

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**ÁLVARO DE MARTINO LOURENÇÃO**

**UMA PROPOSTA DE MODELO E MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PARA SISTEMAS  
DE ESTOQUE MULTIPRODUTOS**

**BAURU**

**2016**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**ÁLVARO DE MARTINO LOURENÇÃO**

**UMA PROPOSTA DE MODELO E MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PARA SISTEMAS  
DE ESTOQUE MULTIPRODUTOS**

Dissertação de mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Engenharia de Produção pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, UNESP, Campus Bauru.

Orientadora: Prof. Dra. Edméa Cássia Baptista

Co-orientador: Prof. Dr. Fernando Bernardi de Souza.

**BAURU**

**2016**

Lourenção, Álvaro De Martino.

Uma proposta de modelo e método de otimização para sistemas de estoque multiprodutos / Álvaro De Martino Lourenção , 2016  
86 f.

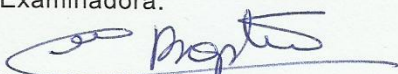
Orientador: Edméa Cássia Baptista

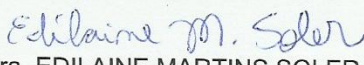
Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2016

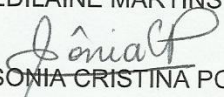
1. Sistemas de estoque multiprodutos. 2. Ponto de reposição. 3. Revisão periódica. 4. Otimização. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado de ÁLVARO DE MARTINO LOURENÇÃO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, DA FACULDADE DE ENGENHARIA.**

Aos 04 dias do mês de julho do ano de 2016, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Profa. Dra. EDILAINE MARTINS SOLER do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Profa. Dra. SONIA CRISTINA POLTRONIERE SILVA do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de ÁLVARO DE MARTINO LOURENÇÃO, intitulada **UMA PROPOSTA DE MODELO E MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PARA SISTEMAS DE ESTOQUE MULTIPRODUTOS**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

  
Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA

  
Profa. Dra. EDILAINE MARTINS SOLER

  
Profa. Dra. SONIA CRISTINA POLTRONIERE SILVA

## AGRADECIMENTOS

À Profa. Dr. Edméa Cássia Baptista, por sua dedicação e paciência na orientação desta pesquisa.

Ao meu coorientador Prof. Dr. Fernando Bernardi de Souza por sua disposição e colaboração com o trabalho realizado.

Às professoras Dra. Edilaine Martins Soler, Dra. Sônia Cristina Poltroniere Silva e Dra. Adriana Cristina Cherri Nicola pelas valiosas sugestões dadas no Exame de Qualificação e Defesa da Dissertação.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Produção Dr. Enzo Barberio Mariano, Dr. Charbel José Chiapetta Jabbour, Dr. Renato de Campos e Dr. Antônio Fernando Crepaldi por todo o conhecimento adquirido nas disciplinas do programa de pós-graduação.

Aos funcionários da Seção Técnica de Pós-graduação da Faculdade de Engenharia pela orientação e cuidados quanto aos trâmites legais e institucionais.

À minha esposa Natacha por todo o apoio, carinho e paciência que teve durante todo o período do trabalho, estando ao meu lado nos momentos mais difíceis.

Aos familiares e amigos pelos momentos alegres e agradáveis que passei durante esse período.

A Deus pela força, sabedoria, tranquilidade e saúde indispensáveis em todos os grandes projetos de vida.

## RESUMO

LOURENÇÃO, Á. M. Uma proposta de modelo e método de otimização para sistemas de estoque multiprodutos. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Bauru.

A gestão de estoque pode ser considerada como um dos principais componentes do planejamento e controle da produção. Na literatura acadêmica, inúmeros modelos matemáticos são apresentados para a gestão de estoque, os quais se referem a diferentes aspectos relacionados a essa gestão. O desenvolvimento de modelos de estoque eficientes e a adoção de métodos de otimização adequados para resolução desses modelos são necessários para o suporte à tomada de decisão. Neste trabalho, propõe-se um novo modelo de estoque que considera múltiplos produtos e múltiplas restrições de recursos, explorando o conceito de ponto de reposição e revisão periódica. Este problema é formulado como um problema de otimização não linear inteiro misto. Explora-se para a resolução deste modelo, uma abordagem baseada no método de *Branch and Bound* com o método de pontos interiores para a resolução dos problemas da árvore de busca. Testes computacionais são realizados com o modelo proposto e o método de resolução adotado. Os resultados obtidos evidenciam os seus potenciais para trabalhar com sistemas de estoque multiprodutos com múltiplas restrições.

**Palavras-chave:** sistemas de estoque multiprodutos, ponto de reposição, revisão periódica, otimização.

## **ABSTRACT**

LOURENÇÃO, Á. M. A proposal model and optimization method for multiproduct inventory systems. 2016. Master's Thesis (Production Engineering) – Engineering School, UNESP – Sao Paulo State University, Bauru.

Inventory management can be considered as one of the main components of planning and production control. In the academic literature, numerous mathematical models are presented for the inventory management, which refer to different aspects related to such a management. The development of efficient inventory models and the adoption of appropriate optimization methods for solving these models are needed to support decision-making. In this work, we propose a new inventory model that considers multiple products and multiple resource constraints, exploring the concept of replacement point and periodic review. This problem is formulated as a mixed integer non-linear optimization problem. For solving this model, an approach based on Branch and Bound method with interior point method for solving the search tree problems is explored. Computational tests are performed with the proposed model and the resolution method adopted. The obtained results show their potential to work with multiproduct inventory systems with multiple constraints.

**Keywords:** multiproduct inventory systems, replacement point, periodic review, optimization.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Alguns aspectos relacionados com a gestão de estoque.....	15
Figura 2 - Sistema de ponto de reposição .....	23
Figura 3 - Modelagem para a determinação dos parâmetros do sistema de ponto de reposição.....	23
Figura 4 - Custos totais do sistema de gestão de estoques da figura 3 .....	24
Figura 5 - Sistema de revisão periódica.....	26
Figura 6 - Aproximação linear por partes da função do número de pedidos.....	35
Figura 7 - Divisão dos intervalos da função do número de pedidos.....	36



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros utilizados na 1ª etapa de testes.....	46
Tabela 2 – Dimensões dos modelos da 1ª etapa de testes.....	46
Tabela 3 – Valores ótimos do algoritmo de Rosenblatt e dos modelos das seções 4.1, 4.2, 4.3, e 6.1.....	47
Tabela 4 – Parâmetros, referentes aos produtos, utilizados na 2ª etapa de testes .....	48
Tabela 5 – Parâmetros, referentes às restrições, utilizados na 2ª etapa de testes .....	49
Tabela 6 – Dimensões dos modelos da 2ª etapa de testes .....	49
Tabela 7 – Valores ótimos dos modelos das seções 4.1, 4.2, 4.3 e 6.1.....	50
Tabela 8 – Valores, limites inferior e superior dos parâmetros utilizados na 3ª etapa de testes.....	51
Tabela 9 – Limites inferior e superior da disponibilidade do recurso $r$ utilizados na 3ª etapa de testes.....	52
Tabela 10 – Dimensões dos problemas da 3ª etapa de testes.....	53
Tabela 11 – Alguns resultados dos problemas da 3ª etapa de testes.....	54

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	11
1.1 Questão de pesquisa.....	12
1.2 Objetivos da pesquisa.....	12
1.2.1 Objetivos específicos .....	13
1.3 Metodologia de pesquisa.....	13
1.4 Justificativas .....	13
1.5 Estrutura da dissertação .....	14
<b>2 HISTÓRICO DOS MODELOS DE GESTÃO DE ESTOQUES</b> .....	15
2.1 Os diferentes aspectos abordados nos modelos de gestão de estoques.....	16
2.2 Modelos de sistemas de estoques multiprodutos.....	17
<b>3 PRINCIPAIS SISTEMAS DA GESTÃO DE ESTOQUES</b> .....	22
3.1 O sistema de ponto de reposição.....	22
3.2 O sistema de revisão periódica.....	25
<b>4 MODELOS PARA A OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE ESTOQUE MULTIPRODUTOS COM UMA OU MAIS RESTRIÇÕES</b> .....	28
4.1 Modelo de ponto de reposição multiproduto com restrição de orçamento.....	28
4.2 Modelo de revisão periódica multiproduto com restrição de orçamento.....	29
4.3 Modelo linear multiproduto com múltiplas restrições.....	31
<b>5 UM NOVO MODELO DE OTIMIZAÇÃO PARA SISTEMAS DE ESTOQUE MULTIPRODUTOS</b> .....	37
<b>6 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO PARA MODELOS NÃO LINEARES E INTEIROS</b> .....	39
6.1 Método de Branch and Bound.....	39
6.2 Método de pontos interiores .....	41
<b>7 RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	45
7.1 1ª etapa de testes.....	45
7.2 2ª etapa de testes.....	47
7.3 3ª etapa de testes.....	51
<b>8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> .....	56
<b>TRABALHOS PUBLICADOS EM CONGRESSOS E SUBMETIDOS À PERIÓDICOS</b> .....	58

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	59
<b>APÊNDICE A</b> – Algoritmo de Rosenblatt para uma restrição de orçamento.....	65
<b>APÊNDICE B</b> – Parâmetros da 3ª etapa de testes.....	67
<b>APÊNDICE C</b> – Resultados da 3ª etapa de testes.....	80

## 1 INTRODUÇÃO

A gestão de estoques é, tradicionalmente, um dos principais componentes do planejamento e controle da produção e envolve uma série de conceitos relativos a processos, custos, decisões e políticas que, além de permitir um melhor entendimento do funcionamento de um sistema produtivo, é um importante instrumento de vantagem competitiva (SLACK *et al.*, 2009). Alguns trabalhos, como o apresentado por Koumanakos (2008), indicam uma relação entre a gestão de estoque e o desempenho financeiro da organização. Vastag e Whybark (2005) relatam pesquisas que mostram evidências que existe um efeito em cadeia positivo entre o desempenho do estoque e a utilização de outras práticas de manufatura, com consequente melhoria do desempenho de outras áreas.

A literatura acadêmica apresenta inúmeros modelos matemáticos voltados para a gestão de estoques. Esses modelos referem-se a diversos aspectos relacionados ao controle de estoque. Os diferentes ambientes de negócios no qual as empresas estão inseridas e as características de produção e distribuição também são fatores que explicam essa diversidade de modelos.

Um dos contextos abordados nesses modelos são os sistemas de estoque de múltiplos produtos, denominados na literatura como modelos de estoque multiprodutos. Page e Paul (1976), Maloney e Klein (1993), Bassok, Anupindi e Akella (1999), Ghalebsaz-Jeddi, Shultes e Haji (2004), Haksever e Moussourakis (2005; 2008), Rezaei e Davoodi (2008), Zhou, Chen e Ge (2013) e Feng *et al.* (2014) são alguns exemplos de autores que desenvolveram modelos multiprodutos associados a vários aspectos como restrições de orçamento e espaço físico; demandas de diversas características: determinísticas, estocásticas, incertas, irregulares, etc.; *lead times* fixos e variáveis; ambientes internos ou cadeia de suprimentos, entre outros. Em relação às restrições, alguns desses modelos consideram uma única restrição, por exemplo de orçamento, como Page e Paul (1976) e Rosenblatt (1981) enquanto outros consideram múltiplas restrições, como Haksever e Moussourakis (2005; 2008), Taleizadeh, Aryanezhad e Niaki (2008) e Güder e Zydiak (1999).

Ao longo do tempo, os modelos de estoque desenvolveram-se no sentido de incorporar aspectos que representassem as diferentes características dos sistemas produtivos, podendo assim gerar soluções esperadas pelas empresas. Modelos de estoque multiprodutos que consideram múltiplas restrições são mais atuais, exigem métodos de solução mais complexas e processamento computacional razoavelmente rápido, mostrando-se um promissor campo de pesquisa.

Os modelos de estoque multiprodutos encontrados na literatura, apresentam diferentes formulações matemáticas devido às restrições que são levadas em consideração. Para modelar esse problema os pesquisadores têm utilizado abordagens de otimização não lineares e lineares. Em algumas das formulações não lineares são utilizadas técnicas de linearização para que possam ser utilizados métodos de otimização linear para resolução, devido à simplicidade de sua aplicação. A maioria dos trabalhos que utilizam formulações não lineares adota técnicas de otimização não determinística para resolvê-los como, por exemplo, Mondal e Maiti (2002) e Zhou, Chen e Ge (2013) que usam algoritmos genéticos.

Neste trabalho, formulamos um modelo de programação não linear inteiro misto para o problema de estoque multiproduto, baseado no trabalho de Haksever e Moussourakis (2005). O modelo proposto foi resolvido por uma técnica de otimização determinística baseada no método de *Branch and Bound* com o método de pontos interiores.

### **1.1 Questão de pesquisa**

A partir de uma revisão bibliográfica detectou-se alguns trabalhos que utilizam modelos de otimização não lineares e lineares, para abordar o problema de estoque multiproduto, como será apresentado no capítulo 2.

Esses trabalhos utilizam técnicas de programação linear como o método simplex e suas variações, métodos lagrangianos e métodos não determinísticos, como o algoritmo genético, para a resolução dos modelos.

Neste contexto, tem-se a questão motivadora dessa pesquisa: é possível formular um modelo de estoque multiproduto como um problema não linear inteiro misto e resolvê-lo através de uma abordagem baseada no método de *Branch and Bound* com o método de pontos interiores?

### **1.2 Objetivos da pesquisa**

O objetivo geral da pesquisa é propor um modelo de otimização para sistemas de estoque multiprodutos com múltiplas restrições e uma abordagem de resolução. Esse modelo é formulado como um problema de otimização não linear inteiro misto e a abordagem de resolução utilizada é baseado no método de *Branch and Bound* com o método de pontos interiores para a resolução dos problemas da árvore de busca. Espera-se obter resultados que atendam as necessidades das empresas.

### **1.2.1 Objetivos específicos**

Para se atingir o objetivo geral da pesquisa foi necessário o cumprimento de objetivos específicos. São eles:

- Investigar os modelos existentes na literatura e os métodos utilizados na resolução desses modelos;
- Elaborar exemplos que permitam comparar os modelos e métodos de solução encontrados na literatura com o modelo e método de solução proposto neste trabalho;
- Comprovar a eficiência do modelo proposto através dos resultados obtidos na realização de testes computacionais.

### **1.3 Metodologia de pesquisa**

A metodologia empregada na pesquisa tem caráter teórico e quantitativo. Foi realizada uma investigação na literatura sobre modelos de estoque multiprodutos com múltiplas restrições e de um método de otimização não lineares para a resolução de problemas de programação não lineares inteiro mistos. Testes computacionais foram realizados para se verificar a eficiência do método de otimização discutidos neste trabalho, na resolução de diferentes modelos encontrados na literatura e para a comprovação da eficácia do modelo proposto em problemas com diferentes dimensões.

### **1.4 Justificativas**

Segundo Haksever e Moussourakis (2005), a tomada de decisão em sistemas de estoque multiprodutos é um desafio para os gerentes, porque ela está sujeita a várias restrições na forma de limitação de recursos como orçamento, espaço físico e peso máximo de produtos que podem ser estocados. O gerenciamento dessas restrições em um modelo matemático e a escolha do método de solução nem sempre é uma tarefa simples. Desse modo uma investigação dos modelos existentes e aprimoramentos são necessários.

Observou-se que existem diversos trabalhos que abordam o tema, porém são raros os trabalhos que ao formular o modelo de estoque multiproduto como um problema de otimização não linear, o resolvem através de técnicas de otimização determinísticas. A grande maioria dos trabalhos considera a linearização das restrições não lineares, o que aumenta a dimensão dos problemas, ou algoritmos não determinísticos para determinar a sua solução, os

quais não garantem a determinação do ótimo.

Sendo assim, ao representar-se o problema de estoque multiproduto, através de modelos de otimização não lineares inteiro mistos e ao propor uma abordagem determinística eficiente para resolvê-lo, pretende-se obter resultados mais próximos da realidade, quando comparados aos modelos lineares.

## **1.5 Estrutura da dissertação**

Este trabalho está dividido da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta um histórico dos modelos de gestão de estoque multiproduto; no capítulo 3 definem-se os conceitos de sistema de ponto de reposição e de sistema de revisão periódica; no capítulo 4 são apresentados três modelos para otimização de sistemas de estoque multiprodutos da literatura; o modelo proposto neste trabalho é apresentado no capítulo 5; no capítulo 6 é apresentada uma revisão de métodos de otimização, os quais serão utilizados neste trabalho; uma análise dos resultados numéricos obtidos, a partir de testes computacionais, dos diferentes modelos e métodos é apresentada no capítulo 7, e finalmente as conclusões e propostas de trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 8.

## 2 HISTÓRICO DOS MODELOS DE GESTÃO DE ESTOQUES

Os modelos de gestão de estoques são amplamente estudados e são de grande interesse dos pesquisadores há mais de um século. Uma grande variedade de artigos sobre o tema foi publicada ao longo desses anos. O modelo de estoque apresentado por Harris (1913) denominado *Economic Order Quantity* (EOQ), e o modelo *Economic Production Quantity* (EPQ) proposto por Taft (1918) foram, posteriormente, a base para o desenvolvimento de vários modelos que incluíram fatores como, por exemplo *backorder* ou “pedidos pendentes” (CÁRDENAS-BARRÓN, 2011).

Os modelos encontrados na literatura, muitos deles com base nos sistemas tradicionais de ponto de reposição e revisão periódica, os quais serão descritos mais detalhadamente no capítulo 3, abordam diferentes situações e envolvem diversos aspectos ligados à gestão de estoques.

O esquema apresentado na Figura 1 representa alguns aspectos relacionados com a gestão de estoque.

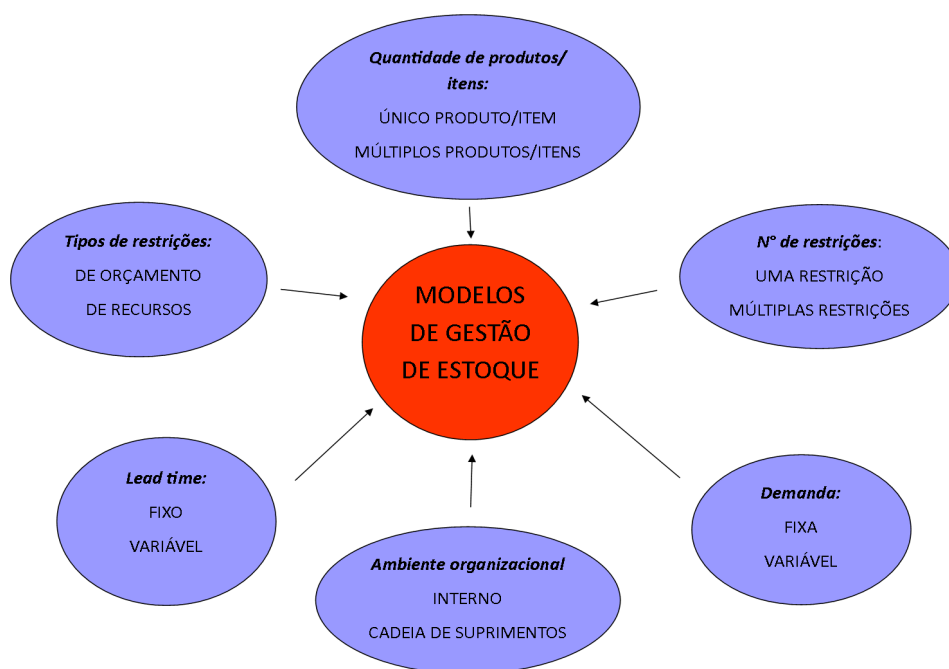


Figura 1: Alguns aspectos relacionados com a gestão de estoque

Fonte: elaborado pelo autor.



