

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Faculdade de Engenharia

**Um método primal-dual de pontos interiores/exteriores  
com estratégias de teste quadrático e determinação de  
direções de busca combinadas no problema de fluxo de  
potência ótimo reativo**

**Rafael Ramos de Souza**

**Bauru – SP  
Junho – 2016**



Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Faculdade de Engenharia

**Um método primal-dual de pontos interiores/exteriores com  
estratégias de teste quadrático e determinação de direções de  
busca combinadas no problema de fluxo de potência ótimo reativo**

**Rafael Ramos de Souza**

**Orientador: Prof. Dr. Antonio Roberto Balbo**  
**Co-Orientador: Prof. Dr. Leonardo Nepomuceno**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Bauru da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Campus de Bauru, como um dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Bauru – SP  
Junho – 2016

---

Souza, Rafael Ramos de.

Um método primal-dual de pontos interiores/exteriores com estratégias de teste quadrático e determinação de direções de busca combinadas no problema de fluxo de potência ótimo reativo / Rafael Ramos de Souza, 2016

92 f.

Orientador: Antonio Roberto Balbo.

Co-orientador: Leonardo Nepomuceno.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2016

1. Fluxo de Potência Ótimo Reativo 2. Otimização não-linear 3. Método Primal-Dual de Pontos Interiores/Exteriores 4. Função barreira logarítmica modificada I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado DE RAFAEL RAMOS DE SOUZA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA.**

Aos 10 dias do mês de junho do ano de 2016, às 15:00 horas, no(a) Anfiteatro da Diretoria Técnica de Informática, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Prof. Dr. GUILHERME GUIMARÃES LAGE do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / UFSCar, Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de RAFAEL RAMOS DE SOUZA, intitulada **UM MÉTODO PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES/EXTERIORES, COM ESTRATÉGIAS DE TESTE QUADRÁTICO E DE DETERMINAÇÃO DE DIREÇÕES DE BUSCA COMBINADAS, EM PROBLEMAS DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

  
Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO

  
Prof. Dr. GUILHERME GUIMARÃES LAGE

  
Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA



PROPOSTA DE ALTERAÇÃO DO TÍTULO

A COMISSÃO EXAMINADORA PROPÕE A ALTERAÇÃO DO TÍTULO DO TRABALHO DO ALUNO: RAFAEL RAMOS DE SOUZA

DE: "UM MÉTODO PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES/EXTERIORES~~X~~ COM ESTRATÉGIAS DE TESTE QUADRÁTICO E DE DETERMINAÇÃO DE DIREÇÕES DE BUSCA COMBINADAS~~X~~ EM PROBLEMAS~~X~~ DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO"

PARA:

UM MÉTODO PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES/EXTERIORES  
COM ESTRATÉGIAS DE TESTE QUADRÁTICO E DE DETERMINAÇÃO  
DE DIREÇÕES DE BUSCA COMBINADAS NO PROBLEMA DE  
FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO.

Bauru, 10 de junho de 2016.

  
Prof. Dr. Antonio Roberto Balbo  
Orientador

---



*Dedico aos meus pais, João e Rosana,  
a minha irmã, Juliana,  
a minha noiva, Larissa,  
e ao meu sobrinho, Pedro.*



## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por me dar força todos os dias para seguir minha caminhada.

Ao meu orientador, professor Dr. Antonio Roberto Balbo, pelo exemplo de ser humano e pela oportunidade para desenvolver esse trabalho que foi muito importante para minha vida.

Ao meu co-orientador, professor Dr. Leonardo Nepomuceno, essencial para a realização desse trabalho.

À minha família, por sempre me apoiarem e me proporcionarem todas as condições necessárias para que eu pudesse ter uma educação de qualidade.

À professora Dra. Edméa Cássia Baptista, à professora Edilaine Martins Soler e ao professor Dr. Guilherme Guimarães Lage, por participarem das bancas de avaliação e pelas contribuições para este trabalho.

Aos Balbuínos e agregados, alunos do programa de pós-graduação que tive o prazer de conhecer e que tanto me ajudaram no desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e da Licenciatura em Matemática da UNESP - Bauru, que contribuíram para minha formação acadêmica.

Aos funcionários da Seção Técnica de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia e do Departamento de Matemática, pela presteza e atenção concedida.

---

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio financeiro.

*“A vitória de um homem  
Às vezes se esconde  
Num gesto forte que só ele pode ver.”*

*Lado B Lado A - O Rappa*

---

O problema de Fluxo de Potência Ótimo tem por objetivo a otimização de um critério de desempenho elétrico sujeito ao atendimento das demandas de potência ativa e reativa em cada barra e de restrições técnico-operacionais dos sistemas de geração e transmissão. É um problema de otimização, não-linear, não-convexo e de grande porte. Neste trabalho é explorado o problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo com o objetivo de minimizar as perdas de potência ativa na transmissão e para resolvê-lo é proposto um método primal-dual de pontos interiores/exteriores barreira logarítmica modificada com estratégias de teste quadrático e determinação de direções de busca combinadas. O teste quadrático é proposto como alternativa ao procedimento de Cholesky na verificação da positividade da matriz hessiana do problema, que, se definida positiva, garante direções de descida para o método. As novas direções de busca são determinadas através de combinações das direções dos procedimentos predictor e corretor, determinadas através da análise das condições de complementaridade das variáveis primais e duais do problema. O método proposto foi implementado em Matlab e aplicado aos sistemas elétricos 9 e 39 barras e aos sistemas IEEE 14, 30, 57 e 118 barras. O desempenho do método com as estratégias propostas é avaliado em termos do número de iterações e do tempo computacional. Os resultados são promissores e permitem a aplicação do presente método, com as estratégias propostas, para resolver o problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo com maior dimensão do que os sistemas testados.

**Palavras-chave:** Fluxo de Potência Ótimo Reativo, Otimização não-linear, Método Primal-Dual de Pontos Interiores/exteriores, Função barreira logarítmica modificada.





---

## ABSTRACT

The reactive optimal power flow problem is concerned with the optimization of a specific criterion associated with the transmission system while enforcing the power balance in each transmission bus, as well as operational and physical constraints associated with generation and transmission systems. It is a nonlinear, non-convex and large optimization problem. In this work we consider the active losses minimization in the transmission system as a criterion for the optimal power flow problem. The solution of the problem is investigated by proposing a modified log-barrier primal-dual interior/exterior point method with a quadratic test strategy and new search direction procedures. The quadratic test is proposed as an alternative strategy to the Cholesky procedure for calculating the positivity of the Hessian matrix of the problem. The new search directions investigated in the paper are determined by combining the search directions calculated in the predictor and corrector steps, respectively, and also by using information associated with the complementarity conditions. The method proposed is implemented in Matlab and applied to solving the reactive optimal power flow problem for 9 and 39-bus systems, as well as for the IEEE 14, 30, 57 and 118-bus test systems. The performance of the method with the proposed strategies for search directions is evaluated in terms of the number of iterations and computational times. The results are promising and allow the application of the present method with the proposed search strategies for solving problems of larger dimensions.

**Palavras-chave:** reactive optimal power flow, non-linear optimization, primal-dual interior/exterior points methods, modified logarithmic barrier function.

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Organização do trabalho . . . . .	3
<b>2</b>	<b>O problema de Fluxo de Potência Ótimo</b>	<b>5</b>
2.1	O Sistema de Transmissão . . . . .	5
2.2	Linhas de Transmissão . . . . .	6
2.2.1	Cálculo das Correntes . . . . .	7
2.2.2	Cálculo dos Fluxos de Potência . . . . .	8
2.3	Transformadores . . . . .	9
2.3.1	Cálculo das Correntes . . . . .	9
2.3.2	Cálculo dos Fluxos de Potência . . . . .	10
2.4	Expressões Gerais . . . . .	11
2.5	O problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo . . . . .	13
2.5.1	Formulação do Problema . . . . .	13
2.5.2	Histórico . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Otimização Restrita</b>	<b>19</b>
3.1	Métodos de Pontos Interiores e Exteriores . . . . .	20
3.2	Método de barreira . . . . .	23
3.3	Método de Barreira Modificada e rescalamento não-linear . . . . .	25
3.3.1	Atualização dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange . . . . .	27

3.3.2	A função Barreira logarítmica modificada . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Método Proposto</b>	<b>29</b>
4.1	O Método primal-dual de pontos interiores/exteriores barreira logarítmica modificada . . . . .	29
4.1.1	O sistema de direções de busca . . . . .	32
4.1.2	Cálculo das direções . . . . .	36
4.1.2.1	Procedimento Previsor . . . . .	36
4.1.2.2	Procedimento Corretor . . . . .	40
4.1.3	Teste Quadrático . . . . .	41
4.1.4	Cálculo do tamanho dos passos . . . . .	42
4.1.5	Cálculo do novo ponto . . . . .	43
4.1.5.1	Estratégia 1 . . . . .	44
4.1.5.2	Estratégia 2 . . . . .	44
4.1.5.3	Estratégia 3 . . . . .	44
4.1.5.4	Estratégia 4 . . . . .	45
4.1.5.5	Estratégia 5 . . . . .	46
4.1.6	Atualização dos parâmetros $\mu$ e $\delta$ . . . . .	47
4.1.7	Critério de Parada . . . . .	47
4.2	O Algoritmo do método PDPIEBLM . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>49</b>
5.1	O sistema 9 barras . . . . .	50
5.2	O sistema IEEE 14 barras . . . . .	51
5.3	O sistema IEEE 30 barras . . . . .	52
5.4	O sistema 39 barras . . . . .	53
5.5	O sistema IEEE 57 barras . . . . .	54
5.6	O sistema IEEE 118 barras . . . . .	55
5.7	Variação dos escalares aplicados às direções . . . . .	56
5.7.1	Estratégia 3 . . . . .	56
5.7.2	Estratégia 4 . . . . .	57
5.7.3	Estratégia 5 . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>59</b>

<b>Bibliografia</b>	<b>60</b>
<b>A Trabalhos Publicados</b>	<b>65</b>
<b>B Resultados numéricos complementares</b>	<b>67</b>
B.1 Sistema elétrico 9 barras . . . . .	67
B.2 Sistema elétrico IEEE 14 barras . . . . .	71
B.3 Sistema elétrico IEEE 30 barras . . . . .	74
B.4 Sistema elétrico 39 barras . . . . .	77
B.5 Sistema elétrico IEEE 57 barras . . . . .	81
B.6 Sistema elétrico IEEE 118 barras . . . . .	85
<b>C Banco de Dados</b>	<b>89</b>
C.1 Sistema elétricos 9 e 39 barras . . . . .	89



---

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Modelo equivalente $\pi$ de uma linha de transmissão.	
	Fonte: Monticelli (1983) . . . . .	6
2.2	Modelo de um transformador em-fase	
	Fonte: Lage (2013) . . . . .	9





## LISTA DE TABELAS

5.1	Resultados do método PDPIEBLM para o sistema 9 barras . . . . .	51
5.2	Resultados do método PDPIEBLM para o sistema 14 barras . . . . .	52
5.3	Resultados do método PDPIEBLM para o sistema 30 barras . . . . .	53
5.4	Resultados do método PDPIEBLM para o sistema 39 barras . . . . .	54
5.5	Resultados do método PDPIEBLM para o sistema 57 barras . . . . .	55
5.6	Resultados do método PDPIEBLM para o sistema 118 barras . . . . .	56
5.7	Resultados para a estratégia 3 . . . . .	57
5.8	Resultados para a estratégia 4 . . . . .	57
B.1	Resultados 9 barras - Estratégia 1 - Teste Quadrático . . . . .	67
B.2	Resultados 9 barras - Estratégia 2 - Teste Quadrático . . . . .	68
B.3	Resultados 9 barras - Estratégia 3 - Teste Quadrático . . . . .	68
B.4	Resultados 9 barras - Estratégia 4 - Teste Quadrático . . . . .	68
B.5	Resultados 9 barras - Estratégia 5 - Teste Quadrático . . . . .	68
B.6	Resultados 9 barras - Estratégia 1 - Cholesky . . . . .	69
B.7	Resultados 9 barras - Estratégia 2 - Cholesky . . . . .	69
B.8	Resultados 9 barras - Estratégia 3 - Cholesky . . . . .	69
B.9	Resultados 9 barras - Estratégia 4 - Cholesky . . . . .	69
B.10	Resultados 9 barras - Estratégia 5 - Cholesky . . . . .	70
B.11	Resultados 14 barras - Estratégia 1 - Teste Quadrático . . . . .	71
B.12	Resultados 14 barras - Estratégia 2 - Teste Quadrático . . . . .	71
B.13	Resultados 14 barras - Estratégia 3 - Teste Quadrático . . . . .	71

## LISTA DE TABELAS

---

B.14 Resultados 14 barras - Estratégia 4 - Teste Quadrático . . . . .	72
B.15 Resultados 14 barras - Estratégia 5 - Teste Quadrático . . . . .	72
B.16 Resultados 14 barras - Estratégia 1 - Cholesky . . . . .	72
B.17 Resultados 14 barras - Estratégia 2 - Cholesky . . . . .	72
B.18 Resultados 14 barras - Estratégia 3 - Cholesky . . . . .	73
B.19 Resultados 14 barras - Estratégia 4 - Cholesky . . . . .	73
B.20 Resultados 14 barras - Estratégia 5 - Cholesky . . . . .	73
B.21 Resultados 30 barras - Estratégia 1 - Teste Quadrático . . . . .	74
B.22 Resultados 30 barras - Estratégia 2 - Teste Quadrático . . . . .	74
B.23 Resultados 30 barras - Estratégia 3 - Teste Quadrático . . . . .	74
B.24 Resultados 30 barras - Estratégia 4 - Teste Quadrático . . . . .	75
B.25 Resultados 30 barras - Estratégia 5 - Teste Quadrático . . . . .	75
B.26 Resultados 30 barras - Estratégia 1 - Cholesky . . . . .	75
B.27 Resultados 30 barras - Estratégia 2 - Cholesky . . . . .	75
B.28 Resultados 30 barras - Estratégia 3 - Cholesky . . . . .	76
B.29 Resultados 30 barras - Estratégia 4 - Cholesky . . . . .	76
B.30 Resultados 30 barras - Estratégia 5 - Cholesky . . . . .	76
B.31 Resultados 39 barras - Estratégia 1 - Teste Quadrático . . . . .	77
B.32 Resultados 39 barras - Estratégia 2 - Teste Quadrático . . . . .	77
B.33 Resultados 39 barras - Estratégia 3 - Teste Quadrático . . . . .	78
B.34 Resultados 39 barras - Estratégia 4 - Teste Quadrático . . . . .	78
B.35 Resultados 39 barras - Estratégia 5 - Teste Quadrático . . . . .	79
B.36 Resultados 39 barras - Estratégia 1 - Cholesky . . . . .	79
B.37 Resultados 39 barras - Estratégia 2 - Cholesky . . . . .	79
B.38 Resultados 39 barras - Estratégia 3 - Cholesky . . . . .	80
B.39 Resultados 39 barras - Estratégia 4 - Cholesky . . . . .	80
B.40 Resultados 39 barras - Estratégia 5 - Cholesky . . . . .	80
B.41 Resultados 57 barras - Estratégia 1 - Teste Quadrático . . . . .	81
B.42 Resultados 57 barras - Estratégia 2 - Teste Quadrático . . . . .	81
B.43 Resultados 57 barras - Estratégia 3 - Teste Quadrático . . . . .	82
B.44 Resultados 57 barras - Estratégia 4 - Teste Quadrático . . . . .	82
B.45 Resultados 57 barras - Estratégia 5 - Teste Quadrático . . . . .	82

B.46 Resultados 57 barras - Estratégia 1 - Cholesky . . . . .	83
B.47 Resultados 57 barras - Estratégia 2 - Cholesky . . . . .	83
B.48 Resultados 57 barras - Estratégia 3 - Cholesky . . . . .	83
B.49 Resultados 57 barras - Estratégia 4 - Cholesky . . . . .	84
B.50 Resultados 57 barras - Estratégia 5 - Cholesky . . . . .	84
B.51 Resultados 118 barras - Estratégia 1 - Teste Quadrático . . . . .	85
B.52 Resultados 118 barras - Estratégia 2 - Teste Quadrático . . . . .	85
B.53 Resultados 118 barras - Estratégia 3 - Teste Quadrático . . . . .	86
B.54 Resultados 118 barras - Estratégia 4 - Teste Quadrático . . . . .	86
B.55 Resultados 118 barras - Estratégia 5 - Teste Quadrático . . . . .	86
B.56 Resultados 118 barras - Estratégia 1 - Cholesky . . . . .	87
B.57 Resultados 118 barras - Estratégia 2 - Cholesky . . . . .	87
B.58 Resultados 118 barras - Estratégia 4 - Cholesky . . . . .	87
B.59 Resultados 118 barras - Estratégia 5 - Cholesky . . . . .	88
C.1 Dados de Barra do sistema elétrico 9 barras . . . . .	89
C.2 Dados de Linha do sistema elétrico 9 barras . . . . .	90
C.3 Dados de Barra do sistema elétrico 39 barras . . . . .	91
C.4 Dados de Linha do sistema elétrico 39 barras . . . . .	92



## 1.1 Introdução

O problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) originou-se na década de 60, por Carpentier (1962), o qual incorporou as equações do Fluxo de Carga (FC) nas restrições do problema de Despacho Econômico (DE). O FPO tem como objetivo minimizar algum critério relacionado ao desempenho do sistema elétrico, como perdas de potência ativa na transmissão, custo de geração, otimização do perfil de tensão, entre outros, sujeito às restrições físicas e operacionais dos sistemas elétricos de transmissão e geração. O FPO é formulado como um problema de otimização não-linear, não convexo e de grande porte com restrições de igualdade, desigualdade e variáveis contínuas e discretas.

Neste trabalho considera-se o problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR), que visa a minimização das perdas de potência ativa na transmissão, sujeito às restrições físicas e operacionais que são representadas, no modelo clássico utilizado, por restrições de igualdade, desigualdade e variáveis contínuas.

Com base nos trabalhos de Pinheiro et al. (2015), Polyak & Teboulle (1997), Silva (2014) e Sousa et al. (2012) é proposto um método primal-dual de pontos interiores/exteriores barreira logarítmica modificada (PDPIEBLM) com estratégias de teste quadrático e determinação de direções de busca combinadas.

A estratégia de teste quadrático é proposta como uma simplificação ao procedimento de Cholesky, o qual tem como objetivo a verificação da positividade da matriz hessiana do problema, definida no Capítulo 4. Essa matriz é utilizada iterativamente para a resolução do problema de FPOR.

A estratégia proposta consiste na realização de um teste de verificação que utiliza um termo quadrático, o qual é avaliado para a solução atual. Caso a matriz hessiana seja definida positiva para este ponto, é possível garantir a determinação de direções de descida para a convergência do método. A estratégia é uma simplificação, pois verifica a positividade apenas no ponto atual, o que é suficiente para determinar as direções de descida. Difere do procedimento de Cholesky, pois este determina se a matriz é definida positiva para uma vizinhança do ponto. O objetivo de utilizar essa estratégia é reduzir o tempo computacional do método.

Para determinar as direções de busca, o método inicialmente adota o procedimento previsor-corretor descrito em Pinheiro et al. (2015), em que o parâmetro de barreira  $\mu$  é considerado em ambos os procedimentos previsor e corretor, já que este, segundo os autores influencia nas condições de complementaridade do problema.

As estratégias de determinação das direções de busca, propostas neste trabalho, envolvem a combinação das direções dos procedimentos previsor e corretor e um teste de complementaridade apresentado em Silva (2014), que é utilizado para gerar direções mais eficientes. Assim, nestas estratégias, as direções calculadas pelo procedimento previsor são combinadas com as direções do procedimento corretor, de modo a compor novas direções de busca para a solução do FPOR.

As estratégias para a composição das direções de busca são baseadas em Colombo & Gondzio (2008), Pinheiro et al. (2015) e Silva (2014), e possibilitaram a proposição de três novas estratégias apresentadas na seção 4.1.5 do Capítulo 4. Essas, em conjunto com o teste quadrático, visam reduzir o número de iterações e o tempo computacional de execução do método, garantindo a mesma eficiência na minimização das perdas de potência ativa na transmissão dos sistemas sujeito as suas restrições.

Em relação aos métodos previamente propostos na literatura para a resolução do FPOR, podem ser destacadas as seguintes contribuições do método proposto neste trabalho: i) redução do tempo computacional de execução para a solução do problema, ao

verificar a positividade da matriz hessiana, através da estratégia de teste quadrático, que exige menor esforço computacional em relação ao procedimento de Cholesky, tradicionalmente utilizado na literatura; ii) definição de novas estratégias de direções de busca combinadas as quais não desprezam as direções associadas ao procedimento predictor, por meio de um teste de complementaridade; iii) com as considerações anteriores, o método torna-se mais eficiente para a determinação das soluções ótimas locais, buscando reduzir o número de iterações e/ou tempo computacional para a solução do problema.

Os resultados apresentados mostram a eficiência do método proposto, o qual foi implementado em linguagem de programação Matlab e aplicado aos sistemas elétricos de 9 e 39 barras, bem como, aos sistemas IEEE 14, 30, 57 e 118 barras.

## 1.2 Organização do trabalho

O presente trabalho encontra-se dividido e organizado da seguinte forma:

O Capítulo 2 é dedicado ao problema de FPOR. São apresentadas as expressões que compõem o problema de Fluxo de Potência (FP) e aplicadas na formulação do modelo clássico de FPOR. Por fim é apresentado um histórico com algumas abordagens do FPO.

No Capítulo 3 é apresentada um breve histórico dos métodos de pontos interiores/exteriores, e a teoria do método de barreira e barreira logarítmica modificada.

No Capítulo 4 é descrito o método primal-dual de pontos interiores/exteriores barreira logarítmica modificada (PDPIEBLM) proposto, em conjunto com as estratégias de teste quadrático e de direções de busca combinadas. Por fim, temos o algoritmo do método PDPIEBLM.

No Capítulo 5, são apresentados os resultados determinados pelo método PDPIEBLM, implementado em linguagem de programação Matlab, e aplicado aos sistemas elétricos 9 e 39 barras e os sistemas IEEE 14, 30, 57 e 118 barras.

E no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e propostas futuras de melhoria e continuidade deste trabalho.





