

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Faculdade de Engenharia

Métodos de pontos interiores/exteriores, de restrições canalizadas progressivas e de suavização arco tangente, em problemas de despacho econômico e ambiental

Mariana Rodrigues Barbosa dos Santos

Bauru – SP

Junho – 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE BAURU

**Métodos de pontos interiores/exteriores, de restrições
canalizadas progressivas e de suavização arco tangente, em
problemas de despacho econômico e ambiental**

Mariana Rodrigues Barbosa dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Antonio Roberto Balbo
Co-orientadora: Prof^a. Dr^a. Edilaine Martins Soler

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Bauru da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Campus de Bauru, como um dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Bauru - SP
Junho - 2016

Santos, Mariana Rodrigues Barbosa dos.

Métodos de pontos interiores/exteriores, de restrições canalizadas progressivas e de suavização arco tangente, em problemas de despacho econômico e ambiental/ Mariana Rodrigues Barbosa dos Santos, 2016
142f.

Orientador: Antonio Roberto Balbo.

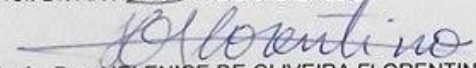
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2016

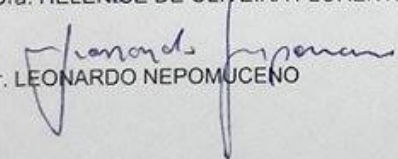
1. Primal-dual. 2. Pontos interiores/exteriores.
3. Correção de inércia. 4. Suavização arco tangente.
5. Restrições canalizadas progressivas. 6. Multiobjetivo.
7. Despacho econômico/ambiental. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia.
II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado de MARIANA RODRIGUES BARBOSA DOS SANTOS, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA.

Aos 08 dias do mês de junho do ano de 2016, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Profa. Dra. HELENICE DE OLIVEIRA FLORENTINO SILVA do(a) Departamento de Bioestatística / Instituto de Biociências de Botucatu - UNESP, Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de MARIANA RODRIGUES BARBOSA DOS SANTOS, intitulada **MÉTODOS DE PONTOS INTERIORES/EXTERIORES, DE RESTRIÇÕES CANALIZADAS PROGRESSIVAS E DE SUAVIZAÇÃO ARCO TANGENTE, EM PROBLEMAS DE DESPACHO ECONÔMICO E AMBIENTAL**. Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADA _____. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO


Profa. Dra. HELENICE DE OLIVEIRA FLORENTINO SILVA


Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO

*Aos meus pais Braz e Geralda,
que sempre lutaram e sonharam comigo,
ao meu esposo Anderson, por todo amor, amizade e
companheirismo, e ao meu filho Gustavo, por
cada abraço de amor e olhar de carinho.*

A vocês dedico e compartilho este trabalho.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus pelo dom da vida, por me permitir viver um sonho, pela força para prosseguir nos momentos difíceis e por ser fiel e bom, colocando em minha vida pessoas especiais que me ensinaram, amaram e encorajaram.

Aos meus pais, Braz e Geralda, agradeço por todo amor dedicado a mim. Obrigada pela educação, pelos esforços sem medida e por sempre me incentivar a ter e viver novos sonhos, sem vocês não seria possível concluir este trabalho. A todos meus familiares pelas palavras de apoio e carinho, em especial ao meu irmão Luiz Henrique e sua família.

Ao meu esposo Anderson, por compreender minhas ausências, por ser meu ombro amigo, por me consolar nos momentos de choro, por me encorajar a prosseguir e não desistir, por toda ajuda nesta caminhada, e sobretudo pelo amor, obrigada.

Ao meu filho Gustavo agradeço por me alegrar, cada olhar de doçura e cada gesto de carinho me fizeram ver que vale a pena continuar, todo esforço e dedicação são para você meu filho amado.

Às minha amigas queridas, Dayana, Fer Rufs, Fer Santos, Kely e Nilva, obrigada pela amizade sincera que dá ânimo para viver.

Ao meu orientador Antonio Roberto Balbo, pessoa especial que tenho o privilégio de acompanhar e aprender desde 2006, obrigada pelos ensinamentos e amizade durante toda caminhada. Agradeço também todo incentivo e paciência dedicados a mim.

À minha co-orientadora Edilaine Martins Soler, pela sua amizade e pelo auxílio em partes deste trabalho.

Aos amigos que fiz durante o mestrado, obrigada pela força e momentos de descontração e alegria. Em especial agradeço à Elis Gonçalves que tanto contribuiu para o término deste trabalho, obrigada por toda atenção e paciência. Aos meus amigos Diego e Ricardo que tanto me ajudaram e ensinaram, muito obrigada.

Aos professores da banca Leonardo Nepomuceno e Helenice de Oliveira Florentino Silva, agradeço por toda contribuição.

Aos colegas de graduação que sempre estão presente em minha vida.

Aos funcionários da Seção Técnica de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia e do Departamento de Matemática, pela atenção concedida.

*“Mas, buscai primeiro o reino
de Deus, e a sua justiça, e as todas as coisas
vos serão acrescentadas”
Mateus 6:33*

Resumo

O problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental envolve a minimização de dois objetivos conflitantes: o custo de geração em uma unidade térmica e a emissão de poluentes. Quando a função objetivo custo de geração inclui os efeitos de pontos de carregamento de válvula, esta torna-se não convexa e, além disso, não diferenciável, pois termos modulares que envolvem a função seno são considerados, impossibilitando que métodos clássicos de otimização sejam diretamente empregados à resolução do problema. Neste trabalho é proposta uma nova metodologia de solução de problemas multiobjetivo que envolve o método de restrições canalizadas progressivas, o método de suavização arco tangente e o método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores para a determinação de soluções do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental. O método de restrições canalizadas progressivas transforma o problema multiobjetivo em um conjunto de subproblemas mono-objetivo, considerando a função custo de geração como função objetivo e a função custo de emissão de poluentes como restrição adicional do problema. O método de suavização arco tangente suaviza os termos modulares da função custo de geração quando são considerados os efeitos de pontos de carregamento de válvula e possibilita a utilização do método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores à resolução dos subproblemas mono-objetivo determinados pelo método de restrições canalizadas progressivas. Para a aplicação deste método são consideradas as estratégias de pontos exteriores relacionada à função barreira logarítmica modificada e de correção de inércia, as quais permitem ao método, respectivamente, ser inicializado com pontos exteriores à região viável e determinar uma sequência de pontos que converge para mínimos locais dos subproblemas. A metodologia proposta foi implementada em MATLAB 2011a e aplicada aos problemas testes de despacho econômico e ambiental de três, seis, dez, dezenove e quarenta unidades geradoras. Os resultados obtidos demonstram o bom desempenho desta quando comparados aos resultados da literatura.

Palavras-chave: Primal-dual, pontos interiores/exteriores, correção de inércia, suavização arco tangente, restrições canalizadas progressivas, multiobjetivo, despacho econômico/ambiental.

Abstract

The multiobjective problem of economic and environmental order involves the minimization of two conflicting objectives: the cost of generation in a thermal unit and the emission of pollutants. When the generation cost objective function includes the effects of valve loading points, it becomes non-convex, and moreover, not differentiable, as modular terms involving the sine are considered to function, making it impossible classical optimization methods are directly employees to solving the problem. This paper proposes a new multi-objective problem-solving methodology that involves the method of progressive bounded constraints, the arctangent smoothing method and the primal-dual predictor-corrector interior point method for the determination of multi-objective solutions to the problem of economic dispatch and environmental. The method of progressive bounded constraints transforms the multi-objective problem into a set of mono-objective sub-problems, considering the role generation cost as objective function and the cost function of emissions as an additional restriction of the problem. The arctangent smoothing method smoothes modular terms of generation cost function when the valve points load effect are considered and enables the use of the primal-dual method predictor-corrector interior point the resolution of single-purpose subproblems determined by method of progressive bounded constraints. For the application of this method are considered the strategies of external points related to the modified logarithmic barrier function and inertia correction, which allow the method, respectively, be initialized with outside points to the feasible region and determine a sequence of points converging to minimum locations of sub-problems. The proposed methodology was implemented in MATLAB 2011a and applied to economic and environmental problems dispatch tests of three, six, ten, nineteen and forty generating units. The obtained results demonstrated the good performance of this compared to literature results.

Keywords: Primal-dual, interior / exterior points, inertia correction, arctangent smoothing, progressive bounded constraints, multiobjective, economic/environmental dispatch.

Sumário

Lista de Figuras	xviii
Lista de Tabelas	xx
Lista de Abreviaturas e Unidades	xxi
1 Introdução	1
2 Geração de Energia, Problemas de Despacho e Estratégias de Resolução	5
2.1 Geração Termoelétrica	5
2.1.1 Aspectos da Geração Termoelétrica	7
2.1.1.1 Aspectos Econômicos	7
2.1.1.2 Aspectos Ambientais	7
2.2 Problema de Despacho Econômico	8
2.3 Problema de Despacho Ambiental	11
2.4 Problema Multiobjetivo de Despacho Econômico e Ambiental com Pontos de Carregamento de Válvula (PMDEA-PV)	12
2.5 Estratégias de Solução de Problemas de Otimização Multiobjetivo	13
2.6 Soma Ponderada	13
2.6.1 Soma Ponderada e o PMDEA-PV	14
2.7 Método ε -restrito	14
2.7.1 Método ε -restrito e o PMDEA-PV	15
2.7.1.1 Função Objetivo: Despacho Ambiental	15
2.7.1.2 Função Objetivo: Despacho Econômico	16
2.8 Método de Restrições Canalizadas Progressivas	17
3 Métodos de Aproximação e Suavização de Funções	21
3.1 Suavização Hiperbólica	22
3.2 Suavização Arco Tangente	23
4 Métodos de Otimização e Metodologia de Solução	29
4.1 Métodos de Otimização	29

4.1.1	Método Dual-Lagrangiano	29
4.1.2	Método de Barreira	30
4.1.3	Método de Barreira Modificada e de Rescalamento Não-Linear . . .	32
4.1.3.1	Atualização dos Estimadores dos Multiplicadores de Lagrange	33
4.1.4	Barreira Logarítmica Modificada	34
4.2	Metodologia de Solução	35
4.3	O método Primal-Dual Previsor-Corretor Barreira Logarítmica Modificada (PDPCBLM)	35
4.3.1	Linearização das Equações	37
4.3.2	Sistema de Direções	40
4.3.3	Correção de Inércia	40
4.3.4	Cálculo das Direções	43
4.3.4.1	Procedimento Previsor	43
4.3.4.2	Procedimento Corretor	45
4.3.5	Atualização do Parâmetro de Barreira	46
4.3.6	Novo Ponto e Comprimento do Passo	47
4.3.7	Critério de Parada	48
4.4	Algoritmo do Método PDPCBLM	49
5	Resultados	51
5.1	Caso 3 Geradores	52
5.2	Caso 6 Geradores	61
5.3	Caso 10 Geradores	70
5.4	Caso 19 Geradores	77
5.5	Caso 40 Geradores	84
6	Conclusões	91
7	Trabalhos Publicados	93
A	Conceitos básicos da teoria multiobjetivo	99
A.1	Conceitos e Definições	99
B	Dados e Resultados Numéricos	105
B.1	Caso 6 Geradores	105
B.2	Caso 10 Geradores	108
B.3	Caso 19 Geradores	110
B.4	Caso 40 Geradores	113

Lista de Figuras

2.1	Matriz energética mundial dos anos de 1973 e 2006.	6
2.2	Curva de entrada-saída na unidade térmica de três geradores com efeito de ponto de carregamento de válvula	10
2.3	Curva de soluções eficientes: custo e emissões.	15
2.4	Subintervalo para a função emissão de poluentes: método de restrições canalizadas progressivas.	18
3.1	Função ϑ para diferentes valores de η	23
3.2	Função $\omega(t)$	24
3.3	Representação geométrica da função $d(\eta)$	25
3.4	Função w para diferentes valores de η	26
3.5	Função $ x^3 + 1 $ aproximada pelo suavizante hiperbólico	26
3.6	Função $ x^3 + 1 $ aproximada pelo suavizante arco tangente	27
5.1	Soluções obtidas pela RCP-PDPIEX-SAT para o caso de 3 geradores.	56
5.2	Curva Pareto-ótima caso 3 geradores: soluções eficientes obtidas pela RCP-PDPIEX-SAT.	57
5.3	Caso 3 geradores: Comparação entre o método de suavização arco tangente e hiperbólica.	58
5.4	Caso 3 geradores: método de restrições canalizadas progressivas – comparação entre a RCP-PDPIEX-SAT e o pacote Knitro.	59
5.5	Soluções obtidas pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT para o caso de 6 geradores.	64
5.6	Curva Pareto-ótima caso 6 geradores: soluções eficientes obtidas pela RCP-PDPIEX-SAT.	65
5.7	Caso 6 geradores: Comparação entre o método de suavização arco tangente e hiperbólica.	66
5.8	Caso 6 geradores:método de restrições canalizadas progressivas – comparação entre a metodologia RCP-PDPIEX-SAT e o pacote Knitro.	67
5.9	Curva Pareto-ótima caso 10 geradores: soluções eficientes obtidas pela RCP-PDPIEX-SAT.	72

5.10	Caso 10 geradores: Comparação entre o método de suavização arco tangente e hiperbólica.	73
5.11	Caso 10 geradores: método de restrições canalizadas progressivas – comparação entre a metodologia RCP-PDPIEX-SAT e o pacote Knitro.	74
5.12	Caso 19 geradores: soluções obtidas pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT.	79
5.13	Curva Pareto-ótima caso 19 geradores: soluções eficientes obtidas pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT.	80
5.14	Caso 19 geradores: Comparação entre o método de suavização arco tangente e hiperbólica.	81
5.15	Caso 19 geradores:método de restrições canalizadas progressivas – comparação entre a metodologia RCP-PDPIEX-SAT e o pacote Knitro.	82
5.16	Caso 40 geradores: soluções obtidas pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT.	86
5.17	Curva Pareto-ótima caso 40 geradores: soluções eficientes obtidas pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT.	87
5.18	Caso 40 geradores: método de restrições canalizadas progressivas – comparação entre a metodologia RCP-PDPIEX-SAT e o pacote Knitro.	88
A.1	Representação gráfica do espaço objetivo para o modelo bi-objetivo	102

Lista de Tabelas

2.1	Produção de hidreletricidade	6
5.1	Dados 3 geradores.	53
5.2	Inicialização PMDEA-PV: 3 geradores.	54
5.4	Região delimitada e soluções: caso 3 geradores.	54
5.6	Valores máximos e mínimos de C_g e C_e para o caso de 3 geradores.	56
5.7	Valor mínimo da função custo de geração (C_g) aproximada e original: 3 geradores.	57
5.8	Comparação ds valores de C_g para: RCP-PDPIEX-SAT, PDPCBLM com suavização hiperbólica, Knitro e C_g original, para o caso teste de 3 unidades geradoras.	60
5.9	Módulo da diferença entre valores de C_g para: método de suavização arco tangente, suavização hiperbólica, Knitro e C_g original.	61
5.10	Inicialização PMDEA-PV: 6 geradores.	62
5.12	Valores máximos e mínimos de C_g e C_e para o caso de 6 geradores.	63
5.13	Valor mínimo da função custo (C_g) aproximada e original: 6 geradores.	63
5.14	Comparação ds valores de C_g para: RCP-PDPIEX-SAT, PDPCBLM com suavização hiperbólica, Knitro e C_g original, para o caso teste de 6 unidades geradoras.	69
5.15	Módulo da diferença entre valores de C_g para: método de suavização arco tangente, suavização hiperbólica, Knitro e C_g original.	70
5.16	Inicialização PMDEA-PV: 10 geradores.	70
5.18	Valores máximos e mínimos de C_g e C_e para o caso de 10 geradores.	71
5.19	Valor mínimo da função custo (C_g) aproximada e original: 10 geradores.	71
5.20	Comparação ds valores de C_g para: RCP-PDPIEX-SAT, PDPCBLM com suavização hiperbólica, Knitro e C_g original, para o caso teste de 10 unidades geradoras.	76
5.21	Módulo da diferença entre valores de C_g para: método de suavização arco tangente, suavização hiperbólica, Knitro e C_g original.	77
5.22	Inicialização PMDEA-PV: 19 geradores	77
5.24	Valores máximos e mínimos de C_g e C_e para o caso de 19 geradores.	78

5.25	Valor mínimo da função custo (C_g) aproximada e original: 19 geradores.	78
5.26	Valores máximos e mínimos (C_g) e (C_e) : RCP-PDPIEX-SAT e método de evolução diferencial, caso 19 geradores.	79
5.27	Comparação ds valores de C_g para: RCP-PDPIEX-SAT, PDPCBLM com suavização hiperbólica, Knitro e C_g original, para o caso teste de 19 unidades geradoras.	83
5.28	Módulo da diferença entre valores de C_g para: método de suavização arco tangente, suavização hiperbólica, Knitro e C_g original.	84
5.29	Inicialização PMDEA-PV: 40 geradores	84
5.31	Valores máximos e mínimos de C_g e C_e para o caso de 40 geradores.	85
5.32	Comparação ds valores de C_g para: RCP-PDPIEX-SAT, Knitro e C_g original, para o caso teste de 40 unidades geradoras.	89
5.33	Módulo da diferença entre valores de C_g para: RCP-PDPIEX-SAT, Knitro e C_g original.	90
B.1	Dados 6 geradores	106
B.2	Região delimitada de soluções factíveis para o caso de 6 geradores	107
B.4	Dados 10 geradores	109
B.5	Região delimitada de soluções factíveis para o caso de 10 geradores	110
B.7	Dados 19 geradores	111
B.8	Região delimitada de soluções factíveis para o caso de 19 geradores	112
B.10	Dados 40 geradores	114
B.12	Região delimitada de soluções factíveis para o caso de 40 geradores	116

Lista de Abreviaturas e Unidades

ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
CO_2	Dióxido de carbono
$kg.h^{-1}$	quilograma por hora
KKT	Karush Kuhn Tucker
NO_x	Óxido de nitrogênio
PDA	Problema de despacho ambiental
PDE	Problema de despacho econômico
PDPCBLM	Primal-Dual Previsor-Corretor Barreira Logarítmica Modificada
PMDEA	Problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental
PMDEA-PV	Problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental com ponto de válvula
RCP	Restrições canalizadas progressivas
RCP-PDPIEX-SAT	metodologia de soluções de problemas multiobjetivo que envolvem os métodos de restrições canalizadas progressivas, de suavização arco tangente e de pontos interiores/exteriores
SO_2	Dióxido de enxofre
$$.h^{-1}$	Dólar por hora
$tons.h^{-1}$	tonelada por hora

Capítulo 1

Introdução

A geração de energia em uma termelétrica ocorre a partir da queima de combustíveis, renováveis ou não. A matriz energética mundial, diferente da brasileira, tem como principal fonte de geração de energia elétrica as usinas termelétricas (ANEEL, 2008). É de fundamental importância para diversas áreas de pesquisa, formular problemas em que os custos dos combustíveis e a emissão de poluentes atmosféricos sejam minimizados simultaneamente. Dentre esses problemas, destacam-se o problema de despacho econômico (PDE), o problema de despacho econômico com a inserção de pontos de válvula (PDE-PV), o problema de despacho ambiental (PDA), e o problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental (PMDEA-PV).

O problema de despacho econômico (PDE) (Steinberg & Smith, 1934) é formulado como um problema de programação quadrática convexa. Esta formulação já foi amplamente abordada na literatura, porém poucos trabalhos consideram a existência de pontos de carregamento de válvula, abordada no presente trabalho. Termos modulares são acrescentados à função objetivo do problema, tornando-a não convexa e não-diferenciável em determinados pontos de seu domínio.

Como na geração de energia em termelétricas, em geral ocorre a queima de combustíveis fósseis, os quais provocam emissões de poluentes atmosféricos, um outro problema pode ser considerado, relativo à minimização desta emissão, o qual é denominado de problema de despacho ambiental (PDA), (El-Hawary et al., 1992).

O problema de despacho econômico com a inserção de pontos de válvula (PDE-PV) (Wood & Wollenberg, 1984), é modelado com um problema de otimização restrito não-linear, não convexo e, além disso, não diferenciável, pois termos modulares que envolvem a função seno são considerados. O PDE-PV tem por objetivo minimizar o custo dos combustíveis na geração de energia de uma unidade termelétrica, de forma que a demanda seja atendida e as restrições operacionais do sistema de geração sejam satisfeitas.

No problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental (PMDEA) com a inserção de pontos de carregamento de válvula (PMDEA-PV), deseja-se otimizar os

custos de geração de energia e, concomitantemente, reduzir a emissão de poluentes, os quais são objetivos conflitantes. Devido ao conflito existente entre os objetivos, não é possível encontrar uma única solução que otimize os dois objetivos para este problema diretamente. Então, serão utilizadas algumas estratégias disponíveis na literatura e que permitem obter soluções eficientes para este problema. Na literatura diversos métodos têm sido empregados para a resolução do PDE-PV e do PMDEA-PV, dentre eles os algoritmos evolucionários Ravi et al. (2006), Sinha (2003) e Walters & Sheble (1993) têm sido muito utilizados devido à não-diferenciabilidade das funções envolvidas. Em Stanzani (2012) o PMDEA foi resolvido por métodos determinísticos e em Gonçalves (2015) o PMDEA-PV foi resolvido utilizando a técnica de suavização hiperbólica dos termos modulares da função objetivo.

Para que seja possível a aplicação de métodos determinísticos de otimização à resolução destes problemas, os quais exigem a diferenciabilidade da função objetivo e das restrições, é necessário suavizar os termos modulares senoidais da função custo do despacho econômico. Com o objetivo de resolver estes problemas através de métodos determinísticos, neste trabalho propõe-se uma nova metodologia envolvendo os métodos de restrições canalizadas progressivas, de suavização de funções e o primal-dual de pontos interiores/exteriores. Destaca-se: o primeiro é estratégico para a solução de problemas multiobjetivos, o segundo para suavizar os termos modulares da função objetivo e o terceiro, para a resolução dos subproblemas mono-objetivos suavizados.

Neste trabalho é proposto utilizar o método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores/exteriores, que explora a função barreira logarítmica modificada (PDPCLM) e a estratégia de correção de inércia, desenvolvidos em Silva (2014) e variante de Polyak (1992), Griva & Polyak (2006) e Pinheiro et al. (2015), para resolver os subproblemas mono-objetivos suavizados. O método de restrições canalizadas progressivas (RCP), proposto em Gonçalves (2015), o qual transforma o problema multiobjetivo em um conjunto de subproblemas mono-objetivos, possibilitando a utilização do método PDPCLM para a resolução do PMDEA-PV. Para tratar os problemas relacionados à não-diferenciabilidade da função custo de geração, por conta da inserção de termos modulares, devido ao efeito de ponto de carregamento de válvula, é proposta a suavização dos termos modulares através do método da suavização arco tangente.

As contribuições do trabalho são:

- Propor o método RCP para resolver o problema multiobjetivo, transformando-o em problemas mono-objetivo e assim calcular soluções eficientes para o PMDEA-PV;
- Propor a suavização dos termos modulares senoidais presentes na função custo de geração com o método de suavização arco tangente, possibilitando a utilização do método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores à resolução dos subproblemas mono-objetivo determinados pelo método RCP;

-
- Aplicar o método de PDPCBLM à resolução do PMDEA-PV através do conjunto de subproblemas mono-objetivos, utilizando a estratégia de correção de inércia, para garantir a convergência do método e que, pelo menos um mínimo local seja encontrado para cada subproblema definido pelo método RCP.

A metodologia proposta será denominada RCP-PDPIEX-SAT.

Foram realizados testes numéricos com os casos testes de 3, 6, 10, 19 e 40 unidades geradoras de energia. Os resultados obtidos foram comparados com os apresentados em Gonçalves (2015) e Balamurugan et al. (2014), e com os obtidos pelo pacote de otimização Knitro. Os resultados obtidos através da metodologia proposta são promissores e mostram o bom desempenho desta à resolução dos problemas em destaque.

O presente trabalho encontra-se organizado conforme descrito a seguir. No Capítulo 2 é apresentado um cenário geral da geração de energia, com destaque para a geração de energia termelétrica. São apresentados os problemas de despacho econômico, ambiental, problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental com pontos de carregamento de válvula, e também são descritas as estratégias de solução de problemas de otimização multiobjetivo: método da soma ponderada e método ε -restrito, com destaque a uma proposta de variação deste último, denominada de método de restrições canalizadas progressivas. No Capítulo 3 é feita uma explanação dos métodos de aproximação e suavização de funções, com destaque para o método de suavização arco tangente, utilizado neste trabalho. No Capítulo 4 são abordados os métodos dual-lagrangiano e de barreira. É apresentado o método primal-dual previsor-corretor barreira logarítmica modificada (PDPCBLM), utilizado na resolução de problemas multiobjetivo. No Capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos com a aplicação do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental com pontos de carregamento de válvula, utilizando o método de resolução de problemas multiobjetivo definido no Capítulo 4. No Capítulo 6 são feitas as conclusões do trabalho desenvolvido. No Capítulo 7 são descritos os trabalhos publicados decorrentes deste trabalho.

Capítulo 2

Geração de Energia, Problemas de Despacho e Estratégias de Resolução

A flexibilidade da energia elétrica fez com que ela se destacasse entre as demais formas de energia. Desde então, diversas nações têm utilizado grandes parcelas de suas reservas de combustíveis fósseis para produção de eletricidade, bem como pesquisado o desenvolvimento de novas formas de obtenção da mesma – hidrelétricas, fissão nuclear, turbinas eólicas e células fotovoltaicas (Smil, 2004).

As usinas hidrelétricas aproveitam a energia potencial associada às quedas d'água para a geração de energia. A água é uma das poucas fontes para a produção de energia que não contribuem para o aquecimento global, não possui custo operacional, além de ser uma fonte renovável. Por outro lado, as hidrelétricas demandam grande investimento para construção, alteram fortemente o ambiente durante a sua instalação, prejudicam a fauna e flora local, a inundação pode danificar sítios arqueológicos, além de modificar o curso natural dos rios. Dados de 2015 mostram que o Brasil era o terceiro maior produtor mundial de energia elétrica através deste tipo de geração, como é possível observar na Tabela 2.1. No entanto, a matriz energética mundial, diferente da brasileira, tem como principal fonte de geração de energia elétrica as usinas termelétricas, como apresentado na Figura 2.1.

Na próxima seção são apresentados alguns aspectos sobre a geração termelétrica.

2.1 Geração Termoelétrica

A geração de energia em uma termelétrica ocorre a partir da queima de combustíveis, renováveis ou não. Dentre os combustíveis podemos destacar o carvão mineral, gás natural, petróleo e biomassa.

Tabela 2.1: Produção de hidreletricidade

Produtores	TWh	% total mundial
China	920	23,8
Canada	392	10,1
Brasil	391	10,1
Estados Unidos	290	7,5
Rússia	183	4,7
Índia	142	3,7
Noruega	129	3,3
Japão	85	2,2
Venezuela	84	2,2
França	76	2,0
Resto do mundo	1182	30,4
Mundo	3874	100

Fonte: Agency (2015)

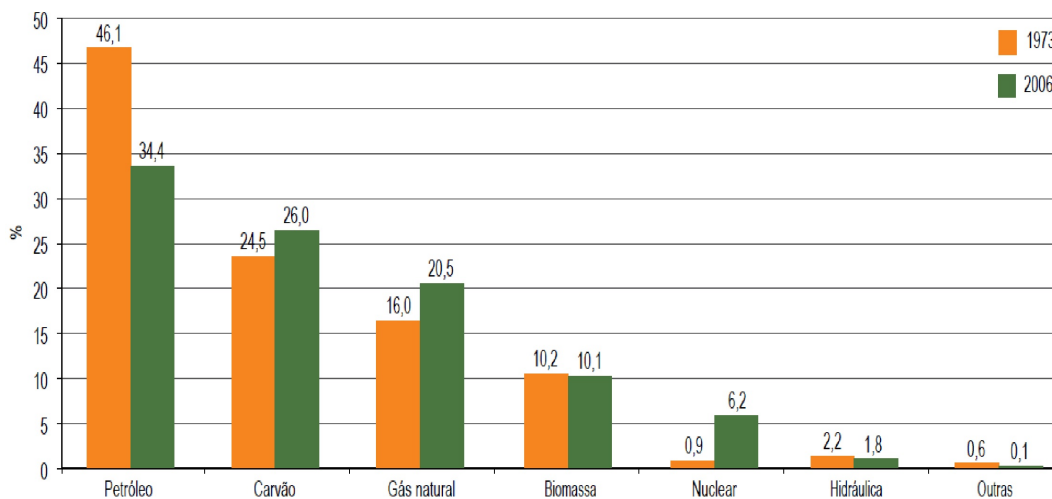


Figura 2.1: Matriz energética mundial dos anos de 1973 e 2006.

Fonte: ANEEL (2008)

Em função do grande potencial hídrico, o Brasil utiliza a energia termelétrica para suprir a demanda quando a energia de ordem hidráulica é insuficiente. O país conta com 2859 usinas termelétricas em operação, 18 em construção e 151 com construção não iniciada (ANEEL, 2016). Em comparação com as usinas hidrelétricas, as termelétricas possuem menor tempo de instalação, podendo assim suprir a carência de energia de forma mais rápida, podem ser instaladas próximas à regiões de consumo e são alternativas para países que não possuem os recursos hídricos necessários para a instalação de hidrelétrica. Porém, a geração de energia termelétrica tem aspectos negativos. Quando instaladas nas proximidades de rios ou mares, a água utilizada para resfriamento das caldeiras fica aquecida, podendo comprometer a fauna e a flora da região. Devido à queima de combustíveis fósseis para gerar energia, há expressiva emissão de poluentes atmosféricos e materiais particulados, os quais podem ser levados pelo vento causando chuva ácida.

É de fundamental importância para diversas áreas de pesquisa, formular problemas em que os custos dos combustíveis sejam minimizados e simultaneamente a emissão de poluentes atmosféricos. Neste trabalho serão desenvolvidas estratégias que visam minimizar estes custos e emissões de poluentes.

2.1.1 Aspectos da Geração Termoelétrica

O processo de geração de energia termelétrica consiste inicialmente em converter energia térmica em mecânica e sucessivamente em energia elétrica após a queima de algum tipo de combustível. Quanto às formas utilizadas para gerar energia podemos classificar as usinas termelétricas em três casos: as que utilizam turbinas a vapor, as movidas por turbinas a gás e as a ciclo combinado.

2.1.1.1 Aspectos Econômicos

Para o processo de geração de energia termelétrica é necessário a aquisição de combustíveis, o que acarreta um valor para a unidade geradora e o custo de combustível de uma unidade geradora termelétrica é considerado variável, pois é dependente das taxas de combustíveis, dos requisitos diários de carga e da compra e venda de energia. Neste trabalho é analisado o ponto de vista econômico, buscando estratégias de redução dos custos com combustíveis queimados em uma usina. Um problema de otimização que visa a minimização desses custos é formulado, considerando a demanda a ser satisfeita e os limites operacionais, o qual é denominado de problema de despacho econômico, que será visto na seção 2.2.

2.1.1.2 Aspectos Ambientais

Nas décadas de 70 e 80 os recursos naturais eram utilizados para a geração de energia sem mensurar os impactos ambientais. A partir dos anos 80 iniciou-se a preocupação

com os recursos naturais, houve a criação de leis e programas de desenvolvimento ambiental sustentável. Após a crise do petróleo na década de 70, e recentemente, em função da escassez de chuvas, adveio a necessidade de investimentos em fontes alternativas para a geração de energia, diminuindo a dependência da geração hidráulica. Como opção, no Brasil, tem-se a geração termelétrica, que gera energia elétrica a partir da queima de combustíveis como carvão mineral, gás natural, petróleo e biomassa. Porém, como resultado desta geração, há emissão de impurezas do próprio combustível, material particulado, dióxido de enxofre (SO_2), óxido de nitrogênio (NO_x) e o dióxido de carbono (CO_2), que prejudicam a saúde dos seres humanos ao aspirar tais materiais, alteram a acidez das chuvas, afetam a vegetação, recursos hídricos e a vida animal. Assim, é relevante que as emissões de poluentes durante o processo de geração de energia em usinas termelétricas sejam controladas. A fim de reduzir a quantidade de poluentes atmosféricos dessa geração, surge como alternativa o problema de despacho ambiental, que é formulado a fim de minimizar a emissão de poluentes atmosféricos nas usinas termelétricas.

A seguir, são apresentados os problemas de despacho econômico e ambiental separadamente, apontando as considerações e modelagens de cada um. Na seção 2.4 é exposto o problema multiobjetivo, no qual deseja-se otimizar os custos de geração de energia, e simultaneamente, reduzir a emissão de poluentes, os quais são objetivos conflitantes.

2.2 Problema de Despacho Econômico

O problema de despacho econômico (PDE) é um problema de otimização restrito, não-linear, encontrado na área de sistemas elétricos de potência. O PDE considera a geração termelétrica baseando-se em seus aspectos econômicos, com o objetivo de minimizar os custos com combustíveis e é definido como sendo um processo de alocação ótima da demanda de energia elétrica entre as unidades geradoras disponíveis de tal forma que as restrições operacionais sejam satisfeitas e que o custo de geração seja mínimo.

