Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Modelagem Matemática no Ensino Médio por Meio de Sequências e Séries Numéricas

Claudio Fernandes Vasconcelos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Ricardo de Sá Teles

2016

510 Vasconcelos, Claudio Fernandes
V331m Modelagem matemática no ensino médio por meio de seqüências e séries numéricas / Claudio Fernandes Vasconcelos. - Rio Claro, 2016
67 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Ricardo de Sá Teles

1. Matemática. 2. Modelagem matemática. 3. Seqüências numéricas. 4. Series numéricas. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Claudio Fernandes Vasconcelos

Modelagem Matemática no Ensino Médio por Meio de Sequências e Séries Numéricas

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Ricardo de Sá Teles
Orientador

Prof(a). Dr(a). Érica Regina Filletti Nascimento
DFQ - UNESP ARARAQUARA

Prof(a). Erika Capelato
FCLAR - UNESP ARARAQUARA

Rio Claro, 22 de Agosto de 2016

Dedico este trabalho a minha família que sempre me apoiou nos momentos difíceis de minha jornada.

Agradecimentos

Agradeço principalmente a Deus por me dar forças para conquistar esse objetivo, aos meus colegas que sempre compartilharam de seu conhecimento para enriquecer o meu e aos professores que estiveram a disposição para me auxiliar.

A problemática da paz deve ser o centro de nossas reflexões sobre o futuro..

Ubiratan D'Ambrósio

Resumo

Neste trabalho discorremos brevemente a respeito da modelagem matemática como metodologia de ensino e pesquisa e do modo como ela é abordada nos parâmetros curriculares nacionais. Apresentamos vários resultados da teoria de sequências e séries numéricas e, por fim, colocamos algumas propostas pedagógicas utilizando a modelagem matemática juntamente com a teoria de sequências e séries numéricas. O intuito destas propostas é proporcionar a construção do conhecimento matemático nos alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Sequências Numéricas, Séries Numéricas.

Abstract

In this paper we discus briefly about the mathematical modeling as a teaching methodology and research and how it is addressed in the national curriculum guidelines. Here various sequences results of the theory and numerical series and finally placed some proposals teaching using the mathematical model with the theory sequences and numerical series . The aim of these proposals is to provide the construction of mathematical knowledge in high school students.

Keywords: Mathematical modeling, Numerical sequences, Numerical series.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Neste capítulo discorremos brevemente a respeito de modelagem matemática destacando a importância de introduzi-la no ambiente da sala de aula.

Ao longo dos anos na literatura foram escritas diversas definições para o termo modelagem matemática. Bassanezi assume que "um modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado" (2002, p.20).

Quando falamos em modelagem como um método educacional podemos defini-lo como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas do conhecimento.

De acordo com [MONTEIRO, 1991], existem duas vertentes que utilizam a Modelagem: os que a veem como um método de pesquisa em Matemática e os que a veem como um método pedagógico no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Podemos afirmar que existem estudos sobre modelagem matemática na área do ensino utilizando-a como metodologia pedagógica e na área de desenvolvimento de modelos matemáticos para pesquisa acadêmica. Observando que um grupo não exclui o outro, os modelos desenvolvidos por meio de pesquisas acadêmicas, podem ser utilizados no ensino da matemática, quando devidamente adaptados

Para o grupo que desenvolve modelos matemáticos para pesquisa, a modelagem é entendida como a construção de um problema a partir de um fato da realidade onde são levantadas hipóteses, e pode ser resolvido por meio de cálculos matemáticos e posteriormente verifica-se a sua validade. Caso seja constatado que a solução não é válida, novas hipóteses são elaboradas e o processo recomeça. Este grupo realiza pesquisas em Matemática Aplicada e Pura, onde modelos matemáticos são desenvolvidos para resolver um dado problema e de posse destes modelos, os pesquisadores podem realizar previsões, elaborar hipóteses e conjecturas sobre o fenômeno estudado, dependendo do objetivo do estudo, dos dados e materiais disponíveis para isso.

Já para o grupo que utiliza a modelagem como metodologia de ensino, a Modelagem é encarada como um caminho para a construção do conhecimento matemático, observando a realidade do aluno e, "a partir de seus questionamentos se defronta com problemas que devem modificar tanto a sua ação, como sua forma de observar tal mundo" [MONTEIRO, 1991, p. 106].

A História da Matemática nos leva ao encontro de situações em que temos fenômenos do cotidiano modelados para se tornarem modelos matemáticos que possam ser testados e validados. Dessa forma, não são poucos os pesquisadores que associam a evolução da Modelagem Matemática com a própria História da Matemática. Para Biembengut e Hein, "a modelagem é tão antiga como a própria matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos" [BIEMBENGUT, M. S. HEIN, 2002, p. 8].

Podemos citar alguns fenômenos reais que foram modelados e se tornaram modelos de problemas matemáticos, que fazem parte da história da humanidade:

- Os modelos populacionais matemáticos, que são descritos após a observação de fenômenos naturais e do comportamento da fauna e flora, podem impedir a extinção de uma determinada espécie ou mesmo o esgotamento dos recursos naturais de uma determinada região. Dentre esses modelos podemos destacar dois dos mais conhecidos. O primeiro é do economista inglês Thomas Malthus, apresentado em 1798. O modelo malthusiano pressupõe que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional a população total do país naquele instante:
$$\frac{dP}{dt} = kP,$$
onde k é uma constante de proporcionalidade (nesse caso) $k > 0$.

  Sabendo-se que uma certa população cresce segundo o modelo malthusiano e , sabendo ainda, que $P(0) = P_0$, então temos:
$$P = P_0 e^{kt}.$$

  O modelo discreto de Malthus é dado por $P(t+1) - P(t) = \alpha P(t)$. Se $P(0) = P_0$, com α constante e $P(0)$ a população no instante inicial, temos
$$P(t) = (1+\alpha)^t P_0.$$

  O segundo modelo é o de Verhulst que foi um matemático belga que introduziu a equação de crescimento logístico onde a população cresce até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar. O modelo de Verhulst é, essencialmente, o modelo de Malthus modificado:
$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = rP\left(1 - \dfrac{P}{P_\infty}\right) \\ \\ P(0) = P_0,\ r > 0, \end{cases}$$
onde P_∞ representa a situação em que a população atinge seu limite máximo.

- O modelo dos Corpos Flutuantes de Arquimedes: Entre os trabalhos publicados por Arquimedes, existe o tratado Sobre os Corpos Flutuantes, onde é encontrado o que hoje conhecemos como Teorema ou Princípio de Arquimedes. Nesse trabalho, ele afirma que "todo corpo mergulhado em um fluido recebe um empuxo, de baixo para cima, igual ao peso do volume do fluido deslocado". Há relatos de que o rei Hieron de Siracusa decidiu colocar no templo uma coroa de ouro como oferta para os deuses, mas o ourives misturou prata com ouro na confecção da mesma. Desconfiado o rei propôs que Arquimedes resolvesse o problema. A solução foi encontrada por Arquimedes ao banhar-se.

- A história da maçã de Newton apareceu pela primeira vez em Elementos da Filosofia de Newton, escrito por Voltaire e publicado em 1738. Neste livro, Voltaire - que admirava muito Sir Isaac e suas teorias - apresentou uma clara e admirável interpretação das ideias newtonianas. A lenda da maçã foi espalhada pela sobrinha do cientista inglês, Catherine Barton Conduitt, e seu marido, que viveram com ele nos últimos anos de vida do cientista. Além disso, o próprio Newton contou ao estudioso William Stukeley ter sido inspirado por uma maçã caindo em seu quintal - e não em sua cabeça - ao investigar a teoria da gravitação. Stukeley relata a conversa que teve com Newton no livro Memória de Sir Isaac Newton, publicado em 1752. Esse incidente cotidiano serviu para inspirar uma teoria capaz de mudar o mundo para sempre.

- No século V a.C., os egípcios, segundo o grego Heródoto, usavam conceitos de geometria plana para que, após as enchentes do rio Nilo, os agrimensores determinassem a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restara.

No Brasil, a Modelagem em Educação Matemática começou a emergir a partir da década de 70, onde estava presente em algumas disciplinas das universidades dos estados de São Paulo e Rio de Janeiro.

Para Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi, a Modelagem surgiu inspirada na etnomatemática, que foi definida por D'Ambrósio como "a matemática usada por um grupo cultural definido na solução de problemas e atividades do dia a dia" e tinha como proposta abordar a Matemática a partir do contexto social dos alunos.

D'Ambrósio acredita que a construção do conhecimento matemático é baseado no estudo de um fenômeno real por um indivíduo onde este o traduz em linguagem matemática, para que dessa forma possa estudá-lo.

No ensino tradicional atualmente na maioria das escolas do país, a aprendizagem é centralizada na figura do professor e com a introdução da Modelagem Matemática, o processo de ensino-aprendizagem é compartilhado com o grupo de alunos.

Há registros de que a Modelagem Matemática proporciona inúmeros benefícios. [GAZZETTA, 1989] enumera os seguintes:

- Motivação por parte de educando e educador.
- Facilidade de aprender - o conteúdo matemático passa de abstrato a concreto.
- Preparação para futuras profissões nas mais diversas áreas do conhecimento devido a interatividade de conteúdos.
- Desenvolvimento do raciocínio lógico.
- Oportunidade do aluno assumir o papel de cidadão crítico e transformador de sua realidade.
- Compreensão do papel sociocultural da Matemática, tornando-a assim mais importante.

A obtenção de novas formas para que a matemática seja ensinada através da compreensão do processo de modelagem de situações reais com ferramental matemático pode ser composto por etapas. [BIEMBENGUT, M. S. HEIN, 2002] destaca as seguintes:

1- Interação - onde ocorre o envolvimento com o tema (realidade) a ser estudado e problematizado, através de um estudo indireto (por meio de jornais, livros e/ou revistas) ou direto (por meio de experiências em campo).

2- Matematização - onde ocorre a "tradução" da situação-problema para a linguagem matemática. É aqui que se formula um problema e escreve-o segundo um modelo matemático que leve à solução.

3- Modelo Matemático - onde ocorre a "testagem" ou validação do modelo obtido, através da análise das respostas que o modelo oferece quando aplicado à situação que o originou, no sentido de verificar o quanto são adequadas ou não.

Tomando como base [GAZZETTA, 1989] e [BIEMBENGUT, M. S. HEIN, 2002] podemos trazer uma forma de desenvolver a metodologia de ensino utilizando a modelagem matemática, englobando algumas etapas que são:

- Compreensão da situação problema: Onde os alunos e o professor escolhem o tema e o fenômeno a ser traduzido para linguagem matemática.
- Estruturação da situação problema: Onde os indivíduos estudam o fenômeno e propõe as hipóteses e formulam o problema.
- Matematização: É a transformação deste em linguagem matemática.
- Síntese: Após a resolução do problema, obedecendo as hipóteses propostas, sintetizamos os resultados matemáticos deste.

