

**PONTOS DE EQUILÍBRIO AO REDOR DE
ASTEROIDES: LOCALIZAÇÃO E
ESTABILIDADE**

Tamires dos Santos de Moura

Tamires dos Santos de Moura

Pontos de Equilíbrio ao Redor de Asteroides: Localização e Estabilidade

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

Guaratinguetá

2016

M929e Moura, Tamires dos Santos de
Pontos de equilíbrio ao redor de asteróides: localização e
estabilidade / Tamires dos Santos de Moura – Guaratinguetá, 2016.
116 f.: il.
Bibliografia: f. 95-98

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade
de Engenharia de Guaratinguetá, 2016.
Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

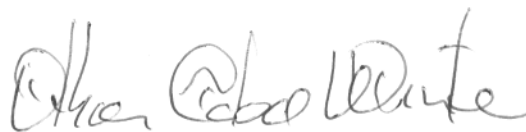
1. Asteróides. 2. Potencial gravitacional. 3. Sistema solar. I. Título

CDU 523.44

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE TAMIRES DOS SANTOS DE MOURA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA.

Aos 14 dias do mês de julho do ano de 2016, às 13:30 horas, no(a) Anfiteatro da Biblioteca, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. OTHON CABO WINTER - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Prof. Dr. RAFAEL SFAIR DE OLIVEIRA do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Prof. Dr. ROBERTO VIEIRA MARTINS do(a) Observatório Nacional - MCTI, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de TAMIRES DOS SANTOS DE MOURA, intitulada **Pontos de equilíbrio ao redor de asteroides: localização e estabilidade**. Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: _ _ _ _ APROVADA . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. OTHON CABO WINTER



Prof. Dr. RAFAEL SFAIR DE OLIVEIRA



Prof. Dr. ROBERTO VIEIRA MARTINS



DADOS CURRICULARES

TAMIRES DOS SANTOS DE MOURA

NASCIMENTO 31.12.1989 – CUNHA / SP

FILIAÇÃO Luiz Antonio de Moura
Celina Borges dos Santos

FORMAÇÃO

2010 – 2014 Licenciatura em Matemática
FEG/UNESP - Universidade Estadual Paulista, Campus de Guratinguetá

2014 – 2016 Mestrado em Física
FEG/UNESP - Universidade Estadual Paulista, Campus de Guratinguetá

Dedico este trabalho a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que estiveram comigo no decorrer desse período construtivo da minha formação. Em especial:

À minha mãe, por ser simplesmente a melhor mãe do mundo.

Ao meu orientador, Dr. Othon Cabo Winter, pelo incentivo e pela enorme paciência durante esta jornada repleta de imprevistos. Obrigada por me ajudar a enxergar o mundo pelos olhos da ciência.

Ao meu marido Marcelo, companheiro de admirável paciência, obrigada pelos momentos de incentivo e compreensão.

Aos meus professores da pós-graduação por tanto terem me ensinado.

Aos meus colegas da pós-graduação, pelas horas de estudos e aulas extras, em especial a Rafael Ribeiro e André Amarante.

Aos meus amigos, por sempre estarem do meu lado torcendo pelo meu sucesso.

Este trabalho conta com o apoio financeiro da
Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível
Superior - **CAPES**

MOURA, T. S. **Pontos de Equilíbrio ao Redor de Asteroides: Localização e Estabilidade**. 2016. 116 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2016.

Resumo

Tendo em vista que asteroides são objetos remanescentes dos primórdios do Sistema Solar, estamos interessados na composição deles. Existem missões que estão sendo analisadas com a finalidade de enviar sondas em direção a asteroides do grupo *Near Earth Asteroids* (NEAs), que representa uma das mais peculiares classes de objetos no Sistema Solar visto que suas órbitas podem se aproximar ou até mesmo cruzar a terrestre. Esse grupo é considerado representativo da população de asteroides, uma vez que podem fornecer informações sobre a mistura química a partir da qual os planetas teriam se formado a bilhões de anos atrás, possibilitando a compreensão da origem e evolução do Sistema Solar e quem sabe até a origem da vida na Terra. Dessa forma, um estudo detalhado a fim de compreender a superfície, a composição e a estrutura interna de um NEA será um grande passo para a Ciência. Nessa pesquisa, inicialmente reproduzimos os dados do potencial gravitacional pelo método dos poliedros para o asteroide 2063 Bacchus, um NEA, a fim de validar os resultados encontrados em Moura (2014). O método dos poliedros fornece uma precisão muito boa da forma irregular do corpo. Por meio de estudo dos modelos de potenciais gravitacionais para corpos não esféricos e implementação de rotinas computacionais foi realizada uma breve análise em relação ao formato do asteroide 2063 Bacchus, bem como das suas superfícies equipotenciais e curvas de velocidade zero. Os objetivos dessa dissertação são realizar um estudo detalhado a respeito dos pontos de equilíbrio no campo gravitacional de 2063 Bacchus, bem como da estabilidade desses pontos levando em consideração os autovalores da equação característica. Além disso, alteramos os valores do período de rotação e da densidade desse objeto a fim de verificar como a localização e a estabilidade dos pontos de equilíbrio alteram quando um parâmetro é mudado. A motivação principal é realizar um estudo o mais realista possível e, dessa forma, observar também como os pontos de equilíbrio se comportam quando introduzimos o efeito da força de pressão de radiação solar que, nesse caso, passam a ser chamados de pontos equivalentes. O trabalho possibilita ampliação do conhecimento não somente para o caso de asteroides, mas também para outros corpos não esféricos como cometas, contribuindo para o desenvolvimento de estudos direcionados a origem e evolução do Sistema Solar.

PALAVRAS-CHAVE: Corpos irregulares. Asteroides. Potencial gravitacional. Pontos de equilíbrio. Estabilidade.

MOURA, T. S. **Equilibrium points Around Asteroids: Location and Stability**. 2016. 116 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2016.

Abstract

Given that asteroids are remnant objects of the Solar system beginnings, we are interested in their composition. There are missions that are being analyzed with the purpose of sending probes toward asteroids from the group *Near Earth Asteroids* (NEAs), which is one of the most peculiar classes of objects in the solar system because their orbits can approach or even cross the Earth's orbit. This group is considered representative of the population of asteroids, since they can provide information about the chemical mixture from which the planets would have been formed billions of years ago, enabling the understanding of the origin and evolution of the Solar System and maybe even on the origin of life on Earth. Thus a detailed study in order to understand the surface, the composition and internal structure of a NEA will be a big step for Science. In this research, initially we reproduce the data of the gravitational potential by the method of polyhedra for asteroid 2063 Bacchus, a NEA, in order to validate the results found Moura (2014). The method of polyhedra provides a very good accuracy of the irregular shape of the body. Through study of gravitational potential designs for non-spherical bodies and computational routines implementing a brief analysis was performed with respect to the asteroid shape of 2063 Bacchus, as well as its equipotential surfaces and zero-velocity curves. The objectives of this work are to conduct a detailed study on the equilibrium points in the gravitational field of 2063 Bacchus, and the stability of these points taking into account the eigenvalues of the characteristic equation. In addition, we varied the values of the rotation period and density of the object in order to see how the location and stability of equilibrium points changed when a parameter is altered. The main motivation is to achieve a more realistic study and thus, also observe how the equilibrium points behave when we introduce the effect of solar radiation pressure force. The new points are called equivalent points. The work enables expansion of the knowledge, not only in the case of asteroids, but also to other non-spherical bodies like comets, contributing to the development of studies addressing the origin and evolution of the solar system.

KEY WORDS: Irregular bodies. Asteroids. Gravitational potential. Equilibrium points. Stability.

Lista de Figuras

3.1	Modelo de poliedros para o asteroide 2063 Bacchus.	14
3.2	Formato do modelo poliédrico em 3D do asteroide 2063 Bacchus com 4092 faces.	15
3.3	Formato do asteroide 2063 Bacchus e suas projeções nos planos xy , yz e xz , respectivamente, vista de duas direções opostas.	16
3.4	Potencial gravitacional do asteroide 2063 Bacchus nos planos xy , yz e xz , respectivamente. A escala de cores fornece a intensidade do potencial dado em km^2s^{-2}	20
3.5	Superfícies equipotenciais do asteroide 2063 Bacchus para três valores de potencial. A escala de cores fornece a intensidade do potencial dado em km^2s^{-2}	21
3.6	Curvas de velocidade zero do asteroide 2063 Bacchus no plano xy . A escala de cores dá a intensidade da constante de Jacobi em km^2s^{-2}	25
3.7	Curvas de velocidade zero do asteroide 2063 Bacchus nos planos xz . A escala de cores dá a intensidade da constante de Jacobi em km^2s^{-2}	25
3.8	Curvas de velocidade zero do asteroide 2063 Bacchus nos planos yz . A escala de cores dá a intensidade da constante de Jacobi em km^2s^{-2}	26
3.9	Curvas de velocidade zero (vermelho) do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , para o valor da Constante de Jacobi $-3,998 km^2s^{-2}$. A região proibida está representada em verde.	27
3.10	Curvas de velocidade zero (vermelho) do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , para o valor da Constante de Jacobi $-3,540 km^2s^{-2}$. A região proibida está representada em verde.	27
3.11	Curvas de velocidade zero (vermelho) do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , para o valor da Constante de Jacobi $-3,523 km^2s^{-2}$. A região proibida está representada em verde.	28

3.12	Curvas de velocidade zero (vermelho) do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , para o valor da Constante de Jacobi $-3,499 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$. A região proibida está representada em verde.	28
3.13	Curvas de velocidade zero (vermelho) do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , para o valor da Constante de Jacobi $-3,420 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$. A região proibida está representada em verde.	29
3.14	Curvas de velocidade zero do asteroide 2063 Bacchus no plano xy para localização dos pontos de equilíbrio.	30
3.15	Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , considerando período de rotação 14,904 horas e densidade $3,3 \text{ g/cm}^3$	31
3.16	Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , considerando período de rotação 14,904 horas e densidade $2,0 \text{ g/cm}^3$. Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.	32
3.17	Classificação topológica dos pontos de equilíbrio não-degenerados e não-ressonantes. O eixo horizontal representa o eixo real e o eixo vertical representa o eixo imaginário. O verde simboliza os autovalores. Fonte: Jiang (2015).	37
3.18	Classificação topológica dos pontos de equilíbrio degenerados. O eixo horizontal representa o eixo real e o eixo vertical representa o eixo imaginário. O rosa simboliza os autovalores. Fonte: Jiang, Baoyin & Li (2015).	38
3.19	Mapa da estabilidade dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , considerando período de rotação 14,904 horas e densidade $2,0 \text{ g/cm}^3$. Onde U: ponto instável; LS: ponto linearmente estável.	39
4.1	Esquema representando o balanço entre as forças gravitacional (\mathbf{F}_g) e centrífuga (\mathbf{F}_c) no ponto de equilíbrio.	41
4.2	Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy . As cores simbolizam os pontos de equilíbrio para os seguintes períodos de rotação (horas), do verde para o rosa, 14,904; 10,904; 6,904; 2,904; 1,904 e 1,400.	42
4.3	Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy para $1,904 \text{ h} \leq T \leq 2,904 \text{ h}$. As cores representam os pontos de equilíbrio.	44
4.4	Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy para $1,400 \text{ h} \leq T \leq 1,904 \text{ h}$. As cores representam os pontos de equilíbrio.	45

4.5	Mapa da estabilidade dos pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus quando o período de rotação (T) é alterado. U: ponto instável; LS: ponto linearmente estável; D: ponto degenerado.	50
4.6	Mapa da estabilidade dos pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus quando o período de rotação (T) é alterado. U: ponto instável; LS: ponto linearmente estável; D: ponto degenerado.	51
4.7	Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy . As cores simbolizam os pontos de equilíbrio para os seguintes períodos de rotação (horas), do preto para o rosa, 14,904; 16,904; 20,904; 22,904; 24,904; 26,904 e 28,904.	52
4.8	Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy . As cores simbolizam os pontos de equilíbrio para as seguintes densidades (g/cm^3), do rosa para o preto, 2,0; 2,1; 2,3; 2,5; 2,8; 3,0 e 3,3.	60
4.9	Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy . As cores simbolizam os pontos de equilíbrio para as seguintes densidades (g/cm^3), do rosa para o preto, 2,0; 1,9; 1,7; 1,5; 1,3; 1,1, 0,9; 0,7 e 0,5.	63
5.1	Pontos de equilíbrio do cometa 9P/Tempel 1 no plano xy . Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.	68
5.2	Pontos de equilíbrio do asteroide 6489 Golevka no plano xy . Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.	70
5.3	Pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins no plano xy . Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.	72
5.4	Pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins no plano xy com alteração do período de rotação. Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.	74
5.5	Pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia no plano xy . Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.	76
5.6	Pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia no plano xy . Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (c) Jiang et al. (2014).	78
5.7	Pontos de equilíbrio do asteroide 101955 Bennu no plano xy . Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.	79
6.1	Densidade volumétrica por raio, considerando uma partícula esférica. A escala de (a) a (e) traz os valores da razão área-massa (σ) em m^2/kg	86

6.2	Esquema representando a mudança na posição dos pontos equivalentes (azul) sob a ação da F_p no ponto de equilíbrio E_3 (vermelho) do asteroide 2063 Bacchus. Conforme o ângulo entre o Sol (amarelo) e o asteroide varia de $0^\circ < \phi < 360^\circ$ o ponto equivalente altera a sua localização, percorrendo uma trajetória ao redor do ponto E_3 (sem o efeito da F_p) que se assemelha ao formato de uma “banana”.	87
6.3	Movimentação do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus com efeito da F_p no periélio, conforme o ângulo entre o Sol e o objeto varia. A/m indica o valor da razão área-massa (σ) em m^2/kg de uma partícula esférica orbitando na vizinhança do ponto E_3 .	88
6.4	Movimentação do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus com efeito da F_p no periélio, conforme o ângulo entre o Sol e o objeto varia. A/m indica o valor da razão área-massa (σ) em m^2/kg de uma partícula esférica orbitando na vizinhança do ponto E_3 .	88
6.5	Movimentação do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus com efeito da F_p no periélio, conforme o ângulo entre o Sol e o objeto varia. A/m indica o valor da razão área-massa (σ) em m^2/kg de uma partícula esférica orbitando na vizinhança do ponto E_3 .	89
6.6	Movimentação do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus com efeito da F_p no periélio, conforme o ângulo entre o Sol e o objeto varia. A/m indica o valor da razão área-massa (σ) em m^2/kg de uma partícula esférica orbitando na vizinhança do ponto E_3 .	89
6.7	Movimentação do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus com efeito da F_p no periélio, conforme o ângulo entre o Sol e o objeto varia. A/m indica o valor da razão área-massa (σ) em m^2/kg de uma partícula esférica orbitando na vizinhança do ponto E_3 .	90
6.8	Movimentação do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus com efeito da F_p no periélio, conforme o ângulo entre o Sol e o objeto varia. A/m indica o valor da razão área-massa (σ) em m^2/kg de uma partícula esférica orbitando na vizinhança do ponto E_3 .	90

Lista de Tabelas

3.1	Formato do arquivo de vértices e faces.	14
3.2	Potencial gravitacional do asteroide 2063 Bacchus em pontos arbitrários.	22
3.3	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus, considerando período de rotação 14,904 horas e densidade $3,3 \text{ g/cm}^3$	31
3.4	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus, considerando período de rotação 14,904 horas e densidade $2,0 \text{ g/cm}^3$	32
3.5	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus conforme Wang, Jiang & Gong (2014).	32
3.6	Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 3.4 e 3.5.	33
3.7	Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus, considerando densidade $2,0 \text{ g/cm}^3$	39
4.1	Posição dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando o período de rotação é alterado.	46
4.2	Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando o período de rotação é alterado.	48
4.3	Classificação topológica e estabilidade dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando o período de rotação é alterado. LS: linearmente estável; U: instável; D: degenerado.	49
4.5	Posição dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando o período de rotação é alterado.	53
4.6	Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando o período de rotação é alterado.	54

4.7	Classificação topológica e estabilidade dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando o período de rotação é alterado. LS: linearmente estável; U: instável.	54
4.9	Posição dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando a densidade é alterada.	61
4.10	Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando a densidade é alterada.	62
4.11	Classificação topológica e estabilidade dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando a densidade é alterada. LS: linearmente estável; U: instável.	62
4.13	Posição dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando a densidade é alterada.	64
4.14	Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando a densidade é alterada.	64
4.15	Classificação topológica e estabilidade dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando a densidade é alterada. LS: linearmente estável; U: instável.	65
5.1	Localização dos pontos de equilíbrio do cometa 9P/Tempel 1.	68
5.2	Localização dos pontos de equilíbrio do cometa 9P/Tempel 1 conforme Wang, Jiang & Gong (2014).	68
5.3	Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 9P/Tempel 1 considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.1 e 5.2.	69
5.4	Autovalores dos pontos de equilíbrio do cometa 9P/Tempel 1.	69
5.5	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 6489 Golevka.	70
5.6	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 6489 Golevka conforme Wang, Jiang & Gong (2014).	71
5.7	Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 6489 Golevka considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.5 e 5.6.	71
5.8	Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 6489 Golevka.	71
5.9	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins.	72

5.10	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins conforme Wang, Jiang & Gong (2014).	73
5.11	Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 2867 Steins considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.9 e 5.10.	73
5.12	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins com alteração do período de rotação.	74
5.13	Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 2867 Steins considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.12 e 5.10.	74
5.14	Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins.	75
5.15	Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins com alteração do período de rotação.	75
5.16	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia.	76
5.17	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia conforme Wang, Jiang & Gong (2014).	76
5.18	Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 4769 Castalia considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.16 e 5.17.	77
5.19	Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia.	77
5.20	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia conforme Jiang et al. (2014).	78
5.21	Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 4769 Castalia considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.17 e 5.20.	78
5.22	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 101955 Bennu.	80
5.23	Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 101955 Bennu conforme Wang, Jiang & Gong (2014).	80
5.24	Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 101955 Bennu considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.22 e 5.23.	80
5.25	Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 101955 Bennu.	81

Sumário

Dados curriculares	iii
Agradecimentos	v
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xvi
1 Introdução	1
1.1 O que é um asteroide?	1
1.2 Classificação dos asteroides	3
1.3 NEAs	4
1.4 Asteroide 2063 Bacchus	6
2 Revisão bibliográfica	8
2.1 Potencial gravitacional de corpos irregulares	8
2.2 Pontos de equilíbrio ao redor de corpos irregulares	9
3 Simulações numéricas para o asteroide 2063 Bacchus	13
3.1 Formato	13
3.2 Potencial gravitacional	18
3.3 Curvas de velocidade zero	22
3.4 Pontos de equilíbrio	29
3.4.1 Estabilidade dos pontos de equilíbrio	33
4 Variação de parâmetros para o asteroide 2063 Bacchus	40
4.1 Variação do período de rotação	40
4.1.1 Bifurcações	55

4.2	Variação da densidade	59
5	Pontos de equilíbrio de diversos objetos	66
5.0.1	Cometa 9P/Tempel 1	67
5.0.2	Astroide 6489 Golevka	69
5.0.3	Astroide 2867 Steins	71
5.0.4	Astroide 4769 Castalia	75
5.0.5	Astroide 101955 Bennu	79
5.0.6	Conclusão	81
6	Força de Pressão de Radiação Solar	83
7	Considerações Finais	92
	Referências bibliográficas	95

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho propomos estudar a dinâmica dos pontos de equilíbrio no campo gravitacional do asteroide 2063 Bacchus, analisando o comportamento dos mesmos quando um determinado parâmetro se altera ou quando introduzimos a pressão de radiação solar, a fim de entender o movimento desses pontos ao redor do asteroide. Iniciaremos com uma breve definição à respeito das características de asteroides e apresentação do objeto alvo de estudo.

1.1 O que é um asteroide?

O termo “asteroide” deriva do grego “astér”, estrela, e “oide”, sufixo que denota semelhança. São objetos essencialmente rochosos e/ou metálicos, ou formados por aglomeração gravitacional de partículas rochosas, e como todos os demais corpos do Sistema Solar possuem rotação própria. Sua forma é irregular, embora alguns são quase esféricos, e seu diâmetro pode variar de alguns metros a centenas de quilômetros, como por exemplo o asteroide 216 Kleopatra que possui um formato incomum, como se fosse um osso de cão, e mede por volta de 217 *km* de comprimento e 94 *km* de largura. Já que a grande maioria é representada por corpos muito pequenos que não podem ser considerados planetas, e também não possuem atmosfera. Equivocadamente tem-se a compreensão dos asteroides como pequenos “pedaços” de detritos espaciais que caem na superfície terrestre.

Ao longo dos anos, a NASA e outras agências espaciais têm como alvo asteroides e cometas em suas missões espaciais. Algumas missões foram projetadas a fim de se obter informações das características físicas desses objetos, enquanto outras foram capazes de observar asteroides durante o percurso para outros destinos planetários. Por exemplo, a sonda Galileo, no decorrer de seu caminho em direção ao planeta Júpiter foi a primeira a

observar asteroides. Durante esses encontros foram obtidas imagens de alta resolução dos asteroides 951 Gaspra em outubro de 1991, e Ida em agosto de 1993. Em 1996 a NASA lançou a missão NEAR (*Near Earth Asteroid Rendezvous*) Shoemaker que enviou imagens do asteroide 253 Mathilde e no ano de 2000 se aproximou e pousou no asteroide 433 Eros. A sonda Hayabusa, lançada em maio de 2003 pela Agência Espacial Japonesa, fotografou de perto o asteroide 25143 Itokawa, e pela primeira vez coletou material de um asteroide retornando à Terra para ser analisado. Lançada em novembro de 2014, a missão Rosetta, da Agência Espacial Européia, cujo objetivo era o cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, passou por dois asteroides: 2867 Steins (em 2008) e 21 Lutetia (em 2010). A missão OSIRIS-Rex da NASA, prevista para ser lançada ainda em 2016 tem a finalidade de trazer amostras do NEA 101955 Bennu.

Ceres foi o primeiro asteroide a ser descoberto em 1801 pelo astrônomo italiano Giuseppe Piazzi e é também o maior dos asteroides, com aproximadamente 948 *km* de diâmetro ¹ e massa de $9,5 \times 10^{20}$ *kg*. A sua forma praticamente esférica é uma exceção entre os asteroides ². Por outro lado, um dos menores, descoberto em 1991, denominado 1991 BA, tem apenas cerca de 6 *m* de diâmetro.

Tradicionalmente quando um asteroide é descoberto recebe um nome de uma figura mitológica, mas há vários asteroides nomeados em honra de astrônomos ou outras figuras importantes. Desde 1998 os asteroides são descobertos em grande quantidade pelo projeto LINEAR (*Lincoln Near-Earth Asteroid Research*) de pesquisas de asteroides próximos à Terra, por isso muitos não chegam a receber um nome próprio. A fórmula atual envolve o ano da descoberta, duas letras e, se necessário, alguns algarismos, relacionados à data de descoberta.

A maioria dos asteroides conhecidos orbitam dentro de um cinturão principal, entre as órbitas de Marte e Júpiter, e estão separados por distâncias muito grandes, distribuídos não uniformemente na região do cinturão. No entanto, no interior deste cinturão, existem áreas que estão praticamente vazias, as chamadas Falhas de Kirkwood, que correspondem a zonas de ressonância. Em termos básicos uma ressonância pode surgir quando existe uma relação numérica simples entre as frequências ou períodos. Os períodos envolvidos poderiam ser os períodos de rotação e orbitais de um único corpo, como no caso de acoplamento spin-órbita, ou talvez os períodos orbitais de dois ou mais corpos, como no caso de acoplamento órbita-órbita. Um exemplo mais simples de uma ressonância de spin-órbita é a Lua, que tem um período orbital que é igual ao seu período de rotação, o que resulta na Lua mantendo uma face em direção à Terra (Murray & Dermott, 1999). O cinturão de asteroides também exhibe estrutura ressonante. Explicar as falhas na distribuição radial

¹Fonte: <http://ssd.jpl.nasa.gov/?asteroids>

²Em 2008 Ceres foi reclassificado como Planeta Anão.

das órbitas dos asteroides continua a ser um problema importante na dinâmica do Sistema Solar. Essas falhas no cinturão de asteroides correspondem a ressonâncias importantes com Júpiter. Embora as Falhas de Kirkwood sejam quase vazias existe um pequeno número de asteroides conhecidos por estarem em ressonância com Júpiter nesses locais. O cinturão é estimado para conter entre 1,1 e 1,9 milhões de asteróides com mais de 1 *km* de diâmetro, e milhões de menores ³.

1.2 Classificação dos asteroides

Os asteroides, assim como os planetas, apenas refletem a luz emitida pelo Sol, sendo que seu albedo, capacidade de refletir esta luz, varia enormemente. A estimativa de sua forma física pode ser feita através do seu albedo, que depende da composição química na superfície do asteroide e com o brilho. A taxonomia mais comumente usada por mais de uma década é aquela de David J. Tholen, proposta pela primeira vez em 1984, que diferencia os asteroides em 14 tipos. Outra mais recentemente introduzida em 2002 foi baseada no *Small Main-Belt Asteroid Spectroscopic Survey* (SMASS), que classifica os asteroides em 24 categorias. Como são classificados de várias maneiras, vamos destacar as três principais, já que a grande maioria dos corpos recaem nelas ³ :

- **Tipo C ou Carbonáceos:** Esse grupo representa cerca de 75% do número de asteroides conhecidos. As principais características são a cor escura, a baixa refletividade (albedo entre 0,03 e 0,09) e costumam apresentar um tom ligeiramente azulado. São ricos em carbono e de um modo geral esses objetos encontram-se mais comumente na região mais externa do cinturão;
- **Tipo S ou Silicatos:** Esse grupo representa cerca de 17% do número de asteroides conhecidos, as principais características é que são mais claros, exibindo uma cor ligeiramente avermelhada e, por esse motivo, refletem mais a luz solar (albedo entre 0,10 e 0,22) que os do tipo C. São encontrados mais frequentemente na parte do cinturão mais próxima ao Sol;
- **Tipo M ou Metálicos:** Representa a maior parte dos asteroides restantes, são brilhantes e refletem muito a luz solar (albedo entre 0,10 e 0,18). São compostos na sua maioria de ferro metálico.

Há também uma minoria de outros tipos raros. Pelo fato dos asteroides do tipo C serem escuros, dificulta a visibilidade e dessa forma as observações tendem a serem equivocadas e o percentual acima pode não representar a verdadeira distribuição dos asteroides.

³Fonte: <http://solarsystem.nasa.gov/planets/asteroids/indepth>

Hoje em dia a descoberta de uma grande quantidade de asteroides, e conseqüentemente variedade, faz com que existam asteroides do tipo A, B, D, E, F, G, P, Q, R, T e V.

Quando o número de asteroides descobertos começou a ser elevado, os astrônomos observaram que alguns deles partilhavam certas características, como a excentricidade, o semieixo maior ou a inclinação orbital. Assim as regiões com um maior número de asteroides são chamadas famílias, aproximadamente um terço dos asteroides do cinturão faz parte de uma família. As famílias possuem elementos orbitais similares, o qual indica que têm a sua origem na fragmentação de um objeto maior. Algumas das famílias mais importantes são Flora, Eunoma, Koronis, Eos e Themis.

1.3 NEAs

Como sabemos a maior parte dos asteroides conhecidos estão localizados no cinturão principal, entre as órbitas dos planetas Marte e Júpiter. No entanto, muitos desses corpos se deslocam para mais perto do Sol e conseqüentemente passam a cruzar as órbitas de Marte, Terra, Vênus e Mercúrio, esse fato acontece por causa das perturbações no Sistema Solar. Eventualmente a órbita do asteroide coincide com uma das perturbações fortes causadas pelos movimentos orbitais de Júpiter e Saturno, as ressonâncias. Em regiões onde tais ressonâncias acontecem um asteroide migra rapidamente de uma trajetória inteiramente dentro do cinturão para uma trajetória que o traz para perto da Terra. Asteroides com periélio ⁴ inferior a 1,3 UA ⁵, possuem órbitas passando próximas da órbita terrestre, e são chamados de *Near Earth Asteroids* (NEAs) e pertencem ao grupo dos NEOs (*Near Earth Objects*). Atualmente se conhecem mais de 14000 NEAs ⁶. Dentro do grupo dos NEAs existem os asteroides considerados potencialmente perigosos, ou PHAs, sigla em inglês para *Potentially Hazardous Asteroids*. Estes possuem distância mínima de interseção da órbita com a Terra de 0,05 UA ou menos. Pesquisas recentes estimam que existam 1697 asteroides considerados PHAs para o nosso planeta ⁷, visto que podem, no futuro, entrar em rota de colisão com a Terra. Esses asteroides possuem a órbita mais próxima do nosso planeta e têm tamanho suficiente para passar pela atmosfera terrestre e causar danos em grande escala. No entanto, não é uma notícia que preocupa, uma vez que esse tipo de evento só acontece uma vez a cada 10 mil anos, e também não quer dizer que vá necessariamente colidir com o nosso planeta. Caso ocorra um impacto de um asteroide com a Terra os prejuízos dependerão do tamanho do corpo, dos materiais que

⁴Periélio é o ponto da órbita de um corpo que está mais próximo do Sol.

⁵1 Unidade Astronômica (UA) é igual a $1,495979 \times 10^8$ km, e é definida como sendo a distância média entre a Terra e o Sol.

⁶Fonte: <http://neo.jpl.nasa.gov/stats/>

⁷Fonte: <http://neo.jpl.nasa.gov/neo/groups.html>

o compõem e da sua velocidade na colisão. A partir do tamanho de 40 *m* de diâmetro até cerca de 1 *km* de diâmetro, a colisão de um NEA pode gerar um enorme estrago em uma escala local. Impactos bem maiores podem até causar extinções em massa, como a que possivelmente eliminou os dinossauros a milhões de anos atrás (15 *km* de diâmetro). Isso os torna um alvo atraente para a exploração espacial. De acordo com a *International Astronomical Union* (IAU), o maior asteroide potencialmente perigoso conhecido é o 4179 Toutatis.

Os NEAs são classificados em grupos ⁸, de acordo com suas características orbitais, dadas pelo periélio (q), afélio (Q) ⁹ e semieixo maior (a), em comparação com as características orbitais da Terra (Periélio $q_T = 0,983$ AU; Afélio $Q_T = 1,017$ AU; Semieixo maior $a_T = 1,0$ UA). São eles:

- *Apolo*: Seu nome é em homenagem ao asteroide 1862 Apolo. Cruzam a órbita da Terra. Possuem $a > a_T$ e $q < Q_T$. Representam 62% da população dos NEOs;
- *Amor*: Seu nome é em homenagem ao asteroide 1221 Amor e estão localizados entre as órbitas de Marte e Júpiter. Órbita externa à órbita terrestre, mas interior a Marte. Eles se aproximam da órbita da Terra, mas sem atravessá-la. Possuem $a > a_T$ e $Q_T < q < 1,3$ AU e representam 32% da população;
- *Atenas*: Seu nome é em homenagem ao asteroide 2062 Aten. Cruzam a órbita da Terra. Possuem $a < a_T$ e $Q > q_T$. Representam 6% da população.
- *Atira*: Seu nome é em homenagem ao asteroide 163693 Atira. Denominados também de IEO (do inglês *Inner Earth Objects*), por se tratar de objetos com órbita completamente interna da terrestre. Compreendem 6 objetos conhecidos.

A NASA com o intuito de proteger a Terra monitora e controla esses asteroides, e consequentemente os pesquisadores conseguem prever com maior grau de exatidão as suas órbitas como também analisam futuras aproximações, e por ventura um possível impacto. Indo além de mero interesse científico, o estudo dos NEAs é uma questão de segurança planetária, fato que leva esses objetos a serem permanentemente catalogados, seguidos e estudados.

⁸Fonte: <http://neo.jpl.nasa.gov/neo/groups.html>

⁹Afélio é o ponto da órbita em que um planeta ou um corpo menor do Sistema Solar está mais afastado do Sol.

1.4 Asteroide 2063 Bacchus

Bacchus (com designação provisória (1977) HB) foi descoberto no dia 24 de abril de 1977 por Charles T. Kowal, em Palomar, EUA. Seu nome deriva do deus romano Baco. De acordo com as observações de radar (Benner et al., 1999) o asteroide 2063 Bacchus aproximou-se dentro de 0,0678 UA da Terra em 31 de março 1996, o seu encontro terrestre mais próximo até 2271, permitindo assim a construção de um modelo para esse objeto. Também foi observado que o albedo geométrico óptico de Bacchus está entre os mais bem estimados para qualquer asteroide e que se trata de um objeto brilhante em comprimentos de onda ópticos.

Bacchus faz parte do grupo Apollo, possui um período de rotação de 14,904 horas e suas dimensões são de $1,11 \times 0,53 \times 0,50$ km (Benner et al. 1999). Possui massa ¹⁰ de $1,43 \times 10^{12}$ kg e período orbital de 408,70 dias. Benner et al. (1999) analisaram possíveis valores de densidades para Bacchus, desde de $0,5$ g/cm³ a $3,6$ g/cm³. Esta última representa o valor de uma densidade plausível de meteoritos análogos a Bacchus, os condritos ordinários. Também discutiram a possibilidade desse objeto ter sido originário do contato de dois lóbulos separados. No entanto, os valores baixos de densidade constituiriam fortes indícios contra uma configuração de binário. Nós adotamos para 2063 Bacchus a densidade de $3,3$ g/cm³ ao logo desse trabalho, exceto no capítulo 4 onde iremos alterar essa densidade a fim de analisar o comportamento da localização e da estabilidade dos pontos de equilíbrio desse objeto. Essa discordância de densidade também ocorre para o asteroide 216 Kleopatra, visto que Ostro et al. (2000) em seu trabalho adotaram o valor de $3,5$ g/cm³, Wang, Jiang & Gong (2014) o de $4,27$ g/cm³, Jiang, Yu & Baoyin (2015) o de $3,6$ g/cm³ e Chanut et al. (2015) o de $4,27$ g/cm³.

De acordo com Moura (2014) reconstruímos a forma desse corpo e analisamos suas características físicas. Modelar corpos irregulares não é uma tarefa simples devido à complexidade da distribuição de massa destes corpos. Para se aproximar de modo mais preciso do formato desses corpos, foram desenvolvidos trabalhos que tratam do potencial de corpos tridimensionais por meio do método de poliedros (Werner, 1994; Werner & Scheeres, 1997). Logo, foram realizadas várias simulações numéricas para se obter o modelo de poliedros com faces triangulares do objeto em estudo. Em seguida, com os resultados e com o auxílio do software Gnuplot, geramos os gráficos do formato de Bacchus. Também reproduzimos as simulações que geram o potencial gravitacional do corpo e os gráficos das curvas de velocidade zero, onde podemos visualizar possíveis pontos de equilíbrio.

¹⁰Fonte: <http://neo.ssa.esa.int/search-for-objects>

O presente trabalho tem como objetivo encontrar as coordenadas dos cinco pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus e comparar com as de Wang, Jiang & Gong (2014). Um segundo objetivo é alterar um determinado parâmetro, nesse caso a velocidade de rotação e a densidade, e analisar o que ocorre com esses pontos e também se há alteração da estabilidade. Um último propósito seria inserir a força de pressão de radiação solar e verificar novamente o que ocorre com os pontos de equilíbrio bem como com a estabilidade.

Uma vez realizada a revisão bibliográfica apresentada no Capítulo 2, começaremos reproduzindo no Capítulo 3 os resultados do formato e do potencial gravitacional pelo método de poliedros do asteroide 2063 Bacchus, conforme Moura (2014), através de simulações numéricas. No quarto Capítulo estudaremos o que ocorre com os pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus para diferentes valores de período de rotação e densidade, além disso, faremos uma discussão da estabilidade em função da alteração do parâmetro, tendo em vista as diferentes formas que os autovalores podem adquirir. Em seguida, no Capítulo 5 tentaremos reproduzir Wang, Jiang & Gong (2014) para outros corpos visando encontrar algum ponto de equilíbrio que seja estável, exceto o ponto interior ao corpo. Um estudo que leva em consideração a força de pressão de radiação solar e o que essa perturbação provoca nos pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus será apresentado no Capítulo 6, além de uma breve análise à respeito da possibilidade de haver nuvens de partículas na vizinhança de um ponto estável. E para isso vamos simular a força de pressão de radiação com diferentes valores da razão área-massa considerando que a partícula assume uma forma esférica. Finalmente, no Capítulo 7 são colocadas as considerações finais acerca da pesquisa desenvolvida e os tópicos para futuros estudos.