## CAPÍTULO 2

# O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

Neste capítulo são apresentados os aspectos gerais dos problemas de FP e de FPO. Para a dedução das principais expressões matemáticas associadas a tais problemas, inicia-se com a dedução das expressões das correntes e fluxos de potência ativa e reativa nas linhas de transmissão e transformadores. O modelo adotado para o transformador e as linhas é discutido em detalhe.

É apresentada a formulação do problema de FPOR, modelo utilizado neste trabalho, e por fim um histórico do problema de FPO.

## 2.1 O Sistema de Transmissão

Em um Sistema Elétrico de Potência (SEP), o sistema de transmissão é responsável por transmitir a energia gerada por longas distâncias, até os centros de consumo. O sistema de transmissão é composto principalmente por linhas de transmissão e transformadores.

Para fins de análise numérica sistêmica, o sistema de transmissão pode ser visto como um grafo, em que os nós representam as barras do sistema de transmissão, e as linhas de transmissão e transformadores representam os ramos do grafo. Nesse sentido os componentes de um sistema de transmissão de energia elétrica podem ser classificados em dois grupos:

- Componentes de barra: definem os equipamentos que estão ligados da barra (nó) para a terra, exemplos: reatores e capacitores.
- Componentes de ramo: definem os equipamentos que estão conectados entre duas barras exemplos: linhas de transmissão, transformadores e defasadores.

Os modelos de linhas de transmissão e transformadores são apresentados a seguir para a definição das expressões das correntes e fluxos de potência ativa e reativa. Estas expressões são a base para a formulação dos problemas de FP e FPO.

## 2.2 Linhas de Transmissão

Do ponto de vista de circuitos elétricos, uma linha média de transmissão pode ser representada por meio do chamado modelo equivalente  $\pi$ , Monticelli (1983), conforme mostrado na Figura 2.1:

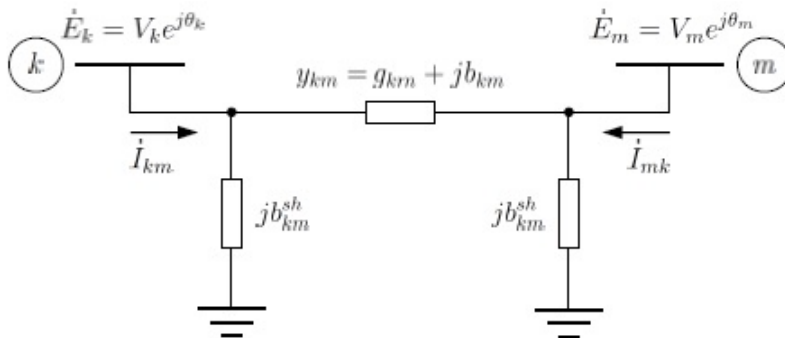


Figura 2.1: Modelo equivalente  $\pi$  de uma linha de transmissão.  
Fonte: Monticelli (1983)

Os parâmetros que compõem o modelo da linha de transmissão descritos na Figura 2.1 são:

- A impedância série, dada por  $z_{km} = r_{km} + jx_{km}$ , em que  $r_{km}$  representa a resistência da linha e  $x_{km}$  representa a reatância da linha de transmissão. O elemento série também pode ser representado por meio de uma admitância série, cuja valor é dado por  $y_{km} = z_{km}^{-1} = g_{km} + jb_{km}$ , em que,  $g_{km}$  é a a condutância série e  $b_{km}$  é a susceptância série. O cálculo  $g_{km}$  e  $b_{km}$ , a partir dos elementos da impedância série, é feito conforme (2.1) e (2.2), respectivamente:

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \quad (2.1)$$

e

$$b_{km} = -\frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \quad (2.2)$$

- As admitâncias *shunts*  $b_{km}^{sh}$  representam o aspecto da capacitância existente entre a linha e a terra. No modelo  $\pi$ , estas capacitâncias são representadas de ambos os lados da linha;
- As tensões fasoriais nas barras  $k$  e  $m$ , que interligam a linha de transmissão, dadas respectivamente por  $\dot{E}_k = V_k e^{j\theta_k}$  e  $\dot{E}_m = V_m e^{j\theta_m}$ , em que:  $V_k$  e  $V_m$  são as magnitudes e  $\theta_k$  e  $\theta_m$  são os ângulos da tensão fasorial.

O cálculo ds correntes  $\dot{I}_{km}$  e  $\dot{I}_{mk}$  que fluem da barra  $k$  para a barra  $m$  e vice-versa é descrito na seção 2.2.1.

### 2.2.1 Cálculo das Correntes

Na Figura 2.1, a corrente  $\dot{I}_{km}$  que flui da barra  $k$  para a barra  $m$  é calculada utilizando-se a lei de Kirchhoff de conservação das correntes em um nó. Assim, esta corrente é dada pela soma da componente série  $\dot{I}_{km}^s$  e da componente *shunt*  $\dot{I}_{km}^{sh}$ , conforme (2.3):

$$\begin{aligned} \dot{I}_{km} &= \dot{I}_{km}^s + \dot{I}_{km}^{sh}, \\ \dot{I}_{km} &= y_{km}(\dot{E}_k - \dot{E}_m) + jb_{km}^{sh} \dot{E}_k. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Analogamente, temos que a corrente  $\dot{I}_{mk}$  é dada conforme (2.4):

$$\begin{aligned} \dot{I}_{mk} &= \dot{I}_{mk}^s + \dot{I}_{mk}^{sh}, \\ \dot{I}_{mk} &= y_{km}(\dot{E}_m - \dot{E}_k) + jb_{km}^{sh} \dot{E}_m. \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Cálculo dos Fluxos de Potência

De acordo com Monticelli (1983), as potências complexa  $S_{km}^*$  e  $S_{mk}^*$  que fluem no ramo  $k - m$  da Figura 2.1, cujas componentes ativa (parte real) e reativa (parte imaginária) são representadas por  $P_{km}$ ,  $Q_{km}$  e  $P_{mk}$ ,  $Q_{mk}$ , são expressas por (2.5):

$$\begin{aligned} S_{km}^* &= P_{km} - jQ_{km} = \dot{E}_k^* \dot{I}_{km} \\ S_{mk}^* &= P_{mk} - jQ_{mk} = \dot{E}_m^* \dot{I}_{mk} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Substituindo a corrente  $\dot{I}_{km}$  dada em (2.3) na primeira expressão de (2.5), e separando as partes real e imaginária, tem-se as expressões para os fluxos de potência ativa e reativa nas linhas,  $P_{km}$  e  $Q_{km}$ , dadas por (2.6) e (2.7), respectivamente:

$$P_{km} = g_{km}V_k^2 - V_kV_m[g_{km}\cos(\theta_{km}) + b_{km}\sen(\theta_{km})], \quad (2.6)$$

$$Q_{km} = -(b_{km} + b_{km}^{sh})V_k^2 + V_kV_m[b_{km}\cos(\theta_{km}) - g_{km}\sen(\theta_{km})]. \quad (2.7)$$

Substituindo a corrente  $\dot{I}_{mk}$  dada em (2.4) na segunda expressão de (2.5), e separando as partes real e imaginária, tem-se as expressões para os fluxos de potência ativa e reativa nas linhas,  $P_{mk}$  e  $Q_{mk}$ , dadas por (2.8) e (2.9), respectivamente:

$$P_{mk} = g_{km}V_m^2 - V_kV_m[g_{km}\cos(\theta_{km}) - b_{km}\sen(\theta_{km})], \quad (2.8)$$

$$Q_{mk} = -(b_{km} + b_{km}^{sh})V_m^2 + V_kV_m[b_{km}\cos(\theta_{km}) + g_{km}\sen(\theta_{km})]. \quad (2.9)$$

Verifica-se que as expressões (2.6) e (2.7) podem ser obtidas a partir das expressões (2.8) e (2.9), respectivamente, se os índices  $k$  e  $m$  forem trocados. Assim, as expressões (2.6) e (2.7) são, de fato, expressões genéricas para os fluxos de potência ativa e reativa nas linhas de transmissão.

Pelo princípio de conservação de energia, as perdas de potência ativa em uma linha de transmissão são determinadas pela soma dos fluxos de potência ativa  $P_{km}$  e  $P_{mk}$ , o que

resulta na expressão (2.10):

$$P_L = P_{km} + P_{mk} = g_{km}[V_k^2 + V_m^2 - 2V_kV_m\cos(\theta_{km})]. \quad (2.10)$$

## 2.3 Transformadores

Conforme descrito em Lage (2013), do ponto de vista de circuitos elétricos, um transformador generalizado é descrito pelo modelo da Figura 2.2, que consiste em um transformador ideal com relação de transformação complexa  $a_{km} : 1$ , em que  $a_{km} = t_{km}e^{j\varphi_{km}}$  e uma admitância em série  $y_{km}$ , a qual representa as perdas internas no transformador. Para transformadores em-fase, a relação de transformação  $a_{km}$  é um número real ( $a_{km} = t_{km}$ ), ou seja  $\varphi_{km} = 0$ . Neste trabalho consideramos apenas transformadores em-fase.

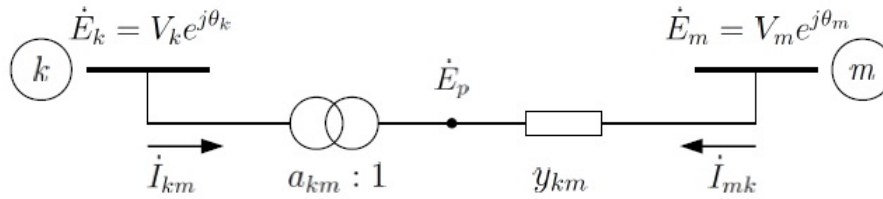


Figura 2.2: Modelo de um transformador em-fase  
Fonte: Lage (2013)

A relação de transformação entre as tensões fasoriais nos pontos  $k$  e  $p$ , do circuito da Figura 2.2, no transformador em-fase ideal é dada por (2.11):

$$\frac{\dot{E}_p}{\dot{E}_k} = \frac{1}{t_{km}}, \quad (2.11)$$

ou ainda:

$$\dot{E}_p = \frac{1}{t_{km}} \dot{E}_k. \quad (2.12)$$

### 2.3.1 Cálculo das Correntes

Pela lei de conservação de energia, e considerando-se que o transformador da Figura 2.2 é ideal, implica que as potências complexas na entrada e na saída são iguais, ou seja, não há dissipação de potência ativa ou reativa entre os nós  $k$  e  $p$ :

$$\dot{E}_k I_{km}^* + \dot{E}_p I_{mk}^* = 0 \quad (2.13)$$

onde o asterisco em  $\dot{I}_{km}^*$  e  $\dot{I}_{mk}^*$  representa o conjugado complexo dessas grandezas fasoriais.

Substituindo (2.12) em (2.13), obtém-se a relação entre as correntes na alta e baixa do transformador, conforme mostrado em(2.14):

$$\dot{I}_{km} = -\frac{1}{t_{km}} \dot{I}_{mk}. \quad (2.14)$$

Aplicando-se a lei de Kirchhoff das tensões aos pontos  $m$  e  $p$  do circuito da Figura 2.2, a corrente  $\dot{I}_{mk}$  é calculada conforme (2.15):

$$\dot{I}_{mk} = y_{km}(\dot{E}_m - \dot{E}_p). \quad (2.15)$$

Substituindo (2.12) em (2.15), obtém-se (2.16):

$$\dot{I}_{mk} = y_{km} \dot{E}_m + \left( -\frac{1}{t_{km}} y_{km} \right) \dot{E}_k \quad (2.16)$$

Substituindo-se (2.16) em (2.14), obtém-se (2.17):

$$\dot{I}_{km} = \left( \frac{1}{t_{km}^2} y_{km} \right) \dot{E}_k + \left( -\frac{1}{t_{km}} y_{km} \right) \dot{E}_m \quad (2.17)$$

De forma análoga, ao que foi realizado para a linha de transmissão, pode-se calcular os fluxos de potência no transformador com base nas correntes  $\dot{I}_{km}$  e  $\dot{I}_{mk}$ , o que será feito na seção 2.3.2.

### 2.3.2 Cálculo dos Fluxos de Potência

De acordo com Monticelli (1983), as potências complexa  $S_{km}^*$  e  $S_{mk}^*$  que fluem no ramo  $k - m$  da Figura 2.2, cujas componentes ativa(parte real) e reativa(parte imaginária) são representadas por  $P_{km}$ ,  $Q_{km}$  e  $P_{mk}$ ,  $Q_{mk}$ , são expressas por (2.5), rescritas em (2.18):

$$\begin{aligned} S_{km}^* &= P_{km} - jQ_{km} = \dot{E}_k^* \dot{I}_{km}, \\ S_{mk}^* &= P_{mk} - jQ_{mk} = \dot{E}_m^* \dot{I}_{mk}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Substituindo a corrente  $\dot{I}_{km}$  dada em (2.17) na primeira expressão de (2.18), e separando as partes real e imaginária, tem-se as expressões para os fluxos de potência ativa e reativa nas linhas,  $P_{km}$  e  $Q_{km}$ , dadas por (2.19) e (2.20), respectivamente:

$$P_{km} = g_{km} \frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 - \frac{1}{t_{km}} V_k V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \text{sen} \theta_{km}), \quad (2.19)$$

$$Q_{km} = - \left( b_{km} \frac{1}{t_{km}^2} \right) V_k^2 + \frac{1}{t_{km}} V_k V_m (b_{km} \cos \theta_{km} - g_{km} \text{sen} \theta_{km}). \quad (2.20)$$

Substituindo a corrente  $\dot{I}_{mk}$  dada em (2.16) na segunda expressão de (2.18), e separando as partes real e imaginária, tem-se as expressões para os fluxos de potência ativa e reativa nas linhas,  $P_{mk}$  e  $Q_{mk}$ , dadas por (2.21) e (2.22), respectivamente:

$$P_{mk} = g_{km} V_m^2 - \frac{1}{t_{km}} V_k V_m (g_{km} \cos \theta_{km} - b_{km} \text{sen} \theta_{km}), \quad (2.21)$$

$$Q_{mk} = -b_{km} V_m^2 + \frac{1}{t_{km}} V_k V_m (b_{km} \cos \theta_{km} + g_{km} \text{sen} \theta_{km}). \quad (2.22)$$

Pelo princípio de conservação de energia, as perdas de potência ativa em um transformador são determinadas pela soma dos fluxos de potência ativa  $P_{km}$  e  $P_{mk}$ , o que resulta na expressão (2.23):

$$P_L = P_{km} + P_{mk} = g_{km} \left[ \frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos(\theta_{km}) \right]. \quad (2.23)$$

## 2.4 Expressões Gerais

É conveniente destacar a não simetria entre as equações para os fluxos de potência ativa (2.19) e (2.21) e fluxo de potência reativa (2.20) e (2.22). Verifica-se que se trocarmos

os índices  $k$  e  $m$  nas equações (2.19) e (2.21), as expressões não serão idênticas. Assim, é importante que se modele as equações de fluxo de potência ativa e reativa de forma genérica para o transformador. Logo, matematicamente, temos as expressões dadas em (2.24) e (2.25), respectivamente para os fluxos de potência ativa e reativa no transformador:

$$P_{km} = \begin{cases} g_{km} \frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 - \frac{1}{t_{km}} V_k V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \sin \theta_{km}), & \text{se } k \text{ é nó inicial.} \\ g_{km} V_k^2 - \frac{1}{t_{km}} V_k V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \sin \theta_{km}), & \text{se } k \text{ é nó final.} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$Q_{km} = \begin{cases} - \left( b_{km} \frac{1}{t_{km}^2} \right) V_k^2 + \frac{1}{t_{km}} V_k V_m (b_{km} \cos \theta_{km} - g_{km} \sin \theta_{km}), & \text{se } k \text{ é nó inicial.} \\ - b_{km} V_k^2 + \frac{1}{t_{km}} V_k V_m (b_{km} \cos \theta_{km} - g_{km} \sin \theta_{km}), & \text{se } k \text{ é nó final.} \end{cases} \quad (2.25)$$

De acordo com Lage (2013), as primeiras expressões em (2.24) e (2.25) são obtidas de (2.19) e (2.20), respectivamente, enquanto que as segundas expressões em (2.24) e (2.25) são obtidas de (2.21) e (2.22), porém invertendo-se os índices  $k$  e  $m$ .

Se compararmos as expressões genéricas para os fluxos nas linhas dadas por (2.6) e (2.7), respectivamente com as expressões genéricas para os fluxos nos transformadores dadas por (2.24) e (2.25), é possível verificar a sua semelhança. De fato, é possível escrever expressões ainda mais genéricas que possam ser utilizadas para a representação dos fluxos de potência tanto em transformadores quanto em linhas de transmissão, as quais são dadas em (2.26) e (2.27):

$$P_{km} = \begin{cases} g_{km} \frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 - \frac{1}{t_{km}} V_k V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \text{sen} \theta_{km}), & \text{se } k \text{ é nó inicial.} \\ g_{km} V_k^2 - \frac{1}{t_{km}} V_k V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \text{sen} \theta_{km}), & \text{se } k \text{ é nó final.} \end{cases} \quad (2.26)$$

$$Q_{km} = \begin{cases} - \left( b_{km} \frac{1}{t_{km}^2} + b_{km}^{sh} \right) V_k^2 + \frac{1}{t_{km}} V_k V_m (b_{km} \cos \theta_{km} - g_{km} \text{sen} \theta_{km}), & \text{se } k \text{ é nó inicial.} \\ - (b_{km} + b_{km}^{sh}) V_k^2 + \frac{1}{t_{km}} V_k V_m (b_{km} \cos \theta_{km} - g_{km} \text{sen} \theta_{km}), & \text{se } k \text{ é nó final.} \end{cases} \quad (2.27)$$



Repare que para as linhas de transmissão deve-se adotar  $t_{km} = 1$  para se recuperar as expressões originais dadas em (2.6) e (2.7), e que para os transformadores é necessário estabelecer  $b_{km}^{sh} = 0$  para se recuperar as expressões originais (2.24) e (2.25).

As expressões mais genéricas dadas em (2.26) e (2.27) são utilizadas neste trabalho para a representação dos fluxos de potência ativa e reativa.

A expressão (2.23) de perdas de potência ativa em um transformador, pode ser utilizada de forma genérica, assumindo-se para as linhas de transmissão  $t_{km} = 1$ .

## 2.5 O problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo

Neste trabalho o problema de FPO investigado é o FPOR, neste caso, em geral, os aspectos relacionados ao despacho de geração ficam pré-determinados por modelos de FPO ativo, que tem o objetivo de determinar os níveis de geração de cada uma das unidades geradoras do sistema. A partir desse despacho de geração, o FPOR busca otimizar algum critério relacionado aos reativos-tensões.

Neste trabalho, investiga-se o problema de FPOR, com o objetivo de minimizar as perdas de potência ativa na transmissão, as variáveis de controle são:

- $V$  : magnitude de tensão das barras;
- $\theta$  : ângulo de tensão das barras;
- $t$  : taps dos transformadores.

### 2.5.1 Formulação do Problema

O modelo do problema de FPOR, apresentado a seguir, é formulado com base em um modelo clássico, porém as susceptâncias equivalentes dos bancos de capacitores e reatores *shunt* é fixa. É um modelo clássico de otimização não-linear e não-convexa, sua função objetivo é não separável, o que torna o problema mais difícil de ser resolvido, segundo Sun et al. (1984). Apresenta restrições de igualdade, de desigualdades canalizadas e de variáveis canalizadas, as quais representam as restrições físicas e operacionais do sistema elétrico.

$$\text{Minimizar } \sum_{k,m \in L \cup T} g_{km} \left( \frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos \theta_{km} \right) \quad (2.28a)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{m \in \Omega_k} P_{km} - P_{G_k} + P_{C_k} = 0, \forall k \in G' \cup C \quad (2.28b)$$

$$\sum_{m \in \Omega_k} Q_{km} - Q_{G_k} + Q_{C_k} - Q_k^{sh} = 0, \forall k \in C \quad (2.28c)$$

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k} \leq Q_{G_k}^{max}, \forall k \in G \quad (2.28d)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max}, \forall k \in B \quad (2.28e)$$

$$t_{km}^{min} \leq t_{km} \leq t_{km}^{max}, \forall k, m \in T \quad (2.28f)$$

em que:

- $V_k$ : magnitude de tensão da barra  $k$ ;
- $V_m$ : magnitude de tensão da barra  $m$ ;
- $\theta_{km}$ : diferença dos ângulos da tensão nas barras  $k$  e  $m$ ;
- $t_{km}$ : tap do transformador entre as barras  $k$  e  $m$ ;
- $L$ : conjunto das linhas de transmissão do sistema;
- $T$ : conjunto dos ramos com taps dos transformadores em-fase;
- $G$ : conjunto das barras de geração do sistema;
- $G'$ : conjunto das barras de geração do sistema, menos a barra *slack*;
- $C$ : conjunto das barras de carga do sistema;
- $\Omega_k$ : conjunto das barras vizinhas à barra  $k$ ;
- $g_{km}$ : condutância da linha a qual conecta as barras  $k$  e  $m$ ;
- $P_{km}, Q_{km}$ : fluxos de potência ativa e reativa, respectivamente;
- $P_{G_k}, P_{C_k}$ : potências ativas geradas e consumidas, respectivamente;
- $Q_{G_k}, Q_{C_k}$ : potência reativa gerada e consumida, respectivamente, na barra  $k$ ;

- $Q_k^{sh}$ : componente da injeção de potência reativa devida ao elemento *shunt* da barra  $k$ ;
- $Q_{G_k}^{min}, Q_{G_k}^{max}$ : limitantes inferior e superior de geração de potência reativa na barra  $k$ ;
- $V_k^{min}, V_k^{max}$ : limitantes inferior e superior das magnitudes de tensão da barra  $k$ ;
- $t_{km}^{min}, t_{km}^{max}$ : limitantes inferior e superior dos taps dos transformadores.

## 2.5.2 Histórico

Dentre as diversas abordagens ao problema de FPO, no histórico do FPO descrito nesta seção foram apresentadas as principais publicações utilizadas neste trabalho, entre uma grande quantidade divulgada na literatura sobre este tema.