- Interpretação e validação: Após os resultados apresentados observamos se estes se adequam ao fenômeno inicialmente estudado.

- Comunicação e argumentação: Quando há uma discussão sobre os resultados onde o grupo fica a par dos resultados são colocados argumentos sobre estes e verifica-se sua validade para o fenômeno observado inicialmente.

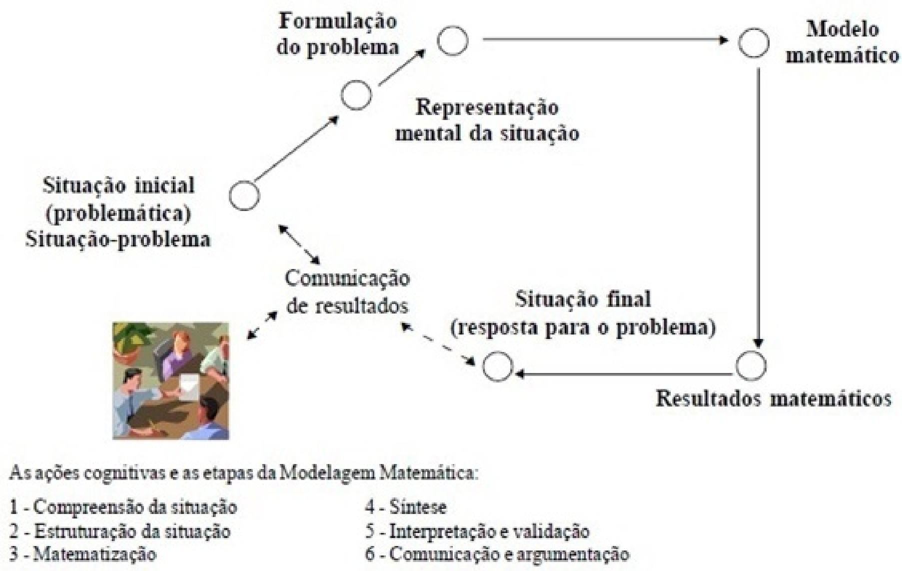

Figura 1.1: Etapas da Modelagem Matemática e as Ações Cognitivas dos Alunos [DE ALMEIDA, L. M W.; DA SILVA, K. P. Ciência & Educação, v. 18, n. 3, p. 632]

Com o passar dos anos nota-se um esforço para que o conhecimento matemático seja construído durante a educação básica no Brasil e para que isso aconteça temos alguns documentos norteadores do ensino da matemática dentre eles os principais são os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN) (BRASIL, 2000) no qual podemos encontrar orientações que não objetivam apenas o aprendizado de conteúdos, mas consideram importantes também as formas de ensinar esses conteúdos, de revelar sua importância para o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias a todo cidadão.

A Educação Matemática descrita nos PCN é firmada sobre as seguintes estruturas:

> Representação e comunicação, que envolvem leitura, interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais dessa área do conhecimento; Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências; Contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma da análise crítica das ideias e recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico. (BRASIL, 2012, p.155).

Uma estratégia para que essas estruturas sejam contempladas e pelo emprego de modelagem matemática que presa a compreensão de situações-problema e sugere formas de estudo e ensino para solucioná-las. Os PCNs afirmam que:

> Se por um lado a ideia de situação-problema pode parecer paradoxal, pois como o aluno pode resolver um problema se ele não aprendeu o conteúdo necessário à sua resolução?; Por outro lado, a história da construção do conhecimento matemático mostra-nos que esse mesmo conhecimento foi construído a partir de problemas a serem resolvidos. (BRASIL, 2012, p.84).

Mas não é só no Ensino de Matemática que o uso de elementos do cotidiano tem sido requisitado. Isso também é visto no PCN em relação a outras disciplinas escolares, como a física, a química, a biologia, a língua portuguesa. Em conjunção com esses elementos do cotidiano vêm o potencial para atividades interdisciplinares que cada área do conhecimento, representada por estas disciplinas, pode apresentar.

Diante disso a modelagem matemática como estratégia de ensino se revela muito interessante e consideramos que um estudo sobre ela, mais aprofundado do que aquele que fizemos enquanto licenciando em matemática, se mostra necessário para o profissional da educação que pretende atender as demandas atuais do Ensino.

Reconhecer a matemática como uma linguagem e a Modelagem Matemática como uma estratégia de tradução, é um parametro que o PCN apresenta, beneficiando o desenvolvimento da população, que esta em continuo processo de evolução e necessita cada vez mais de se tornar fluente nesta tão importante linguagem.

Acreditamos que uma aula em que se emprega a modelagem matemática como estratégia de ensino-aprendizagem pode ser eficaz e a literatura comprova isso por meio de relatos de experiência e a pesquisa de novas estratégias para trabalhá-la na sala de aula.

Essa dissertação esta organizada da seguinte forma: nos capítulos 2 e 3 abordamos a teoria de sequências e séries numéricas e no capítulo 4 empregamos a modelagem matemática juntamente com a teoria anterior para apresentar algumas propostas pedagógicas para o ensino médio.

2 Sequências Numéricas

Neste capítulo abordaremos os principais conceitos a respeito de sequências numéricas. Discutiremos a existência ou não dos limites de sequências e os critérios de convergencia. Para isso, seguiremos a referência [MATOS, M.P.].

2.1 Conceitos Preliminares

Representamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números inteiros positivos, isto é,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Esse conjunto é denominado *conjunto dos números naturais.* O subconjunto de N' constituído dos números pares será representado por N_p e o subconjunto dos números ímpares, por N_I. Em símbolos, escrevemos:

$$N_p = \{2n; n \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad N_I = \{2n-1; n \in \mathbb{N}\}.$$

Definição 2.1. *Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real $f(n)$.*

O valor da sequência f no número natural n é denominado n-ésimo termo ou termo geral da sequência f e é representado genericamente por a_n, b_n, x_n etc. Para simplificar, faremos referência ao termo geral a_n como a sequência f tal que $f(n) = a_n$. Uma sequência pode ser representada pelo seu termo geral ou explicitando-se seus primeiros termos. A seguir temos alguns exemplos de sequências:

Exemplo 2.1. $a_n = 1 + (-1)^{n+1} = (2, 0, 2, 0, \cdots)$.

Exemplo 2.2. $a_n = n = (1, 2, 3, \cdots)$.

Definição 2.2. *Dada uma sequência $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, as restrições de f a subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ serão denominadas subsequências de f.*

Representando a sequência f pelo seu termo geral $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, podemos afirmar que as subsequências de f ou de $\{a_n\}$, são aquelas sequências $\{a_k\}$, com $k \in N'$ onde N' é subconjunto de $\mathbb{N}$. Naturalmente, toda sequência é uma subsequência dela própria. Dentre as subsequências de uma dada sequência $\{a_n\}$ destacamos duas: a *subsequência par* $\{a_{2n}\}$ e a *subsequência ímpar* $\{a_{2n-1}\}$.

Exemplo 2.3. As subsequências par e ímpar da sequência $a_n = (-1)^n$ são as sequências constantes $a_{2n} = 1$ e $a_{2n-1} = -1$, respectivamente.

2.2 Limitação e Monotonia

Definição 2.3. *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita limitada superiormente quando existir um número real M, denominado cota superior da sequência, que atende à seguinte condição:*

$$a_n \leq M, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.4. *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita limitada inferiormente quando existir um número real m, denominado cota inferior da sequência, que atende à seguinte condição:*

$$m \leq a_n, \qquad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.5. *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita limitada quando o for superiormente e inferiormente, isto é, quando existir uma constante positiva C tal que:*

$$|a_n| \leq C, \qquad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

É claro que se M for uma cota superior de uma dada sequência $\{a_n\}$, então qualquer número real maior do que M também será cota superior da sequência $\{a_n\}$. A menor dessas cotas superiores é denominada supremo da sequência $\{a_n\}$ e denotada por $\sup\{a_n\}$. Analogamente, uma sequência $\{a_n\}$ limitada inferiormente possui uma infinidade de cotas inferiores, sendo a maior delas denominadas de ínfimo da sequência e denotada por $\inf\{a_n\}$. No presente momento, precisamos deixar claro dois fatos fundamentais: primeiro, que toda sequência limitada superiormente tem supremo finito e toda sequência limitada inferiormente tem ínfimo finito; depois, que para cada $\epsilon > 0$ o número real $\alpha = \sup\{a_n\} - \epsilon$, por ser menor do que o supremo da sequência $\{a_n\}$, não pode ser a cota superior e, por essa razão, existe algum termo da sequência, por exemplo a_{n_1}, tal que:

$$\alpha = \sup\{a_n\} - \epsilon \ < a_{n_1} \ .$$

Para o ínfimo ocorre um fato análogo. Sendo $\beta = \inf\{a_n\} + \epsilon$ um número real maior do que o ínfimo da sequência $\{a_n\}$, existe algum termo da sequência, por exemplo a_{n_2}, é tal que:

$$\beta = \inf\{a_n\} + \epsilon > a_{n_2} \ .$$

Exemplo 2.4. A sequência de termo geral $a_n = n$ é limitada inferiormente, mas não superiormente. Temos que $\inf\{a_n\} = 1$.

Exemplo 2.5. A sequência de termo geral $a_n = 1 - n^2$ é limitada superiormente, mas não inferiormente. Nesse caso, Temos $\sup\{a_n\} = 0$.

Exemplo 2.6. A sequência de termo geral $a_n = (-1)^n$ é limitada, sendo $\sup\{a_n\} = 1$ e $\inf\{a_n\} = -1$.

Definição 2.6. *Uma sequência $\{a_n\}$ é denominada monótona crescente ou não decrescente quando $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$.*

Definição 2.7. *Uma sequência $\{a_n\}$ é denominada monótona decrescente ou não crescentes quando $a_{n+1} \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, into é $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$.*

Exemplo 2.7. As sequências $a_n = n$ e $b_n = \ln n$ são crescentes, enquanto $c_n = -n^3$ e $d_n = \frac{1}{n}$ são decrescentes.

