



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Rubens Pazim Carnevarollo Júnior

Órbitas periódicas em sistemas diferenciais suaves por partes

São José do Rio Preto
2016

Rubens Pazim Carnevarollo Júnior

Órbitas periódicas em sistemas diferenciais suaves por partes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: Capes/PDSE 7038/2014-03
Capes/DS 33004153071P0

Orientador: Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

São José do Rio Preto
2016

Carnevarollo Junior, Rubens Pazim.

Órbitas periódicas em sistemas diferenciais suaves por partes / Rubens Pazim Carnevarollo Junior. -- São José do Rio Preto, 2016
95 f. : il.

Orientador: Claudio Aguinaldo Buzzi

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Geometria. 3. Topologia. 4. Teoria dos sistemas dinâmicos. 5. Equações diferenciais lineares. 6. Ciclo limite. 7. Teoria da bifurcação. 8. Equações diferenciais ordinárias. I. Buzzi, Claudio Aguinaldo. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Rubens Pazim Carnevarollo Júnior

Órbitas periódicas em sistemas diferenciais suaves por partes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: Capes/PDSE 7038/2014-03
Capes/DS 33004153071P0

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira
UNICAMP – Campinas

Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia
UFG – Goiânia

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello
UNIFEI – Itajubá

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
26 de agosto de 2016

Agradecimentos

Sinto-me agradecido a um grande número de pessoas que contribuíram para que este trabalho chegasse ao fim. Na certeza de que existem mais pessoas que merecem agradecimentos do que as que citarei, peço desculpas às que não tenho citado. Em especial agradeço:

Ao meu orientador Claudio Agnaldo Buzzi pela disponibilidade na orientação, por toda dedicação, pelos conhecimentos transmitidos e principalmente por sua amizade.

Ao meu co-orientador Enrique Ponce pelo conhecimento científico transmitido no período em que estive em Sevilla e também pelos seus conselhos que jamais serão esquecidos.

Aos amigos Set Pérez Gonzáles e Rodrigo Euzébio pelos trabalhos realizados em co-autoria.

A todos os professores que tive até o presente momento, em especial à professora de primeiro ano Sônia Gil, pois foi com ela que iniciei esta caminhada.

Aos amigos de Pós-Graduação e aos professores Márcio Gouveia e Cláudio Pessoa pelo convívio de quatro anos que agora se completa, mas a amizade será eterna.

Aos amigos de Sevilha Alex, Andreas, Bastian e Mark que tornavam os finais de tarde mais agradáveis. Manolo, Emílio Javier e Paco que juntamente com Enrique tornavam as conversas no café do Ginásio Cartuja muito descontraídas.

Aos meus pais Rubens e Juventina e irmãos Clodoaldo, Rutinéia e Claudinéia, por sempre estarem presentes não só nestes quatro anos, mas em todos os momentos de minha vida e que sempre confiaram em minha capacidade para a realização deste trabalho.

À minha esposa Camilla, pelo seu amor, confiança, compreensão pela minha ausência que muitas vezes aconteceu, pela ajuda no inglês e por sempre ouvir pacientemente várias

teorias desta tese mesmo sem entendê-las.

À Capes pelo apoio financeiro e à UFMT pelo afastamento.

A Deus por tudo.

Aos meus pais,
e minha esposa. *dedico.*

Resumo

Este trabalho está relacionado ao estudo de bifurcações e órbitas periódicas de sistemas diferenciais suaves por partes planares em duas e três zonas. Em sistemas com duas zonas, estamos interessados em encontrar uma fronteira de separação para um dado par de sistemas suaves de tal modo que o sistema descontínuo, formado pelo par de sistemas suaves, tem um contínuo de órbitas periódicas. Neste caso, denominamos a fronteira de separação como *Fronteira de Centros*. Para os sistemas com três zonas, consideramos sistemas lineares por partes contínuo, em que a zona central é degenerada e na qual o determinante da parte linear é nulo. Ao mover um parâmetro específico, detectamos algumas bifurcações até então desconhecidas, exibindo transição de salto nos pontos de equilíbrios e o aparecimento de ciclos limite. Em particular, introduzimos a bifurcação *Bainha de Espada*, caracterizada pelo nascimento de um ciclo limite de um contínuo de pontos de equilíbrios.

Palavras-chave: Sistemas Diferenciais Lineares por Partes. Ciclos Limite. Bifurcações. Sistemas Diferenciais Não Suaves.

Abstract

This work is related to the study of bifurcations and periodic orbits in planar piecewise smooth differential systems with two and three zones. In the systems with two zones, we are interested in finding a separation boundary for a given pair of smooth systems in such a way that the discontinuous system, formed by the pair of smooth systems, has a continuum of periodic orbits. In this case we call the separation boundary as a *Center Boundary*. For the systems with three zones, we consider continuous piecewise linear systems where the central one is degenerate, that is, the determinant of its linear part vanishes. By moving one special parameter, we detect some new bifurcations exhibiting jump transitions both in the equilibrium location and in the appearance of limit cycles. In particular, we introduce the *Scabbard Bifurcation*, characterized by the birth of a limit cycle from a continuum of equilibrium points.

Keywords: Piecewise Linear Differential Systems. Limit Cycles. Bifurcations. Non-Smooth Differential Systems.

Sumário

Introdução	13
1 Fronteira de centros para sistema diferenciais por partes planares de duas zonas	28
1.1 Apresentação do Capítulo	28
1.2 Resultados Técnicos	29
1.3 Caso Linear	44
1.4 Caso Não Linear	47
1.5 Perturbação da Fronteira de Centros	53
2 Bifurcações tipo salto em sistemas diferenciais lineares por partes planares degenerados	58
2.1 Apresentação do Capítulo	58
2.2 Resultados Técnicos	58
2.3 Bifurcação Bainha de Espada	65
2.4 Transição de um nó estável para um foco instável	66
2.5 Transição de um foco estável para um foco instável	78
2.6 Um estudo de caso: o modelo linear por partes de Morris-Lecar	84
Referências	91

Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos tem como precursor trabalhos de mecânica celeste, já identificados no final do século XVI pelo astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler. No entanto, o matemático francês Henri Poincaré é considerado um dos principais criadores da teoria de sistemas dinâmicos moderna, efetuando estudos em teoria qualitativa de equações diferenciais, para mais detalhes veja [5].

O estudo de sistemas diferenciais lineares por partes tem como pioneiro Andronov e seus colaboradores [1]. Esta é uma importante classe de sistemas diferenciais, devido à sua capacidade de modelar um grande número de problemas de engenharia, veja [3, 4, 25, 38] e referências contidas nestes trabalhos, bem como modelos biológicos, veja [12, 39, 40]. Apesar desta aparente simplicidade, há ainda problemas em aberto relacionados à estabilidade e às bifurcações.

No caso de sistemas lineares planares com duas zonas separadas por uma reta, um grande esforço tem sido empenhado para caracterizar o número máximo de ciclos limite no cenário descontínuo [2, 7, 10, 15, 21, 22, 23, 24, 29], uma vez que para o caso contínuo está totalmente resolvido em [19], veja também [36].

Este trabalho baseia-se nos artigos [9] e [16], os quais estão relacionados com o estudo da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias em campos de vetores suaves por partes em duas e três zonas, respectivamente. O estudo em duas zonas é apresentado no Capítulo 1 e enquanto no Capítulo 2, é estudado o caso de três zonas, em que o campo de vetores considerado é contínuo.

No Capítulo 1 descrevemos o importante papel da fronteira de separação W entre duas zonas. Após usar uma poligonal como a fronteira de separação entre duas zonas lineares,

Braga e Mello em [8] colocaram em evidência a importância da fronteira de separação no número de ciclos limite. No mesmo artigo, os autores exibiram um exemplo com sete ciclos limite, tomando W como uma poligonal e declararam a seguinte conjectura em tradução literal, “*Dado $n \in \mathbb{N}$ existe um sistema linear por partes planar de duas zonas com exatamente n ciclos limite*”; cujo texto original é dado por: “*Given $n \in \mathbb{N}$ there is a piecewise linear system with two zones in the plane with exactly n limit cycles*”. Esta conjectura foi provada pelos mesmos autores em [6]. Novaes e Ponce em [32] apresentaram outra solução para a Conjectura de Braga–Mello.

Em [6], os autores consideram sistemas lineares por partes compartilhando um ponto singular do tipo foco, ambos na forma canônica de Jordan. No Lema 2.1 do respectivo artigo, está provado que existe uma fronteira de separação linear por partes tal que o sistema descontínuo é um centro. O primeiro capítulo deste trabalho é inspirado neste resultado. Estamos interessados em encontrar uma fronteira de separação para um dado par de sistemas suaves, de tal maneira que o sistema descontínuo tenha um contínuo de órbitas periódicas. Neste caso chamamos a fronteira de separação de *fronteira de centros*. Em [32], na prova da conjectura de Braga-Mello, a fronteira de centros considerada é o eixo y , esta escolha torna-se possível devido à particularidade dos autovalores do sistema escolhido. Aqui, discutimos o caso de sistemas lineares por partes mais gerais, onde temos dois focos não necessariamente na forma canônica de Jordan. Lidamos não somente com sistemas lineares por partes, mas também com sistemas suaves por partes não necessariamente lineares. Este resultado também está relacionado com a estabilidade de sistemas de controle com chaveamento, veja para consulta [33, 34, 41].

Considere pares de sistemas diferenciais de classe \mathcal{C}^r , $r \geq 2$, como segue. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e tome $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^r . Denotamos o par de sistemas diferenciais

$$\dot{X} = f_1(X), \tag{1}$$

e

$$\dot{X} = f_2(X), \tag{2}$$

por $Z = (f_1, f_2)$. O conjunto de todos os pares $Z = (f_1, f_2)$ de sistemas (1) e (2) denotamos

por \mathfrak{X}^r e para cada $X_0 \in U$, $i = 1, 2$, denotamos a solução de $\dot{X} = f_i(X)$ que passa em X_0 no tempo $t = 0$ por γ_i , isto é, $\gamma_i(0, X_0) = X_0$.

Seja $W \subset U$ uma variedade suave por partes de tal modo que o conjunto $U \setminus W$ possua duas componentes conexas, isto é, $U = U_1 \cup U_2 \cup W$, em que U_1 e U_2 são conjuntos abertos conexos. Dado o par $Z = (f_1, f_2)$ definimos $Z_W = (f_1, f_2, W)$ como um sistema diferencial suave por partes

$$\dot{X} = \begin{cases} f_1(X) & \text{se } X \in U_1 \cup W, \\ f_2(X) & \text{se } X \in U_2 \cup W. \end{cases} \quad (3)$$

Note que o sistema (3) aceita ser multivaluado em W , conforme é descrito na teoria de Filippov [17].

Seja $\Sigma \subset U$ uma variedade 1-dimensional transversal a ambos campos de vetores, (1) e (2). Isto significa que $f \cdot n(X) := f_i(X) \cdot n(X) \neq 0, \forall X \in \Sigma, i = 1, 2$, com “ \cdot ” o produto interno e $n(X)$ o vetor normal a Σ no ponto X . Dizemos que Σ é uma *seção transversal* para $Z = (f_1, f_2)$ se $f \cdot n_1(X) f \cdot n_2(X) > 0$ e uma *seção de deslize* para $Z = (f_1, f_2)$ se $f \cdot n_1(X) f \cdot n_2(X) < 0$. Trataremos apenas casos em que $f \cdot n_1(X) f \cdot n_2(X) > 0$.

Agora, apresentamos o significado de *órbitas periódicas* para Z_W , dado por (3). Assuma que existam pontos $p_1, p_2 \in W$, tempos positivos $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e soluções γ_1 de (1), satisfazendo $p_1 = \gamma_1(0, p_1)$, e γ_2 de (2), satisfazendo $p_2 = \gamma_2(0, p_2)$. Dizemos que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, em que $\Gamma_i = \{\gamma_i(t, p_i), 0 \leq t \leq t_i\}$, é uma órbita periódica para Z_W se $p_2 = \gamma_1(t_1, p_1)$, $p_1 = \gamma_2(t_2, p_2)$ e $\Gamma_i \subset U_i, i = 1, 2$. No caso em que temos um contínuo de órbitas periódicas para Z_W dizemos que W é uma *fronteira de centros* para Z_W , veja Figura 1.

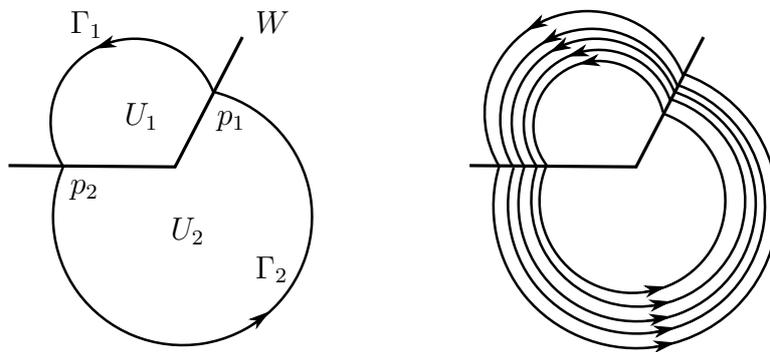


Figura 1: Órbitas periódicas para o sistema $Z_W = (f_1, f_2, W)$.

Dado um par $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$, queremos construir uma variedade diferenciável por partes W de tal modo que W seja uma fronteira de centros para o sistema $Z_W = (f_1, f_2, W)$. Ao longo do primeiro capítulo, apresentaremos algumas hipóteses sobre o par Z e a seção transversal Σ tal que a construção seja possível. Outra questão é, para um par fixado $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ e uma seção transversal Σ , determinar o número máximo de fronteiras de centros que contém Σ . Um resultado deste trabalho que responde estas questões é o teorema que segue.

Teorema 1 (Fronteira de Centros). *Considere $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ tais que f_1 e f_2 compartilham uma singularidade do tipo foco no ponto p_0 , com a mesma orientação e com estabilidades contrárias, e um raio Σ_0 com extremo p_0 . Então, existe uma variedade diferenciável por partes W tal que $W \supset \Sigma_0$ e W é uma fronteira de centros para Z_W . O número máximo dessas variedades que satisfazem estas condições é cinco. Além disso, esta cota superior é atingida, veja o Exemplo 1 a seguir.*

Um enunciado mais preciso deste resultado é o Teorema 7 na Seção 1.4 do Capítulo 1. Após encontrarmos a fronteira de centros, nosso sistema torna-se estável, mas não assintoticamente. Em [33] e [34] os autores consideram um par de sistemas instáveis e determinam a fronteira de separação com quatro zonas de modo a estabilizar assintoticamente o sistema.

Exemplo 1. [Cinco Fronteiras de Centros] *Seja $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de campos de vetores lineares $f_1(X) = A_1X$ e $f_2(X) = A_2X$, em que*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.01 & -1 \\ 1 & -0.01 \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.05 \\ 20 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Então, considerando $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0 \text{ e } y < 0\}$, existem cinco raios Ω_i , $i = 1, \dots, 5$, dados por:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -134.8775564625664 \dots x, x > 0\}; \\ \Omega_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -21.3368256507493 \dots x, x > 0\}; \\ \Omega_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 8.31842273952277 \dots x, x > 0\}; \\ \Omega_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -1.781004127809957 \dots x, x < 0\}; \text{ e,} \\ \Omega_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 1.544443235738568 \dots x, x < 0\}. \end{aligned}$$

Agora, tomamos $W_i = \Sigma_0 \cup \{(0, 0)\} \cup \Omega_i$, para $i = 1, 2$.

Uma representação geométrica do Exemplo 1, pode ser visto na Figura 2. No próximo capítulo, daremos mais detalhes sobre o respectivo exemplo.

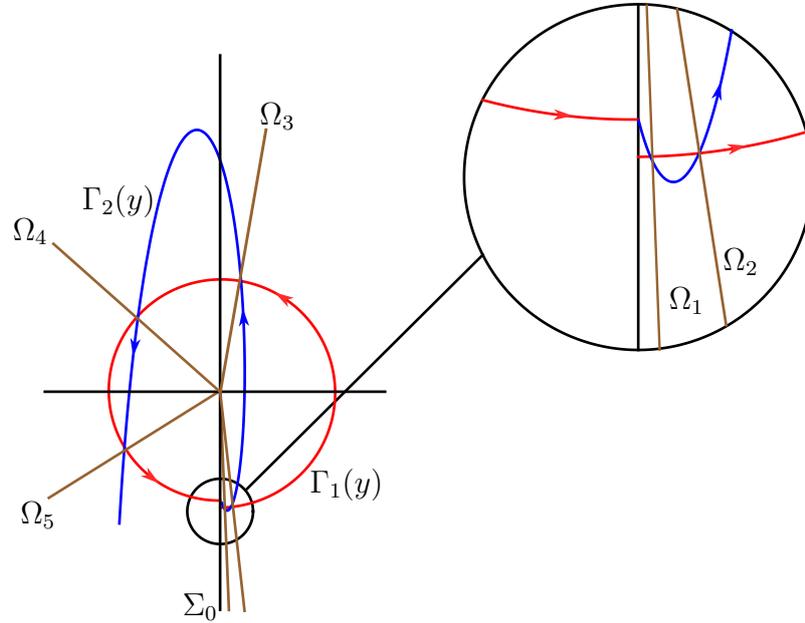


Figura 2: Cinco Fronteiras de centros. Em vermelho e azul, temos a trajetória $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ respectivamente, já em marrom, temos os raios Ω_i , $i = 1, \dots, 5$.

Uma prova da conjectura de Braga–Mello para casos mais gerais que [6] e [32], é dada na Seção 1.5 do Capítulo 1, em que os sistemas considerados não estão necessariamente na forma canônica de Jordan, nas condições das Hipóteses HL que apresentaremos no próximo capítulo, o Teorema 6 que é a versão linear do Teorema Fronteira de Centros, garante que existe uma semirreta Ω tal que ao considerarmos $W = \Sigma_0 \cup \{p_0\} \cup \Omega$ o sistema Z_W é formado por um contínuo de órbitas periódicas. Agora, de modo semelhante ao que foi feito em [32], dado $n \in \mathbb{N}$, podemos efetuar uma perturbação da semirreta Ω , obtendo um curva de classe \mathcal{C}^1 que denominamos por Ω_ε de modo que ao considerarmos $W_\varepsilon = \Sigma_0 \cup \{p_0\} \cup \Omega_\varepsilon$ o sistema Z_{W_ε} contém exatamente n ciclos limite. Uma característica muito importante da variedade Ω_ε é o fato que podemos controlar a localização dos n ciclos limite, ou seja, podemos escolher $a, b \in \mathbb{R}_+$, com $0 < a < b$ de modo que os n ciclos limite cruzam a semirreta Ω a uma distância da origem maior que a e menor que b . Assim, nas

condições das Hipóteses HL que apresentaremos no próximo capítulo, temos o seguinte resultado.

Teorema 2 (Perturbação da Fronteira de Centros). *Sejam $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de campos de vetores que satisfaz as Hipóteses HL , Σ_0 uma semirreta com ponto final em comum com o ponto singular p_0 de f_1 e f_2 e $W \supset \Sigma_0$ uma fronteira de centros para o par $Z = (f_1, f_2)$. Então, dado $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}_+$ com $0 < a < b$, podemos perturbar a fronteira de centros W produzindo uma fronteira de separação W_ε , de modo que o sistema $Z_{W_\varepsilon} = (f_1, f_2, W_\varepsilon)$ possui exatamente n ciclos limite. Os ciclos limite de Z_{W_ε} são as órbitas periódicas de Z_W que persistiram após a perturbação e eles cruzam a semirreta Ω a uma distância da origem maior que a e menor que b .*

A prova deste teorema é dada na Seção 1.5 do Capítulo 1 após provarmos os resultados necessários para sua demonstração.

No Capítulo 2, vamos apresentar alguns fenômenos de bifurcações que aparecem em sistemas diferenciais lineares por partes contínuos com três zonas, sem a condição de simetria, mas sobre um caso degenerado específico. Em particular, consideramos as consequências do determinante nulo para a matriz Jacobiana da zona central. Como iremos mostrar no Lema 1, estas hipóteses conduzem a um comportamento descontínuo na evolução do ponto de equilíbrio com respeito ao parâmetro de bifurcação selecionado; este fato é contra intuitivo, pois o campo de vetores depende continuamente de tal parâmetro.

Em relação à dinâmica de bifurcação, reproduzimos algumas bifurcações de equilíbrio na fronteira conduzindo a ciclos limite. Em particular, encontramos:

- uma geração explosiva de um ciclo limite de um contínuo de conexões homoclínicas e heteroclínicas, similar ao estudado em [13];
- a geração de um pequeno ciclo limite que cresce linearmente com o parâmetro de bifurcação, como em [36]; e
- também encontramos algumas bifurcações específicas, como a que iremos introduzir mais adiante, a *bifurcação bainha de espada*, caracterizada pelo surgimento de um ciclo limite de um contínuo de pontos de equilíbrio que, até nosso conhecimento e pesquisa bibliográfica, não consta na literatura.

Nosso foco de atenção, será sobre sistemas diferenciais lineares por partes que têm três diferentes regiões lineares separadas por retas paralelas, as quais podemos assumir, sem perda de generalidade, como as retas $x = -1$ e $x = 1$, veja [11]. Assim, temos três regiões lineares, digamos

$$S_L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\}, \quad S_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$$

e

$$S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\},$$

separadas pelas retas

$$\Sigma_{\pm} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm 1\}.$$

Além do mais, é bastante usual para estes sistemas exibir somente um ponto de equilíbrio, cuja posição pode ser controlada pelo movimento de um parâmetro. Isto acontece em particular quando todos os determinantes da parte linear dos sistemas envolvidos são positivos. Então, sobre esta hipótese genérica, veja [11], e denotando por α o principal parâmetro de bifurcação, nosso sistema diferencial pode ser reescrito na forma de Liénard

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) - y, \\ \dot{y} &= g(x) - \alpha, \end{aligned} \tag{4}$$

na qual os pontos denotam a derivada com respeito a variável de tempo τ ,

$$F(x) = \begin{cases} t_R(x - 1) + t_C, & \text{se } x \geq 1, \\ t_C x, & \text{se } |x| \leq 1, \\ t_L(x + 1) - t_C, & \text{se } x \leq -1, \end{cases} \tag{5}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} d_R(x - 1) + d_C, & \text{se } x \geq 1, \\ d_C x, & \text{se } |x| \leq 1, \\ d_L(x + 1) - d_C, & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

Note que as três matrizes que governam a dinâmica no sistema (4) são

$$\begin{bmatrix} t_L & -1 \\ d_L & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} t_C & -1 \\ d_C & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} t_R & -1 \\ d_R & 0 \end{bmatrix},$$

em que, t_Z e d_Z com $Z \in \{L, C, R\}$ denotam, respectivamente, o traço e o determinante em cada zona linear.

As equações acima incluem como casos particulares os que seguem. Se $t_C = t_L$ e $d_C = d_L$, então temos um sistema com somente duas zonas lineares distintas, completamente analisado em [19]. Se $t_R = t_L$, $d_R = d_L$ e $\alpha = 0$, então temos um sistema simétrico com três zonas lineares distintas, completamente analisado em [18]. Sistemas não simétricos foram considerados em [28] e [30]. O sistema com as equações citadas, também foi estudado em [27], em que os autores consideraram a situação $d_R > 0$, $t_R = 0$ e $d_C > 0$.

Observação 1. *Note que sistemas diferenciais lineares por partes contínuos são Lipschitz, sendo assim, eles satisfazem os resultados clássicos de existência e unicidade de soluções bem como a dependência contínua com respeito às condições iniciais e parâmetros. De fato, as soluções são funções de classes C^1 e enfatizamos que vários resultados clássicos da teoria qualitativa de sistemas planares, veja [14], e em particular, os teoremas de Poincaré-Bendixson e Dulac podem ser adequadamente estendidos para estes sistemas.*

Nossa hipótese inicial sobre a unicidade do ponto de equilíbrio exige que os determinantes em todas as três zonas sejam positivos. Aqui, consideraremos uma situação degenerada por assumir que o determinante na zona central seja nulo, isto é, $d_C = 0$, mantendo as hipóteses originais $d_L, d_R > 0$. Estas configurações surgem de forma natural quando se deseja analisar certas redes de Petri, veja por exemplo [31]. Considerando as duas equações em (4), os pontos de equilíbrios devem estar localizados nos pontos $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$, em que \bar{x} é alguma solução de $g(x) = \alpha$ e $\bar{y} = F(\bar{x})$, sendo agora

$$g(x) = \begin{cases} d_R(x - 1), & \text{se } x \geq 1, \\ 0, & \text{se } |x| \leq 1, \\ d_L(x + 1), & \text{se } x \leq -1. \end{cases} \quad (6)$$

Assim, em relação às soluções de equilíbrios do sistema (4)–(6), podemos afirmar a primeira consequência das hipóteses acima. A prova deste primeiro resultado é imediata e será omitida.

Lema 1. *Para o sistema (4)–(6), as seguintes afirmações valem:*

(a) para $\alpha < 0$ o sistema possui somente um ponto de equilíbrio, que está na zona esquerda, denotado por

$$e_L = (\bar{x}_L, \bar{y}_L) = \left(-1 + \frac{\alpha}{d_L}, \frac{\alpha t_L}{d_L} - t_C \right);$$

(b) para $\alpha = 0$ o sistema possui um contínuo de pontos de equilíbrio não isolados, que estão na zona central, formando um segmento de equilíbrios que denotamos por

$$E_C = \{(\bar{x}, \bar{y}) : -1 \leq \bar{x} \leq 1, y = t_C \bar{x}\}; e,$$

(c) para $\alpha > 0$ o sistema possui somente um ponto de equilíbrio, que está na zona direita, denotado por

$$e_R = (\bar{x}_R, \bar{y}_R) = \left(1 + \frac{\alpha}{d_R}, \frac{\alpha t_R}{d_R} + t_C \right).$$

Podemos afirmar que, quando α passa por um valor crítico $\alpha = 0$, o sistema exibe uma transição de salto na posição de equilíbrio da zona esquerda para a direita, veja Figura 3. Esta transição está associada à troca de estabilidade e o tipo topológico do equilíbrio, dependendo dos invariantes lineares t_Z, d_Z para as zonas externas, em que $Z \in \{L, R\}$. Também, como mostraremos posteriormente, a transição pode estar acompanhada com o aparecimento e desaparecimento de um ciclo limite. Neste sentido, em relação aos traços t_L, t_C, t_R de cada zona, sabemos do critério de Dulac, que todos eles não podem ter o mesmo sinal para permitir a existência de ciclos limite.

Uma vez que o número de diferentes possibilidades é alto, aqui somente consideramos casos em que $t_L < 0$ e $t_R > 0$, de modo que a transição está associada à passagem de um ponto de equilíbrio estável para um instável. Uma vez restrito tal caso, devemos distinguir os diferentes sinais do traço t_C e as diferentes dinâmicas possíveis na zona externa (foco ou nó). Para reduzir pela metade o nosso estudo, iremos impor que a dinâmica na zona direita é do tipo foco, isto é, assumiremos $t_R^2 - 4d_R < 0$.