Por volta de 1920, já existia a preocupação com o processo de alocação econômica de energia. De acordo com Happ (1977), dentre os primeiros métodos para minimizar os custos da potência gerada, pode-se destacar o método de carregamento por ordem de mérito, que consistia em demandar maior potência somente das unidades mais eficientes. Dessa forma, é demandada potência do gerador mais eficiente para o menos eficiente até suprir a demanda de energia necessária. Tal método não conseguia minimizar os custos de geração, mas foi utilizado durante uma década, até 1930, quando foi substituído pelo critério dos custos incrementais iguais, pois este último passou a produzir melhores resultados econômicos. O critério dos custos incrementais iguais consiste em considerar que o ponto de menor custo é o que apresenta custos incrementais de todas as unidades geradoras iguais. O trabalho de Steinberg & Smith (1934) comprovou matematicamente que este critério era válido para a obtenção de custos mínimos para o caso de duas unidades

geradoras. Este critério é determinado pela minimização da função custo de geração. A função custo, denominada neste trabalho de C_g (função custo de geração), foi apresentada por Steinberg & Smith (1934), na qual o custo total é igual ao somatório da função custo de combustível de cada gerador.

O problema de despacho econômico (PDE) que consiste em minimizar a função C_g , dada em (2.1), foi proposto por Steinberg & Smith (1934). Em (2.1) o custo de produção total da rede é igual ao somatório da função de custo de combustível de cada gerador:

$$C_g = \sum_{i=1}^n C_{g_i}(P_i) = \sum_{i=1}^n a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i \quad (2.1)$$

em que:

- C_g é a função objetivo de custo total geração;
- $C_{g_i}(P_i)$ é a função custo individual da i -ésima unidade geradora;
- a_i, b_i e c_i são os coeficientes de custo da unidade geradora i , com unidades $\$/MW^2$, $\$/MW$ e $\$$, respectivamente.
- P_i é a potência gerada pela unidade geradora i , dada em MW .

Nos geradores de turbinas a vapor, representar as curvas de entrada-saída através de funções quadráticas não é a mais adequada. Nestes geradores existem válvulas de admissão a vapor, cuja abertura influencia na saída da unidade. Segundo Happ (1977), os custos incrementais são representados como monotonicamente crescentes no problema de despacho econômico clássico e ignora as perdas durante a passagem de vapor através de válvulas parcialmente abertas. O efeito denominado de ponto de carregamento de válvula é gerado em cada válvula de admissão de calor que se abre, como na Figura 2.2, que apresenta o efeito de ponto de carregamento de válvula das três unidades térmicas, cujos dados são apresentados em 5.1.

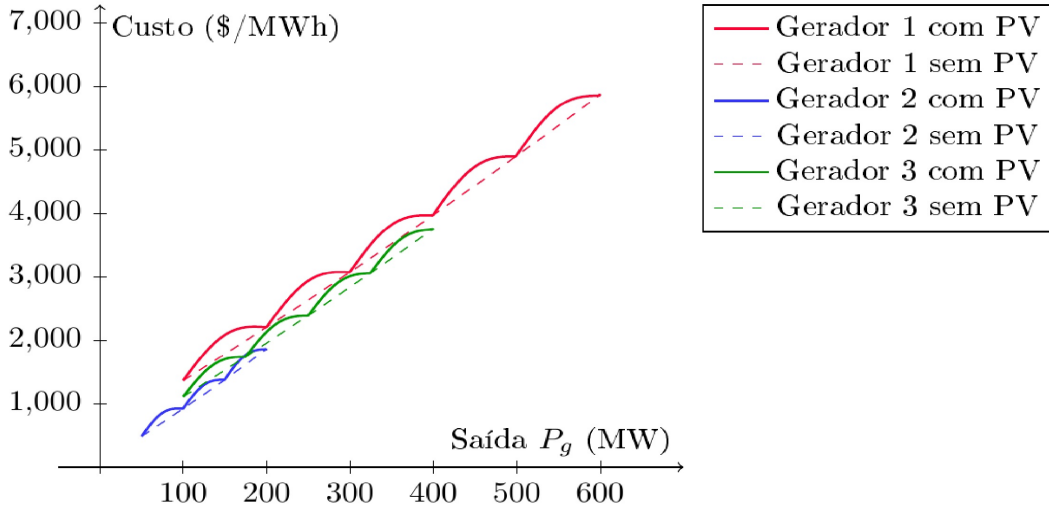


Figura 2.2: Curva de entrada-saída na unidade térmica de três geradores com efeito de ponto de carregamento de válvula

Considerando o efeito de ponto de carregamento de válvula, à função C_g são incorporados termos modulares da função seno, como apresentado em (2.2), e segundo Silva (2014), o modelo se torna mais completo, porém mais difícil de tratar, pois a função objetivo despacho econômico torna-se não convexa e não diferenciável, impossibilitando a utilização dos métodos clássicos de otimização. A função utilizada para o cálculo do custo total considerando o efeito de ponto de carregamento de válvula (Wood & Wollenberg, 1984), é modelada de acordo com (2.2):

$$C_g = \sum_{i=1}^n C_{g_i}(P(V_i)) = \sum_{i=1}^n a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i + \sum_{i=1}^n |d_i \text{sen}(e_i(P_i^{\text{inf}} - P_i))| \quad (2.2)$$

em que:

C_g é a função objetivo custo de geração;

$C_{g_i}(P(V_i))$ é a função custo individual da i -ésima unidade geradora;

a_i, b_i, c_i, d_i e e_i são os coeficientes de custo da unidade geradora i , em que d_i e e_i são dados em \$ e $1/MW$ respectivamente.

P_i é a potência gerada pela unidade geradora i .

O problema de despacho econômico com pontos de carregamento de válvula consiste em minimizar a função custo de geração C_g , respeitando as restrições operacionais do sistema e garantindo que a demanda seja satisfeita, e a modelagem do problema é apresentada em (2.3):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } C_g &= \sum_{i=1}^n C_{g_i}(P(V_i)) = \sum_{i=1}^n a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i + \sum_{i=1}^n |d_i \text{sen}(e_i(P_i^{\text{inf}} - P_i))| \\ \text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i &= P_d \end{aligned}$$

2.3 Problema de Despacho Ambiental

De acordo com Gent & Lamont (1971), por um longo tempo, o funcionamento ótimo da geração termelétrica levava em consideração apenas os critérios econômicos, desconsiderando quaisquer critérios envolvendo os aspectos ambientais. A queima de carvão nas usinas termelétricas pode causar impactos negativos, devido a emissão de material particulado e poluentes atmosféricos, dentre os quais destacam-se o dióxido de carbono CO_2 , principal causador do efeito estufa, dióxido de enxofre SO_2 e óxidos de nitrogênio NO_x . Como alternativa para diminuir a contaminação do meio ambiente a partir destas emissões, adotam-se tecnologias como: chaminés, carvão tratado, precipitadores eletrostáticos, entre outros. Além dessas técnicas, outra alternativa é a adoção de um modelo de despacho que vise minimizar a emissão de poluentes atmosféricos. O problema de despacho ambiental (PDA) tem esse objetivo.

O modelo geral de otimização para o despacho ambiental foi proposto por El-Hawary et al. (1992), a função emissão de poluentes corresponde à somatória das emissões de cada unidade geradora, como é apresentado em (2.4).

$$C_e = \sum_{i=1}^n C_{e_i}(P_i) = \sum_{i=1}^n A_i P_i^2 + B_i P_i + C_i \quad (2.4)$$

em que:

C_e	é a função objetivo custo de emissão total;
$C_{e_i}(P_i)$	é a função emissão da i -ésima unidade geradora;
A_i, B_i e C_i	são os coeficientes de emissão da unidade geradora i , dados em kg/MW^2 , kg/MW e kg , respectivamente.
P_i	é a potência gerada pela unidade geradora i , dada em MW .

O (PDA) pode ser modelado considerando a função emissão como objetivo a ser minimizado, garantindo que a demanda seja satisfeita e respeitando os limites de operação do sistema. Considerando a minimização das emissões e a função emissão de poluentes apresentada em El-Hawary et al. (1992), o problema de despacho ambiental é modelado de acordo com a equação (2.5):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } C_e &= \sum_{i=1}^n C_{e_i}(P_i) = \sum_{i=1}^n A_i P_i^2 + B_i P_i + C_i \\ \text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i &= P_d \\ P_i^{inf} &\leq P_i \leq P_i^{sup} \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que:

C_e	é a função objetivo emissão total;
-------	------------------------------------

$C_{e_i}(P_i)$	é a função emissão da i -ésima unidade geradora;
A_i, B_i e C_i	são os coeficientes de emissão da unidade geradora i ;
P_i	é a potência gerada pela unidade geradora i ;
P_d	é a potência demandada;
P_i^{inf} e P_i^{sup}	são os limites inferiores e superiores, respectivamente, de saída de potência da unidade geradora i .

Uma outra modelagem dos problemas de despacho, que considera a minimização simultânea do PDE e PDA será descrita em uma abordagem multiobjetivo na seção 2.4.

2.4 Problema Multiobjetivo de Despacho Econômico e Ambiental com Pontos de Carregamento de Válvula (PMDEA-PV)

Nesta seção, é abordado o problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental com pontos de carregamento de válvula. Alguns conceitos, definições e teoremas em otimização multiobjetivo podem ser encontrados no Apêndice A.

O problema de despacho econômico e ambiental (PMDEA-PV) é formulado como um problema de otimização multiobjetivo e que envolve a minimização de dois objetivos: custo total de geração (C_g) e total de emissão (C_e). Estes dois objetivos considerados simultaneamente para este problema são conflitantes, ou seja, a minimização de uma função objetivo acarreta a deteriorização da outra e vice-versa, (Aliano, 2015). O problema multiobjetivo de despacho econômico ambiental pode ser tratado de forma simplificada desconsiderando pontos de carregamento de válvula (PMDEA) ou de forma completa considerando estes pontos (PMDEA-PV). O desenvolvimento desse trabalho foi feito objetivando a resolução do PMDEA-PV definido em (2.6), que explora as funções custo de geração e custo de emissão definidas em (2.4) e (2.2), respectivamente.

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } \{C_g, C_e\} \\
 &\text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n (P_i) = P_d \\
 &\quad P_i^{\text{inf}} \leq P_i \leq P_i^{\text{sup}}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

em que:

C_g	é a função objetivo custo de geração;
C_e	é a função objetivo custo de emissão de poluentes;
P_i	é a potência gerada pela unidade geradora i ;
P_d	é a potência demandada;

P_i^{inf} e P_i^{sup} são os limites inferiores e superiores, respectivamente, de saída de potência da unidade geradora i .

Tendo em vista que a minimização de custos e emissões são objetivos conflitantes, ou seja, não podem ser simultaneamente minimizados, então estratégias são propostas na literatura para investigação e determinação de soluções eficientes para este problema. Algumas estratégias apresentadas visam transformar o problema multiobjetivo em um conjunto de problemas mono-objetivos e assim tornar possível a investigação e determinação de soluções eficientes.

Dentre os métodos clássicos para resolução de problemas multiobjetivos, destaca-se o método da soma ponderada (Miettinen, 1999) e o método ε -restrito (Haimes, 1971). Ambos possibilitam redefinir o problema multiobjetivo através de problemas mono-objetivos, os quais permitirão analisar soluções eficientes do PMDEA-PV.

2.5 Estratégias de Solução de Problemas de Otimização Multiobjetivo

Devido ao fato de que a minimização do custo de geração e a minimização da emissão de poluentes são objetivos conflitantes, estratégias são propostas na literatura para investigação e determinação de soluções eficientes para o PMDEA-PV. As estratégias clássicas de resolução de problemas de otimização multiobjetivo são: a estratégia conhecida como soma ponderada e a estratégia ε -restrito. A utilização destas estratégias para a resolução do problema definido em (2.6), possibilita redefini-lo através de problemas mono-objetivos. Estes problemas mono-objetivos permitirão analisar soluções eficientes do problema (2.6) utilizando os método PDPCBLM, que será apresentado no Capítulo 4.

2.6 Soma Ponderada

O método da soma ponderada foi descrito em Miettinen (1999). O método consiste em combinar as funções objetivo em uma única função. A ponderação é feita pré-multiplicando-se as funções por um parâmetro (peso). A escolha do peso é especificada pelo usuário, de maneira que a soma destes resulte em 1. Os valores que pré-multiplicam as funções podem assumir quaisquer valores entre $[0, 1]$.

De acordo com Das & Dennis (1997) e Messac et al. (2000), o método torna-se ineficaz na resolução de um problema multiobjetivo em que o conjunto viável não é convexo, pois não consegue obter pontos em partes não convexas da fronteira eficiente. O método encontra somente parte do conjunto de soluções eficientes, deixando de mapear muitas das soluções.

2.6.1 Soma Ponderada e o PMDEA-PV

Considerando o PMDEA-PV definido em (2.6) e o método da soma ponderada, a função objetivo é expressa por (2.7):

$$(1 - \beta)C_g + \beta C_e \quad (2.7)$$

em que:

- C_g é a função custo de geração;
- C_e é a função custo de emissão de poluentes;
- $\beta \in [0, 1]$ é o parâmetro do método soma ponderada.

Assim, o PMDEA-PV, considerando as restrições operacionais do sistema e a demanda, é representado de acordo com (2.8):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } (1 - \beta)C_g + \beta C_e \\ &\text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i = P_d \\ & \quad \quad \quad P_i^{inf} \leq P_i \leq P_i^{sup} \end{aligned} \quad (2.8)$$

O problema multiobjetivo descrito por meio do método da soma ponderada (2.8) é resolvido para valores sucessivos de β no intervalo entre 0 e 1. Para cada valor de β obtém-se uma solução para o problema 2.8, e conseqüentemente tem-se um valor para C_g e C_e . Quando β percorre o intervalo $[0, 1]$, obtém-se a curva de soluções eficientes, que relaciona os valores de C_g e C_e . Nota-se que quando $\beta = 1$, a curva atinge a emissão mínima e o custo é máximo, já o inverso ocorre em $\beta = 0$, onde o custo é mínimo e a emissão é máxima. A curva de soluções eficientes para o método da soma ponderada pode ser expressa pela curva convexa apresentada Figura 2.3. Tal curva só é possível ser obtida quando as funções a serem minimizadas são convexas.

A Figura 2.3 mostra que os objetivos a serem alcançados são conflitantes, ou seja, à medida que a função emissão de poluentes C_e aumenta, a função custo de geração C_g diminui, e da mesma forma, à medida que a função custo de emissão de poluentes C_e diminui, a função custo de geração C_g aumenta. A Figura 2.3 relaciona-se ao comportamento conflitante de duas funções convexas, diferentemente daquelas que serão investigadas neste trabalho.

2.7 Método ε -restrito

O método ε -restrito foi sugerido por Haimes (1971) e descrito em Miettinen (1999). O método consiste em otimizar uma das funções objetivo, custo de emissão de poluentes ou

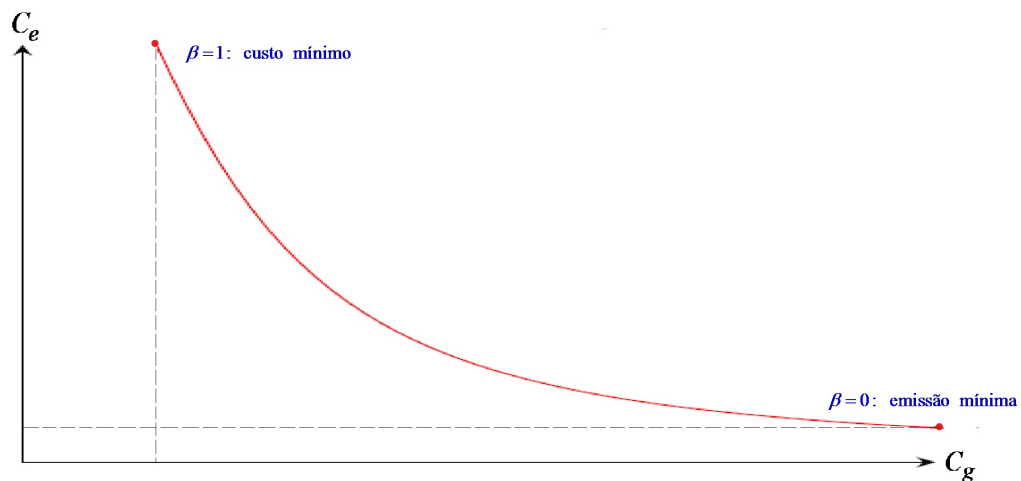


Figura 2.3: Curva de soluções eficientes: custo e emissões.

custo de geração, enquanto as outras funções são incorporadas como restrições adicionais do problema de despacho, econômico ou ambiental, limitada superiormente por um valor que represente a máxima emissão de poluentes ou o custo máximo permissível. Logo, o método ε -restrito é utilizado para transformar um problema multiobjetivo em um conjunto de problemas mono-objetivo, possibilitando assim a aplicação de um método de otimização para a resolução de problemas mono-objetivo.

2.7.1 Método ε -restrito e o PMDEA-PV

Duas formulações são possíveis para o método ε -restrito:

- Minimizar a função emissão de poluentes, e considerar a função custo de geração como uma restrição, limitada superiormente para níveis máximos de custo de geração;
- Assumir a função custo de geração como objetivo e considerar como restrição a função emissão de poluentes limitada superiormente para níveis permissíveis de emissão;

2.7.1.1 Função Objetivo: Despacho Ambiental

Duas formulações para a resolução do PMDEA-PV utilizando o método ε -restrito são possíveis. A primeira formulação na qual o problema de despacho ambiental é considerado como objetivo a ser minimizado e sujeito a uma restrição econômica, limitado superiormente por um custo máximo de geração é apresentado em (2.9) :

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar } C_e \\
& \text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i = P_d \\
& 0 \leq C_g \leq C_g^{\text{sup}} \\
& P_i^{\text{inf}} \leq P_i \leq P_i^{\text{sup}}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

em que:

C_g é a função custo de geração;
 C_e é a função emissão de poluentes;
 P_d é a potência demandada;
 P_i^{inf} e P_i^{sup} são os limites inferiores e superiores, respectivamente, de saída de potência da unidade geradora i ;
 C_g^{sup} é o limitante superior da função custo de geração.

2.7.1.2 Função Objetivo: Despacho Econômico

O problema de despacho econômico sujeito às restrições operacionais do sistema e à restrição de emissão, limitado por níveis máximos de emissão permissíveis, é apresentado em (2.10):

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar } C_g \\
& \text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i = P_d \\
& 0 \leq C_e \leq C_e^{\text{sup}} \\
& P_i^{\text{inf}} \leq P_i \leq P_i^{\text{sup}}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

em que:

C_g é a função custo de geração;
 C_e é a função emissão de poluentes;
 P_d é a potência demandada;
 P_i^{inf} e P_i^{sup} são os limites inferiores e superiores, respectivamente, de saída de potência da unidade geradora i ;
 C_e^{sup} é o limitante superior de níveis permissíveis de emissão.

Este trabalho considera a função custo de geração como a função a ser minimizada, enquanto a função emissão de poluentes é tratada como uma restrição limitada superiormente no problema. Além disso, a estratégia de suavização proposta, que suaviza os termos modulares da função custo de geração, se ajusta melhor ao problema (2.10), no qual se minimiza uma função custo de geração suavizada, favorecendo a utilização de

métodos clássicos de otimização, como o método primal-dual previsor-corretor barreira logarítmica modificada (PDPCBLM) a ser visto na seção 4.3.

Tendo em vista que a principal meta das concessionárias é priorizar a minimização dos custos, neste trabalho optou-se pela formulação na qual a função objetivo é a custo de geração com pontos de carregamento de válvula e a função emissão de poluentes é uma restrição do problema.

2.8 Método de Restrições Canalizadas Progressivas

Considerando o modelo de otimização para o PMDEA-PV, no presente trabalho, é explorado o método denominado de restrições canalizadas progressivas (RCP), proposto e desenvolvido em Gonçalves (2015) para este problema. Este método transforma o PMDEA-PV em um conjunto de subproblemas mono-objetivo, em que a função custo de geração é a função objetivo do problema e a função emissão de poluentes é incorporada às restrições do problema, limitada superiormente e inferiormente, para níveis mínimos e máximos de emissão. Esses limites são considerados para possibilitar ao método PDPCBLM, que será apresentado na seção 4.3, investigar a existência de possíveis N soluções eficientes $x(\beta)$ em cada subintervalo $[C_e^{\text{inf}}(\beta), C_e^{\text{sup}}(\beta)]$, $\beta = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Inicialmente, após a resolução dos problemas mono-objetivo de despacho econômico e de despacho ambiental, obtém-se o valor de mínimo da função custo de emissão, C_e^{inf} , a partir da solução ótima do PDA, e o seu valor máximo, C_e^{sup} , a partir da solução ótima do PDE. Considerando-se estes valores, tem-se que qualquer valor da função custo de emissão deve pertencer ao intervalo $[C_e^{\text{inf}}, C_e^{\text{sup}}]$. O intervalo obtido inicialmente é subdividido em N subintervalos igualmente espaçados $\beta = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, e considerando-se $\delta = \frac{(C_e^{\text{sup}} - C_e^{\text{inf}})}{N}$, e $\beta = 1, 2, \dots, N - 1$, tem-se $C_e^{\text{inf}}(\beta) = C_e^{\text{inf}} + \beta\delta$ e $C_e^{\text{sup}}(\beta) = C_e^{\text{sup}} - (\beta + 1)\delta$, onde para $\beta = 0$, $C_e^{\text{inf}}(0) = C_e^{\text{inf}}$; para $\beta = N - 1$, $C_e^{\text{sup}}(N - 1) = C_e^{\text{sup}}$, permitindo-se a investigação de possíveis N soluções eficientes $x(\beta)$ através do método PDPCBLM, para cada valor de β , no subintervalo $[C_e^{\text{inf}}(\beta), C_e^{\text{sup}}(\beta)]$. O método RCP é definido para cada problema de otimização mono-objetivo, parametrizados em β definido em 2.11:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } C_g \\
 & \text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n (P_i) = P_d \\
 & C_e^{\text{inf}}(\beta) \leq C_e \leq C_e^{\text{sup}}(\beta) \quad \beta = 0, 1, \dots, N - 1. \\
 & P_i^{\text{inf}} \leq P_i \leq P_i^{\text{sup}}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

em que:

- C_g é a função custo de geração;
- C_e é a função custo de emissão de poluentes;

- P_d é a potência demandada;
- P_i^{inf} e P_i^{sup} são os limites mínimo e máximo, respectivamente, de saída de potência da unidade geradora i ;
- $C_e^{\text{inf}}(\beta)$ é o limitante mínimo para a restrição canalizada progressiva;
- $C_e^{\text{sup}}(\beta)$ é o limitante máximo para a restrição canalizada progressiva.

O método RCP é utilizado para cada valor de β , de tal forma que, cada problema mono-objetivo resultante é resolvido pelo método PDP CBLM, e para cada solução $x(\beta)$ obtida no intervalo $[C_e^{\text{inf}}(\beta), C_e^{\text{sup}}(\beta)]$, o valor $C_e(\beta)$ é plotado no gráfico representado pela Figura 2.4, para detectar se esta é uma solução eficiente do problema, ou seja, se $C_e(\beta)$, pertence à curva de Pareto-ótimo. Para melhorar a distribuição de pontos nesta curva, se o espaçamento $\bar{\delta}$ entre dois valores associados a duas soluções eficientes for maior que δ ($\bar{\delta} > \delta$), então, a partir dessas duas soluções um novo valor mínimo \bar{C}_e^{inf} e um novo valor máximo \bar{C}_e^{sup} da função emissão de poluentes são determinados. Estes valores são utilizados no conjunto de sub problema mono-objetivo (2.11), para investigar a existência de possíveis novas soluções eficientes do PMDEA-PV. Esse procedimento trata-se de um refinamento do método RCP para melhorar o preenchimento da curva, tal como é ilustrado pela Figura 2.4.

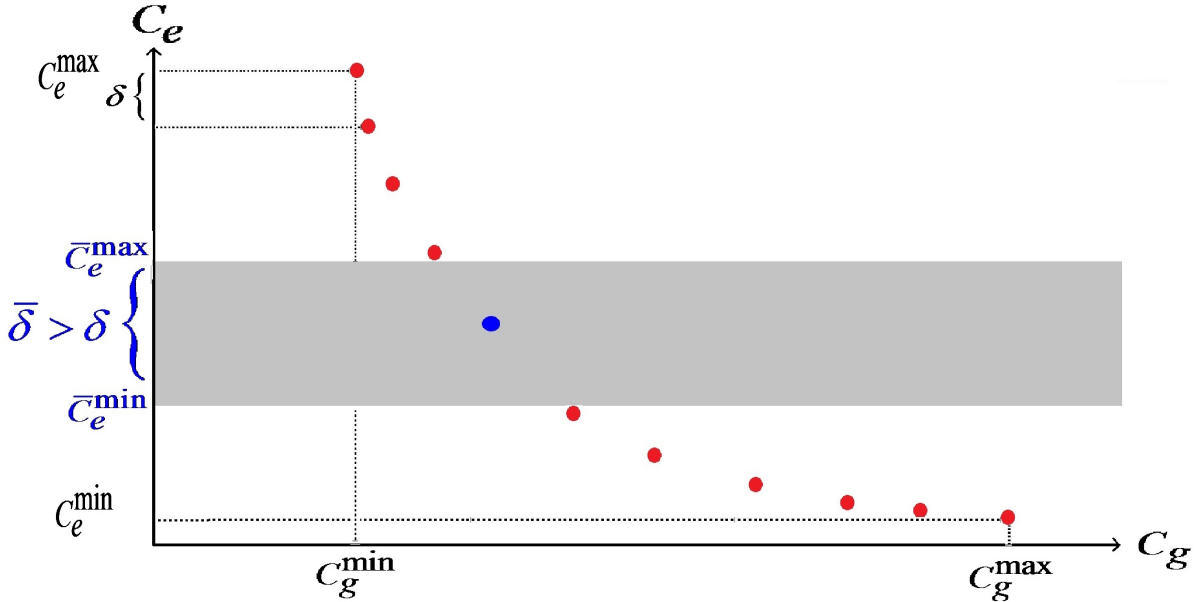


Figura 2.4: Subintervalo para a função emissão de poluentes: método de restrições canalizadas progressivas.

O método RCP proposto nesta seção, gera N sub-problemas equivalentes ao 2.11, para os quais a C_g , devido a existência de pontos de válvula é não diferenciável nestes pontos. Assim, para poder resolver esses sub-problemas por métodos determinísticos de otimização, é necessário que se utilize uma técnica de suavização para tratar os termos modulares desta função.

No próximo capítulo será apresentado um método de suavização de funções que associado ao método RCP, possibilita a utilização do método PDPCLM à resolução do PMDEA-PV.

Capítulo 3

Métodos de Aproximação e Suavização de Funções

Aproximar funções complexas por uma função mais simples e com propriedades de diferenciabilidade e continuidade se firmou como um problema matemático relevante, (Rivlin, 1981).

Problemas que possuem termos modulares apresentam certa dificuldade em sua resolução, pois são não-diferenciáveis em alguns pontos. O PMDEA-PV formulado em (2.6) se enquadra nesta categoria, pois a função objetivo custo de geração envolve o efeito de pontos de carregamento de válvula que apresenta termos modulares e senoidais.

Segundo Chen (2012), a vantagem dos métodos de suavização é poder resolver problemas de otimização com funções continuamente diferenciáveis, para as quais existem ricas teorias de métodos de soluções (Nocedal & Wright, 2006). Ainda de acordo com Chen (2012) o bom desempenho dos método de suavização depende:

- Da função de aproximação suavizante;
- Do método de solução para o problema de otimização suavizado;
- Da atualização do parâmetro de suavização.

Os métodos clássicos de otimização, necessitam da diferenciabilidade das funções, logo, em problemas como o PMDEA-PV sua utilização é inviável. Os aproximantes de funções são eficientes para problemas cuja função objetivo e/ou restrições são não diferenciáveis.

Neste trabalho a suavização dos termos modulares é feita utilizando uma nova técnica de suavização de funções denominada de suavização arco tangente.

Um tipo de função comumente utilizada em aproximantes de funções, é a polinomial. Tais funções são simples e possuem boas propriedades, além de serem infinitamente diferenciáveis. Tal aproximação é denominada aproximação polinomial e está descrita no

trabalho de Gonçalves (2015). O mesmo trabalho apresenta a aproximação de funções pela função tangente hiperbólica que gera uma sequência de funções que converge para a função $|x|$.

3.1 Suavização Hiperbólica

Nesta seção é descrito o método de suavização hiperbólica, utilizado no trabalho de Gonçalves (2015) para suavizar os termos modulares presentes na função custo de geração. No capítulo 5, os resultados obtidos através da suavização arco tangente serão comparados com os obtidos pelo método de suavização hiperbólica.

Considere o problema de otimização a seguir, cuja função objetivo apresenta um termo modular:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & z = |f(x)| \\ \text{Sujeito a: } & x \in \phi \end{aligned} \tag{3.1}$$

A função $z = |f(x)|$ é expressa de modo aproximado, sendo suavizada utilizando a técnica de suavização hiperbólica pelo seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & \vartheta(x, \eta) = \sqrt{(f(x))^2 + \eta^2} \\ \text{Sujeito a: } & x \in \phi \end{aligned} \tag{3.2}$$

Conforme Souza (2010), a função $\vartheta(x, \eta)$ apresenta as seguintes propriedades:

- $\vartheta(x, \eta) > z, \forall \eta > 0$;
- $\vartheta(x, \eta)$ é uma função de classe C^∞ ;
- $\lim_{\eta \rightarrow 0} \vartheta(x, \eta) = z$, ou seja, a função $\vartheta(x, \eta)$ é uma boa aproximação de z , pois a medida que $\eta \rightarrow 0$, a função suavizada se aproxima da função original;
- $\vartheta(x, \eta)$ é uma função estritamente crescente em η , para $\eta > 0$.

A medida em que $\eta \rightarrow 0$ a função suavizada $\vartheta(x, \eta)$ se aproxima da função original $|f(x)|$. A Figura(3.1) mostra este efeito:

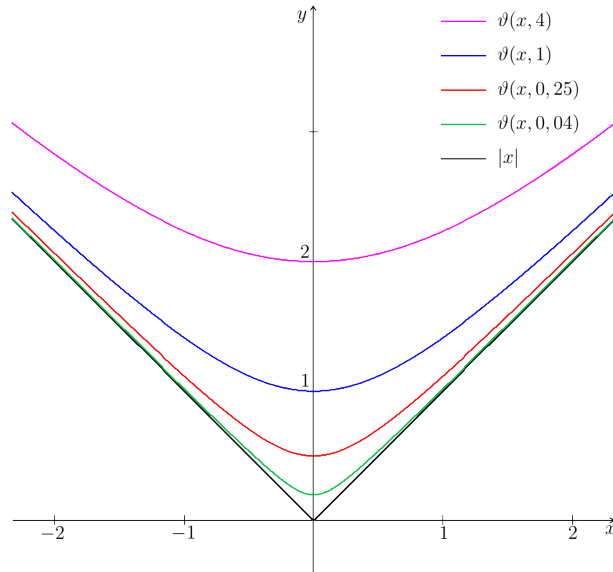


Figura 3.1: Função ϑ para diferentes valores de η .
Fonte: Silva (2014)

3.2 Suavização Arco Tangente

Para tratar a não diferenciabilidade de uma função modular, esta função será substituída por uma função suavizante e parametrizada, pois, desta forma, é possível aplicar métodos determinísticos de otimização e do tipo gradiente.

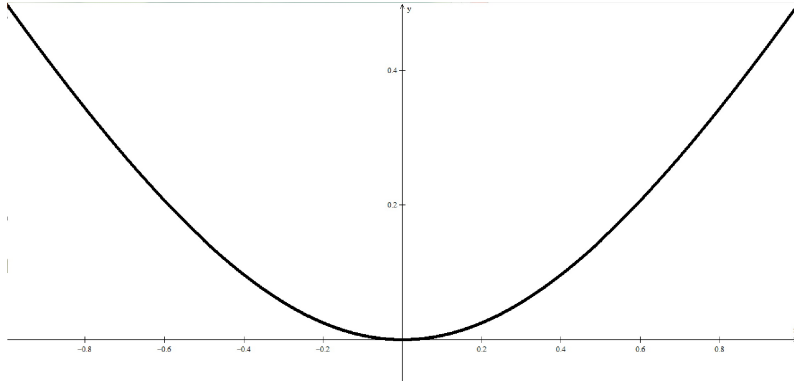
Considere a função (3.3) :

$$\omega(t) = \frac{2}{\pi} \cdot t \cdot \arctg(t) \quad (3.3)$$

A função apresentada em (3.3) possui as seguintes propriedades:

1. O domínio de ω é \mathbb{R} ;
2. O contra-domínio é o \mathbb{R}_+ ;
3. $\omega(t)$ é uma função de classe C^∞ ;
4. $\omega(t) = \omega(-t)$ (Função par);
5. $\omega'(t) < 0$, se $t < 0$, $\omega'(t) > 0$, se $t > 0$;
6. $\omega''(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$;
7. $\omega(0) = \omega'(0) = 0$;
8. $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \omega'(t) = 1$;

A Figura 3.2 ilustra o gráfico da função ω :

Figura 3.2: Função $\omega(t)$

Considere o problema de otimização apresentado em (3.4), cuja função objetivo apresenta um termo modular:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= |f(x)| \\ f(x) &\text{ está definida sobre um domínio } \phi \end{aligned} \quad (3.4)$$

A suavização da função z é realizada através da função $\omega(f(x), \eta)$ apresentada em (3.5), a qual é denominada função suavizante arco tangente.

$$\omega(f(x), \eta) = \frac{2}{\pi} f(x) \operatorname{arctg} \left(\frac{f(x)}{\eta} \right); \quad (3.5)$$

em que $\eta \in \mathbb{R}_+$ é denominado parâmetro de suavização.

A seguir apresentamos alguns teoremas sobre a função $\omega(f(x), \eta)$.

Teorema 1: Sejam $f : \phi \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta > 0$ o parâmetro de suavização e a função suavizante arco tangente $\omega(f(x), \eta) = \frac{2}{\pi} f(x) \arctan \left(\frac{f(x)}{\eta} \right)$. Então, $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \omega(f(x), \eta) = |f(x)|$.

