



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Daniel Oliveira Veronese

Medidas Não Triviais no Círculo Unitário e
Polinômios Para-Ortogonais Associados

Tese de Doutorado
Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto, São Paulo, Brasil
Telefone: (17) 3221-2444. Fax: (17) 3221-2445

Daniel Oliveira Veronese

**Medidas Não Triviais no Círculo Unitário e Polinômios
Para-Ortogonais Associados**

Tese apresentada para obtenção do título de doutor em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga.

São José do Rio Preto

2016

Veronese, Daniel Oliveira.

Medidas não triviais no círculo unitário e polinômios para-ortogonais associados / Daniel Oliveira Veronese. -- São José do Rio Preto, 2016
80 f.: il.

Orientador: Alagacone Sri Ranga

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Polinômios ortogonais. 3. Análise matemática.
4. Funções hipergeométricas. I. Sri Ranga, Alagacone. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.587

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Daniel Oliveira Veronese

**Medidas Não Triviais no Círculo Unitário e Polinômios
Para-Ortogonais Associados**

Tese apresentada para obtenção do título de doutor em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
Professor Titular/ UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali
Professor Livre Docente/ UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa
Professor Doutor/ UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. José Alberto Cuminato
Professor Titular/ USP - São Carlos

Prof. Dr. Andrei Martínez Finkelshtein
Professor Catedrático/ Universidade de Almería - Almería

São José do Rio Preto, 19 de julho de 2016.

Por vezes sentimos que aquilo que fazemos
não é senão uma gota de água no mar.
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.

Madre Teresa de Calcutá

*Aos meus filhos, Thales e Vítor,
e aos meus pais, Eurípedes e Valdeci,
ofereço.*

*À minha esposa, Monaíse,
dedico.*

Agradecimentos

A Deus, por me dar sabedoria e guiar o meu caminho.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, por me ensinar a ter gosto pela pesquisa, por todos os ensinamentos, pela compreensão, amizade e incentivo.

À Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali, pelo apoio, atenção e incentivo em todos os momentos vivenciados durante o curso.

Ao professor Dr. Andrei Martínez Finkelshtein, pelos valiosos ensinamentos e pela atenção.

À minha esposa Monaíse, por me compreender e sempre me apoiar em todas as minhas decisões, pelo companheirismo e amor que sempre dedicou a mim.

Aos meus pais Eurípedes e Valdeci, e aos meus avós, Raimundo e Maria, que mesmo diante das dificuldades da vida, souberam me educar e me dar a possibilidade de chegar até aqui.

A João Aparecido e Terezinha, os quais também considero como pais. Agradeço pelo carinho, atenção e apoio dedicados a mim.

A todos os professores e funcionários, amigos da pós-graduação que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização desta tese. Um agradecimento especial aos meus amigos Jairo, Eusiene, Adriano e Elaine pelo companheirismo em todos os momentos.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Dado um par de sequências reais, sendo uma delas sequência encadeada positiva, podemos considerar uma sequência de polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos, de tal modo que os zeros destes polinômios sejam simples e estejam sobre o círculo unitário. Neste trabalho mostramos que é possível obter, a partir dessa fórmula de recorrência, uma única medida não trivial no círculo unitário. Provamos também que a sequência de polinômios gerados por essa relação de recorrência é uma sequência de polinômios para-ortogonais associados à medida obtida. Além disso, obtemos limitantes para os zeros extremos de tais polinômios e fornecemos estimativas para o suporte da medida associada.

Palavras-chave: Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário. Polinômios Para-ortogonais. Medidas Não Triviais. Zeros.

Abstract

Given a pair of real sequences, where one of them is a positive chain sequence, we can associate a sequence of polynomials which satisfy a three term recurrence formula and such that the zeros of these polynomials are simple and lie on the unit circle. In this manuscript, we show that, starting from this three term recurrence formula, it is always possible to obtain a unique nontrivial measure on the unit circle. We also prove that the generated sequence of polynomials is a sequence of para-orthogonal polynomials associated with this measure. Furthermore, we obtain bounds for the extreme zeros of these polynomials and also provide estimates for the support of the associated measure.

Keywords: Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Para-orthogonal Polynomials. Nontrivial Measures. Zeros.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	15
1.1 Polinômios ortogonais no círculo unitário	15
1.2 Polinômios para-ortogonais	19
1.3 Sequências encadeadas positivas	21
1.4 Frações contínuas	24
1.5 Funções especiais	27
1.6 Alguns resultados recentes	29
2 Um Teorema do Tipo Favard no Círculo Unitário	33
2.1 Algumas correspondências e propriedades assintóticas	33
2.2 Momentos associados e a medida no círculo unitário	38
2.3 Outras propriedades de $R_n(z)$ e dos polinômios ortogonais associados	41
2.4 Exemplo	44
3 Estimativas para os Zeros Extremos dos Polinômios $R_n(z)$	49
3.1 Zeros dos polinômios para-ortogonais e o suporte de medidas associadas	49
3.2 Limitantes para zeros extremos	53
3.3 Estimativas para o suporte da medida	61
3.4 Algumas observações relacionadas a sequências encadeadas positivas	66
3.5 Alguns exemplos	68
Considerações Finais	74
Referências Bibliográficas	76

Introdução

Polinômios ortogonais no círculo unitário são também conhecidos como polinômios de Szegő em homenagem a Gábor Szegő que os introduziu na primeira metade do século XX. Devido a sua aplicação em fórmulas de quadratura ([2, 12, 27, 32]), processamento de sinais ([2, 12, 13]), teoria de operadores e teoria espectral ([4, 7, 29, 33, 34, 38, 42]), o estudo desses polinômios tem sido de grande interesse nos últimos anos.

Dada uma medida positiva e não trivial (i.e., com suporte infinito) $\mu(e^{i\theta})$ definida sobre o círculo unitário $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, os polinômios ortogonais mônicos $\{S_n(z)\}_{n=0}^\infty$ podem ser definidos por

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{S_m(\zeta)} S_n(\zeta) d\mu(\zeta) = \int_0^{2\pi} \overline{S_m(e^{i\theta})} S_n(e^{i\theta}) d\mu(e^{i\theta}) = \delta_{mn} \kappa_n^{-2},$$

onde δ_{mn} é o delta de Kronecker e $\kappa_n^{-2} = \|S_n\|^2$. Os polinômios ortonormais associados, que denotamos por $s_n(z)$, são tais que $s_n(z) = \kappa_n S_n(z)$, $n \geq 0$.

É bem conhecido que os polinômios $S_n(z)$ satisfazem as seguintes relações de recorrência

$$\begin{aligned} S_n(z) &= zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} S_{n-1}^*(z), \\ S_n(z) &= (1 - |\alpha_{n-1}|^2)zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} S_n^*(z), \end{aligned} \quad n \geq 1,$$

onde $\alpha_{n-1} = -\overline{S_n(0)}$ são denominados coeficientes de Verblunsky e $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}$ denota o polinômio recíproco de $S_n(z)$.

Outro fato bastante conhecido é que os coeficientes de Verblunsky $\alpha_n, n \geq 0$, são tais que $|\alpha_n| < 1$. Além disso, por meio de tais coeficientes, é possível caracterizar completamente a medida associada. Por exemplo, se a sequência dos coeficientes de Verblunsky é tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, então o suporte essencial da medida $\mu(z)$ é igual ao círculo unitário \mathcal{C} (veja [35]).

Um resultado de grande importância na teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário é o Teorema de Verblunsky (veja, por exemplo, [17] e [35]), também conhecido

como Teorema de Favard no círculo unitário. Esse teorema diz que há uma bijeção entre o conjunto das sequências de números complexos com módulo menor que um e o conjunto das medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário.

Quando tratamos de medidas não triviais no círculo unitário e polinômios ortogonais associados, existem algumas diferenças essenciais em relação à teoria de polinômios ortogonais na reta real.

A primeira delas é que os polinômios ortogonais na reta real (veja [18]) satisfazem uma relação de recorrência de três termos, o que, de modo geral, não ocorre no caso dos polinômios de Szegő. Outra diferença é que, no caso da reta real, os zeros dos polinômios ortogonais são reais, sendo que a medida associada pode ser construída por meio destes zeros. Já no círculo unitário, sabe-se que os zeros dos polinômios de Szegő estão dentro do círculo unitário, o que de certo modo impossibilita a construção da medida por meio destes zeros.

Polinômios para-ortogonais associados a $S_n(z)$ são polinômios da forma $X_n(z) = zS_{n-1}(z) + \rho_n S_{n-1}^*(z)$, com $|\rho_n| = 1$, $n \geq 1$. Sabe-se (veja [27]) que tais polinômios possuem todos os seus zeros distintos e sobre o círculo unitário. Estes polinômios são denominados para-ortogonais devido ao fato de que $X_n(z)$ é ortogonal a qualquer polinômio de grau menor que n , exceto os de grau zero. No caso dos polinômios de Szegő, $S_n(z)$ é ortogonal a qualquer polinômio de grau menor que n .

Neste trabalho, nosso principal objetivo é associar medidas não triviais no círculo unitário com certos polinômios para-ortogonais que satisfazem determinadas propriedades análogas às dos polinômios ortogonais na reta real: entrelaçamento dos zeros, recorrência de três termos, dentre outras. Os resultados por nós obtidos durante o curso de doutorado podem ser encontrados em [6] e [31]. A seguir, descrevemos brevemente tais resultados, que serão abordados em detalhes nos Capítulos 2 e 3.

Dado um par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$, com $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ sequência encaçada positiva, podemos definir uma sequência de polinômios $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$ por meio da seguinte fórmula de recorrência

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$.

Em [6] utilizando expansões em séries de certas funções racionais em torno da origem e do infinito, mostramos que é possível construir, por meio dos zeros dos polinômios

$R_n(z)$, $n \geq 1$, uma única medida $\mu(z)$ no círculo unitário \mathcal{C} .

Ainda em [6] mostramos que é possível expressar os polinômios de Szegő $S_n(z)$ associados a medida $\mu(z)$ em termos dos polinômios $R_n(z)$ por meio da seguinte relação

$$S_n(z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 + ic_k)} \{R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)\}, \quad n \geq 1.$$

Além disso, também fornecemos a relação entre a sequência de coeficientes de Verblunsky $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ associados a medida $\mu(z)$ e o par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$, que é dada por

$$\alpha_{n-1} = \frac{1 - 2m_n - ic_n}{1 + ic_n} \prod_{k=1}^n \frac{1 + ic_k}{1 - ic_k}, \quad n \geq 1,$$

sendo $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ sequência de parâmetros minimal de $\{d_n\}_{n=1}^\infty$.

Resultados obtidos em [9] mostram que os polinômios $R_n(z)$ podem ser dados por

$$R_n(z) = \frac{\prod_{j=1}^n [1 - \tau_{j-1}\alpha_{j-1}]}{\prod_{j=1}^n [1 - \mathcal{R}e(\tau_{j-1}\alpha_{j-1})]} \frac{zS_n(z) - \tau_n S_n^*(z)}{z - 1},$$

onde $S_n(z)$ são os polinômios ortogonais mônicos associados a medida $\mu(z)$ e $\tau_n = S_n(1)/S_n^*(1)$, $n \geq 0$. Note que a sequência $\{(z - 1)R_n(z)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios para-ortogonais.

Em [31], consideramos o problema de determinar estimativas para a localização dos zeros extremos dos polinômios $R_n(z)$, $n \geq 1$. Tendo em vista que os zeros de $R_n(z)$ têm intrínseca relação com o suporte da medida associada $\mu(z)$, podemos utilizar tais estimativas para conseguir determinar um arco no qual a medida estará suportada, exceto por uma possível massa em $z = 1$, como veremos em detalhe no decorrer do trabalho. Outra motivação para este estudo é que, em problemas de quadratura no círculo unitário, é de fundamental importância conhecer a localização dos nós, que podemos tomar como sendo os n zeros distintos do polinômio $R_n(z)$.

Para analisar os zeros de $R_n(z)$, $n \geq 1$, consideramos certas funções definidas no intervalo $[-1, 1]$ que são dadas por

$$\mathcal{W}_n(x) = 2^{-n} e^{-in\theta/2} R_n(e^{i\theta}), \quad n \geq 0,$$

onde $x = \cos(\theta/2)$. Tais funções foram consideradas inicialmente em [15], onde foi mostrado também que satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$\mathcal{W}_{n+1}(x) = \left(x - c_{n+1}\sqrt{1 - x^2}\right) \mathcal{W}_n(x) - d_{n+1} \mathcal{W}_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $\mathcal{W}_0(x) = 1$ e $\mathcal{W}_1(x) = x - c_1\sqrt{1-x^2}$.

Em [31], utilizando a relação de recorrência satisfeita pela sequência de funções $\{\mathcal{W}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e propriedades de sequências encadeadas positivas conseguimos obter condições necessárias e suficientes para que os zeros da função $\mathcal{W}_N(x)$, $N \geq 2$, pertençam a um determinado intervalo $(A_N, B_N) \subseteq (-1, 1)$. Equivalentemente, obtemos condições necessárias e suficientes para que os zeros do polinômio $R_N(x)$, $N \geq 2$, pertençam a um determinado arco aberto $\mathcal{A}(2 \arccos(B_N), 2 \arccos(A_N)) \subset \mathcal{C}$.

Utilizando tais condições conseguimos estimativas para a localização dos zeros extremos $z_{N,1}$ e $z_{N,N}$ do N -ésimo polinômio $R_N(z)$, $N \geq 2$. Além disso, considerando o comportamento destes zeros quando N tende ao infinito e os resultados estabelecidos em [6], conseguimos estimativas para o suporte da medida associada $\mu(z)$.

Procuramos organizar esta tese de modo a facilitar estudos futuros dos que pretendem se aprofundar em tais assuntos.

No Capítulo 1 abordamos resultados clássicos da teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário e demais resultados auxiliares, que serão úteis nos capítulos seguintes.

No Capítulo 2 apresentamos os resultados obtidos em [6], que referem-se ao problema da construção da medida $\mu(z)$ a partir dos zeros dos polinômios para-ortogonais associados.

O Capítulo 3 aborda os resultados obtidos em [31], que fornecem estimativas para os zeros extremos dos polinômios $R_n(z)$ e, conseqüentemente, para o suporte da medida associada.

Finalmente, relacionamos nas Referências Bibliográficas, os artigos e livros por nós consultados e citados no decorrer do trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados clássicos sobre a teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário e polinômios para-ortogonais, que podem ser encontrados, por exemplo, em [19, 25, 35, 36, 40, 43]. Além disso, abordamos também o estudo de outras ferramentas importantes para o desenvolvimento desta tese, tais como, sequências encadeadas positivas, frações contínuas e funções especiais (veja [1, 8, 28, 30, 44]). Revemos também alguns resultados obtidos recentemente por Dimitrov e Ranga em [15] e Bracciali *et al.* em [3], que têm relação direta com o tema desenvolvido neste trabalho.

1.1 Polinômios ortogonais no círculo unitário

Consideremos $\mu(z)$ uma medida positiva não trivial no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, ou seja, $\mu(e^{i\theta})$, definida em $0 \leq \theta \leq 2\pi$, uma função real, limitada e não-decrescente, com infinitos pontos de aumento em \mathcal{C} . Neste caso, os momentos trigonométricos são definidos por

$$\mu_n = \int_{\mathcal{C}} z^{-n} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\mu(e^{i\theta}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Note que, sendo $\mu(z)$ uma medida positiva, temos a seguinte relação entre os momentos

$$\bar{\mu}_{-n} = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\mu(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\mu(e^{i\theta}) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

No decorrer deste trabalho consideraremos, por simplicidade, que $\mu(z)$ é uma medida de probabilidade, ou seja, $\mu_0 = 1$.

Correspondente à sequência de momentos $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, podemos definir a seguinte matriz, conhecida como matriz de Toeplitz

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Como $\mu_j = \bar{\mu}_{-j}$, $j \geq 0$, então T_n é uma matriz Hermitiana para todo $n \geq 0$. O determinante da matriz T_n é conhecido como determinante de Toeplitz e é definido por

$$\Delta_{-1} = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_n = \det(T_n), \quad n \geq 0. \quad (1.2)$$

Associado à medida $\mu(z)$ podemos definir o seguinte produto interno sobre o espaço $L^2(\mathcal{C}, d\mu)$, por meio da igualdade

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathcal{C}} \overline{f(z)} g(z) d\mu(z).$$

Tendo em vista o produto interno definido acima, como $\mu(z)$ é não trivial, para todo polinômio não identicamente nulo de grau n , $n \geq 0$, $\pi_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$, com $c_k \in \mathbb{C}$ e $c_n \neq 0$, vale

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \bar{c}_k c_j \mu_{k-j} = \langle \pi, \pi \rangle = \|\pi\|^2 > 0. \quad (1.3)$$

Reescrevendo a desigualdade (1.3) na forma matricial obtemos

$$c^H T_n c > 0,$$

onde T_n é dada como em (1.1) e

$$c^H = \begin{pmatrix} \bar{c}_0 & \bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n \end{pmatrix}.$$

Vemos, portanto, que T_n é uma matriz positiva-definida e, conseqüentemente, obtemos $\Delta_n > 0$, $n \geq 0$.

Note também que toda medida positiva define naturalmente um funcional de momento, ou seja, um funcional linear \mathcal{M} (tomando valores complexos) definido sobre o espaço vetorial de todos os polinômios e tal que

$$\mathcal{M}[z^{-n}] = \mu_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Como $\mu(z)$ é uma medida não trivial, o conjunto de polinômios $\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$ é linearmente independente em $L^2(\mathcal{C}, d\mu)$. Portanto, podemos utilizar o processo de Gram-Schmidt para obter uma sequência de polinômios ortogonais mônicos, $S_n(z)$, $n \geq 0$, que satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{S_m(\zeta)} S_n(\zeta) d\mu(\zeta) = \int_0^{2\pi} \overline{S_m(e^{i\theta})} S_n(e^{i\theta}) d\mu(e^{i\theta}) = \delta_{mn} \kappa_n^{-2}, \quad (1.4)$$

onde δ_{mn} é o delta de Kronecker e $\kappa_n^{-2} = \|S_n\|^2$.

De acordo com Simon [35] (veja também [37]), os números complexos $\alpha_{n-1} = -\overline{S_n(0)}$, $n \geq 1$, são denominados coeficientes de Verblunsky. Por meio deles, é possível caracterizar diversas propriedades da medida associada $\mu(z)$.

A seguir, enunciaremos, sem demonstração, alguns resultados básicos sobre polinômios ortogonais no círculo unitário. Para maiores detalhes sobre o assunto, nos referimos a Simon [35].

Teorema 1.1. *Seja $\{S_n(z)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos no círculo unitário com relação a uma medida positiva e não trivial $\mu(z)$. Então, para estes polinômios, valem as seguintes relações*

$$\begin{aligned} S_n(z) &= zS_{n-1}(z) - \overline{\alpha_{n-1}} S_{n-1}^*(z), \\ S_n(z) &= (1 - |\alpha_{n-1}|^2)zS_{n-1}(z) - \overline{\alpha_{n-1}} S_n^*(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (1.5)$$

onde $\alpha_{n-1} = -\overline{S_n(0)}$ e $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}$ denota o polinômio recíproco de $S_n(z)$.

O próximo resultado nos mostra que a sequência de coeficientes de Verblunsky $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ é tal que $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$.

Teorema 1.2. *Seja $\mu(z)$ uma medida positiva não trivial no círculo unitário \mathcal{C} . Além disso, sejam Δ_n os determinantes de Toeplitz dados como em (1.2) e $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ a sequência de coeficientes de Verblunsky associada. Então, para $n \geq 1$, temos*

$$1 - |\alpha_{n-1}|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} > 0.$$

O teorema a seguir nos dá informação sobre a localização dos zeros dos polinômios ortogonais no círculo unitário.

Teorema 1.3. *Seja $\mu(z)$ uma medida positiva não trivial sobre o círculo unitário e seja $\{S_n(z)\}_{n=0}^\infty$ a sequência de polinômios ortogonais mônicos associada. Então, para $n \geq 1$, os zeros de $S_n(z)$ estão todos no disco unitário aberto $D(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Outra propriedade muito útil é que os coeficientes de Verblunsky podem ser expressos em termos dos momentos, por meio da seguinte relação

$$\bar{\alpha}_n = \frac{(-1)^n}{\Delta_n} \det \begin{pmatrix} \mu_{-1} & \mu_{-2} & \cdots & \mu_{-n-1} \\ \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Vimos, até o momento, que dada uma medida $\mu(z)$ não trivial no círculo unitário é sempre possível associar a esta medida uma única sequência de números complexos $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, de modo que $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$.

O teorema que enunciaremos a seguir nos fornece a recíproca deste resultado e é conhecido como Teorema de Favard no círculo unitário. Para a demonstração deste teorema, o leitor pode consultar, por exemplo, [17].

Teorema 1.4. *Seja $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, uma sequência de números complexos tais que $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$. Então, associada a esta sequência existe uma única medida de probabilidade não trivial no círculo unitário.*

Para finalizar esta seção, apresentamos um exemplo clássico de polinômios ortogonais no círculo unitário. Consideremos a medida de Lebesgue $\mu(z)$ definida sobre o círculo unitário e dada por $d\mu(z) = (2\pi iz)^{-1} dz$. Note que

$$\int_{\mathcal{C}} \bar{z}^m z^n d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{mn}, \quad (1.7)$$

onde δ_{mn} é o delta de Kronecker.

Assim, de (1.7) vemos que $S_n(z) = z^n$, $n \geq 0$, é a sequência de polinômios ortogonais mônicos associados à medida de Lebesgue $\mu(z)$. Além disso, utilizando o fato de que $\alpha_{n-1} = -\overline{S_n(0)}$, verificamos facilmente que os coeficientes de Verblunsky associados são tais que $\alpha_n = 0$, $n \geq 0$. Note também que os momentos correspondentes são tais que

$$\mu_0 = 1 \quad \text{e} \quad \mu_n = \int_{\mathcal{C}} z^{-n} d\mu(z) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Nos capítulos seguintes veremos outros exemplos de medidas definidas sobre o círculo unitário e polinômios ortogonais associados. Para mais exemplos, sugerimos ao leitor consultar também as referências [10] e [35].

1.2 Polinômios para-ortogonais

Nesta seção, faremos um breve estudo sobre os principais resultados envolvendo os polinômios para-ortogonais no círculo unitário. Para maiores detalhes sobre os resultados aqui apresentados nos referimos a Jones *et al.* [27], onde os autores introduziram este tipo de polinômios com o objetivo de estudar fórmulas de quadratura no círculo unitário.

Definição 1.1. *Uma sequência $\{X_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ é denominada sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida não trivial $\mu(z)$ no círculo unitário se, para $n \geq 1$, $X_n(z)$ é um polinômio de grau n que satisfaz as seguintes condições*

$$\begin{aligned} \langle X_n, 1 \rangle &\neq 0, \\ \langle X_n, z^m \rangle &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \\ \langle X_n, z^n \rangle &\neq 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

A justificativa para a nomenclatura para-ortogonal se deve ao fato de que, nas relações de ortogonalidade dadas em (1.8), temos $\langle X_n, 1 \rangle \neq 0$, o que não ocorre no caso dos polinômios ortogonais.

Se $\kappa_n \in \mathbb{C}$, $\kappa_n \neq 0$, então dizemos que um polinômio $X_n(z)$, de grau n , é κ_n -invariante se

$$X_n^*(z) = \kappa_n X_n(z), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

onde $X_n^*(z) = z^n \overline{X_n(1/\bar{z})}$ denota o polinômio recíproco de $X_n(z)$. Do mesmo modo, dizemos que a sequência de polinômios $\{X_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ é $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$ -invariante se, para cada n , $X_n(z)$ é κ_n -invariante.