Sempre que temos uma dinâmica de foco na zona externa, é conveniente introduzir alguns parâmetros cruciais, denominamos

$$\gamma_Z = \frac{t_Z}{2\omega_Z}, \quad \text{em que } \omega_Z = \sqrt{d_Z - \frac{t_Z^2}{4}} \quad (7)$$

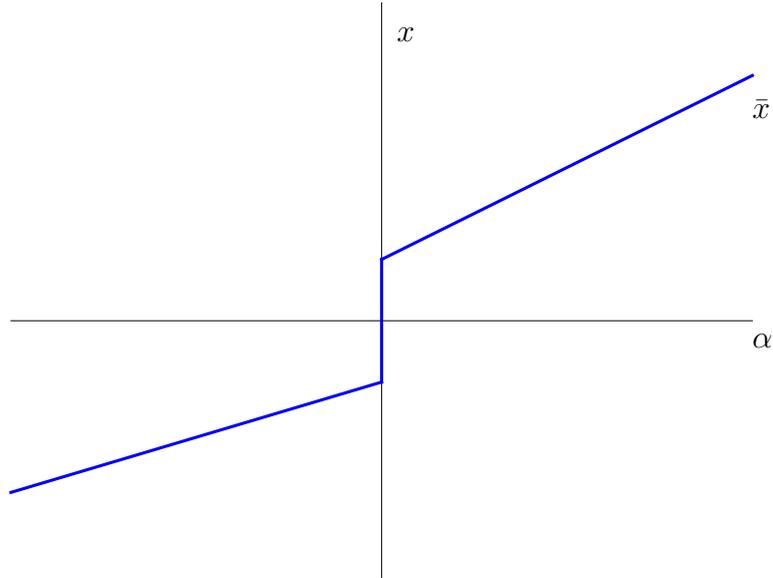


Figura 3: O gráfico de \bar{x} dependendo do parâmetro α .

e $Z \in \{L, R\}$. Note que γ_Z representa o quociente entre a parte real e imaginária dos autovalores complexos da correspondente parte linear. Recordamos que depois de meia volta em torno de um foco, isto é, depois de um tempo $\tau = \pi/\omega_Z$, o fator de expansão ou contração para o raio polar da solução é dado por

$$e^{\frac{t_Z}{2}\tau} = e^{\pi\gamma_Z}, \text{ em que } Z \in \{L, R\},$$

veja [20] para mais detalhes.

A fim de estruturar todos os possíveis casos, podemos distinguir dois cenários principais: a transição de um nó estável para um foco instável e a transição de um foco estável para um foco instável. Neste último caso, restringimos para sistemas com soluções limitadas para tempos positivos, isto é, sistemas dissipativos caracterizados pela condição $\gamma_L + \gamma_R < 0$, veja [36].

Antes de considerar estes dois cenários separadamente, queremos enfatizar a possibilidade de uma nova bifurcação específica de um ciclo limite na passagem da situação descrita no Lema 1 (b) para o Lema 1 (c). Em particular, consideramos a bifurcação do ciclo limite de um contínuo de pontos de equilíbrios E_C , sobre a condição não genérica adicional $t_C = 0$. Devido à forma da bifurcação do ciclo limite, lembrando uma bainha de

espada, veja Figura 4, denominamos esta bifurcação como *bifurcação bainha de espada* e, até nosso conhecimento e pesquisas bibliográficas, ainda não foi reportado na literatura.

Teorema 3 (Bifurcação bainha de espada). *Considere o sistema diferencial linear por partes contínuo (4)–(6), em que $d_L, d_R > 0$, $t_C = d_C = 0$, $t_L < 0$, $t_R > 0$. Se ambas dinâmicas laterais são do tipo foco satisfazendo a condição $\gamma_L + \gamma_R < 0$, ou temos uma dinâmica de nó estável na esquerda e uma dinâmica de foco instável na direita, então as seguintes afirmações valem:*

- (a) *se $\alpha = 0$, então o segmento de equilíbrio E_C é um atrator global do sistema, embora qualquer ponto em E_C é um ponto de equilíbrio instável; e,*
- (b) *Se $\alpha > 0$ e pequeno, um ciclo limite estável envolvendo as três zonas lineares bifurcam do segmento E_C , e circulam o ponto de equilíbrio da zona da direita (foco instável) previsto pelo Lema 1 (c). Tal ciclo limite encolhe em altura aproximando do segmento E_C e seu período tende para o infinito, quando $\alpha \rightarrow 0^+$.*

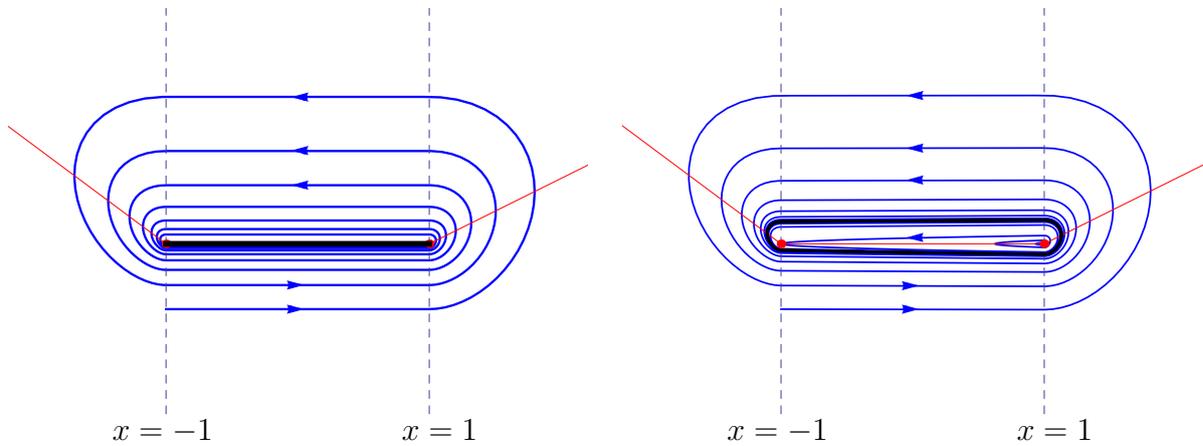


Figura 4: Bifurcação *bainha de espada*. Aqui $t_L = -0.75$, $t_C = d_C = 0$, $t_R = 0.5$ e $d_L = d_R = 1$. Na figura da esquerda $\alpha = 0$ e na figura da direita $\alpha = 0.001$. Note o formato do ciclo limite que bifurca do segmento de equilíbrio semelhante a uma bainha de espada. As curvas em vermelho correspondem ao gráfico de $y = F(x)$.

A prova deste teorema decorre de resultados apresentados posteriormente, após ter estudado separadamente os dois particulares cenários envolvidos. No que segue, denotamos por $T_L = (-1, -t_C)$ e $T_R = (1, t_C)$ os pontos de tangência para o fluxo do sistema (4)–(6) com Σ_- e Σ_+ , respectivamente.

No cenário de transição de um nó estável para um foco instável, quando o parâmetro de bifurcação α atinge seu valor crítico, isto é, $\alpha = 0$, o sistema apresenta um laço homoclínico H_{T_L} no ponto T_L contendo um contínuo de laços heteroclínicos no seu interior, veja Figura 5. Se $t_C \geq 0$, na passagem de α negativo para α positivo, ocorre o surgimento explosivo de um grande ciclo limite, o qual descrevemos no seguinte teorema.

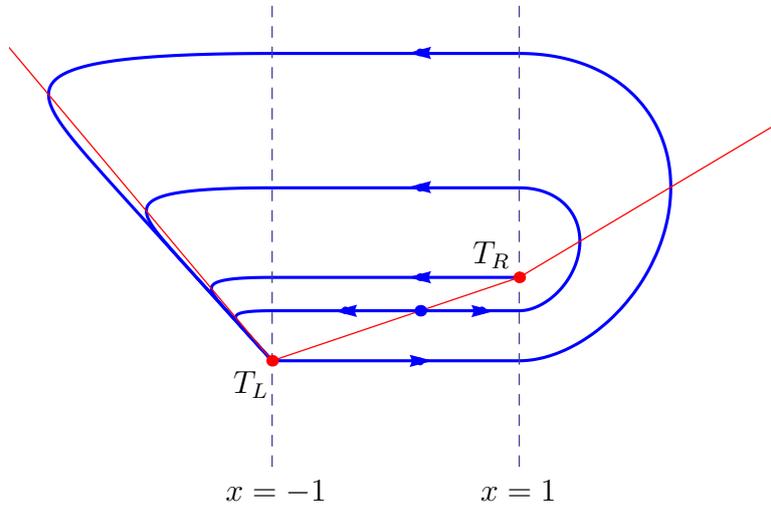


Figura 5: O plano de fase crítico na transição nó-foco. Aqui, $\alpha = 0$, $t_L = 1.2$, $t_C = 0.34$, $t_R = 0.6$, $d_L = 0.1$, $d_C = 0$ e $d_R = 1$.

Teorema 4 (Transição nó-foco). *Considere o sistema diferencial linear por partes contínuo (4)–(6), em que $d_L, d_R > 0$, $d_C = 0$, $t_L < 0$ e $t_R > 0$ com $t_L^2 - 4d_L \geq 0$ e $t_R^2 - 4d_R < 0$. As seguintes afirmações valem.*

- (a) *Se $t_C < 0$, então um pequeno ciclo limite estável bifurca em $\alpha = 0$ em uma bifurcação tipo equilíbrio na fronteira envolvendo a zona central e a zona esquerda. Assim, para $\alpha > 0$ existe um ciclo limite que cresce linearmente com o valor do parâmetro α , enquanto o ciclo limite não entra na zona esquerda, isto é, enquanto se encontra em $S_C \cup \Sigma_+ \cup S_R$. Existe um certo valor $\alpha_T > 0$ tal que o ciclo limite estável tangencia*

Σ_- em T_L para $\alpha = \alpha_T$. Para valores de α ligeiramente maiores que α_T , o ciclo limite intersecta as três zonas lineares.

(b) Se $t_C = 0$, então o ciclo limite estável intersecta as três zonas lineares e bifurca do segmento de equilíbrio E_C em uma bifurcação bainha de espada. Assim, para $\alpha > 0$ existe um ciclo limite que aproxima-se do segmento E_C , com o período tendendo para o infinito, quando $\alpha \rightarrow 0^+$.

(c) Se $t_C > 0$, então para a órbita homoclínica H_{T_L} que existe para $\alpha = 0$ como previsto na Proposição 1 (b), um ciclo limite estável bifurca para $\alpha > 0$, isto é, o ciclo limite aproxima de tal órbita homoclínica, quando $\alpha \rightarrow 0^+$.

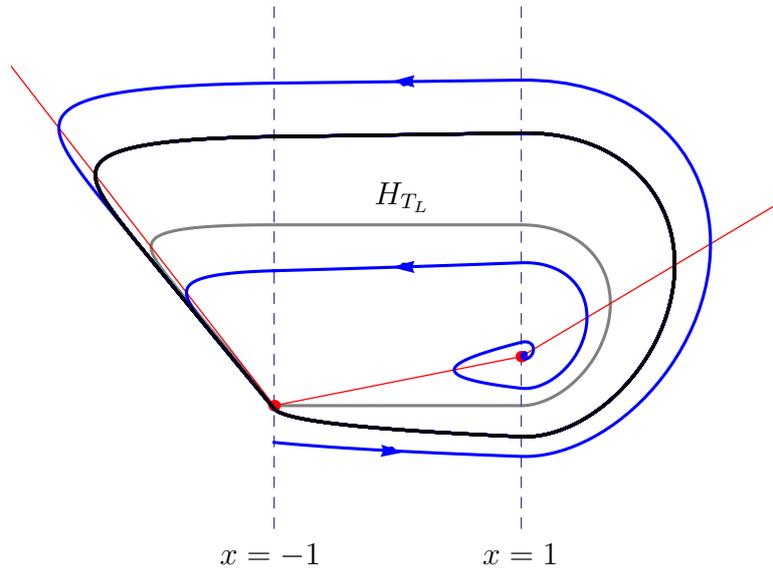


Figura 6: Ciclo limite bifurcando da órbita homoclínica H_{T_L} no caso do Teorema Transição nó-foco (c). Aqui, $t_L = -1$, $t_C = 0.2$, $d_C = 0$ e $d_R = 1$. A órbita homoclínica H_{T_L} corresponde a $\alpha = 0$, enquanto o ciclo limite mostrado é para $\alpha = 0.03$.

Agora, no cenário de transição de um foco estável para um foco instável, no caso quando $t_C = 0$, temos um resultado que garante a existência de um ciclo limite hiperbólico estável. Portanto, para valores de t_C ligeiramente negativos tal ciclo limite persiste e na transição de $\alpha > 0$ para $\alpha < 0$ temos o surgimento de outro ciclo limite, mas agora instável. Descrevemos este fenômeno no seguinte teorema.

Teorema 5. *Considere o sistema diferencial linear por partes contínuo (4)–(6), em que $d_L, d_R > 0$, $d_C = 0$, $t_L < 0$ e $t_R > 0$ com $t_L^2 - 4d_L < 0$, $t_R^2 - 4d_R < 0$ e $\gamma_L + \gamma_R < 0$. As seguintes afirmações valem.*

- (a) *Se $t_C < 0$, então um pequeno ciclo limite estável bifurca em $\alpha = 0$ em uma bifurcação do tipo ponto de equilíbrio na fronteira envolvendo somente as zonas centrais e direita. Assim, para $\alpha > 0$ existe um ciclo limite que cresce linearmente com o valor do parâmetro α , enquanto o ciclo não entra na zona esquerda, isto é, enquanto se encontra em $S_C \cup \Sigma_+ \cup S_R$. Existe um certo valor $\alpha_T > 0$ tal que o ciclo limite estável é tangente em Σ_- em T_L para $\alpha = \alpha_T$. Para valores de α ligeiramente maiores que α_T , o ciclo limite intersecta as três zonas lineares.*
- (b) *Se $t_C = 0$, então o sistema sofre uma bifurcação bainha de espada em $\alpha = 0$; de um segmento de equilíbrio E_C passamos para um ciclo limite estável envolvendo as três zonas lineares para $\alpha > 0$. Em outras palavras, este ciclo limite aproxima do segmento E_C , com um período tendendo para o infinito, quando $\alpha \rightarrow 0^+$.*
- (c) *Se $t_C > 0$, então um pequeno ciclo limite instável Γ_U bifurca em $\alpha = 0$ em uma bifurcação tipo equilíbrio na fronteira envolvendo somente a zona central e a zona esquerda. Assim, para $\alpha < 0$ com $|\alpha|$ pequeno tal ciclo limite cresce linearmente em tamanho com o valor de $|\alpha|$, enquanto o ciclo não entra na zona direita, isto é, enquanto se encontra em $S_L \cup \Sigma_- \cup S_C$. Existe um certo valor $\alpha_T < 0$ tal que o ciclo limite instável tangencia Σ_+ em T_R para $\alpha = \alpha_T$. Para valores de α ligeiramente maiores que α_T , o ciclo limite instável usa as três zonas lineares.*

Além do mais, para $\alpha_T < \alpha < 0$ existe pelo menos um ciclo limite estável circulando Γ_U , de modo que temos a existência de pelo menos dois ciclos limite.

Recordamos que, na afirmação (c) acima assumimos que para $\alpha_T < \alpha < 0$ existem pelo menos dois ciclos limite circulando o foco estável, veja Figura 2.11. Conjecturamos que existe um valor α^* satisfazendo $\alpha^* < \alpha_T < 0$ de modo que para todo $\alpha^* < \alpha < \alpha_T$, ambos ciclos limite usam as três zonas lineares e colidem em um ciclo limite semi estável no valor $\alpha = \alpha^*$ e desaparece para $\alpha < \alpha^*$. Também, conjecturamos que nas situações

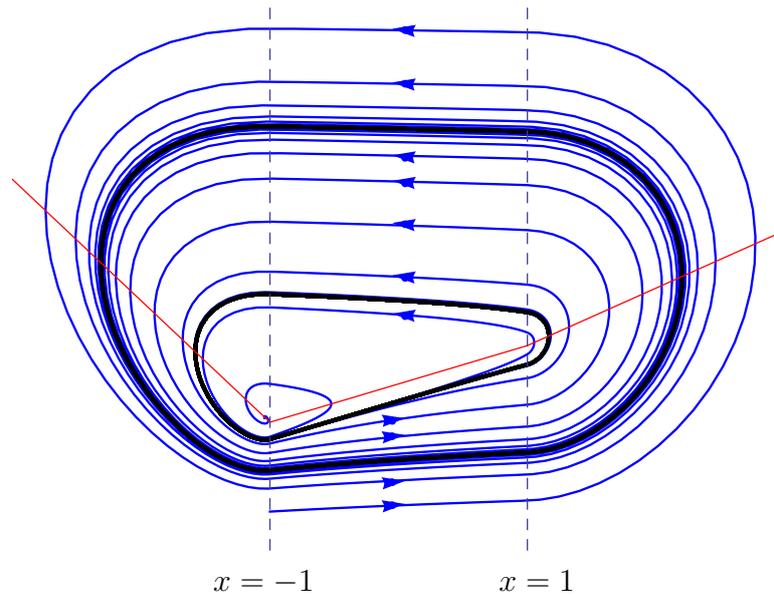


Figura 7: Dois ciclos limite correspondendo ao Teorema 5 (c). Aqui $\alpha = -0.04$, $t_L = -0.95$, $t_C = 0.3$, $t_R = 0.45$, $d_L = d_R = 1$ e $d_C = 0$.

das afirmações (a) e (b) do teorema acima, o sistema (4)–(6) tem somente um ciclo limite estável.

Na Seção 2.6 do Capítulo 2, apresentaremos uma análise parcial do modelo linear por partes de Morris-Lecar [12], enfatizando o fato de que podemos aplicar as bifurcações estudadas no respectivo capítulo em um modelo matemático concreto.

Capítulo 1

Fronteira de centros para sistema diferenciais por partes planares de duas zonas

1.1 Apresentação do Capítulo

Este capítulo está organizado como segue. Na Seção 1.2 apresentamos alguns resultados técnicos com conceitos e provas de alguns lemas que são cruciais para demonstrar os principais resultados, Teoremas 2, 6 e 7. Na Seção 1.3 lidamos com a versão linear do Teorema 1, no qual denominamos Teorema 6 e também detalhamos o Exemplo 1, lembramos que este exemplo apresenta um par de sistemas que possui cinco maneiras distintas de escolher a variedade de centros. Na Seção 1.4 afirmamos e provamos o Teorema 7, que é uma versão com enunciado mais preciso do Teorema 1. quatro ciclos limite e tal exemplo não satisfaz as hipóteses de [6] e [32]. Por fim, na Seção 1.5 trabalhamos com a prova do Teorema 2 que garante a existência de n ciclos limite através de uma perturbação da fronteira de centros W e também apresentamos um exemplo de um sistema linear por partes em duas zonas que contém quatro ciclos limite e tal exemplo não satisfaz as hipóteses de [6] e [32].

1.2 Resultados Técnicos

Definição 1 (Hipóteses H e HL). Dado um par $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$. Dizemos que Z satisfaz as Hipóteses H se existe um ponto singular p_0 de ambos os sistemas, tal que a parte linear de f_1 e f_2 no ponto p_0 são $A_1 = (a_{ij}^1)_{i,j=1,2}$ e $A_2 = (a_{ij}^2)_{i,j=1,2}$, respectivamente, e as seguintes afirmações valem:

- (i) $\text{tr}(A_1) < 0$, $\text{tr}(A_2) > 0$;
- (ii) $\Delta_1 = (\text{tr}(A_1))^2 - 4 \det(A_1) < 0$; $\Delta_2 = (\text{tr}(A_2))^2 - 4 \det(A_2) < 0$;
- (iii) $a_{21}^1 > 0$, $a_{21}^2 > 0$; e,
- (iv) $\text{Hess}(\det(f_1(X), f_2(X)), p_0) \neq 0$.

Em que, $\text{Hess}(g, q)$ é o determinante da matriz Hessiana da função g no ponto q .

Se f_1 e f_2 são campos de vetores lineares, então dizemos que o par satisfaz as Hipóteses HL quando (i), (ii) e (iii) são verificados.

Na Definição 1, as afirmações (i)–(iv) são requeridas pelos fatos:

- (i) os pontos singulares dos sistemas f_1 e f_2 possuem estabilidades opostas;
- (ii) os pontos singulares são do tipo foco;
- (iii) ambos os focos têm orientação positiva (anti-horário); e,
- (iv) são hipóteses para aplicar o Lema de Morse em alguns resultados técnicos.

Lema 2. Se o par de campos de vetores $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ satisfaz as Hipóteses H ou HL , e Σ é uma semirreta com ponto final em comum com o ponto singular de f_1 e f_2 , então, existe uma mudança de coordenadas que translada o ponto singular para a origem e transforma a parte linear de f_1 , calculada no ponto singular p_0 , na sua forma canônica de Jordan e leva Σ em $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0 \text{ e } y < 0\}$. Além disso, nas novas coordenadas, as Hipóteses H e HL ainda são satisfeitas.

Demonstração. Primeiro aplicamos a translação que leva p_0 para a origem. Isto não muda a parte linear de ambos sistemas e não troca a Hessiana da função $\det(f_1(X), f_2(X))$. Agora, aplicamos em ambos sistemas a mudança de coordenadas linear J , que envia a parte linear de f_1 na sua forma canônica de Jordan. É óbvio que uma mudança de coordenadas linear não muda o traço, determinante e a Hessiana da função $\det(f_1(X), f_2(X))$. Finalmente, aplicamos a rotação que leva $J(\Sigma)$ a $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0 \text{ e } y < 0\}$. Também é claro que a rotação é uma mudança de coordenadas linear que mantém a forma canônica de Jordan da parte linear do foco hiperbólico. Então, as afirmações (i) – (iv) da Definição 1 continuam válidas. \square

De agora em diante, vamos considerar que o par Z satisfaz as hipóteses H ou HL , tem em comum um ponto singular na origem e a parte linear de f_1 está na forma canônica de Jordan, isto é, $a_{11}^1 = a_{22}^1$ e $a_{12}^1 = -a_{21}^1$. Então, tendo $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ satisfazendo as Hipóteses H ou HL , os campos de vetores (1) e (2) são escritos respectivamente da seguinte forma:

$$\dot{X} = A_1X + \tilde{f}_1(X) \quad (1.1)$$

e

$$\dot{X} = A_2X + \tilde{f}_2(X), \quad (1.2)$$

em que $\tilde{f}_i(0) = D\tilde{f}_i(0) = 0$, com $i = 1, 2$. Além disso, iremos considerar o campo de vetores $f_{1\varepsilon}$ obtido de uma perturbação linear de (1.1) como segue:

$$\dot{X} = f_{1\varepsilon}(X) = (A_1 + \varepsilon Id)X + \tilde{f}_1(X). \quad (1.3)$$

Notação 1. *Seja dado um ponto $(0, y) \in \Sigma_0$, denotamos por $\gamma_1(t, (0, y))$, $\gamma_2(t, (0, y))$ e $\gamma_{1\varepsilon}(t, (0, y))$ as trajetórias passando por $(0, y)$ definida por (1.1), (1.2) e (1.3) respectivamente e satisfazendo $\gamma_1(0, (0, y)) = \gamma_2(0, (0, y)) = \gamma_{1\varepsilon}(0, (0, y)) = (0, y)$. Consideramos que $T_1(y)$, $T_2(y)$ e $T_{1\varepsilon}(y)$ sejam tempos positivos em que $\gamma_1(-t, (0, y))$, $\gamma_2(t, (0, y))$ e $\gamma_{1\varepsilon}(-t, (0, y))$ gastam para retornar a Σ_0 , respectivamente. Assim, definimos:*

(i) $\Gamma_1(y) = \{\gamma_1(-t, (0, y)), 0 < t < T_1(y)\};$

(ii) $\Gamma_2(y) = \{\gamma_2(t, (0, y)), 0 < t < T_2(y)\}; e,$

(iii) $\Gamma_{1\varepsilon}(y) = \{\gamma_{1\varepsilon}(-t, (0, y)), 0 < t < T_{1\varepsilon}(y)\}$.

Uma representação geométrica das trajetórias $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ pode ser vista na Figura 1.1.

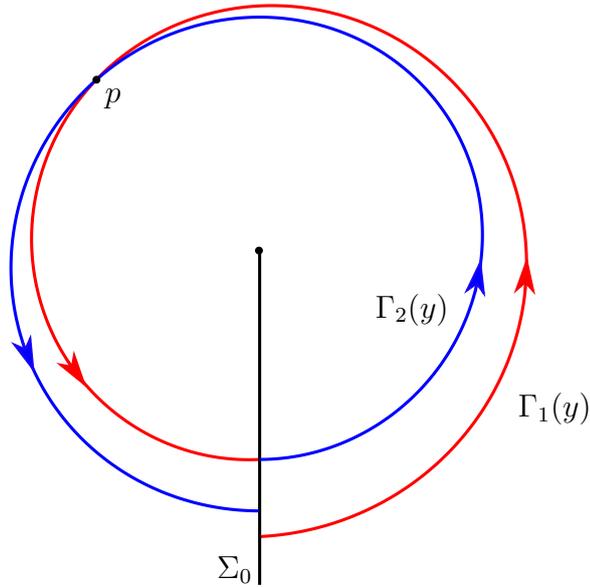


Figura 1.1: Trajetórias $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ apresentadas na Notação 1; em vermelho $\Gamma_1(y)$ e em azul $\Gamma_2(y)$.

Como veremos mais tarde, as curvas $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_{1\varepsilon}(y)$ devem interceptar a curva $\Gamma_2(y)$. A respeito da tangência e transversalidade, os pontos de intersecção tem propriedades distintas. Para este propósito, apresentamos as duas definições que seguem.

Definição 2. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto com $0 \in I$, e $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas curvas suaves, dadas por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ e $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$, tal que $\alpha(0) = \beta(0) = p \in \mathbb{R}^2$, $\alpha'(0) \neq (0, 0)$ e $\beta'(0) \neq (0, 0)$:*

- se $\alpha'_1(0) = 0$ e $\beta'_1(0) \neq 0$, então dizemos que α e β tem um contato de ordem um em p ;
- se $\alpha'_1(0) \neq 0$ e $\beta'_1(0) = 0$, então dizemos que α e β tem um contato de ordem um em p ;

- se $\alpha'_1(0) \neq 0$ e $\beta'_1(0) \neq 0$, então pelo Teorema da Função Implícita existe uma única função diferenciável $t_1 = t_1(x)$ tal que $\alpha_1(t_1(x)) - \alpha_1(0) = x$ para todo x em uma vizinhança de $x = 0$; e existe uma única função diferenciável $t_2 = t_2(x)$ tal que $\beta_1(t_2(x)) - \beta_1(0) = x$ para todo x em uma vizinhança de $x = 0$. Sejam f_α e f_β funções reais diferenciáveis definidas por $f_\alpha(x) = \alpha_2(t_1(x)) - \alpha_2(0)$ e $f_\beta(x) = \beta_2(t_2(x)) - \beta_2(0)$. Dizemos que α e β tem um contato de ordem n em p se $0 = f'_\alpha(0) - f'_\beta(0) = \dots = f_\alpha^{(n-1)}(0) - f_\beta^{(n-1)}(0)$ e $f_\alpha^{(n)}(0) - f_\beta^{(n)}(0) \neq 0$; e,
- se $\alpha'_1(0) = \beta'_1(0) = 0$ então $\alpha'_2(0) \neq 0$ e $\beta'_2(0) \neq 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita existe uma única função diferenciável $t_1 = t_1(y)$ tal que $\alpha_2(t_1(y)) - \alpha_2(0) = y$ para todo y em uma vizinhança de $y = 0$; e existe uma única função diferenciável $t_2 = t_2(y)$ tal que $\beta_2(t_2(y)) - \beta_2(0) = y$ para todo y em uma vizinhança de $y = 0$. Sejam f_α e f_β funções reais diferenciáveis definidas por $f_\alpha(y) = \alpha_1(t_1(y)) - \alpha_1(0)$ e $f_\beta(y) = \beta_1(t_2(y)) - \beta_1(0)$. Dizemos que α e β tem um contato de ordem n em p se $0 = f'_\alpha(0) - f'_\beta(0) = \dots = f_\alpha^{(n-1)}(0) - f_\beta^{(n-1)}(0)$ e $f_\alpha^{(n)}(0) - f_\beta^{(n)}(0) \neq 0$.