Capítulo 2

Revisão bibliográfica

Tendo em vista que o estudo dos asteroides pode trazer informações sobre o surgimento do Sistema Solar, diversos autores iniciaram estudos a respeito desses objetos. Através de missões espaciais que obtiveram dados referentes a esses corpos podemos conhecer um pouco mais da dinâmica ao redor de alguns asteroides. Primeiramente vamos obter o cálculo do potencial gravitacional para corpos irregulares. Uma vez encontrado o potencial surge a possibilidade de determinar pontos de equilíbrio ao redor do objeto. Apresentamos a seguir os principais estudos e resultados para o entendimento desses eventos.

2.1 Potencial gravitacional de corpos irregulares

Tendo em vista que o campo gravitacional induzido por pequenos corpos irregulares, como por exemplo asteroides, não é algo simples de ser calculado surge a necessidade de métodos cada vez mais refinados que auxiliem nessa complexa tarefa. A aplicação do método dos Polinômios de Legendre para o cálculo do potencial gravitacional de asteroides produz divergências em alguns pontos devido ao formato altamente irregular desses objetos (Elife & Lara, 2004). Com isso várias estratégias têm sido desenvolvidas para solucionar este problema. Inicialmente objetos geométricos foram considerados como aproximações de alguns corpos com formato simples. Elife & Lara (2004) utilizaram um segmento de reta massivo para modelar o campo gravitacional do asteroide 433 Eros. A dinâmica ao redor de um anel sólido circular e de um cubo homogêneo foi estudada em detalhes por Broucke & Elife (2005). Esses estudos são limitados para corpos simples e simétricos, com rotação ao redor do seu eixo de simetria. Elipsóides triaxiais também foram freqüentemente usados para uma aproximação da gravidade de asteroides (Scheeres, 1994).

Werner (1994) e Werner & Scheeres (1997) desenvolveram o método de poliedros que descreve o campo gravitacional de um poliedro com densidade constante e pode calcular o potencial gravitacional ao redor de um asteroide. O método de poliedros é mais preciso que os métodos dos Polinômios de Legendre e da utilização de objetos geométricos. Dessa forma, Werner & Scheeres (1997) modelaram o formato e o potencial gravitacional de asteroides usando poliedros homogêneos e aplicaram esse método para 4769 Castalia. Este método tem sido aplicado à investigação da dinâmica de órbitas ao redor de 4179 Toutatis (Scheeres et al., 1998) e na avaliação dos ambientes dinâmicos em torno de 433 Eros (Scheeres, Williams & Miller, 2000) e 25143 Itokawa (Scheeres et al., 2006).

Tsoulis & Petrovic (2001) e Tsoulis (2012) apresentaram o cálculo do potencial gravitacional de um poliedro com densidade constante através da utilização de integrais de linha. Um programa em linguagem de programação Fortran implementado por Tsoulis (2012) computa o potencial gravitacional e suas derivadas de primeira e segunda ordem para um poliedro de densidade constante. Chanut, Winter & Tsuchida (2014) utilizaram este programa para calcular o potencial gravitacional do asteroide 433 Eros e Chanut et al. (2015) também aplicaram para o asteroide 216 Kleopatra.

Moura (2014) empregou o método implementado por Tsoulis (2012) para os asteroides 4179 Toutatis, 6489 Golevka, 2063 Bacchus, 1620 Geographos e 1998 ML14, obtendo resultados satisfatórios do potencial gravitacional desses corpos. Tendo em vista que estamos recriando os resultados de Moura (2014) para o asteroide Bacchus, aplicamos novamente o programa de Tsoulis (2012) a fim de confirmar e validar os resultados do potencial gravitacional desse objeto. Os resultados serão apresentados no próximo capítulo.

2.2 Pontos de equilíbrio ao redor de corpos irregulares

Levando-se em conta os dados de observações de alguns corpos irregulares, como asteroides e cometas, podemos construir o formato desses objetos de forma mais realista possível. Logo, o cálculo do campo gravitacional pode ser calculado mais precisamente, visto que a irregularidade do objeto é levada em consideração.

Através do cálculo do potencial gravitacional a localização e estabilidade linear dos pontos de equilíbrio no potencial desses corpos podem ser calculados de modo mais significativo em relação ao grau de precisão. O estudo da estabilidade tem grande influência no comportamento dinâmico ao redor dos pontos de equilíbrio. A análise e compreensão da estabilidade dos pontos de equilíbrio podem auxiliar na construção de uma base de dados que selecionaria a melhor órbita de reconhecimento em volta de asteroides e cometas, o

que se torna essencial para o êxito de missões com sondas espaciais enviadas para estudar esses pequenos corpos celestes.

Elipe & Lara (2004) ao utilizarem um segmento de reta massivo como aproximação para cálculo do potencial gravitacional do asteroide 433 Eros obtiveram a localização dos pontos de equilíbrio desse objeto. Liu, Baoyin & Ma (2011) investigaram a localização, estabilidade, e órbitas periódicas ao redor dos pontos de equilíbrio de um cubo em rotação. Chanut, Winter & Tsuchida (2014) encontraram 4 pontos de equilíbrio ao redor do asteroide 433 Eros ao utilizarem o método de poliedros para modelar o campo gravitacional desse objeto.

Em seus estudos Yu & Baoyin (2012) encontraram 4 pontos de equilíbrio ao redor do asteroide 216 Kleopatra e calcularam a posição desses pontos e analisaram sua estabilidade linear. Jiang et al. (2014) classificaram os pontos de equilíbrio ao redor de asteroides utilizando características topológicas (estabelecidas a partir do cálculo dos autovalores na equação característica dos pontos de equilíbrio), que serão devidamente apresentadas no capítulo seguinte, e aplicaram para os asteroides 216 Kleopatra, 1620 Geographos, 4769 Castalia e 6489 Golevka. Além disso, Jiang et al. (2014) apresentaram a equação característica dos pontos de equilíbrio próximos de um asteroide em rotação e forneceram alguns corolários sobre a estabilidade, a instabilidade e a ressonância dos pontos de equilíbrio.

Já Wang, Jiang & Gong (2014) calcularam a localização e estabilidade dos pontos de equilíbrio de 23 pequenos corpos celestes com formato irregular, dentre eles o asteroide 2063 Bacchus, objeto de estudo deste trabalho. O resultado obtido foi a demonstração de que há pelo menos um ponto de equilíbrio no campo potencial de um corpo celeste pequeno, e que o número de pontos de equilíbrio pode variar, podendo ser somente um, como nove. Por exemplo, o asteroide 216 Kleopatra tem 7 pontos de equilíbrio, sendo 4 externos (já vistos em pesquisas anteriores) e 3 internos; há somente um ponto de equilíbrio no campo potencial do asteroide 1998 KY26, que é interno ao corpo; há 9 pontos de equilíbrio no campo potencial do asteroide 101955 Bennu, sendo que 8 são externos, enquanto que só um é interno. Eles concluíram que o fato do asteroide 1998 KY26 ter um único ponto de equilíbrio localizado no centro do corpo é consequência do seu período de rotação ser muitíssimo curto, cerca de 10,7015 minutos.

Grande parte das pesquisas se preocupam em encontrar os pontos de equilíbrio externos à pequenos corpos, negligenciando os pontos internos. No caso de corpos menores com formato irregular, como asteroides, os pontos de equilíbrio internos podem ser realmente significativos, já que a maioria destes pequenos corpos ainda não foram explorados. Consequentemente teríamos as suas propriedades, como composição e densidade, com um grau de veracidade maior, uma vez que as propriedades conhecidas são baseadas

em medições. A natureza do ponto de equilíbrio interno e sua estabilidade podem auxiliar pesquisadores a estudarem o formato, a estrutura e a evolução destes objetos (Wang, Jiang & Gong, 2014).

Hirabayashi & Scheeres (2014) também encontraram a localização e estabilidade linear dos pontos de equilíbrio de Kleopatra e compararam os resultados com os de Yu & Baoyin (2012). Jiang (2015) discutiu os tipos topológicos dos pontos de equilíbrio analisando os autovalores com aplicação para o asteroide 216 Kleopatra.

Se um determinado parâmetro do asteroide variar, a localização e a estabilidade dos pontos de equilíbrio podem alterar (Yu & Baoyin, 2012; Hirabayashi & Scheeres, 2014; Jiang, Yu & Baoyin, 2015). O parâmetro pode ser a densidade, a velocidade de rotação, o formato, etc. O efeito YORP e as colisões podem causar variação no campo gravitacional de um asteroide, podendo alterar as características dos pontos de equilíbrio como sua localização e estabilidade. O parâmetro velocidade de rotação é susceptível de alteração devido ao efeito YORP.

O efeito Yarkovsky é uma pequena força que surge em qualquer corpo rotativo que orbita nas proximidades de uma estrela. Essa força é devido ao aquecimento diurno sobre um pequeno corpo em rotação causada pela emissão anisotrópica ¹¹ de fons térmicos, que transportam o momento linear (Huaman, 2013). A longo prazo, isto pode afetar as órbitas de pequenos asteroides. O efeito YORP é um fenômeno adicional, relacionado ao efeito Yarkovsky, responsável pela mudança gradual da taxa de rotação de um corpo celeste. O efeito YORP pode gerar um acréscimo ou decréscimo na velocidade de rotação do asteroide dependendo da órbita, do formato irregular e do sentido de rotação do corpo (Golubov et al., 2016). Tal efeito pode alterar a velocidade de rotação de um objeto ao longo de milhões de anos podendo até causar rompimento a ponto de produzir asteroides binários (Jiang, Baoyin & Li, 2015). Por outro lado, pode abrandar o movimento de rotação de tal maneira que para completar uma rotação demore vários dias. O efeito YORP pode ser explicado como a resultante da transmissão de momento linear a um astro por parte da radiação electromagnética incidente sobre ele, que gera um aumento da velocidade de rotação da ordem de 1 milésimo de segundo ao ano (Huaman, 2013). Obviamente que se trata de um processo bastante lento. Se observado um aumento na taxa de rotação de um corpo pequeno, a aceleração dá-se com valores mínimos, mas constante. Além disso, o efeito YORP pode funcionar ao inverso, de forma a desacelerar a taxa de rotação de um asteroide. O acréscimo ou decréscimo na velocidade de rotação depende de detalhes e pequenas irregularidades na superfície do objeto. Por isso as irregularidades

¹¹Anisotrópico significa que certas propriedades físicas (dureza, resistência mecânica, refração da luz, por exemplo) dependem da direção em que são medidas.

na superfície dos asteroides são tão importantes, uma vez que o efeito YORP é mais predominante em objetos pequenos e com formas irregulares.

Jiang, Baoyin & Li (2015) adotaram a velocidade de rotação como parâmetro a ser alterado a fim de calcular a alteração dos pontos de equilíbrio no campo gravitacional do asteroide 216 Kleopatra. Observaram que conforme a velocidade de rotação aumentava o número de pontos de equilíbrio mudava de $7 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Logo, os pontos de equilíbrio irão se fundir e desaparecer até restar somente o ponto interno. Dessa forma, alguns tipos de bifurcações são susceptíveis de aparecerem no momento em que ocorre a fusão e o desaparecimento dos pontos, visto que o tipo topológico do ponto se altera pois ocorre uma mudança nos autovalores. Jiang, Baoyin & Li (2015) estudaram as mudanças dos tipos topológicos dos pontos de equilíbrio de Kleopatra e também as bifurcações. Os tipos de bifurcações que podem ocorrer serão vistas no capítulo 4 quando iremos alterar o período de rotação e a densidade do asteroide 2063 Bacchus.

O trabalho de Xin et al. (2015) analisa os pontos de equilíbrio no campo gravitacional de um asteroide quando se é adicionada a força de pressão de radiação solar. Os novos pontos que vão surgir são denominados de pontos equivalentes. Um elipsóide triaxial é adotado para modelar o potencial gravitacional do asteroide. Nós também levamos em conta a força de pressão de radiação e o que ela provoca nos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus, que será visto no capítulo 6.

Capítulo 3

Simulações numéricas para o asteroide 2063 Bacchus

Neste capítulo procuramos reproduzir os resultados apresentados em Moura (2014) referente ao asteroide 2063 Bacchus, utilizando simulações numéricas para produzir os gráficos que ilustram o formato do objeto e os das curvas de velocidade zero. Também geramos o potencial gravitacional numa grade de pontos ao redor de Bacchus e encontramos os pontos de equilíbrio desse objeto. Para as simulações numéricas realizadas neste trabalho utilizamos um pacote de programas em linguagem de programação C e Fortran, todos criados pela Equipe da disciplina do Curso de Pós-Graduação em Dinâmica de Asteroides ¹². Informações detalhadas a respeito do que é necessário para executar cada programa e que resultados eles geram podem ser obtidas em Moura (2014).

3.1 Formato

Para gerar o formato do asteroide 2063 Bacchus nós adotamos um conjunto de dados precisos oriundos de observações de radar (Neese, 2004) disponibilizados pela NASA Planetary Data System (2004), a fim de construir um modelo de poliedros com 2048 vértices e 4092 faces. Estes dados do asteroide 2063 Bacchus estão dispostos em um arquivo criado por Benner et al. (1999) cujo formato está ilustrado na tabela 3.1.

¹²A Equipe da disciplina do Curso de Pós-Graduação em Dinâmica de Asteroides é composta pelos seguintes membros: Othon Cabo Winter; Thierry Gregory Gil Chanut; André Amarante Luiz; Nilton Carlos Santos Araújo; Alexandre Pinho dos Santos Souza; Luiz Augusto Guimarães Boldrin; Rafael Sfair de Oliveira; Rosana Aparecida Nogueira de Araújo.

Tabela 3.1: Formato do arquivo de vértices e faces.

v	x_1	y_1	z_1
v	x_2	y_2	z_2
v	x_3	y_3	z_3
v
f	i_1	j_1	k_1
f	i_2	j_2	k_2
f

A letra v denota um vértice e a letra f denota uma face triangular. A primeira parte descreve as posições dos vértices. O ponto formado pelos números x_1 , y_1 e z_1 são as coordenadas do vértice 1, e assim por diante (vértices implicitamente são numerados começando com 1), dadas em quilômetros. A ligação dos vértices em faces é a segunda parte do arquivo. Os inteiros i_1 , j_1 e k_1 são os índices dos 3 vértices que formam a face triangular 1, e assim por diante.

Nesse formato, baseado em poliedros com faces triangulares, é como se a superfície do asteroide fosse revestida por uma capa totalmente coberta por figuras de triângulos, com os vértices ligados uns aos outros, conforme figura 3.1.

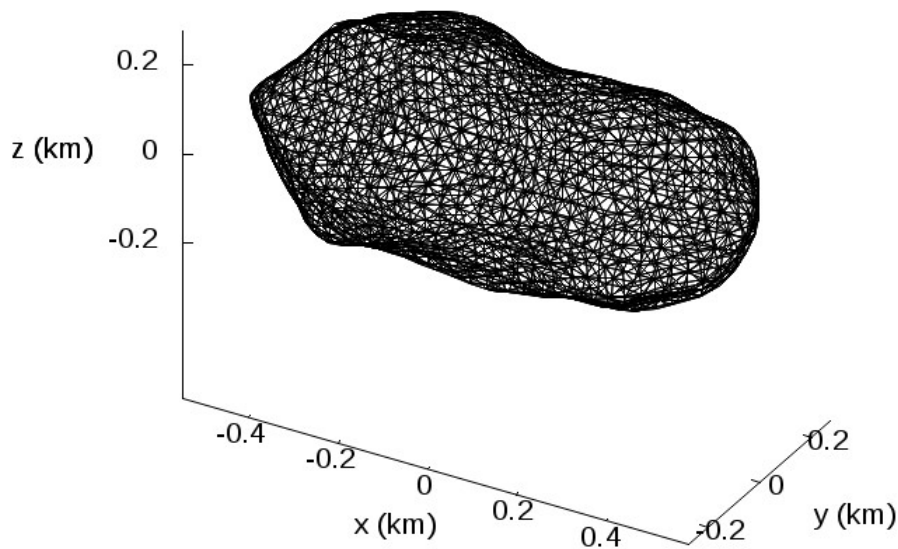


Figura 3.1: Modelo de poliedros para o asteroide 2063 Bacchus.

Além disso, implementamos alguns programas em linguagem de programação C para visualizar a forma poliédrica de Bacchus com profundidade, isto é, o programa calcula a distância do centro de massa do asteroide ao baricentro de cada face do poliedro. Lembrando que a rotina implementada para cálculo do baricentro é com base em faces triangulares. Para a impressão dos resultados, representados pelas figuras 3.2 e 3.3, foi

utilizado o software Gnuplot, que é uma ferramenta gráfica e pode ser executada no sistema operacional Linux. Moura (2014) utilizou o programa FFmpeg para converter as figuras desse asteroide em um pequeno vídeo e animação que ilustra o formato desse objeto. Nessa animação é possível observar o formato de 2063 Bacchus sob diversos ângulos.

A figura 3.2 ilustra o formato do modelo poliédrico em 3D do asteroide 2063 Bacchus. Já a figura 3.3 ilustra suas projeções vista de duas direções opostas. A escala de cores representa a distância da superfície a partir do centro de massa do corpo, no entanto, as cores das projeções do objeto nos planos xy , yz e xz foram escolhidas apenas para ilustrar. Observamos que Bacchus tem um centro com concavidade ou “cintura”, que delimita duas partes assimétricas. E essa divisão é a mais próxima em profundidade em relação à vizinhança, o que pode representar um possível vale/depressão com cerca de 100 m de profundidade. A cor amarelo-vermelha na escala destaca as duas extremidades desse objeto, sendo que uma delas aparenta ser mais arredondada enquanto que a outra restringe-se numa espécie de “bico”. Ao analisarmos as projeções desse objeto nos planos xy , yz e xz notamos que se trata de um corpo bem irregular, e que não se assemelha em nada com uma forma esférica.

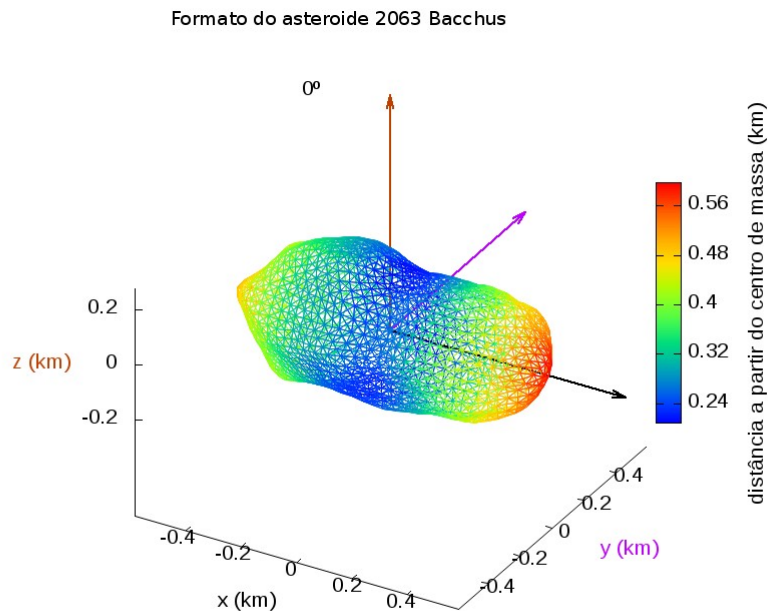


Figura 3.2: Formato do modelo poliédrico em 3D do asteroide 2063 Bacchus com 4092 faces.

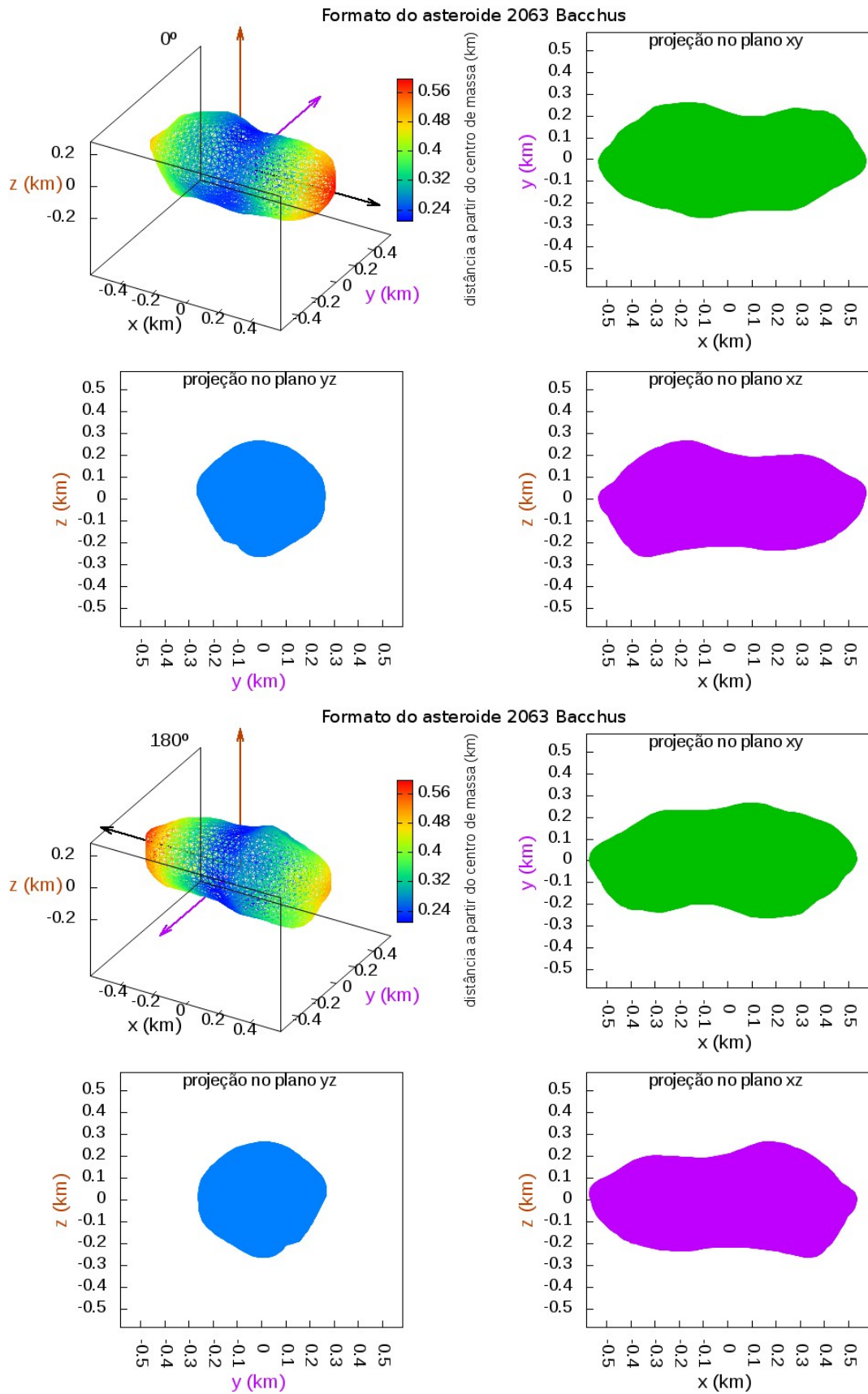


Figura 3.3: Formato do asteroide 2063 Bacchus e suas projeções nos planos xy , yz e xz , respectivamente, vista de duas direções opostas.

Ademais, aplicamos um algoritmo (Mirtich, 1996) para calcular as propriedades da massa poliédrica de 2063 Bacchus e, em seguida, encontramos um sistema de coordenadas fixo no corpo com origem no seu centro de massa e alinhado com os eixos principais de inércia do asteroide (calculados assumindo densidade uniforme). Nós adotamos a convenção usual cujos eixos (x, y, z) correspondem aos eixos principais de menor, intermediário, e maior momento de inércia, respectivamente. Nesse caso, o eixo x está alinhado com o eixo maior e o eixo z está alinhado com o eixo menor de Bacchus. Além disso, assumimos que o corpo rotaciona em torno do eixo de maior momento de inércia (Scheeres et al., 2006). Fazendo uso do mesmo algoritmo encontramos os valores dos principais momentos de inércia (em $kgkm^2$) :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= 1,0625 \times 10^{10} \\ I_{yy} &= 3,4101 \times 10^{10} \\ I_{zz} &= 3,4317 \times 10^{10} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Através dos momentos principais de inércia os coeficientes gravitacionais C_{20} e C_{22} podem ser diretamente calculados por (Hu & Scheeres, 2004):

$$C_{20} = -\frac{1}{2}(2I_{zz} - I_{xx} - I_{yy}) \tag{3.2}$$

$$C_{22} = \frac{1}{4}(I_{yy} - I_{xx}) \tag{3.3}$$

Os C_{nm} representam os coeficientes harmônicos esféricos de ordem n e grau m e expressam a forma irregular da distribuição de massa de um corpo. É comum separar os coeficientes C_{nm} com índice m igual a zero e definir $J_n = -C_{n0}$, e são chamados de coeficientes zonais pois dividem a esfera em zonas. Já aos coeficientes C_{mn} ($m \geq 1$) quando $m = n$ dá-se o nome de coeficientes setoriais, estes dividem a esfera em setores. Então, utilizando as expressões (3.2) e (3.3) nós encontramos os coeficientes gravitacionais de 2063 Bacchus (normalizados pela massa do corpo):

$$C_{20} = -0,8360 \times 10^{-2} km^2 \tag{3.4}$$

$$C_{22} = 0,4104 \times 10^{-2} km^2 \tag{3.5}$$

Notemos que pelo fato de $I_{xx} \leq I_{yy} \leq I_{zz}$ os coeficientes gravitacionais terão sinais $C_{20} \leq 0$ e $C_{22} \geq 0$. Podemos dizer que os coeficientes C_{20} (J_2) e C_{22} são os mais importantes e representam o achatamento e a elipsidade do corpo, respectivamente.

Hu & Scheeres (2004) definiram um parâmetro σ que representa distribuição-massa de asteroides e é definido como:

$$\sigma = \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz} - I_{xx}} = -\frac{4C_{22}}{C_{20} - 2C_{22}}, \quad (3.6)$$

onde $0 \leq \sigma \leq 1$ para qualquer distribuição de massa. Um valor de $\sigma = 0$ indica um corpo com simetria de rotação em torno do eixo z ($I_{yy} = I_{xx}$) e um valor de $\sigma = 1$ indica um corpo com simetria de rotação em torno do eixo x ($I_{yy} = I_{zz}$). Para 2063 Bacchus este valor é $\sigma = 0,9908$ e podemos perceber, de acordo com a figura 3.2, que este objeto tem uma distribuição de massa amplamente espalhada em torno do eixo x .

Tendo em vista as ilustrações de Bacchus em Benner et al. (1999) e quando comparadas com as figuras 3.2 e 3.3 produzidas no Gnuplot através das informações geradas por simulações, podemos concluir que o formato do corpo ficou satisfatório com o modelo que temos atualmente.

3.2 Potencial gravitacional

Vimos que o formato de um corpo irregular pode ser modelado pelo método de poliedros usando dados de observações de radar. Levando em consideração esse formato irregular nós também podemos calcular o campo gravitacional desse objeto.

O potencial gravitacional de um poliedro com densidade constante é expresso como a soma dos finitos termos associados a faces e vértices, e é definido com sendo (Werner & Scheeres, 1997):

$$U = \frac{1}{2}G\rho \sum_{e \in \text{edges}} (\mathbf{r}_e \cdot \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{r}_e)L_e - \frac{1}{2}G\rho \sum_{f \in \text{faces}} (\mathbf{r}_f \cdot \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{r}_f)\omega_f, \quad (3.7)$$

onde U é o potencial gravitacional do corpo irregular, $G = 6,67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ representa a constante gravitacional, ρ é a densidade do corpo, \mathbf{r}_a ($a = e, f$) é o vetor fixo no corpo a partir de um ponto do campo para qualquer ponto de uma aresta (correspondente ao subscrito e) ou face (correspondente ao subscrito f), L_e e ω_f são fatores de integração que somam as conexões das arestas ou faces, e \mathbf{E}_e e \mathbf{F}_f são duplas que representam os parâmetros geométricos de arestas e faces, e são definidas em termos dos vetores normais da aresta e face.

Um programa em Fortran (Tsoulis, 2012) calcula o potencial gravitacional, suas derivadas de primeira e segunda ordem em pontos arbitrários do espaço para uma fonte poliédrica de densidade constante. Inicialmente definimos valores para o extremo inicial

e final de cada coordenada x , y e z , gerando assim uma grade 3D ao redor do asteroide, ou seja, é como se imaginássemos o objeto dentro de uma caixa cúbica e, dessa forma, calcularíamos o potencial em vários pontos dentro dessa caixa. Como seria um cálculo demorado, subdividimos esse cubo em cubos menores da ordem de metros, e tivemos assim uma grade de dados, que todas juntas dariam o potencial em milhões de pontos dentro e ao redor de cada asteroide. Para 2063 Bacchus escolhemos a seguinte grade: de -2 km a 2 km tanto para as coordenadas x , y e z , e o potencial foi calculado de 10 m em 10 m .

Então, aplicamos o programa para 2063 Bacchus e os resultados que expressam a distribuição do potencial gravitacional para os três planos são mostrados na figura 3.4. O mapa de contorno das superfícies mostra as linhas equipotenciais e o código de cores fornece a intensidade do potencial dado em km^2s^{-2} . Podemos observar, de acordo com a figura 3.5, que as superfícies equipotenciais são exibidas para três valores. Além disso, conforme há um aumento da distância entre a superfície equipotencial e o asteroide, ocorre um decréscimo no valor do potencial gravitacional, ou seja, o potencial se torna mais fraco a medida que a distância aumenta, como esperado.

As figuras 3.4 e 3.5 indicam que os modelos mais simples, tal como esférico, que corresponde a um ponto de massa, ou elipsóides, representados por coeficientes gravitacionais, não representariam tão bem o potencial gravitacional de 2063 Bacchus a uma distância inferior a $0,5 \text{ km}$ do centro de massa. Dessa forma, próximo ao corpo torna-se necessário utilizar o modelo de poliedros a fim de se obter cálculos mais precisos. A partir das figuras podemos constatar que o campo gravitacional de 2063 Bacchus segue muito bem a sua forma, como esperado, uma vez que foi assumida densidade constante para o corpo.

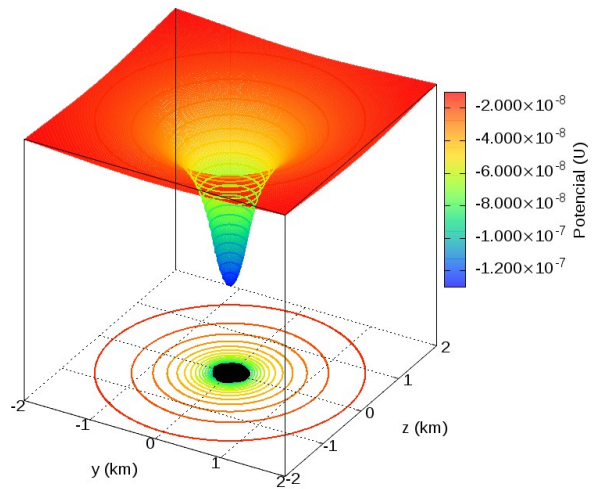
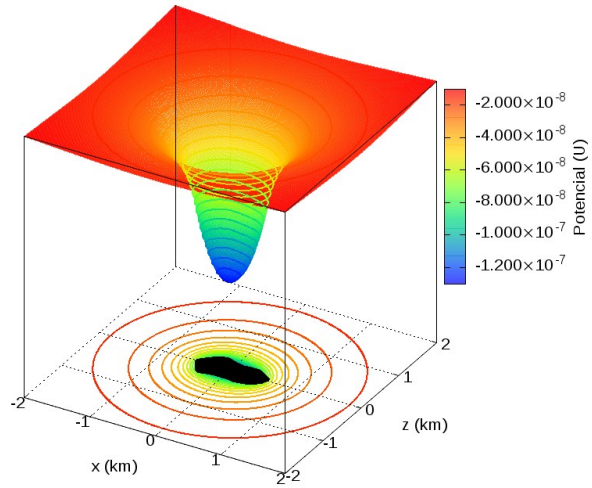
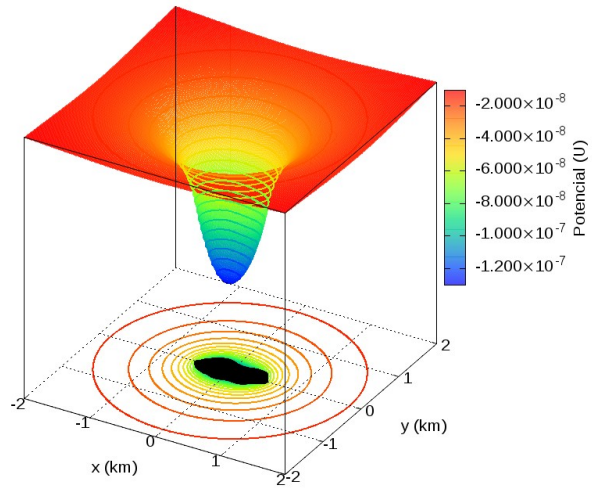


Figura 3.4: Potencial gravitacional do asteroide 2063 Bacchus nos planos xy , yz e xz , respectivamente. A escala de cores fornece a intensidade do potencial dado em km^2s^{-2} .

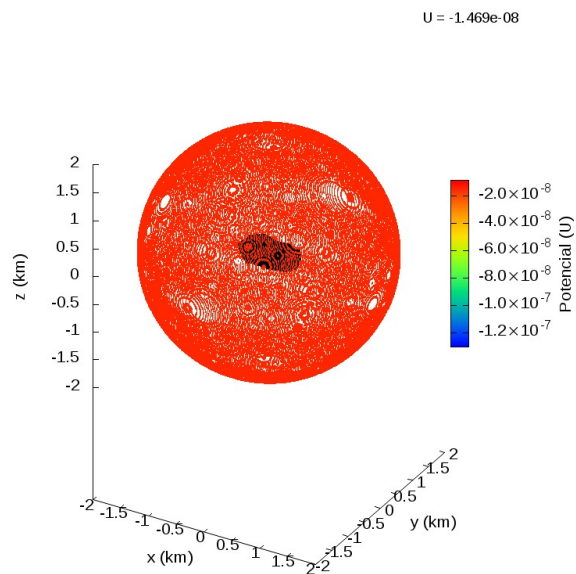
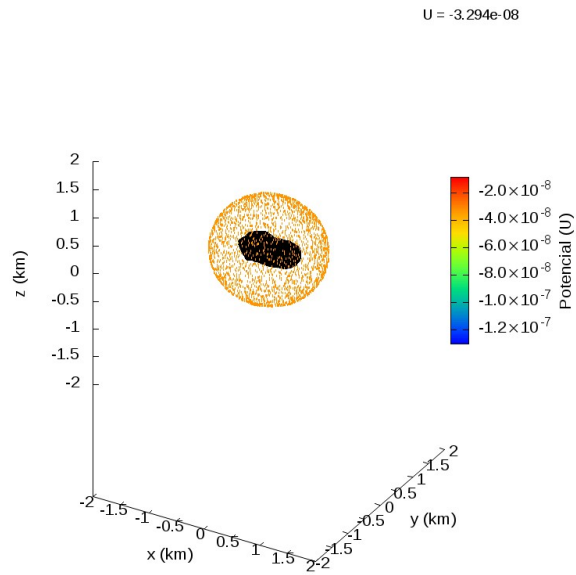
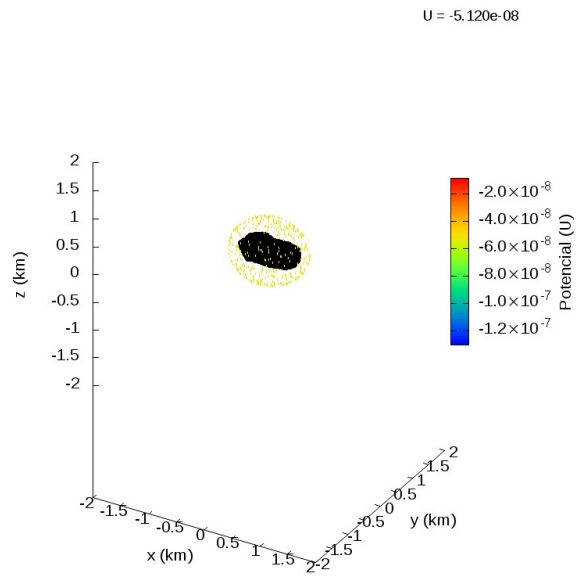


Figura 3.5: Superfícies equipotenciais do asteroide 2063 Bacchus para três valores de potencial. A escala de cores fornece a intensidade do potencial dado em km^2s^{-2} .

