



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**

Faculdade de Ciências

Campus de Bauru

Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência

WILLIAM VIEIRA GONÇALVES

**O TRANSITAR ENTRE A MATEMÁTICA DO MATEMÁTICO, A  
MATEMÁTICA DA ESCOLA E A MATEMÁTICA DO GEOGEBRA: UM  
ESTUDO DE COMO PROFESSORES DE MATEMÁTICA LIDAM COM  
AS POSSIBILIDADES E LIMITAÇÕES DO GEOGEBRA**

Bauru – SP

2016

WILLIAM VIEIRA GONÇALVES

**O TRANSITAR ENTRE A MATEMÁTICA DO MATEMÁTICO, A MATEMÁTICA DA ESCOLA E A MATEMÁTICA DO GEOGEBRA: UM ESTUDO DE COMO PROFESSORES DE MATEMÁTICA LIDAM COM AS POSSIBILIDADES E LIMITAÇÕES DO GEOGEBRA**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência.

Orientador: Prof. Dr. Wilson Massashiro Yonezawa

Bauru – SP

2016

Gonçalves, William Vieira.

O transitar entre a Matemática do Matemático, a Matemática da Escola e a Matemática do GeoGebra: um estudo de como Professores de Matemática lidam com as possibilidades e limitações do GeoGebra / William Vieira Gonçalves, 2016

240 f. : il.

Orientador: Wilson Massashiro Yonezawa

Tese (Doutorado)- Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2016

1. Matemática do GeoGebra. 2. Matemática do Matemático. 3. Matemática da Escola. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências. II. Título.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

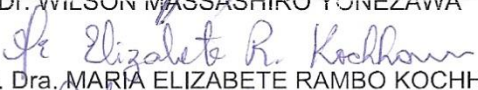
Câmpus de Bauru



**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE WILLIAM VIEIRA GONCALVES, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS.**

Aos 01 dias do mês de julho do ano de 2016, às 09:00 horas, no(a) Anfiteatro da Pós-Graduação da Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. WILSON MASSASHIRO YONEZAWA - Orientador(a) do(a) Departamento de Computação / Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, Profa. Dra. MARIA ELIZABETE RAMBO KOCHHANN do(a) Departamento de Matemática / Universidade do Estado de Mato Grosso, Prof. Dr. INEDIO ARCARI do(a) Departamento de Matemática / Universidade do Estado de Mato Grosso, Prof. Dr. AGUINALDO ROBINSON DE SOUZA do(a) Departamento de Química / Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, Profa. Dra. ANDREA CARLA GONCALVES VIANNA do(a) Departamento de Computação / Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da TESE DE DOUTORADO de WILLIAM VIEIRA GONCALVES, intitulada **O TRANSITAR ENTRE A MATEMÁTICA DO MATEMÁTICO, A MATEMÁTICA DA ESCOLA E A MATEMÁTICA DO GEOGEBRA: UM ESTUDO DE COMO PROFESSORES DE MATEMÁTICA LIDAM COM AS POSSIBILIDADES E LIMITAÇÕES DO GEOGEBRA**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

  
Prof. Dr. WILSON MASSASHIRO YONEZAWA

  
Profa. Dra. MARIA ELIZABETE RAMBO KOCHHANN

  
Prof. Dr. INEDIO ARCARI

  
Prof. Dr. AGUINALDO ROBINSON DE SOUZA

  
Profa. Dra. ANDREA CARLA GONCALVES VIANNA

## AGRADECIMENTOS

Aos meus amados pais, Maria Vitória e Silvio, grandiosos seres humanos que fizeram da minha vida, a melhor experiência possível.

À minha magnífica esposa Carla e a minha doce filha Carina, companheiras de todas as horas e maiores estímulos do meu caminhar.

À todos os familiares que sempre apoiaram e mantiveram sua fé em meu trabalho.

Aos companheiros e companheiras de estudo nesta caminhada e importante fase da minha formação intelectual e profissional. Aos companheiros e irmãos de alma, Thiago, Hawbert, e Rafael; seres humanos maravilhosos que sempre me ensinaram mais sobre a vida e "*otras cosas más*".

Às pessoas que nos receberam e ofereceram todo o apoio necessário a minha família e pessoa, quando estivemos em Bauru. Agradeço especialmente a Flávia e família por seu carinho, tempo e por dispor seus recursos.

À todos os professores e técnicos do Programa de Pós Graduação em Educação para a Ciência, profissionais comprometidos e extremamente atenciosos.

Ao Governo e Universidade do Estado de Mato Grosso, por possibilitarem todas as condições para consecução deste doutorado. Em especial, agradeço aos companheiros e companheiras do Curso de Licenciatura em Matemática de Barra do Bugres, por lidarem com minha ausência.

À CAPES, pelo apoio na forma de uma bolsa de estudos, durante minha participação no projeto OBEDUC.

Aos companheiros e companheiras do Grupo de Estudo em Matemática, Tecnologia e Pesquisa em Educação para a Ciência. Agradeço enormemente ao Hélio e Armando, companheiros mais próximos e sempre presentes nos momentos mais difíceis desta pesquisa.

Aos professores e professoras que gentil e competentemente, participaram das bancas de qualificação e defesa deste estudo.

Aos depoentes, que generosamente ofereceram seu tempo e conhecimento para permitir a composição desta tese.

Ao grande ser humano e amigo Wilson, orientador, inspirador e maior apoiador das minhas ideias. Jamais conseguirei expressar toda a gratidão e admiração por sua pessoa.

Peço desculpas para aqueles que não mencionei diretamente. Caem-me as lágrimas, são muitas pessoas e muito amor que me foi oferecido nestes últimos quatro anos. Tentarei retornar tais dádivas, na forma do meu total comprometimento com as pessoas que trabalharei ao longo de minha carreira.

GONÇALVES, William Vieira. **O transitar entre a Matemática do Matemático, a Matemática da Escola e a Matemática do GeoGebra: Um estudo de como Professores de Matemática lidam com as possibilidades e limitações do GeoGebra.** 240 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Faculdade de Ciências, Bauru/SP, 2016.

## RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo demonstrar que o GeoGebra apresenta uma maneira diferente de produzir significados matemáticos, com isso, sugerindo sua relevância para o ensino de matemática e de se discutir sua linguagem, possibilidades e limitações. A base inicial da pesquisa foi um estudo imersivo em diferentes comunidades virtuais, literatura acadêmica correlata, cursos específicos do software, produção e análise de diferentes construções dinâmicas. Por fim, optou-se por delimitar a análise aprofundada em entrevistas semiestruturadas com sete professores de matemática, usuários experientes do software. Confrontando-se estes entrevistados com algumas limitações do software, buscou-se estudar como eles transitam entre diferentes modos de produção de significados matemáticos. Pautando-se em reconhecer os diferentes jogos de linguagem, advindos das explicações dos sujeitos da pesquisa, foram sintetizadas três adjetivações que caracterizam os diferentes modos de produção de significados matemáticos: a Matemática do Matemático (MM), a Matemática da Escola (ME) e a Matemática do GeoGebra (MG). Esta pesquisa pautou-se na técnica de investigação qualitativa livre, em função da sua tentativa de compreender mais detalhadamente os significados e características situacionais. A análise dos dados foi realizada à luz de alguns elementos da Análise Textual Discursiva segundo Moraes e Galiazzi (2007). As categorias criadas, *a posteriori*, foram as seguintes: Matemática do Matemático (MM); Matemática da Escola (ME); Matemática do GeoGebra (MG); Trânsito entre as matemáticas; Percepção da MG; Necessidade de compreensão da MG; aparente Compreensão da MG e aparente Incompreensão da MG. A partir da análise dos dados foi possível confirmar o uso de diferentes jogos de linguagem e, portanto, confirmar o transitar entre a MM, a ME e a MG. Ainda, percebeu-se e analisou-se diferentes formas de transitar, concluindo-se que existe um modo de transitar, comum a todos os entrevistados. Parte-se das possibilidades semióticas da MG, aproveitando-se da maleabilidade da ME, para formalizar-se significados matemáticos, legítimos a MM. Finalmente, a partir da análise aprofundada de uma entrevista, propõe-se o reconhecimento de diferentes aspectos da MG e da história do GeoGebra, como uma forma de aprender sobre como lidar com suas possibilidades e limites.