Na Seção 2.1 apresentam-se alguns trabalhos de autores que consideraram em seus modelos os diferentes aspectos apontados na Figura 1.

## 2.1 Os diferentes aspectos abordados em modelos de gestão de estoques

Modelos multiprodutos foram desenvolvidos por autores como Parsons (1966), Goyal (1974), Page e Paul (1976), Zoller (1977) e Rosenblatt (1981), entre outros. Esses modelos consideram restrições de orçamento ou espaço físico. Outros modelos multiprodutos foram desenvolvidos posteriormente considerando diferentes aspectos como a substituição de produto (Bassok, Anupindi e Akella, 1999), pedidos não atendidos (Ghalebsaz-Jeddi, Shultes e Haji, 2004) e seleção de fornecedores Rezaei e Davoodi (2008). Muitos modelos multiprodutos como o de Haksever e Moussourakis (2008), Taleizadeh, Aryanezhad e Niaki (2008) e Pasandideh, Niaki e Nia (2011), consideram também múltiplas restrições.

Outro importante fator considerado nos modelos de estoque é o tempo de ressurgimento do produto (*lead time* - *LT*). Hariga e Ben-Daya (1999) e Bookbinder e Çakanyildirim (1999) desenvolveram modelos que consideram o *lead time* variável. Outros aspectos também foram abordados nesses tipos de modelos. Çakanyildirim, Bookbinder e Gerchak (2000) apresentam um modelo em que o *lead time* varia de acordo com o tamanho do lote e Mohebbi (2003) considera em seu modelo as vendas perdidas por indisponibilidade do fornecedor.

Diferentes padrões de demanda são abordados nos modelos de estoque encontrados na literatura, como pode ser visto nos trabalhos de: Hsieh (2002), Kao e Hsu (2002) e Dutta, Chakraborty e Roy (2005), que propuseram modelos com demanda *fuzzy*; Chen e Chang (2007), que abordaram a demanda sazonal em um modelo que considera também *lead time* variável e restrições de recurso e Sana e Chaudhuri (2008), os quais desenvolveram um modelo que considera os efeitos da publicidade e os esforços de vendas na demanda futura.

Os modelos de estoque em cadeias de suprimentos é também um tema recorrente na literatura nos últimos anos. Uma revisão de modelos que consideram múltiplos fornecedores foi apresentada por Minner (2003). Rau, Wu e Wee (2003) desenvolveram um modelo para cadeia de suprimentos de produtos deterioráveis. Um modelo para produtos remanufaturados em cadeia de suprimentos foi proposto por Chung, Wee e Yang (2008). Zhou, Chen e Ge (2013) desenvolveram um modelo de controle de estoque com ressurgimento conjunto entre os elos da cadeia de suprimentos.

Para um posicionamento teórico e histórico dos modelos e métodos de solução na gestão de estoques, na Seção 2.2 é realizada uma revisão bibliográfica de artigos sobre modelos de estoques multiproduto, foco desta pesquisa, encontrados na literatura.

## **2.2 Modelos de sistemas de estoques multiprodutos**

Alguns dos primeiros modelos multiprodutos como os apresentados por Parsons (1966), Goyal (1974), Page e Paul (1976) e Zoller (1977), consideram apenas uma restrição. Rosenblatt (1981) faz uma comparação de dois métodos utilizados por esses autores e propõe um algoritmo para determinar aquele que apresenta a melhor solução. Um desses métodos é utilizado para o sistema de ponto de reposição e outro para o sistema de revisão periódica. Esses sistemas serão apresentados no capítulo 3.

Os modelos tradicionais de múltiplos produtos com ponto de reposição utilizam multiplicadores de Lagrange para determinar uma solução quando a restrição é violada (Rosenblatt, 1981). Maloney e Klein (1993) apresentam um algoritmo para determinar, rapidamente, a partir de limites iniciais um multiplicador ótimo utilizando fatores de ponderação.

Ogawa e Ohta (1995) aborda os efeitos da aprendizagem dos trabalhadores no pedido e transporte, em um modelo de estoque multiproduto com um sistema de ciclo de pedido comum. Nesse sistema os produtos são agrupados de forma que, em cada grupo, os produtos tenham o mesmo ciclo de pedido. Os efeitos da aprendizagem no pedido e transporte de produtos são definidos por funções e dependem da quantidade pedida e do número de pedidos. É apresentado um algoritmo para a determinação do número ótimo de pedidos e, também, quatro métodos heurísticos diferentes para o agrupamento dos produtos.

Além das abordagens tradicionais de ponto de reposição e revisão periódica, Güder e Zydiak (1999) citam uma terceira abordagem encontrada na literatura denominada não-estacionária. Essa abordagem considera, ao contrário das anteriores, que a quantidade pedida varia ao longo do tempo. Os autores apresentam soluções heurísticas para o modelo de revisão periódica e para a abordagem não-estacionária ao considerar múltiplas restrições e comparam os resultados computacionais dessas abordagens com os obtidos pelo modelo de ponto de reposição.

Alguns modelos propostos nas últimas décadas pressupõem variações nos sistemas de estoque multiprodutos que não eram considerados nos modelos tradicionais. Bassok, Anupindi e Akella (1999) desenvolveram um modelo de estoque multiproduto com demanda

estocástica e substituição descendente. Esse tipo de substituição ocorre quando a demanda por um produto inferior pode ser atendida pela substituição por um produto superior. Variações na demanda, ponto de ressuprimento, níveis de estoque e *leadtime* foram considerados no modelo de simulação de um sistema de estoque multiproduto desenvolvido por Badri (1999). O modelo, criado como parte de um sistema de apoio à tomada de decisão DSS (*Decision Support System*), fornece aos gestores uma visão ampla do sistema de estoque.

Flynn (2001) aborda um modelo de estoque multiproduto de revisão periódica com entrega fracionada. Diferentemente da abordagem tradicional do modelo de revisão periódica que prevê uma única entrega para cada período de revisão, esse modelo pressupõe que as entregas são mais frequentes que os períodos de revisão. De acordo com o autor, “desvinculando-se os intervalos de entrega e revisão pode-se levar a economias substanciais de custos, menores níveis de estoque e revisões menos frequentes”. O estudo apresenta um método para o cálculo de períodos de revisão ótimos e heurísticas para o sequenciamento das entregas.

Algoritmos genéticos são frequentemente utilizados para a resolução de problemas de programação não-lineares. Mondal e Maiti (2002) desenvolveram algoritmos genéticos com mutação e cruzamento aritmético inteiro para resolver modelos de estoque multiprodutos com parâmetros *fuzzy* na função objetivo e restrições imprecisas. Resultados numéricos são apresentados.

O modelo multiproduto de ponto de reposição desenvolvido por Ghalebsaz-Jeddi, Shultes e Haji (2004) considera a demanda estocástica, *backorder* ou “pedidos pendentes” e restrição de orçamento. A principal característica desse modelo é considerar que os custos de compra são pagos na chegada dos produtos, assim os níveis de estoque são considerados variáveis randômicas. Resultados numéricos obtidos por dois métodos de solução são mostrados.

Produtos deterioráveis como frutas e vegetais foram considerados no modelo multiproduto apresentado por Bhattacharya (2005). O autor desenvolve um método para otimização com estoque linear e taxa de demanda dependente do nível de estoque. O método considera a escolha de parâmetros de controle referentes às restrições do problema. Valores ótimos da função objetivo são determinados com base em valores ótimos dos parâmetros de controle.

Haksever e Moussourakis (2005) apresentam um modelo de estoque multiproduto de programação inteira-mista que considera tanto a abordagem de ponto de reposição como a de revisão periódica. Neste modelo a função número de pedidos é linearizada. Eles propõem uma

alternativa do algoritmo de Rosenblatt (1981), em que o modelo determina, ao mesmo tempo, os custos relativos para cada abordagem apontando o menor. Os autores consideram, também, múltiplas restrições e ressaltam a importância de se ter um modelo mais aderente à realidade que não trate apenas da restrição de orçamento, muito comum na literatura, mas outras como espaço e peso máximo de mercadorias que podem ser estocadas.

Um modelo de sistema de estoque multiproduto, o qual é representado matematicamente através de um problema de programação não linear inteiro misto com restrições, e resolvido utilizando-se um algoritmo genético codificado, é apresentado no trabalho de Maiti, Bhunia e Maiti (2006). Esse modelo considera duas instalações de armazenamento separadas, sendo uma própria e uma arrendada, devido à capacidade limitada do armazém próprio, e a demanda é representada como função do preço de venda, do tempo e da frequência de publicidade. Os autores apresentam exemplos numéricos e análises de sensibilidade com a utilização de diferentes parâmetros.

Outro modelo de estoque multiproduto de programação inteira-mista foi desenvolvido por Rezaei e Davoodi (2008). Eles abordaram a possibilidade de haver múltiplos fornecedores com capacidade limitada e qualidade imperfeita. O modelo considera que itens com defeitos são vendidos como um lote único com desconto no preço. Os autores utilizaram um algoritmo genético para a resolução do modelo e apresentaram um exemplo numérico para ilustrar o método.

Há modelos na literatura que consideram acordos com o fornecedor. Haksever e Moussourakis (2008) desenvolveram um modelo de estoque multiproduto com múltiplas restrições no qual são considerados descontos incrementais do fornecedor na quantidade pedida. O modelo que é baseado na aproximação linear por partes do número de funções de pedido fornece uma solução ótima aproximada da quantidade pedida que resulta em um menor custo total de pedido.

Taleizadeh, Aryanezhad e Niaki (2008) desenvolveram um modelo de estoque multiproduto com múltiplas restrições em que os períodos entre ressuprimentos são considerados variáveis aleatórias. Pedidos pendentes e vendas perdidas são considerados no modelo. Para sua resolução os autores propõem um algoritmo de programação não-linear inteira baseado no método de otimização inexata *Simulated Annealing* e apresentam dois exemplos numéricos para demonstrar a aplicabilidade do modelo.

Um método para a determinação da localização ótima de pontos de controle de estoque foi apresentado no trabalho desenvolvido por Askin e Krishnan (2009). O modelo é baseado em um sistema de produção em série, puxada, com múltiplos produtos e demanda

estocástica. O trabalho apresenta uma simulação numérica do modelo e a discussão dos resultados obtidos.

Um modelo de estoque multiproduto para itens quebráveis foi apresentado por Guchhait, Maiti e Maiti (2010). Produtos feitos de vidro, cerâmica, entre outros, são considerados quebráveis e podem ser danificados durante seu armazenamento. Nesse modelo a demanda depende linearmente do nível de estoque e a taxa de quebra do produto está relacionada linearmente com o nível de estoque e não linearmente com o tempo. O modelo é resolvido numericamente por uma técnica de otimização exata denominada GRG (*Generalized Reduced Gradient*) e as decisões finais são feitas usando-se algoritmo genético. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar casos com diferentes parâmetros.

O modelo desenvolvido por Kundu e Chakrabarti (2012) de um sistema de estoque multiproduto de revisão contínua considera a demanda estocástica e restrições de espaço e orçamento. Esta última é considerada também estocástica já que o sistema considera os custos de compras na chegada do pedido. Os autores apresentam um algoritmo para a otimização da quantidade pedida e um exemplo numérico para ilustrar o modelo.

Zhou, Chen e Ge (2013) desenvolveram um modelo de controle de estoque multiproduto com estratégia de ressuprimento conjunto entre elos da cadeia de suprimentos. Para a otimização do modelo em relação à quantidade pedida e o ciclo de pedidos os autores utilizaram algoritmos genéticos. Foi realizada uma simulação do modelo para três diferentes estratégias de pedidos incluindo a citada anteriormente.

Um modelo multiproduto e multiperíodo de revisão contínua foi apresentado por Saracoglu, Topaloglu e Keskinurk (2014). O modelo calcula a quantidade pedida e o ponto de ressuprimento ótimos sob restrições de prazo de validade, orçamento, capacidade de armazenamento e promoções de acordo com a quantidade pedida. Também é proposto um algoritmo genético para resolver problemas de grande porte e os resultados são comparados com os obtidos pelo pacote de otimização LINGO. Os autores apresentam uma aplicação do modelo proposto em uma distribuidora farmacêutica da Turquia.

Políticas de ressuprimento ótimas em um sistema de estoque multiproduto com demanda correlacionada foram desenvolvidas por Feng, Muthuraman e Deshpande (2015). De acordo com os autores, nesse sistema pode haver correlação positiva da demanda no caso de produtos considerados complementares e correlação negativa em produtos substituíveis. O trabalho apresenta um algoritmo para determinar boas políticas e exemplos computacionais, comparando essas políticas a outras encontradas na literatura.

A partir desta revisão bibliográfica pôde-se observar que existem modelos de otimização não lineares e lineares para representar os problemas de estoque multiprodutos. Alguns dos modelos não lineares são linearizados para poderem ser resolvidos através de técnicas de otimização linear devido à simplicidade de sua aplicação. A maioria dos trabalhos que utilizam modelos não lineares adota técnicas de otimização inexata para resolvê-los como, por exemplo, os algoritmos genéticos.

Neste sentido, modulamos, neste trabalho, um modelo de otimização não linear inteiro misto para o problema de estoque multiproduto, baseado no trabalho de Haksever e Moussourakis (2005), o qual será resolvido por uma técnica de otimização exata baseada no método *Branch and Bound*. Para a apresentação do modelo, serão revisados, no próximo capítulo, dois dos principais sistemas de gestão de estoques.

### **3 PRINCIPAIS SISTEMAS DA GESTÃO DE ESTOQUES**

Os sistemas de gestão de estoques procuram determinar, basicamente, o momento do ressurgimento e a quantidade a ser ressurgida. Corrêa, Gianesi e Caon (2007) apresentam o conceito de dois sistemas, tradicionalmente utilizados, que consideram itens com demanda independente uns dos outros: o sistema de ponto de reposição e o sistema de revisão periódica. Nas seções 3.1 e 3.2 apresentam-se a definição de cada sistema, respectivamente, baseado no trabalho citado.

#### **3.1 O sistema de ponto de reposição**

O sistema de ponto de reposição é também conhecido na literatura como sistema de revisão contínua ou ciclo independente. Nesse sistema propõe-se o monitoramento contínuo do nível de estoque de cada item verificando-se a quantidade restante. Se a quantidade restante é menor que uma quantidade predeterminada denominada “ponto de reposição”, libera-se a ordem de compra ou produção desse item numa quantidade definida (lote de ressurgimento). O ponto de reposição é determinado levando-se em consideração a quantidade que será consumida durante o tempo de ressurgimento (tempo entre a liberação da ordem de compra/produção e a chegada do item) e um estoque de segurança que considera as variações da demanda do item nesse período. A Figura 2 ilustra o funcionamento do sistema de “ponto de reposição”. Assumindo-se a demanda constante, pode-se aproximar o modelo representado na Figura 2 pelo modelo da Figura 3.

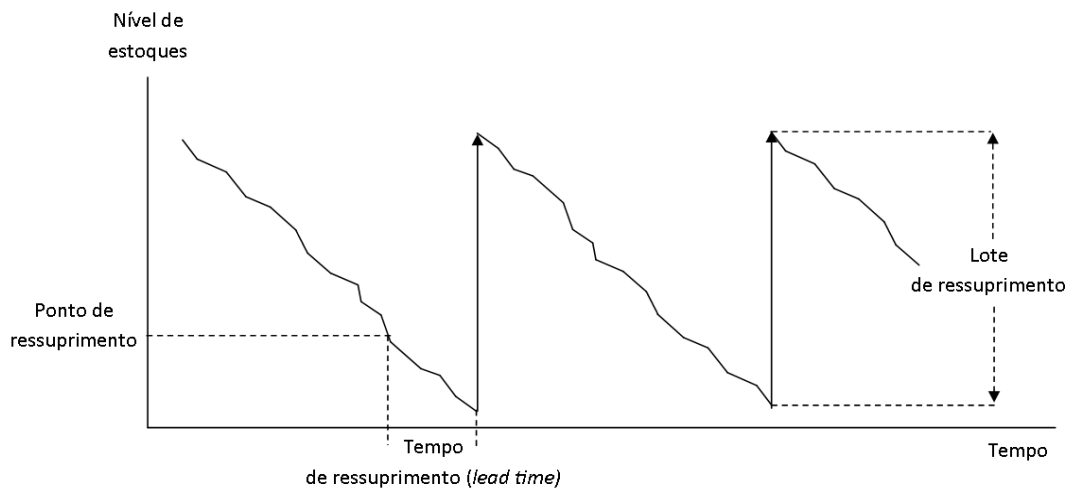


Figura 2: Sistema de ponto de reposição

Fonte: Corrêa, Gianesi e Caon (2007).

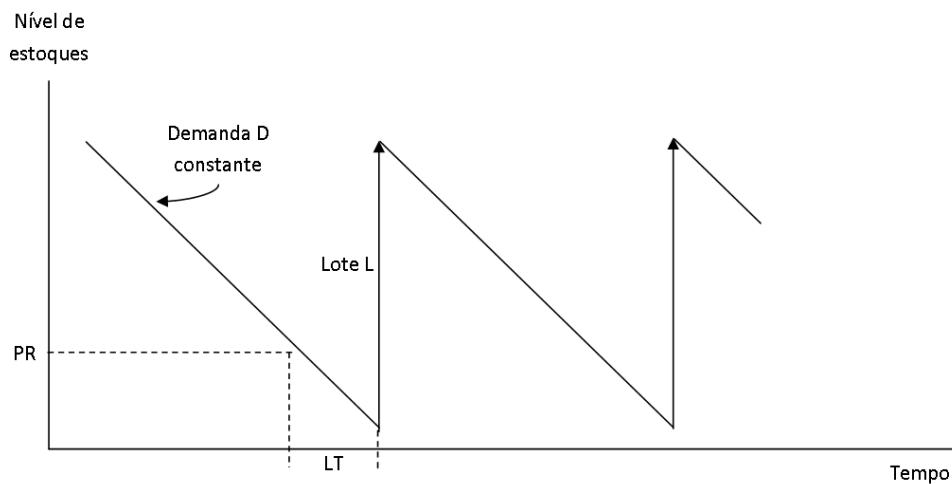


Figura 3: Modelagem para a determinação dos parâmetros do sistema de ponto de reposição

Fonte: Corrêa, Gianesi e Caon (2007).

Para o uso desse tipo de sistema é necessário definir dois parâmetros: o ponto de reposição e o tamanho do lote de reposição. Este último é definido, basicamente, por uma modelagem matemática simples que calcula o tamanho de lote que gera o menor custo total do sistema de estoque. Nessa abordagem consideram-se os custos de armazenagem ( $CA$ ) e os custos de fazer pedidos ( $CP$ ) definidos da seguinte forma:



$$CA = C_e \frac{X}{2} \quad (3.1.1)$$

em que:

$C_e$ : custo anual de estoque por unidade;

$X$ : quantidade pedida, e

$$CP = C_o \frac{D}{X} \quad (3.1.2)$$

em que:

$C_o$ : custo fixo de fazer pedido de ressuprimento;

$D$ : demanda por unidade de tempo.

Considerando-se o custo total como a soma dos custos de armazenagem com os custos de fazer pedidos, tem-se que o tamanho de lote que gera o menor custo para a operação do sistema ocorre quando os custos de armazenagem e de fazer pedidos se igualam. A figura 4 representa graficamente essa relação.