A tabela 3.2 expressa o resultado do potencial gravitacional do asteroide 2063 Bacchus somente em alguns pontos, apenas para ilustrar os valores encontrados nas simulações. As distâncias X , Y e Z são dadas em km e o potencial U é dado em km^2s^{-2} .

Tabela 3.2: Potencial gravitacional do asteroide 2063 Bacchus em pontos arbitrários.

X	Y	Z	U
-2.0000	-2.0000	-2.0000	-8.613×10^{-9}
-2.0000	-2.0000	-1.9900	-8.627×10^{-9}
-2.0000	-2.0000	-1.9800	-8.642×10^{-9}
-2.0000	-2.0000	-1.8900	-8.771×10^{-9}
-2.0000	-2.0000	-1.8800	-8.786×10^{-9}
-1.9300	-0.9300	-0.8100	-1.310×10^{-8}
-1.9300	-0.9300	-0.8000	-1.312×10^{-8}
-1.9300	-0.9300	-0.7900	-1.314×10^{-8}
-1.8400	-0.3300	-1.1600	-1.364×10^{-8}
-1.8400	-0.3300	-1.1500	-1.368×10^{-8}
-1.8400	-0.3300	-1.1400	-1.371×10^{-8}
-1.6600	-0.2700	-1.3000	-1.410×10^{-8}
-1.6600	-0.2700	-1.2900	-1.414×10^{-8}
-1.6600	-0.2700	-1.2800	-1.419×10^{-8}

Chanut, Winter & Tsuchida (2014) realizaram um estudo do potencial gravitacional do asteroide 433 Eros, cuja massa é por volta de $6,69 \times 10^{15} kg$ ($4,68 \times 10^3$ massas de Bacchus) e se trata de um corpo grande, e encontraram resultados na ordem de 10^{-5} . Moura (2014) em sua análise dos resultados obtidos em relação ao potencial gravitacional dos asteroides 4179 Toutatis e 1620 Geographos, não tão grandes como 433 Eros, computou um potencial na ordem de 10^{-7} . Enquanto que para 6489 Golevka, um corpo cuja massa é $2,10 \times 10^{11} kg$ ($0,15$ massas de Bacchus) e diâmetro de cerca de $530 m$, muitíssimo menor que Eros, encontrou um potencial na ordem de 10^{-9} . Portanto, quanto maior o objeto maior o seu potencial, e novamente os resultados que encontramos estão condizentes, uma vez que o potencial de 2063 Bacchus é da ordem de 10^{-8} .

3.3 Curvas de velocidade zero

Ao tratarmos do movimento de um veículo espacial próximo de um asteroide é importante incorporar as perturbações do Sol para uma análise mais detalhada. Existem

duas principais contribuições do Sol: gravidade e a força de pressão de radiação. O efeito da gravidade solar torna-se evidenciado quando a distância da nave espacial ao asteroide aumenta. A força de pressão de radiação solar depende da distância e da direção do Sol em relação ao asteroide, e quanto mais próximo do Sol mais intensa é essa força. Logo, o efeito desta força torna-se mais evidente à medida que o veículo espacial se distancia do asteroide. Vamos considerar neste trabalho, exceto no capítulo 6, que o movimento orbital nas proximidades de 2063 Bacchus seja dominado pelo seu próprio campo gravitacional, o que nos permite negligenciar quaisquer efeitos solares e força gravitacional de outros corpos.

Então, para o período de rotação de 2063 Bacchus já definido anteriormente como sendo 14,904 horas a taxa de rotação do asteroide é denotada como ω . O movimento de uma partícula (ou veículo espacial) afetado pela gravidade do asteroide, num sistema de referência fixo no corpo, é descrito pelas equações (Hirabayashi & Scheeres, 2014):

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= \omega^2x - U_x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= \omega^2y - U_y \\ \ddot{z} &= -U_z\end{aligned}\tag{3.8}$$

onde U_x , U_y e U_z são as derivadas parciais de primeira ordem do potencial calculado pelo método dos poliedros. No sistema de coordenadas fixo no corpo com rotação uniforme o campo de gravidade central não muda com o tempo e, porque a taxa de rotação do asteroide não muda, as equações (3.8) do movimento são invariantes no tempo. Fato que leva a existência de uma integral adicional denominada constante de Jacobi. A constante de Jacobi é dada pela multiplicação de cada equação da equação (3.8) por x , y , e z , em seguida soma-se essas equações, e integra-se. Então, a constante de Jacobi C_j é calculada como (Jiang & Baoyin, 2014):

$$C_j = V(x, y, z) + T_E\tag{3.9}$$

onde

$$V(x, y, z) = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + U(x, y, z)\tag{3.10}$$

é o potencial modificado e

$$T_E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\tag{3.11}$$

é a energia cinética da partícula com respeito ao asteroide em rotação.

Então, para um asteroide com rotação uniforme, as equações do movimento podem ser reescritas como (Yu & Baoyin, 2012):

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (3.12)$$

onde \mathbf{r} é o vetor fixado no corpo a partir do centro de massa do asteroide à partícula, e $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor velocidade angular de rotação do asteroide em relação ao sistema inercial de referência.

As curvas de velocidade zero, definidas usando a constante de Jacobi, fornecem informações concretas em relação ao movimento de uma partícula. Como $T_E \geq 0$, é possível definir uma desigualdade

$$V(x, y, z) \geq C_j \quad (3.13)$$

que divide o espaço x, y, z em regiões onde a partícula poderá ser encontrada e onde não é permitida a sua localização, dado um valor específico para C_j . Notemos que $V(x, y, z) \geq 0$ ao longo de todo o espaço. Assim, se $C_j < 0$ a desigualdade é identicamente satisfeita e não há restrições *a priori* onde a partícula pode ser encontrada. Se $C_j > 0$, haverá regiões do espaço onde a desigualdade é violada, e conseqüentemente, onde nenhuma partícula poderá percorrer. Quando essas regiões proibidas separaram-se no espaço em regiões disjuntas, uma partícula nunca poderá deslocar-se entre essas regiões. O limite dessas regiões é governado por

$$V(x, y, z) = C_j, \quad (3.14)$$

que é conhecido como superfícies de velocidade zero no espaço, ou curvas de velocidade zero no plano.

As figuras 3.6, 3.7 e 3.8 mostram as projeções das superfícies de velocidade zero nos planos xy , xz e yz , respectivamente, ou seja, as curvas de velocidade zero em cada um dos planos para o asteroide 2063 Bacchus. A escala de cores dá a intensidade da constante de Jacobi em km^2s^{-2} . Podemos observar que à medida que o valor da constante de Jacobi varia, as curvas de velocidade zero no três planos coordenados mudam.

As curvas de velocidade zero apresentadas neste trabalho podem ser interpretadas quase que do mesmo modo como se interpreta para o problema restrito de três corpos.

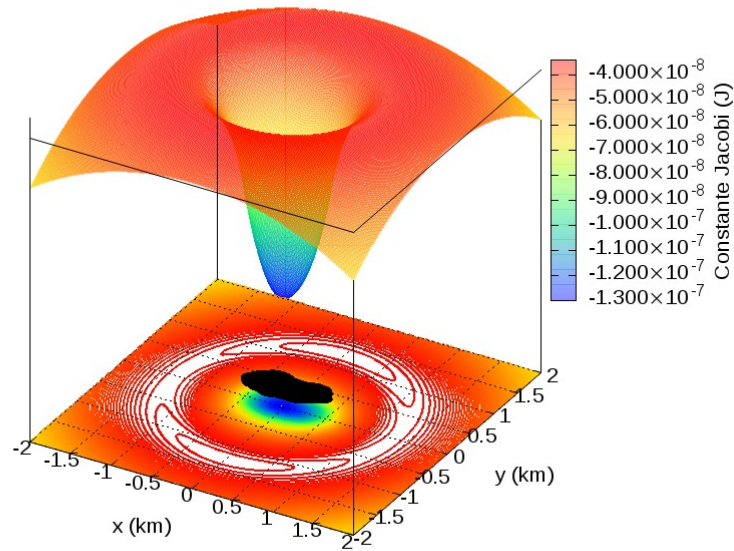


Figura 3.6: Curvas de velocidade zero do asteroide 2063 Bacchus no plano xy . A escala de cores dá a intensidade da constante de Jacobi em km^2s^{-2} .

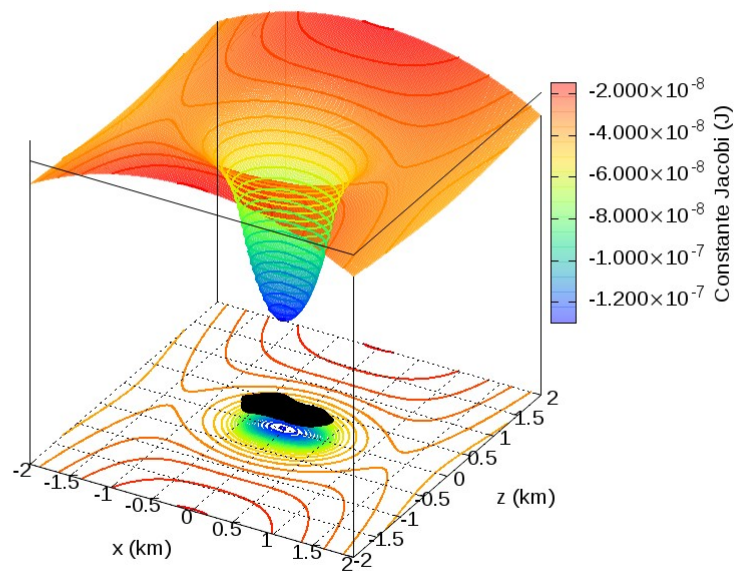


Figura 3.7: Curvas de velocidade zero do asteroide 2063 Bacchus nos planos xz . A escala de cores dá a intensidade da constante de Jacobi em km^2s^{-2} .

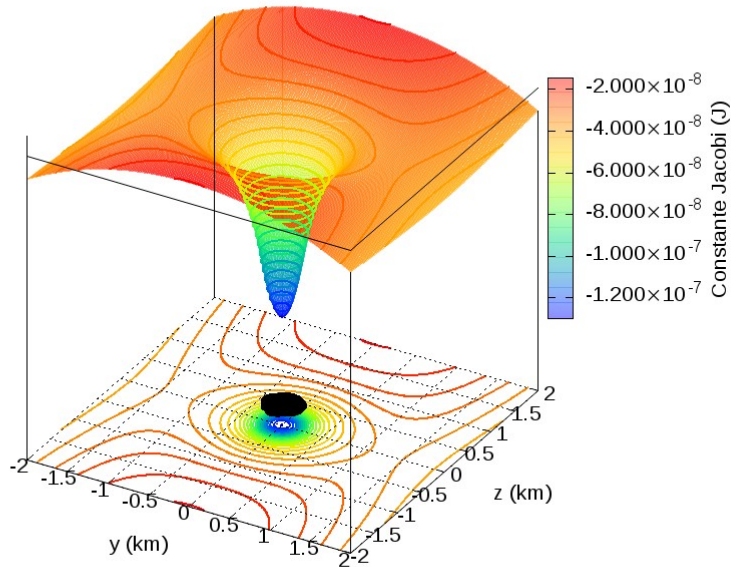


Figura 3.8: Curvas de velocidade zero do asteroide 2063 Bacchus nos planos yz . A escala de cores dá a intensidade da constante de Jacobi em $km^2 s^{-2}$.

É muito importante conhecer os valores de C_j , pois caso uma sonda venha a orbitar um asteroide e se quisermos que ela não se aproxime muito para que não haja colisão, basta escolher o valor de C_j que delimita regiões proibidas próximas ao objeto.

Por exemplo, as figuras 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 e 3.13 mostram uma sequência na variação do valor da constante de Jacobi do asteroide 2063 Bacchus. Em vermelho estão as curvas de velocidade zero no plano xy , que sempre surgem em pares, e em verde a região proibida, para um determinado valor de C_j . Podemos observar na figura 3.9 que a região proibida para uma partícula está compreendida entre $-1,8 < x < -0,9$ e $0,9 < x < 1,8$, aproximadamente, ou seja, a região delimitada entre as duas curvas em vermelho. Dessa forma, se por acaso uma partícula estiver bem próxima do asteroide, $-0,9 < x < 0,9$, ela ficará confinada nessa região eternamente, não podendo ultrapassar a região a partir do “círculo” menor. Do mesmo modo, uma partícula que esteja em $x > 1,8$ e $x < -1,8$ só poderá se locomover ao redor do objeto a uma distância cujo limite seja até o “círculo” maior. Isso para o valor da constante de Jacobi $-3,998 km^2 s^{-2}$.

Já na figura 3.12 a região proibida para uma partícula está compreendida entre as regiões cujo formato lembra uma “banana”. Logo, uma partícula que esteja dentro dessas regiões não poderá ultrapassá-las e só poderá se locomover no seu interior. Ou caso esteja fora dessas regiões poderá percorrer todo o espaço na vizinhança do asteroide, exceto no interior dessas “bananas”.

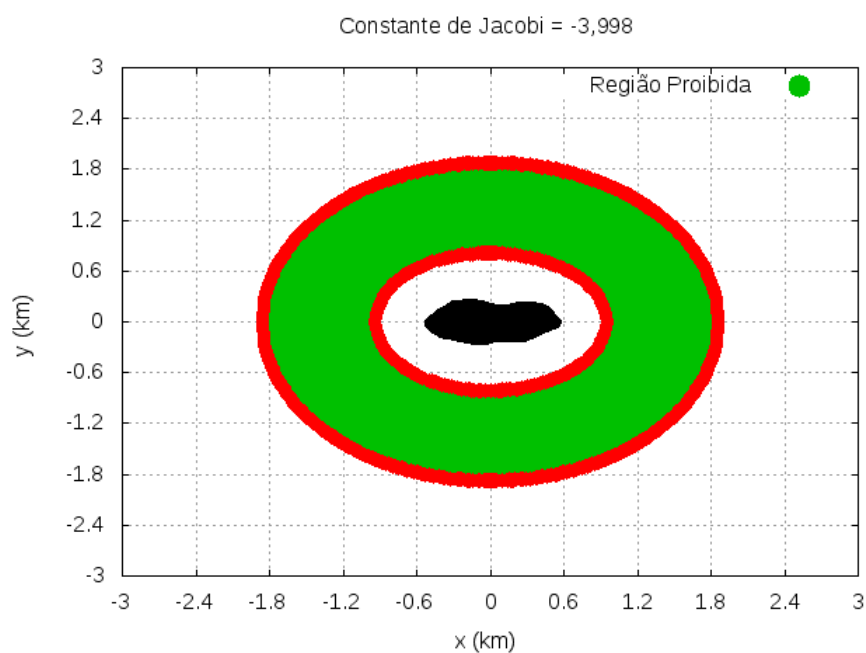


Figura 3.9: Curvas de velocidade zero (vermelho) do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , para o valor da Constante de Jacobi $-3,998 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$. A região proibida está representada em verde.

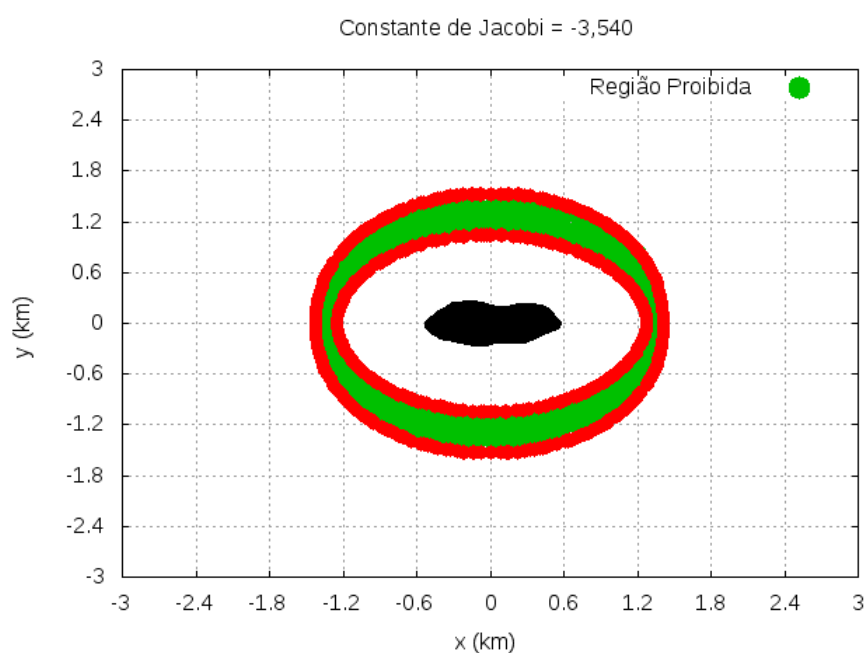


Figura 3.10: Curvas de velocidade zero (vermelho) do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , para o valor da Constante de Jacobi $-3,540 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$. A região proibida está representada em verde.

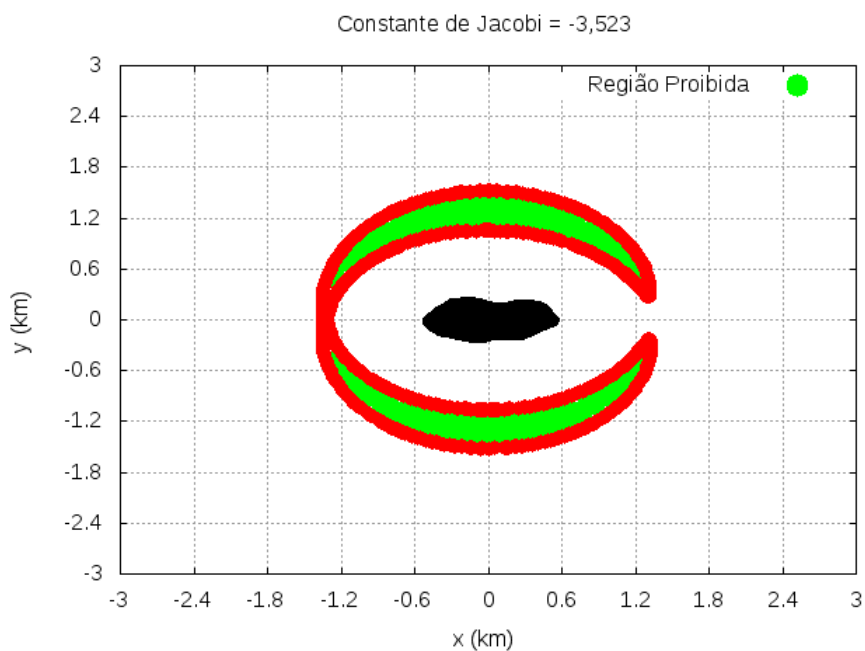


Figura 3.11: Curvas de velocidade zero (vermelho) do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , para o valor da Constante de Jacobi $-3,523 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$. A região proibida está representada em verde.

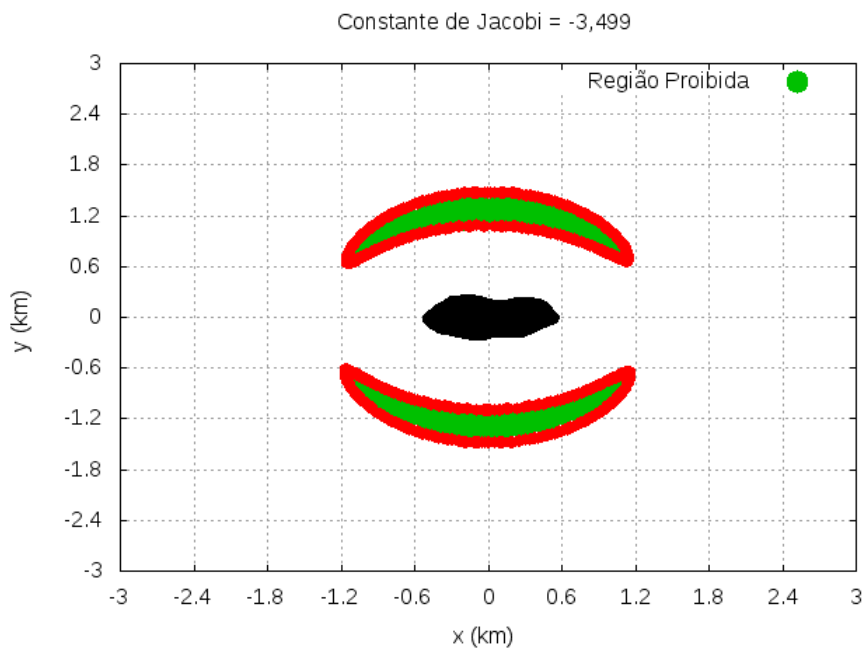


Figura 3.12: Curvas de velocidade zero (vermelho) do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , para o valor da Constante de Jacobi $-3,499 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$. A região proibida está representada em verde.

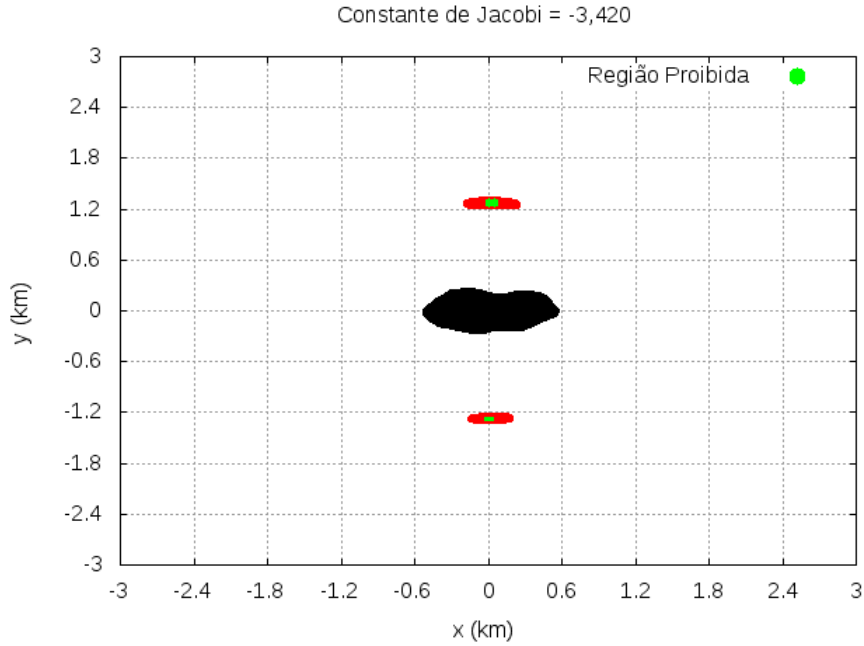


Figura 3.13: Curvas de velocidade zero (vermelho) do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , para o valor da Constante de Jacobi $-3,420 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$. A região proibida está representada em verde.

Os valores críticos de C_j das superfícies cruzam ou fecham sobre si próprios em pontos no espaço $x-y-z$ usualmente chamados pontos de equilíbrio. As superfícies são todas avaliadas próximas dos valores críticos de C_j . Uma interpretação das curvas de velocidade zero é a possibilidade de encontrar possíveis pontos de equilíbrio. Na figura 3.13 observemos que as regiões proibidas são mínimas, até chegar a um determinado valor crítico da constante de Jacobi que resulte num ponto de equilíbrio. Fato que constatamos para 2063 Bacchus.

3.4 Pontos de equilíbrio

Em geral, existem mais do que quatro pontos de equilíbrio no campo gravitacional de um asteroide, comumente denominados de E_1 , E_2 , E_3 e E_4 . Wang, Jiang & Gong (2014) demonstraram que há pelo menos um ponto de equilíbrio no campo potencial de um pequeno corpo, e que o número de pontos pode variar, podendo ser somente um, como nove. Os pontos de equilíbrio são os pontos críticos do potencial modificado $V(x, y, z)$. Então, os pontos de equilíbrio satisfazem as seguintes condições (Jiang et al., 2014):

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

onde (x, y, z) são as componentes de \mathbf{r} no sistema de coordenadas fixo no corpo. A localização exata dos pontos de equilíbrio é obtida resolvendo as equações (3.15). Vamos considerar o número de pontos de equilíbrio que satisfaçam as equações

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} &= \omega^2 x \\ \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} &= \omega^2 y \\ \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{3.16}$$

Para o cálculo dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus delimitamos uma pequena caixa ao redor de uma região onde provavelmente o ponto deveria estar. Para que tivéssemos um referencial onde os pontos poderiam estar localizados analisamos os gráficos das curvas de velocidade zero, conforme figura 3.14. Assim, o ponto de equilíbrio denotado E_1 estaria numa região compreendida em: $1,0 < x < 1,5$ e $-0,5 < y < 0,5$; E_2 : $-1,5 < x < -1,0$ e $-0,5 < y < 0,5$; E_3 : $-0,5 < x < 0,5$ e $1,0 < y < 1,5$; E_4 : $-0,5 < x < 0,5$ e $-1,5 < y < -1,0$; e de acordo com Wang, Jiang & Gong (2014) todo corpo celeste pequeno tem pelos menos um ponto de equilíbrio interno, logo, para 2063 Bacchus denotamos de E_5 este ponto, e sua localização: $-0,2 < x < 0,2$ e $-0,2 < y < 0,2$. Os resultados encontrados estão indicados na figura 3.15 e os valores das coordenadas de cada ponto de equilíbrio estão na tabela 3.3.

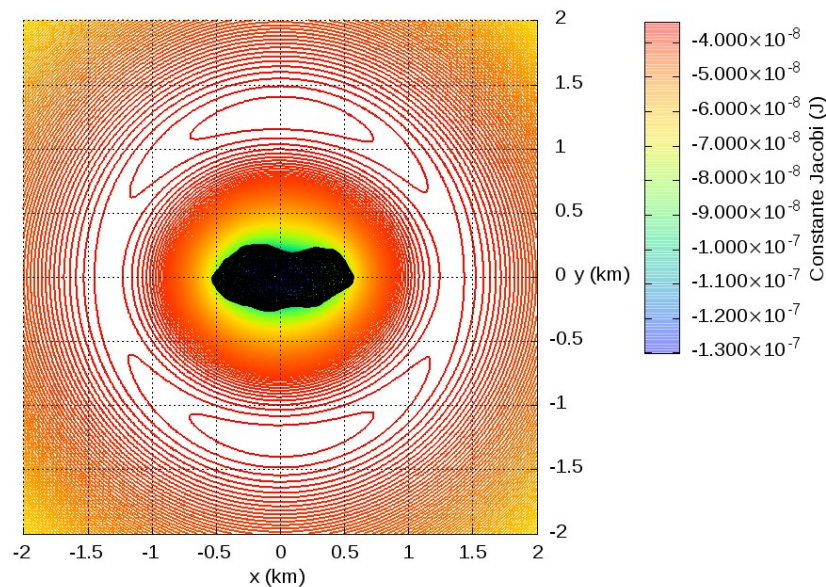


Figura 3.14: Curvas de velocidade zero do asteroide 2063 Bacchus no plano xy para localização dos pontos de equilíbrio.

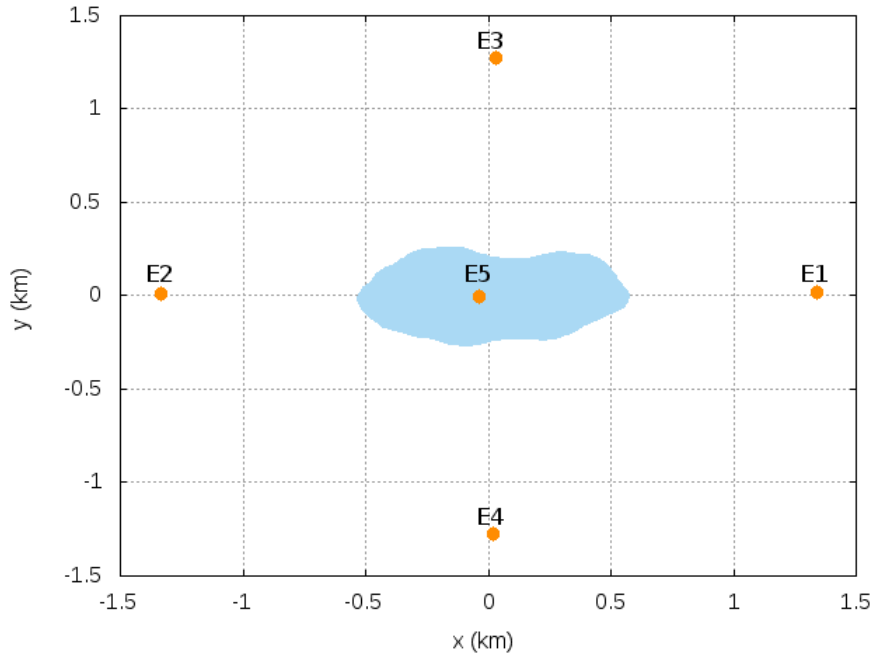


Figura 3.15: Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , considerando período de rotação 14,904 horas e densidade $3,3 \text{ g/cm}^3$.

Tabela 3.3: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus, considerando período de rotação 14,904 horas e densidade $3,3 \text{ g/cm}^3$.

Ponto de equilíbrio	$x \text{ (km)}$	$y \text{ (km)}$	$z \text{ (km)}$	$C_j \text{ (}\times 10^{-8} \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}\text{)}$
E_1	1,33857155	0,02209878	-0,00068215	-3,529966
E_2	-1,33412841	0,00951680	-0,00104242	-3,523614
E_3	0,03037497	1,27541401	0,00051966	-3,418324
E_4	0,02083694	-1,27662407	0,00060599	-3,419661
E_5	-0,03533235	-0,00393710	0,00220318	-13,028130

No entanto, conforme já mencionado no capítulo 1, nós adotamos para 2063 Bacchus a densidade de $3,3 \text{ g/cm}^3$ e a localização dos pontos de equilíbrio que constam na tabela 3.3 foram encontrados para essa densidade. Mas, para podermos ter certeza de que os códigos de programação implementados para calcularem esses pontos estão funcionando adequadamente, realizamos novamente outra simulação com uma densidade no valor de $2,0 \text{ g/cm}^3$. Dessa forma, podemos comparar esses novos resultados com os do trabalho de Wang, Jiang & Gong (2014), tendo em vista que esses autores adotaram para 2063 Bacchus a densidade de $2,0 \text{ g/cm}^3$. Wang, Jiang & Gong (2014) encontraram cinco pontos de equilíbrio, sendo quatro externos e um interno.

A figura 3.16 expressa a comparação entre: (a) os resultados de Wang, Jiang & Gong (2014); (b) os novos resultados do presente trabalho quando alteramos o valor da densidade de 2063 Bacchus. Enquanto que as tabelas 3.4 e 3.5 trazem os valores das

coordenadas dos cinco pontos de equilíbrio desse asteroide considerando os resultados do presente trabalho e de Wang, Jiang & Gong (2014), respectivamente.

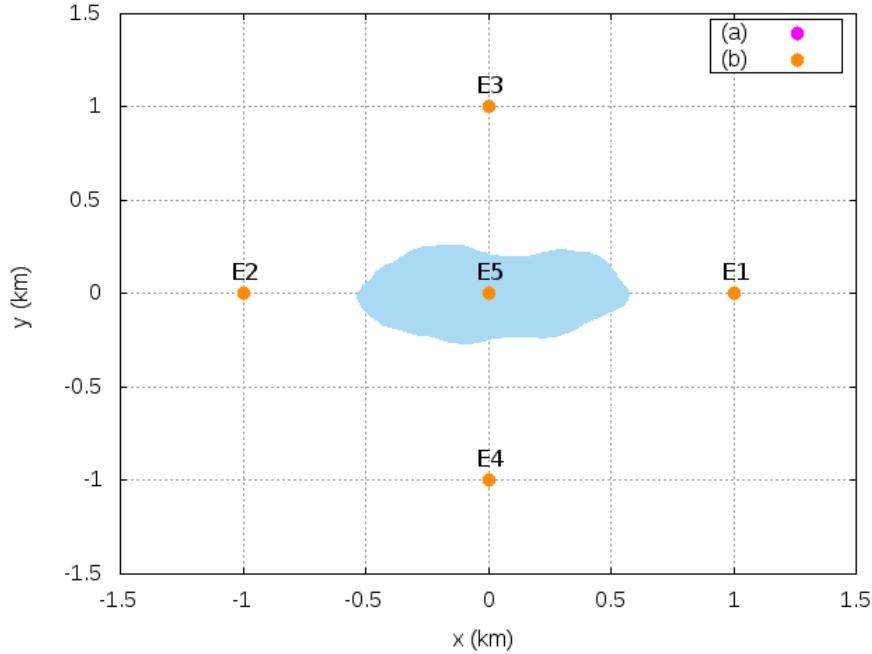


Figura 3.16: Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , considerando período de rotação 14,904 horas e densidade $2,0 \text{ g/cm}^3$. Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.

Tabela 3.4: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus, considerando período de rotação 14,904 horas e densidade $2,0 \text{ g/cm}^3$.

Ponto de equilíbrio	$x \text{ (km)}$	$y \text{ (km)}$	$z \text{ (km)}$
E_1	1,14755124	0,02279787	-0,00086081
E_2	-1,14145966	0,00806093	-0,00141447
E_3	0,03142661	1,07256751	0,00071128
E_4	0,02031077	-1,07426540	0,00084930
E_5	-0,03624806	-0,00393239	0,00222294

Tabela 3.5: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus conforme Wang, Jiang & Gong (2014).

Ponto de equilíbrio	$x \text{ (km)}$	$y \text{ (km)}$	$z \text{ (km)}$
E_1	1,14738	0,0227972	-0,000861348
E_2	-1,14129	0,00806235	-0,00141486
E_3	0,0314276	1,07239	0,000711379
E_4	0,0203102	-1,07409	0,000849894
E_5	-0,0362491	-0,00393237	0,00222295

A tabela 3.6 trás o erro absoluto nas coordenadas de cada ponto, onde Δx representa o módulo da diferença na coordenada x entre a tabela 3.4 e a tabela 3.5, Δy a diferença na coordenada y e Δz a diferença na coordenada z , para cada ponto de equilíbrio. Ao compararmos a localização dos pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus nas tabelas 3.4 e 3.5 podemos concluir que os nossos resultados estão satisfatórios. Uma vez que o erro absoluto nas coordenadas de cada ponto é a partir da quarta casa decimal, conforme podemos observar na tabela 3.6. Além disso, observe que na figura 3.16 as coordenadas dos pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus comparando os resultados em (a) e (b) se sobrepõem, pelo fato de termos erros absolutos inferiores a 0,017%. Portanto, as implementações que utilizamos estão corretas.

Tabela 3.6: Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 3.4 e 3.5.