Definição 3. Suponhamos que $\Gamma_1(y)$ intersecta $\Gamma_2(y)$ em $p \in \mathbb{R}^2$. Dizemos que $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ tem:

- (i) um contato transversal em p se $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ tem um contato de ordem um em p ;
- (ii) um contato tangencial de cruzamento em p se $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ tem um contato de ordem n , com n ímpar e maior que um, em p ; e,
- (iii) um contato tangencial sem cruzamento em p se $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ tem um contato de ordem n , com n par, em p .

Considerando a notação da Definição 2. No caso (iii), dizemos que é um contato tangencial externo em p se $f_{\Gamma_1(y)}^{(n)}(0) - f_{\Gamma_2(y)}^{(n)}(0) > 0$ (veja Figura 1.2-(a)), e dizemos que é um contato tangencial interno em p se $f_{\Gamma_1(y)}^{(n)}(0) - f_{\Gamma_2(y)}^{(n)}(0) < 0$ (veja Figura 1.2-(b)). No caso (ii), dizemos que é um contato tangencial de cruzamento de entrada em p se $f_{\Gamma_1(y)}^{(n)}(0) - f_{\Gamma_2(y)}^{(n)}(0) < 0$ (Veja Figura 1.2-(c)), e dizemos que é um contato tangencial de cruzamento de saída em p se $f_{\Gamma_1(y)}^{(n)}(0) - f_{\Gamma_2(y)}^{(n)}(0) > 0$ (veja Figura 1.2-(d)). No caso (i), dizemos que é um contato transversal de entrada em p se $\det(f_1(p), f_2(p)) > 0$ (Veja, por

exemplo, o ponto p_2 na Figura 1.2-(a)), dizemos que é um contato transversal transversal de saída em p se $\det(f_1(p), f_2(p)) < 0$ (Veja, por exemplo, o ponto p_1 na Figura 1.2-(a)).

Observação 2. Em todos os casos da Figura 1.2 temos que Γ_1 é uma órbita de (1), Γ_2 é uma órbita de (2) e Γ_1 e Γ_2 possuem um ponto de contato tangencial em p . Assuma que Γ_1 é dada por $\alpha(t)$, tal que $\alpha(0) = p$. Consideramos $p_1 = \alpha(t_1)$ e $p_2 = \alpha(t_2)$, com $t_1 < 0 < t_2$, pontos arbitrários na órbita Γ_1 . Na Figura 1.2 estamos denotando $v_{ij} = f_i(p_j)$, para $i, j = 1, 2$. Aqui f_1 e f_2 são campos de vetores que definem os sistemas (1) e (2) respectivamente. Observe que $\det(v_{11}, v_{21})$ é positivo nos desenhos (b) e (c), e negativo nos desenhos (a) e (d). Observe também que $\det(v_{12}, v_{22})$ é positivo nos desenhos (a) e (c), e negativo nos desenhos (b) e (d). Em outras palavras, podemos caracterizar os pontos de contatos tangenciais apenas analisando o comportamento da função $d(t) = \det(f_1(\alpha(t)), f_2(\alpha(t)))$. Se $d(t)$ passa:

- de negativo para positivo, então Γ_1 e Γ_2 tem um contato tangencial externo em p (Veja Figura 1.2-(a));
- de positivo para negativo, então Γ_1 e Γ_2 tem um contato tangencial interno em p (Veja Figura 1.2-(b));
- de positivo para zero e volta para positivo, então Γ_1 e Γ_2 tem um contato tangencial de cruzamento de entrada em p (Veja Figura 1.2-(c)); e,
- de negativo para zero e volta para negativo, então Γ_1 e Γ_2 tem um contato tangencial de cruzamento de saída em p (Veja Figura 1.2-(d)).

O ponto de contato tangencial (transversal) p de $\Gamma_1(y)$ com $\Gamma_2(y)$ ocorre se, e somente se, $f_1(p)$ e $f_2(p)$ são paralelos (transversais). Nos lemas apresentados na sequência, exploramos cuidadosamente estas questões.

Lema 3 (Equação de Determinante Nulo). Seja $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de campos de vetores e considere a região do plano $\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^2 : \det(f_1(X), f_2(X)) = 0\}$. As seguintes afirmações valem:

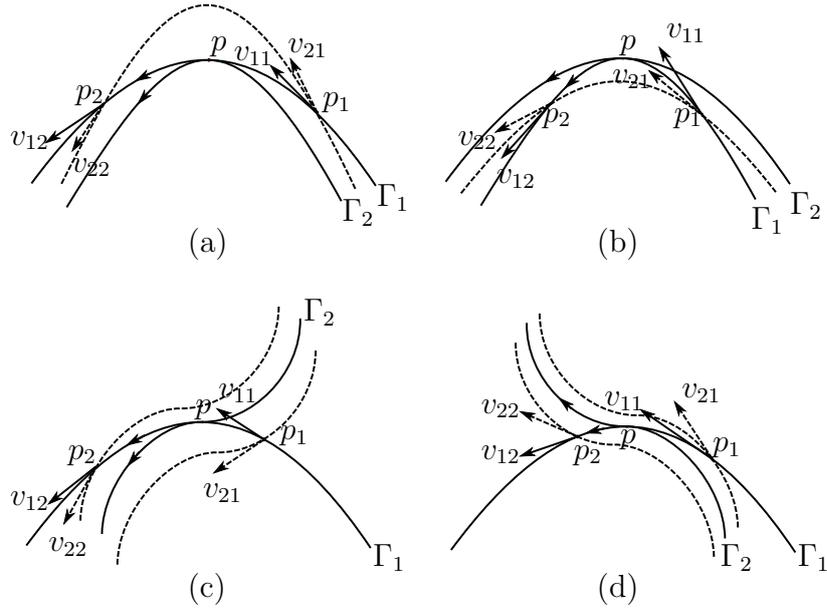


Figura 1.2: Pontos de Contatos Tangenciais.

- (a) se $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ satisfaz as Hipóteses HL, então \mathcal{D} é composta por uma única reta contendo a origem, um par de retas contendo a origem como único ponto em comum ou é composta apenas pela origem; e,
- (b) se $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ satisfaz as Hipóteses H, então em uma vizinhança U da origem, $\mathcal{D} \cap U$ é composta por duas curvas regulares com intersecção apenas na origem ou $\mathcal{D} \cap U$ é composta apenas pela origem.

Demonstração. (a) Uma vez que f_1 e f_2 são lineares, temos que

$$\det(f_1(X), f_2(X)) = \det(A_1X, A_2X) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

em que,

$$\alpha = a_{11}^1 a_{21}^2 - a_{21}^1 a_{11}^2;$$

$$\beta = a_{11}^1 a_{22}^2 + a_{12}^1 a_{21}^2 - a_{21}^1 a_{12}^2 - a_{22}^1 a_{11}^2; \text{ e,}$$

$$\gamma = a_{12}^1 a_{22}^2 - a_{22}^1 a_{12}^2.$$

Portanto, obtemos as seguintes relações,

$$H_d := \text{Hess}(\det(A_1X, A_2X), 0) = 4\alpha\gamma - \beta^2,$$

em que $\text{Hess}(g, q)$ é o determinante da matriz Hessiana da função g no ponto q . Note que, H_d é o discriminante de $\det(A_1X, A_2X)/y^2$ com respeito a x/y trocando de sinal. Então, o aspecto de \mathcal{D} depende do sinal de H_d . Assim, se $H_d < 0$, \mathcal{D} será definido por duas retas reais passando pela origem. Se $H_d = 0$, \mathcal{D} é definido por uma única reta passando pela origem. E, finalmente, se $H_d > 0$, a equação $\det(A_1X, A_2X) = 0$ define um par de retas complexas e a origem é o único ponto real contido em \mathcal{D} .

(b) Como o determinante é uma função bilinear, temos:

$$\text{Hess}(\det(f_1(X), f_2(X)), 0) = \text{Hess}(\det(A_1X, A_2X), 0) = H_d.$$

Uma vez que $H_d \neq 0$, podemos aplicar o conhecido Lema de Morse para nossa função $\hat{f} = \det(f_1(X), f_2(X))$ em torno da origem. Portanto, existe um difeomorfismo $h : U \rightarrow h(U)$ com U , vizinhança da origem, tal que $\hat{f}(h(X)) = \det(A_1X, A_2X)$ para todo $X \in U$. Utilizando a primeira parte deste lema, a prova está feita. □

Note que no item (a) do Lema 3 o conjunto \mathcal{D} , pode ser constituído de uma única reta, já no item (b) do mesmo lema, $\mathcal{D} \cap U$ nunca é composto por uma única curva, tal impossibilidade decorre do item (iv) das Hipóteses H em que $\text{Hess}(\det(f_1(X), f_2(X)), 0) \neq 0$. Veremos esta análise na Observação 3. Denote $\mathcal{R} = (\mathcal{D} \cup \Sigma_0) \cap U$, na qual U é uma vizinhança da origem dada pelo Lema 3. Para o caso $\tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_2 \equiv 0$, isto significa que f_1 e f_2 são sistemas lineares, e temos que a vizinhança U é todo o plano cartesiano. O conjunto \mathcal{R} divide U em no máximo cinco regiões, cada uma dessas regiões denominamos *setores* e a fronteira em comum de dois setores consecutivos denominamos *raio*.

Observação 3. *Note que na prova do Lema 3 a configuração de \mathcal{D} depende do sinal de H_d . Daremos agora uma análise mais completa:*

(i) *se $H_d > 0$, então a origem é o único ponto contido em \mathcal{D} . Conseqüentemente $\det(f_1(X), f_2(X)) \neq 0$ para todo X em U , e temos somente pontos de contato transversal de $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$;*

(ii) se $H_d = 0$, então f_1 e f_2 são lineares, \mathcal{D} é composto por uma única reta contendo a origem e o sinal da função $\det(f_1(X), f_2(X))$ é sempre não negativo ou não positivo.

Pela Observação 2, não temos pontos de contatos tangenciais sem cruzamento de $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$; e,

(iii) se $H_d < 0$, então $\mathcal{D} \cap U$ é composto por duas curvas regulares que se interceptam apenas na origem. E neste caso, como provaremos no Lema 6, $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ não possuem pontos de contatos tangenciais de cruzamento.

Observação 4. Se as matrizes A_1 e A_2 estão na forma canônica de Jordan, temos que os parâmetros α , β e γ da função polinomial $\det(A_1X, A_2X) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ são: $\alpha = \gamma$ e $\beta = 0$. Assim, $H_d = 4\alpha^2 > 0$ e conseqüentemente, o conjunto solução da equação $\det(A_1X, A_2X) = 0$ na vizinhança U é composta de um único ponto.

Lema 4. Sejam g_1 e g_2 campos de vetores suaves definidos sobre \mathbb{R}^2 e $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $g_1(p) \neq 0$, $g_2(p) \neq 0$ e $\nabla \det(g_1(p), g_2(p)) \neq 0$. Assuma que $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ são soluções de g_1 e g_2 , respectivamente, tal que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, $\gamma_1'(0)$ é paralelo a $\gamma_2'(0)$ e γ_1 cruza γ_2 no ponto p . Então, γ_1 e γ_2 são tangentes a curva $\det(g_1(X), g_2(X)) = 0$ no ponto p .

Demonstração. Aplicando o Teorema do Fluxo Tubular para o campo de vetores g_1 em uma vizinhança V de p podemos encontrar uma função real diferenciável $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que as trajetórias de g_1 coincide com a curva de nível de f e o vetor gradiente de f , denotado por ∇f , é igual ao campo de vetores ortogonal de g_1 , denotado por g_1^\perp . Podemos assumir que $f(\gamma_1(t)) = 0$ para todo t . Considere a função $g(t) = f(\gamma_2(t))$. Então temos

$$\begin{aligned} g'(t) &= \langle \nabla f(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t) \rangle = \langle g_1^\perp(\gamma_2(t)), g_2(\gamma_2(t)) \rangle \\ &= \det(g_1(\gamma_2(t)), g_2(\gamma_2(t))). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dessa forma, $g(0) = f(p) = 0$ e $g'(0) = \det(g_1(p), g_2(p)) = 0$. Observe que se $g''(0) < 0$ então $t = 0$ é um máximo local para a função g . Isto implica que $f(\gamma_2(t)) \leq 0$ em uma vizinhança de $t = 0$, e então nesta situação $\gamma_2(t)$ não cruza $\gamma_1(t)$ pelo fato de $f(\gamma_1(t)) \equiv 0$. Da mesma maneira não podemos ter $g''(0) > 0$. Assim, $g''(0) = 0$. Derivando (1.4) obtemos

$$\begin{aligned} g''(t) &= \langle \nabla \det(g_1(\gamma_2(t)), g_2(\gamma_2(t))), \gamma_2'(t) \rangle \\ &= \langle \nabla \det(g_1(\gamma_2(t)), g_2(\gamma_2(t))), g_2(\gamma_2(t)) \rangle. \end{aligned}$$

Então, em $t = 0$ temos $\langle \nabla \det(g_1(p), g_2(p)), g_2(p) \rangle = 0$. Isto implica que a trajetória γ_2 é tangente a curva $\det(g_1(X), g_2(X)) = 0$ no ponto p . \square

Lema 5. *Seja $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de campos de vetores sobre as Hipótese H ou HL e considere $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ dados pela Notação 1. Se $(0, y) \in U \cap \Sigma_0$ então, sobre pontos de contatos tangenciais e transversais de $\Gamma_1(y)$ com $\Gamma_2(y)$ afirmamos:*

- (i) *pontos de contatos tangenciais ocorrem somente em $\mathcal{D} \cap U$; e,*
- (ii) *os pontos de contatos transversais ocorrem dentro dos setores determinados por \mathcal{R} e existe no máximo um ponto de contato transversal em cada setor.*

Demonstração. Iniciamos provando (i). Sabemos que X pertence a $\mathcal{D} \cap U$ se, e somente se, $\det(f_1(X), f_2(X)) = 0$, isto é, $f_1(X)$ e $f_2(X)$ são paralelos e então a afirmação (i) está provada.

Para (ii), é claro que os pontos de contatos transversais ocorrem no interior dos setores determinados por \mathcal{R} . Assuma que dois deles, que denominamos q_1 e q_2 , ocorrem em um mesmo setor determinado por \mathcal{R} . Com certeza, um deles é um ponto de contato transversal de entrada e o outro é um ponto de contato transversal de saída. Assim,

$$\det(f_1(q_1), f_2(q_1)) \cdot \det(f_1(q_2), f_2(q_2)) < 0$$

e segue do Teorema do Valor Intermediário que existe um ponto q_0 no mesmo setor tal que $\det(f_1(q_0), f_2(q_0)) = 0$. Isto é uma contradição e finaliza a prova da afirmação (ii). \square

Lema 6. *Seja $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de campos de vetores sobre as hipóteses H e considere $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ dados pela Notação 1. Então $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ não tem pontos de contatos tangenciais.*

Demonstração. Pelas Hipóteses H , $\text{Hess}(\det(f_1(X), f_2(X)), (0, 0)) \neq 0$. Então, pelo Lema de Morse, em uma vizinhança U da origem, o conjunto \mathcal{D} é composto pelo único ponto $(0, 0)$ ou um par de curvas regulares passando pelo ponto $(0, 0)$. É trivial a prova do caso $\mathcal{D} = \{(0, 0)\}$, por isto será omitida. No caso $\mathcal{D} \neq \{(0, 0)\}$, seja $p \neq (0, 0)$ pertencente a \mathcal{D} ; é claro que $\nabla \det(f_1(p), f_2(p)) \neq 0$. Aplicando o Lema 4 concluímos que $f_1(p)$ é um vetor tangente a uma das curvas, que compõem o conjunto \mathcal{D} , no ponto p .

Agora consideramos o difeomorfismo de Morse $h : U \rightarrow h(U)$ dado pelo Lema 3 e os sistemas $\overline{f}_i = Dh^{-1} \circ f_i \circ h$, com $i = 1, 2$. Por [26], o difeomorfismo de Morse é dado por $h(X) = X + \mathcal{O}(|X|^2)$. Dessa forma, segue que $D\overline{f}_1(0) = A_1$; como a aplicação h é um difeomorfismo, temos que o vetor $\overline{f}_1(h^{-1}(p))$ é paralelo a um raio, contido em $\hat{D} = \{X \in \mathbb{R}^2 : \det(A_1(X), A_2(X)) = 0\}$, no ponto $h^{-1}(p)$. Isto é uma contradição pelo fato que, em coordenadas polares, a componente angular do sistema \overline{f}_1 é da forma $\dot{\theta} = a_{21}^1 + \mathcal{O}(\theta, r)$, com $a_{21}^1 > 0$, e os raios em \hat{D} são semirretas.

Para o caso f_i linear, $i=1,2$; é suficiente considerar $U = \mathbb{R}^2$ e $h(X) = X$.

□

Lema 7. [Bifurcação dos pontos tangenciais] Seja $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de funções sobre as hipóteses H e considere $\Gamma_1(y)$, $\Gamma_2(y)$ e $\Gamma_{1\varepsilon}(y)$ dados pela Notação 1. Suponha que para todo $(0, y) \in U \cap \Sigma_0$ as trajetórias $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ possuem n pontos de contatos tangenciais internos, m pontos de contatos tangenciais externos e k pontos de contatos transversais. Então, para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, temos que $\Gamma_{1\varepsilon}(y)$ e $\Gamma_2(y)$ possuem:

(i) $2m + k$ pontos de contatos se $\varepsilon < 0$;

(ii) $2n + k$ pontos de contatos se $\varepsilon > 0$;

e todos eles são pontos de contatos transversais.

Demonstração. Em coordenadas polares, os sistemas (1.1), (1.2) e (1.3), respectivamente, são dados por:

$$\begin{cases} \dot{r} = a_{11}^1 r + f_{11}(\theta, r), \\ \dot{\theta} = a_{12}^1 + f_{12}(\theta, r), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = f_{21}(\theta, r), \\ \dot{\theta} = f_{22}(\theta, r), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{r} = (a_{11}^1 + \varepsilon)r + f_{11}(\theta, r), \\ \dot{\theta} = a_{12}^1 + f_{12}(\theta, r), \end{cases}$$

em que $f_{11}(\theta, 0) = f_{12}(\theta, 0) = \frac{\partial f_{11}}{\partial r}(\theta, 0) = \frac{\partial f_{12}}{\partial r}(\theta, 0) = 0$ para todo θ . Tome $p = (\theta_0, r_0)$ um ponto de contato tangencial externo de $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$, veja Figura 1.3, e denote por

$r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$ e $r_{1\varepsilon}(\theta)$, respectivamente, as soluções dos problemas de valores iniciais

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \frac{a_{11}^1 r + f_{11}(\theta, r)}{a_{12}^1 + f_{12}(\theta, r)}, \\ r(-\frac{\pi}{2}) = y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \frac{f_{21}(\theta, r)}{f_{22}(\theta, r)}, \\ r(-\frac{\pi}{2}) = y \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \frac{(a_{11}^1 + \varepsilon)r + f_{11}(\theta, r)}{a_{12}^1 + f_{12}(\theta, r)}, \\ r(-\frac{\pi}{2}) = y. \end{cases}$$

Afirmamos que para $s > -\frac{\pi}{2}$, $\varepsilon < 0$ e y suficientemente pequeno, temos $r_{1\varepsilon}(s) < r_1(s)$.

De fato,

$$\begin{aligned} r_{1\varepsilon}(s) + y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^s \frac{(a_{11}^1 + \varepsilon)r + f_{11}(\theta, r)}{a_{12}^1 + f_{12}(\theta, r)} d\theta \\ &< \int_{-\frac{\pi}{2}}^s \frac{a_{11}^1 r + f_{11}(\theta, r)}{a_{12}^1 + f_{12}(\theta, r)} d\theta = r_1(s) + y. \end{aligned}$$

Usando o fato que $p = (\theta_0, r_0)$ é um ponto de contato tangencial externo, está claro que $r_1(\theta_0) = r_2(\theta_0)$ e para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, temos $r_1(\theta) > r_2(\theta)$ para todo $\theta \in [\theta_0 - \rho, \theta_0 + \rho] \setminus \{\theta_0\}$. Assim, existe $\varepsilon_0 < 0$ tal que para todo ε , com $\varepsilon_0 < \varepsilon < 0$, temos

$$r_1(\theta_0 - \rho) > r_{1\varepsilon}(\theta_0 - \rho) > r_2(\theta_0 - \rho)$$

e

$$r_1(\theta_0 + \rho) > r_{1\varepsilon}(\theta_0 + \rho) > r_2(\theta_0 + \rho).$$

Por outro lado, o fato que $r_{1\varepsilon}(\theta_0) < r_1(\theta_0) = r_2(\theta_0)$, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $\theta_1 \in (\theta_0 - \rho, \theta_0)$ e $\theta_2 \in (\theta_0, \theta_0 + \rho)$ tal que $r_{1\varepsilon}(\theta_1) = r_2(\theta_1)$ e $r_{1\varepsilon}(\theta_2) = r_2(\theta_2)$. De acordo com o Lema 5 existem dois pontos $p_1 = (\theta_1, r_2(\theta_1))$ e $p_2 = (\theta_2, r_2(\theta_2))$ que são pontos de contatos transversais. Se $\varepsilon > 0$, então $r_{1\varepsilon}(\theta) > r_1(\theta) \geq r_2(\theta)$ para todo $\theta \in [\theta_0 - \rho, \theta_0 + \rho]$. Isto implica que não temos pontos de contatos neste intervalo. O fato que $|\varepsilon|$ é arbitrariamente pequeno implica que os pontos de contatos transversais são mantidos. Então, cada ponto de contato tangencial externo de $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ bifurca em dois pontos de contatos transversais para $\varepsilon < 0$ e desaparece para $\varepsilon > 0$. De modo

similar, podemos provar que cada ponto de contato tangencial interno de $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ bifurca em dois pontos de contatos transversais para $\varepsilon > 0$ e desaparece para $\varepsilon < 0$. Isto conclui a prova. \square

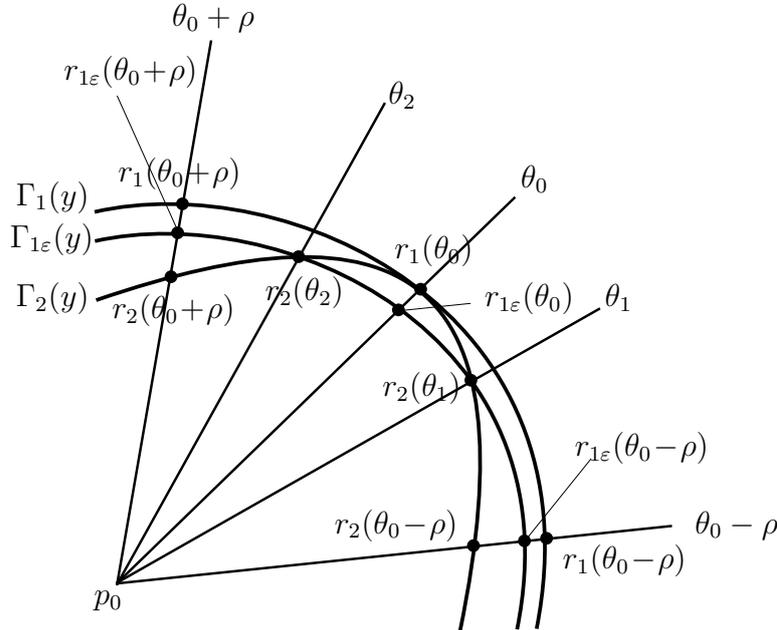


Figura 1.3: Intersecção da curvas $\Gamma_2(y)$ e $\Gamma_{1\varepsilon}(y)$ nos pontos $r_2(\theta_1)$ e $r_2(\theta_2)$.

Lema 8. *Seja $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de campos de vetores sobre as Hipóteses H ou HL e considere $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ dados pela Notação 1. Denotando por n_1 , n_e e n_o os números de pontos de contatos transversais, tangenciais sem cruzamento e tangenciais de cruzamento de $\Gamma_1(y)$ com $\Gamma_2(y)$, respectivamente. Então, $n_e \cdot n_o = 0$ e $n_1 + 2n_e + n_o \leq 5$.*

Demonstração. A prova do lema é consequência da análise do sinal de H_d o qual foi feito na Observação 3. Para esta prova, é suficiente demonstrar os seguintes resultados:

- (i) $n_e \cdot n_o = 0$;
- (ii) se $n_o \neq 0$ então $n_o + n_1 \leq 5$; e,
- (iii) se $n_e \neq 0$ então $2n_e + n_1 \leq 5$.

Começamos pela prova de (i), se $H_d = 0$ (resp. $H_d \neq 0$) então, pela Observação 3, $n_e = 0$ (resp. $n_o = 0$). Portanto, $n_e \cdot n_o = 0$. Note que a análise do caso $H_d = 0$ é feita com f_1 e f_2 sendo campos de vetores lineares. Isto é necessário para satisfazer as Hipóteses HL .

Para (ii) se $n_o \neq 0$ por (i) $n_e = 0$, conseqüentemente $H_d = 0$ e f_i é linear, para $i = 1, 2$. Pela Observação 3 o conjunto \mathcal{D} divide U em dois setores e o conjunto \mathcal{R} divide U em no máximo três setores. Assim, do Lema 5 segue que $n_1 \leq 3$ e $n_o \leq 2$. Isto completa a prova de (ii).

Finalmente, para a prova de (iii) se $n_e \neq 0$ por (i) $n_o = 0$ e conseqüentemente $H_d \neq 0$. Assim, afirmamos:

- (a) se um raio \mathcal{R}_i de \mathcal{R} contem um ponto de contato tangencial sem cruzamento então, os setores adjacentes de \mathcal{R}_i não possuem pontos de contatos transversais; e,
- (b) pontos de contatos tangenciais sem cruzamento não ocorrem em raios consecutivos de \mathcal{R} .

Para a prova de (a), seja $p \in \mathcal{R}_i$ um ponto de contato tangencial sem cruzamento e q um ponto de contato transversal em um setor adjacente de \mathcal{R}_i . Pelo Lema 7, para ε adequado, aplicamos a perturbação linear (1.3) no sistema $\dot{X} = f_1(X)$ e conseqüentemente o ponto p bifurca em dois pontos de contatos transversais em uma vizinhança de p e o ponto de contato transversal persiste na vizinhança de q . Assim, temos três pontos de contatos transversais em dois setores adjacentes do sistema perturbado, mas pelo Lema 5 isto é uma contradição.

Para a prova de (b) sejam p e q pontos de contatos tangenciais sem cruzamento em raios consecutivos \mathcal{R}_i e \mathcal{R}_{i+1} respectivamente, com $\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_{i+1} \subset \mathcal{R}$. Por (a) segue que dentro do setor adjacente a \mathcal{R}_i e \mathcal{R}_{i+1} não temos pontos de contatos transversais. Assim, p e q são ambos pontos de contatos tangenciais sem cruzamento e são de mesma natureza, isto é, pontos de contatos tangenciais sem cruzamento externo ou interno. Pelo Lema 7, para um ε adequado, aplicamos a perturbação linear (1.3) no sistema $\dot{X} = f_1(X)$ e conseqüentemente os pontos p e q bifurcam em quatro pontos de contatos transversais pertencentes a três setores determinados por \mathcal{R} . Pelo Lema 5 isto é uma contradição e

então a afirmação (b) está provada.