Podemos obter sequências $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$ -invariantes de polinômios para-ortogonais por meio das seguintes funções

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z), \tag{1.9}$$

onde $w_n \in \mathbb{C}$ e $|w_n| = 1$, $n \geq 1$.

Observe que os polinômios obtidos por meio de (1.9) satisfazem as condições (1.8), formando então uma sequência de polinômios para-ortogonais. Além disso, neste caso, temos

$$S_n^*(w_n, z) = \bar{w}_n S_n(w_n, z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

ou seja, $\{S_n(w_n, z)\}_{n=1}^{\infty}$ forma uma sequência de polinômios para-ortogonais $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$ -invariante sendo $\kappa_n = \bar{w}_n$, $n \geq 1$.

O próximo teorema que enunciaremos (e que pode ser encontrado em [27]), nos garante que toda sequência de polinômios para-ortogonais $\{\kappa_n\}_{n=1}^\infty$ – invariante com relação a uma medida $\mu(z)$ é obtida por meio da expressão (1.9).

Teorema 1.5. *Seja $\{S_n(z)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais no círculo unitário com relação a uma medida $\mu(z)$.*

(i) *Se $\ell_n, w_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, com $\ell_n \neq 0$ e $|w_n| = 1$, e se $\kappa_n = \frac{\bar{\ell}_n \bar{w}_n}{\ell_n}$, então $\{\ell_n S_n(w_n, z)\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência $\{\kappa_n\}_{n=1}^\infty$ – invariante de polinômios para-ortogonais com respeito a medida $\mu(z)$ e $|\kappa_n| = 1$, $n \geq 1$.*

(ii) *Se $\{X_n(z)\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência de polinômios para-ortogonais com relação a medida $\mu(z)$, então, para $n \geq 1$,*

$$X_n(z) = \ell_n S_n(w_n, z), \quad z \in \mathbb{C},$$

onde

$$\ell_n = \frac{\langle X_n, S_n \rangle}{\langle S_n, S_n \rangle} - f_n \frac{\langle S_n^*, S_n \rangle}{\langle S_n^*, 1 \rangle} \neq 0 \quad e \quad w_n = \frac{f_n}{\ell_n},$$

com

$$f_n = \frac{\langle X_n, 1 \rangle}{\langle S_n^*, 1 \rangle} \neq 0.$$

Para cada $n \geq 1$, se $X_n(z)$ é também κ_n – invariante, então

$$|w_n| = 1, \quad \kappa_n = \frac{\bar{\ell}_n \bar{w}_n}{\ell_n} \quad e \quad |\kappa_n| = 1.$$

Vimos, por meio do Teorema 1.5, que os polinômios para-ortogonais $\{\kappa_n\}_{n=1}^\infty$ – invariantes com relação a uma medida não trivial $\mu(z)$ no círculo unitário são basicamente dados pelos polinômios $S_n(w_n, z)$, definidos como em (1.9), para $n \geq 1$. Veremos, agora, como é possível representar tais polinômios de uma outra forma. Do Teorema 1.1 temos

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} S_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1, \quad (1.10)$$

e portanto,

$$S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} z S_{n-1}(z), \quad n \geq 1. \quad (1.11)$$

Substituindo as equações (1.10) e (1.11) em (1.9), temos

$$\begin{aligned} S_n(w_n, z) &= zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} S_{n-1}^*(z) + w_n [S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} z S_{n-1}(z)] \\ &= (1 - w_n \alpha_{n-1}) z S_{n-1}(z) + (w_n - \bar{\alpha}_{n-1}) S_{n-1}^*(z) \\ &= (1 - w_n \alpha_{n-1}) \left[z S_{n-1}(z) + \frac{w_n - \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - w_n \alpha_{n-1}} S_{n-1}^*(z) \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Assim, se $\rho_n = \frac{w_n - \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - w_n \alpha_{n-1}}$, como $|w_n| = 1$, e

$$\rho_n = \frac{w_n(1 - \bar{w}_n \bar{\alpha}_{n-1})}{1 - w_n \alpha_{n-1}},$$

obtemos então que $|\rho_n| = 1$, $n \geq 1$. Portanto, tomando o polinômio em (1.12) na forma mônica, obtemos

$$S_n(\rho_n, z) = zS_{n-1}(z) + \rho_n S_{n-1}^*(z),$$

com $|\rho_n| = 1$, $n \geq 1$, que também representam os polinômios para-ortogonais.

O último resultado que abordamos nesta seção diz respeito à localização dos zeros dos polinômios para-ortogonais. Diferentemente do que ocorre com os zeros dos polinômios ortogonais no círculo unitário, que se encontram dentro do disco $D(0, 1)$ conforme visto no Teorema 1.3, é possível mostrar que os zeros dos polinômios para-ortogonais se encontram no círculo unitário \mathcal{C} .

Teorema 1.6. *Seja $\{X_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$ -invariante de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida não trivial $\mu(z)$, definida sobre o círculo unitário. Então, para cada $n \geq 1$, os zeros de $X_n(z)$ são simples e estão no círculo unitário.*

O Teorema 1.6 é de grande utilidade teórica pois, tendo em vista que os zeros dos polinômios para-ortogonais estão localizados no círculo unitário, é possível utilizá-los, por exemplo, para a construção de fórmulas de quadratura no círculo.

1.3 Sequências encadeadas positivas

Nesta seção, abordamos a definição e algumas propriedades básicas de sequências encadeadas positivas. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [8].

Definição 1.2. *Uma sequência $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva se existe uma sequência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que*

$$(i) \quad 0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \quad n \geq 1,$$

$$(ii) \quad d_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

A sequência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ é denominada sequência de parâmetros para $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ e g_0 é o parâmetro inicial.

Vejamos, a seguir, alguns exemplos de sequências encadeadas positivas.

Exemplo 1.1. A sequência constante dada por $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ é uma sequência encadeada positiva com sequência de parâmetros $\{g_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{n}{2(n+1)}\right\}$. Além disso, podemos notar que $\{h_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ também é uma sequência de parâmetros para $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Pelo Exemplo 1.1 podemos observar que uma mesma sequência encadeada positiva pode ter mais de uma sequência de parâmetros. Vejamos outros exemplos.

Exemplo 1.2. A sequência encadeada $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \{d\}$, com $0 < d \leq 1/4$, é uma sequência encadeada positiva com sequências de parâmetros

$$\{g_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{1 + \sqrt{1 - 4d}}{2}\right\} \quad e \quad \{h_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{1 - \sqrt{1 - 4d}}{2}\right\}.$$

Exemplo 1.3. A sequência $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ é também uma sequência encadeada positiva, com sequência de parâmetros dada por $\{m_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

No Exemplo 1.3, podemos notar que a sequência de parâmetros $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ é tal que $m_0 = 0$. Neste caso, temos a seguinte definição.

Definição 1.3. Seja $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada positiva. Uma sequência de parâmetros $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ é denominada sequência minimal se $m_0 = 0$.

Tendo em vista o Exemplo 1.1, vemos que $\{m_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{n}{2(n+1)}\right\}$ é uma sequência de parâmetros minimal para $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Caso a sequência de parâmetros minimal seja a única sequência de parâmetros para a sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, dizemos que $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ determina seus parâmetros unicamente, ou ainda, que $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é unicamente determinada.

Definição 1.4. Seja $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada positiva. Uma sequência de parâmetros $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ é denominada sequência maximal de parâmetros se, para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$, tivermos $M_k > g_k$, $k \geq 0$.

A seguir, enunciaremos alguns, dentre os principais resultados relacionados a sequências encadeadas positivas.

Teorema 1.7. Sejam $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada positiva e $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ sequências de parâmetros para $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$. Então, $g_k < h_k$, $k \geq 1$, se e somente se, $g_0 < h_0$.

O teorema a seguir nos diz que, se $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência encadeada positiva não unicamente determinada, então $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ possui infinitas sequências de parâmetros. Além disso, nos garante também que toda sequência encadeada positiva possui uma sequência de parâmetros minimal.

Teorema 1.8. *Seja $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência encadeada positiva. Se $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ possui uma sequência de parâmetros $\{g_k\}_{k=0}^\infty$ tal que $g_0 > 0$, então, para cada h_0 tal que $0 \leq h_0 < g_0$, existe uma correspondente sequência de parâmetros $\{h_k\}_{k=0}^\infty$.*

O próximo teorema, atribuído a H.S. Wall (veja [44]), fornece uma caracterização para sequências de parâmetros maximais.

Teorema 1.9. *Uma sequência de parâmetros $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ é sequência maximal para uma sequência encadeada $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ se, e somente se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n)} = \infty.$$

Exemplo 1.4. *Se $\{d_n\}_{n=1}^\infty = \{d\}$, com $0 < d \leq 1/4$, por meio da utilização do critério de Wall, podemos concluir que a sequência de parâmetros $\{g_n\}_{n=0}^\infty = \left\{ \frac{1+\sqrt{1-4d}}{2} \right\}$ é sequência maximal para $\{d_n\}_{n=1}^\infty$.*

Outro resultado que será de grande utilidade no decorrer do trabalho, especialmente no Capítulo 3, é o critério de comparação entre sequências encadeadas, que enunciamos a seguir.

Teorema 1.10. *Sejam $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ sequências reais tais que $0 < a_n \leq d_n$, $n \geq 1$. Então, se $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ é sequência encadeada positiva temos que $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ é também uma sequência encadeada positiva.*

Observação 1.1. *Em [26], são consideradas também sequências encadeadas positivas finitas $\{d_n\}_{n=1}^N$, $N \geq 2$, para as quais o critério de comparação também é válido.*

No próximo teorema que enunciamos, utilizaremos a seguinte notação

$$d_{k,n} = d_{k+n} \quad \text{e} \quad g_{k,n} = g_{k+n}, \quad k \geq 1, n \geq 1.$$

Teorema 1.11. *Seja $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência encadeada positiva com sequência de parâmetros $\{g_n\}_{n=0}^\infty$. Então,*

- (i) $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva com sequência de parâmetros $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$.
- (ii) Se $\{\hat{m}_n\}_{n=0}^{\infty}$ denota a sequência de parâmetros minimal para $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$, então $\hat{m}_n < m_{1,n} = m_{n+1}$, para $n \geq 0$.
- (iii) $\{M_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ é sequência de parâmetros maximal para $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$.

O último resultado abordado nesta seção mostra como é possível obter, a partir de uma sequência encadeada positiva não unicamente determinada, uma família de sequências encadeadas.

Teorema 1.12. *Seja $\{d_2, d_3, d_4, \dots\}$ uma sequência encadeada positiva e não unicamente determinada cuja sequência de parâmetros maximal é $\{M_1, M_2, M_3, \dots\}$, ou seja, $M_1 \neq 0$. Então, se $d_1 = \lambda M_1$, com $0 < \lambda \leq 1$, a sequência $\{d_1, d_2, d_3, \dots\}$ também é uma sequência encadeada.*

1.4 Frações contínuas

Essa seção é dedicada ao estudo de conceitos básicos sobre frações contínuas. É bem conhecido (veja, por exemplo, [8]) que as frações contínuas são ferramentas essenciais no estudo de polinômios ortogonais na reta real. Veremos no Capítulo 2 que é possível utilizar tais ferramentas também no estudo de polinômios ortogonais e para-ortogonais no círculo unitário.

Consideremos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sequências arbitrárias de números complexos e seja $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$\begin{aligned}
 f_0 &= b_0 \\
 f_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\
 f_2 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} \\
 &\dots \\
 f_n &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}.
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Neste caso, f_n é denominado o n -ésimo convergente associado à seguinte fração contínua infinita

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}} \quad (1.14)$$

Uma outra notação para a fração contínua (1.14), que utilizaremos daqui em diante, é a seguinte

$$b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_2}{b_2} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{b_n} \right| + \dots .$$

Dizemos que a fração contínua (1.14) é convergente para um valor finito K se no máximo uma quantidade finita de termos f_n são indefinidos e, além disso, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = K.$$

Caso contrário, dizemos que a fração contínua diverge.

Se a fração contínua converge para K , então escrevemos

$$b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_2}{b_2} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{b_n} \right| + \dots = K .$$

Exemplo 1.5. A fração contínua dada por

$$1 + \left| \frac{1}{1} \right| + \left| \frac{1}{1} \right| + \dots + \left| \frac{1}{1} \right| + \dots$$

é uma fração contínua convergente e converge para o número de ouro cujo valor é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exemplo 1.6. A fração contínua dada por

$$1 + \left| \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{2} \right| + \dots + \left| \frac{1}{2} \right| + \dots$$

é uma fração contínua convergente e converge para $\sqrt{2}$.

De (1.13) podemos escrever

$$f_n = \frac{A_n}{B_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde

$$A_0 = b_0, \quad B_0 = 1,$$

$$A_1 = b_0 b_1 + a_1, \quad B_1 = b_1,$$

$$A_2 = b_0b_1b_2 + b_0a_2 + a_1b_2, \quad B_2 = b_1b_2 + a_2,$$

e, de um modo geral, A_n e B_n são polinômios em a_i e b_j .

Via indução matemática é possível mostrar que, se $b_i \neq 0$, para $i \geq 1$, então para $n \geq 1$ valem as seguintes fórmulas, que foram obtidas por Wallis em 1655,

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, & A_{-1} &= 1, \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, & B_{-1} &= 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Os coeficientes A_n e B_n são denominados o n -ésimo numerador parcial e o n -ésimo denominador parcial da fração contínua, respectivamente.

É possível mostrar também que, para todo $n \geq 1$, os termos A_n e B_n satisfazem a seguinte igualdade, conhecida também como fórmula do determinante

$$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n, \tag{1.16}$$

que pode ser reescrita do seguinte modo

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n}{B_{n-1} B_n}. \tag{1.17}$$

Sendo assim, como $A_0/B_0 = b_0$, de (1.17) obtemos

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} a_1 a_2 \cdots a_k}{B_{k-1} B_k}, \tag{1.18}$$

desde que $b_i \neq 0$, $B_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$.

O último resultado dessa seção relaciona frações contínuas e sequências encadeadas. Para maiores detalhes sobre frações contínuas sugerimos ao leitor as referências [11], [28] e [30].

Lema 1.1. *Seja $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ sequência de parâmetros minimal para uma sequência encadeada $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$. Então, o n -ésimo denominador parcial da fração contínua*

$$1 - \frac{1}{\left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right|} - \frac{(1-m_0)m_1}{\left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right|} - \frac{(1-m_1)m_2}{\left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right|} - \dots$$

é dado por

$$B_n = (1-m_0)(1-m_1) \cdots (1-m_{n-1}), \quad n \geq 1.$$

1.5 Funções especiais

Nesta seção, apresentamos alguns resultados básicos sobre as funções gama e beta e sobre séries hipergeométricas. Para maiores detalhes sobre o assunto nos referimos a [1].

Dado um número complexo a , o símbolo de Pochhammer ou fatorial deslocado é definido pelo seguinte produto

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.19)$$

com $a_0 = 1$.

Exemplo 1.7. Se $a = 1$ temos $(1)_n = n!$, $n \geq 0$.

A função gama foi introduzida por Euler em 1720, com o intuito de estender a função fatorial ao conjunto dos números complexos. Esta função é definida por

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{z-1}}{(z)_n}, \quad (1.20)$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ e sendo $(z)_n$ o símbolo de Pochhammer definido em (1.19).

Como consequência imediata de (1.20) temos as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(z+1) &= z!, \quad z \in \mathbb{N}, \\ \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

Tendo em vista que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, segue facilmente que

$$\Gamma(z+n) = (z)_n\Gamma(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Utilizando (1.20) também é possível mostrar que a função gama pode ser dada pela integral de Euler de segunda espécie

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Um outro resultado de grande aplicabilidade é a fórmula de reflexão de Euler, dada por

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad (1.21)$$

para $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

A função beta é definida por meio da integral de Euler de primeira espécie dada por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt,$$

sendo $x, y \in \mathbb{C}$ com $\Re(x) > 0$ e $\Re(y) > 0$.

É possível mostrar que as funções gama e beta se relacionam por meio da seguinte igualdade

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (1.22)$$

sendo $x, y \in \mathbb{C}$ com $\Re(x) > 0$ e $\Re(y) > 0$.

As séries hipergeométricas podem ser definidas por

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_p \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_q \end{matrix}; z \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j (a_2)_j \dots (a_p)_j}{(b_1)_j (b_2)_j \dots (b_q)_j} \frac{z^j}{j!}, \quad (1.23)$$

onde $b_i \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, $i = 1, 2, \dots, q$.

Podemos notar facilmente que, se em (1.23) tivermos $a_i = -m$, $m \in \mathbb{Z}^+$, então

$$\begin{aligned} {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_p \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_q \end{matrix}; z \right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j (a_2)_j \dots (a_p)_j}{(b_1)_j (b_2)_j \dots (b_q)_j} \frac{z^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{(a_1)_j (a_2)_j \dots (a_p)_j}{(b_1)_j (b_2)_j \dots (b_q)_j} \frac{z^j}{j!}. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso vemos que a série hipergeométrica se reduz a um polinômio de grau m na variável z . Utilizaremos este fato no capítulo seguinte.

Se $p = 2$ e $q = 1$ as séries hipergeométricas definidas em (1.23) são denominadas funções hipergeométricas e são usualmente denotadas por

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, & b, \\ & c \end{matrix}; z \right) \quad \text{ou} \quad {}_2F_1(a, b; c; z). \quad (1.24)$$

É possível mostrar que, no caso em que $p = q + 1$, a série (1.23) converge para $|z| < 1$. No entanto, por continuação analítica, é possível estender a série ${}_2F_1(a, b; c; z)$ utilizando a representação integral de Euler (veja, por exemplo, [1, Teo. 2.2.1]).

Gauss definiu duas funções hipergeométricas como sendo funções contíguas se dois dos parâmetros são iguais e o terceiro parâmetro difere por uma unidade.

Exemplo 1.8. ${}_2F_1(a, b; c; z)$ e ${}_2F_1(a, b; c - 1; z)$ são funções hipergeométricas contíguas.

Além disso, Gauss denominou relação contígua a relação entre duas funções hipergeométricas contíguas. No entanto, utilizaremos a expressão relações contíguas quando os parâmetros diferirem por um número inteiro. Um exemplo de relação contígua é o seguinte (veja [1, Eq. (2.5.3)]),

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \left(1 + \frac{a-b+1}{c}z\right) {}_2F_1(a+1, b; c+1; z) \\ &\quad - \frac{(a+1)(c-b+1)}{c(c+1)}z {}_2F_1(a+2, b; c+2; z). \end{aligned} \quad (1.25)$$

1.6 Alguns resultados recentes

Nesta seção abordamos, de modo breve, alguns resultados que podem ser encontrados em [3] e [15]. Tais resultados serão úteis na compreensão e no desenvolvimento deste trabalho.

Em praticamente todos os estudos recentes sobre polinômios ortogonais no círculo unitário, os coeficientes de Verblunsky e as relações de recorrência (1.5) são as ferramentas fundamentais. Entretanto, no que será desenvolvido nesta tese, o ponto inicial de nossa análise é a fórmula de recorrência a seguir, considerada inicialmente em Costa *et al.* [9],

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (1.26)$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$, onde

$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais

e

$\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva.

Embora o primeiro elemento d_1 da sequência encadeada não tenha influência sobre a sequência de polinômios $\{R_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, sua utilidade se tornará clara, quando no Capítulo 2 introduzirmos a sequência de polinômios $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ em (2.1) e, em particular, a sequência de funções racionais $\{A_n(z)/B_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ na Seção 2.2.

Para o estudo dos zeros dos polinômios $\{R_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é conveniente utilizar certas funções associadas, $\{\mathcal{W}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, que são definidas por

$$\mathcal{W}_n(x) = 2^{-n}e^{-in\theta/2}R_n(e^{i\theta}), \quad n \geq 0, \quad (1.27)$$

onde $x = \cos(\theta/2)$. A transformação $x = \cos(\theta/2) = (e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})/2$, é conhecida como transformação de Delsarte e Genin (veja [14]).

Como no círculo unitário $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, (1.27) também pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{W}_n(x) = (4z)^{-n/2} R_n(z), \quad n \geq 0. \quad (1.28)$$

A sequência de funções $\{\mathcal{W}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz (veja [3, 15])

$$\mathcal{W}_{n+1}(x) = \left(x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2}\right) \mathcal{W}_n(x) - d_{n+1} \mathcal{W}_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.29)$$

com $\mathcal{W}_0(x) = 1$ e $\mathcal{W}_1(x) = x - c_1\sqrt{1-x^2}$.

Para todo $n \geq 1$, $\mathcal{W}_n(x)$ tem exatamente n zeros distintos $x_{n,j} = \cos(\theta_{n,j}/2)$, $j = 1, 2, \dots, n$, em $(-1, 1)$. Em [15] provou-se a propriedade de entrelaçamento

$$-1 < x_{n+1,n+1} < x_{n,n} < x_{n+1,n} < \dots < x_{n,1} < x_{n+1,1} < 1, \quad n \geq 1, \quad (1.30)$$

para os zeros de $\mathcal{W}_n(x)$ e $\mathcal{W}_{n+1}(x)$ por meio do uso da fórmula de recorrência de três termos (1.29). Como consequência imediata deste fato, provou-se também o seguinte teorema, que enunciamos a seguir.

Teorema 1.13. *O polinômio $R_n(z)$ tem todos os seus n zeros simples e no círculo unitário $|z| = 1$. Além disso, se denotamos os zeros de $R_n(z)$ por $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2, \dots, n$, então*

$$0 < \theta_{n+1,1} < \theta_{n,1} < \theta_{n+1,2} < \dots < \theta_{n,n} < \theta_{n+1,n+1} < 2\pi, \quad n \geq 1.$$

Um fato importante é que as funções de Christoffel-Darboux associadas (ou Wronskianos)

$$H_n(x) = \mathcal{W}'_n(x)\mathcal{W}_{n-1}(x) - \mathcal{W}'_{n-1}(x)\mathcal{W}_n(x), \quad n \geq 1, \quad (1.31)$$

não são necessariamente positivas ao longo de todo o intervalo $[-1, 1]$. No entanto, quando aplicadas nos zeros de $\mathcal{W}_n(x)$ satisfazem

$$H_n(x_{n,j}) > 0, \quad H_{n+1}(x_{n,j}) = d_{n+1}H_n(x_{n,j}) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.32)$$

para $n \geq 1$. Note que

$$H_n(x_{n,j}) = \mathcal{W}'_n(x_{n,j})\mathcal{W}_{n-1}(x_{n,j}) \quad \text{e} \quad H_{n+1}(x_{n,j}) = -\mathcal{W}'_n(x_{n,j})\mathcal{W}_{n+1}(x_{n,j}).$$

Agora, consideremos os Wronskianos

$$V_n(z) = R'_n(z)R_{n-1}(z) - R'_{n-1}(z)R_n(z), \quad n \geq 1, \quad (1.33)$$

associados com os polinômios $R_n(z)$. De (1.27)

$$\mathcal{W}'_n(x) = (4z)^{-(n-1)/2} [2zR'_n(z) - nR_n(z)] \frac{1}{z-1}.$$

Portanto, $H_n(x) = \frac{(4z)^{-(n-1)}}{z-1} [2zV_n(z) - R_{n-1}(z)R_n(z)]$, $n \geq 1$ e

$$\frac{z_{n,j}^{-(n-2)}}{z_{n,j}-1} V_n(z_{n,j}) = 2^{2n-3} H_n(x_{n,j}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad n \geq 1. \quad (1.34)$$

Da fórmula de recorrência para $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$,

$$\frac{R_n(1)}{2R_{n-1}(1)} \left[1 - \frac{R_{n+1}(1)}{2R_n(1)} \right] = d_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Portanto, $\{\hat{m}_n\}_{n=0}^\infty$, com

$$\hat{m}_n = 1 - \frac{R_{n+1}(1)}{2R_n(1)}, \quad n \geq 0,$$

é sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$, onde $d_{1,n} = d_{n+1}$, $n \geq 1$.