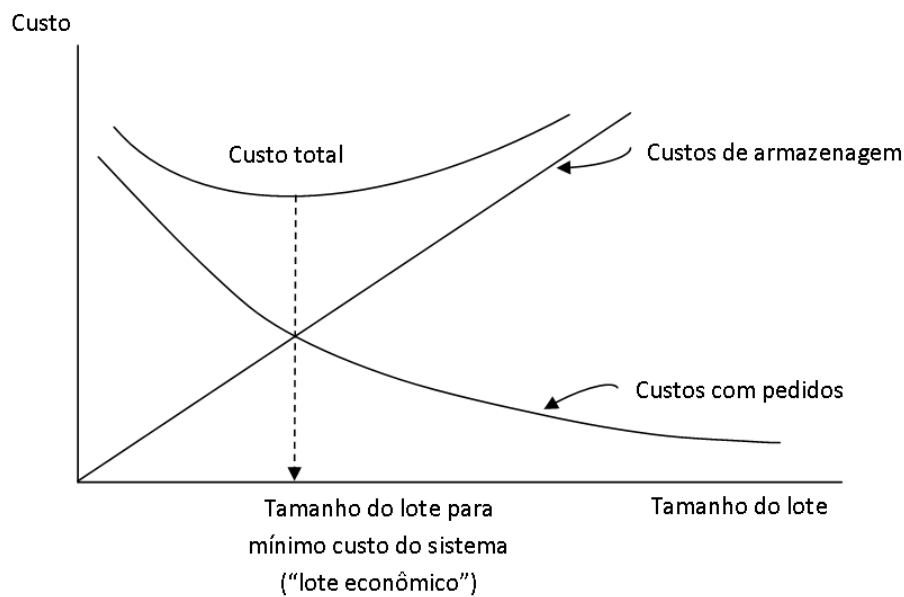


Figura 4: Custos totais do sistema de gestão de estoques da figura 3

Fonte: Corrêa, Gianesi e Caon (2007).

O tamanho de lote para que os custos totais de manutenção do sistema sejam mínimos, denominado também de, “lote econômico” ( $X_E$ ), pode ser determinado através da equação que representa a igualdade dos custos de armazenagem e de fazer pedidos:

$$C_o \frac{D}{X_E} = C_e \frac{X_E}{2} \quad (3.1.3)$$

Portanto, o lote econômico é dado por:

$$X_E = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_e}} \quad (3.1.4)$$

O ponto de ressuprimento ( $PR$ ) é definido pela multiplicação da demanda por unidade de tempo ( $D$ ), pelo tempo de ressuprimento ( $LT$ ), ambos na mesma unidade de tempo, somando-se a isso um estoque de segurança ( $E_{seg}$ ) como mostra a fórmula (3.1.5):

$$PR = D.(LT) + E_{seg} \quad (3.1.5)$$

O estoque de segurança tem a finalidade de garantir que as variações da demanda que ocorrem de forma aleatória não ocasionem falta do produto ou item. Existem diversas abordagens que levam a diferentes definições sobre o estoque de segurança tais como: abordagem probabilística e a abordagem de nível de serviço, que leva em conta o número de itens faltantes.

A formulação para o estoque de segurança tanto para a abordagem probabilística como para a abordagem de nível de serviço é a seguinte:

$$E_{seg} = FS \sigma \sqrt{\frac{LT}{PP}} \quad (3.1.6)$$

em que:

$FS$ : fator de segurança, de acordo com o nível de serviço que se pretende;

$\sigma$ : desvio-padrão estimado para a demanda futura;

$LT$ : tempo de ressuprimento;

$PP$ : periodicidade a qual se refere o desvio-padrão.

### 3.2 O sistema de revisão periódica

O sistema de revisão periódica é conhecido também, na literatura, como ciclo fixo. De acordo com Corrêa, Gianesi e Caon (2007), seu funcionamento é mais simples que o sistema de ponto de reposição, apresentado na seção 3.1. Neste sistema, o nível de estoque de cada item é verificado em períodos fixos (períodos de revisão) e ao final de cada período é definida a quantidade do item que deve ser ressuprida para que se atinja um nível predeterminado.

Esse nível considera a demanda do item no período de revisão e um estoque de segurança. A figura 5 ilustra o sistema de revisão periódica.

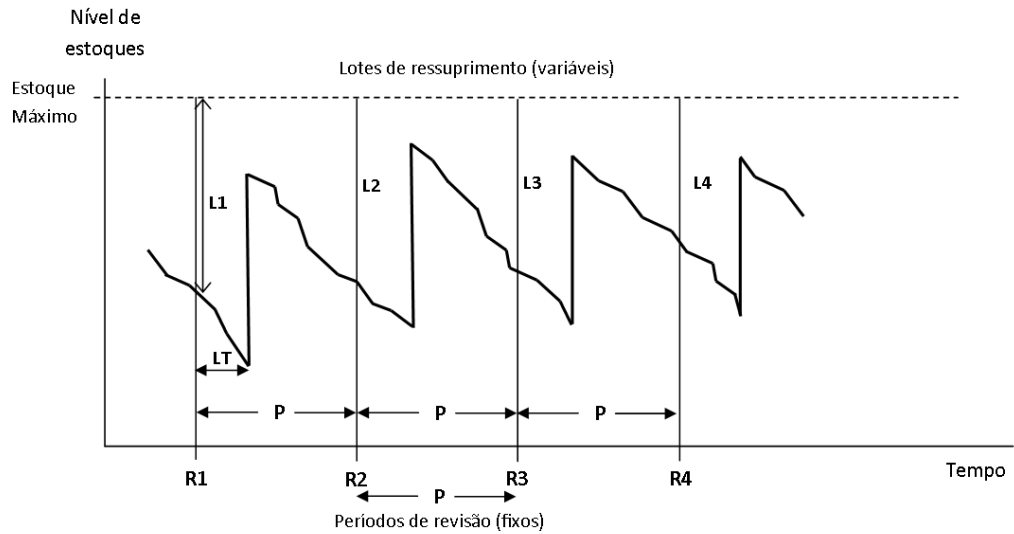


Figura 5: Sistema de revisão periódica

Fonte: Corrêa, Gianesi e Caon (2007).

A determinação da quantidade do item a ressuprir é realizada pela seguinte formulação:

$$X = M - (E + QP) \quad (3.2.1)$$

em que:

$M$ : estoque máximo;

$E$ : estoque presente;

$QP$ : quantidade pendente (já pedida) – eventual.

Como o nível máximo de estoque é definido pela fórmula:

$$M = D(T + LT) + ES \quad (3.2.2)$$

em que:

$T$ : período de tempo entre os pedidos de ressuprimento;

$ES$ : estoque de segurança;

temos que:

$$X = D(T + LT) + ES - (E + QP) \quad (3.2.3)$$

O estoque de segurança no modelo de revisão periódica tem formulação semelhante ao de ponto de reposição. Porém, é considerado, além do tempo de ressuprimento, o período de revisão, como segue:

$$E_{seg} = FS \sigma \sqrt{\frac{(T + LT)}{PP}} \quad (3.2.4)$$

As definições dos sistemas de gestão de estoques apresentados nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente, serão utilizadas no capítulo 4 para definir os modelos de otimização de estoque multiprodutos.

## **4 MODELOS PARA A OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE ESTOQUE MULTIPRODUTOS COM UMA OU MAIS RESTRIÇÕES**

Os sistemas apresentados nas seções 3.1 e 3.2 tornaram-se pontos de partida para o desenvolvimento de modelos de otimização para os sistemas de gestão de estoques. Esses, em geral, consideram parâmetros e restrições que fazem parte da realidade dos processos produtivos. Em relação aos parâmetros, podem-se ter: múltiplos produtos, múltiplos períodos, a cadeia de suprimentos, entre outros aspectos, combinados ou não. Em relação às restrições, pode-se ter uma ou várias restrições como orçamento, espaço físico, peso, prazo de validade, entre outras.

Nas seções 4.1 à 4.3, deste capítulo, são apresentados três modelos de otimização multiprodutos com uma ou mais restrições, encontrados na literatura, cujo objetivo é a minimização da função custo total. A apresentação de tais modelos deve-se ao fato que o modelo proposto neste trabalho é obtido a partir destes. Os dois primeiros modelos, apresentados nas seções 4.1 e 4.2, respectivamente, foram utilizados por Rosenblatt (1981) com o objetivo de comparar os resultados obtidos pelos sistemas de ponto de reposição e revisão periódica para, assim, determinar a melhor solução. O autor não resolve diretamente os modelos de otimização, ele propõe um algoritmo numérico (ver APÊNDICE A) para a determinação da melhor solução. Na formulação dos modelos considerou uma única restrição de orçamento.

O terceiro modelo, apresentado na seção 4.3, definido por Haksever e Moussourakis (2005), é baseado na aproximação linear por partes da função do número de pedidos e combina os dois modelos das seções 4.1 e 4.2, indicando qual deles fornece o menor custo. Os autores destacam que, nesse modelo, podem ser consideradas múltiplas restrições. Nos testes computacionais realizados para validar o modelo, os autores utilizaram o software de otimização Premium Solver Platform Version 3.5 do pacote Excel.

### **4.1 Modelo de ponto de reposição multiproduto com restrição de orçamento**

O modelo de ponto de reposição multiproduto com restrição de orçamento, apresentado por Rosenblatt (1981), minimiza o custo total de estoque, considera como variável a quantidade pedida do item, e apresenta a seguinte formulação matemática:

$$\text{Minimizar } K(X) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{C_{oj} D_j}{X_j} + ca \frac{c_j X_j}{2} \right) \quad (4.1.1)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{j=1}^n c_j X_j \leq B \quad (4.1.2)$$

$$X_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (4.1.3)$$

em que  $K(X)$  é a função objetivo que representa o custo anual total para todos os produtos.

Os parâmetros do modelo são:

$n$ : números de produtos/itens;

$C_{oj}$ : custo de fazer o pedido para o produto/item  $j$ ;

$D_j$ : demanda anual (em unidades) do produto/item  $j$ ;

$c_j$ : custo de estoque por unidade do produto/item  $j$ ;

$ca$ : custo anual de carregamento de estoque;

$B$ : investimento máximo permitido em estoque;

e as variáveis são:

$X_j$ : quantidade pedida do produto/item  $j$ ;

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$ : vetor das variáveis.

As restrições (4.1.2) são de orçamento, ou seja, o custo total do sistema deve ser menor ou igual ao investimento disponível, e a (4.1.3) garante a positividade da quantidade pedida.

Tem-se que (4.1.1)-(4.1.3) é caracterizado como um problema de otimização não linear restrito.

#### **4.2 Modelo de revisão periódica multiproduto com restrição de orçamento**

O modelo de revisão periódica multiproduto com restrição de orçamento, apresentado por Rosenblatt (1981), minimiza o custo total de estoque e considera como variável o período de tempo entre os pedidos para todos os produtos. Em seu trabalho Rosenblatt propõe dois modelos de otimização, um formulado como um problema de otimização não linear irrestrito e outro como de otimização linear, a partir do modelo (4.1.1)-(4.1.3).

No modelo não linear irrestrito considera-se a função objetivo de (4.1.1), em função da variável  $T$  (com  $T \in R_+$ ), que é o período entre pedidos para todos os produtos. Ou seja, leva-se em consideração que  $X_j = T D_j$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ , e estabelece-se a seguinte formulação:

$$\text{Minimizar } K(T) = \sum_{j=1}^n \frac{C_{oj}}{T} + \left( \frac{ca}{2} \sum_{j=1}^n c_j D_j \right) T \quad (4.2.1)$$

em que  $K(T)$  é a função objetivo que representa o custo anual total para todos os produtos; e a variável é  $T$ .

Observa-se que em (4.2.1) não é considerada a restrição de orçamento, como no modelo (4.1.1)-(4.1.3). Ao considerar a restrição de orçamento em função do tempo observa-se que é necessário determinar o tamanho máximo do período de tempo permitido pela restrição de orçamento, e para isso utiliza-se um modelo de otimização linear, formulado como segue:

$$\text{Maximizar } T_0 = \sum_{j=1}^n t_j \quad (4.2.2)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{l=j+1}^n (c_l D_l) \sum_{k=j+1}^l t_k + \sum_{l=1}^j (c_l D_l) \left( \sum_{k=1}^l t_k + \sum_{k=j+1}^n t_k \right) \leq B, \quad j = 1, \dots, \quad (4.2.3)$$

em que  $T_0$  é a função objetivo que representa o tamanho máximo de ciclo permitido pela restrição e as variáveis são:

$t_j$ : intervalo de tempo da reposição do produto  $(j-1)$  para o produto/item  $j$ ;

$t_1$ : intervalo de tempo da reposição do produto  $n$  para o produto/item  $1$ ;

$t_j \in R_+, j = 1, \dots, n$ .

Neste modelo as restrições (4.2.3) garantem que o custo total do sistema, em função do intervalo de tempo para cada produto  $j$ , seja menor ou igual ao investimento disponível  $B$ .

Em seguida, para a determinação do período ótimo entre os pedidos considerando a restrição de orçamento, calcula-se:

$$T_{\text{ótimo}} = \text{mínimo} \{T, T_0\},$$

em que  $T$  é a solução ótima de (4.2.1) e  $T_0$  é a solução ótima de (4.2.2)-(4.2.3).

### 4.3 Modelo linear multiproduto com múltiplas restrições

O modelo multiproduto com múltiplas restrições desenvolvido por Haksever e Moussourakis (2005) é formulado como um problema de otimização linear inteira mista e é baseado na aproximação linear por partes da função do número de pedidos do produto  $j$ ,

$N_j = \frac{D_j}{X_j}, j = 1, \dots, n, .$  Este modelo determina o menor custo entre o modelo de ponto de

reposição e o de revisão periódica.

O modelo segue a formulação matemática:



$$\text{Minimizar } K(N, X) = \sum_{j=1}^n \left[ C_{oj} N_j + ca c_j \left( \frac{X_j}{2} \right) \right] \quad (4.3.1)$$

$$\text{Sujeito a: } L_{ij} = a_{ij} Y_{ij} - b_{ij} X_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad e \quad i = 1, 2, \dots, p_j, \quad (4.3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{p_j} Y_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3.3)$$

$$N_j = \sum_{i=1}^{p_j} L_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3.4)$$

$$X_{ij} \geq n_{ij} Y_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad e \quad i = 1, 2, \dots, p_j, \quad (4.3.5)$$

$$X_{ij} \leq m_{ij} Y_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad e \quad i = 1, 2, \dots, p_j, \quad (4.3.6)$$

$$\sum_{i=1}^{p_j} X_{ij} = X_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3.7)$$

$$\sum_{j=1}^n w_{rj} X_j \leq MZ_1 + B_r Z_2, \quad r = 1, 2, \dots, v, \quad (4.3.8)$$

$$T_j \geq RZ_1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3.9)$$

$$T_j \leq RZ_1 + Z_2, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3.10)$$

$$T_j D_j - X_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3.11)$$

$$Z_1 + Z_2 = 1 \quad (4.3.12)$$

$$T_j, X_{ij}, X_j, N_j, L_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j, \quad (4.3.13)$$

$$Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad (4.3.14)$$

$$Z_1 \in \{0, 1\} \quad e \quad Z_2 \in \{0, 1\} \quad (4.3.15)$$

em que  $K(N, X)$  é a função objetivo que representa o custo anual total para todos os produtos.

Os parâmetros são:

$p_j$ : número de intervalos no qual a função do número de pedidos ( $N_j$ ) do produto/item  $j$  foi dividido;

$a_{ij}$ : coeficiente linear da reta do produto/item  $j$  contida no intervalo  $i$ ;  
 $b_{ij}$ : coeficiente angular da reta do produto/item  $j$  contida no intervalo  $i$ ;  
 $n_{ij}, m_{ij}$ : limites inferior e superior, respectivamente, do intervalo  $i$  no qual estão contidos os valores de  $N_j$ ;  
 $w_{rj}$ : quantidade do recurso  $r$  consumida por uma unidade do produto/item  $j$ ;  
 $r$ : restrições de recurso;  
 $v$ : número de recursos com restrição;  
 $B_r$ : disponibilidade do recurso  $r$ ;  
 $R$ :  $\text{Min}\{\tau, \tau_r; r = 1, 2, \dots, v\}$ ;  
 $\tau$ : comprimento de ciclo ótimo para o problema irrestrito;  
 $\tau_r$ : comprimento de ciclo máximo permitido pela restrição do  $r$ -ésimo recurso;  
 $M$ : constante positiva muito grande;

e as variáveis são:

$X_{ij}$ : quantidade pedida do produto/item  $j$  no intervalo  $i$ ;  
 $N_j$ : número de pedidos do produto/item  $j$ ;  
 $L_{ij}$ : número de pedidos do produto/item  $j$  se a quantidade pedida estiver no intervalo  $i$ ;  
 $T_j$ : tamanho do ciclo do produto/item  $j$ ;  
 $Y_{ij}$ : variável auxiliar do produto/item  $j$ :  $Y_{ij} = 1$ , se  $X_j \in [n_{ij}, m_{ij}]$ ;  $Y_{ij} = 0$  caso contrário,  
 $Z_1, Z_2$ : variáveis auxiliares: se  $Z_1 = 1$  e  $Z_2 = 0$ , será utilizada a abordagem de revisão periódica; se  $Z_1 = 0$  e  $Z_2 = 1$  será utilizada a abordagem de ponto de reposição.

Neste modelo, as restrições (4.3.2)-(4.3.7) dizem respeito à linearização da função número de pedidos ( $N_j$ ). As restrições de (4.3.8) verificam se a quantidade pedida dos produtos  $j$  não excede a disponibilidade dos recursos  $r, r = 1, 2, \dots, v$ , para o modelo de ponto de reposição ou se são ilimitadas para o modelo de revisão periódica. As variáveis binárias  $Z_1$  e  $Z_2$  apontam qual modelo será escolhido. As restrições (4.3.9)-(4.3.10) garantem que, se o modelo de revisão periódica for escolhido, o tamanho de ciclo ótimo final será determinado pelo mínimo entre  $\tau$  e  $\tau_r$  apresentados em (4.3.16) e (4.3.17). As restrições de (4.3.11) calculam o número de pedidos para todos os produtos. A restrição (4.3.12) assegura que apenas um dos modelos (ponto de reposição ou revisão periódica) seja escolhido. As restrições (4.3.13)-(4.3.15) são relativas às variáveis do problema.

O valor de  $\tau$ , denominado de comprimento de ciclo ótimo para o problema irrestrito, é calculado pela seguinte fórmula:

$$\tau = \sqrt{\frac{2 \sum_{j=1}^n C_{oj}}{\sum_{j=1}^n ca c_j D_j}} \quad (4.3.16)$$

o qual é obtido pela resolução de (4.2.1) e o valor de  $\tau_r$ , denominado de comprimento de ciclo máximo permitido pela restrição do  $r$ -ésimo recurso, é dado por:

$$\tau_r = \frac{2B_r}{Q_r} \quad , \text{ com } Q_r = \left[ \sum_{j=1}^n w_{rj} D_j + \frac{\sum_{j=1}^n (w_{rj} D_j)^2}{\sum_{j=1}^n w_{rj} D_j} \right] \quad (4.3.17)$$

Observa-se que a restrição (4.3.17) é uma versão com múltiplas restrições do valor de  $T_0$  apresentado no trabalho de Rosenblatt (1981) referente ao problema (4.2.2)-(4.2.3).