Ponto de equilíbrio	Δx (km)	Δy (km)	Δz (km)
E_1	0,00017124	0,00000067	0,00000053
E_2	0,00016966	0,00001042	0,00000039
E_3	0,00000099	0,00017751	0,00000009
E_4	0,00000057	0,00017540	0,00000059
E_5	0,00000104	0,00000002	0,00000001

3.4.1 Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Para que possamos estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio as equações do movimento em relação ao ponto devem ser linearizadas, e devemos obter a equação característica do movimento. Vamos definir as coordenadas do ponto crítico como sendo $(x_L, y_L, z_L)^T$. O potencial modificado $V(x, y, z)$ pode ser escrito usando uma expansão de Taylor no ponto de equilíbrio. A expansão de Taylor do potencial modificado $V(x, y, z)$ no ponto pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
V(x, y, z) &= V(x_L, y_L, z_L) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_L (x - x_L)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_L (y - y_L)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_L (z - z_L)^2 \\
&+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)_L (x - x_L)(y - y_L) \\
&+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right)_L (x - x_L)(z - z_L) \\
&+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \right)_L (y - y_L)(z - z_L) + \dots
\end{aligned} \tag{3.17}$$

e, temos que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}. \tag{3.18}$$

Então, define-se

$$\xi = x - x_L, \quad \eta = y - y_L, \quad \zeta = z - z_L$$

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_L, \quad V_{yy} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_L, \quad V_{zz} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_L \tag{3.19}$$

$$V_{xy} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)_L, \quad V_{yz} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \right)_L, \quad V_{xz} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right)_L$$

Combinando as equações (3.19) com as equações (3.12), as equações linearizadas do movimento em relação ao ponto de equilíbrio podem ser expressas por (Jiang et al., 2014):

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} + V_{xx}\xi + V_{xy}\eta + V_{xz}\zeta &= 0 \\
\dot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} + V_{xy}\xi + V_{yy}\eta + V_{yz}\zeta &= 0 \\
\ddot{\zeta} + V_{xz}\xi + V_{yz}\eta + V_{zz}\zeta &= 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Definindo $D \equiv \frac{d}{dt}$ e $D^2 \equiv \frac{d^2}{dt^2}$ reescrevemos as equações (3.20) como:

$$\begin{aligned}
(D^2 + V_{xx})\xi + (-2\omega D + V_{xy})\eta + V_{xz}\zeta &= 0 \\
(2\omega D + V_{xy})\xi + (D^2 + V_{yy})\eta + V_{yz}\zeta &= 0 \\
V_{xz}\xi + V_{yz}\eta + (D^2 + V_{zz})\zeta &= 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

As soluções dessas equações são da forma $\xi = \alpha e^{\lambda t}$, $\eta = \beta e^{\lambda t}$ e $\zeta = \gamma e^{\lambda t}$, onde α , β e γ são constantes de integração e λ denota os autovalores das equações (3.21). Substituindo essas soluções na equação (3.21) obtemos a equação característica do movimento. É comum escrever a equação característica da seguinte forma

$$\begin{vmatrix}
\lambda^2 + V_{xx} & -2\omega\lambda + V_{xy} & V_{xz} \\
2\omega\lambda + V_{xy} & \lambda^2 + V_{yy} & V_{yz} \\
V_{xz} & V_{yz} & \lambda^2 + V_{zz}
\end{vmatrix} = 0 \tag{3.22}$$

Ou ainda, pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\lambda^6 &+ (V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} + 4\omega^2)\lambda^4 + (V_{xx}V_{yy} + V_{yy}V_{zz} + V_{zz}V_{xx} - V_{xy}^2 - V_{yz}^2 - V_{xz}^2 \\
&+ 4\omega^2V_{zz})\lambda^2 + (V_{xx}V_{yy}V_{zz} + 2V_{xy}V_{yz}V_{xz} - V_{xx}V_{yz}^2 - V_{yy}V_{xz}^2 - V_{zz}V_{xy}^2) = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

A equação (3.23) representa uma equação do sexto grau para λ . A estabilidade dos pontos de equilíbrio é determinada pelas seis raízes da equação (3.22), denotadas por λ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$).

Jiang et al. (2014) investigaram as raízes da equação característica no ponto de equilíbrio e apresentaram um teorema sobre os autovalores. Além disso, apresentaram uma condição suficiente para a estabilidade dos pontos de equilíbrio, a qual só depende da matriz Hessiana do potencial modificado. Dessa forma, vamos denotar

$$\begin{aligned}
P(\lambda) = \lambda^6 &+ (V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} + 4\omega^2)\lambda^4 + (V_{xx}V_{yy} + V_{yy}V_{zz} + V_{zz}V_{xx} - V_{xy}^2 - V_{yz}^2 - V_{xz}^2 \\
&+ 4\omega^2V_{zz})\lambda^2 + (V_{xx}V_{yy}V_{zz} + 2V_{xy}V_{yz}V_{xz} - V_{xx}V_{yz}^2 - V_{yy}V_{xz}^2 - V_{zz}V_{xy}^2)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

e segue-se que $P(\lambda) = P(-\lambda)$. Então, Jiang et al. (2014) apresentaram a seguinte proposição: se λ é um autovalor do ponto de equilíbrio no campo potencial de um asteroide em rotação uniforme, então, $-\lambda$, $\bar{\lambda}$ (conjugado de um número complexo) e $-\bar{\lambda}$ são também autovalores do ponto de equilíbrio. Ou seja, todos os autovalores são susceptíveis de ter a forma $\pm\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}; \alpha > 0$), $\pm i\beta$ ($\beta \in \mathbb{R}; \beta > 0$) e $\pm\sigma \pm i\tau$ ($\sigma, \tau \in \mathbb{R}; \sigma, \tau > 0$).

Ademais, Jiang et al. (2014) provaram um teorema o qual diz que se a matriz Hessiana, apresentada em (3.25), é definida positiva, o ponto de equilíbrio é estável. Esse teorema é uma condição suficiente para a estabilidade dos pontos de equilíbrio no campo potencial de um asteroide em rotação. Além disso, a estabilidade dos pontos de equilíbrio depende do potencial modificado e da velocidade angular de rotação do objeto.

$$\begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{xy} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{xz} & V_{yz} & V_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Se não houver nenhum autovalor que seja igual a zero dizemos que o ponto de equilíbrio é não-degenerado (Jiang et al. 2014). Assim, um ponto degenerado tem pelos menos dois autovalores iguais a zero. Jiang, Baoyin & Li (2015) provaram que o número de pontos de equilíbrio não-degenerados no campo gravitacional de um asteroide é um número ímpar, e pode ser 1, 3, 5, 7, 9, ..., etc. E mesmo se variarmos algum parâmetro, o que iremos fazer no próximo capítulo, o número de pontos não-degenerados irá variar de um número ímpar para outro número ímpar.

Há oito casos para os pontos de equilíbrio não-degenerados no campo potencial de um asteroide em rotação (Jiang et al. 2014), são eles:

Caso 1: Os autovalores são diferentes e sob a forma de $\pm i\beta_j$ ($\beta_j \in \mathbb{R}$; $\beta_j > 0$; $j = 1, 2, 3$);

Caso 2: As formas dos autovalores são $\pm\alpha_j$ ($\alpha_j \in \mathbb{R}$; $\alpha_j > 0$; $j = 1$) e $\pm i\beta_j$ ($\beta_j \in \mathbb{R}$; $\beta_j > 0$; $j = 1, 2$), e os autovalores imaginários são diferentes;

Caso 3: As formas dos autovalores são $\pm\alpha_j$ ($\alpha_j \in \mathbb{R}$; $\alpha_j > 0$; $j = 1, 2$) e $\pm i\beta_j$ ($\beta_j \in \mathbb{R}$; $\beta_j > 0$; $j = 1$);

Caso 4: (a) As formas dos autovalores são $\pm\alpha_j$ ($\alpha_j \in \mathbb{R}$; $\alpha_j > 0$; $j = 1$) e $\pm\sigma \pm i\tau$ ($\sigma, \tau \in \mathbb{R}$; $\sigma, \tau > 0$); ou (b) $\pm\alpha_j$ ($\alpha_j \in \mathbb{R}$; $\alpha_j > 0$; $j = 1, 2, 3$);

Caso 5: As formas dos autovalores são $\pm i\beta_j$ ($\beta_j \in \mathbb{R}$; $\beta_j > 0$; $j = 1$) e $\pm\sigma \pm i\tau$ ($\sigma, \tau \in \mathbb{R}$; $\sigma, \tau > 0$);

Caso 6: As formas dos autovalores são $\pm i\beta_j$ ($\beta_j \in \mathbb{R}$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 > 0$; $j = 1, 2, 3$);

Caso 7: As formas dos autovalores são $\pm i\beta_j$ ($\beta_j \in \mathbb{R}$; $\beta_j > 0$, $\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3$; $j = 1, 2, 3$);

Caso 8: As formas dos autovalores são $\pm\alpha_j$ ($\alpha_j \in \mathbb{R}$; $\alpha_j > 0$; $j = 1$) e $\pm i\beta_j$ ($\beta_j \in \mathbb{R}$; $\beta_1 = \beta_2 > 0$; $j = 1, 2$).

O ponto de equilíbrio é linearmente estável e não-ressonante se, e somente se, pertencer ao caso 1. O ponto de equilíbrio é instável e não-ressonante se, e somente se, pertencer a um dos casos de 2 a 5. O ponto de equilíbrio é ressonante se, e somente se, pertencer a um dos casos de 6 a 8.

A classificação topológica do ponto de equilíbrio é com base na distribuição dos autovalores do ponto no plano complexo. A figura 3.17 ilustra no plano complexo a classificação topológica dos pontos de equilíbrio não-degenerados e não-ressonantes. O eixo horizontal representa o eixo real e o eixo vertical representa o eixo imaginário, e as “bolinhas” em verde representam os autovalores. Os três sistemas da parte superior da figura, da esquerda para a direita, representam os casos de 1 a 3. Enquanto que os três sistemas da parte inferior da figura, da esquerda para a direita, representam os casos 4 (a; b) e 5. Por exemplo, como no caso 1 existem três pares de autovalores imaginários puros, logo, ao observarmos na figura o sistema que representa este caso iremos notar seis “bolinhas” verdes no eixo imaginário, sendo três na parte positiva e três na parte negativa, ou seja, ao encontrarmos um autovalor imaginário o seu conjugado também será raiz da equação característica. Já para o caso 4 (b) onde todos os autovalores são reais, iremos concluir que todas as “bolinhas” se encontram no eixo real.

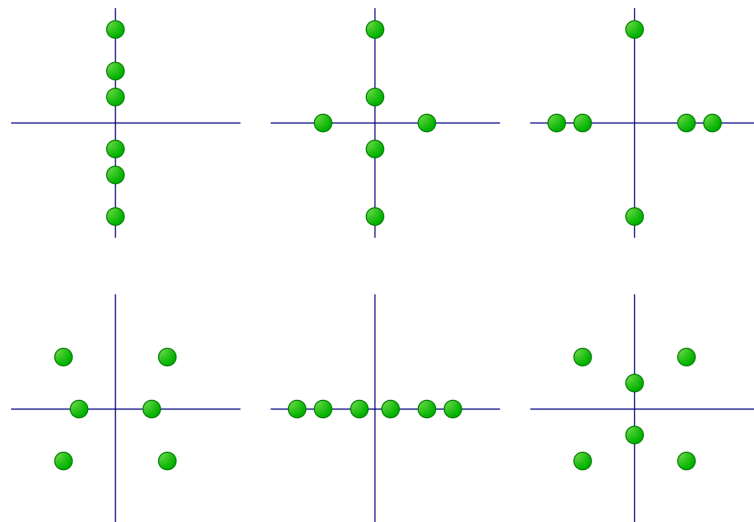


Figura 3.17: Classificação topológica dos pontos de equilíbrio não-degenerados e não-ressonantes. O eixo horizontal representa o eixo real e o eixo vertical representa o eixo imaginário. O verde simboliza os autovalores. Fonte: Jiang (2015).

Já a figura 3.18 ilustra no plano complexo a classificação topológica dos pontos de equilíbrio degenerados. De modo análogo a discussão feita para a figura 3.17, começando na parte superior e da esquerda para a direita estão dispostas as configurações para os sete casos de pontos degenerados, denominados de caso D1, caso D2, ..., caso D7. O número localizado no centro de cada sistema indica o número de autovalores que são iguais a zero. Por exemplo, no sistema que representa o caso D2 existe um par de autovalores imaginários puros, indicado por duas “bolinhas” rosas no eixo imaginário, um par de autovalores reais, indicado por duas “bolinhas” no eixo real, e dois autovalores iguais a zero, indicados pelo número 2 que simboliza duas “bolinhas” na origem do sistema. Já para o caso D6 há quatro autovalores iguais a zero, indicados pelo número 4 que simboliza

quatro “bolinhas” na origem do sistema, e um par de autovalores reais, indicado por duas “bolinhas” no eixo real.

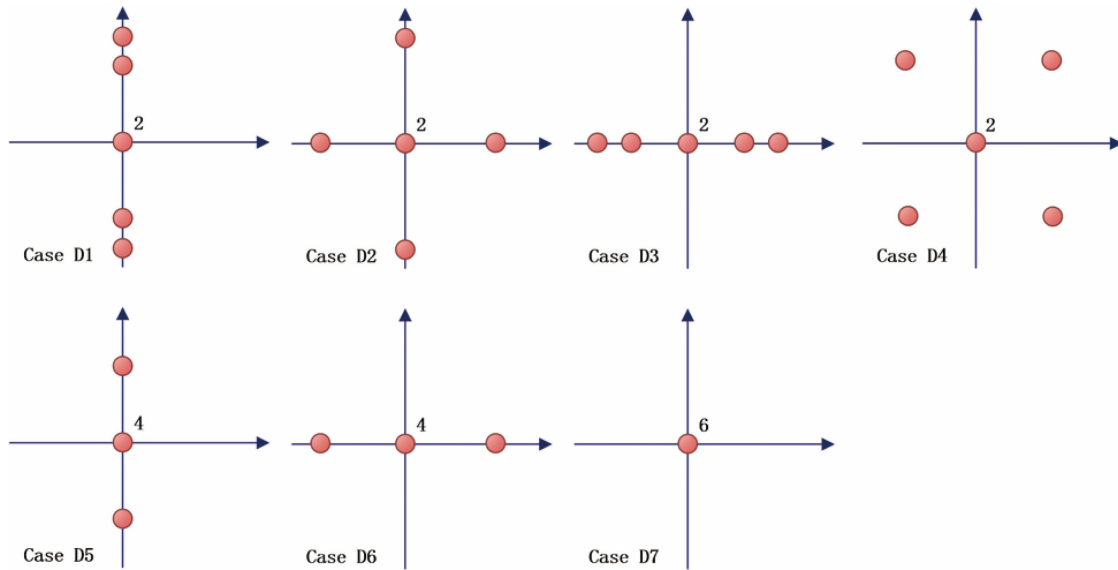


Figura 3.18: Classificação topológica dos pontos de equilíbrio degenerados. O eixo horizontal representa o eixo real e o eixo vertical representa o eixo imaginário. O rosa simboliza os autovalores. Fonte: Jiang, Baoyin & Li (2015).

Wang, Jiang & Gong (2014) calcularam a classificação topológica dos pontos de equilíbrio no campo gravitacional de 23 pequenos corpos celestes, sendo 15 asteroides, 5 satélites de planetas e 3 cometas. Verificaram que todos os pontos eram não-degenerados e não-ressonantes e pertenciam ao caso 1, 2 ou 5. Observaram que a maioria dos pontos que estavam localizados no interior do objeto na parte central pertenciam ao caso 1. Isso significa que a estabilidade de um ponto de equilíbrio próximo ao centro do corpo é, em geral, linearmente estável, o que indica uma forma estável do corpo celeste.

A tabela 3.7 expressa os resultados que encontramos dos autovalores do asteroide 2063 Bacchus considerando a densidade de $2,0 \text{ g/cm}^3$, visto que no trabalho de Wang, Jiang & Gong (2014) foi analisada a estabilidade de cada ponto de equilíbrio com esse valor de densidade. Ao analisarmos a forma dos autovalores notamos que todos os pontos são não-degenerados e não-ressonantes. A análise da estabilidade de cada ponto permite concluir que: os pontos E_1 , E_2 , E_3 e E_4 pertencem ao caso 2, logo, são instáveis; o ponto E_5 pertence ao caso 1, logo, é linearmente estável. A figura 3.19 apresenta o mapa da estabilidade dos pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus. A análise da estabilidade mostrou-se conforme Wang, Jiang & Gong (2014), que também encontraram que os quatro pontos externos são instáveis, enquanto que o ponto interno é linearmente estável.

Tabela 3.7: Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus, considerando densidade $2,0 \text{ g/cm}^3$.

$\times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
E_1	$-2,217i$	$2,217i$	$1,006$	$-1,006$	$1,257i$	$-1,257i$
E_2	$-2,216i$	$2,216i$	$-0,984$	$0,984$	$1,241i$	$-1,241i$
E_3	$-2,181i$	$2,181i$	$0,805$	$-0,805$	$1,172i$	$-1,172i$
E_4	$-2,184i$	$2,184i$	$-0,811$	$0,811$	$1,172i$	$-1,172i$
E_5	$-4,466i$	$4,466i$	$8,859i$	$8,647i$	$-8,859i$	$-8,647i$

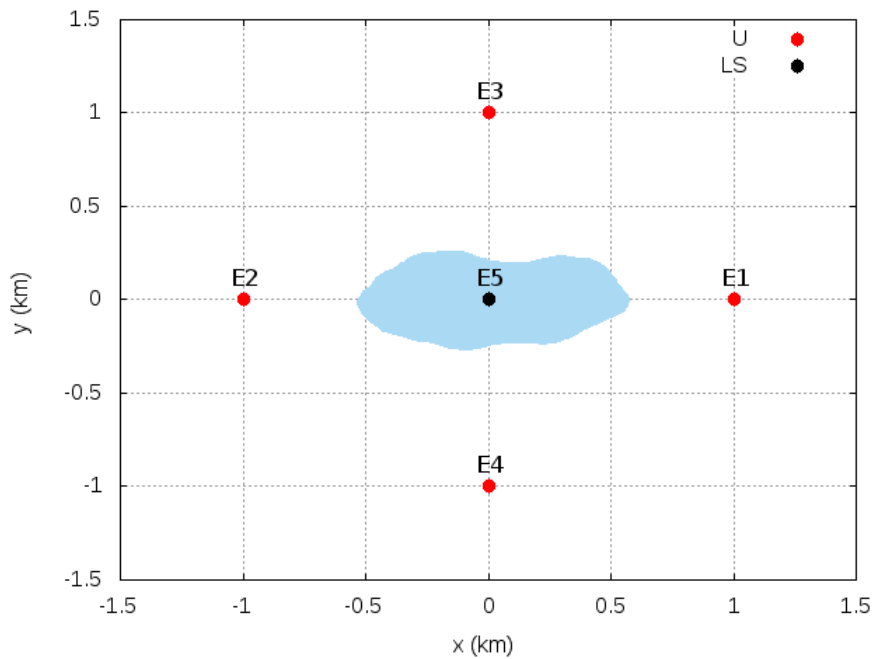


Figura 3.19: Mapa da estabilidade dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy , considerando período de rotação $14,904$ horas e densidade $2,0 \text{ g/cm}^3$. Onde U: ponto instável; LS: ponto linearmente estável.

Então, como não encontramos pontos estáveis ao redor do asteroide 2063 Bacchus, no próximo capítulo vamos alterar a densidade e o período de rotação e analisar o comportamento da localização e da estabilidade desses pontos de equilíbrio.

Capítulo 4

Variação de parâmetros para o asteroide 2063 Bachus

Jiang, Baoyin & Li (2015) consideraram a velocidade de rotação como um parâmetro que pudesse ser modificado a fim de calcular a alteração dos pontos de equilíbrio no campo gravitacional do asteroide 216 Kleopatra. Conseqüentemente, o número de pontos de equilíbrio pode variar, alguns irão colidir e aniquilar um ao outro. Fazendo uso de um teorema sobre autovalores provaram que o número de pontos de equilíbrio não-degenerados varia em pares e é um número ímpar. Também apresentaram alguns corolários sobre os possíveis tipos de bifurcações que podem ocorrer quando há fusão de dois pontos de equilíbrio, isso para um determinado valor específico do parâmetro que está sendo alterado.

Então, aplicamos essa ideia para o asteroide 2063 Bacchus a fim de observar o comportamento dos pontos de equilíbrio, bem como se há alguma alteração na estabilidade. A seguir apresentaremos os resultados considerando primeiramente a variação no período de rotação e logo mais a variação na densidade.

4.1 Variação do período de rotação

Sabemos que no ponto de equilíbrio deve haver um balanço das forças gravitacional e centrífuga, conforme equação (3.16). A força gravitacional é dada por:

$$\mathbf{F}_g = Gm \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (4.1)$$

e a força centrífuga por:

$$\mathbf{F}_c = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) , \quad (4.2)$$

onde G é a constante gravitacional, m é a massa do asteroide, \mathbf{r} é o vetor que representa a distância do centro de massa do asteroide ao ponto de equilíbrio e $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor velocidade de rotação do asteroide. As equações (4.1) e (4.2) expressam as forças por unidade de massa de uma partícula na vizinhança do ponto de equilíbrio. A figura 4.1 trás um esquema simples indicando a atuação dessas forças em um ponto de equilíbrio de 2063 Bacchus.

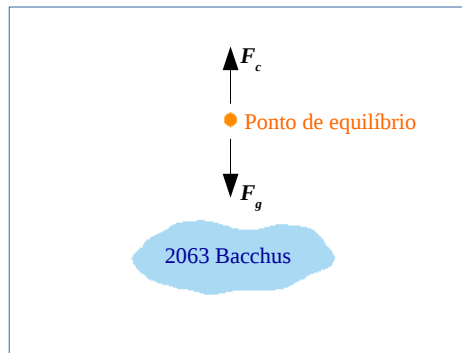


Figura 4.1: Esquema representando o balanço entre as forças gravitacional (\mathbf{F}_g) e centrífuga (\mathbf{F}_c) no ponto de equilíbrio.

Considerando que o período de rotação do asteroide 2063 Bacchus é $T = 14,904$ horas (Benner et al. 1999) nós variamos esse valor no intervalo de $1 h < T < 29 h$.

A figura 4.2 mostra a mudança na localização dos pontos de equilíbrio, a cor verde representa os pontos de equilíbrio cujo período de rotação vale $T = 14,904$ horas e a rosa os pontos para $T = 1,400$ horas. Conforme os valores do período de rotação decrescem observe que os pontos de equilíbrio estão se aproximando do objeto e, conseqüentemente está ocorrendo um aumento no valor da velocidade de rotação, uma vez que a velocidade de rotação varia com o inverso do período.

Quando variamos a distância do ponto de equilíbrio ao objeto a força gravitacional é a mais afetada, uma vez que depende em módulo de um fator r^2 , enquanto que a força centrífuga depende linearmente de r . Se, por exemplo, ao diminuirmos o período de rotação o ponto se aproxima mais do objeto, então é necessário que a força gravitacional aumente.

Portanto, quando aumentamos a velocidade de rotação estamos aumentando o valor da força centrífuga, e como no ponto de equilíbrio deve haver um balanço de forças faz-se necessário que também haja um acréscimo na força gravitacional, e para que isso ocorra a distância entre o ponto de equilíbrio e o objeto deve diminuir. É o que está ocorrendo na figura 4.2, conforme o valor da velocidade de rotação aumenta os pontos tendem a se aproximarem cada vez mais do asteroide até uma velocidade limite onde irá restar somente um ponto, o interno. Notemos também que no início tínhamos 5 pontos (verde) e no final apenas 1 ponto (rosa), ou seja, em um determinado intervalo nos valores do

período de rotação ocorreu a fusão de alguns pontos e em seguida eles deixam de existir. Veremos esse acontecimento mais detalhadamente, de forma que começamos a variar os períodos de rotação em intervalos cada vez menores a fim de capturar o momento da fusão dos pontos.

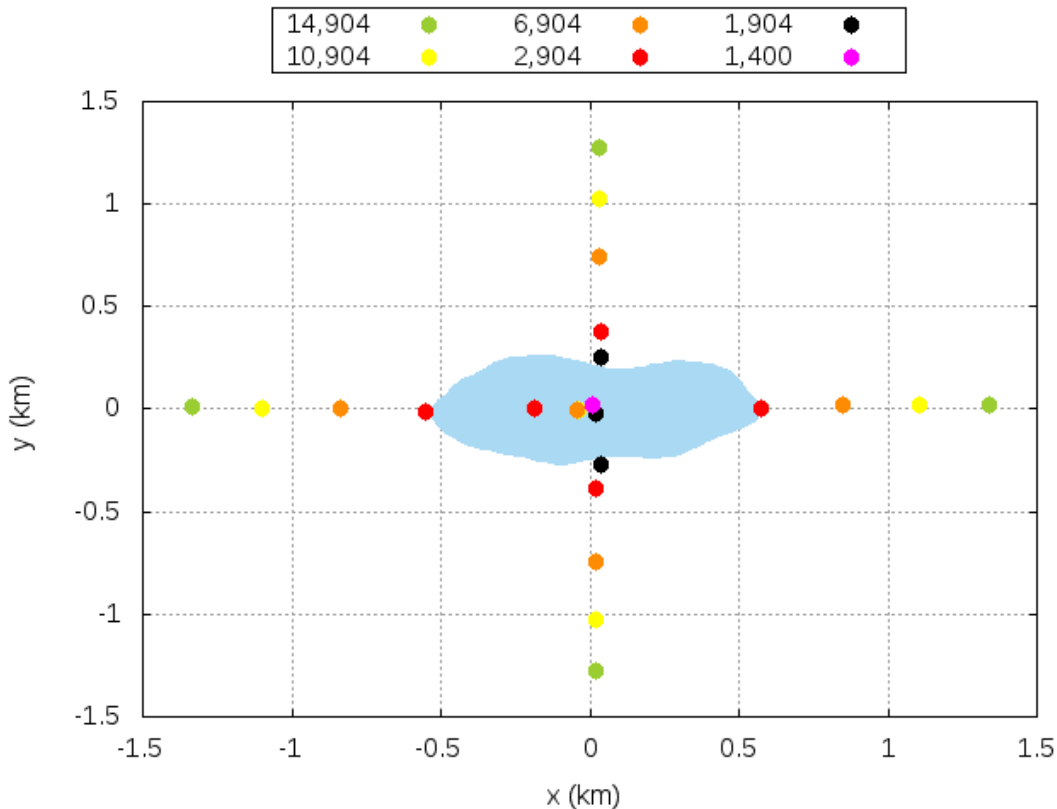


Figura 4.2: Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy . As cores simbolizam os pontos de equilíbrio para os seguintes períodos de rotação (horas), do verde para o rosa, 14,904; 10,904; 6,904; 2,904; 1,904 e 1,400.

A figura 4.3 traz uma sequência de gráficos que mostram a fusão entre dois pontos e logo em seguida eles desaparecem. Para termos ideia de quais pontos colidem trazemos uma escala de cores representando cada um dos pontos E_1 , E_2 , E_3 , E_4 e E_5 . Quando o parâmetro varia de $T = 2,904$ a $T = 1,904$ o número de pontos de equilíbrio varia de 5 para 3. Os pontos E_2 e E_5 colidem e se tornam um ponto de equilíbrio degenerado, o caso topológico de E_2/E_5 é o caso D1. Enquanto o parâmetro diminui de $T = 2,561$ para $T = 2,560$, o ponto de equilíbrio degenerado E_2/E_5 desaparece. Há então 3 pontos de equilíbrio, que são E_1 , E_3 e E_4 .

Ao variarmos o parâmetro de $T = 1,904$ a $T = 1,400$ o número de pontos varia de 3 para 1, conforme figura 4.4. Os pontos E_1 e E_4 colidem e se tornam um ponto de equilíbrio degenerado, o caso topológico de E_1/E_4 se torna D1. Quando o parâmetro diminui de $T = 1,621$ a $T = 1,620$, o ponto de equilíbrio degenerado E_1/E_4 desaparece. Resta apenas 1 ponto de equilíbrio, que é E_3 .

A partir de $T \leq 1,620$ permanece somente um ponto de equilíbrio (E_3). O ponto apenas vai se deslocando para a região central do objeto. Para valores menores que 1,400 horas não realizamos simulações, visto que temos que considerar que existe um valor limite para o parâmetro, já que os valores das velocidades de rotação se tornam cada vez maiores.

Scheeres (2007) apresentou um estudo sobre a velocidade de rotação limite que faz com que o objeto se desintegre e possibilite a formação de sistemas binários, por exemplo. Em seu estudo Scheeres (2007) considerou o asteroide como sendo do tipo *rubble pile* (tipo de asteroide formado por aglomeração de pedras de diferentes tamanhos fracamente ligadas por força gravitacional), ao invés de um objeto monolítico, que se quebraria com muito mais dificuldade. Além disso, o asteroide é assumido como um elipsóide com semieixos a , b e c . O estudo proposto envolve um modelo onde a quebra do corpo seria por aumento da taxa de rotação do asteroide, ou seja, asteroides do tipo *rubble pile* se quebram no caso em que a força centrífuga se torna maior que a força de contato entre os corpos. Esse fenômeno de quebra é chamado de ruptura rotacional.

Vimos que a velocidade de rotação de um asteroide pode sofrer um acréscimo devido ao efeito YORP, e como estamos estudando a variação do período de rotação e como isso afeta os pontos de equilíbrio, procuramos então o momento em que a velocidade de rotação atinja o seu limite de fissão de modo que uma quebra ocorra, criando assim um asteroide binário. Dessa forma, assumimos 2063 Bacchus como um elipsóide cujas dimensões aproximadas dos semieixos são 0,6, 0,3 e 0,28 km , e calculamos o seu período de rotação limite. Encontramos $T = 2,55$ horas, ou seja, abaixo desse valor 2063 Bacchus se romperia.

As simulações que realizamos com alteração do período de rotação foram até 1,400 horas, mas considerando o trabalho de Scheeres (2007) e suas restrições, para esse valor 2063 Bacchus já não seria um único objeto, e teria se rompido com três pontos de equilíbrio, já que a primeira fusão e desaparecimento de pontos ocorreu em $T = 2,561$ horas.

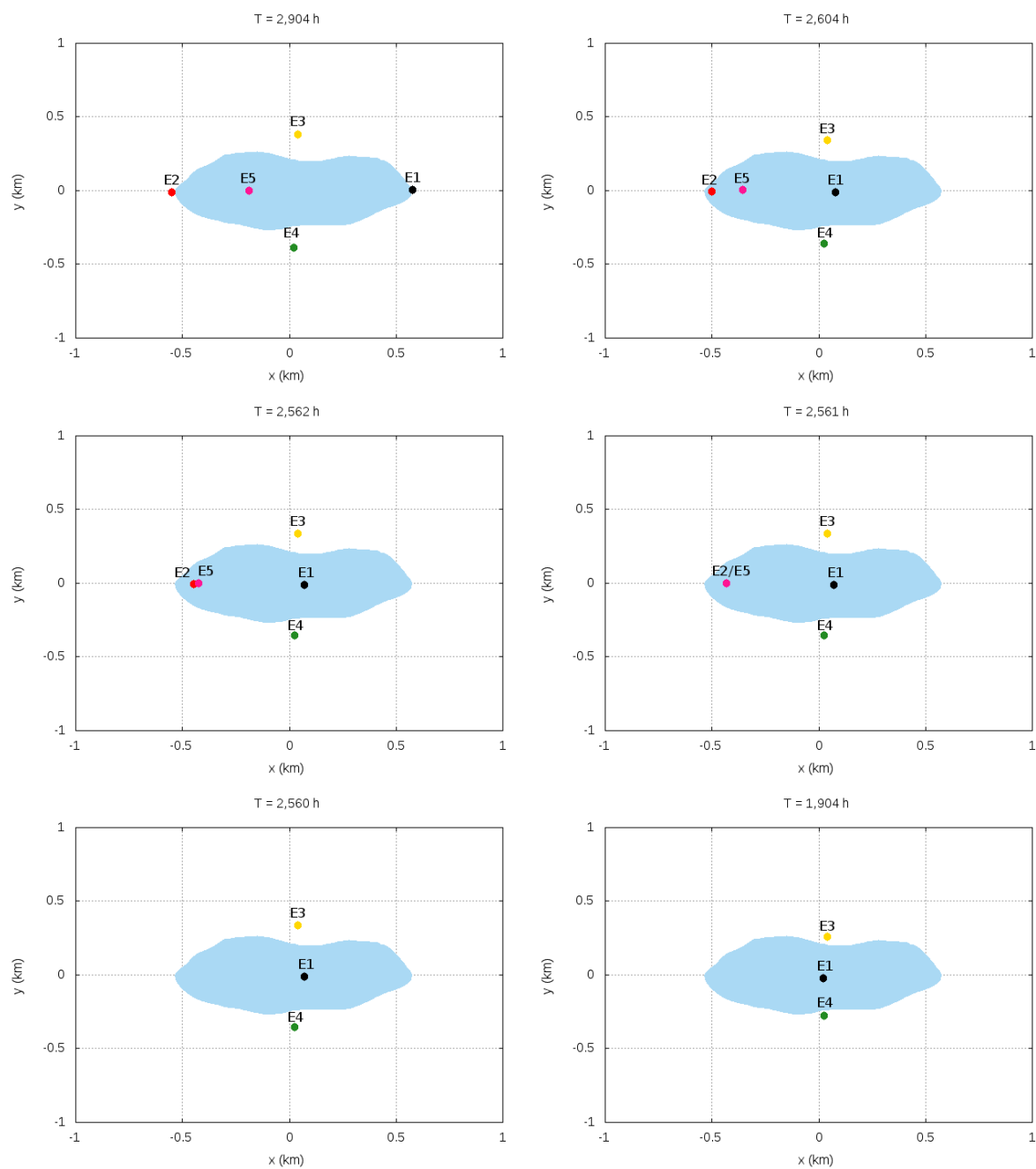


Figura 4.3: Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy para $1,904 h \leq T \leq 2,904 h$. As cores representam os pontos de equilíbrio.

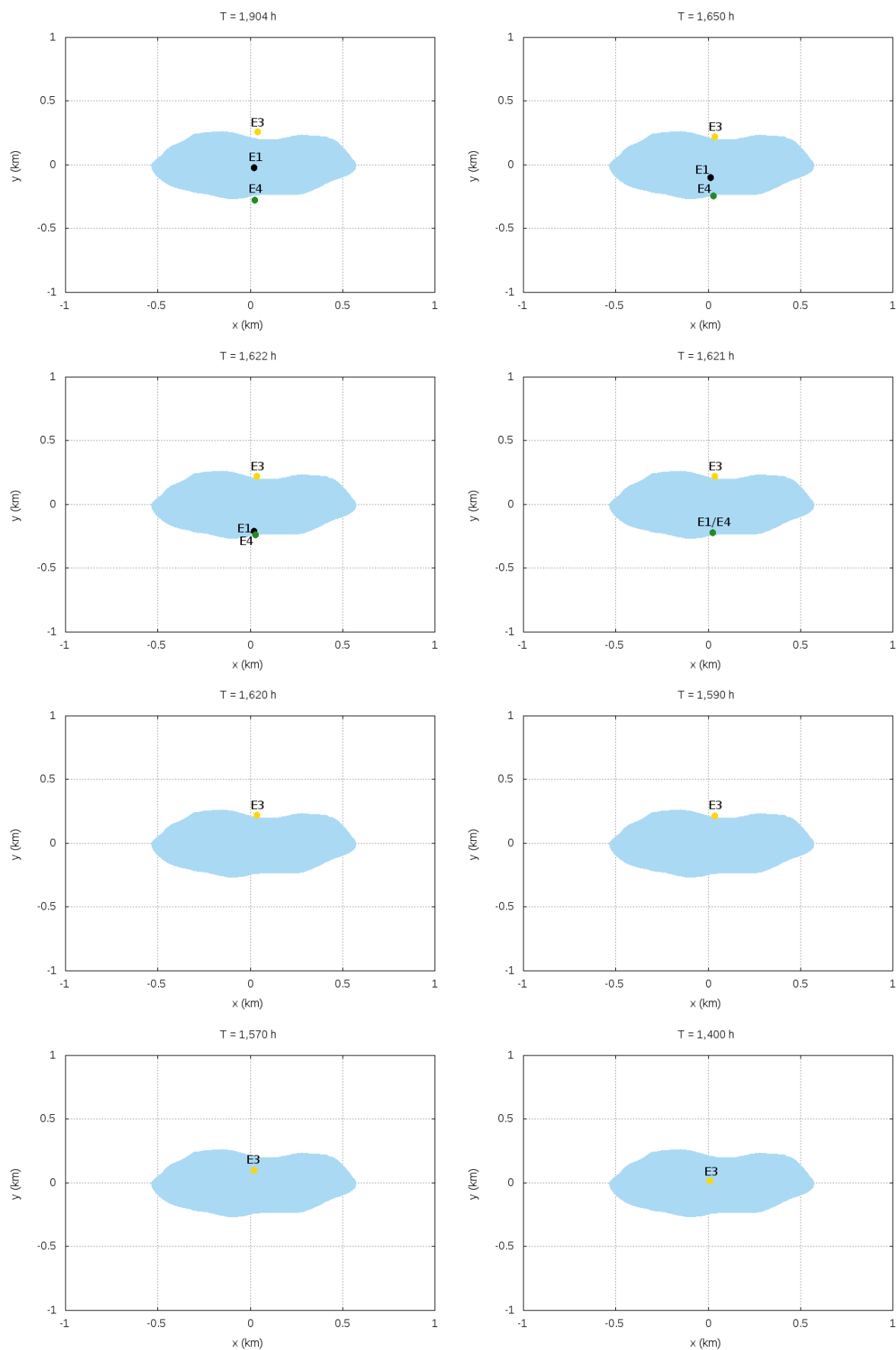


Figura 4.4: Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy para $1,400 h \leq T \leq 1,904 h$. As cores representam os pontos de equilíbrio.