Carpentier (1962) ao adicionar as equações do problema de Fluxo de Carga as restrições do problema de Despacho Econômico, introduziu um problema para minimizar não apenas custos na geração mas também para reduzir perdas dos sistemas elétricos. Este tem o objetivo determinar o estado ótimo de um sistema elétrico respeitando critérios físicos e operacionais. Em seu trabalho Carpentier utilizou o método de Gauss-Seidel para resolver o sistema não linear obtido a partir das condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) aplicadas ao problema irrestrito.

A partir dessa formulação vários métodos foram desenvolvidos e aperfeiçoados para resolver o problema de FPO de forma eficiente.

Dommel & Tinney (1968) apresentaram o método do gradiente reduzido para a resolução do problema de FPO com variáveis de controle, tais como, as potências ativa e reativa, com objetivo de minimizar custos ou perdas instantâneas. As principais características do método são um procedimento com o gradiente para determinar o estado ótimo das variáveis de controle e a utilização de funções penalidade para lidar com as restrições de desigualdade.

Sun et al. (1984) resolveram o problema de FPO utilizando o método de Newton. Essa abordagem foi possível pois a matriz hessiana da função lagrangiana do problema é esparsa, obtendo melhores resultados que os métodos do gradiente reduzido e quasi-

Newton. O método torna o problema irrestrito ao adicionar as restrições de igualdade e desigualdade ativas na solução da função objetivo e as variáveis de controle por penalidades quadráticas, o problema é desacoplado em dois sub-problemas, parte ativa e reativa e as condições de KKT são aplicadas para satisfazer o estado ótimo do sistema.

Uma das primeiras propostas de resolução do FPOR com o método de pontos interiores foi apresentada por Granville (1994). O autor utilizou o método primal-dual barreira logarítmica, no qual o problema restrito é transformado em irrestrito como segue: as restrições de desigualdade são convertidas em restrições de igualdade com o acréscimo de variáveis de folga e excesso positivas que são tratadas na função objetivo com a função barreira logarítmica e incorporada por um parâmetro de barreira, as restrições de igualdade são incorporadas na função objetivo por meio de multiplicadores de Lagrange. Por fim, o problema é resolvido pelo método de Newton. A solução do problema é determinada quando as restrições são satisfeitas e o parâmetro de barreira está próximo de zero. Para convergência o método precisa de uma solução factível inicial e uma boa escolha do parâmetro de barreira inicial. O método mostrou-se eficiente quando aplicado aos sistemas de 1832 e de 3467 barras.

Baptista et al. (2006) apresentaram uma nova abordagem para tratar o problema de FPOR, que consiste em aplicar o método primal-dual barreira logarítmica nas variáveis canalizadas, tratar as igualdades através de multiplicadores de Lagrange e as desigualdades através do método da Lagrangiana aumentada. Os resultados dos testes com os sistemas 162 barras e o brasileiro sul-sudeste mostram a eficiência e o bom desempenho do algoritmo.

Sousa et al. (2012) resolveu o problema de FPOR com variáveis contínuas, utilizando o método da função Lagrangiana barreira modificada. Nessa abordagem são explorados as principais características dos métodos primal-dual barreira logarítmica e de barreira logarítmica modificada. O método de Newton é utilizado na solução do sistema não-linear originado da aplicação das condições necessárias de otimalidade na função Lagrangiana do problema. Testes computacionais foram realizados nos sistemas elétricos de 3 barras, os do IEEE 14, 30, 118, 162 e 300 barras, o equivalente CESP 440 kV com 53 barras e o equivalente brasileiro sul-sudeste com 787 barras e mostraram a robustez e eficiência do método.

Soler et al. (2013), resolveu o problema de FPOR com variáveis de controle discretas. Para as variáveis discretas do problema, foi proposta uma função penalidade para tratar as variáveis de forma contínua e determinar soluções equivalentes à solução do problema original discreto. Os testes numéricos realizados com os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 barras mostraram que a abordagem proposta é eficiente na resolução do problema.

Pinheiro (2012) e Pinheiro et al. (2015), propuseram um método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores/exteriores, baseado na função barreira logarítmica modificada, com estratégias de convergência global e de ajuste cúbico, para resolver problemas de programação não-linear. O método foi aplicado ao problema de FPOR com taps dos transformadores fixos, com objetivo de minimizar as perdas de potência ativa na transmissão. A função barreira logarítmica modificada auxilia na inicialização do método com pontos inviáveis e o ajuste cúbico é utilizado para pontos exteriores em que a função logarítmica não está definida. A estratégia de convergência global, variante do método de Levenberg-Marquardt, auxilia o método na determinação das direções de descida. O método mostrou-se eficiente quando aplicado aos sistemas elétricos de Dommel e Tinney, 9 barras, IEEE de 14, 30, 57, 118, 162 e 300 barras.

Um modelo e uma abordagem para resolução do problema de FPOR com variáveis de controle discretas e restrições de atuação de dispositivos de controle de tensão, é proposta por Lage (2013). O autor utiliza o método da função Lagrangiana barreira modificada-penalidade, com um tratamento para as restrições de complementaridade, para resolver problemas de programação não-linear com variáveis contínuas e discretas. Testes computacionais com os sistemas elétricos IEEE de 14, 30, 57 e 118 barras e com o sistema equivalente CESP 440 kV de 53 barras, comprovam a eficiência do método proposto.

Neste capítulo foram apresentadas as expressões matemáticas dos fluxos de potência ativa e reativa que compõem o modelo de FPOR utilizado.

Para a resolução do problema de FPOR, o qual é um problema de otimização não-linear, no que segue, no Capítulo 3 é apresentada a teoria básica de otimização restrita, para o desenvolvimento do método proposto no Capítulo 4.



## CAPÍTULO 3

# OTIMIZAÇÃO RESTRITA

Problemas de programação matemática são modelados a partir de problemas encontrados nas diversas áreas do conhecimento, que buscam obter as melhores soluções para algum critério relacionado a esses problemas, minimizando ou maximizando uma função objetivo, sujeito a restrições, no caso da otimização restrita.

Os problemas com função objetivo e restrições lineares são denominados de problemas de programação linear, que são resolvidos, com destaque, pelo Método Simplex de Dantzig (1951), bem como por métodos de pontos interiores desenvolvidos, entre outros, em Karmarkar (1984). A modelagem com função e/ou equações não lineares associa-se aos problemas de programação não linear, que contam com classes de métodos determinísticos de solução, dentre os quais citamos: métodos baseados no gradiente da função, método de Newton, métodos de programação quadrática sequencial, métodos Lagrangianos e Dual-Lagrangianos, métodos de pontos interiores e/ou exteriores, entre outros. Esses problemas também podem ser resolvidos por métodos heurísticos, meta-heurísticos e bio-inspirados, os quais não serão considerados nesse trabalho.

Os métodos de pontos interiores e exteriores são a base para o desenvolvimento do método proposto e utilizado nesse trabalho para a resolução do FPOR. Neste capítulo apresentamos um breve histórico dos métodos de pontos interiores e exteriores e uma revisão teórica de métodos que exploram a função barreira logarítmica e a função barreira logarítmica modificada. Esses métodos são explorados para o desenvolvimento do

método primal-dual de pontos interiores/exterores barreira logarítmica modificada (PD-PIEBLM), com as estratégias de teste quadrático e de direções de busca combinadas para a determinação de soluções mais promissoras para o problema de FPOR.

### 3.1 Métodos de Pontos Interiores e Exteriores

Nesta seção é apresentado um breve histórico dos métodos de pontos interiores, dando destaque aos artigos da literatura utilizados no desenvolvimento da nova abordagem.

Fiacco & McCormick (1968), precursores da metodologia de pontos interiores, popularizaram uma das primeiras estratégias de pontos interiores com a utilização da função barreira para problemas de programação não-linear, proposta por Frisch (1955) e Carroll & Fiacco (1961). A estratégia ainda não era conhecida por essa denominação e por apresentar problemas de mau condicionamento da matriz hessiana e dificuldades na escolha do parâmetro de barreira e de uma solução inicial só foi retomada na década de 80 por Karmarkar (1984), com o método de transformação projetiva para programação linear, que era cerca de 50 vezes mais eficiente que o método Simplex. Este método ficou conhecido como método de pontos interiores.

Após isso novas estratégias que utilizavam a função barreira agregada a este método surgiram. A utilização da função barreira logarítmica ou de funções variantes dessa, pode ser encontrada em vários trabalhos, tais como no método de ponto interior proposto por Megiddo & Shub (1989) entre outros.

Em Monteiro & Adler (1989) e Kojima et al. (1989) foi desenvolvida com sucesso a metodologia primal-dual de pontos interiores que explorava uma função potencial primal-dual e a relação de complementaridade entre as soluções primal e dual. Esse método mostrou-se mais robusto para a resolução de problemas de programação linear, quadrática e não-linear convexa.

Mehrotra (1992) propôs o método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores. A estratégia de Mehrotra consistia em um procedimento previsor-corretor, em que a cada iteração, na determinação das direções de busca, no procedimento previsor desprezavam-



se os termos não-lineares da relação de complementaridade bem como o parâmetro,  $\mu > 0$ , de barreira logarítmica. Em seguida no procedimento corretor os termos não lineares e o parâmetro de barreira eram considerados, corrigindo e melhorando as direções de busca do método. Na prática esse método mostrou-se sensivelmente melhor que os métodos primal-dual à resolução dos problemas citados.

No trabalho de Polyak (1992), é proposto o método da função barreira modificada, com o objetivo de evitar algumas dificuldades encontradas nos métodos de pontos interiores que utilizavam a estratégia de barreira clássica. Em especial, o problema de mau condicionamento da matriz hessiana à medida que o método convergia para a solução do problema e a solução se aproximava da fronteira do problema original. A estratégia proposta consistia na junção da função lagrangiana clássica e da barreira logarítmica modificada, pela relaxação das inequações de desigualdade do problema, a qual expandia a região factível do problema possibilitando ao método operar com pontos exteriores à região factível original. Esse método faz parte da classe de métodos de rescalamento não linear.

Em Breitfeld & Shanno (1996) é proposto o método de barreira-penalidade para problemas de programação não-linear, variante do método da função barreira modificada de Polyak. Nesse método uma estratégia de extrapolação quadrática foi proposta no sentido de tratar pontos que violavam a fronteira da região relaxada do problema. Essa estratégia garante a convergência do método em casos que a função barreira modificada não consegue determinar a solução ótima do problema.

Em Shanno & Vanderbei (2000), é apresentado um algoritmo de pontos interiores e exteriores para programação não-linear e não-convexa. Os autores propuseram uma perturbação nos termos diagonais da matriz hessiana da função langrangiana do problema, baseado no procedimento de Levenberg-Marquardt, a fim de mantê-la definida positiva e evitar seu mau condicionamento em pontos próximos à fronteira da região relaxada do problema. Os autores também utilizaram o procedimento previsor-corretor apresentado em Mehrotra, o qual melhorou o desempenho do método.

Para casos em que os métodos de pontos interiores não atingem soluções ótimas com boa precisão, em Griva (2004), é proposto o método primal-dual não linear de rescalamento, que explorava os métodos de pontos interiores e exteriores.

Em Sousa (2006) e Sousa et al. (2012) é apresentado um método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, com o uso da função Lagrangiana barreira modificada de Polyak, em que a relaxação da região factível é feita sobre as variáveis de folga, as quais tinham sua positividade relaxada, e penalizadas na função objetivo pela função barreira logarítmica modificada. Essa estratégia simplifica o desenvolvimento do método de forma diferente ao método de Polyak, o qual relaxa e penaliza as funções de desigualdade do problema.

Colombo & Gondzio (2008) abordam o papel da centralidade na implementação do método de pontos interiores. Segundo os autores o procedimento previsor-corretor de Mehrotra pode ocasionalmente falhar, com isso uma das contribuições do artigo, utilizada nesse trabalho, consiste em explorar uma combinação das direções do procedimento previsor e corretor, para encontrar uma nova direção com melhores propriedades.

Em Balbo et al. (2012) é apresentado um método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores variante dos trabalhos de Wu et al. (1994) e Mehrotra (1992), com procedimento de busca unidimensional nos passos previsor e corretor. É proposto a utilização da estratégia de centragem relacionada ao parâmetro de centragem associado à função barreira logarítmica já no passo previsor, resolvendo com sucesso o problema clássico de despacho econômico(sem ponto de carregamento de válvula).

Em Pinheiro (2012) e Pinheiro et al. (2015), é proposto um método primal-dual de pontos interiores e exteriores barreira logarítmica modificada com estratégia de extrapolação cúbica, que auxilia o método na operacionalização desse com os pontos exteriores à região factível e à região factível relaxada do problema. É proposto também uma estratégia de convergência global variante de Levenberg-Marquardt, para auxiliar o método na determinação de direções factíveis de descida. O método apresentou resultados considerados promissores quando aplicado em problemas de FPOR.

Em Silva (2014) é proposto um método primal-dual previsor-corretor barreira logarítmica modificada associado a uma estratégia de correção de inércia e uma técnica de suavização hiperbólica, que possibilitaram ao método a resolução do problema de Despacho Econômico com ponto de carregamento de válvula(PDE-PV) e com representação da transmissão(PDE-PV-RT). A estratégia de correção de inércia garante a convergência do método para mínimos locais e a técnica de suavização hiperbólica trata a função objetivo

em pontos de não-diferenciabilidade associados aos pontos de carregamento de válvula inseridos na função modular e senoidal do PDE-PV. Outra contribuição do trabalho está no teste de complementaridade para a escolha do novo ponto baseado nas soluções provisórias previsor ou corretor mais promissoras.

## 3.2 Método de barreira

Os métodos de barreira são utilizados para resolver problemas de otimização com restrições de desigualdade e cujo interior da região factível seja não vazio, como o problema definido em (3.1):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & f(x) \\ \text{Sujeito a: } & h(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que:

- $f$  e  $h$ : são funções de classe  $C^2$ , tal que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ ;
- $h(x)$ : é o vetor das restrições de desigualdade;
- $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ : é o vetor das variáveis do problema, com  $\Omega$  sendo um conjunto aberto.

Os métodos de barreira convertem o problema restrito (3.1) em um irrestrito. Assim, as restrições do problema são incorporadas à função objetivo através de um parâmetro de barreira, com isso temos uma função auxiliar, e o problema irrestrito é resolvido para uma sequência de parâmetros de barreira que tende a zero.

Os métodos de barreira são conhecidos também como métodos de pontos interiores, pois os pontos encontrados no processo iterativo caminham pelo interior da região factível do conjunto não-vazio das restrições, podem tender a pontos da fronteira do problema, porém não atingem esta.

A função auxiliar é definida de acordo com (3.2):

$$f_\mu(x) = f(x) + \mu B(x), \tag{3.2}$$

em que:

$\mu \in \mathbb{R}_+^*$ : é denominado parâmetro de barreira;

$B(x)$ : é a função barreira.

A função barreira  $B(x)$ , associada ao problema (3.2), é definida de acordo com (3.3):

$$B(x) = \sum_{i=1}^r \phi(h_i(x)), \quad (3.3)$$

em que  $\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, que satisfaz as propriedades:

- $\phi(y) \geq 0$ , se  $y > 0$ , e
- $\lim_{y \rightarrow 0^+} \phi(y) = \infty$ .

O problema de otimização irrestrito com a inserção da função auxiliar, passa a ser definido por (3.4):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f_\mu(x) \\ &\text{Sujeito a:} && x \in X, \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que  $X$  é o interior não-vazio da região factível do problema (3.1).

As primeiras modelagens para a função auxiliar, ou função barreira foram apresentadas por Carroll & Fiacco (1961), denominada de função barreira clássica ou inversa, representada em (3.5) e por Frisch (1955), denominada de função barreira logarítmica, definida em (3.6).

$$\phi(y) = \frac{1}{y}, \quad (3.5)$$

$$\phi(y) = -\ln(y). \quad (3.6)$$

No método de barreira a medida que  $x \rightarrow x^*$  a função barreira  $B(x) \rightarrow \infty$ , mas para a resolução deseja-se que  $\mu B(x) \rightarrow 0$ , assim é preciso que o parâmetro de barreira  $\mu \rightarrow 0$  mais rapidamente que  $B(x) \rightarrow \infty$ . Como critério de parada do método adotada-se uma

tolerância e utiliza-se  $\mu B(x)$  menor que essa tolerância.

As dificuldades encontradas pelo método estão na escolha de um ponto inicial factível e no mau condicionamento da matriz hessiana, à medida que  $\mu \rightarrow 0$ .

### 3.3 Método de Barreira Modificada e rescalamento não-linear

Em Polyak (1992), é desenvolvida uma teoria de métodos de barreira modificada para problemas de otimização restrita. Ao combinar as funções Lagrangiana clássica e barreira clássica, a função barreira modificada evita problemas encontrados por ambas. Segundo Sousa (2006), em contraste com a função barreira clássica, as funções barreira modificada são definidas na solução, são suaves na vizinhança do ótimo e não vão para o infinito quando o ótimo se aproxima; e em relação à função Lagrangiana clássica, é convexa na vizinhança da solução para problemas de programação não convexos, se as condições de segunda ordem são satisfeitas.

Com o intuito de estender a teoria da função barreira modificada para uma mais geral, Polyak propôs uma classe de métodos denominada de rescalamento não-linear. Essa classe, incorpora a função barreira modificada e outras funções que satisfazem determinadas propriedades. Considere o problema de otimização (3.7):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) \\ \text{Sujeito a:} \quad & h(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

em que:

$f$  e  $h$ : são funções de classe  $C^2$ , tal que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ;  
 $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ : com  $\Omega$  sendo um conjunto aberto.

Uma transformação na função objetivo e/ou restrições é realizada pelo método do rescalamento não linear, de forma que se obtenha um problema equivalente e com a mesma região factível. A transformação não-linear utilizada é uma função suave e que depende de um parâmetro positivo, a qual denomina-se função de rescalamento. Os multiplicadores

de Lagrange das restrições modificadas são chamados de estimadores dos multiplicadores de Lagrange.

A definição de uma função de rescalamento não linear é dada em Polyak & Teboulle (1997), como uma função  $\psi$ , de classe  $C^2$ , sobre um intervalo  $(a, +\infty)$  e satisfazendo  $(-\infty) \leq a < 0$ ,  $\psi(a) = -\infty$  e  $\psi'(a) = +\infty$ . Além disso, a função de rescalamento não linear deve atender as propriedades:

- $\psi(0) = 0$  e  $\psi'(0) = 1$ ;
- $\psi'(t) > 0$ , ou seja, a função  $\psi$  é estritamente crescente;
- $\psi''(t) < 0$ , ou seja,  $\psi$  é uma função côncava;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi'(t) = 0$ .

De acordo com as propriedades da função  $\psi$ , o problema dado em (3.7), pode ser reformulado para um problema equivalente (3.8), ao considerar um parâmetro  $\mu > 0$  e de modo que na transformação não seja alterado o conjunto de soluções ótimas do problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a: } -\mu\psi(\mu^{-1}h_j(x)) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned} \tag{3.8}$$

O problema transformado definido em (3.8), permite que seja feita uma relaxação da região factível do problema original, uma vez que sendo a função  $\psi$  definida em  $(a, +\infty)$ , os valores de  $x$  podem ser tais que  $\mu^{-1}h_j(x) > a$  se, e somente se,  $h_j(x) > a\mu$  e como  $a < 0$ , implica em  $a\mu < 0$ .

A região factível relaxada é uma união da região factível original e de uma região adicional, que depende do parâmetro  $\mu$ . A medida que  $\mu$  tende a 0, a região relaxada, em seu limite, tende à região factível original.

Ao problema (3.8), formulado através da técnica do rescalamento não linear, uma função Lagrangiana pode ser associada, a qual é expressa em (3.9):

$$L_\mu(x, \delta) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \psi(\mu^{-1}h_j(x)), \tag{3.9}$$

em que:

$L_\mu: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^p \rightarrow \mathbb{R};$

$\delta_j, j = 1, \dots, p:$  são os estimadores dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade transformadas.

A função (3.9) é utilizada como função objetivo do problema irrestrito (3.10). Determina-se  $x$  e caso a convergência não seja obtida, os estimadores e o parâmetro de barreira devem ser atualizados e o processo é repetido.

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } L_\mu(x) \\ & \text{Sujeito a: } x \in X, \end{aligned} \tag{3.10}$$

em que  $X$  é o interior não-vazio da região factível do problema (3.7).

### 3.3.1 Atualização dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange

Considere a função Lagrangiana, do problema transformado, definida em (3.9). Aplicando as condições de otimalidade e assumindo que uma nova solução  $x^{(k+1)}$  foi determinada, tem-se que:

$$\nabla_x L_\mu(x^{k+1}, \delta^k) = 0 \tag{3.11}$$

se, e somente se,

$$\nabla f(x^{k+1}) - \sum_{j=1}^p \delta_j^k \psi'((\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1})) \nabla h_j(x^{k+1}) = 0 \tag{3.12}$$

De acordo com Polyak & Teboulle (1997), considerando a equação (3.12), o estimador do multiplicador de Lagrange pode ser atualizado por:

$$\delta_j^{k+1} = \delta_j^k \psi'((\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1})), \quad j = 1, \dots, p, \tag{3.13}$$

Em Polyak & Teboulle (1997), algumas funções de rescalamento não-linear são apresentadas variantes das funções exponencial e logarítmica. Baseados nestes autores, neste trabalho foi utilizada a função barreira logarítmica modificada, a qual é definida em (3.14):

$$\psi(t) = \ln(t + 1), \quad t \in (-1, \infty), \quad (3.14)$$

Esta função também foi utilizada com sucesso em Pinheiro (2012).

### 3.3.2 A função Barreira logarítmica modificada

O método da função barreira logarítmica modificada é utilizado, juntamente com a função de rescalamento definida em (3.14). Com isso, a função Lagrangiana do problema transformado passa ser denominada de função barreira logarítmica modificada e definida da seguinte forma (3.15):

$$M_\mu(x, \delta) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \ln(\mu^{-1} h_j(x) + 1), \quad (3.15)$$

em que:

$\delta_j, j = 1, \dots, p$  são os estimadores dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade.