Tem-se que (4.3.1)-(4.3.15) é caracterizado como um problema de otimização linear inteiro misto. Observa-se que, neste modelo, a função do número de pedidos,  $N_j = \frac{D_j}{X_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , foi linearizada. Essa linearização é baseada na aproximação da função  $N_j$ , que é estritamente convexa, em uma iteração  $p$ , em uma série de funções lineares  $L_i^{(p)}$ , como mostra a Figura 6, em que  $a_i^{(p)}$  é o coeficiente linear e  $b_i^{(p)}$  é o coeficiente angular do segmento de reta, com  $i = 1, 2, \dots, p_j$ .

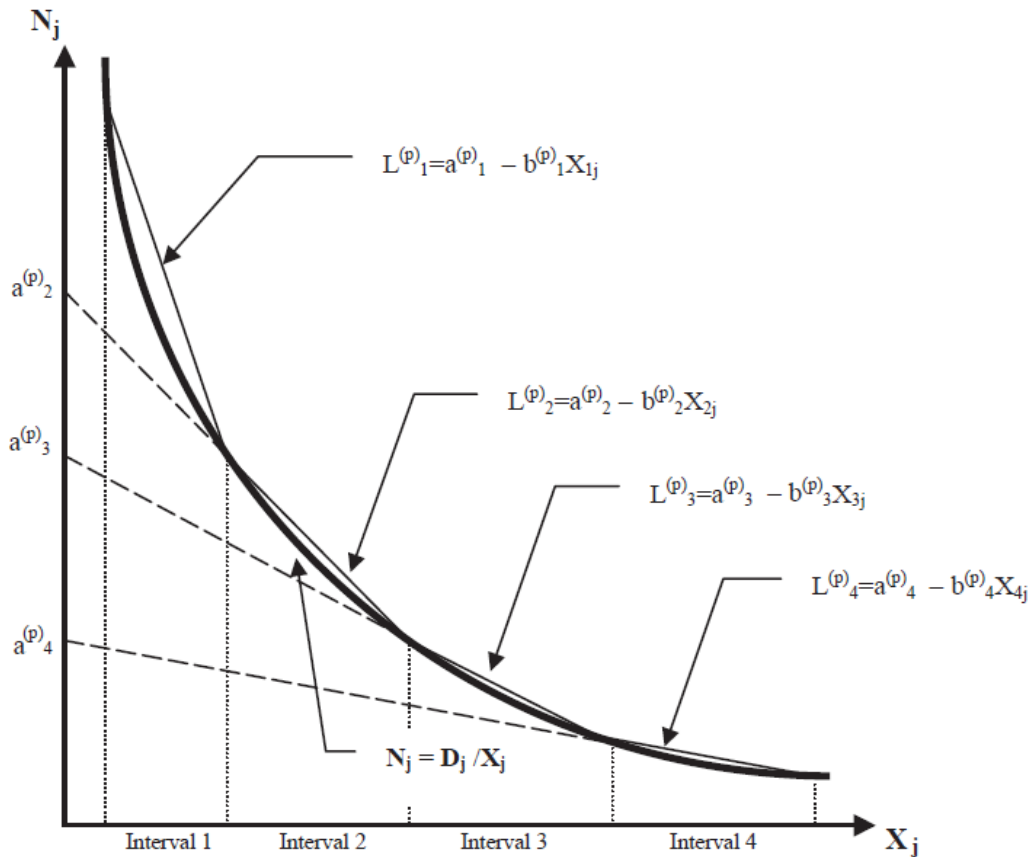


Figura 6: Aproximação linear por partes da função do número de pedidos

Fonte: Haksever e Moussourakis (2005).

O número de segmentos de retas contidos em um determinado intervalo da função  $N_j$  será definido de acordo com uma tolerância para o erro pré-estabelecida. Este erro é a diferença entre o valor da função linear de um produto contida no intervalo  $i$  e a função  $N_j$ . A estimativa do erro é dada por:

$$E_{ij} = L_{ij} - N_j = a_{ij} - b_{ij}X_{ij} - (D_j / X_{ij}) \quad (4.3.18)$$

O erro decorrente da linearização, em uma iteração  $p$ , pode ser minimizado aumentando-se o número de segmentos de retas contidos em um determinado intervalo  $i$ , na iteração  $p + 1$ . Este processo é realizado dividindo-se o intervalo definido por um segmento de reta, em uma iteração  $p$ , através do cálculo de  $X_{1p} = \sqrt{Db_1^{(p)}}$ , em dois subintervalos que definirão dois novos segmentos de retas com diferentes inclinações, como mostra a figura 7, até que se atinja o nível de erro definido como máximo para o modelo. O erro máximo,  $E_{iMax}$ , para um intervalo  $i$  é calculado, segundo Haksever e Moussourakis (2005), por:

$$E_{iMax} = a_i - 2\sqrt{Db_i} .$$

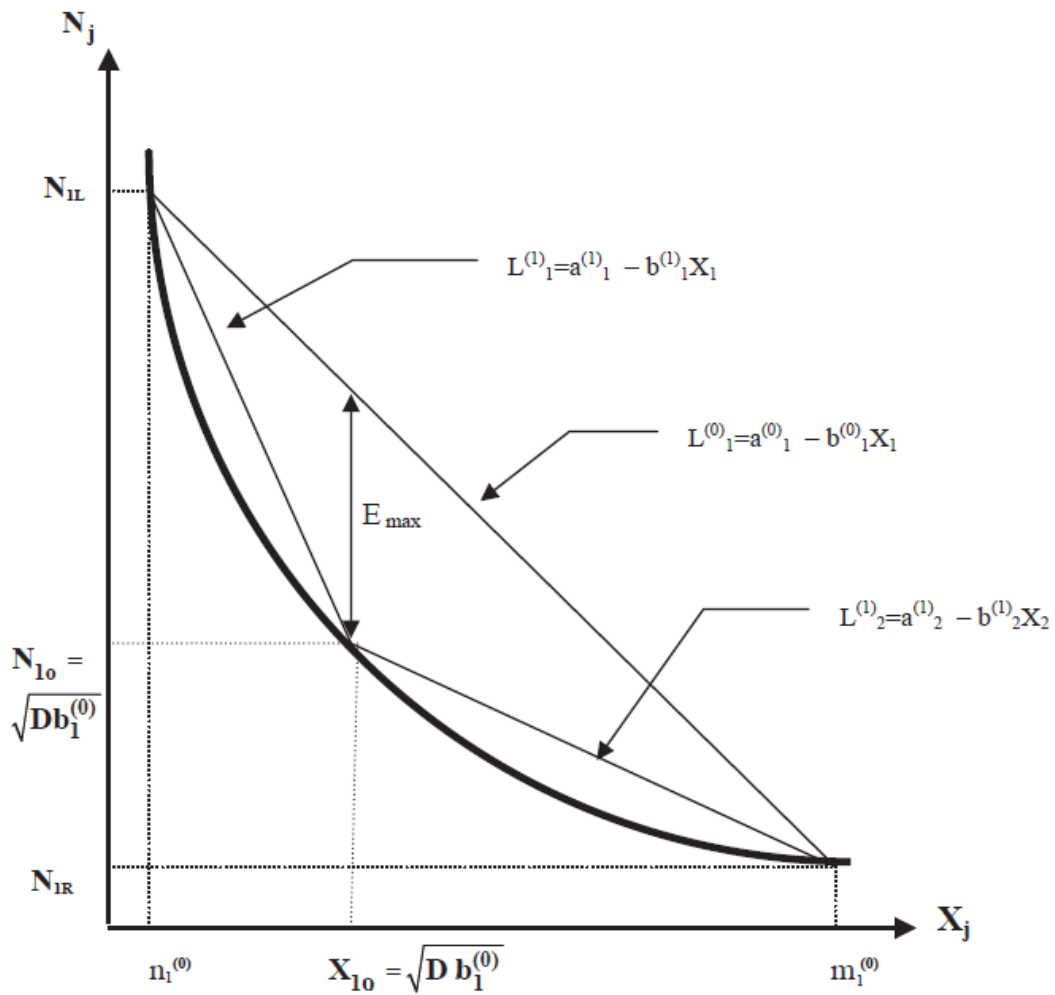


Figura 7: Divisão dos intervalos da função do número de pedidos

Fonte: Haksever e Moussourakis (2005).

Observa-se que, de acordo com o nível de erro definido para o modelo, pode-se gerar uma quantidade considerável de restrições e variáveis, tornando-o grande e possivelmente prejudicando seu desempenho computacional.

O modelo proposto neste trabalho é baseado no modelo apresentado nesta seção, porém, mantêm-se a função objetivo na forma não linear, utilizando-se métodos de otimização não lineares para resolvê-lo. No próximo capítulo é apresentado o novo modelo proposto neste trabalho.

## 5 UM NOVO MODELO DE OTIMIZAÇÃO PARA SISTEMAS DE ESTOQUE MULTIPRODUTOS

O modelo multiproduto com múltiplas restrições, proposto neste trabalho, determina o menor custo entre o modelo de ponto de reposição e o de revisão periódica. Ele é baseado no modelo de Haksever e Moussourakis (2005), apresentado na Seção 4.3, porém, a função objetivo utilizada está na forma não linear, o que permite uma representação mais próxima da realidade, assim como nos modelos utilizados por Rosenblatt (1981) e apresentados nas Seções 4.1 e 4.2. Além disso, ao adotar a função objetivo desta forma é possível reduzir consideravelmente a quantidade de variáveis e restrições do modelo quando comparado ao modelo de Haksever e Moussourakis (2005). Esse modelo também considera múltiplas restrições e é formulado como um problema de otimização não linear inteiro misto, como segue:

$$\text{Minimizar } K(X) = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{C_{oj} D_j}{X_j} + ca c_j \left( \frac{X_j}{2} \right) \right] \quad (5.1.1)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{j=1}^n w_{rj} X_j \leq MZ_1 + B_r Z_2, \quad r = 1, 2, \dots, v, \quad (5.1.2)$$

$$T_j \geq RZ_1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1.3)$$

$$T_j \leq RZ_1 + Z_2, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1.4)$$

$$T_j D_j - X_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1.5)$$

$$Z_1 + Z_2 = 1 \quad (5.1.6)$$

$$T_j, X_j \geq 0 \quad \forall j, \quad (5.1.7)$$

$$Z_1 \in \{0,1\} \quad e \quad Z_2 \in \{0,1\} \quad (5.1.8)$$

em que:  $K(X)$  em (5.1.1) é a função objetivo que representa o custo anual total para todos os produtos.

Os parâmetros são:

$w_{rj}$ : quantidade do recurso  $r$  consumida por uma unidade do produto/item  $j$ ;

$r$ : restrições de recurso;

$v$ : número de recursos com restrição;

$B_r$ : disponibilidade do recurso  $r$ ;

$R: \text{Min}\{\tau, \tau_r; r = 1, 2, \dots, v\};$

$\tau$ : comprimento de ciclo ótimo para o problema irrestrito;

$\tau_r$ : comprimento de ciclo máximo permitido pela restrição do  $r$ -ésimo recurso;

$M$ : constante positiva muito grande;

e as variáveis são:

$X_j$ : quantidade pedida do produto/item  $j$ ;

$T_j$ : tamanho do ciclo do produto/item  $j$ ;

$Z_1, Z_2$ : variáveis auxiliares:  $Z_1 = 1$  e  $Z_2 = 0$ , será utilizada a abordagem de revisão periódica;  $Z_1 = 0$  e  $Z_2 = 1$  será utilizada a abordagem de ponto de reposição.

Os valores de  $\tau$  e  $\tau_r$  são calculados por (4.3.16) e (4.3.17), apresentadas na seção 4.3.

As restrições de (5.1.2) verificam se a quantidade pedida dos produtos  $j$  não excede a disponibilidade dos recursos  $r, r = 1, 2, \dots, v$ , para o modelo de ponto de reposição ou se são ilimitadas para o modelo de revisão periódica. As variáveis binárias  $Z_1$  e  $Z_2$  apontam qual modelo será escolhido. As restrições (5.1.3)-(5.1.4) garantem que, se o modelo de revisão periódica for escolhido, o tamanho de ciclo ótimo final será determinado pelo mínimo entre  $\tau$  e  $\tau_r$  apresentados em (4.3.16) e (4.3.17). As restrições de (5.1.5) calculam o número de pedidos para todos os produtos. A restrição (5.1.6) assegura que apenas um dos modelos (ponto de reposição ou revisão periódica) seja escolhido. As restrições (5.1.7)-(5.1.8) são relativas às variáveis do problema.

Para a resolução do modelo (5.1.1)-(5.1.8) utilizou-se o método de *Branch and Bound* com o método de pontos interiores para a resolução dos problemas na árvore de busca ambos apresentados no capítulo 6.

## 6 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PARA MODELOS NÃO LINEARES E INTEIROS

Nos últimos anos, muitos métodos de otimização para modelos não lineares e inteiros têm sido desenvolvidos. Alguns deles, como os métodos de *Branch and Bound* e pontos interiores apresentados nas Seções 6.1 e 6.2, respectivamente, foram originalmente desenvolvidos para problemas lineares e posteriormente aperfeiçoados para a resolução de problemas não lineares.

### 6.1 Método de *Branch and Bound*

O método *Branch and Bound* (*BB*), também conhecido como método de avaliação e separação, foi originalmente proposto para problemas de programação linear inteira e inteira mista por Land e Doig (1960). No entanto, Gupta e Ravindran (1985) utilizaram este método para problemas de programação não linear inteiro misto.

A estratégia do método consiste em uma enumeração sistemática dos candidatos a solução. Divide-se o problema original com variáveis inteiras em vários subproblemas contínuos, descartando-se subregiões infrutíferas, a fim de se obter a solução ótima. Cada um destes subproblemas pode ser resolvido por algum método de otimização contínuo, como o método de pontos interiores.

Tomemos um problema inicial com variáveis discretas e contínuas (6.1.1)-(6.1.5):

$$\text{Minimizar } f(x) \tag{6.1.1}$$

$$\text{sujeito a: } h(x, y_i) = 0 \tag{6.1.2}$$

$$g(x, y_i) \leq 0 \tag{6.1.3}$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \tag{6.1.4}$$

$$\underline{y} \leq y \leq \bar{y} \quad y \in \mathbb{Z} \tag{6.1.5}$$

O método *BB* inicia-se resolvendo a relaxação contínua do problema (6.1.1)-(6.1.5) dada por (6.1.6)-(6.1.10):



$$\text{Minimizar } f(x) \quad (6.1.6)$$

$$\text{sujeito a: } h(x, y) = 0 \quad (6.1.7)$$

$$g(x, y) \leq 0 \quad (6.1.8)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \quad (6.1.9)$$

$$\underline{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_y \quad (6.1.10)$$

em que  $\underline{y}_i = \text{Min}\{D_{y_i}\}$  e  $\bar{y}_i = \text{Max}\{D_{y_i}\}, i = 1, 2, \dots, n_y$ .

Se na solução deste problema for obtido  $y_i \in D_{y_i}$ , então a solução encontrada é ótima para o problema (6.1.1)-(6.1.5). Caso contrário, escolhe-se uma variável  $y_L$  e a região factível do problema (6.1.6)-(6.1.10) é dividida em duas subregiões (*branch*), fornecendo os dois subproblemas (6.1.11)-(6.1.16) e (6.1.17)-(6.1.22).

$$\text{Minimizar } f(x) \quad (6.1.11)$$

$$\text{sujeito a: } h(x, y_i) = 0 \quad (6.1.12)$$

$$g(x, y_i) \leq 0 \quad (6.1.13)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \quad (6.1.14)$$

$$\underline{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i \quad (6.1.15)$$

$$y_L \leq s^{\text{inf}} \quad (6.1.16)$$

$$\text{Minimizar } f(x) \quad (6.1.17)$$

$$\text{sujeito a: } h(x, y_i) = 0 \quad (6.1.18)$$

$$g(x, y_i) \leq 0 \quad (6.1.19)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \quad (6.1.20)$$

$$\underline{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i \quad (6.1.21)$$

$$y_L \geq s^{\text{sup}} \quad (6.1.22)$$

em que  $s^{\text{inf}}$  é o valor inteiro mais próximo inferiormente de  $y_L$  e  $s^{\text{sup}}$  é o valor inteiro mais próximo superiormente de  $y_L$ .

Cada subproblema é um nó na árvore *BB*. A solução de cada subproblema fornece um limitante (*bound*) para a subregião. Se a solução do subproblema é inteira para as variáveis inteiras, então esta subregião não é mais explorada. Uma subregião em que a melhor solução

inteira encontrada até o momento é melhor que seu limitante, é descartada, caso contrário é explorada recursivamente. Desta forma, uma árvore de subproblemas é criada e o método termina quando não há mais subregiões a serem exploradas.

Na abordagem de solução utilizada neste trabalho os problemas da árvore de busca do *BB* são resolvidos por um método de pontos interiores descrito a seguir.

## 6.2 Método de pontos interiores

O método de pontos interiores têm sido amplamente utilizado para resolver problemas das mais diversas áreas do conhecimento, em particular nas engenharias. Um dos primeiros métodos de pontos interiores foi denominado de método de barreira e apresentado por Frisch(1955) para a função barreira logarítmica, e por Carrol (1961) para a função barreira inversa. Esses métodos apresentavam alguns problemas como o mau condicionamento da matriz hessiana quando o fator de barreira tende à zero. O interesse por esses métodos ressurgiu em 1984, quando Karmarkar (1984) apresentou seu método projetivo para programação linear.

Após isso, muitos pesquisadores passaram a aprimorar o método de Karmarkar e uma versão do método de pontos interiores para a programação não linear foi apresentada por El-Bakry *et al.* (1996). Nos últimos anos, uma grande variedade destes métodos tem sido propostos na literatura para resolver problemas de otimização não linear, os quais diferem em aspectos tais como o cálculo do tamanho do passo, atualização do parâmetro de barreira e os critérios de convergência. A seguir, é dada uma descrição do método de pontos interiores, proposto por Waltz *et al.* (2006), o qual encontra-se implementado no pacote Knitro e é utilizado neste trabalho.

Um problema geral de otimização não linear pode ser representado como segue:

$$\text{Minimizar} \quad f(x) \quad (6.2.1)$$

$$\text{sujeito a:} \quad h(x) = 0 \quad (6.2.2)$$

$$g(x) \leq 0 \quad (6.2.3)$$

em que:

$x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , e  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções de classe  $C^2$ .

Ao adicionar variáveis de folga positivas à restrição de desigualdade (6.2.3), esta é transformada em uma restrição de igualdade, dando origem ao problema (6.2.4)-(6.2.7).

$$\text{Minimizar} \quad f(x) \quad (6.2.4)$$

$$\text{sujeito a:} \quad h(x) = 0 \quad (6.2.5)$$

$$g(x) + s = 0 \quad (6.2.6)$$

$$s \geq 0 \quad (6.2.7)$$

em que:  $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)^t$ , é o vetor das variáveis de folga e  $s_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$

As restrições de não negatividade das variáveis de folga são incorporadas na função objetivo através da função de barreira logarítmica de Frisch (1955) e origina o problema de barreira (6.2.8)-(6.2.10).

$$\text{Minimizar} \quad f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \ln(s_i) \quad (6.2.8)$$

$$\text{sujeito a:} \quad h(x) = 0 \quad (6.2.9)$$

$$g(x) + s = 0 \quad (6.2.10)$$

em que:  $\mu > 0$  é denominado de parâmetro de barreira.

Associa-se ao problema de barreira (6.2.8)-(6.2.10) a seguinte função lagrangiana:

$$L(x, s, \lambda, \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \ln(s_i) + \lambda_h^T h(x) + \lambda_g^T (g(x) + s) \quad (6.2.11)$$

em que:  $\lambda_h \in \mathbb{R}^l$  e  $\lambda_g \in \mathbb{R}^m$  são denominados de vetores dos multiplicadores de Lagrange. A ideia do método é resolver uma sequência de problemas irrestritos cuja função objetivo é dada por (6.2.11), para um parâmetro de barreira fixo  $\mu_k$ , o qual será atualizado a cada iteração.