Exemplo 2.8. A sequência $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ é crescente. De fato,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \geq 1, \text{ para todo} n \in \mathbb{N},$$

e isso implica que $a_{n+1} \geq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Sequências Convergentes

Definição 2.8. *Dizemos que um número real l é limite de uma sequência $\{a_n\}$, ou que a sequência $\{a_n\}$ converge para l, quando a seguinte condição for atendida:*

$$\textit{para todo } \epsilon > 0, \textit{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad |a_n - l| < \epsilon, \textit{ para todo } n \geq n_0.$$

Aqui, denotamos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

a) O número natural n_0 da definição de limite em geral depende do número ϵ dado;

b) Sendo a desigualdade $|a_n - l| < \epsilon$ equivalente a

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon, \tag{2.1}$$

ou ainda que $a_n \in (l-\epsilon, l+\epsilon)$ a sentença (2.1) estabelece que fora do intervalo aberto $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ existe no máximo uma quantidade finita de termos da sequência ou, em outras palavras, que todos os termos da sequência a partir do termo de ordem n_0 estão dentro do intervalo aberto $(l-\epsilon, l+\epsilon)$;

c) A convergência e o valor do limite de uma sequência não são alterados quando se "mexe" em uma quantidade finita de termos. Aqui, "mexer" significa acrescentar, omitir ou simplesmente mudar o valor. Por essa razão, dizemos que a convergência de uma sequência é determinada pelo comportamento de sua cauda[1];

[1] A cauda de uma sequência aqui será usada para designar o comportamento de uma sequência no infinito.

d) Finalmente, observamos que uma sequência convergente não pode ter dois limites. De fato, se

$$l_1 = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{e} \quad l_2 = \lim_{n\to\infty} a_n\,,$$

então, dado um número real positivo ϵ, existem, de acordo com a definição 2.8, dois números naturais n_1 e n_2 tais que

$$|a_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } n \geq n_1 \quad \text{e} \quad |a_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } n \geq n_2.$$

Para que essas desigualdades ocorram simultaneamente, é suficiente considerarmos um índice que seja maior ou igual a n_1 e n_2 ao mesmo tempo. Se $n_3 = \max\{n_1,\, n_2\}$ é um tal índice, temos:

$$|l_1 - l_2| \leq |a_{n_3} - l_1| + |a_{n_3} - l_2| < \epsilon \tag{2.2}$$

e essa desigualdade só é possível para qualquer ϵ positivo quando $l_1 = l_2$, resultando na *unicidade* do limite.

Exemplo 2.9. Como primeiro exemplo, verificaremos que a sequência $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge para zero, isto é

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Nesse caso, $l = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n}$ e, para ilustrar a definição 2.8, consideremos $\epsilon = 0.01$. Para ocorrer

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0.01,$$

basta considerarmos $n > 100$, já que isto é equivalente a $\dfrac{1}{n} < 0.01$. Nesse caso $n_0 = 101$ satisfaz (2.1). No caso geral, dado $\epsilon > 0$, escolhamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$. É claro que, se $n \geq n_0$, então $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0} < \epsilon$ e isto acarreta $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$. Este é um exemplo de uma sequência (decrescente) convergente.

Exemplo 2.10. A sequência cujo termo geral é $a_n = \dfrac{2n^2}{n^2-4}$, com $n \geq 3$, converge para 2. De fato, dado $\epsilon > 0$, temos:

$$\left|\frac{2n^2}{n^2-4} - 2\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n^2 - 2n^2 + 8}{n^2-4}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{8}{n^2-4}\right| < \epsilon. \tag{2.3}$$

Para $n \geq 3$, temos $n^2 - 4 \geq 5$ e para estabelecer (2.3) basta considerarmos

$$n^2 - 4 > \frac{8}{\epsilon} \quad \text{ou} \quad n > \sqrt{4 + \frac{8}{\epsilon}}.$$

Isso nos sugere escolher n_0 como o primeiro número natural tal que $n_0 > \sqrt{4 + \frac{8}{\epsilon}}$. Para essa escolha temos que $n_0 \geq 3$.

Vejamos alguns resultados a respeito de sequências.

Teorema 2.1. *Toda sequência convergente é necessariamente limitada.*

Seja $\{a_n\}$ uma sequência convergente com limte l. De acordo com a definição de limite, correspondendo a $\epsilon = 1$, existe um índice n_0 a partir do qual se tem $|a_n - l| < 1$. Usando a desigualdade triangular podemos assegurar que:

$$|a_n| = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + l, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Os únicos termos da sequência que, possivelmente, não atendem à condição acima são: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n_0-1}$. Considerando o número real C como o maior entre os números $1 + l,\ |a_1|,\ |a_2|,\ |a_3|,\ \ldots,\ |a_{n_0-1}|$, teremos:

$$|a_n| \leq C, \text{ para todo } n.$$

■

Teorema 2.2. *(Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada possui subsequência convergente.*

Seja $\{a_n\}$ uma sequência limitada. Considere o seguinte conjunto:

$$M = \{n \in \mathbb{N}; a_n > a_m, \forall m > n\}.$$

Temos duas possibilidades para M: M é infinito ou M é finito.

i) M é infinito: Escrevamos $M = \{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$ com $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ .Assim, se $i < j$ então $n_i < n_j$ e, como $n_i \in M$, obtemos que $a_{n_i} > a_{n_j}$. Concluímos então, que a subsequência $\{a_{n_k}\}$ é decrescente. Sendo ela limitada obtemos, finalmente, que ela é convergente.

ii) M é finito: Como M é finito, existe $n_1 \in \mathbb{N} \subset\ M$ cota superior de M. Ora, $n_1 \in M$ logo, existe $n_2 > n_1$(e portanto $n_2 \in M$) tal que $a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Mas de $n_2 \in M$ segue que existe $n_3 > n_2$ (e portanto $n_3 \in M$) tal que $a_{n_2} \leq a_{n_3}$. Por indução, definimos uma subsequência $\{a_{n_k}\}$ que é crescente e, portanto, convergente (pois ela é limitada).

■

Teorema 2.3. *Se $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, então a sequência $a_n = f(n)$, $n > a$, é convergente e seu limite é igual a l. Se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, então a sequência $\{a_n\}$ é divergente.*

Da definição de limite no infinito para funções reais definição em intervalos, segue que para cada $\epsilon > 0$ existe um número rela $K > 0$, tal que $|f(x) - l| < \epsilon$, para todo

$x \geq K$. Passando para a linguagem de sequências, escolhemos um índice $n_0 \geq K$ e teremos $|f(n) - l| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$.

■

Nos casos em que é possível utilizar o Teorema 2.3, o cálculo de limites de sequências torna-se relativamente simples, especialmente quando se usam Técnicas de Cálculo, a exemplo da famosa regra de L'Hôpital.

Exemplo 2.11. Para calcular o limite da sequência $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$, consideramos a função extensão $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, definição para $x > 0$, e investigamos seu limite no infinito. Da Regra de L'Hôpital resulta que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

e, pelo Teorema 2.3 concluímos que a sequência $\dfrac{\ln n}{n}$ converge para 0.

Vejamos agora algumas propriedades básicas para o limite de sequências.

Teorema 2.4. *(Propriedades de Limite) Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências convergentes com limite l e r, respectivamente. Então*

(a) a sequência $\{a_n \pm b_n\}$ converge para $l \pm r$;

(b) a sequência $\{c \cdot a_n\}$ converge para $c \cdot l$, onde c é uma constante;

(c) a sequência $\{|a_n|\}$ converge para $|l|$;

(d) a sequência $\{a_n \cdot b_n\}$ converge para $l \cdot r$;

(e) a sequência $\{a_n/b_n\}$ converge para l/r, quando $r \neq 0$ e $b_n \neq 0$, $\forall n$;

Seja $\epsilon > 0$ dado. Pela definição de limite, existem índices n_1 e n_2 tais que:

$$|a_n - l| < \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_1 \tag{2.4}$$

$$|a_n - r| < \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_2 \tag{2.5}$$

e considerando um índice $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ maior ou igual do que n_1 e n_2, de modo que (2.4) e (2.5) ocorram simultaneamente, temos para $n \geq n_0$ que:

(a) $|a_n \pm b_n - (l \pm r)| \leq |a_n - l| + |b_n - r| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$;

(b) $|ca_n - cl| = |c||a_n - l| < |c|\epsilon$;

(c) $||a_n| - |l|| \leq |a_n - l| < \epsilon$;

(d) $|a_n b_n - lr| = |a_n b_n - b_n l + b_n l - lr| \leq |b_n||a_n - l| + |l||b_n - r| \leq (C + |l|)\epsilon$, onde C é uma constante positiva que limita a sequência $\{b_n\}$. A existência da constante C é assegurada pelo Teorema 2.1.

(e) Este caso é um pouco mais delicado. Seja C um número positivo tal que $\dfrac{1}{|b_n|} \leq C$, para todo $n \geq n_0$. Temos.

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{l}{r}\right| = \left|\frac{a_n r - b_n l - lr + lr}{rb_n}\right| \leq \frac{1}{|b_n|}\left(|a_n - l| + \frac{|l|}{|r|}|b_n - r|\right) < C\left(1 + \frac{|l|}{|r|}\right)\epsilon.$$

■

De posse das propriedades apresentadas no Teorema 2.4, fica mais prático o cálculo de limites. Não é mais necessário introduzir a função extensão $f(x)$, a menos que se faça referência às suas propriedades analíticas como continuidade, derivabilidade , etc. Por exemplo, para calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{4n^2-2n+1},$$

colocamos em evidência o termo de maior grau, resultando:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{3}{n^2})}{n^2(4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n^2}}{4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4}.$$

Vejamos mais alguns resultados a respeito de propriedades de sequências.

Teorema 2.5. *Se uma sequência $\{a_n\}$ converge para zero e $\{b_n\}$ é uma sequência limitada, então a sequência produto $\{a_n \cdot b_n\}$ converge para zero.*

Seja $\epsilon > 0$ dado. Como a sequência $\{a_n\}$ converge para zero, a este ϵ corresponde um índice n_0 tal que $|a_n| < \epsilon$, sempre que $n \geq n_0$. Ora, sendo $\{b_n\}$ uma sequência limitada, existe uma constante positiva C tal que $|b_n| \leq C$, seja qual for o índice n, e certamente para qualquer $n \geq n_0$ teremos:

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| < C\epsilon.$$

■

No Teorema 2.5, a sequência $\{b_n\}$ é apenas limitada, podendo ser convergente ou não. Por essa razão não foi usada na demonstração do teorema a propriedade do limite referente ao produto de sequências, a qual exige a existência dos limites das sequências envolvidas.

Exemplo 2.12. Se $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = sen(n)$ então $\{b_n\}$ não converge mas, como $-1 \leq b_n \leq 1$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sen(n)}{n} = 0$. Por outro lado, se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ mas b_n não é limitada, o produto $a_n b_n$ pode divergir (por exemplo $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$) ou convergir para um valor qualquer (por exemplo $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = c.n$).

A limitação de uma sequência é uma condição necessária, mas não suficiente para garantir a convergência da mesma. É necessária uma condição adicional para garantir sua convergência, a saber, a monotonicidade.