Uma vez que o número de setores determinados por \mathcal{R} é no máximo cinco, segue das afirmações (a) e (b) que $2n_e + n_1 \leq 5$. \square

Lema 9. *Seja $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de campos de vetores satisfazendo as Hipóteses H ou HL , e considere $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ dados pela Notação 1. Então, para cada $(0, y) \in U \cap \Sigma_0$ existe um ponto no plano em que $\Gamma_1(y)$ intersecta $\Gamma_2(y)$. Além disso, se as Hipóteses H são satisfeitas, então a intersecção é transversal.*

Demonstração. De acordo com o Lema 2 podemos considerar $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0 \text{ e } y < 0\}$. Seja $\Pi_2 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$ a aplicação de Poincaré dada pelo sistema (1.2). Para cada ponto $(0, y) \in \Sigma_0$, com $y < 0$, temos que $\Pi_2(0, y) = (0, z_1)$, com $z_1 < y$. Isto é verdade porque o sistema (1.2) tem um foco repulsor. Considere $S(y) \subset \Sigma_0$ o segmento com pontos finais $(0, y)$ e $\Pi_2(0, y) = (0, z_1)$. É óbvio que $\Gamma(y) = \Gamma_2(y) \cup S(y)$ é uma curva fechada.

Seja $\Pi_1 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$ a aplicação de Poincaré dada pelo sistema (1.1). Agora usando o fato que o sistema (1.1) tem um foco atrator, temos que $\Pi_1^{-1}(0, y) = (0, z_2)$, em que $z_2 < y$. Seja $\tau_1 > 0$ o tempo tal que $\gamma_1(-\tau_1, (0, y)) = (0, z_2)$. É óbvio que para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, temos que $\gamma_1(-\varepsilon, (0, y))$ está no interior de $\Gamma(y)$ e $\gamma_1(-\tau_1 + \varepsilon, (0, y))$ está no exterior de $\Gamma(y)$. De acordo com a definição da aplicação de Poincaré Π_1 , é claro que o arco $\{\gamma_1(t, (0, y)), -\tau_1 + \varepsilon < t < -\varepsilon\}$ não intersecta o segmento $S(y)$. Então, isto implica que $\Gamma_1(y)$ intersecta $\Gamma_2(y)$ no ponto p distinto de $(0, y)$.

Se as hipóteses H são satisfeitas, então pelo Lema 6 temos que p não é um ponto de contato tangencial de cruzamento. Uma vez que $\Gamma_1(y)$ cruza $\Gamma_2(y)$ em p temos que p é um ponto de contato transversal. \square

O próximo resultado é uma adaptação do Lema 1 de [33], para nossas hipóteses. Considere o par de campo de vetores f_1 e f_2 satisfazendo as Hipóteses HL , $X_0 \in \mathbb{R}^2$, com $X_0 \neq 0$ e l a semirreta que passa por X_0 e tem ponto final p_0 . Tome l^- e l^+ semirretas com ponto final em p_0 tal que o ângulo em relação ao eixo x calculado em l^- é menor que o calculado em l e ângulo calculado em l^+ é maior que em l , veja Figura 1.4. Considere também que o interior do setor determinado por l^j e l , com $j \in \{-, +\}$ esteja no interior

de um setor determinado por \mathcal{R} . Pelo fato que as trajetórias $\gamma_1(t, X_0)$ e $\gamma_2(t, X_0)$ cruzam as semirretas l^- e l^+ para tempos negativos e positivos respectivamente, definimos:

- q_i^+ como a intersecção de $\gamma_i(t, X_0)$ com l^+ , para $i = 1, 2$; e,
- q_i^- como a intersecção de $\gamma_i(t, X_0)$ com l^- , para $i = 1, 2$.

Dessa forma, afirmamos um resultado semelhante ao Lema 1 de [33] como segue:

Lema 10. *Sejam $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de campo de vetores sobre as Hipóteses HL e q_i^\pm os pontos de intersecção de $\gamma_i(t, X_0)$ com a semirreta l^\pm , para $i = 1, 2$; como descrito anteriormente. A respeito dos pontos q_i^\pm afirmamos:*

- (i) *Se $\det(f_1(X), f_2(X)) > 0$, para todo X no setor determinado por l e l^+ , então $\|q_2^+\| < \|q_1^+\|$;*
- (ii) *Se $\det(f_1(X), f_2(X)) < 0$, para todo X no setor determinado por l e l^+ , então $\|q_1^+\| < \|q_2^+\|$;*
- (iii) *Se $\det(f_1(X), f_2(X)) > 0$, para todo X no setor determinado por l e l^- , então $\|q_2^-\| < \|q_1^-\|$; e,*
- (iv) *Se $\det(f_1(X), f_2(X)) < 0$, para todo X no setor determinado por l e l^- , então $\|q_1^-\| < \|q_2^-\|$;*

Demonstração. Faremos a prova apenas para o primeiro caso, pois a prova dos outros segue de modo análogo. Considere o circuito C dado pelo arco da curva $\gamma_1(t, X_0)$ com extremidades X_0 e q_1^+ , e pelos segmentos $p_0q_1^+$ e p_0X_0 , veja Figura 1.4. Uma vez que $\det(f_1(X_0), f_2(X_0)) > 0$ para todo X no interior do circuito C , segue que para tempo positivo, a trajetória $\gamma_2(t, X_0)$ entra no circuito C cruzando $\gamma_1(t, X_0)$ no ponto X_0 e sai do circuito pelo ponto $q_2^+(X_0)$, e estes cruzamentos são únicos. Assim, temos que $\|q_2^+\| < \|q_1^+\|$. A prova do lema está terminada. □

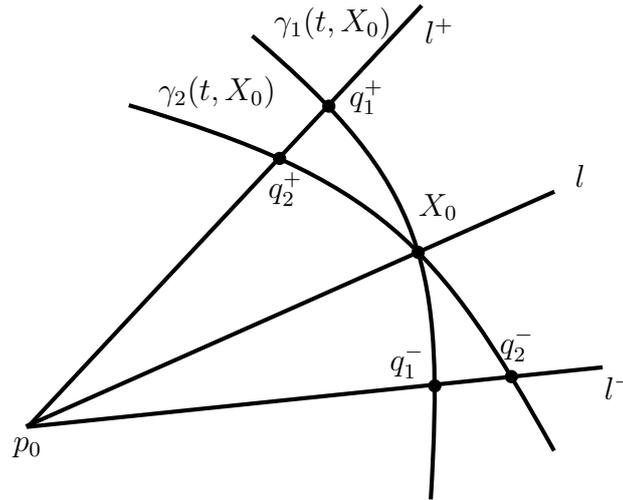


Figura 1.4: Intersecção das trajetórias $\gamma_i(t, X_0)$ com as semirretas l^j com $i = 1, 2$ e $j \in \{+, -\}$.

1.3 Caso Linear

Nesta seção apresentamos a versão linear do principal resultado deste capítulo (Teorema 1), isto é, consideramos o caso em que f_i , com $i = 1, 2$; são campos de vetores lineares.

Teorema 6 (Fronteira de Centros - caso linear). *Sejam $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de campos de vetores lineares que satisfazem as Hipóteses HL e Σ_0 um raio com ponto final em comum com o ponto singular p_0 de f_1 e f_2 . Então, as afirmações valem:*

- (i) *existe um raio Ω , com ponto final p_0 , tal que $W = \Sigma_0 \cup \{p_0\} \cup \Omega$ é uma fronteira de centros para $Z_W = (f_1, f_2, W)$; e,*
- (ii) *a cota superior para o número de raios Ω_i distintos, com ponto final p_0 , tal que $W_i = \Sigma_0 \cup \{p_0\} \cup \Omega_i$ é uma fronteira de centros para $Z_{W_i} = (f_1, f_2, W_i)$, é cinco. Além do mais, esta cota é atingida.*

Demonstração. Primeiro de tudo, de acordo com o Lema 2, podemos considerar $p_0 = (0, 0)$, $\Sigma_0 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, y < 0\}$ e assumir que A_1 está na forma canônica de Jordan, em que $f_1(X) = A_1X$ e $f_2(X) = A_2X$.

Para provar a afirmação (i), considere a aplicação \mathcal{C}^∞ , $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $G(t, s, y) = e^{A_2 s}(0, y) - e^{-A_1 t}(0, y)$, com $y < 0$. Queremos resolver

$$G(t, s, y) = 0. \quad (1.5)$$

Pelo Lema 9, para cada $y < 0$ a equação (1.5) possui pelo menos uma solução (τ_1, τ_2, y) . Podemos dividir (1.5) por $-y > 0$ e obter

$$e^{A_2 s}(0, -1) - e^{-A_1 t}(0, -1) = 0. \quad (1.6)$$

Então $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ é uma solução de (1.6). Isto significa que os tempos de voo τ_1 e τ_2 não dependem do ponto inicial $(0, y) \in \Sigma_0$. Sabemos que o fluxo de um sistema linear, para um tempo fixo t , leva semirreta com ponto final $(0, 0)$ em semirreta com ponto final $(0, 0)$. Em particular, a imagem da semirreta Σ_0 pelas aplicações $e^{-A_1 \tau_1}$ e $e^{A_2 \tau_2}$ coincidem e então, tal imagem é o raio Ω com ponto final $(0, 0)$. Então, $W = \Sigma_0 \cup \{p_0\} \cup \Omega$ é uma fronteira de centros para $Z_W = (f_1, f_2, W)$.

Agora, provamos a afirmação (ii). De acordo com a construção de Ω em (i) temos que a fronteira de centros é dada pela intersecção de $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$, para $(0, y) \in \Sigma_0$. Lema 8 garante que para cada $y < 0$, $\Gamma_1(y) \cap \Gamma_2(y)$ tem no máximo cinco elementos. Isto implica que temos no máximo cinco fronteiras de centros da forma $W_i = \Sigma_0 \cup \{p_0\} \cup \Omega_i$. Finalmente, o Exemplo 1 é uma prova que esta cota é atingida. \square

Agora, mostramos os detalhes do Exemplo 1 como segue.

Seja $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de campos de vetores lineares $f_1(X) = A_1 X$ e $f_2(X) = A_2 X$, em que

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.01 & -1 \\ 1 & -0.01 \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.05 \\ 20 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Então, existem cinco raios Ω_i , $i = 1, \dots, 5$, como no Teorema 6, e eles são dados por:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -134.8775564625664 \dots x, x > 0\}; \\ \Omega_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -21.3368256507493 \dots x, x > 0\}; \\ \Omega_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 8.31842273952277 \dots x, x > 0\}; \\ \Omega_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -1.781004127809957 \dots x, x < 0\}; \text{ e,} \\ \Omega_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 1.544443235738568 \dots x, x < 0\}. \end{aligned}$$

De fato, resolvendo numericamente a equação (1.6) obtemos as soluções:

$$\begin{aligned}(\tau_{11}, \tau_{21}) &= (6.275771311120894\dots, 0.1472099548970395\dots); \\(\tau_{12}, \tau_{22}) &= (6.236352249719108\dots, 0.75306960711223\dots); \\(\tau_{13}, \tau_{23}) &= (3.261233618070344\dots, 1.9649520341626272\dots); \\(\tau_{14}, \tau_{24}) &= (2.629977598472333\dots, 4.623573047888529\dots); e, \\(\tau_{15}, \tau_{25}) &= (0.5746034278947866\dots, 4.789458190335897\dots).\end{aligned}$$

Assim, denotamos $q_i = e^{-A_1\tau_{1i}}(0, -1) = e^{A_2\tau_{2i}}$ para $i = 1, \dots, 5$, e escrevemos

$$\begin{aligned}q_1 &= (0.007894119577290202\dots, -1.0647395648297642\dots); \\q_2 &= (0.0498285069740593\dots, -1.0631821653064175\dots); \\q_3 &= (0.12331238264053886\dots, 1.0257645288981185\dots); \\q_4 &= (-0.5026329580685281\dots, 0.8951913733052014\dots); e, \\q_5 &= (-0.5466339180793478\dots, -0.8442450566431993\dots).\end{aligned}$$

Claramente os pontos q_i estão na intersecção $\Gamma_1(-1)$ com $\Gamma_2(-1)$ e os raios Ω_i passam pelos pontos q_i , para $i = 1, \dots, 5$.

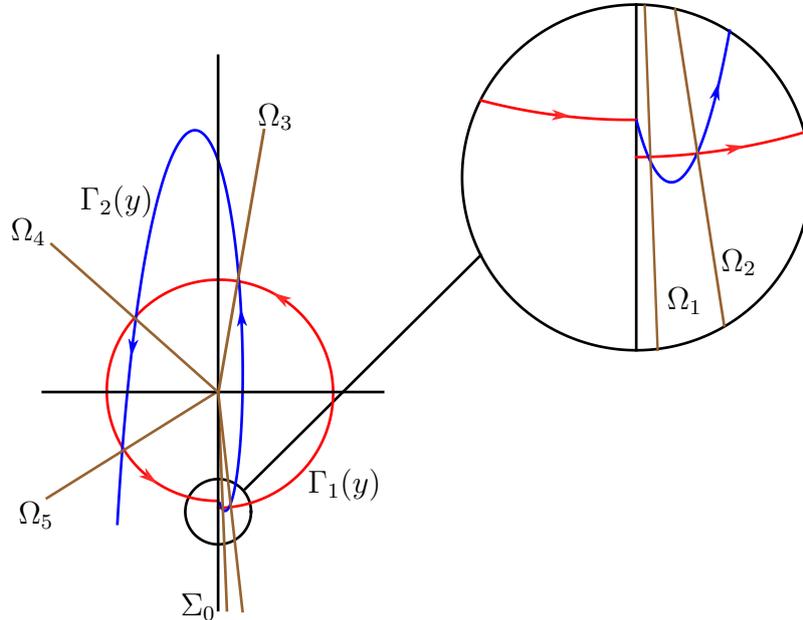


Figura 1.5: Cinco Fronteiras de centros. Em vermelho e azul, temos a trajetória $\Gamma_1(y)$ e $\Gamma_2(y)$ respectivamente, já em marrom, temos os raios Ω_i , $i = 1, \dots, 5$.

1.4 Caso Não Linear

Nesta seção lidaremos com o caso não linear. O próximo teorema é uma versão mais detalhada do Teorema 1 e na sua prova alguns outros resultados obtidos nas seções prévias serão utilizados.

Teorema 7 (Fronteira de Centros -caso geral). *Seja $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de campos de vetores que satisfaz as Hipóteses H e seja Σ_0 uma semirreta com ponto final em comum com o ponto singular p_0 de f_1 e f_2 . Então, em uma vizinhança U de p_0 , as seguintes afirmações valem:*

- (i) *existe uma variedade unidimensional Ω , com ponto final p_0 , tal que $W = (\Sigma_0 \cup \{p_0\}) \cup \Omega \cap U$ é uma fronteira de centros para $Z_W|_U = (f_1, f_2, W)|_U$; e,*
- (ii) *a cota superior para o número de variedades Ω_i distintas, com ponto final p_0 , tal que $W_i = (\Sigma_0 \cup \{p_0\}) \cup \Omega_i \cap U$ é uma fronteira de centros para $Z_{W_i}|_U = (f_1, f_2, W_i)|_U$, é cinco. Além do mais, esta cota é atingida.*

Demonstração. A prova está organizada como segue. Na primeira parte da prova enunciaremos um conjunto de notações a respeito de algumas definições, recordaremos algumas definições dadas anteriormente e também enunciaremos novas notações que serão usadas na prova. Basicamente, usaremos a convenção que as notações com chapéu, por exemplo $\hat{\gamma}_i$, são referentes aos sistemas lineares e sem chapéu, por exemplo γ_i , são referentes a sistemas não lineares. Na segunda parte da prova, encontraremos uma curva Ω e uma vizinhança U da origem, tal que, a curva Ω , a origem e Σ_0 estão conectados, isto é, $W = (\Sigma_0 \cup \{(0,0)\}) \cup \Omega \cap U$ é uma fronteira de centros para $Z_W|_U = (f_1, f_2, W)|_U$. Finalmente, na terceira parte da prova mostraremos que a curva Ω é de classe \mathcal{C}^r .

Começamos com a primeira parte da prova estabelecendo algumas notações. Como no Teorema 6, pelo Lema 2, podemos considerar $p_0 = (0,0)$, $\Sigma_0 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, y < 0\}$ e assumimos que A_1 está na forma canônica de Jordan. De acordo com a nossa notação, equações (1.1) e (1.2), temos que $f_i(X) = A_i X + \tilde{f}_i(X)$, na qual $\tilde{f}_i(0) = D\tilde{f}_i(0) = 0$, para $i = 1, 2$. Considere $(\theta, r) = \psi(x, y)$ a mudança de coordenadas polares e denote:

- $\gamma_i(t, (0, y_0))$ a solução de $\dot{X} = f_i(X)$ satisfazendo a condição inicial $\gamma_i(0, (0, y_0)) = (0, y_0)$, $i = 1, 2$;
- $\hat{\gamma}_i(t, (0, y_0))$ a solução de $\dot{X} = A_i X$ satisfazendo $\hat{\gamma}_i(0, (0, y_0)) = (0, y_0)$, $i = 1, 2$;
- $\beta_i(t, (0, y_0)) = \psi \circ \gamma_i(t, (0, y_0))$ e $\hat{\beta}_i(t, (0, y_0)) = \psi \circ \hat{\gamma}_i(t, (0, y_0))$, $i = 1, 2$;
- $\hat{\Gamma}_1(y_0) = \{e^{-A_1 t}(0, y_0), 0 < t < 2\pi/a_{12}^1\}$;
- $\hat{\Gamma}_2(y_0) = \{e^{A_2 t}(0, y_0), 0 < t < 4\pi/\sqrt{\Delta_2}\}$;
- $\Lambda_i(y_0) = \psi(\Gamma_i(y_0))$ e $\hat{\Lambda}_i(y_0) = \psi(\hat{\Gamma}_i(y_0))$, $i = 1, 2$;
- $\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^2 : \det(f_1(X), f_2(X)) = 0\}$, $\mathcal{R} = \mathcal{D} \cup \Sigma_0$ e $\mathcal{S} = \psi(\mathcal{R})$; e,
- $\hat{\mathcal{D}} = \{X \in \mathbb{R}^2 : \det(A_1 X, A_2 X) = 0\}$, $\hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{D}} \cup \Sigma_0$ e $\hat{\mathcal{S}} = \psi(\hat{\mathcal{R}})$.

Sabemos que o conjunto $\hat{\mathcal{R}}$ consiste de n raios, $1 \leq n \leq 5$, o qual definimos $\hat{\mathcal{R}}_j$, $j = 1, \dots, n$. Pelo Lema de Morse existe um difeomorfismo h , definido em uma vizinhança U_0 da origem, tal que $h(\hat{\mathcal{D}} \cap U_0) = \mathcal{D} \cap h(U_0)$. Assim, temos $\mathcal{R}_j = h(\hat{\mathcal{R}}_j)$ e também denotamos $\hat{\mathcal{S}}_j = \psi(\hat{\mathcal{R}}_j) = \{\theta = \theta_j\}$ e $\mathcal{S}_j = \psi(\mathcal{R}_j)$, para $j = 1, \dots, n$.

Para a segunda parte da prova queremos obter a curva Ω e a vizinhança U . A estratégia para obter Ω será encontrar $\delta > 0$ e uma parametrização $p : (-\delta, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de modo que

$$\Omega = \{p(y_0), 0 < -y_0 < \delta\}$$

e

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} p(y_0) = 0.$$

Observe que pelo Lema 9 para cada $y_0 < 0$ existe um ponto $\hat{p}(y_0)$ tal que $\hat{\Gamma}_1(y_0)$ intersecta $\hat{\Gamma}_2(y_0)$ transversalmente em $\hat{p}(y_0)$. Segue do Teorema 6 que existe um raio $\mathcal{R}^* \neq \hat{\mathcal{R}}_j$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, tal que $\hat{p}(y_0) \in \mathcal{R}^*$ para todo $y_0 < 0$. Denote por $\mathcal{S}^* = \psi(\mathcal{R}^*) = \{\theta = \theta^*\}$. É claro que existem $i, j \in \{1, \dots, n\}$ de modo que $\theta_i < \theta^* < \theta_j$. Por simplicidade assumimos que $i = 1$ e $j = 2$, isto é $\hat{\mathcal{S}}_1$ e $\hat{\mathcal{S}}_2$ são raios consecutivos de $\hat{\mathcal{S}}$ tal que $\theta_1 < \theta^* < \theta_2$ (se $n = 1$ então $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$).

Considere a faixa $L_\rho = \{(\theta, r) : r < \rho\}$. Observamos que para um dado $\varepsilon_1 > 0$ existe $\rho > 0$ tal que, se $0 < r < \rho$ então $\text{dis}(\hat{\mathcal{S}}_j \cap L_r, \mathcal{S}_j \cap L_r) < \varepsilon_1$, $j = 1, \dots, n$ e $\psi^{-1}(L_\rho) \subset U_0$.

Tome $U = \psi^{-1}(L_\rho)$, do Teorema da Dependência Contínua em Relação as Condições Iniciais e Parâmetros, segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } |y_0| < \delta_1 \text{ então } \hat{\Lambda}_i(y_0) \subset L_\rho, \quad (1.7)$$

para $i = 1, 2$.

É claro que os sistemas $\dot{X} = A_i X$, satisfazendo as Hipóteses H, são focos. Assim, em coordenadas polares, satisfaz $\dot{\theta} \neq 0$. Segue que para cada $y_0 < 0$ o conjunto $\hat{\Lambda}_i(y_0)$ são gráficos de funções $r_i(\theta, y_0)$, $i = 1, 2$. Assim, $\hat{q}(y_0) := \psi(\hat{p}(y_0)) = (\theta^*, r_1(\theta^*, y_0)) = (\theta^*, r_2(\theta^*, y_0))$. Agora, seja ε_1 um número real que satisfaz $0 < \varepsilon_1 < \min\{\theta_1 - \theta^*, \theta^* - \theta_2\}/3$ e considere a faixa $F = \{(\theta, r), |\theta - \theta^*| < 2\varepsilon_1 \text{ e } r < \rho\}$. Para um $y_0 < 0$ fixado, denote por $\eta_i^\pm = \hat{\Lambda}_i(y_0) \cap \{\theta = \theta^* \pm 2\varepsilon_1\}$, $i=1,2$; e η^\pm o ponto médio entre η_1^\pm e η_2^\pm .

Tome $\varepsilon_2|y_0| = \min\{\text{dis}(\eta^\pm, \hat{\Lambda}_i(y_0)), i = 1, 2\}$ e afirmamos que:

A1 $\lim_{y_0 \rightarrow 0} \varepsilon_2 > 0$; e,

A2 existe um $\delta_2 > 0$ tal que se $|y_0| < \delta_2$ então $\|\hat{\beta}_i(t, (0, y_0)) - \beta_i(t, (0, y_0))\| < \varepsilon_2|y_0|$.

De fato, para provar **A1** temos que, em coordenadas polares, as soluções dos sistemas (1) e (2) em que, $r_i(\frac{\pi}{2}) = y_0$, com $i = 1, 2$; são respectivamente

$$r_1(\theta, y_0) = \exp\left(\frac{a_{11}^1}{a_{21}^1}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) y_0; \text{ e,}$$

$$r_2(\theta, y_0) = \exp\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} h(s) ds\right) y_0,$$

$$\text{em que } h(\theta) = \frac{a_{11}^2 \cos \theta + (a_{12}^2 + a_{21}^2) \text{sen} \theta \cos \theta + a_{22}^2 \text{sen}^2 \theta}{a_{21}^2 \cos \theta + (a_{22}^2 - a_{11}^2) \text{sen} \theta \cos \theta - a_{12}^2 \text{sen}^2 \theta}.$$

Agora, vamos mostrar que

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\min\{\text{dis}(\eta^\pm, \hat{\Lambda}_i(y_0)), i = 1, 2\}}{|y_0|} > 0.$$

Seja $\eta^+ = (\eta_\theta^+, \eta_r^+)$, sabemos que $d(\theta) = (\theta - \eta_\theta^+)^2 + (r_2(\theta, y_0) - \eta_r^+)^2$ é o quadrado da distância entre η^+ e $r_2(\theta, y_0)$ e o mínimo da distância ocorre em θ_0 tal que $d'(\theta_0) = 0$.

Assim,

$$d'(\theta) = 2(\theta - \eta_\theta^+) + 2(r_2(\theta, y_0) - \eta_r^+)r_2(\theta, y_0)h(\theta)$$

e

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} d'(\theta) = 2(\theta - \eta_\theta^+).$$

Portanto, quando $y_0 \rightarrow 0$ temos que

$$\begin{aligned} \text{dis}(\eta^+, \hat{\Lambda}_2(y_0)) &= |r_2(\eta_\theta^+, y_0) - \eta_r^+| = \text{dis}(\eta^+, \eta_2^+) = \frac{\|\eta_2^+ - \eta_1^+\|}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left| \exp\left(\frac{a_{11}^1}{a_{21}^1}(\eta_\theta^+ + \frac{\pi}{2})\right) - \exp\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\eta_\theta^+} h(s) ds\right) \right| |y_0| \\ &= L_2^+ |y_0| \end{aligned}$$

com L_2^+ constante positiva.

De maneira análoga, para $i = 1, 2$ e $j \in \{-, +\}$, podemos mostrar que

$$\text{dis}(\eta^j, \hat{\Lambda}_i(y_0)) = L_i^j |y_0|$$

com L_i^j constante positiva.

Assim,

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \varepsilon_2 = \min\{L_i^j, i = 1, 2 \text{ e } j \in \{-, +\}\} > 0$$

Para provar **A2**, note que

$$\gamma_i(t, (0, y_0)) = \gamma_i(t, (0, 0)) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left[\gamma_i(t, (0, y_0)) \right] \Big|_{y_0=0} \cdot (0, y_0) + R_i(t, y_0)$$

em que

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\|R_i(t, y_0)\|}{|y_0|} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Uma vez que $\gamma_i(t, (0, 0)) = 0$ e pela Observação 2, na página 84 de [35], temos

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \left[\gamma_i(t, (0, y_0)) \right] \Big|_{y_0=0} \cdot (0, y_0) = e^{A_i t} \cdot (0, y_0) = \hat{\gamma}_i(t, (0, y_0)), \quad i = 1, 2.$$

Então, segue que $\gamma_i(t, (0, y_0)) - \hat{\gamma}_i(t, (0, y_0)) = R_i(t, y_0)$, $i = 1, 2$. Note que ψ é um difeomorfismo, então a prova da afirmação **A2** está terminada.