**Palavras-chave:** GeoGebra. Matemática do Matemático. Matemática da Escola. Matemática do GeoGebra. Limites dos aspectos computacionais da Matemática do GeoGebra.

GONÇALVES, William Vieira. **The transition between the Math from Mathematician, the Math from School and the Math of GeoGebra: A study of how mathematics teachers deal with the possibilities and limitations of GeoGebra.** 240 f. Doctoral Dissertation (PhD program in Education Science) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – College of Science, Bauru/SP, 2016.

### **ABSTRACT**

This work aims to demonstrate that GeoGebra presents has a different way of producing mathematical meanings, suggesting its relevance to mathematics teaching and to discuss its language, possibilities and limitations. Research initial framework was an immersive study in different virtual communities, academic literature, specific courses, production and analysis of different dynamic constructions. In the end, the choice was to delimitate a depth analysis on semi-structures interviews with seven math teachers, experienced software users. Confronting this respondents with some limitations of the software, we sought to study how they transit between different modes of production of mathematical meanings. Based on recognizing the different language games, arising of research subjects were synthesized three adjectives that characterize the different mathematical modes of production: Math from Mathematician (MM), Math from School (ME, in Portuguese) and Math from Geogebra (MG, in Portuguese too). This research used the free qualitative investigation for its attempt to understand with more details the meanings and situational characteristics. Data analysis was carried out with some elements of Discursive Textual Analysis from Moraes and Galiazzi (2007). The categories created, *a posteriori*, were: Mathematics from Mathematician (MM); Math from School (ME); and Math from Geogebra (MG); Transit between the mathematics; Perception from MG; need of comprehension from MG; apparent comprehension from MG and incomprehension from MG. Data analysis enable to confirm the use of different languages games and, thus, confirm the transition between MM, ME and MG. I still realized and analyzed different ways of transition, concluding that there is a common way to transit between all respondents. We set of semiotic possibilities from MG, taking advantage of the malleability from ME, to formalized mathematical meanings, legitimate from MM. Finally, from the depth analysis of an interview, it is proposed to recognize different aspects from MG and of the GeoGebra history, as a way to learn about how to deal with its possibilities and limits.

**Keywords:** GeoGebra. Math from Mathematician. Math from School. Math from Geogebra. Limits of computational aspects of GeoGebra Mathematics.

## LISTA DE FIGURAS

|  |     |
|--|-----|
| Figura 1- Tela de apresentação do Cabri Geometry II plus.....  | 16  |
| Figura 2 - Exemplo de interface da tela do Cabri Geometry II plus .....  | 17  |
| Figura 3- Exemplos de pontos e suas denominações no Cabri Geometry II plus .....                               | 17  |
| Figura 4- Triângulo no Cabri Geometry II plus .....  | 18  |
| Figura 5 - Frase “Este triângulo” na tela do Cabri Geometry II plus .....                                      | 19  |
| Figura 6 - Frase “Que objeto” na tela do Cabri Geometry II plus.....   | 26  |
| Figura 7 - Comprimentos e área do triângulo na tela do Cabri Geometry II plus.....                             | 26  |
| Figura 8 - Pontos não coincidentes na tela do Cabri Geometry II plus.....                                      | 27  |
| Figura 9 - Pontos não coincidentes na tela do GeoGebra.....  | 28  |
| Figura 10 - Alusão à retificação da circunferência de um círculo .....   | 29  |
| Figura 11 - Alusão à quadratura da área do círculo .....   | 31  |
| Figura 12 - Exemplo de uma comunidade virtual interessada no GeoGebra .....                                    | 68  |
| Figura 13 – Exemplo do que considero uso do jogo de linguagem da Matemática do<br>GeoGebra.....                | 69  |
| Figura 14 - Janela da Álgebra da construção relativa à Figura 13 .....   | 71  |
| Figura 15 - Exemplo de uso de macro para construir textos em Latex .....                                       | 74  |
| Figura 16 - Tela de Ajuda para os comandos do GeoGebra .....   | 75  |
| Figura 17 - IEEE 754: Notação de ponto flutuante com 32 e 64 bits.....   | 76  |
| Figura 18- Ponto de intersecção que evidencia um limite computacional da MG .....                              | 79  |
| Figura 19 - Exemplo de gráfico do GeoGebra que não corresponde a ME.....                                       | 80  |
| Figura 20 - Exemplo de tratamento de entrevista com o CAMTASIA.....  | 87  |
| Figura 21 - Tela do MAXQDA com exemplo de entrevista codificada.....   | 88  |
| Figura 22 - Recorte da janela de ajuda para os comandos do GeoGebra .....                                      | 158 |
| Figura 23 - Comparando a Janela CAS e a Janela de Álgebra.....   | 159 |
| Figura 24 - Exemplo evidente do cálculo simbólico e do cálculo numérico<br>computacional com a Janela CAS..... | 160 |
| Figura 25 - Comparação de quantidade máxima de casas decimais entre as Janelas<br>de Álgebra e CAS.....        | 161 |
| Figura 26 - Versão do GeoGebra .....   | 161 |
| Figura 27 - Recorte de uma discussão no fórum em inglês do IGI.....  | 163 |



## LISTA DE QUADROS

|  |     |
|--|-----|
| Quadro 1 - Teorias "realistas" x teorias "pragmáticas" .....   | 56  |
| Quadro 2 - <i>Caracterização dos entrevistados segundo os critérios estabelecidos</i> ...                | 84  |
| Quadro 3 - Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM) .....    | 95  |
| Quadro 4 - Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a Matemática da Escola (ME).....         | 96  |
| Quadro 5 - Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG) .....      | 97  |
| Quadro 6 - Excertos da entrevista de P1 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas .....   | 98  |
| Quadro 7 - Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a percepção da MG .....                  | 100 |
| Quadro 8 - Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a necessidade de compreensão da MG.....  | 102 |
| Quadro 9 - Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a aparente compreensão da MG.....        | 103 |
| Quadro 10 - Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a aparente incompreensão da MG .....    | 105 |
| Quadro 11 - Excertos da entrevista de P2 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM) .....   | 107 |
| Quadro 12 - Excertos da entrevista de P2 que denotam referências a Matemática da Escola (ME).....        | 107 |
| Quadro 13 - Excertos da entrevista de P2 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG) .....     | 108 |
| Quadro 14 - Excertos da entrevista de P2 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas .....  | 108 |
| Quadro 15 - Excertos da entrevista de P2 que denotam referências a percepção da MG .....                 | 110 |
| Quadro 16 - Excertos da entrevista de P2 que denotam referências a necessidade de compreensão da MG..... | 110 |
| Quadro 17 - Excertos da entrevista de P2 que denotam referências a incompreensão                         |     |