Demonstração: deseja-se mostrar que sempre que $\lim_{\eta \rightarrow 0^+}$, então $\omega(f(x), \eta) \rightarrow |f(x)|$. Seja a função $d : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $d(\eta) = |f(x)| - \omega(f(x), \eta)$.

i. Seja um $\bar{x} \in \phi$ tal que $f(\bar{x}) > 0$. Então, tendo em vista que $\lim_{t \rightarrow \infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$, tem-se:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left(f(\bar{x}) - \frac{2}{\pi} f(\bar{x}) \arctan \left(\frac{f(\bar{x})}{\eta} \right) \right) = f(\bar{x}) - \frac{2}{\pi} f(\bar{x}) \frac{\pi}{2} = f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = 0.$$

ii. Seja um $\bar{x} \in \phi$ tal que $f(\bar{x}) < 0$. Então, tendo em vista que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$,

$$\text{tem-se, } \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left(-f(\bar{x}) - \frac{2}{\pi} f(\bar{x}) \arctan \left(\frac{f(\bar{x})}{\eta} \right) \right) = f(\bar{x}) - \frac{2}{\pi} f(\bar{x}) \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -f(\bar{x}) + f(\bar{x}) = 0.$$

iii. Supõe-se que $\bar{x} \in \phi$ é tal que $f(\bar{x}) = 0$, então $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left(0 - \frac{2}{\pi} 0 \arctan \left(\frac{0}{\eta} \right) \right) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} 0 = 0$, isto é, conforme a propriedade, $d(\eta) = 0$ para todo η_+ então $f(\bar{x}) = 0$.

Desde que (i), (ii) e (iii) são verdadeiros para qualquer $\bar{x} \in \phi$, então o teorema é verificado.

A Figura 3.3 ilustra a função $d(\eta)$ para o caso particular em que $f(x) = x$.

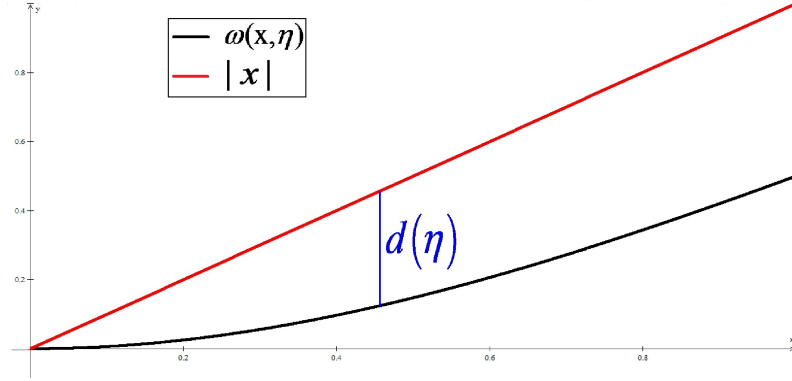


Figura 3.3: Representação geométrica da função $d(\eta)$

Teorema 2: Para todo $x \in \phi$ e $\eta \in \mathbb{R}_+$, então $|f(x)| \geq \omega(f(x), \eta)$.

Demonstração: Deseja-se mostrar que $|f(x)| - \omega(f(x), \eta) \geq 0$ para qualquer $x \in \phi$ e $\eta \in \mathbb{R}_+$. Seja um $\bar{x} \in \phi$, tal que $f(\bar{x}) > 0$, então: $f(\bar{x}) - \omega(f(\bar{x}), \eta) = f(\bar{x}) - \frac{2}{\pi} f(\bar{x}) \arctan\left(\frac{f(\bar{x})}{\eta}\right) = f(\bar{x}) \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{f(\bar{x})}{\eta}\right)\right)$.

Como η é um número estritamente positivo e $f(\bar{x}) > 0$, tem-se que $0 < \arctan\left(\frac{f(\bar{x})}{\eta}\right) < \frac{\pi}{2}$. Logo $0 < \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{f(\bar{x})}{\eta}\right)\right) < 1$, portanto, tem-se: $f(\bar{x}) - \omega(f(\bar{x}), \eta) = f(\bar{x}) \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{f(\bar{x})}{\eta}\right)\right) \geq 0$.

Se $\bar{x} \in \phi$ é tal que $f(\bar{x}) = 0$ então, por (iii) no Teorema 1, é imediato que $|f(x)| - \omega(f(x), \eta) = 0$. Se $\bar{x} \in \phi$ tal que, $f(\bar{x}) < 0$, então, com procedimentos análogos para o caso em que $f(\bar{x}) > 0$, tem-se imediatamente que $|f(\bar{x})| - \omega(f(\bar{x}), \eta) \geq 0$. Como $\bar{x} \in \phi$ é um valor arbitrário em ϕ , então o teorema é verificado.

A Figura 3.4 ilustra o comportamento da função suavizante em relação à função original.

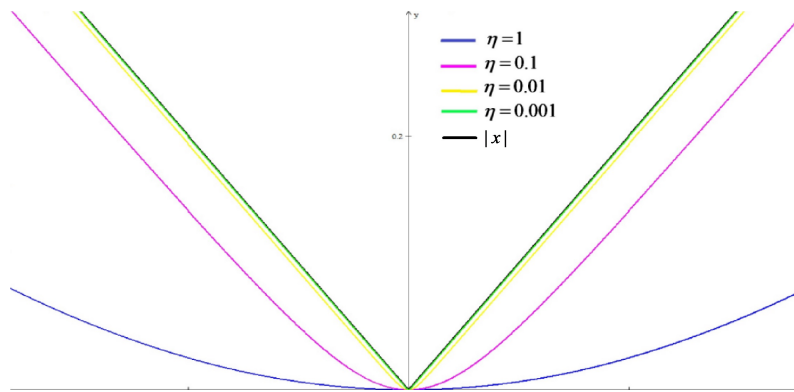


Figura 3.4: Função w para diferentes valores de η

Com a finalidade de ilustrar a função suavizante arco tangente, considere a função $z = |f(x)|$, onde $f(x) = x^3 + 1$. A Figura 3.5 mostra com z é aproximada pela função suavizante hiperbólica, a qual é apresentada em Gonçalves (2015), para alguns valores de η . Em perspectiva a Figura 3.6 mostra como z é aproximada pela função suavizante arco tangente, proposta neste trabalho, com os mesmos valores η .

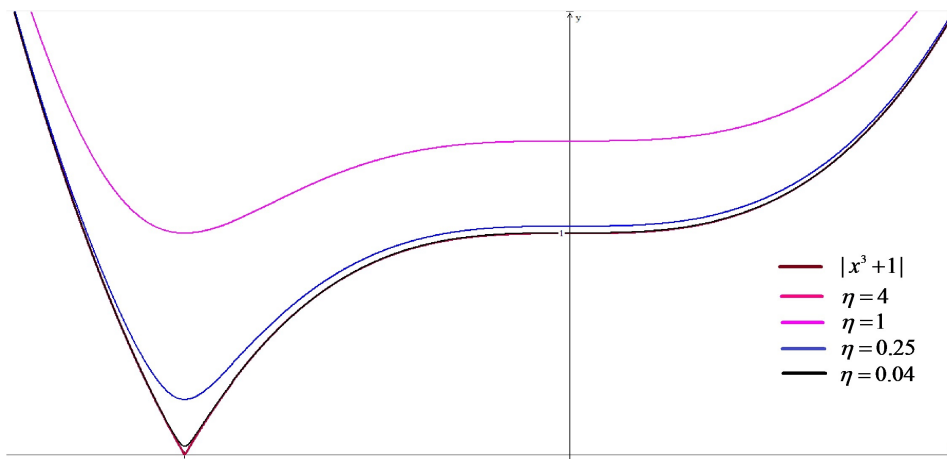


Figura 3.5: Função $|x^3 + 1|$ aproximada pelo suavizante hiperbólico

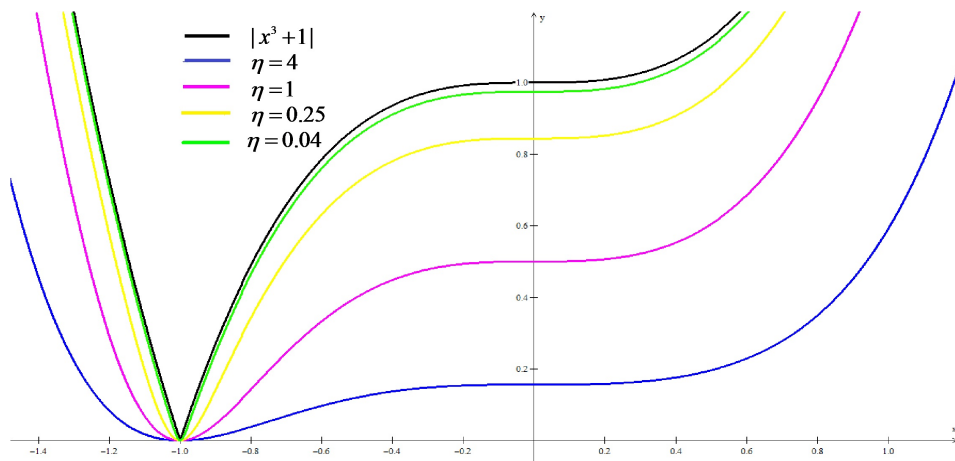


Figura 3.6: Função $|x^3 + 1|$ aproximada pelo suavizante arco tangente

A partir da análise das Figuras 3.5 e 3.6 é possível observar que a função suavizante arco tangente se ajusta melhor à função $|x^3 + 1|$, na vizinhança do ponto $x = -1$. De acordo com os Teoremas 1 e 2, tem-se que $\omega(x^3 + 1, \eta) = 0$, se $x^3 + 1 = 0$. Observe que isso não ocorre se utilizamos a função suavizante hiperbólica.

Devido a este fato, a proposta de suavização da função objetivo custo de geração é feita através do método de suavização arco tangente apresentado nesta seção. A suavização é feita para possibilitar a utilização dos métodos clássicos de otimização determinísticos à resolução dos modelos desenvolvidos no presente trabalho. O método primal-dual de pontos interiores/exteriores é desenvolvido no próximo capítulo.

Capítulo 4

Métodos de Otimização e Metodologia de Solução

Neste capítulo, são apresentados alguns métodos básicos para a resolução de problemas de otimização não linear, e o método proposto para a resolução do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental.

Uma revisão da teoria e de métodos de otimização não linear está disponível nos trabalhos de Gonçalves (2015) e Silva (2014).

4.1 Métodos de Otimização

Nesta seção serão apresentados alguns métodos que podem ser utilizados para a resolução de problemas de otimização não linear restrita, que consistem na conversão de um problema restrito em um problema irrestrito equivalente.

4.1.1 Método Dual-Lagrangiano

Considere o seguinte problema de programação não linear:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && f(x) \\ & \text{Sujeito a:} && g(x) = 0 \\ & && h(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que:

f, g e h são vetores de funções de classe C^2 , tal que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$;
 $g(x)$ representa as funções associadas às restrições de igualdade;
 $h(x)$ representa as as funções associadas às restrições de desigualdade;
 $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ com Ω sendo um conjunto aberto.

Associado a este problema tem-se a seguinte função Lagrangiana:

$$L(x, \lambda, v) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p v_j h_j(x) \quad (4.2)$$

em que, λ_i , com $i = 1, \dots, m$, são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e $v_j > 0$, com $j = 1, \dots, p$ são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade.

De acordo com o método dual-Lagrangiano, um ponto (x^*, λ^*, v^*) que seja ótimo, com *gap* de dualidade nulo, deve satisfazer a condição de ponto de sela. Então quando os multiplicadores de Lagrange atingirem (λ^*, v^*) , então x^* deve ser um ponto de mínimo em $L(x, \lambda, v)$.

Segundo Pinheiro (2012) o método dual-Lagrangiano é pouco utilizado, porém de grande importância devido aos seus conceitos teóricos. A utilização do método apresenta algumas dificuldades em sua resolução, como a possibilidade de ocorrência do *gap* de dualidade, levando a divergência no processo iterativo, bem como, quando multiplicadores de Lagrange são inseridos na função objetivo há um aumento no número de variáveis do problema. Contudo, tal método é frequentemente aplicado em conjunto com outros métodos, como será abordado neste trabalho.

4.1.2 Método de Barreira

As funções barreira transformam um problema restrito em um problema irrestrito e são frequentemente utilizadas para solucionar problemas de otimização com restrições de desigualdade. Tais funções criam uma barreira que mantém os pontos no interior da região factível.

Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a: } h(x) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

em que:

f e h são funções de classe C^2 , tal que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$;

$h(x)$ são as restrições de desigualdade;

$x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ com Ω sendo um conjunto aberto.

O método de barreira transforma o problema restrito (4.3) em um problema irrestrito que é resolvido para uma sequência de parâmetros de barreira que se aproxima de zero. Cada restrição de desigualdade é incorporada à função objetivo através de uma função barreira, dando origem a uma função auxiliar. O método é estritamente factível, ou seja, durante o processo iterativo, os pontos sempre estão no interior da região

factível do problema, por isso a necessidade de garantir que o interior da região factível determinado pelas restrições seja não-vazio. A barreira criada pelo método preserva a factibilidade e mantém os pontos no interior dessa região e por isso, esses métodos são conhecidos também como métodos de pontos interiores.

A função auxiliar é definida de acordo com (4.4) :

$$f_\mu(x) = f(x) + \mu B(x), \quad (4.4)$$

em que, $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ é denominado parâmetro de barreira e B é a função barreira. Desta maneira o problema irrestrito a ser resolvido é (4.5):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f_\mu(x) \\ &\text{Sujeito a: } x \in \overset{\circ}{X}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A função barreira associada ao problema (4.3) é definida de acordo com (4.6):

$$B(x) = \sum_{j=1}^p \phi(h_j(x)), \quad (4.6)$$

em que $\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} &\phi(y) \geq 0, \text{ se } y > 0 \\ &\lim_{y \rightarrow 0^+} \phi(y) = \infty. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A função barreira pode ser escrita de várias formas, entre elas a apresentada por Carroll & Fiacco (1961), representada em (4.8) e denominada de barreira clássica ou inversa e a apresentada por Frisch (1955), definida em (4.9) e denominada de barreira logarítmica.

$$\phi(y) = \frac{1}{y} \quad (4.8)$$

$$\phi(y) = -\ln(y) \quad (4.9)$$

Na resolução do método de barreira, $\mu B(x)$ se aproxima da função barreira original à medida que $\mu \rightarrow 0$. Assim, deseja-se que $\mu B(x) \rightarrow 0$, enquanto a solução tende ao seu valor ótimo, ou seja, $x \rightarrow x^*$. Se, x^* está na fronteira da região factível, então quando $x \rightarrow x^*$, tem-se que $B(x) \rightarrow \infty$, logo é necessário que o parâmetro de barreira $\mu \rightarrow 0$ mais rapidamente que $B(x) \rightarrow \infty$, para que $\mu B(x) \rightarrow 0$ ocorra.

O produto $\mu B(x)$ pode ser utilizado como critério de parada do método. Se o valor de $\mu B(x)$ não for menor que uma precisão desejada, μ deve ser reduzido através de alguma heurística e o problema barreira resolvido novamente.

Dentre as dificuldades do método, pode-se destacar a escolha de um ponto inicial pertencente ao interior da região factível. Conforme $\mu \rightarrow 0$, os problemas resolvidos ficam complicados, devido ao mau-condicionamento da matriz hessiana e por isso, o μ inicial e sua atualização, devem ser escolhidos de maneira cautelosa.

4.1.3 Método de Barreira Modificada e de Rescalamento Não-Linear

O método de barreira logarítmica foi proposto por Polyak com o intuito de abordar as restrições de desigualdade em problemas de otimização. No trabalho de Pinheiro (2012), a função barreira modificada é vista como uma função Lagrangiana aumentada interior. Assim como os métodos de barreira, o método de barreira logarítmica modificada resolve uma sequência de problemas irrestritos, até que a solução ótima seja obtida com a precisão desejada.

Considere o problema de otimização formulado em 4.10:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & f(x) \\ \text{Sujeito a: } & h(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções de classe C^2 , tal que $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, com Ω sendo um conjunto aberto.

Polyak amplificou a teoria da função barreira logarítmica modificada para uma mais geral, denominada rescalamento não linear. O método de rescalamento não-linear efetua uma transformação na função objetivo e/ou restrições para obter um problema equivalente com a mesma região factível. Tal transformação é da forma de uma função suave dependente de um parâmetro positivo, denominado função de rescalamento e os multiplicadores de Lagrange das restrições modificadas são chamados de estimadores.

De acordo com Polyak & Teboulle (1997) uma função de rescalamento não linear é uma função ψ , de classe C^2 , definida sobre um intervalo $(a, +\infty)$ e satisfazendo $(-\infty) \leq a < 0$, $\psi(a) = -\infty$ e $\psi'(a) = +\infty$. Além disso, a função de rescalamento não linear deve atender as seguintes propriedades:

- $\psi(0) = 0$ e $\psi'(0) = 1$;
- $\psi'(t) > 0$, ou seja, a função ψ é estritamente crescente;
- $\psi''(t) < 0$, ou seja, ψ é uma função côncava;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi'(t) = 0$.

Devido às propriedades de ψ o problema (4.10) pode ser reescrito pelo problema a seguir, considerando o parâmetro $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a: } -\mu\psi(\mu^{-1}h_j(x)) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (4.11)$$

A transformação feita acima não altera o conjunto de soluções ótimas e torna possível uma relaxação da região factível do problema original, uma vez que sendo a função ψ definida em $(a, +\infty)$, os valores de x podem ser tais que $\mu^{-1}h_j(x) > a$ se, e somente se, $h_j(x) > a\mu$ e como $a < 0$, implica em $a\mu < 0$.

A região relaxada pode ser vista como a união da região original e uma região adicional, a qual é dependente do parâmetro μ . A medida que $\mu \rightarrow 0$, a região relaxada tende à região original.

A função Lagrangiana associada ao problema transformado 4.11 é formulada a seguir:

$$L_\mu(x, \delta) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \psi(\mu^{-1}h_j(x)) \quad (4.12)$$

em que:

$$\begin{aligned} L_\mu & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^p \rightarrow \mathbb{R}; \\ \delta_j, j = 1, \dots, p & \text{ são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade transformadas.} \end{aligned}$$

Para a resolução do problema transformado pelo método de rescalamento não-linear, as ideias utilizadas nos métodos dual-Lagrangiano e barreira são aplicadas. Se a convergência não for obtida, os estimadores dos multiplicadores de Lagrange e o parâmetro de barreira devem ser atualizados e o processo é repetido.

4.1.3.1 Atualização dos Estimadores dos Multiplicadores de Lagrange

Levando em consideração a função (4.12), aplicando as condições de otimalidade e assumindo que uma nova solução $x^{(k+1)}$ foi determinada, tem-se que:

$$\nabla_x L_\mu(x^{k+1}, \delta^k) = \nabla f(x^{k+1}) - \mu^k \sum_{j=1}^p \delta_j^k \psi'((\mu^k)^{-1}h_j(x^{k+1})) (\mu^k)^{-1} \nabla h_j(x^{k+1}) = 0$$

$$\text{se, e somente se, } \nabla f(x^{k+1}) - \sum_{j=1}^p \delta_j^k \psi'((\mu^k)^{-1}h_j(x^{k+1})) \nabla h_j(x^{k+1}) = 0$$

Segundo Polyak & Teboulle (1997), o estimador do multiplicador de Lagrange pode ser atualizado por:

$$\delta_j^{k+1} = \delta_j^k \psi'((\mu^k)^{-1}h_j(x^{k+1})), \quad j = 1, \dots, p \quad (4.13)$$

No presente trabalho, a função utilizada é a função barreira logarítmica modificada, também usada no trabalho de Pinheiro (2012) e definida em (4.14):

$$\psi(t) = \ln(t + 1), \quad t \in (-1, \infty) \quad (4.14)$$

4.1.4 Barreira Logarítmica Modificada

O método de barreira logarítmica modificada é definido quando a função de rescalamento é da forma expressa por (4.14) e a função Lagrangiana do problema transformado é denominada *função barreira modificada* e é definida de acordo com 4.15:

$$M_\mu(x, \delta) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \ln(\mu^{-1} h_j(x) + 1) \quad (4.15)$$

em que, $\delta_j, j = 1, \dots, p$ são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade ou estimadores dos multiplicadores de Lagrange.

Se os valores ótimos x^* e δ^* forem conhecidos, a função M_μ assume as seguintes propriedades:

- $M_\mu(x^*, \delta^*) = f(x^*)$, para todo $\mu > 0$;
- $\nabla_x M_\mu(x^*, \delta^*) = \nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^p \delta_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$, para todo $\mu > 0$.

Polyak mostrou que o método converge se os estimadores dos multiplicadores de Lagrange iniciais forem positivos e os parâmetros de barreira estiverem abaixo de um limitante $\bar{\mu}$. Porém, não é possível saber se a escolha do parâmetro está ou não abaixo de $\bar{\mu}$ em problemas práticos. Além disso, se o problema for convexo, vale a propriedade:

- $x^* = \arg \min\{M_\mu(x, \delta^*)\}$, para todo $\mu > 0$.

Se os multiplicadores de Lagrange ótimos forem previamente conhecidos, é possível a resolução do problema de otimização restrito com a utilização de um único problema de otimização irrestrito que não é dependente do parâmetro de barreira. Logo, quando é conhecida uma boa estimativa para os multiplicadores de Lagrange, o parâmetro de barreira μ não precisa tender a zero de uma maneira tão rápida como nos métodos de barreira clássicos, o que gera melhoria considerável tanto no condicionamento da matriz hessiana quanto na estabilidade numérica do método.

Neste método, a atualização dos multiplicadores de Lagrange é feita por (4.16)

$$\delta_j^{k+1} = \frac{\delta_j^k}{(\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1}) + 1} \quad (4.16)$$

Neste trabalho adotou-se a proposta de atualização dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange apresentada por Pinheiro (2012), uma vez que esta apresenta vantagens em relação ao seu uso. Como por exemplo, ser menos custoso do ponto de vista computacional, já que as componentes δ^{k+1} recebem o valor das respectivas componentes v^{k+1} . Os algoritmos dos métodos apresentados nesta seção podem ser vistos em Silva (2014).

4.2 Metodologia de Solução

Nesta seção será apresentado o método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores, com estratégia de rescalamento não linear baseado na função barreira logarítmica modificada. Tal método, em conjunto com a técnica de suavização arco tangente, vista na Seção 3.2, a estratégia de correção de inércia e as estratégias de resolução de problemas multiobjetivo, vistas na Seção 2.5, serão aplicados para resolução do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental.

Uma breve abordagem sobre os métodos de pontos interiores e exteriores pode ser vista em Gonçalves (2015).

4.3 O método Primal-Dual Previsor-Corretor Barreira Logarítmica Modificada (PDPCBLM)

Nesta seção é apresentado o método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores, que utiliza a técnica de barreira logarítmica modificada, com base nos trabalhos de Polyak (1992), Griva & Polyak (2006), Sousa (2006) e Pinheiro (2012).

O método proposto será aplicado à resolução do problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental, definido em 2.4, juntamente com as técnicas: suavização arco-tangente e de restrições canalizadas progressivas. As principais ideias aqui apresentadas, bem como a elaboração do algoritmo, são baseadas no trabalho de Silva (2014).

Ao contrário do que foi apresentado nos trabalhos de Wu et al. (1994) e Torres (1998), nos quais o parâmetro de barreira foi empregado apenas no passo corretor, neste trabalho de acordo com Silva (2014), o parâmetro de barreira é utilizado tanto no passo previsor quanto no corretor. Além disso, é apresentada uma estratégia de convergência, por meio de correção da inércia da matriz do sistema de direções do método, e os estimadores dos multiplicadores de Lagrange foram atualizados de acordo com Pinheiro (2012). As restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade pelo acréscimo de variáveis de folga e então obtém-se o problema transformado associando as restrições de não-negatividade, com o auxílio da função de rescalamento baseada na barreira logarítmica modificada e de estimadores dos multiplicadores de Lagrange, que são atualizados pela regra apresentada por Pinheiro (2012).

Considerando o problema de otimização não-linear definido em (4.1) e transformando as restrições de desigualdade em restrições de igualdade pelo acréscimo de variáveis de folga, o problema pode ser reescrito por (4.17):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) \\ \text{Sujeito a:} \quad & g(x) = 0 \\ & h(x) + s = 0 \\ & s \geq 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

As restrições de não-negatividade são incorporadas à função objetivo por meio da função de reescalamiento baseada na barreira logarítmica modificada e de estimadores dos multiplicadores de Lagrange. O problema transformado é definido por (4.18):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \ln(\mu^{-1} s_j + 1) \\ \text{Sujeito a:} \quad & g(x) = 0 \\ & h(x) + s = 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

em que $\mu > 0$ é o parâmetro de barreira e $\delta \in \mathbb{R}_+^p$ é o vetor de estimadores dos multiplicadores de Lagrange relativos às restrições de não-negatividade das folgas.

As restrições de igualdade são incorporadas à função objetivo através dos multiplicadores de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\nu \in \mathbb{R}_+^p$. Desta forma, obtém-se a seguinte função Lagrangiana barreira logarítmica modificada:

$$L_\mu(x, s, \lambda, \nu) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \ln(\mu^{-1} s_j + 1) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \nu_j [h_j(x) + s_j]. \tag{4.19}$$

As condições necessárias de otimalidade de primeira ordem de KKT são aplicadas sobre a função Lagrangiana (4.19), e o seguinte sistema não-linear é obtido:

$$\nabla_x L_\mu(x, s, \lambda, \nu) = \nabla f(x) + Jg(x)^t \lambda + Jh(x)^t \nu = 0 \tag{4.20a}$$

$$\nabla_s L_\mu(x, s, \lambda, \nu) = -\mu \bar{S}^{-1} \delta + \nu = 0 \tag{4.20b}$$

$$\nabla_\lambda L_\mu(x, s, \lambda, \nu) = g(x) = 0 \tag{4.20c}$$

$$\nabla_\nu L_\mu(x, s, \lambda, \nu) = h(x) + s = 0 \tag{4.20d}$$

em que $Jg(x)$ e $Jh(x)$ são as matrizes jacobianas de g e h , respectivamente e \bar{S} é definido por:

$$\bar{S} = \text{diag}(s_1 + \mu, \dots, s_m + \mu) \quad (4.21)$$

$$\bar{S}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{s_1 + \mu}, \dots, \frac{1}{s_m + \mu}\right) \quad (4.22)$$

De acordo com Pinheiro (2012) o sistema definido em (4.20) usualmente é reescrito como:

$$\nabla f(x) + Jg(x)^t \lambda + Jh(x)^t \nu = 0 \quad (4.23a)$$

$$\bar{S}\nu - \mu\delta = 0 \quad (4.23b)$$

$$g(x) = 0 \quad (4.23c)$$

$$h(x) + s = 0 \quad (4.23d)$$

O método PDPCBLM é um método iterativo, que gera uma sequência de variáveis primais e duais a partir de um ponto inicial até que encontre a solução ótima. Em uma iteração k , uma solução $(x^k, s^k, \lambda^k, \nu^k)$ é obtida e, a partir desta, é calculada uma direção de busca, $(\Delta x^k, \Delta s^k, \Delta \lambda^k, \Delta \nu^k)$. Após o cálculo do tamanho do passo, um novo ponto é encontrado $(x^{k+1}, s^{k+1}, \lambda^{k+1}, \nu^{k+1})$. Para determinar as direções, o sistema (4.23) deve ser linearizado. Tal linearização é feita através da fórmula de Taylor de primeira ordem.

4.3.1 Linearização das Equações

Para a linearização, considera-se o novo ponto como:

$$(x^{k+1}, s^{k+1}, \lambda^{k+1}, \nu^{k+1}) = (x^k + \Delta x^k, s^k + \Delta s^k, \lambda^k + \Delta \lambda^k, \nu^k + \Delta \nu^k).$$

A equação (4.23a) pode ser reescrita como:

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^p \nu_j \nabla h_j(x) = 0. \quad (4.24)$$

Aplicando a fórmula de Taylor de primeira ordem na vizinhança de x^k e desconsiderando o resto:

$$\begin{aligned}
& \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k) \Delta x^k \\
& + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x^k) \Delta x^k + \sum_{i=1}^m \Delta \lambda_i^k \nabla g_i(x^k) + \sum_{i=1}^m \Delta \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x^k) \Delta x^k \\
& + \sum_{j=1}^p \nu_j^k \nabla h_j(x^k) + \sum_{j=1}^p \nu_j^k \nabla^2 h_j(x^k) \Delta x^k + \sum_{j=1}^p \Delta \nu_j^k \nabla h_j(x^k) + \sum_{j=1}^p \Delta \nu_j^k \nabla^2 h_j(x^k) \Delta x^k \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Desconsiderando os termos mistos que envolvem produtos de direções, em seguida agrupando os termos relacionados às direções e passado para o segundo membro os que não dependem das direções:

$$\begin{aligned}
& \left[\nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x^k) + \sum_{j=1}^p \nu_j^k \nabla^2 h_j(x^k) \right] \Delta x^k + \sum_{i=1}^m \Delta \lambda_i^k \nabla g_i(x^k) \\
& + \sum_{j=1}^p \Delta \nu_j^k \nabla h_j(x^k) = -\nabla f(x^k) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(x^k) - \sum_{j=1}^p \nu_j^k \nabla h_j(x^k).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Observando que $\nabla_{xx}^2 L(x^k, s^k, \lambda^k, \nu^k) = \nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x^k) + \sum_{j=1}^p \nu_j^k \nabla^2 h_j(x^k)$, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\nabla_{xx}^2 L(x^k, s^k, \lambda^k, \nu^k) \Delta x^k + Jg(x^k)^t \Delta \lambda^k + Jh(x^k)^t \Delta \nu^k = m^k, \tag{4.27}$$

em que:

$$m^k = -\nabla f(x^k) - Jg(x^k)^t \lambda^k - Jh(x^k)^t \nu^k. \tag{4.28}$$

Segundo Pinheiro (2012), o termo m^k é denominado *resíduo de viabilidade dual*.

Para realizar a linearização da equação 4.23b, considera-se uma linha j da equação $\bar{S}\nu - \mu\delta = 0$, a qual assume a forma:

$$(s_j + \mu)\nu_j - \mu\delta_j = 0. \tag{4.29}$$

A expressão (4.29) pode ser reescrita como:

$$(s_j^k + \mu)\nu_j^k + (s_j^k + \mu)\Delta\nu_j^k + \nu_j^k\Delta s_j^k + \Delta s_j^k\Delta\nu_j^k - \mu\delta_j^k = 0. \tag{4.30}$$

Tendo em vista a igualdade 4.30, a linearização para todas as equações em 4.23b

pode ser representada por:

$$\bar{S}_k \nu^k + \bar{S}_k \Delta \nu^k + N^k \Delta s^k + \Delta s^k \circ \Delta \nu^k - \mu \delta^k = 0, \quad (4.31)$$

em que $N^k = \text{diag}(\nu^k)$ e $\Delta s^k \circ \Delta \nu^k$ é denominado produto de Hadamard, isto é, o produto componente-a-componente, entre os vetores Δs^k e $\Delta \nu^k$, a igualdade em 4.31 pode ser escrita como:

$$N^k \Delta s^k + \bar{S}_k \Delta \nu^k = \pi^k, \quad (4.32)$$

em que

$$\pi^k = -\bar{S}_k \nu^k + \mu \delta^k - \Delta s^k \circ \Delta \nu^k. \quad (4.33)$$

A linearização da equação 4.23c é feita considerando-se que:

$$g(x^{k+1}) = 0, \text{ ou seja, } g(x^k + \Delta x^k) = 0.$$

Disto, segue que:

$$g(x^k) + Jg(x^k) \Delta x^k = 0. \quad (4.34)$$

A igualdade expressa por (4.34) pode ser reescrita como:

$$Jg(x^k) \Delta x^k = t^k, \quad (4.35)$$

em que

$$t^k = -g(x^k). \quad (4.36)$$

Como feito anteriormente, a equação 4.23d é linearizada da seguinte maneira:

$$h(x^{k+1}) + s^{k+1} = 0, \text{ ou seja, } h(x^k + \Delta x^k) + s^k + \Delta s^k = 0.$$

Assim,

$$h(x^k) + Jh(x^k) \Delta x^k + s^k + \Delta s^k = 0. \quad (4.37)$$

A igualdade pode ser reescrita como:

$$Jh(x^k) \Delta x^k + \Delta s^k = u^k, \quad (4.38)$$

em que

$$u^k = -h(x^k) - s^k. \quad (4.39)$$

4.3.2 Sistema de Direções

Tendo em vista as equações apresentadas em 4.27, 4.32, 4.35 e 4.38, as direções de busca podem ser determinadas pela resolução do sistema 4.40 e efetuando a premultiplicação da segunda linha por \bar{S}_k^{-1} :

$$\begin{pmatrix} K & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \bar{S}_k^{-1}N^k & 0 & I_p \\ Jg(x^k) & 0 & 0 & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta s^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta \nu^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \bar{S}_k^{-1}\pi^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

em que I_p é a matriz identidade de ordem p e $K = \nabla_{xx}^2 L(x^k, s^k, \lambda^k, \nu^k)$.

4.3.3 Correção de Inércia

Em problema de otimização não-convexo, as direções apresentadas em 4.40 nem sempre são eficientes para o cálculo de mínimos locais. Isso ocorre, pois ao resolver o sistema buscam-se pontos que satisfaçam as condições de KKT. Sendo assim, podem aparecer não somente pontos de mínimo local, mas também pontos de máximo e pontos estacionários.