Considere $V_i(y_0)$ a vizinhança tubular de $\hat{\Lambda}_i(y_0)$ com raio ε_2 . Denote por $\hat{\Lambda}_i^+(y_0)$ e $\hat{\Lambda}_i^-(y_0)$ as duas curvas regulares que determinam a borda de $V_i(y_0)$. O fato que $\hat{\Gamma}_1(y_0)$ intersecta $\hat{\Gamma}_2(y_0)$ transversalmente em $\hat{p}(y_0)$ implica que $\hat{\Lambda}_1^\pm(y_0)$ intersecta $\hat{\Lambda}_2^\pm(y_0)$ transversalmente em F e pela escolha de ε_2 temos que $\hat{\Lambda}_1^\pm(y_0)$ intersecta $\hat{\Lambda}_2^\mp(y_0)$ em F . Denote

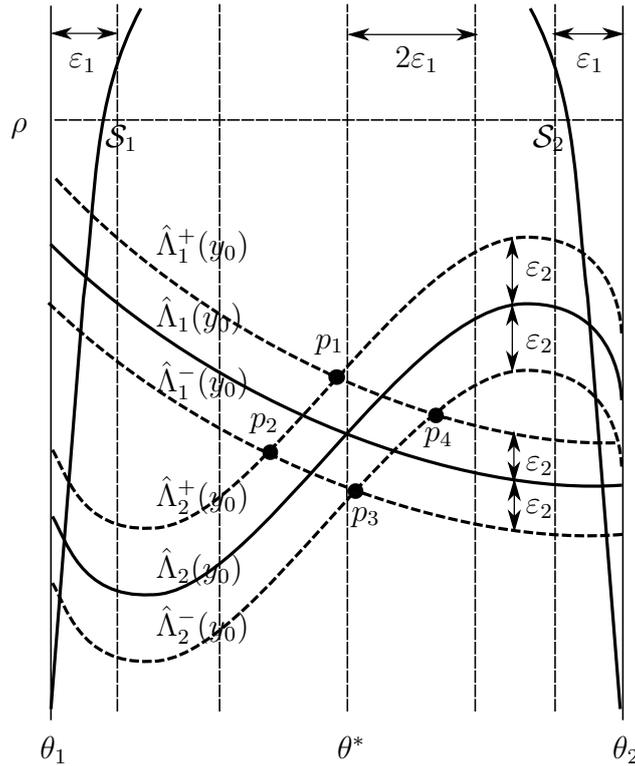


Figura 1.6: Construção da vizinhança tubular.

p_i , $i = 1, \dots, 4$; os pontos dados por $p_1 = \hat{\Lambda}_1^+(y_0) \cap \hat{\Lambda}_2^+(y_0)$, $p_2 = \hat{\Lambda}_1^-(y_0) \cap \hat{\Lambda}_2^+(y_0)$, $p_3 = \hat{\Lambda}_1^-(y_0) \cap \hat{\Lambda}_2^-(y_0)$ e $p_4 = \hat{\Lambda}_1^+(y_0) \cap \hat{\Lambda}_2^-(y_0)$ (Veja Figuras 1.6 e 1.9).

Seja K a região determinada pelos arcos $\widehat{p_1 p_2}$, $\widehat{p_2 p_3}$, $\widehat{p_3 p_4}$ e $\widehat{p_4 p_1}$ (veja Figura 1.9). Para $0 < -y_0 < \delta$ temos que $K \subset F$, e então por (1.7) K está contido em um setor determinado por \mathcal{S} . Pela Afirmação A2, a trajetória $\Lambda_1(y_0)$ não cruza os arcos $\widehat{p_4 p_1}$ e $\widehat{p_2 p_3}$ e a trajetória $\Lambda_2(y_0)$ não cruza os arcos $\widehat{p_1 p_2}$ e $\widehat{p_3 p_4}$. Uma vez que $\Lambda_1(y_0)$ cruza $\widehat{p_1 p_2}$ e $\widehat{p_3 p_4}$ e $\Lambda_2(y_0)$ cruza $\widehat{p_2 p_3}$ e $\widehat{p_4 p_1}$ temos que $\Lambda_1(y_0)$ intersecta $\Lambda_2(y_0)$ em K e a intersecção do ponto $q(y_0) = \psi(p(y_0))$ é única.

Tome $\Omega = \{p(y_0), 0 < -y_0 < \delta\}$. Como

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \max\{\|X\|, \text{ tal que } X \in \Gamma_i(y_0)\} = 0, \quad i = 1 \text{ ou } i = 2,$$

segue que

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} p(y_0) = 0.$$

Assim, temos que Ω é conectado com a origem. Então a segunda parte da prova está

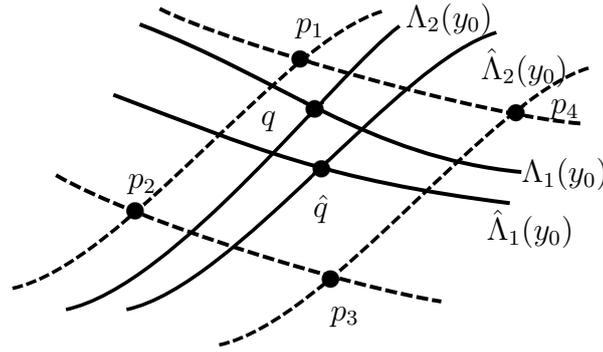


Figura 1.7: Intersecção Transversal na vizinhança tubular.

finalizada.

A última parte da prova consiste em provar a diferenciabilidade de Ω . Apenas observamos que a intersecção de $\Gamma_1(y_0)$ com $\Gamma_2(y_0)$ em K é transversal, tal transversalidade ocorre pelo fato de que $K \cap \mathcal{D} = \emptyset$. Sejam s_0 e t_0 tempos de voo necessários para a intersecção, isto é,

$$\gamma_2(s_0, (0, y_0)) = \gamma_1(-t_0, (0, y_0)) = p(y_0).$$

Considere a equação

$$\Phi(t, s, y) = 0, \tag{1.8}$$

em que $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação de classe \mathcal{C}^r definida por $\Phi(t, s, y) = \gamma_2(s, (0, y)) - \gamma_1(-t, (0, y))$, com $y < 0$. Observe que

$$\det(\partial_{(s,t)}\Phi(t_0, s_0, y_0)) = \det(f_1(p(y_0)), f_2(p(y_0))) \neq 0.$$

Então, pelo Teorema da Função Implícita, existem aplicações de classe \mathcal{C}^r , $s = s(y)$ e $t = t(y)$, definidas em um intervalo aberto $I_0 \ni y_0$, tal que $\Phi(t(y), s(y), y) \equiv 0$. Assim, temos que Ω , em uma vizinhança do ponto $p(y_0)$, é dada por

$$\Omega = \{\gamma_1(t(y), (0, y)) : y \in I_0\}.$$

O fato de que, na vizinhança do ponto $p(y_0)$, a variedade Ω é imagem da aplicação \mathcal{C}^r , $\gamma_1(-t(y), (0, y))$ sobre o intervalo aberto I_0 ; implica que a variedade Ω é diferenciável no ponto $p(y_0)$. Pela arbitrariedade de y_0 segue que a variedade Ω é diferenciável.

A prova de (ii) é similar a que é dada na prova do Teorema 6.

□

Note que a condição (iv) na Definição 1 é apenas técnica. Observamos que todo par de sistemas lineares que satisfas as condições (i), (ii) e (iii) da Definição 1 possui uma fronteira de centros, veja o Teorema 6. Por exemplo, considerando o par $f_1(X) = A_1X$ e $f_2(X) = A_2X$ com

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

o par (f_1, f_2) satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) e não satisfaz a condição (iv).

1.5 Perturbação da Fronteira de Centros

Nesta seção, vamos demonstrar o Teorema 2 e dar um exemplo numérico em que o teorema se aplica. Por praticidade, enunciamos novamente o respectivo teorema.

Teorema (Perturbação da Fronteira de Centros). *Sejam $Z = (f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^r$ um par de campos de vetores que satisfaz as Hipóteses HL, Σ_0 uma semirreta com ponto final em comum com o ponto singular p_0 de f_1 e f_2 e $W \supset \Sigma_0$ uma fronteira de centros para o par $Z = (f_1, f_2)$. Então, dado $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}_+$ com $0 < a < b$, podemos perturbar a fronteira de centros W produzindo uma fronteira de separação W_ε , de modo que o sistema $Z_{W_\varepsilon} = (f_1, f_2, W_\varepsilon)$ possui exatamente n ciclos limite. Os ciclos limite de Z_{W_ε} são as órbitas periódicas de Z_W que persistiram após a perturbação e eles cruzam o raio Ω , obtido no Teorema 6, a uma distância da origem maior que a e menor que b .*

Demonstração. Para a demonstração, seguiremos os seguintes passos. Primeiro, partindo do raio Ω obtida no Teorema 6, construiremos a curva Ω_ε que está \mathcal{C}^1 próxima de $\Omega_0 = \Omega$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e por fim provaremos que de fato, o sistema Z_{W_ε} tem exatamente n ciclos limite que cruzam o raio Ω a uma distância da origem maior que a e menor que b .

Seguindo o roteiro da demonstração, vamos construir a curva Ω_ε . Para facilitar o entendimento da construção, rotacionamos, caso necessário, os campos vetoriais f_1 e f_2

e a semirreta Σ_0 para que o raio Ω seja o semi-eixo positivo das abscissas. Para ε , a e b positivos, com $a < b$, seja a^* a solução da equação

$$-\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a} \right) = \frac{(b-a)}{xn\pi} \cos \left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a} \right),$$

tal que $a - (b-a)/2n < a^* < a$. Assim, definimos

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = f_\varepsilon(x), x > 0\}$$

em que,

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon x(b-a)}{2a^*n\pi} \cos \left(\frac{n\pi(a^*-a)}{b-a} \right) & \text{se } 0 < x \leq a^*; \\ \frac{\varepsilon(b-a)}{2n\pi} \cos \left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a} \right) & \text{se } a^* \leq x \leq c; \text{ e,} \\ \frac{(-1)^n \varepsilon(b-a)}{2n\pi} & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

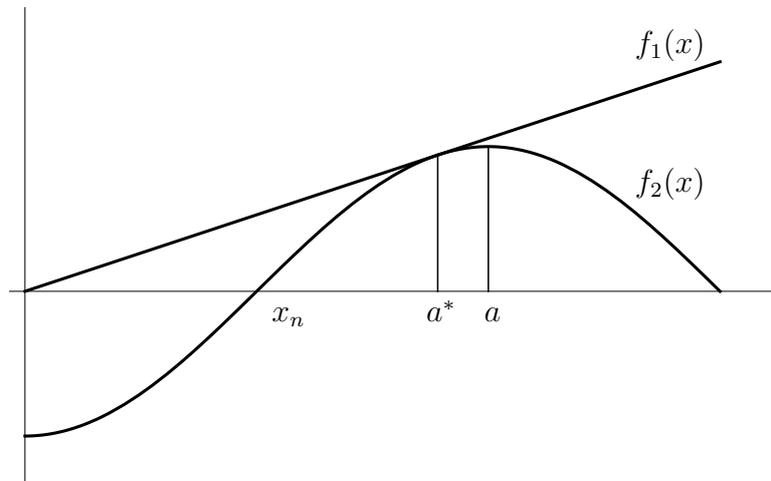


Figura 1.8: Representação geométrica da escolha de a^* para a função $f_\varepsilon(x)$, sendo: $x_n = \frac{(2n-1)a-b}{2n}$, $f_1(x) = \frac{\varepsilon x(b-a)}{2a^*n\pi} \cos \left(\frac{n\pi(a^*-a)}{b-a} \right)$ e $f_2(x) = \frac{\varepsilon(b-a)}{2n\pi} \cos \left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a} \right)$.

Uma representação geométrica da escolha de a^* para a função $f_\varepsilon(x)$ pode ser vista na Figura 1.8. Note que, para provar que Ω_ε é de classe \mathcal{C}^1 , é suficiente mostrar que $f(x)$ é

de classe \mathcal{C}^1 . Dessa forma,

$$f'_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon(b-a)}{2a^*n\pi} \cos\left(\frac{n\pi(a^*-a)}{b-a}\right) & \text{se } 0 < x \leq a^*; \\ -\frac{\varepsilon}{2} \text{sen}\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right) & \text{se } a^* \leq x \leq b; \text{ e,} \\ 0 & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

que é contínua. Portanto, Ω_ε é de classe \mathcal{C}^1 . Pelo fato de que $f_\varepsilon(x)$ converge para a função nula, na norma \mathcal{C}^1 , quando ε converge a zero, temos que Ω_ε está \mathcal{C}^1 próxima de $\Omega_0 = \Omega$.

Agora vamos mostrar que o sistema dado pelo campo Z_{W_ε} tem de fato, exatamente n ciclos limite. Para $i = 1, 2$; sabemos que o campo vetorial f_i é transversal ao raio Ω , como Ω_ε converge para Ω na norma \mathcal{C}^∞ , segue que para ε suficientemente pequeno, f_i é transversal a curva Ω_ε . Assim, podemos fazer o estudo da aplicação de Poincaré P do campo Z_{W_ε} sobre a curva Ω_ε . Uma vez que Ω_ε está parametrizado pela variável x , podemos trabalhar com a aplicação de Poincaré em x e afirmamos que $P(x) = x$ se, e somente se, $f_\varepsilon(x) = 0$. Como a equação $f_\varepsilon(x) = 0$ tem exatamente n raízes, segue que a aplicação de Poincaré $P(x)$ tem exatamente n pontos fixos, e conseqüentemente, o sistema Z_{W_ε} tem exatamente n ciclos limite.

Para finalizar a prova do teorema, temos que demonstrar nossa última afirmação, $P(x) = x$ se, e somente se, $f_\varepsilon(x) = 0$. Para isto, tome $X = (x, f_\varepsilon(x)) \in \Omega_\varepsilon$.

- Se $f_\varepsilon(x) > 0$, denote por X_0 a intersecção da órbita de $(x, f_\varepsilon(x))$ com Ω e sejam l e l^+ semirretas que passam respectivamente por X_0 e $(x, f_\varepsilon(x))$ ambas com ponto final em p_0 . Pelo Lema 10, se $\det(f_1(V), f_2(V)) > 0$ (resp. $\det(f_1(V), f_2(V)) < 0$) para todo V no setor determinado por l e l^+ , temos que $\|q_2^+\| < \|q_1^+\|$ (resp. $\|q_1^+\| < \|q_2^+\|$), portanto, $P(x) \neq x$; e,
- Se $f_\varepsilon(x) < 0$, por um cálculo semelhante temos que $P(x) \neq x$.

A prova do teorema está finalizada. □

Agora, daremos uma aplicação do Teorema 2, em que apresentamos um exemplo de um sistema linear por partes em duas zonas, cujos campos de vetores não estão necessa-

riamente na forma canônica de Jordan, com quatro ciclos limite que cruzam o eixo x a uma distância da origem maior que um e menor que cinco.

Exemplo 2. Considere as matrizes A_1 e A_2 dadas por

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2c - 1 & 2c \\ -c & -1 \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3}c - 1 & +4c \\ -c & -1 \end{pmatrix},$$

em que

$$c = -\frac{161\pi}{14\sqrt{3}\pi - 84 \ln\left(\frac{e^{-7\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)} \approx -0.891891.$$

Facilmente, podemos ver que os campos vetoriais A_1X e A_2X satisfazem as Hipóteses HL. Uma característica especial desses campos de vetores é que, se tomarmos Σ_0 como o semi-eixo negativo das ordenadas e Ω como semi-eixo positivo das abscissas, a variedade $W = \Sigma_0 \cup \{p_0\} \cup \Omega$ é uma fronteira de centros para o sistema $Z_W = (A_1X, A_2X, W)$. Efetivamente, considerando as trajetórias dos campos A_iX que passam por $(0, -1)$ em $t = 0$ dadas por $\gamma_i(t, (0, -1)) = (x_i(t, (0, -1)), y_i(t, (0, -1)))$, com $i = 1, 2$; temos que:

$$\gamma_1(-t, (0, -1)) = (2e^{t+ct}\text{sen}(ct), e^{t+ct}(-\cos(ct) + \text{sen}(ct))); \text{ e,}$$

$$\gamma_2(t, (0, -1)) = \left(-4e^{-t-\sqrt{3}ct}\text{sen}(ct), -e^{-t-\sqrt{3}ct}(-\cos(ct) + \sqrt{3}\text{sen}(ct))\right).$$

As trajetórias $\gamma_1(-t, (0, -1))$ e $\gamma_2(t, (0, -1))$ interceptam o semi-eixo positivo das abscissas para tempos respectivamente, $t_0 = -\frac{7\pi}{4c}$ e $s_0 = -\frac{\pi}{6c}$. Agora, resolvendo a equação $x_1(-t_0, (0, -1)) = x_2(s_0, (0, -1))$ na variável c , obtemos

$$c = -\frac{161\pi}{14\sqrt{3}\pi - 84 \ln\left(\frac{e^{-7\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Portanto, pela linearidade dos sistemas, temos que W é uma fronteira de centros para o sistema Z_W .

Para a construção da variedade perturbada Ω_ε consideramos:

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$$

em que

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon x}{2a^*\pi} \cos(\pi(a^* - 1)) & \text{se } 0 < x \leq a^* \\ \frac{\varepsilon}{2\pi} \cos(\pi(x - 1)) & \text{se } a^* \leq x \leq 5 \\ \frac{\varepsilon}{2\pi} & \text{se } x \geq 5 \end{cases} .$$

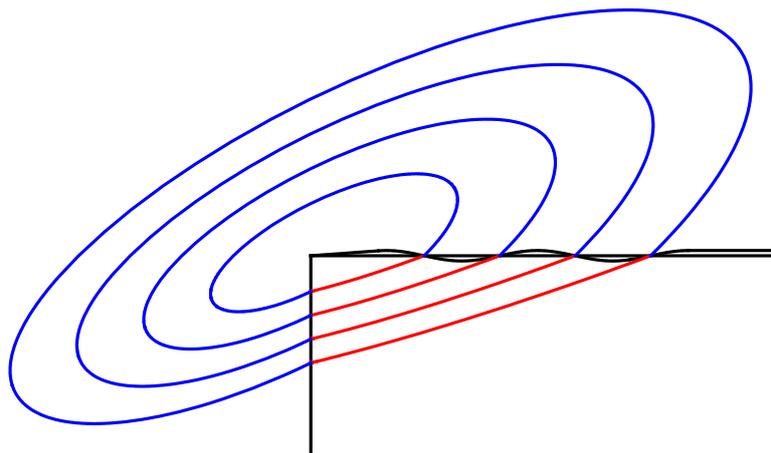


Figura 1.9: Quatro ciclos limite do sistema $(f_1, f_2, W_\varepsilon)$ com $\varepsilon = 0,5$, $a = 1$ e $b = 5$.

Capítulo 2

Bifurcações tipo salto em sistemas diferenciais lineares por partes planares degenerados

2.1 Apresentação do Capítulo

Este capítulo está organizado como segue. Na Seção 2.2, apresentamos alguns resultados técnicos com conceitos e provas de alguns lemas que são cruciais para as provas dos principais resultados, Teoremas 3, 4 e 5. Na Seção 2.3, lidamos com a Bifurcação Bainha de Espada, Teorema 3. Nas Seções 2.4 e 2.5, descrevemos as bifurcações que ocorrem nos cenários de transição nó-foco (Teorema 4) e foco-foco (Teorema 5), respectivamente. Por fim, na Seção 2.6 analisamos o modelo linear por partes de Morris-Lecar, com o intuito de expor as bifurcações deste capítulo em um modelo matemático.

2.2 Resultados Técnicos

Começamos mostrando por fatos elementares sob algumas órbitas do sistema (4)–(6).

Lema 11. *Considere o sistema diferencial linear por partes contínuo (4)–(6), em que $d_L, d_R > 0$, $d_C = 0$, $t_L < 0$ e $t_R > 0$ com $t_L^2 - 4d_L \geq 0$ e $t_R^2 - 4d_R < 0$ e sejam $\lambda_U \leq \lambda_D < 0$ os dois autovalores do campo de vetores esquerdo, isto é, $\lambda_U + \lambda_D = t_L$ e*

$\lambda_U \cdot \lambda_D = d_L$. Para $x \leq -1$ as duas semirretas

$$y = \lambda_U(x + 1) + \frac{\alpha}{\lambda_U} - t_C \quad (2.1)$$

e

$$y = \lambda_D(x + 1) + \frac{\alpha}{\lambda_D} - t_C, \quad (2.2)$$

são as variedades estáveis do nó (real ou virtual), sendo invariante pelo fluxo. Assim, os pontos de intersecções dessas retas com Σ_- são os pontos

$$\left(-1, -t_C + \frac{\alpha}{\lambda_U}\right) \text{ e } \left(-1, -t_C + \frac{\alpha}{\lambda_D}\right).$$

Demonstração. A reta $y = mx + b$ é invariante pelo campo de vetores esquerdo se, e somente se, $\dot{y} = m\dot{x}$, ou seja

$$d_L(x + 1) - \alpha = m[t_L(x + 1) - t_C - mx - b],$$

ou, equivalentemente

$$m^2 - mt_L + d_L = 0, \quad (2.3)$$

$$\alpha - d_L + m(t_L - t_C - b) = 0. \quad (2.4)$$

Vemos que pela equação (2.3), m é o autovalor da matriz correspondente ao campo de vetores esquerdo, e pela equação (2.4) segue que

$$b = \frac{\alpha - d_L}{m} + t_L - t_C.$$

Então, para provar a equação (2.1), temos

$$y = \lambda_U x + \frac{\alpha - d_L}{\lambda_U} + t_L + t_U = \lambda_U x + \frac{\alpha - \lambda_U \lambda_D}{\lambda_U} + \lambda_U + \lambda_D - t_C.$$

Portanto,

$$y = \lambda_U(x + 1) + \frac{\alpha}{\lambda_U} - t_C.$$

A prova da equação (2.2) é análoga e o lema está demonstrado. \square

Lema 12. Considere o sistema linear por partes contínuo (4)–(6) em que $t_C \neq 0$ e $d_C = 0$.

Então, para $|x| \leq 1$ o segmento

$$y = t_C x + \frac{\alpha}{t_C},$$

é invariante pelo fluxo.

Demonstração. Como na prova do Lema 11, mas trabalhando com outro campo de vetores, a reta $y = mx + b$ é invariante pelo campo de vetores central se, e somente se, $\dot{y} = m\dot{x}$, ou seja,

$$-\alpha = m(t_C x - y) = m(t_C x - t_C x - \alpha/t_C)$$

ou equivalentemente,

$$m = t_C.$$

Portanto, o lema está demonstrado. \square

Para simplificar a nossa notação, definimos $\Sigma_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1, y \geq -t_C\}$, $\Sigma_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1, y \leq -t_C\}$, $\Gamma_{T_L}^+$ como a órbita com ponto inicial em T_L seguindo para frente no tempo e $\Gamma_{T_L}^-$ como a órbita partindo do mesmo ponto mas seguindo para trás no tempo, veja Figura 2.1. Claramente, $\Gamma_{T_L}^+ \cap \Gamma_{T_L}^- = T_L$. Iremos usar estas duas trajetórias como referências para futuros resultados. Em particular, podemos enunciar o seguinte lema auxiliar, no qual somente consideramos $\alpha \neq 0$, uma vez que para $\alpha = 0$, ambas as órbitas reduzem para o ponto T_L .

Lema 13. *Considere o sistema linear por partes contínuo (4)–(6). As seguintes afirmações valem.*

- (a) *Para a órbita $\Gamma_{T_L} = \Gamma_{T_L}^+ \cup \Gamma_{T_L}^-$, a abscissa do ponto T_L representa o valor máximo de x quando $\alpha < 0$ e o valor mínimo quando $\alpha > 0$.*
- (b) *Se $\alpha < 0$, então a órbita Γ_{T_L} está totalmente contida em $S_L \cup \Sigma_-$, e seu conjunto ω -limite é o ponto de nó estável. Além do mais, tal nó estável também é o conjunto ω -limite para todas as órbitas partindo de S_L e acima de $\Gamma_{T_L}^-$. No caso contrário, todas as órbitas com ponto inicial em S_L e abaixo $\Gamma_{T_L}^-$ obrigatoriamente toca Σ_- em um ponto $(-1, y)$ com $y < -t_C$ e $\dot{x} > 0$.*
- (c) *Se $\alpha > 0$, então podemos definir para a órbita Γ_{T_L} dois pontos importantes A_1 e A_2 ; A_1 é o primeiro ponto de intersecção de $\Gamma_{T_L}^-$ com Σ_+ indo para trás no tempo, enquanto A_2 representa o primeiro ponto de intersecção de $\Gamma_{T_L}^+$ com Σ_+ indo para frente no tempo. Em particular, os seguintes casos surgem:*

(i) se $t_C = 0$, então a órbita Γ_{T_L} satisfaz para $|x| \leq 1$ a equação

$$2\alpha(x+1) = y^2 \quad (2.5)$$

de modo que $y_{A_1} = 2\sqrt{\alpha}$, e $y_{A_2} = -2\sqrt{\alpha}$;

(ii) se $t_C > 0$, então temos para os pontos A_1 e A_2 as inequações

$$t_C < y_{A_1} < t_C + \frac{\alpha}{t_C} \text{ e } y_{A_2} < 0 < t_C \quad (2.6)$$

são satisfeitas; e,

(iii) se $t_C < 0$, então temos que as inequações

$$t_C < 0 < y_{A_1} \text{ e } t_C + \frac{\alpha}{t_C} < y_{A_2} < t_C$$

são satisfeitas.

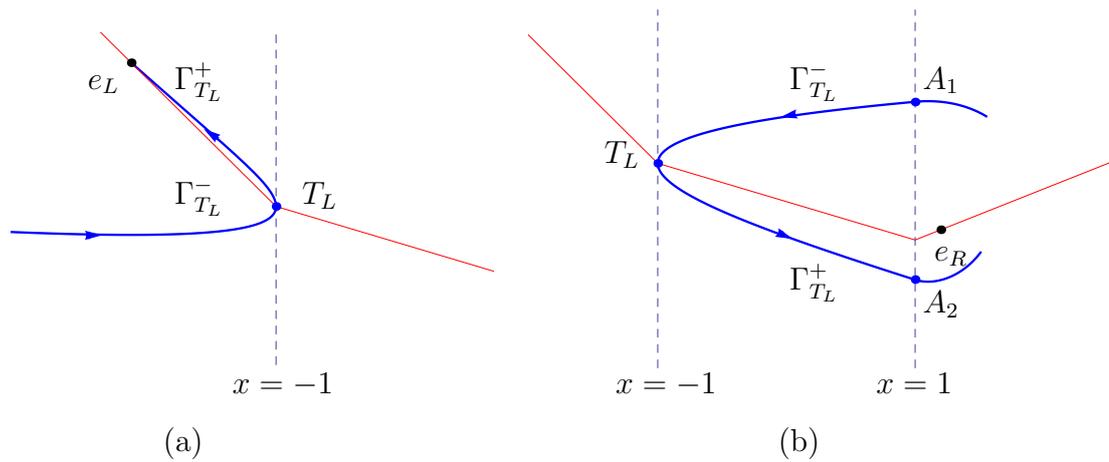


Figura 2.1: Representação geométrica das trajetórias $\Gamma_{T_L}^+$ e $\Gamma_{T_L}^-$, para $\alpha < 0$ no painel (a) e $\alpha > 0$ no painel (b). No painel (b), também representamos os pontos A_1 e A_2 . As curvas em vermelho correspondem ao gráfico de $y = F(x)$.

Demonstração. A afirmação (a) segue facilmente do fato que $\ddot{x} = \alpha$ em T_L . Efetivamente, para $(x, y) \in \Sigma_-$ temos

$$\ddot{x} = t_C \dot{x} - \dot{y} = t_C \dot{x} + \alpha$$

e

$$\ddot{x} = t_L \dot{x} - \dot{y} = t_L \dot{x} + \alpha,$$

dependendo do campo de vetores escolhido para fazer os cálculos. Como estamos calculando as derivadas na reta $x = -1$ com $\dot{x} = 0$, então existe e é contínua a segunda derivada, cuja expressão é dada por $\ddot{x} = \alpha$.

A afirmação (b) é uma consequência da afirmação (a), uma vez que temos um máximo com respeito a x para Γ_{T_L} na abscissa do ponto T_L . Além do mais, para pontos em Σ^+ temos $\dot{x} < 0$, de modo que a curva $\Gamma_{T_L}^- \cup \Sigma^+$ define uma região positivamente invariante ilimitada, na qual o nó estável é o conjunto ω -limite para todos os pontos da região. A última afirmação é direta, uma vez que, para pontos abaixo de $\Gamma_{T_L}^-$, temos que $\dot{x} > 0$.