|  |     |
|--|-----|
| da MG .....  | 111 |
| Quadro 18 - Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM) .....   | 113 |
| Quadro 19 - Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a Matemática da Escola (ME).....        | 114 |
| Quadro 20 - Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG) .....     | 114 |
| Quadro 21 - Excertos da entrevista de P3 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas .....  | 115 |
| Quadro 22 - Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a percepção da MG .....                 | 116 |
| Quadro 23 - Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a necessidade de compreensão da MG..... | 117 |
| Quadro 24 - Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a aparente compreensão da MG.....       | 118 |
| Quadro 25 - Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a aparente incompreensão da MG .....    | 118 |
| Quadro 26 - Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM) .....   | 120 |
| Quadro 27 - Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a Matemática da Escola (ME).....        | 121 |
| Quadro 28 - Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG) .....     | 121 |
| Quadro 29 - Excertos da entrevista de P4 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas .....  | 122 |
| Quadro 30 - Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a percepção da MG .....                 | 123 |
| Quadro 31 - Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a necessidade de compreensão da MG..... | 124 |
| Quadro 32 - Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a aparente compreensão da MG.....       | 125 |
| Quadro 33 - Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a aparente                              |     |

|  |     |
|--|-----|
| incompreensão da MG .....  | 125 |
| Quadro 34 - Excertos da entrevista de P5 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM) .....   | 128 |
| Quadro 35 - Excertos da entrevista de P5 que denotam referências a Matemática da Escola (ME).....        | 128 |
| Quadro 36 - Excertos da entrevista de P5 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG) .....     | 129 |
| Quadro 37 - Excertos da entrevista de P5 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas .....  | 130 |
| Quadro 38 - Excertos da entrevista de P5 que denotam referências a percepção da MG .....                 | 132 |
| Quadro 39 - Excertos da entrevista de P5 que denotam referências a necessidade de compreensão da MG..... | 132 |
| Quadro 40 - Excertos da entrevista de P5 que denotam referências a aparente compreensão da MG.....       | 133 |
| Quadro 41 - Excertos da entrevista de P6 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM) .....   | 134 |
| Quadro 42 - Excertos da entrevista de P6 que denotam referências a Matemática da Escola (ME).....        | 135 |
| Quadro 43 - Excertos da entrevista de P6 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG) .....     | 136 |
| Quadro 44 - Excertos da entrevista de P6 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas .....  | 136 |
| Quadro 45 - Excertos da entrevista de P6 que denotam referências a percepção da MG .....                 | 137 |
| Quadro 46 - Excertos da entrevista de P6 que denotam referências a necessidade de compreensão da MG..... | 138 |
| Quadro 47 - Excertos da entrevista de P7 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM) .....   | 140 |
| Quadro 48 - Excertos da entrevista de P7 que denotam referências a Matemática da Escola (ME).....        | 141 |
| Quadro 49 - Excertos da entrevista de P7 que denotam referências a Matemática do                         |     |

|   |     |
|---|-----|
| GeoGebra (MG) .....   | 141 |
| Quadro 50 - Excertos da entrevista de P7 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas .....   | 142 |
| Quadro 51 - Excertos da entrevista de P7 que denotam referências a percepção da MG .....  | 144 |
| Quadro 52 - Excertos da entrevista de P7 que denotam referências a aparente compreensão da MG .....   | 145 |
| Quadro 53 – Confirmação de que todos os entrevistados apresentaram surpresa e/ou desconforto e/ou incompreensão em relação aos resultados obtidos pelo GeoGebra em um ou mais momentos em que discutimos os episódios 1 e 2 ..... | 147 |
| Quadro 54- Alguns excertos da entrevista de P1 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM) .....  | 149 |
| Quadro 55 - Alguns excertos das entrevistas com P2, P3, P4, P5, P6 e P7 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM) nas suas falas .....  | 151 |
| Quadro 56 – Excertos que denotam que os entrevistados não se limitam a lidar com significados matemáticos, apenas pautando-se em explicações ou processos formais da MM .....   | 152 |
| Quadro 57 - Excertos da entrevista de P1 que denotam seu uso da MM como estratégia para lidar com os limites da MG .....  | 156 |

## **LISTA DE TABELAS**

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 1 – Confirmação de uso de linguagem de cada matemática.....                             | 146 |
| Tabela 2 - Confirmação das contribuições de cada entrevistado às categorias de<br>análise..... | 146 |

## SUMÁRIO

|   |     |
|---|-----|
| <b>CAPÍTULO 1 – PANORAMA E PROBLEMÁTICA</b> .....   | 16  |
| 1.1 - Introdução.....   | 16  |
| 1.2 - Problemática.....   | 25  |
| <b>CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTOS E PRESSUPOSTOS</b> .....  | 34  |
| 2.1 - Breve histórico do GeoGebra: criação, desenvolvimento, características e comunidade de usuários.....  | 34  |
| 2.2 - Pesquisas sobre a utilização do GeoGebra no ensino de matemática .....  | 38  |
| 2.3 - Acerca dos diferentes modos de produção de significados matemáticos e do transitar entre eles .....   | 54  |
| 2.3.1 - A Matemática do Matemático (MM) .....   | 60  |
| 2.3.2 – A Matemática da Escola (ME) .....   | 64  |
| 2.3.3 – A Matemática do GeoGebra (MG).....  | 67  |
| <b>CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA</b> .....   | 82  |
| <b>CAPÍTULO 4 – ANÁLISES E RESULTADOS</b> .....   | 91  |
| 4.1 - Protocolo das análises .....  | 92  |
| 4.2 – Análises das entrevistas.....   | 93  |
| 4.2.1 – Análise interpretativa: entrevista com P1.....  | 94  |
| 4.2.2 - Análise interpretativa: entrevista com P2.....  | 105 |
| 4.2.3 - Análise interpretativa: entrevista com P3 .....   | 112 |
| 4.2.4 - Análise interpretativa: entrevista com P4 .....   | 119 |
| 4.2.5 - Análise interpretativa: entrevista com P5 .....   | 126 |
| 4.2.6 - Análise interpretativa: entrevista com P6 .....   | 133 |
| 4.2.7 - Análise interpretativa: entrevista com P7 .....   | 138 |
| 4.2.8 - Confirmações ou não de indícios de que os entrevistados forneceram elementos às categorias iniciais.....  | 146 |
| 4.2.9 - Codificações que denotam presença ou ausência de surpresa, desconforto ou incompreensão dos entrevistados em relação aos resultados matemáticos do GeoGebra relativos aos episódios 1 e ou 2..... | 147 |

