Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Modelagem matemática no ensino médio: Uma abordagem para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas.

Aline Fernanda Faquini Helena

Relatório para o Exame Geral de Qualificação apresentado ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador
Prof. Dr. Ricardo de Sá Teles

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Modelagem matemática no ensino médio: Uma abordagem para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas.

Aline Fernanda Faquini Helena

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Ricardo de Sá Teles

2016

510.07 Helena, Aline Fernanda Faquini
H474m Modelagem matemática no ensino médio: Uma abordagem para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas./ Aline Fernanda Faquini Helena - Rio Claro: [s.n.], 2016.
72 f., il., figs., gráfs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Ricardo de Sá Teles

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática. 3. Função. 4. Funções exponenciais. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Câmpus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Aline Fernanda Faquini Helena

Modelagem matemática no ensino médio: Uma abordagem para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas.

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Ricardo de Sá Teles
Orientador

Prof(a). Dr(a). Carina Alves
IGCE - UNESP Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Jamil Gomes de Abreu Júnior
UFSCar - São Carlos (SP)

Rio Claro, 15.08.2016

Dedico este trabalho aos meus filhos, Rafael e Mariana, que por muitos anos estiveram em meus sonhos, por 7 meses em meu ventre, hoje em meus braços e eternamente em meu coração. Que seus olhos brilhantes possam, um dia, ler e compreender este trabalho.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais que, dentro de toda simplicidade que lhes cabe, me mostraram que a educação seria o agente transformador de minha vida.

Agradeço ao meu amado marido que esteve ao meu lado durante este curso de mestrado me apoiando e assim permaneceu até a conclusão deste trabalho.

Agradeço a todos os professores que participaram de minha educação e que deixaram suas contribuições na formação da minha cidadania.

Agradeço aos meus amigos e companheiros de Profmat, pelas horas de estudo, pelas conversas e por todas as risadas.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, aos professores do Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro pela apoio acadêmico e à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) por implementar o Profmat no Brasil.

Agradeço especialmente ao meu orientador, Prof. Ricardo, por toda sua dedicação e paciência para a conclusão deste trabalho.

Muito obrigada!

Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar.
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.
Madre Teresa de Calcuta

Resumo

A necessidade de pensar novas metodologias para o ensino da Matemática, especialmente a partir de temas relacionados ao cotidiano dos alunos, motivaram a realização deste trabalho que, através da modelagem matemática, propõe o ensino das funções exponenciais e logarítmicas. Considerando que as funções exponenciais e logarítmicas possuem muitas aplicações que se estendem pelas mais diversas áreas do conhecimento e diante de dados alarmantes sobre o consumo de álcool por adolescentes, elaboramos uma proposta de modelagem matemática que permite a reflexão sobre o consumo de álcool e a contextualização das funções exponenciais e logarítmicas com suporte teórico ao professor.

Palavras-chave: Matemática - Estudo e ensino, Matemática, Função, Funções exponenciais.

Abstract

The need to differentiate the teaching of mathematics, especially from topics related to daily lives of students, motivated this work that through mathematical modeling proposes the teaching of exponential and logarithmic functions. Taking into consideration the many applications of exponential and logarithmic functions that extend across many different areas of knowledge and the alarming statistics on the consumption of alcohol by teenagers, it was elaborated a proposal for mathematical modeling that allows some reflection about the consumption of alcohol and contextualization of the exponential and logarithmic functions with theoretical support to the teacher.

Keywords: Mathematics - Study and teaching, Mathematics, Function, Exponentiation functions.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

O ensino da Matemática tem sido um processo árduo para os professores, assim como a aprendizagem não se mostra eficiente por parte dos alunos. Os índices de aprendizagem em Matemática no Brasil tem sido baixíssimos e podemos verificar que no decorrer dos anos de ensino básico esses índices vão abaixando cada vez mais.

Muitas vezes o ensino da matemática se dá de forma completamente teórica e desligada da realidade do aluno o que contribui ainda mais para o desinteresse e baixo aprendizado.

Dentro deste contexto, percebemos que o ensino de funções exponenciais e logarítmicas, algumas vezes, é proposto de forma desligada da realidade apesar da grande variedade de aplicações que possuem. Em alguns livros didáticos a abordagem das funções exponenciais e logarítmicas oferece aos alunos conhecimentos superficiais sobre as aplicações do tema, pois trazem poucas situações reais e do cotidiano.

Por esses e outros motivos, precisamos buscar metodologias de ensino que estimulem os alunos e também motivem os professores. Acreditamos que a modelagem matemática seja uma abordagem capaz de contribuir efetivamente no processo de ensino-aprendizagem de matemática e permite que os alunos utilizem e apliquem

> "seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas"

conforme indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) [5].

O objetivo deste trabalho de dissertação é elaborar uma proposta de modelagem matemática capaz de vincular um tema muito comum no cotidiano dos jovens ao ensino de funções exponenciais e logarítmicas. Para isso, no capítulo inicial faremos um estudo sobre a modelagem matemática analisando-a como proposta de ensino além de buscar como a modelagem matemática vem sendo abordada nos livros didáticos. Nos próximos dois capítulos formaremos a base matemática do nosso trabalho trazendo definições importantes sobre funções e suas propriedades elementares além de tratar sobre os importantes conceitos de funções contínuas e inversas. Com essas propriedades elementares seremos capazes de trabalhar com as funções exponenciais e logarítmicas com uma abordagem analítica das mesmas. No capítulo final deste trabalho apresentaremos nossa proposta de desenvolvimento da modelagem matemática para o primeiro ano do ensino médio abordando o tema *Consumo de Álcool* e focando em modelos matemáticos com as funções exponenciais e logarítmicas.

2 Modelagem Matemática

Neste capítulo pretendemos oferecer ao leitor uma breve reflexão a respeito do ensino da matemática nos tempos atuais e discutir a modelagem como metodologia de ensino neste contexto. Na primeira parte é feita uma apresentação dos conceitos fundamentais da modelagem matemática, apresentando a definição dada por alguns autores de livros sobre o tema e na segunda parte, uma breve análise sobre o ensino da matemática, aprofundando a definição de modelagem e apresentando-a como proposta de ensino. No encerramento do capítulo faremos uma análise de 2 livros didáticos do ensino médio, para verificar como a modelagem matemática vem sendo abordadas nestas obras.

2.1 Introdução

Podemos considerar que o surgimento da matemática se deu no momento em que o homem sentiu a necessidade de contar e enumerar objetos, segundo Boyer [6]

> "a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico da "sobrevivência do mais apto" a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos".

Ao se deparar com uma situação que o colocou diante de uma tomada de decisão em torno de valores numéricos, inconscientemente, o homem transformou essa situação real em um modelo matemático para poder tomar a melhor decisão, ou seja, neste momento, juntamente com o surgimento da matemática tivemos também o surgimento da modelagem matemática.

Mas o que é a Modelagem matemática?

Vejamos como alguns autores a definem:

Para Bassanezi [4]:

> "A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".

Para Almeida [7]:

> “A modelagem matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. O modelo matemático, nesse caso, é o que dá forma à solução do problema e a modelagem matemática é a atividade de busca dessa solução”.

Para Biembengut [8]:

> “É o processo que envolve a obtenção de um modelo”

e complementa

> “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se modelo matemático”.

Sendo assim, a modelagem matemática traduz as situações e informações do cotidiano para o contexto matemático, permitindo uma análise das possíveis soluções e a busca da solução almejada.

2.2 A Modelagem e o Ensino da Matemática

Atualmente, temos a consciência de que o papel da educação é formar bons cidadãos para o mundo, capazes de refletir sobre sua função na sociedade e se posicionar criticamente. Neste contexto, em nossa opinião, a matemática é uma importante ferramenta para o desenvolvimento do pensamento crítico, da tomada de decisões e do desenvolvimento do raciocínio lógico não podendo, de forma alguma, ter seu conhecimento negado aos cidadãos. Bassanezi [4] diz:

> “para o desenvolvimento de um novo modelo de educação menos alienado e mais comprometido com a realidade dos indivíduos, devemos lançar mão de instrumentos matemáticos interrelacionados a outras áreas do conhecimento humano”.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais [9] apontam alguns objetivos para o ensino da matemática em que a utilização da modelagem seria bastante pertinente, a saber:

1. Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta;

2. Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos;

3. Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares; entre outros.

Por muito tempo o conhecimento matemático foi transmitido de forma abstrata e desvinculado da realidade, sendo voltado apenas para o desenvolvimento de algoritmos com procedimentos mecânicos e repetitivos, sem levar em conta sua origem e trajetória histórica. Criou-se, então, um imaginário popular sobre a matemática, que a mistifica como uma ciência formulada e baseada em suas próprias regras e leis.

A modelagem matemática é uma forma de integrar novamente o conhecimento matemático com a realidade e pode contribuir para o ensino da matemática em todos os níveis de ensino, pois possibilita a integração do conhecimento matemático com outras áreas do conhecimento, além de permitir a prática da multidisciplinaridade.

Para entender melhor como a modelagem matemática funciona, vamos analisar a figura 2.1.

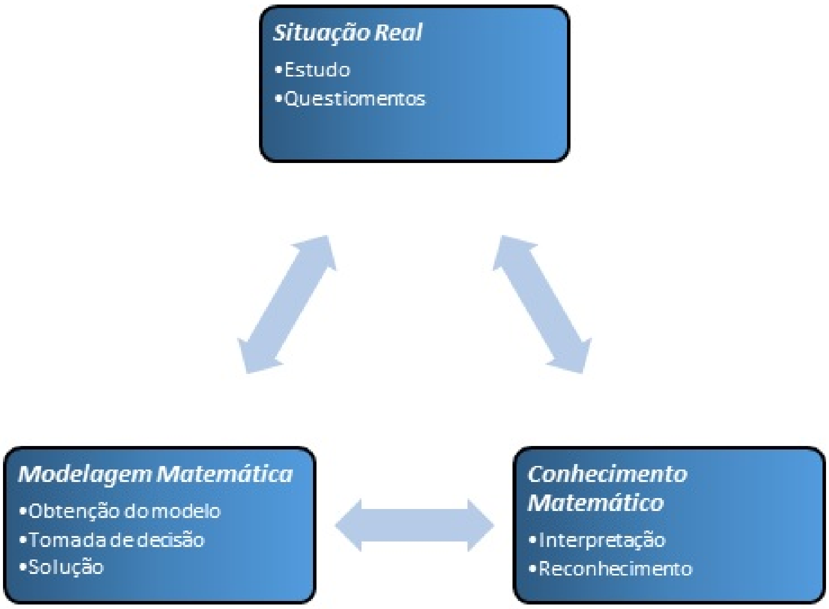

Figura 2.1: Modelagem Matemática

O esquema da figura 2.1 propõe que a partir de uma situação real seja realizado um levantamento sobre o tema o que permite formular questionamentos pertinentes ao seu estudo. O conhecimento matemático contribui para a interpretação e reconhecimento de ferramentas para lidar com a situação, obtendo-se assim um modelo matemático que represente esta situação. Por meio deste modelo matemático, que pode ser representado de diferentes formas (como uma equação, uma tabela, um gráfico, etc), espera-se responder aos questionamentos iniciais. É importante observar que um modelo é uma aproximação de uma situação real e que pode não ser suficiente para solucionar o problema; nestes casos, pode-se retornar para reavaliar o tema e os questionamentos para uma possível reformulação do modelo.

No dia a dia, a todo tempo as pessoas se veem diante de situações que as obrigam a fazer relações matemáticas e inconscientemente elas praticam a modelagem. Por este motivo é importante propor a utilização da modelagem para o ensino da matemática também dentro da escola, pois desta forma ela se torna mais significativa, estimulante e empolgante aos alunos. Segundo Biembengut, [8]

> "o ensino da matemática precisa voltar-se para a promoção do conhecimento matemático e da habilidade em utilizá-lo".

Isso permitirá aos alunos que façam relações, desenvolvam a criatividade e ampliem seus conhecimentos matemáticos, abrangendo múltiplas habilidades e competências.

Biembengut [8] propõe 6 etapas para o desenvolvimento do conteúdo programático através da modelagem:

1. Inicialmente, uma breve exposição do tema;
2. Levantamento de questões para instigar os alunos;
3. Seleciona-se e formula-se questões a fim de levar os alunos a propor respostas (se necessário pode propor uma pesquisa para os alunos);
4. Ao suscitar um conteúdo matemático, interrompe-se a exposição e desenvolve-se a matemática necessária;
5. Propor exemplos análogos e resolução de exercícios;
6. Retorna-se a questão que gerou o processo apresentando a solução da questão.

Durante o desenvolvimento, proposto por Biembengut [8], os alunos também terão o contato com os procedimentos utilizados em uma pesquisa científica, tais como a busca de informações, aprofundamento do tema, experimentações, etc.

Não é possível deixar de citar que ao desenvolver atividades de modelagem nas diversas etapas do ensino, o professor precisa mediar o conhecimento de maneira que o conhecimento matemático seja obtido integralmente. Para isso, o professor pode, durante qualquer momento do processo, retomar os conhecimentos matemáticos necessários para o desenvolvimento da atividade e até mesmo oferecer aos alunos alguma atividade complementar com o objetivo de aguçar o conhecimento matemático sobre determinado tema. Segundo Almeida [7]

> "o foco está nos encaminhamentos e procedimentos que medeiam a transição da situação inicial para a situação final"

e entendemos que destes encaminhamentos e procedimentos fazem parte a retomada de conhecimentos matemáticos não incorporados pelos alunos e também os novos conhecimentos que serão abordados durante o processo.

Muitos trabalhos científicos na área de Educação Matemática foram, e estão sendo, desenvolvidos sobre a modelagem matemática devido ao seu grande significado e obtenção de resultados positivos de aprendizagem através de sua abordagem. Norteadores atuais do Ensino Médio como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [9] e as orientações complementares a esses parâmetros, os PCN+ [10] incentivam o desenvolvimento da modelagem em todos os níveis de ensino, com isso muitos autores de livros didáticos incluiram em suas propostas esta abordagem.

Fizemos a análise de dois livros didáticos do primeiro ano do ensino médio com o propósito de verificar se a modelagem é sugerida como estratégia de ensino para Funções, especificamente para Funções Exponenciais e Logarítmicas. Além disso, analisamos o manual do professor destes livros didáticos buscando as orientações dadas pelos autores sobre o trabalho com a modelagem matemática.

