E$  e  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ , então os números  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  chamam-se coordenadas do vetor  $v$  na base  $\mathfrak{B}$ .*

**Teorema A.1.** *Se o espaço vetorial  $E$  admite uma base  $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  com  $n$  elementos, qualquer outra base de  $E$  possui também  $n$  elementos.*

**Definição A.3.** *Diz-se que o espaço vetorial  $E$  tem dimensão finita quando admite uma base  $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$  com um número finito  $n$  de elementos. Este número, que é o mesmo para todas as bases de  $E$ , chama-se dimensão do espaço vetorial  $E$  e o representamos por  $n = \dim E$ . Por extensão, diz-se que o espaço vetorial  $E = \{O\}$  tem dimensão zero.*

**Corolário A.1.** *Se a dimensão de  $E$  é  $n$ , um conjunto com  $n$  vetores gera  $E$  se, e somente se, é linearmente independente.*

**Definição A.4.** *Seja  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  um vetor com  $n$  componentes, onde  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ .*

*Definimos o comprimento (ou magnitude) de  $x$  (e denotamos por  $\|x\|$ ) como*

$$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

**Exemplo A.1.** *Se  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \|x\| = 3$ . Se  $x = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|x\| = \sqrt{5}$ .*

**Observação A.1.** *Note que  $\|x\| \geq 0$  e  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Além disso, temos  $\|\lambda x\| = \max\{|\lambda x_1|, |\lambda x_2|, \dots, |\lambda x_n|\} = |\lambda| \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} = |\lambda| \|x\|$ .*

**Definição A.5.** *Sejam  $V, U$  espaços vetoriais. Uma transformação linear  $T : V \rightarrow U$  é uma correspondência que associa a cada vetor  $v \in V$  um vetor  $T(v) = T.v = Tv \in U$  de modo que valham, para quaisquer  $u, v \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , as relações:*

$$T(u + v) = Tu + Tv,$$

$$T(\alpha.v) = \alpha.Tv.$$

*O vetor  $T.v$  chama-se imagem de  $v$  pela transformação  $T$ .*

*As transformações lineares  $T : V \rightarrow V$  são chamadas operadores lineares em  $V$ .*

**Observação A.2.** *Indicaremos por  $\mathfrak{L}(V, U)$  o conjunto das transformações lineares de  $V$  em  $U$ . Quando  $U = V$ , denotaremos este conjunto por  $\mathfrak{L}(V)$ .*

**Definição A.6.** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais. O núcleo de uma transformação linear  $T : V \rightarrow U$  é o conjunto de elementos em  $V$  que são levados em  $0 \in U$  e é denotado por*

$$\text{Ker}(T) = \{x \in V / T(x) = 0\}.$$

*Para alguns dos próximos conceitos, consideraremos  $\mathfrak{L}(V)$  o espaço dos operadores lineares sobre  $V$ ,  $K$  o corpo dos números reais ou complexos e por  $M_n$  o espaço das matrizes quadradas de ordem  $n$ .*

**Definição A.7.** *Seja  $T \in \mathfrak{L}(V)$ . Se existirem  $v \in V, v \neq 0$ , e  $\lambda \in K$  tais que  $T(v) = \lambda v$ , dizemos que  $\lambda$  é autovalor de  $T$  e  $v$  é autovetor de  $T$  associado a  $\lambda$ .*

**Observação A.3.** *Se a dimensão de um espaço vetorial  $V$  for finita, (ou seja,  $\dim V < \infty$ ), então sua transformação linear  $T : V \rightarrow V$  pode ser representada por uma matriz  $A_{n \times n}$ . (veja a referência [11]).*

**Definição A.8.** O polinômio  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ , com  $I$  sendo a matriz identidade, é chamado polinômio característico de  $A$ . Observe então que  $\lambda$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ , onde  $A$  é a matriz associada à transformação  $T$ .

**Exemplo A.2.** Seja  $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$  dado por  $T(x, y) = (3x + y, 3y)$ . Temos  $T(1, 0) = (3, 0) = 3(1, 0)$  e portanto 3 é autovalor de  $T$  e  $(1, 0)$  é autovetor de  $T$  associado a 3.

**Definição A.9.** Seja  $T \in \mathfrak{L}(V)$ . O polinômio minimal de  $T$  (ou da matriz  $A$  associada à transformação  $T$ ) é um polinômio  $m(t)$  tal que:

i)  $m(t)$  é o polinômio de menor grau entre os que anulam  $T$  (ou  $A$ );

ii)  $m(t)$  é um polinômio mônico (o coeficiente da maior potência de  $t$  é 1);

iii) o polinômio característico e o polinômio minimal de  $T$  (ou  $A$ ) têm as mesmas raízes, exceto possivelmente, por multiplicidade.

**Definição A.10.** Chamamos de multiplicidade algébrica de um autovalor  $\lambda$  a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico. Chamamos de multiplicidade geométrica de um autovalor  $\lambda$  a dimensão do autoespaço  $V(\lambda)$ , onde  $V(\lambda) = \{v \in \mathbb{R}^n; T(v) = \lambda v\}$ .

**Definição A.11.** Um bloco básico de Jordan  $J_s(\lambda)$  é uma matriz quadrada do tipo

$$J_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ ou seja, } J_s(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \text{se } i = j. \\ 1, & \text{se } j = i + 1. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Definição A.12.** Dizemos que duas matrizes reais  $A, B \in M_n$  são conjugadas (ou semelhantes) se existe uma matriz invertível  $Q \in M_n$  tal que  $AQ = QB$ , ou seja,  $A = QBQ^{-1}$ .