Para mostrar a afirmação (c), começamos por analisar que agora temos um mínimo com respeito a x para Γ_{T_L} na abscissa do ponto T_L . A existência dos dois pontos A_1 e A_2 vem do fato que em S_C temos $\dot{x} < 0$ para $y > t_C x$ enquanto $\dot{x} > 0$ para $y < t_C x$ e o coeficiente angular dos vetores no campo central tende a ser pequeno quando $|y|$ é suficientemente grande, pois

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha}{t_C x - y}.$$

Para a afirmação (i), quando $t_C = 0$ temos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\alpha}.$$

Então, resolvendo tal equação diferencial com a condição inicial $y(-1) = 0$, obtemos

$$2\alpha(x + 1) = y^2,$$

e então a afirmação (i) segue. Para as outras afirmações, provaremos apenas (ii), já que a prova de (iii) é análoga. Pelo Lema 12, a reta $y = t_C x + \alpha/t_C$ é invariante pelo fluxo, dessa forma, temos que a trajetória $\Gamma_{T_L}^-$ não intersecta a reta $y = t_C x + \alpha/t_C$ (veja Figura 2.2), implicando

$$y_{A_1} < t_C + \frac{\alpha}{t_C}.$$

Por outro lado, como vimos antes, para $|x| < 1$, se $y > t_C x$ (respectivamente $y < t_C x$), então $\dot{x} < 0$ (respectivamente $\dot{x} > 0$). Assim, para $|x| < 1$ a trajetória $\Gamma_{T_L}^-$ não intersecta

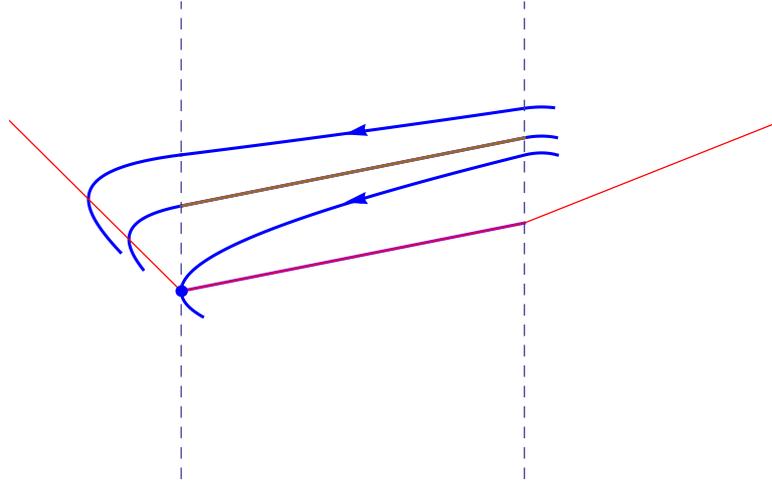


Figura 2.2: Representação geométrica em que a trajetória $\Gamma_{T_L}^-$ não intersecta o segmento invariante $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = t_C x + \alpha/t_C\}$ e o segmento $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = t_C x\}$. Em marrom, segmento invariante dado pelo Lema 12 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = t_C x + \alpha/t_C\}$; em roxo, segmento $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = t_C x\}$; e, em vermelho o gráfico da função $y = F(x)$.

a reta $y = t_C x$ (veja Figura 2.2), implicando em $t_C < y_{A_1}$. Portanto, as inequações (2.6) são válidas, já que a prova de $y_{A_2} < 0 < t_C$ é trivial. A prova do lema está feita. \square

Antes de prosseguir, recordamos explicitamente o Teorema 1 de [36] que descreve uma análise sobre a existência e unicidade de ciclos limite, sendo um importante resultado para sistemas lineares por partes com apenas duas zonas, que será necessário mais tarde. Tal resultado será útil para nossos sistemas sobre as afirmações em que a dinâmica estudada exige apenas levar em consideração duas zonas adjacentes. Em particular, a atenção será dada às zonas central e direita. Veja [36] para a prova.

Teorema 8. *Considere o sistema diferencial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) - y, \\ \dot{y} &= g(x) - a, \end{aligned} \tag{2.7}$$

em que

$$F(x) = \begin{cases} \tilde{t}_L x & \text{se } x < 0, \\ \tilde{t}_R x & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} \tilde{d}_L x & \text{se } x < 0, \\ \tilde{d}_R x & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

com apenas um ponto de equilíbrio localizado na região $x > 0$, isto é, $a\tilde{d}_R > 0$, e $a\tilde{d}_L \geq 0$. Assuma também que $\tilde{t}_R > 0$ e $\tilde{t}_L < 0$. Então, as seguintes afirmações valem:

- (a) Uma condição necessária para a existência de órbitas periódicas é que o ponto de equilíbrio seja um foco, isto é, $(\tilde{t}_R)^2 - 4\tilde{d}_R < 0$, no qual implica $\tilde{d}_R > 0$, de modo que $a > 0$ e $\tilde{d}_L \geq 0$; e,
- (b) Assumindo um foco na zona direita, isto é, $(\tilde{t}_R)^2 - 4\tilde{d}_R < 0$ e $a > 0$, o sistema sempre tem uma órbita periódica se $\tilde{d}_L = 0$. Quando $\tilde{d}_L > 0$ o sistema tem uma órbita periódica se, e somente se,

$$\frac{\tilde{t}_R}{\sqrt{\tilde{d}_R}} + \frac{\tilde{t}_L}{\sqrt{\tilde{d}_L}} < 0. \quad (2.10)$$

Em tal caso, a órbita periódica circula o foco e é um ciclo limite estável que é único.

Observação 5. Este resultado será aplicado posteriormente para obter conclusões sobre a dinâmica dos nossos sistemas que envolvem apenas as zonas central e direita; para isso, podemos assumir a translação $(x - 1, y - t_C) \rightarrow (x, y)$ e identificamos $\tilde{t}_L = t_C$, $\tilde{d}_L = d_C = 0$, $\tilde{t}_R = t_R$, $\tilde{d}_R = d_R$ e $a = \alpha$.

Observação 6. Sobre as hipóteses do Teorema 8, a condição (2.10) sempre se cumpre quando temos a configuração (nó estável)-(foco instável), uma vez que temos

$$\frac{\tilde{t}_R}{\sqrt{\tilde{d}_R}} \leq -2, \quad 0 < \frac{\tilde{t}_L}{\sqrt{\tilde{d}_L}} < 2$$

para quaisquer foco instável e nó instável, respectivamente. Na configuração (foco estável)-(foco instável), a condição (2.10) é equivalente a

$$\tilde{\gamma}_R + \tilde{\gamma}_L = \frac{\tilde{t}_R}{\sqrt{4\tilde{d}_R - (\tilde{t}_R)^2}} + \frac{\tilde{t}_L}{\sqrt{4\tilde{d}_L - (\tilde{t}_L)^2}} < 0.$$

Para mostrar esta equivalência, é suficiente considerar a função auxiliar $h(\xi) = \xi / \sqrt{4 - \xi^2}$, a qual é ímpar e monótona crescente no conjunto $\{\xi \in \mathbb{R}; -2 < \xi < 2\}$; veja [36] para detalhes.

2.3 Bifurcação Bainha de Espada

Teorema (Bifurcação Bainha de Espada). *Considere o sistema diferencial linear por partes contínuo (4)–(6), em que $d_L, d_R > 0$, $t_C = d_C = 0$, $t_L < 0$, $t_R > 0$. Se ambas dinâmicas laterais são do tipo foco satisfazendo a condição $\gamma_L + \gamma_R < 0$, ou temos uma dinâmica de nó estável na esquerda e uma dinâmica de foco instável na direita, então as seguintes afirmações valem:*

- (a) *se $\alpha = 0$, então o segmento de equilíbrio E_C é um atrator global do sistema, embora qualquer ponto em E_C seja um ponto de equilíbrio instável; e,*
- (b) *Se $\alpha > 0$ e pequeno, um ciclo limite estável envolvendo as três zonas lineares bifurca do segmento E_C , e circula o ponto de equilíbrio da zona da direita (foco instável) previsto pelo Lema 1 (c). Tal ciclo limite encolhe em altura aproximando do segmento E_C e seu período tende para o infinito, quando $\alpha \rightarrow 0^+$.*

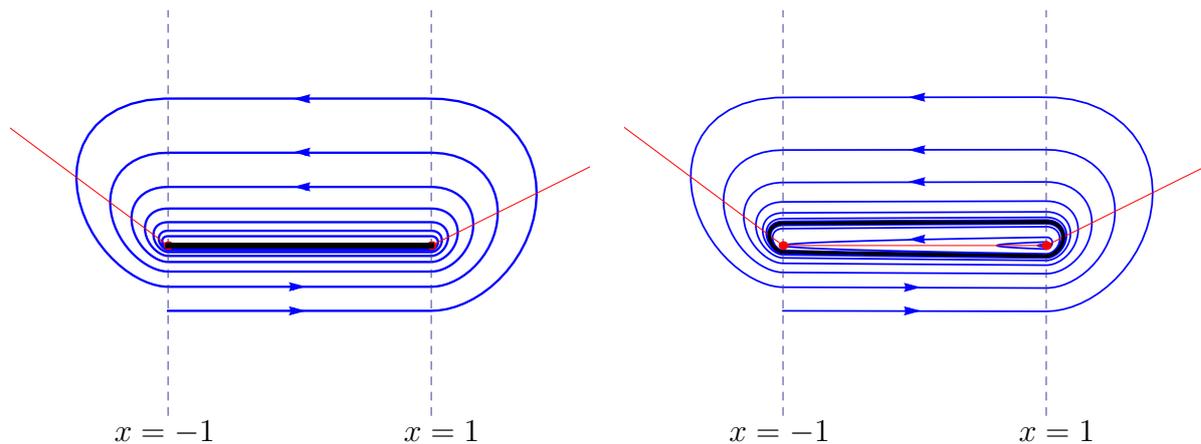


Figura 2.3: Bifurcação *bainha de espada*. Aqui $t_L = -0.75$, $t_C = d_C = 0$, $t_R = 0.5$ e $d_L = d_R = 1$. Na figura da esquerda $\alpha = 0$ e na figura da direita $\alpha = 0.001$. Note o formato do ciclo limite que bifurca do segmento de equilíbrio semelhante a uma bainha de espada.

A prova deste teorema decorre de resultados apresentados posteriormente, após ter estudado separadamente os dois particulares cenários envolvidos. A prova da afirmação

(a), segue das Proposições 1(a) e 3(b) e a prova da afirmação (b) segue dos Teoremas 4(b) e 5(b). Note que temos apenas a versão super-crítica da bifurcação, tal versão será o único caso considerado.

2.4 Transição de um nó estável para um foco instável

Iniciamos analisando o plano de fase crítico, isto é, o plano de fase para $\alpha = 0$, levando em conta os possíveis diferentes sinais do traço central.

Proposição 1. *Considere o sistema diferencial linear por partes contínuo (4)–(6), em que $d_L, d_R > 0$, $\alpha = d_C = 0$, $t_L < 0$ com $t_L^2 - 4d_L \geq 0$ (dinâmica esquerda do tipo nó) e $t_R > 0$ com $t_R^2 - 4d_R < 0$. As seguintes afirmações valem.*

- (a) *Se $t_C = 0$, então o segmento E_C é um atrator global, sendo todos os pontos do segmento, pontos de equilíbrio instáveis; entretanto, o ponto T_L é o conjunto ω -limite de todas as órbitas partindo dos pontos que não estão no segmento E_C .*
- (b) *Se $t_C > 0$, então todos os pontos do segmento E_C são pontos de equilíbrios instáveis e não existem órbitas periódicas. Entretanto, existem algumas órbitas específicas como segue:*
 - *uma conexão heteroclínica do ponto T_R para o ponto T_L ;*
 - *uma órbita homoclínica H_{T_L} no ponto T_L que usa as três zonas lineares, passando pelos pontos $(\pm 1, -t_C)$ e $(\pm 1, t_C(1 + 2\exp(\pi\gamma_R)))$, e contendo todos os pontos do segmento E_C com $x > -1$ em seu interior; e,*
 - *duas conexões heteroclínicas do ponto T_L em cada ponto do segmento E_C com $-1 < x < 1$.*

Além do mais, o ponto T_L é o ω -limite para todas as órbitas que não partem do segmento E_C .

- (c) *Se $t_C < 0$, então todos os pontos do segmento E_C são pontos de equilíbrio estáveis, mas não assintoticamente estáveis. O segmento E_C é um atrator global para o sistema e então, não temos órbitas periódicas.*

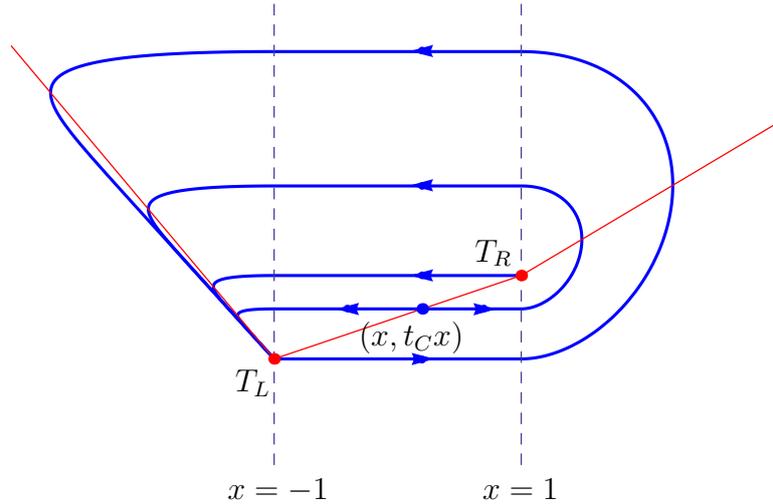


Figura 2.4: O plano de fase sob as hipóteses da Proposição 1 (b), quando $\alpha = 0$, $t_L = 1.2$, $t_C = 0.34$, $t_R = 0.6$, $d_L = 0.1$, $d_C = 0$ e $d_R = 1$.

Demonstração. Para todas as afirmações, a estabilidade dos pontos pertencentes ao segmento E_C é determinada pelo sinal de t_C , exceto quando $t_C = 0$. Neste último caso, como $\alpha = 0$, da equação (6), sabemos que a dinâmica do campo de vetores central é dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

Considerando todas as órbitas para valores não nulos de y , temos que as órbitas são retas horizontais e que os pontos do segmento E_C são instáveis.

Do Lema 11, o campo de vetores esquerdo tem pelo menos uma semirreta invariante com ponto final T_L , a existência de órbitas periódicas é excluída para todas as situações. Efetivamente, todas as órbitas periódicas devem circular pelo menos um ponto de equilíbrio, mas no nosso caso ele deve circular todo o segmento E_C , no qual isto não é possível; caso contrário, a órbita periódica deve interceptar tal semirreta invariante, contradizendo a unicidade das órbitas. Portanto, não existem órbitas periódicas.

Pode-se ver claramente que, exceto no segmento E_C , as órbitas na zona central são segmentos horizontais indo da esquerda para a direita para $y < t_C x$ e da direita para esquerda para $y > t_C x$. Note também que o ponto T_L é um nó, como pode ser visto da zona esquerda, e similarmente, o ponto T_R é um foco como pode ser visto da zona direita.

Assim, definimos a semiaplicação de retorno esquerda $P_L(y)$ para todos os pontos $(-1, y)$ em Σ_- com $y \geq -t_C$, de modo que a órbita de $(-1, y)$ vai novamente para Σ_- no ponto $(-1, P_L(y))$; trivialmente, vemos que para $\alpha = 0$, temos

$$P_L(y) = -t_C. \quad (2.11)$$

Sobre Σ^+ podemos definir similarmente uma semiaplicação de retorno direita P_R para todos os pontos $(1, y)$ com $y \leq t_C$. Restringimos nossa atenção para o semiplano $x \geq 1$. Temos um foco em $T_L = (1, t_C)$ de modo que podemos calcular as soluções escrevendo $t_R = 2\sigma_R$ e $d_R = \sigma_R^2 + \omega_R^2$ e usando a matriz exponencial

$$\frac{e^{\sigma_R t}}{\omega_R} \begin{pmatrix} \omega_R \cos \omega_R t + \sigma_R \operatorname{sen} \omega_R t & -\omega_R \operatorname{sen} \omega_R t \\ (\sigma_R^2 + \omega_R^2) \operatorname{sen} \omega_R t & \omega_R \cos \omega_R t - \sigma_R \operatorname{sen} \omega_R t \end{pmatrix},$$

a qual, para $t = \pi/\omega_R$ é reduzida a

$$e^{\pi\gamma_R} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, para o tempo

$$t = \pi/\omega_R$$

as soluções satisfazem

$$\begin{pmatrix} x(\pi/\omega_R) - 1 \\ y(\pi/\omega_R) - t_C \end{pmatrix} = -e^{\pi\gamma_R} \begin{pmatrix} x(0) - 1 \\ y(0) - t_C \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Portanto, tomando $(x(0), y(0)) = (1, y)$ e definindo $P_R(y) = y(\pi/\omega_R)$, temos

$$P_R(y) = t_C + (t_C - y)e^{\pi\gamma_R}, \quad (2.13)$$

veja [20] para mais detalhes.

Para mostrar a prova da afirmação (a), resta-nos ver que como $t_C = 0$ o ponto T_L é o ω -limite de todas as órbitas dos pontos que não estão no segmento E_C . Isto é evidente se considerarmos que tais órbitas, depois de dar meia volta na zona direita, se

necessário, finalmente alcança Σ_- no ponto $(-1, y)$ com $y > 0$. É suficiente então, aplicar a semiaplicação de retorno P_L , dada por (2.11).

Para terminar a prova da afirmação (b), devemos prestar atenção na existência das específicas e notáveis órbitas citadas no respectivo item, veja Figura 2.4. Uma vez que a última afirmação sobre o ponto T_L segue de um raciocínio similar ao feito na prova do item (a). No que segue, tome uma órbita com ponto inicial (x, t_C) com $|x| < 1$. Mais uma vez usando o fato que em S_C as órbitas são segmentos horizontais, e tal órbita chega, indo para frente no tempo, no ponto $(-1, t_C)$ e posteriormente aproxima-se do ponto T_L . A mesma órbita, no tempo para trás, aproxima-se do ponto T_R , e então a existência das conexões heteroclínicas está demonstrada.

Tome agora como ponto inicial $(x, -t_C)$ com $|x| < 1$. Tal órbita aproxima para tempo passado do ponto T_L ; indo pra frente no tempo, ela chega no ponto $(1, -t_C)$ em Σ_+ , e então, após usar a aplicação P_R dada por (2.13), a órbita irá para Σ_+ no ponto $(1, y_H)$ com

$$y_H = t_C + 2t_C e^{\pi\gamma_R} = t_C(1 + 2e^{\pi\gamma_R}).$$

Então, a órbita irá interceptar Σ_- em $(-1, y_H)$, para finalmente aproximar do ponto T_L . Assim, a existência da conexão homoclínica está mostrada.

Consideramos agora como ponto inicial (ξ, η) na qual, uma vez fixado $|x| < 1$, consideramos $x < \xi < 1$ e $\eta = t_C x$. Assim, o ponto (ξ, η) está localizado no conjunto formado pelo triângulo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \text{ e } t_C < y < t_C x\}$. Como antes, sua órbita, no tempo para trás, aproxima do ponto (x, η) no segmento E_C , mas indo para frente no tempo chegando no ponto $(1, \eta)$ em Σ_+ . Em seguida, após meia volta em torno do foco na fronteira, ela vai novamente para Σ_+ e finalmente aproximamos, como antes, do ponto T_L . Por um argumento análogo, tomando agora $-1 < \xi < x$ e sem intersecção com Σ_+ conduz para outra órbita heteroclínica de $(x, t_C x)$ para o ponto T_L . A afirmação (b) está feita.

Para mostrar a afirmação (c), podemos primeiramente, ver que a estabilidade assintótica não pode ocorrer uma vez que os pontos de equilíbrio não são isolados de modo que, próximo de qualquer ponto de equilíbrio, existem órbitas que não tendem para ele quando o tempo tende para infinito.

Para mostrar que o segmento E_C é um atrator global, podemos começar tomando como

ponto inicial (x, y) com $x < -1$ e $y \geq \lambda_D(x+1) - t_C$ (acima ou sobre a semirreta invariante inferior do nó. Claramente o ponto T_L é o conjunto ω -limite para todas estas órbitas. Mantendo $x < -1$ e tomando agora pontos abaixo da tal semirreta invariante inferior, concluimos facilmente que existem três possibilidades: a órbita aproxima diretamente de um ponto no segmento E_C ; a órbita aproxima do segmento E_C depois de dar meia volta em torno do foco na fronteira T_R ; ou finalmente, a órbita chega em um ponto sobre Σ_- com $y > -t_C$. Neste último caso, vemos que o ponto T_L é mais uma vez o conjunto ω -limite e a prova da afirmação está feita. A proposição está demonstrada. \square

Uma vez que, pela Proposição 1, sabemos o comportamento para $\alpha = 0$, avançamos ao próximo resultado que é a transição do valor negativo para o positivo do parâmetro α , sempre conduzindo para um ciclo limite. Além do mais, como será mostrado no Teorema 4, o nascimento de tais ciclos limite pode ter diferentes comportamentos qualitativos, apresentando para $t_C \geq 0$ caráter explosivo.

Proposição 2. *Considere o sistema diferencial linear por partes contínuo (4)–(6), em que $d_L, d_R > 0$, $d_C = 0$, $t_L < 0$ e $t_R > 0$ com $t_L^2 - 4d_L \geq 0$ e $t_R^2 - 4d_R < 0$. As seguintes afirmações valem:*

- (a) *se $\alpha < 0$, então o ponto de equilíbrio e_L é um nó estável, sendo o atrator global do sistema; e,*
- (b) *se $\alpha > 0$, então o ponto de equilíbrio e_R é um foco instável circulado por pelo menos um ciclo limite estável.*

Demonstração. Sob as hipóteses da afirmação (a), uma vez que $\alpha < 0$, pelo Lema 1 existe somente um ponto de equilíbrio que é um nó localizado em S_L . Conseqüentemente, podemos aplicar a afirmação (b) do Lema 13, de modo que necessitamos somente considerar o ponto inicial em $S_C \cup \Sigma_+ \cup S_R$. Para tais pontos em $S_C \cup \Sigma_+ \cup S_R$ temos $\dot{y} > 0$, e após dar meia volta em torno do foco virtual, se necessário, devemos chegar a um ponto em Σ_-^+ ; então, aplicando novamente a afirmação (b) do Lema 13, vemos que o conjunto ω -limite é mais uma vez o nó. A afirmação (a) está demonstrada.

Para mostrar a afirmação (b), iniciamos considerando a órbita $\Gamma_{T_L}^+$, a qual é tangente em Σ_- e desce indo para a direita até bater em Σ_+ no ponto A_2 com $y_{A_2} < t_C$, veja o

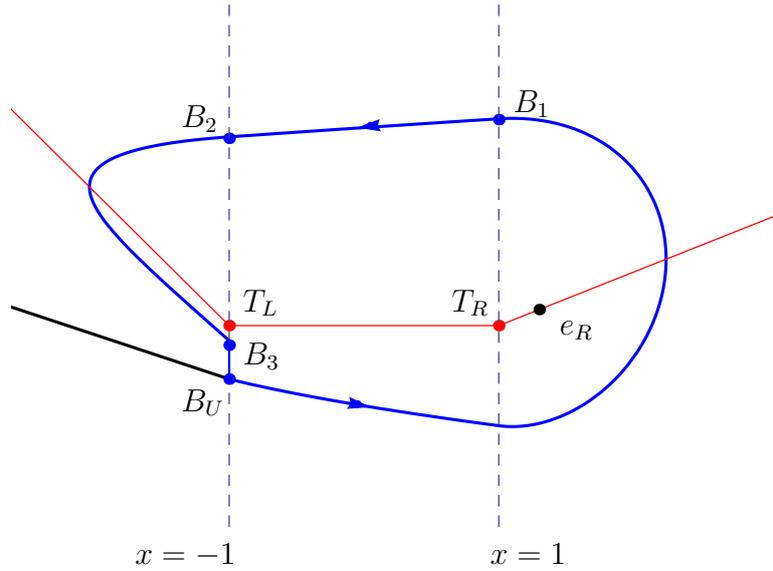


Figura 2.6: O conjunto compacto positivamente invariante K_B^2 para $\alpha > 0$. K_B^2 é composto pelo segmento B_3B_U e pela trajetória B_UB_3 .

B_1 em S_C até alcançar o ponto B_2 em Σ^+ entrando em S_L e batendo novamente em Σ_- , mas agora no ponto $B_3 \in \Sigma^-$ com $y_{B_3} > y_{B_U}$. Agora o segmento B_3B_U e a órbita B_UB_3 formam uma curva fechada, cujo interior define um conjunto compacto positivamente invariante K_B^2 , veja Figura 2.6, e aplicando novamente o Teorema de Poincaré Bendixson, concluímos a existência de pelo menos um ciclo limite. Sendo assim, agora não podemos assumir a unicidade e a proposição está completamente demonstrada. \square

Quando $t_C > 0$, o ciclo limite previsto pela afirmação (b) da Proposição 2 tende, quando $\alpha \rightarrow 0^+$, para a órbita homoclínica H_{T_L} que existe para $\alpha = 0$, veja Figura 2.8. Portanto, neste caso, a transição de valores negativo para positivo do parâmetro α dá origem ao aparecimento súbito de um grande ciclo limite; este fenômeno tem sido chamado de ciclo limite super explosivo em [13]. Um fenômeno semelhante aparece quando $t_C = 0$, mas neste caso o ciclo limite bifurca do segmento de equilíbrio E_C em uma bifurcação especial definida neste trabalho, a bifurcação bainha de espada. Finalmente, quando $t_C < 0$, temos outra bifurcação específica, bifurcação de equilíbrio na fronteira em $\alpha = 0$, o qual foi analisado em [36].

Afirmamos na sequência nosso principal resultado para estes três casos.

Teorema 9. *Considere o sistema diferencial linear por partes contínuo (4)–(6), em que $d_L, d_R > 0$, $d_C = 0$, $t_L < 0$ e $t_R > 0$ com $t_L^2 - 4d_L \geq 0$ e $t_R^2 - 4d_R < 0$. As seguintes afirmações valem.*

- (a) *Se $t_C < 0$, então um pequeno ciclo limite estável bifurca em $\alpha = 0$ em uma bifurcação tipo equilíbrio na fronteira envolvendo a zona central e a zona esquerda. Assim, para $\alpha > 0$ existe um ciclo limite que cresce linearmente com o valor do parâmetro α , enquanto o ciclo limite não entra na zona esquerda, isto é, enquanto se encontra em $S_C \cup \Sigma_+ \cup S_R$. Existe um certo valor $\alpha_T > 0$ tal que o ciclo limite estável tangencia Σ_- em T_L para $\alpha = \alpha_T$. Para valores de α ligeiramente maiores que α_T , o ciclo limite usa as três zonas lineares.*
- (b) *Se $t_C = 0$, então o ciclo limite estável usa as três zonas lineares e bifurca do segmento de equilíbrio E_C em uma bifurcação bainha de espada. Assim, para $\alpha > 0$ existe um ciclo limite que aproxima do segmento E_C , com o período tendendo para o infinito, quando $\alpha \rightarrow 0^+$.*
- (c) *Se $t_C > 0$, então para a órbita homoclínica H_{T_L} que existe para $\alpha = 0$ como previsto na Proposição 1 (b), um ciclo limite estável bifurca para $\alpha > 0$, isto é, o ciclo limite aproxima de tal órbita homoclínica, quando $\alpha \rightarrow 0^+$.*

Demonstração. Para mostrar a afirmação (a), primeiro note que $t_C < 0$ e $t_R > 0$, de modo que, quando $\alpha > 0$ e pequeno, o único ponto de equilíbrio previsto na afirmação (b) do Lema 1 está próximo de Σ_+ , mas em S_R . Aqui, após efetuar a translação $x \rightarrow x - 1$ e $y \rightarrow y - t_C$, e negligenciando por um momento a zona esquerda, teremos um sistema linear por partes com apenas duas zonas. Então podemos aplicar diretamente a afirmação (b) do Teorema 8, tomando t_L como nosso t_C e considerando o caso com $d_L = 0$, que desempenha o papel do nosso d_C .