Se os valores ótimos  $x^*$  e  $\delta^*$  forem conhecidos, a função  $M_\mu$  admite as seguintes propriedades:

- $M_\mu(x^*, \delta^*) = f(x^*)$ , para todo  $\mu > 0$ ;
- $\nabla_x M_\mu(x^*, \delta^*) = \nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^p \delta_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$ , para todo  $\mu > 0$ ;
- E se o problema for convexo, vale que  $x^* = \arg \min\{M_\mu(x, \delta^*)\}$ , para todo  $\mu > 0$ .

De acordo com Polyak & Teboulle (1997), neste método os estimadores dos multiplicadores de Lagrange são atualizados por (3.16):

$$\delta_j^{k+1} = \frac{\delta_j^k}{(\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1}) + 1}. \quad (3.16)$$

Os resultados descritos neste capítulo são diretamente explorados para o desenvolvimento do método PDPIEBLM no capítulo 4.



## 4.1 O Método primal-dual de pontos interiores/exteriores barreira logarítmica modificada

Neste capítulo é apresentado o método primal-dual de pontos interiores/exteriores barreira logarítmica modificada (PDPIEBLM), proposto neste trabalho para resolução do problema de FPOR. Considere o problema geral de otimização não-linear com restrições de igualdade, desigualdade, e com variáveis canalizadas, dado em (4.1)

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && f(x) \\ & \text{Sujeito a:} && g(x) = 0 \\ & && u_1 \leq h_1(x) \leq u_2 \\ & && u_3 \leq x \leq u_4 \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que:

$x \in \mathbb{R}^n$ : é o vetor das variáveis de otimização do problema;

$f, g$  e  $h_1$ : são funções de classe  $C^2$ , tal que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $h_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{r_1}$ ;

$g(x)$ : é o vetor das restrições de igualdade;

$h_1(x)$ : é o vetor das restrições de desigualdade;

$u_1$  e  $u_2 \in \mathbb{R}^{r_1}$ : são os vetores limitantes inferior e superior de  $h_1(x)$ , respectivamente;  
 $u_3$  e  $u_4 \in \mathbb{R}^n$ : são os vetores limitantes inferior e superior de  $x$ , respectivamente.

O problema (4.1) pode ser reescrito como em (4.2), em que as restrições canalizadas são divididas em dois conjuntos de restrições:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f(x) \\
 &\text{Sujeito a: } g(x) = 0 \\
 &\quad -h_1(x) + u_1 \leq 0 \\
 &\quad h_1(x) - u_2 \leq 0 \\
 &\quad -x + u_3 \leq 0 \\
 &\quad x - u_4 \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Assumindo-se  $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ , sendo  $r = 2r_1 + 2n$ , como sendo o conjunto das restrições de desigualdade, tem-se o problema (4.3):

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f(x) \\
 &\text{Sujeito a: } g(x) = 0 \\
 &\quad h(x) \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ao adicionar variáveis de folga às restrições de desigualdade, essas podem ser rescritas como restrições de igualdade e temos o problema (4.4):

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f(x) \\
 &\text{Sujeito a: } g(x) = 0 \\
 &\quad h(x) + z = 0 \\
 &\quad z \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

em que  $z \in \mathbb{R}_+$  é o vetor das variáveis de folga das restrições de desigualdade.

Baseado na função barreira logarítmica modificada (3.14), de Polyak (1992), temos o seguinte problema lagrangiano aumentado:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & f(x) - \mu \sum_{i=1}^r \delta_i \ln(\mu^{-1}z_i + 1) \\
 \text{Sujeito a:} \quad & g(x) = 0 \\
 & h(x) + z = 0
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

em que  $\mu > 0$  é o parâmetro de barreira e  $\delta \in \mathbb{R}_+^r$  é o vetor de estimadores dos multiplicadores de Lagrange relativos às restrições de não-negatividade das variáveis de folgas.

As restrições de igualdade são incorporadas à função objetivo através dos multiplicadores de Lagrange  $\eta \in \mathbb{R}^m$  e  $\lambda \in \mathbb{R}_+^r$ , desta forma, obtém-se a seguinte função Lagrangiana barreira logarítmica modificada, apresentada em (4.6):

$$L_\mu(x, z, \eta, \lambda) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^r \delta_i \ln(\mu^{-1}z_i + 1) + \sum_{j=1}^m \eta g_j(x) + \sum_{i=1}^r \lambda(h_i(x) + z_i) \tag{4.6}$$

As condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) são aplicadas à função lagrangiana (4.6) e o seguinte sistema não linear é obtido:

$$\nabla f(x) + [Jg(x)]^t \eta + [Jh(x)]^t \lambda = 0 \tag{4.7a}$$

$$-\mu \bar{Z}^{-1} \delta + \lambda = 0 \tag{4.7b}$$

$$g(x) = 0 \tag{4.7c}$$

$$h(x) + z = 0 \tag{4.7d}$$

em que  $Jg(x)$  e  $Jh(x)$  são as matrizes jacobianas de  $g$  e  $h$ , respectivamente e  $\bar{Z}$  é definido por:

$$\bar{Z} = \text{diag}(z_1 + \mu, \dots, z_m + \mu) \tag{4.8}$$

$$\bar{Z}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{z_1 + \mu}, \dots, \frac{1}{z_m + \mu}\right) \tag{4.9}$$

De acordo com Pinheiro (2012), o sistema (4.7) é usualmente rescrito como (4.10),

pois o produto  $\bar{Z}\lambda$ , pelo teorema da dualidade forte nos fornece a condição de complementaridade entre as variáveis primais  $z$  e as duais  $\lambda$ :

$$\nabla f(x) + [Jg(x)]^t \eta + [Jh(x)]^t \lambda = 0 \quad (4.10a)$$

$$\bar{Z}\lambda - \mu\delta = 0 \quad (4.10b)$$

$$g(x) = 0 \quad (4.10c)$$

$$h(x) + z = 0 \quad (4.10d)$$

### 4.1.1 O sistema de direções de busca

O método PDPIEBLM é um método iterativo que gera uma sequência de pontos a partir de um ponto inicial  $(x^0, z^0, \eta^0, \lambda^0)^t$ , que convergem para a solução ótima do problema (4.1). Para determinação desses pontos a cada iteração  $k$  são determinadas direções de busca  $(dx^k, dz^k, d\eta^k, d\lambda^k)^t$ , e calculado o comprimento do passo dado nessas direções para a atualização das variáveis.

As direções de busca do método são definidas através da linearização do sistema não-linear (4.10) pela fórmula de Taylor de primeira ordem. O novo ponto é considerado como:

$$(x^{k+1}, z^{k+1}, \eta^{k+1}, \lambda^{k+1})^t = (x^k + dx^k, z^k + dz^k, \eta^k + d\eta^k, \lambda^k + d\lambda^k)^t$$

A seguir são apresentadas as equações linearizadas:

A equação (4.10a) pode ser reescrita como (4.11):

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \eta_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^r \lambda_j \nabla h_j(x) = 0 \quad (4.11)$$

Aplicando a fórmula de Taylor de primeira ordem na vizinhança do ponto  $(x^k, z^k, \eta^k, \lambda^k)^t$ :

$$\begin{aligned} & \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)dx^k + \sum_{i=1}^m (\eta_i^k + d\eta_i^k)[\nabla g_i(x^k) + \nabla^2 g_i(x^k)dx^k] \\ & + \sum_{j=1}^r (\lambda_j^k + d\lambda_j^k)[\nabla h_j(x^k) + \nabla^2 h_j(x^k)dx^k] = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aplicando a propriedade distributiva em (4.12), temos (4.13):

$$\begin{aligned} & \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)dx^k \\ & + \sum_{i=1}^m (\eta_i^k \nabla g_i(x^k) + \eta_i^k \nabla^2 g_i(x^k)dx^k + d\eta_i^k \nabla g_i(x^k) + d\eta_i^k \nabla^2 g_i(x^k)dx^k) \\ & + \sum_{j=1}^r (\lambda_j^k \nabla h_j(x^k) + \lambda_j^k \nabla^2 h_j(x^k)dx^k + d\lambda_j^k \nabla h_j(x^k) + d\lambda_j^k \nabla^2 h_j(x^k)dx^k) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Desconsiderando em (4.13) os termos mistos que envolvem produtos de direções, temos (4.14):

$$\begin{aligned} & \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)dx^k \\ & + \sum_{i=1}^m (\eta_i^k \nabla g_i(x^k) + \eta_i^k \nabla^2 g_i(x^k)dx^k + d\eta_i^k \nabla g_i(x^k)) \\ & + \sum_{j=1}^r (\lambda_j^k \nabla h_j(x^k) + \lambda_j^k \nabla^2 h_j(x^k)dx^k + d\lambda_j^k \nabla h_j(x^k)) = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Agrupando em (4.14) os termos relacionados às direções e passando para o segundo membro da igualdade os termos que não dependem destas, temos (4.15):

$$\begin{aligned} & \left[ \nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^m \eta_i^k \nabla^2 g_i(x^k) + \sum_{j=1}^r \lambda_j^k \nabla^2 h_j(x^k) \right] dx^k + \sum_{i=1}^m d\eta_i^k \nabla g_i(x^k) \\ & + \sum_{j=1}^r d\lambda_j^k \nabla h_j(x^k) = -\nabla f(x^k) - \sum_{i=1}^m \eta_i^k \nabla g_i(x^k) - \sum_{j=1}^r \lambda_j^k \nabla h_j(x^k). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para escrever de forma mais compacta (4.15), basta observar que

$$\nabla_{xx}^2 L(x^k, z^k, \eta^k, \lambda^k) = \nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^m \eta_i^k \nabla^2 g_i(x^k) + \sum_{j=1}^r \lambda_j^k \nabla^2 h_j(x^k).$$

Assim, temos (4.16):

$$\nabla_{xx}^2 L(x^k, z^k, \eta^k, \lambda^k) dx^k + Jg(x^k)^t d\eta^k + Jh(x^k)^t d\lambda^k = m^k, \quad (4.16)$$

em que:

$$m^k = -\nabla f(x^k) - Jg(x^k)^t \eta^k - Jh(x^k)^t \lambda^k. \quad (4.17)$$

O termo  $m^k$  é denominado *resíduo de viabilidade dual*.

Para a linearização da equação (4.10b), considera-se uma linha  $j$  do conjunto de equações (4.10b), dado por (4.18):

$$(z_j + \mu)\lambda_j - \mu\delta_j = 0. \quad (4.18)$$

Linearizando cada equação, para  $j = 1, \dots, r$ , tem-se (4.19):

$$(z_j^{k+1} + \mu)\lambda_j^{k+1} - \mu\delta_j^k = 0, \text{ ou seja, } (z_j^k + dz_j^k + \mu)(\lambda_j^k + d\lambda_j^k) - \mu\delta_j^k = 0. \quad (4.19)$$

A expressão (4.19) pode ser rescrita como (4.20):

$$(z_j^k + \mu)\lambda_j^k + (z_j^k + \mu)d\lambda_j^k + \lambda_j^k dz_j^k + dz_j^k d\lambda_j^k - \mu\delta_j^k = 0. \quad (4.20)$$

Tendo em vista a igualdade (4.20), a linearização para o conjunto de equações em (4.10b) pode ser representada por (4.21):

$$\bar{Z}_k \lambda^k + \bar{Z}_k d\lambda^k + \Lambda^k dz^k + dz^k \circ d\lambda^k - \mu\delta^k = 0. \quad (4.21)$$

em que

$$\Lambda^k = \text{diag}(\lambda^k), \quad (4.22)$$

e segundo Silva (2014),  $dz^k \circ d\lambda^k$  é denominado produto de Hadamard, isto é, o produto componente-a-componente, entre os vetores  $dz^k$  e  $d\lambda^k$ . A igualdade em (4.21) pode ser escrita resumidamente como (4.23):

$$\Lambda^k dz^k + \bar{Z}_k d\lambda^k = s^k, \quad (4.23)$$

em que

$$s^k = -\bar{Z}_k \lambda^k + \mu \delta^k - dz^k \circ d\lambda^k. \quad (4.24)$$

O termo  $s^k$  é denominado de *resíduo de complementaridade*.

Para o conjunto de equações (4.10c), primeiramente, considera-se que:

$$g(x^{k+1}) = 0, \text{ ou seja, } g(x^k + dx^k) = 0. \quad (4.25)$$

Aplicando Taylor de 1ª ordem, segue (4.26):

$$g(x^k) + Jg(x^k)dx^k = 0. \quad (4.26)$$

A igualdade expressa por (4.26) pode ser reescrita como (4.27):

$$Jg(x^k)dx^k = t^k, \quad (4.27)$$

em que

$$t^k = -g(x^k). \quad (4.28)$$

Por fim, o conjunto de equações (4.10d) também é linearizado. Considera-se (4.29):

$$h(x^{k+1}) + z^{k+1} = 0, \text{ ou seja, } h(x^k + dx^k) + z^k + dz^k = 0. \quad (4.29)$$

Assim, aplicando Taylor de 1ª ordem obtem-se (4.30):

$$h(x^k) + Jh(x^k)dx^k + z^k + dz^k = 0. \quad (4.30)$$

A igualdade (4.30) pode ser rescrita como:

$$Jh(x^k)dx^k + dz^k = u^k, \quad (4.31)$$

em que

$$u^k = -h(x^k) - z^k. \quad (4.32)$$

Para determinar as direções de busca um sistema considerando as equações (4.16), (4.23), (4.27) e (4.31), dado por (4.33), deve ser resolvido.

$$\begin{pmatrix} K & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \Lambda^k & 0 & \overline{Z}_k \\ Jg(x^k) & 0 & 0 & 0 \\ Jh(x^k) & I_r & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^k \\ dz^k \\ d\eta^k \\ d\lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ s^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

em que  $I_r$  é a matriz identidade de ordem  $r$  e  $K = \nabla_{xx}^2 L(x^k, z^k, \eta^k, \lambda^k)$ . Esse sistema é denominado sistema primal-dual.

## 4.1.2 Cálculo das direções

Considerando o sistema (4.33) e com base em Mehrotra (1992) e Pinheiro et al. (2015), são definidos os procedimentos predictor e corretor para a determinação das direções de busca do método PDPIEBLM, aqui proposto.

### 4.1.2.1 Procedimento Predictor

Para o procedimento predictor, no resíduo dado em (4.24) existe um fator não-linear que depende de direções que não são conhecidas *a priori* e que serão desconsideradas, portanto, tem-se que:



$$dz^k \circ d\lambda^k = 0$$

e o resíduo utilizado no sistema previsor será:

$$\tilde{s}^k = -\bar{Z}_k \lambda^k + \mu \delta^k \quad (4.34)$$

Usualmente na literatura em (4.34), o parâmetro de barreira  $\mu$  é desconsiderado. Baseado em Pinheiro (2012), neste trabalho este parâmetro não é desprezado, pois segundo o autor o mesmo possui influência nas condições de complementaridade. Outros autores como Silva (2014) e Gonçalves (2014) também utilizaram o parâmetro de barreira em ambos os procedimentos em seus métodos. Assim o sistema a ser resolvido no passo previsor é dado por (4.35):

$$\begin{pmatrix} K & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \Lambda^k & 0 & \bar{Z}_k \\ Jg(x^k) & 0 & 0 & 0 \\ Jh(x^k) & I_r & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}x^k \\ \tilde{d}z^k \\ \tilde{d}\eta^k \\ \tilde{d}\lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \tilde{s}^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

A resolução do sistema (4.35), como segue, determina as direções de busca do procedimento previsor, dadas por:  $\tilde{d}x^k, \tilde{d}z^k, \tilde{d}\eta^k$  e  $\tilde{d}\lambda^k$ .

Logo na última linha do sistema (4.35), tem-se:

$$Jh(x^k)\tilde{d}x^k + \tilde{d}z^k = u^k, \quad (4.36)$$

assim,

$$\tilde{d}z^k = u^k - Jh(x^k)\tilde{d}x^k. \quad (4.37)$$

Para a segunda linha do sistema (4.35), tem-se:

$$\Lambda^k \tilde{d}z^k + \bar{Z}_k \tilde{d}\lambda^k = \tilde{s}^k, \quad (4.38)$$

e, portanto,

$$\tilde{d}\lambda^k = \bar{Z}_k^{-1}(\tilde{s}^k - \Lambda^k \tilde{d}z^k). \quad (4.39)$$

As direções de busca,  $\tilde{d}x^k$  e  $\tilde{d}\eta^k$ , são obtidas ao considerar a primeira linha do sistema (4.35):

$$K\tilde{d}x^k + Jg(x^k)^t \tilde{d}\eta^k + Jh(x^k)^t \tilde{d}\lambda^k = m^k. \quad (4.40)$$

Ao substituir em (4.40) a direção de busca  $\tilde{d}\lambda^k$ , obtida em (4.39), temos (4.41):

$$K\tilde{d}x^k + Jg(x^k)^t \tilde{d}\eta^k + Jh(x^k)^t \bar{Z}_k^{-1}(\tilde{s}^k - \Lambda^k \tilde{d}z^k) = m^k \quad (4.41)$$

Na equação (4.41), substitui-se a direção de busca  $\tilde{d}z^k$ , obtida em (4.37):

$$K\tilde{d}x^k + Jg(x^k)^t \tilde{d}\eta^k + Jh(x^k)^t \bar{Z}_k^{-1}[\tilde{s}^k - \Lambda^k(u^k - Jh(x^k)\tilde{d}x^k)] = m^k, \quad (4.42)$$

agrupando em (4.42) os termos, tem-se (4.43):

$$\begin{aligned} [K + Jh(x^k)^t \bar{Z}_k^{-1} \Lambda^k Jh(x^k)] \tilde{d}x^k + Jg(x^k)^t \tilde{d}\eta^k \\ + Jh(x^k)^t \bar{Z}_k^{-1}(\tilde{s}^k - \Lambda^k u^k) = m^k. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ao definir

$$\theta_k = K + Jh(x^k)^t \bar{Z}_k^{-1} \Lambda^k Jh(x^k) \quad (4.44)$$

denominada de matriz hessiana modificada do problema e,

$$\tilde{p}^k = Jh(x^k)^t \bar{Z}_k^{-1}(\tilde{s}^k - \Lambda^k u^k). \quad (4.45)$$

a equação (4.43), pode ser reescrita como (4.46):

$$\theta_k \tilde{d}x^k + Jg(x^k)^t \tilde{d}\eta^k = m^k - \tilde{p}^k. \quad (4.46)$$

Observa-se que a equação (4.46) e a terceira equação do sistema (4.35) estão escritas em função das mesmas variáveis e definem o sistema reduzido (4.47).

$$\begin{pmatrix} \theta_k & Jg(x^k)^t \\ Jg(x^k) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}x^k \\ \tilde{d}\eta^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k - \tilde{p}^k \\ t^k \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Da segunda equação de (4.47), obtém-se:

$$Jg(x^k) \tilde{d}x^k = t^k \quad (4.48)$$

De (4.46) tem-se (4.49):

$$Jg(x^k)^t \tilde{d}\eta^k = m^k - \tilde{p}^k - \theta_k \tilde{d}x^k. \quad (4.49)$$

Pré-multiplicando (4.49), pela matriz  $\theta_k^{-1}$ , tem-se (4.50):

$$\theta_k^{-1} Jg(x^k)^t \tilde{d}\eta^k = \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - \tilde{d}x^k. \quad (4.50)$$

Pré-multiplicando (4.50) por  $Jg(x^k)$  obtêm-se (4.51):

$$Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^t \tilde{d}\eta^k = Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - Jg(x^k) \tilde{d}x^k. \quad (4.51)$$

Substituindo (4.48) em (4.51), tem-se (4.52):

$$Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^t \tilde{d}\eta^k = Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - t^k. \quad (4.52)$$

Com isso, determina-se  $\tilde{d}\eta^k$  como em (4.53):

$$\tilde{d}\eta^k = [Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^t]^{-1} [Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - t^k]. \quad (4.53)$$

Assim, é possível calcular  $\tilde{d}x^k$  ao utilizar a 1ª equação do sistema (4.47), como em (4.54):

$$\tilde{d}x^k = \theta_k^{-1}[m^k - \tilde{p}^k - Jg(x^k)^t \tilde{d}\lambda^k]. \quad (4.54)$$

Desta forma, tem-se as direções do procedimento predictor definidas por (4.54), (4.37), (4.53) e (4.39).

#### 4.1.2.2 Procedimento Corretor

No procedimento corretor, os termos de segunda ordem dos resíduos de complementaridade, dados em (4.24) são considerados, com as direções do procedimento predictor já calculadas:

$$s^k = -\bar{Z}_k \lambda^k + \mu \delta^k - \tilde{d}z^k \circ \tilde{d}\lambda^k. \quad (4.55)$$

Desta forma, o sistema a ser resolvido no procedimento corretor é dado por:

$$\begin{pmatrix} K & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \Lambda^k & 0 & \bar{Z}_k \\ Jg(x^k) & 0 & 0 & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^k \\ dz^k \\ d\eta^k \\ d\lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ s^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

Como no passo predictor, as direções corrigidas são determinadas a partir da solução de (4.56) dada por:

$$d\eta^k = [Jg(x^k)\theta_k^{-1}Jg(x^k)^t]^{-1}[Jg(x^k)\theta_k^{-1}(m^k - p^k) - t^k], \quad (4.57)$$

$$dx^k = \theta_k^{-1}[m^k - p^k - Jg(x^k)^t d\eta^k], \quad (4.58)$$

$$dz^k = u^k - Jh(x^k)dx^k, \quad (4.59)$$

$$d\lambda^k = \bar{Z}_k^{-1}(s^k - \Lambda^k dz^k), \quad (4.60)$$

em que

$$p^k = Jh(x^k)^t \bar{Z}_k^{-1}(s^k - \Lambda^k u^k). \quad (4.61)$$

### 4.1.3 Teste Quadrático

As direções calculadas nos procedimentos predictor e corretor precisam ser direções de descida, para garantir a convergência do método. Para isso a matriz hessiana modificada do problema, definida em (4.44) precisa ser definida positiva.

Usualmente é utilizado o procedimento de Cholesky nessa verificação. Neste trabalho é proposta uma simplificação, ou seja a utilização do teste quadrático, definido em (4.62):

$$(x^k)^t \theta_k(x^k) > 0, \quad (4.62)$$

em que  $x^k$  é o vetor das variáveis de otimização do problema.