Teorema 2.6. *Toda sequência que é ao mesmo monótona decrescente e limitada converge para o seu ínfimo.*

Seja então $\{a_n\}$ uma sequência decrescente limitada e seja $l = \inf\{a_n\}$. Dado $\epsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que $l + \epsilon > a_{n_0}$ e, sendo a sequência $\{a_n\}$ decrescente, temos:

$$a_n \leq a_{n_0} < l + \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Por outro lado, como l é o ínfimo da sequência $\{a_n\}$, então $l \leq a_n$, para todo n, de modo que:

$$l - \epsilon < l \leq a_n, \text{ para todo } n.$$

Combinando as duas desigualdades acima, obtemos:

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_0$$

e isto é equivalente a:

$$|a_n - l| < \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Com isso provamos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

■

Exemplo 2.13. A sequência cujo n-ésimo termo é $a_n = \frac{1}{n}$ é monótona decrescente e limitada. Então, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \inf\left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Teorema 2.7. *(Sanduíche)*

Sejam $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ três sequências que satisfazem a seguinte condição:

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \ \forall n.$$

Se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l,$$

então a sequência $\{b_n\}$ é convergente e seu limite é igual a l.

Demosntração:

Dado $\epsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ um índice a partir do qual se tem:

$$-\epsilon < a_n - l < \epsilon \quad \text{e} \quad -\epsilon < c_n - l < \epsilon.$$

Notando, que $a_n - l \leq b_n - l \leq c_n - l$ e usando as desigualdades acima, obtemos:

$$-\epsilon < b_n - l < \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

ou, de modo equivalente, $|b_n - l| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$.

■

Exemplo 2.14. Seja $a_n = \frac{\cos n}{n}$. Como $-1 \leq \cos n \leq 1$ temos que $\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$ e, consequentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

Corolário 2.1. *Uma sequência $\{a_n\}$ converge para l se, e somente se, as subsequências $\{a_{2n}\}$ e $\{a_{2n-1}\}$ convergem para l.*

Exemplo 2.15. A sequência $(2, 0, 2, 0, \cdots)$, cujo n-ésimo termo é $a_n = 1+(-1)^{n+1}$, é limitada mas não é convergente porque possui duas subsequências constantes, $a_{2n-1} = 2$ e $a_{2n} = 0$ com limites distintos.

Teorema 2.8. *(Teste da Razão para Sequência) Se uma sequência $\{a_n\}$ de termos positivos satisfaz à condição:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1 \ ,$$

então ela converge para zero.

Consideremos um número r, tal que $l < r < 1$ e $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r$, a partir de uma certa ordem n_0 (este índice n_0 corresponde à escolha de $\epsilon = r - l$). Como $r < l$, temos para $n \geq n_0$ que

$$0 < a_{n+1} < a_n r < a_n,$$

e, portanto, a sequência $\{a_n\}$ se torna decrescente a partir da ordem n_0.

Assim,

$$0 < a_n \leq a_{n_0}, \text{ para todo } n \geq n_0, \tag{2.6}$$

e a relação acima assegura a limitação da sequência $\{a_n\}$, colocando-a nas condições do Teorema 2.5, sendo por conseguinte convergente. Para provar que $\{a_n\}$ converge para zero, raciocinamos por absurdo admitindo que seu limite é um número $sNeq0$. Como a sequência $\{a_{n+1}\}$ também converge para s, por ser uma subsequência de $\{a_n\}$, resulta que:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{s}{s} = 1,$$

contradizendo a hipótese de $l < 1$.

$\blacksquare$

Exemplo 2.16. Usando o Teorema acima, provaremos que as sequências:

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \, b_n = \frac{r^n}{n!}, \, r > 0, c_n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \quad \text{e} \quad d_n = \frac{n^p}{2^n}.$$

Com efeito, todas essas sequências são de termos positivos, e de a cordo com o teorema acima, é suficiente provar que em cada caso o limite da razão $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Para a sequência $\{a_n\}$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Aqui, usamos o limite fundamental do cálculo para a função:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Para a sequência $\{b_n\}$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{r^n} = r \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Para a sequência $\{c_n\}$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1) \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Finalmente para a sequência $\{d_n\}$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^p} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \frac{1}{2} < 1.$$

Definição 2.9. *Uma sequência $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ é dita de Cauchy se*

Para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $n, m \geq N$ implica que $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Uma sequência é de Cauchy se seus termos se aproximam uns dos outros. Não apenas termos consecutivos mas sim todos os seus termos. É normal acreditar que qualquer sequência convergente é de Cauchy e vice-versa.

Teorema 2.9. *(Sequências de Cauchy) Uma sequência é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy.*

Seja $\{a_n\}$ uma sequência que converge para o limite l. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto, se m, $n \geq \mathbb{N}$ temos

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Concluímos que $\{a_n\}$ é uma sequência de Cauchy.

Reciprocamente, suponhamos que $\{a_n\}$ é de Cauchy. Um argumento análogo ao da demonstração do Teorema 2.1 mostra que $\{a_n\}$ é limitada . Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, $\{a_n\}$ tem subsequência $\{a_{n_k}\}$ convergente para o limite l.

Agora, vamos mostrar que $a_n \to l$. Seja $\epsilon > 0$. Como $\{a_n\}$ é de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m,\ m \geq N \quad \text{implica que} \quad |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.7}$$

Como $a_{n_k} \to l$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq N$ e $|a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}$. Daí e de (2.7) segue que, se $n \geq \mathbb{N}$, então

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

2.4 Limites Infinitos

Existem sequências divergentes que "possuem limite" . A frase dita anteriormente é apenas um jogo de palavras. As definições que daremos a seguir diz que certas sequências têm limites que não são números reais. Sendo assim, não diremos que tais sequências são convergentes.

Definição 2.10. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência. Diz-se que a_n tende a **mais infinito** quando n tende a mais infinito ou que **mais infinito** é limite da sequência e escrevemos $a_n \to +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ se,*

$$\textit{Dado}\, M \in \mathbb{R},\ \textit{existe}\ N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad n \geq \mathbb{N} \quad \textit{implica que} \quad a_n > M.$$

Definição 2.11. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência. Diz-se que a_n tende a **menos infinito** quando n tende a menos infinito ou que **menos infinito** é limite da sequência e escrevemos $a_n \to -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ se,*

$$\textit{Para todo}\, M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad n \geq \mathbb{N} \quad \textit{implica que} \quad a_n < M.$$

É importante reforçar que se $a_n \to +\infty$ ou $a_n \to -\infty$, então não podemos afirmar que a sequência é convergente. Uma sequência é dita convergente exclusivamente quando satisfaz a condição da Definição 2.8.

3 Séries Numéricas

Neste capítulo abordaremos os principais conceitos de Séries Nméricas e seus critérios de convergência. Para tal, utilizaremos a referência [MATOS, M.P.].

3.1 Fundamentos Gerais

Para motivar o que vamos ver agora, apresentaremos um exemplo simples do cálculo da soma infinita:

$$0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \dots$$

Associada a essa soma infinita, definimos uma sequência $\{S_n\}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_1 &= 0.6 \\ S_2 &= 0.6 + 0.06 = 0.66 \\ S_3 &= 0.6 + 0.06 + 0.006 = 0.666 \\ S_4 &= 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 = 0.6666, \end{aligned}$$

e assim por diante. Chamamos de Soma Parcial, até o termo n, a soma dos n primeiros termos de uma série. É natural pensar na soma infinita como o limite da sequência $\{S_n\}$ quando $n \to \infty$ e sendo:

$$S_n = 0.\underbrace{6666\dots6}_{n \text{ vezes}},$$

então,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0.6666\dots$$

é uma dízima periódica. Esse cálculo pode ser feito de outra maneira, escrevendo as parcelas da soma infinita como frações ordinárias. Em termos de frações ordinárias, vamos considerar a soma infinita dos n primeiros termos, que assume a seguinte forma:

$$\frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \dots,$$

de onde segue que:

$$S_n = \frac{6}{10}\left[1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right]. \tag{3.1}$$

Em uma Progessão Geométrica (PG) temos:

$$\underbrace{a_1}_{a_1}\,;\ \underbrace{a_1 r}_{a_2}\,;\ \underbrace{(a_1 r)r}_{a_3}\,;\ \underbrace{(a_1 r^2)r}_{a_4}\,;\ \ldots\,;\ \underbrace{a_1 r^{n-1}}_{a_n}$$

Assim, a Soma dos n termos de uma PG é dada por:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}.$$

Multiplicando a igualdade acima por r, resulta

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n.$$

Agora, se fizermos $S_n - rS_n$ teremos:

$$S_n(1-r) = a_1 - a_1 r^n \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}. \tag{3.2}$$

ou

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}. \tag{3.3}$$

Sendo assim, a expressão entre colchetes na igualdade 3.1 é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $q = \dfrac{1}{10}$ e, por conseguinte,

$$S_n = \frac{6}{10}\left[\frac{1-\frac{1}{10}^n}{1-\frac{1}{10}}\right].$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3}$$

.

Dada uma sequência $\{a_n\}$ de números reais, a soma infinita:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

será representada simbolicamente por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. O objetivo a partir de agora é estabelecer condições sobre a sequência $\{a_n\}$ para que a soma infinita $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tenha um valor real. Se este for o caso, dizemos que a soma infinita converge. Estas somas infinitas são denominadas *séries infinitas* ou, simplesmente *séries*.

Exemplo 3.1. Na série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$$

enquanto que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1,$$

tendo valores diferentes.

O exemplo acima nos mostra que definir a soma de infinitos termos não é simplesmente somar. Assim, não podemos tratar somas de infinitos termos como no caso da some de finitos termos. Também precisamos nos atentar para o fato que a convergência de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ está relacionada com a convergência de sua sequência de somas parciais $\{S_n\}$.

Definição 3.1. *Dizemos que uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente quando a sequência* $\{S_n\}$ *de suas somas parciais for convergente. Nesse caso, a soma da série é o limite da sequência* $\{S_n\}$*, isto é:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Quando uma série não converge, ela é denominada *divergente.*

Vamos agora ver alguns exemplos de séries.

Exemplo 3.2. Série Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$

O número r que aparece na série geométrica é denominado razão da série e o número α é o seu coeficiente; ambos são diferentes de zero. A sequência de somas parciais $\{S_n\}$ é dada por:

$$S_n = \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \ldots + \alpha r^{n-1} \tag{3.4}$$

e, para $r = 1$ temos na igualdade acima que $\lim_{n\to\infty} \alpha n = \infty$, nesse caso, a série geométrica diverge. Quando $r = -1$, a sequência $\{S_n\}$ é tal que $S_{2n} = 0$ e $S_{2n-1} = \alpha$, o que mostra ser $\{S_n\}$ uma sequência divergente e, nesse caso, a série também diverge. Adimitindo $|r|Neq1$ e multiplicando a igualdade por r, obtemos

$$rS_n = \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \alpha r^4 \ldots + \alpha r^n \tag{3.5}$$

e subtraindo (3.4) de (3.5) isolando S_n no primeiro membro, resulta:

$$S_n = \alpha \frac{1 - r^n}{1 - r}. \tag{3.6}$$

Quando $-1 < r < 1$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

e, tomando o limite em (3.6), com $n \to \infty$, deduzimos então que, nesse caso, a sequência de somas parciais $\{S_n\}$ converge para $\dfrac{\alpha}{1-r}$, sendo este o valor da soma da série.