Para o sistema em duas zonas, é fácil ver que reescalando $x \rightarrow \alpha X$ e $y \rightarrow \alpha Y$ depois

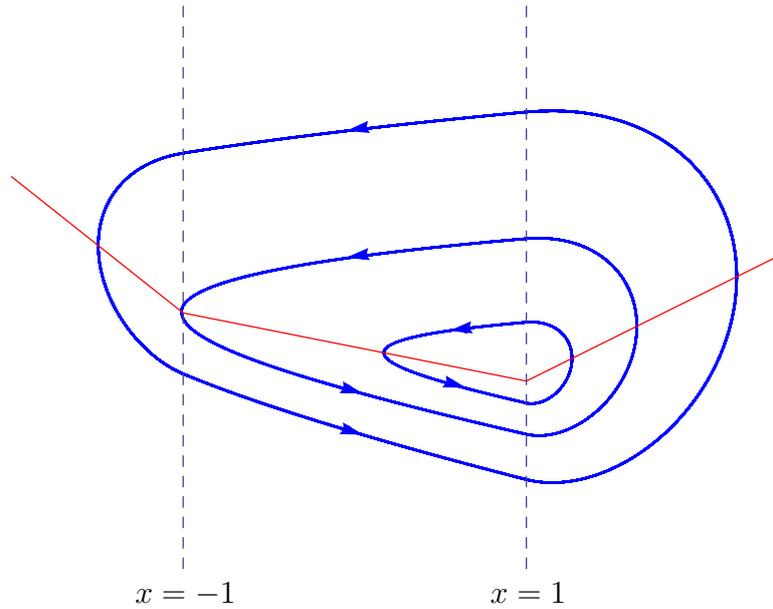


Figura 2.7: O ciclo limite para a afirmação (a) no Teorema 4 e 5 tomando $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_T, \alpha_2\}$, em que $0 < \alpha_1 < \alpha_T < \alpha_2$. Note que os dois ciclos limite menores são homotéticos.

de suprimir o fator comum α , temos o novo sistema

$$\begin{aligned}\dot{X} &= F(X) - Y, \\ \dot{Y} &= g(X) - 1,\end{aligned}\tag{2.14}$$

em que

$$F(X) = \begin{cases} t_C X, & \text{se } X \leq 0, \\ t_R X, & \text{se } X \geq 0, \end{cases}\tag{2.15}$$

e

$$g(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } X \leq 0, \\ d_R X, & \text{se } X \geq 0. \end{cases}\tag{2.16}$$

Concluimos que, por um reescalonamento, nosso ciclo limite tem um tamanho que é α vezes o tamanho do ciclo limite que existe para $\alpha = 1$. Este argumento mostra que o tamanho do ciclo limite cresce linearmente com $\alpha > 0$ e portanto ele nasce com tamanho pequeno e está contido apenas em $S_C \cup S_R$.

Se denotarmos como α_T o valor de α correspondendo o ciclo limite no caso em que o ciclo limite é tangente a Σ_- no ponto T_L , não é difícil ver que para $0 < \alpha - \alpha_T \ll 1$ o ciclo

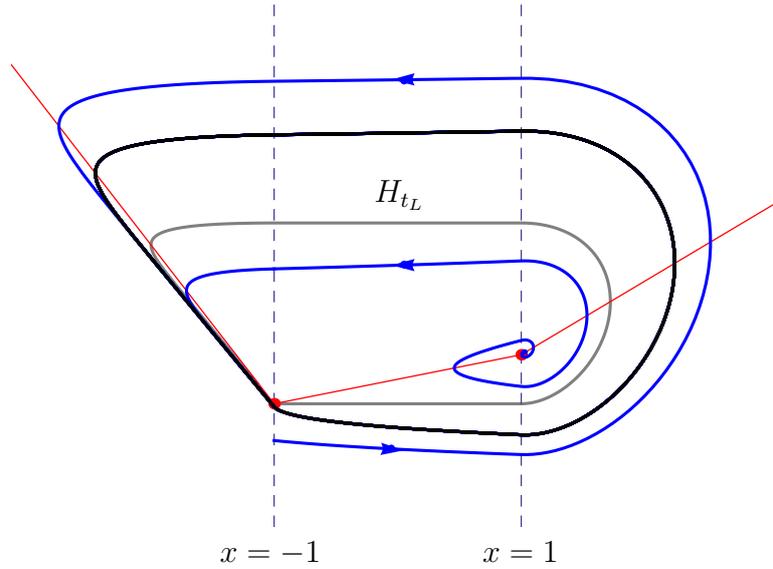


Figura 2.8: Ciclo limite bifurcando da órbita homoclínica H_{T_L} no caso do Teorema 4 (c). Aqui, $t_L = -1$, $t_C = 0.2$, $d_C = 0$ e $d_R = 1$. A órbita homoclínica H_{t_L} corresponde a $\alpha = 0$, enquanto o ciclo limite mostrado é para $\alpha = 0.03$.

limite persiste, agora também usando a zona esquerda S_L . Efetivamente, para $\alpha > \alpha_T$, é suficiente considerar a órbita partindo do ponto T_L que está contida em $S_C \cup S_R$ voltando para Σ_- no ponto A , com $y_A > -t_C$. De fato, tal órbita aproxima do ciclo limite que deve existir se a zona central for prolongada para a esquerda. Esta órbita determina com o segmento $T_L A$ um circuito que define um conjunto compacto negativamente invariante K_S^1 , veja Figura 2.9. Assim, usando o conjunto positivamente invariante K_B^2 definido na prova da afirmação (b) da Proposição 2, veja Figuras 2.6 e 2.9, existe um ciclo limite usando as três zonas lineares. A afirmação (a) está feita.

Para mostrar a afirmação (b), recordamos do Lema 13 (c) que a órbita $\Gamma_{T_L}^-$ e $\Gamma_{T_L}^+$ intersecta Σ_+ nos pontos A_1 e A_2 , respectivamente. Afirmamos que a órbita do ponto A_2 entra em S_R e, depois de dar meia volta em torno do foco estável, vem novamente para Σ_+ em um ponto A_3 com $y_{A_3} > y_{A_1}$, veja Figura 2.10. Isto nos permite definir um conjunto compacto negativamente invariante K_S^2 . Efetivamente, se assumirmos $y_{A_3} \leq y_{A_1}$, então o segmento $A_3 A_1$, juntamente com as órbitas $\Gamma_{T_L}^-$, $\Gamma_{T_L}^+$ e $A_2 A_3$ deve definir um conjunto compacto positivamente invariante contendo o foco instável em seu interior.

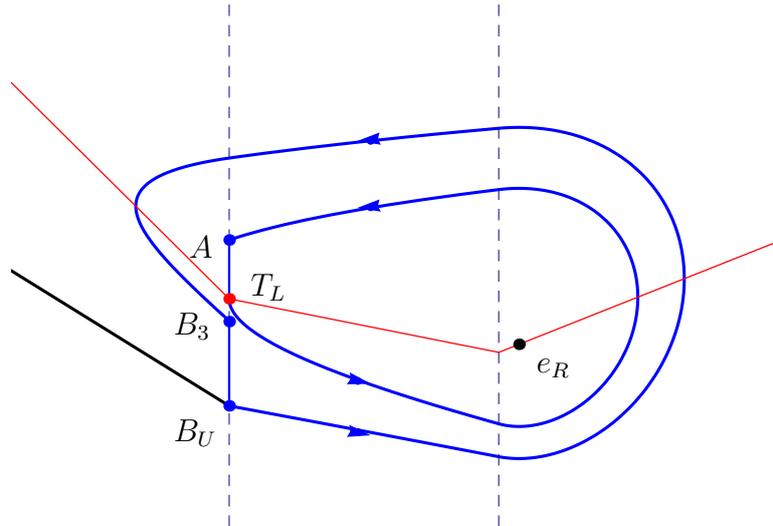


Figura 2.9: Conjuntos compactos positivamente invariante K_B^2 e negativamente invariante K_S^1 . K_B^2 é composto pelo segmento B_3B_U e pela trajetória B_UB_3 e K_S^1 é composto pelo segmento AT_L e pela trajetória T_LA . Note que o conjunto K_S^1 está totalmente no interior do conjunto K_B^2 .

Consequentemente, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson podemos concluir a existência de um ciclo limite estável dentro de tal conjunto compacto. Mas isto é impossível pelo critério de Dulac, pois a divergência é positiva em S_R e nula em S_C . A afirmação está mostrada, e como uma consequência, o mesmo circuito fechado usado K_S^2 é um conjunto compacto negativamente invariante.

Agora, tomando o ponto B_U como ponto inicial, podemos construir exatamente como na prova da afirmação (b) da Proposição 2 um grande conjunto compacto positivamente invariante K_B^1 contendo o conjunto K_S^2 no seu interior. Assim, o ciclo limite estável previsto na Proposição 2 está localizado entre a fronteira de dois conjuntos compactos K_S^2 e K_B^1 e então ele usa as três zonas lineares após a bifurcação bainha de espada. Finalmente, não é difícil ver que para ambos conjuntos compactos, seus limites quando $\alpha \rightarrow 0^+$ é o segmento E_C . Além disso, o período do ciclo limite é limitado inferiormente por dois períodos de tempo necessários para passar de Σ_- para Σ_+ e vice versa; uma vez que $\dot{y} = -\alpha$ um simples cálculo mostra que o tempo necessário para uma única transição

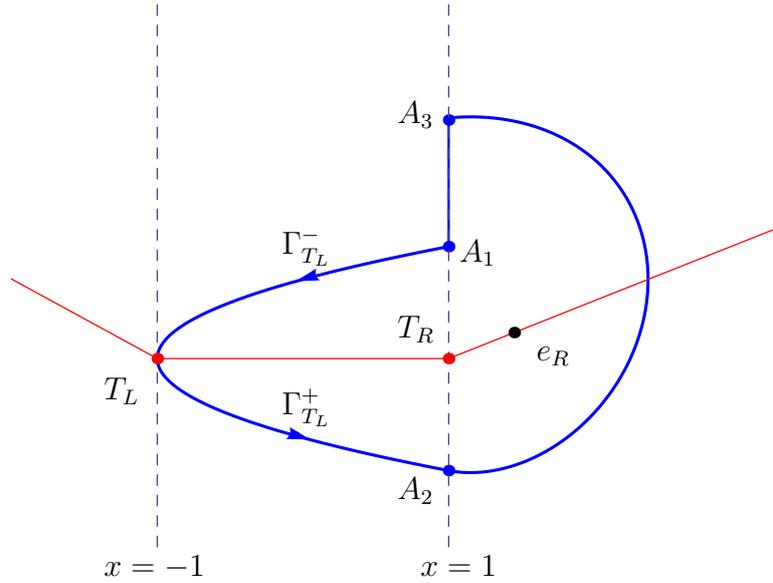


Figura 2.10: O pequeno conjunto compacto negativamente invariante K_S^2 . K_S^2 é composto pelo segmento A_3A_1 e pela trajetória A_1A_3 .

é igual a $2/\sqrt{\alpha}$ e então o período tende para o infinito quando $\alpha \rightarrow 0^+$.

A afirmação (c) segue de um argumento similar. Usamos mais uma vez o ponto B_U para construir como antes o grande conjunto compacto positivamente invariante K_B^2 . Similarmente, podemos construir um pequeno conjunto compacto negativamente invariante K_S^2 . Sob nossas hipóteses, agora estes conjuntos não tem como limite um conjunto comum quando $\alpha \rightarrow 0^+$. Sabemos que existe um ciclo limite entre a fronteira dos dois conjuntos K_B^2 e K_S^2 . Quando $\alpha \rightarrow 0^+$, a fronteira de K_B^2 tende para a órbita homoclínica H_{T_L} da Proposição 1. Entretanto, a fronteira de K_S^2 comporta-se de uma forma diferente, uma vez que na zona central, a órbita $\Gamma_{T_L}^-$ tende para o segmento E_C . Isto pode ser rigorosamente mostrado por considerar o segmento do Lema 12 que é um limite superior para a órbita $\Gamma_{T_L}^-$. De qualquer maneira, como o ciclo limite aproxima da órbita homoclínica H_{T_L} na parte inferior direita, devido a unicidade da solução do sistema, ele também irá aproximar da órbita homoclínica H_{T_L} na parte superior esquerda. O teorema está provado. \square

Embora não esteja explicitamente provado, conjecturamos que em todas as situações do Teorema 9, o sistema (4)–(6) tem somente um ciclo limite que é estável.

2.5 Transição de um foco estável para um foco instável

Aqui, consideramos que em ambas zonas externas temos dinâmica do tipo foco e podem surgir vários casos, dependendo das características dos focos. Restringimos nossa atenção para os casos em que a contração do foco esquerdo é maior que a expansão no foco direito. Isto implica que não existem orbitas escapando para o infinito e então todas as órbitas são limitadas para tempo positivo, o que é as vezes referido como comportamento dissipativo. De [36], isto pode ser sempre garantido por $\gamma_L + \gamma_R < 0$.

Como na Seção 2.4, começamos por analisar o plano de fase crítico, que é o plano de fase para $\alpha = 0$, sob a condição de dissipatividade, isto é, $\gamma_L + \gamma_R < 0$.

Proposição 3. *Considere o sistema diferencial linear por partes contínuo (4)–(6), em que $d_L, d_R > 0$, $\alpha = d_C = 0$, $t_L < 0$ com $t_L^2 - 4d_L < 0$ (dinâmica esquerda tipo foco) e $t_R > 0$ com $t_R^2 - 4d_R < 0$ e $\gamma_L + \gamma_R < 0$. As seguintes afirmações valem.*

- (a) *Se $t_C = 0$, então o segmento E_C é o atrator global; entretanto, cada ponto do segmento é instável, uma vez que todas as órbitas que iniciam em pontos que não estão no segmento E_C são curvas espiralando ao redor do segmento E_C e aproximando dele.*
- (b) *Se $t_C > 0$, então existe pelo menos um ciclo limite hiperbólico estável Γ_S circulando o segmento de equilíbrios E_C e seus pontos de intersecção com Σ_+ e Σ_- são $(\pm 1, y_0)$ e $(\pm 1, y_1)$, nos quais,*

$$y_0 = t_C \frac{1 + 2e^{\pi\gamma_R} + e^{\pi(\gamma_L + \gamma_R)}}{1 - e^{\pi(\gamma_L + \gamma_R)}} > t_C > 0,$$

e

$$y_1 = -t_C \frac{1 + 2e^{\pi\gamma_L} + e^{\pi(\gamma_L + \gamma_R)}}{1 - e^{\pi(\gamma_L + \gamma_R)}} < -t_C < 0.$$

- (c) *Se $t_C < 0$, então o segmento E_C , que é constituído por pontos de equilíbrios estáveis, mas não assintoticamente estáveis, é o atrator global e então não existem órbitas periódicas. Todas as órbitas que iniciam nos pontos que não estão no seguimento E_C tem como conjunto ω -limite um ponto no segmento.*

Demonstração. Seguimos um argumento paralelo da prova da Proposição 1 tomando em conta que agora o ponto T_L é um foco. Assim, temos para $y \leq t_C$ a semiaplicação de Poincaré direita

$$P_R(y) = t_C + (t_C - y)e^{\pi\gamma_R},$$

como antes, veja a equação (2.11). Podemos definir para os pontos $(-1, y)$ sobre Σ_- com $y > -t_C$ a correspondente semiaplicação de Poincaré esquerda

$$P_L(y) = -t_C - (y + t_C)e^{\pi\gamma_L},$$

e recordamos que as órbitas de transição dentro de S_C são segmentos horizontais.

Para mostrar a afirmação (a), a instabilidade de todos os pontos do segmento E_C segue do mesmo argumento usado na Proposição 1 (a). A atração global do segmento E_C e a não existência de órbitas periódicas segue diretamente do fato que quando $\alpha = 0$, temos

$$P(y) = e^{\pi(\gamma_L + \gamma_R)}y,$$

a qual é uma aplicação contrativa, uma vez que $\gamma_L + \gamma_R < 0$.

Para a afirmação (b), tomando $y \geq -t_C$, temos que $P_L(y) \leq -t_C$ e portanto a expressão $P_R(P_L(y))$ está bem definida e é dada por

$$P(y) = P_R(P_L(y)) = t_C(1 + 2e^{\pi\gamma_R} + e^{\pi(\gamma_L + \gamma_R)}) + ye^{\pi(\gamma_L + \gamma_R)}. \quad (2.17)$$

Agora, resolvendo a equação $P(y) = y$, a única solução é o valor y_0 dado na afirmação. O valor de y_1 segue de forma análoga.

Na afirmação (c), podemos excluir a existência de órbitas periódicas de modo que a única possibilidade da existência deve estar associada ao cálculo prévio do valor de y_0 , mas agora temos $y_0 < t_C < -t_C$ o qual, está fora da validade do domínio da aplicação P_L . A respeito da estabilidade dos pontos do segmento E_C , segue como na Proposição 1 (c). \square

No próximo resultado não podemos estabelecer um resultado dual completo para a Proposição 2, como mostraremos depois, para $\alpha < 0$ existem situações sem ciclos limite e outros casos com mais de um ciclo limite, veja Figura 2.11.

Proposição 4. *Considere o sistema diferencial linear por partes contínuo (4)–(6), em que $d_L, d_R > 0$, $d_C = 0$, $t_L < 0$ e $t_R > 0$ com $t_L^2 - 4d_L < 0$, $t_R^2 - 4d_R < 0$ e $\gamma_L + \gamma_R < 0$. Se $\alpha > 0$ então o ponto de equilíbrio e_R é um foco instável circulado por pelo menos um ciclo limite estável.*

Demonstração. Uma vez que $\alpha > 0$ temos um foco instável em (\bar{x}_R, \bar{y}_R) , veja Lema 1 (b). Sem cálculos explícitos da aplicação de Poincaré, começamos tomando como seção de Poincaré a semirreta vertical $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x = \bar{x}_R \text{ e } y > \bar{y}_R\}$. Então, para pequenos valores de $\hat{y} = y - \bar{y}_R > 0$, enquanto as órbitas circulam o foco e não usam a região S_C , podemos escrever

$$P(\hat{y}) = e^{2\pi\gamma_R}\hat{y} > \hat{y},$$

em que passamos do ponto $(\bar{x}_R, y) = (\bar{x}_R, \bar{y}_R + \hat{y})$ para o ponto $(\bar{x}_R, \bar{y}_R + P(\hat{y}))$, depois de uma volta completa em torno do foco. Assim, temos $P'(0) = e^{2\pi\gamma_R} > 1$.

Para valores de $\hat{y} > 0$ suficientemente grande, sabemos que a órbita partindo do ponto $(\bar{x}_R, \hat{y} + \bar{y}_R)$ dará uma volta em torno do foco, então ela entrará em S_C e voltará para S_L depois de dar meia volta em torno do ponto T_L , para voltar para nossa seção de Poincaré após usar S_C . Além do mais, as duas seções sobre S_C e na faixa $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq \bar{x}_R\}$ tais órbitas aproximam de segmentos horizontais quando $y \rightarrow \infty$, enquanto o tempo de voo de S_L a $S_R \setminus B$ tende para π/ω_L e π/ω_R , respectivamente. Assim, diretamente vemos que a propriedade assintótica da nossa aplicação de Poincaré é tal que

$$\lim_{\hat{y} \rightarrow \infty} \frac{P(\hat{y})}{e^{\pi(\gamma_L + \gamma_R)}\hat{y}} = 1,$$

de modo que

$$\lim_{\hat{y} \rightarrow \infty} P'(\hat{y}) = \lim_{\hat{y} \rightarrow \infty} \frac{P(\hat{y})}{\hat{y}} = e^{\pi(\gamma_L + \gamma_R)} < 1.$$

Concluimos que o gráfico de P tem pelo menos uma intersecção com a diagonal, e então o sistema tem pelo menos uma órbita periódica. \square

Agora, afirmamos nosso principal resultado para transição de salto tipo foco-foco, que assegura, sob certas hipóteses, a existência de pelo menos dois ciclos limite.

Teorema 10. *Considere o sistema diferencial linear por partes contínuo (4)–(6), em que $d_L, d_R > 0$, $d_C = 0$, $t_L < 0$ e $t_R > 0$ com $t_L^2 - 4d_L < 0$, $t_R^2 - 4d_R < 0$ e $\gamma_L + \gamma_R < 0$. As seguintes afirmações valem.*

- (a) *Se $t_C < 0$, então um pequeno ciclo limite estável bifurca em $\alpha = 0$ em uma bifurcação do tipo ponto de equilíbrio na fronteira envolvendo somente as zonas centrais e direita. Assim, para $\alpha > 0$ existe um ciclo limite que cresce linearmente com o valor do parâmetro α , enquanto o ciclo não entra na zona esquerda, isto é, enquanto se encontra em $S_C \cup \Sigma_+ \cup S_R$. Existe um certo valor $\alpha_T > 0$ tal que o ciclo limite estável é tangente em Σ_- em T_L para $\alpha = \alpha_T$. Para valores de α ligeiramente maiores que α_T , o ciclo limite usa as três zonas lineares.*
- (b) *Se $t_C = 0$, então o sistema sofre uma bifurcação bainha de espada em $\alpha = 0$; de um segmento de equilíbrios E_C passamos para um ciclo limite estável envolvendo as três zonas lineares para $\alpha > 0$. Em outras palavras, este ciclo limite aproxima do segmento E_C , com um período tendendo para o infinito, quando $\alpha \rightarrow 0^+$.*
- (c) *Se $t_C > 0$, então um pequeno ciclo limite instável Γ_U bifurca em $\alpha = 0$ em uma bifurcação tipo equilíbrio na fronteira envolvendo somente a zona central e a zona esquerda. Assim, para $\alpha < 0$ com $|\alpha|$ pequeno, tal ciclo limite cresce linearmente em tamanho com o valor de $|\alpha|$, enquanto o ciclo não entra na zona direita, isto é, enquanto se encontra em $S_L \cup \Sigma_- \cup S_C$. Existe um certo valor $\alpha_T < 0$ tal que o ciclo limite instável tangencia Σ_+ em T_R para $\alpha = \alpha_T$. Para valores de α ligeiramente maiores que α_T , o ciclo limite instável usa as três zonas lineares.*

Além do mais, para $\alpha_T < \alpha < 0$ existe pelo menos um ciclo limite estável circulando Γ_U , de modo que temos a existência de pelo menos dois ciclos limite.

Demonstração. A afirmação (a) pode ser demonstrada exatamente como no Teorema 4 (a), mas agora, necessitamos de um conjunto compacto positivamente invariante K_B^3 . Este conjunto pode ser construído facilmente considerando que o ponto no infinito é repulsivo; Assim, é suficiente considerar órbitas partindo de Σ_- em um novo ponto $(-1, y)$ com $y < 0$ e $|y|$ suficientemente grande, ao invés de B_U .

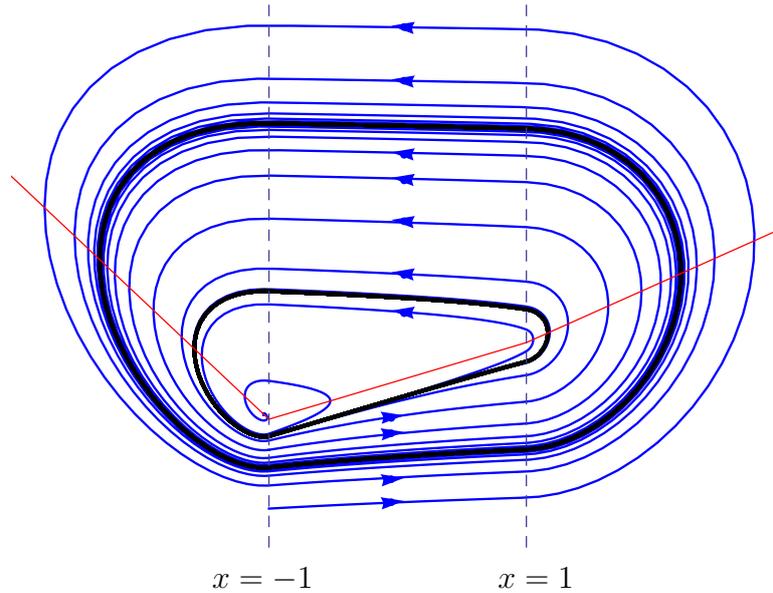


Figura 2.11: Dois ciclos limite correspondendo ao Teorema 5 (c). Aqui $\alpha = -0.04$, $t_L = -0.95$, $t_C = 0.3$, $t_R = 0.45$, $d_L = d_R = 1$ e $d_C = 0$.

Para mostrar a afirmação (b) notamos que quando $\alpha > 0$ podemos construir o conjunto compacto negativamente invariante K_S^2 como na prova do Teorema 4 (b). Enfatizamos que este conjunto compacto K_S^2 pode ser escolhido tão pequeno quanto queremos, selecionando um pequeno valor de $\alpha > 0$, uma representação geométrica do conjunto K_S^2 pode ser vista na Figura 2.10.

Por outro lado, podemos construir um conjunto compacto positivamente invariante K_B^3 , como segue, veja Figura 2.12. Primeiro, assumimos que $\alpha = 0$, e tome um ponto qualquer $B = (-1, y)$ em Σ_-^+ com $y > 0$; depois de dar uma volta completa em torno do segmento E_C , esta órbita chega novamente em Σ_-^+ em um ponto $B_F = (-1, y_F)$ com

$$y_F = P(y) = e^{\pi(\gamma_L + \gamma_R)} y < y.$$

A órbita BB_F juntamente com o segmento B_FB determina um conjunto compacto positivamente invariante. Permitindo agora α ser positivo, a órbita do mesmo ponto B terminará em um ponto $\hat{B}_F = (-1, \hat{y}_F)$; se α é tomado suficientemente pequeno, então podemos assumir que $\hat{y}_F < y$, usando a dependência contínua de soluções com respeito ao parâmetro α . Fechando a órbita de B a \hat{B}_F com o segmento entre estes dois pontos sobre Σ_- , definimos o conjunto compacto positivamente invariante \hat{K}_B^3 . Obviamente, este

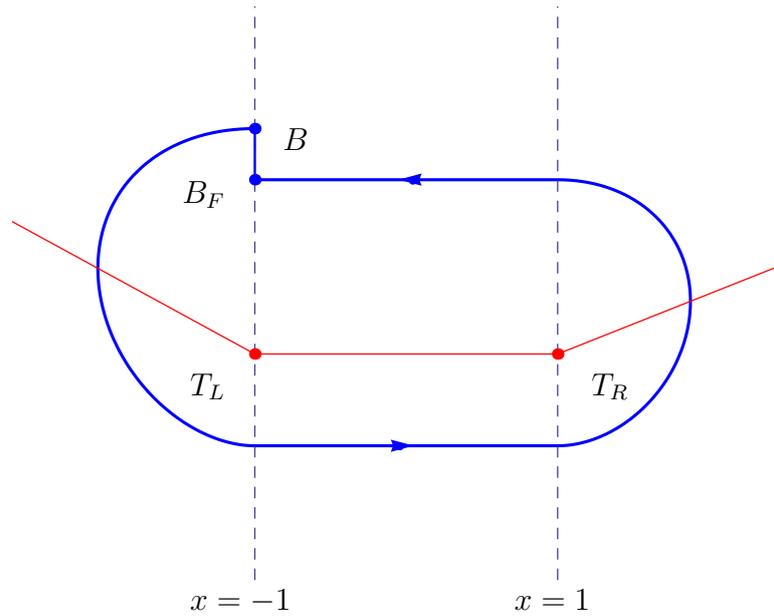


Figura 2.12: O conjunto compacto positivamente invariante K_B^3 no caso foco-foco quando $t_C = 0$ e $\alpha = 0$. K_B^3 é composto pelo segmento $B_F B$ e pela trajetória BB_F .

conjunto \hat{K}_B^3 pode ser escolhido tão pequeno como desejado, tomando o valor inicial de y suficientemente pequeno. Além do mais, uma vez fixado o valor de α para construir o conjunto \hat{K}_B^3 , o conjunto compacto correspondente K_S^2 satisfaz $K_S^2 \subset \hat{K}_B^3$, e então devemos ter um ciclo limite estável entre as duas fronteiras destes compactos. A afirmação (b) está feita.