A tabela 4.1 traz para alguns valores de período de rotação, inclusive aqueles em que ocorre a fusão e o desaparecimento de pontos, a localização dos pontos de equilíbrio.

Tabela 4.1: Posição dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando o período de rotação é alterado.

Período de rotação	Pontos de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
$T = 10,904$ horas	E_1	1,10534231	0,02296110	-0,00090666
	E_2	-1,09876075	0,00765049	-0,00152071
	E_3	0,03171621	1,02709490	0,00076855
	E_4	0,02018249	-1,02894184	0,00092330
	E_5	-0,03656568	-0,00393037	0,00222976
$T = 8,904$ horas	E_1	0,98056248	0,02341442	-0,00104826
	E_2	-0,97211717	0,00615031	-0,00190194
	E_3	0,03274463	0,89064269	0,00098843
	E_4	0,01978878	-0,89307362	0,00121158
	E_5	-0,03798577	-0,00391910	0,00226015
$T = 2,904$ horas	E_1	0,57603387	0,00656505	0,00813996
	E_2	-0,54897915	-0,00867680	-0,00079285
	E_3	0,03935754	0,37874160	0,00402945
	E_4	0,02183548	-0,38942905	0,00518985
	E_5	-0,18716563	0,00273324	0,00233692
$T = 2,804$ horas	E_1	0,41908083	0,01510745	-0,00224479
	E_2	-0,54281049	-0,00896395	-0,00027235
	E_3	0,03945736	0,36754462	0,00421292
	E_4	0,02215891	-0,37868558	0,00542422
	E_5	-0,22465978	0,00416498	0,00118442
$T = 2,604$ horas	E_1	0,07806250	-0,01088220	-0,00023717
	E_2	-0,50088565	-0,00777453	-0,00135726
	E_3	0,03959400	0,34461390	0,00462364
	E_4	0,02291037	-0,35674391	0,00595835
	E_5	-0,35653513	0,00336875	-0,00305294
$T = 2,561$ horas	E_1	0,07154612	-0,01099024	-0,00013116
	E_3	0,03960939	0,33958440	0,00472013
	E_4	0,02309137	-0,35194177	0,00608686
	E_2/E_5	-0,43263001	-0,00182628	-0,00345415
$T = 2,560$ horas	E_1	0,07140307	-0,01099286	-0,00012877
	E_3	0,03960968	0,33946700	0,00472241
	E_4	0,02309566	-0,35182971	0,00608991
$T = 1,650$ horas	E_1	0,01342554	-0,10018903	0,00209642
	E_3	0,03734998	0,22282230	0,00620234
	E_4	0,02719335	-0,24134141	0,01299869
$T = 1,621$ horas	E_3	0,03714314	0,21875235	0,00600680
	E_1/E_4	0,02385229	-0,21923879	0,01062306
$T = 1,620$ horas	E_3	0,03713586	0,21861177	0,00599898
$T = 1,590$ horas	E_3	0,03691406	0,21438971	0,00572788
$T = 1,570$ horas	E_3	0,01929662	0,09740372	0,00312157
$T = 1,400$ horas	E_3	0,01033159	0,01788251	0,00130661

Ao analisarmos os autovalores de todos os pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus que encontramos variando o período de rotação de $1,400 h \leq T \leq 14,904 h$, verificamos que todos os pontos são não-degenerados e não-ressoantes, exceto no momento em que ocorre a fusão de dois pontos e daí temos um ponto degenerado. A tabela 4.2 traz os autovalores dos pontos de equilíbrio para os casos de período de rotação apresentados na tabela 4.1. Na tabela 4.3 consta os casos topológicos e a estabilidade desses pontos.

As figuras 4.5 e 4.6 trazem uma sequência de gráficos que ilustram o mapa da estabilidade dos pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus, considerando $1,400 h \leq T \leq 14,904 h$. Observemos que no intervalo de $14,904 h \leq T \leq 2,904 h$ todos os pontos mantêm a estabilidade, os quatro externos são instáveis, enquanto que o ponto interno E_5 continua pertencendo ao caso topológico 1, logo, linearmente estável. Entre $2,804 < T < 2,904 h$, conforme E_5 vai se movimentando para perto de E_2 , temos uma mudança na estabilidade do ponto E_1 , que se torna linearmente estável juntamente com E_5 . Então, os pontos E_1 e E_5 permanecem linearmente estáveis até o momento da fusão dos pontos E_2 e E_5 . Quando os pontos E_2 e E_5 se fundem, em $T = 2,561 h$, temos ainda E_1 pertencendo ao caso topológico 1, enquanto que E_2/E_5 se transforma num ponto degenerado, pertencente ao caso D1. A partir daí, continuamos com E_1 linearmente estável, enquanto que E_3 e E_4 são instáveis, pertencentes ao caso topológico 2. E esse mapa da estabilidade permanece até o momento da próxima fusão, que é entre os pontos E_1 e E_4 . Nesse momento, em $T = 1,621 h$, o ponto E_3 é instável, enquanto que E_1/E_4 se transforma num ponto degenerado, pertencente ao caso D1. Então, entre $1,570 < T < 1,590 h$ temos uma mudança no quadro da estabilidade, onde E_3 se torna um ponto linearmente estável. E a partir daí E_3 é um ponto pertencente ao caso topológico 1 situado na região central do objeto. O que já era esperado, uma vez que o ponto de equilíbrio interno tende a ser linearmente estável (Wang, Jiang & Gong, 2014).

Tabela 4.2: Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando o período de rotação é alterado.

Densidade	Ponto	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	$\times 10^{-4} s^{-1}$
$T = 10,904$ horas	E_1	$3,032i$	$-3,032i$	1,391	-1,391	$1,729i$	$-1,729i$	
	E_2	$3,030i$	$-3,030i$	1,356	-1,356	$1,704i$	$-1,704i$	
	E_3	$2,978i$	$-2,978i$	1,091	-1,091	$1,602i$	$-1,602i$	
	E_4	$2,982i$	$-2,982i$	1,101	-1,101	$1,602i$	$-1,602i$	
	E_5	$5,703i$	$-5,703i$	11,448 <i>i</i>	-11,448 <i>i</i>	11,108 <i>i</i>	-11,108 <i>i</i>	
$T = 8,904$ horas	E_1	$3,720i$	$-3,720i$	1,784	-1,784	$2,170i$	$-2,170i$	
	E_2	$3,717i$	$-3,717i$	1,721	-1,721	$2,124i$	$-2,124i$	
	E_3	$3,633i$	$-3,633i$	1,298	-1,298	$1,962i$	$-1,962i$	
	E_4	$3,639i$	$-3,639i$	1,316	-1,316	$1,964i$	$-1,964i$	
	E_5	$5,573i$	$-5,573i$	11,732 <i>i</i>	-11,732 <i>i</i>	11,107 <i>i</i>	-11,107 <i>i</i>	
$T = 2,904$ horas	E_1	$13,457i$	$-13,457i$	11,356	-11,356	$9,609i$	$-9,609i$	
	E_2	$12,548i$	$-12,548i$	10,090	-10,090	$9,424i$	$-9,424i$	
	E_3	$10,680i$	$-10,680i$	2,447	-2,447	$6,032i$	$-6,032i$	
	E_4	$10,761i$	$-10,761i$	2,925	-2,925	$6,102i$	$-6,102i$	
	E_5	$4,437i$	$-4,437i$	16,948 <i>i</i>	-16,948 <i>i</i>	10,690 <i>i</i>	-10,690 <i>i</i>	
$T = 2,804$ horas	E_1	$17,254i$	$-17,254i$	4,272 <i>i</i>	-4,272 <i>i</i>	$10,758i$	$-10,758i$	
	E_2	$13,375i$	$-13,375i$	11,307	-11,307	$10,194i$	$-10,194i$	
	E_3	$11,042i$	$-11,042i$	2,445	-2,445	$6,246i$	$-6,246i$	
	E_4	$11,125i$	$-11,125i$	2,971	-2,971	$6,326i$	$-6,326i$	
	E_5	$4,434i$	$-4,434i$	17,316 <i>i</i>	-17,316 <i>i</i>	10,592 <i>i</i>	-10,592 <i>i</i>	
$T = 2,604$ horas	E_1	$17,843i$	$-17,843i$	3,270 <i>i</i>	-3,270 <i>i</i>	$11,285i$	$-11,285i$	
	E_2	$17,860i$	$-17,860i$	11,831	11,376	$11,831i$	$-11,376i$	
	E_3	$11,848i$	$-11,848i$	2,420	-2,420	$6,720i$	$-6,720i$	
	E_4	$11,932i$	$-11,932i$	3,055	-3,055	$6,829i$	$-6,829i$	
	E_5	$4,391i$	$-4,391i$	18,151 <i>i</i>	-18,151 <i>i</i>	10,376 <i>i</i>	-10,376 <i>i</i>	
$T = 2,561$ horas	E_1	$18,018i$	$-18,018i$	3,248 <i>i</i>	-3,248 <i>i</i>	$11,283i$	$-11,283i$	
	E_3	$12,038i$	$-12,038i$	2,409	-2,409	$6,831i$	$-6,831i$	
	E_4	$12,121i$	$-12,121i$	3,071	-3,071	$6,948i$	$-6,948i$	
	E_2/E_5	0,000	0,000	18,238 <i>i</i>	-18,238 <i>i</i>	10,643 <i>i</i>	-10,643 <i>i</i>	
$T = 2,560$ horas	E_1	$18,023i$	$-18,023i$	3,247 <i>i</i>	-3,247 <i>i</i>	$11,283i$	$-11,283i$	
	E_3	$12,042i$	$-12,042i$	2,409	-2,409	$6,833i$	$-6,833i$	
	E_4	$12,125i$	$-12,125i$	3,071	-3,071	$6,951i$	$-6,951i$	
$T = 1,650$ horas	E_1	$24,343i$	$-24,343i$	2,567 <i>i</i>	-2,567 <i>i</i>	$11,186i$	$-11,186i$	
	E_3	$18,481i$	$-18,481i$	0,993	0,993	$10,343i$	$-10,343i$	
	E_4	$18,269i$	$-18,269i$	2,718	-2,718	$11,007i$	$-11,007i$	
$T = 1,621$ horas	E_3	$18,814i$	$-18,814i$	0,872	-0,872	$10,510i$	$-10,510i$	
	E_1/E_4	0,000	0,000	24,565 <i>i</i>	-24,565 <i>i</i>	11,531 <i>i</i>	-11,531 <i>i</i>	
$T = 1,620$ horas	E_3	$18,826i$	$-18,826i$	0,868	-0,868	$10,516i$	$-10,516i$	
$T = 1,590$ horas	E_3	$19,183i$	$-19,183i$	0,761	-0,761	$10,701i$	$-10,701i$	
$T = 1,570$ horas	E_3	$25,426i$	$-25,426i$	2,215 <i>i</i>	-2,215 <i>i</i>	$11,226i$	$-11,226i$	
$T = 1,400$ horas	E_3	$27,706i$	$-27,706i$	2,202 <i>i</i>	-2,202 <i>i</i>	$11,221i$	$-11,221i$	

Tabela 4.3: Classificação topológica e estabilidade dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando o período de rotação é alterado. LS: linearmente estável; U: instável; D: degenerado.

Período de rotação	Pontos de equilíbrio	Caso topológico	Estabilidade
$T = 10,904$ horas	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$T = 8,904$ horas	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$T = 2,904$ horas	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$T = 2,804$ horas	E_1	1	LS
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$T = 2,604$ horas	E_1	1	LS
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$T = 2,561$ horas	E_1	1	LS
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_2/E_5	D1	D
$T = 2,560$ horas	E_1	1	LS
	E_3	2	U
	E_4	2	U
$T = 1,650$ horas	E_1	1	LS
	E_3	2	U
	E_4	2	U
$T = 1,621$ horas	E_3	2	U
	E_1/E_4	D1	D
$T = 1,620$ horas	E_3	2	U
$T = 1,590$ horas	E_3	2	U
$T = 1,570$ horas	E_3	1	LS
$T = 1,400$ horas	E_3	1	LS

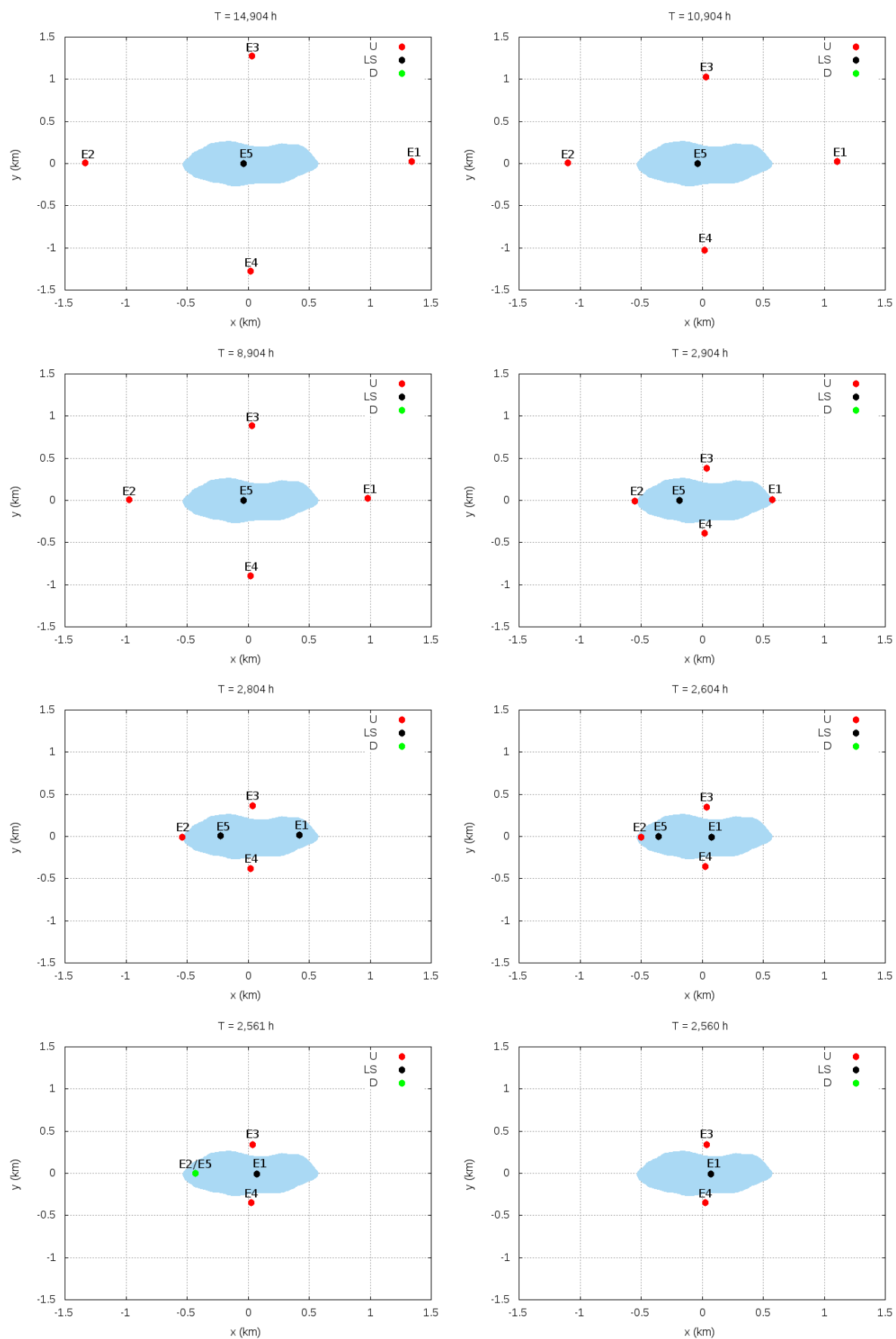


Figura 4.5: Mapa da estabilidade dos pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus quando o período de rotação (T) é alterado. U: ponto instável; LS: ponto linearmente estável; D: ponto degenerado.

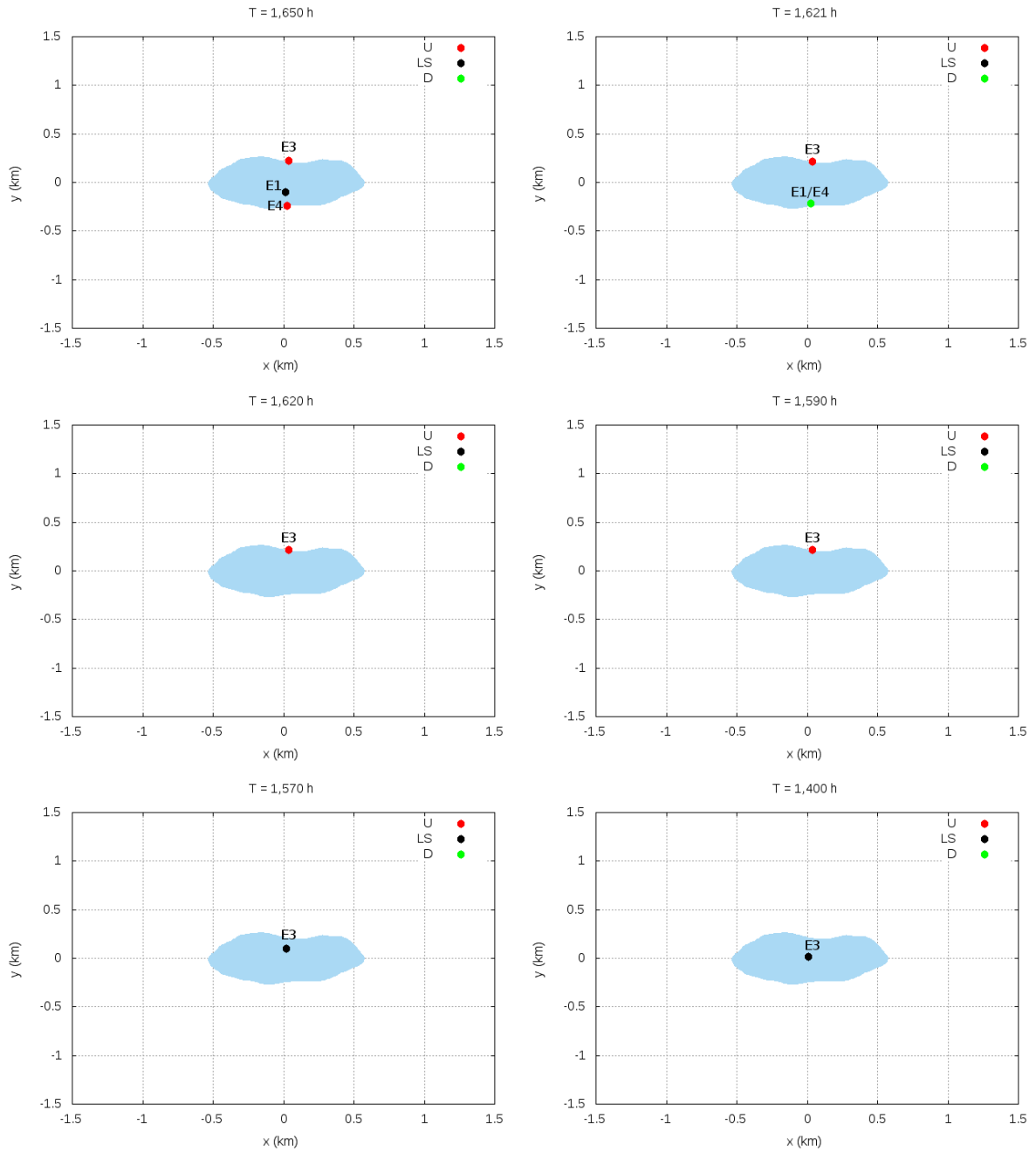


Figura 4.6: Mapa da estabilidade dos pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus quando o período de rotação (T) é alterado. U: ponto instável; LS: ponto linearmente estável; D: ponto degenerado.

Também realizamos testes para períodos de rotação acima de $T = 14,904$ horas. A figura 4.7 ilustra a mudança na localização dos pontos de equilíbrio, a cor preta simboliza os pontos de equilíbrio cujo período de rotação vale $T = 14,904$ horas e a rosa os pontos para $T = 28,904$ horas. Pela escala de cores notemos que conforme os valores do período de rotação aumentam os pontos de equilíbrio vão se afastando do objeto, e conseqüentemente ocorre um decréscimo no valor da velocidade de rotação. Logo, ao diminuirmos a velocidade de rotação estamos diminuindo a intensidade da força centrífuga, e como no ponto de equilíbrio deve haver um equilíbrio de forças faz-se necessário que também haja

um decréscimo na força gravitacional, e para que isso ocorra a distância entre o ponto de equilíbrio e o objeto deve aumentar. No entanto, não simulamos para valores mais altos e imaginamos que conforme o valor do parâmetro aumente gradativamente os pontos se distanciem cada vez mais de 2063 Bacchus.

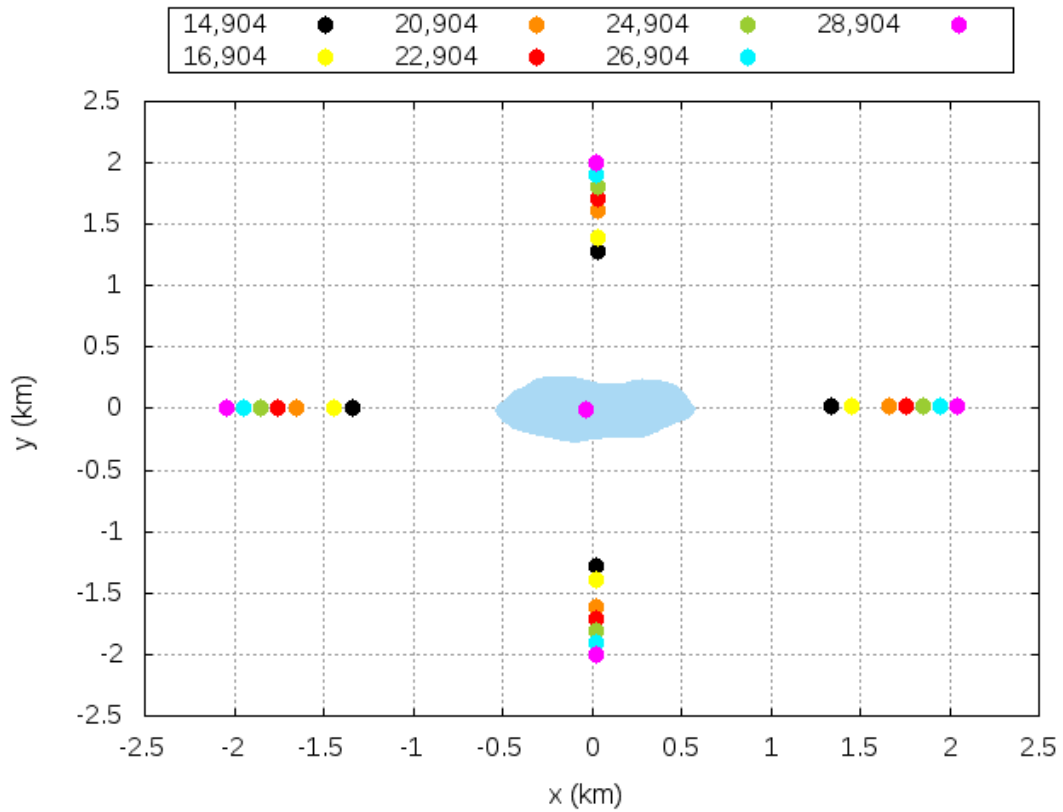


Figura 4.7: Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy . As cores simbolizam os pontos de equilíbrio para os seguintes períodos de rotação (horas), do preto para o rosa, 14,904; 16,904; 20,904; 22,904; 24,904; 26,904 e 28,904.

A tabela 4.5 traz para alguns valores de período de rotação a localização dos pontos de equilíbrio.

Tabela 4.5: Posição dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando o período de rotação é alterado.

Período de rotação	Pontos de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
$T = 16,904$ horas	E_1	1,44845060	0,02174465	-0,00060040
	E_2	-1,44466662	0,01014414	-0,00088866
	E_3	0,02991158	1,39051106	0,00044329
	E_4	0,02109777	-1,39153193	0,00051121
	E_5	-0,03502872	-0,00393830	0,00219661
$T = 18,904$ horas	E_1	1,55459242	0,02143737	-0,00053365
	E_2	-1,55131426	0,01065075	-0,00076932
	E_3	0,02953356	1,50092094	0,00038470
	E_4	0,02132332	-1,50179892	0,00043949
	E_5	-0,03481920	-0,00393901	0,00219206
$T = 22,904$ horas	E_1	1,75733505	0,02093442	-0,00043245
	E_2	-1,75477676	0,01142291	-0,00059816
	E_3	0,02895172	1,71026245	0,00030122
	E_4	0,02169266	-1,71094047	0,00043901
	E_5	-0,03455612	-0,00393978	0,00218636
$T = 28,904$ horas	E_1	2,04215650	0,02037545	-0,00033158
	E_2	-2,04026663	0,01221762	-0,00043874
	E_3	0,02834690	2,00199370	0,00022348
	E_4	0,02210491	-2,00248967	0,00024747
	E_5	-0,03434963	-0,00394028	0,00218187

Quando analisamos os autovalores de todos os pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus que encontramos variando o período de rotação no intervalo de $14,904 h \leq T \leq 28,904 h$, verificamos que todos os pontos são não-degenerados e não-ressoantes. Além disso, os quatro pontos externos continuam pertencendo ao caso topológico 2, portanto, instáveis. O ponto interno E_5 permanece estável, logo, caso topológico 1. A tabela 4.6 traz os autovalores para quatro casos de variação do parâmetro com a finalidade de confirmar, através da tabela 4.7, os casos topológicos e a estabilidade dos pontos de equilíbrio quando o período de rotação é alterado.

Tabela 4.6: Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando o período de rotação é alterado.

Período de rotação	Ponto	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	$\times 10^{-4} s^{-1}$
$T = 16,904$ horas	E_1	$1,951i$	$-1,951i$	0,840	-0,840	$1,077i$	$-1,077i$	
	E_2	$1,951i$	$-1,951i$	0,830	-0,830	$1,070i$	$-1,070i$	
	E_3	$1,932i$	$-1,932i$	0,734	-0,734	$1,033i$	$-1,033i$	
	E_4	$1,933i$	$-1,933i$	0,737	-0,737	$1,033i$	$-1,033i$	
	E_5	$5,876i$	$-5,876i$	$11,153i$	$-11,153i$	$11,048i$	$-11,048i$	
$T = 18,904$ horas	E_1	$1,744i$	$-1,744i$	0,742	-0,742	$0,957i$	$-0,957i$	
	E_2	$1,744i$	$-1,744i$	0,735	-0,735	$0,952i$	$-0,952i$	
	E_3	$1,730i$	$-1,730i$	0,661	-0,661	$0,923i$	$-0,923i$	
	E_4	$1,731i$	$-1,731i$	0,663	-0,663	$0,924i$	$-0,924i$	
	E_5	$5,903i$	$-5,903i$	$11,141i$	$-11,141i$	$11,007i$	$-11,007i$	
$T = 22,904$ horas	E_1	$1,439i$	$-1,439i$	0,603	-0,603	$0,783i$	$-0,783i$	
	E_2	$1,439i$	$-1,439i$	0,599	-0,599	$0,781i$	$-0,781i$	
	E_3	$1,430i$	$-1,430i$	0,551	-0,551	$0,762i$	$-0,762i$	
	E_4	$1,431i$	$-1,431i$	0,553	-0,553	$0,762i$	$-0,762i$	
	E_5	$5,939i$	$-5,939i$	$11,135i$	$-11,135i$	$10,946i$	$-10,946i$	
$T = 28,904$ horas	E_1	$1,140i$	$-1,140i$	0,471	-0,471	$0,616i$	$-0,616i$	
	E_2	$1,140i$	$-1,140i$	0,469	-0,469	$0,615i$	$-0,615i$	
	E_3	$1,135i$	$-1,135i$	0,441	-0,441	$0,603i$	$-0,603i$	
	E_4	$1,135i$	$-1,135i$	0,442	-0,442	$0,604i$	$-0,604i$	
	E_5	$5,967i$	$-5,967i$	$11,132i$	$-11,132i$	$10,893i$	$-10,893i$	

Tabela 4.7: Classificação topológica e estabilidade dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando o período de rotação é alterado. LS: linearmente estável; U: instável.

Período de rotação	Pontos de equilíbrio	Caso topológico	Estabilidade
$T = 16,904$ horas	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$T = 18,904$ horas	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$T = 22,904$ horas	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$T = 28,904$ horas	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS

Podemos concluir então que o decréscimo na variação do parâmetro período de rotação resultou na fusão e no desaparecimento de alguns pontos, bem como na mudança da estabilidade linear. Enquanto que para o acréscimo do parâmetro os pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus apenas mudam sua localização, se afastando do objeto.

No momento da fusão e desaparecimento de pontos ocorre uma bifurcação. No tópico seguinte vamos apresentar os tipos de bifurcação e associar uma delas com a fusão dos pontos E_2 e E_5 , em $T = 2,561 h$, e E_1 e E_4 , em $T = 1,621 h$.

4.1.1 Bifurcações

Em relação aos pontos de equilíbrio degenerados no campo gravitacional de um asteroide segue-se uma das quatro opções (Jiang, Baoyin & Li, 2015):

- desaparecer (sumir);
- alterar para k ($k \in \mathbb{Z}; k > 0$) pontos de equilíbrio degenerados;
- alterar para $2l$ ($l \in \mathbb{Z}; l > 0$) pontos de equilíbrio não-degenerados;
- alterar para k ($k \in \mathbb{Z}; k > 0$) pontos de equilíbrio degenerados e $2l$ ($l \in \mathbb{Z}; l > 0$) pontos de equilíbrio não-degenerados.

As possíveis bifurcações que podem ocorrer quando alteramos um determinado parâmetro são:

Bifurcação transcítica: Quando variamos o parâmetro o número de pontos de equilíbrio não-degenerados pode variar de $2k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$) para $2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$). Dois pontos de equilíbrio não-degenerados pertencentes ao caso 1 e caso 2 se fundem e mudam para um ponto de equilíbrio degenerado, que pertence ao caso D1, e então muda para dois equilíbrios não-degenerados pertencentes ao caso 2 e caso 1,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caso 1} \\ \text{Caso 2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Caso D1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Caso 1} \\ \text{Caso 2} \end{array} \right.$$

Bifurcação semi-transcítica: Quando variamos o parâmetro o número de pontos de equilíbrio não-degenerados pode variar de $2k+3$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$) para $2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$). Dois pontos de equilíbrio não-degenerados pertencentes ao caso 1 e caso 5 se fundem e mudam para um ponto de equilíbrio degenerado, que pertence ao caso D5, e então muda para dois equilíbrios não-degenerados pertencentes ao caso 5 e caso 2,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caso 2} \\ \text{Caso 5} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Caso D5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Caso 2} \\ \text{Caso 5} \end{array} \right.$$

Bifurcação sela-nó: Quando variamos o parâmetro o número de pontos de equilíbrio não-degenerados pode variar de $2k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$) para $2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$). Dois pontos de equilíbrio não-degenerados pertencentes ao caso 1 e caso 2 se fundem e mudam para um ponto de equilíbrio degenerado, que pertence ao caso D1, e então desaparece,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caso 1} \\ \text{Caso 2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Caso D1} \Rightarrow \text{Desaparece}.$$

Além disso, o número de pontos de equilíbrio não-degenerados também pode variar de $2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$) para $2k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$). Então, um ponto de equilíbrio degenerado aparece e logo em seguida separa-se em dois pontos de equilíbrio não-degenerados pertencentes ao caso 1 e caso 2,

$$\text{Desaparece} \Rightarrow \text{Caso D1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Caso 1} \\ \text{Caso 2} \end{array} \right.$$

Bifurcação sela-sela: Quando variamos o parâmetro o número de pontos de equilíbrio não-degenerados pode variar de $2k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$) para $2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$). Dois pontos de equilíbrio não-degenerados pertencentes ao caso 2 e caso 5 se fundem e mudam para um ponto de equilíbrio degenerado, que pertence ao caso D5, e então desaparece,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caso 2} \\ \text{Caso 5} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Caso D5} \Rightarrow \text{Desaparece}.$$

Além disso, o número de pontos de equilíbrio não-degenerados também pode variar de $2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$) para $2k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$). Então, um ponto de equilíbrio degenerado aparece e logo em seguida separa-se em dois pontos de equilíbrio não-degenerados pertencentes ao caso 1 e caso 5,

$$\text{Desaparece} \Rightarrow \text{Caso D5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Caso 2} \\ \text{Caso 5} \end{array} \right.$$

Bifurcação sela-nó binária: Quando variamos o parâmetro o número de pontos de equilíbrio não-degenerados pode variar de $2k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$) para $2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$). Para esse caso temos duas opções

a) Seja quatro pontos de equilíbrio não-degenerados, dois deles pertencentes ao caso 1 e os outros dois pertencentes ao caso 2. Um ponto de equilíbrio não-degenerado que pertence ao caso 1 e outro que pertence ao caso 2 se fundem e mudam para um ponto de equilíbrio degenerado, que pertence ao caso D1, e logo após mudam para um ponto de equilíbrio não-degenerado pertencente ao caso 1. Enquanto isso, os outros dois pontos não-degenerados, um do caso 1 e outro do caso 2, se fundem e mudam para um ponto de equilíbrio degenerado, que pertence ao caso D1, e logo após mudam para um ponto de equilíbrio não-degenerado pertencente ao caso 2,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caso 1} \\ \text{Caso 2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Caso D1} \Rightarrow \text{Caso 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caso 1} \\ \text{Caso 2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Caso D1} \Rightarrow \text{Caso 2.}$$

b) Seja quatro pontos de equilíbrio não-degenerados, dois deles pertencentes ao caso 2 e os outros dois pertencentes ao caso 5. Um ponto de equilíbrio não-degenerado que pertence ao caso 2 e outro que pertence ao caso 5 se fundem e mudam para um ponto de equilíbrio degenerado, que pertence ao caso D5, e logo após mudam para um ponto de equilíbrio não-degenerado pertencente ao caso 2. Enquanto isso, os outros dois pontos não-degenerados, um do caso 2 e outro do caso 5, se fundem e mudam para um ponto de equilíbrio degenerado, que pertence ao caso D5, e logo após mudam para um ponto de equilíbrio não-degenerado pertencente ao caso 5,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caso 2} \\ \text{Caso 5} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Caso D5} \Rightarrow \text{Caso 2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caso 2} \\ \text{Caso 5} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Caso D5} \Rightarrow \text{Caso 5.}$$

Bifurcação supercrítica forçada: Quando variamos o parâmetro o número de pontos de equilíbrio não-degenerados pode variar de $2k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$) para $2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$). Três pontos de equilíbrio não-degenerados, sendo dois deles pertencentes ao caso 1 e o outro pertencente ao caso 2, se fundem no ponto de bifurcação e mudam para um ponto de equilíbrio não-degenerado, que pertence ao caso 1. Além disso, o número de pontos de equilíbrio não-degenerados também pode variar de $2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$) para $2k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$). Então, um ponto de equilíbrio não-degenerado pertencente ao caso 1 torna-se três pontos de equilíbrio não-degenerados, sendo dois pertencentes ao caso 1 e o outro pertencente ao caso 2,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caso 1} \\ \text{Caso 2} \\ \text{Caso 1} \end{array} \right\} \leftrightarrow \text{Caso 1}$$

Bifurcação subcrítica forçada: Quando variamos o parâmetro o número de pontos de equilíbrio não-degenerados pode variar de $2k+3$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$) para $2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$). Para esse caso temos duas opções

a) Seja três pontos de equilíbrio não-degenerados, dois deles pertencentes ao caso 2 e o outro pertencente ao caso 1, que se fundem no ponto de bifurcação e mudam para um ponto de equilíbrio não-degenerado, que pertence ao caso 2,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caso 2} \\ \text{Caso 1} \\ \text{Caso 2} \end{array} \right\} \leftrightarrow \text{Caso 2.}$$

b) Seja três pontos de equilíbrio não-degenerados, cada um pertencente ao caso 1, caso 2 e caso 5, que se fundem no ponto de bifurcação e mudam para um ponto de equilíbrio não-degenerado, que pertence ao caso 5,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Caso 1} \\ \text{Caso 2} \\ \text{Caso 5} \end{array} \right\} \leftrightarrow \text{Caso 5.}$$

Além disso, o número de pontos de equilíbrio não-degenerados também pode variar de $2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$) para $2k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0$). Então, um ponto de equilíbrio não-degenerado pertencente ao caso 2 torna-se três pontos de equilíbrio não-degenerados, sendo dois pertencentes ao caso 2 e o outro pertencente ao caso 1. Ou um ponto de equilíbrio não-degenerado pertencente ao caso 5 torna-se três pontos de equilíbrio não-degenerados, sendo cada um pertencente ao caso 1, caso 2 e caso 5.