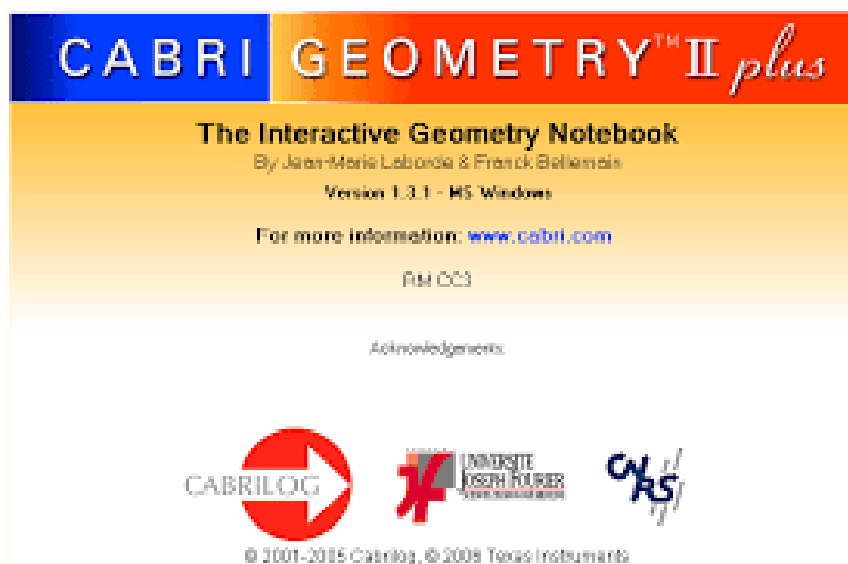
|   |     |
|---|-----|
| 4.3 – Da visualização à discussão conceitual ou operacionalizar conceitos para construir objetos matemáticos estruturados: Um transitar consolidado .....   | 149 |
| 4.4 – Reconhecimento de diferentes aspectos da MG e da história do GeoGebra, uma forma de aprender sobre como lidar com suas possibilidades e limites ..... | 156 |
| <b>CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES</b> .....  | 165 |
| <b>REFERÊNCIAS</b> .....  | 170 |
| <b>ANEXOS</b> .....   | 180 |
| ANEXO A – Transcrição da Entrevista com P1 - Realizada em 11/08/2015.....   | 180 |
| ANEXO B – Transcrição da Entrevista com P2 – Realizada em 19/08/2015.....   | 191 |
| ANEXO C – Transcrição da entrevista com P3 – Realizada em 05/08/2015 .....  | 198 |
| ANEXO D – Transcrição da entrevista com P4 – Realizada em 31/07/2015 .....  | 202 |
| ANEXO E – Transcrição da entrevista com P5 – Realizada em 04/08/2015 .....  | 210 |
| ANEXO F – Transcrição da entrevista com P6 – Realizada em 10/08/2015 .....  | 218 |
| ANEXO G – Transcrição da entrevista com P7 – Realizada em 31/07/2015.....   | 230 |
| <b>APÊNDICES</b> .....  | 237 |
| APÊNDICE A - Roteiro de entrevista .....  | 237 |
| APÊNDICE B – Carta de cessão gratuita de direitos de depoimento oral .....  | 240 |

## CAPÍTULO 1 – PANORAMA E PROBLEMÁTICA

### 1.1 - Introdução

Cursando o segundo semestre de Licenciatura em Matemática, no ano de 1997, ocorreu a minha primeira experiência com um software educacional voltado a matemática. Naquele momento me apresentaram um software de Geometria Dinâmica cuja versão era chamada de *Cabri Geometry* e atualmente é conhecido como *Cabri Geometry II plus*, conforme Figura 1.

Figura 1- Tela de apresentação do Cabri Geometry II plus

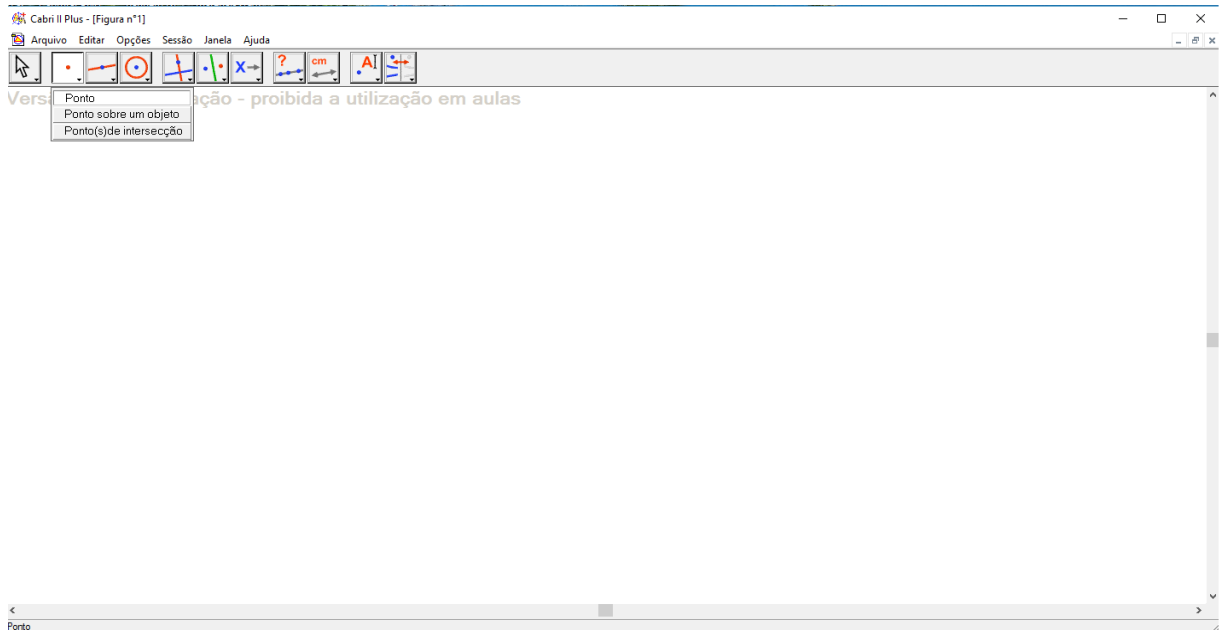


Fonte: O autor

Sem discurso introdutório, o primeiro pedido do professor foi que clicássemos em um ícone específico da barra de ferramentas e depois, em três diferentes locais de uma área de cor branca localizada logo abaixo destes ícones que estão alinhados horizontalmente no topo do monitor, conforme Figura 2.



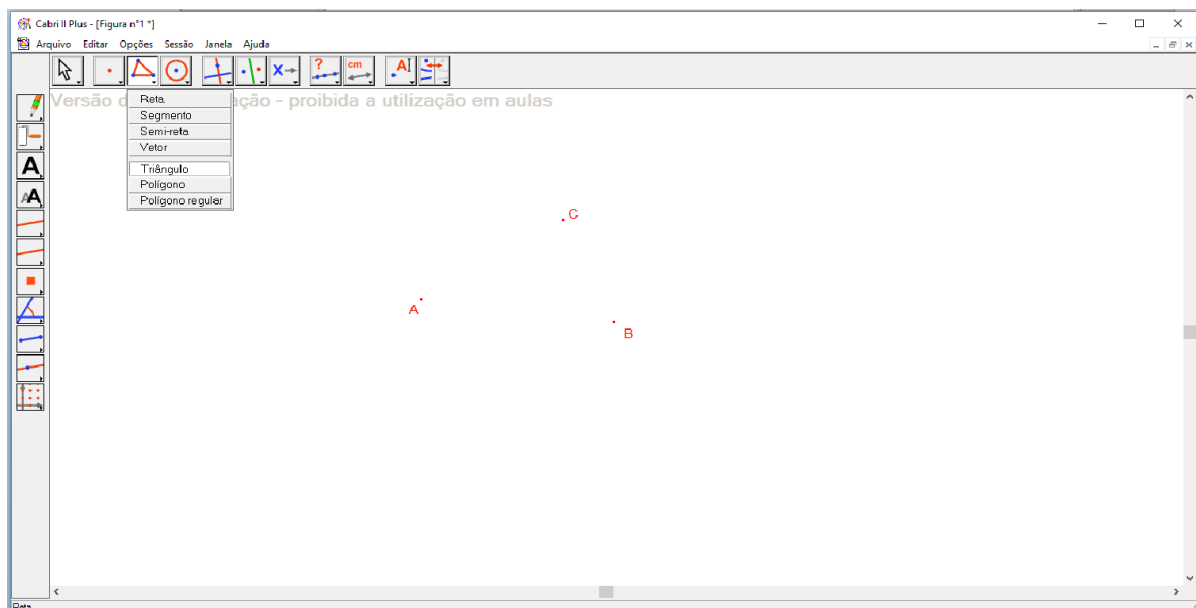
Figura 2 - Exemplo de interface da tela do Cabri Geometry II plus



Fonte: O autor

Em seguida, o professor solicitou que utilizando outro ícone, o do *triângulo* (ver Figura 3), clicássemos nos três locais, cujo resultado seria o aparecimento na tela de minúsculos círculos vermelhos e que cada um estaria bem próximo às distintas letras maiúsculas, com o intuito de denominá-los e diferenciá-los.