Aqui designaremos cada livro didático pela sigla LD conforme a tabela 2.1:

LD 1	Conexões com a Matemática [1]
LD 2	Matemática: Contexto e Aplicações [2]

Tabela 2.1: Livros didáticos analisados

Análise LD1

Inicialmente analisamos o LD 1 e verificamos que nos Capítulos 3 (Funções), 7 (Função Exponencial) e 8 (Função Logarítmica) não há nenhuma proposta de modelagem matemática. Algumas situações problema abordadas pelo livro poderiam ser modeladas pelos alunos, porém o próprio livro oferece o exemplo e efetua a modelagem e desta forma o aluno se torna apenas leitor e não agente participativo da modelagem. Nem mesmo nos exercícios propostos ou complementares foram encontradas oportunidades de modelagem a serem desenvolvidas pelos alunos.

Vejamos dois exemplos de abordagem do LD1:

Situação 1: Capítulo 3 (Funções)

A situação 1, representada na Figura 2.2, traz condições de desenvolvimento da modelagem porém o livro já o faz sem a participação do aluno; é abordada apenas como exemplo de aplicação de funções e não dá a oportunidade do aluno matematizar o problema. O tema está presente no dia a dia de quase todos e poderia facilmente ser explorado num contexto real. Vejamos a Figura 2.2 que apresenta uma reprodução do exemplo encontrado no LD1:

Todas as manhãs, Luciana compra pães doces na padaria. Como cada pão doce custa R$0,90, podemos calcular o valor a ser pago em uma compra relacionando duas grandezas: a quantidade de pães comprada e o preço correspondente a essa quantidade . Assim:

Quantidade de pães	Preço (R$)
1	0,90
2	1,80
3	2,70
5	4,50
10	9,00
n	0,9n

Dizemos que o preço é função da quantidade de pães : cada número que define a quantidade de pães corresponde a um único número que define o preço total.

Figura 2.2: Situação 1. Fonte: [1] - pag 58

Situação 2: Capítulo 8 (Função Logarítmica)

A situação 2, representada na Figura 2.3, também traz condições de modelagem, com um tema que permite relacionar outras áreas do conhecimento além de desenvolver a noção intuitiva de função logarítmica, porém o livro, novamente, não permite a participação ativa do aluno na construção do modelo que melhor representa o crescimento do número de células. A situação aparece no formato de exemplo de aplicação de função logarítmica e não permite a participação do aluno na matematização. Vejamos a Figura 2.3 que apresenta uma reprodução do exemplo encontrado no LD1:

Ao analisar o "Guia do professor" do LD 1 não encontramos nenhuma menção explícita sobre a utilização de modelagem como metodologia de ensino ou abordagem de conteúdos.

Concluímos então que, nos capítulos analisados, o LD1 não traz propostas significativas com a modelagem matemática e não discute com o professor a possibilidade dessa abordagem em sala de aula, nem mesmo como sugestão de adaptação de atividades.

A imagem abaixo representa o crescimento do número *n* de células em função da quantidade *t* de dias. Convencionou-se a notação *t=0* para a observação inicial correspondente a *n=1*.

Tempo (t)	0	1	2	3	4
Nº de células (n)	1	2	4	8	16

Observe que $n=2^t$ é a lei de formação da função que modela essa situação. Com base nessa lei, podemos calcular, por exemplo, a quantidade de dias necessária para totalizar uma população de 16.384 células. Acompanhe:

$n=2^t \rightarrow 16.384=2^t \rightarrow t=14$

Portanto serão necessários 14 dias para que o número de células seja 16.384.

O valor de t é 14, pois $2^{14}=16.384$. Dizemos que 14 é o **logaritmo** de 16.384 na base 2.

Figura 2.3: Situação 2. Fonte: [1] - pag 182

Análise LD2

Em seguida, analisamos o LD 2 e nos Capítulos 2 (Funções), 5 (Função Exponencial) e 6 (Logaritmo e Função Logarítmica) foram encontradas diversas abordagens que permitem a realização da modelagem matemática como forma de obtenção de uma "fórmula matemática" que melhor represente determinada situação problema, como representado na situação 3.

Situação 3: Capítulo 2 (Funções)

A situação 3, representada na Figura 2.4, oferece uma tabela relacionando o número de peças de informática produzidas e o custo dessas peças. As perguntas a) e b) permitem ao aluno analisar a situação intuitivamente buscando o conceito de função. A pergunta c) solicita ao aluno que modele a situação, buscando a fórmula matemática que dá o custo em função do número de peças e as perguntas d) e e) levantam questionamentos de interpretação e utilização do modelo obtido no item c). Esta abordagem permite que o aluno interprete e modele o problema além de utilizar essas informações com novos e possíveis valores. Vejamos a Figura 2.4 que apresenta uma reprodução do exercício encontrado no LD2:

Além do formato representado na situação 3 também encontramos abordagens que permitem a modelagem com participação crítica e envolvente dos alunos se for bem mediada pelo professor.

Situação 4: Capítulo 5 (Função Exponencial)

A situação 4 foi retirada do capítulo sobre Funções Exponenciais e é um exemplo de abordagem que faz relação com outras áreas do conhecimento (biologia) e que é

Exercício 4. A tabela abaixo indica o custo de produção de certo número de peças para informática:

Nº de peças	1	2	3	4	5	6	7	8
Custo (R$)	1,20	2,40	3,60	4,80	6,00	7,20	8,40	9,60

a) A cada número de peças corresponde um único valor em reais?
b) O que é dado em função de que?
c) Qual é a fórmula matemática que dá o custo (c) em função do número de peças (x)?
d) Qual é o custo de 10 peças? E de 20 peças? E de 50 peças?
e) Com um custo de R$ 120,00, quantas peças podem ser produzidas?

Figura 2.4: Situação 3. Fonte: [2] - pag 44

apresentada de uma forma que a modelagem surge natural e intuitivamente.

Na situação 4, que está representada na Figura 2.5, é possível detectar elementos importantes para o desenvolvimento da modelagem, como a breve introdução sobre o tema e o levantamento de questões que instigam os alunos. Nesta situação a modelagem surge na construção da tabela, na obtenção da lei da função exponencial que descreve a situação e na possível percepção de que o gráfico da função exponencial não será uma reta. Vejamos a Figura 2.5 que apresenta uma reprodução do exercício encontrado no LD2:

Ao analisar o "Manual do Professor" do LD 2 verificamos uma seção sobre Etnomatemática e Modelagem e entre as descrições das características da coleção há um trecho que diz:

> "a modelagem matemática é feita pela procura de modelos matemáticos a partir de problemas reais".

Desta forma, concluímos que o LD 2 traz boas possibilidades de desenvolvimento da modelagem na sala de aula e dá um suporte ao professor que mediará esse desenvolvimento.

Diante do exposto, acreditamos que dominar o conceito e as representações de funções (além de saber utilizá-los) são algumas das principais habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos durante o Ensino Médio. A modelagem matemática pode contribuir fortemente para o domínio dessas habilidades já que permite que os alunos construam modelos que representam diferentes tipos de funções e que os representem de diferentes formas. Pretendemos, com este trabalho de dissertação, apresentar formas de desenvolver com os alunos os principais conceitos de funções e suas representações.

Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Reúna-se com um colega e façam uma tabela com o número de bactérias nas 10 primeiras horas, considerando que há 1000 bactérias no início da pesquisa.

Veja um exemplo de tabela com as primeiras linhas preenchidas.

Horas após o início	Número de bactérias	Proporção entre a quantidade de bactérias atual e a quantidade inicial.
0	1000	1
1	2000	2

Depois que a tabela estiver totalmente preenchida, reflitam sobre as seguintes questões:

a) Na 1ª hora, a quantidade de bactérias aumentou em 1000 (era 1000 e foi para 2000). E na 2ª hora? E na 3ª hora? Porque esse valor não é sempre o mesmo?

b) Existe uma lógica na sequência de valores que indicam proporção entre a quantidade de bactérias em determinada hora e o valor inicial? Qual é essa lógica?

c) Usando a lógica interpretada no item anterior, qual deve ser a proporção entre a quantidade de bactérias após 20 horas e a quantidade inicial? E qual deve ser a quantidade de bactérias após 20 horas?

d) Qual deve ser a quantidade de bactérias após x horas?

Figura 2.5: Situação 4. Fonte: [2] - pag 147

Para uma abordagem mais elaborada, nos próximos capítulos, apresentaremos algumas definições e resultados, acompanhados de demonstrações e exemplos. Esses capítulos serão o embasamento teórico-matemático deste trabalho e guiarão a proposta das atividades de modelagem matemática para o Ensino Médio e que serão apresentadas no capítulo final deste trabalho.

3 Funções

Na matemática, assim como em muitas outras ciências, muitas vezes é necessário estabelecer alguma relação ou correspondência entre conjuntos ou grandezas. A noção de função parte da relação entre duas grandezas variáveis; inicialmente vamos definir o conceito de relação para posteriormente, a partir da definição de relação definirmos o conceito de funções. Abordaremos também algumas propriedades elementares das funções, definiremos gráfico de funções trazendo alguns exemplos muito significativos de funções e seus gráficos. Ainda neste capítulo trataremos sobre as funções contínuas, definindo-as através do Teorema do valor intermediário e mostrando alguns exemplos. Para encerrar, vamos definir função inversa e mostrar a característica de seu gráfico. As definições, exemplos e resultados deste capítulo foram retiradas das referências [3], [11], [12] e [13].

3.1 A Definição de Função

Definição 3.1. *Dados dois conjuntos não vazios X, Y, uma **relação** de X em Y (ou entre X e Y, nessa ordem) é um subconjunto R do produto cartesiano $X \times Y$, i.e., R é um conjunto de pares ordenados do tipo (x, y), com $x \in X$ e $y \in Y$.*

Se R é uma relação de X em Y, então $R \subset X \times Y$ por definição. Reciprocamente, escolhido um par ordenado (x, y), temos que $(x, y) \in R$ ou $(x, y) \notin R$ (i.é, que x e y sejam relacionados por R ou não).

Definição 3.2. *Dados dois conjuntos não vazios X e Y, uma relação que a cada elemento $x \in X$ associa um único elemento y tal que $(x, y) \in f$ é denominada **função**. Em outras palavras, $\forall x \in X, \exists$ um único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.*

Notação: $f : X \to Y$ e $y = f(x)$.

Denominamos o conjunto X de **domínio** da função e denotamos $X = Dom(f)$, o conjunto Y de **contradomínio** da função e o elemento $y = f(x) \in Y$ de **imagem** de $x \in X$ pela função f.

Geralmente, dada uma função $f : X \to Y$, o **conjunto imagem**, ou simplesmente a **imagem** da função f é o conjunto $Im(f)$, cujos elementos são as imagens $f(x) \in Y$

dos elementos $x \in X$, ou seja, $Im(f) = \{f(x) \in Y; x \in X\}$. Em particular, temos sempre $Im(f) \subset Y$ e pode ocorrer que $Im(f) \neq Y$.

É muito comum utilizar diagramas para representar o conceito de funções, assim como faremos na Figura 3.1, onde cada elemento x do conjunto não-vazio X é relacionado a um único elemento y do conjunto não-vazio Y.

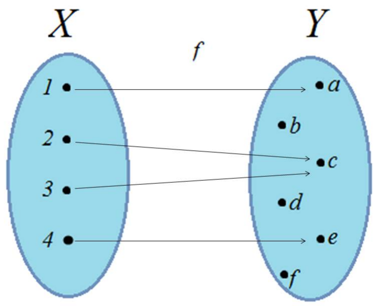

Figura 3.1: Diagrama de flechas exemplificando a função f de X em Y.

Na figura 3.1 temos $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = c$ e $f(4) = e$, logo a é a imagem de 1, c é a imagem de 2 e de 3 e e a imagem de 4 por f. Além disso a função f formaria os seguintes pares ordenados: $(1, a)$, $(2, c)$, $(3, c)$, $(4, e)$.

Exemplo 3.1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$.

Temos aqui uma função definida pela expressão $f(x) = x^2 + 1$ que associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ seu quadrado adicionado de 1 unidade. Neste exemplo tanto o domínio como o contradomínio da função são os números reais $\mathbb{R}$ e a imagem, são os números reais positivos $\mathbb{R}^+$.

Exemplo 3.2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Temos aqui uma função definida por duas expressões $f(x) = x+1$ e $f(x) = x^2$; neste caso dizemos que f está **definida por partes**, de modo que quando $x \in (-\infty, 0]$, $f(x)$ o relaciona ao seu quadrado e, quando $x \in (0, \infty)$, $f(x)$ o relaciona ao seu sucessor. Neste exemplo o **domínio** da função são os números reais $\mathbb{R}$ e a **imagem** são os números reais positivos e o zero $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Neste texto trabalharemos com as funções $f : X \to Y$ de tal forma que $X, Y \subset \mathbb{R}$. Desta forma, a função $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $X \subset \mathbb{R}$ é chamada de **função real** de **uma variável real**, já que f assume valores reais (ou seja, seu contradomínio é $\mathbb{R}$) e cada elemento x do domínio X de f é um número real.

No contexto de funções reais, temos como construir novas funções a partir de outras já conhecidas, utilizando as **operações aritméticas** do contradomínio $\mathbb{R}$; assim definimos a **soma** e o **produto** de duas funções f e g e o produto $c \cdot f$ de um número real c pela função f.

Definição 3.3. *Dados um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$, um número real c e funções reais de uma variável real $f, g : X \to \mathbb{R}$ (f e g de mesmo domínio), definimos as funções:*

- $f + g : X \to \mathbb{R}$ *como* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$; *para todo* $x \in X$.
- $f - g : X \to \mathbb{R}$ *como* $(f - g)(x) = f(x) + (-g(x)) = f(x) - g(x)$; *para todo* $x \in X$.
- $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ *como* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$; *para todo* $x \in X$.
- $f/g : X \to \mathbb{R}$ *como* $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$; *para todo* $x \in X$.
- $c \cdot f : X \to \mathbb{R}$ *como* $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$; *para todo* $x \in X$.

Observação: Para as funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$, o domínio permanecerá sendo X visto que $X \cap X = X$ e para f/g temos a restrição de $g(x) \neq 0$ e seu domínio será $\{x \in X, g(x) \neq 0\}$.

Exemplo 3.3. Sendo $c = 4$, f e g as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x - 3$ e $g(x) = \dfrac{x}{x+3}$, temos:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
&= (x-3) + \frac{x}{x+3} \\
&= \frac{(x+3)(x-3) + x}{x+3} \\
&= \frac{x^2 - 3x + 3x - 9 + x}{x+3} \\
&= \frac{x^2 + x - 9}{x+3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
&= (x-3) \cdot \frac{x}{x+3} \\
&= \frac{(x-3)(x)}{x+3} \\
&= \frac{x^2 - 3x}{x+3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c \cdot f)(x) &= c \cdot f(x) \\ &= 4 \cdot (x-3) \\ &= 4x - 12.\end{aligned}$$

3.2 Propriedades Elementares das Funções

Definição 3.4. *Uma função $f : X \to Y$ é dita:*

- ***Injetora**, ou **injetiva** se para todo $y \in Y$, existir no máximo um $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*
- ***Sobrejetora**, ou **sobrejetiva** se sua imagem for todo o conjunto Y, i.é., se, para todo $y \in Y$, existir pelo menos um $x \in X$, tal que $y = f(x)$.*
- ***Bijetora**, ou **bijetiva**, se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.*

Uma maneira eficaz de verificar se uma função $f : X \to Y$ é injetora é verificar se a implicação $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ é satisfeita, para todos $x_1, x_2 \in X$.