Ao considerarmos o período de rotação T como o parâmetro a ser alterado, o número de pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus modificou. As figuras 4.3 e 4.4 mostram que $T = 2,561$ e $T = 1,621$ são pontos de bifurcação. Logo, dois pontos de equilíbrio se fundem no ponto de bifurcação e logo em seguida desaparecem em $T = 2,560$ e $T = 1,620$.

Inicialmente quando o parâmetro é $T = 14,904$ temos cinco pontos de equilíbrio. Ao variarmos o parâmetro de $T = 14,904$ a $T = 2,561$, a localização dos pontos de equilíbrio mudam e os pontos E_2 e E_5 se fundem e tornam-se um ponto de equilíbrio degenerado. Então, o caso topológico de E_2/E_5 é D1. Enquanto o parâmetro decresce de $T = 2,561$ a $T = 2,560$, o ponto de equilíbrio degenerado E_2/E_5 desaparece. Há então três pontos de equilíbrio, que são E_1 , E_3 e E_4 . A bifurcação nessa situação é uma bifurcação sela-nó. Novamente quando o parâmetro varia de $T = 2,560$ a $T = 1,621$, as posições dos pontos são alteradas e os pontos de equilíbrio E_1 e E_4 se fundem e tornam-se um ponto de equilíbrio degenerado. Então, o caso topológico de E_1/E_4 é D1. Enquanto o parâmetro decresce de $T = 1,621$ a $T = 1,620$, o ponto de equilíbrio degenerado E_1/E_4 desaparece. Há então um ponto de equilíbrio, que é E_3 . A bifurcação nessa situação é uma bifurcação sela-nó. A partir de $T = 1,620$ a $T = 1,400$ podemos observar, pela figura 4.4, que o ponto E_3 apenas se movimentou de forma que sua localização é interna e numa região central do corpo.

4.2 Variação da densidade

Conforme mencionado no capítulo 1 adotamos o valor de $d = 3,3 \text{ g/cm}^3$ para a densidade do asteroide 2063 Bacchus. Nós também consideramos a densidade como um parâmetro que pudesse ser alterado. Dessa forma, analisamos a localização e estabilidade dos pontos de equilíbrio no intervalo de $2,0 \text{ g/cm}^3 \leq d \leq 3,3 \text{ g/cm}^3$. Na figura 4.8 podemos observar a mudança na localização dos pontos de equilíbrio, o preto representa os pontos de equilíbrio cuja densidade vale $d = 3,3 \text{ g/cm}^3$ e o rosa os pontos para $d = 2,0 \text{ g/cm}^3$. Observemos que conforme a densidade aumenta os pontos se afastam do objeto. Ou seja, a densidade influi diretamente na massa do corpo, visto que ao aumentarmos o valor da densidade estaremos aumentando a sua massa. Logo, há um aumento da força gravitacional, e para que tenhamos um equilíbrio de forças no ponto, temos que aumentar a distância entre o ponto de equilíbrio e o objeto, de forma a diminuir a intensidade da força gravitacional.

Portanto, se alterarmos a densidade no intervalo de $2,0 \text{ g/cm}^3 \leq d \leq 3,3 \text{ g/cm}^3$ ainda assim teremos 5 pontos de equilíbrio no campo gravitacional de 2063 Bacchus. Concluimos que não há possibilidade de haver colisão entre quaisquer pontos de equilíbrio, considerando o intervalo dado para variação do parâmetro. No entanto, mais adiante iremos considerar outro intervalo da variação do parâmetro, e observar se irá ocorrer fusão e desaparecimento de pontos, de modo análogo ao que ocorreu quando diminuimos os períodos de rotação.

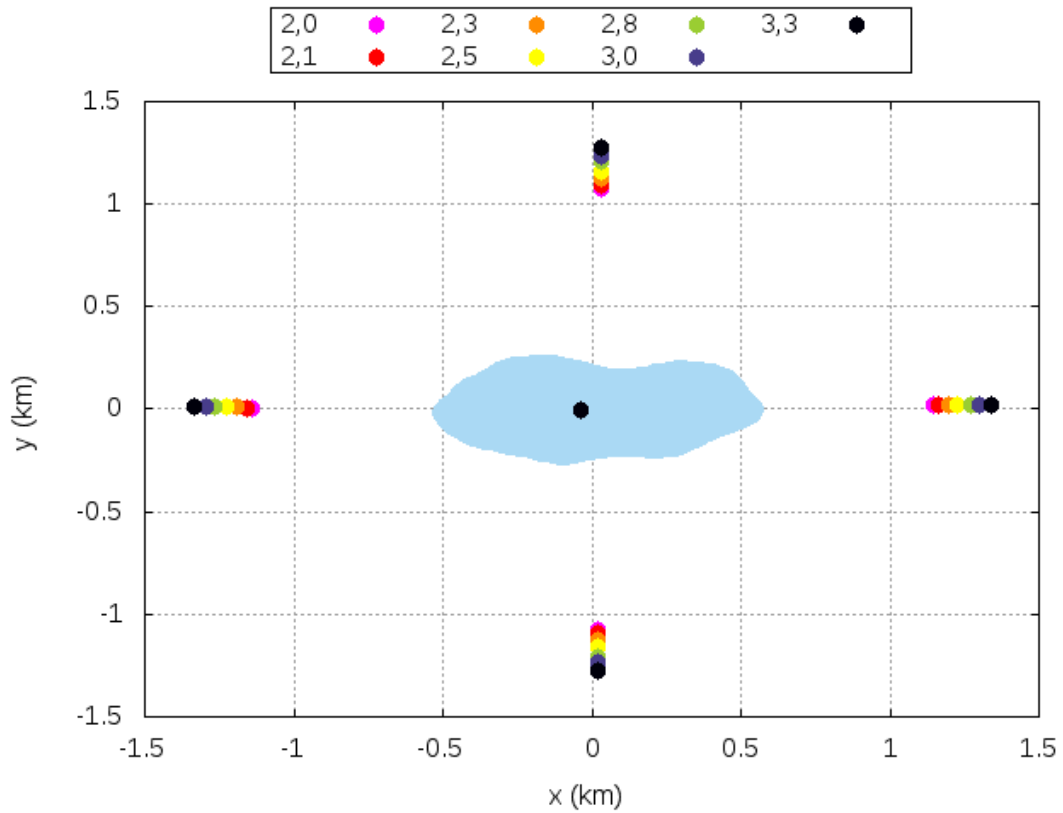


Figura 4.8: Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy . As cores simbolizam os pontos de equilíbrio para as seguintes densidades (g/cm^3), do rosa para o preto, 2, 0; 2, 1; 2, 3; 2, 5; 2, 8; 3, 0 e 3, 3.

Ainda na figura 4.8 observamos que a localização do ponto interno não é alterada. Notemos também que a movimentação dos pontos obedece um padrão que torna possível prever as suas localizações para uma determinada densidade que não esteja no intervalo considerado.

A tabela 4.9 traz para alguns valores de densidade a localização dos pontos de equilíbrio.

Tabela 4.9: Posição dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando a densidade é alterada.

Densidade	Pontos de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
$d = 2,0 \text{ g/cm}^3$	E_1	1,14755124	0,02279787	-0,00086081
	E_2	-1,14145966	0,00806093	-0,00141447
	E_3	0,03142661	1,07256751	0,00071128
	E_4	0,02031077	-1,07426540	0,00084930
	E_5	-0,03624806	-0,00393239	0,00222294
$d = 2,2 \text{ g/cm}^3$	E_1	1,18127422	0,02266841	-0,00082573
	E_2	-1,17553520	0,00836169	-0,00133668
	E_3	0,03121236	1,10870146	0,00067018
	E_4	0,02041038	-1,11029325	0,00079653
	E_5	-0,03603278	-0,00393364	0,00221830
$d = 2,4 \text{ g/cm}^3$	E_1	1,21310715	0,02254798	-0,00079398
	E_2	-1,20767318	0,00862605	-0,00126853
	E_3	0,03102269	1,14266732	0,00063468
	E_4	0,02050184	-1,14416807	0,00075118
	E_5	-0,03585521	-0,00393461	0,00221447
$d = 2,8 \text{ g/cm}^3$	E_1	1,27203899	0,02233139	-0,00073884
	E_2	-1,26710826	0,00907171	-0,00115454
	E_3	0,03070022	1,20522421	0,00057621
	E_4	0,02066432	-1,20657638	0,00067704
	E_5	-0,03557951	-0,00393599	0,00220852
$d = 3,2 \text{ g/cm}^3$	E_1	1,32581020	0,02214235	-0,00069258
	E_2	-1,32127937	0,00943569	-0,00106269
	E_3	0,03043447	1,26198340	0,00052983
	E_4	0,02080471	-1,26321888	0,00061871
	E_5	-0,03537536	-0,00393692	0,00220411

Quando analisamos os autovalores de todos os pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus que encontramos variando a densidade no intervalo de $2,0 \text{ g/cm}^3 \leq d \leq 3,3 \text{ g/cm}^3$, com passo 0,1, verificamos que todos os pontos são não-degenerados e não-ressoantes. Além disso, os quatro pontos externos continuam pertencendo ao caso topológico 2, portanto, instáveis. O ponto interno E_5 permanece estável, logo, caso topológico 1. A tabela 4.10 traz os autovalores apenas para quatro casos de densidade e a tabela 4.11 os casos topológicos e a estabilidade dos pontos de equilíbrio quando o parâmetro densidade é alterado.

Tabela 4.10: Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando a densidade é alterada.

Densidade	Ponto	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	$\times 10^{-4} s^{-1}$
$d = 2,2 g/cm^3$	E_1	2,216i	-2,216i	0,997	-0,997	1,251i	-1,251i	
	E_2	2,215i	-2,215i	0,977	-0,977	1,236i	-1,236i	
	E_3	2,183i	-2,183i	0,809	-0,809	1,172i	-1,172i	
	E_4	2,185i	-2,185i	0,815	-0,815	1,172i	-1,172i	
	E_5	4,702i	-4,702i	9,254i	-9,254i	9,068i	-9,068i	
$d = 2,4 g/cm^3$	E_1	2,216i	-2,216i	0,990	-0,990	1,247i	-1,247i	
	E_2	2,215i	-2,215i	0,971	-0,971	1,233i	-1,233i	
	E_3	2,184i	-2,184i	0,812	-0,812	1,172i	-1,172i	
	E_4	2,186i	-2,186i	0,818	-0,818	1,172i	-1,172i	
	E_5	4,928i	-4,928i	9,633i	-9,633i	9,469i	-9,469i	
$d = 2,8 g/cm^3$	E_1	2,215i	-2,215i	0,978	-0,978	1,239i	-1,239i	
	E_2	2,214i	-2,214i	0,962	-0,962	1,227i	-1,227i	
	E_3	2,186i	-2,186i	0,819	-0,819	1,171i	-1,171i	
	E_4	2,188i	-2,188i	0,823	-0,823	1,172i	-1,172i	
	E_5	5,351i	-5,351i	10,351i	-10,351i	10,223i	-10,223i	
$d = 3,2 g/cm^3$	E_1	2,214i	-2,214i	0,969	-0,969	1,233i	-1,233i	
	E_2	2,214i	-2,214i	0,955	-0,955	1,222i	-1,222i	
	E_3	2,188i	-2,188i	0,823	-0,823	1,171i	-1,171i	
	E_4	2,190i	-2,190i	0,827	-0,827	1,172i	-1,172i	
	E_5	5,745i	-5,745i	11,027i	-11,027i	10,919i	-10,919i	

Tabela 4.11: Classificação topológica e estabilidade dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando a densidade é alterada. LS: linearmente estável; U: instável.

Densidade	Pontos de equilíbrio	Caso topológico	Estabilidade
$d = 2,2 g/cm^3$	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$d = 2,4 g/cm^3$	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$d = 2,8 g/cm^3$	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$d = 3,2 g/cm^3$	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS

Nós também consideramos outro intervalo da variação da densidade: $0,5 \text{ g/cm}^3 \leq d \leq 2,0 \text{ g/cm}^3$). Assim, procuramos os pontos de equilíbrio no campo gravitacional de 2063 Bacchus conforme a densidade decresce. A figura 4.9 mostra a mudança na localização dos pontos de equilíbrio, o rosa representa os pontos cuja densidade vale $d = 2,0 \text{ g/cm}^3$ e o preto os pontos para $d = 0,5 \text{ g/cm}^3$. Observemos que ao diminuirmos o parâmetro os pontos de equilíbrio se aproximam mais do objeto, como esperado.

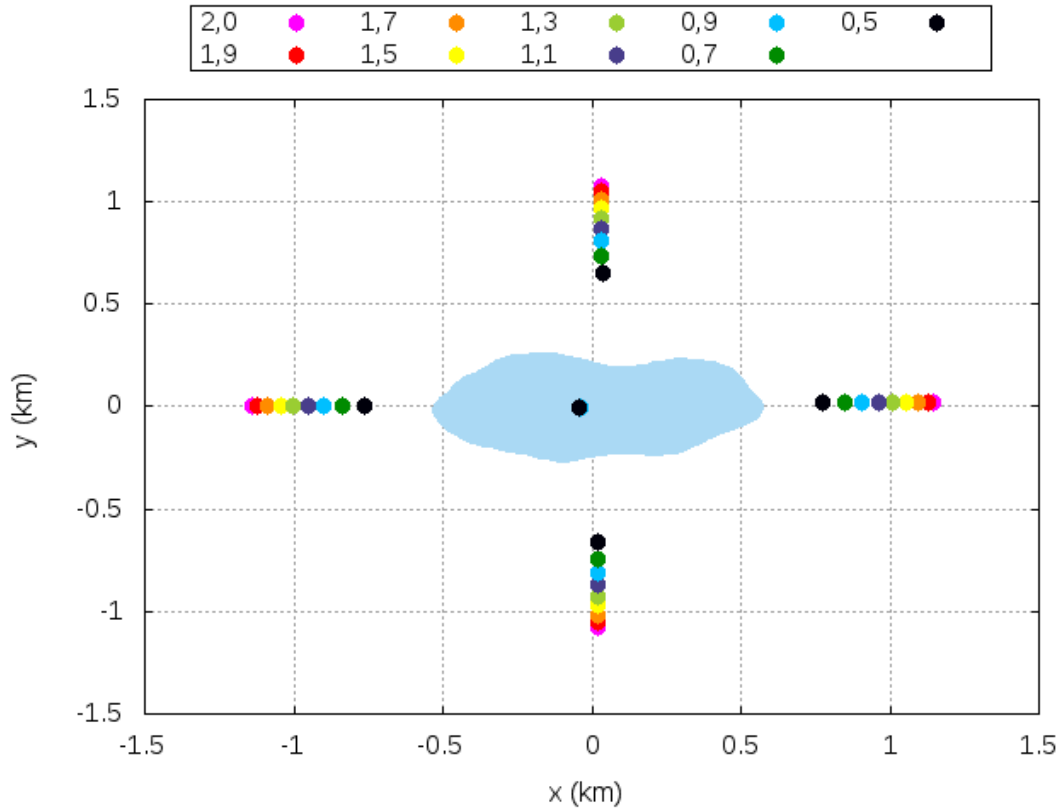


Figura 4.9: Pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus no plano xy . As cores simbolizam os pontos de equilíbrio para as seguintes densidades (g/cm^3), do rosa para o preto, 2,0; 1,9; 1,7; 1,5; 1,3; 1,1, 0,9; 0,7 e 0,5.

A tabela 4.13 traz para alguns valores de densidade a localização dos pontos de equilíbrio. A análise dos autovalores de todos os pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus que encontramos variando a densidade no intervalo de $0,5 \text{ g/cm}^3 \leq d \leq 2,0 \text{ g/cm}^3$, mostrou que todos são não-degenerados e não-ressoantes. E também, os quatro pontos externos continuam pertencendo ao caso topológico 2, portanto, instáveis. O ponto interno E_5 permanece estável, logo, caso topológico 1. As tabelas 4.14 e 4.15 trazem os autovalores e os casos topológicos e a estabilidade dos pontos de equilíbrio, respectivamente, para alguns valores de densidade.

Concluimos que quando o parâmetro densidade é alterado não temos mudança na estabilidade dos pontos de equilíbrio. E mesmo quando consideramos o intervalo de $0,5 \text{ g/cm}^3 \leq d \leq 2,0 \text{ g/cm}^3$ não ocorre fusão ou desaparecimento de pontos.

Tabela 4.13: Posição dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando a densidade é alterada.

Densidade	Pontos de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
$d = 1,7 \text{ g/cm}^3$	E_1	1,09271880	0,02300979	-0,000920737
	E_2	-1,08597895	0,00751958	-0,001554550
	E_3	0,03180789	1,01343681	0,000787092
	E_4	0,02014343	-1,01533230	0,000947370
	E_5	-0,03667300	-0,00392965	0,002232073
$d = 1,3 \text{ g/cm}^3$	E_1	1,00920539	0,02331950	-0,00101604
	E_2	-1,00125398	0,00654010	-0,00180476
	E_3	0,03248226	0,92228021	0,00092979
	E_4	0,01987974	-0,92455375	0,00113414
	E_5	-0,03757479	-0,00392274	0,00225138
$d = 0,9 \text{ g/cm}^3$	E_1	0,90785034	0,02359178	-0,00111972
	E_2	-0,89791466	0,00499811	-0,00217613
	E_3	0,03349826	0,80923160	0,00116742
	E_4	0,01956619	-0,81214911	0,00144982
	E_5	-0,03939708	-0,00390441	0,00229011
$d = 0,5 \text{ g/cm}^3$	E_1	0,77405118	0,02318846	-0,00106131
	E_2	-0,76003646	0,00193423	-0,00275102
	E_3	0,03532010	0,65335819	0,00167948
	E_4	0,01930251	-0,65770119	0,00213863
	E_5	-0,04500443	-0,00381610	0,00240650

Tabela 4.14: Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando a densidade é alterada.

Densidade	Ponto	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	$\times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
$d = 1,7 \text{ g/cm}^3$	E_1	2,218 <i>i</i>	-2,218 <i>i</i>	1,021	-1,021	1,267 <i>i</i>	-1,267 <i>i</i>	
	E_2	2,217 <i>i</i>	-2,217 <i>i</i>	0,995	-0,995	1,248 <i>i</i>	-1,248 <i>i</i>	
	E_3	2,178 <i>i</i>	-2,178 <i>i</i>	0,796	-0,796	1,172 <i>i</i>	-1,172 <i>i</i>	
	E_4	2,181 <i>i</i>	-2,181 <i>i</i>	0,804	-0,804	1,172 <i>i</i>	-1,172 <i>i</i>	
	E_5	4,086 <i>i</i>	-4,086 <i>i</i>	8,233 <i>i</i>	-8,233 <i>i</i>	7,973 <i>i</i>	-7,973 <i>i</i>	
$d = 1,3 \text{ g/cm}^3$	E_1	2,221 <i>i</i>	-2,221 <i>i</i>	1,052	-1,052	1,288 <i>i</i>	-1,288 <i>i</i>	
	E_2	2,219 <i>i</i>	-2,219 <i>i</i>	1,018	-1,018	1,263 <i>i</i>	-1,263 <i>i</i>	
	E_3	2,172 <i>i</i>	-2,172 <i>i</i>	0,781	-0,781	1,172 <i>i</i>	-1,172 <i>i</i>	
	E_4	2,176 <i>i</i>	-2,176 <i>i</i>	0,791	-0,791	1,173 <i>i</i>	-1,173 <i>i</i>	
	E_5	3,520 <i>i</i>	-3,520 <i>i</i>	7,314 <i>i</i>	-7,314 <i>i</i>	6,972 <i>i</i>	-6,972 <i>i</i>	
$d = 0,9 \text{ g/cm}^3$	E_1	2,227 <i>i</i>	-2,227 <i>i</i>	1,106	-1,106	1,323 <i>i</i>	-1,323 <i>i</i>	
	E_2	2,223 <i>i</i>	-2,223 <i>i</i>	1,058	-1,058	1,288 <i>i</i>	-1,288 <i>i</i>	
	E_3	2,163 <i>i</i>	-2,163 <i>i</i>	0,756	-0,756	1,173 <i>i</i>	-1,173 <i>i</i>	
	E_4	2,168 <i>i</i>	-2,168 <i>i</i>	0,770	-0,770	1,174 <i>i</i>	-1,174 <i>i</i>	
	E_5	2,854 <i>i</i>	-2,854 <i>i</i>	6,259 <i>i</i>	-6,259 <i>i</i>	5,800 <i>i</i>	-5,800 <i>i</i>	
$d = 0,5 \text{ g/cm}^3$	E_1	2,244 <i>i</i>	-2,244 <i>i</i>	1,234	-1,234	1,404 <i>i</i>	-1,404 <i>i</i>	
	E_2	2,235 <i>i</i>	-2,235 <i>i</i>	1,149	-1,149	1,344 <i>i</i>	-1,344 <i>i</i>	
	E_3	2,145 <i>i</i>	-2,145 <i>i</i>	0,702	-0,702	1,174 <i>i</i>	-1,174 <i>i</i>	
	E_4	2,152 <i>i</i>	-2,152 <i>i</i>	0,728	-0,728	1,176 <i>i</i>	-1,176 <i>i</i>	
	E_5	2,009 <i>i</i>	-2,009 <i>i</i>	4,973 <i>i</i>	-4,973 <i>i</i>	4,317 <i>i</i>	-4,317 <i>i</i>	

Tabela 4.15: Classificação topológica e estabilidade dos pontos de equilíbrio do asteroide 2063 Bacchus quando a densidade é alterada. LS: linearmente estável; U: instável.

Densidade	Pontos de equilíbrio	Caso topológico	Estabilidade
$d = 1,7 \text{ g/cm}^3$	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$d = 1,3 \text{ g/cm}^3$	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$d = 0,9 \text{ g/cm}^3$	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS
$d = 0,5 \text{ g/cm}^3$	E_1	2	U
	E_2	2	U
	E_3	2	U
	E_4	2	U
	E_5	1	LS

Capítulo 5

Pontos de equilíbrio de diversos objetos

Como no próximo capítulo introduziremos o efeito da força de pressão de radiação e discutiremos a possibilidade de haver partículas habitando numa região ao redor de um ponto estável, e como para 2063 Bacchus não encontramos nenhum ponto externo estável, mesmo ao alterarmos algum parâmetro, logo, investigamos a localização e a estabilidade dos pontos de equilíbrio de outros objetos.

Wang, Jiang & Gong (2014) ao analisarem a estabilidade dos pontos de equilíbrio de 23 objetos encontraram pontos externos estáveis em 9 desses objetos. Então, no presente capítulo vamos expor os resultados encontrados para 9P/Tempel 1, 6489 Golevka e 2867 Steins, onde a análise da estabilidade de Wang, Jiang & Gong (2014) mostrou haver dois pontos externos estáveis em cada um deles.

A seguir, apresentaremos a localização e estabilidade dos pontos de equilíbrio de 4769 Castalia, mesmo não possuindo pontos externos estáveis (Wang, Jiang & Gong, 2014), uma vez que iremos comparar os resultados com um outro trabalho, o de Jiang et al. (2014), que também estudaram os pontos de equilíbrio desse objeto. Além disso, também vamos apresentar os resultados para 101955 Bennu, que também não possui pontos externos estáveis, de acordo com Wang, Jiang & Gong (2014). Visto que se trata de um objeto pequeno, com algumas centenas de metros de diâmetro, e com formato quase que esférico, mas com uma peculiaridade: possui nove pontos de equilíbrio. Logo, seria interessante se conseguíssemos encontrar esses nove pontos de equilíbrio.

Portanto, iremos comparar os nossos resultados com os de Wang, Jiang & Gong (2014) e analisar a estabilidade a fim de encontrarmos pontos externos estáveis. Traremos em cada seção um objeto e seus pontos de equilíbrio, bem como os autovalores e a análise da estabilidade. Para facilitar a compreensão ilustramos a posição dos pontos de equilíbrio no plano xy , de forma que possamos ter uma ideia da região onde os pontos estão localizados no campo gravitacional de cada corpo.

A legenda em todas as figuras que serão apresentadas representa os pontos de equilíbrio encontrados em (a) Wang, Jiang & Gong (2014), (b) resultados do presente trabalho e (c) Jiang et al. (2014) (comparação somente para 4769 Castalia).

5.0.1 Cometa 9P/Tempel 1

Para o cometa 9P/Tempel 1 nós adotamos um conjunto de dados (Farnham & Thomas, 2013) disponibilizados pela NASA Planetary Data System (2013) com 16022 vértices e 32040 faces. Consideramos o valor da densidade de $0,62 \text{ g/cm}^3$ e período de rotação 40,7 horas (Wang, Jiang & Gong, 2014).

A figura 5.1 ilustra a localização dos pontos de equilíbrio desse objeto considerando os nossos resultados e os resultados de Wang, Jiang & Gong (2014). A tabela 5.1 contém os resultados dos valores das coordenadas de cada ponto de equilíbrio no campo gravitacional de 9P/Tempel 1, enquanto que a tabela 5.2 traz os resultados de Wang, Jiang & Gong (2014). Já a tabela 5.3 trás o erro absoluto nas coordenadas de cada ponto, onde Δx representa o módulo da diferença na coordenada x entre a tabela 5.1 e a tabela 5.2, Δy a diferença na coordenada y e Δz a diferença na coordenada z , para cada ponto de equilíbrio.

Pela comparação da localização dos pontos de equilíbrio 9P/Tempel 1 nas tabelas 5.1 e 5.2 concluí-se que os nossos resultados estão bons. Uma vez que o erro absoluto nas coordenadas de cada ponto é a partir da terceira casa decimal, conforme podemos observar na tabela 5.3. E na figura 5.1 podemos notar que as coordenadas dos pontos de equilíbrio de 9P/Tempel 1 comparando os resultados em (a) e (b) estão bem próximas, gerando uma sobreposição dos pontos, pelo fato de termos erros absolutos inferiores a 0,12%.

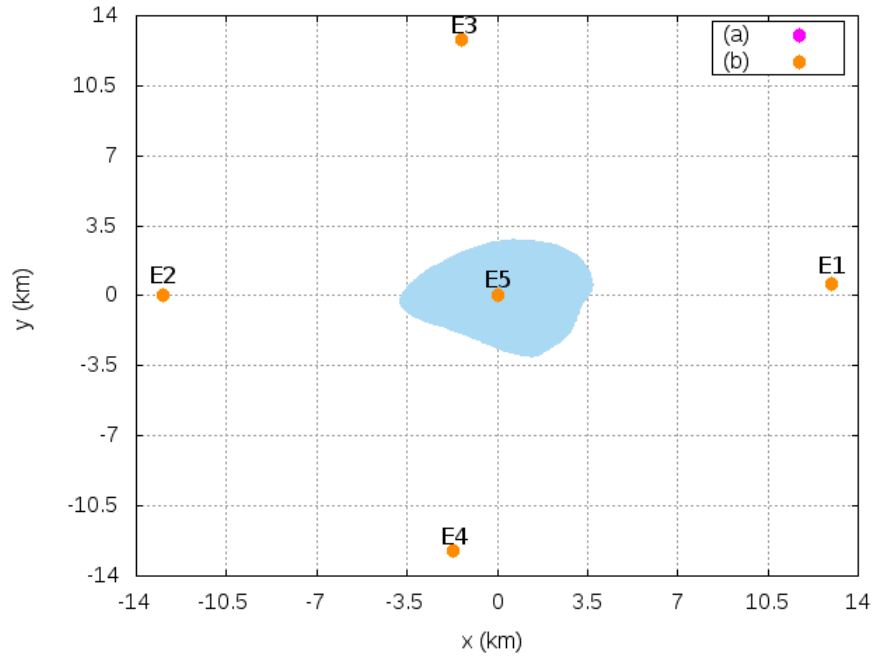


Figura 5.1: Pontos de equilíbrio do cometa 9P/Tempel 1 no plano xy . Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.

Tabela 5.1: Localização dos pontos de equilíbrio do cometa 9P/Tempel 1.

Ponto de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
E_1	12,95812311	0,60960041	-0,00574718
E_2	-12,98508131	0,03320132	-0,00416608
E_3	-1,37938998	12,78798261	-0,00398547
E_4	-1,71307189	-12,74549691	-0,00774558
E_5	0,00806381	0,00549874	0,02165010

Tabela 5.2: Localização dos pontos de equilíbrio do cometa 9P/Tempel 1 conforme Wang, Jiang & Gong (2014).

Ponto de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
E_1	12,9584	0,609590	-0,00574687
E_2	-12,9853	0,0332369	-0,00416586
E_3	-1,37819	12,7883	-0,00398703
E_4	-1,71181	-12,7459	-0,00774402
E_5	0,0080638	0,0054987	0,0216501

Tabela 5.3: Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 9P/Tempel 1 considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.1 e 5.2.

Ponto de equilíbrio	Δx (km)	Δy (km)	Δz (km)
E_1	0,00027689	0,00001041	0,00000031
E_2	0,00021869	0,00003558	0,00000022
E_3	0,00119998	0,00031739	0,00000156
E_4	0,00126189	0,00040309	0,00000156
E_5	0,00000001	0,00000004	0,00000000

Já a tabela 5.4 contém os autovalores que encontramos para cada ponto de equilíbrio. Pela análise dos autovalores podemos concluir que todos os pontos são não-degenerados e não-ressonantes. Os pontos E_1 , E_2 , E_3 e E_4 pertencem ao caso topológico 2, logo, são instáveis; o ponto E_5 pertence ao caso 1, logo, é linearmente estável. No entanto, Wang, Jiang & Gong (2014) encontraram que os pontos E_3 e E_4 são linearmente estáveis, logo, pertencentes ao caso topológico 1, cuja forma dos autovalores são três pares de imaginários puros. Para os demais pontos a estabilidade mostrou-se compatível com a análise que realizamos.

Tabela 5.4: Autovalores dos pontos de equilíbrio do cometa 9P/Tempel 1.

s^{-1}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
E_1	0,291 <i>i</i>	-0,291 <i>i</i>	0,117	-0,117	0,156 <i>i</i>	-0,156 <i>i</i>
E_2	0,290 <i>i</i>	-0,290 <i>i</i>	0,114	-0,114	0,155 <i>i</i>	-0,155 <i>i</i>
E_3	0,292 <i>i</i>	-0,292 <i>i</i>	-0,118	0,118	0,156 <i>i</i>	-0,156 <i>i</i>
E_4	0,290 <i>i</i>	-0,290 <i>i</i>	0,114	-0,114	0,154 <i>i</i>	-0,154 <i>i</i>
E_5	1,247 <i>i</i>	-1,247 <i>i</i>	1,631 <i>i</i>	-1,631 <i>i</i>	1,617 <i>i</i>	-1,617 <i>i</i>

5.0.2 Asteroide 6489 Golevka

Adotamos para o asteroide 6489 Golevka um conjunto de dados (Neese, 2004) disponibilizados pela NASA Planetary Data System (2004) com 2048 vértices e 4092 faces. A densidade desse objeto é $2,7 \text{ g/cm}^3$ e o período de rotação 6,026 horas (Hudson et al., 2000; Wang, Jiang & Gong, 2014).

A figura 5.2 ilustra a localização dos pontos de equilíbrio desse asteroide considerando os nossos resultados e os resultados de Wang, Jiang & Gong (2014). Podemos perceber que há uma diferença na localização dos pontos. Simulamos outras diversas vezes delimitando ainda mais a região onde o ponto de equilíbrio se encontra e mesmo utilizando os dados de entrada iguais (número de vértices e faces, densidade e período de rotação) aos de Wang, Jiang & Gong (2014) os pontos continuaram distintos.

A tabela 5.5 contém os resultados da localização dos pontos de equilíbrio no campo gravitacional de 6489 Golevka, enquanto que a tabela 5.6 traz os resultados de Wang, Jiang & Gong (2014). Da comparação entre essas duas tabelas notamos nitidamente que os valores das coordenadas dos pontos de equilíbrio deram bem diferentes um do outro, embora estejam localizados em regiões próximas.

Ao analisarmos a tabela 5.7, que trás os erros absolutos nas coordenadas de cada ponto, a diferença entre os nossos resultados e os de Wang, Jiang & Gong (2014) fica ainda mais evidente. Visto que o erro absoluto nas coordenadas de cada ponto é a partir da segunda casa decimal, determinando erros de até 5,8%.

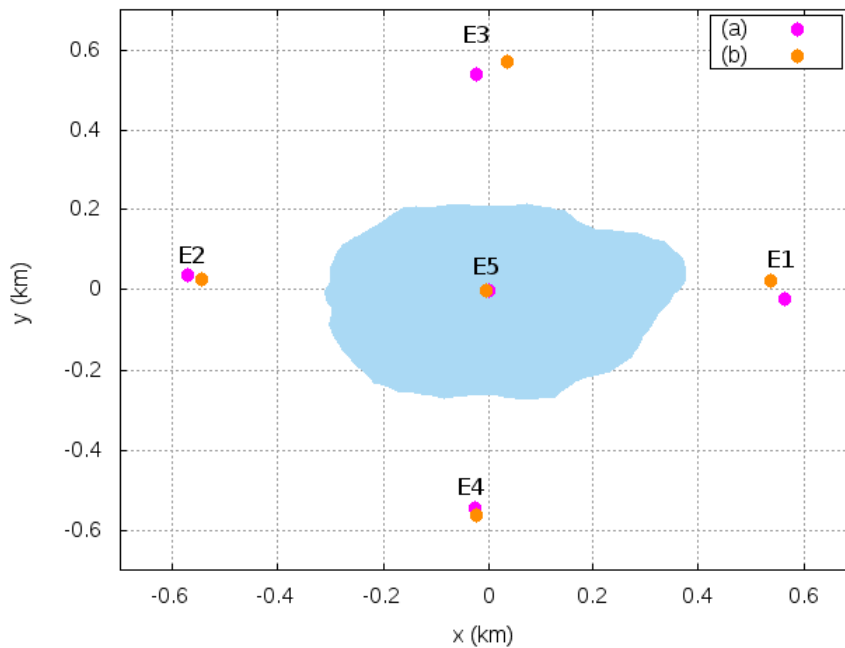


Figura 5.2: Pontos de equilíbrio do asteroide 6489 Golevka no plano xy . Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.