Se denotamos por $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ as sequências de parâmetros minimal e maximal de $\{d_n\}_{n=1}^\infty$, respectivamente, então sendo $m_{1,n} = m_{n+1}$, $M_{1,n} = M_{n+1}$, $n \geq 0$, temos que as sequências $\{m_{1,n}\}_{n=0}^\infty$ e $\{M_{1,n}\}_{n=0}^\infty$ são sequências de parâmetros de $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$. Claramente, $\{m_{1,n}\}_{n=0}^\infty$ é tal que $\hat{m}_n < m_{1,n}$, $n \geq 0$. Entretanto, $\{M_{1,n}\}_{n=0}^\infty$ é exatamente a sequência maximal de $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$, como já visto na Seção 1.3.

Note também que a sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ pode ser tal que $M_0 = m_0 = 0$. Entretanto, é importante ressaltar que sempre temos $0 < m_{1,0} \leq M_{1,0} < 1$. A igualdade $m_{1,0} = M_{1,0}$ ocorre quando a sequência encadeada $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ é unicamente determinada.

Em [3] a função $\mathcal{W}_n(x)$ é considerada como pertencendo ao espaço linear Ω_n , das funções reais dadas por:

$$\Omega_0 = \mathbb{P}_0 \text{ e para } n \geq 1 \text{ se } \mathcal{F}_n(x) \in \Omega_n \text{ então } \mathcal{F}_n(x) = B_n^{(0)}(x) + \sqrt{1-x^2} B_n^{(1)}(x),$$

onde $B_n^{(0)}(x) \in \mathbb{P}_n$ e $B_n^{(1)}(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ satisfazem

$$B_n^{(0)}(-x) = (-1)^n B_n^{(0)}(x) \quad \text{e} \quad B_n^{(1)}(-x) = (-1)^{n-1} B_n^{(1)}(x).$$

Aqui, \mathbb{P}_n denota o espaço linear dos polinômios de grau no máximo n .

Além disso, como já observado em [16] (veja também [3, Lema 2.1]), se $\mathcal{F}_n(x) \in \Omega_n$ então o polinômio $Y_n(z)$ dado por $r_n e^{-in\theta/2} Y_n(e^{i\theta}) = \mathcal{F}_n(x)$, r_n real, $x = \cos(\theta/2)$, é tal que $Y_n^*(z) = z^n \overline{Y_n(1/\bar{z})} = Y_n(z)$.

Dizemos que um polinômio $P_n(z)$ de grau n é auto-inverso se $P_n^*(z) = P_n(z)$, sendo $P_n^*(z) = z^n \overline{P_n(1/\bar{z})}$ (veja, por exemplo, [39]). Vemos, portanto, que o polinômio $Y_n(z)$ mencionado anteriormente é um polinômio auto-inverso.

É importante observar que se $\mathcal{F}(x) \in \Omega_{n-2}$ então $\mathcal{F}(x) \in \Omega_n$, entretanto, $\mathcal{F}(x) \notin \Omega_{n-1}$.

Com relação aos zeros de $\mathcal{F}_n(x) \in \Omega_n$ podemos fazer as seguintes observações (veja [3, Teo. 2.2]).

- Se $\mathcal{F}_n(1) \neq 0$, então o número de zeros de $\mathcal{F}_n(x)$ em $(-1, 1)$ não pode exceder n .
- Se $\mathcal{F}_n(1) = 0$, então $\mathcal{F}_n(-1) = 0$ e o número de zeros de \mathcal{F}_n em $[-1, 1]$ não pode exceder $n + 1$.

Ainda em [3], mostrou-se que existe uma medida positiva $\psi(x)$ definida no intervalo $[-1, 1]$ e em relação a qual as funções $\mathcal{W}_n(x)$, $n \geq 1$, satisfazem certas relações de ortogonalidade. Tais relações são dadas no teorema que enunciaremos a seguir.

Teorema 1.14. *Seja $\{\mathcal{W}_n(x)\}_{n=0}^\infty$ dada por (1.27), e satisfazendo a fórmula de recorrência de três termos (1.29). Então, existe uma medida positiva $\psi(x)$ definida em $[-1, 1]$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2n}(x) \mathcal{W}_{2m}(x) \sqrt{1-x^2} d\psi(x) &= \rho_{2n} \delta_{n,m}, \\ \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2n+1}(x) \mathcal{W}_{2m+1}(x) \sqrt{1-x^2} d\psi(x) &= \rho_{2n+1} \delta_{n,m}, \\ \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2n}(x) \mathcal{W}_{2m+1}(x) d\psi(x) &= 0, \end{aligned}$$

para $n, m = 0, 1, 2, \dots$, onde

$$\rho_0 = \frac{d_1}{1+c_1^2} \quad e \quad \rho_n = d_{n+1} \frac{1+c_n^2}{1+c_{n+1}^2} \rho_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Observação 1.2. *Na verdade, é possível mostrar que $d\psi(x) = -\sqrt{1-x^2} d\mu(e^{i2 \arccos(x)})$, onde $\mu(z)$ é a medida associada ao par $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$, que será obtida no Capítulo 2.*

Uma outra maneira bastante útil para expressar as propriedades de ortogonalidade no Teorema 1.14 é a seguinte (veja [3, Cor. 4.1.1]).

Corolário 1.1.

$$\int_{-1}^1 \mathcal{F}(x) \mathcal{W}_n(x) d\psi(x) = 0 \quad \text{se} \quad \mathcal{F} \in \Omega_{n-1}.$$

Nos capítulos a seguir, veremos como é possível aplicar os resultados vistos até aqui para o estudo de medidas não triviais definidas sobre o círculo unitário.

Capítulo 2

Um Teorema do Tipo Favard no Círculo Unitário

Neste capítulo veremos um outro teorema que pode ser considerado do tipo Favard. Partindo de um par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$, sendo $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência encadeada positiva, mostramos que é possível associar a este par uma única medida não trivial no círculo unitário. Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos em [6] e, de um modo geral, mostram a intrínseca relação existente entre os zeros dos polinômios $R_n(z)$, $n \geq 1$, e o suporte de medidas de probabilidade associadas no círculo unitário.

2.1 Algumas correspondências e propriedades assintóticas

Seja $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios dada pela seguinte fração contínua

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \cfrac{2d_1}{(1+ic_1)z + (1-ic_1)} - \cfrac{4d_2z}{(1+ic_2)z + (1-ic_2)} - \dots - \cfrac{4d_nz}{(1+ic_n)z + (1-ic_n)},$$

onde $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$ é dada como em (1.26).

De (1.15), sabemos que os polinômios $Q_n(z)$ são tais que

$$Q_{n+1}(z) = [(1+ic_{n+1})z + (1-ic_{n+1})]Q_n(z) - 4d_{n+1}zQ_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.1)$$

com $Q_0(z) = 0$ e $Q_1(z) = 2d_1$.

Primeiramente iremos obter um resultado assintótico com relação à sequência $\{Q_n(1)/R_n(1)\}_{n=0}^\infty$. Das fórmulas de recorrência para $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$, $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$ e por meio

de resultados clássicos da teoria de fração contínuas obtemos

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} &= \cfrac{d_1}{1} - \cfrac{d_2}{1} - \cfrac{d_3}{1} - \dots - \cfrac{d_n}{1} \\ &= (1 - M_0) \cfrac{M_{1,0}}{1} - \cfrac{(1 - M_{1,0})M_{1,1}}{1} - \dots - \cfrac{(1 - M_{1,n-2})M_{1,n-1}}{1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

para $n \geq 1$. Em (2.2), $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ é a sequência de parâmetros maximal para $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ e $M_{1,n} = M_{n+1}$, $n \geq 0$.

Denotemos, agora, por A_n/B_n o n -ésimo convergente da fração contínua

$$1 - \cfrac{M_{1,0}}{1} - \cfrac{(1 - M_{1,0})M_{1,1}}{1} - \cfrac{(1 - M_{1,1})M_{1,2}}{1} - \dots,$$

e seja A_{n+1}^*/B_{n+1}^* tal que

$$\begin{aligned} A_{n+1}^*/B_{n+1}^* &= 1 - \frac{1}{A_n/B_n} = 1 - \cfrac{1}{1} - \cfrac{M_{1,0}}{1} - \cfrac{(1 - M_{1,0})M_{1,1}}{1} - \dots \\ &\quad - \cfrac{(1 - M_{1,n-2})M_{1,n-1}}{1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Então, pelo Lema 1.1 temos $B_{n+1}^* = (1 - M_{1,0})(1 - M_{1,1}) \cdots (1 - M_{1,n-1}) > 0$, e portanto, usando (1.18), concluímos que

$$A_{n+1}^*/B_{n+1}^* = - \sum_{k=1}^n \frac{M_{1,0}M_{1,1} \cdots M_{1,k-1}}{(1 - M_{1,0})(1 - M_{1,1}) \cdots (1 - M_{1,k-1})}, \quad n \geq 1. \quad (2.4)$$

Assim, de (2.3) e (2.4) obtemos

$$1 - \frac{A_n}{B_n} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{M_{1,0}M_{1,1} \cdots M_{1,k-1}}{(1 - M_{1,0})(1 - M_{1,1}) \cdots (1 - M_{1,k-1})}}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{M_{1,0}M_{1,1} \cdots M_{1,k-1}}{(1 - M_{1,0})(1 - M_{1,1}) \cdots (1 - M_{1,k-1})}},$$

e consequentemente, de (2.2) segue que

$$\frac{Q_n(1)}{R_n(1)} = (1 - M_0) \frac{\sum_{k=1}^n \frac{M_{1,0}M_{1,1} \cdots M_{1,k-1}}{(1 - M_{1,0})(1 - M_{1,1}) \cdots (1 - M_{1,k-1})}}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{M_{1,0}M_{1,1} \cdots M_{1,k-1}}{(1 - M_{1,0})(1 - M_{1,1}) \cdots (1 - M_{1,k-1})}}, \quad n \geq 1.$$

Daí, utilizando o critério de Wall para caracterização de sequências de parâmetro maximal (veja Teorema 1.9) obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.1. *Sejam $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$ seqüências de polinômios obtidos a partir da seqüência real $\{c_n\}_{n=1}^\infty$, da seqüência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ e das fórmulas de recorrência (1.26) e (2.1). Então,*

$$d_1 = \frac{Q_1(1)}{R_1(1)} < \frac{Q_2(1)}{R_2(1)} < \dots < \frac{Q_{n-1}(1)}{R_{n-1}(1)} < \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} < (1 - M_0)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} = (1 - M_0).$$

Agora, consideraremos expansões em séries para as funções racionais $Q_n(z)/R_n(z)$.

Da fórmula de recorrência (1.26) para $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$, se $R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j$, temos

$$R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j = \sum_{j=0}^n \bar{r}_{n,n-j} z^j = R_n^*(z), \quad n \geq 0 \quad (2.5)$$

e, em particular,

$$r_{0,0} = 1 \quad \text{e} \quad r_{n,n} = \bar{r}_{n,0} = \prod_{k=1}^n (1 + ic_k), \quad n \geq 1.$$

Aqui, $R_n^*(z) = z^n \overline{R_n(1/\bar{z})}$ denota o polinômio recíproco de $R_n(z)$. Da propriedade (2.5), concluímos que o polinômio $R_n(z)$ é um polinômio auto-inversivo. Do mesmo modo, o polinômio $Q_n(z)$, de grau $n - 1$, também é auto inversivo, ou seja,

$$Q_n^*(z) = z^{n-1} \overline{Q_n(1/\bar{z})} = Q_n(z), \quad n \geq 1.$$

Aplicando a fórmula do determinante (1.16) em

$$U_n(z) = \begin{vmatrix} Q_n(z) & R_n(z) \\ Q_{n-1}(z) & R_{n-1}(z) \end{vmatrix} = Q_n(z)R_{n-1}(z) - Q_{n-1}(z)R_n(z), \quad n \geq 1,$$

segue que $U_1(z) = 2d_1$ e

$$U_{n+1}(z) = 4d_{n+1}zU_n(z) = 2^{2n+1}d_1d_2 \cdots d_{n+1}z^n, \quad n \geq 1. \quad (2.6)$$

Então, considerando expansões em séries em torno da origem e do infinito, de (2.6)

obtemos

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \frac{Q_{n-1}(z)}{R_{n-1}(z)} = \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{r}_{n-1,n-1}} z^{n-1} + O(z^n), \\ \frac{\gamma_{n-1}}{r_{n-1,n-1}} \frac{1}{z^n} + O((1/z)^{n+1}), \end{cases} \quad n \geq 1, \quad (2.7)$$

onde $\gamma_{n-1} = \frac{2^{2n-1}d_1d_2 \cdots d_n}{r_{n,n}}$, $n \geq 1$. Isso significa que existem expansões formais em séries $E_0(z)$ e $E_\infty(z)$, respectivamente, em torno da origem e do infinito, tais que

$$E_0(z) - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O(z^{n+1}), \quad n \geq 0 \quad (2.8)$$

e

$$E_\infty(z) - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+1}} + O((1/z)^{n+2}), \quad n \geq 0. \quad (2.9)$$

Por razões que se tornarão claras no decorrer do nosso estudo, escrevemos

$$E_0(z) = -\nu_1 - \nu_2 z - \nu_3 z^2 - \nu_4 z^3 - \dots$$

e

$$E_\infty(z) = \frac{\nu_0}{z} + \frac{\nu_{-1}}{z^2} + \frac{\nu_{-2}}{z^3} + \frac{\nu_{-3}}{z^4} + \dots$$

De (2.9), como $R_n(z)$ e $Q_n(z)$ são auto inversíveis, temos

$$z^{-1} \overline{E_\infty(1/\bar{z})} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O(z^{n+1}), \quad n \geq 0.$$

Comparando a equação acima com (2.8) temos, então,

$$z^{-1} \overline{E_\infty(1/\bar{z})} = E_0(z)$$

e

$$\nu_j = -\bar{\nu}_{-j+1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Considerando os seguintes sistemas de equações

$$\begin{array}{rcccc} -\nu_1 r_{n,0} & & -q_{n,0} & = & 0, \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ -\nu_n r_{n,0} & \cdots & -\nu_1 r_{n,n-1} & -q_{n,n-1} & = & 0, \end{array} \quad (2.10)$$

$$\begin{array}{rcccc} -\nu_{n+1} r_{n,0} & \cdots & -\nu_2 r_{n,n-1} & -\nu_1 r_{n,n} & = & \bar{\gamma}_n, \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccc} \nu_0 r_{n,0} & + \nu_{-1} r_{n,1} & \cdots & + \nu_{-n} r_{n,n} & = & \gamma_n, \\ & \nu_0 r_{n,1} & \cdots & + \nu_{-n+1} r_{n,n} & - q_{n,0} & = & 0, \\ & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & \nu_0 r_{n,n} & - q_{n,n-1} & = & 0 \end{array} \quad (2.11)$$

em relação aos coeficientes de $Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} q_{n,j} z^j$ e $R_n(z) = \sum_{j=0}^n r_{n,j} z^j$, que seguem de (2.8) e (2.9), obtemos

$$\gamma_n = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{H_n^{(-n+1)}} r_{n,n}, \quad n \geq 1,$$

onde

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \nu_m & \nu_{m+1} & \cdots & \nu_{m+n-1} \\ \nu_{m+1} & \nu_{m+2} & \cdots & \nu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{m+n-1} & \nu_{m+n} & \cdots & \nu_{m+2n-2} \end{vmatrix},$$

são os determinantes de Hankel associados à sequência dupla $\{\nu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Além disso, podemos enunciar o seguinte lema.

Lema 2.2. *Sejam $\{R_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ sequências de polinômios obtidos a partir da sequência real $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, da sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ e das fórmulas de recorrência (1.26) e (2.1). Então, as funções racionais $Q_n(z)/R_n(z)$ satisfazem às correspondentes propriedades dadas por (2.8) e (2.9). Além disso, se o funcional de momento \mathcal{N} é tal que*

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n}] = \nu_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

então os polinômios $R_n(z)$ satisfazem

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n+j} R_n(\zeta)] = \begin{cases} -\bar{\gamma}_n, & j = -1, \\ 0, & j = 0, 1, \dots, n-1, \\ \gamma_n, & j = n \end{cases} \quad n \geq 1,$$

onde $\gamma_0 = \nu_0 = \frac{2d_1}{1+ic_1}$ e $\gamma_n = \frac{4d_{n+1}}{(1+ic_{n+1})} \gamma_{n-1}$, $n \geq 1$.

A validade das relações de ortogonalidade no Lema 2.2 seguem de (2.10) e (2.11).

Em termos de $\gamma_n = \mathcal{N}[R_n(\zeta)]$, $n \geq 0$, os elementos de $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfazem

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\bar{\gamma}_0}, \quad i \frac{c_1}{d_1} = \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\bar{\gamma}_0}$$

e

$$\frac{1}{2d_{n+1}} = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} + \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{\gamma}_n}, \quad i \frac{c_{n+1}}{2d_{n+1}} = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} - \frac{\bar{\gamma}_{n-1}}{\bar{\gamma}_n}, \quad n \geq 1.$$

Observe também que

$$\mathcal{N} \left[\frac{1}{z - \zeta} \right] = \begin{cases} E_0(z), & \text{para } z \sim 0, \\ E_\infty(z), & \text{para } z \sim \infty. \end{cases}$$

2.2 Momentos associados e a medida no círculo unitário

Dadas as sequências de polinômios $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$, definidas como em (1.26) e (2.1), consideremos as sequências de polinômios $\{A_n(z)\}_{n=0}^\infty$ e $\{B_n(z)\}_{n=0}^\infty$ dadas por

$$A_n(z) = R_n(z) - Q_n(z) \quad \text{e} \quad B_n(z) = (z - 1)R_n(z), \quad n \geq 0. \quad (2.12)$$

Podemos facilmente verificar que

$$\frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = -\frac{1}{z-1} \left[\frac{Q_{n+1}(z)}{R_{n+1}(z)} - \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} \right], \quad n \geq 0.$$

Portanto, de (2.7)

$$\frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O(z^{n+1}), \\ -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} + O((1/z)^{n+3}), \end{cases} \quad n \geq 0. \quad (2.13)$$

Sendo assim, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.1. *Associado à sequência real $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ e à sequência encadeada $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ existe uma única medida de probabilidade não trivial $\mu(z)$ no círculo unitário. Se $M_0 > 0$ e $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ é a sequência de parâmetros maximal para $\{d_n\}_{n=1}^\infty$, então $\mu(z)$ possui um ponto puro com massa M_0 em $z = 1$. Além disso, se \mathcal{N} é o funcional de momento associado à $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ como no Lema 2.2, então*

$$\mathcal{N}[\zeta^{-n}] = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} (1 - \zeta) d\mu(\zeta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Demonstração: De (2.13) sabemos que existem expansões em séries $F_0(z)$ e $F_\infty(z)$ tais que

$$F_0(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{\bar{\gamma}_n}{\bar{r}_{n,n}} z^n + O(z^{n+1}), \quad n \geq 0 \quad (2.14)$$

e

$$F_\infty(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = -\frac{\gamma_n}{r_{n,n}} \frac{1}{z^{n+2}} + O((1/z)^{n+3}), \quad n \geq 0. \quad (2.15)$$

Fazendo

$$F_0(z) = -\mu_1 - \mu_2 z - \mu_3 z^2 - \mu_4 z^3 - \dots,$$

e

$$F_\infty(z) = \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_{-1}}{z^2} + \frac{\mu_{-2}}{z^3} + \frac{\mu_{-3}}{z^4} + \dots,$$

temos então de (2.8), (2.9), (2.12) (2.14) e (2.15) que os números μ_k satisfazem

$$\begin{aligned} \mu_n &= 1 + \sum_{j=1}^n \nu_j, & n = 1, 2, 3, \dots, \\ \mu_{-n} &= 1 - \sum_{j=1}^n \nu_{-j+1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

com $\mu_0 = 1$. Como $\nu_j = -\bar{\nu}_{-j+1}$, $j \geq 1$, temos

$$\mu_{-k} = \bar{\mu}_k, \quad k \geq 1.$$

Se denotamos o funcional de momento \mathcal{M} por

$$\mathcal{M}[\zeta^{-k}] = \mu_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

temos também

$$\mathcal{M}[\zeta^{-k}] = 1 - \mathcal{N} \left[\frac{1 - \zeta^{-k}}{1 - \zeta} \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.17)$$

Além disso, como, por (2.16), $\nu_{-k} = \mu_{-k} - \mu_{-k-1}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, os funcionais de momento \mathcal{M} e \mathcal{N} também satisfazem

$$\mathcal{N}[\zeta^k] = \mathcal{M}[\zeta^k(1 - \zeta)], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.18)$$

Agora, considerando a seguinte decomposição em frações parciais de $A_n(z)/B_n(z)$, temos

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{R_n(z) - Q_n(z)}{(z-1)R_n(z)} = \frac{\lambda_{n,0}}{z-1} + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{n,j}}{z - z_{n,j}}, \quad (2.19)$$

onde $z_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, denotam os zeros de $R_n(z)$,

$$\lambda_{n,0} = 1 - \frac{Q_n(1)}{R_n(1)}$$

e

$$\lambda_{n,j} = \frac{Q_n(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})R'_n(z_{n,j})}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Claramente, do Lema 2.1,

$$1 - d_1 = \lambda_{1,0} > \lambda_{2,0} > \dots > \lambda_{n,0} > \lambda_{n+1,0} > \dots$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,0} = M_0.$$

Além disso, tendo em vista que podemos escrever

$$\lambda_{n,j} = \frac{U_n(z_{n,j})}{(1 - z_{n,j})V_n(z_{n,j})}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

onde $V_n(z)$ e $U_n(z)$ são respectivamente dados por (1.33) e (2.6), obtemos de (1.32) e (1.34) que

$$\lambda_{n,j} = \frac{4d_1 d_2 \cdots d_n}{H_n(x_{n,j})} \frac{z_{n,j}}{(z_{n,j} - 1)(1 - z_{n,j})} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Aqui, $H_n(x)$ são os Wronskianos definidos em (1.31) e, com $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$,

$$\frac{z_{n,j}}{(z_{n,j} - 1)(1 - z_{n,j})} = \frac{1}{4 \sin^2(\theta_{n,j}/2)}.$$

Além da positividade de $\lambda_{n,j}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, considerando o limite de $zA_n(z)/B_n(z)$, quando $z \rightarrow \infty$, temos também que

$$\sum_{j=0}^n \lambda_{n,j} = 1.$$

Assim, se definimos funções escada $\psi_n(e^{i\theta})$, $n \geq 1$, em $[0, 2\pi]$ por

$$\psi_n(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & \theta = 0, \\ \lambda_{n,0}, & 0 < \theta \leq \theta_{n,1}, \\ \sum_{j=0}^k \lambda_{n,j}, & \theta_{n,k} < \theta \leq \theta_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & \theta_{n,n} < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

então, pela definição da integral de Riemann-Stieltjes

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - \zeta} d\psi_n(\zeta), \quad n \geq 1.$$

Aplicando o Teorema da Seleção de Helley (veja [27]), sabemos que existe uma subsequência $\{n_j\}$ tal que $\psi_{n_j}(e^{i\theta})$ converge para uma função limitada e não-decrescente $\mu(e^{i\theta})$, em $[0, 2\pi]$.