**Definição A.13.** Dizemos que uma matriz  $n \times n$  é diagonal se é da forma

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & k_{n-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k_n \end{pmatrix},$$

ou seja,  $D = (d_{ij})$  é diagonal se  $d_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$  e  $d_{ii} = k_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ .

**Teorema A.2.** Se a matriz  $A \in M_n$  tem  $n$  autovalores distintos, então  $A$  é diagonalizável.

**Definição A.14.** Dizemos que uma matriz  $A$  de ordem  $n$  está sob a forma de Jordan (forma canônica de Jordan) se  $A$  for triangular superior da forma

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

onde os blocos de Jordan  $J_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  são formados de blocos básicos de Jordan associados a  $\lambda_i$ , isto é,

$$J_i = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} & & 0 & & 0 \\ & 0 & \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} & & 0 \\ & & & 0 & & \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \\ & 0 & & 0 & & \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_{i1} & & & \\ & B_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{in} \end{pmatrix},$$

com os blocos da diagonal em ordem decrescente, isto é,  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$  (ver referência [4]).

**Exemplo A.3.** A matriz de Jordan  $1 \times 1$  é da forma  $[\lambda]$ .

**Exemplo A.4.** As matrizes de Jordan  $2 \times 2$  são da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Teorema A.3. (Forma canônica de Jordan (complexa))** Para cada  $A \in M_n$  existe uma matriz  $n \times n$  invertível  $S$  com entradas em  $\mathbb{C}$  tal que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_s \end{pmatrix},$$

onde cada bloco  $J_k$  é uma matriz  $n_k \times n_k$ ,  $n_k \leq n$ , da forma

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix},$$

onde  $\lambda_k$  é um autovalor de  $A$ .

**Teorema A.4. (Forma canônica de Jordan  $2 \times 2$ )** Dependendo das duas raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  do polinômio característico  $P(\lambda)$  de uma matriz  $2 \times 2$  real  $A \in M_2$ , ocorre exatamente um dos seguintes casos de classes de equivalência de semelhança de matrizes:

(1) se  $\lambda_1, \lambda_2$  são reais e  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , então  $A \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , sendo as colunas da matriz de conjugação linear dadas por quaisquer autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ;

(2) se  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$  é real e

(i)  $\dim \text{Ker}(\lambda_0 I - A) = 2$ , então  $A \approx \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I$ ;

(ii)  $\dim \text{Ker}(\lambda_0 I - A) = 1$ , então  $A \approx \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ , sendo as colunas da matriz de conjugação linear dadas por qualquer vetor  $u$  fora do autoespaço  $\text{Ker}(\lambda I - A)$  e o autovetor  $v = Au - \lambda_0 u$  de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_0$ ;

(3) se  $\lambda_1 = a + ib$  e  $\lambda_2 = a - ib$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $b \neq 0$ , são números complexos conjugados, então  $A \approx \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , sendo as colunas da matriz da conjugação linear dadas pelas partes real e imaginária de qualquer autovetor complexo de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_1$ .

**Exemplo A.5.** Determinemos a forma de Jordan da matriz real  $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ :

i) Encontrando o polinômio característico e os autovalores de  $A$ , ou seja, fazendo  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ , temos:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

ii) Verifiquemos a dimensão de  $\text{Ker}(A - 2I)$ :

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1.$$

Logo, tem-se que dimensão de  $\text{Ker}(A - 2I) = 1$  e, conseqüentemente, pelo Teorema A.4 a forma de Jordan da matriz  $A$  é dada por  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Observação A.4.** Se quisermos ilustrar ainda mais o exemplo, podemos encontrar a matriz de conjugação linear, sendo as colunas dela dadas por qualquer vetor  $u$  fora do autoespaço  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  e o autovetor  $v = Au - \lambda_0 u$  de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_0$  (no caso  $\lambda_0 = 2$ ). Assim,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Do Teorema A.3, tomando  $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , que são os autovetores encontrados, e sua inversa  $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ , basta observar que

$$SJS^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A,$$

onde  $J$  é a forma de Jordan da matriz  $A$ .

**Exemplo A.6.** Determinemos a forma de Jordan da matriz real  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ :

i) Encontrando o polinômio característico e os autovalores de  $A$ , ou seja, fazendo  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ , temos:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3.$$

Pelo Teorema A.4 a forma de Jordan da matriz  $A$  é dada por  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Exemplo A.7.** Determinemos a forma de Jordan da matriz real  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ :

i) Encontrando o polinômio característico e os autovalores de  $A$ , ou seja, fazendo  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ , temos:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i.$$



Pelo Teorema A.4 a forma de Jordan da matriz  $A$  é  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Observação A.5.** Para encontrar o autovetor associado a  $\lambda_1 = 2 + i$ , fazemos

$$\begin{pmatrix} 3 - (2 + i) & -2 \\ 1 & 1 - (2 + i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $\begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ou seja, a matriz de conjugação linear  $S$  é  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e sua inversa é dada por  $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Finalmente, para checarmos a forma de Jordan da matriz  $A$  fazemos

$$S.J.S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A,$$

onde  $J$  é a forma de Jordan da matriz  $A$ .