Se $|r| > 1$, usando novamente (3.6), verificamos que a sequência $\{S_n\}$ diverge e, por conseguinte, a série correspondente também diverge.

Resumindo, podemos afirmar que a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$$

converge para $\dfrac{\alpha}{1-r}$ quando $|r| < 1$ e, diverge quando $|r| \geq 1$.

Para calcularmos o valor da soma de uma série geométrica convergente, é suficiente identificarmos seu coeficiente α e sua razão r.

Exemplo 3.3. Série Harmônica: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Vamos investigar a série harmônica através de sua sequência de somas parciais. Denotando por $\{S_n\}$ a sequência de somas parciais dessa série, temos que:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

e, portanto

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

Se a sequência $\{S_n\}$ fosse convergente, então a subsequência $\{S_{2n}\}$ também seria, teria o mesmo limite que $\{S_n\}$ e, dessa forma, teríamos

$$\lim_{n\to\infty} \{S_{2n} - S_n\} = 0.$$

Isto não é possível, pois a desigualdade em (3.7) nos assegura que

$$\lim_{n\to\infty} \{S_{2n} - S_n\} \geq \frac{1}{2}$$

caso o limite existisse. Com isso concluímos que a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente e, sua soma é $+\infty$.

Exemplo 3.4. Série de Encaixe: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$

O nome Série de Encaixe é devido a natureza de seus termos:

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots$$

e, sua sequência de somas parciais $\{S_n\}$ é dada por:

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}. \tag{3.8}$$

Se a sequência $\{b_n\}$ convergir para um número l, então segue de (3.8) que a sequência $\{S_n\}$ converge para $b_1 - l$, sendo este o valor da soma da série. É claro que, se a sequência $\{b_n\}$ divergir, o mesmo ocorrerá com as somas parciais $\{S_n\}$.

Assim, a série de encaixe $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ é convergente se, e somente se, a sequência $\{b_n\}$ o for e, nesse caso, a soma da série é:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Exemplo 3.5. A série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ é denominada **p-série**. Uma série desse tipo converge, se e somente se, $p > 1$.

Exemplo 3.6. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Podemos observar que a série se escreve sob a forma $\sum_{n=1}^{\infty}b_n - b_{n+1}$. Como $b_n = \log n$, trata-se uma série de encaixe. Como a sequência $b_n = \log n$ é divergente (pois, tem limite ∞) então a série de encaixe também diverge.

Exemplo 3.7. Outra série que se enquadra neste modelo é a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}.$$

Se considerarmos a decomposição

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

a série identifica-se com a série de encaixe $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$, com $b_n = \frac{1}{n}$. Temos que $b_1 = 1$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ e, sendo assim, a série é convergente e tem soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

O Teorema a seguir nos dá uma condição necessária, porém não suficiente para a convergência de uma série.

Teorema 3.1. *(Teste do n-ésimo Termo) Uma condição necessária para que a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

seja convergente é que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Denotando por $\{S_n\}$ a sequência de somas parciais da série, temos que $a_n = S_n - S_{n-1}$ e, admitindo que a série é convergente, resulta que a sequência de somas parciais $\{S_n\}$ converge para um certo número l, o mesmo ocorrendo com a subsequência $\{S_{n-1}\}$. Então:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = l - l = 0.$$

■

Como já vimos anteriormente, a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ são divergentes, embora o termo geral a_n tenha limite zero em ambos os casos. Com isso, justificamos que a condição $\lim_{n\to\infty} = 0$ não é suficiente para garantir a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Porém, quando a sequência $\{a_n\}$ for divergente ou, $\lim_{n\to\infty} a_n Neq 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente. Por exemplo, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} 1 + \frac{1}{n}$ são ambas divergentes. A primeira porque o termo geral que é $a_n = (-1)^n$ não converge e a segunda porque o termo geral, embora convergente, não tem limite zero.

Observamos ainda, que o Teorema 3.1 constitui um critério de divergência, como podemos ver na figura a seguir:

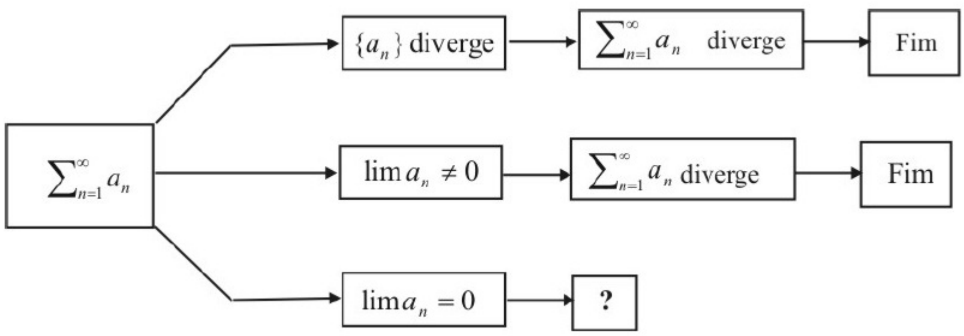

Figura 3.1: Diagrama do Teste do n-ésimo Termo. Adaptado de [MATOS, M.P., p.66].

A condição $\lim a_n = 0$ não dá informação sobre a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sendo necessária uma investigação adicional para determinar a convergência ou não da série.

Como no caso de sequências numéricas, o acréscimo ou a omissão de um número finito de termos não altera a convergência ou a divergência de uma série, podendo alterar o valor de sua soma. O resultado a seguir nos dá informação sobre o comportamento da cauda de uma série.

Teorema 3.2. *Se as séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

diferem apenas em uma quantidade finita de termos, então ambas são convergentes ou, ambas são divergentes.

Por hipótese existe um indíce n_0 a partir do qual $a_n = b_n$ e se $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ são as sequências de somas parciais de

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

respectivamente, então para $n > v_0$, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_0} + \ldots + a_n \tag{3.9}$$

$$R_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_0} + \ldots + b_n \tag{3.10}$$

e, sendo $a_n = b_n$, a partir da ordem n_0, resulta de (3.9) e (3.10) que

$$S_n = R_n + [(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_{n_0} - b_{n_0})]. \tag{3.11}$$

Observando a relação (3.11), levando em conta que a expressão entre colchetes é constante, isto é, não depende do índice n, deduzimos que as sequências $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

■

Exemplo 3.8. As séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n}$ são ambas divergentes, porque elas diferem em exatamente quatro termos. Já as séries $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^n$ e $\sum_{n=10}^{\infty} (\frac{1}{3})^n$ diferem em nove termos e são ambas convergentes, embora tenham somas diferentes.

Teorema 3.3. *Sejam*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

duas séries numéricas e seja α um número real.

a) Se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ também são convergentes, e valem as relações:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são, respectivamente, convergente e divergente, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *é divergente.*

c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente e* $\alpha \neq 0$*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *é também divergente.*

Para demonstrar esse teorema, vamos utilizar as propriedades básicas do limite de sequências. Denotando por $\{S_n\}$, $\{R_n\}$, $\{U_n\}$ e $\{V_n\}$ as sequências de somas parciais das séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n), \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n,$$

respectivamente, temos:

$$U_n = S_n + R_n \quad \text{e} \quad V_n = \alpha S_n$$

e, se as sequências $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ forem convergentes, então as sequências $\{U_n\}$ e $\{V_n\}$ também serão convergentes e, além disso:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} R_n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} V_n = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Isto prova a parte a). Para provarmos a parte b), raciocinamos por absurdo. De fato, se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$$

fosse convergente, a sequência $\{R_n\}$ também seria, já que $R_n = U_n - S_n$. Isso acarretaria na convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, contradizendo a hipótese.

A parte c) se demonstra de forma semelhante. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ fosse convergente, então a sequência $\{V_n\}$ seria convergente, o mesmo ocorrendo com a sequência $\{S_n\}$, porque $S_n = \dfrac{1}{\alpha} V_n$. Mais uma vez chegamos a uma contradição, já que, neste caso, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é suposta divergente.

■

Quando as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são ambas divergentes, o teorema anterior não dá informação sobre a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, que pode convergir ou divergir.

Exemplo 3.9. a) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(\frac{1}{3})^n + (\frac{1}{2})^{n-1} \right]$ é convergente, porque $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-1}$ são convergentes. A soma da série é calculada com auxílio da fórmula padrão da soma de uma série geométrica. Temos:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2}$ (razão $r = \frac{1}{3}$);
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{n-1} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2$ (razão $r = \frac{1}{2}$).

  Logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\frac{1}{3})^n + (\frac{1}{2})^{n-1})\right] = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n})$ é divergente, porque $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge;

c) Pode ocorrer de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ serem divergentes e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ convergir. De fato, as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} - \frac{1}{n+1}$ são divergentes e, ainda assim, a soma termo a termo é a série de encaixe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+n^2}$ convergente.

3.2 Séries de Termos Positivos

Uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ onde cada termo a_n é maior do que zero é denominada *série de termos positivos*

Definição 3.2. *Dizemos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é dominada pela série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ quando $a_n \leq b_n$ para todo n. Nesse caso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é a série dominada e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ é a série dominante.*

Para séries de termos positivos, os seguintes fatos são óbvios:

a) a sequência de somas parciais é monótona crescente;

b) se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é dominada pela série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, as respectivas sequências de soma parciais $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ satisfazem a relação $S_n \leq R_n$, para todo n.

Esses fatos, juntamente com o Teorema 2.6 nos dão o seguinte critério de convergência.

Teorema 3.4. *(Teste da Comparação) Sejam*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

duas séries de termos positivos.

a) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge e* $a_n \leq b_n$*, para todo* n*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também converge.*

b) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge e* $a_n \leq b_n$*, para todo* n*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *também diverge.*

Sendo as afirmaçãoes a) e b) equivalentes, é suficiente provarmos apenas a parte $a)$ do teorema. Sejam $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ as sequências de somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente. Como $\{R_n\}$ é uma sequência convergente, ela é limitada e sendo:

$$0 \leq S_n \leq R_n, \text{ para todo } n\,,$$

então $\{S_n\}$, além de monótona, é também limitada e, portanto, convergente. Logo, a série correspondente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

■

É importante observarmos que as limitações do enunciado do Teorema podem ocorrer a partir de uma certa ordem e mesmo assim o resultado continua válido, pois, o que estabelece a convergência de uma série é a sua cauda.