De acordo com Silva (2014), em problemas com restrições de igualdade, um ponto de mínimo local é encontrado quando a matriz hessiana da função Lagrangiana no ponto ótimo é definida positiva no espaço tangente das restrições. O mesmo ocorre quando existem restrições de desigualdade, em que a matriz é definida positiva no cone de direções viáveis. A inércia de uma matriz é definida como:

Definição: A *inércia* de uma matriz simétrica A é a tripla ordenada $\mathcal{I}(A) = (i_+, i_-, i_0)$, em que i_+ é o número de autovalores positivos de A , i_- é o número de autovalores negativos, e i_0 é o número de autovalores nulos.

Quando a inércia de uma matriz precisa ser determinada, o teorema a seguir é de grande valia.

Teorema. Teorema da Inércia de Sylvester Seja A uma matriz simétrica e S uma matriz não singular qualquer de mesma dimensão. Então, $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(SAS^t)$.

Corolário Qualquer permutação simétrica de linhas e colunas preserva a inércia de uma matriz.

De acordo com Nocedal & Wright (2006), uma direção de descida para o sistema apresentado em (4.40) é obtida se a matriz (4.41)

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

em que $\Sigma = \bar{S}_k^{-1}N^k$, for definida positiva no núcleo da matriz das restrições (4.42).

$$\begin{pmatrix} Jg(x^k) & 0 \\ Jh(x^k) & I_p \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Tal condição ocorre quando a matriz (4.43)

$$A_k = \begin{pmatrix} K & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \Sigma & 0 & I_p \\ Jg(x^k) & 0 & 0 & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

do sistema primal-dual (4.40) possui inércia

$$\mathcal{I}(A_k) = (n + p, m + p, 0). \quad (4.44)$$

em que $n + p$ é o número de autovalores positivos relacionados às variáveis primais e ao problema de minimização, $m + p$ é o número de autovalores negativos, relacionados às variáveis duais e ao problema de maximização.

Conforme Nocedal & Wright (2006), se a matriz A_k não possuir a inércia desejada, então uma modificação na matriz deve ser realizada, a fim de obter direções de descida para a resolução do sistema. A estratégia utilizada no presente trabalho é baseada no trabalho de Silva (2014).

A modificação feita para corrigir a inércia da A_k é com base em Nocedal & Wright (2006). A matriz $\Sigma = \bar{S}_k^{-1}N^k$ é sempre definida positiva, já para a matriz $K = \nabla_{xx}^2 L(x^k, s^k, \lambda^k, \nu^k)$ não há a mesma garantia. A ideia é substituir a matriz K por $K + \beta I_n$, onde $\beta > 0$ não é conhecido inicialmente, e os valores a ele atribuído devem ser grandes o suficiente para assegurar a inércia de A_k .

Pode acontecer de a matriz A_k se tornar singular por conta da deficiência de posto da matriz $Jg(x^k)$. Tal dificuldade pode ser evitada com a utilização do parâmetro $\gamma \geq 0$. Assim, tem-se a matriz primal-dual modificada:

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \Sigma & 0 & I_p \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

O sinal “-” utilizado para perturbação $-\gamma I_m$, além de evitar a singularidade pela deficiência de posto de $Jg(x^k)$, também evita que um número excessivo de autovalores positivos sejam produzidos, o que prejudicaria a obtenção da inércia desejada Silva (2014).

Uma matriz é definida positiva se, e somente se, é possível fazer sua decomposição de Cholesky. Neste trabalho, o objetivo é que a matriz A_k seja indefinida e com um

número específico de autovalores positivos e negativos. No geral, uma matriz simétrica é indefinida quando não possui decomposição de Cholesky. Ainda que a decomposição seja possível, ela apresenta instabilidades numéricas e é necessária a utilização de outros métodos para calcular a inércia.

A decomposição em valores singulares *SVD* permite a obtenção dos valores exatos de autovalores, porém do ponto de vista computacional é uma estratégia cara. Quando é preciso fatorar matrizes simétricas indefinidas, a decomposição do tipo LDL^t é uma alternativa viável. Nocedal & Wright (2006) apontam que qualquer matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, definida positiva ou não, pode ser escrita da forma:

$$PAP^t = LDL^t \quad (4.46)$$

em que L é uma matriz triangular inferior, D é uma matriz diagonal por blocos, com blocos diagonais de dimensão 1×1 ou 2×2 , e P é uma matriz de permutação. Diferente da decomposição de Cholesky, a decomposição do tipo LDL^t garante que a fatoração 4.46 sempre existe e pode ser computada de forma estável.

A inércia da matriz A deve ser igual à da matriz diagonal por blocos D . Além disso, os blocos 2×2 da matriz D são sempre construídos de modo que possuam um autovalor positivo e um autovalor negativo. Assim, o número de autovalores positivos da matriz A é igual ao número de blocos positivos 1×1 acrescido do número de blocos 2×2 . Por outro lado, o número de autovalores negativos é igual ao número de blocos negativos 1×1 acrescido do número de blocos 2×2 , Silva (2014).

No presente trabalho, foi utilizado o comando do Matlab, denominado `ldl`, para realizar a fatoração LDL^t de uma matriz simétrica.

Depois que a inércia da matriz A_k foi calculada, é necessária uma estratégia para a correção da inércia, através da matriz modificada \tilde{A}_k .

A atualização do parâmetro β utilizado em 4.45 é feita de acordo com 4.47

$$\beta^{k+1} = \kappa_1 \beta^k, \quad (4.47)$$

em que $\kappa_1 > 1$ é o fator de aumento.

Quando a inércia é obtida, o parâmetro β é reduzido por $\kappa_2 > 1$ para a iteração seguinte. Quanto ao parâmetro γ de \tilde{A}_k , o valor utilizado neste trabalho é de $\gamma = 10^{-6}$. O comando `cond` do Matlab foi utilizado e o termo γ acrescentado quando o número do condicionamento foi superior a 10^6 , sempre que a matriz se mostrava próxima da singularidade.

O algoritmo utilizado no presente trabalho para a correção de inércia é baseado em Silva (2014).

4.3.4 Cálculo das Direções

Consideremos o problema primal-dual modificado apresentado a seguir:

$$\begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & N^k & 0 & \bar{S}_k \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta s^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta \nu^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \pi^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Com base no trabalho de Mehrotra (1992), são definidos os procedimentos previsor e corretor do método PDPCLM.

4.3.4.1 Procedimento Previsor

No passo previsor, utiliza-se o seguinte resíduo:

$$\tilde{\pi}^k = -\bar{S}_k \nu^k + \mu \delta^k. \quad (4.49)$$

Normalmente no passo previsor, considera-se $\mu = 0$, o qual é estimado de maneira adaptativa para o passo corretor.

No trabalho de Pinheiro (2012), o parâmetro de barreira foi considerado no passo previsor, pois influencia nas condições de complementaridade, logo não é interessante desprezá-lo no passo previsor.

O sistema a ser resolvido é definido por:

$$\begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & N^k & 0 & \bar{S}_k \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} x^k \\ \tilde{\Delta} s^k \\ \tilde{\Delta} \lambda^k \\ \tilde{\Delta} \nu^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \tilde{\pi}^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

A resolução do sistema 4.50 permite a obtenção das direções $\tilde{\Delta} x^k$, $\tilde{\Delta} s^k$, $\tilde{\Delta} \lambda^k$ e $\tilde{\Delta} \nu^k$. A partir das linhas do sistema, tem-se na última linha:

$$Jh(x^k) \tilde{\Delta} x^k + \tilde{\Delta} s^k = u^k, \quad (4.51)$$

ou seja,

$$\tilde{\Delta} s^k = u^k - Jh(x^k) \tilde{\Delta} x^k. \quad (4.52)$$

A segunda linha do sistema 4.50 permite a obtenção de $\tilde{\Delta} \nu^k$:

$$N^k \tilde{\Delta} s^k + \bar{S}_k \tilde{\Delta} \nu^k = \tilde{\pi}^k, \quad (4.53)$$

e, portanto,

$$\tilde{\Delta} \nu^k = \bar{S}_k^{-1} (\tilde{\pi}^k - N^k \tilde{\Delta} s^k). \quad (4.54)$$

Considerando a primeira linha de 4.50 é possível calcular as direções restantes, $\tilde{\Delta}x^k$ e $\tilde{\Delta}\lambda^k$:

$$(K + \beta I_n)\tilde{\Delta}x^k + Jg(x^k)^t\tilde{\Delta}\lambda^k + Jh(x^k)^t\tilde{\Delta}\nu^k = m^k. \quad (4.55)$$

Na equação (4.55), substitui-se $\tilde{\Delta}\nu^k$, obtida em (4.54) e, em seguida, substitui-se $\tilde{\Delta}s^k$, obtida em (4.52). Assim, temos:

$$(K + \beta I_n)\tilde{\Delta}x^k + Jg(x^k)^t\tilde{\Delta}\lambda^k + Jh(x^k)^t\bar{S}_k^{-1}[\tilde{\pi}^k - N^k(u^k - Jh(x^k)\tilde{\Delta}x^k)] = m^k, \quad (4.56)$$

agrupando os termos semelhantes:

$$\begin{aligned} [K + \beta I_n + Jh(x^k)^t\bar{S}_k^{-1}N^kJh(x^k)]\tilde{\Delta}x^k + Jg(x^k)^t\tilde{\Delta}\lambda^k \\ + Jh(x^k)^t\bar{S}_k^{-1}(\tilde{\pi}^k - N^ku^k) = m^k. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Define-se

$$\theta_k = K + \beta I_n + Jh(x^k)^t\bar{S}_k^{-1}N^kJh(x^k) \quad (4.58)$$

e

$$\tilde{p}^k = Jh(x^k)^t\bar{S}_k^{-1}(\tilde{\pi}^k - N^ku^k). \quad (4.59)$$

assim, a equação (4.57), pode ser reescrita como:

$$\theta_k\tilde{\Delta}x^k + Jg(x^k)^t\tilde{\Delta}\lambda^k = m^k - \tilde{p}^k. \quad (4.60)$$

Juntando a terceira equação do sistema (4.50) e a equação (4.60), tem-se o seguinte sistema, chamado de *sistema reduzido*:

$$\begin{pmatrix} \theta_k & Jg(x^k)^t \\ Jg(x^k) & -\gamma I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}x^k \\ \tilde{\Delta}\lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k - \tilde{p}^k \\ t^k \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

De 4.61, pode-se obter:

$$Jg(x^k)\tilde{\Delta}x^k = \gamma\tilde{\Delta}\lambda^k + t^k. \quad (4.62)$$

Da igualdade 4.60:

$$Jg(x^k)^t\tilde{\Delta}\lambda^k = m^k - \tilde{p}^k - \theta_k\tilde{\Delta}x^k. \quad (4.63)$$

Multiplicando à esquerda pela matriz θ_k^{-1} , tem-se:

$$\theta_k^{-1} Jg(x^k)^t \tilde{\Delta} \lambda^k = \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - \tilde{\Delta} x^k. \quad (4.64)$$

Multiplicando 4.64 à esquerda por $Jg(x^k)$, resulta em:

$$Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^t \tilde{\Delta} \lambda^k = Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - Jg(x^k) \tilde{\Delta} x^k. \quad (4.65)$$

Substituindo 4.62 em 4.65:

$$Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^t \tilde{\Delta} \lambda^k = Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - (\gamma \tilde{\Delta} \lambda^k + t^k). \quad (4.66)$$

$$\tilde{\Delta} \lambda^k = [Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^t + \gamma I_m]^{-1} [Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - t^k]. \quad (4.67)$$

Com isto, é possível calcular $\tilde{\Delta} x^k$:

$$\tilde{\Delta} x^k = \theta_k^{-1} [m^k - \tilde{p}^k - Jg(x^k)^t \tilde{\Delta} \lambda^k]. \quad (4.68)$$

4.3.4.2 Procedimento Corretor

Com as direções do passo previsor é possível efetuar o cálculo das direções do passo corretor, de maneira a considerar os termos de segunda ordem dos resíduos de complementaridade:

$$\pi^k = -\bar{S}_k \nu^k + \mu \delta^k - \tilde{\Delta} s^k \circ \tilde{\Delta} \nu^k. \quad (4.69)$$

Assim, o sistema a ser resolvido é:

$$\begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & N^k & 0 & \bar{S}_k \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta s^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta \nu^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \pi^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

Da mesma forma que no passo previsor, as direções corrigidas são determinadas de acordo com:

$$\Delta \lambda^k = [Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^t + \gamma I_m]^{-1} [Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - p^k) - t^k] \quad (4.71)$$

$$\Delta x^k = \theta_k^{-1} [m^k - p^k - Jg(x^k)^t \Delta \lambda^k] \quad (4.72)$$

$$\Delta s^k = u^k - Jh(x^k) \Delta x^k \quad (4.73)$$

$$\Delta \nu^k = \bar{S}_k^{-1} (\pi^k - N^k \Delta s^k) \quad (4.74)$$

em que

$$p^k = Jh(x^k)^t \bar{S}_k^{-1} (\pi^k - N^k u^k). \quad (4.75)$$

4.3.5 Atualização do Parâmetro de Barreira

O parâmetro de barreira é atualizado da seguinte forma:

$$\mu^{k+1} = \tau_1 \mu^k \quad (4.76)$$

em que:

$$\tau_1 \in (0, 1);$$

O valor inicial do parâmetro de barreira μ^0 , deve ser tal que a condição $s^0 > -\mu$ seja satisfeita, de modo que as folgas satisfaçam as condições de não-negatividade relaxada (ou seja, as folgas devem estar no interior da região relaxada).

Conforme apresentado em Stanzani (2012), τ_1 não deve ser muito pequeno para evitar o comportamento oscilatório do método, porém não deve ser muito grande, a fim de evitar a parada prematura do método em pontos que não sejam ótimos.

Após o cálculo das direções do passo previsor e do passo corretor, são calculadas duas soluções provisórias, uma para o previsor:

$$\begin{aligned} x_{\text{prev}}^+ &= x^k + \alpha_{P,\text{prev}}^k \tilde{\Delta} x^k \\ s_{\text{prev}}^+ &= s^k + \alpha_{P,\text{prev}}^k \tilde{\Delta} s^k \\ \lambda_{\text{prev}}^+ &= \lambda^k + \alpha_{D,\text{prev}}^k \tilde{\Delta} \lambda^k \\ \nu_{\text{prev}}^+ &= \nu^k + \alpha_{D,\text{prev}}^k \tilde{\Delta} \nu^k \end{aligned} \quad (4.77)$$

e outra para o corretor:

$$\begin{aligned} x_{\text{cor}}^+ &= x^k + \alpha_{P,\text{cor}}^k \Delta x^k \\ s_{\text{cor}}^+ &= s^k + \alpha_{P,\text{cor}}^k \Delta s^k \\ \lambda_{\text{cor}}^+ &= \lambda^k + \alpha_{D,\text{cor}}^k \Delta \lambda^k \\ \nu_{\text{cor}}^+ &= \nu^k + \alpha_{D,\text{cor}}^k \Delta \nu^k \end{aligned} \quad (4.78)$$

Os escalares $\alpha_{P,\text{prev}}$ e $\alpha_{D,\text{prev}}$ são denominados passos primal e dual, respectivamente, para o procedimento previsor e $\alpha_{P,\text{cor}}$ e $\alpha_{D,\text{cor}}$ são denominados passos primal e dual, respectivamente, para o procedimento corretor.

Os passos são determinados a partir das condições de fronteira da região factível, para as variáveis duais é fácil de ser feito, mas deve ser realizado de maneira criteriosa para as variáveis primais, pois quando se utiliza a função barreira logarítmica modificada, as condições de fronteira das variáveis de folga, s , variam a cada iteração, juntamente com o parâmetro de barreira.

4.3.6 Novo Ponto e Comprimento do Passo

Para a determinação de um novo ponto, para cada coordenada $j = 1, \dots, p$, deve-se ter:

$$s_j^{k+1} > -\mu^{k+1}, \quad (4.79)$$

isto é,

$$s_j^k + \alpha_P^k \Delta s_j^k > -\tau_1 \mu^k, \quad (4.80)$$

então:

$$\alpha_P^k \Delta s_j^k > -(s_j^k + \tau_1 \mu^k). \quad (4.81)$$

Como $s_j^k + \tau_1 \mu^k > 0$, a desigualdade é trivialmente verdadeira quando $\Delta s_j^k \geq 0$. Assim, o passo somente é calculado quando $\Delta s_j^k < 0$. Neste caso, deve-se ter:

$$\alpha_P^k < -\frac{s_j^k + \tau_1 \mu^k}{\Delta s_j^k}. \quad (4.82)$$

Com o objetivo de garantir que a fronteira da região relaxada não seja atingida, é utilizado um parâmetro $\sigma \in (0, 1)$. Desse modo, o passo primal para o previsor e o corretor, respectivamente, é calculado por:

$$\alpha_{P,\text{prev}}^k = \sigma \min \left\{ 1, -\frac{(s_j^k + \tau_1 \mu^k)}{\tilde{\Delta} s_j^k} : \tilde{\Delta} s_j^k < 0 \right\}, \quad (4.83)$$

$$\alpha_{P,\text{cor}}^k = \sigma \min \left\{ 1, -\frac{(s_j^k + \tau_1 \mu^k)}{\Delta s_j^k} : \Delta s_j^k < 0 \right\}. \quad (4.84)$$

Já o passo dual para o previsor e o corretor é calculado, respectivamente, por:

$$\alpha_{D,\text{prev}}^k = \sigma \min \left\{ 1, -\frac{\nu_j^k}{\tilde{\Delta} \nu_j^k} : \tilde{\Delta} \nu_j^k < 0 \right\}, \quad (4.85)$$

$$\alpha_{D,\text{cor}}^k = \sigma \min \left\{ 1, -\frac{\nu_j^k}{\Delta \nu_j^k} : \Delta \nu_j^k < 0 \right\}. \quad (4.86)$$

Se para algum j $s_j^k + \tau_1 \mu^k \leq 0$, alguns problemas podem acontecer. Ao atualizar o parâmetro de barreira a solução atual deixaria de ser interior à região factível relaxada. Com isso dois problemas podem ocorrer:

1. o comprimento do passo estaria limitado por uma outra variável, impedindo que o novo ponto obtido se tornasse factível para o interior da nova região relaxada;
2. a direção gerada possui a j -ésima componente negativa, o que implica que nenhum

passo dado permitira que 4.81 acontecesse.

Neste trabalho, adotou-se a estratégia empregada por Silva (2014) e apresentada por Pinheiro (2012) de realizar uma nova relaxação da região factível, se $s_j^{k+1} \leq -\tau_1 \mu^k$ ocorrer para algum $j = 1, \dots, p$. Neste caso, o parâmetro de barreira é atualizado por:

$$\mu^{k+1} = -(1 + \tau_2) \min_{j=1, \dots, p} \{s_j^{k+1}\}. \quad (4.87)$$

em que:

$\tau_2 > 0$ é um parâmetro.

O novo ponto é determinado com base nos valores provisórios obtidos para as direções do procedimento previsor e do corretor, de acordo com o seguinte critério, em que $\chi > 0$ é o parâmetro que controla a escolha entre os passos previsor ou corretor, com base no valor de complementaridade:

- se $(s_{\text{prev}}^+)^t \nu_{\text{prev}}^+ < \chi (s_{\text{cor}}^+)^t \nu_{\text{cor}}^+$, então:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x_{\text{prev}}^+ \\ s^{k+1} &= s_{\text{prev}}^+ \\ \lambda^{k+1} &= \lambda_{\text{prev}}^+ \\ \nu^{k+1} &= \nu_{\text{prev}}^+ \end{aligned} \quad (4.88)$$

- caso contrário:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x_{\text{cor}}^+ \\ s^{k+1} &= s_{\text{cor}}^+ \\ \lambda^{k+1} &= \lambda_{\text{cor}}^+ \\ \nu^{k+1} &= \nu_{\text{cor}}^+ \end{aligned} \quad (4.89)$$

4.3.7 Critério de Parada

O método PCPDBLM não determina a solução exata para um problema de otimização não-linear, logo é necessário que um critério de parada seja estabelecido. Neste trabalho o critério de parada adotado é o mesmo de Silva (2014) e se baseia no trabalho de Pinheiro (2012), em que uma boa solução é obtida quando os resíduos são suficientemente pequenos.

Assim, dada uma precisão $\varepsilon > 0$, o critério de parada é definido por:

- Factibilidade Primal:

$$\|t^k\|_\infty \leq \varepsilon \text{ e } \|u^k\|_\infty \leq \varepsilon. \quad (4.90)$$

- Factibilidade Dual:

$$\|m^k\|_\infty \leq \varepsilon. \quad (4.91)$$

- Folgas Complementares:

$$\|\pi^k\|_\infty \leq \varepsilon. \quad (4.92)$$

Estas três condições são equivalentes a dizer que:

$$\|\nabla L(x^k, s^k, \lambda^k, \nu^k)\|_\infty \leq \varepsilon. \quad (4.93)$$

4.4 Algoritmo do Método PDPCBLM

O método PDPCBLM utilizado no presente trabalho é apresentado no algoritmo a seguir e é baseado no trabalho de Pinheiro (2012).

Passo 1: Inicialização: Parâmetro de barreira inicial $\mu^0 > 0$, fator de redução $\tau \in (0, 1)$, dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange $\delta^0 > \mathbf{0}$ e do parâmetro de proximidade $\eta^0 < 0, 1$;

Passo 2: Inicialize a variável primal, x^0 , bem como as variáveis para a correção de inércia Faça $k \leftarrow 0$;

Passo 3: Considere a função aproximada pelo método de suavização arco-tangente:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_e)_i x_i^2 + (b_e)_i x_i + (c_e)_i + (d_e)_i \frac{2}{\pi} \text{sen}[(e_e)_i \cdot (x_i - x_i^{\min})] \text{arctg} \left\{ \frac{\text{sen}[(e_e)_i \cdot (x_i - x_i^{\min})]}{\eta} \right\}$$

Passo 4: Calcule: $f(x^k)$, $\nabla f(x^k)$, $g(x^k)$, $Jg(x^k)$, $h(x^k)$ e $Jh(x^k)$;

Passo 5: Calcule $s^0 \leftarrow -h(x^0)$ e monte as matrizes \bar{S}_k e \bar{S}_k^{-1} ;

Passo 6: Calcule $\nu^0 \leftarrow \mu^0 \bar{S}_k^{-1} \delta^0$ e $\lambda^0 \leftarrow -[Jg(x^0)Jg(x^0)^t]^{-1} Jg(x^0)[\nabla f(x^0) + Jh(x^0)^t \nu^0]$ e determine a matriz N^k ;

Passo 7: Construa matriz A_k e utilize a correção de inércia para determinar os parâmetros β e γ de modo que \tilde{A}_k tenha a inércia desejada;

Passo 8: Calcule os resíduos do predictor: m^k (4.28), $\tilde{\pi}^k$ (4.49), t^k (4.36) e u^k (4.39);

Passo 9: Calcule o vetor \tilde{p}^k e θ_k e as direções do procedimento predictor: $\tilde{\Delta}\lambda^k$ (4.67), $\tilde{\Delta}x^k$ (4.68), $\tilde{\Delta}s^k$ (4.52) e $\tilde{\Delta}\nu^k$ (4.54);

Passo 10: Calcule o resíduo π^k (4.69);

Passo 11: Enquanto $\|m^k\|_\infty > \varepsilon$ ou $\|\pi^k\|_\infty > \varepsilon$ ou $\|t^k\|_\infty > \varepsilon$ ou $\|u^k\|_\infty > \varepsilon$ faça:

Passo 12:

1. Calcule o vetor p^k (4.75) e as direções do procedimento corretor: $\Delta\lambda^k$ (4.71), Δx^k 4.72, Δs^k (4.73) e $\Delta\nu^k$ (4.74);

2. Calcule os passos primal, α_P^k e dual, α_D^k . Utilize $\sigma = 0,9995$;

3. Atualize a solução, obtendo x^{k+1} , s^{k+1} , λ^{k+1} e ν^{k+1} ;
4. Atualize o parâmetro de proximidade : se $\eta > 10^{-4}$ então $\eta^{k+1} = \gamma \cdot \eta^k$;
5. Atualize o parâmetro de barreira utilizando (4.76) e, caso exista algum $s_j^{k+1} \leq -\tau \mu^k$, utilize (4.87);
6. Atualize os estimadores dos multiplicadores de Lagrange: $\delta^{k+1} = \nu^{k+1}$;
7. Faça $k \leftarrow k + 1$;
8. Calcule: $f(x^k)$, $\nabla f(x^k)$, $g(x^k)$, $Jg(x^k)$, $h(x^k)$ e $Jh(x^k)$;
9. Monte as matrizes \bar{S}_k , \bar{S}_k^{-1} e N^k ;
10. Construa matriz A_k e utilize a Correção de Inércia para determinar os parâmetros β e γ de modo que \tilde{A}_k tenha a inércia desejada;
11. Calcule os resíduos do previsor: m^k (4.28), $\tilde{\pi}^k$ (4.49), t^k (4.36) e u^k (4.39) e o vetor \tilde{p}^k e θ_k ;
12. Calcule as direções do procedimento previsor: $\tilde{\Delta}\lambda^k$ (4.67), $\tilde{\Delta}x^k$ (4.68), $\tilde{\Delta}s^k$ (4.52) e $\tilde{\Delta}\nu^k$ (4.54) e o resíduo π^k (4.69);

Passo 13: Retorne a solução ótima dentro da precisão desejada: $x^* = x^k$, $s^* = s^k$, $\lambda^* = \lambda^k$ e $\nu^* = \nu^k$.

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos para diferentes casos testes, do PMDEA-PV descrito na seção 2.4, utilizando a metodologia RCP-PDPIEX-SAT.

O método foi implementado em linguagem Matlab 2011a e sua execução realizada em um computador com processador AMD FX(tm)-8150 Eight-Core, com 16GB de memória RAM e sistema operacional Windows 7 Home Premium.

O método proposto e implementado foi aplicado em problemas teste distintos, envolvendo sistemas com 3, 6, 10, 19 e 40 geradores, cujos dados são apresentados nas Tabelas 5.1, B.1, B.4, B.7 e B.10 respectivamente. O método PDPCBLM, definido na Seção 4.3, foi aplicado aos problemas teste variando seus parâmetros e ponto inicial, para cada uma das soluções eficientes obtidas. O fator de redução do parâmetro de barreira foi empregado satisfazendo $\tau_1 \in (0, 1)$. Já o fator utilizado pelo método da suavização arco tangente, é aplicado fazendo $\eta \rightarrow 0$.

Nas Seções 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 são apresentados os resultados, as curvas Pareto-ótimas e as considerações, para os casos de 3, 6, 10, 19 e 40 geradores, respectivamente.

As variáveis $(a)_i$, $(b)_i$ e $(c)_i$ são os coeficientes da função custo de geração, d_i e e_i são os valores utilizados para os pontos de carregamento de válvula e P_i^{inf} e P_i^{sup} são respectivamente os limites operacionais inferiores e superiores de saída de cada unidade geradora i . As variáveis $(A)_i$, $(B)_i$ e $(C)_i$ são os coeficientes da função emissão de poluentes.

A função objetivo custo de geração é calculada em unidade monetária (dólar por hora) e representado por $\$.h^{-1}$. Já a função objetivo emissão de poluentes é calculada em quantidade de emissão, para o caso de 3 e 6 geradores $kg.h^{-1}$, para os casos de 10, 19 e 40 geradores, $tons.h^{-1}$.

5.1 Caso 3 Geradores

Na Tabela 5.1 são apresentados os dados utilizados para a resolução do caso de 3 geradores, de Senthil & Manikandan (2010) e Gonçalves (2015):

Tabela 5.1: Dados 3 geradores.

Unidade geradora i	Função custo de geração ($\$.h^{-1}$)						Função emissão ($kg.h^{-1}$)					
	a_i	b_i	c_i	e_i	f_i	P_i^{inf}	P_i^{sup}	A_i	B_i	C_i		
1	0,001562	7,92	561	300	0,0315	100	600	0,0126	-1,355	22,983		
2	0,00482	7,97	78	150	0,063	50	200	0,01375	-1,249	137,37		
3	0,00194	7,85	310	200	0,042	100	400	0,00765	-0,805	363,704		
Demanda 850,00 MW												

Os parâmetros utilizados para a inicialização do método para o caso teste de 3 geradores são apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Inicialização PMDEA-PV: 3 geradores.

Limitante da atualização do parâmetro de suavização	$\bar{\eta} = 10^{-4}$
Parâmetro de barreira/relaxação inicial	$\mu^0 = 130$
Fatores de atualização do parâmetro de barreira	$\tau = 0.9$
Fator de controle da escolha entre passo previsor ou corretor	$\chi = 1$
Fator de redução do passo	$\sigma = 0.9995$
Precisão de parada	$\varepsilon = 10^{-6}$
x^0	$[350; 125; 250]^t$
Número médio de iterações	115
Tempo computacional médio	0.21 segundos

Para a obtenção dos pontos do conjunto solução, foram determinados subintervalos entre os limites máximo e mínimo estabelecidos para a restrição ambiental, encontrando os valores apresentados na Tabela 5.4 dada a seguir. O método de solução foi iniciado com pontos ineficazes, exteriores à região viável, porém interiores à região relaxada pelo método da barreira modificada. Assim, foi possível determinar pontos que convergiram para uma solução ótima de cada subproblema mono-objetivo, gerado pelo método de restrições canalizadas progressivas.

Os intervalos nos quais foram obtidas as soluções eficientes para o caso de 3 geradores estão apresentados na Tabela 5.4 destacados em negrito.

Tabela 5.4: Região delimitada e soluções: caso 3 geradores.

Região $[C_e^{\text{inf}}, C_e^{\text{sup}}]$	$C_g (\$.h^{-1})$	$C_e (kg.h^{-1})$
[2171,2174]	8584,403401	2174
[2172,2175]	8562,591795	2175
[2172,2175]	8562,621106	2175
[2186,2189]	8558,605267	2188,999999
[2187,2190]	8550,905069	2190
[2188,2191]	8543,099083	2190,999999
[2190,2193]	8527,224632	2192,999999
[2192,2195]	8511,076290	2194,999999
[2193,2196]	8502,923417	2196
[2194,2197]	8494,756307	2196,999999

[2195,2198]	8486,500127	2198
[2196,2199]	8478,243462	2198,999999
[2197,2200]	8469,964948	2200
[2198,2201]	8461,670071	2201
[2200,2203]	8445,050988	2202,999999
[2202,2205]	8428,422067	2204,999999
[2204,2207]	8416,966474	2206,382056
[2241,2244]	8405,837732	2244
[2242,2245]	8399,712069	2245
[2245,2248]	8462,931603	2246
[2245,2248]	8381,260146	2248
[2247,2250]	8368,915618	2250
[2247,2250]	8461,67894	2250
[2247,2250]	8368,915617	2250
[2249,2252]	8356,553495	2252
[2250,2253]	8350,370150	2253
[2252,2255]	8459,248419	2255
[2252,2255]	8338,007127	2254,999999
[2255,2258]	8319,495160	2258
[2257,2260]	8307,192808	2260
[2260,2263]	8288,825366	2263
[2262,2265]	8276,652838	2265
[2264,2267]	8264,549576	2267
[2266,2269]	8252,524687	2269
[2267,2270]	8246,544341	2270
[2267,2270]	8246,544341	2270
[2269,2272]	8235,281469	2272
[2271,2274]	8234,455597	2273,999999
[2272,2275]	8234,287565	2274,999999
[2274,2277]	8234,042480	2276,465555

Os pontos extremos obtidos na curva de soluções, valor mínimo da função emissão e valor mínimo da função custo de geração, foram determinados através da resolução dos problemas de despacho mono-objetivo, econômico e ambiental e estão apresentados na Tabela 5.6.

A utilização do método da suavização arco tangente, foi eficiente para este caso, como mostra a Tabela 5.7, uma vez que os valores das funções custo de geração aproximada

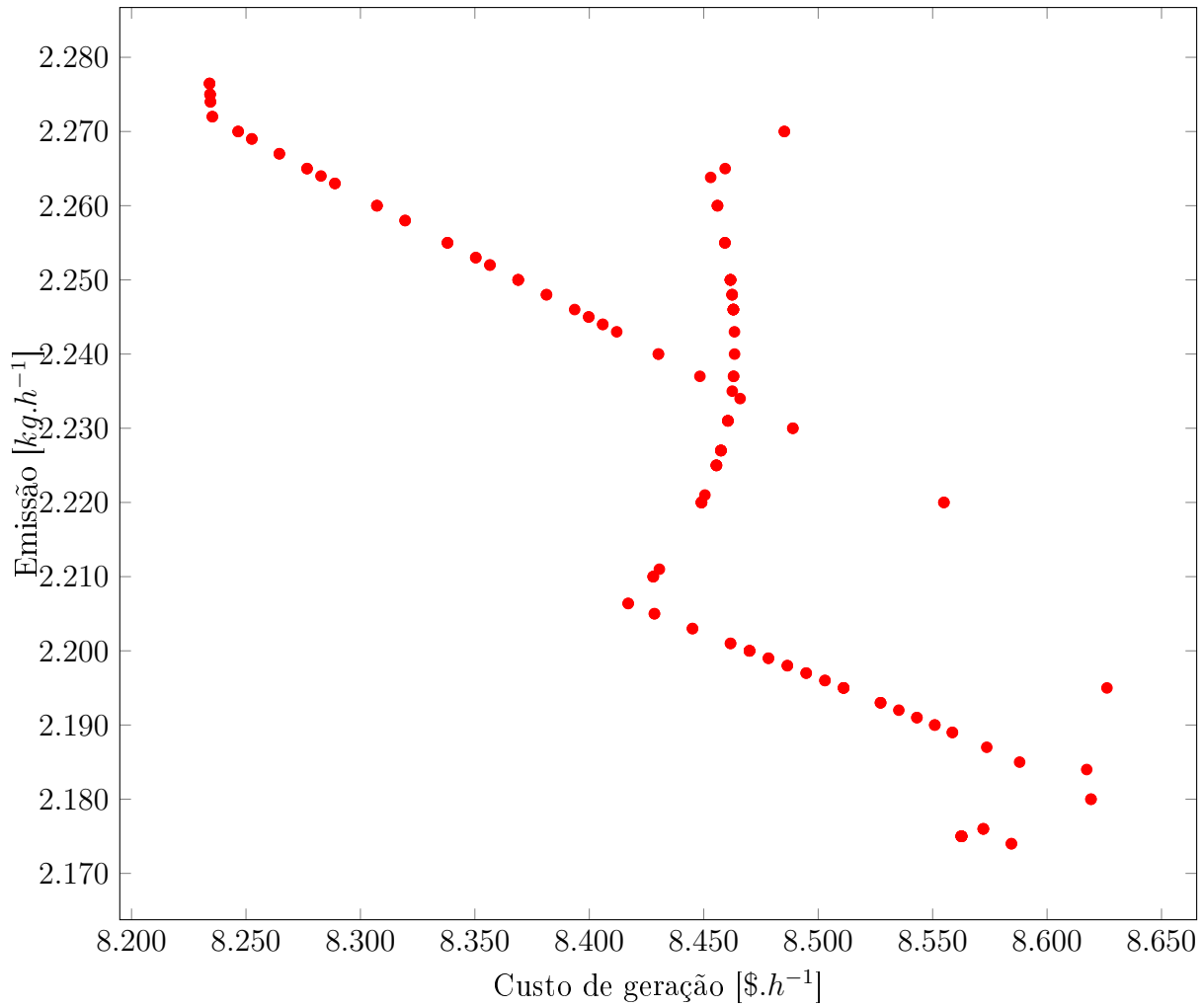


Figura 5.1: Soluções obtidas pela RCP-PDPIEX-SAT para o caso de 3 geradores.