De (2.14) e (2.15), como

$$\int_{\mathcal{C}} d\psi_n(\zeta) = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\mathcal{C}} \zeta^k d\psi_n(\zeta) = \mu_{-k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n,$$

temos também que

$$\int_{\mathcal{C}} d\mu(\zeta) = 1 = \mathcal{M}[1] \quad \text{e} \quad \int_{\mathcal{C}} \zeta^k d\mu(\zeta) = \mu_{-k} = \mathcal{M}[\zeta^k], \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

A unicidade da medida $\mu(z)$ satisfazendo as relações acima segue de (1.6) e do Teorema 1.4. O fato de que a medida tem massa M_0 em $z = 1$ é confirmado observando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,0} = M_0$. □

2.3 Outras propriedades de $R_n(z)$ e dos polinômios ortogonais associados

Considerando a medida de probabilidade $\mu(z)$ obtida na seção anterior temos, do Lema 2.2 e do Teorema 2.1, que

$$\nu_k = \mathcal{N}[\zeta^{-k}] = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-k}(1 - \zeta)d\mu(\zeta), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e, para $n \geq 1$,

$$\int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n+k} R_n(\zeta)(1 - \zeta)d\mu(\zeta) = 0, \quad 0 \leq k \leq n - 1. \quad (2.20)$$

O lema a seguir nos fornece informações sobre os valores das integrais $\int_{\mathcal{C}} R_n(\zeta)d\mu(\zeta)$.

Lema 2.3. *Seja $\hat{\gamma}_n = \int_{\mathcal{C}} R_n(\zeta)d\mu(\zeta)$, $n \geq 0$. Então*

$$\hat{\gamma}_0 = 1 \quad e \quad \hat{\gamma}_n = 2(1 - m_n)\hat{\gamma}_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (2.21)$$

onde $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Demonstração: Primeiramente observamos de (2.20) que

$$\hat{\gamma}_n = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-k} R_n(\zeta)d\mu(\zeta), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n \geq 1. \quad (2.22)$$

Além disso, podemos observar também que $\hat{\gamma}_0 = \int_{\mathcal{C}} d\mu(\zeta) = 1$ e

$$\hat{\gamma}_1 = (1 + ic_1)\mu_{-1} + (1 - ic_1).$$

Portanto, como $\mu_{-1} = 1 - \nu_0$ e $\nu_0 = 2d_1/(1 + ic_1)$, segue que

$$\hat{\gamma}_1 = 2(1 - d_1) = 2(1 - m_1),$$

o que prova (2.21) para $n = 1$.

Agora, pela fórmula de recorrência de três termos (1.26), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1} R_{n+1}(\zeta)d\mu(\zeta) &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1}(\zeta + 1)R_n(\zeta)d\mu(\zeta) \\ &\quad + ic_{n+1} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-1}(\zeta - 1)R_n(\zeta)d\mu(\zeta) \\ &\quad - 4d_{n+1} \int_{\mathcal{C}} R_{n-1}(\zeta)d\mu(\zeta), \end{aligned}$$

para $n \geq 1$. Usando (2.20) e (2.22) temos então

$$\widehat{\gamma}_{n+1} = 2\widehat{\gamma}_n - 4d_{n+1}\widehat{\gamma}_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Daí,

$$d_{n+1} = d_{n,1} = \frac{\widehat{\gamma}_n}{2\widehat{\gamma}_{n-1}} \left(1 - \frac{\widehat{\gamma}_{n+1}}{2\widehat{\gamma}_n}\right), \quad n \geq 1.$$

Como a sequência $\{m_{n,1}\}_{n=0}^\infty = \{m_{n+1}\}_{n=0}^\infty$ é sequência de parâmetros para a sequência encadeada positiva $\{d_{n,1}\}_{n=1}^\infty$, obtemos de

$$\frac{\widehat{\gamma}_1}{2\widehat{\gamma}_0} = (1 - m_1),$$

que

$$\frac{\widehat{\gamma}_n}{2\widehat{\gamma}_{n-1}} = (1 - m_n), \quad n \geq 1,$$

o que completa a prova do lema. \square

Note que, como uma consequência imediata dos resultados acima, obtemos

$$\int_{\mathcal{C}} \zeta^k [R_n(\zeta) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(\zeta)] d\mu(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-k} [R_n(\zeta) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(\zeta)] d\mu(\zeta) = 0,$$

para $k = 0, 1, \dots, n-1$. Sendo $R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)$ um polinômio de grau exatamente n com coeficiente de maior grau $r_{n,n} = \prod_{k=1}^n (1 + ic_k)$, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Se a sequência de polinômios $\{S_n(z)\}_{n=0}^\infty$ é tal que*

$$S_0(z) = 1 \quad \text{e} \quad S_n(z) \prod_{k=1}^n (1 + ic_k) = R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

então $\{S_n(z)\}_{n=0}^\infty$ é a sequência de polinômios ortogonais mônicos com respeito à medida $\mu(z)$.

Utilizando o teorema acima e a fórmula para $R_n(0)$ dada depois de (2.5), temos que os coeficientes de Verblunsky associados $\alpha_{n-1} = -\overline{S_n(0)}$, $n \geq 1$, são dados por

$$\alpha_{n-1} = \frac{1 - 2m_n - ic_n}{1 + ic_n} \prod_{k=1}^n \frac{1 + ic_k}{1 - ic_k}, \quad n \geq 1. \quad (2.23)$$

Da igualdade (2.23) é possível mostrar também que

$$c_n = \frac{-\mathcal{I}m(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})} \quad \text{e} \quad d_{n+1} = \frac{1}{4} \frac{|1 + \tau_n \alpha_{n-1}|^2 [1 - |\tau_{n+1} \alpha_n|^2]}{[1 + \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_{n-1})] [1 + \mathcal{R}e(\tau_{n+1} \alpha_n)]}, \quad (2.24)$$

com

$$\tau_0 = 1 \quad \text{e} \quad \tau_n = S_n(1)/S_n^*(1) = \prod_{j=1}^n \frac{1 - ic_j}{1 + ic_j}, \quad n \geq 1.$$

Em Costa *et al.* [9] mostrou-se, com uma abordagem diferente da utilizada neste capítulo, que há uma correspondência biunívoca entre os pares de seqüências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ com $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ seqüência encadeada positiva e as medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário. Neste artigo, os autores também obtiveram as relações (2.23) e (2.24), e além disso, mostraram que a seqüência $\{\tau_n\}_{n=0}^\infty$ satisfaz a seguinte recorrência

$$\tau_0 = 1 \quad \text{e} \quad \tau_n = \tau_{n-1} \frac{1 - \bar{\tau}_{n-1} \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - \tau_{n-1} \alpha_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.25)$$

Além disso, mostrou-se também que os polinômios $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$ são tais que

$$R_n(z) = \frac{\prod_{j=1}^n [1 - \tau_{j-1} \alpha_{j-1}]}{\prod_{j=1}^n [1 - \mathcal{R}e(\tau_{j-1} \alpha_{j-1})]} \frac{z S_n(z) - \tau_n S_n^*(z)}{z - 1}, \quad n \geq 0. \quad (2.26)$$

A igualdade (2.26) nos diz que a seqüência de polinômios $\{(z-1)R_n(z)\}_{n=0}^\infty$ é uma seqüência de polinômios para-ortogonais.

Consideremos a família de medidas $\mu(\delta; z)$, $0 \leq \delta < 1$, , construídas a partir da medida $\mu(z)$ e dadas por

$$\int_C \ell(z) d\mu(\delta; z) = \frac{1 - \delta}{1 - M_0} \int_C \ell(z) d\mu(z) + \frac{\delta - M_0}{1 - M_0} \ell(1), \quad (2.27)$$

para todo polinômio de Laurent $\ell(z)$.

Em [9] mostrou-se que, se $\{\{c_n(\delta)\}_{n=1}^\infty, \{d_n(\delta)\}_{n=1}^\infty\}$ é o par associado à medida $\mu(\delta; z)$, vale o seguinte

$$c_n(\delta) = c_n \quad \text{e} \quad d_{n+1}(\delta) = d_{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (2.28)$$

Além disso, se $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ é a seqüência de parâmetros maximal para $\{d_n\}_{n=1}^\infty$, mostrou-se que $d_1(\delta) = (1 - \delta)M_1$, $0 \leq \delta < 1$. Em outras palavras, a família de seqüências encadeadas $\{d_n(\delta)\}_{n=1}^\infty$ é exatamente aquela obtida a partir da seqüência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ como no Teorema 1.12, com $\lambda = 1 - \delta$ e $0 \leq \delta < 1$.

Podemos notar também que, para cada $0 \leq \delta < 1$, a medida $\mu(\delta; z)$ tem massa igual a δ no ponto $z = 1$. Em particular, se $\delta = M_0$, temos $\mu(M_0; z) = \mu(z)$.

De (2.27) e (2.28) temos também que, para $0 \leq \delta < 1$, se $\{(z-1)R_n(\delta; z)\}_{n=0}^\infty$ é a seqüência de polinômios para-ortogonais associados a $\mu(\delta; z)$, com $\tau_n(\delta) = S_n(\delta; 1)/S_n^*(\delta; 1)$, então

$$R_n(\delta; z) = R_n(z), \quad n \geq 0. \quad (2.29)$$

2.4 Exemplo

Nesta seção utilizamos o seguinte exemplo para ilustrar os resultados obtidos neste capítulo.

Consideremos as seqüências $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ dadas por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\eta}{\lambda + n}, \quad n \geq 1, \\ d_1 &= d_1(t) = \frac{1}{2} \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} (1 - t), \quad d_{n+1} = \frac{1}{4} \frac{n(2\lambda + n + 1)}{(\lambda + n)(\lambda + n + 1)}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$, $\lambda > -1/2$ e $0 \leq t < 1$.

Note que, como já verificado em [9], $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência encadeada positiva com seqüência de parâmetros maximal $\{M_n^{(t)}\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$M_0^{(t)} = t, \quad M_n^{(t)} = \frac{1}{2} \frac{2\lambda + n}{\lambda + n}, \quad n \geq 1. \quad (2.31)$$

Foi mostrado em [41] (veja também [9]) que os polinômios $R_n(z)$ obtidos por meio das seqüências $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ e da fórmula de recorrência (1.26), são dados por

$$R_n(z) = \frac{(2\lambda + 2)_n}{(\lambda + 1)_n} {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z), \quad n \geq 1,$$

onde $b = \lambda + i\eta$. Isto segue da relação contígua

$$\begin{aligned} (c - a) {}_2F_1(a - 1, b; c; z) &= (c - 2a - (b - a)z) {}_2F_1(a, b; c; z) \\ &\quad + a(1 - z) {}_2F_1(a + 1, b; c; z), \end{aligned}$$

de Gauss (veja [1, Eq. (2.5.16)]), substituindo a por $-n$, b por $b + 1$, c por $b + \bar{b} + 2$ e z por $1 - z$.

Agora consideremos as funções racionais $Q_n(z)/R_n(z)$, $n \geq 1$, dadas pela seguinte expressão em fração contínua

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(z)}{R_n(z)} &= \cfrac{2d_1}{(1 + ic_1)z + (1 - ic_1)} - \cfrac{4d_2z}{(1 + ic_2)z + (1 - ic_2)} - \dots \\ &\quad \dots - \cfrac{4d_nz}{(1 + ic_n)z + (1 - ic_n)}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Claramente, pelo Lema 2.1, a seqüência crescente $\{Q_n(1)/R_n(1)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(1)}{R_n(1)} = 1 - t.$$

Com o objetivo de obter expansões em séries de potências associadas às funções racionais $Q_n(z)/R_n(z)$, escrevemos a expressão em frações contínuas (2.32) na forma equivalente

$$\frac{(1 - ic_1)Q_n(z)}{2d_1 R_n(z)} = \cfrac{1}{1 + b_1 z} - \cfrac{a_2 z}{1 + b_2 z} - \dots - \cfrac{a_n z}{1 + b_n z}, \quad (2.33)$$

onde

$$b_n = \frac{1 + ic_n}{1 - ic_n} = \frac{b + n}{\bar{b} + n}, \quad a_{n+1} = \frac{4d_{n+1}}{(1 - ic_n)(1 - ic_{n+1})} = \frac{n(b + \bar{b} + n + 1)}{(\bar{b} + n)(\bar{b} + n + 1)}, \quad n \geq 1.$$

Sendo assim, podemos obter séries de potências em torno da origem da função racional dada no lado esquerdo de (2.33) a partir de

$$\Omega_0(b; z) = \cfrac{1}{1 + b_1 z} - \cfrac{a_2 z}{1 + b_2 z} - \dots - \cfrac{a_{n-1} z}{1 + b_{n-1} z} - \cfrac{a_n z}{1 + b_n z - a_{n+1} z \Omega_n(b; z)},$$

onde $\Omega_n(b; z) = \frac{{}_2F_1(n+1, -b; \bar{b} + n + 2; z)}{{}_2F_1(n, -b; \bar{b} + n + 1; z)}$.

A relação acima segue da relação contígua (1.25), ou seja, de

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \left(1 + \frac{a - b + 1}{c} z\right) {}_2F_1(a + 1, b; c + 1; z) \\ &\quad - \frac{(a + 1)(c - b + 1)}{c(c + 1)} z {}_2F_1(a + 2, b; c + 2; z) \end{aligned}$$

substituindo a, b e c por $n, -b$ e $\bar{b} + n + 1$, respectivamente. Como $\Omega_0(b; z) = {}_2F_1(1, -b; \bar{b} + 2; z)$, temos

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} \sim \frac{2d_1}{1 - ic_1} {}_2F_1(1, -b; \bar{b} + 2; z) = -\nu_1 - \nu_2 z - \nu_3 z^2 - \dots,$$

e portanto

$$\nu_n = \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \frac{(-b - 1)_n}{(\bar{b} + 1)_n} (1 - t), \quad n \geq 1. \quad (2.34)$$

Como $\nu_n = -\bar{\nu}_{-n+1}$, com a convenção de que $(a)_n = \Gamma(a + n)/\Gamma(a)$, $n \in \mathbb{Z}$, a expressão acima para ν_n é também válida para $n \leq 0$.

Agora iremos mostrar que

$$\nu_n = \mathcal{N}[\zeta^{-n}] = \int_c \zeta^{-n} d\psi(t, b; \zeta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.35)$$

onde $d\psi(t, b; z) = \frac{i|\Gamma(b+1)|^2(1-t)}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)} (-z)^{-\bar{b}-1} (1-z)^{b+\bar{b}+1} dz$.

Aqui, os cortes de ramo em $(-z)^{-\bar{b}} = (e^{-i\pi} z)^{-\bar{b}}$ e $(1-z)^{b+\bar{b}} = (e^{-i\pi}(z-1))^{b+\bar{b}}$ são feitos ao longo do eixo real positivo.

Antes de verificarmos (2.35), podemos observar que (2.35) pode também ser escrita na forma equivalente

$$\nu_n = \frac{-i 2^{b+\bar{b}+1} |\Gamma(b+1)|^2 (1-t)}{2\pi \Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{i\theta/2} e^{(\pi-\theta)\mathcal{I}m(b)} [\sin^2(\theta/2)]^{\mathcal{R}e(b)+1/2} d\theta.$$

Primeiro iremos mostrar (2.35) para ν_{-n} onde os valores de n são tais que $\mathcal{R}e(n - \bar{b}) > 0$.

Como, para cada $0 < r < 1$, $\int_{\Lambda} (-z)^{n-\bar{b}-1} (1-z)^{b+\bar{b}+1} dz = 0$, com Λ sendo o contorno dado na Fig. 2.1, obtemos para $\mathcal{R}e(n - \bar{b}) > 0$ que

$$\int_{\mathcal{C}} \zeta^n d\psi(t, b; \zeta) = \frac{-2 \sin(\bar{b}\pi) |\Gamma(b+1)|^2 (1-t)}{2\pi \Gamma(b+\bar{b}+1)} \int_0^1 x^{n-\bar{b}-1} (1-x)^{b+\bar{b}+1} dx.$$

Portanto, utilizando a definição da função beta, a relação (1.22) e a fórmula de reflexão de Euler (1.21), obtemos o resultado desejado.

Para obter o resultado para os demais valores de n , basta notar que

$$\int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} d\psi(t, b; \zeta) = \frac{\bar{b}+1+n}{-b-1+n} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-(n+1)} d\psi(t, b; \zeta), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

o que segue por integração por partes, e que

$$\overline{\int_{\mathcal{C}} \zeta^{n-1} d\psi(t, b; \zeta)} = - \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} d\psi(t, b; \zeta), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A ideia utilizada aqui para calcular a integral (2.35) é a mesma que a utilizada em, por exemplo, [24, 41]. Em [24] os autores consideraram um conjunto geral de parâmetros para os expoentes de z e $1-z$, mas restringindo os valores dos parâmetros a serem reais.

Agora, da representação (2.34) para os coeficientes ν_n e de (2.16) temos

$$\mathcal{M}[1] = 1, \quad \overline{\mathcal{M}[\zeta^n]} = \mathcal{M}[\zeta^{-n}] = \mu_n = 1 + \frac{b+\bar{b}+1}{b+1} (1-t) \sum_{j=1}^n \frac{(-b-1)_j}{(\bar{b}+1)_j}, \quad n \geq 1.$$

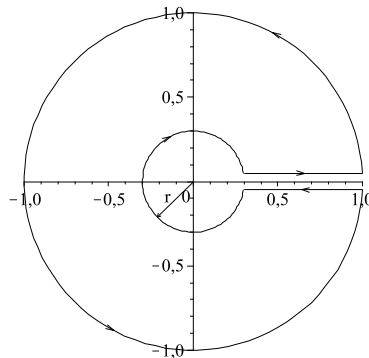


Figura 2.1: Contorno Λ

Daí,

$$\bar{\mu}_{-n} = \mu_n = t + (1-t) \frac{(-b)_n}{(\bar{b}+1)_n}, \quad n \geq 0,$$

o que segue da fórmula de somação dada por

$$1 + \frac{b + \bar{b} + 1}{b + 1} \sum_{j=1}^n \frac{(-b-1)_j}{(\bar{b}+1)_j} = \frac{(-b)_n}{(\bar{b}+1)_n}, \quad n \geq 1,$$

verificada facilmente por indução.

Tendo em vista a representação (2.35) para os coeficientes ν_n , de (2.17) temos

$$\mathcal{M}[\zeta^{-n}] = 1 - (1-t) \frac{i |\Gamma(b+1)|^2}{2\pi \Gamma(b + \bar{b} + 1)} \int_{\mathcal{C}} (1 - \zeta^{-n}) (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1 - \zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta,$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Além disso, usando integração por partes

$$(1-t) \frac{i |\Gamma(b+1)|^2}{2\pi \Gamma(b + \bar{b} + 1)} \int_{\mathcal{C}} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1 - \zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta = -\frac{\bar{b}+1}{b + \bar{b} + 1} \nu_1 = 1 - t,$$

e podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\zeta^{-n}] &= \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} d\mu(t, b; \zeta) \\ &= t(1^{-n}) + (1-t) \frac{i |\Gamma(b+1)|^2}{2\pi \Gamma(b + \bar{b} + 1)} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} (-\zeta)^{-\bar{b}-1} (1 - \zeta)^{b+\bar{b}} d\zeta, \end{aligned} \quad (2.36)$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Equivalentemente,

$$\mu_n = \mathcal{M}[\zeta^{-n}] = t e^{in0} + (1-t) \frac{2^{b+\bar{b}} |\Gamma(b+1)|^2}{2\pi \Gamma(b + \bar{b} + 1)} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} [e^{(\pi-\theta)}]^{Im(b)} [\sin^2(\theta/2)]^{Re(b)} d\theta,$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Pelo Teorema 2.2, os polinômios ortogonais mônicos no círculo unitário e os coeficientes de Verblunsky associados à medida positiva $\mu(t, b; z)$ dada por (2.36) são

$$\begin{aligned} S_n^{(t)}(z) &= \frac{(2\lambda + 2)_n}{(b+1)_n} \left[{}_2F_1(-n, b+1; b + \bar{b} + 2; 1-z) \right. \\ &\quad \left. - 2(1 - m_n^{(t)}) \frac{(\lambda + n)}{2\lambda + n + 1} {}_2F_1(-n+1, b+1; b + \bar{b} + 2; 1-z) \right] \end{aligned}$$

e

$$\alpha_{n-1}^{(t)} = -\overline{S_n^{(t)}(0)} = -\frac{(b+1)_n}{(\bar{b}+1)_n} \left[1 - 2(1 - m_n^{(t)}) \frac{\lambda + n}{b + n} \right],$$

para $n \geq 1$, onde $\{m_n^{(t)}\}_{n=0}^{\infty}$, tal que

$$m_0^{(t)} = 0, \quad m_n^{(t)} = d_n / (1 - m_{n-1}^{(t)}), \quad n \geq 1,$$

é sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva dada em (2.30).

Existem duas situações particulares onde conhecemos explicitamente os coeficientes de Verblunsky.

Quando $t = 0$, as sequências minimal $\{m_n^{(t)}\}_{n=0}^{\infty}$ e maximal $\{M_n^{(t)}\}_{n=0}^{\infty}$ para $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ coincidem e, portanto, de (2.31) concluimos que

$$\alpha_{n-1}^{(0)} = -\frac{(b)_n}{(\bar{b} + 1)_n}, \quad n \geq 1.$$

Neste caso (veja [41]), os polinômios ortogonais mônicos são

$$S_n^{(0)}(z) = \frac{(2\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 1; 1 - z), \quad n \geq 1.$$

A outra situação é quando $\lambda = 0$ (i.e., $b = i\eta$). Neste caso (veja [9]),

$$\alpha_{n-1}^{(t)} = -\frac{(i\eta + 1)_{n-1}}{(-i\eta + 1)_n} \left[i\eta - \frac{nt}{1 + (n-1)t} \right], \quad n \geq 1.$$

Capítulo 3

Estimativas para os Zeros Extremos dos Polinômios $R_n(z)$

Neste capítulo abordamos os resultados obtidos em [31], que fornecem limitantes para os zeros extremos $z_{n,1} = e^{i\theta_{n,1}}$ e $z_{n,n} = e^{i\theta_{n,n}}$ dos polinômios $R_n(z)$ gerados a partir das sequências $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$. Utilizando os limitantes obtidos, conseguimos estimativas para o suporte de medidas associadas no círculo unitário.

3.1 Zeros dos polinômios para-ortogonais e o suporte de medidas associadas

Nesta seção abordamos alguns resultados iniciais que relacionam os zeros dos polinômios para-ortogonais com o suporte de medidas associadas.

Introduzimos, agora, algumas notações que serão utilizadas no decorrer deste capítulo. Arcos abertos e arcos fechados no círculo unitário serão denotados, respectivamente, por

$$\mathcal{A}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \{e^{i\theta} : \vartheta_1 < \theta < \vartheta_2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}[\vartheta_1, \vartheta_2] = \{e^{i\theta} : \vartheta_1 \leq \theta \leq \vartheta_2\}.$$

Além disso, diremos que um determinado arco aberto \mathcal{A} é um *gap* no suporte de uma medida não trivial $\mu(z)$ no círculo unitário, quando $\mu(\mathcal{A}) = 0$.