Exemplo 3.10. Da relação

$$\ln n \geq 1, \text{ para todo } n \geq 3,$$

segue que

$$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n},\ n \geq 3$$

e, como a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente, segue do Teste da Comparação que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

é também divergente.

Exemplo 3.11. Se a série dominada for convergente, então a série dominante pode convergir ou divergir. Por exemplo, a série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é dominada pela série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

De modo análogo, se a série dominante for divergente, então a série dominada pode convergir ou divergir.

Vejamos mais um critério de convergência.

Teorema 3.5. *(Teste da integral) Consideremos uma função* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *contínua e suponhamos que* f *seja não negativa e monótona decrescente, isto é:*

a) $f(x) \geq 0$, *para todo* $x \geq 1$*;*

b) $f(x) \geq f(y)$, *sempre que* $1 \leq x \leq y$*.*

Nessas condições, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *é convergente se, e somente, a integral imprópria* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *for convergente.*

Sendo $f(x)$ uma função monótona decrescente e não negativa, temos que:

$$0 \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq f(n-1), \text{ para todo } n \geq 2. \tag{3.12}$$

Fazendo $a_n = f(n)$, $R_n = \int_1^n f(x)dx$ e denotando por $\{S_n\}$ as somas parciais da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

e, usando (3.12) obtemos:

$$0 \leq S_n - a_1 \leq R_n \leq S_{n-1}, \forall n \geq 2. \tag{3.13}$$

Sendo monótonas as sequências $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$, segue da relação (3.13) que a limitação e, portanto a convergência, de uma delas implica a limitação e, por conseguinte, a convergência da outra. Isso prova que as sequências $\{S_n\}$e $\{R_n\}$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

$\blacksquare$

Exemplo 3.12. A função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ atende as condições do Teorema 3.5 no intervalo $[1, \infty)$. De fato, nesse intervalo a função $f(x)$ é claramente contínua e não negativa e como sua derivada $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$ é negativa, para todo $x \geq 1$, então $f(x)$ é decrescente. A integral imprópria $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{x^2}$ é convergente (seu valor é igual a 1) e, por conseguinte, a série correspondente $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Quando utilizamos o Teste da Integral, o valor da integral imprópria não é necessariamente igual ao valor da soma da série, no caso desta convergir. O teste dá informação sobre a convergência sem indicar o valor da soma da série.

Quando aplicamos o Critério da Comparação, a série de prova $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ que desejamos encontrar, além de natureza conhecida, deve atender a condição $a_n \leq b_n$ ou $a_n \geq b_n$ conforme o caso, para todo número natural n a partir de certo índice N. Dependendo da expressão que define o termo geral a_n, a desigualdade $a_n \leq bn$ (ou $a_n \geq b_n$) pode ser de difícil verificação e o critério da comparação dado a seguir é em geral mais fácil de ser aplicado porque, uma vez escolhida a série de prova $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nossas conclusões dependem tão somente do limite da razão $\frac{a_n}{b_n}$, com $n \to \infty$.

Teorema 3.6. *(Teste da Comparação do Limite) Sejam*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \text{duas séries de termos positivos e seja} \quad l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

a) Se $l > 0$, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

b) Se $l = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

c) Se $l = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é divergente.

Para $l > 0$ temos que como a_n e b_n são séries de termos positivos, então $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$ na condição do teorema. Assim, para $\epsilon = \frac{l}{2}$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $n > N$ implica $l - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \epsilon$ e consequentemente, $b_n(l-\epsilon) < a_n < b_n(l+\epsilon)$. se $\sum b_n$ converge, então $\sum b_n(l+\epsilon)$ também converge. Logo $\sum a_n$ converge.

Se $\sum a_n$ for convergente, note que $l = \frac{\epsilon}{2}$ implica em $l - \epsilon = \frac{l}{2} > 0$ e consequentemente, $b_n < \frac{a_n}{l-\epsilon}$. Como $\sum \frac{a_n}{l-\epsilon}$ converge, $\sum b_n$ também converge pelo teste da comparação.

Para $l = 0$, se $\sum b_n$ convergente então, dado $\epsilon = 1$ existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > N$ implica $-1 = l - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \epsilon = 1$ e consequentemente, $a_n < b_n$. Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge pelo teste da comparação e se $\sum a_n$ diverge, então $\sum b_n$ também diverge pelo teste da comparação.

■

Exemplo 3.13. Usando o Teste da Comparação no limite, deduzimos que as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^4\left(\frac{1}{n}\right)$$

são convergentes. Basta compará-las com as p-séries convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad \text{respectivamente,}$$

e notar que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}^4\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^4}} = 1.$$

O Teorema que veremos a seguir não vale para qualquer série. A natureza da convergência de uma série irá decidir se as somas infinitas se comportam como somas finitas, com respeito ao reagrupamento de seus termos. Em uma soma finita, é claro, seus termos podem ser reagrupados (ou rearranjados) sem que o valor da soma seja alterado.

Teorema 3.7. *(Teorema do reagrupamento) O valor da soma de uma série de termos positivos convergente não é alterado por um reagrupamento de seus termos.*

Seja $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ uma tal série com soma S e seja $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ a série obtida por reagrupamento. Se $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ denotam, respectivamente, as somas parciais de

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n,$$

então a sequência $\{S_n\}$ converge para S e para cada n temos $R_n \leq S$. Ora, a sequência $\{R_n\}$ é monótona e limitada por S, logo convergente. Se R é seu limite, então $R \leq S$ e, invertendo os papéis, podemos olhar a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ como obtida de $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ por reagrupamento, e uma repetição do argumento descrito acima implica $S \leq R$. Com isso, concluímos que $R = S$.

■

3.3 Séries Alternadas

Para uma série de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a sequência $\{S_n\}$ de somas parciais é crescente, e sua convergência passa a ser uma consequência de sua limitação. A restrição do Teste da Comparação às séries de termos positivos fica evidenciada quando se considera a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-n)$$

que, embora dominada pela série convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

não converge. O mesmo ocorre com a série de termo geral:

$$a_n = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad n \quad \text{é par} \\ \\ \dfrac{1}{n^2}, & \text{se} \quad n \quad \text{é ímpar} \end{cases},$$

onde os termos são alternadamente positivos e negativos. Uma série cujos termos são alternadamente positivos e negativos é denominada *série alternada*. esse tipo de série ocorre, por exemplo, no estudo de fenômenos ondulatórios, cujo modelo matemático tem por solução funções representadas por *séries trigonométricas* (*Séries de Fourier*):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \right) \frac{n\pi t}{L},$$

onde os coeficientes a_n e b_n que aparecem na série acima representam a posição inicial e a velocidade, respectivamente, de um *ponto da onda*.

As séries alternadas em geral se apresentam em uma das seguintes formas equivalentes:

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \tag{3.14}$$

ou:

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{3.15}$$

onde $\{a_n\}$ é uma sequência de termos positivos. Nesse tipo de série o fator $(-1)^n$ é o responsável pela mudança no sinal dos termos da série, e é claro que as séries dadas por (3.14) e (3.15) são ambas convergentes ou ambas divergentes e, por essa razão, investigaremos a convergência apenas de uma delas.

Teorema 3.8. *(Critério de Leibniz) Seja $\{a_n\}$ uma sequência de termos positivos com as seguintes propriedades:*

a) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$*;*

b) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$*, isto é, $\{a_n\}$ é monótona decrescente. Então a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

é convergente e, se $\{S_n\}$ representa sua sequência de somas parciais, a soma S da série atende à relação:

$$S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n}, \ \textit{para todo } n. \tag{3.16}$$

A sequência de termo geral $b_n = (-1)^n a_n$ converge para zero e, além disso, satisfaz as seguintes condições:

$$b_{2n-1} < 0, \quad b_{2n} > 0, \quad b_{2n} + b_{2n+1} \geq 0 \quad \text{e} \quad b_{2n-1} + b_{2n} \leq 0, \ \text{para todo } n.$$

Logo,

$$S_{2n} = (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \ldots + (b_{2n-1} + b_{2n})$$

é monótona decrescente e, reagrupando seus termos, obtemos:

$$S_{2n} = b_1 + (b_2 + b_3) + (b_4 + b_5) + \ldots + (b_{2n-2} + b_{2n-1}) + b_{2n} \geq b_1,$$

de onde concluímos que $\{S_{2n}\}$ é limitada inferiormente. Assim, $\{S_{2n}\}$ é decrescente e limitada inferiormente, sendo portanto convergente. Um raciocínio inteiramente análogo nos permite concluir que a sequência $\{S_{2n-1}\}$ é monótona crescente e limitada superiormente e, portanto, convergente. Como $\{b_{2n}\}$ converge para zero, então:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - b_{2n}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$$

e assim, concluímos a convergência da sequência $\{S_n\}$ e, por conseguinte, da série. Se S representa o valor da soma da série, então as subsequências $\{S_{2n}\}$ e $\{S_{2n-1}\}$ convergem para S e, como vimos: $S = \inf\{S_{2n}\}$, já que $\{S_{2n}\}$ é decrescente, e também $S = \sup\{S_{2n-1}\}$, já que $\{S_{2n-1}\}$ é crescente. Com isso chegamos a (3.16) e concluímos a demonstração.

■

Exemplo 3.14. Para aplicar o Critério de Leibniz à série alternada $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 5}$, notamos que $a_n = \dfrac{n}{n^2 - 5}$ e, portanto:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; e

b) $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \geq 3$.

Para comprovarmos a condição $a)$, basta observarmos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n - \frac{5}{n}} = 0.$$

A condição $b)$ pode ser verificada observando-se o sinal da derivada primeira da função extensão. De fato, se $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5}$ então

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 5}{(x^2 - 5)^2} < 0, \; \forall x \geq 3$$

e, portanto, a sequência $\{a_n = f(n)\}$ se torna decrescente a partir do seu terceiro termo. Assim, a série alternada converge.

3.4 Estimativa do Erro

Em muitas situações práticas, mesmo tendo a certeza da convergência da série alternada, às vezes é bastante difícil calcular o valor exato de sua soma e, dependendo do caso, um valor aproximado da soma da série pode ser utilizado com sucesso, desde que se estime o erro cometido.