Tabela 5.6: Valores máximos e mínimos de C_g e C_e para o caso de 3 geradores.

Custos(\$.h ⁻¹)	Emissão(kg.h ⁻¹)
8584,403401	2174
8234,042480	2276,465555

pela suavização arco tangente, custo de geração original e custo de geração aproximada pela suavização hiperbólica utilizada por Gonçalves (2015), são bem próximos.

Tabela 5.7: Valor mínimo da função custo de geração (C_g) aproximada e original: 3 geradores.

C_g com aproximação arco tangente	C_g original	C_g com aproximação hiperbólica
8234,042480	8234,072870	8234,1745

Considerando a Figura 5.1, os pontos considerados dominados foram eliminados, com o intuito de obter uma curva com soluções eficientes para o caso de 3 unidades geradoras de energia, a qual é representada pela Figura 5.2.

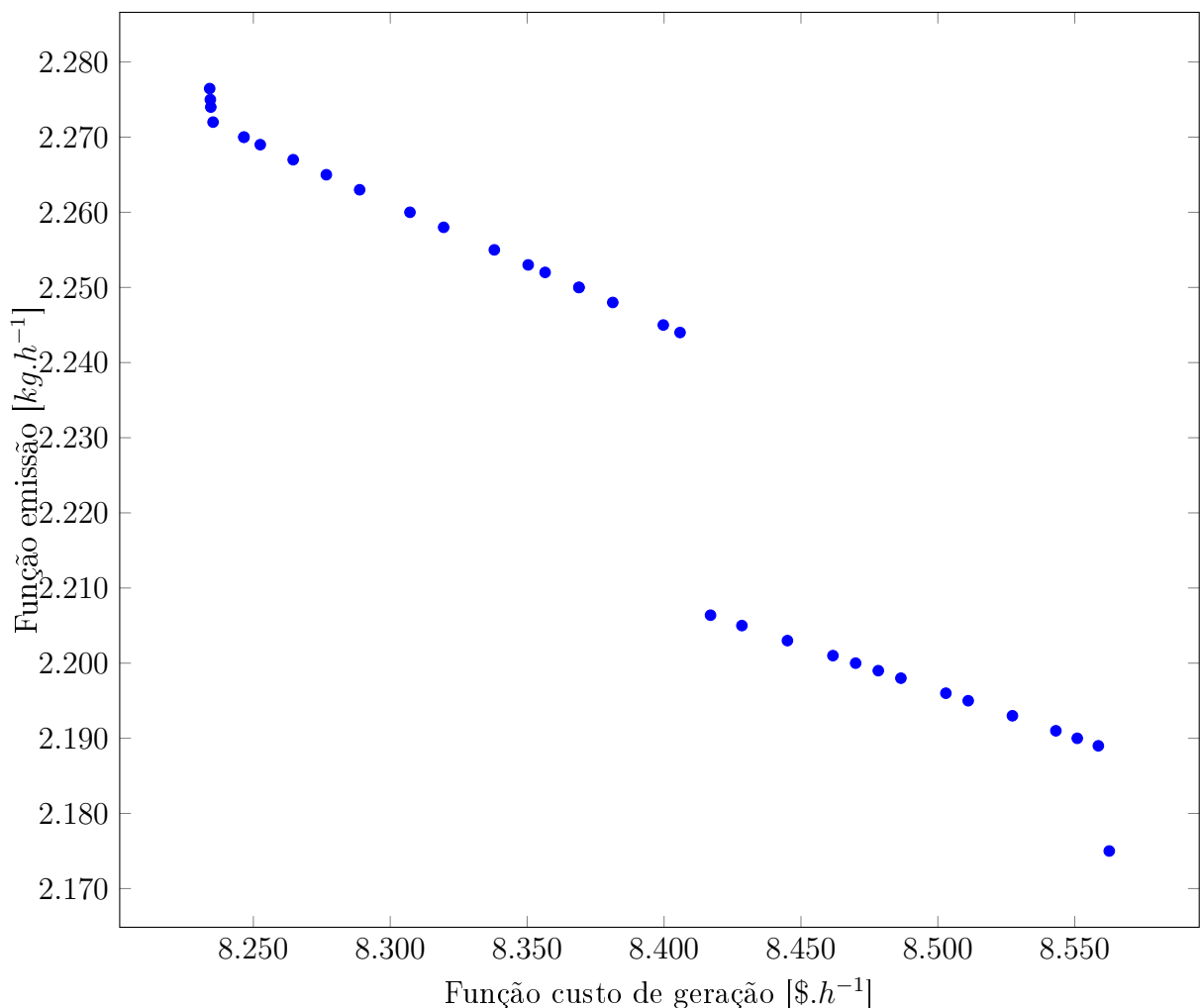


Figura 5.2: Curva Pareto-ótima caso 3 geradores: soluções eficientes obtidas pela RCP-PDPIEX-SAT.

Considerando que os dados utilizados neste trabalho são os mesmos utilizados no trabalho de Gonçalves (2015), o qual utilizou para suavizar o método de suavização hiperbólica os termos modulares da função custo de geração, no presente trabalho, realizou-se

a comparação dos resultados obtidos com a suavização arco tangente e a suavização hiperbólica.

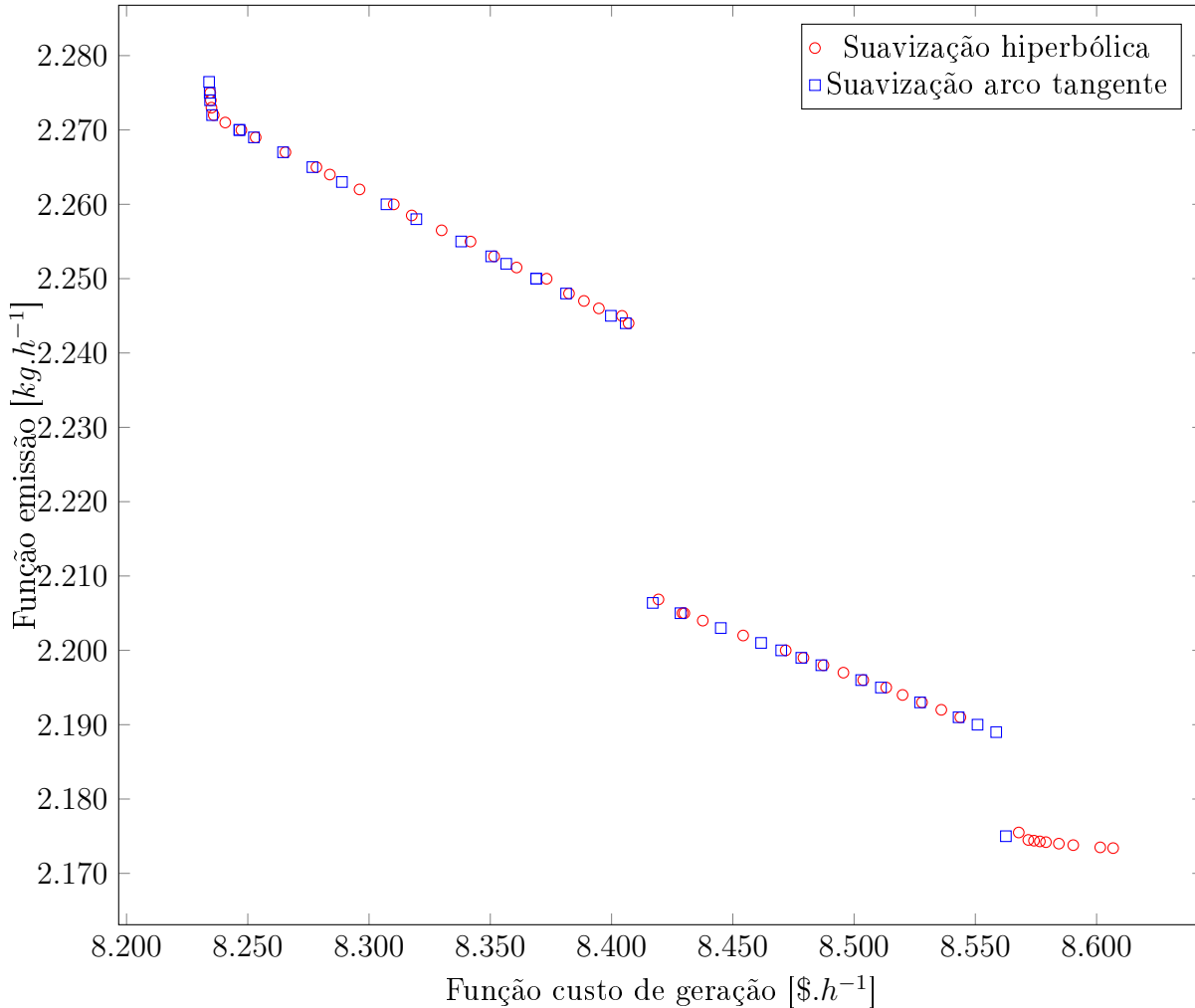


Figura 5.3: Caso 3 geradores: Comparação entre o método de suavização arco tangente e hiperbólica.

Além da comparação entre a função suavizante arco tangente e a função hiperbólica, no presente trabalho, realizou-se a comparação com o pacote de otimização Knitro utilizado em interface com o *software* GAMS. O pacote de otimização Knitro utiliza o algoritmo Interior/Direct para resolver o problema e não opera com funções não diferenciáveis, então para que os resultados pudessem ser comparados, foi fornecido ao pacote a função suavizante arco tangente, com o melhor valor de η ($\eta = 0,001$). De maneira análoga à resolução do PMDEA-PV com o método de restrições canalizadas progressivas, na interface GAMS, o intervalo [2171, 2277] foi dividido em pequenos subintervalos tornando possível determinar soluções para o problema multiobjetivo e além disso, extrair os valores utilizados como ponto inicial do método PDPCBLM para cada subintervalo.

A Figura 5.4 apresenta a comparação entre os resultados obtidos através da RCP-PDPIEX-SAT e o pacote de otimização Knitro.

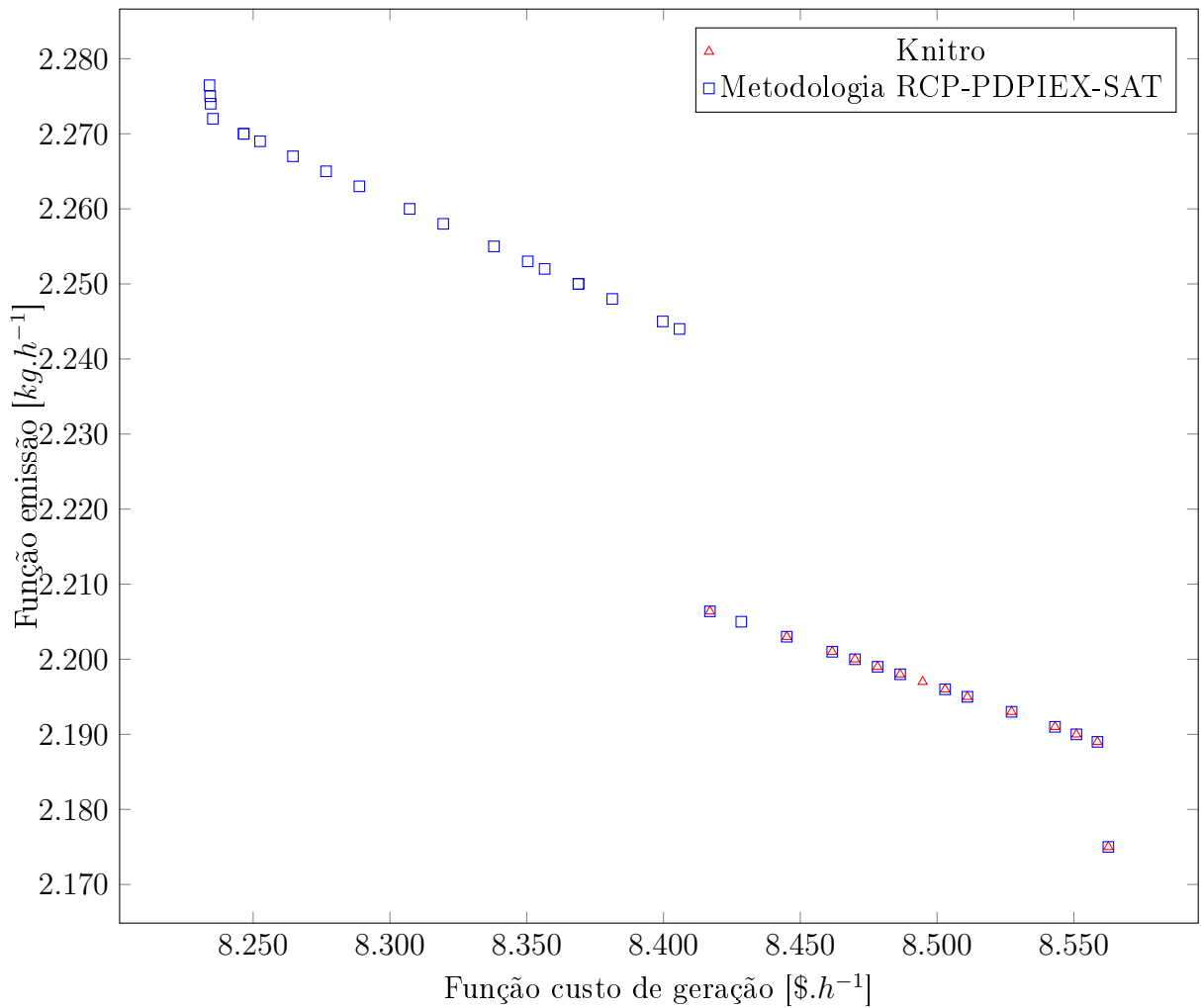


Figura 5.4: Caso 3 geradores: método de restrições canalizadas progressivas – comparação entre a RCP-PDPIEX-SAT e o pacote Knitro.

Enquanto a metodologia RCP-PDPIEX-SAT determinou 34 soluções eficientes para este caso, dentre as 37 (valor de N) soluções possíveis para valores iniciais de $\delta = 3$, das quais, o pacote Knitro obteve 14 soluções eficientes, mesmo fornecendo ao pacote o melhor suavizante para a função modular presente na função custo de geração.

A Tabela 5.8 mostra a comparação entre alguns valores de C_g obtidos pela RCP-PDPIEX-SAT, o método PDPCBLM com suavização hiperbólica, pacote de otimização Knitro e a C_g original, considerando o caso teste de 3 unidades geradoras.

Tabela 5.8: Comparação ds valores de C_g para: RCP-PDPIEX-SAT, PDPCBLM com suavização hiperbólica, Knitro e C_g original, para o caso teste de 3 unidades geradoras.

Intervalo	RCP-PDPIEX-SAT	PDPCBLM:suavização hiperbólica	knitro	C_g original
[2171, 2174]	8562,5917	8579,106211	8562,5834	8562,5917
[2192, 2195]	8511,0763	8519,991629	8511,0680	8511,103388
[2204, 2207]	8416,966474	8419,341448	8416,9625	8416,984916
[2247, 2250]	8368,9156	8373,226032	—	8368,943176
[2267, 2270]	8246,5443	8247,350523	—	8246,571298
[2274, 2277]	8234,0424	8234,193431	—	8234,072871

Tabela 5.9: Módulo da diferença entre valores de C_g para: método de suavização arco tangente, suavização hiperbólica, Knitro e C_g original.

Intervalo	$ C_{g_{AT}} - C_{g_{OR}} $	$ C_{g_{HIP}} - C_{g_{OR}} $	$ C_{g_{KIN}} - C_{g_{OR}} $
[2171, 2174]	0,00	16,51	0,008
[2192, 2195]	0,027	8,88	0,03
[2204, 2207]	0,018	2,35	0,02
[2247, 2250]	0,027	4,28	—
[2267, 2270]	0,026	0,77	—
[2274, 2277]	0,03	012	—

Na Tabela 5.9 tem-se que:

- $C_{g_{AT}}$ são os valores da função custo geração obtidos através do método de suavização arco tangente;
- $C_{g_{OR}}$ são os valores originais da função custo geração;
- $C_{g_{HIP}}$ são os valores da função custo geração obtidos através do método de suavização hiperbólica;
- $C_{g_{KIN}}$ são os valores da função custo geração obtidos através do pacote de otimização Knitro.

A partir da análise das figuras e tabelas comparativas, percebe-se que a metodologia RCP-PDPIEX-SAT, apresenta sensível melhora em relação ao método PDPCBLM com suavização hiperbólica, levando em consideração a distância entre os valores obtidos pelas funções aproximadas e a função original. A metodologia proposta neste trabalho também apresentou resultados que dominaram os obtidos pelo pacote de otimização Knitro, além da função suavizante arco tangente conseguir uma boa aproximação do valor da função custo de geração do PMDEA-PV ao seu valor original. Em relação ao pacote Knitro, este determinou soluções para todos os subproblemas mono-objetivos definidos nos subintervalos considerados. Entretanto, na Figura 5.4 são mostradas apenas as soluções não dominadas obtidas pelo pacote..

5.2 Caso 6 Geradores

Os dados utilizados para a resolução do caso de 6 geradores, coeficientes das funções custo de geração e emissão, limitantes inferiores e superiores e a demanda foram retirados de Ravi et al. (2006) e Gonçalves (2015). A Tabela B.1, do Apêndice B apresenta os dados que foram utilizados para o caso de 6 unidades geradoras.

Utilizando a metodologia RCP-PDPIEX-SAT, o PMDEA-PV foi resolvido para o caso de 6 geradores. Assim como no caso de 3 geradores, o problema foi solucionado com

a determinação de várias faixas, limitadas superiormente e inferiormente para valores da função emissão de poluentes.

A Tabela B.2, do Apêndice B apresenta os subintervalos em que a restrição ambiental foi dividida, e após a resolução do PMDEA-PV com a utilização da metodologia RCP-PDPIEX-SAT, a mesma tabela apresenta os respectivos valores obtidos para a função custo de geração e emissão.

Os parâmetros utilizados para a inicialização do método são apresentados na Tabela 5.10.

Tabela 5.10: Inicialização PMDEA-PV: 6 geradores.

Limitante da atualização do parâmetro de suavização	$\bar{\eta} = 10^{-4}$
Parâmetro de barreira/relaxação inicial	$\mu^0 = 400$
Fatores de atualização do parâmetro de barreira	$\tau = 0.9$
Fator de controle da escolha entre passo previsor ou corretor	$\chi = 1$
Fator de redução do passo	$\sigma = 0.9995$
Precisão de parada	$\varepsilon = 10^{-6}$
x^0	$[125; 50; 32; 22; 20; 26]^t$
Número médio de iterações	124
Tempo computacional médio	0.39 segundos

Semelhante ao caso de 3 geradores os pontos extremos obtidos na curva de soluções foram determinados através da resolução dos problemas de despacho mono-objetivo, econômico e ambiental e estão apresentados na Tabela 5.12. Podemos observar na Tabela 5.12 que os valores da função custo e função emissão são objetivos conflitantes, pois o valor mínimo de custo possui um valor máximo de emissão e o mesmo ocorre com o valor máximo para a função custo, resulta em um valor mínimo para a função emissão.

Para a determinação dos subintervalos foram considerados diferentes valores de δ . Inicialmente o valor de δ utilizado foi 3, e então os valores de δ variaram em valores inteiros positivos e decrescente, que possibilitaram efetuar um refinamento do método RCP (visto na seção 2.8) e encontrar um número maior de soluções eficientes do problema para o preenchimento da curva Pareto-ótima (Pareto eficiente) mostrados na Figura 5.6. Os valores utilizados de δ para o caso de 6 geradores foram: 3 e 2.

Tabela 5.12: Valores máximos e mínimos de C_g e C_e para o caso de 6 geradores.

Custos($\$.h^{-1}$)	Emissão($kg.h^{-1}$)
1072,107084	228,546595
860,320472	341,476184

A utilização do método da suavização arco tangente, assim como no caso de 3 geradores, foi eficiente para este caso, como mostra a Tabela 5.13, uma vez que os valores das funções custo de geração aproximada e custo de geração original, são bem próximos e estão abaixo dos resultados apresentados por Gonçalves (2015) que utilizou o método de suavização hiperbólica.

Tabela 5.13: Valor mínimo da função custo (C_g) aproximada e original: 6 geradores.

C_g com aproximação arco tangente	C_g original	C_g com aproximação hiperbólica
860,320472	860,328194	860,3729

Semelhante ao caso de três unidades geradoras, a aplicação da metodologia RCP-PDPIEX-SAT, foi resolvido para o caso teste de 6 unidades geradoras. Os resultados contendo todas as soluções do problema é representado na Figura 5.5.

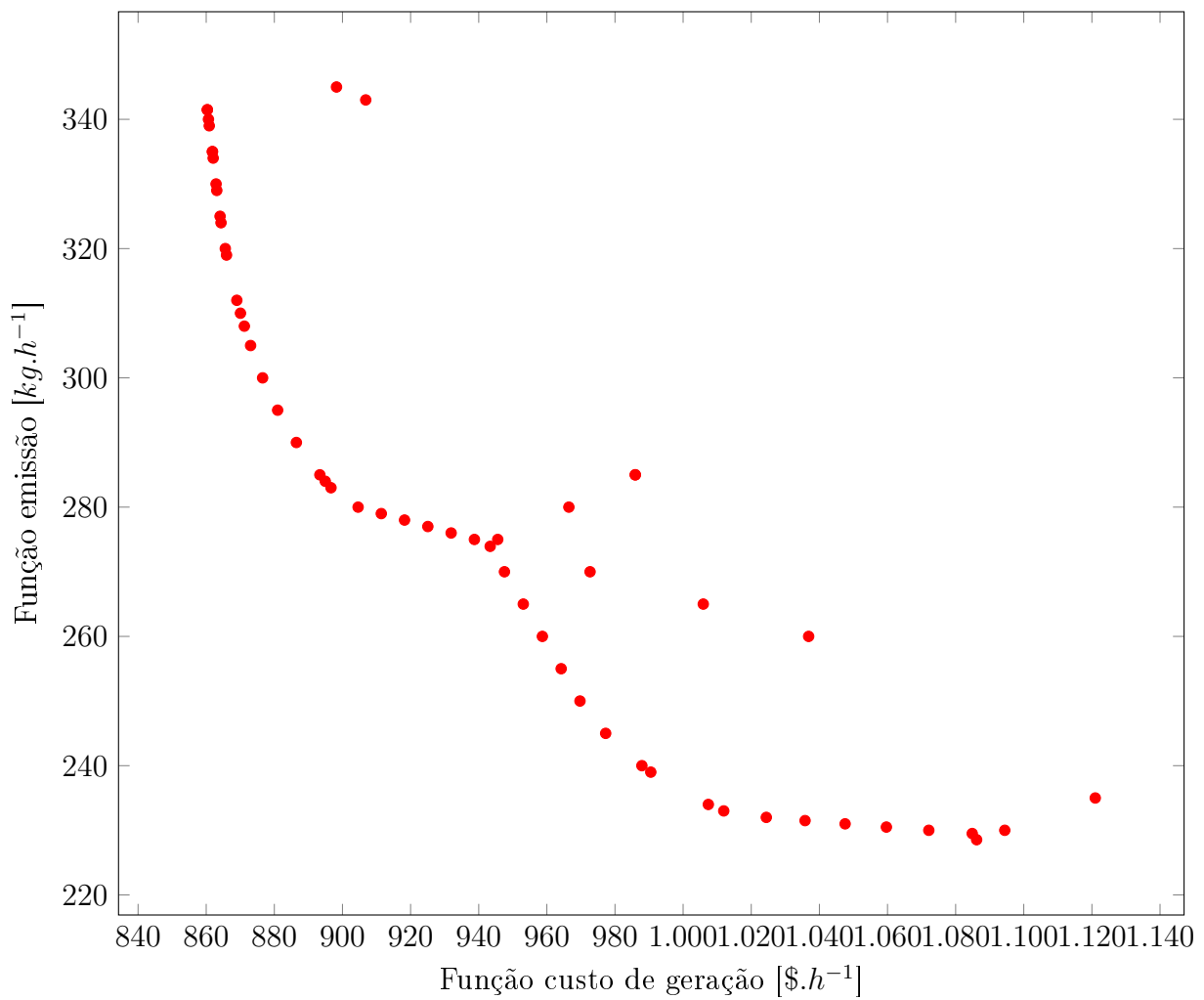


Figura 5.5: Soluções obtidas pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT para o caso de 6 geradores.

É possível observar na figura 5.5, que em vários pontos, os valores para ambas as funções podem ser melhorados, ou seja, existe algum ponto, na mesma faixa de valores, em que a função custo de geração e a função emissão sejam menores. Logo, a partir da Figura 5.5, os pontos considerados dominados foram eliminados e a curva Pareto-ótima foi obtida e é apresentada pela Figura 5.6.

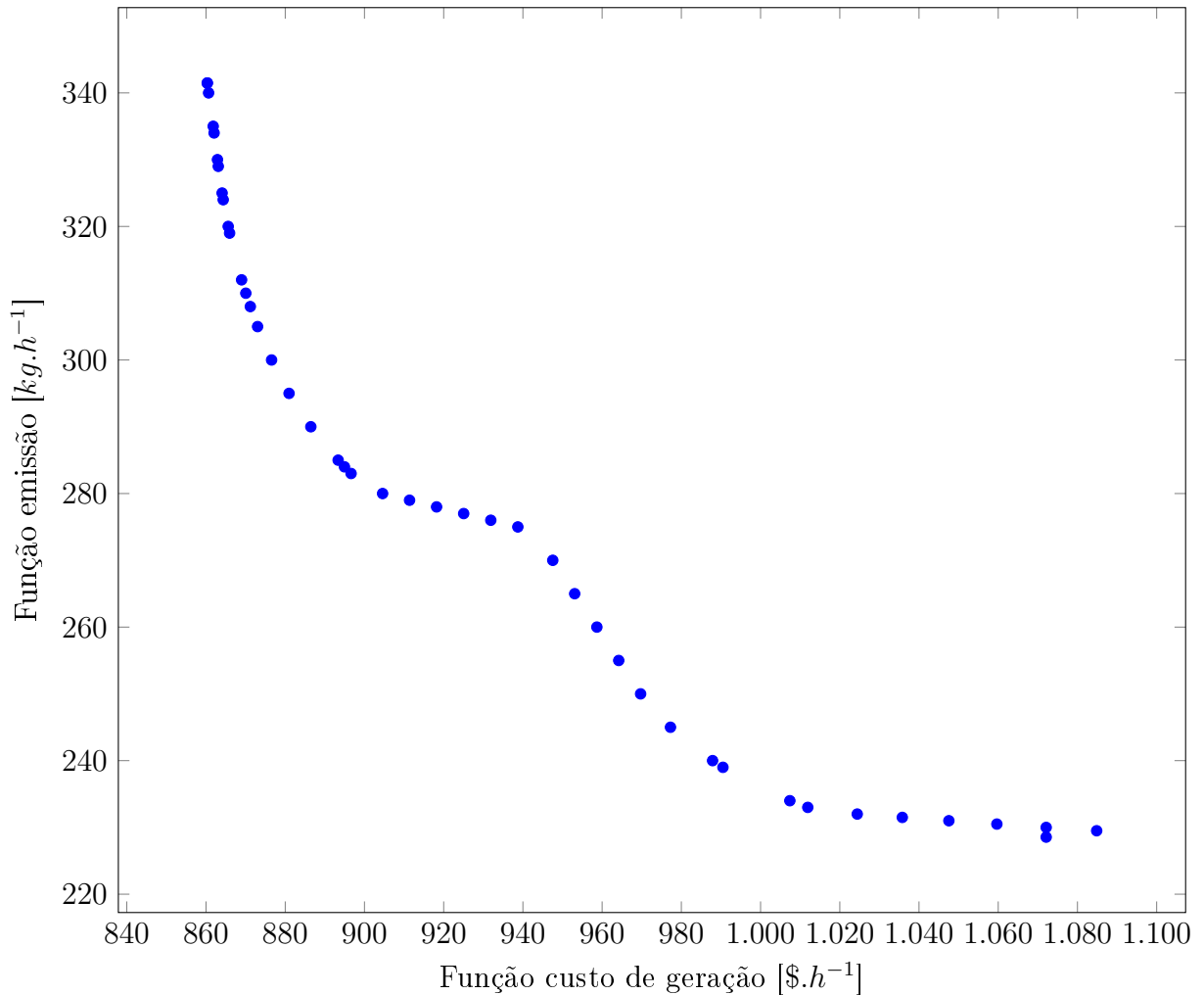


Figura 5.6: Curva Pareto-ótima caso 6 geradores: soluções eficientes obtidas pela RCP-PDPIEX-SAT.

De maneira análoga ao caso de três geradores, para o caso de seis geradores também foi realizada a comparação entre o PMDEA-PV com suavização arco tangente e o PMDEA-PV com suavização hiperbólica, como é representada na Figura 5.7, e a Figura 5.8 apresenta a comparação dos resultados obtidos pela RCP-PDPIEX-SAT e o pacote de otimização Knitro.

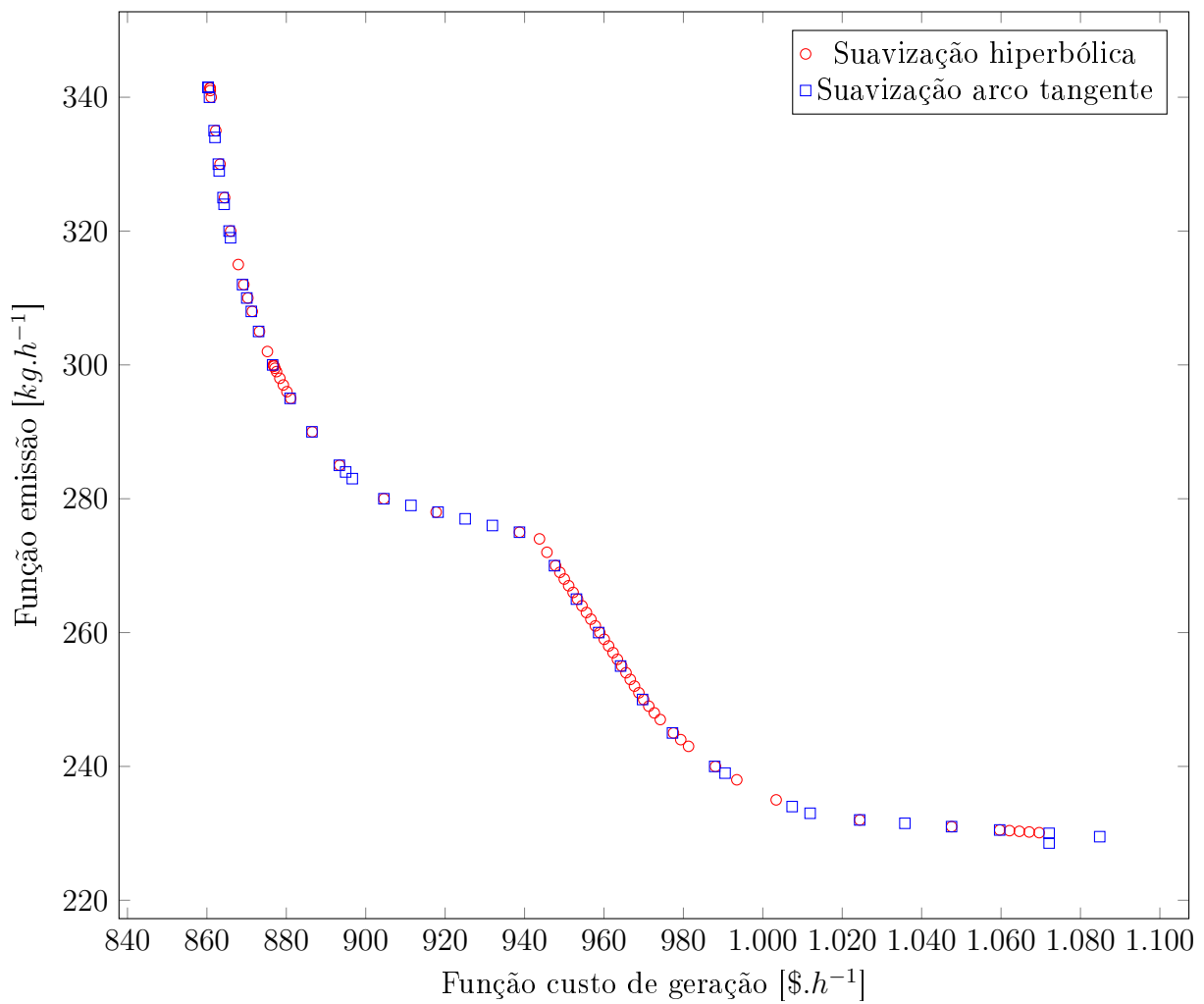


Figura 5.7: Caso 6 geradores: Comparação entre o método de suavização arco tangente e hiperbólica.