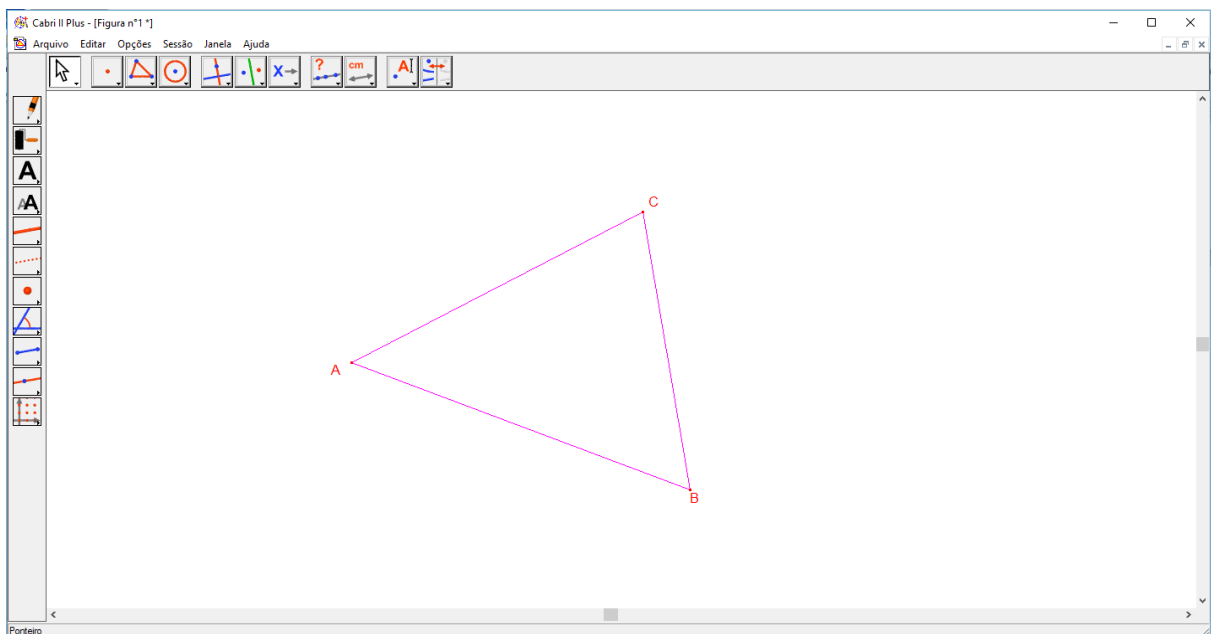
Figura 3- Exemplos de pontos e suas denominações no Cabri Geometry II plus



Fonte: O autor

Em seguida, deveríamos começar por qualquer um dos minúsculos círculos vermelhos e terminar no mesmo em que se iniciou a sequência de cliques. O que eu visualizo repentinamente, após estes procedimentos junto ao programa foi um desenho muito parecido com um triângulo daqueles que, em geral, estavam nos livros didáticos que utilizava nos meus estudos em matemática ou nos quadros-negros das aulas que eu assistia, conforme Figura 4.

*Figura 4- Triângulo no Cabri Geometry II plus*

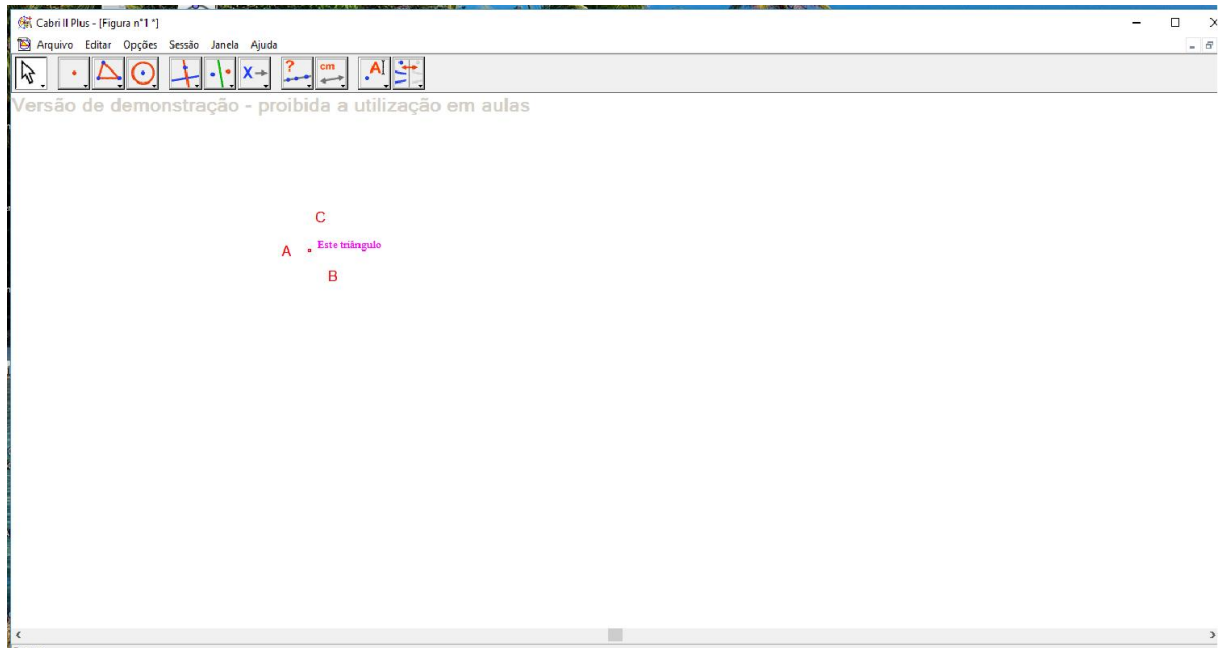


*Fonte: O autor*

Pensei: Muito útil, pois agora poderei fazer melhor os meus próprios desenhos nos trabalhos escolares. A maior surpresa estava por vir quando professor pediu que clicar (com o botão esquerdo do mouse) em diferentes partes deste desenho e mantendo-o pressionado, movêssemos e observássemos o que ocorria. Parte da minha surpresa estava relacionada ao fato de que, ao seguir as instruções, era possível visualizar o desenho se transformando, podendo ficar maior ou menor quando deslocava na área branca, conforme eu movia o mouse. Além disso, quando decidi explorar a possibilidade de arrastar os três objetos iniciais para uma mesma localização da área de cor branca, uma pequena palavra “*triângulo*” insistia em aparecer automaticamente e bem próximo ao desenho. Este fato se, mantinha evidente, mesmo quando o que eu visualizava era somente um círculo vermelho e

que sugestivamente parecia a representação de um só ponto, no sentido da geometria Euclidiana, conforme Figura 5.

*Figura 5 - Frase “Este triângulo” na tela do Cabri Geometry II plus*



*Fonte: O Autor*

Os termos, “geometria dinâmica”, “ícones”, “clique”, “mouse”, “tela”, “monitor”, pertencem a este universo tecnológico utilizado para o contexto de ensino e aprendizagem e, muitas vezes, causam uma certa estranheza àqueles que não estão inseridos nessa realidade do uso das tecnologias para ensinar e aprender matemática. É possível, que atualmente, estas palavras sejam mais comuns a uma parte da sociedade. Entretanto, o acesso aos computadores, no âmbito escolar, há dezoito anos era muito limitado, para não dizer inexistente, o que causava demasiada estranheza em muitos dos meus colegas de faculdade. Fato este, que no exemplo da aula citada, vários de meus colegas nada faziam quando o professor solicitava que movesse o mouse para iniciar a atividade proposta. Neste contexto a nossa formação inicial de futuros professores de matemática começava a reconhecer as potencialidades e as dificuldades do uso de diferentes tecnologias e mídias digitais na Educação Matemática.