Para a solução desses problemas irrestritos, aplica-se a condição necessária de primeira ordem na função lagrangiana (6.2.11) e obtém-se o sistema não linear (6.2.12).

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x) + A_h(x)^T \lambda_h + A_g(x)^T \lambda_g \\ S \Lambda_g e - \mu e \\ h(x) \\ g(x) + s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.2.12)$$

em que  $S$  e  $\Lambda_g$  são matrizes diagonais, cujas diagonais são os vectores  $s$  e  $\lambda_g$ , respectivamente. As matrizes  $A_h$  e  $A_g$  são denominadas de matrizes Jacobianas associadas com as restrições de  $h(x)$  e  $g(x) + s$ , respectivamente. Denota-se por  $\lambda$ , o vetor  $\lambda = (\lambda_h, \lambda_g)^t$ .

Através da aplicação do método de Newton para a solução do sistema não linear (6.2.12), obtém-se o sistema linear (6.2.13).

$$\begin{bmatrix} W(z, \lambda, \mu) & A(x)^T \\ A(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_z \\ d_\lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_z L(z, \lambda, \mu) \\ c(z) \end{bmatrix} \quad (6.2.13)$$

em que:  $z = (x, s)^t$  é o vetor das variáveis primais,  $d_z = \begin{bmatrix} d_x \\ d_s \end{bmatrix}$  e  $d_\lambda = \begin{bmatrix} d_h \\ d_g \end{bmatrix}$  são denominadas

de direcções primal e dual, respectivamente, o vetor  $c(z)$  é dado por:

$$c(z) = \begin{bmatrix} h(x) \\ g(x) + s \end{bmatrix}; \quad (6.2.14)$$

as submatrizes  $A(x)$  e  $W(z, \lambda, \mu)$  são dadas por:

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_h(x) & 0 \\ A_g(x) & I \end{bmatrix} \quad (6.2.15)$$

$$W(z, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 L(z, \lambda, \mu) & 0 \\ 0 & S^{-1} \Lambda_g \end{bmatrix} \quad (6.2.16)$$

e o vetor gradiente  $\nabla_z L(z, \lambda, \mu)$  é dado por:

$$\nabla_z L(z, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + A_h(x)^T \lambda_h + A_g(x)^T \lambda_g \\ S \Lambda_g e - \mu e \end{bmatrix}. \quad (6.2.17)$$

Após determinar as direções de busca,  $d_z$  e  $d_\lambda$ , e resolver o sistema linear (6.2.13), uma nova solução é obtida por:

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_z d_z^k, \quad \lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha_\lambda d_\lambda^k \quad (6.2.18)$$

em que  $a_z$  e  $a_\lambda$  são os tamanhos de passo associados com o vetor de variáveis  $z$  e  $\lambda$ , respectivamente.

Os tamanhos de passos  $a_z$  e  $a_\lambda$  em (6.2.18) são calculadas em duas etapas: Primeiro calcula-se  $\alpha_z^{\max}$  e  $\alpha_\lambda^{\max}$ :

$$\alpha_z^{\max} = \max\{\alpha \in (0, 1] : s + \alpha d_s \geq (1 - \tau)s\}, \quad (6.2.19)$$

$$\alpha_\lambda^{\max} = \max\{\alpha \in (0, 1] : \lambda_g + \alpha d_g \geq (1 - \tau)\lambda_g\}, \quad (6.2.20)$$

com  $0 < \tau < 1$  (neste trabalho, foi utilizado  $\tau = 0.995$ ). Em seguida, utiliza-se uma busca *backtracking* (busca de retrocesso) e determinam-se os tamanhos de passos  $\alpha_z \in (0, \alpha_z^{\max}]$  e  $\alpha_\lambda \in (0, \alpha_\lambda^{\max}]$  de modo a reduzir uma função de mérito a qual pode ser encontrado em Byrd, Hribar e Nocedal (1999).

Um aspecto importante que influencia a velocidade e a convergência do método de pontos interiores é a escolha da estratégia para atualizar o parâmetro de barreira. A sequência de parâmetros de barreira  $\{m_k\}$  deve convergir para zero, e se possível, rapidamente. Regras para diminuir o parâmetro de barreira têm sido estudadas por vários pesquisadores e podem ser encontradas em Nocedal, Wächter, e Waltz (2008).

Desta forma, após atualizar o parâmetro de barreira, para um novo valor  $\mu_{k+1}$ , o processo é repetido até que um critério de convergência seja satisfeito.

## 7 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, apresentam-se os resultados numéricos para três etapas de testes computacionais realizadas. O objetivo da primeira etapa é verificar a aplicabilidade de algoritmos exatos de otimização na resolução dos modelos; já o da segunda etapa é comparar os resultados obtidos pelo modelo proposto neste trabalho aos resultados dos modelos investigados no capítulo 4, e na terceira etapa de testes pretende-se testar a eficácia do modelo proposto.

A implementação computacional e todas as etapas de testes foram realizadas em um computador Intel Core i7, com 8GB de memória RAM e 1TB de HD.

Nos testes realizados, os modelos não lineares apresentados nas seções 4.1 e 4.2 são resolvidos através do método de pontos interiores, implementado no pacote de otimização KNITRO. O modelo linear apresentado na seção 4.2 foi resolvido pelo método simplex/dual simplex, o qual encontra-se implementado no pacote de otimização CPLEX. O modelo inteiro misto apresentado na seção 4.3, foi resolvido pelo algoritmo *Branch and Cut* juntamente com o algoritmo simplex/dual simplex que estão implementados, também, no pacote de otimização CPLEX. Finalmente, o modelo da seção 6.1, proposto neste trabalho, foi resolvido por um algoritmo baseado no método *Branch and Bound* e métodos de pontos interiores, o qual encontra-se implementado no pacote de otimização KNITRO. Todos os testes foram realizados na interface do software GAMS.

### 7.1 1ª etapa de testes

Na primeira etapa de testes foi utilizada a instância disponível em Rosenblatt (1981). O objetivo desta primeira etapa é verificar a aplicabilidade de algoritmos exatos de otimização na resolução dos modelos apresentados nas seções 4.1, 4.2, 4.3 e 6.1 e comparar as soluções obtidas com a solução algébrica obtida por Rosenblatt em seu artigo.

A 1ª etapa de testes refere-se a três produtos, ou seja,  $j = 1, 2, 3$ , uma restrição de orçamento,  $v = 1$  e utiliza os seguintes parâmetros:

Tabela 1 – Parâmetros utilizados na 1ª etapa de testes.

$j$	Demanda anual do produto $j$ ( $D_j$ )	Custo do produto $j$ ( $c_j$ )	Custo de fazer pedidos do produto $j$ ( $C_{oj}$ )
1	1000	50	50
2	1000	20	50
3	2000	80	50

Fonte: elaborado pelo autor.

São utilizados os parâmetros:  $B = 15000$  e  $ca = 0,2$ .

O modelo descrito na seção 4.3 pode ser utilizado para múltiplas restrições, porém como a instância escolhida apresenta apenas uma restrição de orçamento, ou seja,  $r=1$ , considera-se que  $w_{rj} = c_j$ ,  $B_r = B$  e  $M = 10.000.000$ . Além disso, esse modelo estabelece uma linearização por partes da função do número de pedidos ( $N_j$ ). Logo, adota-se aqui  $p_j = 16$ ,  $j=1, 2, 3$ , como sendo o número de intervalos no qual a função do número de pedidos ( $N_j$ ) do produto  $j$  foi dividida.

As dimensões dos modelos resolvidos na 1ª etapa de testes são apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Dimensões dos modelos da 1ª etapa de testes.

Modelos	Nº de variáveis	Nº de restrições do modelo
Seção 4.1	4	1
Seção 4.2 irrestrito	2	0
Seção 4.2 restrito	4	3
Seção 4.3	159	164
Seção 6.1	12	14

Fonte: elaborado pelo autor.

Pode-se observar que o modelo da seção 4.3 tem uma quantidade de variáveis e restrições muito maior que a do modelo da seção 6.1, proposto neste trabalho. Isso ocorre devido à linearização da função  $N_j$  no modelo da seção 4.3. Dependendo da tolerância ao erro estipulado para o modelo, a quantidade de variáveis e restrições pode aumentar consideravelmente.

Os valores ótimos obtidos pelo algoritmo apresentado por Rosenblatt (1981) e os obtidos através da resolução dos modelos das seções 4.1, 4.2, 4.3, e 6.1 respectivamente, pelos métodos de otimização, já citados, são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores ótimos do algoritmo de Rosenblatt e dos modelos das seções 4.1, 4.2, 4.3, e 6.1.

	$K(X)$	$K(T)$	$T$	$T_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
<b>Rosenblatt (1981)</b>	<b>3453,96</b>	3714,83	0,081	0,085	87,61	138,43	98,13
<b>Seção 4.1</b>	<b>3450,89</b>	-----	-----	-----	87,67	138,64	98,04
<b>Seção 4.2</b>	-----	3714,83	0,081	0,085	-----	-----	-----
<b>Seção 4.3</b>	<b>3572,09</b>	3793,53	0,081	-----	72,50	135,00	108,44
<b>Seção 6.1</b>	<b>3450,89</b>	3714,83	0,081	0,085	87,69	138,64	98,04

Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se, na Tabela 3, que os modelos de ponto de reposição e revisão periódica, apresentados nas seções 4.1 e 4.2, podem diferir em seus resultados e o mais conveniente é escolher o que fornece menor custo. Desta forma, ao optar por não aplicar o algoritmo de Rosenblatt pode-se utilizar algoritmos de otimização exatos e decidir então qual será a melhor opção.

Ao optar pela resolução do modelo da seção 4.3, no qual tanto o sistema de ponto de reposição quanto o de revisão periódica são abordados em um único modelo, a melhor solução é determinada automaticamente. Este modelo apresenta uma solução próxima, porém de maior valor, quando comparada às soluções dos outros modelos testados. Isso ocorre devido à quantidade de intervalos utilizados na linearização por partes realizada e ao erro estipulado para a realização dessa linearização. Diminuindo-se o erro estipulado e consequentemente aumentando-se o número de intervalos gerados pela linearização a solução tende a se aproximar das soluções dos outros modelos testados.

Utilizando-se o modelo da seção 6.1, proposto neste trabalho, pode-se determinar a solução ótima que já considera a melhor solução entre os sistemas de ponto de reposição e revisão periódica. Os resultados mostram que a solução obtida por esse modelo é exatamente igual a solução obtida pelo modelo da seção 4.1.

Os dados da 1ª etapa de testes, apresentados na tabela 3, mostram que os métodos determinísticos de otimização geram resultados muito próximos aos obtidos pelo algoritmo de Rosenblatt (1981) sendo eficazes na resolução de problemas de sistemas de estoque multiproduto com uma restrição.

## 7.2 2ª etapa de testes

Na segunda etapa de testes foi utilizada uma instância apresentada no trabalho de Haksever e Moussourakis (2005). O objetivo dessa etapa foi comparar os resultados obtidos pelo modelo proposto neste trabalho, apresentado na seção 6.1, aos resultados obtidos por



Haksever e aos resultados dos modelos das seções 4.1 e 4.2 utilizados por Rosenblatt (1981) a fim de verificar a aplicabilidade do método de otimização não linear utilizado para a resolução do modelo proposto em problemas com múltiplas restrições.

A 2ª etapa de testes refere-se a dez produtos,  $j = 1, 2, \dots, 10$ , e cinco restrições de recurso,  $r = 1, 2, \dots, 5$ . A Tabela 4 apresenta os parâmetros referentes aos produtos.

Tabela 4 – Parâmetros, referentes aos produtos, utilizados na 2ª etapa de testes.

$j$	<b>Demanda anual do produto <math>j</math> (<math>D_j</math>)</b>	<b>Custo anual de estoque por unidade do produto <math>j</math> (<math>ca\ c_j</math>)</b>	<b>Custo de fazer pedidos do produto <math>j</math> (<math>C_{oj}</math>)</b>
1	354	50	221
2	743	34	239
3	563	88	248
4	486	78	162
5	320	34	199
6	764	70	129
7	943	34	277
8	624	18	151
9	272	12	378
10	806	40	129

Fonte: adptado de Haksever e Moussourakis (2005).

O custo anual de estoque por unidade para cada produto  $j$  utilizado por Haksever e Moussourakis (2005) é igual à multiplicação do custo anual de carregamento de estoque ( $ca$ ), pelo custo por unidade do produto  $j$ , ( $c_j$ ). Considera-se, neste exemplo,  $M = 1000000$ .

Os parâmetros referentes às restrições são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Parâmetros, referentes às restrições, utilizados na 2ª etapa de testes.

<b>Disponibilidade do recurso <math>r</math> (<math>B_r</math>)</b>					
	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
	42800	34260	30000	27864	50000
<b>Quantidade do recurso <math>r</math> consumida por uma unidade do produto <math>j</math> (<math>w_{rj}</math>)</b>					
$j$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
1	37	66	47	63	26
2	53	23	26	89	74
3	41	30	59	27	60
4	53	22	59	77	52
5	88	41	56	80	78
6	78	93	66	83	91
7	40	47	71	96	18
8	17	84	43	16	74
9	47	75	36	44	49
10	20	41	58	21	35

Fonte: adaptado de Haksever e Moussourakis (2005).

As dimensões dos modelos resolvidos na 2ª etapa de testes são apresentadas na Tabela 6.

Tabela 6 – Dimensões dos modelos da 2ª etapa de testes.

<b>Modelos</b>	<b>Nº de variáveis</b>	<b>Nº de restrições do modelo</b>
<b>Seção 4.1</b>	11	5
<b>Seção 4.2 irrestrito</b>	2	0
<b>Seção 4.2 restrito</b>	11	50
<b>Seção 4.3</b>	640	662
<b>Seção 6.1</b>	30	47

Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se, novamente, a grande diferença entre o número de variáveis e de restrições do modelo da seção 4.3 e do modelo da seção 6.1, proposto neste trabalho. Comparando-se os dados da tabela 2, da 1ª etapa de testes, com os dados da tabela 6, da 2ª etapa de testes, nota-se que o aumento no número de produtos, de 3 para 10, e de restrições de recurso, de 1 para 5, não gerou aumento expressivo do número de variáveis e restrições nos modelos das seções 4.1, 4.2 e 6.1, como ocorreu com o modelo da seção 4.3.

Alguns resultados como, valores ótimos, quantidade pedida e tamanho do ciclo, referentes aos modelos das seções 4.1, 4.2, 4.3 e 6.1, são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Valores ótimos dos modelos das seções 4.1, 4.2, 4.3 e 6.1.

	Prod.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Seção 4.1	$X_j$	37,367	54,027	49,364	31,992	33,600	36,039	63,744	74,711	60,955	58,537
	$K(X)$	34519,28									
Seção 4.2	$T_j$	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
	$T_0$	0,134									
	$T$	0,125									
	$K(T)$	<b>34162,23</b>									
Seção 4.3	$X_j$	44,206	92,782	70,305	60,689	39,960	95,404	117,757	77,922	33,966	100,649
	$N_j$	8,035	8,036	8,063	8,048	8,110	8,070	8,055	8,026	8,057	8,123
	$T_j$	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
	$Z_1$	1									
	$Z_2$	0									
	$K(N, X)$	<b>34162,23</b>									
Seção 6.1	$X_j$	44,206	92,782	70,305	60,689	39,960	95,405	117,757	77,922	33,966	100,649
	$T_j$	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
	$Z_1$	1									
	$Z_2$	0									
	$K(X)$	<b>34162,23</b>									

Fonte: elaborado pelo autor.

Os dados da Tabela 7 mostram que os valores ótimos encontrados para os modelos das seções 4.2, 4.3 e 6.1 são iguais. O sistema de estoque apontado como melhor opção pelos modelos das seções 4.3 e 6.1 foi o de revisão periódica. Assim, desconsidera-se a solução do modelo da seção 4.1 no qual, refere-se ao sistema de ponto de reposição.

Os resultados da 2ª etapa de testes indicam que os métodos de otimização determinísticos utilizados na resolução dos modelos são, também, eficazes para sistemas de estoques multiprodutos com múltiplas restrições.

### 7.3 3ª etapa de testes

Essa terceira etapa de testes, utilizou como base a instância apresentada no trabalho de Haksever e Moussourakis (2005) e tem como objetivo testar a eficácia do modelo proposto na seção 6.1 e da abordagem de resolução escolhida, para problemas com diferentes dimensões. Apresentam-se 24 instâncias diferentes com variações na quantidade de produtos e restrições de recurso. Os parâmetros do modelo (ver APÊNDICE B) foram gerados utilizando-se o gerador de números aleatórios do pacote Excel, de acordo com os limites propostos por Haksever, exceto para o parâmetro disponibilidade do recurso  $r$  ( $B_r$ ) que foi definido pelo autor. Os 12 primeiros problemas referem-se à demanda cujo limite inferior é adotado com 200 e o superior como 1000, enquanto que, os 12 últimos referem-se à demanda cujo limite superior foi alterado para 2000. Para cada conjunto de demanda foram elaborados problemas com 5, 10, 20 e 30 produtos, sendo que, para cada quantidade de produtos foram definidos 3, 4 e 5 restrições de recursos.

A Tabela 8 apresenta os valores adotados para os parâmetros do modelo em relação às quantidades e limites inferiores e superiores dos parâmetros em que foram gerados os números aleatórios.

Tabela 8 – Valores, limites inferior e superior dos parâmetros utilizadas na 3ª etapa de testes.

Parâmetros	Definição	Valores/limites
$n$	números de produtos	5, 10, 20, 30
$D_j$	demanda anual em unidades para o produto $j$	inferior: 200 superior: 1000/2000
$C_{oj}$	custo de fazer o pedido para o produto $j$	inferior: 100 superior: 400
$ca$ $c_j$	custo anual de carregamento por unidade do produto $j$	inferior: 10 superior: 100
$r$	restrições de recurso	3, 4, 5
$w_{rj}$	quantidade do recurso $r$ consumida por uma unidade do produto $j$	inferior: 10 superior: 100

Fonte: adaptado de Haksever e Moussourakis (2005).

A Tabela 9 apresenta os limites inferior e superior da disponibilidade do recurso  $r$ , ( $B_r$ ), de acordo com a quantidade de produtos do problema e os limites da demanda anual.

Tabela 9 – Limites inferior e superior da disponibilidade do recurso  $r$  utilizados na 3ª etapa de testes.

<b>Limites inferior e superior da demanda</b>	<b>Número de produtos</b>	<b>Limites inferior e superior da disponibilidade do recurso <math>r</math> (<math>B_r</math>)</b>
200 – 1000	5	12500 – 25000
	10	25000 – 50000
	20	50000 – 100000
	30	75000 – 150000
200 – 2000	5	12500 – 50000
	10	25000 – 100000
	20	50000 – 200000
	30	75000 – 300000

Fonte: elaborado pelo autor.

As dimensões das instâncias geradas referentes ao número de produtos, restrições de recurso, variáveis e restrições do modelo são apresentadas na Tabela 10.

Tabela 10 – Dimensões das instâncias da 3ª etapa de testes.