Exemplo 3.4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$ é **injetora**, pois faz corresponder a cada número real x seu triplo, e não existem dois números reais diferentes que tenham o mesmo triplo, ou seja:

Para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Exemplo 3.5. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = x^2$ é **sobrejetora**, pois todo elemento de $\mathbb{R}^+$ é imagem de pelo menos um elemento de $\mathbb{R}$ pela função $x = \pm\sqrt{f(x)}$. Observe:

- $f(x) = 9$ é imagem de $x = 3$ e de $x = -3$, $(\pm\sqrt{9})$
- $f(x) = 0$ é imagem de $x = 0$, $(\pm\sqrt{0})$
- $f(x) = 2$ é imagem de $x = \sqrt{2}$ e de $x = -\sqrt{2}$, $(\pm\sqrt{2})$

Exemplo 3.6. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$ é **bijetora**, pois ela é simultaneamente injetora e sobrejetora, cada número real do contradomínio $\mathbb{R}$ tem como correspondente no domínio a sua terça parte que sempre existe e é única.

Definição 3.5. *Seja $X \subset \mathbb{R}$, dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é **par** se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in X$. Analogamente, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é **ímpar** se $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in X$.*

Exemplo 3.7. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é **par**, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 = f(-x)$.

Exemplo 3.8. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5x$ é **ímpar**, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 5(-x) = -5(x) = -f(x)$.

Dadas as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ temos, em última análise, regras bem definidas para, partindo de $x \in X$ via f, obter $y = f(x) \in Y$ e, via g, obter $z = g(y) \in Z$. Parece, então, razoável que possamos formar uma função que nos permita sair de X e ir diretamente para Z. Esta função resultante é denominada *função composta* de f e g.

Definição 3.6. *Dadas as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, a **função composta** de f e g (nesta ordem) é a função $g \circ f : X \to Z$ definida, para cada $x \in X$, por:*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Sendo assim, para encontrarmos a imagem de $x \in X$ por $(g \circ f)$, basta encontrarmos a imagem de $f(x) \in Y$ por g. Além disso, para fazer a composição é necessário que a imagem de f esteja contida no domínio de g.

Exemplo 3.9. Dadas as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$, a função composta $h = (g \circ f)$ será:
$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)^2 + f(x) + 1] = (x+1)^2 + (x+1) + 1 = x^2 + 3x + 3.$

3.3 Gráficos de Funções

Nesta seção abordaremos o conceito formal do gráfico de uma função acompanhado de exemplos de funções bastante significativas e seus gráficos.

Definição 3.7. *Dada uma função $f : X \to Y$, o **gráfico** de f é o subconjunto G_f do produto cartesiano $X \times Y$ definido por $G_f = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}$ ou $G_f = \{(x, f(x)); x \in X\}$.*

Para que um subconjunto $G_f \subset X \times Y$ seja o gráfico de uma função $f : X \to Y$ é necessário que G_f cumpra as seguintes condições:

- Para todo $x \in X$ existe um par ordenado $(x, y) \in G_f$ cuja primeira coordenada é x.
- Se $P(x, y)$ e $P'(x, y')$ são pares pertencentes a G_f com a primeira coordenada x então $y = y'$.

Quando $f : X \to Y$ for uma função real de uma variável real, com $X \subset \mathbb{R}$ uma união finita de intervalos (possivelmente $X = \mathbb{R}$) o gráfico de f pode ser representado no plano, munido de um sistema de coordenadas fixado. Em tudo que segue, supomos um sistema cartesiano de coordenadas fixado no plano.

Os elementos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ são, naturalmente, os pares ordenados de números reais. Eles surgem como as coordenadas cartesianas de um ponto P do plano Π ($x =$ *abscissa*$, y =$ *ordenada*) quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais OX e OY, que se interseptam no ponto O, chamado de *origem* do sistema de coordenadas, conforme a figura 3.2.

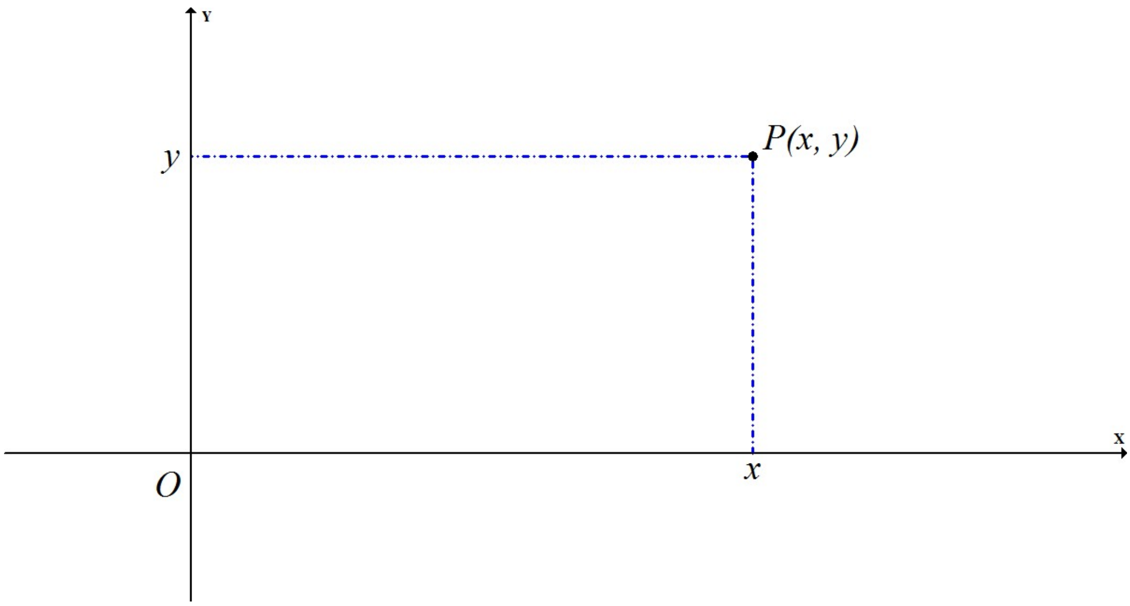

Figura 3.2: Ponto P(x,y) no sistema de coordenadas cartesianas.

Dado o ponto $P \in \Pi$, a *abscissa* de P é o número x, coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OX, enquanto a *ordenada* de P é a coordenada y do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OY. Diz-se então que (x, y) é o par de *coordenadas* do ponto P relativamente aos eixos OXY.

O gráfico de uma função de uma variável real $f : X \to \mathbb{R}$ é um subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$, logo pode ser visualizado (pelo menos nos casos mais simples) como uma linha, formada pelos pontos de coordenadas (x, y), quando x varia no conjunto X. Vejamos alguns exemplos de funções e seus gráficos:

Exemplo 3.10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a **função constante**[1] e igual a c, ou seja, $f(x) = c$. O gráfico de f é o subconjunto $G_f = \{(x, y); x \in \mathbb{R} \text{ e } y = c\} = \{(x, c); x \in \mathbb{R}\}$, representado na Figura 3.3.

Exemplo 3.11. Seja $Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a **função identidade**[2] $Id_{\mathbb{R}}(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Seu gráfico é $G_{Id} = \{(x, y); x \in \mathbb{R} \text{ e } y = x\} = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$, representado na Figura 3.4.

[1]Por definição temos: Dados os conjuntos não vazios X e Y e fixado um elemento $c \in Y$, a **função constante** c de X em Y é a função $f : X \to Y$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in X$.

[2]Por definição temos: Dados um conjunto não vazio X, a **função identidade** de X é a função $Id_X : X \to X$ tal que $Id_X(x) = x$ para todo $x \in X$.

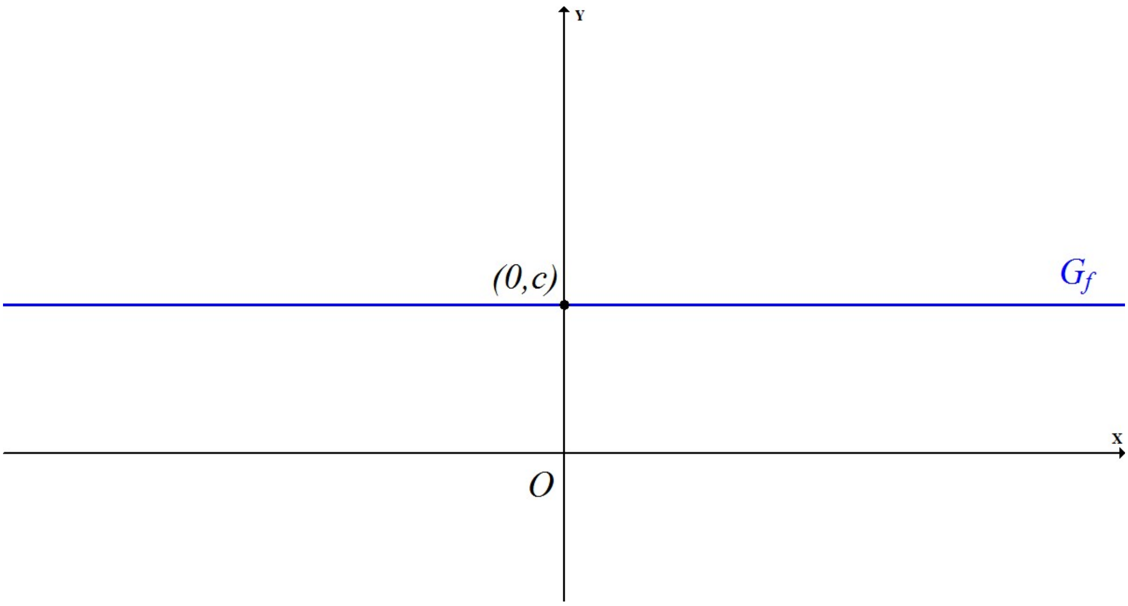

Figura 3.3: Gráfico da função constante $f(x) = c$,

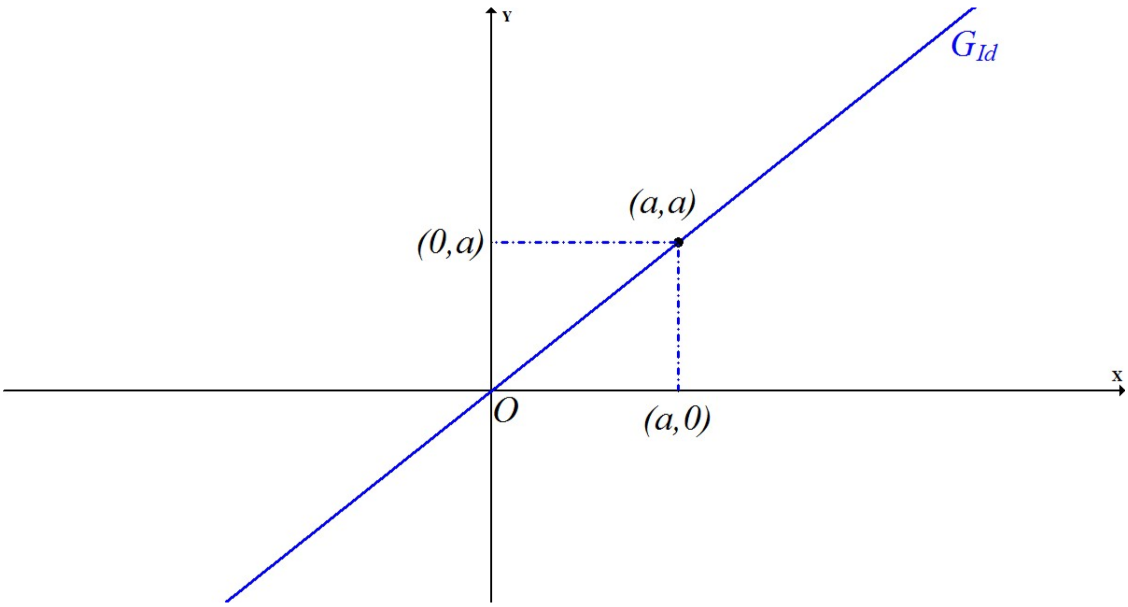

Figura 3.4: Gráfico da função identidade $Id_{\mathbb{R}}$.

Exemplo 3.12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma **função afim**[3] igual a $f(x) = ax+b$. O gráfico de f é o subconjunto do plano cartesiano $G_f = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = ax+b\}$ representado na Figura 3.5.

Exemplo 3.13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma **função quadrática**[4] igual a $f(x) = ax^2+bx+c$. O gráfico de f é uma parábola definida pelo teorema que segue e está representado na

[3]Uma **função afim** é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax + b$ para todo x real, onde a e b são números reais dados, com $a \neq 0$.

[4]Uma **função quadrática** é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quando são dados a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$

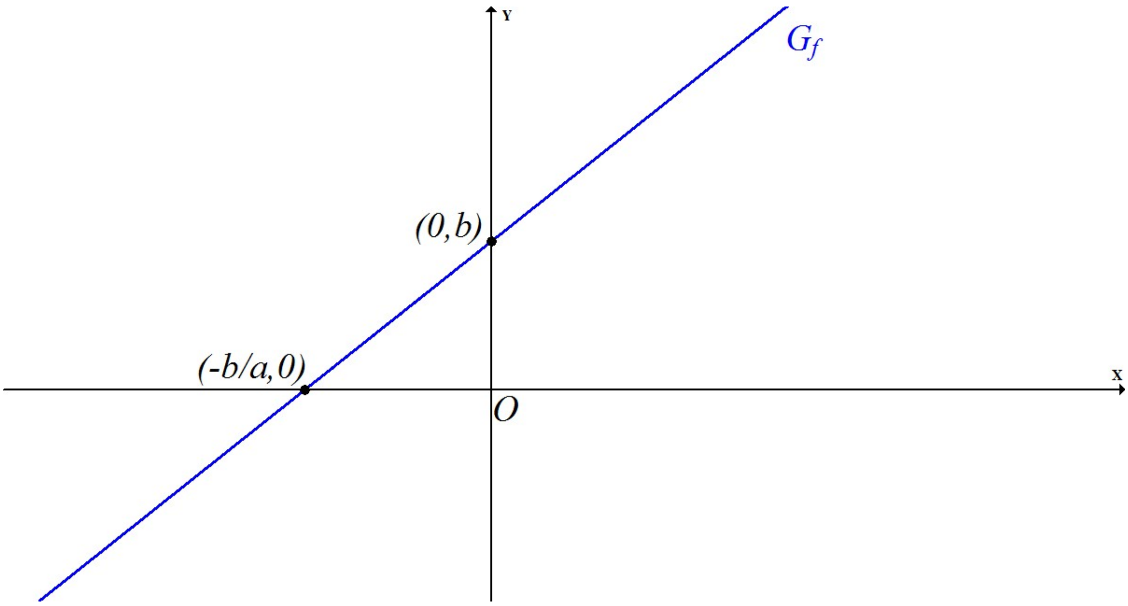

Figura 3.5: Gráfico da função afim $f(x) = ax + b$,

Figura3.6.