De volta às minhas impressões pessoais, lembro-me que, de modo geral, as aulas de geometria que frequentei, eram pautadas em figuras estáticas e associadas às proposições definidas e sem qualquer tipo de discussão. Uma dessas definições

era a seguinte: um triângulo é formado a partir de três pontos (vértices) não colineares. No entanto, deparava-me com um objeto, também, chamado de triângulo e com três vértices coincidentes. Alguns questionamentos surgiram:

- O que estava errado?
- Minhas aulas anteriores estavam defasadas?
- A Geometria Euclidiana fora renovada?
- O software ou o computador estavam com algum tipo de defeito?
- A matemática apresentada no computador seria de alguma forma, diferente daquela que eu estava habituado?
- O que seria necessário aprender para usar softwares como este?

Minha primeira reação diante destas questões foi compreender a necessidade de me envolver profundamente em estudos e experiências com tecnologias digitais e com a Educação Matemática.

Os anos se passaram e fui me habituando no uso de softwares matemáticos no cotidiano de estudos. Passei a experimentar diversos softwares capazes de representar, plotar/desenhar e manipular objetos/figuras da geometria plana ou tridimensional, gráficos de funções, matrizes e expressões algébricas literais.

Durante esse período precisei lidar com a transição entre a linguagem da notação matemática, seus significados e as diferentes sintaxes de linguagens computacionais. E ainda lidar com outros idiomas, além do português. Cada software exigia que eu aprendesse como utilizar suas ferramentas e modos peculiares de uso. Havia sempre a necessidade de estar apto a trabalhar com as especificidades de cada sistema operacional que cada software poderia ser instalado. Uma das dificuldades era que sempre havia questões correlatas aos limites de processamento e armazenamento em memórias físicas e virtuais dos computadores. Não havia opção, ou lidava com estas questões ou, simplesmente, não as utilizava.

Entrementes, a expansão do acesso a textos digitalizados por meio da rede mundial de computadores (*internet*), mostrava-se proveitosa nessa empreitada, mas com raras publicações em língua portuguesa e ou voltadas a discutir os significados das ideias matemáticas com intermédio computacional. Em geral, os textos assemelhavam-se a tutoriais/manuais ou roteiros, que dependendo da atividade

eram interessantes.

Essa realidade, também, é evidenciada nos textos acadêmicos como teses e dissertações, pois, ainda hoje, há relativamente, poucas produções que se diferenciam de manuais/roteiros e que começam a fornecer alguns indícios sobre as implicações pedagógicas, linguísticas e cognitivas. Nesse sentido, indico os textos de Miskulin (1999), Gravina; Santarosa (1999) e Gravina (2001).

Outro ponto vital era a minha dificuldade de encontrar pessoas dispostas a trocar experiências e conhecimentos sobre o uso de softwares matemáticos no contexto escolar. Sempre ansiei por interagir com redes ou grupos de pessoas que compartilhassem o interesse por este tema.

Felizmente, ao longo dos anos, a gama de informações em ambientes virtuais tais como textos acadêmicos, grupos de discussão e repositórios de mídias digitais cresceu consideravelmente. Possibilitando-me, cada vez mais, refletir e concordar com a analogia (ou seria uma metáfora?) entre o dilúvio bíblico e o dilúvio informacional, presente na obra “Cibercultura” de Lévy (1999). Nessa obra, podemos reconhecer várias proposições interessantes a esse universo digital, porém, resalto o ponto em que ele a explora. Ele propõe uma função à arca de Noé. Segundo Lévy (1999), tal arca, quando fechada, representa a totalidade cultural reconstituída. A reorganização do macrocosmo por vir, foi definida através das escolhas dos elementos e seres que deveriam ser conservados ou preservados. Lévy (1999) conclui que no contexto do dilúvio informacional, não há possibilidade de se predefinir esta totalidade cultural a ser preservada. Este segundo dilúvio não cessará. O que teremos são infindáveis outras arcas, lutando para se manter navegando e buscando constituir a continuidade de suas escolhas culturais. Apesar dos esforços, várias destas embarcações acabam ou acabarão por naufragar, ou talvez, unir-se-ão pela manutenção de seus interesses e necessidades.

Usuários de softwares computacionais educacionais, possivelmente, migram seus esforços para outras opções e por razões como: questão de gratuidade do software, adaptabilidade a diferentes sistemas operacionais e dispositivos eletrônicos ou funcionalidades que estejam mais adequadas às suas intenções didáticas e práticas escolares.

No Brasil, desde os idos de 1980, há um interesse em difundir softwares

educacionais na comunidade escolar. No entanto, existem várias questões para se discutir por quais razões, tais iniciativas não se mantiveram ao longo do tempo (Cf. Valente; Almeida, 1997, *passim*).

Existem alguns exemplos de softwares educacionais que posso mencionar.

Seymour Papert, um dos prováveis pioneiros da informática educativa criou o *Logo* ou *Super Logo* (cf. Straub (2012, p.41)), uma linguagem de programação, capaz de fornecer representações gráficas correspondentes a comandos de orientação espacial. Entusiasticamente defendido pelo professor e pesquisador José Armando Valente da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), o *Logo* chegou a ser uma das frentes de trabalho em projetos de políticas públicas do Brasil, visando fomentar a inserção da informática nas escolas.

O próprio software *Cabri Geometry*, mesmo não sendo gratuito, provavelmente, faz parte da história de vários professores brasileiros.

O *Winplot*, *Mapple*, *Mathematica*, *Mupad* e *Maxima* são outros exemplos de softwares matemáticos que perpassaram alguns dos ambientes do ensino de matemática brasileiro, assemelhando-se àquelas naus antes mencionadas.

Ressalto que não é minha intenção contar as histórias destes softwares, pretendo apenas ilustrar o fato de que ocorreram várias iniciativas e, ainda assim, não temos grandes comunidades brasileiras ou volumosas produções derivadas destes softwares<sup>1</sup>.

De qualquer forma, as histórias desses ou de outros softwares não fazem parte dos objetivos deste trabalho. Pretendo me concentrar com foco no GeoGebra. O nome deste software educacional voltado para matemática, pode ser considerado como um termo neológico, cunhado com a intenção de evocar a união dos termos geometria e álgebra, reunindo várias funcionalidades semelhantes às dos softwares citados acima, além de outras possibilidades.

Minhas experiências me levam a afirmar que fatores tecnológicos, questões de linguagem matemática, linguagens de programação, didática, concepções sobre matemática e concepções sobre educação são aspectos presentes nas produções e

---

<sup>1</sup> Neste e no parágrafo anterior, forneço afirmativas informais, que talvez o leitor não as aceite ou considere irresponsáveis, mas convido-o a realizar pesquisas na internet e comparar a quantidade de material que vier encontrar, com as centenas de publicações distintas ao procurar pela palavra GeoGebra. Espero com isto, tentar justificar porque acredito na validade da minha escolha por este software. Existe uma comunidade bem maior e interessada neste software.

discussões circunscritas ao contexto do GeoGebra.

O GeoGebra, antes, considerado por muitos só mais um software educacional, em mim, suscita algo mais. Propiciando o que entendo como um contexto de práticas culturais com potencial educacionalmente significativo, reunindo diversos perfis de usuários que o desenvolvem, pesquisam, exploram e compartilham suas produções e experiências.