O teste quadrático avalia a positividade da matriz hessiana  $\theta_k$  no ponto  $x^k$  a cada iteração, enquanto no procedimento de Cholesky testa-se a positividade de  $\theta_k$  no  $\mathbb{R}^n$ , a verificação é feita para uma vizinhança de  $x^k$ . Para determinar direções de descida a cada iteração é suficiente que  $\theta_k$  seja definida positiva no ponto  $x^k$  apenas, com isso o teste quadrático é mais específico, tornando o método mais rápido.

Se a condição vale (4.62), temos que  $\theta_k$  é definida positiva por definição, caso contrário, uma atualização na matriz  $\theta_k$  é realizada com base na estratégia de convergência global variante de Levenberg-Marquardt, proposta em Pinheiro et al. (2015), definida por (4.63):

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \beta_k I_n, \quad (4.63)$$

em que  $\beta_k \in \mathfrak{R}_+$  é denominado parâmetro de *damping* ou parâmetro de amortecimento, e

$I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

A atualização de  $\beta_k$  é realizada pelo procedimento heurístico apresentado em Pinheiro et al. (2015), considera-se  $Dif = L_\mu(x^k, z^k, \eta^k, \lambda^k) - L_\mu(x^{k+1}, z^{k+1}, \eta^{k+1}, \lambda^{k+1})$ :

- Se  $Dif < 0,25$ , então:

$$\beta_{k+1} = \beta_k \left( \frac{4}{(\sqrt{5} + 1) + \sqrt{16\alpha^2 + (\sqrt{5} + 1)^2}} \right); \quad (4.64)$$

- Se  $Dif > 0,75$ , então:

$$\beta_{k+1} = \beta_k \left( \frac{1 + \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2\alpha^2 + 1}}{2} \right); \quad (4.65)$$

- Se  $0,25 \leq Dif \leq 0,75$ , então  $\beta_{k+1} = \beta_k$ ,

em que  $\alpha \in (0, 1)$  é um parâmetro pré-estabelecido na inicialização do método.

#### 4.1.4 Cálculo do tamanho dos passos

O cálculo do tamanho dos passos primais e duais, denominados de,  $\alpha_{P,\text{prev}}^k$ ,  $\alpha_{P,\text{cor}}^k$ ,  $\alpha_{D,\text{prev}}^k$  e  $\alpha_{D,\text{cor}}^k$ , e definidos em (4.66) a (4.69) respectivamente, é o mesmo utilizado em Pinheiro et al. (2015), que baseou-se em Granville (1994).

$$\alpha_{P,\text{prev}}^k = \sigma \min \left\{ 1, -\frac{(z_j^k)}{\tilde{d}z_j^k} : z_j^k > 0 \text{ e } \tilde{d}z_j^k < 0 \right\}, \quad (4.66)$$

$$\alpha_{P,\text{cor}}^k = \sigma \min \left\{ 1, -\frac{(z_j^k)}{dz_j^k} : z_j^k > 0 \text{ e } dz_j^k < 0 \right\}, \quad (4.67)$$

$$\alpha_{D,\text{prev}}^k = \sigma \min \left\{ 1, -\frac{\lambda_j^k}{\tilde{d}\lambda_j^k} : \lambda_j^k > 0 \text{ e } \tilde{d}\lambda_j^k < 0 \right\}, \quad (4.68)$$

$$\alpha_{D,\text{cor}}^k = \sigma \min \left\{ 1, -\frac{\lambda_j^k}{d\lambda_j^k} : \lambda_j^k > 0 \text{ e } d\lambda_j^k < 0 \right\}, j = 1, \dots, r. \quad (4.69)$$

em que  $\sigma$  é determinado através do procedimento visto em Wright (1995), apresentado em (4.70):

$$\sigma = 1 - \frac{1}{9\sqrt{q}}, \quad (4.70)$$

com  $q$  sendo o número de restrições do problema.

#### 4.1.5 Cálculo do novo ponto

Propõe-se que a atualização do ponto seja feita através das estratégias baseadas nos trabalhos de Colombo & Gondzio (2008), Pinheiro et al. (2015) e Silva (2014), os quais possibilitaram a proposição das estratégias 3, 4 e 5. Essas estratégias determinam direções de busca para o método.

Para a atualização do ponto, a definição das estratégias propostas pelos autores citados e das novas estratégias propostas neste trabalho, considera-se inicialmente as soluções provisórias do procedimento previsor (4.71) e do corretor (4.72):

$$\begin{aligned} x_p^k &= x^k + \alpha_{P,\text{prev}}^k \tilde{d}x^k \\ z_p^k &= z^k + \alpha_{P,\text{prev}}^k \tilde{d}z^k \\ \eta_p^k &= \eta^k + \alpha_{D,\text{prev}}^k \tilde{d}\eta^k, \\ \lambda_p^k &= \lambda^k + \alpha_{D,\text{prev}}^k \tilde{d}\lambda^k \end{aligned} \quad (4.71)$$

e

$$\begin{aligned} x_c^k &= x^k + \alpha_{P,\text{cor}}^k dx^k \\ z_c^k &= z^k + \alpha_{P,\text{cor}}^k dz^k \\ \eta_c^k &= \eta^k + \alpha_{D,\text{cor}}^k d\eta^k \\ \lambda_c^k &= \lambda^k + \alpha_{D,\text{cor}}^k d\lambda^k. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Essas soluções provisórias são necessárias para a definição das estratégias 2, 4 e 5,

propostas, que utilizam o teste de complementaridade proposto em Silva (2014), para determinar as direções mais promissoras.

As estratégias que determinam as direções de busca para o método são descritas a seguir:

#### 4.1.5.1 Estratégia 1

Como em Pinheiro et al. (2015), são utilizadas as direções do procedimento corretor, com isso a atualização do ponto é realizada através de (4.72).

#### 4.1.5.2 Estratégia 2

Utiliza a atualização proposta por Silva (2014). Nesta, verifica-se a cada iteração quais direções são mais promissoras, do procedimento previsor ou do corretor. Essa escolha é realizada através do teste de complementaridade, definido em (4.73).

$$(z_p^k + \mu)^t \lambda_p^k < \chi (z_c^k + \mu)^t \lambda_c^k \quad (4.73)$$

em que  $\chi \in (0, 1)$ .

Se a relação (4.73) é válida, o ponto é atualizado através de (4.71), quando as direções do procedimento previsor são mais promissoras, caso contrário, as direções do procedimento corretor são mais promissoras e utiliza-se (4.72).

#### 4.1.5.3 Estratégia 3

Baseada em Colombo & Gondzio (2008), as novas direções,  $d_n x^k$ ,  $d_n z^k$ ,  $d_n \eta^k$  e  $d_n \lambda^k$  são determinadas utilizando uma combinação das direções do procedimento previsor com as direções do procedimento corretor, multiplicadas por um escalar  $\omega \in (0, 1)$  e apresentada em (4.74).



$$\begin{aligned}
 d_n x^k &= \tilde{d}x^k + \omega dx^k \\
 d_n z^k &= \tilde{d}z^k + \omega dz^k \\
 d_n \eta^k &= \tilde{d}\eta^k + \omega d\eta^k \\
 d_n \lambda^k &= \tilde{d}\lambda^k + \omega d\lambda^k
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Neste trabalho utilizou-se à função barreira logarítmica modificada ao tratar as variáveis de folga do problema, e para o resíduo de complementaridade o parâmetro  $\mu$  associado a barreira logarítmica modificada é considerado no procedimento previsor. Diferentemente, nos autores citados, direções afins são exploradas no procedimento previsor e o parâmetro  $\mu$  associado à função barreira logarítmica clássica é considerado no procedimento corretor.

São calculados novos passos primal  $\alpha_P^k > 0$  e dual  $\alpha_D^k > 0$ , considerando as novas direções determinadas em (4.74), de tal forma que a atualização do ponto é apresentada em (4.75):

$$\begin{aligned}
 x^{k+1} &= x^k + \alpha_P^k d_n x^k \\
 z^{k+1} &= z^k + \alpha_P^k d_n z^k \\
 \eta^{k+1} &= \eta^k + \alpha_D^k d_n \eta^k \\
 \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha_D^k d_n \lambda^k
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

#### 4.1.5.4 Estratégia 4

Proposta neste trabalho, as novas direções,  $d_n x^k$ ,  $d_n z^k$ ,  $d_n \eta^k$  e  $d_n \lambda^k$  são determinadas utilizando uma combinação convexa das direções do procedimento previsor com as direções do corretor, ou seja, dados dois escalares  $\omega_1$  e  $\omega_2 \in (0, 1)$ , em que  $\omega_1 + \omega_2 = 1$ , as direções que recebem o maior escalar são as direções mais promissoras, determinadas através do teste de complementaridade (4.73).

$$\begin{aligned}
 d_n x^k &= \omega_1 \tilde{d}x^k + \omega_2 dx^k \\
 d_n z^k &= \omega_1 \tilde{d}z^k + \omega_2 dz^k \\
 d_n \eta^k &= \omega_1 \tilde{d}\eta^k + \omega_2 d\eta^k \\
 d_n \lambda^k &= \omega_1 \tilde{d}\lambda^k + \omega_2 d\lambda^k
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

São calculados novos passos primal  $\alpha_P^k > 0$  e dual  $\alpha_D^k > 0$ , considerando as novas direções determinadas em (4.76), de tal forma que a atualização do ponto é apresentada de forma análoga a (4.75).

#### 4.1.5.5 Estratégia 5

As novas direções são determinadas por uma combinação das direções mais promissoras, somadas as outras direções multiplicadas por um escalar  $\omega \in (0, 1)$ . Novamente a direção mais promissora é determinada por (4.73).

Assim para cada iteração, se as direções predictor são mais promissoras, as novas direções são determinadas como em (4.74).

Caso contrário, se as direções corretor são mais promissoras o escalar  $\omega$  multiplica as direções predictor:

$$\begin{aligned}
 d_n x^k &= \omega \tilde{d}x^k + dx^k \\
 d_n z^k &= \omega \tilde{d}z^k + dz^k \\
 d_n \eta^k &= \omega \tilde{d}\eta^k + d\eta^k \\
 d_n \lambda^k &= \omega \tilde{d}\lambda^k + d\lambda^k
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

A partir das novas direções, os passos primal  $\alpha_P^k > 0$  e dual  $\alpha_D^k > 0$  são calculados e o novo ponto é determinado como em (4.75).

### 4.1.6 Atualização dos parâmetros $\mu$ e $\delta$

A atualização do parâmetro de barreira  $\mu$  segue a heurística de Pinheiro et al. (2015), e é apresentada em (4.78):

$$\mu_{k+1} = \tau\mu_k, \quad (4.78)$$

em que uma relaxação do parâmetro  $\mu$  é realizada para todo  $z^{k+1}$  seguindo o teste:

Se  $z^{k+1} \geq -\mu_{k+1}$ , então (4.78) permanece.

Caso contrário, para  $z^{k+1} < -\mu_{k+1}$ ,  $\mu$  é atualizado por (4.79):

$$\mu_{k+1} = -(1 + \tau) \times \min(z), \quad (4.79)$$

em que  $\tau \in (0, 1)$  é um parâmetro de atualização.

Neste trabalho os estimadores dos multiplicadores de Lagrange  $\delta$  são atualizados conforme Pinheiro et al. (2015) e definido em (4.80):

$$\delta^{k+1} = \lambda^{k+1}. \quad (4.80)$$

### 4.1.7 Critério de Parada

Os métodos iterativos, como o proposto neste trabalho, não determinam uma solução exata para o problema, logo necessitam de um critério de parada.

Neste trabalho é adotado o critério de parada utilizado por Pinheiro et al. (2015). Neste, quando os resíduos relativos à factibilidade primal,  $t^k$  e  $u^k$ , factibilidade dual,  $m^k$  e folgas complementares,  $s^k$ , são suficientemente pequenos quanto a uma precisão  $\varepsilon > 0$  pré-estabelecida, uma boa solução é obtida.

Isso pode ser expresso por:  $\|m^k, s^k, t^k, u^k\|_\infty \leq \varepsilon$

## 4.2 O Algoritmo do método PDPIEBLM

O algoritmo do método PDPIEBLM com as estratégias de teste quadrático e determinação de novas direções de busca é apresentado em Algoritmo 1.

---

### Algoritmo 1: Método PDPIEBLM

---

- 1 Inicialização: Parâmetro de barreira  $\mu^0 > 0$ , seu fator de redução  $\tau \in (0, 1)$ , parâmetro de amortecimento  $\beta^0 \in (0, 1)$ , seu fator de atualização  $\alpha \in (0, 1)$ , parâmetro do teste de complementaridade  $\chi \in (0, 1)$ , os escalares das direções previsor e corretor  $\omega$ ,  $\omega_1, \omega_2 \in (0, 1)$ , os estimadores dos multiplicadores de Lagrange  $\delta^0 > 0$  e  $x^0$ ;
  - 2 Calcule:  $f(x^0)$ ,  $\nabla f(x^0)$ ,  $g(x^0)$ ,  $Jg(x^0)$ ,  $h(x^0)$ ,  $Jh(x^0)$ ;
  - 3 Calcule  $z^0 \leftarrow -h(x^0)$  e monte as matrizes  $\bar{Z}_k^{-1}$  (4.9);
  - 4 Calcule  $\lambda^0 \leftarrow \mu^0 \bar{Z}_k^{-1} \delta^0$  e  $\eta^0 \leftarrow -[Jg(x^0)Jg(x^0)^t]^{-1}Jg(x^0)[\nabla f(x^0) + Jh(x^0)^t \lambda^0]$ ;
  - 5 Determine a matriz  $\Lambda^k$  (4.22);
  - 6 Calcule os resíduos do previsor:  $m^k$  (4.17),  $\tilde{s}^k$  (4.34),  $t^k$  (4.28) e  $u^k$  (4.32);
  - 7 **enquanto**  $\|m^k, s^k, t^k, u^k\|_\infty \geq \varepsilon$  **faça**
  - 8     Calcule o vetor  $\tilde{p}^k$  (4.45) e  $\theta_k$  (4.44);
  - 9     Determine  $\theta_k$  através de (4.63);
  - 10    Realize o teste quadrático (4.62) para verificar a positividade da matriz  $\theta_k$ , e se necessário atualize essa matriz através da (4.63);
  - 11    Calcule as direções do procedimento previsor:  $\tilde{d}x^k$  (4.54),  $\tilde{d}z^k$  (4.37),  $\tilde{d}\eta^k$  (4.53) e  $\tilde{d}\lambda^k$  (4.39);
  - 12    Calcule o resíduo  $s^k$  (4.24) e o vetor  $p^k$  (4.61);
  - 13    Calcule as direções do procedimento corretor:  $dx^k$  (4.58),  $dz^k$  (4.59),  $d\eta^k$  (4.57) e  $d\lambda^k$  (4.39);
  - 14    Calcule os passos primal  $\alpha_{P,\text{prev}}^k$  (4.66),  $\alpha_{P,\text{cor}}^k$  (4.67), e dual  $\alpha_{D,\text{prev}}^k$  (4.68),  $\alpha_{D,\text{cor}}^k$  (4.69);
  - 15    Escolha uma das estratégias definidas na seção 4.1.5, e atualize a solução, obtendo  $x^{k+1}$ ,  $z^{k+1}$ ,  $\eta^{k+1}$  e  $\lambda^{k+1}$ .
  - 16    Atualize o parâmetro de barreira (4.78) ou, caso exista algum  $z_j^{k+1} \leq -\tau\mu^k$ , utilize (4.79)
  - 17    Atualize os estimadores dos multiplicadores de Lagrange (4.80);
  - 18    Faça  $k = k + 1$ ;
  - 19    Calcule:  $f(x^k)$ ,  $\nabla f(x^k)$ ,  $g(x^k)$ ,  $Jg(x^k)$ ,  $h(x^k)$ ,  $Jh(x^k)$ ;
  - 20    Monte as matrizes  $\bar{Z}_k^{-1}$  (4.9) e  $\Lambda^k$  (4.22);
  - 21    Calcule os resíduos do previsor:  $m^k$  (4.17),  $\tilde{s}^k$  (4.34),  $t^k$  (4.28) e  $u^k$  (4.32);
  - 22 Retorne a solução ótima:  $x^* = x^k$ ,  $z^* = z^k$ ,  $\eta^* = \eta^k$  e  $\lambda^* = \lambda^k$
- 

No próximo capítulo apresentamos os resultados obtidos pelo método PDPIEBLM, com as direções combinadas, em conjunto com a estratégia de teste quadrático, e posteriormente, com o procedimento de Cholesky, a fim de comparar os resultados em relação ao número de iterações e tempo computacional, e verificar a eficiência das estratégias propostas neste trabalho.

O Algoritmo 1 do método PDPIEBLM, com estratégias de teste quadrático e determinação de direções de busca combinadas foi implementado em linguagem de programação Matlab, utilizando o Matlab R2010b. O programa foi executado em um computador com processador Intel Core i3, com 4GB de memória RAM e sistema operacional Windows 7 Ultimate. Para os testes realizados com o método PDPIEBLM e as estratégias propostas foram utilizados os sistemas elétricos 9 e 39 barras, que são apresentados no Apêndice C, e os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 57 e 118 barras, obtidos na página <http://www.ee.washington.edu/research/pstca/> (ambos acessados em março de 2015).

As Tabelas (5.1) a (5.6) apresentam os resultados de todas as estratégias de determinação das direções de busca descritas na seção 4.1.5, para as perdas de potência ativa na transmissão e foram implementados e aplicados às estratégias, o teste quadrático e posteriormente, o procedimento de Cholesky para avaliar o número de iterações e tempo computacional. O detalhamento dos resultados obtidos a cada iteração são apresentados no Apêndice B.

Os parâmetros iniciais para os sistemas elétricos utilizados foram:  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\mu^0 = 0,005$ ,  $\tau = 0,01$ ,  $\beta^0 = 0,01$ ,  $\alpha = 0,25$ ,  $\chi = 0,95$ . Na estratégia 3 e 5,  $\omega = 0,1$ , e na estratégia 4, a direção mais promissora recebe um escalar com o valor 0,9, logo a outra direção recebe 0,1.

Os limitantes inferior e superior das magnitudes de tensão das barras dos sistemas

adotados foram  $0,95 \leq V \leq 1,05$ . E para os taps dos transformadores adotou-se  $0,96 \leq t \leq 1,04$ .

A estratégia de teste quadrático foi implementada e adicionada ao método seguindo a definição apresentada em (4.62), da seção (4.1.3). Para comparação de resultados com o procedimento de Cholesky, este foi implementado através do comando "chol()" do Matlab. O parâmetro de amortecimento  $\beta_k$ , o qual deve atualizar a matriz  $\theta_k$ , quando esta não é definida positiva, tanto na estratégia de teste quadrático como no procedimento de Cholesky, utiliza a heurística apresentada na seção (4.1.3).

Nas próximas seções são apresentados os resultados obtidos utilizando o método PDPIEBLM, com as estratégias de direções combinadas, teste quadrático e procedimento de Cholesky, respectivamente aos sistemas 9 e 39 barras, e os sistemas IEEE 14, 30, 57 e 118 barras.

## 5.1 O sistema 9 barras

O sistema 9 barras é formado por:

- 1 barra *slack*;
- 2 barras de geração (PV);
- 6 barras de carga (PQ);
- 9 linhas de transmissão;

Com as características do sistema apresentadas, a dimensão do problema é dada por seu modelo matemático que possui:

- 14 restrições de igualdade;
- 12 restrições de desigualdade canalizadas;
- 18 variáveis contínuas.

Na tabela (5.1), os resultados para o sistema elétrico 9 barras apresentam para todas as estratégias uma perda de  $4,44MW$ . Para todas as estratégias o problema convergiu em 6 iterações, com exceção da estratégia 3, em 7 iterações. A estratégia de teste quadrático

possibilitou ao método obter um tempo computacional melhor que o procedimento de Cholesky na verificação da positividade da matriz  $\theta_k$ .

Tabela 5.1: Resultados do método PDPIEBLM para o sistema 9 barras

Est.	Perdas(MW)	Teste Quadrático		Cholesky	
		It.	Tempo(s)	It.	Tempo(s)
1	4,4429	6	0,62	6	0,68
2	4,4429	6	0,66	6	0,66
3	4,4429	7	0,64	7	0,67
4	4,4429	6	0,65	6	0,71
5	4,4429	6	0,63	6	0,69

## 5.2 O sistema IEEE 14 barras

O sistema IEEE 14 barras é formado por:

- 1 barra *slack*;
- 4 barras de geração (PV);
- 9 barras de carga (PQ);
- 20 linhas de transmissão;
- 3 transformadores com tap variável.

Com as características do sistema apresentadas, a dimensão do problema é dada por seu modelo matemático que possui:

- 22 restrições de igualdade;
- 22 restrições de desigualdade canalizadas;
- 31 variáveis contínuas.

Na Tabela (5.2), são apresentados os resultados para o sistema elétrico IEEE 14 barras. As perdas foram de  $13,64MW$  para todas as estratégias utilizadas pelo método. Ao utilizar as estratégias 1, 2, 3 e 5 o número de iterações para a estratégia de teste quadrático e o procedimento de Cholesky foram os mesmos. Para a estratégia 4, o procedimento de Cholesky reduziu em uma iteração a convergência do método, comparada a

estratégia de teste quadrático. O tempo computacional para a verificação da positividade da matriz  $\theta_k$  foi menor ao utilizar a estratégia de teste quadrático.

Tabela 5.2: Resultados do método PDPIEBLM para o sistema 14 barras

Est.	Perdas(MW)	Teste Quadrático		Cholesky	
		It.	Tempo(s)	It.	Tempo(s)
1	13,6415	6	0,69	6	0,71
2	13,6415	6	0,70	6	0,76
3	13,6415	8	0,71	8	0,75
4	13,6415	6	0,71	5	0,78
5	13,6415	6	0,67	6	0,77

### 5.3 O sistema IEEE 30 barras

O sistema IEEE 30 barras é formado por:

- 1 barra *slack*;
- 5 barras de geração (PV);
- 24 barras de carga (PQ);
- 41 linhas de transmissão;
- 4 transformadores com tap variável.

Com as características do sistema apresentadas, a dimensão do problema é dada por seu modelo matemático que possui:

- 53 restrições de igualdade;
- 40 restrições de desigualdade canalizadas;
- 64 variáveis contínuas.