Teorema 3.1. *Para quaisquer a, b, $c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$ é a parábola de eixo $x = -b/2a$ e vértice $V(-b/2a, -\Delta/4a)$, "aberta para cima" se $a>0$, e "aberta para baixo" se $a<0$.*

Demonstração. Nosso objetivo é obter $x_0, y_0, k \in \mathbb{R}$ tais que $y_0 \neq k$ e, sendo o ponto $F(x_0, y_0)$ e a reta $d : \{y = k\}$, tenhamos

$$P \in G_f \Leftrightarrow \overline{PF} = dist(P, d).$$

onde $\overline{PF}$ é o segmento que une os pontos P e F e $dist(P, d)$ é a distância do ponto P à reta d.

Para tanto, sendo $P(x, y)$, observemos que

$$P \in G_f \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c \text{ e}$$
$$\overline{PF} = dist(P, d) \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = |y - k|,$$

queremos que

$$y = ax^2+bx+c \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = (y-k)^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2(y_0 - k)^2}x^2 - \frac{x_0}{y_0 - k}x + \frac{x_0^2 + y_0^2 - k^2}{2(y_0 - k)}.$$

Basta, então resolver em x_0, y_0 e k o sistema de equações

$$\frac{1}{2(y_0 - k)^2} = a, \ -\frac{x_0}{y_0 - k} = b, \frac{x_0^2}{2(y_0 - k)} + \frac{1}{2}(y_0 + k) = c.$$

Dividindo as duas primeiras equações, obtemos $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; em seguida, substituindo a primeira equação e o valor de x_0 na terceira equação, segue que

$$y_0 + k = 2(c - x_0^2 \cdot \frac{1}{2(y_0 - k)}) = 2(c - \frac{b^2}{4a^2} \cdot a) = -\frac{\Delta}{2a};$$

por fim, resolvendo o sistema

$$y_0 - k = \frac{1}{2a}, y_0 + k = -\frac{\Delta}{2a}^2,$$

obtém-se

$$y_0 = \frac{1-\Delta}{4a} e k = -\frac{1+\Delta}{4a}.$$

Finalmente, uma vez que o vértice V da parábola é a interseção da reta $x = -\dfrac{b}{2a}$ com gráfico de $f(x)$, temos

$$y = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c = -\frac{\Delta}{4a}.$$

□

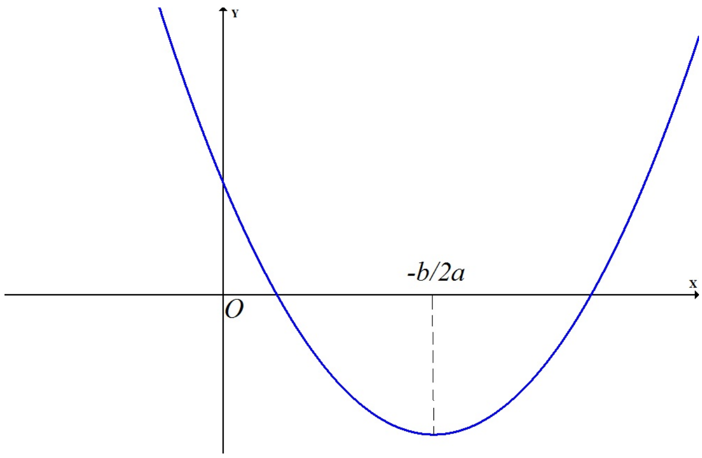

Figura 3.6: Gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$,

3.4 Função Contínua

Nesta seção abordaremos o conceito de função contínua apresentando critérios que garantam essa propriedade.

Inicialmente podemos pensar na função contínua como uma função cujo gráfico não possui "interrupções" ou "saltos" ao longo do mesmo. Vejamos algumas funções e seus gráficos:

Exemplo 3.14. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $h(x) = \dfrac{x^2+4}{x-2}$, respectivamente:

- O gráfico de $f(x) = x^2$ não possui "saltos" ou "interrupções" aparentes, como representado na Figura 3.7;

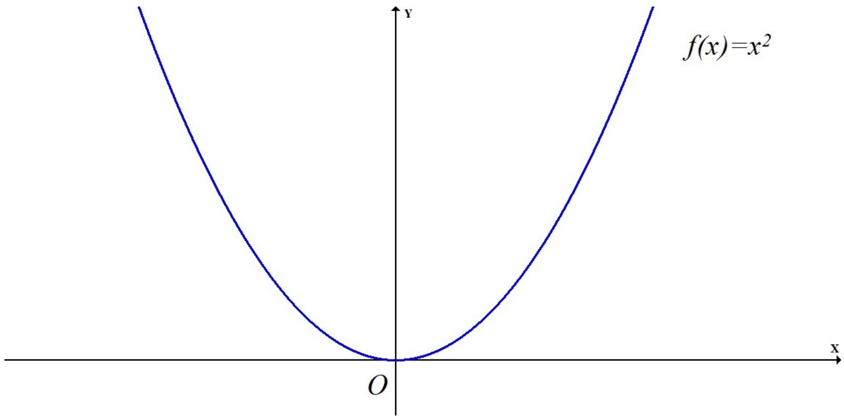

Figura 3.7: Gráfico da função $f(x) = x^2$

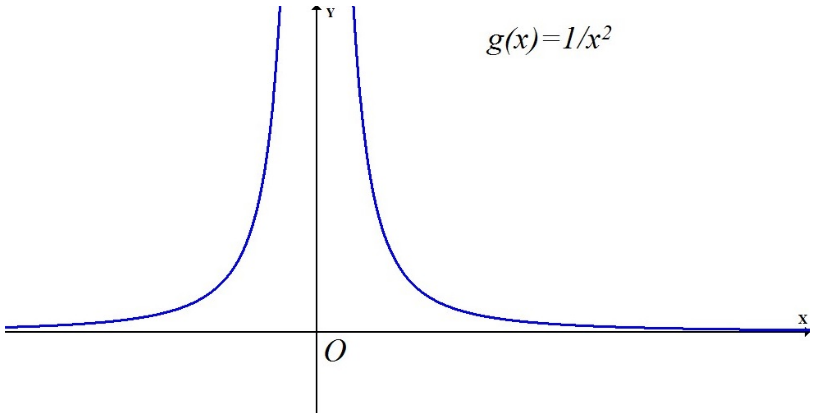

Figura 3.8: Gráfico da função $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

- O gráfico de $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ possui um "salto" em $x = 0$, como representado na Figura 3.8;
- O gráfico de $h(x) = \dfrac{x^2+4}{x-2}$ possui um "salto" em $x = 2$, como representado na Figura 3.9.

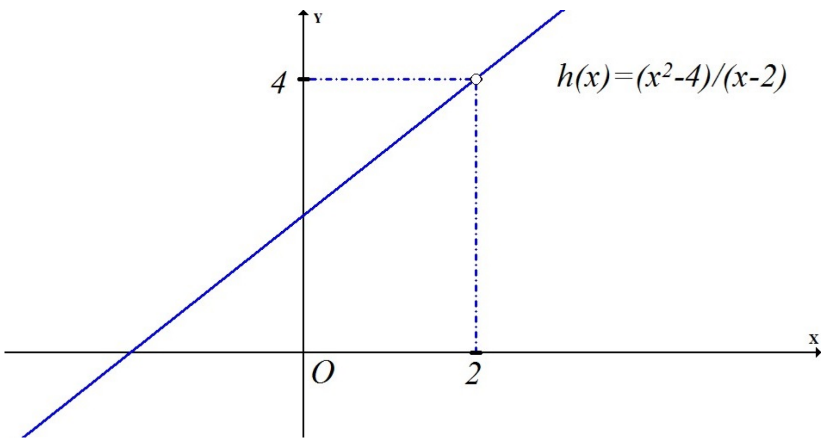

Figura 3.9: Gráfico da função $h(x) = \dfrac{x^2+4}{x-2}$

Porém é necessário compreender a existência, ou não, desses saltos em todo o domínio da função. Intuitivamente podemos restringir o domínio da função em intervalos menores e analisar a continuidade em cada intervalo. Para isso, usaremos a propriedade do **valor intermediário** onde denotaremos por X a união de intervalos da reta.

Definição 3.8. *Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ possui a* ***propriedade do valor intermediário*** *se, para todo intervalo $[a, b] \subset X$ e todo y_0 pertencente ao intervalo de extremidades $f(a)$ e $f(b)$, existir $x_0 \in [a, b]$ tal que $y = f(x)$.*

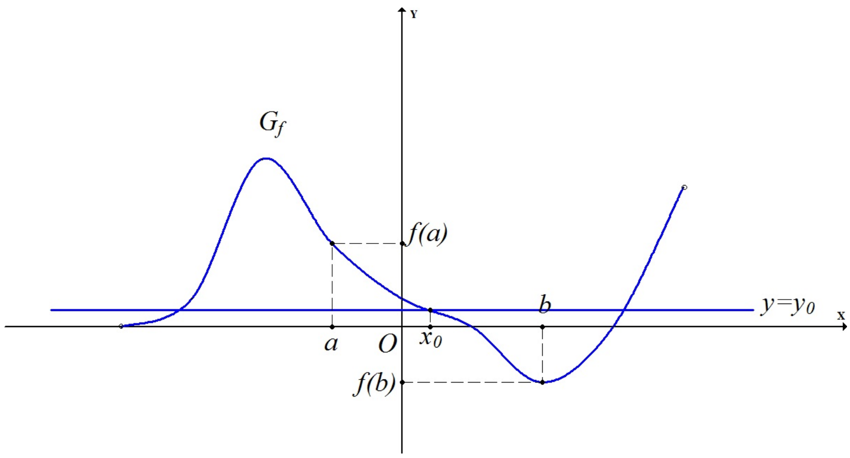

Figura 3.10: Ilustração da propriedade do valor intermediário. Fonte: [3], pag 119.

Podemos então dizer que, se uma função $f : X \to \mathbb{R}$ possui a propriedade do valor intermediário, então f é uma função de *gráfico contínuo*, isto é, *sem saltos*. Porém a função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1/2, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \tag{3.2}$$

satisfaz a propriedade do valor intermediário, mas seu gráfico apresenta um salto em $x = 1$, logo f não pode ser considerada uma função contínua. Para que possamos formular adequadamente o conceito de função contínua, analisemos a situação da seguinte forma: seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função dada, $x_0 \in (a, b)$ fixado e $P_0(x_0, f(x_0)) \in G_f$; para $x \in (a, b)$ seja, ainda, $P(x, f(x)) \in G_f$. Para que o gráfico G_f de f mereça ser denominado contínuo, intuitivamente pensamos que, para x próximo a x_0, devemos ter P próximo a P_0. Sendo assim, chegamos a seguinte definição:

Definição 3.9. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é* ***contínua em um ponto*** *$x_0 \in X$ se a seguinte condição for satisfeita: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{3.3}$$

A função é dita contínua se o for em todo $x_0 \in X$.

Em seguida, vamos mostrar que toda função contínua satisfaz a propriedade do valor intermediário, condição conhecida como o **Teorema do valor intermediário**, ou simplesmente, **TVI**. Começaremos enunciando e provando o **lema de permanência de sinal** para funções contínuas.

Lema 3.1. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $x_0 \in I$ é tal que $f(x_0) > 0$ (resp. $f(x_0) < 0$), então existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \text{ (resp. } f(x) < -\frac{f(x_0)}{2}\text{)}$$

Em particular, f ainda é positiva (resp. negativa) em $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Demonstração. Façamos a prova no caso em que $f(x_0) > 0$, sendo a prova no outro caso totalmente análoga. A definição de continuidade garante que, para $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0| < \epsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

Mas a última desigualdade acima acarreta que

$$f(x) - f(x_0) > -\frac{f(x_0)}{2},$$

que é o mesmo que $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$, para todo $x \in I$ tal que $|x - x_0| < \delta$. □

Como aplicação do lema 3.1 podemos provar o teorema do valor intermediário para funções contínuas definidas num intervalo $[a, b]$. Mas começaremos mostrando o **Teorema de Bolzano**.

Teorema 3.2 (Teorema de Bolzano)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0 < f(b)$ e seja

$$A = \{x \in [a, b];\ f \text{ é negativa no intervalo } [a, b]\ \}.$$

Como $a \in A$ por hipótese, temos $A \neq \emptyset$. Por outro lado, A é limitado (uma vez que $A \subset [a, b]$) e portanto, existe $c = supA$.

Note, inicialmente, que $c > a$ pelo lema de permanência do sinal. De fato, se fosse $f(a) < 0$, teríamos, de acordo com aquele resultado, a existência de $0 < \delta < b - a$ tal que $f(x) < 0$ para $x \in [a, a + \delta)$ e, daí $c \geq a + \delta$.

Agora, afirmamos que $f(c) = 0$. Por contradição, suponha primeiro que $f(c) < 0$. Então $c < b$ (uma vez que $f(b) > 0$) e, novamente pelo lema de permanência do sinal, existiria $0 < \delta < b - c$ tal que f seria negativa em $(c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$. Mas, como $c = supA$, podemos tomar $d \in (c - \delta, c) \cap A$, já que $f < 0$ em $[a, c + \dfrac{\delta}{2}]$, contradizendo o fato de ser $c = supA$. Por outro lado, se $f(c) > 0$, existiria $\delta > 0$ tal que f seria positiva em $(c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$; em particular, $A \cap (c - \delta, c] = \emptyset$ e daí teríamos $supA \leq c - \delta$, uma nova contradição. Logo a única possibilidade é que $f(c) = 0$. □

Teorema 3.3 (TVI). *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Se $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$ (ou vice-versa), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$. Em particular, se um número real d pertence ao intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Para a primeira afirmação, note que a função $h = f - g$ é contínua e tal que $h(a)h(b) = (f(a)-g(a))(f(b)-g(b)) < 0$. Portanto, o Teorema de Bolzano garante a existência de $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$, i.é., tal que $f(c) = g(c)$. O caso particular em questão é obtido fazendo g igual a função constante e igual a d em [a,b]. □

Exemplo 3.15. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua. Prove que existe um número real $0 \leq c \leq 1$ tal que $f(c) = c$ (i.e., que f tem pelo menos um ponto fixo).