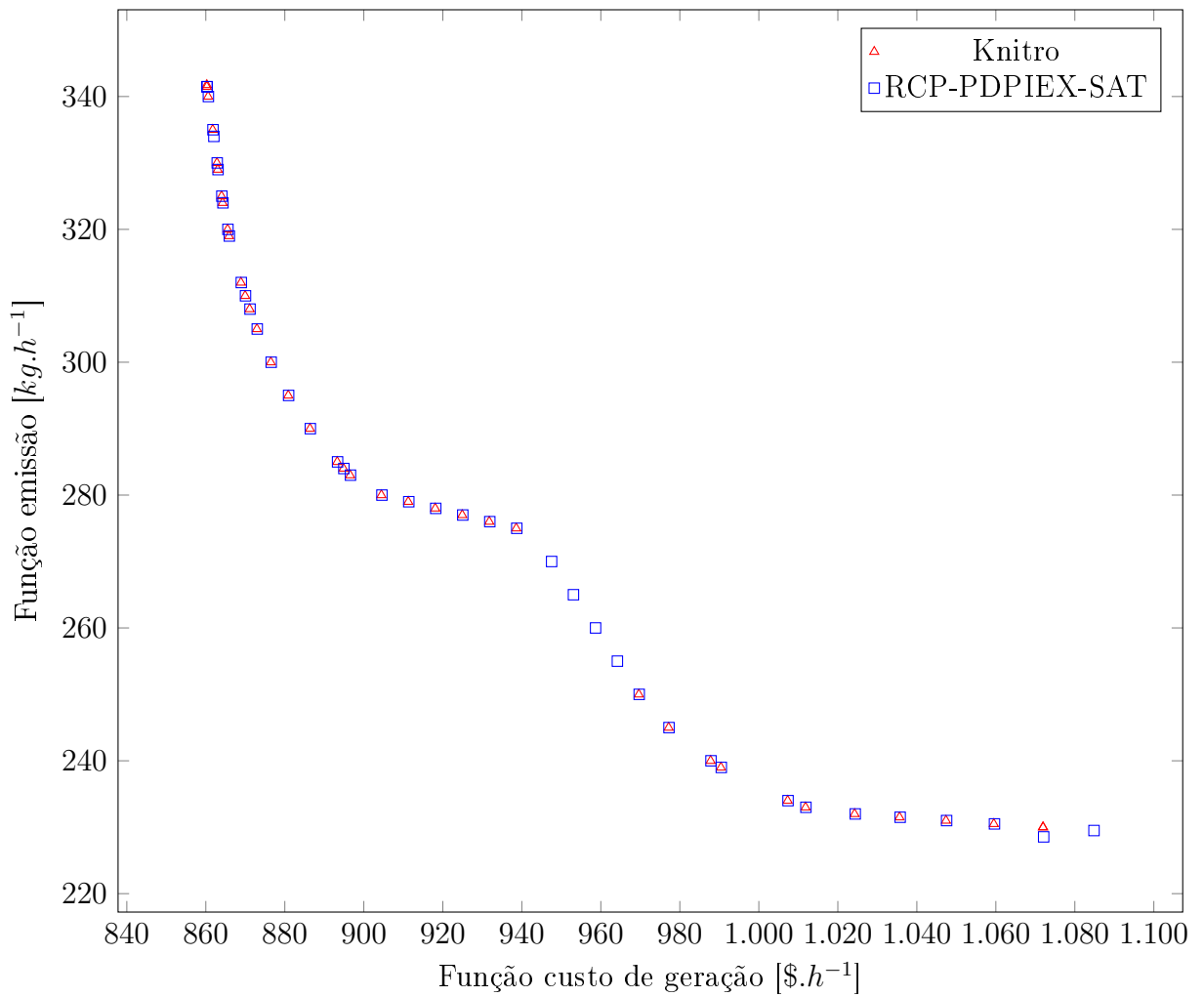


Figura 5.8: Caso 6 geradores:método de restrições canalizadas progressivas – comparação entre a metodologia RCP-PDPIEX-SAT e o pacote Knitro.

Em Stanzani (2012), a autora resolveu o problema multiobjetivo de despacho econômico/ambiental, porém desconsiderou o efeitos de pontos de carregamento de válvula e no trabalho de Ravi et al. (2006) de onde foram obtidos os dados utilizados no problema de despacho econômico com inserção de pontos de carregamento de válvula utilizados neste caso, foi realizada a minimização do problema mono-objetivo de despacho econômico considerando as perdas do sistema. No trabalho de Gonçalves (2015), o PMDEA-PV para o caso de 6 geradores, foi resolvido pela primeira vez na literatura. Gonçalves (2015) obteve como valor mínimo da função custo $860,3729 \text{ \$.}h^{-1}$, utilizando o método de suavização hiperbólica, e no presente trabalho, no qual foi adotado o método de suavização arco tangente, obteve-se como valor mínimo da função custo $860,320472 \text{ \$.}h^{-1}$. A diferença entre o menor valor obtido por Gonçalves (2015) e a função original é de $0,044706 \text{ \$.}h^{-1}$, enquanto a diferença entre o valor mínimo obtido pelo presente e a função original é de $0,007722 \text{ \$.}h^{-1}$.

A Tabela 5.14 mostra a comparação entre alguns valores de C_g obtidos pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT, o método PDPCLM com suavização hiperbólica, pacote de otimização Knitro e a C_g original, considerando o caso teste de 6 unidades geradoras.

Os intervalos nos quais foram obtidas as soluções eficientes para o caso de 6 geradores estão apresentados na Tabela B.2 destacados em negrito.

Tabela 5.14: Comparação ds valores de C_g para: RCP-PDPIEX-SAT, PDPCBMLM com suavização hiperbólica, Knitro e C_g original, para o caso teste de 6 unidades geradoras.

Intervalo	RCP-PDPIEX-SAT	PDPCBMLM:suavização hiperbólica	knitro	C_g original
[339, 342]	860,320472	860,3729240	860,245568	860,328195
[318, 320]	865,597063	869,2890842	865,512194	865,605149
[298, 300]	876,549856	876,8159749	876,455277	876,558127
[272, 275]	938,721058	943,7570708	938,58562	938,732053
[258, 260]	958,672635	—	—	958,681228
[253, 255]	964,192965	—	—	964,201585
[228, 230]	1072,10708	—	1071,94221	1072,120468

Tabela 5.15: Módulo da diferença entre valores de C_g para: método de suavização arco tangente, suavização hiperbólica, Knitro e C_g original.

Intervalo	$ C_{gAT} - C_{gOR} $	$ C_{gHIP} - C_{gOR} $	$ C_{gKIN} - C_{gOR} $
[339, 342]	0,0077	0,04	0,08
[318, 320]	0,008	3,68	0,09
[298, 300]	0,008	0,25	0,1
[272, 275]	0,01	5,02	0,14
[258, 260]	0,008	—	—
[253, 255]	0,008	—	—
[228, 230]	0,01	—	0,17

Nas Tabela 5.15, os resultados obtidos para o caso teste de 6 unidades geradoras através da metodologia proposta neste trabalho, são muito próximos do valor da função original, quando comparados com os resultados apresentados pela função suavizante hiperbólico e pelo pacote de otimização. Vale ressaltar que em relação ao pacote Knitro, este determinou soluções para todos os subproblemas mono-objetivos definidos nos subintervalos considerados. Entretanto, na Figura 5.8 são mostradas apenas as soluções não dominadas obtidas pelo pacote.

5.3 Caso 10 Geradores

Os dados utilizados para a resolução do caso de 10 geradores, coeficientes das funções custo de geração e emissão de poluentes, limitantes inferiores e superiores e a demanda foram retirados de Basu (2011). A Tabela B.4, do Apêndice B apresenta os dados que foram utilizados para o caso de 10 unidades geradoras.

Utilizando a metodologia RCP-PDPIEX-SAT, o PMDEA-PV foi resolvido para o caso de 10 geradores. O problema foi solucionado com a determinação de várias faixas, entre os limites máximo e mínimo estabelecidos para a restrição ambiental, os valores são apresentados na Tabela B.5 que também se encontra no Apêndice B. O algoritmo foi iniciado com pontos exteriores à região viável, porém interiores à região relaxada pelo procedimento da barreira modificada e foi possível determinar uma sequência de pontos que convergiu para uma solução ótima de cada subproblema mono-objetivo, gerado através da estratégia de restrições canalizadas progressivas.

Os parâmetros utilizados para a inicialização do método são apresentados na Tabela 5.16.

Tabela 5.16: Inicialização PMDEA-PV: 10 geradores.

Limitante da atualização do parâmetro de suavização	$\bar{\eta} = 10^{-4}$
Parâmetro de barreira/relaxação inicial	$\mu^0 = 33$
Fatores de atualização do parâmetro de barreira	$\tau = 0.5$

Fator de controle da escolha entre passo previsor ou corretor	$\chi = 1$
Fator de redução do passo	$\sigma = 0.9995$
Precisão de parada	$\varepsilon = 10^{-3}$
x^0	[40; 60; 80; 95; 80; 135; 200; 230; 315; 3
Número médio de iterações	28
Tempo computacional médio	0.18 segundos

Os pontos extremos obtidos na curva de soluções, valor mínimo da função emissão (máximo da função custo de geração) e valor mínimo da função custo de geração (máximo da função emissão), foram determinados através da resolução dos problemas de despacho mono-objetivo, econômico e ambiental e são dados na Tabela 5.18.

Tabela 5.18: Valores máximos e mínimos de C_g e C_e para o caso de 10 geradores.

Custos($\$.h^{-1}$)	Emissão($tons.h^{-1}$)
106166,108427	4083,234994
111662,134093	3570,000000

A utilização do método da suavização arco tangente, assim como nos casos de 3 e 6 geradores, foi eficaz para este caso, uma vez que os valores das funções custo de geração aproximada e custo de geração original, são bem próximos. O método da suavização arco tangente mostrou-se sensivelmente melhor quando comparado aos resultados apresentados por Gonçalves (2015) em que utilizou-se o método de suavização hiperbólica, tal fato pode ser visto na Tabela 5.19.

Tabela 5.19: Valor mínimo da função custo (C_g) aproximada e original: 10 geradores.

C_g com aproximação arco tangente	C_g original	C_g com aproximação hiperbólica
106166,108427	106166,122767683	106185,9119

A metodologia RCP-PDPIEX-SAT, foi aplicada à resolução do caso teste de 10 unidades geradoras. A curva Pareto-ótima dos resultados é apresentada na Figura 5.9.

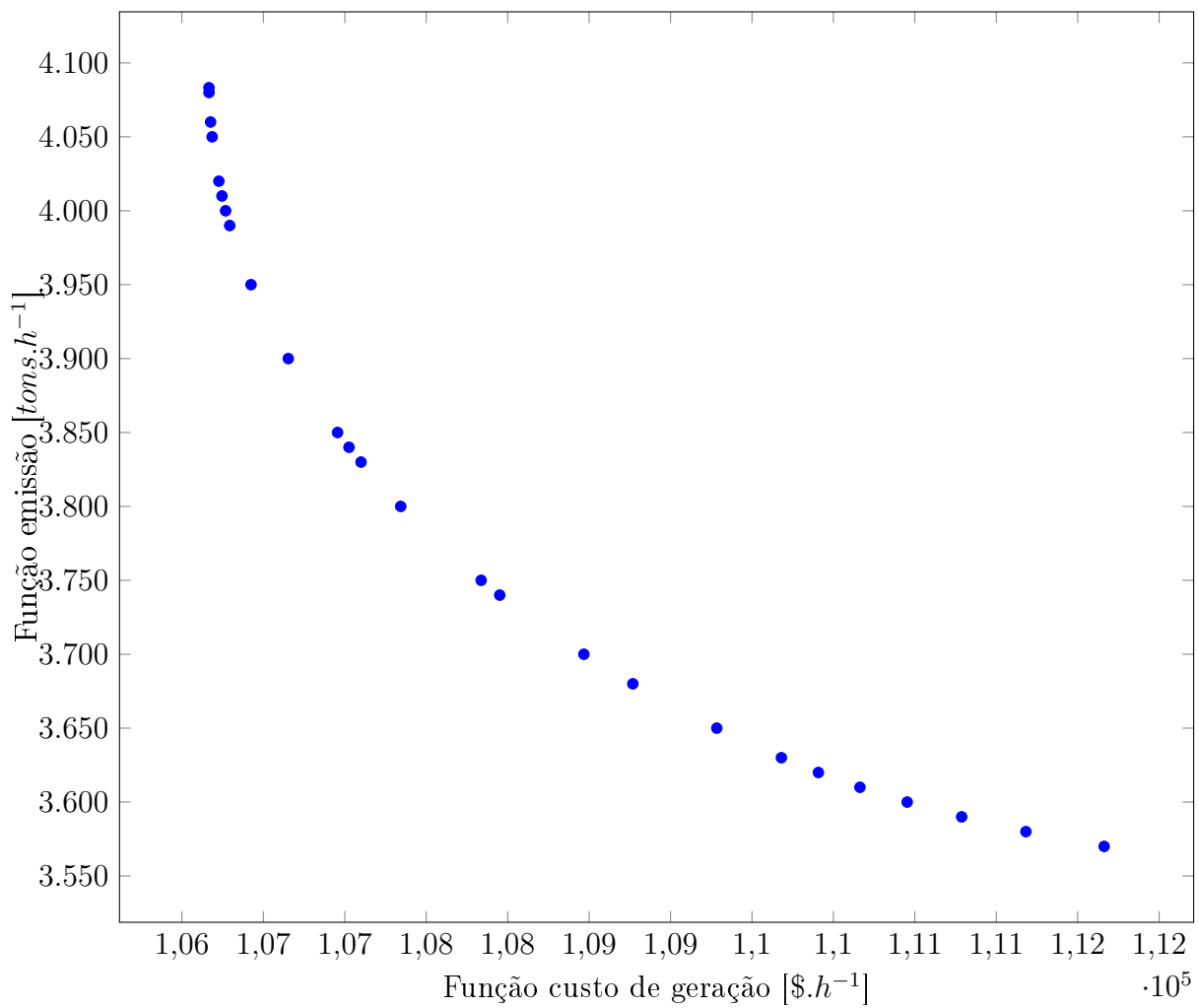


Figura 5.9: Curva Pareto-ótima caso 10 geradores: soluções eficientes obtidas pela RCP-PDPIEX-SAT.

Para o caso de 10 geradores também foi realizada a comparação entre o PMDEA-PV com de suavização arco tangente e o PMDEA-PV com suavização hiperbólica, como é representada na Figura 5.10, e a Figura 5.11 apresenta a comparação do resultados obtidos pela RCP-PDPIEX-SAT e o pacote de otimização Knitro.

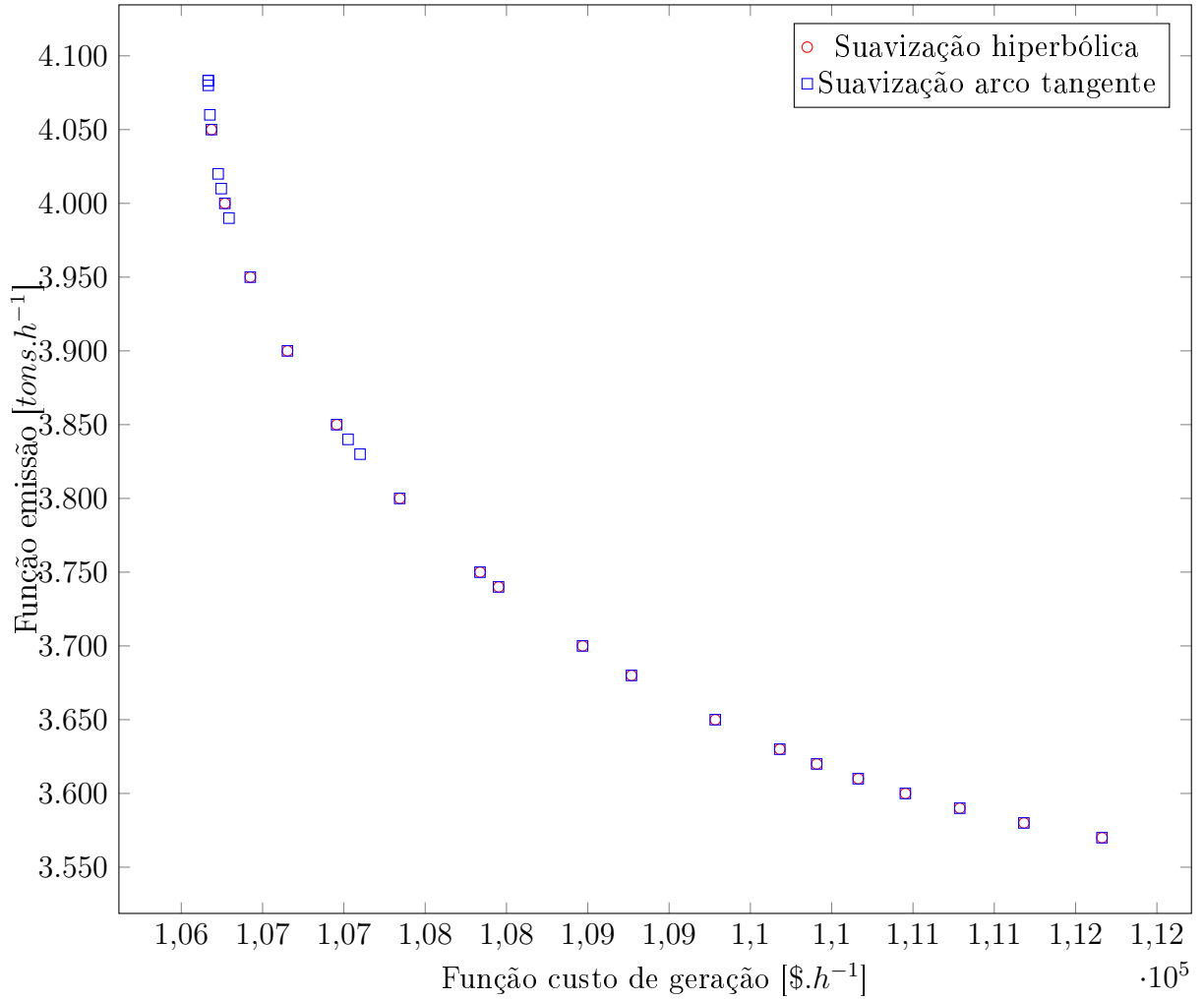


Figura 5.10: Caso 10 geradores: Comparação entre o método de suavização arco tangente e hiperbólica.

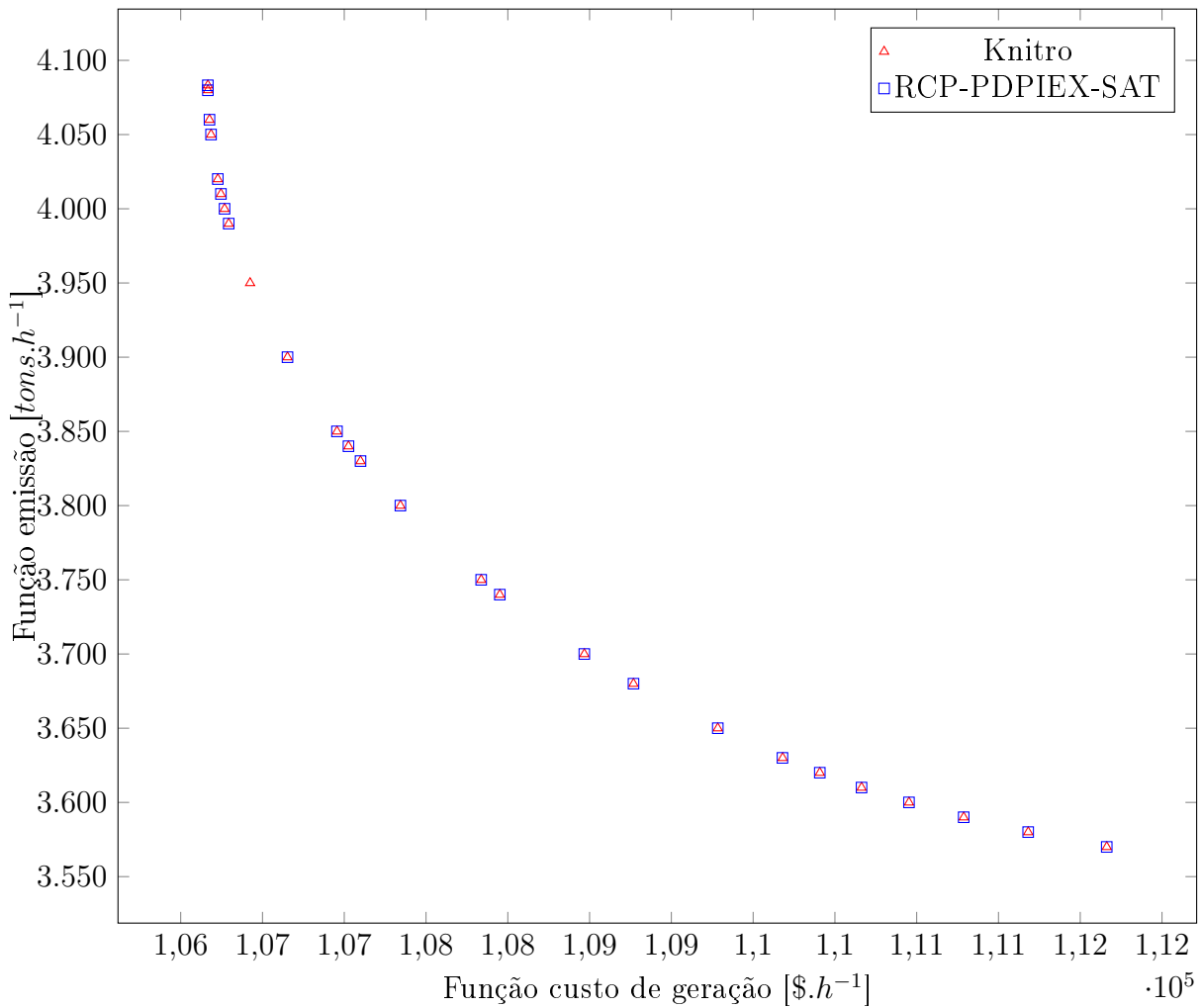


Figura 5.11: Caso 10 geradores: método de restrições canalizadas progressivas – comparação entre a metodologia RCP-PDPIEX-SAT e o pacote Knitro.

No trabalho de Basu (2011), de onde foram extraídos os dados utilizados para o caso de 10 geradores, o valor mínimo obtido para função custo, com representação das perdas, é 111500,00 $$.h^{-1}$. No trabalho de Gonçalves (2015) que estuda o problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental, com o qual foram feitas as comparações de resultados, o valor mínimo obtido foi 106185,9119 $$.h^{-1}$. Neste trabalho, o valor mínimo obtido é 106166,108427 $$.h^{-1}$. O mesmo ocorre com a função emissão, em que o Basu (2011) obteve 3923,40 toneladas como valor mínimo, mas levou em consideração termos exponenciais, o que não ocorreu no trabalho de Gonçalves (2015), onde o valor obtido, 3570,00 toneladas. Neste trabalho o valor obtido foi de 3570,00 toneladas e é inferior ao de Basu (2011) e o mesmo de Gonçalves (2015). Tais fatos mostram a eficiência dos métodos propostos neste trabalho.

A Tabela 5.20 mostra a comparação entre alguns valores de C_g obtidos pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT, o método PDPCBLM com suavização hiperbólica apresentado por Gonçalves (2015), pacote de otimização Knitro e a C_g original, considerando o caso

teste de 10 unidades geradoras.

Tabela 5.20: Comparação ds valores de C_g para: RCP-PDPIEX-SAT, PDPCBLM com suavização hiperbólica, Knitro e C_g original, para o caso teste de 10 unidades geradoras.

Intervalo	RCP-PDPIEX-SAT	PDPCBLM:suavização hiperbólica	knitro	C_g original
[4080, 5000]	106166,108427	—	106165,931784	106166,122767
[4000, 4050]	106185,469935	106185,9119	106185,281524	106185,485230
[3800, 3850]	106955,628448	106956,0407	106955,44	106955,643743
[3750, 3800]	107343,368665	107343,7805	107343,1479616	107343,383960
[3660, 3680]	108768,431102	108768,8463	108768,242569	108768,4463981
[3610, 3620]	109907,689654	109908,1189	109907,500741	109907,7049501
[3560, 3570]	111662,134093	111662,5774	111661,945678	111662,1493889

Tabela 5.21: Módulo da diferença entre valores de C_g para: método de suavização arco tangente, suavização hiperbólica, Knitro e C_g original.

Intervalo	$ C_{gAT} - C_{gOR} $	$ C_{gHIP} - C_{gOR} $	$ C_{gKIN} - C_{gOR} $
[4080, 5000]	0, 01	—	0, 19
[4000, 4050]	0, 01	0, 42	0, 20
[3800, 3850]	0, 01	0, 40	0, 20
[3750, 3800]	0, 01	0, 40	0, 23
[3660, 3680]	0, 01	0, 40	0, 20
[3610, 3620]	0, 01	0, 41	0, 20
[3560, 3570]	0, 01	0, 42	0, 20

A análise comparativa entre as Figuras 5.10 e 5.11 e a Tabela 5.21 é possível observar que a diferença entre os resultados obtidos com a função suavizante arco tangente e a função original, são menores quando comparadas as diferenças entre os resultados provenientes da função suavizante hiperbólica e função original e a diferença entre os resultados do Knitro e da função original.

5.4 Caso 19 Geradores

A Tabela B.7 (Apêndice B), fornece os coeficientes da função custo de geração, dos pontos de carregamento de válvula, limitantes máximos e mínimos de operação do sistema e coeficientes da função emissão de poluentes utilizados para o caso de 19 geradores. Os dados utilizados neste trabalho foram extraídos de Balamurugan et al. (2014) e a função custo é dada em dólar por hora ($\$.h^{-1}$) e a emissão em toneladas por hora ($tons.h^{-1}$). O problema foi solucionado com a determinação de várias faixas, entre os limites máximo e mínimo estabelecidos para a restrição ambiental, os valores são apresentados na Tabela B.8 que também se encontra no Apêndice B.

Os pontos iniciais utilizados para o caso teste de 19 geradores foram:

- $x^0 = [122; 308; 250; 25; 62; 282; 62; 166; 200; 40; 150; 75; 62; 95; 213; 80; 80; 230; 400]$ para os intervalos de canalização entre [13245, 14500].
- $x^0 = [182; 247; 242; 25; 63; 239; 63; 190; 206; 39; 150; 75; 63; 95; 204; 80; 80; 230; 403]$ para os intervalos de canalização entre [12790, 13000].

Os parâmetros utilizados para a inicialização do método são apresentados na Tabela 5.22.

Tabela 5.22: Inicialização PMDEA-PV: 19 geradores

Limitante da atualização do parâmetro de suavização	$\bar{\eta} = 10^{-3}$
Parâmetro de barreira/relaxação inicial	$\mu^0 = 600$
Fatores de atualização do parâmetro de barreira	$\tau = 0.9$
Fator de controle da escolha entre passo predictor ou corretor	$\chi = 1$
Fator de redução do passo	$\sigma = 0.9995$
Precisão de parada	$\varepsilon = 10^{-3}$
Número médio de iterações	100
Tempo computacional médio	1.05 segundos

Os pontos extremos obtidos na curva de soluções, valor mínimo da função emissão (máximo da função custo de geração) e valor máximo da função custo de geração (mínimo da função emissão), foram determinados através da resolução dos problemas de despacho mono-objetivo, econômico e ambiental e são dados na Tabela 5.24.

Tabela 5.24: Valores máximos e mínimos de C_g e C_e para o caso de 19 geradores.

Custos($\$.h^{-1}$)	Emissão($tons.h^{-1}$)
16985,499327	14369,190889
17753,971263	12810,000109

Para a determinação dos subintervalos foram considerados diferentes valores de δ . Inicialmente o valor de δ utilizado foi de 350 e então os valores de δ variaram em valores inteiros positivos e decrescentes, que possibilitaram efetuar um refinamento do método RCP (visto na seção 2.8) e encontrar um número maior de soluções eficientes do problema para o preenchimento da curva Pareto-ótima (Pareto eficiente) mostrados na Figura 5.13. Os valores utilizados de δ para o caso de 19 geradores variaram em valores inteiros no intervalo: $40 \leq \delta \leq 350$

O método de suavização arco tangente apresentou bom desempenho para este caso, uma vez que os valores das funções custo de geração aproximada e custo de geração original, são bem próximos e este método mostrou-se sensivelmente melhor quando comparado aos resultados apresentados por Gonçalves (2015) que utilizou-se o método de suavização hiperbólica, tal fato pode ser visto na Tabela 5.25.

Tabela 5.25: Valor mínimo da função custo (C_g) aproximada e original: 19 geradores.

C_g com aproximação arco tangente	C_g original	C_g com aproximação hiperbólica
16985,499327	16987,7269280374	16985,547777

Os resultados obtidos para o caso teste de 19 unidades geradoras através da implementação da metodologia proposta foram comparados com os apresentados por Bala-

murugan et al. (2014), o qual utilizou a técnica de evolução diferencial para a resolução do PMDEA-PV. A comparação entres os resultados é apresentada na Tabela 5.26:

Tabela 5.26: Valores máximos e mínimos (C_g) e (C_e) : RCP-PDPIEX-SAT e método de evolução diferencial, caso 19 geradores.

C_g^{inf} RCP-PDPIEX-SAT	C_g^{inf} evolução diferencial	C_e^{inf} RCP-PDPIEX-SAT	C_e^{inf} evolução diferencial
16985,49	19145	14384,08	17471

É possível observar na Tabela 5.26, que os valores ($C_g^{\text{inf}}, C_e^{\text{sup}}$) encontrados através da metodologia proposta neste trabalho são melhores que os apresentados com a resolução do PMDEA-PV através do método de evolução diferencial em Balamurugan et al. (2014), cujos autores somente apresentaram esta solução para o problema.

A curva com todos os resultados é apresentada na Figura 5.12, após a eliminação dos pontos dominados, obtém-se a curva Pareto-ótima representada pela Figura 5.13.

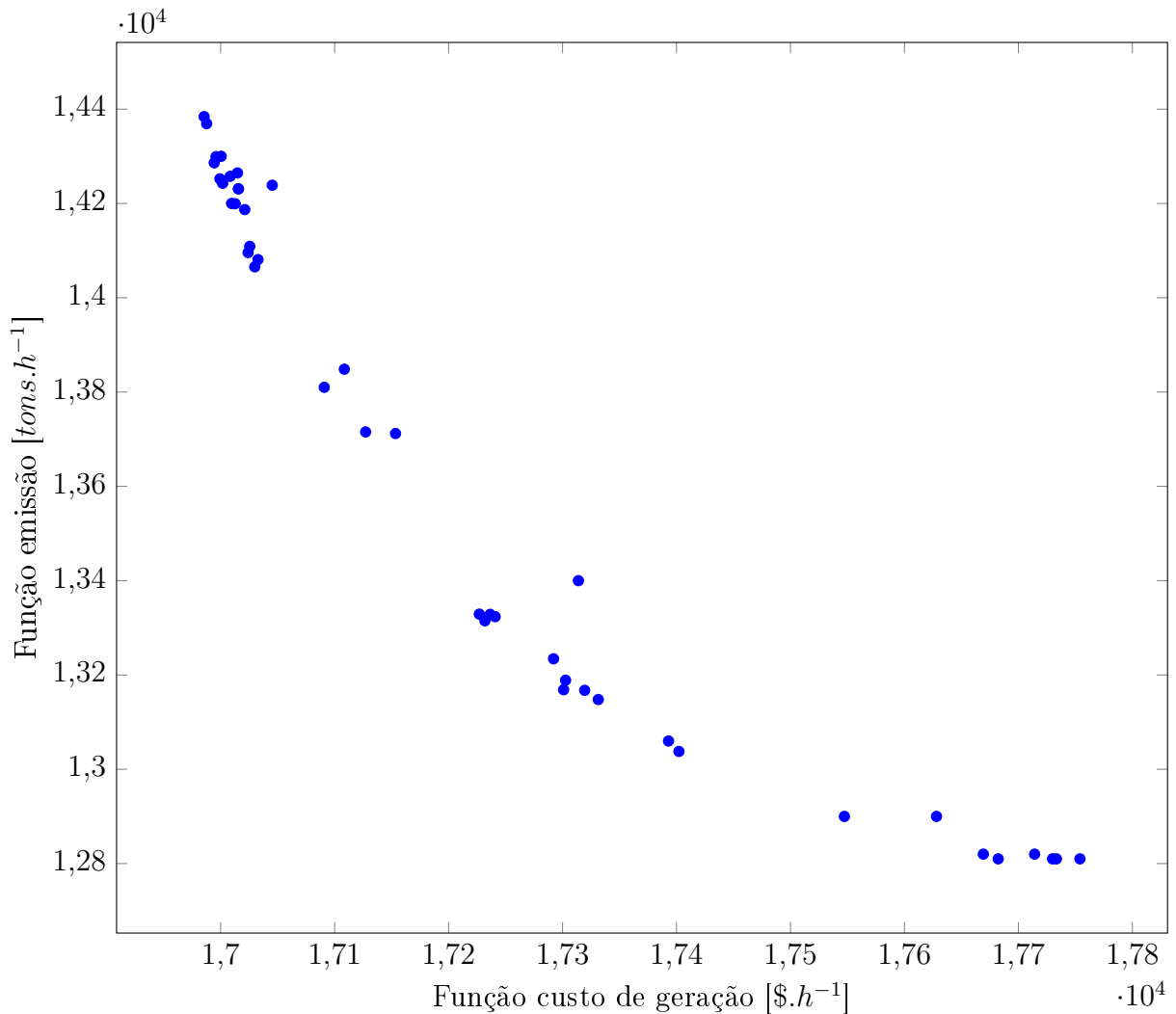


Figura 5.12: Caso 19 geradores: soluções obtidas pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT.