<b>Instância</b>	<b>Nº de produtos</b>	<b>Nº de restrições de recurso</b>	<b>Nº de variáveis</b>	<b>Nº de restrições do modelo</b>
1	5	3	17	26
2	5	4	18	29
3	5	5	19	32
4	10	3	27	41
5	10	4	28	44
6	10	5	29	47
7	20	3	47	71
8	20	4	48	74
9	20	5	49	77
10	30	3	67	101
11	30	4	68	104
12	30	5	69	107
13	5	3	17	26
14	5	4	18	29
15	5	5	19	32
16	10	3	27	41
17	10	4	28	44
18	10	5	29	47
19	20	3	47	71
20	20	4	48	74
21	20	5	49	77
22	30	3	67	101
23	30	4	68	104
24	30	5	69	107

Fonte: elaborado pelo autor.

Alguns resultados obtidos dos problemas como, tipo de sistema, valor ótimo e tempo médio de processamento, são apresentados na Tabela 11. Valores ótimos de  $X_j$  e  $T_j$ , entre outros são apresentados no APÊNDICE C.

Tabela 11 – Alguns resultados das instâncias da 3ª etapa de testes.

Instância	Tipo de sistema	Valor ótimo	Tempo médio de processamento (s)
1	Revisão periódica	24.993,855	0,096
2	Ponto de reposição	14.531,690	0,045
3	Ponto de reposição	15.113,446	0,087
4	Revisão periódica	42.252,515	0,078
5	Ponto de reposição	39.902,828	0,103
6	Ponto de reposição	36.261,577	0,105
7	Ponto de reposição	73.044,683	0,086
8	Ponto de reposição	87.544,727	0,078
9	Ponto de reposição	78.180,179	0,105
10	Ponto de reposição	120.247,578	0,112
11	Ponto de reposição	126.495,946	0,157
12	Revisão periódica	111.717,585	0,131
13	Ponto de reposição	33.635,540	0,076
14	Ponto de reposição	17.522,394	0,055
15	Ponto de reposição	15.823,868	0,061
16	Revisão periódica	55.492,840	0,110
17	Ponto de reposição	53.146,761	0,067
18	Ponto de reposição	54.904,470	0,092
19	Ponto de reposição	96.718,847	0,126
20	Revisão periódica	95.569,293	0,116
21	Revisão periódica	107.114,998	0,150
22	Ponto de reposição	146.450,862	0,114
23	Ponto de reposição	148.771,248	0,124
24	Ponto de reposição	157.876,610	0,156

Fonte: elaborado pelo autor.

O modelo proposto neste trabalho e o método de resolução adotado, *Branch and Bound* com método de pontos interiores, mostrou-se eficaz na resolução dos problemas propostos. O tempo médio de processamento para obtenção das soluções dos problemas foi razoavelmente rápido, entre 0,045s e 0,157s, como mostra a Tabela 11. Mesmo com a variação do número de produtos, de 5 a 30, e de restrições, de 3 a 5, dos problemas, o tempo médio de processamento entre eles não variou expressivamente.

Ao compararmos o tempo médio de processamento com o obtido no trabalho de Haksever destacamos que os modelos resolvidos com o método de *Branch and Bound* com método de pontos interiores levaram um tempo de processamento menor. Essa diferença é maior nos problemas de maior dimensão, com 20 e 30 produtos.

Aqui, como no trabalho de Hakserver e Moussourakis (2005), vinte e cinco por cento (25%) dos problemas testados indicaram o sistema de revisão periódica como a solução mais promissora. Destaca-se também que a dimensão do modelo proposto, está diretamente ligada ao número de variáveis e restrições, enquanto que o apresentado por Hakserver e Moussourakis (2005) ainda sofre a influência da linearização e da tolerância ao erro estabelecida. Por exemplo, no problema com trinta produtos e cinco restrições de recurso, temos o modelo de Hakserver e Moussourakis com um total de 1910 variáveis e 2004 restrições, de acordo com informações de seu artigo. O mesmo problema na formulação do nosso modelo apresenta 69 restrições e 107 variáveis.



## 8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi realizada uma investigação sobre a modelagem e a resolução de problemas de otimização em sistemas de estoque multiprodutos. Um novo modelo foi proposto, que decide qual a melhor opção entre o conceito de ponto de reposição e o de revisão periódica. Este modelo foi formulado como um problema de otimização não linear inteiro misto. Para a formulação do novo modelo utilizou-se os trabalhos de Rosenblatt (1981) e de Haksever e Moussourakis (2005). Destaca-se que, o modelo aqui proposto difere do apresentado no trabalho de Rosenblatt por apresentar as opções de ponto de reposição e revisão periódica em um único modelo, e de Haksever e Moussourakis por trabalhar com a função custo na forma não linear, a qual descreve melhor o problema real.

Para a resolução deste modelo utilizou-se uma abordagem que é baseada no método de *Branch and Bound* e no método de ponto interiores, implementada no pacote KNITRO. Através da revisão bibliográfica dos trabalhos que abordam o tema de modelos de estoque multiprodutos com múltiplas restrições, observou-se que existem diversos trabalhos que abordam o tema, porém são raros os trabalhos que, ao formular o modelo de estoque multiprodutos como um problema de otimização não linear, o resolvem através de técnicas de otimização determinísticas, como é o caso do método de solução abordado nesse trabalho. A grande maioria dos trabalhos lineariza as funções não lineares envolvidas na função objetivo ou nas restrições, o que aumenta consideravelmente o número de variáveis e restrições dos modelos, ou resolve o modelo não linear através de algoritmos não determinísticos, os quais não garantem a convergência global.

Testes computacionais foram realizados com o modelo proposto e o método de resolução escolhido, com diferentes objetivos. Na primeira etapa de testes o objetivo foi o de verificar a aplicabilidade de algoritmos determinísticos de otimização na resolução dos modelos apresentados nas seções 4.1, 4.2, 4.3 e 6.1 e comparar as suas soluções com a solução obtida por Rosenblatt em seu artigo. Através dos resultados numéricos obtidos, pôde-se observar que é possível resolver os modelos da seção 4.1 e 4.2 de forma separada, através de métodos determinísticos de otimização não linear e linear, e escolher entre eles o melhor resultado. Uma outra forma, de obter o mesmo resultado é utilizar o modelo linearizado da seção 4.3 ou o modelo não linear da seção 6.1 que já escolhe o melhor resultado entre ponto de reposição e revisão periódica, os quais determinam os mesmos resultados também. Porém, lembramos aqui que o modelo da seção 4.3 apresenta o incômodo de linearizar a função custo

de produção, o qual além de aumentar a dimensão do problema, ainda necessita realizar o cálculo do erro para definir em quantas partes será realizada a linearização por partes.

Na 2ª etapa de testes, o objetivo foi comparar os resultados obtidos pelo modelo proposto neste trabalho, apresentado na seção 6.1, com os resultados obtidos por Haksever e Moussourakis (2005) aos resultados dos modelos das seções 4.1 e 4.2 utilizados por Rosenblatt (1981), resolvidos através de algoritmos determinísticos, a fim de verificar a aplicabilidade do método de otimização não linear utilizado para a resolução do modelo proposto em problemas de sistemas com múltiplas restrições. Os resultados obtidos indicam que o modelo não linear da seção 6.1, proposto neste trabalho, pode ser resolvido de maneira eficiente através do método de otimização determinístico, *Branch and Bound* com o método de pontos interiores. Além disso, no modelo não linear 6.1 tem-se a vantagem de se trabalhar com um problema de dimensão menor do que o que apresentado na seção 4.3 e representa-se a função custo, de maneira mais próxima à realidade.

Finalmente, com o objetivo de testar a eficácia do modelo proposto e da abordagem de resolução escolhida para diferentes dimensões de problemas foi realizada a 3ª etapa de testes. Nesta etapa, foram resolvidos 24 instâncias com diferentes dimensões. Para isso, foram gerados randomicamente os dados para os problemas utilizando o software Excel. Os resultados demonstram a potencialidade do modelo proposto e do método de resolução adotado.

Neste sentido, este trabalho traz contribuições para a área de gestão de estoques e para a área de otimização, destacando-se:

- A formulação de um modelo não linear inteiro misto mais próximo à realidade das indústrias;
- O modelo proposto têm número de variáveis e restrições razoavelmente pequeno quando comparado aos modelos linearizados;
- O modelo proposto pôde ser resolvido através de um método determinístico.

Uma das limitações apresentadas ao nosso método é que ele determina soluções inteiras somente para as variáveis binárias e as demais variáveis assumem valores reais. Desta forma, em trabalhos futuros pretende-se considerar as restrições de integralidade das demais variáveis envolvidas. Além disso, existe também a possibilidade de aprimorar o modelo ao incluir outras restrições e variáveis específicas, mais próximas da realidade. Outra análise, que ainda pode ser realizada no trabalho, é a de verificar qual é a sensibilidade do modelo em relação à mudança de ponto de revisão para revisão periódica e vice-versa.

## **TRABALHOS PUBLICADOS EM CONGRESSOS E SUBMETIDOS À PERIÓDICOS**

**1. Título:** Uma investigação de diferentes modelos de otimização de sistemas de estoque multiprodutos.

Trabalho completo publicado no XXII Simpósio de Engenharia de Produção (SIMPEP), 2015, Bauru – SP.

**2. Título:** Mixed-integer nonlinear model for multiproduct inventory systems with interior point and branch-and-bound method.

Artigo submetido à revista IEEE América Latina em 14/06/2016.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASKIN, R.G.; KRISHNAN, S. Defining inventory control points in multiproduct stochastic pull systems. **International journal of production economic**, v. 120, p. 418-429, 2009.

BADRI, M. A. A Simulation model for multi-product inventory control management. **Simulation**, v. 72, p. 20-32, 1999.

BASSOK, Y.; ANUPINDI, R.; AKELLA, R. Single-period multiproduct inventory models with substitution. **Operations research**, v. 47, n. 4, p. 632-642, 1999.

BHATTACHARYA, D. K. On multi-item inventory. **European journal of operational research**, v. 162, p. 786-791, 2005.

BOOKBINDER, J. H.; ÇAKANYILDIRIM, M. Random lead times and expedited orders in (Q, r) inventory systems. **European journal of operational research**, v. 115, p. 300-313, 1999.

BYRD, R. H.; HRIBAR, M. E.; NOCEDAL, J. An interior point algorithm for large scale nonlinear programming, **Siam Journal on Optimization**, v. 9, n. 4, p. 877-900, 1999.

CARROL, C. W. The Created Response Surface Technique for Optimizing Nonlinear Restrained Systems, **Operations research**, v.9, p. 169-184, 1961.

ÇAKANYILDIRIM, M.; BOOKBINDER, J. H.; GERCHAK, Y. Continuous review inventory models where random lead time depends on lot size and reserved capacity. **International journal of production economics**, v. 68, p. 217-228, 2000.

CÁRDENAS-BARRÓN, L. E. The derivation of EOQ/EPQ inventory models with two backorders costs using analytic geometry and algebra. **Applied mathematical modelling**, v. 35, p. 2394-2407, 2011.

CHEN, K. K.; CHANG, C. A seasonal demand inventory model with variable lead time and resource constraints. **Applied mathematical modelling**, v. 31, p. 2433-2445, 2007.

CHUNG, S.; WEE, H.; YANG, P. Optimal policy for a closed-loop supply chain inventory system with remanufacturing. **Mathematical and computer modelling**, v. 48, p. 867-881, 2008.

CORRÊA, H.; GIANESI, I.; CAON, M. **Planejamento, programação e controle da produção**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

DUTTA, P.; CHAKRABORTY, D.; ROY, A. R. A single-period inventory model with fuzzy random variable demand. **Mathematical and computer modelling**, v. 41, p. 915-922, 2005.

EL-BAKRY, A.S.; TAPIA, R.A.; TSUCHIYA, T.; ZHANG, Y. On the Formulation and Theory of the Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v.89, n.3, p. 507-541, 1996.

FENG, H.; WU, Q.; MUTHURAMAN, K.; DESHPANDE, V. Replenishment policies for multi-product stochastic inventory systems with correlated demand and joint-replenishment costs. **Production and operations management society**, v. 24, n. 4, p. 647-664, 2014.

FLYNN, J. Selecting review periods for a coordinated multi-item inventory model with staggered deliveries. **Naval Research Logistics**, v. 48, p. 430-449, 2001.

FRISCH, K. R. The logarithmic Potential Method of Convex Programming, **Memorandum, University Institute of Economics**, Oslo, Norway, 1955.

GHALEBSAZ-JEDDI, B.; SHULTES, B. C.; HAJI, R. A multi-product continuous review inventory system with stochastic demand, backorders, and a budget constraint. **European journal of operational research**, v. 158, p. 456-469, 2004.

GOYAL, S. K. Optimum ordering policy for a multi-item single supplier system. **Operational Research Quarterly**, v. 25, 293-298, 1974.

GUCHHAIT, P.; MAITI M. K.; MAITI M. Multi-item inventory model of breakable items with stock-dependent demand under stock and time dependent breakability rate. **Computers & industrial engineering**, v. 59, p. 911-920, 2010.

GÜDER, F.; ZYDIAK, J. L. Ordering policies for multi-item inventory systems subject to multiple resource constraints. **Computers & operations research**, v. 26, p. 583-597, 1999.

GUPTA, O. K.; RAVINDRAN, A. Branch and bound experiments in convex nonlinear integer programming. **Management science**, INFORMS, v. 31, n. 12, p. 1533–1546, 1985.

HAKSEVER, C.; MOUSSOURAKIS, J. A model for optimizing multi-product inventory systems with multiple constraints. **International journal of production economics**, v. 97, p. 18-30, 2005.

HAKSEVER, C.; MOUSSOURAKIS, J. Determining order quantities in multi-product inventory systems subject to multiple constraints and incremental discounts. **European journal of operational research**, v. 184, p. 930-945, 2008.

HARIGA, M.; BEN-DAYA, M. Some stochastic inventory models with deterministic variable lead time. **European journal of operational research**, v. 113, p. 42-51, 1999.

HARRIS, F. W. **How many parts to make at once factory**. Mag. Manage, 1913.

HSIEH, C. H. Optimization of fuzzy production inventory models. **Information sciences**, v. 146, p. 2940, 2002.

KAO; C.; HSU, W. A single-period inventory model with fuzzy demand. **Computers and mathematics with applications**, v. 43, p. 841-848, 2002.

KOUMANAKOS, D. P. The effect of inventory management on firm performance. **International Journal of Productivity and Performance Management**, v. 57, n. 5, p. 355-369, 2008.

KUNDU, A.; CHAKRABARTI, T. A multi-product continuous review inventory system in stochastic environment with budget constraint. **Optimization letters**, v. 6, p. 299-313, 2012.

LAND, A. H.; DOIG A. G. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. **Econometrica**, v. 28, n. 3, p. 497-520, 1960.

MAITI, A. K.; BHUNIA, A. K.; MAITI, M. An application of real-coded genetic algorithm (RCGA) for mixed integer non-linear programming in two-storage multi-item inventory model with discount policy. **Applied mathematics and computation**, v. 183, p. 903-915, 2006.

MALONEY, B. M.; KLEIN, C. M. Constrained multi-item inventory systems: an implicit approach. **Computers & operations research**, v. 20, n. 6, p. 639-649, 1993.

MINNER, S. Multiple-supplier inventory models in supply chain management - a review. **International journal of production economics**, v. 81-82, p. 265-279, 2003.

MOHEBBI, E. Supply interruptions in a lost-sales inventory system with random lead time. **Computers & operations research**, v. 30, p. 411-426, 2003.

MONDAL, S.; MAITI, M. Multi-item fuzzy EOQ models using genetic algorithm. **Computers & industrial engineering**, v. 44, p. 105-117, 2002.

NOCEDAL, J.; WÄCHTER, A.; WALTZ, R. A. Adaptive barrier strategies for nonlinear interior methods, **Technical Report** RC 23563, IBM Watson Research Center, Yorktown Heights, NY, USA, 2008.

OGAWA, S.; OHTA, H. Common order cycle system for multi-item inventory model with learning in ordering and transportation. **International journal of production economics**, v. 41, p. 321-325, 1995.

PAGE, E.; PAUL, R. J. Multi-product inventory situations with one restriction. **Operational Research Quarterly**, v. 27, n. 4, p. 815-834, 1976.

PARSONS, J. A. Multi-product lot size determination when certain restrictions are active. **Journal of Industrial Engineering**, v. 17, 360-365, 1966.

PASANDIDEH, S. H. R.; NIAKI, S. T. A.; NIA, A. R. A genetic algorithm for vendor managed inventory control system of multi-product multi-constraint economic order quantity model. **Expert Systems with Applications**, v. 38, p. 2708-2716, 2011.

RAU, H.; WU, M.; WEE, H. Integrated inventory model for deteriorating items under a multi-echelon supply chain environment. **International journal of production economics**, v. 86, p. 155-168, 2003.

REZAEI, J.; DAVOODI, M. A deterministic, multi-item inventory model with supplier selection and imperfect quality. **Applied mathematical modelling**, v. 32, p. 2106-2116, 2008.

ROSENBLATT, M. Multi-item inventory system with budgetary constraint: a comparison between the Lagrangian and the fixed cycle approach. **International journal of production research**, v. 19, n. 4, p. 331-339, 1981.

SANA, S. S.; CHAUDHURI, K. S. An inventory model for stock with advertising sensitive demand. **IMA Journal of management mathematics**, v. 19, p. 51-62, 2008.

SARACOGLU, I.; TOPALOGLU, S.; KESKINTURK, T. A genetic algorithm approach for multi-product multi-period continuous review inventory models. **Expert Systems with Applications**, v. 41, p. 8189-8202, 2014.

SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHNSTON, R. **Administração da produção**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

SOLER, E. M.; SOUSA, V. A.; COSTA, G. R. M. A modified Primal–Dual Logarithmic-Barrier Method for solving the Optimal Power Flow problem with discrete and continuous control variables, **European Journal of Operational Research**, v. 222, n. 3 p. 616–622, 2012.



TAFT, E. W. **The most economical production lot.** Iron Age, 1918.

TALEIZADEH, A. A.; ARYANEZHAD, M.; NIAKI, S. T. A. Optimizing multi-product multi-constraint inventory control systems with stochastic replenishments. **Journal of applied sciences**, v. 8, n. 7, p. 1228-1234, 2008.

VASTAG, G.; WHYBARK, D. C. Inventory management - Is there a knock-on effect? **International journal of production economics**, v. 93-94, p. 129-138, 2005.

WALTZ, R. A.; MORALES, J. L.; NOCEDAL, J.; ORBAN, D. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps, **Mathematical Programming Series A**, v. 107, p. 391–408, 2006.

ZHOU, W.; CHEN, L.; GE, H. A multi-product multi-echelon inventory control model with joint replenishment strategy. **Applied mathematical modelling**, v. 37, p. 2039-2050, 2013.

ZOLLER, K. Deterministic multi-item inventory systems with limited capacity. **Management Science**, v. 24, 451-455, 1977.