Tabela 5.5: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 6489 Golevka.

Ponto de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
E_1	0,53749389	0,02164916	-0,00126953
E_2	-0,54662780	0,02588500	-0,00036315
E_3	0,03616943	0,57150878	-0,00621337
E_4	-0,02235717	-0,56414489	-0,00300598
E_5	-0,00328521	-0,00231170	0,00207519

Tabela 5.6: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 6489 Golevka conforme Wang, Jiang & Gong (2014).

Ponto de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
E_1	0,564128	-0,023416	-0,002882
E_2	-0,571527	0,035808	-0,006081
E_3	-0,021647	0,537470	-0,001060
E_4	-0,026365	-0,546646	-0,000182
E_5	0,002330	-0,003329	0,002198

Tabela 5.7: Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 6489 Golevka considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.5 e 5.6.

Ponto de equilíbrio	Δx (km)	Δy (km)	Δz (km)
E_1	0,02663411	0,04506516	0,00161247
E_2	0,02489920	0,00992300	0,00571785
E_3	0,05781643	0,03403878	0,00515337
E_4	0,00400783	0,01749889	0,00282398
E_5	0,00561521	0,00101200	0,00012281

Na tabela 5.8 trazemos os autovalores para cada ponto de equilíbrio de 6489 Golevka. Pela análise dos autovalores podemos concluir que todos os pontos são não-degenerados e não-ressonantes. Os pontos E_1 , E_2 , E_3 e E_4 pertencem ao caso topológico 2, logo, são instáveis; o ponto E_5 pertence ao caso 1, logo, é linearmente estável. Novamente a análise da estabilidade mostrou-se diferente, uma vez que Wang, Jiang & Gong (2014) encontraram que os pontos E_2 e E_4 são linearmente estáveis, logo, pertencentes ao caso topológico 1. Para os demais pontos a estabilidade apresentou-se compatível com a análise que realizamos.

Tabela 5.8: Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 6489 Golevka.

$\times 10^{-4} s^{-1}$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
E_1	5,443 <i>i</i>	-5,443 <i>i</i>	1,981	-1,981	2,801 <i>i</i>	-2,801 <i>i</i>
E_2	5,400 <i>i</i>	-5,400 <i>i</i>	2,100	-2,100	2,967 <i>i</i>	-2,967 <i>i</i>
E_3	5,496 <i>i</i>	-5,496 <i>i</i>	2,471	-2,471	3,073 <i>i</i>	-3,073 <i>i</i>
E_4	5,4784 <i>i</i>	-5,478 <i>i</i>	2,304	-2,304	2,975 <i>i</i>	-2,975 <i>i</i>
E_5	11,717 <i>i</i>	-11,717 <i>i</i>	5,752 <i>i</i>	-5,752 <i>i</i>	9,465 <i>i</i>	-9,465 <i>i</i>

5.0.3 Asteroide 2867 Steins

Utilizamos para o asteroide 2867 Steins um conjunto de dados (Farnham & Jorda, 2013) disponibilizados pela NASA Planetary Data System (2013) com 10242 vértices e

20480 faces. A densidade desse objeto é $1,8 \text{ g/cm}^3$ e o período de rotação $6,04679$ horas (Jorda et al., 2012; Wang, Jiang & Gong, 2014).

A figura 5.3 ilustra a localização dos pontos de equilíbrio desse asteroide considerando os nossos resultados e os resultados de Wang, Jiang & Gong (2014). Podemos perceber que há uma diferença grande na localização dos pontos. Além disso, de acordo com os nossos resultados os pontos de equilíbrio externos estão mais próximos do objeto que os de Wang, Jiang & Gong (2014). A tabela 5.9 contém os resultados da localização dos pontos de equilíbrio no campo gravitacional de 2867 Steins, enquanto que a tabela 5.10 traz os resultados de Wang, Jiang & Gong (2014).

A tabela 5.11 trás os erros absolutos nas coordenadas de cada ponto, determinando erros de até 114%. O que caracteriza o quanto nossos resultados diferem dos de Wang, Jiang & Gong (2014).

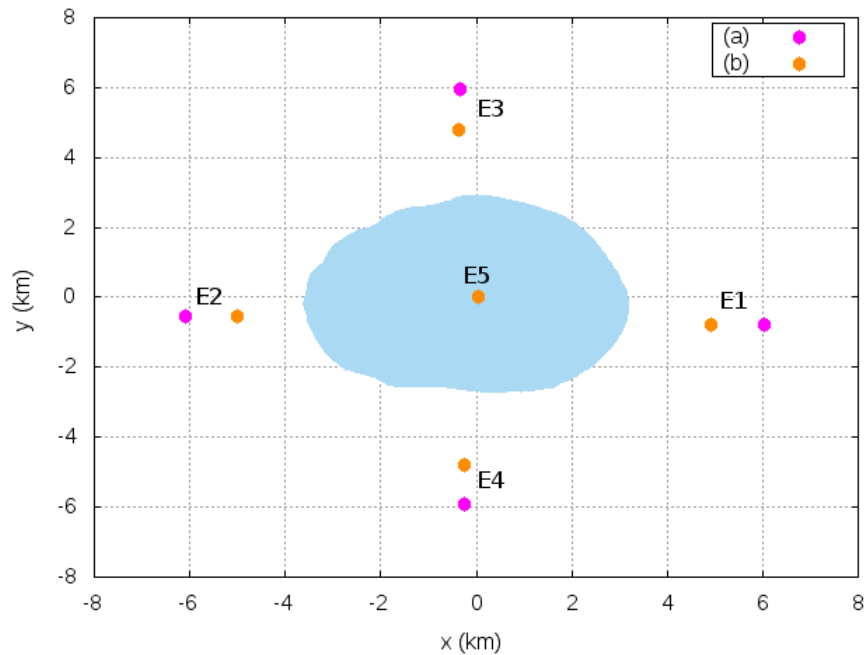


Figura 5.3: Pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins no plano xy . Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.

Tabela 5.9: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins.

Ponto de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
E_1	4,91245618	-0,79243756	0,02894959
E_2	-5,01765493	-0,52571282	0,01606899
E_3	-0,38136663	4,80834206	-0,05905870
E_4	-0,25510916	-4,77314597	-0,04828215
E_5	0,05276305	0,01304636	0,00859294

Tabela 5.10: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins conforme Wang, Jiang & Gong (2014).

Ponto de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
E_1	6,02496	-0,778495	0,0195957
E_2	-6,09443	-0,556101	0,0108389
E_3	-0,350453	5,93496	-0,0389495
E_4	-0,258662	-5,91204	-0,0328477
E_5	0,0465217	0,0118791	0,00862801

Tabela 5.11: Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 2867 Steins considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.9 e 5.10.

Ponto de equilíbrio	Δx (km)	Δy (km)	Δz (km)
E_1	1,11250382	0,01394256	0,00935389
E_2	1,07667507	0,03038818	0,00598510
E_3	0,03091363	1,12661794	0,02010920
E_4	0,00355284	1,13889403	0,01543445
E_5	0,01110880	0,00116726	0,00003507

No entanto, podemos notar que a diferença entre a localização dos nossos pontos e os de Wang, Jiang & Gong (2014) segue um padrão. Dessa forma, resolvemos modificar o período de rotação e após diversas simulações encontramos para o período de rotação 8,31509 horas valores bem próximos dos resultados de Wang, Jiang & Gong (2014). O que pode ser observado na figura 5.4 que ilustra a localização desses pontos comparando-os com os resultados de Wang, Jiang e Gong (2014). Os valores das coordenadas x , y e z de cada ponto de equilíbrio após a mudança no valor do período de rotação estão expressos na tabela 5.12.

Recalculamos novamente os erros absolutos nas coordenadas de cada ponto, conforme tabela 5.13, e obviamente esperamos encontrar erros insignificantes se comparados com os encontrados na tabela 5.11. Uma vez que na figura 5.4 os pontos aparentam estar sobrepostos devido ao erro absoluto ser a partir da quinta casa decimal. Portanto, conforme previsto, determinamos erros absolutos inferiores a 0,005%.

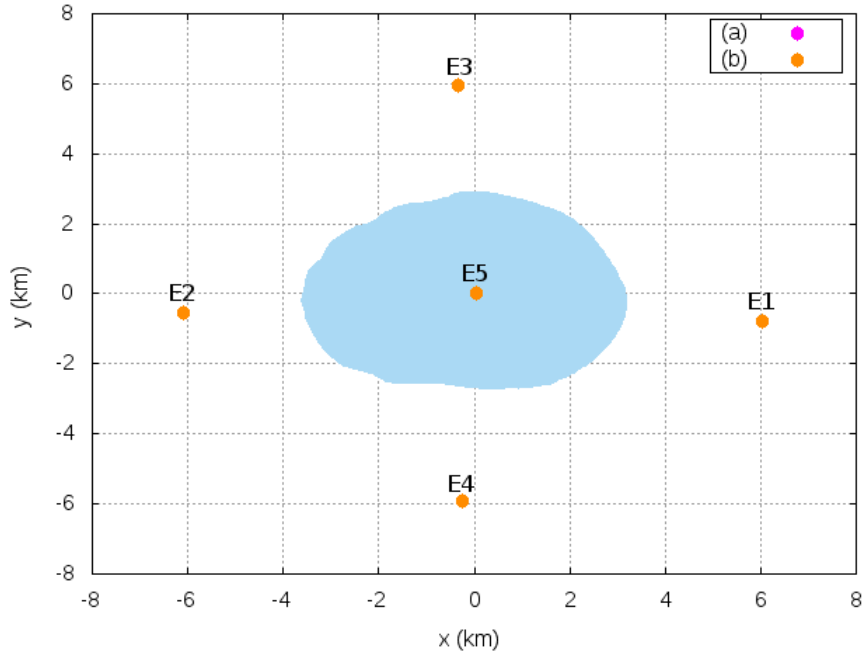


Figura 5.4: Pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins no plano xy com alteração do período de rotação. Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.

Tabela 5.12: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins com alteração do período de rotação.

Ponto de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
E_1	6,02490991	-0,77847808	0,01949611
E_2	-6,09438673	-0,55609523	0,01083916
E_3	-0,35046026	5,93491547	-0,03895038
E_4	-0,25866815	-5,91199589	-0,03285076
E_5	0,04652194	0,01187909	0,00862800

Tabela 5.13: Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 2867 Steins considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.12 e 5.10.

Ponto de equilíbrio	Δx (km)	Δy (km)	Δz (km)
E_1	0,00005009	0,00001692	0,00009959
E_2	0,00004327	0,00000577	0,00000026
E_3	0,00000726	0,00004453	0,00000088
E_4	0,00000615	0,00004411	0,00000306
E_5	0,00000024	0,00000001	0,00000001

As tabelas 5.14 e 5.15 contêm os autovalores de cada ponto de equilíbrio para os períodos de rotação 6,04679 horas e 8,31509 horas, respectivamente. Pela análise dos autovalores podemos concluir que todos os pontos são não-degenerados e não-ressonantes. Os pontos E_1 , E_2 , E_3 e E_4 de ambas as tabelas pertencem ao caso topológico 2, logo, são

instáveis; o ponto E_5 pertence ao caso 1, logo, é linearmente estável. No entanto, Wang, Jiang & Gong (2014) analisaram a estabilidade dos pontos de equilíbrio e constataram que os pontos E_2 e E_4 são linearmente estáveis, logo, pertencentes ao caso topológico 1. Para os demais pontos a estabilidade apresentou-se compatível com a análise que realizamos.

Tabela 5.14: Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins.

s^{-1}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
E_1	$1,948i$	$-1,948i$	$0,858$	$-0,858$	$1,122i$	$-1,122i$
E_2	$1,939i$	$-1,939i$	$0,908$	$-0,908$	$1,175i$	$-1,175i$
E_3	$1,930i$	$-1,930i$	$0,783$	$-0,783$	$1,097i$	$-1,097i$
E_4	$1,919i$	$-1,919i$	$0,742$	$-0,742$	$1,089i$	$-1,089i$
E_5	$3,614i$	$-3,614i$	$1,517i$	$-1,517i$	$2,918i$	$-2,918i$

Tabela 5.15: Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 2867 Steins com alteração do período de rotação.

s^{-1}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
E_1	$1,420i$	$-1,420i$	$-0,603$	$0,603$	$0,794i$	$-0,794i$
E_2	$1,417i$	$-1,417i$	$0,621$	$-0,621$	$0,812i$	$-0,812i$
E_3	$1,411i$	$-1,411i$	$-0,565$	$0,565$	$0,781i$	$-0,781i$
E_4	$-1,407i$	$1,407i$	$0,550$	$-0,550$	$0,778i$	$-0,778i$
E_5	$1,695i$	$-1,695i$	$3,233i$	$-3,233i$	$2,918i$	$-2,918i$

5.0.4 Asteroide 4769 Castalia

Para o asteroide 4769 Castalia nós adotamos um conjunto de dados (Neese, 2004) disponibilizados pela NASA Planetary Data System (2004) com 2048 vértices e 4092 faces. A densidade desse asteroide é $2,1 \text{ g/cm}^3$ e o seu período de rotação 4,094 horas (Scheeres et al. 1996; Wang, Jiang & Gong, 2014).

A figura 5.5 ilustra a localização dos pontos de equilíbrio desse objeto considerando os nossos resultados e os resultados de Wang, Jiang & Gong (2014). Podemos observar que os pontos em (a) e (b) são praticamente iguais, o que gera um efeito de sobreposição dos pontos.

A tabela 5.16 contém os resultados da localização dos pontos de equilíbrio no campo gravitacional de 4769 Castalia, enquanto que a tabela 5.17 traz os resultados de Wang, Jiang & Gong (2014). Ao observarmos essas duas tabelas notamos que os valores das coordenadas dos pontos de equilíbrio estão bem próximos.

A tabela 5.18 trás o erro absoluto nas coordenadas de cada ponto. Como podemos notar os erros são inferiores a 0,005%.

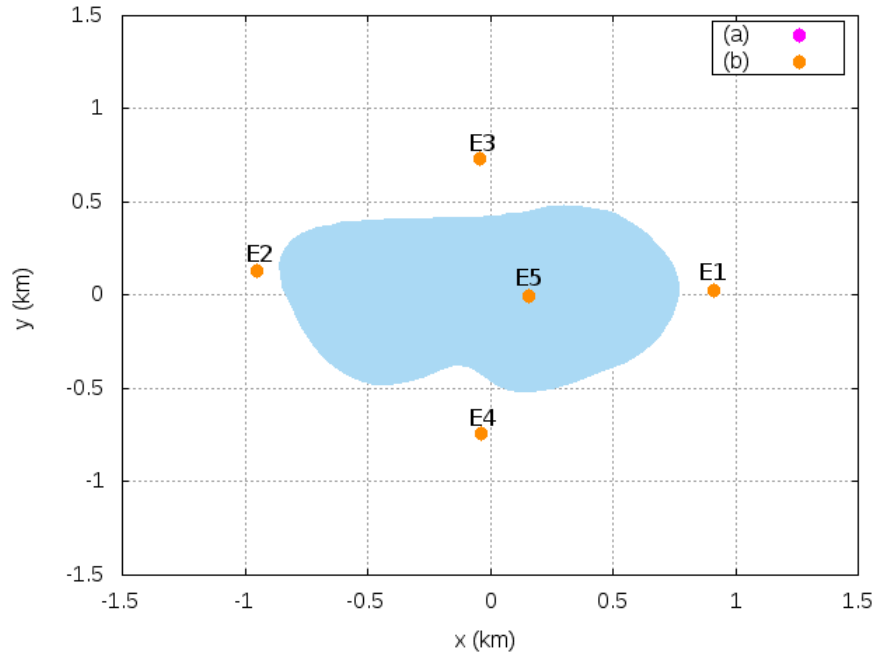


Figura 5.5: Pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia no plano xy . Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.

Tabela 5.16: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia.

Ponto de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
E_1	0,90997387	0,02286335	0,03460847
E_2	-0,95289990	0,12873606	0,03007520
E_3	-0,04277930	0,73587508	0,00312986
E_4	-0,03996637	-0,74397147	0,00876652
E_5	0,15807362	-0,00144829	-0,01293685

Tabela 5.17: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia conforme Wang, Jiang & Gong (2014).

Ponto de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
E_1	0,910109	0,0228648	0,0345927
E_2	-0,953021	0,128707	0,0300658
E_3	-0,0427816	0,736033	0,00312877
E_4	-0,0399531	-0,744131	0,00876237
E_5	0,157955	-0,00144811	-0,0129416

Tabela 5.18: Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 4769 Castalia considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.16 e 5.17.

Ponto de equilíbrio	Δx (km)	Δy (km)	Δz (km)
E_1	0,00013513	0,00000145	0,00001577
E_2	0,00012110	0,00002906	0,00000940
E_3	0,00000230	0,00015792	0,00000109
E_4	0,00001327	0,00015953	0,00000415
E_5	0,00011862	0,00000018	0,00002315

A tabela 5.19 contém os autovalores que encontramos para cada ponto de equilíbrio. Pela análise dos autovalores podemos concluir que todos os pontos são não-degenerados e não-ressonantes. Os pontos E_1 , E_2 , E_3 e E_4 pertencem ao caso topológico 2, logo, são instáveis; o ponto E_5 pertence ao caso 1, logo, é linearmente estável. Wang, Jiang & Gong (2014) também encontraram que os quatro pontos externos são instáveis, enquanto que o interno é linearmente estável.

Tabela 5.19: Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia.

$\times 10^{-4} s^{-1}$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
E_1	8,275 <i>i</i>	-8,275 <i>i</i>	4,335	-4,335	4,797 <i>i</i>	-4,797 <i>i</i>
E_2	5,281	-5,281	8,177 <i>i</i>	-8,177 <i>i</i>	5,806 <i>i</i>	-5,806 <i>i</i>
E_3	7,652 <i>i</i>	-7,652 <i>i</i>	2,181	-2,181	4,346 <i>i</i>	-4,346 <i>i</i>
E_4	7,607 <i>i</i>	-7,607 <i>i</i>	2,204	-2,204	4,437 <i>i</i>	-4,437 <i>i</i>
E_5	12,547 <i>i</i>	-12,547 <i>i</i>	8,835 <i>i</i>	-8,835 <i>i</i>	3,648 <i>i</i>	-3,648 <i>i</i>

No entanto, Jiang et al. (2014) também encontraram a localização e analisaram a estabilidade dos pontos de equilíbrio de 4769 Castalia usando os mesmos valores da densidade e período de rotação que Wang, Jiang & Gong (2014), e os resultados deram diferentes. E nenhum desses trabalhos se comenta essa diferença ou o porque dela.

A figura 5.6 ilustra essa diferença comparando a localização dos pontos de equilíbrio no plano xy referente aos resultados de Wang, Jiang & Gong (2014) e Jiang et al. (2014), respectivamente.

A tabela 5.20 traz as coordenadas dos pontos de equilíbrio externos conforme consta em Jiang et al. (2014). E ao compararmos as tabelas 5.17 e 5.20 a diferença nos valores das coordenadas dos pontos é notória e, no entanto, não há explicação ou nenhum comentário que esclareça esse fato.

Para termos ideia de quanto é essa diferença também calculamos o erro absoluto nas coordenadas de cada ponto comparando os resultados de Wang, Jiang & Gong (2014)

e Jiang et al. (2014). Conforme podemos observar na tabela 5.21 os erros chegam até 8,0%.

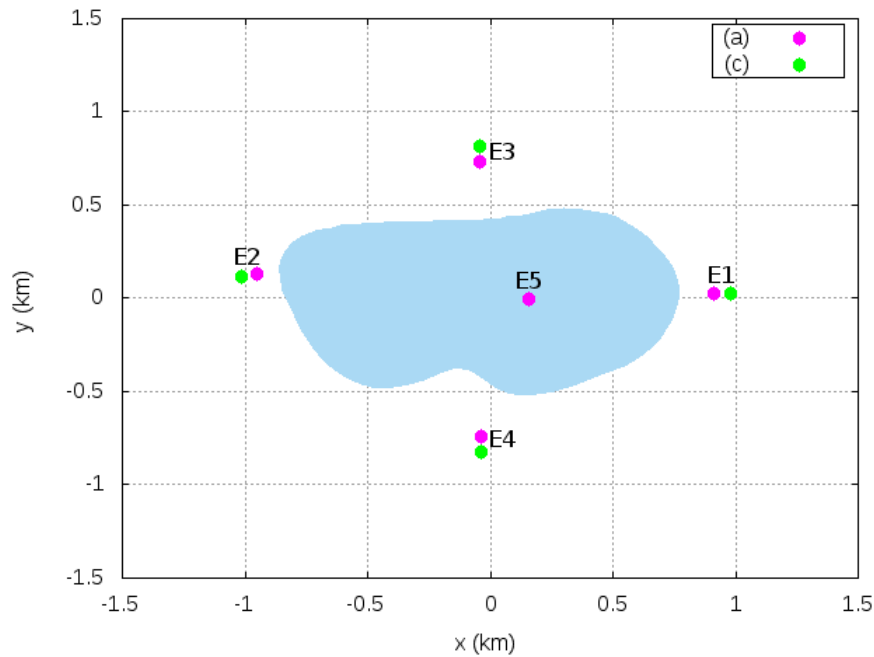


Figura 5.6: Pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia no plano xy . Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (c) Jiang et al. (2014).

Tabela 5.20: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia conforme Jiang et al. (2014).

Ponto de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
E_1	0,978767	0,023603	0,028032
E_2	-1,01550	0,116078	0,0257862
E_3	-0,043617	0,815747	0,002265
E_4	-0,034338	-0,823895	-0,006950

Tabela 5.21: Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 4769 Castalia considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.17 e 5.20.

Ponto de equilíbrio	Δx (km)	Δy (km)	Δz (km)
E_1	0,068658	0,0007382	0,0065607
E_2	0,062479	0,012629	0,0042796
E_3	0,0008354	0,079714	0,00086377
E_4	0,005615	0,079764	0,00181237

5.0.5 Asteroide 101955 Bennu

Para o asteroide 101955 Bennu adotamos um conjunto de dados (Nolan et al., 2013) disponibilizados pela NASA Planetary Data System (2013) com 1348 vértices e 2692 faces. Esse asteroide possui densidade $0,97 \text{ g/cm}^3$ e período de rotação 4,288 horas (Wang, Jiang & Gong, 2014).

A figura 5.7 ilustra a localização dos pontos de equilíbrio desse objeto considerando os nossos resultados e os resultados de Wang, Jiang & Gong (2014). A tabela 5.22 contém os resultados da localização dos pontos de equilíbrio no campo gravitacional de 101955 Bennu, enquanto que a tabela 5.23 apresenta os resultados de Wang, Jiang & Gong (2014). Embora seja um objeto relativamente pequeno, com poucos metros de diâmetro, apresenta uma peculiaridade: possui nove pontos de equilíbrio. Analisando a figura e as tabelas podemos concluir que os nossos resultados estão satisfatórios, visto que conseguimos encontrar todos os pontos de equilíbrio e as coordenadas deram semelhantes as de Wang, Jiang & Gong (2014).

Apresentamos na tabela 5.24 o erro absoluto nas coordenadas de cada ponto, que determinam erros a partir da terceira casa decimal, inferiores a 0,23%.

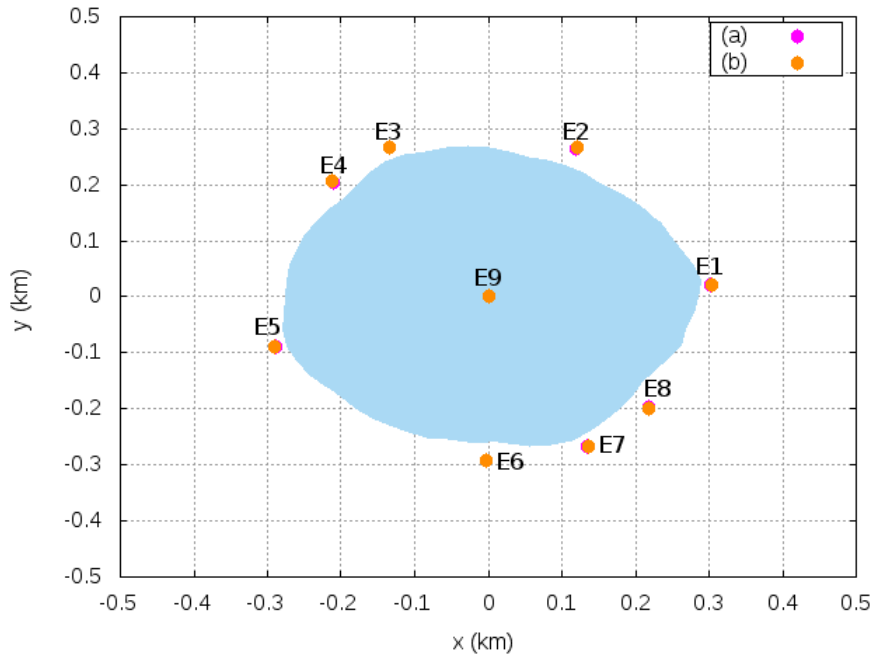


Figura 5.7: Pontos de equilíbrio do asteroide 101955 Bennu no plano xy . Em (a) Wang, Jiang & Gong (2014); (b) resultados do presente trabalho.

Tabela 5.22: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 101955 Benu.

Ponto de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
E_1	0,30394132	0,02056947	-0,00328107
E_2	0,12057256	0,26575033	-0,00251837
E_3	-0,13431831	0,26737496	-0,01060970
E_4	-0,21224146	0,20583648	-0,00956386
E_5	-0,28953114	-0,08965800	-0,00267995
E_6	-0,00231630	-0,29284047	0,00145366
E_7	0,13529552	-0,26681158	-0,00165340
E_8	0,21838113	-0,19885147	-0,00359458
E_9	0,00014386	0,00019612	0,00004969

Tabela 5.23: Localização dos pontos de equilíbrio do asteroide 101955 Benu conforme Wang, Jiang & Gong (2014).

Ponto de equilíbrio	x (km)	y (km)	z (km)
E_1	0,302254	0,0207971	-0,00325871
E_2	0,119921	0,263907	-0,00250975
E_3	-0,133380	0,265869	-0,0108739
E_4	-0,211138	0,204168	-0,00979061
E_5	-0,288326	-0,0884228	-0,00262675
E_6	-0,00230678	-0,290888	0,00159251
E_7	0,133622	-0,265726	-0,00161864
E_8	0,217825	-0,196538	-0,00365738
E_9	0,000149629	0,00020317	0,00004969

Tabela 5.24: Erro absoluto nos pontos de equilíbrio de 101955 Benu considerando o módulo da diferença entre os valores de cada coordenada x , y e z das tabelas 5.22 e 5.23.

Ponto de equilíbrio	Δx (km)	Δy (km)	Δz (km)
E_1	0,00168732	0,00022763	0,00002236
E_2	0,00065156	0,00184333	0,00000862
E_3	0,00051831	0,00150596	0,00026420
E_4	0,00110346	0,00166848	0,00022675
E_5	0,00120514	0,00123520	0,00005320
E_6	0,00000952	0,00195247	0,00013885
E_7	0,00167352	0,00108558	0,00003476
E_8	0,00055630	0,00231347	0,00006280
E_9	0,00000576	0,00000705	0,00000000

Na tabela 5.25 trazemos os autovalores para cada ponto de equilíbrio de 101955 Benu. Pela análise dos autovalores podemos concluir que todos os pontos são não-degenerados e não-ressonantes. Os pontos E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 , E_6 , E_7 e E_8 pertencem ao caso topológico 2, logo, são instáveis; o ponto E_9 pertence ao caso 1, logo, é linearmente

estável. A análise da estabilidade mostrou-se compatível com a de Wang, Jiang & Gong (2014).

Tabela 5.25: Autovalores dos pontos de equilíbrio do asteroide 101955 Bennu.

$\times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
E_1	$7,559i$	$-7,559i$	4,022	-4,022	$5,030i$	$-5,030i$
E_2	$7,489i$	$-7,489i$	3,068	-3,068	$4,425i$	$-4,425i$
E_3	$7,599i$	$-7,599i$	3,672	-3,672	$4,690i$	$-4,690i$
E_4	$7,427i$	$-7,427i$	3,064	-3,064	$4,527i$	$-4,527i$
E_5	$7,381i$	$-7,381i$	4,425	-4,425	$5,011i$	$-5,011i$
E_6	$7,467i$	$-7,467i$	3,065	-3,065	$4,461i$	$-4,461i$
E_7	$7,511i$	$-7,511i$	3,712	-3,712	$4,860i$	$-4,860i$
E_8	$7,413i$	$-7,413i$	3,110	-3,110	$4,581i$	$-4,581i$
E_9	$10,604i$	$-10,604i$	$2,462i$	$-2,462i$	$5,395i$	$-5,395i$

5.0.6 Conclusão

Verificamos que os pontos instáveis são mais suscetíveis de aparecer no campo gravitacional de um objeto. Uma vez que dentre os 23 objetos analisados por Wang, Jiang & Gong (2014) foram encontrados mais de setenta pontos de equilíbrio instáveis. Somente 9 desses objetos, sendo eles 4 Vesta, 2867 Steins, 6489 Golevka, 52760 ML14, M1 Phobos, N8 Proteus, S9 Phoebe, 1P/Halley e 9P/Tempel 1, têm dois pontos de equilíbrio externos estáveis cada um. Entretanto, não conseguimos encontrar pontos externos estáveis para 9P/Tempel 1, 6489 Golevka e 2867 Steins.

Uma vez que encontramos coordenadas dos pontos de equilíbrio com uma boa precisão se compararmos os resultados de 2063 Bacchus, 4769 Castalia, 9P/Tempel 1 e 101955 Bennu com os de Wang, Jiang & Gong (2014), não há motivo aparente para também não conseguirmos chegar na mesma análise da estabilidade. Já para o asteroide 2867 Steins é uma questão um pouco diferente, pois os nossos resultados diferem dos de Wang, Jiang & Gong (2014) obedecendo um determinado padrão. No entanto, ao alterarmos o período de rotação conseguimos resultados praticamente iguais aos desses autores. Entretanto, não realizamos simulações para 4 Vesta, 52760 ML14, M1 Phobos, N8 Proteus, S9 Phoebe e 1P/Halley, e quem sabe se as tivéssemos realizado teríamos encontrado pontos estáveis. Um próximo passo seria começar a procurar pontos estáveis a partir desses objetos que não incluímos no presente capítulo.

Ademais, prevalece uma dúvida: será que Wang, Jiang & Gong (2014) cometeram algum erro nos valores da densidade e do período de rotação, uma vez que fizeram diversas simulações para tantos objetos? Se isso aconteceu é possível que a análise da estabilidade

apresente resultados diferentes. Além disso, há também o fato de que Jiang et al. (2014) e Wang, Jiang & Gong (2014) encontraram valores diferentes para as coordenadas dos pontos de equilíbrio do asteroide 4769 Castalia, considerando os mesmos valores de densidade e período de rotação. E essa diferença em momento algum é comentada ou explicada pelos autores.

Capítulo 6

Força de Pressão de Radiação Solar

Como o objetivo principal é tornar o estudo da localização e estabilidade de pontos de equilíbrio o mais realista possível, vamos introduzir o efeito da força de pressão de radiação solar (F_p). No entanto, como a intenção era encontrar pontos externos estáveis e introduzir essa perturbação, mesmo ao analisarmos outros objetos só conseguimos pontos externos instáveis. Logo, aplicaremos a F_p para 2063 Bacchus, objeto que até então já vínhamos estudando, e escolhemos o ponto de equilíbrio E_3 , já que conforme vimos no capítulo anterior é um ponto susceptível de ser linearmente estável.

Uma partícula orbitando um asteroide nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio estará sujeita à perturbações do Sol. Para um corpo estendido e relativamente leve, como uma nave espacial ou uma pequena partícula, essa perturbação vai surgir a partir da F_p . A longo prazo o efeito da F_p pode afetar o movimento orbital de partículas de poeira e asteroides. A F_p é geralmente desprezada, como uma primeira aproximação, para simplificar o modelo estudado, o que até então estávamos assumindo.

No entanto, a motivação principal do presente trabalho é analisar a localização e a estabilidade dos pontos de equilíbrio no campo gravitacional de um asteroide, e até então estávamos considerando somente o efeito do potencial de corpos irregulares, o que não deixa de ser importante, já que muitos autores ainda modelam o potencial desses objetos sem levar em conta o seu formato irregular. Logo, para tornar a pesquisa mais realista vamos incorporar o efeito da F_p e verificar o comportamento do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus. Até porque, caso uma sonda seja enviada em missão a um asteroide, por exemplo, é necessário conhecer a dinâmica perto dos pontos de equilíbrio.

Para este trabalho iremos estudar o caso de uma partícula que orbita em regiões próximas ao ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus. Logo, trataremos da ação de duas forças, o campo gravitacional do asteroide e a F_p . Analisaremos como a localização e a estabilidade do ponto de equilíbrio é afetada por essa perturbação. Nós

assumimos que o comportamento da partícula assume uma forma esférica e mais adiante faremos uma breve discussão da possibilidade dessa partícula orbitar regiões próximas a pontos de equilíbrio estáveis.

Xin et al. (2015) analisaram o efeito da F_p nos pontos de equilíbrio no sistema de um asteroide em rotação. Para tanto, assumiram o asteroide como sendo um elipsóide triaxial uniformemente em rotação em torno do seu momento de inércia máximo. Algumas considerações foram impostas, tais como: o asteroide gira em torno do Sol em uma órbita circular com raio r_s igual a 1 UA e o plano orbital coincide com o do asteroide. O painel solar da sonda é orientado perpendicularmente com respeito à luz incidente, de modo a ter a maior secção transversal possível, e absorve e reflete a luz perfeitamente.

Como o interesse era adicionar o efeito da F_p nas equações do movimento e analisar o comportamento dos pontos de equilíbrio, de acordo com Xin et al. (2015), a forma potencial dessa perturbação é

$$R_s = -\frac{\kappa}{|\boldsymbol{\delta}|} \quad (6.1)$$

onde $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_s$ e \mathbf{r} e \mathbf{r}_s são os vetores posição da nave espacial e do Sol com respeito ao centro do asteroide. O parâmetro κ é

$$\kappa = \nu P_s r_s^2 \sigma \quad (6.2)$$

em que $P_s = 4,56 \times 10^{-6} \text{ Kg}/\text{ms}^2$ é a pressão de radiação solar exercida sobre um painel solar perfeitamente absorvente em 1 UA, σ é a razão área-massa do veículo espacial e ν é o fator de eclipse. Desde que $|\mathbf{r}| \ll r_s$, o potencial pode ser aproximado para segunda ordem como

$$R_s = -\frac{\kappa}{r_s^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_s + \frac{\kappa}{2r_s^3} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - 3(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}_s)^2] \quad (6.3)$$

em que $\hat{\mathbf{r}}_s = \mathbf{r}_s/r_s$. Nas mesmas condições de aproximação, a perturbação gravitacional do Sol é

$$R_{sol} = -\frac{\mu_s}{2r_s^3} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - 3(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}_s)^2] \quad (6.4)$$

O parâmetro gravitacional solar é $\mu_s = 1,3272 \times 10^{11} \text{ km}^3\text{s}^{-2}$ e $\kappa = 1,026 \times 10^7 \text{ km}^3\text{s}^{-2}$. Podemos concluir que para uma sonda cuja razão área-massa é $\sigma = 0,1 \text{ m}^2/\text{kg}$, a perturbação gravitacional do Sol é de aproximadamente três ordens de grandeza menor que o primeiro termos da F_p , mas muito maior que o segundo termo. Para o modelo apresentado por Xin et al. (2015) é negligenciado o efeito da perturbação gravitacional do Sol, de forma que mantiveram somente o primeiro termo da F_p .