O primeiro resultado que apresentamos é consequência imediata de (2.29) e da construção feita na demonstração do Teorema 2.1.

Lema 3.1. *Seja $\mu(z)$ uma medida não trivial no círculo unitário e sejam $R_n(z)$ e $\mathcal{W}_n(x)$ dados por (1.26) e (1.27), respectivamente. Se os zeros de $R_n(z)$ estão dentro de um arco aberto $\mathcal{A}(\vartheta_1, \vartheta_2)$, $0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq 2\pi$, então os arcos $\mathcal{A}(0, \vartheta_1)$ e $\mathcal{A}(\vartheta_2, 2\pi)$ são gaps no suporte da medida $\mu(\delta; z)$, $0 < \delta < 1$, onde $\mu(\delta; z)$ é definida como em (2.27). Em particular, se os zeros de $R_n(z)$ estão dentro do arco aberto $\mathcal{A}(\vartheta_1, \vartheta_2)$, $0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq 2\pi$, então o suporte da medida $\mu(0; z)$ está contido no arco fechado $\mathcal{A}[\vartheta_1, \vartheta_2]$.*

Veremos no decorrer do trabalho, especificamente no Teorema 3.1, que a recíproca do Lema 3.1 é também verdadeira.

Observemos, agora, que se $x = \cos(\theta/2)$, então

$$e^{-i\theta/2}(e^{i\theta} - e^{i\theta_j}) = (1 - e^{i\theta_j})[x - \cot(\theta_j/2)\sqrt{1-x^2}]. \quad (3.1)$$

De fato, utilizando a relação de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, temos

$$\begin{aligned} e^{-i\theta/2} \frac{(e^{i\theta} - e^{i\theta_j})}{1 - e^{i\theta_j}} &= \frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}e^{i\theta_j}}{1 - e^{i\theta_j}} = \frac{e^{i\frac{(\theta-\theta_j)}{2}} - e^{-i\frac{(\theta-\theta_j)}{2}}}{e^{-i\theta_j/2} - e^{i\theta_j/2}} \\ &= \frac{2i \sin\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\theta_j}{2}\right)} = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2) \cot(\theta_j/2) \\ &= x - \sqrt{1-x^2} \cot(\theta_j/2). \end{aligned}$$

Utilizando a relação (3.1) podemos enunciar o seguinte resultado de fatoração para $\mathcal{F}_n(x) \in \Omega_n$.

Lema 3.2. *Seja $\mathcal{F}_n(x) \in \Omega_n$. Para $1 \leq k \leq n$, sejam $x_{n,j} = \cos(\theta_{n,j}/2)$, $j = 1, 2, \dots, k$, os zeros de $\mathcal{F}_n(x)$ em $(-1, 1)$. Então*

$$\mathcal{F}_n(x) = \mathcal{G}_{n-k}(x) \prod_{j=1}^k (x - \beta_{n,j} \sqrt{1-x^2}),$$

onde $\mathcal{G}_{n-k}(x) \in \Omega_{n-k}$ e $\beta_{n,j} = \cot(\theta_{n,j}/2)$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Demonstração: Como já vimos na Seção 1.6, se $\mathcal{F}_n(x) \in \Omega_n$ então existe um polinômio $Y_n(z)$ tal que $r_n e^{-in\theta/2} Y_n(e^{i\theta}) = \mathcal{F}_n(x)$, r_n real, $x = \cos(\theta/2)$, e de modo que $Y_n^*(z) = z^n \overline{Y_n(1/\bar{z})} = Y_n(z)$.

Assim, se $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2, \dots, k$, são os k zeros de $Y_n(z)$ no círculo unitário, então

$$\frac{\mathcal{F}_n(x)}{\prod_{j=1}^k (1 - z_{n,j})} = \frac{r_n z^{-n/2} Y_n(z)}{\prod_{j=1}^k (1 - z_{n,j})} = r_n z^{-n/2} \frac{\prod_{j=1}^k (z - z_{n,j})}{\prod_{j=1}^k (1 - z_{n,j})} Y_{n-k}(z) \quad (3.2)$$

onde $Y_{n-k}(z)$ é um polinômio de grau $n - k$ e $1 \leq k \leq n$. Então, da relação (3.1) e da equação (3.2), podemos concluir que

$$\frac{\mathcal{F}_n(x)}{\prod_{j=1}^k (1 - z_{n,j})} = r_n Y_{n-k}(z) z^{-\frac{(n-k)}{2}} \prod_{j=1}^k [x - \cot(\theta_{n,j}/2) \sqrt{1 - x^2}],$$

ou ainda

$$\mathcal{F}_n(x) = r_n Y_{n-k}(z) z^{-\frac{(n-k)}{2}} \prod_{j=1}^k [1 - z_{n,j}] \prod_{j=1}^k [x - \cot(\theta_{n,j}/2) \sqrt{1 - x^2}]. \quad (3.3)$$

Tendo em vista a equação (3.3) resta mostrar que $r_n Y_{n-k}(z) z^{-\frac{(n-k)}{2}} \prod_{j=1}^k [1 - z_{n,j}] \in \Omega_{n-k}$, ou seja, resta mostrar que $Y_{n-k}(z) \prod_{j=1}^k [1 - z_{n,j}]$ é auto-inversivo. Para isso, notemos primeiramente que

$$Y_{n-k}(z) \prod_{j=1}^k [1 - z_{n,j}] = \frac{Y_n(z)}{P_k(z)}, \quad (3.4)$$

onde

$$P_k(z) = \prod_{j=1}^k \frac{z - z_{n,j}}{1 - z_{n,j}}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (3.5)$$

Daí, utilizando (3.5), vemos que

$$\overline{P_k(1/\bar{z})} = \prod_{j=1}^k \frac{1/z - 1/z_{n,j}}{1 - 1/z_{n,j}} = z^{-k} \prod_{j=1}^k \frac{z - z_{n,j}}{1 - z_{n,j}}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Temos, portanto, que $P_k^*(z) = z^k \overline{P_k(1/\bar{z})} = P_k(z)$, ou seja, $P_k(z)$ é auto-inversivo. Logo, como $P_k(z)$ é auto-inversivo, segue de (3.4) que $Y_{n-k}(z) \prod_{j=1}^k [1 - z_{n,j}]$ também é auto-inversivo. Isto completa a demonstração. \square

Em particular, para as funções $\mathcal{W}_n(x) = (4z)^{-n/2} R_n(z)$ dadas como em (1.28) e que sabemos pertencer a Ω_n , temos

$$\mathcal{W}_n(x) = \prod_{j=1}^n \frac{[1 - \tau_{j-1} \alpha_{j-1}] (1 - z_{n,j})}{2[1 - \mathcal{R}e(\tau_{j-1} \alpha_{j-1})]} \prod_{j=1}^n (x - \beta_{n,j} \sqrt{1 - x^2}), \quad n \geq 1,$$

onde $\beta_{n,j} = \cot(\theta_{n,j}/2)$ e $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Utilizando o Corolário 1.1 podemos demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Seja $\mu(z)$ uma medida não trivial no círculo unitário e sejam $R_n(z)$ e $\mathcal{W}_n(x)$ dados por (1.26) e (1.27), respectivamente. Para $0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < 2\pi$, vale:*

a) *Se o suporte de $\mu(z)$ tem um gap em $\mathcal{A}(0, \vartheta_1)$ então a função $\mathcal{W}_n(x)$ não tem zeros no intervalo $[\cos(\vartheta_1/2), 1]$ e, equivalentemente, o polinômio $R_n(z)$ não tem zeros no*

arco fechado $\mathcal{A}[0, \vartheta_1]$.

b) Se o suporte de $\mu(z)$ tem um gap em $\mathcal{A}(\vartheta_2, 2\pi)$ então a função $\mathcal{W}_n(x)$ não possui zeros no intervalo $[-1, \cos(\vartheta_2/2)]$ e, equivalentemente, o polinômio $R_n(z)$ não possui zeros no arco fechado $\mathcal{A}[\vartheta_2, 2\pi]$.

c) Se o suporte de $\mu(z)$ tem um gap em $\mathcal{A}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ então a função $\mathcal{W}_n(x)$ tem no máximo um zero no intervalo $[\cos(\vartheta_2/2), \cos(\vartheta_1/2)]$ e, equivalentemente, o polinômio $R_n(z)$ tem no máximo um zero no arco fechado $\mathcal{A}[\vartheta_1, \vartheta_2]$.

Demonstração: Se o suporte de $\mu(z)$ tem um gap em $\mathcal{A}(0, \vartheta_1)$ então o suporte de ψ , onde $d\psi(x) = -\sqrt{1-x^2} d\mu(e^{i2\arccos(x)})$, está contido em $[-1, \cos(\vartheta_1/2)]$. Suponha que $\mathcal{W}_n(x)$ tem o zero $y = \cos(\vartheta/2)$ em $[\cos(\vartheta_1/2), 1]$. Pelo Lema 3.2,

$$\mathcal{W}_n(x) = (x - \beta\sqrt{1-x^2}) \mathcal{G}_{n-1}(x),$$

onde $\mathcal{G}_{n-1} \in \Omega_{n-1}$ e $\beta = \cot(\vartheta/2)$. Portanto, pelo Corolário 1.1

$$I = \int_{-1}^1 (\mathcal{G}_{n-1}(x))^2 (x - \beta\sqrt{1-x^2}) d\psi(x) = \int_{-1}^1 \mathcal{G}_{n-1}(x) \mathcal{W}_n(x) d\psi(x) = 0.$$

Por outro lado, como o suporte de ψ está contido no intervalo $[-1, \cos(\vartheta_1/2)]$ e $(x - \beta\sqrt{1-x^2}) < 0$ em $[-1, \cos(\vartheta_1/2))$, temos

$$I = \int_{-1}^{\cos(\vartheta_1/2)} (\mathcal{G}_{n-1}(x))^2 (x - \beta\sqrt{1-x^2}) d\psi(x) < 0.$$

Assim, a existência de um zero de $\mathcal{W}_n(x)$ em $[\cos(\vartheta_1/2), 1]$ leva a uma contradição. Fica provado, portanto, o item a) do teorema. A prova do item b) é análoga.

Provaremos agora o item c). Se o suporte de $\mu(z)$ tem um gap em $\mathcal{A}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ então o suporte de ψ está fora do intervalo $(\cos(\vartheta_2/2), \cos(\vartheta_1/2))$. Suponha que $y_1 = \cos(\vartheta^{(1)}/2)$ e $y_2 = \cos(\vartheta^{(2)}/2)$ em $[\cos(\vartheta_2/2), \cos(\vartheta_1/2)]$ são zeros de $\mathcal{W}_n(x)$. Pelo Lema 3.2

$$\mathcal{W}_n(x) = (x - \beta_1\sqrt{1-x^2})(x - \beta_2\sqrt{1-x^2}) \mathcal{G}_{n-2}(x),$$

onde $\mathcal{G}_{n-2} \in \Omega_{n-2}$, $\beta_1 = \cot(\vartheta^{(1)}/2)$ e $\beta_2 = \cot(\vartheta^{(2)}/2)$. Como, $\sqrt{1-x^2}\mathcal{G}_{n-2}(x) \in \Omega_{n-1}$ temos pelo Corolário 1.1 que

$$\tilde{I} = \int_{-1}^1 (\mathcal{G}_{n-2}(x))^2 (x - \beta_1\sqrt{1-x^2})(x - \beta_2\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2} d\psi(x) = 0.$$

Por outro lado, como $(x - \beta_1\sqrt{1-x^2})(x - \beta_2\sqrt{1-x^2}) > 0$ ocorre fora do intervalo $[\cos(\vartheta_2/2), \cos(\vartheta_1/2)]$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \int_{-1}^{\cos(\vartheta_2/2)} (\mathcal{G}_{n-1}(x))^2 (x - \beta_1\sqrt{1-x^2})(x - \beta_2\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2} d\psi(x) \\ &\quad + \int_{\cos(\vartheta_1/2)}^1 (\mathcal{G}_{n-1}(x))^2 (x - \beta_1\sqrt{1-x^2})(x - \beta_2\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2} d\psi(x) > 0. \end{aligned}$$

Portanto, a existência de mais de um zero de $\mathcal{W}_n(x)$ em $[\cos(\vartheta_2/2), \cos(\vartheta_1/2)]$ leva a uma contradição. Isto prova o item *c*) do teorema. \square

Vale ressaltar que o item *c*) do Teorema 3.1 também foi obtido em [5] e [21].

3.2 Limitantes para zeros extremos

Inicialmente estudaremos o comportamento dos zeros de $\mathcal{W}_n(x)$ a partir dos coeficientes $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ que aparecem na fórmula de recorrência (1.29).

Os seguintes limitantes para o maior e menor zero de $\mathcal{W}_n(x)$ foram obtidos em [15].

Se $c_k > 0$ para $1 \leq k \leq n$ e $\check{c}_n = \min_{1 \leq k \leq n} c_k$ então $-\frac{1}{\sqrt{1+\check{c}_n^2}} < x_{n,n}$.

Se $c_k < 0$ para $1 \leq k \leq n$ e $\hat{c}_n = \max_{1 \leq k \leq n} c_k$ então $x_{n,1} < \frac{1}{\sqrt{1+\hat{c}_n^2}}$.

O teorema a seguir mostra que é possível conseguir melhores estimativas para tais zeros.

Teorema 3.2. *Seja $\mathcal{W}_n(x)$ dada pela fórmula de recorrência de três termos (1.29), onde $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência real e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ é sequência encadeada positiva. Então, para $N \geq 2$, os zeros de $\mathcal{W}_n(x)$, $1 \leq n \leq N$, pertencem ao intervalo $(A, B) \subseteq (-1, 1)$ se, e somente se,*

$$(a) \quad \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} < c_1 < \frac{B}{\sqrt{1-B^2}} \quad e$$

$$(b) \quad \{d_{n+1}(x)\}_{n=1}^{N-1} = \left\{ \frac{d_{n+1}}{(x - c_n\sqrt{1-x^2})(x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2})} \right\}_{n=1}^{N-1}$$

é sequência encadeada positiva finita em $x = A$ e $x = B$.

Demonstração: Observe que $A - c_1\sqrt{1-A^2} < 0$ e $d_{n+1}(A) > 0$, $n \geq 1$, implica que $A - c_n\sqrt{1-A^2} < 0$, $n = 1, 2, \dots, N$. Do mesmo modo, $B - c_1\sqrt{1-B^2} > 0$ e $d_{n+1}(B) > 0$, $n \geq 1$, implica que $B - c_n\sqrt{1-B^2} > 0$, $n = 1, 2, \dots, N$. Sendo assim, a condição a)

significa, na verdade, que

$$\frac{A}{\sqrt{1-A^2}} < c_n < \frac{B}{\sqrt{1-B^2}}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Além disso, de (1.29) temos $\mathcal{W}_n(x) \in C^2(-1, 1)$,

$$\frac{\mathcal{W}_{n+1}(x)}{\mathcal{W}_n(x)} + d_{n+1} \frac{\mathcal{W}_{n-1}(x)}{\mathcal{W}_n(x)} = x - c_{n+1} \sqrt{1-x^2}, \quad (3.6)$$

e

$$\frac{\mathcal{W}_n(x)}{(x - c_n \sqrt{1-x^2}) \mathcal{W}_{n-1}(x)} \left(1 - \frac{\mathcal{W}_{n+1}(x)}{(x - c_{n+1} \sqrt{1-x^2}) \mathcal{W}_n(x)} \right) = d_{n+1}(x), \quad (3.7)$$

para $n \geq 1$. Portanto, de $\mathcal{W}_1(1)/\mathcal{W}_0(1) = 1$ e tendo em vista que $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é sequência encadeada positiva segue que $(-1)^{n-1} \mathcal{W}_{n-1}(-1) = \mathcal{W}_{n-1}(1) > 0$, $n \geq 1$.

Provemos o teorema para o ponto A . Suponha que os zeros de $\mathcal{W}_N(x)$ estão à direita de A . Então, pela propriedade de entrelaçamento (1.30) temos $\mathcal{W}_n(A)/\mathcal{W}_{n-1}(A) < 0$, $1 \leq n \leq N$ e portanto, de (3.6) temos também que $A - c_n \sqrt{1-A^2} < 0$, $1 \leq n \leq N$. Portanto, o item (a) do teorema ocorre com relação ao ponto A .

Agora, como $\mathcal{W}_n(A)/[(A - c_n \sqrt{1-A^2}) \mathcal{W}_{n-1}(A)] > 0$ para $1 \leq n \leq N$ e

$$d_{n+1}(A) = \frac{d_{n+1}}{(A - c_n \sqrt{1-A^2})(A - c_{n+1} \sqrt{1-A^2})} > 0, \quad 1 \leq n \leq N-1,$$

de (3.7) obtemos

$$\mathcal{W}_{n+1}(A)/[(A - c_{n+1} \sqrt{1-A^2}) \mathcal{W}_n(A)] < 1 \quad \text{para } 1 \leq n \leq N-1.$$

De Ismail e Li [26] sabemos que $\{d_{n+1}\}_{n=1}^N$ é sequência encadeada positiva finita se, e somente se existe uma única sequência $\{m_n\}_{n=0}^N$ tal que

$$m_0 = 0, \quad 0 < m_n < 1, \quad 1 \leq n \leq N \quad \text{e} \quad (1 - m_{n-1}) m_n = d_{n+1}, \quad 1 \leq n \leq N.$$

A sequência $\{m_n\}_{n=0}^N$ é a sequência de parâmetros minimal para $\{d_{n+1}\}_{n=1}^N$.

Portanto, de (3.7) podemos verificar facilmente que $\{d_{n+1}(A)\}_{n=1}^{N-1}$ é sequência encadeada positiva finita. Assim, o item (b) do teorema também ocorre com relação ao ponto A . Note também que $\{1 - \mathcal{W}_{n+1}(A)/[(A - c_{n+1} \sqrt{1-A^2}) \mathcal{W}_n(A)]\}_{n=0}^{N-1}$ é sequência de parâmetros minimal para $\{d_{n+1}(A)\}_{n=1}^{N-1}$.

Provemos a recíproca do teorema para o ponto A . Vamos assumir que os itens (a) e (b) do teorema sejam verdadeiros com relação ao ponto A .

Claramente, da hipótese (a) do teorema $\mathcal{W}_1(A) = A - c_1\sqrt{1-A^2} < 0$ (o que mostra que $A < x_{1,1}$) e $A - c_{n+1}\sqrt{1-A^2} < 0$ para $n = 1, 2, \dots, N-1$. Por outro lado, da hipótese (b) temos que

$$\left\{ 1 - \frac{\mathcal{W}_{n+1}(A)}{(A - c_{n+1}\sqrt{1-A^2})\mathcal{W}_n(A)} \right\}_{n=0}^{N-1}$$

é sequência de parâmetros minimal para a sequência encadeada positiva finita $\{d_{n+1}(A)\}_{n=1}^{N-1}$.

Daí,

$$0 < \frac{\mathcal{W}_{n+1}(A)}{(A - c_{n+1}\sqrt{1-A^2})\mathcal{W}_n(A)} < 1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

e concluímos então que $(-1)^n \mathcal{W}_n(A) > 0$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Da propriedade de entrelaçamento (1.30) para os zeros $x_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, de $\mathcal{W}_n(x)$ podemos observar que $(-1)^j \mathcal{W}_n(x_{n-1,j}) > 0$ para $j = 1, 2, \dots, n-1$ e $n \geq 2$. Portanto, em particular,

$$(-1)^n \mathcal{W}_n(x_{n-1,n-1}) < 0, \quad n \geq 2.$$

Logo, $A < x_{N,N}$ segue facilmente via indução.

Isto completa a prova do teorema com relação ao ponto A . A prova com relação ao ponto B é análoga. \square

O seguinte teorema é uma variação do Teorema 3.2, onde incluímos uma restrição adicional sobre os coeficientes c_n , $n \geq 1$.

Teorema 3.3. *Seja $\mathcal{W}_n(x)$ dada pela fórmula de recorrência de três termos (1.29), onde as sequências $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ satisfazem as condições do Teorema 3.2, para algum natural par $N \geq 2$. Sendo $\ell \in \{0, 1\}$, assuma que os elementos da sequência $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ também satisfazem às seguintes desigualdades*

$$\frac{A}{\sqrt{1-A^2}} < c_{2n-\ell} < \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} < \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} < c_{2n-1+\ell} < \frac{B}{\sqrt{1-B^2}}, \quad (3.8)$$

$1 \leq n \leq N/2$, com C e D tais que $A < C < D < B$. Então, os zeros de $\mathcal{W}_n(x)$, $1 \leq n \leq N$, pertencem a $(A, C) \cup (D, B)$.

Demonstração: Do Teorema 3.2 os zeros de $\mathcal{W}_n(x)$, $1 \leq n \leq N$ pertencem a (A, B) . Como $\mathcal{W}_1(x) = x - c_1\sqrt{1-x^2}$, de (3.8),

$$(-1)^{\ell+1} \mathcal{W}_1(C) > 0 \quad \text{e} \quad (-1)^{\ell+1} \mathcal{W}_1(D) > 0.$$

Sendo assim, o único zero de $W_1(x)$ pertence a $(A, C) \cup (D, B)$.

Como

$$(-1)^\ell [C - c_2 \sqrt{1 - C^2}] > 0 \quad \text{e} \quad (-1)^\ell [D - c_2 \sqrt{1 - D^2}] > 0,$$

obtemos de (1.29) que

$$(-1)^1 \mathcal{W}_2(C) = (-1)^\ell [C - c_2 \sqrt{1 - C^2}] (-1)^{\ell+1} \mathcal{W}_1(C) - (-1)^1 d_2 > 0,$$

$$(-1)^1 \mathcal{W}_2(D) = (-1)^\ell [D - c_2 \sqrt{1 - D^2}] (-1)^{\ell+1} \mathcal{W}_1(D) - (-1)^1 d_2 > 0.$$

Daí, tendo em vista que os zeros de $\mathcal{W}_1(x)$ e $\mathcal{W}_2(x)$ se entrelaçam, podemos concluir que os zeros de $\mathcal{W}_2(x)$ pertencem a $(A, C) \cup (D, B)$.

Fazendo mais dois passos e seguindo o mesmo raciocínio, obtemos facilmente que

$$(-1)^\ell \mathcal{W}_3(C) > 0, \quad (-1)^\ell \mathcal{W}_3(D) > 0,$$

$$\mathcal{W}_4(C) > 0, \quad \mathcal{W}_4(D) > 0,$$

e, conseqüentemente, que os zeros de $\mathcal{W}_3(x)$ e $\mathcal{W}_4(x)$ pertencem a $(A, C) \cup (D, B)$.