Quando a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

atende às condições do Critério de Leibniz, a substituição da soma S da série pela n-ésima soma parcial S_n gera um erro de ordem a_{n+1}, isto é, $|S - S_n| \leq a_{n+1}$. Para comprovar esse fato, usamos a monotonia das sequências $\{S_{2n}\}$ e $\{S_{2n-1}\}$ para obtermos as relações:

$$S \leq S_{2n} \leq S_{2n+2} \quad \text{e} \quad S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S, \tag{3.17}$$

e, considerando que $b_n = (-1)^n a_n$, temos:

$$\begin{aligned} 0 \leq S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = -b_{2n+1}, &\ \text{ para todo } n, \\ 0 \leq S - S_{2n-1} \leq S_{2n} - S_{2n-1} = b_{2n}, &\ \text{ para todo } n. \end{aligned}$$

Dessas relações deduzimos que $|S - S_n| \leq |b_{n+1}| = a_{n+1}$, para todo n, como queríamos. Para as séries alternadas do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

ocorre um fato inteiramente análogo. Nesse caso, a sequência $\{S_{2n}\}$ é crescente, enquanto $\{S_{2n-1}\}$ é decrescente, e assim:

$$S \leq S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \quad \text{e} \quad S_{2n} \leq S_{2n+2} \leq S, \ \text{ para todo } n. \tag{3.18}$$

Dessas relações, deduzimos:

$$\begin{aligned} 0 \leq S_{2n-1} - S \leq S_{2n-1} - S_{2n} = -b_{2n}, &\ \text{ para todo } n, \\ 0 \leq S - S_{2n} \leq S_{2n} - S_{2n+1} = b_{2n+1}, &\ \text{ para todo } n, \end{aligned}$$

e daí segue que $|S - S_n| \leq |b_{n+1} = a_{n+1}$.

Aqui devemos observar quando a aproximação é por falta ou por excesso. Para as séries do tipo $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, a soma parcial S_{2n} é uma aproximação da série por excesso, enquanto S_{2n-1} é uma aproximação da mesma soma, agora por falta. Para as séries do tipo $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ ocorre exatamente o contrário. Em ambos os casos o erro cometido é da mesma ordem.

Exemplo 3.15. Vamos calcular o valor aproximado de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$$

com quatro casas decimais e com erro menor do que $E = 5\times10^{-4}$. A estimativa do erro nos fornece o número de termos que devem ser somados na aproximação. Consideramos o primeiro indíce n tal que $a_{n-1} \geq E \geq a_n$. Fazendo os cálculos encontramos $a_7 = 11.1 \times 10^{-4}$ e $a_8 = 4.8 \times 10^{-5}$, de modo que devemos tomar $n = 7$ no cálculo do valor aproximado, isto é, S_7 será a aproximação a ser considerada. Com o auxílio de uma calculadora, obtemos $S_7 = 0.4057$ e essa aproximação é por excesso. Um cálculo computacional nos dá:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} \approx 0.40547.$$

3.5 O Teste da Razão

Dos exemplos mostrados para o Teorema 3.1, podemos ver que a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

é convergente, enquanto a série obtida desta, considerando cada termo em valor absoluto, é a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente. A operação inversa preserva a convergência, isto é, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente. Para comprovar esse fato, primeiro usamos a relação:

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|, \text{ para todo } n, \tag{3.19}$$

e o Teste da Comparação para concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ é convergente. Em seguida usamos a relação

$$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|,$$

combinada com o Teorema 3.8(a), e concluímos a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Além disso, denotando por $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ as sequências de somas parciais das série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

respectivamente, segue da desigualdade triangular para números reais que:

$$|S_n| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| = R_n,$$

e, portanto,
$$\lim_{n\to\infty} S_n \le \lim_{n\to\infty} R_n.$$
Assim,
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$
A discussão acima motiva as definições de convergência absoluta condicional dadas a seguir.

Definição 3.3. *Uma série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é denominada absolutamente convergente quando a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *for convergente.*

Exemplo 3.16. Convergem absolutamente as séries
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}.$$
A série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$
embora convergente, não converge absolutamente.

Uma série dessa natureza é denominada *condicionalmente convergente.* Mas precisamente, temos a seguinte definicaoinicaoinição:

Definição 3.4. *Uma série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é denominada condicionalmente convergente quando for convergente e a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *for divergente.*

Teorema 3.9. *Se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente com soma* S *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é obtida de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *por reagrupamento, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é absolutamente convergente e tem soma* S.

É claro que
$$0 \le \sum_{n=1}^{n} |b_j| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_j|, \text{ para todo } n = 1, 2, 3, \ldots$$
de onde segue que as somas parciais da série $\sum |b_n|$ formam uma sequência monótona crescente e limitada, sendo portanto convergente. Assim, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente, e resta-nos provar que ela tem soma S. Denotemos por $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ as somas parciais das séries
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

respectivamente, e consideremos $\epsilon > 0$ dado. A convergência absoluta da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ garante a existência de um índice n tal que:

$$|S_n - S| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots |a_{n+p}| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } p \geq 1.$$

Se m é um índice suficientemente grande, então a soma parcial R_m contém todos os termos $a_j, 1 \leq n$, e certamente outos, e dessa forma podemos escrever:

$$R_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{k1} + a_{k2} + \ldots + a_{ks}$$

onde $k1,\ k2,\ \ldots,\ k_s$ são inteiros maiores do que n. Se $n + p_0$ é o maior dos números $k1,\ k2,\ \ldots,\ ks$, então:

$$|R_m - S_n| \leq |a_{k1}| + |a_{k2}| + \ldots + |a_{ks}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots |a_{n+p_0}| < \frac{\epsilon}{2}$$

e, usando essa desigualdade, obtemos:

$$|R_m - S| \leq |R_m - S_n| + |S_n - S| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

Teorema 3.10. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são séries absolutamente convergentes, então:*

a) a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *é absolutamente convergente; e*

b) o Produto de Cauchy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *das séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é absolutamente convergente e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

■

O critério de convergência dado a seguir, embora não conclusivo em alguns casos, é o mais importante teste de convergência para séries numéricas.

Teorema 3.11. *(Teste da Razão) Consideremos uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, onde cada termo* a_n *é diferente de zero.*

a) Se

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1,$$

então a série converge absolutamente.

b) Se

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l > 1 \quad ou \quad l = \infty,$$

então a série diverge.

Supondo que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1,$$

escolhemos um número real r tal que $l < r < 1$, e na definição de limite de sequência consideramos $\epsilon = r - l$. existe um índice n_0 a partir do qual é válida a relação:

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - l\right| < r - l$$

ou, de modo equivalente:

$$-r + l < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - l < r - l. \tag{3.20}$$

Segue da desigualdade (3.20), que $|a_{n+1}| < r|a_n|$, para todo $n \geq n_0$, e nessa desigualdade, fazendo sucessivamente $n = n_0,\, n_0 + 1,\, n_0 + 2,\, n_0 + 3, \ldots$, obtemos:

$$|a_{n_0+k}| < r^k|a_{n_0}|, \text{ para todo } k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.21}$$

e como $0 < r < 1$, então a série geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^k$ converge e, de (3.21) mais o Teste da Comparação deduzimos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{n_0+k}|$ também converge. Pelo teste da comparação, a série $\sum a_{n_0+k}$ é convergente, o que implica que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Para provar a parte b), admitimos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l > 1,$$

e consideramos agora r tal que $1 < r < l$. Novamente da definicaoinicaoinição de limite de sequência tomamos $\epsilon = l - r$, fixamos um índice n_0 a partir do qual se tem:

$$1 < r = l - \epsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < l + \epsilon,$$

e daí obtemos $0 < |a_{n_0}| \leq |a_n|$, para todo $n \geq n_0$ e, portanto, a sequência $\{a_n\}$, caso seja convergente, possui limite diferente de zero. Do teste do n-ésimo Termo deduzimos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

■

Exemplo 3.17. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!}$$

em que o termo geral é

$$a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n!}.$$

Temos:

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^2}{(n+1)!}\times\frac{n!}{(-1)^n n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\times\frac{1}{n+1}\right| = 1\times 0 = 0\,.$$

Como $l < 1$, então a série $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{n!}$ converge absolutamente.

Exemplo 3.18. Para cada uma das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

temos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

e o Teste da razão não se aplica. A convergência deve ser investigada por meio de outros argumentos. A primeira delas converge absolutamente, porque

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

é convergente. A segunda, como já vimos, converge condicionalmente e a terceira é a famosa série harmônica divergente. Essas séries mostram que de fato o Teste da Razão não se aplica àquelas séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ onde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1.$$

Teorema 3.12. *(Teste da Raiz) Dada uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *seja*

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

a) Se $l < 1$, então a série converge absolutamente.

b) Se $l > 1$ ou $l = \infty$, então a série diverge.

A demonstração é feita, comparando com a série geométrica de razão l.

Se $l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, considere $\epsilon = \frac{1-l}{2}$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $l - \epsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < l + \epsilon$. Denotando $\tilde{l} = l + \epsilon$, temos que $\tilde{l} < 1$ e $|a_n| < \tilde{l}^n$. Como a série $\sum_{k=N}^{\infty}\tilde{l}^k$ é uma série geométrica com razão $|\tilde{l}| < 1$ ela converge. Pelo teste da comparação, a série $\sum |a_n|$ é convergente, o que implica que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Se $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, considere $\epsilon = \frac{l-1}{2}$ e $\tilde{l} = l - \epsilon$. Como no caso acima, teremos $\tilde{l}^k < a_n$ com $\tilde{l} > 1$. Assim, temos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Logo, não podemos ter $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, o que significa que a série é divergente.

$\blacksquare$

Vejamos um exemplo que ilustra a aplicação do teste da raiz e um outro teste em que não se aplica.

Exemplo 3.19. Para ilustrar o teste da Raiz, seja a série

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n .$$

Nesse caso, $\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{n}{\ln n}$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$. Assim a série é divergente.

Exemplo 3.20. Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2}$, podemos verificar pelo Teste da Raiz que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} = 2 > 1$$

logo a série diverge.

4 Problemas Envolvendo Sequências e Séries para o Ensino Médio

Neste capítulo utilizaremos a teoria de sequências e séries numéricas e a modelagem matemática para apresentar propostas pedagógicas para a aplicação no ensino médio, com o objetivo de desenvolver o conhecimento matemático sobre este assunto nos alunos submetidos a estas.

Para tal objetivo também utilizaremos uma abordagem moderna, trazendo problemas envolvendo progressão geométrica, soma finita dos termos da progressão geométrica, progressaõ aritmética, conceito de juros simples e juros compostos por meio de progressões aritméticas e geométricas.

4.1 Propostas de Atividades Didáticas

Proposta 1: Usando Progressão Aritmética e Progressão Geométrica com Aplicação em Matemática Financeira

Apresentamos agora uma proposta didática utilizando progressões aritméticas em um problema de matemática financeira; especificadamente serão abordados juros compostos e simples. Esta proposta é adequada a alunos do ensino médio e tem como recurso necessário a lousa. O objetivo geral desta proposta é discutir com os alunos o conceito de juros compostos e simples, empregando os conhecimentos de progressões aritméticas e geométricas.