A primeira declaração do item (c) em relação ao nascimento de um pequeno ciclo limite instável Γ_U , pode ser obtida considerando como um caso dual da afirmação (a), após a mudança de coordenadas $(x, y, \tau) \rightarrow (-x, y, -\tau)$.

Finalmente, a última afirmação segue do fato que o ciclo limite instável Γ_U existe, define um conjunto compacto negativamente invariante o qual deve ser circulado por outro ciclo limite estável, devido a propriedade repulsiva do ponto no infinito. \square

Recordamos que, na afirmação (c) acima assumimos que para $\alpha_T < \alpha < 0$, existem pelo menos dois ciclos limite circulando o foco estável, veja Figura 2.11. Conjecturamos que existe um valor α^* satisfazendo $\alpha^* < \alpha_T < 0$ de modo que para todo $\alpha^* < \alpha < \alpha_T$, ambos ciclos limite usam as três zonas lineares e colidem em um ciclo limite semi estável

no valor $\alpha = \alpha^*$ e desaparece para $\alpha < \alpha^*$. Também, conjecturamos que nas situações das afirmações (a) e (b) do Teorema 10, o sistema (4)–(6) tem somente um ciclo limite estável.

2.6 Um estudo de caso: o modelo linear por partes de Morris-Lecar

Nesta seção, nosso objetivo é ilustrar os resultados teóricos deste capítulo em um modelo concreto e não trivial, no que segue, providenciamos alguns discernimentos para os profissionais em modelagem matemática sobre como é possível detectar as bifurcações analisadas nas seções prévias em modelos matemáticos. Seguindo [12], estudamos aqui um modelo linear por partes de uma única atividade neural conhecida como o modelo de McKean, veja também [37, 39, 40]. O modelo é obtido através de uma sistemática redução da equação de Hodgkin-Huxley e leva a forma de duas EDOs não lineares acopladas

$$\begin{aligned} C\dot{v} &= f(v) - w + I, \\ \dot{w} &= g(v, w), \end{aligned} \tag{2.18}$$

em que v significa a tensão, w é a variável *gating* e

$$f(v) = \begin{cases} -v & \text{se } v < a/2, \\ v - a & \text{se } a/2 \leq v \leq (1 + a)/2, \\ 1 - v & \text{se } v > (1 + a)/2. \end{cases} \tag{2.19}$$

Aqui, $C > 0$, I é o principal parâmetro de bifurcação e $f(v)$ é uma função contínua linear por partes caricatura da cúbica FitzHugh-Nagumo não linear $f(v) = v(1 - v)(v - a)$, em que $0 < a < 1$. A função g , que descreve a dinâmica da variável *gating*, pode ser escolhida de várias maneiras; aqui adotamos a tão chamada função linear por partes Morris-Lecar Tipo I

$$g(v, w) = \begin{cases} (v - \gamma_1 w + b^* \gamma_1 - b)/\gamma_1, & \text{se } v < b, \\ (v - \gamma_2 w + b^* \gamma_2 - b)/\gamma_2, & \text{se } v \geq b, \end{cases} \tag{2.20}$$

em que, tipicamente γ_1 e γ_2 são constantes positivas e $-a/2 < b^* < (1 - a)/2$, $a/2 < b < (1 + a)/2$, veja [12] para mais detalhes.

Deve notar-se que as duas funções lineares por partes (2.19) e (2.20) induzem uma partição no plano de fase em quatro regiões lineares cuja dinâmica é governada pelas diferentes matrizes lineares; as duas isóclinas $f(v) - w + I = 0$ e $g(v, w) = 0$ determinam o conjunto de equilíbrios através de suas intersecções. Iremos usar as notações $\{L, C, R\}$ para as primeiras três regiões $v < a/2$, $a/2 \leq v < b$ e $b \leq v < (1+a)/2$, respectivamente, com matrizes associadas

$$A_L = \begin{bmatrix} -1/C & -1/C \\ 1/\gamma_1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_C = \begin{bmatrix} 1/C & -1/C \\ 1/\gamma_1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_R = \begin{bmatrix} 1/C & -1/C \\ 1/\gamma_2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

e denotamos como RR a última região da direita $v \geq (1+a)/2$, com

$$A_{RR} = \begin{bmatrix} -1/C & -1/C \\ 1/\gamma_2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esta última região será negligenciada na nossa análise, pois o fenômeno que nos interessa não requer esta consideração, veja Figura 2.13.

Iniciamos por calcular o traço e o determinante em cada zona, ficando

$$t_L = -1 - \frac{1}{C} < 0, \quad t_C = t_R = \frac{1}{C} - 1,$$

e

$$d_L = \frac{1}{C} \left(1 + \frac{1}{\gamma_1} \right), \quad d_C = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{\gamma_1} - 1 \right), \quad d_R = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{\gamma_2} - 1 \right).$$

Portanto, para que o sistema esteja na condição degenerada $d_C = 0$ devemos escolher $\gamma_1 = 1$. Enquanto $C < 1$ podemos assumir $t_R = t_C > 0$ e assim, temos a possibilidade de oscilações. Iremos assumir também $\gamma_2 < 1$ para obter $d_R > 0$, evitando então a dinâmica de sela na região da direita.

Observação 7. *Note que a condição degenerada $d_C = 0$ é importante para que as duas isóclinas tenham o mesmo coeficiente angular na zona central, veja Figura 2.13. Esta é uma regra prática para obter ou evitar o comportamento de salto associado à bifurcação em estudo.*

Também recordamos que uma mudança linear apropriada de variáveis, nos permite escrever o modelo na forma de Liénard (4)–(6), assumidas no início deste trabalho, identificando então a expressão explícita do parâmetro de bifurcação α . Tal mudança linear

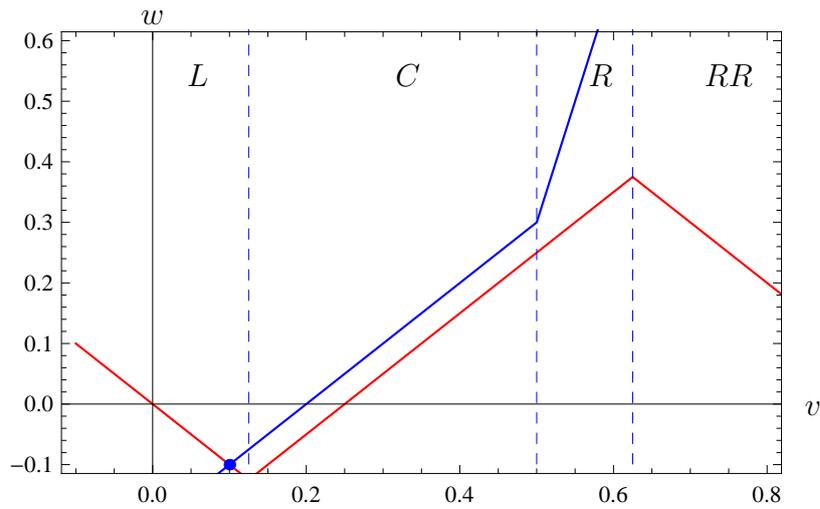


Figura 2.13: As duas isóclinas para o modelo linear por partes Morris-Lecar, determinando quatro regiões lineares. Iremos focar a análise na dinâmica determinada pelas três primeiras regiões, que denotamos por L , C , e R . A intersecção das isóclinas determinam o conjunto de pontos de equilíbrios, que pode ser um único ponto ou um segmento completo, veja a Figura 2.14. Aqui, $C = 0.7$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.25$, $a = 0.25$, $b = 0.5$, $b^* = 0.3$ e $I = 0$.

não é estritamente necessária, uma vez que o traço e o determinante são invariantes nesta mudança.

Aqui, é natural pensar em I como o parâmetro de bifurcação, e então o único ponto a ser enfatizado é a determinação do valor crítico para a bifurcação. Recordamos que na bifurcação temos um contínuo de equilíbrios na região central; assim, usando $\gamma_1 = 1$ e a equação para determinação do equilíbrio, devemos ter para a região central,

$$\text{Rank} \begin{bmatrix} 1/C & -1/C & (I - a)/C \\ 1 & -1 & b^* - b \end{bmatrix} = 1,$$

de modo que o valor crítico será

$$I_{\text{crit}} = a + b^* - b.$$

Assim, quando $I = I_{\text{crit}}$ temos um segmento de equilíbrio, denotado por

$$E_C = \{(v, w) : a/2 \leq v \leq b, w = v + b^* - b\}.$$

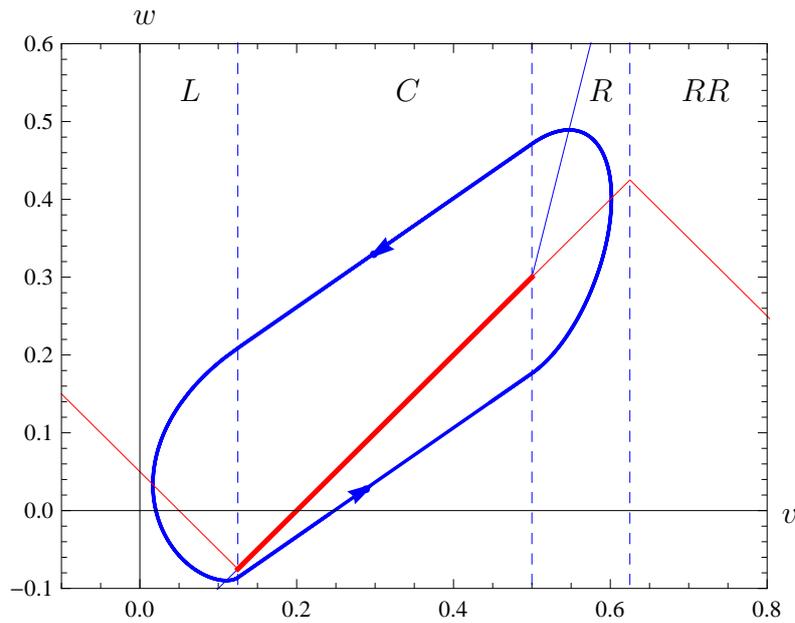


Figura 2.14: Plano de fase para o modelo linear por partes de Morris-Lecar para $C = 0.7$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.25$, $a = 0.25$, $b = 0.5$ e $b^* = 0.3$, na qual a constante é selecionada como $I = I_{\text{crit}} = 0.05$. O segmento intermediário é o contínuo de equilíbrios instáveis E_C , que aparece cercado por um ciclo limite estável.

Para determinar o tipo de dinâmica na zona esquerda, calculamos

$$t_L^2 - 4d_L = \left(1 + \frac{1}{C}\right)^2 - \frac{8}{C} = \frac{C^2 - 6C + 1}{C^2} = \frac{(C - 3 - 2\sqrt{2})(C - 3 + 2\sqrt{2})}{C^2},$$

de modo que é do tipo nó quando $0 < C \leq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.171573$ e do tipo foco quando $3 - 2\sqrt{2} < C < 1$. A respeito a zona direita, temos

$$t_R^2 - 4d_R = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 - \frac{4}{C} \left(\frac{1}{\gamma_2} - 1\right) = \left(\frac{1}{C} + 1\right)^2 - \frac{4}{C\gamma_2}.$$

Assim, a dinâmica da direita é do tipo foco sempre que

$$\gamma_2 < \frac{4C}{(1+C)^2}.$$

Neste caso, tomando $3 - 2\sqrt{2} < C < 1$, região esquerda do tipo foco, para aplicar o Teorema 5, devemos verificar a condição dissipativa $\gamma_L + \gamma_R < 0$. Da Observação 6 após o Teorema 8, esta última condição é equivalente a verificar se

$$\frac{t_L}{\sqrt{d_L}} + \frac{t_R}{\sqrt{d_R}} = -\frac{1+C}{\sqrt{2C}} + \frac{1-C}{\sqrt{C(1/\gamma_2 - 1)}} < 0$$

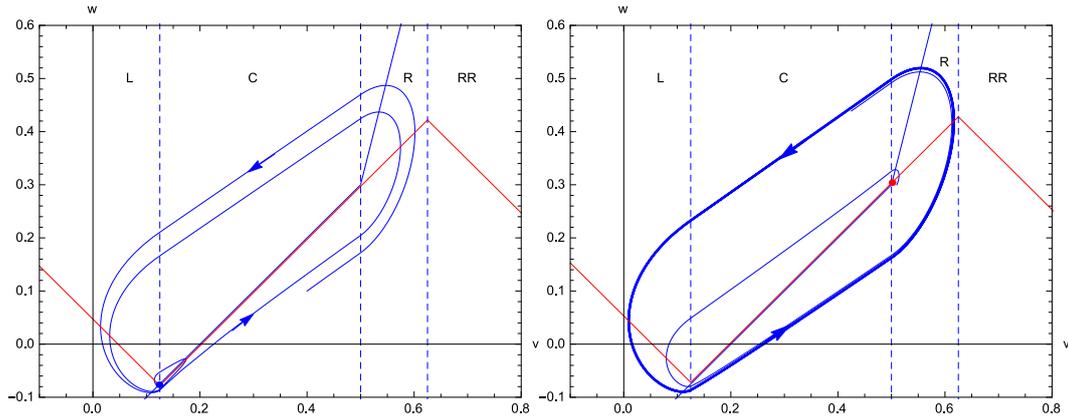


Figura 2.15: Plano de fase para o modelo linear por partes de Morris-Lecar para $C = 0.7$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.25$, $a = 0.25$, $b = 0.5$ e $b^* = 0.3$. As imagens esquerda e direita são para $I = 0.047$ e $I = 0.053$, respectivamente. A bifurcação de salto é clara, e podemos perceber a bi-estabilidade existente para valores intermediários.

é satisfeita. Após algumas manipulações algébricas, temos a inequação equivalente

$$\gamma_2 < \frac{(1 + C)^2}{3 - 2C + 3C^2},$$

em que para $3 - 2\sqrt{2} < C < 1$ acaba sendo uma exigência mais forte que a condição prévia para ter foco na direita.

Podemos resumir a condição para aplicar os Teoremas 4 e 5 juntamente com suas consequências no seguinte resultado. Observamos que para sermos rígidos, devemos verificar que a notável órbita fechada que aparece para $I = I_{\text{crit}}$ satisfaz a condição $v < (1 + a)/2$, assim, não invadindo a quarta região negligenciada $v > (1 + a)/2$; mas isto não é necessário, como em tal região a divergência t_{RR} é negativa e a notável órbita fechada é estável. É claro que, para $I - I_{\text{crit}} > 0$ e suficientemente grande, o equilíbrio instável irá entrar na quarta região sendo estável, então conduzindo a outra bifurcação de equilíbrio na fronteira, que não será considerada aqui.

Proposição 5. *Considere o sistema diferencial linear por partes contínuo (2.18)–(2.20), em que $0 < a < 1$, $a/2 < b < (1 + a)/2$, $\gamma_1 = 1$, e $0 < C < 1$. Tomando I como o único parâmetro de bifurcação com $I_{\text{crit}} = a + b^* - b$, as seguintes afirmações valem:*

- (a) se $0 < C \leq 3 - 2\sqrt{2}$ e $0 < \gamma_2 < 4C/(1 + C)^2$, então o Teorema 4(c) se aplica. Portanto para $I < I_{crit}$ existe um nó estável, no qual torna-se instável como todos os pontos do segmento E_C para $I = I_{crit}$ com a órbita homoclínica circulando o segmento E_C ; desta órbita homoclínica um ciclo limite estável bifurca para $I > I_{crit}$ que circula o único ponto de equilíbrio, que após um salto na sua localização torna-se um foco instável; e,
- (b) se $3 - 2\sqrt{2} < C < 1$ e $0 < \gamma_2 < (1 + C)^2/(3 - 2C + 3C^2)$, então o Teorema 5(c) se aplica. Portanto, para $I < I_{crit}$ com $|I - I_{crit}|$ suficientemente pequeno, existe um foco estável circulado por dois ciclos limite, sendo o pequeno instável e o grande estável. O foco juntamente com todos os pontos do segmento E_C são instáveis para $I = I_{crit}$ contendo somente um ciclo limite circulando E_C ; e após um salto na localização ele é um foco instável isolado circulado pelo ciclo limite estável para $I - I_{crit} > 0$ e suficientemente pequeno.

Finalmente, podemos ver em algumas simulações correspondendo a Proposição 5 (b), um dos casos mais interessantes, quando a bi-estabilidade é prevista. Escolhemos os parâmetros $C = 0.7$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.25$, $a = 0.25$, $b = 0.5$ e $b^* = 0.3$, de modo que $I_{crit} = 0.05$.

Usando os valores $I = 0.047$ e $I = 0.053$, concluímos o repentino nascimento de um grande ciclo limite devido a troca de estabilidade do ciclo limite com um salto significativo na localização dos equilíbrios, veja Figura 2.15. Contudo, da Proposição 5 (b) sabemos que para $I < I_{crit}$ com $|I - I_{crit}|$ suficientemente pequeno dois ciclos limite são encontrados. Efetivamente, na figura 2.16, correspondendo ao valor intermediário $I = 0.048$ e $I = 0.049$, observamos o pequeno ciclo limite instável determinando a bacia de atração do ponto de equilíbrio estável, que coexiste com o grande ciclo limite estável. Na figura esquerda, o ciclo limite estável usa as três zonas, enquanto na figura direita o ciclo limite instável está na situação correspondente ao crescimento linear, usando somente duas zonas.

Antes de finalizar, recordamos que uma análise completa do modelo requer muito mais páginas; aqui, apenas queremos enfatizar a utilidade dos resultados teóricos prévios.

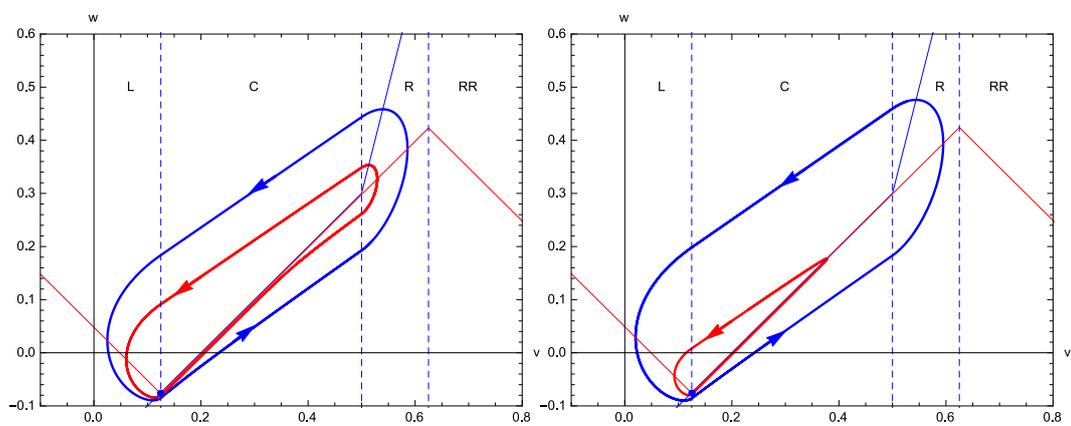


Figura 2.16: Plano de fase para o modelo linear por partes de Morris-Lecar para $C = 0.7$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.25$, $a = 0.25$, $b = 0.5$ e $b^* = 0.3$. As imagens esquerda e direita são para $I = 0.048$ e $I = 0.049$, respectivamente. Estes valores intermediários próximos do valor crítico de I , permite-nos estar conscientes da bi estabilidade característica do o modelo.

Referências Bibliográficas

- [1] A. ANDRONOV, A. VITT AND S. KHAIKIN, *Theory of Oscillations*, Pergamon Press, Oxford, (1966).
- [2] J.C. ARTÉS, J. LLIBRE, J. C. MEDRADO, AND M. A. TEIXEIRA, *Piecewise linear differential systems with two real saddles*, Math. Comput. Simulation, **95** (2013), 13–22.
- [3] M. DI BERNARDO, C.J. BUDD, A.R. CHAMPNEYS AND P. KOWALCZYK, *Piecewise-smooth Dynamical Systems*, Applied Math. Sci. Series vol. **163**, Springer-Verlag, London, (2008).
- [4] J.J.B. BIEMOND, *Nonsmooth dynamical systems*, Ph. D. dissertation, Eindhoven University of Technology, (2013).
- [5] CARL B. BOYER, UTA C. MERZBACH, *História da Matemática*, Blucher, São Paulo, (2012).
- [6] D.C. BRAGA, L.F. MELLO, *Arbitrary number of limit cycles for planar discontinuous piecewise linear differential systems with two zones*, Electronic Journal of Differential Equations, **228** (2015), 1–12.
- [7] D. BRAGA AND L. F. MELLO, *Limit cycles in a family of discontinuous piecewise linear differential systems with two zones in the plane*, Nonlinear Dynam., **73** (2013), 128–1288.

-
- [8] D. BRAGA, L.F. MELLO, *More than three limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones in the plane*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **24**, 1450056 (2014), 10 pp.
- [9] C. A. BUZZI, R. PAZIM AND S. PÉREZ-GONZÁLEZ, *Center boundaries for planar piecewise-smooth differential equations with two zones*, J. Math. Anal. Appl., DOI dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.07.022
- [10] C. A. BUZZI, C. PESSOA, AND J. TORREGROSA, *Piecewise linear perturbations of a linear center*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **33** (2013), 3915–3936.
- [11] V. CARMONA, E. FREIRE, E. PONCE AND F. TORRES, *On simplifying and classifying piecewise linear systems*, IEEE Trans. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, **49** (2002), 609–620.
- [12] S. COOMBES, *Neuronal Networks with Gap Junctions: A Study of Piecewise Linear Planar Neuron Models*, SIAM J. Appl. Dyn. Sys., **7** (2008), 1101–1129.
- [13] M. DESROCHES, E. FREIRE, S.J. HOGAN, E. PONCE AND P. THOTA, *Canards in piecewise-linear systems: explosions and super-explosions*, Proc. R. Soc. A, **469** (2013), 20120603.
- [14] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J.C. ARTÉS, *Qualitative theory of planar differential systems*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [15] R. D. EUZÉBIO AND J. LLIBRE, *On the number of limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two pieces separated by a straight line*, J. Math. Anal. Appl., **424** (2005), 475–486.
- [16] R. D. EUZÉBIO, R. PAZIM AND E. PONCE, *Jump bifurcations in some degenerate planar linear differential systems with three zones*, Physica D, **325** (2016), 74–85.
- [17] A.F. FILIPPOV, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers-Dordrecht, 1988.

-
- [18] E. FREIRE, E. PONCE, F. RODRIGO AND F. TORRES, *Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with three zones*, Inter. J. Bifurcation and Chaos, **12** (2002), 1675–1702.
- [19] E. FREIRE, E. PONCE, F. RODRIGO AND F. TORRES, *Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones*, Inter. J. Bifurcation and Chaos, **8** (1998), 2073–2097.
- [20] E. FREIRE, E. PONCE, AND F. TORRES, *Canonical discontinuous planar piecewise linear systems*, SIAM J. Appl. Dyn. Sys., **11** (2012), 181–211.
- [21] E. FREIRE, E. PONCE, AND F. TORRES, *General mechanism to generate three limit cycles in planar Filippov systems with two zones*, Nonlinear Dynam., **78** (2014), 251–263.
- [22] F. GIANNAKOPOULOS AND K. PLIETE, *Planar systems of piecewise linear differential equations with a line of discontinuity*, Nonlinearity, **14** (2001), 1611–1632.
- [23] S. M. HUAN AND X. S. YANG *Existence of limit cycles in general planar piecewise linear systems of saddle-saddle dynamics*, Nonlinear Anal. **92** (2013) 82–95.
- [24] S. M. HUAN AND X. S. YANG *On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems of node-node types*, J. Math. Anal. Appl., **411** (2014) 340–353.
- [25] R.I. LEINE AND H. NIJMEIJER, *Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems*, ser. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics vol. **18**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [26] E.L. LIMA, *Curso de Análise, vol. 2*, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [27] M.F. LIMA, C, PESSOA AND W.F. PEREIRA, *On the Limit Cycles for a Class of Continuous Piecewise Linear Differential Systems with Three Zones*, Inter. J. Bifurcations and Chaos, **25** (2015), 1550059.

-
- [28] J. LLIBRE, M. ORDÓÑEZ AND E. PONCE, *On the existence and uniqueness of limit cycles in planar continuous piecewise linear systems without symmetry*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **14** (2013), 2002–2012.
- [29] J. LLIBRE AND E. PONCE, *Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones*, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems. Ser. B Appl. Algorithms*, **19** (2011), 325–335.
- [30] J. LLIBRE, E. PONCE AND C. VALLS, *Uniqueness and Non-uniqueness of Limit Cycles for Piecewise Linear Differential Systems with Three Zones and No Symmetry*, *J. Nonlinear Science*, **36** (2015), DOI 10.1007/s00332-015-9244-y
- [31] A. MEYER, M. DELLNITZ, M. HESSEL-VON MOLO, *Symmetries in timed continuous Petri nets*, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **5** (2011), 125–135.
- [32] D.D. NOVAES AND E. PONCE, *A simple solution to the Braga–Mello Conjecture*, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **25**, (2015), 155009–7.
- [33] C. PÉREZ AND F. BENÍTEZ, *Closed curve solutions and limit cycles in a class of second-order switched nonlinear systems*, *Systems & Control Letters*, **60** (2011), 658–664.
- [34] C. PÉREZ AND F. BENÍTEZ, *Switched convergence of second-order switched nonlinear systems*, *International Journal of Control, Automation and Systems*, **10** (2012), 920–930.
- [35] L. PERKO, *Differential equations and dynamical systems. Third edition*. Texts in Applied Mathematics **7**. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [36] E. PONCE, J. ROS, E. VELA, *Limit Cycle and Boundary Equilibrium Bifurcations in Continuous Planar Piecewise Linear Systems*, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **25** (2015), 1530008.
- [37] H.G. ROTSTEIN, S. COOMBES, A.M. GHEORGHE, *Canard-like explosion of limit cycles in two-dimensional piecewise-linear models of FitzHugh-Nagumo type*, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **11** (2012), 135–180.

- [38] D. J. W. SIMPSON, *Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Systems*, World Scientific, Singapore, 2010.
- [39] A. TONNELIER, *On the number of limit cycles in piecewise-linear Liénard Systems*, Int. J. Bifurcation and Chaos, **15** (2005), 1417–1422.
- [40] A. TONNELIER AND W. GERSTNER, *Piecewise-linear differential equations and integrate-and-fire neurons: Insights from two-dimensional membrane models*, Physical Review E, **67** (2003), 021908-1–16.
- [41] X. XU AND P. J. ANTSAKLIS, *Stabilization of second-order LTI switched systems*, International Journal of Control, **72** (2010), 1261–1279.

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, ____ / ____ / ____

Assinatura do autor