Iremos provar o resultado via indução. Suponhamos que para $k \geq 2$ os zeros de $\mathcal{W}_{2k-1}(x)$ e $\mathcal{W}_{2k}(x)$ pertençam a $(A, C) \cup (D, B)$ com

$$(-1)^{\ell+k} \mathcal{W}_{2k-1}(C) > 0, \quad (-1)^{\ell+k} \mathcal{W}_{2k-1}(D) > 0$$

e

$$(-1)^k \mathcal{W}_{2k}(C) > 0, \quad (-1)^k \mathcal{W}_{2k}(D) > 0.$$

Como

$$(-1)^{\ell+1} (C - c_{2k+1} \sqrt{1 - C^2}) > 0 \quad \text{e} \quad (-1)^{\ell+1} (D - c_{2k+1} \sqrt{1 - D^2}) > 0,$$

obtemos de

$$(-1)^{\ell+k+1} \mathcal{W}_{2k+1}(C) = (-1)^{\ell+k+1} [(C - c_{2k+1} \sqrt{1 - C^2}) \mathcal{W}_{2k}(C) - d_{2k+1} \mathcal{W}_{2k-1}(C)],$$

$$(-1)^{\ell+k+1} \mathcal{W}_{2k+1}(D) = (-1)^{\ell+k+1} [(D - c_{2k+1} \sqrt{1 - D^2}) \mathcal{W}_{2k}(D) - d_{2k+1} \mathcal{W}_{2k-1}(D)],$$

que

$$(-1)^{\ell+k+1} \mathcal{W}_{2k+1}(C) > 0 \quad \text{e} \quad (-1)^{\ell+k+1} \mathcal{W}_{2k+1}(D) > 0.$$

Portanto, pela propriedade de entrelaçamento, os zeros de $\mathcal{W}_{2k+1}(x)$ pertencem a $(A, C) \cup (D, B)$. Agora, continuando com

$$(-1)^\ell (C - c_{2k+2} \sqrt{1 - C^2}) > 0 \quad \text{e} \quad (-1)^\ell (D - c_{2k+2} \sqrt{1 - D^2}) > 0,$$

obtemos de

$$(-1)^{k+1}\mathcal{W}_{2k+2}(C) = (-1)^{2\ell+k+1}[(C - c_{2k+2}\sqrt{1-C^2})\mathcal{W}_{2k+1}(C) - d_{2k+2}\mathcal{W}_{2k}(C)],$$

$$(-1)^{k+1}\mathcal{W}_{2k+2}(D) = (-1)^{2\ell+k+1}[(D - c_{2k+2}\sqrt{1-D^2})\mathcal{W}_{2k+1}(D) - d_{2k+2}\mathcal{W}_{2k}(D)],$$

que

$$(-1)^{k+1}\mathcal{W}_{2k+2}(C) > 0 \quad \text{e} \quad (-1)^{k+1}\mathcal{W}_{2k+2}(D) > 0.$$

Daí, concluímos que os zeros de $\mathcal{W}_{2k+2}(x)$ também pertencem a $(A, C) \cup (D, B)$. Logo, o resultado segue via indução. \square

Agora, iremos utilizar o Teorema 3.2 para encontrar boas estimativas para os limitantes dos zeros extremos de $\mathcal{W}_N(x)$, ou equivalentemente, determinar boas estimativas para os limitantes dos zeros extremos de $R_N(z)$.

Teorema 3.4. *Seja $N \geq 2$ e $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ sequência encadeada positiva finita tal que*

$$\frac{d_{n+1}}{\hat{d}_{n+1}} = q_{n+1} \leq 1 \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Considere $U_N = \min\{u_n : 2 \leq n \leq N\}$ e $V_N = \max\{v_n : 2 \leq n \leq N\}$, onde u_n e v_n pertencem a $[-\infty, \infty]$, e são tais que

$$u_{n+1} = \frac{2(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}{(c_n + c_{n+1}) + \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}},$$

$$v_{n+1} = \frac{2(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}{(c_n + c_{n+1}) - \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}},$$

$n = 1, 2, \dots, N-1$. Então os zeros de $\mathcal{W}_N(x)$ pertencem a (A_N, B_N) e os zeros de $R_N(z)$ pertencem ao arco aberto

$$\mathcal{A}(2 \arccos(B_N), 2 \arccos(A_N)) = \mathcal{A}(2 \operatorname{arccot}(V_N), 2 \operatorname{arccot}(U_N)),$$

onde $A_N = U_N / \sqrt{1 + U_N^2}$ e $B_N = V_N / \sqrt{1 + V_N^2}$.

Demonstração: Primeiro analisamos os valores que x pode tomar de modo que a sequência $\{d_{n+1}(x)\}_{n=1}^{N-1}$, dada no Teorema 3.2, seja sequência encadeada positiva finita. Utilizando a sequência encadeada positiva $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ temos então (veja Teorema 1.10) que se $0 < d_{n+1}(x) \leq \hat{d}_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots, N-1$, então $\{d_{n+1}(x)\}_{n=1}^{N-1}$ é também uma sequência encadeada positiva finita. Observe que

$$d_{n+1}(x) = \frac{d_{n+1}}{(x - c_n \sqrt{1 - x^2})(x - c_{n+1} \sqrt{1 - x^2})}, \quad 1 \leq n \leq N-1.$$

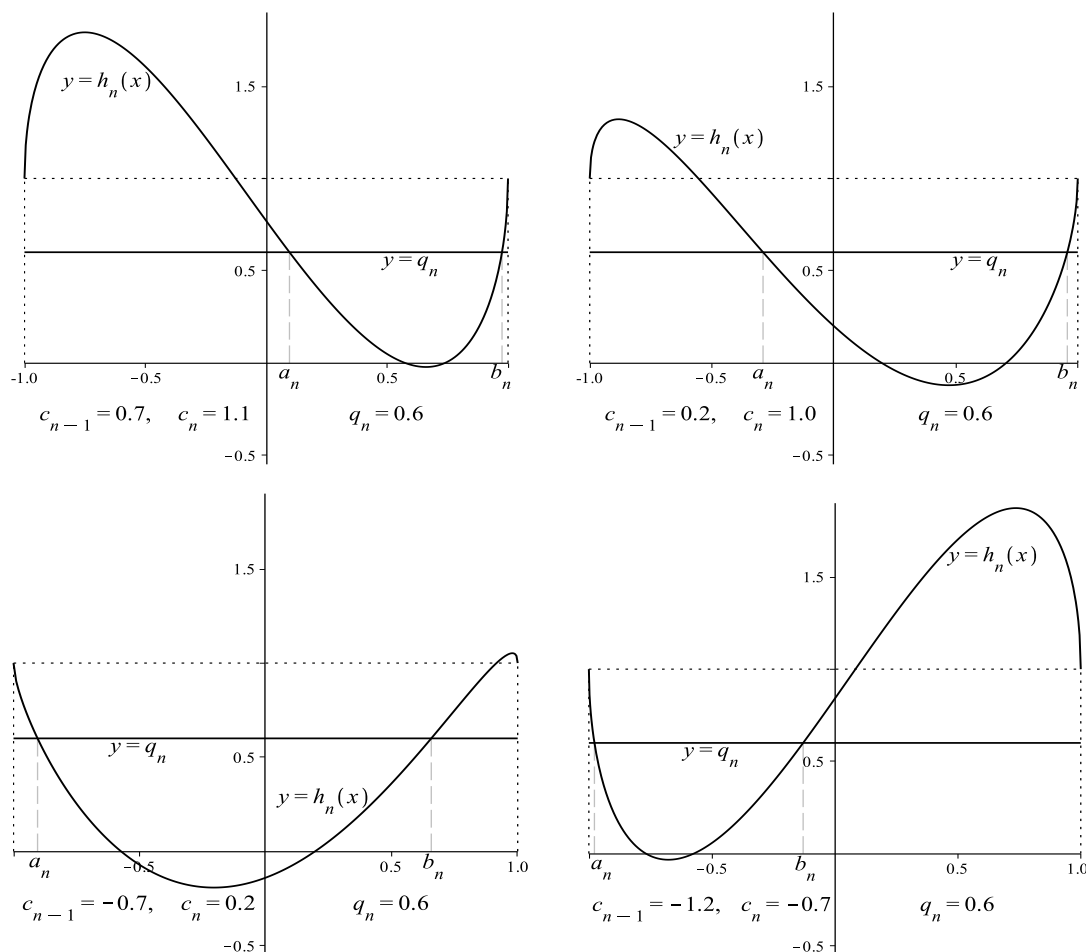


Figura 3.1: Gráficos de $y = h_n(x) = (x - c_{n-1}\sqrt{1-x^2})(x - c_n\sqrt{1-x^2})$ e $y = q_n$.

Portanto, se $x \in [-1, 1]$ é tal que

$$h_{n+1}(x) = (x - c_n\sqrt{1-x^2})(x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2}) \geq q_{n+1}, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (3.9)$$

então $\{d_{n+1}(x)\}_{n=1}^{N-1}$ é uma sequência encadeada positiva finita.

Vamos primeiramente assumir $q_{n+1} < 1$. Podemos observar pela Figura 3.1 que os valores de x que satisfazem a desigualdade $h_{n+1}(x) \geq q_{n+1}$ são tais que $-1 \leq x \leq a_{n+1}$ e $b_{n+1} \leq x \leq 1$.

Para determinar os valores de a_{n+1} e b_{n+1} substituímos x por $\cos(\theta/2)$ em (3.9) e obtemos

$$(1 - c_n c_{n+1}) \cos^2(\theta/2) - (c_n + c_{n+1}) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) + (c_n c_{n+1} - q_{n+1}) \geq 0.$$

Como $\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 1$ e $\sin(\theta/2) > 0$ para $0 < \theta < 2\pi$, obtemos o seguinte conjunto de desigualdades as quais, para $x \in (-1, 1)$, são equivalentes a (3.9)

$$(1 - q_{n+1}) \cot^2(\theta/2) - (c_n + c_{n+1}) \cot(\theta/2) + (c_n c_{n+1} - q_{n+1}) \geq 0, \quad (3.10)$$

para $1 \leq n \leq N - 1$. Resolvendo a equação de segunda ordem

$$(1 - q_{n+1}) \cot^2(\theta/2) - (c_n + c_{n+1}) \cot(\theta/2) + (c_n c_{n+1} - q_{n+1}) = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(c_n + c_{n+1}) - \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}}{2(1 - q_{n+1})}, \\ v_{n+1} &= \frac{(c_n + c_{n+1}) + \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}}{2(1 - q_{n+1})}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Note que o termo dentro da raiz em (3.11) é sempre positivo pois

$$\begin{aligned} &(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1}) \\ &= (c_n - c_{n+1})^2 + 4q_{n+1} + 4q_{n+1}(c_n c_{n+1} - q_{n+1}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Além disso,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}}{(1 - q_{n+1})} > 0. \quad (3.13)$$

Os valores de u_{n+1} e v_{n+1} são tais que a correspondente desigualdade em (3.10) ocorre se $-\infty < \cot(\theta/2) \leq u_{n+1}$ ou $v_{n+1} \leq \cot(\theta/2) < \infty$.

Claramente, do comportamento monotônico de $x = \cos(\theta/2)$ e $\cot(\theta/2)$ (i.e., ambos são monotonicamente decrescentes quando θ cresce de 0 a 2π), observamos que $a_{n+1} = u_{n+1}/\sqrt{1 + u_{n+1}^2}$ e $b_{n+1} = v_{n+1}/\sqrt{1 + v_{n+1}^2}$.

As expressões dadas no teorema para u_{n+1} e v_{n+1} são facilmente obtidas de (3.11) por multiplicações adequadas dos numeradores e denominadores.

Portanto, se $-\infty \leq \cot(\theta/2) \leq U_N$ ou $V_N \leq \cot(\theta/2) \leq \infty$, então todas as desigualdades em (3.10) são satisfeitas e os valores de A_N e B_N dados no teorema são tais que $\{d_{n+1}(A_N)\}_{n=1}^{N-1}$ e $\{d_{n+1}(B_N)\}_{n=1}^{N-1}$ são sequências encadeadas positivas finitas. Assim, os valores de A_N e B_N são tais que o item (b) do Teorema 3.2 ocorre.

É fácil ver também que

$$(v_{n+1} - c_n)(c_n - u_{n+1}) = \frac{q_{n+1}}{1 - q_{n+1}}(1 + c_n^2)$$

para $n = 1, 2, \dots, N - 1$. Portanto, de (3.13), $u_2 < c_1 < v_2$, e conseqüentemente

$$U_N < c_1 < V_N.$$

Assim, os valores obtidos para A_N e B_N também satisfazem o item (a) do Teorema 3.2.

Finalmente, observamos que as expressões para u_{n+1} e v_{n+1} no teorema, as quais foram provadas para o caso em que $q_{n+1} < 1$, também permanecem válidas se $q_{n+1} = 1$. Neste caso, $u_{n+1} = -\infty$ ou $v_{n+1} = \infty$.

Isto completa a prova do teorema. \square

Note que, se é possível escolher a sequência encadeada positiva finita $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ tal que o quociente $q_{n+1} \ll 1$, então é possível obtermos boas estimativas para A_N e B_N .

No Teorema 3.4 se escolhermos a sequência encadeada positiva finita $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ como sendo exatamente a sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ então $q_{n+1} = 1$, $1 \leq n \leq N-1$ e podemos obter o seguinte resultado.

Corolário 3.1. *Considere $U_N = \min\{u_n : 2 \leq n \leq N\}$ e $V_N = \max\{v_n : 2 \leq n \leq N\}$, onde u_n e v_n pertencem a $[-\infty, \infty]$, e são tais que $u_n < v_n$,*

$$u_{n+1} = \frac{2(c_n c_{n+1} - 1)}{c_n + c_{n+1} + |c_n + c_{n+1}|} \quad e \quad v_{n+1} = \frac{2(c_n c_{n+1} - 1)}{c_n + c_{n+1} - |c_n + c_{n+1}|}, \quad (3.14)$$

para $n = 1, 2, \dots, N-1$. Então os zeros de $\mathcal{W}_N(x)$ pertencem ao intervalo (A_N, B_N) e os zeros de $R_N(z)$ pertencem ao arco aberto $\mathcal{A}(2 \arccos(B_N), 2 \arccos(A_N))$, onde

$$A_N = U_N / \sqrt{1 + U_N^2} \quad e \quad B_N = V_N / \sqrt{1 + V_N^2}.$$

Observação 3.1. *Em (3.14) devemos tomar $u_{n+1} = -\infty$ se $c_n + c_{n+1} \leq 0$ e $v_{n+1} = \infty$ se $c_n + c_{n+1} \geq 0$.*

Observe agora que as desigualdades em (3.9) também são verdadeiras se

$$x - c_n \sqrt{1 - x^2} \leq -\sqrt{q_n^{(1,N)}}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

ou

$$x - c_n \sqrt{1 - x^2} \geq \sqrt{q_n^{(1,N)}}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

para $x \in [-1, 1]$. Aqui, $q_1^{(1,N)} = q_2$, $q_n^{(1,N)} = \max\{q_n, q_{n+1}\}$, $2 \leq n \leq N-1$ e $q_N^{(1,N)} = q_N$. Considerando $x = \cos(\theta/2)$, obtemos dos dois conjuntos de desigualdades acima, os seguintes conjuntos equivalentes de desigualdades

$$2 \cot^2(\theta/4) - 2c_n \cot(\theta/4) \leq (1 - \sqrt{q_n^{(1,N)}}) (1 + \cot^2(\theta/4)), \quad 1 \leq n \leq N, \quad (3.15)$$

e

$$2 \cot^2(\theta/4) - 2c_n \cot(\theta/4) \geq (1 + \sqrt{q_n^{(1,N)}}) (1 + \cot^2(\theta/4)), \quad 1 \leq n \leq N. \quad (3.16)$$

Para determinar soluções apropriadas necessitamos resolver equações de segunda ordem em $\cot(\theta/4)$. Utilizando manipulações análogas às utilizadas na demonstração do Teorema 3.4, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.5. *Sejam $N \geq 2$ e $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ sequência encadeada positiva finita tal que*

$$\frac{d_{n+1}}{\hat{d}_{n+1}} = q_{n+1} \leq 1 \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N-1,$$

e sejam $q_1^{(1,N)} = q_2$, $q_n^{(1,N)} = \max\{q_n, q_{n+1}\}$, $2 \leq n \leq N-1$ e $q_N^{(1,N)} = q_N$. Considere $U_{1,N} = \min\{u_{1,n} : 1 \leq n \leq N\}$ e $V_{1,N} = \max\{v_{1,n} : 1 \leq n \leq N\}$, onde $u_{1,n}$ e $v_{1,n}$ pertencem a $[0, \infty]$, e são tais que

$$u_{1,n} = \frac{c_n + \sqrt{c_n^2 + (1 - q_n^{(1,N)})}}{1 + \sqrt{q_n^{(1,N)}}} \quad e \quad v_{1,n} = \frac{1 + \sqrt{q_n^{(1,N)}}}{-c_n + \sqrt{c_n^2 + (1 - q_n^{(1,N)})}}.$$

Então, os zeros de $\mathcal{W}_N(x)$ pertencem ao intervalo (A_N, B_N) e os zeros de $R_N(z)$ pertencem ao arco aberto $\mathcal{A}(2 \arccos(B_N), 2 \arccos(A_N))$, onde $A_N = (U_{1,N}^2 - 1)/(U_{1,N}^2 + 1)$ e $B_N = (V_{1,N}^2 - 1)/(V_{1,N}^2 + 1)$.

Observação 3.2. *Considerando o comportamento da função $x - c_n \sqrt{1 - x^2}$, as soluções para $u_{1,n}$ no Teorema 3.5 podem ser obtidas de (3.15) e as soluções para $v_{1,n}$ podem ser obtidas de (3.16).*

No Teorema 3.5 escolhendo a sequência encadeada positiva finita $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ como sendo exatamente a sequência encadeada positiva $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.2. *Considere $U_{1,N} = \min\{u_{1,n} : 1 \leq n \leq N\}$ e $V_{1,N} = \max\{v_{1,n} : 1 \leq n \leq N\}$, onde $u_{1,n}$ e $v_{1,n}$ pertencem a $[0, \infty]$ e são tais que $u_{1,n} < v_{1,n}$,*

$$u_{1,n} = \frac{c_n + |c_n|}{2} \quad e \quad v_{1,n} = \frac{2}{-c_n + |c_n|}.$$

Então, os zeros de \mathcal{W}_N pertencem ao intervalo (A_N, B_N) e os zeros de R_N pertencem ao arco aberto $\mathcal{A}(2 \arccos(B_N), 2 \arccos(A_N))$, onde $A_N = (U_{1,N}^2 - 1)/(U_{1,N}^2 + 1)$ e $B_N = (V_{1,N}^2 - 1)/(V_{1,N}^2 + 1)$.

3.3 Estimativas para o suporte da medida

Considerando agora uma sequência encadeada infinita $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ podemos obter, com o uso do Teorema 3.4, limitantes para os zeros de $\mathcal{W}_n(x)$ (e também para os zeros

de $R_n(z)$) quando n tende ao infinito. Sendo assim, do Lema 3.1, podemos conseguir também um limitante para o suporte da medida $\mu(0; z)$, definida como em (2.27), e em relação a qual os coeficientes $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ estão associados.

Teorema 3.6. *Seja $\mu(z)$ a medida positiva associada ao par de seqüências reais $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, sendo $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ seqüência encadeada positiva, como em (2.24). Seja $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ seqüência encadeada positiva tal que $d_{n+1}/\hat{d}_{n+1} = q_{n+1} \leq 1$, $n \geq 1$. Considere*

$$U_N = \min\{u_n : 2 \leq n \leq N\} \quad e \quad V_N = \max\{v_n : 2 \leq n \leq N\},$$

$N \geq 2$, onde u_n e v_n pertencem a $[-\infty, \infty]$ e são tais que

$$u_{n+1} = \frac{2(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}{(c_n + c_{n+1}) + \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}},$$

$$v_{n+1} = \frac{2(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}{(c_n + c_{n+1}) - \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}},$$

para $n = 1, 2, \dots, N-1$. Seja $U = \lim_{N \rightarrow \infty} U_N$ e $V = \lim_{N \rightarrow \infty} V_N$. Então, o suporte da medida $\mu(0; z)$ está contido no arco fechado $\mathcal{A}[2 \operatorname{arccot}(V), 2 \operatorname{arccot}(U)]$.

Claramente, no Teorema 3.6, $\{V_N\}$ é uma seqüência crescente e $\{U_N\}$ é uma seqüência decrescente.

Analogamente, utilizando o Teorema 3.5 temos o seguinte.

Teorema 3.7. *Seja $\mu(z)$ a medida positiva associada ao par de seqüências reais $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, com $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ seqüência encadeada positiva, como em (2.24). Seja $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ seqüência encadeada positiva tal que $d_{n+1}/\hat{d}_{n+1} = q_{n+1} \leq 1$, $n \geq 1$. Sendo $q_1^{(1)} = q_2$ e $q_n^{(1)} = \max\{q_n, q_{n+1}\}$, $n \geq 2$, considere*

$$U_{1,N} = \min\{u_{1,n} : 1 \leq n \leq N\} \quad e \quad V_{1,N} = \max\{v_{1,n} : 1 \leq n \leq N\},$$

$N \geq 2$, onde $u_{1,n}$ e $v_{1,n}$ pertencem a $[0, \infty]$ e são tais que

$$u_{1,n} = \frac{c_n + \sqrt{c_n^2 + (1 - q_n^{(1)})}}{1 + \sqrt{q_n^{(1)}}} \quad e \quad v_{1,n} = \frac{1 + \sqrt{q_n^{(1)}}}{-c_n + \sqrt{c_n^2 + (1 - q_n^{(1)})}}.$$

Seja $U^{(1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} U_{1,N}$ e $V^{(1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} V_{1,N}$. Então, o suporte da medida $\mu(0; z)$ está contido no arco fechado $\mathcal{A}[4 \operatorname{arccot}(V^{(1)}), 4 \operatorname{arccot}(U^{(1)})]$.

Agora estudamos quais são as condições para as sequências $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ de tal modo que o suporte da medida associada esteja contido num determinado arco fechado.

Claramente, do Teorema 3.6 se $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ são tais que

$$u_n \geq \cot(\vartheta_2/2) \quad \text{e} \quad v_n \leq \cot(\vartheta_1/2), \quad n \geq 1,$$

então todos os zeros de $R_n(z)$, $n \geq 1$, pertencem ao arco aberto $\mathcal{A}(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Portanto, pelo Lema 3.1 o suporte da medida associada $\mu(0; z)$ está contido no arco fechado $\mathcal{A}[\vartheta_1, \vartheta_2]$. Sendo assim, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.8. *Dada uma sequência de números complexos $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, com $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$, seja $\mu(z)$ a medida não trivial no círculo unitário para a qual $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ é a sequência associada de coeficientes de Verblunsky. Sejam $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ dadas como em (2.24). Além disso, seja $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ sequência encadeada positiva tal que $d_{n+1}/\hat{d}_{n+1} = q_{n+1} \leq 1$, $n \geq 1$. Para $0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq 2\pi$, se*

$$\cot(\vartheta_2/2) \leq u_{n+1} = \frac{2(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}{(c_n + c_{n+1}) + \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}},$$

$$\frac{2(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}{(c_n + c_{n+1}) - \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}} = v_{n+1} \leq \cot(\vartheta_1/2),$$

$n \geq 1$, então o suporte de $\mu(0; z)$ está contido no arco fechado $\mathcal{A}[\vartheta_1, \vartheta_2]$.

O corolário seguinte é uma consequência do Corolário 3.1.