Então, quando introduzimos o efeito da F_p as equações (3.16), que definem o número de pontos de equilíbrio no campo gravitacional de um asteroide, podem ser reescritas da seguinte forma

$$\begin{aligned}\omega^2 x - \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\kappa}{r_s^2} \cos(\phi) &= 0 \\ \omega^2 y - \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} - \frac{\kappa}{r_s^2} \text{sen}(\phi) &= 0 \\ \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{6.5}$$

onde $0^\circ < \phi < 360^\circ$ é o ângulo entre o Sol e o objeto.

De acordo com Xin et al. (2015) quando introduzimos a F_p os pontos de equilíbrio já não existem mais. Esses pontos de equilíbrio se deslocam a medida que o ângulo ϕ é alterado. Portanto, se transformam em pontos de equilíbrio equivalentes.

Nós recalculamos novamente o ponto de equilíbrio E_3 de 2063 Bacchus considerando o efeito da F_p no periélio e no afélio, sendo a 0,701 UA e 1,454 UA, respectivamente. O valor de P_s varia com o inverso do quadrado da distância Sol-asteroide, ou seja, quanto maior a distância menor o efeito da pressão de radiação solar. O valor de P_s pode ser calculado por (Motta, 2011)

$$P_s = -\frac{\bar{K}}{R'^2}\tag{6.6}$$

onde R' é a distância heliocêntrica da superfície atingida e \bar{K} é definido como

$$\bar{K} = \frac{S_0 a_s^2}{c}\tag{6.7}$$

em que $S_0 = 1,353 \times 10^3 \text{ kg/s}^3$ é a constante solar ¹³ com erro de $\pm 1,5\%$, $a_s = 1 \text{ UA}$ e $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$ é a velocidade da luz no vácuo. Então, $\bar{K} \approx 1,009 \times 10^{17} \text{ kgm/s}^2$. Dessa forma, os valores de P_s no periélio e no afélio são $9,184 \times 10^{-6} \text{ Kg/ms}^2$ e $2,134 \times 10^{-6} \text{ Kg/ms}^2$, respectivamente. Para simplificar o nosso modelo nós adotamos o fator de eclipse $\nu = 1$, então, não estamos considerando efeitos de sombra ou penumbra.

Além disso, como iremos fazer uma breve discussão da possível existência de nuvens de partículas ao redor de pontos estáveis, nós também variamos o valor da razão área-massa, considerando então o movimento de uma partícula cujo formato é esférico. Realizamos simulações para $0,1 \leq \sigma \leq 0,9 \text{ (m}^2/\text{kg)}$. As densidades volumétricas que assumem esses valores de σ podem ser visualizadas na figura 6.1. A título de informação o gelo de

¹³A constante solar é determinada pelo fluxo de radiação do Sol, que é o total de energia que atinge o limite da atmosfera na superfície de 1 cm^2 , perpendicularmente aos raios solares durante um minuto. Ou seja, é o fluxo de radiação luminosa do Sol recebido aqui na Terra.

água tem densidade $0,92 \text{ g/cm}^3$, assim uma partícula que tivesse na sua composição esse material teria um raio entre $0,08 \text{ cm}$ e $0,78 \text{ cm}$, aproximadamente, considerando todos os valores de σ . O silicato de alumínio possui densidade de $2,6 \text{ g/cm}^3$ e, por exemplo, para $\sigma = 0,5$ uma partícula composta desse material teria raio por volta de $0,06 \text{ cm}$.

Ainda da figura 6.1 observemos que para partículas cujo raio seja menor que $0,12 \text{ cm}$ só podemos ter $\sigma > 0,1$, considerando o intervalo das densidades volumétricas que consta no gráfico. Essa análise da possibilidade de haver partículas na vizinhança de pontos estáveis é muito útil, uma vez que uma sonda próxima desse ponto pode sofrer danos dependendo do tamanho e do material dessas partículas. Todavia, em nossos estudos os pontos de equilíbrio tanto de 2063 Bacchus como de outros corpos analisados no capítulo anterior se mostraram instáveis.

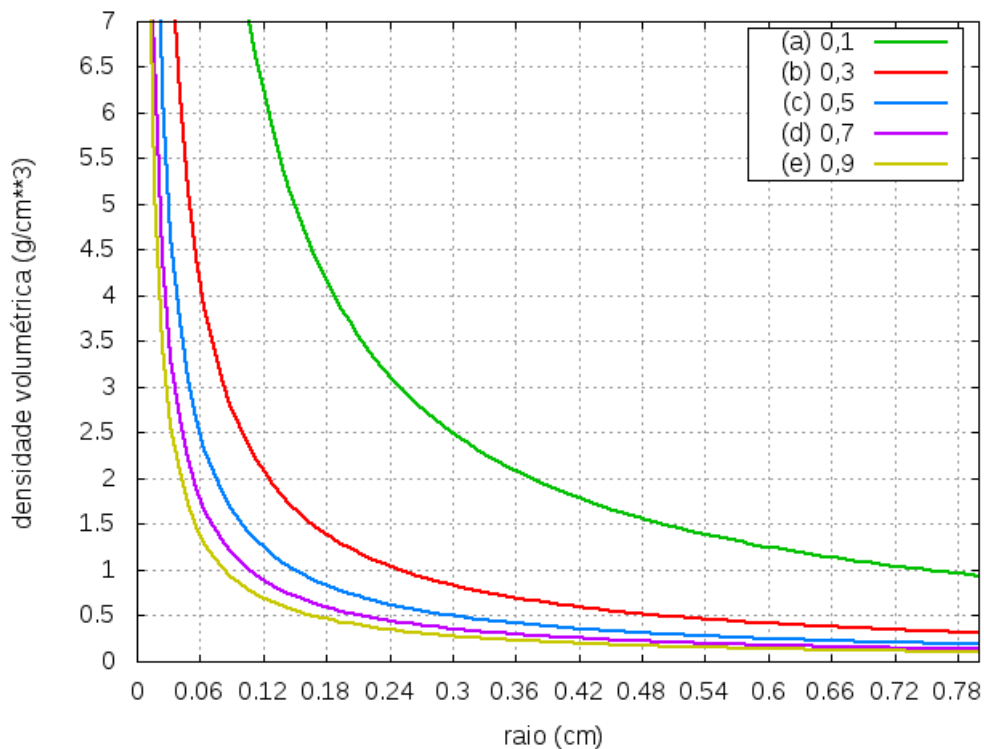


Figura 6.1: Densidade volumétrica por raio, considerando uma partícula esférica. A escala de (a) a (e) traz os valores da razão área-massa (σ) em m^2/kg .

Então, dando continuidade, dadas as considerações dispostas no texto, realizamos simulações para encontrar os novos pontos de equilíbrio de 2063 Bacchus, de agora em diante denominados de pontos equivalentes. Conforme o ângulo ϕ varia o ponto equivalente muda de posição, e sua trajetória delimita uma determinada área ao redor do ponto E_3 (sem o efeito da F_p), conforme podemos observar na figura 6.2. Se, por exemplo, o Sol estiver na posição 5 a F_p agirá no mesmo sentido da força gravitacional e para compensar esse desequilíbrio de forças o ponto equivalente deve se afastar em relação a posição que

tinha sem o efeito da F_p (ponto E_3 em vermelho), ficando mais longe do objeto (ponto azul na posição 5).

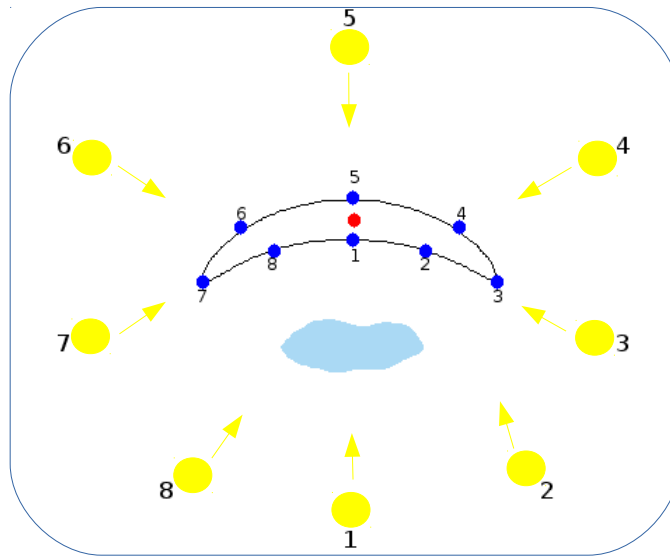


Figura 6.2: Esquema representando a mudança na posição dos pontos equivalentes (azul) sob a ação da F_p no ponto de equilíbrio E_3 (vermelho) do asteroide 2063 Bacchus. Conforme o ângulo entre o Sol (amarelo) e o asteroide varia de $0^\circ < \phi < 360^\circ$ o ponto equivalente altera a sua localização, percorrendo uma trajetória ao redor do ponto E_3 (sem o efeito da F_p) que se assemelha ao formato de uma “banana”.

A figura 6.3 ilustra a movimentação do ponto de equilíbrio E_3 de 2063 Bacchus, considerando o efeito da F_p no periélio e os extremos do intervalo de alteração de σ . Na legenda A/m indica o valor da razão área-massa (σ). Note que para $\sigma = 0,9$ os pontos equivalentes se movimentam de forma a abrangerem uma região maior.

As figuras 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8 ilustram os pontos equivalentes para $0,1 \leq \sigma \leq 0,9$ (m^2/kg), com passo 0,2. Essas figuras trazem também o ponto de equilíbrio E_3 sem o efeito da F_p ($A/m = 0,0$). Podemos observar que conforme o valor de σ aumenta o deslocamento do ponto equivalente abrange uma área em volta do ponto de equilíbrio E_3 (sem efeito da F_p) de maior amplitude. Dessa forma, é possível prever o trajeto do ponto equivalente para um outro valor de σ que não esteja no intervalo considerado.

Pelas figuras 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8 vimos claramente que a localização do ponto E_3 , agora ponto equivalente, é diferente a cada variação do ângulo ϕ . A análise dos autovalores desses pontos equivalentes mostrou que são todos pontos instáveis, pertencentes ao caso topológico 2. Ou seja, o ponto E_3 sob o efeito da F_p não alterou a sua estabilidade, o que já era previsto, uma vez que o ponto já era instável e estamos acrescentando mais uma perturbação fazendo com que fique ainda mais instável.

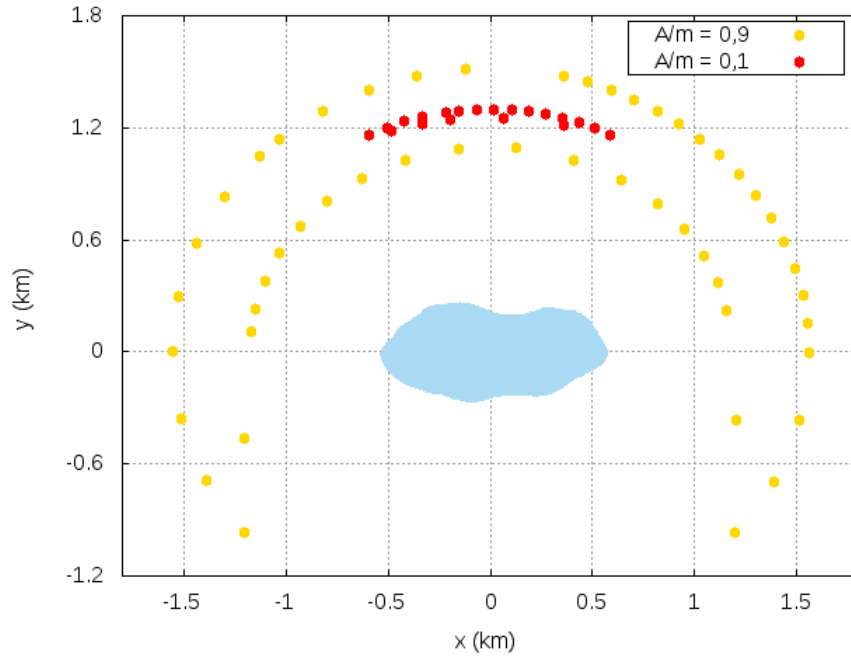


Figura 6.3: Movimentação do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus com efeito da F_p no periélio, conforme o ângulo entre o Sol e o objeto varia. A/m indica o valor da razão área-massa (σ) em m^2/kg de uma partícula esférica orbitando na vizinhança do ponto E_3 .

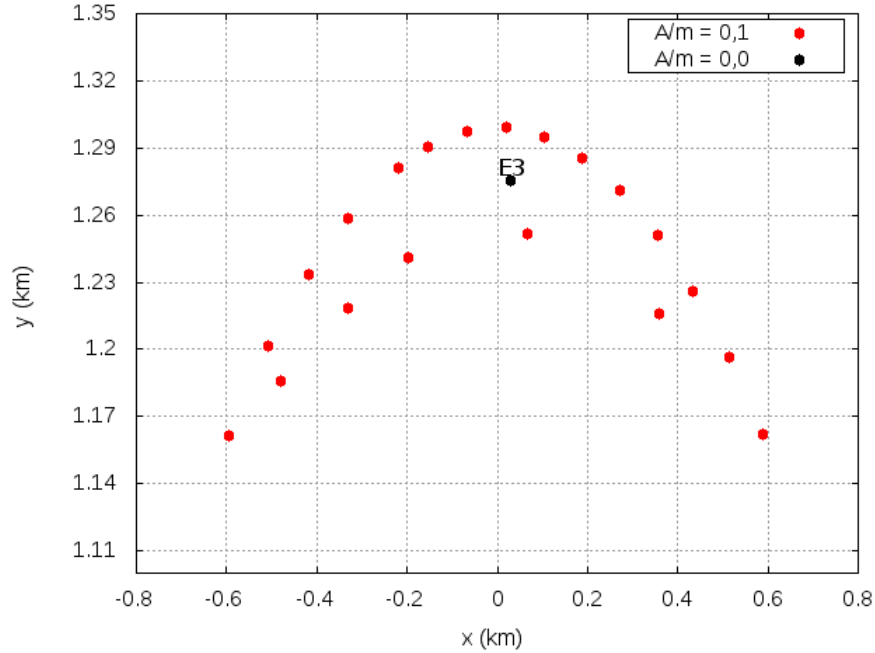


Figura 6.4: Movimentação do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus com efeito da F_p no periélio, conforme o ângulo entre o Sol e o objeto varia. A/m indica o valor da razão área-massa (σ) em m^2/kg de uma partícula esférica orbitando na vizinhança do ponto E_3 .

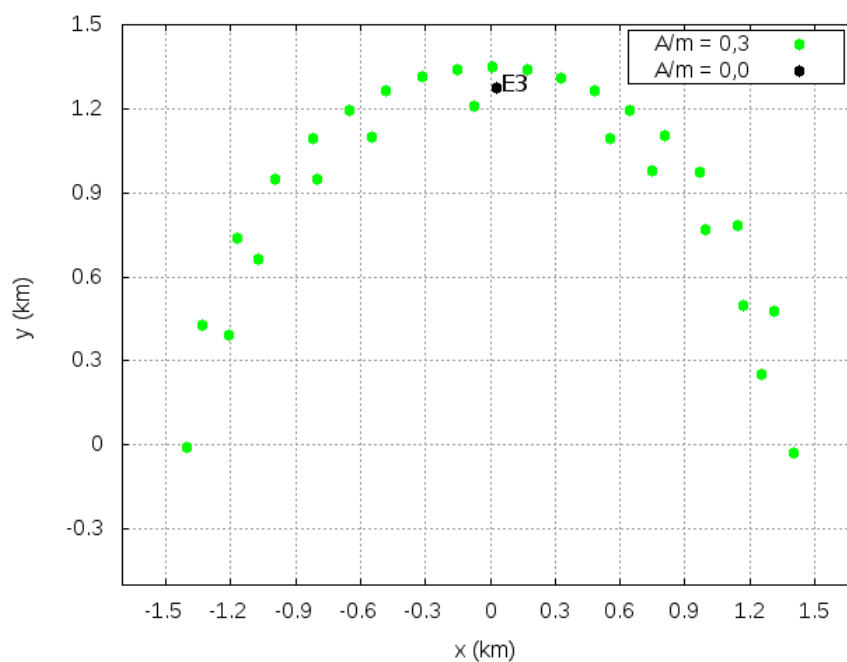


Figura 6.5: Movimentação do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus com efeito da F_p no periélio, conforme o ângulo entre o Sol e o objeto varia. A/m indica o valor da razão área-massa (σ) em m^2/kg de uma partícula esférica orbitando na vizinhança do ponto E_3 .

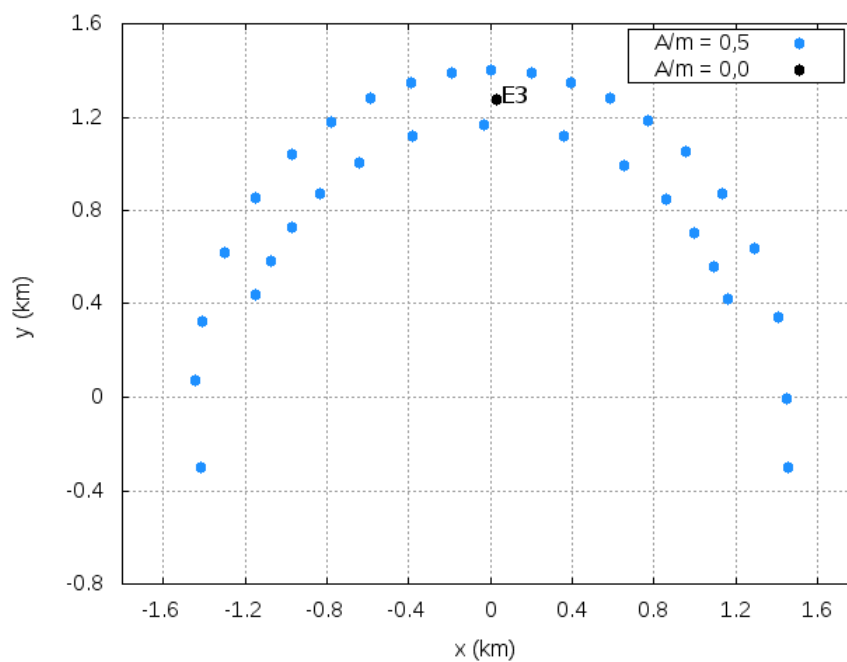


Figura 6.6: Movimentação do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus com efeito da F_p no periélio, conforme o ângulo entre o Sol e o objeto varia. A/m indica o valor da razão área-massa (σ) em m^2/kg de uma partícula esférica orbitando na vizinhança do ponto E_3 .

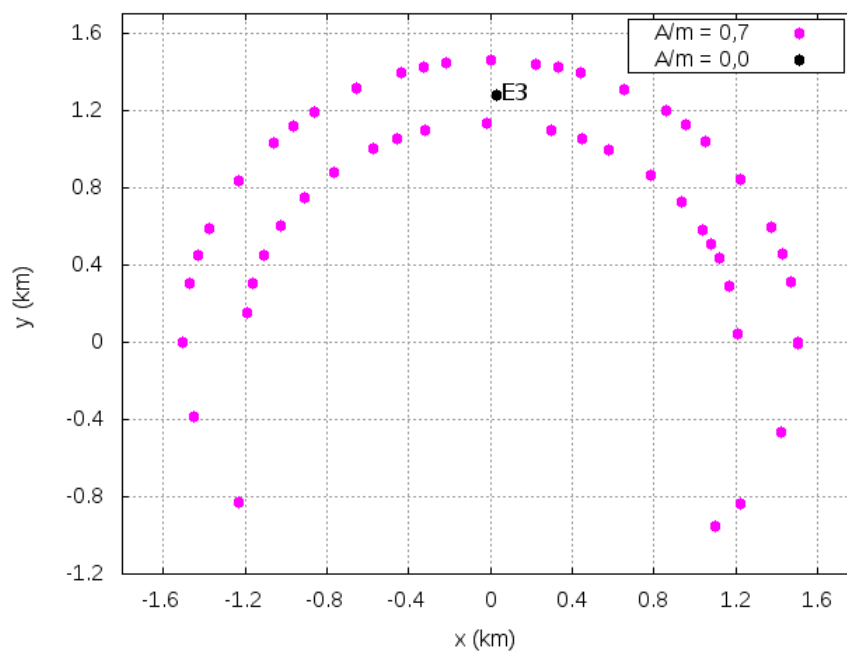


Figura 6.7: Movimentação do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus com efeito da F_p no periélio, conforme o ângulo entre o Sol e o objeto varia. A/m indica o valor da razão área-massa (σ) em m^2/kg de uma partícula esférica orbitando na vizinhança do ponto E_3 .

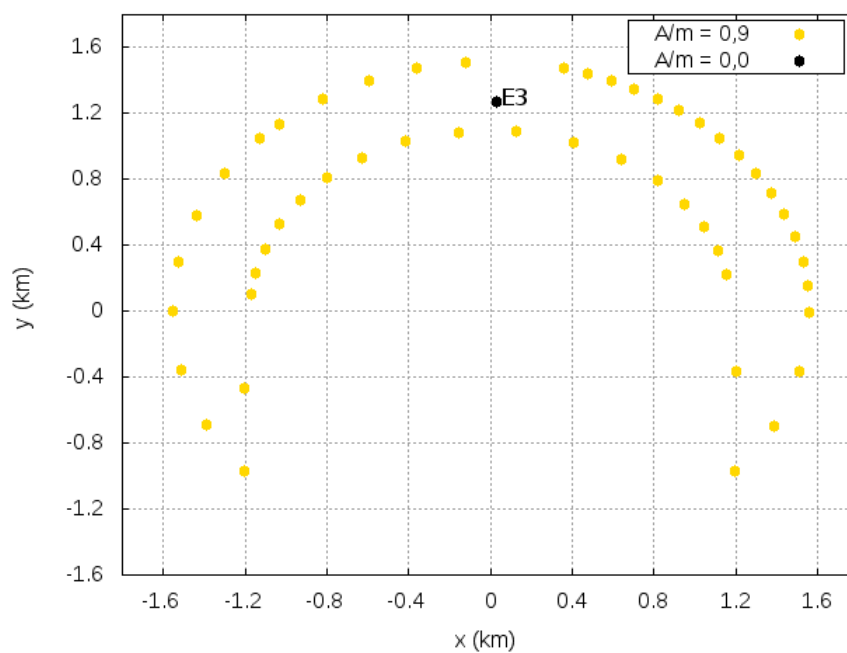


Figura 6.8: Movimentação do ponto de equilíbrio E_3 do asteroide 2063 Bacchus com efeito da F_p no periélio, conforme o ângulo entre o Sol e o objeto varia. A/m indica o valor da razão área-massa (σ) em m^2/kg de uma partícula esférica orbitando na vizinhança do ponto E_3 .

Nós encontramos apenas os pontos equivalentes referente a movimentação do ponto E_3 sob o efeito da F_p . No entanto, os demais pontos no campo gravitacional de 2063 Bacchus também irão sofrer essa perturbação e conseqüentemente suas localizações vão ser alteradas conforme o ângulo ϕ varia, e assim iremos ter os pontos equivalentes.

Como a F_p afeta muito mais no periélio, optamos por não apresentar os resultados da movimentação do ponto E_3 quando essa força atinge o afélio, uma vez que as figuras são análogas as que apresentamos. No afélio a região de movimentação dos pontos equivalentes têm amplitude menores.

Capítulo 7

Considerações Finais

Por muito tempo, como consequência da falta de recursos para fazer análise, não foi dada a devida atenção aos asteroides no que se refere às propriedades físicas e constituição. Visto que permanecem praticamente inalterados há bilhões de anos e, sendo assim, estudos em asteroides poderiam revelar muito sobre o Sistema Solar na sua juventude.

Não muito tempo atrás é que se descobriu sua importância para a obtenção de informações que levam a saber sobre a origem e evolução do Sistema Solar. No entanto, para esse estudo foi necessário ter em mãos as dimensões desses corpos. Como são objetos pequenos desenvolveram-se técnicas baseadas na incidência e reflexão da luz sobre o objeto observado, e melhorou-se as análises. É importante obtermos informações sobre a composição, superfície, estrutura, formação e o campo gravitacional de asteroides. Essas informações possibilitarão entender a origem e evolução do Sistema Solar e, possivelmente, até a origem de vida na Terra, e desenvolver estratégias que visem diminuir os riscos para proteger nosso planeta de possíveis impactos de asteroides.

Mostramos nesse trabalho como pequenos corpos irregulares, como asteroides, podem ter o seu formato e o campo gravitacional modelados pelo método de poliedros. Dessa forma, aplicamos esse método para o asteroide 2063 Bacchus e obtivemos resultados satisfatórios. Além disso, plotamos as curvas de velocidade zero desse objeto e com o auxílio dessas curvas conseguimos identificar regiões que delimitariam possíveis pontos de equilíbrio. Então, encontramos quatro pontos de equilíbrio externos e um ponto interno no campo gravitacional de 2063 Bacchus e analisamos a estabilidade linear desses pontos.

No entanto, surgiu a seguinte questão: será que a estrutura (localização e estabilidade) desses pontos de equilíbrio se altera quando alteramos um determinado parâmetro? Uma vez que é viável a velocidade de rotação desse objeto sofrer um acréscimo ou um decréscimo devido ao efeito YORP, por exemplo, e também há o caso em que a densidade do corpo pode não ser aquela que encontramos na literatura, e sim um outro valor dife-

rente, já que não sabemos precisamente a composição e estrutura dos asteroides. Dessa forma, alteramos os parâmetros período de rotação e densidade do asteroide 2063 Bacchus. Concluimos então que a estrutura dos pontos de equilíbrio mudou quando alteramos esses parâmetros. Observamos que a alteração do período de rotação provocou a fusão e o desaparecimento de alguns pontos, bem como a mudança na avaliação da estabilidade linear. Portanto, conforme já constatado na pesquisa de Jiang, Baoyin & Li (2015), quando um determinado parâmetro se altera os pontos de equilíbrio mudam de localização e temos que analisar novamente a estabilidade.

Além disso, quando levamos em consideração a força de pressão de radiação solar no ponto de equilíbrio E_3 de 2063 Bacchus, notamos que conforme o ângulo entre o Sol e o asteroide se altera o ponto de equilíbrio também se desloca para outra posição, varrendo assim uma determinada área ao redor do ponto calculado sem o efeito da força de pressão de radiação. Em volta dessa área o ponto de equilíbrio, agora denominado de ponto equivalente, faz um percurso em que é possível enxergar suas posições conforme o ângulo muda de 0° a 360° .

Ademais, se conseguirmos um ponto externo estável no campo gravitacional do objeto estudado podemos pensar na possibilidade da existência de nuvens de partículas compreendidas na região entre o ponto de equilíbrio calculado sem pressão de radiação e o caminho que o ponto equivalente faz ao redor desse ponto quando se introduz a pressão de radiação. Para isso, podemos analisar os diferentes tamanhos que essas partículas poderiam assumir, bem como as possíveis densidades. Por se tratar de um ponto estável as partículas poderiam muito bem estar numa região próxima ao ponto e permanecerem ali por um longo período de tempo. Entretanto, para o asteroide 2063 Bacchus não encontramos pontos estáveis e ao analisarmos pontos de equilíbrio no campo gravitacional de outros objetos, os do capítulo 5, encontramos somente pontos instáveis, exceto os pontos internos. No entanto, o nosso objetivo a partir desse estudo é procurar corpos irregulares, asteroides ou cometas, que tenham pelo menos um ponto externo estável para que possamos aplicar a ideia da ocorrência de partículas próximas ao ponto.

Assim, os resultados obtidos são importantes para se aplicar no estudo de controle de órbitas ao redor de corpos irregulares. Quando se deseja manobrar um veículo ao redor de um corpo com forma não esférica é fundamental levar em consideração os efeitos da gravidade e rotação do objeto, pois eles perturbam uma órbita ao seu redor mais intensamente quando próximo a ele. De acordo com as condições iniciais, essas perturbações podem gerar trajetórias que escapam, colidem, ou que aos poucos tem a órbita alterada até o impacto no corpo. Faz-se necessário também estudar a dinâmica perto dos pontos de equilíbrio desses objetos, com a finalidade de permitir o controle do movimento de uma

nave espacial perto desse corpo. Dessa forma, uma próxima etapa seria trabalhar com o intuito de conseguirmos obter as órbitas do asteroide 2063 Bacchus, ou um outro corpo irregular que tenha os dados de vértices e faces disponibilizados, e analisar o comportamento dos seus elementos orbitais num determinado intervalo de tempo. Vamos trabalhar a fim de incluir as três perturbações: a elipsidade da órbita do asteroide, o campo gravitacional desse corpo irregular e a força de pressão de radiação solar considerando o fator de eclipse.

Referências bibliográficas

BENNER, L. A. M. et al. *Radar Observations of Asteroid 2063 Bacchus*. Icarus, v. 139, p. 309-327, 1999.

BROUCKE, R. A. & ELIPE, A. *The dynamics of orbits in a potential field of a solid circular ring*. Regul. Chaotic Dyn., v. 10, p. 129-143, 2005.

CHANUT, T. G. G., WINTER, O. C., & TSUCHIDA, M. *3D stability orbits close to 433 Eros using an effective polyhedral model method*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 438, p. 2672-2682, 2014.

CHANUT, T. G. G. et al. *3D plausible orbital stability close to asteroid (216) Kleopatra*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 452, p. 1316-1327, 2015.

ELIPE, A. & LARA, M. *A simple model for the chaotic motion around (433) Eros* Adv. Astron. Sci. 116, p. 1-15, 2004.

ESA. *European Space Agency*.

Disponível em: <<http://neo.ssa.esa.int/web/guest>>;

<<http://neo.ssa.esa.int/search-for-objects?sum=1des=2063Bacchus>>

Acesso em: 01/05/2016.

FARNHAM, T. L. & JORDA, L. *Shape Model of Asteroid 2867 Steins, RO-A-OSINAC/OSIWAC-5-STEINS-SHAPE-V1.0*. NASA Planetary Data System, 2013.

FARNHAM, T. L. & THOMAS, P. C. *Plate Shape Model of Comet 9P/Tempel 1 V2.0, DIF-C-HRIV/ITS/MRI-5-TEMPEL1-SHAPE-MODEL-V2.0*. NASA Planetary Data System, 2013.

GOLUBOV, O. et al. *Physical models for the normal YORP and diurnal Yarkovsky effects*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 458, p. 3977-3989, 2016.

HIRABAYASHI, M. & SCHEERES, D. J. *Analysis of asteroid (216) Kleopatra using dynamical and structural constraints*. The Astrophysical Journal, v. 780:160 (11pp), 2014.

HU, W. & SCHEERES, D. J. *Numerical determination of stability regions for orbital motion in uniformly rotating second degree and order gravity fields*. Planetary & Space Science, v. 52, p. 685-692, 2004.

HUAMAN, M. *Mobilidade asteroidal induzida por encontros próximos com vários asteroides massivos. 2013*. Dissertação (Mestrado em Física). Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2013. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/87024>>.

HUDSON, R. S. et al. *Radar Observations and Physical Model of Asteroid 6489 Golevka*. Icarus, v. 148, p. 37-51, 2000.

JIANG, Y. *Equilibrium Points and Periodic Orbits in the Vicinity of Asteroids with an Application to 216 Kleopatra*. Earth, Moon and Planets, DOI 10.1007/s11038-015-9464-z, 2015.

JIANG, Y. et al. *Orbits and manifolds near the equilibrium points around a rotating asteroids*. Astrophysics & Space Science, v. 349, p. 83-106, 2014.

JIANG, Y., BAOYIN, H., & LI, H. *Collision and annihilation of relative equilibrium points around asteroids with a changing parameter*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 452, p. 3924-3931, 2015.

JIANG, Y. & BAOYIN, H. *Orbital Mechanics near a Rotating Asteroid*. J. Astrophys. Astr., v. 35, p. 17-38, 2014.

JIANG, Y., YU, Y., & BAOYIN, H. *Topological classifications and bifurcations of periodic orbits in the potential field of highly irregular-shaped celestial bodies*. Nonlinear Dynam, v. 81, p. 119-140, 2015.

JORDA, L. et al. *Asteroid (2867) Steins: shape, topography and global physical properties from OSIRIS Observations*. Icarus, v. 221, p. 1089-1100, 2012.

JPL. *Solar System Dynamics*.

Disponível em: <<http://ssd.jpl.nasa.gov/?asteroids>>

Acesso em: 03/05/2016.

LIU, X., BAOYIN, H., & MA, X. *Equilibria, periodic orbits around equilibria, and heteroclinic connections in the gravity field of a rotating homogeneous cube*. Astrophysics & Space Science. v. 332 (2), p. 409-418, 2011.

MIRTICH, B. *Fast and accurate computation of polyhedral mass properties*. J. Graph. Tools 1 (2), p. 31-50, 1996.

MOTTA, G. B. *Satélites estabilizados por rotação e torque de radiação solar direta. 2011*. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Física). Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2011. Disponível

em: <<http://hdl.handle.net/11449/118354>>.

MOURA, T. S. *Estudo Preliminar do Potencial de Alguns Asteroides*. 2014. 113 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2014.

MURRAY, C. D. & DERMOTT, S. F. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

NASA. *Near Earth Object Program*.

Disponível em: <<http://neo.jpl.nasa.gov/stats/>>;

Disponível em: <<http://neo.jpl.nasa.gov/neo/groups.html>>

Acesso em: 28/04/2016.

NASA. *Solar System Exploration*.

Disponível em: <<http://solarsystem.nasa.gov/planets/asteroids/indepth>>

Acesso em: 28/05/2016.

NEESE, C. E. *Small Body Radar Shape Models V2.0. EAR-A-5-DDR-RADARSHAPE-MODELS-V2.0*. NASA Planetary Data System, 2004.

NOLAN et al. *Asteroid (101955) Bennu Shape Model V1.0. EAR-A-I0037-5-BENNUSHAPE-V1.0*. NASA Planetary Data System, 2013.

OSTRO, S. J. et al. *Radar Observations of Asteroid 216 Kleopatra*. Science, v. 288, p. 836, 2000.

SCHEERES, D. J. *Dynamics about Uniformly Rotating Triaxial Ellipsoids: Applications to Asteroids*. Icarus, v. 110, p. 225-238, 1994.

SCHEERES, D. J. *Rotational fission of contact binary asteroids*. Icarus, v. 189, p. 370-385, 2007.

SCHEERES, D. J. et al. *Orbits Close to Asteroid 4769 Castalia*. Icarus, v. 121, p. 67-87, 1996.

SCHEERES, D. J. et al. *Dynamics of Orbits Close to Asteroid 4179 Toutatis*. Icarus, v. 132, p. 53-79, 1998.

SCHEERES, D. J., WILLIAMS, B. G., & MILLER, J. K. *Evaluation of the Dynamic Environment of an Asteroid: Applications to 433 Eros*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, v. 23, n. 3, p. 466-475, 2000.

SCHEERES, D. J. et al. *The Actual Dynamical Environment About Itokawa*. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Keystone, Colorado, 2006.

TSOULIS, D. *Analytical computation of the full gravity tensor of a homogene-*

ous arbitrarily shaped polyhedral source using line integrals. Geophysics, v. 77, n. 2, p. F1-F11, 2012.

TSOULIS, D. & PETROVIC, S. *On the singularities of the gravity field of a homogeneous polyhedral body.* Geophysics, v. 66, p. 535-539, 2001.

XIN, X. et al. *Dynamical substitutes of equilibrium points of asteroids under solar radiation pressure.* IAU XXIX General Assembly, 2015.

WANG, X., JIANG, Y., & GONG, S. *Analysis of the Potential Field and Equilibrium Points of Irregular-shaped Minor Celestial Bodies.* Astrophysics & Space Science, v. 353, p. 105-121, 2014.

WERNER, R. A. *The gravitational potential of a homogeneous polyhedron.* Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, v. 59, p. 253-278, 1994.

WERNER, R. A. & SCHEERES, D. J. *Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia.* Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, v. 65, p. 313-344, 1997.

YU, Y. & BAOYIN, H. *Orbital Dynamics in the vicinity of asteroid 216 Kleopatra.* The Astronomical Journal, v. 143, p. 62-70, 2012.