Se $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, nada há para fazer, senão $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Considerando a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$, temos, então, $f(a) > g(a)$ e $f(b) < g(b)$, e o **TVI** garante a existência de $0 < c < 1$ tal que $f(c) = g(c)$ (ou o que é o mesmo. $f(c) = c$).

3.5 Função inversa

Nesta seção abordaremos o conceito de função inversa mostrando a característica de seu gráfico apresentando uma forma prática de obtenção da função inversa e construção de seu gráfico.

Dada a função $f : X \to Y$ dizemos que a função $g : Y \to X$ é a *inversa* de f quando $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$ e temos ainda que $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$. Adotaremos a notação $g = f^{-1}$.

Vamos analisar que, se a função $f : X \to Y$ possui inversa, então ela será bijetiva, ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre X e Y. Se $g(f(x)) = x$ para qualquer $x \in X$ temos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1) = g(f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Logo f é *injetiva.* Se $f(g(y)) = y$ para qualquer $y \in Y$, tomemos $y \in Y$ arbitrário e $x = g(y) \in X$ temos $f(x) = y$. Logo f é *sobrejetiva.*

Desta forma, vemos que se f possui inversa, então há uma correspondência biunívoca entre X e Y e a recíproca também é verdadeira: Se $f : X \to Y$ é uma correspondência biunívoca entre X e Y então f possui uma inversa $g : Y \to X$.

Além disso, é necessário discutir que uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ só pode ser injetiva se for monótona (crescente ou decrescente). Portanto, para que uma função contínua $f : I \to J$ (I, J intervalos) possua uma inversa é necessário que f seja crescente ou decrescente além de sobrejetiva.

O **gráfico** G' da função inversa $f^{-1}: Y \to X$ é determinado por pontos simétricos ao gráfico G da função $f: X \to Y$ em relação a bissetriz dos quadrantes ímpares do plano $\mathbb{R}^2$. Assim $(x, y) \in G \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in G'$.

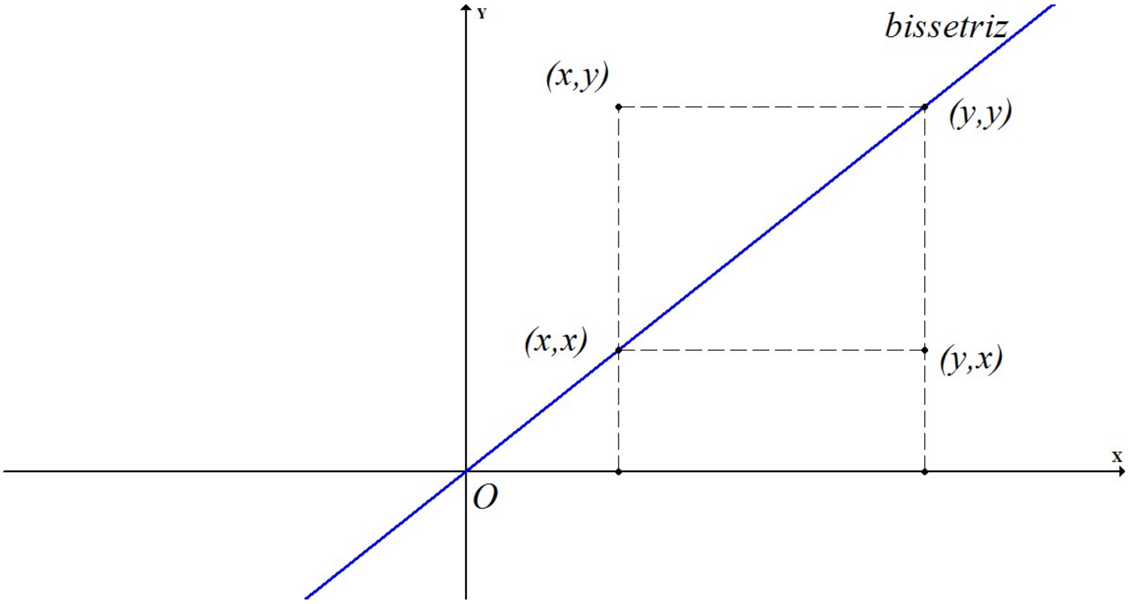

Figura 3.11: Gráfico da função inversa

Para uma fácil associação podemos imaginar uma folha de papel translucido, onde traçamos o gráfico da função f e, então girando a folha no espaço num ângulo de 180° em torno da bissetriz dos quadrantes ímpares obteremos o gráfico de f^{-1}.

Exemplo 3.16. Dada a função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = x^2$. Como ela é bijetora, sua inversa é a função $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $g(y) = \sqrt{y}$, uma vez que:

$$g(f(x)) = g(x^2) = (\sqrt{x})^2 = x$$
$$\text{e}$$
$$f(g(x)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

Vejamos os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(y) = \sqrt{y}$ em um mesmo sistema de eixos cartesianos:

Notemos que o gráfico da função f e o gráfico da função inversa $g = f^{-1}$ são simétricos em relação a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Dada uma função $f: A \to B$, bijetora e definida por $y = f(x)$, para obtermos a sentença que define f^{-1} podemos usar a seguinte **regra prática**:

1 Em $y = f(x)$ fazemos a mudança de variável, trocando x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2 Transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$ expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

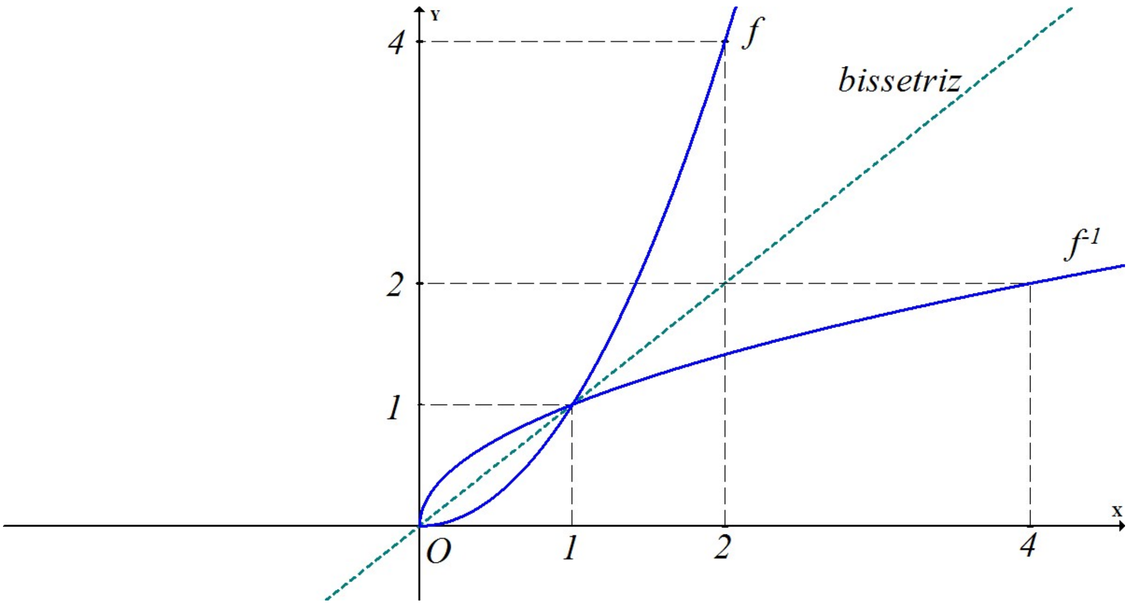

Figura 3.12: Gráfico das funções inversas $f(x) = x^2$ e $g(y) = \sqrt{y}$

Exemplo 3.17. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$, vamos obter sua inversa pela regra prática:

A função $f(x) = y = 3x + 2$ é bijetora, então é inversível. Pela regra prática, temos

1 Em $y = f(x) = 3x + 2$ fazemos a mudança de variável, obtendo $x = 3y + 2$;

2 Expressando y em função de x: $x = 3y + 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \dfrac{x-2}{3}$ para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Logo $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$

Encerramos aqui a introdução aos conceitos elementares de funções para que no capítulo seguinte comecemos a tratar sobre as funções exponenciais e logarítmicas, que foram escolhidas para uma abordagem mais detalhada neste trabalho.

4 Funções Exponenciais e Logarítmicas

Durante muitos séculos as exponenciais e os logaritmos desempenharam um papel importante para a simplificação de cálculos aritméticos, segundo Lima [14]

> "permitindo que se efetuassem, com rapidez e precisão, operações complicadas como a multiplicação de dois números com muitos algarismos, ou uma potenciação com expoente fracionário, perderam a algum tempo esse lugar de eficiente calculador, hoje ocupado com grande êxito pelas maquininhas eletrônicas"

Atualmente, o estudo dos logaritmos e exponênciais ocupa um lugar de destaque na matemática devido as suas aplicações e descrição de muitos fenômenos naturais. A função logarítmica e sua inversa, a função exponencial, são maneiras de descrever, matematicamente, a evolução de uma grandeza cuja taxa de crescimento (ou decrescimento) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente num dado momento. Neste capítulo, faremos um estudo inicial recordando as propriedades das potências de expoente racional e em seguida abordaremos as funções exponenciais e finalmente a sua inversa, função logarítmica. As definições, exemplos e resultados deste capítulo foram retiradas das referências [11] e [14].

4.1 Potências de Expoente Racional

Nesta seção abordaremos as propriedades fundamentais das potências para que possamos destacar as potências de expoente racional que servirão de base para a elaboração das seções sobre as funções exponenciais e logarítmicas.

Seja a um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$ a potência a^n, de base a e expoente n é definida como o produto de n fatores iguais a a. Note que para $n = 1$ não há produto de um só fator e temos $a^1 = a$ por definição. A definição indutiva de a^n é:

$$a^1 = a$$

e
$$a^{n+1} = a \cdot a^n.$$

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

pois em ambos os membros desta igualdade temos o produto de $m+n$ fatores iguais a a. Segue-se que, para $m_1, m_2, ..., m_k$ quaisquer, vale

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot ... \cdot a^{m_k} = a^{m_1+m_2+...+m_k}.$$

Em particular, se $m_1 = ... = m_k = m$, vem $a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot ... \cdot a^{m_k} = a^{mk}$.

Procuremos agora atribuir um significado à potência a^n, quando $n \in \mathbb{Z}$ é um número inteiro, que pode ser negativo ou zero. Para isso é necessário manter a regra fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Iniciaremos por definir a^0. Como a igualdade $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$ é válida, teremos $a^0 \cdot a = a$, logo $a^0 = 1$.

Em seguida, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, devemos ter $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, logo $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Desta forma, conseguimos admitir expoentes inteiros preservando a igualdade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ definindo $a^0 = 1$ e $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vejamos agora, quando o expoente é um número racional $r = m/n$ (onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) de modo que valha a regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Desta igualdade resulta, que se deve ter, para $r = m/n$:

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot ... \cdot a^r = a^{r+r+...+r} = a^{rn} = a^m.$$

Portanto a^r é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Por definição de raiz, este número é $\sqrt[n]{a^m}$ a raiz n-ésima de a^m. Assim, a única maneira de definir a potência a^r, com $r = m/n, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, é

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Vejamos alguns detalhes importantes: como se tem $m/n = mp/np$ para todo $p \in \mathbb{N}$, é preciso ressaltar que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ para que a definição não seja ambígua. Também é preciso ressaltar que a definição dada assegura a validez da regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ para $r, s \in \mathbb{Q}$.

As potências a^r, com expoente racional, embora não contenham todos os números reais positivos, estão espalhadas em toda parte em $\mathbb{R}^+$ desde que seja $a \neq 1$, conforme afirma o lema abaixo:

Lema 4.1. *Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos encontrar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, i.é., $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Vamos supor a e α maiores que 1 (os demais casos serão análogos). Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < (1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M})^n$$

Da última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \text{ e } 0 < a^M(a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha.$$

Logo

$$\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim as potências

$$a^0 = 1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \cdots, a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$ está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$. □

Este lema será de suma importância para as demonstrações que seguem na próxima seção deste trabalho.

4.2 A Função Exponencial

Nesta seção trataremos sobre as funções exponenciais, definindo-as e abordando suas principais características e propriedades, assim como de seu gráfico. Nesta seção do trabalho optamos em apresentar as definições e demonstrações da referência [11] mas o leitor também pode olhar a referência [15].

Definição 4.1. *Seja a um número real positivo, que vamos supor sempre diferente de 1. A* ***função exponencial de base a*** *é dada por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = a^x$.*

A função exponencial deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $a^1 = a$;
3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$;
4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é ilimitada superiormente;
5. A função exponencial é contínua;
6. A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x, a \neq 1$ é sobrejetiva.

Usando a propriedade 1, resulta daí que, para todo número racional $r = m/n$, com $n \in \mathbb{N}$, deve-se ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$. Portanto $f(r) = a^r$ é a única função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

A propriedade 3 diz que a função exponencial é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Com isso concluímos que existe uma única maneira de definir o valor $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Para isso vamos fixar $a > 1$, então a^x tem a seguinte propriedade: Para $r, s \in \mathbb{Q}$, temos $r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s$.

Sabemos que não podem existir dois números reais diferentes para assumir o valor a^x, com a propriedade acima. Caso existissem A e B, supostamente $A < B$ teríamos: Para $r, s \in \mathbb{Q}$, temos $r < x < s \Rightarrow a^r < A < B < a^s$ e então o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional. Portanto, quando x é irracional, a^x é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências a^r com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso sao as potências a^s, com s racional maior do que x.

A propriedade 5, garante a continuidade da função exponencial e isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0.

Proposição 4.1. *A função exponencial é contínua.*

Demonstração. Começaremos mostrando que é possível tomar a^h tão próximo de 1 quanto desejamos, desde que $|k|$ seja escolhido suficientemente pequeno. Suponhamos $a > 1$ e $h > 0$ e $\epsilon > 0$, tomado arbitrariamente, queremos mostrar que, tomando h pequeno, teremos $a^h < 1 + \epsilon$. Pela desigualdade de Bernoulli, temos $(1+\epsilon)^n > 1 + n\epsilon$. Portanto se tomarmos $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > \dfrac{a-1}{\epsilon}$, teremos $n\epsilon > a - 1$, logo $a < 1 + n\epsilon$ e por Bernoulli $a < (1+\epsilon)^n$ e finalmente $a^{1/n} < 1 + \epsilon$. Resumindo: dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^{1/n} < 1 + \epsilon$ mais precisamente $1 < a^h < a^{1/n} < 1 + \epsilon$ e desta forma, faremos a^h tão próximo de 1 quanto desejamos.