Corolário 3.3. *Dada uma sequência de números complexos $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, onde $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$, seja $\mu(z)$ a medida não trivial no círculo unitário para a qual $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ é a sequência associada de coeficientes de Verblunsky. Sejam $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ dadas como em (2.24).*

a) *Suponha $c_n + c_{n+1} > 0$, $n \geq 1$. Para um dado ângulo ϑ_2 tal que $0 < \vartheta_2 \leq 2\pi$, se*

$$\cot(\vartheta_2/2) < \frac{c_n c_{n+1} - 1}{c_n + c_{n+1}}, \quad n \geq 1,$$

então o suporte da medida $\mu(z)$ está contido no arco fechado $\mathcal{A}[0, \vartheta_2]$.

b) *Suponha $c_n + c_{n+1} < 0$, $n \geq 1$. Para um dado ângulo ϑ_1 tal que $0 \leq \vartheta_1 < 2\pi$, se*

$$\frac{c_n c_{n+1} - 1}{c_n + c_{n+1}} < \cot(\vartheta_1/2), \quad n \geq 1,$$

então o suporte de $\mu(z)$ está contido no arco fechado $\mathcal{A}[\vartheta_1, 2\pi]$.

De modo análogo à obtenção do Teorema 3.8, podemos utilizar o Teorema 3.7 para obter o seguinte resultado.

Teorema 3.9. *Dada a seqüência de números complexos $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, onde $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$, seja $\mu(z)$ a medida de probabilidade não trivial no círculo unitário para a qual $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ é a seqüência associada de coeficientes de Verblunsky. Sejam $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ dadas como em (2.24). Além disso, seja $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ seqüência encadeada positiva tal que $d_{n+1}/\hat{d}_{n+1} = q_{n+1} \leq 1$, $n \geq 1$ com $q_1^{(1)} = q_2$ e $q_n^{(1)} = \max\{q_n, q_{n+1}\}$, $n \geq 2$. Para $0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq 2\pi$, se*

$$\cot(\vartheta_2/4) < \frac{c_n + \sqrt{c_n^2 + (1 - q_n^{(1)})}}{1 + \sqrt{q_n^{(1)}}} \quad e \quad \frac{1 + \sqrt{q_n^{(1)}}}{-c_n + \sqrt{c_n^2 + (1 - q_n^{(1)})}} < \cot(\vartheta_1/4),$$

$n \geq 1$, então o suporte da medida $\mu(0; z)$ está contido no arco fechado $\mathcal{A}[\vartheta_1, \vartheta_2]$.

O próximo teorema nos fornece uma maneira de determinar se um determinado arco aberto $\mathcal{A}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ é um *gap* no suporte da medida.

Teorema 3.10. *Dada a seqüência de números complexos $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, onde $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$, seja $\mu(z)$ a medida de probabilidade não trivial no círculo unitário para a qual $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ é a seqüência associada de coeficientes de Verblunsky. Sejam as seqüências $\{c_n^{(\vartheta_2)}\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_{n+1}^{(\vartheta_2)}\}_{n=1}^\infty$ dadas por*

$$c_n^{(\vartheta_2)} = \frac{-\mathcal{I}m(\tau_{n-1}^{(\vartheta_2)} \alpha_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}^{(\vartheta_2)} \alpha_{n-1})} \quad e \quad d_{n+1}^{(\vartheta_2)} = (1 - g_n)g_{n+1},$$

$n \geq 1$, onde

$$g_n = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_{n-1}^{(\vartheta_2)} \alpha_{n-1}|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}^{(\vartheta_2)} \alpha_{n-1})]}, \quad n \geq 1$$

e

$$\tau_0^{(\vartheta_2)} = e^{i\vartheta_2} \quad e \quad \tau_n^{(\vartheta_2)} = e^{i\vartheta_2} \tau_{n-1}^{(\vartheta_2)} \frac{1 - \overline{\tau_{n-1}^{(\vartheta_2)} \alpha_{n-1}}}{1 - \tau_{n-1}^{(\vartheta_2)} \alpha_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Seja $\mathbf{m}_0^{(\vartheta_1, \vartheta_2)} = 0$ e $\mathbf{m}_n^{(\vartheta_1, \vartheta_2)} = \frac{d_{n+1}^{(\vartheta_2)} (\cos(2\pi + \vartheta_1 - \vartheta_2/2))}{1 - \mathbf{m}_{n-1}^{(\vartheta_1, \vartheta_2)}}$, $n \geq 1$, onde

$$d_{n+1}^{(\vartheta_2)}(x) = \frac{d_{n+1}^{(\vartheta_2)}}{(x - c_n^{(\vartheta_2)}) \sqrt{1 - x^2} (x - c_{n+1}^{(\vartheta_2)}) \sqrt{1 - x^2}}.$$

Então $\mathcal{A}(\vartheta_1, \vartheta_2)$, $0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq 2\pi$, é um *gap* no suporte da medida $\mu(z)$ se, e somente se

$$0 < \mathbf{m}_n^{(\vartheta_1, \vartheta_2)} < 1, \quad n \geq 1,$$

e

$$c_1 > \cot(2\pi + \vartheta_1 - \vartheta_2/2).$$

Demonstração: Consideremos a medida $\tilde{\mu}(z)$ obtida por meio de $\mu(z)$ por uma rotação de ângulo $2\pi - \vartheta_2$. Em outras palavras, $\tilde{\mu}(z) = \mu(ze^{-i(2\pi - \vartheta_2)})$. Nessas condições temos então que a medida $\mu(z)$ tem um *gap* em $\mathcal{A}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ se, e somente se o suporte de $\tilde{\mu}(z)$ está contido no arco $\mathcal{A}[0, 2\pi + \vartheta_1 - \vartheta_2]$.

É conhecido que os coeficientes de Verblunsky associados a $\tilde{\mu}(z)$ podem ser dados em termos dos coeficientes de Verblunsky correspondentes a $\mu(z)$ por meio da seguinte relação

$$\tilde{\alpha}_n = e^{-i(n+1)(2\pi - \vartheta_2)} \alpha_n = e^{i(n+1)\vartheta_2} \alpha_n, \quad n \geq 0.$$

Portanto, se $\tilde{S}_n(z)$ são os polinômios ortogonais com respeito à medida $\tilde{\mu}(z)$ então, pelo Teorema 3.1, os zeros dos polinômios

$$\tilde{R}_n(z) = \frac{\prod_{j=1}^n [1 - \tilde{\tau}_{j-1} \tilde{\alpha}_{j-1}]}{\prod_{j=1}^n [1 - \mathcal{R}e(\tilde{\tau}_{j-1} \tilde{\alpha}_{j-1})]} \frac{z \tilde{S}_n(z) - \tilde{\tau}_n \tilde{S}_n^*(z)}{z - 1}, \quad n \geq 1,$$

pertencem ao arco $\mathcal{A}(0, 2\pi + \vartheta_1 - \vartheta_2)$. Aqui, $\tilde{\tau}_n$, $n \geq 0$ são tais que

$$\tilde{\tau}_0 = \frac{\tilde{S}_0(1)}{\tilde{S}_0^*(1)} = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{\tau}_n = \frac{\tilde{S}_n(1)}{\tilde{S}_n^*(1)} = \tilde{\tau}_{n-1} \frac{1 - \overline{\tilde{\tau}_{n-1} \tilde{\alpha}_{n-1}}}{1 - \tilde{\tau}_{n-1} \tilde{\alpha}_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (3.17)$$

Utilizando (2.24), sabemos que a sequência $\{\tilde{R}_n(z)\}_{n=0}^\infty$ satisfaz a seguinte fórmula de recorrência

$$\tilde{R}_{n+1}(z) = \left[(1 + ic_{n+1}^{(\vartheta_2)})z + (1 - ic_{n+1}^{(\vartheta_2)}) \right] \tilde{R}_n(z) - 4d_{n+1}^{(\vartheta_2)} z \tilde{R}_{n-1}(z),$$

com $\tilde{R}_0(z) = 1$ e $\tilde{R}_1(z) = (1 + ic_1^{(\vartheta_2)})z + (1 - ic_1^{(\vartheta_2)})$, onde

$$c_n^{(\vartheta_2)} = \frac{-\mathcal{I}m(\tilde{\tau}_{n-1} \tilde{\alpha}_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tilde{\tau}_{n-1} \tilde{\alpha}_{n-1})} \quad \text{e} \quad d_{n+1}^{(\vartheta_2)} = (1 - g_n)g_{n+1},$$

$n \geq 1$, com

$$g_n = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tilde{\tau}_{n-1} \tilde{\alpha}_{n-1}|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tilde{\tau}_{n-1} \tilde{\alpha}_{n-1})]}, \quad n \geq 1.$$

Sendo $\tau_{n-1}^{(\vartheta_2)} = e^{in\vartheta_2} \tilde{\tau}_{n-1}$, $n \geq 1$, é fácil ver que $\tilde{\tau}_{n-1} \tilde{\alpha}_{n-1} = \tau_{n-1}^{(\vartheta_2)} \alpha_{n-1}$, $n \geq 1$, e que os coeficientes $c_n^{(\vartheta_2)}$ e $d_{n+1}^{(\vartheta_2)}$ podem ser dados como no teorema. Além disso, da fórmula de recorrência (3.17) para $\tilde{\tau}_n$ resulta a fórmula de recorrência para $\tau_n^{(\vartheta_2)}$ dada no teorema.

Logo, o resultado segue do Teorema 3.2. \square

3.4 Algumas observações relacionadas a sequências encadeadas positivas

Consideremos, para $n \geq 2$, a sequência encadeada positiva finita $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ e seja $\{\mathcal{W}_n(x)\}_{n=1}^N$ dada pela fórmula de recorrência (1.29) de tal modo que $c_n = 0$, $n \geq 1$. Claramente, $\mathcal{W}_n(x)$ são polinômios simétricos.

Utilizando o Teorema 3.2 temos o seguinte.

Lema 3.3. *Seja $N \geq 2$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ sequência encadeada positiva finita. Então, a sequência $\{\epsilon d_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ é também uma sequência encadeada positiva finita se, e somente se $0 < \epsilon < 1/x_{N,1}^2$. Aqui, $x_{N,1}$ denota o maior zero do polinômio simétrico $\mathcal{W}_N(x)$ obtido da fórmula de recorrência de três termos*

$$\mathcal{W}_{n+1}(x) = x \mathcal{W}_n(x) - d_{n+1} \mathcal{W}_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

com $\mathcal{W}_0(x) = 1$ e $\mathcal{W}_1(x) = x$.

Demonstração: Seja $\{\epsilon d_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ sequência encadeada positiva finita. Então, tendo em vista que $\epsilon d_{n+1} > 0$ e que $d_{n+1} > 0$, $n \geq 1$, obtemos $\epsilon > 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $\epsilon \geq 1/x_{N,1}^2$. Então, obtemos

$$\epsilon d_{n+1} \geq \frac{d_{n+1}}{x_{N,1}^2}, \quad n \geq 1,$$

e, pelo critério de comparação (veja Teorema 1.10), segue que $\{d_{n+1}/x_{N,1}^2\}_{n=1}^{N-1}$ é sequência encadeada positiva finita.

Lembrando que $c_n = 0$, $n \geq 1$, temos

$$d_{n+1}(x_{N,1}) = \frac{d_{n+1}}{\left(x_{N,1} - c_n \sqrt{1 - x_{N,1}^2}\right) \left(x_{N,1} - c_{n+1} \sqrt{1 - x_{N,1}^2}\right)} = \frac{d_{n+1}}{x_{N,1}^2}, \quad 1 \leq n \leq N-1,$$

e portanto temos que $\{d_{n+1}(x_{N,1})\}_{n=1}^{N-1}$ é sequência encadeada positiva. Além disso, como $0 < x_{N,1}/\sqrt{1 - x_{N,1}^2}$, segue do Teorema 3.2 que os zeros de $\mathcal{W}_N(x)$ são menores que $x_{N,1}$, o que é absurdo. Logo, concluímos que $0 < \epsilon < 1/x_{N,1}^2$, como queríamos.

Agora, provemos a recíproca do lema. Por hipótese, temos $0 < \epsilon < 1/x_{N,1}^2$. Então, se $x > x_{N,1}$, pelo Teorema 3.2, concluímos que $\{d_{n+1}/x^2\}_{n=1}^{N-1}$ é sequência encadeada positiva. Portanto, como $0 < \epsilon d_{n+1} < d_{n+1}/x_{N,1}^2$, podemos escolher $x > x_{N,1}$ e tal que

$$0 < \epsilon d_{n+1} < d_{n+1}/x^2 < d_{n+1}/x_{N,1}^2.$$

Daí, usando novamente o Teorema 1.10 concluímos que $\{\epsilon d_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ é sequência encadeada positiva finita. \square

No caso de uma sequência encadeada positiva infinita $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.4. *Seja $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ sequência encadeada positiva. Então $\{\epsilon d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é também uma sequência encadeada positiva se e somente se $0 < \epsilon \leq 1/\xi^2$. Aqui, $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,1}$, onde $x_{n,1}$ é o maior zero do polinômio simétrico $\mathcal{W}_n(x)$ dado pela fórmula de recorrência de três termos*

$$\mathcal{W}_{n+1}(x) = x \mathcal{W}_n(x) - d_{n+1} \mathcal{W}_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $\mathcal{W}_0(x) = 1$ e $\mathcal{W}_1(x) = x$.

Um exemplo interessante de sequência encadeada positiva $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n=1}^{\infty}$ que iremos utilizar na Seção 3.5 (e que já foi utilizado na Seção 2.4) é o seguinte

$$d_{1,n}^{(\lambda)} = d_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{1}{4} \frac{n(n+2\lambda+1)}{(n+\lambda)(n+\lambda+1)}, \quad n \geq 1.$$

A sequência $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n=1}^{\infty}$ é sequência encadeada positiva para $\lambda > -1$. Entretanto, iremos considerar esta sequência encadeada positiva para $\lambda \geq -1/2$. Note que podemos escrever

$$(1 - \mathbf{m}_{n-1})\mathbf{m}_n = d_{1,n}^{(\lambda)} \quad \text{e} \quad (1 - M_{1,n-1})M_{1,n} = d_{1,n}^{(\lambda)}, \quad n \geq 1,$$

onde

$$\mathbf{m}_n = \frac{n}{2(n+\lambda+1)} \quad \text{e} \quad M_{1,n} = \frac{n+2\lambda+1}{2(n+\lambda+1)}, \quad n \geq 0.$$

Claramente, $\{\mathbf{m}_n\}_{n=0}^{\infty}$ é sequência de parâmetros minimal para $\{d_{1,n}^{(\lambda)}\}_{n=1}^{\infty}$. Além disso, como já mencionado na Seção 2.4, $\{M_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência de parâmetros maximal para $\{d_{1,n}^{(\lambda)}\}_{n=1}^{\infty}$. Note também que quando $\lambda = -1/2$ as respectivas sequências de parâmetros minimal e maximal coincidem.

A sequência de polinômios $\{\mathcal{W}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$\mathcal{W}_0(x) = 1, \quad \mathcal{W}_1(x) = x \quad \text{e}$$

$$\mathcal{W}_{n+1}(x) = x \mathcal{W}_n(x) - d_{n+1}^{(\lambda)} \mathcal{W}_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

é, na verdade, a sequência dos polinômios mônicos ultrasféricos $\{C_n^{(\lambda+1)}\}_{n=0}^{\infty}$. No caso em que $\lambda = -1/2$ obtemos os polinômios mônicos de Legendre.

Note que

$$\frac{1}{4} - d_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{1}{4} \frac{\lambda(\lambda+1)}{(n+\lambda)(n+\lambda+1)}, \quad n \geq 1$$

e

$$\begin{aligned} d_{n+1}^{(-1/2)} - d_{n+1}^{(\lambda)} &= \frac{1}{4} \frac{1/4}{(n^2 - 1/4)} + \frac{1}{4} \frac{\lambda(\lambda+1)}{(n+\lambda)(n+\lambda+1)} \\ &= \frac{n}{4} \frac{n(\lambda+1/2)^2 + (\lambda+1/2)/2}{(n^2 - 1/4)(n+\lambda)(n+\lambda+1)}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Logo, podemos enunciar o seguinte lema.

Lema 3.5. *Seja $\lambda > -1/2$ e $N \geq 2$. Então a seqüência $\{[\cos(\pi/(2N))]^{-2} d_{n+1}^{(-1/2)}\}_{n=1}^{N-1}$ é uma seqüência encadeada positiva tal que*

$$d_{n+1}^{(\lambda)} < d_{n+1}^{(-1/2)} < \frac{1}{\cos^2(\pi/(2N))} d_{n+1}^{(-1/2)} < \frac{1}{(x_1^{(N)})^2} d_{n+1}^{(-1/2)}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Aqui, $x_1^{(N)}$ denota o maior zero do N -ésimo polinômio de Legendre.

Demonstração: Com a observação de que $x_1^{(N)} < \cos(\pi/(2N))$ (veja [40, Teo. 6.21.3]) todas as desigualdades seguem. Além disso, o fato de que $\{[\cos(\pi/(2N))]^{-2} d_{n+1}^{(-1/2)}\}_{n=1}^{N-1}$ é seqüência encadeada positiva finita segue do Lema 3.3. \square

3.5 Alguns exemplos

Exemplo 1. Como um primeiro exemplo consideramos a medida $\mu^{(\alpha)}(z)$ associada com os polinômios ortogonais $\{S_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ conhecidos como polinômios de Geronimus (veja [20], [22], [23] e [35, p. 83]). Os respectivos coeficientes de Verblunsky são

$$\alpha_n = -\overline{S_{n+1}^{(\alpha)}(0)} = \alpha, \quad n \geq 0.$$

Claramente, $|\alpha| < 1$. De [20] segue que $\mu^{(\alpha)}(z)$, tomada como medida de probabilidade, é tal que

$$\int_0^{2\pi} \ell(e^{i\theta}) d\mu^{(\alpha)}(e^{i\theta}) = \int_{\theta_{|\alpha|}}^{2\pi - \theta_{|\alpha|}} \ell(e^{i\theta}) \frac{\sqrt{\cos^2(\theta_{|\alpha|}/2) - \cos^2(\theta/2)}}{2\pi|1+\alpha| \sin((\theta - \vartheta_\alpha)/2)} d\theta,$$

quando $\operatorname{Re}(\alpha) + |\alpha|^2 \leq 0$ e

$$\int_0^{2\pi} \ell(e^{i\theta}) d\mu^{(\alpha)}(e^{i\theta}) = \int_{\theta_{|\alpha|}}^{2\pi - \theta_{|\alpha|}} \ell(e^{i\theta}) \frac{\sqrt{\cos^2(\theta_{|\alpha|}/2) - \cos^2(\theta/2)}}{2\pi|1+\alpha| \sin((\theta - \vartheta_\alpha)/2)} d\theta + \delta_\alpha \ell(e^{i\vartheta_\alpha}),$$

quando $\operatorname{Re}(\alpha) + |\alpha|^2 > 0$. Aqui, $\ell(z)$ é um polinômio de Laurent arbitrário e os valores de ϑ_α , $\theta_{|\alpha|}$ e δ_α são dados por

$$e^{i\vartheta_\alpha} = w_\alpha = \frac{1 + \bar{\alpha}}{1 + \alpha}, \quad \theta_{|\alpha|} = 2 \arcsin(|\alpha|) \quad \text{e} \quad \delta_\alpha = \frac{2(\operatorname{Re}(\alpha) + |\alpha|^2)}{|1 + \alpha|^2}. \quad (3.18)$$

Seja $\mathcal{I}m(\alpha) \neq 0$. Então, assumindo ϑ_α tal que $-\pi < \vartheta_\alpha < \pi$, consideremos a medida $\mu(z)$ obtida por rotação $\mu^{(\alpha)}(w_\alpha z)$ por um ângulo $-\vartheta_\alpha$. Ou seja,

$$\mu(z) = \mu^{(\alpha)}(w_\alpha z).$$

A medida $\mu(z)$ é tal que seu suporte tem *gaps* em $(0, \theta_{|\alpha|} - \vartheta_\alpha)$ e $(2\pi - \theta_{|\alpha|} - \vartheta_\alpha, 2\pi)$. Em outras palavras, o suporte da medida $\mu(0; z)$ definida como em (2.27) é o arco $\mathcal{A}[\theta_{|\alpha|} - \vartheta_\alpha, 2\pi - \theta_{|\alpha|} - \vartheta_\alpha]$. Como $\sin(\theta_{|\alpha|}/2) = |\alpha|$ e $e^{i\vartheta_\alpha/2} = (1 + \bar{\alpha})/|1 + \alpha|$, obtemos facilmente que

$$\begin{aligned} \cot((\theta_{|\alpha|} - \vartheta_\alpha)/2) &= \frac{\sqrt{1 - |\alpha|^2} (1 + \mathcal{R}e(\alpha)) - |\alpha| \mathcal{I}m(\alpha)}{|\alpha| (1 + \mathcal{R}e(\alpha)) + \sqrt{1 - |\alpha|^2} \mathcal{I}m(\alpha)} \\ &= \frac{[\sqrt{1 - |\alpha|^2} (1 + \mathcal{R}e(\alpha)) - |\alpha| \mathcal{I}m(\alpha)] [|\alpha| (1 + \mathcal{R}e(\alpha)) - \sqrt{1 - |\alpha|^2} \mathcal{I}m(\alpha)]}{|\alpha|^2 (1 + \mathcal{R}e(\alpha))^2 - (1 - |\alpha|^2) (\mathcal{I}m(\alpha))^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cot((2\pi - \theta_{|\alpha|} - \vartheta_\alpha)/2) &= \frac{\sqrt{1 - |\alpha|^2} (1 + \mathcal{R}e(\alpha)) + |\alpha| \mathcal{I}m(\alpha)}{-|\alpha| (1 + \mathcal{R}e(\alpha)) + \sqrt{1 - |\alpha|^2} \mathcal{I}m(\alpha)} \\ &= \frac{[\sqrt{1 - |\alpha|^2} (1 + \mathcal{R}e(\alpha)) + |\alpha| \mathcal{I}m(\alpha)] [|\alpha| (1 + \mathcal{R}e(\alpha)) + \sqrt{1 - |\alpha|^2} \mathcal{I}m(\alpha)]}{-|\alpha|^2 (1 + \mathcal{R}e(\alpha))^2 + (1 - |\alpha|^2) (\mathcal{I}m(\alpha))^2}. \end{aligned}$$

Observando que $(1 + \mathcal{R}e(\alpha))^2 + (\mathcal{I}m(\alpha))^2 = |1 + \alpha|^2$, podemos escrever

$$\cot((\theta_{|\alpha|} - \vartheta_\alpha)/2) = \frac{-\mathcal{I}m(\alpha)(1 + \mathcal{R}e(\alpha)) + |\alpha| \sqrt{1 - |\alpha|^2} |1 + \alpha|^2}{(1 + \mathcal{R}e(\alpha))^2 - (1 - |\alpha|^2) |1 + \alpha|^2}$$

e

$$\cot((2\pi - \theta_{|\alpha|} - \vartheta_\alpha)/2) = \frac{-\mathcal{I}m(\alpha)(1 + \mathcal{R}e(\alpha)) - |\alpha| \sqrt{1 - |\alpha|^2} |1 + \alpha|^2}{(1 + \mathcal{R}e(\alpha))^2 + (1 - |\alpha|^2) |1 + \alpha|^2}.$$

Agora se aplicarmos os resultados do Teorema 3.8 então, claramente, devemos ter $u_n \leq \cot((2\pi - \theta_{|\alpha|} - \vartheta_\alpha)/2)$ e $v_n \geq \cot((\theta_{|\alpha|} - \vartheta_\alpha)/2)$ para $n \geq 1$.