## APÊNDICE A – Algoritmo de Rosenblatt para uma restrição de orçamento

$$\text{Minimizar } K(X) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{C_{0j} D_j}{X_j} + ca \frac{c_j X_j}{2} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{j=1}^n c_j X_j \leq B \quad (\text{A.2})$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.3})$$

$$X_j^* = \sqrt{\frac{2C_{0j} D_j}{i c_j}}, \text{ solução de (A.1)}$$

$$X_{Lj}^* = \frac{B}{\sum c_j D_j} X_j^*, \text{ solução de (A.1)-(A.3)}$$

$$\text{Minimizar } K(T) = \sum_{j=1}^n \frac{C_{0j}}{T} + \left( \frac{ca}{2} \sum_{j=1}^n c_j D_j \right) T \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Maximizar } T_0 = \sum_{j=1}^n t_j \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{l=j+1}^n (c_l D_l) \sum_{k=j+1}^l t_k + \sum_{l=1}^j (c_l D_l) \left( \sum_{k=1}^l t_k + \sum_{k=j+1}^n t_k \right) \leq B, \quad j = 1, \dots, \quad (\text{A.6})$$

em que  $T_0$  é a função objetivo que representa o tamanho máximo de ciclo permitido pela restrição;

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum C_{0j}}{i \sum c_j D_j}}, \text{ solução de (A.4)}$$

$$T_0^* = 2B \frac{\sum c_j D_j}{\sum (c_j D_j)^2 + (\sum c_j D_j)^2}, \text{ solução de (A.5) e (A.6)}$$

**Passo 1:** Determine  $X_j^* = \sqrt{\frac{2C_{0j}D_j}{ic_j}}$  (solução de (A.1)). Se (A.2) e (A.3) são satisfeitas, **PARE**,

$X_j^*$  é a solução; **(ponto de reposição)**

**Passo 2:** Determine  $T^* = \sqrt{\frac{2\sum C_{0j}}{i\sum c_jD_j}}$ , (solução de (A.4)) e  $T_0^* = 2B \frac{\sum c_jD_j}{\sum (c_jD_j)^2 + (\sum c_jD_j)^2}$ , (solução

de (A.5) e (A.6)) e determine  $T^{**} = \min\{T_0^*, T^*\}$ .

Se  $T^{**} = T_0^*$  vá para o passo 3;

Se  $T^{**} = T^*$  vá para o passo 5;

**Passo 3:** Se  $B > \frac{iT_0^*(\sum c_jX_j^*)^2}{2\sum C_{0j}}$  calcule  $X_{Lj}^* = \frac{B}{\sum c_jD_j} X_j^*$  e vá para o passo 6; **(ponto de**

**reposição)**

Senão vá para o passo 4;

**Passo 4:** Se  $B > \frac{\frac{2B}{T_0^*} \sum C_{0j} - i \sum c_jX_j^*}{i(B - T_0^* \sum c_jD_j)} = 0$  calcule  $X_{Lj}^* = \frac{B}{\sum c_jD_j} X_j^*$  e vá para o passo 6; **(ponto de**

**reposição)**

Senão utiliza  $T_0^*$ , calcula  $X_j = T_0^*D_j$  **PARE** que essa é a solução; **(revisão periódica)**

**Passo 5:** Se  $a < B < b$ , calcule  $X_{Lj}^* = \frac{B}{\sum c_jD_j} X_j^*$  e vá para o passo 6; **(ponto de reposição)**

Senão  $T^*$  é ótimo,  $X_j = T^*D_j$ , **PARE** que essa é a solução; **(revisão periódica)**

**Passo 6:** O valor ótimo é  $X_j = X_{Lj}^*$ , **PARE**.

**OBS:** Em seu algoritmo Rosenblatt compara os valores:  $K(Q_L^*)$  e  $K(T_0^*)$  e, depois  $K(Q_L^*)$  e  $K(T^*)$  para tirar as relações de B e não utiliza em seus cálculos os valores de  $K(Q_L^*)$ ,  $K(T_0^*)$  e  $K(T^*)$ .

$$a = \sqrt{\frac{2}{i} \sum C_{0j} \sum c_jD_j} - \sqrt{\frac{2}{i} \sum C_{0j} \sum c_jX_j^*}$$

$$b = \sqrt{\frac{2}{i} \sum C_{0j} \sum c_jD_j} + \sqrt{\frac{2}{i} \sum C_{0j} \sum c_jX_j^*}$$

**APÊNDICE B – Parâmetros da 3ª etapa de testes.**

Problema	Produto <i>j</i>	D( <i>j</i> )	cac( <i>j</i> )	Co( <i>j</i> )	w( <i>r<sub>j</sub></i> )				
					<i>r</i> =1	<i>r</i> =2	<i>r</i> =3	<i>r</i> =4	<i>r</i> =5
1	1	375	44	238	84	42	41	----	----
	2	581	19	231	63	42	27	----	----
	3	970	64	373	85	15	52	----	----
	4	508	91	203	80	95	80	----	----
	5	1.000	90	338	44	75	18	----	----
2	1	249	65	65	99	29	45	24	----
	2	225	24	24	27	43	32	34	----
	3	567	59	59	82	91	57	57	----
	4	322	24	24	14	70	24	95	----
	5	742	97	97	50	77	45	83	----
3	1	282	28	397	37	35	36	72	19
	2	249	46	183	80	22	39	50	16
	3	498	27	112	99	47	82	71	72
	4	624	56	322	40	24	57	92	66
	5	480	49	274	14	54	66	79	95
4	1	506	72	362	83	98	28	----	----
	2	281	47	264	56	55	32	----	----
	3	677	98	195	70	76	50	----	----
	4	919	11	274	65	75	46	----	----
	5	908	51	335	50	76	73	----	----
	6	967	66	270	82	27	46	----	----
	7	212	72	215	20	70	49	----	----
	8	526	20	361	80	42	49	----	----
	9	891	46	347	36	61	32	----	----
	10	311	22	258	81	66	65	----	----
5	1	785	55	104	52	51	72	58	----
	2	252	10	347	35	90	35	65	----
	3	822	19	224	32	27	30	24	----
	4	837	79	249	66	90	78	62	----
	5	896	95	233	82	38	24	59	----
	6	971	32	181	46	26	28	37	----
	7	304	51	268	55	48	100	45	----
	8	689	29	260	12	88	31	63	----
	9	808	90	137	96	58	94	64	----
	10	563	99	169	23	50	34	25	----

Problema	Producto <i>j</i>	D( <i>j</i> )	cac( <i>j</i> )	Co( <i>j</i> )	w( <i>r,j</i> )				
					<i>r=1</i>	<i>r=2</i>	<i>r=3</i>	<i>r=4</i>	<i>r=5</i>
6	1	800	26	112	13	78	59	88	26
	2	387	40	221	71	29	54	98	13
	3	552	76	230	38	74	21	35	50
	4	399	80	359	37	82	40	84	62
	5	884	99	366	47	73	41	52	73
	6	601	82	332	17	26	10	49	66
	7	987	26	130	80	60	59	98	84
	8	479	63	144	99	51	20	10	33
	9	267	13	232	72	78	24	65	67
	10	253	16	162	49	15	37	41	64
7	1	685	62	155	41	89	44	----	----
	2	413	38	339	60	95	80	----	----
	3	391	20	125	42	54	27	----	----
	4	672	66	119	95	87	26	----	----
	5	883	24	213	74	53	88	----	----
	6	392	52	357	84	88	54	----	----
	7	748	96	141	73	36	27	----	----
	8	694	50	315	69	75	14	----	----
	9	407	95	251	99	41	21	----	----
	10	832	52	330	93	94	89	----	----
	11	220	72	398	30	54	50	----	----
	12	803	56	117	90	51	43	----	----
	13	203	49	333	13	50	88	----	----
	14	393	54	392	20	85	64	----	----
	15	348	38	261	16	94	13	----	----
	16	207	88	181	17	43	42	----	----
	17	342	86	302	50	80	68	----	----
	18	559	47	255	41	17	11	----	----
	19	787	38	312	61	96	54	----	----
	20	834	26	341	14	44	13	----	----

Problema	Produto <i>j</i>	D( <i>j</i> )	cac( <i>j</i> )	Co( <i>j</i> )	w( <i>r,j</i> )				
					<i>r=1</i>	<i>r=2</i>	<i>r=3</i>	<i>r=4</i>	<i>r=5</i>
8	1	555	99	186	71	65	78	94	----
	2	394	39	254	74	17	54	58	----
	3	864	46	168	90	82	23	58	----
	4	825	80	281	42	21	86	28	----
	5	443	68	214	94	68	54	74	----
	6	650	27	240	73	27	62	84	----
	7	954	29	108	18	81	13	50	----
	8	944	47	163	75	17	59	46	----
	9	445	83	276	38	22	75	55	----
	10	582	59	302	14	34	57	62	----
	11	679	54	192	11	48	32	85	----
	12	382	16	271	92	39	11	37	----
	13	343	90	163	45	78	70	49	----
	14	904	79	310	27	86	92	35	----
	15	535	64	227	32	69	85	15	----
	16	563	71	381	85	70	90	98	----
	17	331	47	124	96	57	43	49	----
	18	820	84	361	11	30	14	11	----
	19	738	80	254	96	34	94	95	----
	20	529	69	124	15	54	29	28	----
9	1	878	73	369	54	75	20	72	12
	2	699	92	368	81	73	44	37	90
	3	384	30	359	38	48	30	34	22
	4	618	56	316	81	16	93	36	44
	5	238	40	228	97	85	28	80	79
	6	648	19	165	17	44	53	16	66
	7	507	63	216	85	96	18	35	23
	8	571	71	387	77	93	98	17	53
	9	337	46	229	69	64	62	87	84
	10	914	11	308	79	48	39	88	17
	11	698	33	296	92	94	11	75	17
	12	971	57	291	60	26	12	34	49
	13	359	41	164	63	58	82	45	86
	14	751	51	105	63	49	36	99	26
	15	391	63	160	67	75	11	31	95
	16	369	74	340	77	86	80	26	43
	17	910	52	182	19	24	86	36	27
	18	350	51	211	19	86	69	60	18
	19	566	57	395	15	39	38	31	13
	20	320	26	259	48	40	98	57	68

Problema	Producto <i>j</i>	D( <i>j</i> )	cac( <i>j</i> )	Co( <i>j</i> )	w( <i>r,j</i> )				
					<i>r=1</i>	<i>r=2</i>	<i>r=3</i>	<i>r=4</i>	<i>r=5</i>
10	1	978	67	204	66	11	80	----	----
	2	791	14	313	15	70	77	----	----
	3	415	53	343	29	62	12	----	----
	4	756	88	393	85	34	75	----	----
	5	475	90	235	81	51	27	----	----
	6	348	91	231	71	100	15	----	----
	7	275	34	332	55	84	43	----	----
	8	327	50	354	73	27	13	----	----
	9	850	36	395	42	57	66	----	----
	10	320	60	160	45	75	30	----	----
	11	384	84	131	52	51	57	----	----
	12	411	90	398	76	13	32	----	----
	13	345	58	159	66	40	88	----	----
	14	486	43	226	66	83	41	----	----
	15	664	31	229	99	23	45	----	----
	16	635	99	191	36	52	76	----	----
	17	669	75	291	40	18	86	----	----
	18	737	92	198	45	41	70	----	----
	19	392	48	101	15	12	54	----	----
	20	334	55	324	81	70	55	----	----
	21	742	49	301	40	45	61	----	----
	22	342	64	243	21	85	100	----	----
	23	489	44	310	84	35	61	----	----
	24	959	32	265	89	36	43	----	----
	25	774	45	287	90	79	77	----	----
	26	599	15	236	14	61	85	----	----
	27	473	27	272	27	76	75	----	----
	28	520	57	284	77	31	79	----	----
	29	616	51	122	29	21	52	----	----
	30	689	96	132	64	59	53	----	----

Problema	Producto <i>j</i>	D( <i>j</i> )	cac( <i>j</i> )	Co( <i>j</i> )	w( <i>r,j</i> )				
					<i>r=1</i>	<i>r=2</i>	<i>r=3</i>	<i>r=4</i>	<i>r=5</i>
11	1	484	19	272	99	78	32	54	----
	2	959	51	157	16	57	40	49	----
	3	419	26	276	87	69	72	46	----
	4	730	51	392	11	26	40	11	----
	5	870	33	270	68	56	98	42	----
	6	577	46	260	20	19	83	17	----
	7	238	48	368	24	21	29	34	----
	8	629	28	116	64	62	40	32	----
	9	981	30	199	35	67	51	37	----
	10	812	88	204	37	86	65	86	----
	11	265	13	364	30	83	100	57	----
	12	654	24	275	63	46	58	84	----
	13	879	65	362	49	74	59	76	----
	14	317	31	229	54	32	25	56	----
	15	410	61	145	74	58	41	31	----
	16	264	97	193	95	74	13	61	----
	17	235	89	366	84	65	60	55	----
	18	729	44	235	24	38	15	15	----
	19	617	27	379	82	28	38	54	----
	20	664	42	184	89	51	78	93	----
	21	717	92	240	22	88	98	91	----
	22	797	97	378	68	74	70	29	----
	23	974	42	344	60	56	97	65	----
	24	985	93	352	35	17	39	67	----
	25	747	31	326	94	23	96	75	----
	26	622	11	217	31	20	15	13	----
	27	296	86	349	94	96	87	77	----
	28	637	56	242	45	18	38	99	----
	29	537	58	112	69	51	57	71	----
	30	627	45	156	57	18	28	26	----



Problema	Producto <i>j</i>	D( <i>j</i> )	cac( <i>j</i> )	Co( <i>j</i> )	w( <i>r,j</i> )				
					<i>r=1</i>	<i>r=2</i>	<i>r=3</i>	<i>r=4</i>	<i>r=5</i>
12	1	614	57	374	11	56	68	28	75
	2	726	23	169	33	30	55	30	12
	3	845	51	342	87	23	58	48	35
	4	442	67	146	54	35	79	19	87
	5	648	31	234	57	52	97	61	10
	6	473	26	222	35	74	51	12	67
	7	553	30	100	13	32	93	54	84
	8	978	64	181	58	30	59	12	60
	9	907	94	211	68	100	76	75	32
	10	315	19	307	34	65	12	74	69
	11	492	97	187	64	41	98	18	25
	12	416	34	105	27	92	92	67	63
	13	719	15	152	58	94	55	43	49
	14	459	12	235	11	22	75	58	91
	15	263	56	287	17	14	18	22	85
	16	450	25	357	86	37	57	94	73
	17	281	57	122	91	55	42	68	78
	18	862	98	312	41	59	64	89	25
	19	368	89	213	57	27	60	31	99
	20	490	38	370	97	41	52	96	42
	21	629	46	247	76	84	54	38	47
	22	210	18	222	68	36	28	67	40
	23	535	46	274	35	70	99	15	22
	24	768	28	360	73	43	78	41	26
	25	815	45	200	63	72	93	94	73
	26	913	12	148	61	26	93	92	68
	27	864	93	373	83	91	35	19	39
	28	208	19	327	88	10	12	75	96
	29	399	72	122	92	88	41	16	86
	30	504	89	294	83	25	26	47	18

Problema	Produto <i>j</i>	D( <i>j</i> )	cac( <i>j</i> )	Co( <i>j</i> )	w( <i>r,j</i> )				
					<i>r=1</i>	<i>r=2</i>	<i>r=3</i>	<i>r=4</i>	<i>r=5</i>
13	1	971	76	320	75	100	41	----	----
	2	1524	86	360	40	24	59	----	----
	3	827	22	159	14	86	87	----	----
	4	620	80	333	98	66	19	----	----
	5	1876	79	267	42	34	45	----	----
14	1	234	33	162	40	53	47	56	----
	2	1644	11	263	80	92	12	83	----
	3	1493	66	109	34	79	20	89	----
	4	492	75	189	67	91	17	83	----
	5	1616	44	141	59	60	13	19	----
15	1	456	18	318	29	29	69	59	33
	2	252	91	118	37	13	74	28	56
	3	795	95	149	51	73	100	15	19
	4	1471	21	263	91	36	17	61	14
	5	1544	87	349	90	37	74	72	47
16	1	919	66	134	73	64	60	----	----
	2	270	59	303	84	25	33	----	----
	3	918	52	154	27	63	94	----	----
	4	877	88	357	80	96	39	----	----
	5	392	18	244	87	44	17	----	----
	6	1857	98	246	15	84	20	----	----
	7	1968	70	349	88	95	62	----	----
	8	615	19	166	55	93	57	----	----
	9	1742	15	334	97	52	90	----	----
	10	832	56	226	30	33	94	----	----
17	1	1365	15	374	59	24	43	84	----
	2	572	41	204	75	20	58	77	----
	3	480	97	321	90	94	36	30	----
	4	1749	70	292	86	35	94	61	----
	5	724	43	348	52	56	84	41	----
	6	667	92	309	14	40	46	59	----
	7	884	73	383	68	14	38	88	----
	8	241	45	318	36	85	12	96	----
	9	801	83	111	37	79	95	50	----
	10	950	65	367	24	38	44	59	----

Problema	Producto <i>j</i>	D( <i>j</i> )	cac( <i>j</i> )	Co( <i>j</i> )	w( <i>r,j</i> )				
					<i>r=1</i>	<i>r=2</i>	<i>r=3</i>	<i>r=4</i>	<i>r=5</i>
18	1	1287	69	150	50	53	53	20	44
	2	465	40	118	42	94	68	76	83
	3	775	15	133	78	67	97	49	78
	4	1362	75	160	34	99	70	25	81
	5	1796	49	212	72	30	66	39	97
	6	1587	18	255	86	10	15	86	64
	7	213	58	278	90	51	94	59	59
	8	1999	97	364	45	60	91	34	59
	9	757	87	368	97	84	52	19	53
	10	1706	89	254	71	95	21	80	18
19	1	1880	16	236	89	17	88	----	----
	2	1948	24	254	59	92	46	----	----
	3	449	98	275	38	49	93	----	----
	4	437	83	389	13	94	80	----	----
	5	499	34	267	43	41	14	----	----
	6	231	21	267	77	61	100	----	----
	7	374	31	334	21	51	55	----	----
	8	1954	31	187	13	81	70	----	----
	9	1018	61	147	20	19	35	----	----
	10	1628	90	115	35	78	18	----	----
	11	1249	66	189	57	21	42	----	----
	12	1755	87	110	23	31	16	----	----
	13	862	76	141	88	28	17	----	----
	14	970	37	147	58	96	18	----	----
	15	564	76	325	71	49	11	----	----
	16	1122	24	263	46	38	74	----	----
	17	1436	95	213	55	70	72	----	----
	18	789	37	396	70	30	50	----	----
	19	1965	96	124	45	34	12	----	----
	20	1271	86	311	11	76	70	----	----

Problema	Produto <i>j</i>	D( <i>j</i> )	cac( <i>j</i> )	Co( <i>j</i> )	w( <i>r,j</i> )				
					<i>r=1</i>	<i>r=2</i>	<i>r=3</i>	<i>r=4</i>	<i>r=5</i>
20	1	672	67	122	93	73	51	12	----
	2	1885	94	183	58	64	49	30	----
	3	552	58	261	86	35	35	53	----
	4	1445	36	127	85	25	58	81	----
	5	1138	71	131	60	18	53	42	----
	6	466	98	250	43	13	75	55	----
	7	597	81	130	46	29	62	92	----
	8	1561	38	143	37	57	22	46	----
	9	1196	28	198	17	84	98	72	----
	10	1007	88	324	34	51	77	53	----
	11	1839	43	188	74	76	46	92	----
	12	1206	36	283	15	60	60	45	----
	13	1236	82	163	49	23	32	50	----
	14	1892	24	104	35	63	72	66	----
	15	557	71	251	51	91	57	19	----
	16	363	20	316	33	87	96	27	----
	17	1552	21	208	19	54	88	16	----
	18	633	95	111	82	12	91	28	----
	19	937	36	188	71	78	94	64	----
	20	792	25	379	69	40	77	37	----
21	1	979	80	394	33	95	18	78	55
	2	505	85	111	42	72	57	59	26
	3	1386	57	386	68	86	82	37	38
	4	1315	65	178	31	21	31	18	76
	5	859	18	322	11	78	60	66	58
	6	201	47	361	98	79	85	63	76
	7	1449	80	382	96	65	60	85	61
	8	1380	47	196	64	36	55	80	60
	9	1365	55	114	81	77	60	22	30
	10	1180	30	364	76	99	49	32	60
	11	617	86	101	36	60	87	54	51
	12	1177	72	174	13	11	39	21	72
	13	1012	23	322	41	62	67	50	72
	14	1678	20	366	94	46	47	57	64
	15	325	18	136	70	95	94	56	71
	16	1673	44	186	38	93	22	37	93
	17	1798	70	113	49	71	73	81	60
	18	1714	26	372	71	32	80	84	69
	19	1401	47	313	19	97	96	67	40
	20	428	45	179	83	25	49	63	91