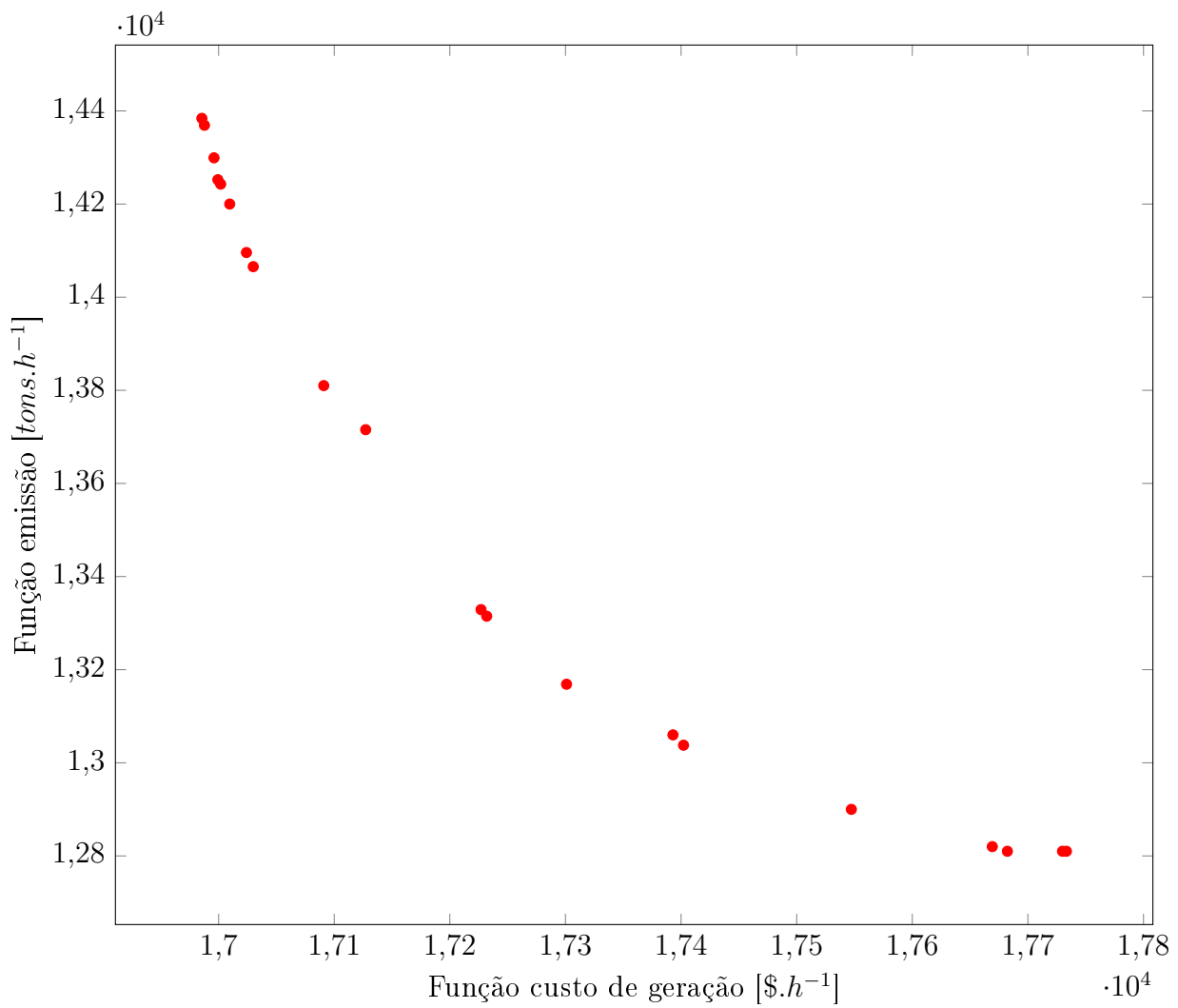


Figura 5.13: Curva Pareto-ótima caso 19 geradores: soluções eficientes obtidas pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT.

Análogo aos casos de 3, 6 e 10 geradores, para o caso de 19 geradores também foi realizada a comparação entre o PMDEA-PV com de suavização arco tangente e o PMDEA-PV com suavização hiperbólica, como é representada na Figura 5.14, e a Figura 5.15 apresenta a comparação do resultados obtidos pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT e o pacote de otimização Knitro.

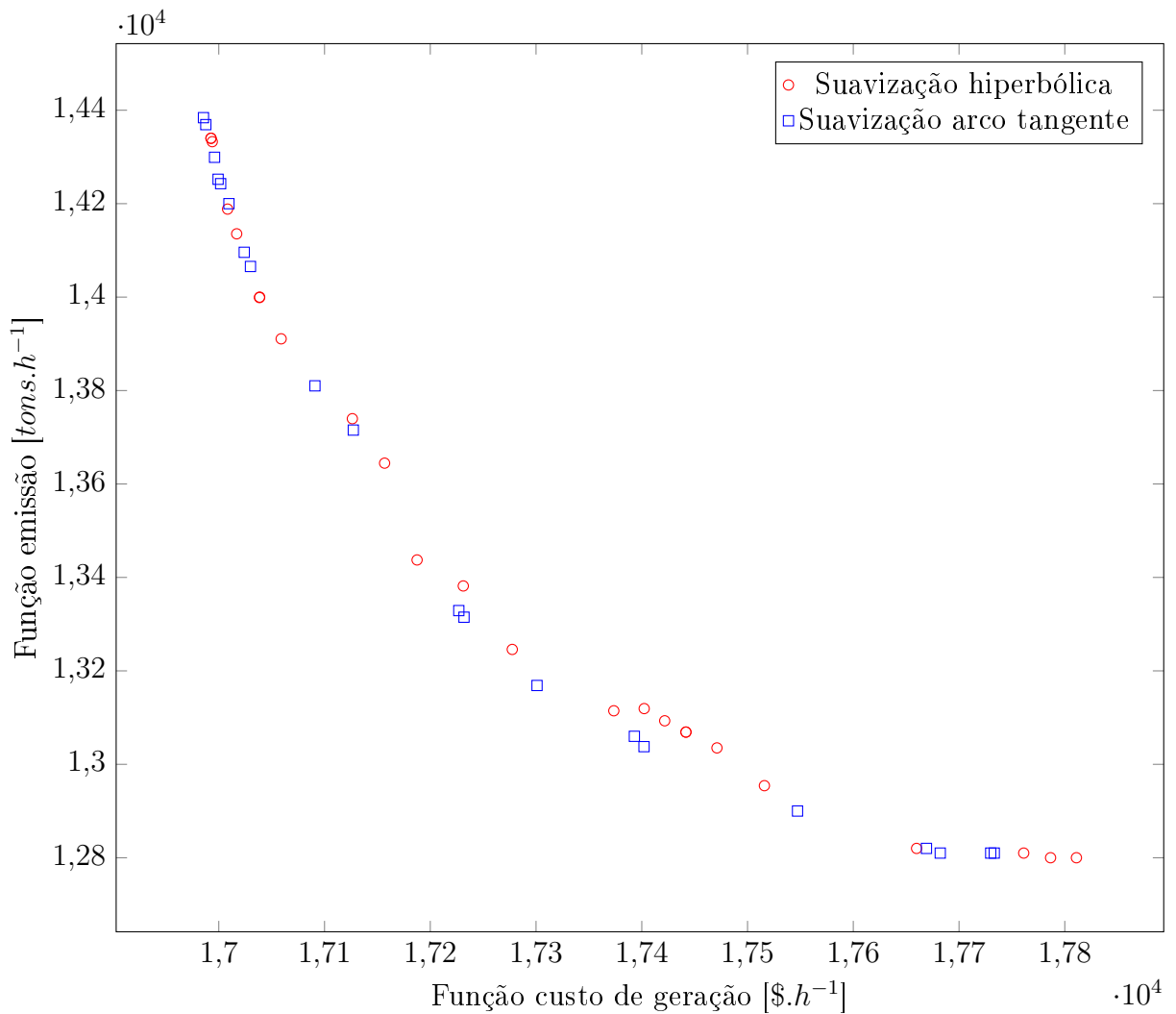


Figura 5.14: Caso 19 geradores: Comparação entre o método de suavização arco tangente e hiperbólica.

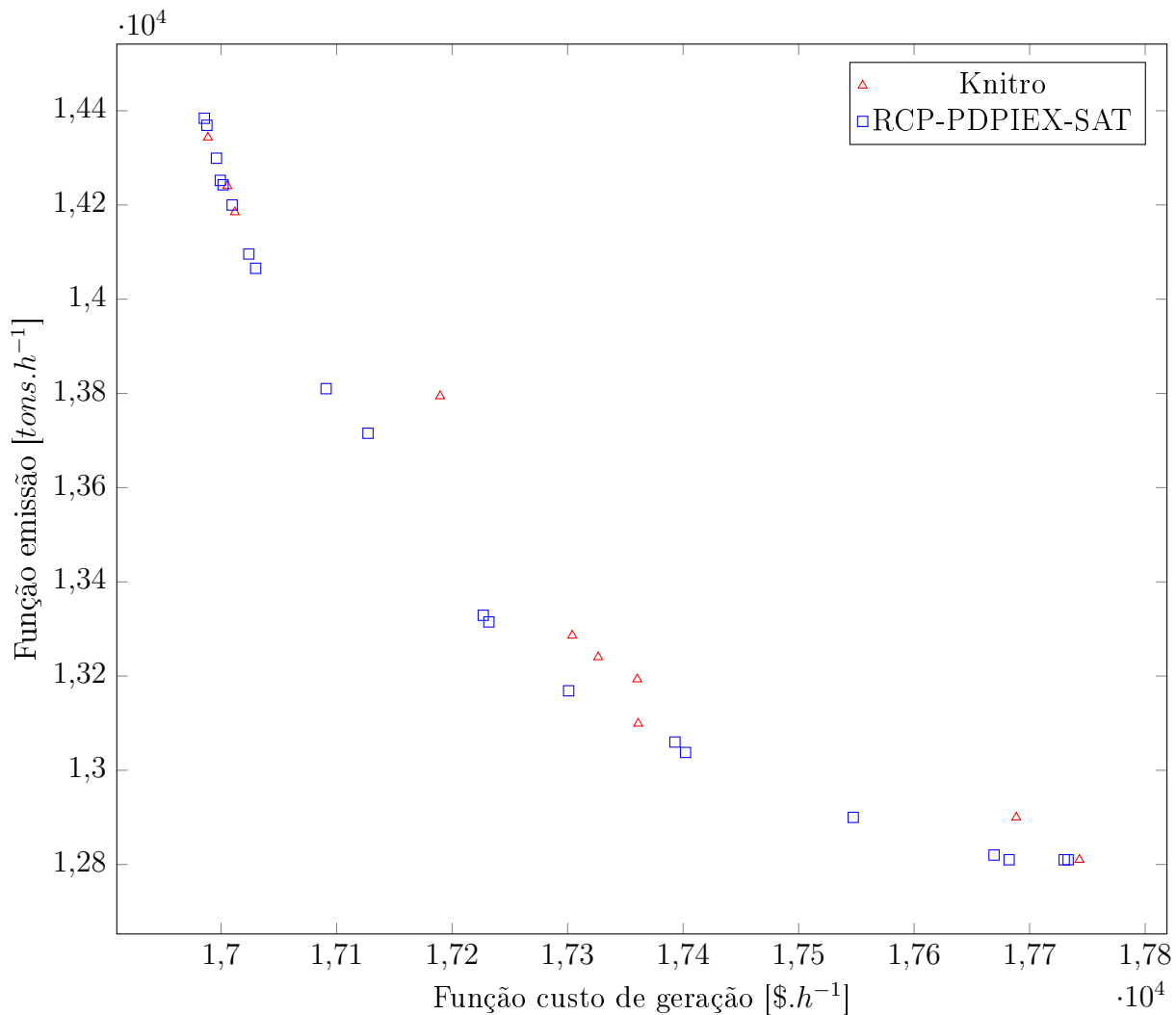


Figura 5.15: Caso 19 geradores:método de restrições canalizadas progressivas – comparação entre a metodologia RCP-PDPIEX-SAT e o pacote Knitro.

Os intervalos nos quais foram obtidas as soluções eficientes para o caso de 19 geradores estão apresentados na Tabela B.8 destacados em negrito.

A Tabela 5.27 mostra a comparação entre alguns valores de C_g obtidos pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT, o método PDPCBLM com suavização hiperbólica apresentado por Gonçalves (2015), pacote de otimização Knitro e a C_g original, considerando o caso teste de 19 unidades geradoras.

Tabela 5.27: Comparação ds valores de C_g para: RCP-PDPIEX-SAT, PDPBMLM com suavização hiperbólica, Knitro e C_g original, para o caso teste de 19 unidades geradoras.

Intervalo	RCP-PDPIEX-SAT	PDPBMLM:suavização hiperbólica	knitro	C_g original
[14300, 14500]	16985,499327	16992,56435	16992,175013	16985,547777
[14200, 14500]	16987,726928	16993,82933	16988,611421	16987,763518
[14000, 14300]	16999,341018	17038,64940	—	16999,375193
[13650, 13850]	17090,920175	17126,28894	—	17090,95330
[13600, 13750]	17127,191935	17156,78565	—	17127,226431
[12740, 12810]	17682,233340	17761,15253	17743,101599	17682,300471

Tabela 5.28: Módulo da diferença entre valores de C_g para: método de suavização arco tangente, suavização hiperbólica, Knitro e C_g original.

Intervalo	$ C_{gAT} - C_{gOR} $	$ C_{gHIP} - C_{gOR} $	$ C_{gKIN} - C_{gOR} $
[14300, 14500]	0,1	7	6,6
[14200, 14500]	0,03	6,1	0,9
[14000, 14300]	0,03	39,3	—
[13650, 13850]	0,03	35,3	—
[13600, 13750]	0,03	29,5	—
[12740, 12810]	0,06	78,8	60,8

Uma análise das Tabelas 5.27 e 5.28 mostra a eficiência do método proposto, uma vez que a distância entre os resultados obtidos no presente trabalho e a função original são menores quando comparadas às distâncias entre os resultados obtidos por Gonçalves (2015) e a função original e Knitro e função original. Vale ressaltar que em relação ao pacote Knitro, este determinou soluções para todos os subproblemas mono-objetivos definidos nos subintervalos considerados. Entretanto, na Figura 5.15 são mostradas apenas as 10 soluções não dominadas obtidas pelo pacote. Como pode ser observado na Figura 5.15, a metodologia RCP-PDPIEX-SAT determinou mais soluções eficientes do que o pacote para este caso, e as soluções eficientes determinadas pelo pacote de otimização foram dominadas pelas soluções obtidas através da metodologia RCP-PDPIEX-SAT.

5.5 Caso 40 Geradores

A Tabela B.10 (Apêndice B), fornece os coeficientes da função custo de geração, dos pontos de carregamento de válvula, limitantes máximos e mínimos de operação do sistema e coeficientes da função emissão de poluentes utilizados para o caso de 40 geradores. Os dados utilizados neste trabalho foram extraídos de Basu (2011) e a função custo é dada em dólar por hora ($\$.h^{-1}$) e a emissão em toneladas por hora ($tons.h^{-1}$). O problema foi solucionado com a determinação de várias faixas, entre os limites máximo e mínimo estabelecidos para a restrição ambiental, os valores são apresentados na Tabela B.12 que também se encontra no Apêndice B.

Os parâmetros utilizados para a inicialização do método são apresentados na Tabela 5.29.

Tabela 5.29: Inicialização PMDEA-PV: 40 geradores

Limitante da atualização do parâmetro de suavização	$\bar{\eta} = 10^{-3}$
Parâmetro de barreira/relaxação inicial	$\mu^0 = 1$
Fatores de atualização do parâmetro de barreira	$\tau = 0.3$
Fator de controle da escolha entre passo previsor ou corretor	$\chi = 1$
Fator de redução do passo	$\sigma = 0.9995$

Precisão de parada	$\varepsilon = 10^{-3}$
Número médio de iterações	40
Tempo computacional médio	3.23 segundos

Os pontos extremos obtidos na curva de soluções, valor mínimo da função emissão (máximo da função custo de geração) e valor mínimo da função custo de geração (máximo da função emissão), foram determinados através da resolução dos problemas de despacho mono-objetivo, econômico e ambiental e são dados na Tabela 5.31.

Tabela 5.31: Valores máximos e mínimos de C_g e C_e para o caso de 40 geradores.

Custos($\$.h^{-1}$)	Emissão($tons.h^{-1}$)
126746,2	65019,00
121475,5	75984,06

Para a determinação dos subintervalos foram considerados diferentes valores de δ . Inicialmente o valor de δ utilizado foi de 200 e então os valores de δ variaram em valores inteiros positivos e decrescentes, que possibilitaram efetuar um refinamento do método RCP (visto na seção 2.8) e encontrar um número maior de soluções eficientes do problema para o preenchimento da curva Pareto-ótima (Pareto eficiente) mostrados na Figura 5.17. Os valores utilizados de δ para o caso de 40 geradores variaram em valores inteiros no intervalo: $120 \leq \delta \leq 200$

A curva com todos os resultados é apresentada na Figura 5.16, após a eliminação dos pontos dominados, obtém-se a curva Pareto-ótima representada pela Figura 5.17.

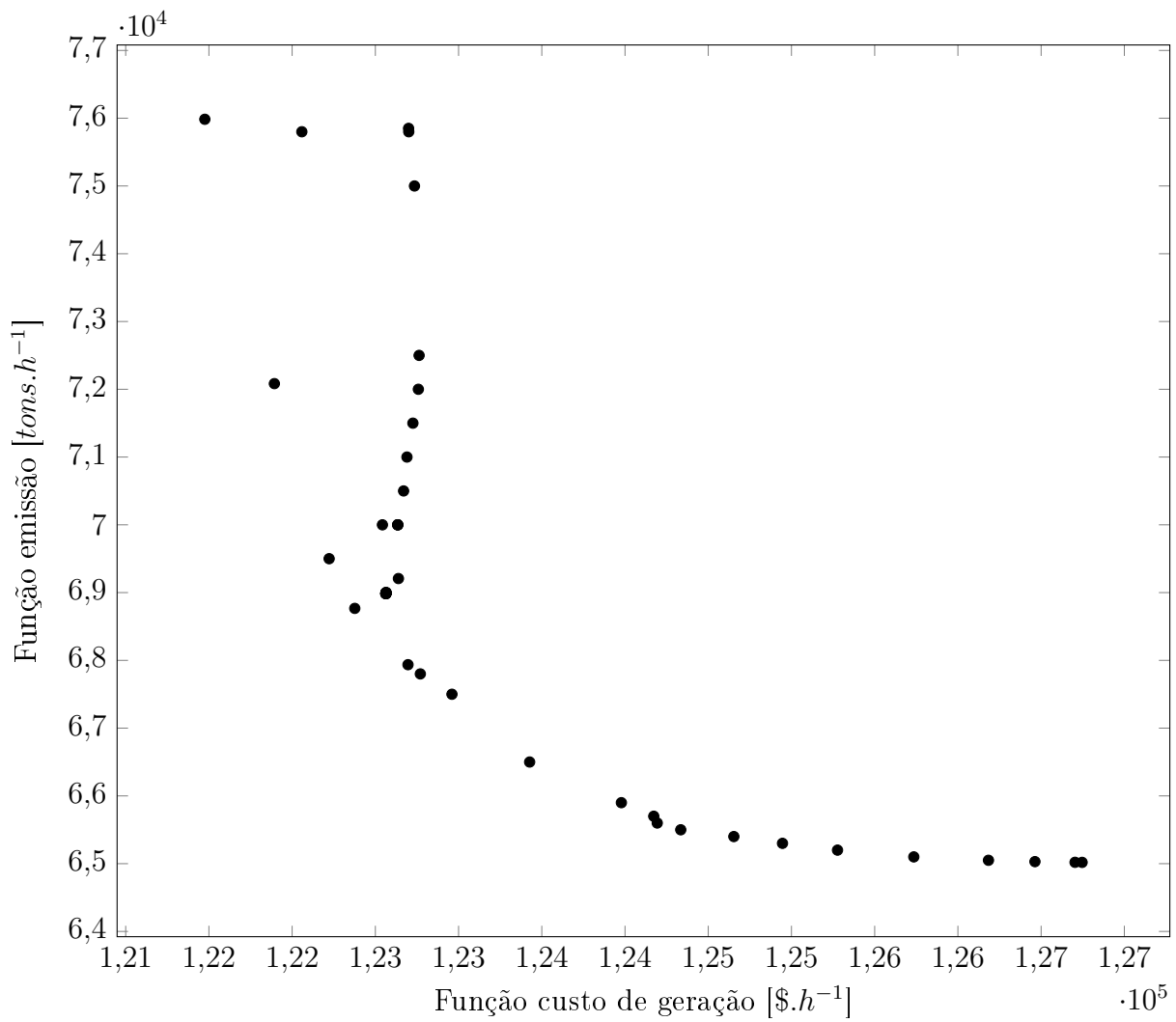


Figura 5.16: Caso 40 geradores: soluções obtidas pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT.

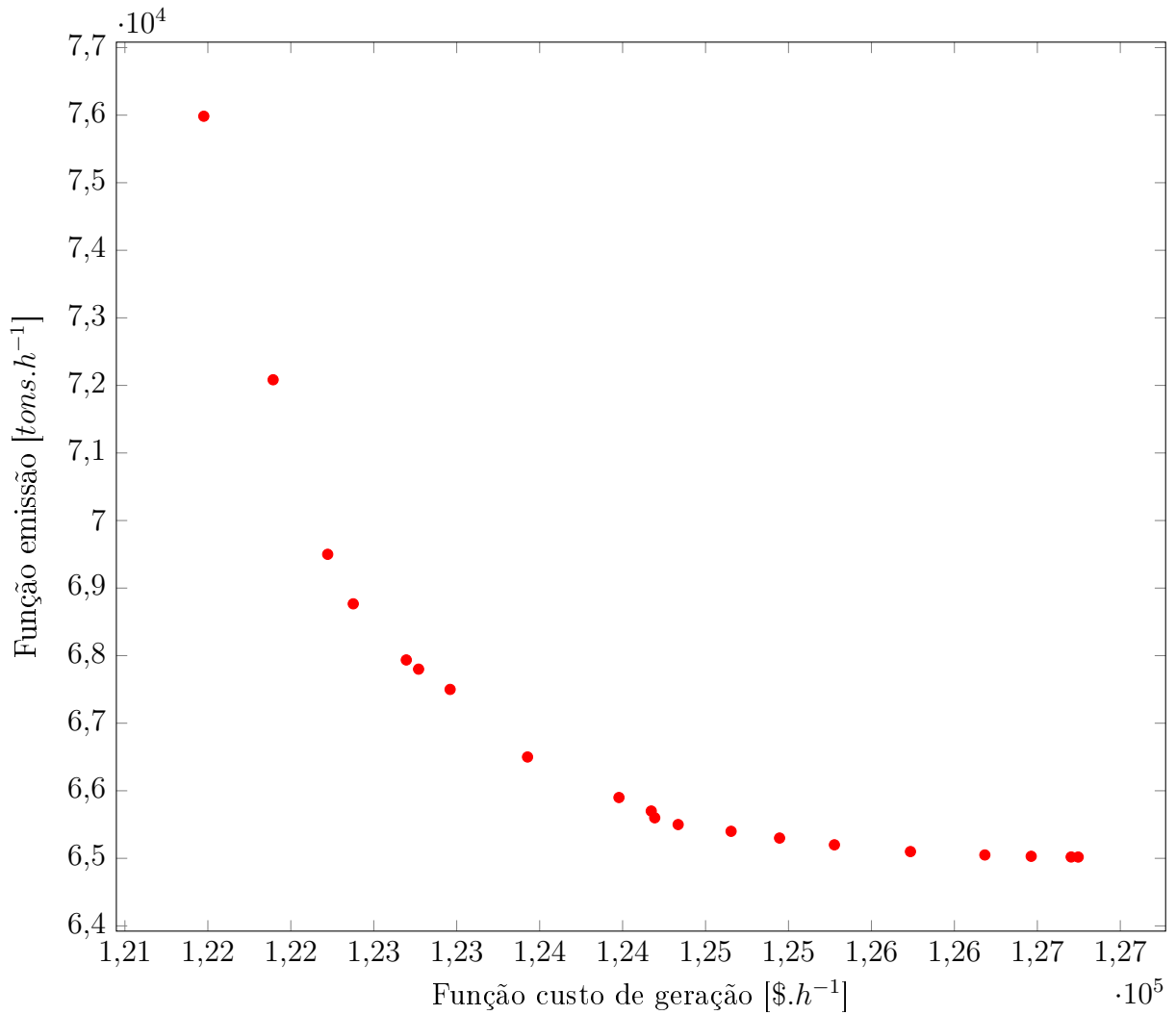


Figura 5.17: Curva Pareto-ótima caso 40 geradores: soluções eficientes obtidas pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT.

Análogo aos casos de 3, 6, 10 e 19 geradores, para o caso de 40 geradores foi realizada a comparação entre resultados obtidos pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT e o pacote de otimização Knitro Figura 5.15.

Para o caso de 40 geradores os resultados não foram comparados com os apresentados em Gonçalves (2015), pois tal trabalho não analisou este caso.

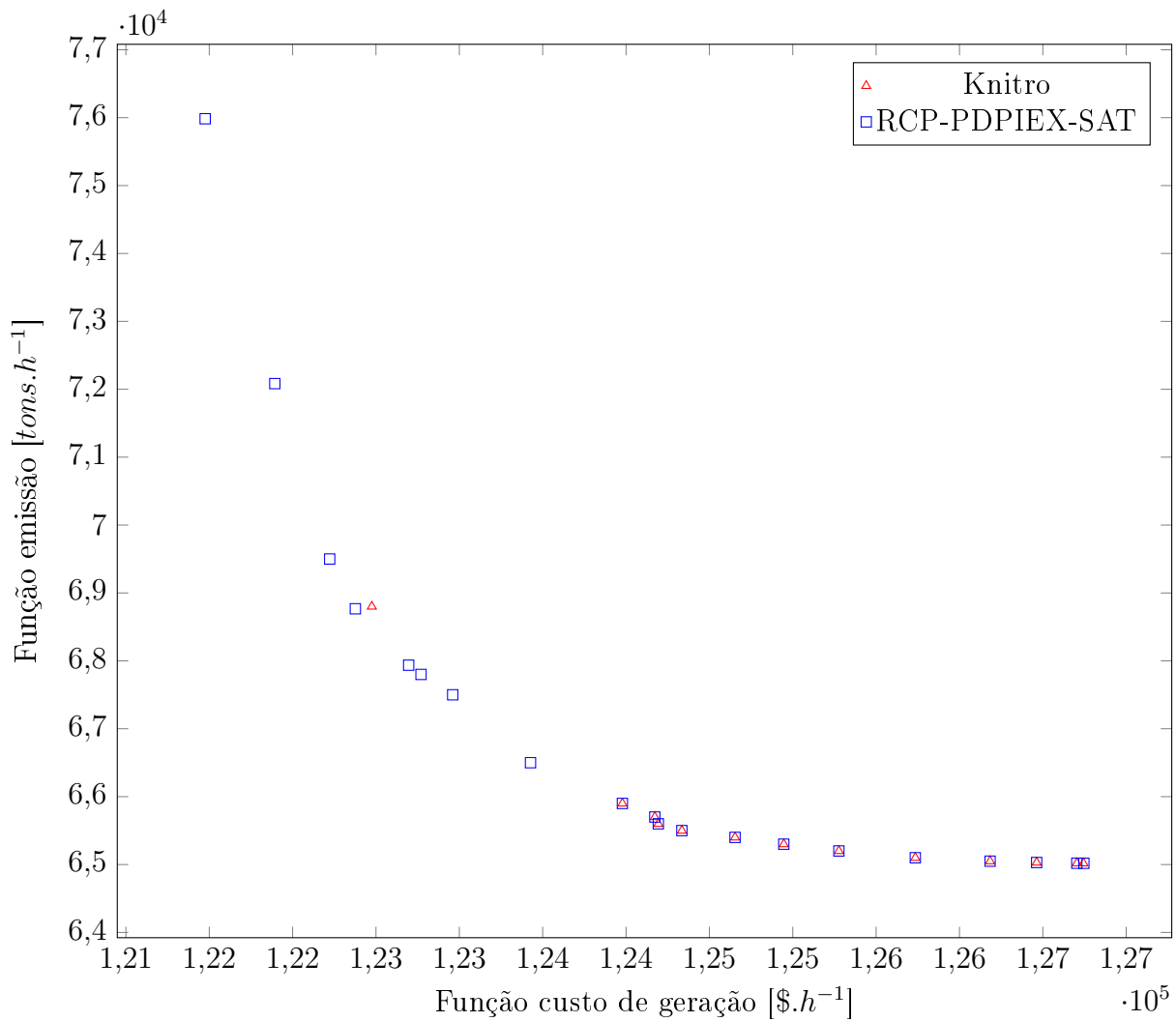


Figura 5.18: Caso 40 geradores: método de restrições canalizadas progressivas – comparação entre a metodologia RCP-PDPIEX-SAT e o pacote Knitro.

Os intervalos nos quais foram obtidas as soluções eficientes para o caso de 40 geradores estão apresentados na Tabela B.12 destacados em negrito.

A Tabela 5.32 mostra a comparação entre alguns valores de C_g obtidos pela metodologia RCP-PDPIEX-SAT, pacote de otimização Knitro e a C_g original, considerando o caso teste de 40 unidades geradoras.

Tabela 5.32: Comparação ds valores de C_g para: RCP-PDPIEX-SAT, Knitro e C_g original, para o caso teste de 40 unidades geradoras.

Intervalo	RCP-PDPIEX-SAT	knitro	C_g original
[64900, 65020]	126746,2	1126743,6	126751,02
[65280, 65400]	124653,8	124653,8	124658,03
[65580, 65700]	124172,6	124172,6	124176,5
[68600, 68800]	122376,3	—	122378,7
[69500, 69620]	122222,3	—	122226,1
[75800, 76000]	121475,4	—	121477,9

Tabela 5.33: Módulo da diferença entre valores de C_g para: RCP-PDPIEX-SAT, Knitro e C_g original.

Intervalo	$ C_{g_{AT}} - C_{g_{OR}} $	$ C_{g_{KIN}} - C_{g_{OR}} $
[64900, 65020]	4,82	7,42
[65280, 65400]	4,23	4,23
[65580, 65700]	3,9	3,9
[68600, 68800]	2,4	—
[69500, 69620]	3,8	—
[75800, 76000]	2,5	—

Uma análise das Tabelas 5.32 e 5.33 mostra a eficiência do método proposto, uma vez que a distância entre os resultados obtidos no presente trabalho e a função original são menores quando comparadas às distâncias entre os resultados pelo pacote de otimização Knitro e função original. Vale ressaltar que o pacote Knitro determinou soluções para todos os subproblemas mono-objetivos definidos nos subintervalos considerados. Entretanto, na Figura 5.18 são mostradas apenas as 13 soluções não dominadas obtidas pelo pacote. Como pode ser observado na Figura 5.18, a metodologia RCP-PDPIEX-SAT determinou mais soluções eficientes do que o pacote para este caso.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvida a metodologia RCP-PDPIEX-SAT, a qual foi aplicada ao PMDEA-PV utilizando as estratégias citadas para a determinação de um conjunto de soluções não-dominadas cujos valores obtidos para as funções de despacho econômico e ambiental, relativos a esta solução, possibilitaram a construção da curva de Pareto-ótima destes.

O algoritmo do método PDPCBLM, o qual acopla o método de suavização arco tangente, foi implementado em linguagem Matlab e com o auxílio do método de restrições canalizadas progressivas foi aplicado aos casos testes de 3, 6, 10, 19 e 40 unidades geradoras. Em cada caso testado, após a eliminação das soluções dominadas ou não eficientes, foi construída e esboçada a sua respectiva curva de Pareto-ótima.

A função de despacho econômico apresenta termos modulares devido à inserção de pontos de carregamento de válvula, assim, o PDE e conseqüentemente o PMDEA-PV, tornam-se não-lineares, não-convexos e não-diferenciáveis nestes pontos, tornando difícil sua resolução. O método de suavização arco tangente tratou os pontos modulares, possibilitando ao método PDPCBLM determinar soluções eficientes para o conjunto de subproblemas mono-objetivos associados ao PMDEA-PV e definidos pelo método RCP. Conforme foi mostrado pelos resultados obtidos, estas soluções possibilitaram a obtenção de valores Pareto-eficientes muito próximos da solução original dos subproblemas (ver Tabelas 5.9, 5.15, 5.21, 5.28 e 5.33). Além disso, o método de suavização proposto possibilitou a utilização de métodos clássicos e determinísticos de otimização para a resolução destes problemas, neste caso, o PDPCBLM.