Escolhendo a sequência $\{1/4\}_{n=1}^\infty$ para ser a sequência encadeada positiva $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^\infty$, iremos mostrar que

$$u_n = \cot((2\pi - \theta_{|\alpha|} - \vartheta_\alpha)/2) \quad \text{e} \quad v_n = \cot((\theta_{|\alpha|} - \vartheta_\alpha)/2), \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Como $\mu(z)$ é obtida a partir de $\mu^{(\alpha)}(z)$ por rotação de um ângulo $-\vartheta_\alpha$, é bem conhecido (veja, por exemplo, [35]) que os coeficientes de Verblunsky associados a $\mu(z)$ são $\alpha_n = w_\alpha^{n+1} \alpha$, $n \geq 0$.

Para podermos aplicar o Teorema 3.8, primeiramente precisamos encontrar os valores de $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = \{(1 - g_n)g_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ utilizando a relação (2.24). Da relação de recorrência para τ_n dada em (2.25), verificamos facilmente que $\tau_n = w_{\alpha}^{-n}$, $n \geq 0$. Daí obtemos,

$$c_n = \frac{-\mathcal{I}m(\alpha)}{1 + \mathcal{R}e(\alpha)}, \quad n \geq 1$$

e

$$d_{n+1} = \left(1 - \frac{1 - |\alpha|^2}{2[1 + \mathcal{R}e(\alpha)]}\right) \frac{1 - |\alpha|^2}{2[1 + \mathcal{R}e(\alpha)]} = \frac{(1 - |\alpha|^2)|1 + \alpha|^2}{4[1 + \mathcal{R}e(\alpha)]^2}, \quad n \geq 1.$$

Observe que a sequência encadeada constante $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é tal que $d_{n+1} \leq 1/4$, $n \geq 1$.

Agora, do Teorema 3.8,

$$q_{n+1} = \frac{(1 - |\alpha|^2)|1 + \alpha|^2}{(1 + \mathcal{R}e(\alpha))^2} \quad \text{e} \quad c_n c_{n+1} + 1 = \frac{|1 + \alpha|^2}{(1 + \mathcal{R}e(\alpha))^2}, \quad n \geq 1.$$

Além disso, considerando (3.12), temos

$$\begin{aligned} \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})} &= \sqrt{4q_{n+1}(c_n c_{n+1} + 1 - q_{n+1})} \\ &= 2\sqrt{(1 - |\alpha|^2)|\alpha|} \frac{|1 + \alpha|^2}{(1 + \mathcal{R}e(\alpha))^2}. \end{aligned}$$

Utilizando tais informações nas expressões para u_{n+1} e v_{n+1} dadas em (3.11), imediatamente confirmamos que $u_n = \cot((2\pi - \theta_{|\alpha|} - \vartheta_{\alpha})/2)$ e $v_n = \cot((\theta_{|\alpha|} - \vartheta_{\alpha})/2)$.

Exemplo 2. Neste exemplo consideramos a medida positiva não trivial $\mu^{(b)}(z)$ sobre o círculo unitário dada por

$$d\mu^{(b)}(e^{i\theta}) = d\mu^{(\lambda+i\eta)}(e^{i\theta}) = \kappa e^{-\eta\theta} [\sin^2(\theta/2)]^{\lambda} d\theta,$$

onde $\lambda > -1/2$, $\eta \in \mathbb{R}$, $b = \lambda + i\eta$ e κ é uma constante tomada de tal modo que $\mu^{(b)}(z)$ seja de probabilidade. Já vimos na Seção 2.4 que os coeficientes de Verblunsky associados são

$$\alpha_{n-1}^{(b)} = -\frac{(b)_n}{(\bar{b} + 1)_n}, \quad n \geq 1,$$

e que os polinômios $\{R_n^{(b)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfazem a fórmula de recorrência (1.26), com

$$c_n = \frac{\eta}{n + \lambda}, \quad d_{n+1} = d_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{1}{4} \frac{n(n + 2\lambda + 1)}{(n + \lambda)(n + \lambda + 1)}, \quad n \geq 1.$$

A sequência encadeada positiva $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ que aparece aqui coincide com a sequência encadeada associada aos polinômios ultrasféricos.

O suporte da medida $\mu^{(b)}(z)$ é todo o círculo unitário. Portanto, o conjunto dos pontos de acumulação dos zeros de $R_n^{(b)}(z)$ quando n tende ao ∞ coincide com o círculo unitário. Entretanto, podemos utilizar os resultados estabelecidos nas Seções 3.2 e 3.4 para encontrar informações relacionadas aos limitantes para os zeros extremos de $R_N^{(b)}(z)$ para cada $N \geq 2$.

Quando $\lambda \geq 0$ temos $d_{n+1} \leq 1/4$ e para aplicarmos os resultados da Seção 3.2 uma boa escolha para sequência encadeada positiva finita dominante $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ é

$$\hat{d}_{n+1} = d^{(N-1)} = \frac{1}{4 \cos^2(\pi/(N+1)) + \epsilon}, \quad \epsilon > 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.19)$$

conhecida de [26].

Os resultados dados nas Tabelas 3.1, 3.2 foram obtidos como aplicação do Teorema 3.4, onde o par (λ, η) é dado respectivamente por $(1, 1)$ e $(10, 0.01)$. As informações contidas nos parênteses mostram para quais valores de n $\min\{u_n : 2 \leq n \leq N\}$ e $\max\{v_n : 2 \leq n \leq N\}$ foram obtidos. Por exemplo, a linha correspondente a $N = 30$ na Tabela 3.1 nos informa que $V_{30} = \max\{v_n : 2 \leq n \leq 30\} = v_{24} \approx 12.0650220$ e, portanto, $2 \operatorname{arccot}(V_{30}) \approx 0.1653904$.

Claramente, em ambas as Tabelas 3.1 e 3.2, $2 \operatorname{arccot}(V_N) < \theta_{N,1}$ e $2 \operatorname{arccot}(U_N) > \theta_{N,N}$ como esperado.

N	$\approx 2 \operatorname{arccot}(V_N)$	$\approx \theta_{N,1}$	$\approx 2 \operatorname{arccot}(U_N)$	$\approx \theta_{N,N}$
10	0.4639446 (v_8)	0.4972376	5.4352508 (u_{10})	5.1944808
15	0.3198603 (v_{12})	0.3499643	5.7029950 (u_{15})	5.5126714
30	0.1653904 (v_{24})	0.1855341	5.9853660 (u_{30})	5.8730792
50	0.1005688 (v_{39})	0.1141174	6.1025923 (u_{50})	6.0306959

Tabela 3.1: Informação sobre os limitantes para os zeros extremos $e^{i\theta_{N,1}}$ e $e^{i\theta_{N,N}}$ de $R_N^{(b)}$ quando $b = 1 + i$.

Com a escolha (3.19) para $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ podemos observar que $\{q_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$, onde

$$q_{n+1} = [\cos^2(\pi/(N+1)) + \epsilon] \frac{n(n+2\lambda+1)}{(n+\lambda)(n+\lambda+1)},$$

N	$\approx 2 \operatorname{arccot}(V_N)$	$\approx \theta_{N,1}$	$\approx 2 \operatorname{arccot}(U_N)$	$\approx \theta_{N,N}$
10	1.2564079 (v_{10})	1.4994620	5.0247247 (u_{10})	4.7814017
15	0.9620515 (v_{15})	1.1898228	5.3195004 (u_{15})	5.0914664
30	0.5731032 (v_{30})	0.7410146	5.7090691 (u_{30})	5.5409545
50	0.3746598 (v_{50})	0.4949570	5.9078531 (u_{50})	5.7874076

Tabela 3.2: Informação sobre os limitantes para os zeros extremos $e^{i\theta_{N,1}}$ e $e^{i\theta_{N,N}}$ de $R_N^{(b)}$ quando $b = 10 + i0.01$.

é uma sequência crescente quando n varia de 1 a $N - 1$.

Agora quando $\eta > 0$ a sequência $\{c_n\}_{n=1}^{N-1}$ é uma sequência decrescente quando n varia de 1 a $N - 1$. Sendo assim, as funções $h_n(x)$ em (3.9) e Figura 3.1 são tais que $h_{n+1}(x) < h_n(x)$ para $-1 < x < \cos(\vartheta/2)$, onde $\cot(\vartheta/2) = c_n$. Sendo assim, tendo em vista nossa escolha de $\{q_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ vemos que $a_{n+1} < a_n$. Disto, quando $\eta > 0$, podemos observar que $\{u_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$, no Teorema 3.4, é uma sequência decrescente quando n varia de 1 a $N - 1$. Isto é confirmado por meio das informações contidas nos parênteses na coluna associada com $\approx 2 \operatorname{arccot}(U_N)$ nas Tabelas 3.1 e 3.2. Portanto, quando $\eta > 0$ e $\lambda \geq 0$, o zero extremo $z_{N,N} = e^{i\theta_{N,N}}$ de $R_N^{(b)}$ ($N \geq 2$) é tal que

$$\cot(\theta_{N,N}/2) < U_N = \frac{2(c_{N-1}c_N - q_N)}{(c_{N-1} + c_N) + \sqrt{(c_{N-1} + c_N)^2 - 4(1 - q_N)(c_{N-1}c_N - q_N)}},$$

onde

$$q_N = [\cos^2(\pi/(N+1)) + \epsilon] \frac{(N-1)(N+2\lambda)}{(N+\lambda-1)(N+\lambda)} \quad \text{e} \quad c_n = \frac{\eta}{n+\lambda}, \quad n \geq 1.$$

Agora, quando $0 > \lambda > -1/2$ temos $d_{n+1} > 1/4$, o que significa que a escolha (3.19) para $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ não é viável. Por exemplo, com $\lambda = -1/4$ e $N = 10$ temos $q_2 = d_2/d^{(9)} = 1.0521448759\dots > 1$.

Sendo assim, para $0 > \lambda > -1/2$, considerando os resultados do Lema 3.5, escolhemos $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ tal que

$$\hat{d}_{n+1} = \frac{1}{\cos^2(\pi/(2N))} d_{n+1}^{(-1/2)}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.20)$$

Com esta escolha, os resultados fornecidos nas Tabelas 3.3 são obtidos com aplicação do Teorema 3.4, quando (λ, η) é igual a $(-0.25, 1)$.

Sendo $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ como em (3.20), novamente podemos observar que $\{q_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$, onde

$$q_{n+1} = \cos^2(\pi/(2N)) \frac{(n^2 - 1/4)(n + 2\lambda + 1)}{n(n + \lambda)(n + \lambda + 1)},$$

é uma sequência crescente quando n varia de 1 a $N - 1$. Consequentemente, concluímos que para $\eta > 0$ e $-1/2 < \lambda < 0$, o zero extremo $z_{N,N} = e^{i\theta_{N,N}}$ de $R_N^{(b)}$ ($N \geq 2$) é tal que

$$\cot(\theta_{N,N}/2) < U_N = \frac{2(c_{N-1}c_N - q_N)}{(c_{N-1} + c_N) + \sqrt{(c_{N-1} + c_N)^2 - 4(1 - q_N)(c_{N-1}c_N - q_N)}},$$

onde

$$q_N = \cos^2(\pi/(2N)) \frac{((N - 1)^2 - 1/4)(N + 2\lambda)}{(N - 1)(N + \lambda - 1)(N + \lambda)} \quad \text{e} \quad c_n = \frac{\eta}{n + \lambda}, \quad n \geq 1.$$

N	$\approx 2 \operatorname{arccot}(V_N)$	$\approx \theta_{N,1}$	$\approx 2 \operatorname{arccot}(U_N)$	$\approx \theta_{N,N}$
10	0.1016913 (v_4)	0.1991716	5.6818261 (u_{10})	5.2285409
15	0.0635237 (v_4)	0.1358499	5.8881850 (u_{15})	5.5600926
30	0.0290353 (v_7)	0.0695512	6.0885290 (u_{30})	5.9117387
50	0.0166939 (v_{11})	0.0421377	6.1670558 (u_{50})	6.0579734

Tabela 3.3: Informação sobre os limitantes para os zeros extremos $e^{i\theta_{N,1}}$ e $e^{i\theta_{N,N}}$ de $R_N^{(b)}$ para $b = -0.25 + i$.

Considerações Finais

Vimos, por meio deste trabalho, que a toda medida de probabilidade não trivial $\mu(z)$ no círculo unitário podemos associar um par de sequências reais $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$, com $\{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$ uma sequência encadeada positiva. Como foi mencionado, este fato já havia sido provado anteriormente em Costa *et al.* [9], utilizando uma técnica diferente da utilizada no Capítulo 2. No entanto, a técnica aqui utilizada para relacionar medidas não triviais no círculo unitário e pares de sequências reais nos mostra que tais medidas podem ser construídas a partir dos zeros dos polinômios $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$, que pertencem ao círculo unitário e possuem a propriedade de entrelaçamento.

Como vimos no Teorema 2.1, dado o par $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$, a medida associada $\mu(e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ é dada como sendo o limite de uma subsequência da sequência de funções escada $\psi_n(e^{i\theta})$, $n \geq 1$, definidas em $[0, 2\pi]$ por

$$\psi_n(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & \theta = 0, \\ \lambda_{n,0}, & 0 < \theta \leq \theta_{n,1}, \\ \sum_{j=0}^k \lambda_{n,j}, & \theta_{n,k} < \theta \leq \theta_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & \theta_{n,n} < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

sendo $z_{n,k} = e^{i\theta_{n,k}}$, $1 \leq k \leq n$, os zeros do polinômio $R_n(z)$ gerado a partir da relação de recorrência (1.26). Este resultado pode ser visto como um análogo do que é feito para o caso de medidas não triviais suportadas na reta real. A diferença essencial é que, no caso da reta real, são utilizados os zeros dos polinômios ortogonais associados, enquanto que no caso do círculo unitário utilizamos os zeros de polinômios para-ortogonais associados.

No Capítulo 3, utilizando técnicas similares às utilizadas em Ismail e Li [26] mostramos como é possível conseguir boas estimativas para os zeros extremos dos polinômios $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$. Um fato crucial que possibilitou a obtenção de tais estimativas foi que os polinômios $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$, assim como as funções associadas $\{\mathcal{W}_n(x)\}_{n=0}^\infty$, satisfazem a uma recorrência de três termos e possuem a propriedade de entrelaçamento dos zeros. Como

aplicação dos resultados obtidos no Capítulo 2, conseguimos também fornecer estimativas para o suporte de medidas não triviais no círculo unitário.

Vimos também que os coeficientes de Verblunsky $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ podem ser dados em termos do par associado de sequências reais $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$, por meio da relação (2.23). Sendo assim, tendo em vista que os coeficientes de Verblunsky caracterizam propriedades da medida $\mu(z)$, é natural nos perguntarmos sobre como é possível obter informações sobre a medida a partir do par $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$, sendo $\{m_n^{(\mu)}\}_{n=0}^\infty$ a sequência de parâmetros minimal de $\{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$.

Da relação (2.23), podemos perceber, por exemplo, que sempre que $\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$ converge para $c \neq 0$ e $\{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$ converge para um número real m , então a sequência dos coeficientes de Verblunsky não é convergente. Isto mostra que do ponto de vista assintótico podemos ter comportamentos distintos, ou seja, podemos ter convergência do par de sequências $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$, sem que necessariamente haja convergência da sequência $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$.

Ainda da relação (2.23) é possível perceber que podemos ter periodicidade dos coeficientes de Verblunsky sem que necessariamente tenhamos periodicidade no par de sequências reais associado. Este fato pode ser observado no Exemplo 1 da Seção 3.5, onde temos os coeficientes de Verblunsky periódicos de período 1 sem que necessariamente tenhamos periodicidade sequer da sequência $\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$. Então, uma pergunta natural é a seguinte: qual o comportamento de medidas cujo par $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$, é um par de sequências periódicas? Tais medidas se comportam como as medidas associadas a coeficientes de Verblunsky periódicos?

Seguindo ainda essa mesma linha de raciocínio é interessante também estudarmos propriedades da medida $\mu(z)$ no caso em que o par $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$ é p -periódico no limite, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{np+k}^{(\mu)} = c_k \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_{np+k}^{(\mu)} = m_k, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

sendo $p \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{R}$ e $m_k \in (0, 1)$.

Estes problemas e outros relacionados têm sido estudados e temos conseguido alguns resultados interessantes nesse sentido.

Referências Bibliográficas

- [1] Andrews, G.E.; Askey, R.; Roy, R. *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 2000.
- [2] Bracciali, C.F.; Xin Li; Sri Ranga, A. Real orthogonal polynomials in frequency analysis, *Math. Comp.*, v. 74, p. 341-362, 2004.
- [3] Bracciali, C.F.; McCabe, J.H.; Pérez, T.E.; Sri Ranga, A. A class of orthogonal functions given by a three term recurrence formula, *Math. Comp.*, v. 85, p. 1837-1859, 2016.
- [4] Breuer, J.; Ryckman, E.; Simon, B. Equality of the spectral and dynamical definitions of reflection, *Commun. Math. Phys.*, v. 295, p. 531-550, 2010.
- [5] Cantero, M.J.; Moral, L.; Velázquez, L. Measures and para-orthogonal polynomials on the unit circle, *East J. Approx.*, v. 8, p. 447-464, 2002.
- [6] Castillo, K.; Costa, M.S.; Sri Ranga, A.; Veronese, D.O. A Favard type theorem for orthogonal polynomials on the unit circle from a three term recurrence formula, *J. Approx. Theory*, v. 184, p. 146-162, 2014.
- [7] Castillo, K.; Garza, L.; Marcellán, F. Perturbations on the subdiagonals of Toeplitz matrices, *Linear Alg. Appl.*, v. 434, p. 1563-1579, 2011.
- [8] Chihara, T.S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [9] Costa, M.S.; Felix, H.M.; Sri Ranga, A. Orthogonal polynomials on the unit circle and chain sequences, *J. Approx. Theory*, v. 173, p. 14-32, 2013.

-
- [10] Costa, M. S.; Godoy, E.; Lamblém, R. L.; Sri Ranga, A. Basic hypergeometric functions and orthogonal Laurent polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 140, p. 2075-2089, 2011.
- [11] Cuyt, A.; Petersen, A.B.; Verdonk, B.; Waadeland, H.; Jones, W.B. *Handbook of Continued Fractions for Special Functions*. Springer, 2008.
- [12] Daruis, L.; Njåstad, O.; Van Assche, W. Para-orthogonal polynomials in frequency analysis, *Rocky Mountain J. Math.* v. 33, p. 629-645, 2003.
- [13] Delsarte, P.; Genin, Y. The split Levinson algorithm, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process*, v. 34, p. 470-478, 1986.
- [14] Delsarte, P.; Genin, Y. The tridiagonal approach to Szegő's orthogonal polynomials, Toeplitz linear system, and related interpolation problems, *SIAM J. Math. Anal.*, v. 19, p. 718-735, 1988.
- [15] Dimitrov, D.K.; Sri Ranga, A. Zeros of a family of hypergeometric para-orthogonal polynomials on the unit circle, *Math. Nachr.*, v. 286, p. 1778-1791, 2013.
- [16] Dimitrov, D.K.; Ismail, M.E.H.; Sri Ranga, A. A class of hypergeometric polynomials with zeros on the unit circle: Extremal and orthogonal properties and quadrature formulas, *Appl. Numer. Math.*, v. 65, p. 41-52, 2013.
- [17] Erdélyi, T.; Nevai, P.; Zhang, J.; Geronimo, J. A simple proof of "Favard's theorem" on the unit circle, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, v. 39, p. 551-556, 1991.
- [18] Freud, G. *Orthogonal Polynomials*. Pergamon Press, Oxford, 1971.
- [19] Geronimus, YA. L. *Polynomials orthogonal on a circle and their applications, Series and Approximations*. Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 1, v. 3, p. 1-78, Providence, RI, 1962.
- [20] Geronimus, YA. L. *Orthogonal Polynomials*, English translation of the appendix to the Russian translation of Szegő's book [40], in "Two Papers on Special Functions", Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, v. 108, p. 37-130. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.

-
- [21] Golinskii, L. Quadrature formula and zeros of para-orthogonal polynomials on the unit circle, *Acta Math. Hungar.*, v. 96, p. 169-186, 2002.
- [22] Golinskii, L.; Nevai, P.; Van Assche, W. Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle, *J. Approx. Theory*, v. 83, p. 392-422, 1995.
- [23] Golinskii, L.; Nevai, P.; Pintér, F.; Van Assche, W. Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle, II, *J. Approx. Theory*, v. 96, p. 1-33, 1999.
- [24] Hendriksen, E.; Van Rossum, H. Orthogonal Laurent polynomials, *Indag. Math. (ser. A)*, v. 48, p. 17-36, 1986.
- [25] Ismail, M.E.H. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [26] Ismail, M.E.H.; Xin Li, Bounds for the extreme zeros of orthogonal polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 115, p. 131-140, 1992.
- [27] Jones, W.B.; Njåstad, O.; Thron, W.J. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle, *Bull. Lond. Math. Soc.*, v. 21, p. 113-152, 1989.
- [28] Jones, W.B.; Thron, W.J. *Continued Fractions Analytic Theory and Applications*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, v. 11, Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.
- [29] Kheifets, A.; Golinskii, L.; Peherstorfer, F.; Yuditskii, P. Scattering theory for CMV matrices: uniqueness, Helson-Szegő and strong Szegő theorems, *Integr. Equ. Oper. Theory*, v. 69, p. 479-508, 2011.
- [30] Lorentzen, L.; Waadeland, H. *Continued Fractions with Applications*, Studies in Computational Mathematics, vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [31] Martínez-Finkelshtein, A.; Sri Ranga, A.; Veronese, D.O. Extreme zeros in a sequence of para-orthogonal polynomials and bounds for the support of the measure, (submetido).
- [32] Peherstorfer, F. Positive trigonometric quadrature formulas and quadrature on the unit circle, *Math. Comp.*, v. 80, p. 1685-1701, 2011.

-
- [33] Peherstorfer, F., Volberg, A.; Yuditskii, P. CMV matrices with asymptotically constant coefficients. Szegő-Blaschke class, scattering theory, *J. Funct. Anal.*, v. 256, p. 2157-2210, 2009.
- [34] Simanek, B. Weak convergence of CD kernels: A new approach on the circle and real line, *J. Approx. Theory*, v. 164, p. 204-209, 2012.
- [35] Simon, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory*. American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 54, part 1, Providence, RI, 2004.
- [36] Simon, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2. Spectral Theory*. American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 54, part 2, Providence, RI, 2004.
- [37] Simon, B. OPUC on one foot, *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 42, p. 431-460, 2005.
- [38] Simon, B. “Szegő’s Theorem and Its Descendants: Spectral Theory for L^2 perturbations of Orthogonal Polynomials”, Princeton Univ. Press, Princeton, 2011.
- [39] Sinclair, C.D.; Vaaler, J.D. Self-inversive polynomials with all zeros on the unit circle, in *Number Theory and Polynomials* (J. McKee and C. Smyth, eds.), London Mathematical Society Lecture Notes Series, v. 352, Cambridge Univ. Press, 2008.
- [40] Szegő, G. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, Providence, RI, 1975.
- [41] Sri Ranga, A. Szegő polynomials from hypergeometric functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 138, p. 4259-4270, 2010.
- [42] Tsujimoto, S.; Zhedanov, A. Elliptic hypergeometric Laurent biorthogonal polynomials with a dense point spectrum on the unit circle, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, v. 5, 30p, 2009.
- [43] Van Assche, W. Orthogonal polynomials in the complex plane and on the real line, in: M.E.H. Ismail, *et al.* (Eds.), *Field Institute Communications 14: Special Functions, q-Series and Related Topics*, Amer. Math. Soc., p. 211-245, 1997.

- [44] Wall, H.S. *Analytic Theory of Continued Fractions*. American Mathematical Society, New York, 1948.