Agora, fixamos $x_0 \in \mathbb{R}$, tomamos $h = x - x_0$ e temos $a^x - a^{x_0} = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1)$. Quando x se aproxima de x_0, h tende a 0, a^h tende a 1 e $a^h - 1$ tende a 0. Como a^{x_0} é fixo (não depende de h), temos $\lim_{x\to x_0}(a^x - a^{x_0}) = 0$, ou seja $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, o que caracteriza a continuidade da função exponencial. □

A propriedade 6 quer dizer que, para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$, ou seja, que todo número real positivo é uma potência de a.

Proposição 4.2. *A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x, a \neq 1$ é sobrejetiva.*

Demonstração. Inicialmente escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $(b - \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n})$ de modo que $|b - a^{r_n}| < 1/n$ portanto $\lim_{x\to x_0} a^{r_n} = b$. Para fixar as ideias, supomos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que $a^{r_1} < a^{r_2} < ... < a^{r_n} < ... < b$.

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então a monotocidade da função a^x nos assegura que $r_1 < r_2 < ... < r_n < ... < s$

Assim, (r_n) é uma sequência crescente e limitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante então que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{x \to x_0} r_n = x$. A função exponencial sendo contínua, temos então $a^x = \lim_{x \to x_0} a^{r_n} = b$. $\square$

Podemos, então, concluir que, para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

A figura a seguir mostra o gráfico de $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.

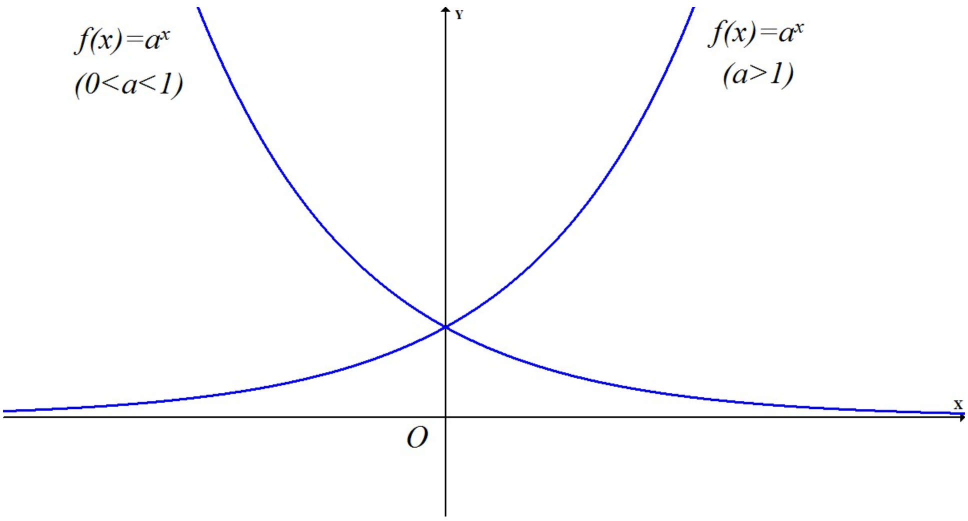

Figura 4.1: Gráfico da função exponencial

As funções exponenciais possuem um importante papel na modelagem matemática e é uma das ferramentas mais significativas para este fim. Por isso faremos um estudo das propriedades dessas funções que estão descritas nos próximos teoremas.

Teorema 4.1 (Caracterização da função exponencial)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;*

2. *$f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;*

3. *$f(x + y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Provaremos as implicações *(1)* $\Rightarrow$ *(2)* $\Rightarrow$ *(3)* $\Rightarrow$ *(1)*. Observemos inicialmente que a hipótese *(1)* acarreta que, para todo número racional $r = m/n$, (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) temos que $f(rx) = f(x)^r$. Como $nr =,$, podemos escrever $f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$, logo $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$. Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para mostrar que *(1)* $\Rightarrow$ *(2)* vamos supor que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$ e vamos admitir (por absurdo), que existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$ (Para $f(x) > a^x$ é análogo). Então, pelo Lema 4.1, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$ ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, sendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição prova que *(1)* $\Rightarrow$ *(2)* As implicações restantes *(2)* $\Rightarrow$ *(3)* e *(3)* $\Rightarrow$ *(1)* são obvias. $\square$

Podemos afirmar que uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo *exponencial* quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Para $a > 1$, g é crescente e para $0 < a < 1$, g é decrescente.

Se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$ os quocientes $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1$ e $\dfrac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$ dependem apenas de h, mas não de x. O próximo Teorema de caracterização mostra que vale a recíproca dessa afirmação.

Teorema 4.2 (Primeira caracterização das funções de tipo exponencial)**.** *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. A hipótese equivale a suposição que $\varphi(h) = g(x+h)/g(x)$ independe de x. Substituindo $g(x)$ por $f(x) = g(x)/b$, onde $b = g(0)$, obtemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, agora com $f(0) = 1$. Então pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = f(x+h)/f(x)$ obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Assim f cumpre $f(x+h) = f(x).f(h)$, ou seja $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 4.1 temos que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = b$ e $f(x) = ba^x$. $\square$

Por fim, a outra caracterização das funções de tipo exponencial, que chamaremos de *Segunda caracterização das funções de tipo exponencial*, se mostra bastante útil em situações concretas pois é bem mais fácil de ser empregada e possui um significado bastante intuitivo. Um exemplo de interpretação é que podemos tomar $f(b, t)$ como o valor no instante t, de uma grandeza que varia com o tempo e veremos que $b = f(b, 0)$ é o valor inicial dessa grandeza (correspondente ao instante $t = 0$).

Teorema 4.3 (Segunda caracterização das funções de tipo exponencial)**.** *Para cada b e cada t reais, suponhamos dado um número $f(b, t) > 0$ com as seguintes propriedades:*

1. *$f(b, t)$ depende linearmente de t e é monótona injetiva em relação a t;*

2. *$f(b, s + t) = f(f(b, s), t)$.*

Então, pondo $a = f(1, 1)$, tem-se $f(b, t) = b \cdot a^t$.

Demonstração. A função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $\varphi(t) = f(1,t)$ é monótona injetiva e cumpre $\varphi(s+t) = f(1,s+t) = f(f(1,s),t) = f(1,s) \cdot f(1,t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$ em virtude de *(1)* e *(2)* pois $f(1,s) = f(1,s) \cdot 1$.

Pelo Teorema 4.1, temos que $\varphi(t) = a^t$, onde $a = \varphi(1) = f(1,1)$. Portanto $f(b,t) = f(b \cdot 1, t) = b \cdot f(1,t) = b \cdot \varphi(t) = b \cdot a^t$.

Para compreender o item *(2)* do Teorema 4.3 basta notar que $b = b \cdot a^0 = f(b,0)$, ou seja, que b é o valor inicial da grandeza $f(b,t)$ no instante $t = 0$ (assumindo que t é o tempo decorrido desde que a grandeza passou do valor $b = f(b,0)$ para o valor $f(b,t)$). Assim, o item *(2)* diz que começar com o valor b e deixar passar o tempo $s+t$ é o mesmo que começar com o valor $f(b,s)$ e deixar transcorrer o tempo t. □

4.3 A Função Logarítmica

Nesta seção definiremos funções logarítmicas como sendo a função inversa da função exponencial, trazendo alguns resultados imediatos dessa definição e suas propriedades mais fundamentais. Nesta seção do trabalho optamos em apresentar as definições e demonstrações da referência [11] mas o leitor também pode olhar a referência [15].

A função logarítmica é caracterizada pela função inversa da função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$. Temos então, que a inversa da função exponencial de base a é a função

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x, o número real $\log_a x$, chamado de *logaritmo* de x na base a. Pela definição de função inversa, temos que

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a(a^x) = x.$$

Assim, fica claro que $\log_a x$ é o expoente ao qual devemos elevar a base a para obter o número x. Ou seja,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Na seção de potências de expoente racional vimos que $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ e desta relação segue, imediatamente, uma importante propriedade dos logaritmos

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Outra importante característica da função logarítmica é a possibilidade de mudança de base. Se $u = \log_a x$ e $v = \log_2 x$ então $a^u = x$ e $2^v = x$, portanto se escrevermos $c = \log_a 2$ teremos $a^c = 2$, logo

$$x = a^u = 2^v = (a^c)^v = a^{cv}$$

portanto $u = cv$, ou seja, $\log_a x = c \cdot \log_2 x$ para todo $x > 0$, onde a constante c é igual a $\log_a 2$ e obtemos a chamada *fórmula de mudança de base* para logaritmos

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$

Quando a e b são ambos maiores ou ambos menores que 1 então $\log_a b > 0$. Se um dos números a, b é maior e o outro é menor que 1 então $\log_a b < 0$. A fórmula acima diz que duas funções logarítmicas quaisquer diferem por um fator constante.

Assim como a função exponencial, a função logarítmica $\log_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Como $a^0 = 1$ então $\log_a 1 = 0$

A figura a seguir mostra o gráfico de $f(x) = \log_a x$ no caso $a > 1$.

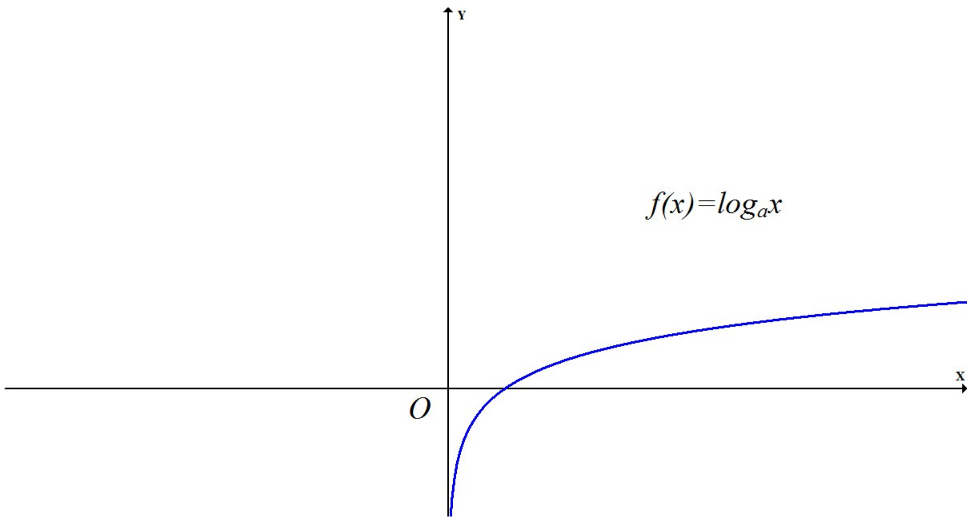

Figura 4.2: Gráfico da função logarítmica

A função $y = \log_a x$ é ilimitada, tanto superiormente quanto inferiormente, pois $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca, portanto é sobrejetiva e consequentemente ilimitada. Mais precisamente, tem-se para $a > 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty$$

Na função logarítmica quando $x \to +\infty$ ela cresce muito lentamente, ao contrário da função exponencial que cresce rapidamente.

Assim como as funções exponenciais, as funções logarítmicas possuem um importante papel na modelagem matemática já que possuem a propriedade de transformar produtos em somas. Faremos a seguir o estudo da sua propriedade característica que está descrita no próximo teorema.

Antes de enunciar o teorema recordemos que se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é tal que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $f(y) = \log_a y$ para todo $y \in \mathbb{R}^+$, pois $x \mapsto a^x$ é uma função sobrejetiva de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$.

Teorema 4.4 (Caracterização das Funções Logarítmicas). *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração. Inicialmente vamos admitir f crescente (o caso de f decrescente é tratado igualmente). Temos $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$.

Suponha que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$. Em breve mostraremos que isso sempre acontece, logo não é uma hipótese adicional. Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, então $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{Z}$ podemos afirmar

$$f(a^m) = f(a \cdot a \cdot ... \cdot a) = f(a) + f(a) + ... + f(a) = 1 + 1 + ... + 1 = m,$$

e

$$0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}),$$

logo $f(a^{-m}) = -m$. Se $r = m/n$ com $m, n \in \mathbb{Z}$ então $rn = m$, portanto

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r)$$

então $f(a^r) = m/n = r$. Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então, para r, s racionais tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s.$$

Assim todo número racional r, menor que x é também menor que $f(a^x)$ e todo número racional s maior que x é também maior que $f(a^x)$. Segue que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$.

Vejamos agora o caso geral, em que dada a função crescente $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que

$$g(xy) = g(x) + g(y)$$

Então $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = g(x)/b$, é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$, vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = (2^{1/b})^{g(x)} = a^{g(x)},$$

com $a = 2^{1/b}$. Tomando $\log_a$ de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ vem finalmente $g(x) = \log_a x$. $\square$

Encerramos aqui a apresentação das propriedades fundamentais e de caracterização das funções exponenciais e logarítmicas para que no capítulo seguinte apliquemos essas propriedades em uma atividade de modelagem matemática proposta para alunos do primeiro ano do ensino médio.

5 Proposta de Modelagem Matemática para o Ensino Médio.

Nesta etapa do trabalho, apresentaremos uma proposta de modelagem matemática para o ensino médio com o tema *Consumo de álcool* para trabalhar o tema Funções e com foco especial em Funções Exponenciais e Logarítmicas. O conteúdo programático está de acordo com a proposta curricular do primeiro ano do ensino médio, por isso foi formulada de modo que seja totalmente possível de ser aplicada em tal etapa do ensino.

Esta proposta foi baseada no modelo *Alcoolismo* exposto por Bassanezi em [4] e formulada seguindo as 6 etapas para o desenvolvimento do conteúdo programático proposto por Biembengut em [8] e que foram citadas no início deste trabalho.

Conforme as etapas propostas por Biembengut, iniciaremos com uma breve exposição do tema contendo informações essencias para a familiarização com o tema e que permitirá gerar o levantamento de questões para instigar os alunos. Ao selecionar as questões para que os alunos proponham respostas daremos início a *matematização* desenvolvendo a matemática necessária para a obtenção dos modelos matemáticos que resolverão o problema.

Com o tema comum *Consumo de álcool* serão adotadas 3 maneiras diferentes de obtenção de um modelo matemático e com nível de dificuldade aumentando gradualmente. Esta proposta permitirá que os alunos interajam com o tema e com a construção dos modelos durante todo seu desenvolvimento.