Problema	Producto <i>j</i>	D( <i>j</i> )	cac( <i>j</i> )	Co( <i>j</i> )	w( <i>r,j</i> )				
					<i>r=1</i>	<i>r=2</i>	<i>r=3</i>	<i>r=4</i>	<i>r=5</i>
22	1	1169	53	298	32	41	94	----	----
	2	1743	90	107	13	74	61	----	----
	3	1100	15	147	38	45	29	----	----
	4	411	95	238	15	28	18	----	----
	5	360	94	332	13	39	12	----	----
	6	1697	17	295	15	54	88	----	----
	7	1562	57	295	100	36	94	----	----
	8	1350	40	110	91	76	89	----	----
	9	482	49	212	31	29	52	----	----
	10	554	21	235	23	89	34	----	----
	11	1176	94	319	24	67	92	----	----
	12	1782	83	227	79	31	12	----	----
	13	1898	83	124	80	86	69	----	----
	14	1003	82	225	59	41	32	----	----
	15	1255	76	223	40	56	49	----	----
	16	1118	34	139	64	56	34	----	----
	17	797	17	180	65	98	18	----	----
	18	1498	57	200	74	83	48	----	----
	19	1267	78	133	93	29	53	----	----
	20	1183	32	121	63	15	49	----	----
	21	936	12	139	65	68	75	----	----
	22	1767	28	162	13	19	39	----	----
	23	519	15	249	94	11	87	----	----
	24	464	97	307	46	27	53	----	----
	25	520	25	263	24	95	74	----	----
	26	1905	94	204	99	21	75	----	----
	27	1124	65	213	93	86	19	----	----
	28	753	99	366	19	73	74	----	----
	29	1298	27	203	36	36	25	----	----
	30	1389	59	134	99	11	94	----	----

Problema	Producto <i>j</i>	D( <i>j</i> )	cac( <i>j</i> )	Co( <i>j</i> )	w( <i>r,j</i> )				
					<i>r=1</i>	<i>r=2</i>	<i>r=3</i>	<i>r=4</i>	<i>r=5</i>
23	1	271	72	207	11	16	48	86	----
	2	1386	33	137	74	70	40	28	----
	3	1963	22	338	53	19	51	30	----
	4	1334	31	307	52	66	84	20	----
	5	1800	78	209	68	47	33	59	----
	6	1727	35	249	25	12	65	45	----
	7	488	34	214	42	75	40	69	----
	8	1924	58	152	31	31	13	44	----
	9	1936	81	121	77	73	29	40	----
	10	1002	34	167	80	23	78	52	----
	11	1807	41	307	41	30	73	50	----
	12	560	39	304	11	53	26	95	----
	13	1747	14	264	39	63	23	89	----
	14	295	59	374	91	26	46	98	----
	15	1494	59	381	82	48	47	85	----
	16	567	97	375	17	82	85	88	----
	17	435	24	133	93	47	45	19	----
	18	574	56	338	22	59	21	43	----
	19	1831	46	233	71	31	79	37	----
	20	226	39	231	95	39	69	86	----
	21	1263	92	117	64	84	96	29	----
	22	419	37	284	16	69	29	66	----
	23	866	40	254	39	86	30	79	----
	24	1541	12	136	43	84	68	97	----
	25	1690	89	345	98	16	18	64	----
	26	1551	29	197	78	74	86	99	----
	27	1238	14	119	50	37	22	52	----
	28	1073	82	235	41	59	80	16	----
	29	1280	27	343	40	54	42	95	----
	30	632	43	293	13	83	43	61	----

Problema	Producto <i>j</i>	D( <i>j</i> )	cac( <i>j</i> )	Co( <i>j</i> )	w( <i>r,j</i> )				
					<i>r=1</i>	<i>r=2</i>	<i>r=3</i>	<i>r=4</i>	<i>r=5</i>
24	1	1000	47	296	51	17	77	81	46
	2	1152	25	396	51	68	81	92	84
	3	1397	37	177	66	80	57	21	77
	4	280	31	313	30	67	26	51	52
	5	510	32	361	88	61	99	89	33
	6	1277	78	224	92	16	68	93	46
	7	1215	22	231	38	83	59	65	69
	8	945	25	325	60	85	27	23	67
	9	1435	44	142	84	49	84	87	75
	10	1502	83	110	51	94	99	96	28
	11	1262	84	254	42	35	69	10	61
	12	1878	95	124	71	89	60	33	46
	13	1896	41	216	92	26	45	68	57
	14	1476	75	344	19	62	22	70	45
	15	1645	65	345	86	32	19	72	41
	16	1086	14	242	34	89	43	87	69
	17	1204	41	247	76	97	37	53	33
	18	781	38	127	64	55	23	29	17
	19	1174	37	105	55	66	52	88	51
	20	1369	87	237	94	25	91	89	95
	21	1342	70	328	66	11	97	76	75
	22	1013	25	305	82	90	53	66	94
	23	333	42	352	53	94	98	62	47
	24	755	75	329	48	73	51	44	97
	25	1693	39	330	32	60	41	18	79
	26	1112	32	129	71	37	35	88	21
	27	1123	29	290	70	18	58	57	82
	28	1286	84	181	42	26	70	87	96
	29	1713	93	286	43	56	13	74	22
	30	1283	19	187	53	43	81	83	68

<b>B(r)</b>					
<b>Problema</b>	<b>r=1</b>	<b>r=2</b>	<b>r=3</b>	<b>r=4</b>	<b>r=5</b>
1	17.275	13.759	19.956	-----	-----
2	24.665	17.457	13.659	18.543	-----
3	18.265	15.825	20.497	23.847	14.692
4	38.798	31.911	27.364	-----	-----
5	40.337	29.024	47.566	31.674	-----
6	47.165	41.948	36.315	37.117	35.339
7	94.066	87.819	55.672	-----	-----
8	69.036	97.786	50.040	85.459	-----
9	88.302	94.224	94.699	59.525	78.373
10	86.314	138.045	128.974	-----	-----
11	83.792	121.698	137.166	102.348	-----
12	132.144	119.446	80.949	76.080	114.650
13	26.248	39.057	37.923	-----	-----
14	36.261	44.195	32.219	36.458	-----
15	41.150	33.767	41.380	28.581	43.809
16	35.707	80.780	89.682	-----	-----
17	99.238	92.927	48.086	51.338	-----
18	94.255	92.479	69.251	82.472	76.083
19	92.116	134.222	139.596	-----	-----
20	111.058	185.960	69.419	150.739	-----
21	95.146	176.928	78.373	68.645	84.036
22	158.485	119.942	289.494	-----	-----
23	185.162	201.532	118.075	226.609	-----
24	167.666	267.452	165.249	294.713	207.362



**APÊNDICE C – Resultados da 3ª etapa de testes.**

Produto <i>j</i>	Problemas com 5 produtos					
	1	2	3	13	14	15
	X( <i>j</i> )					
1	41,500	28,711	77,711	90,426	47,112	69,240
2	64,298	66,333	41,217	112,956	260,766	43,262
3	107,347	68,677	42,625	109,334	69,265	63,528
4	56,219	53,558	67,757	71,844	49,236	157,681
5	110,667	49,005	52,791	112,609	101,318	176,570

Produto <i>j</i>	Problemas com 5 produtos					
	1	2	3	13	14	15
	T( <i>j</i> )					
1	0,111	0,115	0,276	0,093	0,201	0,152
2	0,111	0,295	0,166	0,074	0,159	0,172
3	0,111	0,121	0,086	0,132	0,046	0,080
4	0,111	0,166	0,109	0,116	0,100	0,107
5	0,111	0,066	0,110	0,060	0,063	0,114

Produto <i>j</i>	Problemas com 10 produtos					
	4	5	6	16	17	18
	X( <i>j</i> )					
1	69,004	40,860	59,381	83,234	150,830	74,804
2	38,320	45,220	50,288	24,454	58,416	52,378
3	92,323	94,021	54,378	83,143	53,498	117,232
4	125,325	51,937	52,562	79,430	105,541	76,231
5	123,824	57,363	75,451	35,504	93,545	124,663
6	131,870	80,816	64,534	168,189	60,401	212,050
7	28,911	42,250	69,167	178,242	80,573	45,187
8	71,731	59,022	45,781	55,701	44,006	122,486
9	121,506	39,956	62,880	157,773	42,004	80,025
10	42,411	36,742	54,533	75,354	90,052	98,679

Produto <i>j</i>	Problemas com 10 produtos					
	4	5	6	16	17	18
	T( <i>j</i> )					
1	0,136	0,052	0,074	0,091	0,110	0,058
2	0,136	0,179	0,130	0,091	0,102	0,113
3	0,136	0,114	0,099	0,091	0,111	0,151
4	0,136	0,062	0,132	0,091	0,060	0,056
5	0,136	0,064	0,085	0,091	0,129	0,069
6	0,136	0,083	0,107	0,091	0,091	0,134
7	0,136	0,139	0,070	0,091	0,091	0,212
8	0,136	0,086	0,096	0,091	0,183	0,061
9	0,136	0,049	0,236	0,091	0,052	0,106
10	0,136	0,065	0,216	0,091	0,095	0,058

Produto <i>j</i>	Problemas com 20 produtos					
	7	8	9	19	20	21
	X( <i>j</i> )					
1	52,042	32,505	75,516	198,716	57,096	92,677
2	64,251	43,507	67,511	187,029	160,158	47,806
3	57,018	62,455	74,871	49,506	46,900	131,205
4	45,966	49,889	71,541	63,640	122,774	124,484
5	81,370	37,513	35,703	84,718	96,690	81,317
6	62,290	54,871	87,347	68,099	39,593	19,028
7	44,595	67,620	51,448	87,640	50,724	137,169
8	88,982	50,658	74,053	151,250	132,630	130,637
9	44,575	37,391	40,289	69,226	101,618	129,217
10	80,288	52,111	96,347	63,608	85,559	111,704
11	43,954	52,793	74,070	82,041	156,250	58,408
12	51,074	83,641	86,127	65,987	102,467	111,420
13	40,652	25,169	42,114	54,315	105,016	95,801
14	62,905	53,930	38,417	83,180	160,753	158,847
15	65,112	37,905	39,427	67,208	47,325	30,766
16	26,886	48,520	53,196	146,910	30,842	158,374
17	43,070	28,630	67,681	78,608	131,865	170,207
18	74,692	76,448	41,721	121,846	53,783	162,255
19	91,910	43,716	77,476	70,064	79,612	132,625
20	135,790	35,374	53,385	95,435	67,292	40,516

Produto <i>j</i>	Problemas com 20 produtos					
	7	8	9	19	20	21
	T( <i>j</i> )					
1	0,076	0,059	0,086	0,106	0,085	0,095
2	0,156	0,110	0,097	0,096	0,085	0,095
3	0,146	0,072	0,195	0,110	0,085	0,095
4	0,068	0,060	0,116	0,146	0,085	0,095
5	0,092	0,085	0,150	0,170	0,085	0,095
6	0,159	0,084	0,135	0,295	0,085	0,095
7	0,060	0,071	0,101	0,234	0,085	0,095
8	0,128	0,054	0,130	0,077	0,085	0,095
9	0,110	0,084	0,120	0,068	0,085	0,095
10	0,097	0,090	0,105	0,039	0,085	0,095
11	0,200	0,078	0,106	0,066	0,085	0,095
12	0,064	0,219	0,089	0,038	0,085	0,095
13	0,200	0,073	0,117	0,063	0,085	0,095
14	0,160	0,060	0,051	0,086	0,085	0,095
15	0,187	0,071	0,101	0,119	0,085	0,095
16	0,130	0,086	0,144	0,131	0,085	0,095
17	0,126	0,086	0,074	0,055	0,085	0,095
18	0,134	0,093	0,119	0,154	0,085	0,095
19	0,117	0,059	0,137	0,036	0,085	0,095
20	0,163	0,067	0,167	0,075	0,085	0,095

Produto <i>j</i>	Problemas com 30 produtos					
	10	11	12	22	23	24
	X( <i>j</i> )					
1	57,642	45,227	79,065	101,684	32,573	97,942
2	137,827	66,190	93,488	56,715	78,825	151,571
3	61,072	43,466	108,812	102,492	151,450	93,939
4	61,643	95,168	56,917	43,201	95,371	66,484
5	37,932	65,844	83,444	47,116	86,226	80,101
6	32,947	66,345	60,909	166,899	103,237	73,975
7	48,309	48,458	71,210	115,046	57,985	130,495
8	46,145	38,407	125,938	66,748	93,337	120,489
9	98,093	75,338	116,795	58,768	67,978	77,283
10	32,626	50,676	40,563	70,611	61,379	58,152
11	28,276	64,587	63,355	79,907	109,627	81,670
12	46,526	61,919	53,569	92,834	77,099	63,506
13	31,425	73,036	92,586	64,492	174,857	110,121
14	47,813	39,977	59,106	68,431	49,151	112,328
15	52,428	28,834	33,867	76,499	111,215	112,419
16	43,539	22,445	57,947	76,116	52,085	148,581
17	60,273	30,736	36,185	74,728	45,605	97,221
18	47,713	69,665	111,001	83,414	74,050	59,273
19	36,308	62,988	47,388	61,824	91,669	68,288
20	42,441	41,683	63,098	87,653	34,542	75,407
21	74,179	54,380	80,997	85,189	43,047	99,433
22	45,329	59,125	27,042	128,512	64,398	112,692
23	52,128	78,590	68,893	117,068	84,860	63,968
24	70,045	72,538	98,896	51,728	83,718	74,776
25	61,517	60,025	104,948	68,479	107,104	152,206
26	103,758	77,147	117,568	87,565	82,650	73,935
27	72,674	32,961	111,258	70,931	99,997	115,064
28	49,832	53,964	26,784	66,509	60,399	69,594
29	44,968	29,909	51,380	115,317	124,636	96,415
30	35,119	42,526	64,901	76,955	71,116	118,293

Produto <i>j</i>	Problemas com 30 produtos					
	10	11	12	22	23	24
	T( <i>j</i> )					
1	0,059	0,093	0,129	0,087	0,120	0,098
2	0,174	0,069	0,129	0,033	0,057	0,132
3	0,147	0,104	0,129	0,093	0,077	0,067
4	0,082	0,130	0,129	0,105	0,071	0,237
5	0,080	0,076	0,129	0,131	0,048	0,157
6	0,095	0,115	0,129	0,098	0,060	0,058
7	0,176	0,204	0,129	0,074	0,119	0,107
8	0,141	0,061	0,129	0,049	0,049	0,128
9	0,115	0,077	0,129	0,122	0,035	0,054
10	0,102	0,062	0,129	0,127	0,061	0,039
11	0,074	0,244	0,129	0,068	0,061	0,065
12	0,113	0,095	0,129	0,052	0,138	0,034
13	0,091	0,083	0,129	0,034	0,100	0,058
14	0,098	0,126	0,129	0,068	0,167	0,076
15	0,079	0,070	0,129	0,061	0,074	0,068
16	0,069	0,085	0,129	0,068	0,092	0,137
17	0,090	0,131	0,129	0,094	0,105	0,081
18	0,065	0,096	0,129	0,056	0,129	0,076
19	0,093	0,102	0,129	0,049	0,050	0,058
20	0,127	0,063	0,129	0,074	0,153	0,055
21	0,100	0,076	0,129	0,091	0,034	0,074
22	0,133	0,074	0,129	0,073	0,154	0,111
23	0,107	0,081	0,129	0,226	0,098	0,192
24	0,073	0,074	0,129	0,111	0,054	0,099
25	0,079	0,080	0,129	0,132	0,063	0,090
26	0,173	0,124	0,129	0,046	0,053	0,066
27	0,154	0,111	0,129	0,063	0,081	0,102
28	0,096	0,085	0,129	0,088	0,056	0,054
29	0,073	0,056	0,129	0,089	0,097	0,056
30	0,051	0,068	0,129	0,055	0,113	0,092

Problema	R	$\tau$	$\tau(r)$				
			$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$
1	0,111	0,111	0,119	0,120	0,227	-----	-----
2	0,122	0,122	0,320	0,181	0,232	0,205	-----
3	0,168	0,168	0,254	0,318	0,256	0,234	0,172
4	0,136	0,136	0,175	0,144	0,164	-----	-----
5	0,103	0,103	0,193	0,140	0,238	0,164	-----
6	0,121	0,121	0,288	0,219	0,282	0,176	0,194
7	0,135	0,135	0,269	0,228	0,211	-----	-----
8	0,110	0,110	0,198	0,291	0,135	0,236	-----
9	0,135	0,135	0,243	0,270	0,324	0,191	0,306
10	0,126	0,126	0,174	0,333	0,242	-----	-----
11	0,129	0,129	0,164	0,246	0,246	0,194	-----
12	0,129	0,129	0,255	0,249	0,139	0,168	0,251
13	0,083	0,083	0,149	0,206	0,204	-----	-----
14	0,086	0,086	0,175	0,164	0,579	0,157	-----
15	0,152	0,152	0,182	0,285	0,238	0,172	0,477
16	0,091	0,091	0,094	0,188	0,250	-----	-----
17	0,109	0,109	0,350	0,472	0,159	0,166	-----
18	0,078	0,078	0,220	0,223	0,175	0,249	0,179
19	0,084	0,084	0,166	0,209	0,247	-----	-----
20	0,085	0,085	0,190	0,302	0,098	0,251	-----
21	0,095	0,095	0,143	0,232	0,112	0,103	0,116
22	0,081	0,081	0,153	0,134	0,282	-----	-----
23	0,095	0,095	0,185	0,221	0,127	0,218	-----
24	0,088	0,088	0,146	0,258	0,155	0,240	0,186

Problema	Tempo de processamento				
	1	2	3	4	5
1	0,067	0,075	0,143	0,105	0,091
2	0,04	0,038	0,072	0,04	0,035
3	0,113	0,069	0,067	0,125	0,062
4	0,049	0,129	0,038	0,115	0,059
5	0,145	0,093	0,095	0,065	0,116
6	0,067	0,127	0,123	0,137	0,07
7	0,164	0,051	0,058	0,057	0,098
8	0,054	0,08	0,042	0,082	0,131
9	0,1	0,155	0,153	0,056	0,061
10	0,098	0,127	0,069	0,141	0,125
11	0,13	0,16	0,159	0,162	0,175
12	0,149	0,099	0,167	0,132	0,106
13	0,111	0,096	0,091	0,043	0,04
14	0,063	0,046	0,105	0,03	0,031
15	0,086	0,045	0,079	0,045	0,05
16	0,1	0,084	0,086	0,139	0,14
17	0,046	0,056	0,044	0,089	0,099
18	0,112	0,033	0,103	0,09	0,122
19	0,096	0,168	0,15	0,123	0,093
20	0,1	0,097	0,156	0,087	0,139
21	0,174	0,125	0,119	0,171	0,163
22	0,091	0,117	0,131	0,119	0,112
23	0,137	0,14	0,102	0,09	0,15
24	0,138	0,187	0,164	0,174	0,115