Minha primeira intenção é propor a relevância de se tentar constituir estudos imersivos nos modos de fazer e usar o GeoGebra, procurando estabelecer leituras das práticas e representações que os usuários declaram em seus discursos e produções.

Considerando que atuo em uma Licenciatura em Matemática e meu interesse em pesquisar essa possível forma de cultura em torno do GeoGebra, decidi estudar e reconhecer quais questões interessam aos professores que ensinam matemática; quais suas referências, modos de aprender a lidar com o software, potencialidades didáticas que justificam o uso desse software e as concepções correlatas sobre matemática e ensino.

Ressalto que estas ideias são tratadas de várias formas e através de várias teorizações, levando-me a constituir esta pesquisa através de um longo processo de imersão no que se relaciona e me foi possível acessar sobre o GeoGebra.

O que tenho chamado de imersão, pode ser caracterizado pelas atividades de pesquisa e revisão literária, emitir pareceres *ad hoc* para artigos de revistas e eventos do GeoGebra, participar como aluno e moderador em cursos de GeoGebra junto a equipe do sitio [ogeogebra.com.br](http://ogeogebra.com.br) e outros, participar de mesas redondas *online* que tratassem do GeoGebra, dedicar-me para a aprendizagem de construções diversas com esse software<sup>2</sup>, aprender a usar o GeoGebraTube, aprender e compor vídeos que sugerem modos de produzir e pensar sobre e com o GeoGebra, estudar partes do código fonte<sup>3</sup> do software para reconhecer como os programadores se apropriam de estratégias matemáticas em seus algoritmos, experimentar o software em diferentes sistemas operacionais e dispositivos eletrônicos, interagir e contribuir com postagens diárias nos grupos das redes sociais

---

<sup>2</sup> Caso o leitor se interesse, sugiro acessar <http://tube.geogebra.org/user/profile/id/45479/p/materials>. Neste endereço apresento minhas produções e é possível encontrar acesso aos vários perfis.

<sup>3</sup> Recomendo acessar <https://pt.wikipedia.org/wiki/Código-fonte> para mais informações.

e no fórum do sitio do GeoGebra.

Neste momento, convido o leitor a refletir e comparar sobre estas diversas atividades com algum exercício interno de aprendizagem que considere profunda e internamente significativo a si mesmo; considere como uma experiência formativa pessoalmente vivida, a qual lhe exigiu um longo período de dedicação profunda e sistematizada. Peço que o leitor se pergunte, como podemos acrescentar estas práticas na formação inicial de docentes? Talvez o leitor concorde que inserir estas práticas ao contexto da formação inicial de professores de matemática, dentre outras questões, demanda uma intrincada discussão sobre sua viabilidade em um currículo considerado extenso e complexo.

Outras questões emergem para que sejam refletidas. Tornar comum o uso de softwares como o GeoGebra é possível ou interessante à Educação Matemática brasileira? De que formas as instituições de Ensino Superior poderiam viabilizar e estimular que estas práticas sejam naturais no contexto de ensino e aprendizagem? Acredito que seja necessária a construção de uma agenda de discussão. Uma agenda que não delegue a inserção deste universo de interesses evidentes e necessários à contemporaneidade, apenas à formação continuada ou às iniciativas pessoais.

A quantidade de professores que estão em sala de aula e de futuros professores interessados na utilização desses recursos tecnológicos é expressiva, mas, também, existe uma parte significativa destes que estão inseguros (*Cf. Lovis; Franco (2013) e Nascimento (2012) e Silva; Penteado (2013)*); existem preocupações que vão desde a exequibilidade até o domínio da tecnologia digital pretendida, padecendo ainda (na opinião de alguns dos autores citados) de domínio de conteúdo matemático e criticidade quanto à validade didático matemática dos resultados obtidos junto ao programa.

Em resumo, contiguamente ao GeoGebra, existem vários pontos que podem configurar diversas perguntas e problemas de pesquisa. Este trabalho registra o meu foco em refletir sobre a postura crítica que interessa considerar quando um professor quer usar ou realizar uma construção com o GeoGebra para tratar de significados matemáticos. Na próxima seção apresento os argumentos que considero para formular a aproximação e como fui constituindo a delimitação que assumi para este



estudo.

## 1.2 - Problemática

Na seção anterior afirmei que retornaria a algumas questões oriundas da minha primeira experiência com softwares de matemática que me intrigaram e inspiraram. Ver a palavra triângulo ao lado de três pontos coincidentes me levou às perguntas: O que estava errado? Minhas aulas anteriores estavam defasadas? A Geometria Euclidiana fora renovada? O software ou o computador estavam com algum tipo de defeito? A matemática feita com computadores seria de alguma forma, diferente da que eu estava habituado? O que eu precisaria aprender para usar softwares como este da minha primeira experiência?

Conforme aprendia mais sobre o *Cabri Geometry II plus* e outros programas similares, pude estabelecer uma explicação que me satisfiz. Os programas apresentam comportamentos e funcionalidades diferentes, resultantes das escolhas dos desenvolvedores. É preciso, no mínimo, ir se habituando às particularidades e se questionando sobre o funcionamento de cada programa. A seguir, faço uma comparação entre o *Cabri Geometry II plus* e o GeoGebra, pensando no episódio que relatei.

Na situação dos três pontos aparentemente coincidentes, no *Cabri Geometry II plus* a funcionalidade de *zoom* não existe. Para separar os três pontos e visualizar a forma do triângulo de novo, coloca-se o *prompt* do *mouse* sobre o aparente único ponto e aparece a pergunta “Que objeto?” (ver Figura 6)

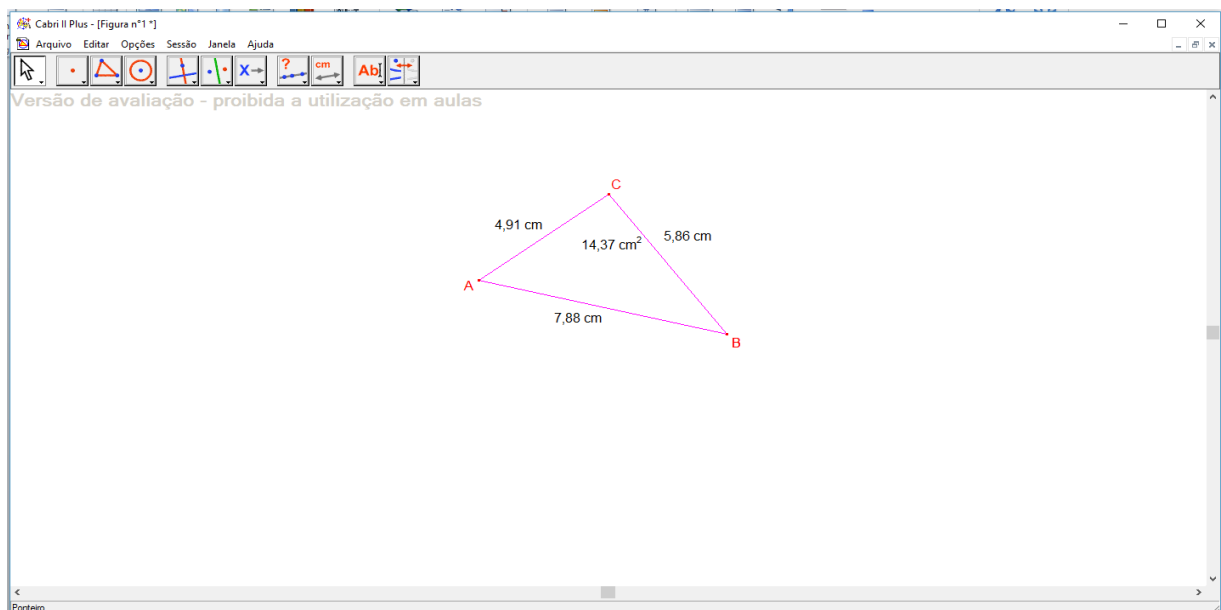
Figura 6 - Frase “Que objeto” na tela do Cabri Geometry II plus



Fonte: O autor

A primeira percepção foi pensar ter posicionado os pontos na mesma localização, pois ao desejar separá-los, eu precisava informar a qual objeto estava me referindo. Só depois de usar as ferramentas que permitiam representar as aproximações numéricas dos valores dos comprimentos dos lados (representados externamente ao triângulo em cm) e da área do triângulo (representada internamente ao triângulo em  $\text{cm}^2$ ) (ver Figura 7) mudei minha percepção inicial.