Para o desenvolvimento desses modelos adotaremos o vinho como uma bebida alcoolica de referência para padronizar e interligar os 3 modelos que serão elaborados e consideraremos 1 cálice contendo 75ml de vinho.

No **Modelo 1** buscaremos uma forma de calcular a quantidade de gramas de álcool ingeridas ao tomar quantidades diferentes de vinho e a modelagem surgirá de forma intuitiva, com uma simples substituição de variáveis e obtenção de uma função afim permitindo que a modelagem também seja obtida na construção do gráfico desta função.

No **Modelo 2** já um pouco mais elaborado, faremos uma proposta de análise de uma planilha editável oferecida pelo projeto “Viver Bem” da Unesp - Campus de Botucatu. Este projeto consiste em um programa de prevenção do uso de álcool e drogas desenvolvido pela Faculdade de Medicina, campus de Botucatu desde 1997, com o qual tivemos contato através do site [16] do projeto e verificamos a existência da planilha editável, encontrando ali uma boa oportunidade de modelar algumas situações da planilha e vincular ao tema deste trabalho. Neste momento do trabalho o professor poderá permitir que os alunos manipulem a planilha e escolham uma situação que desejam modelar, enriquecendo ainda mais o trabalho na sala de aula. Em nossa proposta, faremos uma análise (até mesmo como forma de exemplo de abordagem) de um indivíduo do sexo masculino que consome 1 cálice de vinho por hora durante 12 horas e buscaremos um modelo que determine a concentração de álcool no sangue deste indivíduo se ele assim permanecer por n horas. Aqui a modelagem surgirá através da análise de uma sequência e de metódos de resolução de uma recorrência para a obtenção de uma função afim.

O **Modelo 3** será o modelo principal, cujo tema *A Modelagem Matemática para o ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas* originou este trabalho de dissertação. Nossa proposta é sensibilizar os alunos com uma pesquisa sobre a ingestão de álcool e a chance de participar de um acidente de trânsito. Ofereceremos uma tabela com informações sobre a chance de sofrer um acidente aumentando exponencialmente com o aumento do consumo de cálices de vinho. Em nossa proposta sugerimos que a construção de um gráfico seja feita antes da busca da "fórmula matemática"que representa a situação, para ajudar os alunos a perceberem o aumento característico de uma função exponencial, com esta análise visual da situação formularemos uma proposta de modelagem utilizando a *Segunda Caracterização das Funções Exponenciais* e obtenção de um modelo da forma $f(b,t) = b \cdot a^t$. Esta modelagem é feita utilizando propriedades de *Potências de Expoente Racional, Logaritmos e Funções Logarítmicas* e permite que o professor aproveite sua formulação para a construção da matemática necessária para este desenvolvimento.

Os 3 modelos propostos serão interligados, não apenas pelo tema, mas haverá uma ligação entre a obtenção de um e aplicação na próxima etapa do trabalho, por exemplo, os alunos poderão verificar que na tabela fornecida no **Modelo 2** a quantidade de gramas ingeridas foram obtidas através do **Modelo 1**, entre outras ligações.

Acreditamos que com este trabalho seja possível criar um ambiente de aprendizagem muito favorável ao ensino de conceitos matemáticos importantíssimos para esta etapa do ensino médio e também para a formação de cidadãos conscientes e capazes de interagir ativamente com o meio através do conhecimento matemático.

5.1 Consumo de álcool

Um dos principais problemas da sociedade moderna é o consumo excessivo de drogas por pessoas de todas as faixas etárias e as bebidas alcoólicas se enquadram nessa categoria. Apesar de ter o consumo permitido pela lei brasileira e de ter aceitação por grande parte da sociedade, o álcool é uma droga depressora do sistema nervoso central que afeta diretamente órgãos como o fígado, o coração e o estômago.

Quando consumido em pequena quantidade, o álcool promove uma pequena euforia e desinibição, porém com o aumento dessa quantidade os efeitos vão se agravando, passando por diminuição dos reflexos, dificuldade na fala, dificuldade de locomoção até chegar ao extremo estado de coma e até mesmo morte.

A tabela 5.1 mostra 3 exemplos de bebidas alcoólicas muito consumidas no Brasil e qual a porcentagem de álcool que cada uma delas possui.

Bebida	Porcentagem de álcool
Cerveja	5%
Vinho	18%
Uísque	40%

Tabela 5.1: Porcentagem de álcool por bebida

Depois de consumido, o álcool entra na corrente sangüínea e se dissolve na água do sangue. O sangue carrega o álcool por todo o corpo. O álcool do sangue, então, entra e se dissolve na água dentro de cada tecido do corpo (exceto o tecido de gordura, já que o álcool não pode se dissolver em gordura). Uma vez dentro dos tecidos, o álcool mostra seus efeitos no corpo.

Os efeitos observados dependem diretamente da concentração de álcool no sangue (CAS), que está relacionada com a quantidade de álcool consumida.

Veja na tabela 5.2 os níveis de concentração de álcool no sangue (CAS) e os sintomas clínicos correspondentes.

Os efeitos do álcool dependem de fatores como a quantidade de álcool ingerido em determinado período, uso anterior de álcool e a concentração de álcool no sangue.

Modelo 1

Como determinar a quantidade de gramas de álcool ingerida por um indivíduo?

Queremos fazer uma conversão de unidades de medida, de mililitros de álcool para gramas de álcool e para isso precisamos saber a densidade do álcool para efetuar a conversão. Como a densidade do álcool é 80% da densidade da água, devemos analisar quantos ml de vinho foi consumido e sua porcentagem de álcool. Vamos considerar que este indivíduo tenha consumido vinho e pelas informações da tabela 5.1, sabemos que o vinho possui 18% de álcool em sua composição.

Sejam as variáveis y a quantidade de gramas de álcool ingeridas e x a quantidade de mililitros da bebida consumida, temos:

CAS (g/100ml)	Efeitos sobre o corpo
$0,01 - 0,05$	Aumento do ritmo cardíaco e respiratório
	Diminuição das funções de vários centros nervosos
	Comportamento incoerente ao executar tarefas
	Diminuição da capacidade de discernimento e perda da inibição
	Leve sensação de euforia, relaxamento e prazer
$0,06 - 0,10$	Entorpecimento fisiológico de quase todos os sistemas
	Diminuição da atenção e da vigilância, reflexos mais lentos, dificuldade de coordenação e redução da força muscular
	Redução da capacidade de tomar decisões racionais ou de discernimento
	Sensação crescente de ansiedade e depressão
	Diminuição da paciência
$0,11 - 0,15$	Reflexos consideravelmente mais lentos
	Problemas de equilíbrio e de movimento
	Alteração de algumas funções visuais
	Fala arrastada
	Vômito, sobretudo se esta alcoolemia for atingida rapidamente
$0,16 - 0,29$	Transtornos graves dos sentidos, inclusive consciência reduzida dos estímulos externos
	Alterações graves da coordenação motora, com tendência a cambalear e a cair frequentemente
$0,30 - 0,39$	Letargia profunda
	Perda da consciência
	Estado de sedação comparável ao de uma anestesia cirúrgica
	Morte (em muitos casos)
A partir de 0,40	Inconsciência
	Parada respiratória
	Morte, em geral provocada por insuficiência respiratória

Tabela 5.2: Concentração de álcool no sangue (CAS) e os sintomas clínicos correspondentes.

$y = (x \cdot 0,18 \cdot 0,8) \Rightarrow y = 0,144 \cdot x$

Concluindo-se que a quantidade de gramas de álcool ingerida é descrita por uma função afim e seu gráfico está representado na figura 5.1:

Vejamos alguns resultados para um indivíduo que consome de uma única vez:

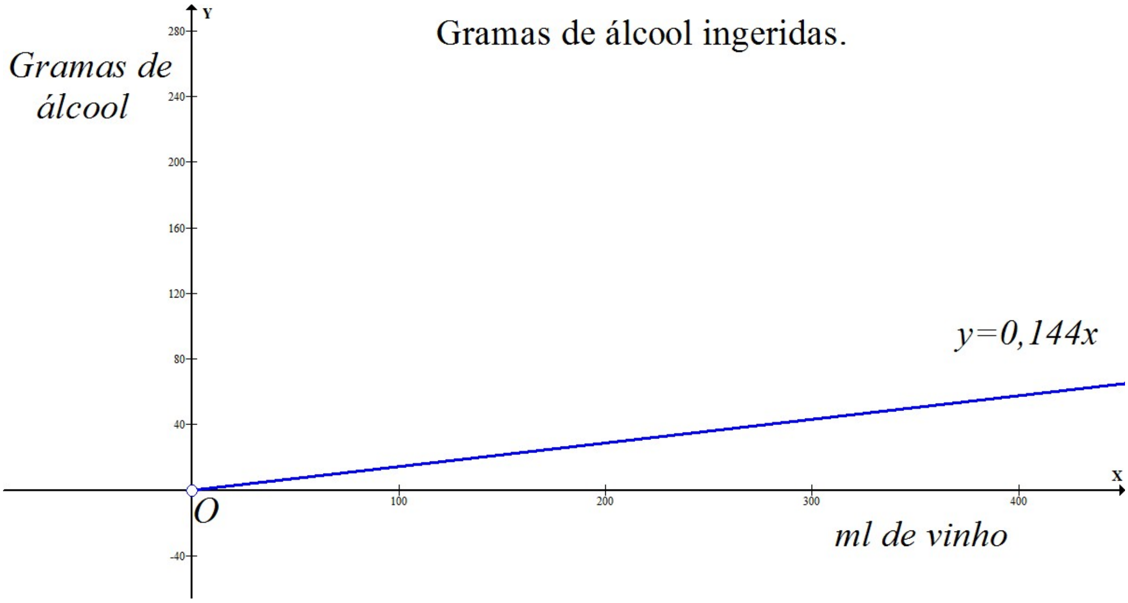

Figura 5.1: Gramas de álcool ingeridas.

1 cálice:

$$y = 0,144 \cdot x \Rightarrow y = 0,144 \cdot 75 \Rightarrow y = 10,8 \tag{5.1}$$

200 ml:

$$y = 0,144 \cdot x \Rightarrow y = 0,144 \cdot 200 \Rightarrow y = 28,8 \tag{5.2}$$

1 litro:

$$y = 0,144 \cdot x \Rightarrow y = 0,144 \cdot 1000 \Rightarrow y = 144 \tag{5.3}$$

Neste modelo não consideramos que com o decorrer do tempo o corpo humano vai eliminando o álcool aos poucos e consequentemente diminuindo sua concentração no sangue. Nosso objetivo é determinar, apenas a quantidade de gramas ingeridas, supondo que o indivíduo consuma essa quantidade de uma única vez. Durante o desenvolvimento do trabalho com os alunos, se essa questão surgir, sugerimos que seja feita uma pesquisa de como o álcool é eliminado pelo corpo e busque um novo modelo para discrever essa situação.

Modelo 2

A UNESP- Campus de Botucatu possui um projeto denominado *Projeto Viver Bem* sobre conscientização do uso de álcool. No site do projeto é fornecida uma planilha em que é possível descriminar o tipo e quantidade de bebida ingerida por um indivíduo e esta planilha fornece a concentração de álcool no sangue deste indivíduo. Fizemos uma simulação com um indivíduo do sexo masculino de 75kgs que consumiu 1 cálice de vinho (75ml) por hora, durante 12horas e obtivemos a tabela reproduzida na figura 5.2:

Sexo M
Hora Inicial 18 horas
Peso 75 kg

Hora	N.º de Bebidas		Álcool Bebido (g)	Álcool Retido (g)	Álcool NAS
17h			0,0	0,0	0
18h	1	Vinho do Porto, Mart	10,8	10,8	0,017
19h	1	Vinho do Porto, Mart	10,8	11,8	0,019
20h	1	Vinho do Porto, Mart	10,8	12,8	0,021
21h	1	Vinho do Porto, Mart	10,8	13,7	0,022
22h	1	Vinho do Porto, Mart	10,8	14,7	0,024
23h	1	Vinho do Porto, Mart	10,8	15,7	0,025
h	1	Vinho do Porto, Mart	10,8	16,7	0,027
1h	1	Vinho do Porto, Mart	10,8	17,6	0,028
2h	1	Vinho do Porto, Mart	10,8	18,6	0,030
3h	1	Vinho do Porto, Mart	10,8	19,6	0,032
4h	1	Vinho do Porto, Mart	10,8	20,6	0,033
5h	1	Vinho do Porto, Mart	10,8	21,5	0,035

Figura 5.2: Simulação de consumo de vinho e concentração de álcool no sangue

Ao observar esta simulação surge o questionamento sobre o cálculo da concentração de álcool no sangue e se é possível determinar a concentração de álcool no sangue de um indivíduo consumindo um cálice de vinho por hora durante n horas.

É possível determinar a concentração de álcool no sangue de um indivíduo consumindo um cálice de vinho por hora durante n horas?

Analisando os dados da figura 5.2 e considerando que um cálice de vinho contém 10,8 gramas de álcool (que calculamos no modelo 1, pela equação (5.1)), observa-se que o álcool ingerido no primeiro cálice fica totalmente retido. Após o primeiro cálice ingerido, a quantidade retida no organismo, quase sempre aumenta 1,0 grama a cada cálice ingerido. Verifiquemos recursivamente como o álcool fica retido no corpo.

1ª dose: $a_1 = 10,8$

2ª dose: $a_2 = 11,8 = a_1 + 1$

3ª dose: $a_3 = 12,8 = a_2 + 1 = a_1 + 2$

4ª dose: $a_4 = 13,8 = a_3 + 1 = a_1 + 3$

5ª dose: $a_5 = 14,8 = a_4 + 1 = a_1 + 4$

$\vdots$

nª dose: $a_n = a_1 + (n-1) \Rightarrow a_n = 10,8 + (n-1)$

Observação: Para determinar a concentração de álcool no sangue(CAS), o Projeto Viver Bem divide a quantidade de gramas ingeridas pelo peso do indivíduo e multiplica por uma constante, chamada de constante de concentração que é 0,147 para os homens e 0,121 para as mulheres. Essas informações são oferecidas na planilha editável que possibilita a visualização dos cálculos efetuados durante as simulações. Sendo assim, temos a seguinte função:

$$C(n) = \frac{[10,8 + (n-1)] \cdot 0,147}{75} = \frac{1,5876 + 0,147(n-1)}{75}$$

Pelo modelo encontrado podemos fazer algumas análises:

- Se este indivíduo permanecer tomando um cálice de vinho por hora durante 24 horas, qual será sua concentração de álcool no sangue?

$$\begin{aligned} C(n) &= \frac{1,5876 + 0,147(n-1)}{75} \\ &= \frac{1,5876 + 0,147(24-1)}{75} \\ &= \frac{1,5876 + 0,147(23)}{75} \\ &= 0,066 \end{aligned}$$

Segundo a tabela 5.2 para $C(n) = 0,066$ o individuo apresenta entorpecimento fisiológico de quase todos os sistemas, diminuição da atenção e da vigilância, reflexos mais lentos, dificuldade de coordenação e redução da força muscular, redução da capacidade de tomar decisões racionais ou de discernimento, sensação crescente de ansiedade ou depressão e diminuição da paciência.