O método RCP, proposto para a resolução do PMDEA-PV, possibilitou determinar novas soluções eficientes para os subproblemas associados a este problema, que melhoraram a disposição de valores Pareto-eficientes para a construção da curva de Pareto-ótima. As curvas não puderam ser determinadas pelos métodos da soma ponderada e ε -restrito.

Todo o trabalho desenvolvido, os resultados e considerações feitas mostram que a metodologia RCP-PDPIEX-SAT proposta neste trabalho, apresenta-se como uma boa

ferramenta para a resolução de problemas não lineares, não convexos e não diferenciáveis, tais como o PMDEA-PV solucionado neste trabalho.

O desenvolvimento do trabalho e da metodologia proposta somente foi possível com a colaboração e as contribuições divulgadas no trabalho de Gonçalves (2015), com as quais foi possível o entendimento do problema investigado, PMDEA-PV, a proposição da metodologia RCP-PDPIEX-SAT e a obtenção de resultados promissores e sensivelmente melhores do que aqueles já divulgados na literatura, de acordo com o que foi apresentado no Capítulo 5.

A continuidade deste trabalho poderá ser desenvolvida explorando-se, por exemplo, técnicas de solução do problema multiobjetivo relativas aos métodos de programação por compromisso ou programação por metas Jones & Tamiz (2010), os quais poderão ser acoplados ao método RCP e contribuirão para a melhoria do preenchimento e construção da curva de Pareto-ótima para o PMDEA-PV. Procedimentos envolvendo metodologias meta e math-heurísticas, também podem ser explorados em conjunto com a metodologia RCP-PDPIEX-SAT à resolução do problema em destaque e de outros problemas que se inserem nesta formulação.

Capítulo 7

Trabalhos Publicados

Santos, M.R.B, Balbo, A. R.,Gonçalves,E., Soler, E.M, Métodos de pontos interiores/exteriores, de restrições canalizadas progressivas e de suavização arco tangente, em problemas de despacho econômico e ambiental. *Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional*, Bauru – SP, 2015.

Santos, M.R.B, Balbo, A. R.,Gonçalves,E., Soler, E.M, Métodos híbridos de pontos interiores/exteriores e ε -restrito canalizado, com a técnica de suavização arco tangente, em problemas de despacho econômico/ambiental com a inserção de pontos de válvula. *XXII Simpósio de Engenharia de Produção – SIMPEP*, trabalho premiado como segundo melhor artigo na Área Temática de Pesquisa Operacional, Bauru – SP, 2015.

Santos, M.R.B, Balbo, A. R., Soler, E.M, Métodos de pontos interiores/exteriores e de restrições canalizadas progressivas, com a técnica de suavização arco tangente, em problemas de despacho econômico/ambiental. *V Seminário da Pós-Graduação em Engenharia Elétrica*, Bauru – SP, 2015.

Santos, M.R.B, Balbo, A. R. Métodos híbridos de pontos interiores/exteriores e de aproximantes de funções em problemas multiobjetivo de despacho econômico e ambiental com restrições de representação da transmissão do sistema. *IV Seminário da Pós-Graduação em Engenharia Elétrica*, Bauru – SP, 2014.

Referências Bibliográficas

- Agency, I. E. (2015). International energy agency (2015). *Key World Energy Statistics 2015*.
- Aliano, F. A. (2015). *Novas extensões de técnicas de escalarizações no problema de corte unidimensional inteiro multiobjetivo*. PhD thesis, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP.
- ANEEL (2008). *Atlas de energia elétrica do Brasil*. Agência nacional de energia elétrica, 3 edition.
- ANEEL (2016). Agência Nacional de Energia Elétrica,. <http://www.aneel.gov.br/aplicacoes/capacidadebrasil/capacidadebrasil.cfm>.
- Balamurugan, K., Muralisachithndam, R., & Krishnan, S. R. (2014). Differential evolution based solution for combined economic and emission power dispatch with valve loading effect. *International Journal on Electrical Engineering and Informatics*, 6(1).
- Basu, M. (2011). Economic environmental dispatch using multi-objective differential evolution. *Applied Soft Computing*, 11(2), 2845 – 2853.
- Carroll, C. W. & Fiacco, A. V. (1961). The created response surface technique for optimizing nonlinear restrained systems. *Operations Research*, 9(2), 169–185.
- Chen, X. (2012). Smoothing methods for nonsmooth, nonconvex minimization. *Mathematical Programming*, 134(1), 71–99.
- Das, I. & Dennis, J. (1997). A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for pareto set generation in multicriteria optimization problems. *Structural optimization*, 14(1), 63–69.
- Ehrgott, M. (2000). Multicriteria optimization. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*.
- El-Hawary, M. E., El-Hawary, F., & Mbamalu, G. A. N. (1992). Nox emission performance models in electric power systems. *Proceedings of the 1992 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, 2.

- Frisch, K. R. (1955). *The logarithmic potential method of convex programming*. Technical report, University Institute of Economics, Oslo, Norway.
- Gent, M. R. & Lamont, J. W. (1971). Minimum-emission dispatch. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-90(6), 2650–2660.
- Gonçalves, E. (2015). *Métodos Híbridos de Pontos interiores/exteriores e de aproximantes de função em problemas multiobjetivo de despacho econômico/ambiental*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru.
- Griva, I. & Polyak, R. A. (2006). Primal-dual nonlinear rescaling method with dynamic scaling parameter update. *Mathematical Programming*, 106(2), 237–259.
- Haimes, Y. Y. (1971). On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, SMC-1(3), 296–297.
- Happ, H. (1977). Optimal power dispatch - a comprehensive survey. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, 96(3), 841–854.
- Jones, D. F. & Tamiz, M. (2010). *Practical goal programming*. Springer.
- Mehrotra, S. (1992). On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, 2(4), 575–601.
- Messac, A., Puemi-Sukam, C., & Melachrinoudis, E. (2000). Aggregate objective functions and pareto frontiers: Required relationships and practical implications. *Optimization and Engineering*, 1(2), 171–188.
- Miettinen, K. (1999). *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Boston: Kluwer.
- Nocedal, J. & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization*. New York: Springer.
- Pinheiro, R. B. N. (2012). *Um método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores barreira logarítmica modificada, com estratégias de global e de ajuste cúbico, para problemas de programação não-linear e não-convexa*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, SP.
- Pinheiro, R. B. N., Balbo, A. R., Baptista, E. C., & Nepomuceno, L. (2015). Interior-exterior point method with global convergence strategy for solving the optimal reactive power flow problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*.

- Polyak, R. & Teboulle, M. (1997). Nonlinear rescaling and proximal-like methods in convex optimization. *Mathematical Programming*, 76(2), 265–284.
- Polyak, R. A. (1992). Modified barrier functions. *Mathematical Programming*, 54.
- Ravi, G., Chakrabarti, R., & Choudhuri, S. (2006). Nonconvex economic dispatch with heuristic load patterns using improved fast evolutionary program. *Electric Power Components and Systems*, 34(1), 37–45.
- Rivlin, T. (1981). An introduction to the approximation of functions. *Dover Publications*.
- Senthil, K. & Manikandan, K. (2010). Economic thermal power dispatch with emission constraint and valve point effect loading using improved tabu search algorithm. *International Journal of Computer Applications*, 3(9).
- Silva, D. N. (2014). *Método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores e exteriores com estratégias de correção de inércia e suavização hiperbólica aplicado ao problema de despacho econômico com ponto de válvula e representação da transmissão*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru.
- Sinha, N., C. R. . C. R. (2003). Evolutionary programming techniques for economic load dispatch. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 7(1), 83–94.
- Smil, V. (2004). World history and energy. *Encyclopedia of Energy*, 6.
- Sousa, V. A. (2006). *Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo Via Método da Função Lagrangiana Barreira Modificada*. PhD thesis, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.
- Souza, M. F. (2010). *Suavização hiperbólica aplicada à otimização de geometria molecular*. PhD thesis, COPPE- Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Stanzani, A. L. (2012). *Método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores em problemas multiobjetivo de despacho econômico e ambiental*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru.
- Steinberg, M. J. & Smith, T. H. (1934). The theory of incremental rates and their practical application to load division – part i. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 53(3), 432–445.
- Torres, G. L. (1998). *Nonlinear Optimal Power Flow by Interior and Non-Interior Point Methods*. PhD thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.

- Walters, D. C. & Sheble, G. B. (1993). Genetic algorithm solution of economic dispatch with valve point loading. *IEEE Transactions on Power Systems*, 8(3), 1325–1332.
- Wood, A. & Wollenberg, B. (1984). *Power generation, operation, and control*. Wiley.
- Wu, Y.-C., Debs, A., & Marsten, R. (1994). A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 9(2), 876–883.

Apêndice A

Conceitos básicos da teoria multiobjetivo

Neste apêndice são apresentados alguns conceitos e teoremas em otimização multiobjetivo, os quais são importantes para o desenvolvimento dos capítulos 2 (seção 2.4 e 2.5), e 5, em que são mostrados os resultados obtidos, pela metodologia utilizada para a resolução do PMDEA. Todas as definições e conceitos deste apêndice foram baseadas em Ehrgott (2000) e Jones & Tamiz (2010).

A.1 Conceitos e Definições

Quando um problema de otimização envolve apenas uma função objetivo, este problema é chamado de *problema de otimização mono-objetivo*. Porém, os problemas que envolvem mais de uma função objetivo é denominado de *problema de otimização multi-objetivo*.

Definição A.1. (Problema geral de otimização multiobjetivo). Um problema de otimização multiobjetivo tem um número $r > 1$ de funções objetivos que devem ser minimizadas, sujeito a um conjunto viável $\chi \in \mathbb{R}^n$. A forma geral de um problema de otimização multiobjetivo é

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z_1 &= f_1(x) \\ \text{Minimize } z_2 &= f_2(x) \\ \dots & \dots \\ \text{Minimize } z_r &= f_r(x) \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\text{sujeito a } x \in \chi = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, l\},$$

onde:

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$: vetor das variáveis decisórias;
- $z_k = f_k(x)$: k -ésima função objetivo a ser minimizada, $k = 1, \dots, r$;
- χ : espaço de decisão ou factível, gerado pelas l restrições $g_j(x) \leq 0, x \in \mathbb{R}^n$.

Definição A.2. (Espaço objetivo). O espaço $Z \in \mathbb{R}^r$ gerado pela aplicação das r funções objetivos no espaço χ é chamado *objetivo*. Mais formalmente, $Z = \{z \in \mathbb{R}^r : z_r = f_r(x), r = 1, \dots, l, \forall x \in \chi\}$.

Definição A.3. (Dominância). Uma solução x^1 domina outra solução x^2 , ambas pertencentes a um conjunto χ , se ambas condições a seguir são satisfeitas:

1. A solução x^1 não é pior que a solução x^2 em todos os objetivos, isto é, $f_k(x^1) \leq f_k(x^2), k = 1, \dots, r$.
2. A solução x^1 é estritamente melhor que a solução x^2 em pelo menos uma componente $\bar{k} \in \{1, \dots, r\}$, isto é, $f_{\bar{k}}(x^1) < f_{\bar{k}}(x^2)$.

No caso em que x^1 domina x^2 , utiliza-se a notação $x^1 \preceq x^2$. Quando x^1 não domina x^2 , escreve-se $x^1 \not\preceq x^2$, onde $x \preceq y$ se, e somente se, $x_i \leq y_i$ e $x_j < y_j$ para algum $j = 1, \dots, n$.

Definição A.4. (Solução eficiente). Uma solução $x^* \in \chi$ é chamada *eficiente*, se não existe uma outra solução $x \in \chi$, de maneira que $x \preceq x^*$. Uma solução *eficiente* também é denominada de *solução Pareto eficiente*, *Pareto-ótima* ou *não dominada no espaço objetivo*.

De acordo com Jones & Tamiz (2010), uma solução de um problema multiobjetivo é Pareto eficiente se não existe nenhuma outra solução viável que é tão boa em relação a todos os objetivos e estritamente melhor no que diz respeito a pelo menos um objetivo.

Definição A.5. (Conjunto eficiente). O *conjunto eficiente* denotado por χ^* são todos os elementos de χ que não são dominados por nenhum membro de χ , isto é, $\chi^* = \{x^* \in \chi : x \not\preceq x^*, \forall x \in \chi\}$.

Definição A.6. (Solução não eficiente). Uma solução de um problema multiobjetivo é *não eficiente*, se, outra solução viável que existe é pelo menos tão boa no que diz respeito a todos os objetivos e estritamente melhor no que diz respeito a pelo menos um objetivo. Uma solução *não eficiente* também é denominada de *solução Pareto ineficiente*, *Pareto sub-ótima* ou *dominada no espaço objetivo*.

Definição A.7. (Ponto não-dominado). Um ponto z^* no espaço objetivo é chamado de *não-dominado* se sua imagem inversa é uma solução eficiente, isto é, $z^* = f(x^*)$.

Definição A.8. (Ponto ideal). Um ponto no espaço objetivo em que cada objetivo de um problema de otimização multiobjetivo leva o seu valor ótimo quando otimizado individualmente, dentro da região viável, é conhecido como *ponto ideal*.

Definição A.9. (Ponto nadir). O *ponto nadir* é definido como o pior valor para cada objetivo individual dentre aqueles da fronteira de Pareto.

Em geral o ponto nadir é computacionalmente difícil de ser obtido. Entretanto, para o problema bi-objetivo, ele é facilmente calculado de acordo com a seguinte proposição:

Proposição A.1 Dado um problema de otimização bi-objetivo, no conjunto de soluções eficientes, o valor mínimo de uma função objetivo é o valor máximo da outra e vice-versa.

De acordo com a Proposição A.1, um problema de otimização bi-objetivo, envolvendo as funções f_1 e f_2 , estabelece que essas são funções conflitantes entre si.

O ponto nadir não deve ser confundido com a solução cujas componentes são os maiores valores possíveis para as funções objetivo consideradas no espaço Z de soluções do problema bi-objetivo, a qual é denominada de ponto anti-ideal.

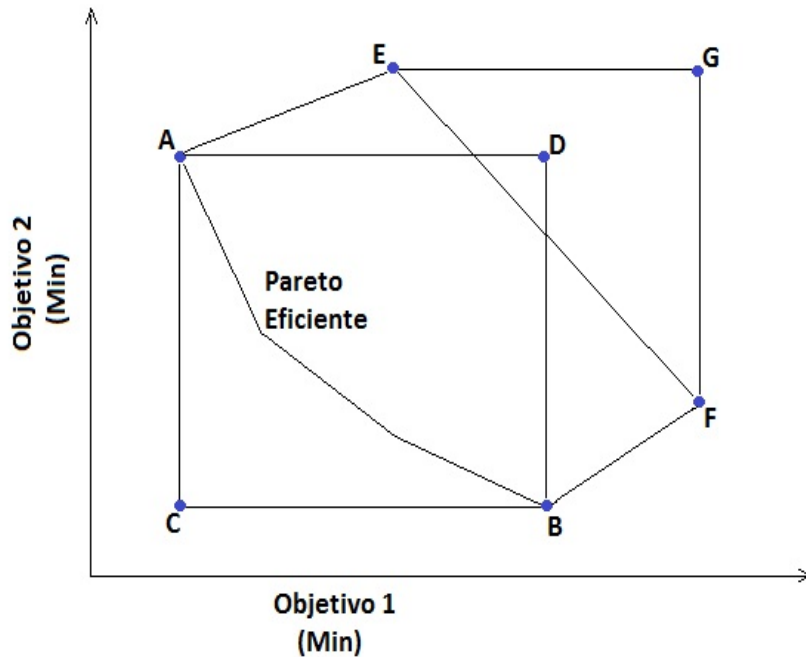


Figura A.1: Representação gráfica do espaço objetivo para o modelo bi-objetivo.

Fonte: Jones & Tamiz (2010)

Em relação à Figura A.1, os principais pontos observados são apontados à seguir:

- A: ponto lexicográfico com o menor valor para a função objetivo 1 e o maior valor para a função objetivo 2, dentre os pontos da fronteira de Pareto.
- B: ponto lexicográfico com o menor valor para a função objetivo 2 e o maior valor para a função objetivo 1, dentre os pontos da fronteira de Pareto.
- C: Ponto ideal (Definição A.8), também conhecido como ponto utópico.
- D: Ponto nadir (Definição A.9).
- E: É o ponto que contém o maior valor possível para a função objetivo 2, dentre aqueles que estão no espaço objetivo do problema bi-objetivo.
- F: É o ponto que contém o maior valor possível para a função objetivo 1, dentre aqueles que estão no espaço objetivo do problema bi-objetivo.

- G: Ponto anti-ideal. É o ponto definido pelos maiores valores possíveis definidos para a função objetivo 1 e a função objetivo 2, dentre aqueles do espaço objetivo do problema bi-objetivo.

Apêndice B

Dados e Resultados Numéricos

Este apêndice apresenta os dados dos sistemas elétricos utilizados e os resultados numéricos obtidos para o PMDEA-PV em cada um dos casos-teste, com sistema de 6, 10 e 19 geradores.

As variáveis $(a)_i$, $(b)_i$ e $(c)_i$ são os coeficientes da função despacho econômico, d e e são os valores utilizados para os pontos de carregamento de válvula e P_i^{inf} e P_i^{sup} são respectivamente os limites operacionais inferiores e superiores de saída de cada unidade geradora i . As variáveis $(A)_i$, $(B)_i$ e $(C)_i$ são os coeficientes da função emissão.

O despacho econômico é calculado em unidade monetária (dólar por hora) e representado por $\$.h^{-1}$. Já o despacho ambiental é calculado em quantidade de emissão, para o caso de 3 e 6 geradores $kg.h^{-1}$, para os casos de 10, 19 e 40 geradores, $tons.h^{-1}$.

B.1 Caso 6 Geradores

Tabela B.1: Dados 6 geradores

Unidade geradora i	Função custo de geração ($$.h^{-1}$)						Função emissão ($kg.h^{-1}$)					
	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	P_i^{inf}	P_i^{sup}	A_i	B_i	C_i		
1	0,00375	2	0	120	0,073	50	200	0,00419	0,32767	13,85932		
2	0,0175	1,75	0	50	0,032	20	80	0,00419	0,32767	13,85932		
3	0,0625	1	0	30	0,051	15	50	0,00683	-0,54551	40,2669		
4	0,00834	3,25	0	25	0,026	10	35	0,00683	-0,54551	40,2669		
5	0,025	3	0	25	0,026	10	30	0,00461	-0,51116	42,89553		
6	0,025	3	0	30	0,048	12	40	0,00461	-0,51116	42,89553		
Demanda 283,4 MW												

Tabela B.2: Região delimitada de soluções factíveis para o caso de 6 geradores

Região [C_e^{inf} , C_e^{sup}]	$C_g(\$.h^{-1})$	$C_g(kg.h^{-1})$
[339,342]	860, 320472	341, 476184
[342, 345]	898, 24902	344, 99
[340,343]	860, 320472	341, 47618
[337,340]	860, 650048	340
[340,342]	860, 320472	341, 476184
[340,335]	861, 813492	335
[331,334]	862, 037392	334
[327, 330]	862, 894211	330
[328,330]	862, 885989	330
[326,329]	863, 093812	329
[322,325]	864, 060162	325
[322,324]	864, 336988	324
[318,320]	865, 597063	320
[316,319]	865, 952837	319
[310,312]	868, 980108	312
[308,310]	870, 047071	310, 000001
[305,308]	871, 187894	308
[303, 305]	873, 028222	305
[303,305]	873, 019628	305
[298,300]	876, 549856	300
[292,295]	880, 962647	295
[288,290]	886, 460843	290
[283, 285]	985, 955648	285
[283,285]	893, 356306	285
[281,284]	894, 946841	284
[281,283]	896, 622233	283
[278, 280]	966, 462851	280
[278,280]	904, 580253	280
[277,279]	911, 382434	279
[275,278]	918, 209648	278
[275,277]	925, 048856	277
[273,276]	931, 891071	276
[272, 275]	945, 580018	275
[272, 275]	943, 36325	275
[272,275]	938, 721058	275

[268,270]	947, 540361	270
[262, 265]	1005, 916455	265
[262,265]	953, 071945	265
[250, 260]	958, 681229	260
[258,260]	958, 672635	260
[253,255]	964, 192965	255
[248,250]	969, 714976	250
[242,245]	977, 255382	245
[238,240]	987, 885886	240
[236,239]	990, 499706	239
[231,234]	1007, 391919	234, 000001
[230,233]	1011, 919602	233, 000001
[230,232]	1024, 406054	232
[228.5,231.5]	1035, 780562	231, 5
[229,231]	1047, 537522	231
[228.5,230.5]	1059, 655862	230, 5
[227,230]	1072, 107086	230
[227.5,229.5]	1084, 852624	229, 5
[228,230]	1072, 107084	228, 546595

B.2 Caso 10 Geradores

Tabela B.4: Dados 10 geradores

Unidade geradora i	Função custo de geração ($$.h^{-1}$)					Função emissão ($kg.h^{-1}$)				
	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	P_i^{inf}	P_i^{sup}	A_i	B_i	C_i
1	0,12951	40,5407	1000,403	33	0,0174	10	55	0,04702	-3,9864	360,0012
2	0,10908	39,5904	950,606	25	0,0178	20	80	0,04652	-3,9524	350,0056
3	0,12511	36,5104	900,705	32	0,0162	47	120	0,04652	-3,9023	330,0056
4	0,12111	39,5104	800,705	30	0,0168	20	130	0,04652	-3,9023	330,0056
5	0,15247	38,5390	756,799	30	0,0148	50	160	0,00420	0,32770	13,85930
6	0,10587	46,1592	451,325	20	0,0163	70	240	0,00420	0,32770	13,85930
7	0,03546	38,3055	1243,531	20	0,0152	60	300	0,00680	-0,5455	40,26690
8	0,02803	40,3965	1049,998	30	0,0128	70	340	0,00680	-0,5455	40,26690
9	0,02111	36,3178	1658,569	60	0,0136	135	470	0,00460	-0,5112	42,89550
10	0,01799	38,2704	1356,659	40	0,0141	150	470	0,00460	-0,5112	42,89550

Demanda 2000 MW

Tabela B.5: Região delimitada de soluções factíveis para o caso de 10 geradores

Região [$C_e^{\text{inf}}, C_e^{\text{sup}}$]	$C_g(\$.h^{-1})$	$C_g(kg.h^{-1})$
[4080, 5000]	106166, 108427	4083, 234994
[4060, 4080]	106166, 289965	4080
[4050, 4060]	106175, 989712	4060, 010662
[4000, 4050]	106185, 469935	4050
[4000, 4020]	106226, 833262	4020
[4000, 4010]	106245, 824755	4010
[3990, 4000]	106268, 172508	4000
[3980, 3990]	106293, 487059	3990
[3900, 3950]	106424, 220245	3950
[3800, 3850]	106955, 628448	3850
[3820, 3830]	107099, 500231	3830
[3830, 3840]	107025, 799852	3840
[3750, 3800]	107343, 368665	3800
[3700, 3750]	107837, 196517	3750
[3710, 3740]	107951, 160014	3740
[3650, 3700]	108467, 878064	3700
[3660, 3680]	108768, 431102	3680
[3600, 3650]	109283, 960058	3650
[3610, 3630]	109680, 616416	3630
[3610, 3620]	109907, 689654	3620
[3600, 3610]	110162, 962148	3610
[3550, 3600]	110453, 022528	3600
[3580, 3590]	110787, 491042	3590
[3570, 3580]	111181, 787867	3580
[3560, 3570]	111662, 134093	3570

B.3 Caso 19 Geradores

Tabela B.7: Dados 19 geradores

Unidade geradora i	Função custo de geração ($\$.h^{-1}$)							Função emissão ($tons.h^{-1}$)			
	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	P_i^{inf}	P_i^{sup}	A_i	B_i	C_i	
1	0,0097	6,8	119	90	0,72	100	300	0,018	-1,81	24,3	
2	0,0055	4	90	79	0,05	120	438	0,033	-2,5	27,023	
3	0,0055	4	45	0	0	100	250	0,033	-2,5	27,023	
4	0,0025	0,85	0	0	0	8	25	0,0136	-1,3	22,07	
5	0	5,28	0,891	0	0	50	63,75	0,018	-1,81	24,3	
6	0,008	3,5	110	0	0	150	300	0,033	-2,5	27,023	
7	0	5,439	21	0	0	50	63,75	0,0126	-1,36	23,04	
8	0,0075	6	88	50	0,52	100	500	0,036	-3	29,03	
9	0,0085	6	55	0	0	200	600	0,04	-3,2	27,05	
10	0,009	5,2	90	0	0	15	40	0,0136	-1,3	22,07	
11	0,0045	1,6	65	0	0	50	150	0,0139	-1,25	23,01	
12	0,0025	0,85	78	58	0,02	25	75	0,0121	-1,27	21,09	
13	0	2,55	49	0	0	50	63,75	0,018	-1,81	24,3	
14	0,0045	1,6	85	0	0	0	95	0,014	-1,2	23,06	
15	0,0065	4,7	80	92	0,75	20	220	0,036	-3	29	
16	0,0045	1,4	90	0	0	15	80	0,0139	-1,25	23,01	
17	0,0025	0,85	10	0	0	15	80	0,0136	-1,3	22,07	
18	0,0045	1,6	25	0	0	50	230	0,018	-1,81	24,3	
19	0,008	5,5	90	0	0	400	500	0,04	-3	27,01	

Demanda 2908 MW

Tabela B.8: Região delimitada de soluções factíveis para o caso de 19 geradores

Região $[C_e^{\text{inf}}, C_e^{\text{sup}}]$	$C_g (\$.h^{-1})$	$C_e (\text{tons}.h^{-1})$
[12730, 12810]	17753, 971263	12810, 000109
[12740, 12810]	17682, 233340	12810, 000204
[12750, 12810]	17733, 310448	12810, 000000
[12770, 12810]	17729, 939941	12810, 000301
[12700, 12820]	17669, 182345	12820, 000009
[12700, 12820]	17714, 175876	12820, 000007
[12800, 12900]	17628, 123092	12900, 000092
[12800, 12900]	17547, 275553	12900, 000000
[13000, 13200]	17300, 927230	13168, 727972
[12900, 13100]	17392, 975369	13059, 933712
[12900, 13050]	17402, 112922	13037, 810422
[13000, 13200]	17319, 419533	13167, 385958
[13000, 13200]	17302, 6382002	13188, 897728
[13000, 13200]	17331, 337785	13147, 950350
[13100, 13400]	17240, 868047	13323, 644850
[13200, 13400]	17226, 963394	13329, 013239
[13100, 13400]	17292, 085102	13234, 291488
[13000, 13350]	17236, 454514	13328, 577980
[13300, 13500]	17231, 874894	13314, 879069
[13250, 13400]	17313, 911703	13400, 000070
[13600, 13750]	17127, 191935	13715, 393036
[13600, 13750]	17153, 433287	13712, 099533
[13650, 13850]	17108, 521860	13848, 441913
[13650, 13850]	17090, 920175	13810, 081922
[13850, 14200]	17032, 746689	14080, 956477
[13850, 14200]	17029, 941762	14065, 562647
[13850, 14200]	17021, 166972	14187, 011160
[14000, 14300]	16995, 990390	14299, 291248
[14000, 14300]	17015, 580058	14231, 006388
[14000, 14300]	17025, 567187	14109, 018169
[14000, 14300]	17008, 347985	14257, 538877
[14000, 14300]	16999, 341018	14252, 226346
[14000, 14300]	17024, 061690	14095, 895942
[14000, 14300]	17001, 751732	14242, 851735
[14000, 14300]	17012, 741069	14199, 433723

[13950, 14250]	17015, 580059	14231, 006397
[13950, 14250]	17045, 257044	14238, 657551
[14100, 14300]	17014, 771320	14264, 746001
[14150, 14300]	16994, 338178	14286, 177757
[14200, 14500]	17009, 592062	14200, 000174
[14200, 14500]	16987, 726928	14369, 190890
[14300, 14500]	17000, 413551	14300, 000006
[14300, 14500]	16985, 499327	14384, 081713

B.4 Caso 40 Geradores

Tabela B.10: Dados 40 geradores

Região [F_a^{inf}, F_a^{sup}]	(x_i)	μ inicial	η inicial	Função custo de geração ($$.h^{-1}$)				Função emissão ($tons.h^{-1}$)											
				a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	P_i^{inf}	A_i	B_i	C_i							
Unidade geradora i																			
1	0.0069	6.73	94.705	100	0.084	36	114	0.048	-2.22	60									
2	0.0069	6.73	94.705	100	0.084	36	114	0.048	-2.22	60									
3	0.02028	7.07	309.54	100	0.084	60	120	0.0762	-2.36	100									
4	0.00942	8.18	369.03	150	0.063	80	190	0.054	-3.14	120									
5	0.0114	5.35	148.89	120	0.077	47	97	0.085	-1.89	50									
6	0.01142	8.05	222.33	100	0.084	68	140	0.0854	-3.08	80									
7	0.00357	8.03	287.71	200	0.042	110	300	0.0242	-3.06	100									
8	0.00492	6.99	391.98	200	0.042	135	300	0.031	-2.32	130									
9	0.00573	6.60	455.76	200	0.042	135	300	0.0335	-2.11	150									
10	0.00605	12.9	722.82	200	0.042	130	300	0.425	-4.34	280									
11	0.00515	12.9	635.2	200	0.042	94	375	0.0322	-4.34	220									
12	0.00569	12.8	654.69	200	0.042	94	375	0.0338	-4.28	225									
13	0.00421	12.5	913.4	300	0.035	125	500	0.0296	-4.18	300									
14	0.00752	8.84	1760.4	300	0.035	125	500	0.0512	-3.34	520									
15	0.00752	8.84	1760.4	300	0.035	125	500	0.0496	-3.55	510									
16	0.00752	8.84	1760.4	300	0.035	125	500	0.0496	-3.55	510									
17	0.00313	7.97	647.85	300	0.035	220	500	0.0151	-2.68	220									
18	0.00313	7.95	649.69	300	0.035	220	500	0.0151	-2.66	222									

19	0.00313	7.97	647.83	300	0.035	242	550	0.0151	-2.68	220
20	0.00313	7.97	647.81	300	0.035	242	550	0.0151	-2.68	220
21	0.00298	6.63	785.96	300	0.035	254	550	0.0145	-2.22	290
22	0.00298	6.63	785.96	300	0.035	254	550	0.0145	-2.22	285
23	0.00284	6.66	794.53	300	0.035	254	550	0.0138	-2.26	295
24	0.00284	6.66	794.53	300	0.035	254	550	0.0138	-2.26	295
25	0.00277	7.10	801.32	300	0.035	254	550	0.032	-2.42	310
26	0.00277	7.10	801.32	300	0.035	254	550	0.0132	-2.42	310
27	0.52124	3.33	1055.1	120	0.077	10	150	1.842	-1.11	360
28	0.52124	3.33	1055.1	120	0.077	10	150	1.842	-1.11	360
29	0.52124	3.33	1055.1	120	0.077	10	150	1.842	-1.11	360
30	0.0114	5.35	148.89	120	0.077	47	97	0.085	-1.89	50
31	0.0016	6.43	222.92	150	0.063	60	190	0.0121	-2.08	80
32	0.0016	6.43	222.92	150	0.063	60	190	0.0121	-2.08	80
33	0.0016	6.43	222.92	150	0.063	60	190	0.0121	-2.08	80
34	0.0001	8.95	107.87	200	0.042	90	200	0.0012	-3.48	65
35	0.0001	8.62	116.58	200	0.042	90	200	0.0012	-3.24	70
36	0.0001	8.62	116.58	200	0.042	90	200	0.0012	-3.24	70
37	0.0161	5.88	307.45	80	0.098	25	110	0.095	-1.98	100
38	0.0161	5.88	307.45	80	0.098	25	110	0.095	-1.98	100
39	0.0161	5.88	307.45	80	0.098	25	110	0.095	-1.98	100
40	0.00313	7.97	647.83	300	0.035	242	550	0.0151	-2.68	220

Demanda 10500 MW

Tabela B.12: Região delimitada de soluções factíveis para o caso de 40 geradores

Região [$C_e^{\text{inf}}, C_e^{\text{sup}}$]	$C_g (\$.h^{-1})$	$C_e (\text{tons}.h^{-1})$
[64900,65020]	126746, 20347	650194
[64900,65020]	126703, 83179	65020
[64910,65030]	126462, 94274	65030
[64930,65050]	126183, 61735	65050
[64980,65100]	125735, 08597	65100
[65080,65200]	125276, 73276	65200
[65180,65300]	124946, 14370	65300
[65280,65400]	124653, 85294	65400
[65380,65500]	124334, 84691	65500
[65480,65600]	124193, 62748	65600
[65580,65700]	124172, 66168	65700
[65780,65900]	123978, 11865	65900
[65900, 70000]	122563, 36096	68985, 717921
[65900, 69200]	122563, 36162	68985, 718304
[66300,66500]	123426, 99567	66499, 999999
[67380,67500]	122960, 21783	67500
[67680,67800]	122770, 25104	67800
[67900,68020]	122696, 10264	67936, 240940
[68785, 68985]	122563, 37027	68984, 99979
[68600,68800]	122376, 36716	68766, 96892
[68980, 69100]	122563, 37027	68984, 99979
[69000, 69120]	122564, 16194	69000
[69000, 69200]	122564, 16210	69000
[69000, 69250]	122638, 65768	69207, 20493
[69000, 69200]	122564, 1621	69000
[69500,69620]	122222, 33652	69500
[70000, 70120]	122634, 53882	70000
[70500, 70700]	122669, 71117	70500
[71000, 71200]	122689, 89443	71000
[71500, 71700]	122725, 56819	71500
[71900,72100]	121893, 32568	72083, 35293
[72000, 72200]	122758, 36196	72000
[72500, 72700]	122762, 8341	72500
[74800, 75000]	122735, 05672	75000
[75800,76000]	121475, 49628	75984, 06658