Para o sistema IEEE 30 barras, na Tabela (5.3) são apresentados os resultados. Destaca-se que as perdas foram de  $18,01MW$  para todas as estratégias. Na verificação da positividade da matriz  $\theta_k$ , o número de iterações foi o mesmo para a estratégia de teste quadrático e para o procedimento de Cholesky com todas as estratégias de direção de busca. Já o tempo computacional foi menor com a estratégia de teste quadrático. As



estratégias 2 e 4, que utilizam o teste de complementaridade, convergiram em 6 iterações, e foram mais eficientes para este sistema.

Tabela 5.3: Resultados do método PDPIEBLM para o sistema 30 barras

Est.	Perdas(MW)	Teste Quadrático		Cholesky	
		It.	Tempo(s)	It.	Tempo(s)
1	18,0183	7	0,79	7	0,87
2	18,0183	6	0,79	6	0,90
3	18,0183	9	0,89	9	0,95
4	18,0183	6	0,74	6	0,90
5	18,0183	7	0,81	7	0,89

## 5.4 O sistema 39 barras

O sistema 39 barras é formado por:

- 1 barra *slack*;
- 9 barras de geração (PV);
- 29 barras de carga (PQ);
- 46 linhas de transmissão;
- 12 transformadores com tap variável.

Com as características do sistema apresentadas, a dimensão do problema é dada por seu modelo matemático que possui:

- 67 restrições de igualdade;
- 61 restrições de desigualdade canalizadas;
- 90 variáveis contínuas.

Na tabela (5.4), para o sistema 39 barras, as perdas foram de 41,84MW em todas as estratégias. O problema teste de 39 barras foi inserido neste trabalho para mostrar que a estratégia de teste quadrático pode não ter o melhor desempenho em todos os casos investigados, pois neste caso o procedimento de Cholesky, de fato, solucionou o problema com um menor número de iterações.

O tempo computacional em relação ao procedimento de Cholesky foi maior que o da estratégia de teste quadrático pois neste procedimento, em média, o parâmetro de amortecimento  $\beta_k$  foi corrigido pelo menos duas vezes, apesar de ter verificado que  $(x^k)^t \theta_k(x^k) > 0$  em todas as iterações. Isto também mostra que, apesar do teste quadrático ter gasto um maior número de iterações, o fato do procedimento de Cholesky ter que efetuar correções do parâmetro de amortecimento  $\beta_k$ , pode aumentar o tempo computacional de execução do método PDPIEBLM. O que pode ser observado na Tabela (5.4).

Tabela 5.4: Resultados do método PDPIEBLM para o sistema 39 barras

Est.	Perdas(MW)	Teste Quadrático		Cholesky	
		It.	Tempo(s)	It.	Tempo(s)
1	41,8495	14	1,04	9	1,09
2	41,8495	14	1,06	12	1,13
3	41,8495	14	1,23	11	1,08
4	41,8495	11	1,03	10	1,04
5	41,8495	14	1,08	11	1,12

Correções sucessivas do parâmetro de amortecimento  $\beta_k$  podem gerar sistemas de direções de busca mal-condicionados, os quais influenciaram na obtenção de soluções ótimas locais dos problemas, podendo inclusive, não convergir para estas. Este fato ocorreu na resolução do sistema IEEE 118 barras, o qual será visto na seção 5.6.

## 5.5 O sistema IEEE 57 barras

O sistema IEEE 57 barras é formado por:

- 1 barra *slack*;
- 6 barras de geração (PV);
- 50 barras de carga (PQ);
- 80 linhas de transmissão;
- 17 transformadores com tap variável.

Com as características do sistema apresentadas, a dimensão do problema é dada por seu modelo matemático que possui:

- 106 restrições de igualdade;
- 81 restrições de desigualdade canalizadas;
- 131 variáveis contínuas.

Na tabela (5.5), as perdas para o sistema IEEE 57 barras foram de 25,18MW. As estratégias 1, 2 e 4 encontraram solução para o problema com o menor número de iterações com a utilização da estratégia de teste quadrático, convergiram com 6 iterações. O tempo computacional com a estratégia de teste quadrático foi menor comparado ao procedimento de Cholesky.

Tabela 5.5: Resultados do método PDPIEBLM para o sistema 57 barras

Est.	Perdas(MW)	Teste Quadrático		Cholesky	
		It.	Tempo(s)	It.	Tempo(s)
1	25,1868	6	0,96	7	1,07
2	25,1868	6	0,93	6	1,04
3	25,1868	12	1,21	12	1,38
4	25,1868	6	1,00	7	1,12
5	25,1868	8	1,07	8	1,15

## 5.6 O sistema IEEE 118 barras

O sistema IEEE 118 barras é formado por:

- 1 barra *slack*;
- 53 barras de geração (PV);
- 64 barras de carga (PQ);
- 186 linhas de transmissão;
- 9 transformadores com tap variável.

Com as características do sistema apresentadas, a dimensão do problema é dada por seu modelo matemático que possui:

- 181 restrições de igualdade;
- 181 restrições de desigualdade canalizadas;

- 245 variáveis contínuas.

Na Tabela (5.6), as perdas foram de 118,92MW para o sistema 118 barras. Com a utilização da estratégia de teste quadrático o método encontrou solução para todas as estratégias, convergindo com 10 iterações, com exceção da estratégia 3. Com o procedimento de Cholesky apenas as estratégias 1, 2 e 4 encontraram solução. O teste quadrático obteve os melhores tempos computacionais.

Na verificação da positividade da matriz  $\theta_k$  pelo procedimento de Cholesky, nas estratégias 3 e 5, o método não encontrou solução. Isto ocorre pois enquanto a estratégia de teste quadrático avalia puntualmente se a matriz  $\theta_k$  é definida positiva no ponto  $x^k$ , o procedimento de Cholesky faz uma avaliação, inclusive, para a vizinhança deste ponto, fato esse que dificulta a análise da positividade da matriz  $\theta_k$  conforme a dimensão do problema aumenta, o que de fato ocorreu para o caso de 118 barras.

Tabela 5.6: Resultados do método PDPIEBLM para o sistema 118 barras

Est.	Perdas(MW)	Teste Quadrático		Cholesky	
		It.	Tempo(s)	It.	Tempo(s)
1	118,9294	10	2,25	9	2,42
2	118,9294	10	2,38	10	2,42
3	118,9294	15	2,99	-	-
4	118,9294	10	2,30	10	2,49
5	118,9294	10	2,26	10	2,45

## 5.7 Variação dos escalares aplicados às direções

Nesta seção são apresentados os melhores resultados encontrados para cada estratégia, que utiliza diferentes valores para o escalar  $\omega$ , para a determinação das direções combinadas. Verifica-se que com as variações deste escalar é possível melhorar o desempenho do método, reduzindo o número de iterações e/ou tempo computacional.

### 5.7.1 Estratégia 3

Na Tabela (5.7), para os sistemas 9, 30 e 39 barras, manteve-se  $\omega = 0,1$ . Para os sistemas 57 e 118 barras, utilizou-se  $\omega = 0,2$ . Para o sistema 14 barras, utilizou-se  $\omega = 0,3$ .

Tabela 5.7: Resultados para a estratégia 3

<b>Sist.</b>	<b>Perdas(MW)</b>	<b>Teste Quadrático</b>		<b>Cholesky</b>	
		<b>It.</b>	<b>Tempo(s)</b>	<b>It.</b>	<b>Tempo(s)</b>
9	4,44	7	0,64	7	0,67
14	13,64	7	0,95	8	0,99
30	18,01	9	0,89	9	0,95
39	41,84	14	1,23	11	1,74
57	25,18	11	1,21	11	1,53
118	118,92	14	2,95	14	2,93

Verifica-se para o sistema IEEE 14 barras a redução de uma iteração para o método com a utilização do teste quadrático. No sistema IEEE 57 barras, para o teste quadrático e procedimento de Cholesky houve redução de uma iteração cada. E o sistema IEEE 118 barras além de reduzir uma iteração no teste quadrático, obteve 14 iterações com o procedimento de Cholesky, que não convergiu, como mostrado na tabela (5.6).

### 5.7.2 Estratégia 4

Para os sistemas elétricos 14, 30 e 57 barras manteve-se os valores 0,9 para a direção mais promissora e 0,1 para a menos promissora. Para os sistemas elétricos 9, 39 e 118 barras, a direção mais promissora recebeu o valor 0,7, enquanto a outra direção foi atribuído o valor 0,3.

Tabela 5.8: Resultados para a estratégia 4

<b>Sist.</b>	<b>Perdas(MW)</b>	<b>Teste Quadrático</b>		<b>Cholesky</b>	
		<b>It.</b>	<b>Tempo(s)</b>	<b>It.</b>	<b>Tempo(s)</b>
9	4,44	5	0,61	5	0,67
14	13,64	6	0,71	5	0,78
30	18,01	6	0,74	6	0,90
39	41,84	10	0,96	10	1,14
57	25,18	6	1,00	7	1,12
118	118,92	9	2,16	-	-

Como mostra a Tabela (5.8), para o sistema 9 barras, a variação do escalar  $\omega$  reduziu uma iteração com o teste quadrático e procedimento de Cholesky. Para o sistema 39 barras, a redução foi de uma iteração para o teste quadrático. No sistema IEEE 118 barras, houve redução de uma iteração para o teste quadrático, porém o método não convergiu com o procedimento de Cholesky.

Ao comparar os resultados das estratégias utilizadas no método PDPIEBLM, verifica-se também na Tabela (5.8), que a estratégia 4 obteve os melhores resultados em praticamente todos os sistemas utilizados com o teste quadrático.

### 5.7.3 Estratégia 5

Para a estratégia 5, apresentada na seção 4.1.5.5, a melhor combinação realizada para a resolução dos casos utilizados foi obtida considerando-se  $\omega = 0,1$  multiplicando a direção menos promissora. Assim, optou-se por não apresentar uma tabela de resultados com outros valores de  $\omega$ , pois os melhores resultados são os apresentados nas Tabelas (5.1) a (5.6).

O método PDPIEBLM com as estratégias de teste quadrático e de direções de busca combinadas, propostas neste trabalho, apresentou resultados promissores para os sistemas elétricos 9 e 39 barras e os sistemas IEEE 14, 30, 57 e 118 barras.

De acordo com os resultados apresentados, o teste quadrático reduziu o tempo computacional em todos os sistemas solucionados, quando comparado ao procedimento de Cholesky. Em relação ao número de iterações, este teste possibilitou ao método PDPIEBLM um melhor desempenho para cinco dos sistemas investigados. Apenas para o sistema de 39 barras o procedimento de Cholesky obteve um melhor desempenho em relação ao número de iterações mas com um tempo computacional maior. Isto ocorre porque o teste quadrático verifica a positividade da matriz  $\theta_k$  somente em relação ao ponto  $x^k$ , o que é suficiente para determinar direções de descida para o método em uma iteração  $k$ , em um menor tempo computacional. Enquanto que o procedimento de Cholesky analisa a positividade desta matriz em uma vizinhança deste ponto, necessitando em algumas iterações efetuar a correção do parâmetro de amortecimento repetidas vezes para garantir a positividade desta matriz nestes pontos e isto exige um maior esforço computacional.

Quando comparamos as estratégias entre si, as estratégias 1, 2 e 4 mostraram-se mais eficientes em relação às estratégias de direções combinadas 3 e 5. Desta forma, utilizar o teste de complementaridade para gerar as direções definidas nas estratégias 2 e 4 (a qual é uma direção combinada), mostrou-se uma alternativa promissora para melhorar

o desempenho do método proposto, com um desempenho um pouco melhor para a estratégia 4, que mostrou-se mais eficiente para o método PDPIEBLM ao determinar soluções ótimas, com menor número de iterações e menor tempo computacional em praticamente todos os casos. Uma das vantagens dessa estratégia é a possibilidade de variação dos escalares que compõem a direção determinada, a qual é definida como uma combinação convexa entre as direções obtidas nos passos previsor e corretor do método.

Futuramente, testes serão realizados com este método em problemas de FPOR de maior dimensão que os apresentados, ou seja, como o sistema elétrico IEEE 300 barras.

Além disso, para a continuidade deste trabalho pretende-se investigar o problema de FPOR com variáveis discretas e tratá-lo através de funções penalidade tal como no trabalho de Soler et al. (2013). Será abordado o modelo de FPOR que considera os taps dos transformadores e os bancos de capacitores *shunt* como variáveis discretas do problema. Pretende-se também aplicar as estratégias propostas neste trabalho, que combinam as direções previsor e corretor para a resolução deste modelo, a fim de obter-se soluções mais realísticas para um sistema elétrico de potência.



## BIBLIOGRAFIA

- Balbo, A. R., Souza, M. A. S., Baptista, E. C., & Nepomuceno, L. (2012). Predictor-corrector primal-dual interior point method for solving economic dispatch problems: A postoptimization analysis. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, 1–26.
- Baptista, E. C., Belati, E. A., Sousa, V. A., & Costa, G. R. M. (2006). Primal-dual logarithmic barrier and augmented lagrangian function to the loss minimization in power systems. *Electric Power Components and Systems*.
- Breitbart, M. G. & Shanno, D. F. (1996). Computational experience with penalty-barrier methods for nonlinear programming. *Annals of Operations Research*, 62(1), 439–463.
- Carpentier, J. L. (1962). Contribution to the economic dispatch. *Bulletin de la Societée Francaise des Electriciens*, 3(8), 431–447. In French.
- Carroll, C. W. & Fiacco, A. V. (1961). The created response surface technique for optimizing nonlinear restrained systems. *Operations Research*, 9(2), 169–185.
- Colombo, M. & Gondzio, J. (2008). Further development of multiple centrality correctors for interior point methods. *Computational Optimization and Applications*, 41(1), 277–305.
- Dantzig, G. B. (1951). Application of the simplex method to a transportation problem. *Activity Analysis of Production and Allocation*, (pp. 359–373).
- Dommel, H. W. & Tinney, W. F. (1968). Optimal power flow solutions. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER APPARATUS AND SYSTEMS*, pas-87(10), 1866–1876.

- Fiacco, A. V. & McCormick, G. P. (1968). *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Frisch, K. R. (1955). *The logarithmic potential method of convex programming*. Technical report, University Institute of Economics, Oslo, Norway.
- Gonçalves, E. (2014). *Métodos híbridos de pontos interiores/exteriores e de aproximantes de funções em problemas multiobjetivo de despacho econômico e ambiental*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia - Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP.
- Granville, S. (1994). Optimal reactive dispatch through interior point methods. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 9(1), 136–146.
- Griva, I. (2004). Numerical experiments with an interior-exterior point method for nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, 29(2), 173–195.
- Karmarkar, N. (1984). *A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming*. Proceedings of the Sixteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing.
- Kojima, M., Mizuno, S., & Yoshise, A. (1989). A primal-dual interior point algorithm for linear programming. In *Progress in Mathematical Programming* (pp. 29–47).
- Lage, G. G. (2013). *O fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas e restrições de atuação de dispositivos de controle de tensão*. PhD thesis, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.
- Megiddo, N. & Shub, M. (1989). Boundary behavior of interior point algorithms in linear programming. *Mathematics of Operations Research*, 14(1), 97–146.
- Mehrotra, S. (1992). On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, 2(4), 575–601.
- Monteiro, Renato, D. & Adler, I. (1989). Interior path following primal-dual algorithms. part i: Linear programming. *Mathematical Programming*, 44(1-3), 27–41.
- Monteiro, R. D. C., Adler, I., & Resende, M. C. (1990). A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension. *Mathematics of Operations Research*, 15(2).

- Monticelli, A. J. (1983). *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. São Paulo: Edgard Blücher.
- Nocedal, J. & Waltz, R. A. (2005). Adaptive barrier update strategies for nonlinear interior methods. *Technical report*.
- Pinheiro, R. B. N. (2012). *Um método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores barreira logarítmica modificada, com estratégias de global e de ajuste cúbico, para problemas de programação não-linear e não-convexa*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, SP.
- Pinheiro, R. B. N., Balbo, A. R., Baptista, E. C., & Nepomuceno, L. (2015). Interior-exterior point method with global convergence strategy for solving the reactive optimal power flow problem. *Electrical Power and Energy Systems*, 66, 235–246.
- Polyak, R. & Teboulle, M. (1997). Nonlinear rescaling and proximal-like methods in convex optimization. *Mathematical Programming*, 76(2), 265–284.
- Polyak, R. A. (1992). Modified barrier functions. *Mathematical Programming*, 54.
- Shanno, D. F. & Vanderbei, R. J. (2000). Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: ordenings and higher-order methods. *Mathematical Programming*.
- Silva, D. N. (2014). *Método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores e exteriores com estratégias de correção de inércia e suavização hiperbólica aplicado ao problema de despacho econômico com ponto de válvula e representação da transmissão*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru.
- Soler, E. M. (2011). *Resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo com variáveis de controle discretas*. PhD thesis, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.
- Soler, E. M., Asada, E. N., & Costa, G. R. M. (2013). Penalty-based nonlinear solver for optimal reactive power dispatch with discrete controls. *IEEE Transaction on Power Systems*, 28(3), 2174–2182.

- Sousa, V. A. (2006). *Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo Via Método da Função Lagrangiana Barreira Modificada*. PhD thesis, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.
- Sousa, V. A., Baptista, E. C., & Costa, G. R. M. (2012). Optimal reactive power flow via the modified barrier lagrangian function approach. *Electric Power Systems Research*, 84(1), 159–164.
- Sun, D. I., Ashley, B., Brewer, B., & Hughes, A. (1984). Optimal power flow by newton approach. *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, pas-103(10), 2864–2880.
- Wright, M. H. (1995). Why a pure primal newton barrier step may be infeasible. *SIAM Journal on Optimization*, 5(1), 1–12.
- Wu, Y.-C., Debs, A., & Marsten, R. (1994). A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 9(2), 876–883.

## APÊNDICE A

### TRABALHOS PUBLICADOS

**Souza, R.R.;** Balbo, A.R.; Nepomuceno, L.; Pinheiro, R.B.N. Um método de pontos interiores/exteriores, com estratégia de alternância do procedimento previsor-corretor e teste quadrático, aplicado ao problema de fluxo de potência ótimo reativo com taps contínuos. In: *XI Congresso Latino-Americano de Geração e Transmissão de Energia Elétrica*, São José dos Campos - SP, 2015.

**Souza, R.R.;** Balbo, A.R.; Baptista, E.C.; Nepomuceno, L.; Pinheiro, R.B.N. Método primal-dual de pontos interiores e exteriores com estratégia de convergência global em problemas de fluxo de potência ótimo reativo com variação contínua dos taps. In: *III Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste - CMAC-SE*, Vitória - ES, 2015.

**Souza, R.R.;** Balbo, A.R.; Nepomuceno, L.; Pinheiro, R.B.N. Método primal-dual de pontos interiores e exteriores com estratégia de convergência global em problemas de fluxo de potência ótimo reativo com variação contínua dos taps dos transformadores. In: *XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Porto de Galinhas - PE, 2015.

**Souza, R.R.;** Balbo, A.R.; Nepomuceno, L.; Pinheiro, R.B.N. Método de pontos interiores/exteriores, com estratégia modificada do procedimento previsor-corretor, em problemas de fluxo de potência ótimo reativo. In: *XXII Simpósio de Engenharia de Produção*, Bauru - SP, 2015.

**Souza, R.R.;** Balbo, A.R.; Nepomuceno, L. Um método de pontos interiores/exteriores,

com alternância do procedimento previsor-corretor e do teste quadrático em problemas de fluxo de potência ótimo com taps contínuos. In: *V Seminário da Pós-graduação em Engenharia Elétrica*, Bauru - SP, 2015.

**Souza, R.R.**; Balbo, A.R. Método primal-dual de pontos interiores e exteriores em problemas de fluxo de potência ótimo com os taps variando continuamente. In: *I Congresso Brasileiro de Jovens Pesquisadores em Matemática Pura e Aplicada*, São Paulo - SP, 2014.

**Souza, R.R.**; Balbo, A.R.; Nepomuceno, L.; Pinheiro, R.B.N. Sobre a aplicação de métodos de pontos interiores e exteriores em problemas de fluxo de potência ótimo reativo. In: *XXVI Semana da Licenciatura em Matemática - SELMAT*, Bauru - SP, 2014.

**Souza, R.R.**; Balbo, A.R.; Nepomuceno, L.; Baptista, E.C.; Soler, E.M.; Pinheiro, R.B.N. A primal-dual interior/exterior point method, with combined directions and quadratic test in reactive optimal power flow problems. Submetido a revista IEEE LATIN AMERICA TRANSACTIONS. 2016.

## APÊNDICE B

### RESULTADOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES

Neste Apêndice são apresentados os resultados detalhados a cada iteração para a função objetivo, função lagrangiana, critério de parada, parâmetro de barreira  $\mu$ , parâmetro de amortecimento  $\beta$ . São apresentados também o valor do teste quadrático e nas estratégias 2, 4 e 5, que utilizam o teste de complementaridade, a coluna Corretor indica 0 para o termo previsor mais promissor e 1 para o termo corretor mais promissor.