Esta proposta será desenvolvida em duas aulas. Na primeira aula será feita uma discussão informal sobre o problema abaixo e discutida as diferenças entre juros simples e compostos. Na segunda aula será feita uma formalização matemática do problema por meio de progressão aritmética e geométrica. Vamos ao problema que sera trabalhado em sala de aula:

“ João vai emprestar dinheiro a Gustavo o qual vai pagá-lo em quatro meses. João pretende receber juros compostos de 12% ao mês, mas Gustavo só pretende pagar a juros simples. Qual a taxa mensal de juros simples que João deve cobrar?”

Em grupos, os alunos trabalharão na resolução do problema. O professor supervisionará os grupos verificando as estratégias que os grupos estão considerando. Após esta etapa, o professor mediará um debate onde cada grupo socializará as soluções e estratégias. Fechando a discussão, o professor abordará o problema com o uso das progressões, fazendo depois algumas considerações teóricas acerca do tema, como as feitas abaixo:

Seja C o valor emprestado. O regime de juros compostos se comporta como uma progressão geométrica de razão $1+i$, onde i é a taxa de juros compostos por período de tempo. Já o regime de juros simples se comporta como uma progressão aritmética de razão $\bar{i}C$, onde $\bar{i}$ é a taxa de juros simples por período de tempo, como mostraremos abaixo:

- Juros Composto:

$$\begin{aligned}
M_0 &= C \; ; \\
M_1 &= \underbrace{C}_{M_0} + i \underbrace{C}_{M_0}; \\
M_2 &= \underbrace{C+iC}_{M_1} + i \underbrace{(C+iC)}_{M_1} = C(1+i)^2; \\
M_3 &= M_2 + iM_2 = C(1+i)^2 + i(C(1+i^2)) = C(1+i)^3. \\
M_4 &= M_3 + iM_3 = C(1+i)^3 + i(C(1+i^3)) = C(1+i)^4.
\end{aligned}$$

- Juros Simples:

$$\begin{aligned}
M_0 &= C \; ; \\
M_1 &= C + iC; \\
M_2 &= \underbrace{C+iC}_{M_1} + iC = C + 2iC; \\
M_3 &= M_2 + iC = C + 3iC; \\
M_4 &= M_3 + iC = C + 4iC.
\end{aligned}$$

Os montantes são:

- *Juros Compostos:* $M_0 = C$, $M_1 = C(1+i)$, $M_2 = C(1+i)^2$, $M_3 = C(1+i)^3$, $M_4 = C(1+i)^4$;

- *Juros Simples:* $\bar{M}_0 = C$, $\bar{M}_1 = C + iC$, $\bar{M}_2 = C + 2iC$, $\bar{M}_3 = C + 3iC$, $\bar{M}_4 = C + 4iC$

Desta forma, teremos

$$\begin{aligned}
M_4 &= \bar{M}_4 \\
C(1+i)^4 &= C+4iC \\
(1+0,12)^4 &= 1+4i \\
i &= \frac{(1,12)^4-1}{4} \\
i &= \frac{1,5735-1}{4} = 14,33\%
\end{aligned}$$

A avalição sera feita a cada aula por meio da participação, interesse e intervenção dos alunos em cada etapa proposta para o desenvolvimento da atividade.

Proposta 2: Termo Geral de uma Progressão Aritmética

Nesta proposta abordaremos o conteúdo de progressão aritmética. Este conteúdo é adequado a alunos do ensino médio e utilizaremos como resurso pedagógico a lousa. O objetivo geral desta proposta é apresentar aos alunos o conteúdo de progressões aritméticas, com todas as suas definições e possíveis aplicações.

Para desenvolvermos esta proposta, necessitaremos de duas aulas. Na primeira das aulas apresentaremos o problema e discutiremos suas hipóteses. Na segunda aula faremos o desenvolvimento da sequência numérica e a dedução do termo geral da progressão aritmética para chegarmos ao resultado esperado .

Vamos agora ao problema a ser trabalhado:

“ A companhia que administra uma rodovia quer colocar radares eletrônicos de controle de velocidade ao longo de 1000 km. O primeiro radar deve ser instalado no Km 10, o os demais instalados a cada 40 km. Quantos radares devem ser instalados ao longo da rodovia? ”

Para este problema necessitamos da fórmula geral da progressão aritmética então faremos sua dedução a seguir.

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1; \\
a_2 &= a_1 + r; \\
a_3 &= a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r; \\
a_4 &= a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r; \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)r;
\end{aligned}$$

Em grupos, os alunos trabalharão na resolução do problema. O professor supervisionará os grupos verificando as estratégias que estão sendo consideradas. Após esta etapa, o professor mediará um debate onde cada grupo socializará as soluções e estratégias. Possivelmente os alunos devem, em sua maioria, obter a quantidade de radares distribuindo-os ao longo dos 1000 km da rodovia.

$$\begin{array}{rcl}
\text{radar 1} & \rightarrow & \text{km 10} \\
\text{radar 2} & \rightarrow & 10+40=50 \rightarrow \text{ km 50} \\
\text{radar 3} & \rightarrow & 50+40=90 \rightarrow \text{ km 90} \\
\text{radar 4} & \rightarrow & 90+40=130 \rightarrow \text{ km 130} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{radar 24} & \rightarrow & 890+40=930 \rightarrow \text{ km 930} \\
\text{radar 25} & \rightarrow & 930+40=970 \rightarrow \text{ km 970}
\end{array}$$

Assim, no quilômetro 970 seria colocado o vigésimo quinto radar, portanto haveria 25 radares no trecho planejado da rodovia.

Fechando a discussão, o professor abordará o problema com o uso das progressões, resolvendo o exercício utilizando a fórmula do termo geral da progressaõ aritmética destacando uma maior facilidade na obtenção do resultado.

primeiro termo $\rightarrow a_1 = 10$

razão $\rightarrow r = 40$

número de termos $\rightarrow n$ (quantidade de radares)

termo geral $\rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$

Supondo $a_n = 500$ e considerando $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{array}{rcl}
1000 & = & 10+(n-1)40 \\
1000 & = & 10+40n-40 \\
1030 & = & 40n \\
n & = & 1030/40 = 25,75.
\end{array}$$

Lembrando que a quantidade de radares deve ser um número natural, então devem ser instalados 25 radares ao longo da rodovia.

Para a obtenção do marco quilométrico onde será instalado o 25º radar basta substituir $n = 25$ na expressão $a_n = a_1 + (n-1)r$

$$\begin{array}{rcl}
a_{25} & = & 10+(25-1)40 \\
a_{25} & = & 10+24\cdot 40 \\
a_{25} & = & 970.
\end{array}$$

A avalição sera feita a cada aula por meio da participação, interesse e intervenção dos alunos em cada etapa proposta para o desenvolvimento da atividade.

Proposta 3: Usando o Termo Geral da Progressão Geométrica

Nesta proposta abordaremos o conteúdo de progressão geométrica. Este conteúdo é adequado a alunos do ensino médio e utilizaremos como resurso pedagógico a lousa. O objetivo geral desta proposta é apresentar aos alunos o conteúdo de progressão geométrica, com todas as suas definições e possíveis aplicações.

O desenvolvimento será feito em duas aulas. Na primeira aula o problema abaixo será apresentado e possíveis soluções apontadas pelos alunos serão discutidas. Na segunda aula faremos o desenvolvimento da sequência numérica e a dedução do termo geral da progressão geométrica para obtermos o resultado procurado.

Vamos agora ao problema a ser trabalhado.

Quando dobramos ao meio uma folha de papel de 1mm de espessura também dobramos sua espessura. Se dobrarmos novamente a folha, dobraremos novamente a espessura, fazendo este processo sucessivamente formaremos a seguinte sequência:

$$a_1 = 1mm\,;\ a_2 = 2mm\,;\ a_3 = 4mm\,;\ a_4 = 8mm\,;\ \cdots$$

Quantas vezes precisamos dobrar o papel para ter uma espessura que daria uma volta no planeta que é de aproximadamente 40.000 Km ou 40.000.000.000 mm?

Para respondermos esta pergunta vamos definir progressão geométrica:

Definição 4.1. *Progressão Geométrica é uma sucessão de números reais obtida, com a exceção do primeiro, multiplicando o número anterior por uma quantidade fixa q, chamada razão.*

Os termos da progressão geométrica são dados da seguinte maneira:

$$a_1 = a_1\,,\ a_2 = \ a_1 q\,,\ a_3 = a_1 q^2\,, \cdots\,, a_n = a_1 q^{n-1}.$$

De acordo com o problema temos:

$$a_1 = 1\,;\quad q = 2\,;\quad a_n = 40.000.000.000$$

onde n é o número de vezes que o papel é dobrado.
O termo geral da progressão geométrica é:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

logo,

$$\begin{aligned} 40.000.000.000 &= 1 \cdot 2^{n-1} \\ 40.000.000.000 &= \frac{2^n}{2} \\ 80.000.000.000 &= 2^n \\ log_2 80.000.000.000 &= n \end{aligned}$$

Utilizando uma calculadora científica podemos calcular esse logaritmo e temos como resultado $n = 36,2192809488...$

Quando dobramos o papel 36 vezes temos 34359738368 mm e dobrando mais uma vez temos 68.719.476.736 mm. Como n é um número natural precisamos dobrar o papel 37 vezes para dar uma volta no planeta.

A avalição será feita a cada aula por meio da participação, interesse e intervenção dos alunos em cada etapa proposta para o desenvolvimento da atividade.

5 Considerações Finais

Esse trabalho apresentou propostas envolvendo o conteúdo de sequências e séries numéricas por meio da modelagem matemática para ensino médio.

Acreditamos que tais propostas estimulam o raciocínio e aprimoram o conhecimento matemático dos alunos já que os conteúdos trabalhados são vinculados a situações da vida real.

O papel do professor é de mediador e ele permite que os alunos participem ativamente das aulas tornando o aprendizado mais efetivo

Referências

[1] BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação*. Bolema. Rio Claro 14.15 (2001): 5-23.

[2] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. Contexto, 2004.

[3] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. Editora Contexto, 2002.

[4] BRASIL, 2000. *Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.

[5] BRASIL, 2012. *Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2012.

[6] D'AMBRÓSIO, U. (1996). *Educação Matemática: da teoria à prática*. Papirus Editora.

[7] DE ALMEIDA, L. M W.; DA SILVA, K. P. *Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência*. Ciência & Educação, v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

[8] GAZZETTA, M. *A modelagem como estratégia de aprendizagem da matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores*. 1989.

[9] LIMA, E. L. *Análise real*. Impa, 2004.

[10] MATOS, M. P. *Séries e equações diferenciais*. Prentice Hall, 2001.

[11] MONTEIRO, A. *O ensino de matemática para adultos através do método da modelagem matemática*. Rio Claro (SP): Universidade Estadual Paulista, 1991 (Doctoral dissertation, Dissertação, Mestrado em Educação Matemática).