- O Projeto Viver Bem, considera um CAS seguro e aceitável de $0,055$, para isso o individuo poderá permanecer tomando um cálice de vinho por hora por quantas horas?

$$\begin{aligned} C(n) &= \frac{1,5876 + 0,147(n-1)}{75} \\ 0,055 &= \frac{1,5876 + 0,147(n-1)}{75} \\ 4,125 &= 1,5876 + 0,147(n-1) \\ 2,5374 &= 0,147n - 0,147 \\ 2,6844 &= 0,147n \\ n &= 18,26. \end{aligned}$$

Durante 18 horas o indivíduo permanecerá na faixa considerada segura e aceitável.

Modelo 3

O acidente de transito é a principal causa de mortes de jovens no mundo e grande parte desses acidentes está relacionada de alguma forma com o consumo do álcool. No Brasil uma forte campanha de conscientização vem sendo feita juntamente com a implementação da chamada *Lei Seca* que estabelece tolerância zero para o consumo de álcool por motoristas.

Uma experiência realizada nos Estados Unidos, em 86 indivíduos, com média de 72kg, e estando 2 horas sem comer, mostrou que o risco de acidentes automobilísticos cresce significativamente com a quantidade de uísque ingerido. Fazendo uma analogia com a ingestão de vinho, obtemos a tabela 5.3:

Risco de Acidentes R_i (%)	Vinho ingerido α_i (Cálices)
$1,0$	0
$7,3$	$8,5$
20	12
35	$14,6$
$48,5$	15

Tabela 5.3: Risco de acidentes e quantidade de álcool ingerido. Fonte: Tabela adaptada de [4] - pag 275

Qual é o risco de participar de acidentes por ingestão de bebidas alcoólicas?

Vejamos, na Figura 5.3 a construção do gráfico desta tabela, relacionando o risco de acidentes com a quantidade de cálices de vinho ingeridos.

Aparentemente o risco de acidentes (R) cresce exponencialmente em relação à quantidade α_i de bebida ingerida.

Vamos tentar propor um modelo utilizando a segunda caracterização das funções exponenciais ($b \cdot a^t$), e teremos os seguintes dados:

$$b \cdot a^0 = 1 \Rightarrow a^0 = 1/b \tag{5.4}$$

$$b \cdot a^{8,5} = 7,31 \Rightarrow a^{8,5} = 7,3/b \Rightarrow \log_a 7,3/b = 8,5 \Rightarrow \log_a 7,3 - \log_a b = 8,5 \tag{5.5}$$

$$b \cdot a^{12} = 20 \Rightarrow a^{12} = 20/b \Rightarrow \log_a 20/b = 12 \Rightarrow \log_a 20 - \log_a b = 12 \tag{5.6}$$

$$b \cdot a^{14,6} = 35 \Rightarrow a^{14,6} = 35/b \Rightarrow \log_a 35/b = 14,6 \Rightarrow \log_a 35 - \log_a b = 14,6 \tag{5.7}$$

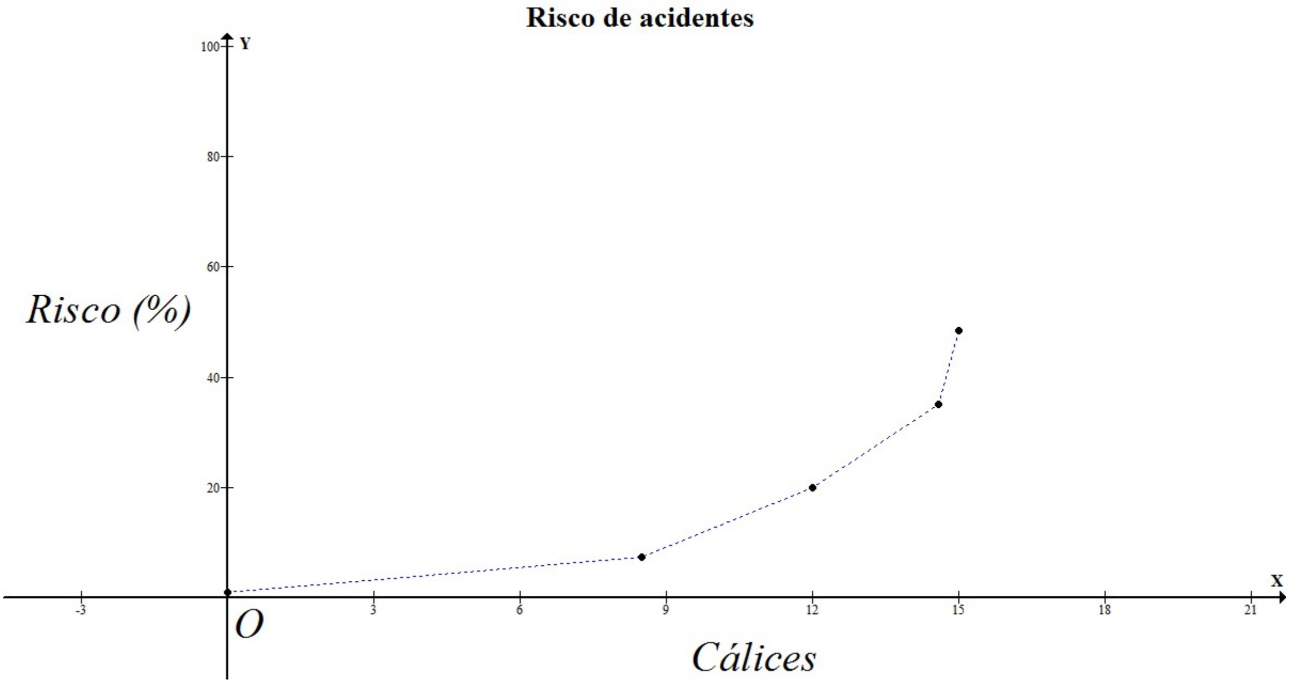

Figura 5.3: Risco de acidentes

$$b \cdot a^{15} = 48,5 \Rightarrow a^{15} = 48,5/b \Rightarrow \log_a 48,5/b = 15 \Rightarrow \log_a 48,5 - \log_a b = 15 \qquad (5.8)$$

Efetuando (5.8) - (5.6) temos:

$$\begin{cases} \log_a 48,5 - \log_a b = 15 \\ \log_a 20 - \log_a b = 12 \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned} \log_a 48,5 - \log_a 20 &= 3 \\ \log_a \frac{48,5}{20} &= 3 \\ a^3 &= 2,425 \\ a &\cong 1,344 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de $a \cong 1,344$ em $b \cdot a^{\alpha}$ temos:

$$b \cdot 1,344^{\alpha}.$$

Substituindo em $b \cdot a^{12}$ temos:

$$
\begin{aligned}
b \cdot 1,344^{12} &= 20 \\
20/b &\cong 35,04 \\
35,04b &\cong 20 \\
b &\cong 20/35,04 \\
b &\cong 0,57.
\end{aligned}
$$

Finalmente temos o modelo

$$R(\alpha) = 0,57 \cdot 1,344^{\alpha}.$$

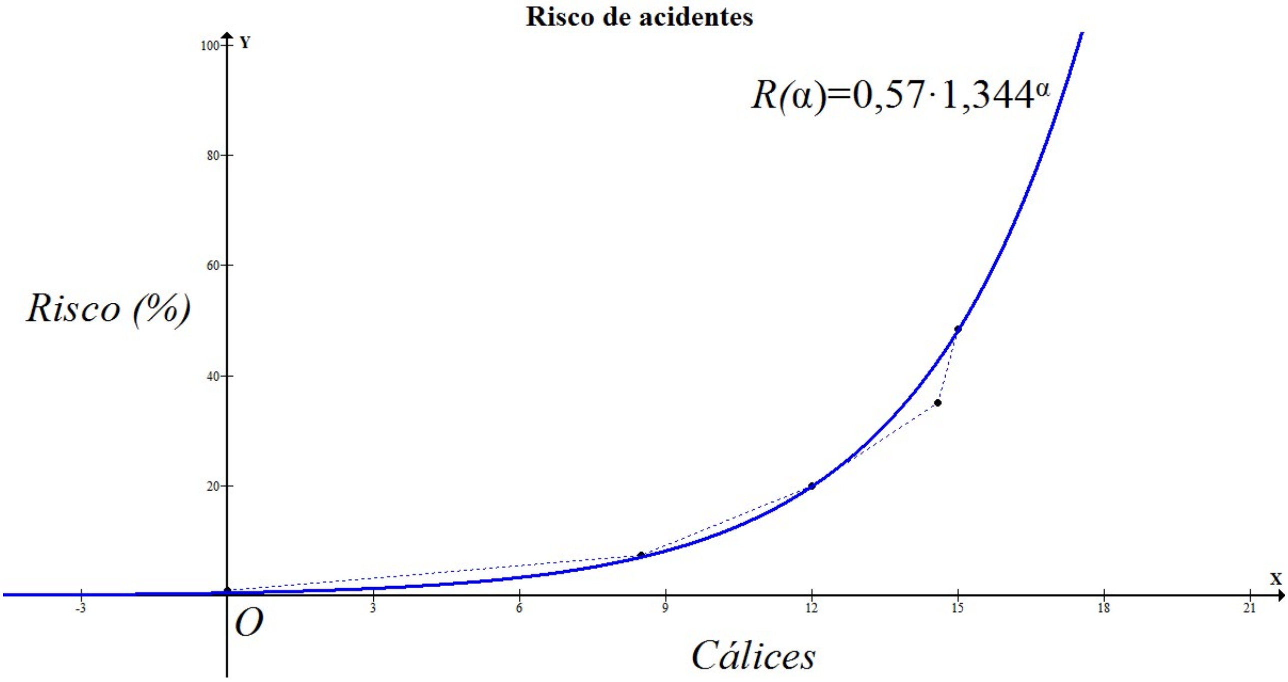

Figura 5.4: Risco de acidentes

Pelo modelo encontrado podemos fazer algumas análises:

- O indivíduo que consumir 1 cálice de vinho correrá qual risco de participar um acidente?

$$
\begin{aligned}
R(\alpha) &= 0,57 \cdot 1,344^{\alpha} \\
R(1) &= 0,57 \cdot 1,344^{1} \\
R(1) &= 0,767
\end{aligned}
$$

Correrá um risco de $0,767\%$.

- A certeza de um acidente acontece quando o indivíduo consumir quantos cálices de vinho?

$$\begin{aligned} R(\alpha) &= 100 \\ 100 &= 0,57 \cdot 1,344^{\alpha} \\ 100/0,57 &= 1,344^{\alpha} \\ 175,44 &= 1,344^{\alpha} \\ \log_{1,344} 175,44 &= \alpha \\ \alpha &= 17,48 \end{aligned}$$

Ao consumir 17,5 cálices de vinho o acidente acontecerá com certeza.

Durante a aplicação desta atividade em sala de aula, o professor pode permitir que os alunos utilizem dois pontos quaisquer da tabela para modelar a situação. Os modelos obtidos terão pequenas diferenças nas bases e será uma ótima oportunidade de discussão sobre as bases das funções exponenciais e com as construções dos gráficos dos modelos obtidos o professor poderá levantar a questão sobre qual seria a base que melhor descreve a situação. Acreditamos que momentos como esse enriquecerão ainda mais o desenvolvimento desta atividade.

6 Considerações Finais

Acreditamos que este trabalho possa contribuir para uma abordagem diferenciada no ensino de funções exponenciais e logarítmicas. Temas estes que são constantemente abordados de forma mecânica e desvinculados da realidade e vivências dos alunos.

Em nossa proposta foi possível explorar as definições e propriedades das funções de forma natural e aplicadas a uma situação muito presente no cotidiano dos alunos, já que o consumo de álcool se inicia cada vez mais cedo pelos adolescentes.

Neste caso, o papel da matemática ultrapassa os limites da sala de aula, chegando à vida social dos alunos e cumpre o papel de agente transformador desses alunos pois se torna um instrumento de leitura crítica de situações cotidianas.

Através da modelagem foi possível fazer uma reflexão da situação e ter uma melhor compreensão da realidade que o aluno está inserido.

Esperamos que este trabalho possa ser desenvolvido em ambientes escolares diversos e que consiga alcançar seus objetivos de ensino e aprendizagem dos temas matemáticos propostos, além de conscientizar os adolescentes sobre os problemas vinculados ao consumo de álcool.

Referências

[1] LEONARDO, F. M. de. *Conexões com a Matemática*. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

[2] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. 2. ed. São Paulo: Atical, 2013.

[3] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: introdução á Análise*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[4] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 1. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

[5] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. 1. ed. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 2000.

[6] BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1974.

[7] ALMEIDA, L. M. W. de. *Modelagem matematica na educação básica*. São Paulo: Contexto, 2012.

[8] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

[9] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. 1. ed. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

[10] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. 1. ed. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

[11] LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[12] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos, funções*. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

[13] LIMA, E. L. *Análise Real volume 1. Funções de uma variável*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[14] LIMA, E. L. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[15] APOSTOL, T. M. *Cálculo*. 2. ed. trad. de Antonio Ribeiro Gomes, Rio de Janeiro: Reverte, 1983.

[16] UNESP. *Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho - Campus de Botucatu*. Como calcular a concentração de álcool no sangue, último acesso em 06.06.2016: disponível em: <http://www.viverbem.fmb.unesp.br/CalcNivAlcoolSangue.xls>.

[17] IEZZI, C. M. G. *Fundamentos de Matemática Elementar, 2: logaritmos*. 9. ed. São Paulo: Atual, 2004.

[18] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. 1. ed. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 2002.

[19] UNIFESP. *Universidade Federal de São Paulo - Departamento de Psicobiologia*. Álcool, último acesso em 06.06.2016: disponível em: <http://www2.unifesp.br/dpsicobio/drogas/alcool>.

[20] CISA. *Centro de Informações sobre Saúde e Álcool*. Efeitos do Álcool - ultimo acesso em 06.06.2016: disponível em: <http://www.cisa.org.br/artigo.php?FhIdTexto=233>.

[21] CISA. *Centro de Informações sobre Saúde e Álcool*. O impacto da "Lei Seca"no Brasil nas mortes no trânsito, último acesso em 06.06.2016: disponível em: <http://www.cisa.org.br/artigo/5828/-impacto-lei-seca-no-brasil-nas.php>.