#### B.1 Sistema elétrico 9 barras

Tabela B.1: Resultados 9 barras - Estratégia 1 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático
1	4.4749	-4.4757	$1.51e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$9.06e - 001$
2	4.4933	4.8270	$1.16e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$2.77e + 000$
3	4.4737	4.4882	$4.67e - 003$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$5.53e + 000$
4	4.4445	4.4486	$3.40e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$2.31e + 001$
5	4.4428	4.4431	$4.28e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$3.69e + 002$
6	4.4429	4.4429	$3.36e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$6.57e + 003$

APÊNDICE B. RESULTADOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES

---

Tabela B.2: Resultados 9 barras - Estratégia 2 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	4.4749	-4.4757	$1.51e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$9.06e - 001$	1
2	4.4780	4.6395	$5.97e - 002$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$2.77e + 000$	0
3	4.4300	4.4621	$1.01e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$6.42e + 000$	1
4	4.4430	4.4452	$3.79e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$7.76e + 001$	1
5	4.4429	4.4429	$1.15e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$1.80e + 003$	1
6	4.4429	4.4429	$3.15e - 006$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$6.20e + 004$	1

Tabela B.3: Resultados 9 barras - Estratégia 3 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático
1	3.7129	-4.3719	$1.71e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$9.06e - 001$
2	4.1126	4.6802	$7.69e - 002$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$2.20e + 000$
3	4.4656	4.4839	$3.05e - 003$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$6.56e + 000$
4	4.4425	4.4493	$6.21e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$3.03e + 001$
5	4.4421	4.4447	$2.57e - 003$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$4.74e + 002$
6	4.4426	4.4429	$4.95e - 004$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$1.52e + 004$
7	4.4428	4.4429	$1.92e - 005$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$2.67e + 005$

Tabela B.4: Resultados 9 barras - Estratégia 4 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	4.3801	-4.4839	$1.45e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$9.06e - 001$	1
2	4.4446	4.6408	$5.51e - 002$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$2.70e + 000$	0
3	4.4314	4.4636	$7.93e - 003$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$6.69e + 000$	1
4	4.4418	4.4441	$2.25e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$7.63e + 001$	1
5	4.4428	4.4429	$1.30e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$3.44e + 003$	1
6	4.4429	4.4429	$3.55e - 006$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$1.38e + 005$	1

Tabela B.5: Resultados 9 barras - Estratégia 5 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	4.3886	-4.4418	$1.46e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$9.06e - 001$	1
2	4.4554	4.6487	$5.54e - 002$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$2.76e + 000$	0
3	4.4358	4.4643	$6.86e - 003$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$6.70e + 000$	1
4	4.4418	4.4438	$4.09e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$7.29e + 001$	1
5	4.4428	4.4429	$3.32e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$3.39e + 003$	1
6	4.4429	4.4429	$1.85e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$1.32e + 005$	1



Tabela B.6: Resultados 9 barras - Estratégia 1 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$
1	4.4749	-4.4757	$1.51e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$
2	4.4933	4.8270	$1.16e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$
3	4.4737	4.4882	$4.67e - 003$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$
4	4.4445	4.4486	$3.40e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$
5	4.4428	4.4431	$4.28e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$
6	4.4429	4.4429	$3.36e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$

Tabela B.7: Resultados 9 barras - Estratégia 2 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	4.4749	-4.4757	$1.51e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	1
2	4.4780	4.6395	$5.97e - 002$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	0
3	4.4300	4.4621	$1.01e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	4.4430	4.4452	$3.79e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	4.4429	4.4429	$1.15e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	4.4429	4.4429	$3.15e - 006$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1

Tabela B.8: Resultados 9 barras - Estratégia 3 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$
1	3.7129	-4.3719	$1.71e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$
2	4.1126	4.6802	$7.69e - 002$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$
3	4.4656	4.4839	$3.05e - 003$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$
4	4.4425	4.4493	$6.21e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$
5	4.4421	4.4447	$2.57e - 003$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$
6	4.4426	4.4429	$4.95e - 004$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$
7	4.4428	4.4429	$1.92e - 005$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$

Tabela B.9: Resultados 9 barras - Estratégia 4 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	4.3801	-4.4839	$1.45e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	1
2	4.4446	4.6408	$5.51e - 002$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	0
3	4.4314	4.4636	$7.93e - 003$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	4.4418	4.4441	$2.25e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	4.4428	4.4429	$1.30e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	4.4429	4.4429	$3.55e - 006$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1

Tabela B.10: Resultados 9 barras - Estratégia 5 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	4.3886	-4.4418	$1.46e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	1
2	4.4554	4.6487	$5.54e - 002$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	0
3	4.4358	4.4643	$6.86e - 003$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	4.4418	4.4438	$4.09e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	4.4428	4.4429	$3.32e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	4.4429	4.4429	$1.85e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1

## B.2 Sistema elétrico IEEE 14 barras

Tabela B.11: Resultados 14 barras - Estratégia 1 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático
1	12.1538	-1.2177	$1.67e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.01e + 000$
2	13.6969	14.1854	$6.45e - 002$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$1.96e + 001$
3	13.6330	13.6672	$5.31e - 003$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$7.12e + 001$
4	13.6367	13.6458	$2.97e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$9.09e + 002$
5	13.6414	13.6417	$1.31e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$3.61e + 003$
6	13.6415	13.6415	$6.33e - 006$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$1.40e + 005$

Tabela B.12: Resultados 14 barras - Estratégia 2 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	11.6835	-2.5610	$3.62e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.01e + 000$	0
2	13.8417	15.4271	$2.53e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$8.43e + 000$	1
3	13.1371	13.7146	$5.19e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$3.67e + 001$	1
4	13.5229	13.6575	$7.23e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$2.42e + 002$	1
5	13.6391	13.6425	$7.23e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$1.07e + 003$	1
6	13.6415	13.6415	$3.11e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$4.71e + 004$	1

Tabela B.13: Resultados 14 barras - Estratégia 3 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático
1	11.7154	-2.3872	$3.83e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.01e + 000$
2	11.8565	14.6032	$1.23e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$1.00e + 001$
3	12.4408	14.2123	$1.37e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$2.29e + 003$
4	13.3915	13.7089	$2.23e - 002$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$2.17e + 005$
5	13.6430	13.6506	$6.55e - 003$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$1.24e + 007$
6	13.6418	13.6426	$1.76e - 003$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$3.38e + 008$
7	13.6415	13.6416	$5.38e - 004$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$3.75e + 009$
8	13.6415	13.6415	$7.43e - 005$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	$3.40e + 010$

APÊNDICE B. RESULTADOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES

Tabela B.14: Resultados 14 barras - Estratégia 4 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	11.7187	-2.3560	$3.35e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.01e + 000$	0
2	13.7909	15.0152	$1.87e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$1.02e + 001$	1
3	13.3942	13.6953	$2.03e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$4.07e + 001$	1
4	13.5814	13.6509	$3.83e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$3.51e + 002$	1
5	13.6404	13.6421	$2.85e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$1.66e + 003$	1
6	13.6415	13.6415	$1.13e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$7.52e + 004$	1

Tabela B.15: Resultados 14 barras - Estratégia 5 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	11.7154	-2.3872	$3.83e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.01e + 000$	0
2	13.7902	15.0660	$2.15e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$1.00e + 001$	1
3	13.3769	13.6929	$4.26e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$4.03e + 001$	1
4	13.5760	13.6517	$1.01e - 002$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$3.37e + 002$	1
5	13.6403	13.6421	$4.84e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$1.57e + 003$	1
6	13.6415	13.6415	$5.29e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$7.07e + 004$	1

Tabela B.16: Resultados 14 barras - Estratégia 1 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$
1	12.1538	-1.2177	$1.67e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$
2	13.7027	14.1843	$6.49e - 002$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$
3	13.6325	13.6669	$5.29e - 003$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$
4	13.6366	13.6458	$2.95e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$
5	13.6414	13.6417	$1.27e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$
6	13.6415	13.6415	$6.18e - 006$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$

Tabela B.17: Resultados 14 barras - Estratégia 2 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	11.6835	-2.5610	$3.62e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	13.6967	15.4038	$2.68e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	13.3120	13.7095	$2.92e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	13.5878	13.6507	$3.33e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	13.6405	13.6420	$3.62e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	13.6415	13.6415	$9.52e - 006$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1

Tabela B.18: Resultados 14 barras - Estratégia 3 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$
1	11.7154	-2.3872	$3.83e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$
2	11.8358	14.8634	$1.25e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$
3	12.4760	14.2531	$1.33e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$
4	13.4461	13.6966	$1.66e - 002$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$
5	13.6497	13.6508	$7.44e - 003$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$
6	13.6423	13.6425	$1.68e - 003$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$
7	13.6415	13.6416	$6.53e - 004$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$
8	13.6415	13.6415	$9.56e - 005$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$

Tabela B.19: Resultados 14 barras - Estratégia 4 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	11.7187	-2.3560	$3.35e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	13.6612	15.0518	$1.98e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	13.4608	13.6928	$1.31e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	13.6061	13.6487	$2.48e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	13.6405	13.6417	$7.27e - 005$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1

Tabela B.20: Resultados 14 barras - Estratégia 5 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	11.7154	-2.3872	$3.83e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	13.6244	15.1133	$2.30e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	13.4638	13.6914	$3.36e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	13.6089	13.6484	$6.82e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	13.6406	13.6417	$3.70e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	13.6415	13.6415	$4.30e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1

### B.3 Sistema elétrico IEEE 30 barras

Tabela B.21: Resultados 30 barras - Estratégia 1 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático
1	16.3349	-11.7922	$2.09e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.83e + 000$
2	17.6934	19.7836	$1.65e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$2.34e + 001$
3	18.0015	18.1627	$7.79e - 003$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$3.38e + 001$
4	18.0111	18.0603	$1.62e - 002$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$3.81e + 002$
5	18.0198	18.0226	$2.44e - 003$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$9.07e + 002$
6	18.0183	18.0184	$1.35e - 004$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$1.78e + 004$
7	18.0183	18.0183	$1.11e - 006$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$8.54e + 005$

Tabela B.22: Resultados 30 barras - Estratégia 2 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	15.7563	-13.3530	$4.23e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.83e + 000$	0
2	17.8153	20.3413	$4.09e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$1.17e + 001$	1
3	17.7480	18.7538	$3.53e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$1.15e + 001$	1
4	18.0118	18.0320	$5.26e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$1.22e + 002$	1
5	18.0183	18.0191	$5.54e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$7.73e + 003$	1
6	18.0183	18.0183	$1.47e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$2.70e + 005$	1

Tabela B.23: Resultados 30 barras - Estratégia 3 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático
1	15.7961	-13.1149	$4.53e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.83e + 000$
2	15.8715	19.9857	$1.17e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$1.37e + 001$
3	16.3258	19.4828	$1.82e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$4.36e + 003$
4	17.4117	18.3044	$5.18e - 002$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$5.75e + 005$
5	17.8326	18.0822	$1.27e - 002$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$2.49e + 007$
6	18.0223	18.0226	$1.26e - 002$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$9.72e + 007$
7	18.0191	18.0193	$8.28e - 003$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$2.97e + 009$
8	18.0185	18.0185	$7.27e - 004$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	$1.17e + 010$
9	18.0183	18.0183	$8.06e - 005$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	$6.04e + 010$

APÊNDICE B. RESULTADOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES

Tabela B.24: Resultados 30 barras - Estratégia 4 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	15.8002	-13.0893	$3.95e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.83e + 000$	0
2	17.6833	20.0172	$3.20e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$1.38e + 001$	1
3	17.7852	18.5364	$2.93e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$1.49e + 001$	1
4	18.0125	18.0272	$3.69e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$2.06e + 002$	1
5	18.0183	18.0188	$6.80e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$7.16e + 003$	1
6	18.0183	18.0183	$1.71e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$2.83e + 005$	1

Tabela B.25: Resultados 30 barras - Estratégia 5 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	15.7961	-13.1149	$4.53e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.83e + 000$	0
2	17.6954	20.0670	$3.65e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$1.37e + 001$	1
3	17.7764	18.5469	$3.99e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$1.44e + 001$	1
4	18.0121	18.0275	$5.11e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$1.90e + 002$	1
5	18.0183	18.0188	$1.53e - 003$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$6.99e + 003$	1
6	18.0183	18.0183	$1.37e - 004$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$2.68e + 005$	1
7	18.0183	18.0183	$1.42e - 005$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$1.43e + 007$	1

Tabela B.26: Resultados 30 barras - Estratégia 1 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$
1	16.3349	-11.7922	$2.09e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$
2	17.6934	19.7836	$1.65e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$
3	18.0015	18.1627	$7.79e - 003$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$
4	18.0111	18.0603	$1.62e - 002$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$
5	18.0198	18.0226	$2.44e - 003$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$
6	18.0183	18.0184	$1.35e - 004$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$
7	18.0183	18.0183	$1.11e - 006$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$

Tabela B.27: Resultados 30 barras - Estratégia 2 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	15.7563	-13.3530	$4.23e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	17.8153	20.3413	$4.09e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	17.7480	18.7538	$3.53e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	18.0118	18.0320	$5.26e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	18.0183	18.0191	$5.54e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	18.0183	18.0183	$1.47e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1

Tabela B.28: Resultados 30 barras - Estratégia 3 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$
1	15.7961	-13.1149	$4.53e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$
2	15.8715	19.9857	$1.17e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$
3	16.3258	19.4828	$1.82e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$
4	17.4117	18.3044	$5.18e - 002$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$
5	17.8326	18.0822	$1.27e - 002$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$
6	18.0223	18.0226	$1.26e - 002$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$
7	18.0191	18.0193	$8.28e - 003$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$
8	18.0185	18.0185	$7.27e - 004$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$
9	18.0183	18.0183	$8.06e - 005$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$

Tabela B.29: Resultados 30 barras - Estratégia 4 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	15.8002	-13.0893	$3.95e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	17.6833	20.0172	$3.20e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	17.7852	18.5364	$2.93e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	18.0125	18.0272	$3.69e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	18.0183	18.0188	$6.80e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	18.0183	18.0183	$1.71e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1

Tabela B.30: Resultados 30 barras - Estratégia 5 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	15.7961	-13.1149	$4.53e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	17.6954	20.0670	$3.65e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	17.7764	18.5469	$3.99e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	18.0121	18.0275	$5.11e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	18.0183	18.0188	$1.53e - 003$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	18.0183	18.0183	$1.37e - 004$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1
7	18.0183	18.0183	$1.42e - 005$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	1



## B.4 Sistema elétrico 39 barras

Tabela B.31: Resultados 39 barras - Estratégia 1 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático
1	43.4665	1.0749	$7.83e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.09e + 002$
2	42.1077	43.6673	$1.90e + 000$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$2.36e + 002$
3	39.8914	41.1315	$1.18e + 000$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$1.82e + 002$
4	40.4230	42.4328	$1.09e + 000$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$2.12e + 002$
5	40.9329	41.9436	$7.01e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$1.76e + 002$
6	41.1135	42.9458	$2.07e + 000$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$1.92e + 002$
7	41.3888	41.9733	$5.40e - 001$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$1.91e + 002$
8	41.9471	42.2128	$3.69e - 001$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	$2.55e + 002$
9	41.7770	41.9901	$2.87e - 001$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	$8.33e + 002$
10	41.7814	42.0069	$2.73e - 001$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	$1.09e + 003$
11	41.8417	41.8591	$7.77e - 002$	$5.00e - 023$	$6.46e - 005$	$2.26e + 003$
12	41.8494	41.8496	$5.62e - 003$	$5.00e - 025$	$3.90e - 005$	$4.00e + 004$
13	41.8495	41.8495	$1.38e - 004$	$5.00e - 027$	$2.35e - 005$	$1.86e + 006$
14	41.8495	41.8495	$2.59e - 006$	$5.00e - 029$	$1.42e - 005$	$1.47e + 008$

Tabela B.32: Resultados 39 barras - Estratégia 2 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	41.2700	-0.6906	$8.50e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.09e + 002$	0
2	41.6626	47.9963	$1.63e + 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$2.06e + 002$	1
3	41.3965	45.0681	$1.62e + 000$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$2.34e + 002$	0
4	39.8384	42.9033	$7.81e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$9.77e + 003$	0
5	39.7206	42.1162	$5.81e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$5.36e + 003$	0
6	41.0113	42.2521	$4.98e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$1.46e + 004$	1
7	40.7998	41.9108	$1.21e + 000$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$2.21e + 004$	1
8	41.4074	42.2328	$5.89e - 001$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	$2.36e + 004$	1
9	41.7313	41.9786	$4.74e - 001$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	$4.11e + 004$	1
10	41.7969	42.0672	$4.59e - 001$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	$1.38e + 005$	1
11	41.7602	41.8845	$2.63e - 001$	$5.00e - 023$	$6.46e - 005$	$1.48e + 005$	1
12	41.8472	41.8511	$5.56e - 002$	$5.00e - 025$	$3.90e - 005$	$3.64e + 005$	1
13	41.8494	41.8495	$2.14e - 003$	$5.00e - 027$	$2.35e - 005$	$1.26e + 007$	1
14	41.8495	41.8495	$4.59e - 005$	$5.00e - 029$	$1.42e - 005$	$9.40e + 008$	1

APÊNDICE B. RESULTADOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES

---

Tabela B.33: Resultados 39 barras - Estratégia 3 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático
1	41.6532	0.0416	$9.25e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.09e + 002$
2	41.8090	46.0351	$1.39e + 000$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$1.70e + 002$
3	40.4607	43.3295	$7.61e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$2.03e + 002$
4	40.1660	42.0821	$4.99e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$2.61e + 002$
5	40.1323	41.7667	$6.29e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$1.00e + 003$
6	40.5906	41.8518	$4.38e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$4.38e + 003$
7	41.0021	41.8444	$5.44e - 001$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$4.46e + 005$
8	41.3396	41.8624	$5.26e - 001$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	$1.57e + 006$
9	41.6394	41.8512	$3.88e - 001$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	$3.60e + 006$
10	41.7434	41.8521	$2.53e - 001$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	$1.10e + 007$
11	41.8320	41.8500	$9.07e - 002$	$5.00e - 023$	$6.46e - 005$	$2.30e + 007$
12	41.8487	41.8495	$1.31e - 002$	$5.00e - 025$	$3.90e - 005$	$1.48e + 008$
13	41.8495	41.8495	$6.25e - 004$	$5.00e - 027$	$2.35e - 005$	$3.74e + 009$
14	41.8495	41.8495	$1.49e - 005$	$5.00e - 029$	$1.42e - 005$	$2.30e + 011$

Tabela B.34: Resultados 39 barras - Estratégia 4 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	41.6871	0.0832	$8.30e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.09e + 002$	0
2	40.8395	44.8606	$5.98e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$1.66e + 002$	0
3	41.0832	42.4496	$2.18e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$2.15e + 002$	1
4	40.9095	41.7191	$1.19e + 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$1.89e + 002$	1
5	40.9245	42.4361	$2.49e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$1.87e + 002$	0
6	41.6175	41.9247	$7.94e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$4.28e + 003$	1
7	41.7504	41.8843	$4.26e - 001$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$9.01e + 003$	0
8	41.8447	41.8533	$9.39e - 002$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	$5.98e + 004$	1
9	41.8494	41.8496	$6.23e - 003$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	$1.09e + 006$	1
10	41.8495	41.8495	$1.72e - 004$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	$5.71e + 007$	1
11	41.8495	41.8495	$3.37e - 006$	$5.00e - 023$	$6.46e - 005$	$4.34e + 009$	1

APÊNDICE B. RESULTADOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES

Tabela B.35: Resultados 39 barras - Estratégia 5 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	41.6532	0.0416	$9.25e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$3.09e + 002$	0
2	42.0286	49.6710	$2.24e + 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$1.70e + 002$	1
3	41.1812	43.6724	$4.53e + 000$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$1.98e + 002$	0
4	39.6108	42.5106	$3.54e + 000$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$5.31e + 002$	0
5	40.5708	41.9732	$7.10e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$3.58e + 002$	1
6	40.6211	43.0422	$3.23e + 000$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$3.19e + 002$	1
7	41.0910	41.8879	$4.84e - 001$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$5.46e + 002$	0
8	41.7647	42.0228	$6.74e - 001$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	$3.05e + 003$	1
9	41.6273	41.7669	$5.40e + 000$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	$3.97e + 003$	1
10	41.8730	41.8769	$4.99e - 001$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	$4.05e + 003$	1
11	41.8518	41.8532	$5.59e - 002$	$5.00e - 023$	$6.46e - 005$	$4.32e + 004$	0
12	41.8495	41.8495	$5.54e - 003$	$5.00e - 025$	$3.90e - 005$	$1.98e + 005$	1
13	41.8495	41.8495	$5.55e - 004$	$5.00e - 027$	$2.35e - 005$	$1.16e + 007$	1
14	41.8495	41.8495	$5.55e - 005$	$5.00e - 029$	$1.42e - 005$	$9.06e + 008$	1

Tabela B.36: Resultados 39 barras - Estratégia 1 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$
1	41.1093	0.5721	$3.45e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$
2	42.1985	43.3137	$9.65e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$
3	41.9057	42.5877	$6.21e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$
4	41.9174	42.0775	$3.26e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$
5	41.8686	41.9329	$9.74e - 002$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$
6	41.8508	41.8660	$2.63e - 002$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$
7	41.8497	41.8499	$5.47e - 003$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$
8	41.8495	41.8495	$1.06e - 004$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$
9	41.8495	41.8495	$1.19e - 006$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$

Tabela B.37: Resultados 39 barras - Estratégia 2 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	40.7594	-0.6182	$3.54e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	41.1244	43.2055	$5.24e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	40.7128	42.5825	$2.63e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	0
4	41.4845	42.7627	$8.36e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	41.4083	42.4408	$7.42e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	0
6	41.3726	42.1246	$4.24e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1
7	41.3780	42.1642	$3.18e - 001$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	0
8	41.6621	41.9608	$4.13e - 001$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	1
9	41.8125	41.8647	$2.07e - 001$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	1
10	41.8495	41.8502	$3.05e - 002$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	1
11	41.8495	41.8495	$7.59e - 004$	$5.00e - 023$	$6.46e - 005$	1
12	41.8495	41.8495	$1.43e - 005$	$5.00e - 025$	$3.90e - 005$	1

APÊNDICE B. RESULTADOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES

---

Tabela B.38: Resultados 39 barras - Estratégia 3 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$
1	40.7876	-0.5217	$4.20e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$
2	40.5354	43.6207	$3.05e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$
3	41.0562	42.2269	$6.62e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$
4	41.2833	42.0181	$6.25e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$
5	41.5315	41.9331	$5.08e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$
6	41.6705	41.8892	$3.70e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$
7	41.7925	41.8575	$1.90e - 001$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$
8	41.8313	41.8514	$8.24e - 002$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$
9	41.8476	41.8497	$1.85e - 002$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$
10	41.8494	41.8495	$1.57e - 003$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$
11	41.8495	41.8495	$4.89e - 005$	$5.00e - 023$	$6.46e - 005$

Tabela B.39: Resultados 39 barras - Estratégia 4 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	40.7904	-0.5054	$3.54e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	41.2239	43.2755	$3.85e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	40.5122	42.4035	$3.47e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	0
4	41.2216	42.2923	$7.11e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	41.3778	42.2091	$6.78e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	0
6	41.6927	41.9268	$4.14e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1
7	41.8199	41.8589	$1.31e - 001$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	1
8	41.8501	41.8506	$2.78e - 002$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	1
9	41.8495	41.8495	$5.54e - 004$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	1
10	41.8495	41.8495	$1.09e - 005$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	1

Tabela B.40: Resultados 39 barras - Estratégia 5 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	40.7876	-0.5217	$4.20e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	41.2149	43.2850	$4.24e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	40.5393	42.5279	$5.07e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	0
4	41.2297	42.3846	$7.16e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	41.3275	42.2866	$6.85e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	0
6	41.5831	41.9233	$4.22e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1
7	41.7059	41.9117	$3.14e - 001$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	0
8	41.8167	41.8592	$1.42e - 001$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	1
9	41.8493	41.8500	$2.85e - 002$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	1
10	41.8495	41.8495	$6.12e - 004$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	1
11	41.8495	41.8495	$9.07e - 005$	$5.00e - 023$	$6.46e - 005$	1

## B.5 Sistema elétrico IEEE 57 barras

Tabela B.41: Resultados 57 barras - Estratégia 1 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático
1	23.8350	-31.2422	$2.21e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$1.69e + 001$
2	24.7345	27.3088	$9.31e - 002$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$6.26e + 001$
3	25.1479	25.3819	$1.69e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$2.46e + 002$
4	25.1807	25.2237	$4.52e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$1.58e + 003$
5	25.1856	25.1900	$5.93e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$6.17e + 003$
6	25.1868	25.1869	$9.31e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$5.61e + 004$

Tabela B.42: Resultados 57 barras - Estratégia 2 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	23.3318	-32.9529	$3.94e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$1.69e + 001$	0
2	24.9839	28.4042	$1.42e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$3.17e + 001$	1
3	25.0823	25.5331	$2.59e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$9.93e + 001$	1
4	25.1680	25.2437	$4.10e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$4.72e + 002$	1
5	25.1845	25.1922	$6.36e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$2.50e + 003$	1
6	25.1868	25.1869	$8.38e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$2.39e + 004$	1

Tabela B.43: Resultados 57 barras - Estratégia 3 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático
1	23.3539	-32.8104	$4.07e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$1.69e + 001$
2	23.3886	29.4103	$2.30e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$3.41e + 001$
3	23.4651	28.8271	$2.92e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$3.35e + 003$
4	23.6852	27.6800	$2.20e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$5.83e + 005$
5	24.1695	26.3051	$1.23e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$7.33e + 007$
6	24.6843	25.5283	$5.04e - 002$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$8.06e + 009$
7	25.0409	25.2617	$1.70e - 002$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$1.64e + 011$
8	25.1532	25.2059	$4.11e - 003$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	$6.95e + 011$
9	25.1802	25.1911	$1.67e - 003$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	$2.54e + 012$
10	25.1864	25.1872	$6.73e - 004$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	$1.11e + 013$
11	25.1868	25.1868	$2.40e - 004$	$5.00e - 023$	$6.46e - 005$	$1.31e + 014$
12	25.1868	25.1868	$5.58e - 005$	$5.00e - 025$	$3.90e - 005$	$4.76e + 015$

Tabela B.44: Resultados 57 barras - Estratégia 4 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	23.3563	-32.7965	$3.56e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$1.69e + 001$	0
2	24.8600	28.2533	$1.24e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$3.44e + 001$	1
3	25.1109	25.5231	$2.64e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$1.20e + 002$	1
4	25.1700	25.2513	$5.82e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$5.84e + 002$	1
5	25.1846	25.1937	$9.50e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$2.65e + 003$	1
6	25.1868	25.1870	$9.14e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$2.27e + 004$	1

Tabela B.45: Resultados 57 barras - Estratégia 5 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	23.3539	-32.8104	$4.07e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$1.69e + 001$	0
2	24.8715	28.3104	$1.59e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$3.41e + 001$	1
3	25.1137	25.5238	$3.22e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$1.19e + 002$	1
4	25.1708	25.2514	$5.44e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$5.73e + 002$	1
5	25.1847	25.1937	$1.87e - 003$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$2.61e + 003$	1
6	25.1868	25.1869	$4.28e - 004$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$2.25e + 004$	1
7	25.1868	25.1868	$1.13e - 004$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$1.52e + 006$	1
8	25.1868	25.1868	$1.27e - 006$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	$1.39e + 008$	1

APÊNDICE B. RESULTADOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES

---

Tabela B.46: Resultados 57 barras - Estratégia 1 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$
1	23.8686	-31.4338	$2.05e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$
2	24.8191	27.7513	$1.12e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$
3	25.1582	25.4323	$2.09e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$
4	25.1834	25.2348	$4.94e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$
5	25.1859	25.1916	$7.38e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$
6	25.1868	25.1869	$1.12e - 004$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$
7	25.1868	25.1868	$1.36e - 005$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$

Tabela B.47: Resultados 57 barras - Estratégia 2 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	23.7043	-32.7562	$3.25e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	25.2810	29.3763	$2.66e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	25.1255	25.5772	$3.34e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	25.1770	25.2516	$4.75e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	25.1854	25.1934	$7.19e - 004$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	25.1868	25.1869	$9.49e - 005$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1

Tabela B.48: Resultados 57 barras - Estratégia 3 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$
1	23.7055	-32.6414	$3.33e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$
2	23.7152	29.1109	$2.01e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$
3	23.7862	28.4248	$2.53e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$
4	23.9859	27.2714	$1.83e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$
5	24.4001	26.0744	$9.87e - 002$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$
6	24.8731	25.4073	$3.47e - 002$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$
7	25.0838	25.2452	$1.15e - 002$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$
8	25.1668	25.2008	$3.79e - 003$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$
9	25.1830	25.1900	$1.69e - 003$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$
10	25.1866	25.1871	$5.79e - 004$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$
11	25.1868	25.1868	$2.01e - 004$	$5.00e - 023$	$6.46e - 005$
12	25.1868	25.1868	$3.86e - 005$	$5.00e - 025$	$3.90e - 005$

Tabela B.49: Resultados 57 barras - Estratégia 4 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	23.7057	-32.6343	$2.88e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	25.1257	29.1920	$2.00e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	25.1816	25.5816	$3.10e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	25.1864	25.2678	$6.17e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	25.1864	25.1961	$1.10e - 003$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	25.1868	25.1870	$1.18e - 004$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1
7	25.1868	25.1868	$2.33e - 005$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	1

Tabela B.50: Resultados 57 barras - Estratégia 5 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	23.7055	-32.6414	$3.33e - 001$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	25.1426	29.2444	$2.58e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	25.1802	25.5799	$4.37e - 002$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	25.1861	25.2673	$5.02e - 003$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	25.1863	25.1960	$2.04e - 003$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	25.1868	25.1870	$4.78e - 004$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1
7	25.1868	25.1868	$1.35e - 004$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	1
8	25.1868	25.1868	$7.83e - 007$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	1



## B.6 Sistema elétrico IEEE 118 barras

Tabela B.51: Resultados 118 barras - Estratégia 1 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático
1	125.4864	5.4153	$1.01e + 000$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$7.50e + 001$
2	119.6346	129.3647	$4.73e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$8.03e + 001$
3	118.4907	123.6615	$2.42e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$1.15e + 002$
4	118.8262	121.0757	$3.77e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$8.58e + 003$
5	119.0683	119.3988	$3.70e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$1.84e + 004$
6	119.0293	119.0190	$1.73e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$6.36e + 004$
7	118.9669	118.9415	$4.46e - 002$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$2.52e + 005$
8	118.9340	118.9298	$4.48e - 003$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	$1.86e + 006$
9	118.9295	118.9294	$1.28e - 004$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	$6.24e + 007$
10	118.9294	118.9294	$6.76e - 005$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	$8.51e + 009$

Tabela B.52: Resultados 118 barras - Estratégia 2 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	123.4412	-8.9916	$1.05e + 000$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	$7.50e + 001$	0
2	123.8836	130.7893	$1.02e + 000$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	$6.56e + 001$	1
3	117.7600	124.0771	$4.19e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	$5.79e + 001$	1
4	118.6319	124.1073	$7.54e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	$5.20e + 002$	1
5	118.7863	120.1750	$3.91e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	$4.26e + 002$	1
6	118.8493	119.3018	$1.68e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	$1.80e + 003$	1
7	118.8983	118.9740	$6.06e - 003$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	$1.55e + 004$	1
8	118.9215	118.9354	$8.25e - 003$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	$1.21e + 005$	1
9	118.9286	118.9295	$6.97e - 004$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	$1.06e + 006$	1
10	118.9294	118.9294	$1.93e - 005$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	$6.46e + 007$	1

APÊNDICE B. RESULTADOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES

Tabela B.53: Resultados 118 barras - Estratégia 3 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático
1	123.6033	-7.9447	1.05e + 000	5.00e - 003	1.00e - 002	7.50e + 001
2	119.1546	146.0238	8.64e - 001	5.00e - 005	6.04e - 003	6.37e + 001
3	116.7268	128.9504	4.88e - 001	5.00e - 007	3.65e - 003	1.26e + 003
4	116.9382	124.8562	3.41e - 001	5.00e - 009	2.20e - 003	1.54e + 003
5	117.7975	121.4300	2.79e - 001	5.00e - 011	1.33e - 003	1.71e + 004
6	118.2921	120.2291	3.82e - 001	5.00e - 013	8.04e - 004	3.16e + 005
7	118.6507	119.5531	3.72e - 001	5.00e - 015	4.85e - 004	7.25e + 005
8	118.8223	119.2296	3.02e - 001	5.00e - 017	2.93e - 004	1.70e + 006
9	118.8958	119.0970	2.29e - 001	5.00e - 019	1.77e - 004	3.81e + 006
10	118.9602	118.9705	1.21e - 001	5.00e - 021	1.07e - 004	7.81e + 006
11	118.9558	118.9475	6.79e - 002	5.00e - 023	6.46e - 005	2.61e + 007
12	118.9444	118.9340	2.51e - 002	5.00e - 025	3.90e - 005	5.68e + 007
13	118.9339	118.9301	5.66e - 003	5.00e - 027	2.35e - 005	2.48e + 008
14	118.9299	118.9294	4.47e - 004	5.00e - 029	1.42e - 005	2.09e + 009
15	118.9294	118.9294	6.56e - 005	5.00e - 031	8.59e - 006	1.52e + 011

Tabela B.54: Resultados 118 barras - Estratégia 4 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	123.6198	-7.8421	1.05e + 000	5.00e - 003	1.00e - 002	7.50e + 001	0
2	122.1034	128.1504	6.22e - 001	5.00e - 005	6.04e - 003	6.30e + 001	1
3	119.2563	125.5962	3.08e - 001	5.00e - 007	3.65e - 003	6.66e + 001	1
4	118.9993	122.5662	4.98e - 001	5.00e - 009	2.20e - 003	3.17e + 003	1
5	119.0195	120.3440	3.93e - 001	5.00e - 011	1.33e - 003	4.73e + 003	1
6	119.0182	119.1780	1.81e - 001	5.00e - 013	8.04e - 004	1.38e + 004	1
7	118.9678	118.9804	5.67e - 002	5.00e - 015	4.85e - 004	7.36e + 004	1
8	118.9353	118.9305	5.93e - 003	5.00e - 017	2.93e - 004	3.38e + 005	1
9	118.9296	118.9294	1.52e - 004	5.00e - 019	1.77e - 004	1.38e + 007	1
10	118.9294	118.9294	1.98e - 006	5.00e - 021	1.07e - 004	1.65e + 009	1

Tabela B.55: Resultados 118 barras - Estratégia 5 - Teste Quadrático

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	T. Quadrático	Corretor
1	123.6033	-7.9447	1.05e + 000	5.00e - 003	1.00e - 002	7.50e + 001	0
2	122.6890	128.7772	7.12e - 001	5.00e - 005	6.04e - 003	6.37e + 001	1
3	119.2341	125.5848	3.33e - 001	5.00e - 007	3.65e - 003	6.34e + 001	1
4	118.9630	122.6663	5.21e - 001	5.00e - 009	2.20e - 003	1.98e + 003	1
5	118.9941	120.3626	4.06e - 001	5.00e - 011	1.33e - 003	2.30e + 003	1
6	119.0128	119.1669	1.81e - 001	5.00e - 013	8.04e - 004	6.62e + 003	1
7	118.9653	118.9796	5.62e - 002	5.00e - 015	4.85e - 004	4.00e + 004	1
8	118.9349	118.9304	5.55e - 003	5.00e - 017	2.93e - 004	1.79e + 005	1
9	118.9296	118.9294	3.64e - 004	5.00e - 019	1.77e - 004	7.89e + 006	1
10	118.9294	118.9294	3.69e - 005	5.00e - 021	1.07e - 004	9.60e + 008	1

Tabela B.56: Resultados 118 barras - Estratégia 1 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$
1	125.5669	5.5476	$1.02e + 000$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$
2	119.6795	129.5195	$4.78e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$
3	118.5007	124.0035	$2.58e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$
4	118.8056	121.1337	$4.17e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$
5	119.0221	119.4089	$3.55e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$
6	119.0053	119.0167	$1.58e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$
7	118.9598	118.9423	$4.01e - 002$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$
8	118.9332	118.9297	$3.74e - 003$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$
9	118.9295	118.9294	$9.38e - 005$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$

Tabela B.57: Resultados 118 barras - Estratégia 2 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	123.4871	-8.9486	$1.06e + 000$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	123.7123	130.8406	$1.12e + 000$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	117.6939	124.1677	$4.24e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	118.5884	124.3204	$7.74e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	118.7797	120.0099	$3.69e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	118.8467	119.2941	$3.36e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1
7	118.8900	118.9706	$1.02e - 002$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	1
8	118.9179	118.9345	$1.03e - 002$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	1
9	118.9282	118.9295	$1.04e - 003$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	1
10	118.9294	118.9294	$2.03e - 005$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	1

Tabela B.58: Resultados 118 barras - Estratégia 4 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	123.6702	-7.7928	$1.05e + 000$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	122.0257	128.3641	$6.21e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	119.1380	125.7777	$3.20e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	118.9529	122.9641	$5.04e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	119.0131	120.4510	$4.09e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	119.0215	119.1916	$1.88e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1
7	118.9685	118.9833	$5.81e - 002$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	1
8	118.9355	118.9308	$6.28e - 003$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	1
9	118.9296	118.9294	$1.83e - 004$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	1
10	118.9294	118.9294	$2.45e - 006$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	1

Tabela B.59: Resultados 118 barras - Estratégia 5 - Cholesky

It.	F. Obj.	F.L.	Erro	$\mu$	$\beta$	Corretor
1	123.6534	-7.8958	$1.05e + 000$	$5.00e - 003$	$1.00e - 002$	0
2	122.5855	128.9520	$7.73e - 001$	$5.00e - 005$	$6.04e - 003$	1
3	119.0976	125.6861	$3.43e - 001$	$5.00e - 007$	$3.65e - 003$	1
4	118.9118	123.0797	$5.26e - 001$	$5.00e - 009$	$2.20e - 003$	1
5	118.9833	120.4594	$4.17e - 001$	$5.00e - 011$	$1.33e - 003$	1
6	119.0126	119.1788	$1.84e - 001$	$5.00e - 013$	$8.04e - 004$	1
7	118.9640	118.9806	$5.49e - 002$	$5.00e - 015$	$4.85e - 004$	1
8	118.9346	118.9307	$5.45e - 003$	$5.00e - 017$	$2.93e - 004$	1
9	118.9296	118.9294	$4.54e - 004$	$5.00e - 019$	$1.77e - 004$	1
10	118.9294	118.9294	$4.55e - 005$	$5.00e - 021$	$1.07e - 004$	1

## APÊNDICE C

## BANCO DE DADOS

### C.1 Sistema elétricos 9 e 39 barras

Tabela C.1: Dados de Barra do sistema elétrico 9 barras

Barra	Tipo	$V$	$\theta$	$P_G$	$Q_G$	$Q_G^{min}$	$Q_G^{max}$	$P_C$	$Q_C$	$b^{sh}$
1	3	1.00	0.00	0.00	0.00	-3.00	3.00	0.00	0.00	0.00
2	2	1.00	0.00	1.63	0.00	-3.00	3.00	0.00	0.00	0.00
3	2	1.00	0.00	0.85	0.00	-3.00	3.00	0.00	0.00	0.00
4	1	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	1	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.90	0.30	0.00
6	1	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	1	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.35	0.00
8	1	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	1	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.25	0.50	0.00

Tabela C.2: Dados de Linha do sistema elétrico 9 barras

Linha		r	x	$b_{km}^{sh}$	tap
1	4	0.0000	0.0576	0.0000	0
4	5	0.0170	0.0920	0.0790	0
5	6	0.0390	0.1700	0.1790	0
3	6	0.0000	0.0586	0.0000	0
6	7	0.0119	0.1008	0.1045	0
7	8	0.0085	0.0720	0.0745	0
8	2	0.0000	0.0625	0.0000	0
8	9	0.0320	0.1610	0.1530	0
9	4	0.0100	0.0850	0.0880	0

APÊNDICE C. BANCO DE DADOS

Tabela C.3: Dados de Barra do sistema elétrico 39 barras

Barra	Tipo	$V$	$\theta$	$P_G$	$Q_G$	$Q_G^{min}$	$Q_G^{max}$	$P_C$	$Q_C$	$b^{sh}$
1	1	1.04	-0.24	0.00	0.00	0.00	0.00	0.98	0.44	0.00
2	1	1.05	-0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	1	1.03	-0.21	0.00	0.00	0.00	0.00	3.22	0.02	0.00
4	1	1.00	-0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	5.00	1.84	0.00
5	1	1.01	-0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	1	1.01	-0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	1	1.00	-0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	2.34	0.84	0.00
8	1	1.00	-0.23	0.00	0.00	0.00	0.00	5.22	1.77	0.00
9	1	1.04	-0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	-0.67	0.00
10	1	1.02	-0.14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11	1	1.01	-0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
12	1	1.00	-0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.09	0.88	0.00
13	1	1.01	-0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
14	1	1.01	-0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
15	1	1.02	-0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	3.20	1.53	0.00
16	1	1.03	-0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	3.29	0.32	0.00
17	1	1.03	-0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
18	1	1.03	-0.21	0.00	0.00	0.00	0.00	1.58	0.30	0.00
19	1	1.05	-0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
20	1	0.99	-0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	6.80	1.03	0.00
21	1	1.03	-0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	2.74	1.15	0.00
22	1	1.05	-0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
23	1	1.05	-0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	2.48	0.85	0.00
24	1	1.04	-0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	3.09	-0.92	0.00
25	1	1.06	-0.15	0.00	0.00	0.00	0.00	2.24	0.47	0.00
26	1	1.05	-0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	1.39	0.17	0.00
27	1	1.04	-0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	2.81	0.76	0.00
28	1	1.05	-0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	2.06	0.28	0.00
29	1	1.05	-0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	2.84	0.27	0.00
30	2	1.05	-0.13	2.50	1.62	1.40	4.00	0.00	0.00	0.00
31	3	0.98	0.00	6.78	2.22	-1.00	3.00	0.09	0.05	0.00
32	2	0.98	-0.00	6.50	2.07	1.50	3.00	0.00	0.00	0.00
33	2	1.00	-0.00	6.32	1.08	0.00	2.50	0.00	0.00	0.00
34	2	1.01	-0.03	5.08	1.67	0.00	1.67	0.00	0.00	0.00
35	2	1.05	0.03	6.50	2.11	-1.00	3.00	0.00	0.00	0.00
36	2	1.06	0.08	5.60	1.00	0.00	2.40	0.00	0.00	0.00
37	2	1.03	-0.03	5.40	-0.01	0.00	2.50	0.00	0.00	0.00
38	2	1.03	0.07	8.30	0.22	-1.50	3.00	0.00	0.00	0.00
39	2	1.03	-0.25	10.00	0.78	-1.00	3.00	11.04	2.50	0.00

Tabela C.4: Dados de Linha do sistema elétrico 39 barras

Linha	r	x	$b_{km}^{sh}$	tap	
1	2	0.0035	0.0411	0.3493	0
1	39	0.0010	0.0250	0.3750	0
2	3	0.0013	0.0151	0.1286	0
2	25	0.0070	0.0086	0.0730	0
2	30	0.0000	0.0181	0.0000	1
3	4	0.0013	0.0213	0.1107	0
3	18	0.0011	0.0133	0.1069	0
4	5	0.0008	0.0128	0.0671	0
4	14	0.0008	0.0129	0.0691	0
5	6	0.0002	0.0026	0.0217	0
5	8	0.0008	0.0112	0.0738	0
6	7	0.0006	0.0092	0.0565	0
6	11	0.0007	0.0082	0.0694	0
6	31	0.0000	0.0250	0.0000	1
7	8	0.0004	0.0046	0.0390	0
8	9	0.0023	0.0363	0.1902	0
9	39	0.0010	0.0250	0.6000	0
10	11	0.0004	0.0043	0.0365	0
10	13	0.0004	0.0043	0.0365	0
10	32	0.0000	0.0200	0.0000	1
12	11	0.0016	0.0435	0.0000	1
12	13	0.0016	0.0435	0.0000	1
13	14	0.0009	0.0101	0.0862	0
14	15	0.0018	0.0217	0.1830	0
15	16	0.0009	0.0094	0.0855	0
16	17	0.0007	0.0089	0.0671	0
16	19	0.0016	0.0195	0.1520	0
16	21	0.0008	0.0135	0.1274	0
16	24	0.0003	0.0059	0.0340	0
17	18	0.0007	0.0082	0.0659	0
17	27	0.0013	0.0173	0.1608	0
19	20	0.0007	0.0138	0.0000	1
19	33	0.0007	0.0142	0.0000	1
20	34	0.0009	0.0180	0.0000	1
21	22	0.0008	0.0140	0.1283	0
22	23	0.0006	0.0096	0.0923	0
22	35	0.0000	0.0143	0.0000	1
23	24	0.0022	0.0350	0.1805	0
23	36	0.0005	0.0272	0.0000	1
25	26	0.0032	0.0323	0.2655	0
25	37	0.0006	0.0232	0.0000	1
26	27	0.0014	0.0147	0.1198	0
26	28	0.0043	0.0474	0.3901	0
26	29	0.0057	0.0625	0.5145	0
28	29	0.0014	0.0151	0.1245	0
29	38	0.0008	0.0156	0.0000	1