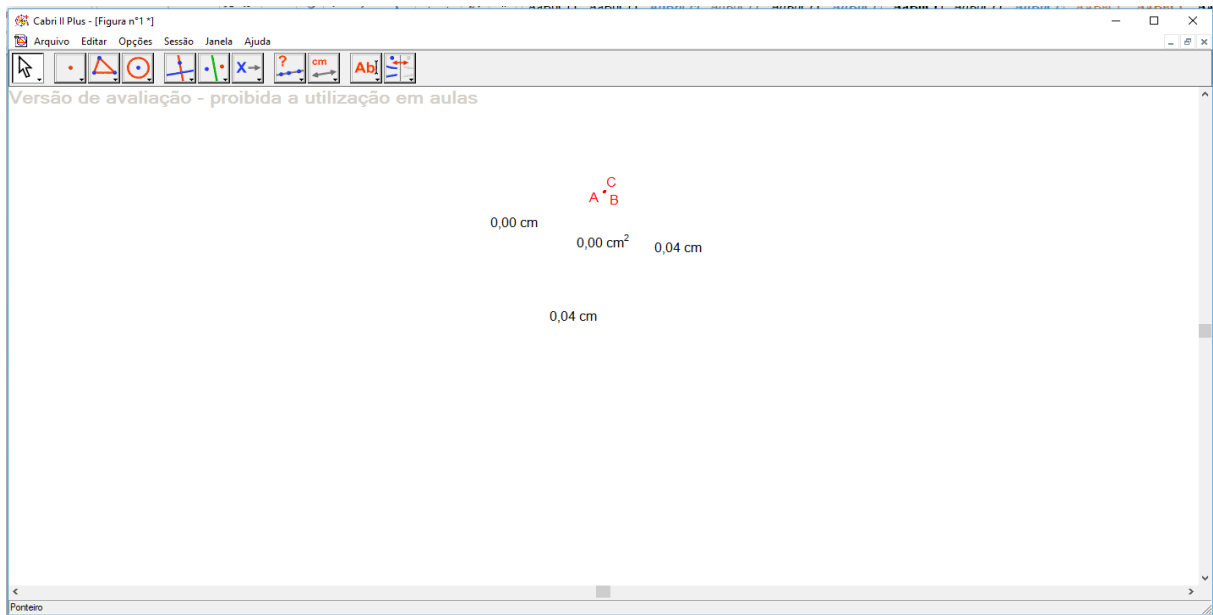
Figura 7 - Comprimentos e área do triângulo na tela do Cabri Geometry II plus



Fonte: O autor

A percepção, naquele momento, era de que o que eu visualizava (ver Figura 8) não eram necessariamente três pontos coincidentes no sentido estrito da Geometria Euclidiana.

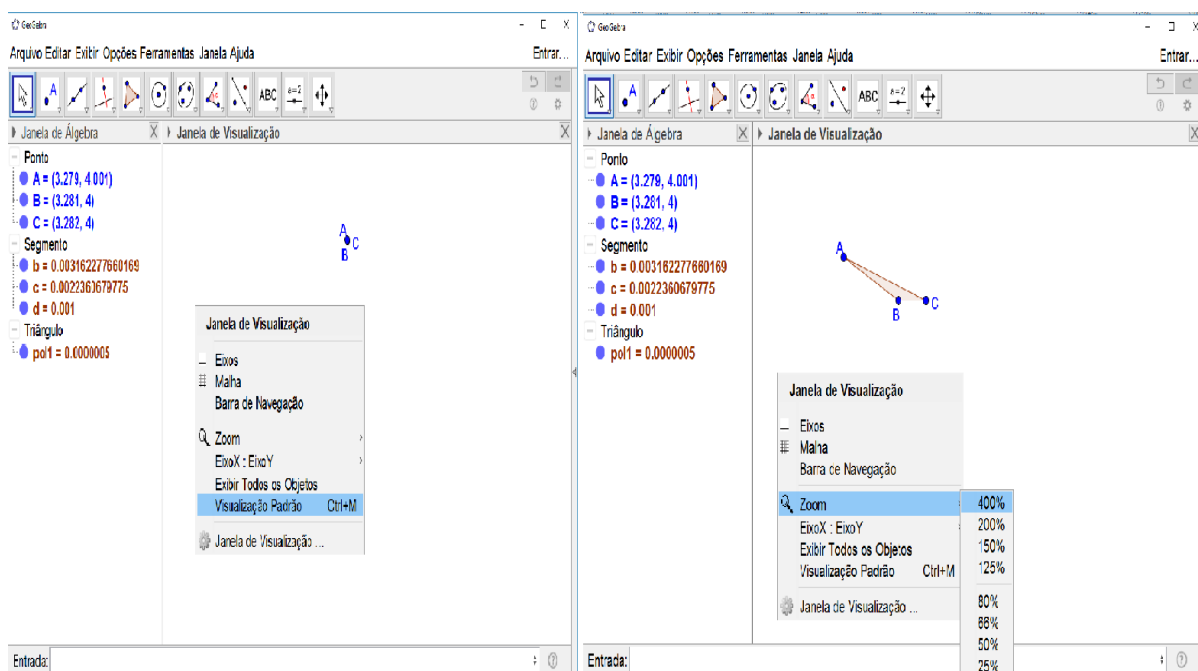
*Figura 8 - Pontos não coincidentes na tela do Cabri Geometry II plus*



*Fonte: O autor*

Ao usar o GeoGebra para realizar a mesma experiência, existem diferenças na apresentação e funcionalidades. Apresento dois recortes (ver Figura 9) da evolução de um mesmo arquivo do GeoGebra, onde repliquei o processo de criar o triângulo, depois arrastar os três vértices para uma mesma localização.

Figura 9 - Pontos não coincidentes na tela do GeoGebra



Fonte: O autor

No primeiro recorte é possível observar os pontos aparentemente coincidentes na “Janela de Visualização”, simultaneamente na “Janela da Álgebra” (à esquerda da Figura 9), as respectivas denominações dos pontos com os valores de suas coordenadas (propositalmente, escolhi valores decimais finitos, com diferenças “bem pequenas” para as abscissas dos três pontos e uma diferença ainda menor para a ordenada de um dos pontos). Ao clicar com o botão direito do mouse, em qualquer lugar da área em cor branca da “Janela de Visualização” acessam-se algumas outras funcionalidades, podendo confirmar a escolha pela “Visualização Padrão”, que seria algo como a escala padrão (*default*) de “Zoom”. Acessando do mesmo modo essas outras funcionalidades, apliquei algumas vezes o “Zoom” de 400% para confirmar na “Janela de Visualização” (localizada a direita) o que numericamente pode-se depreender sobre a minha ingênua e antiga suposição inicial de que os pontos são coincidentes.

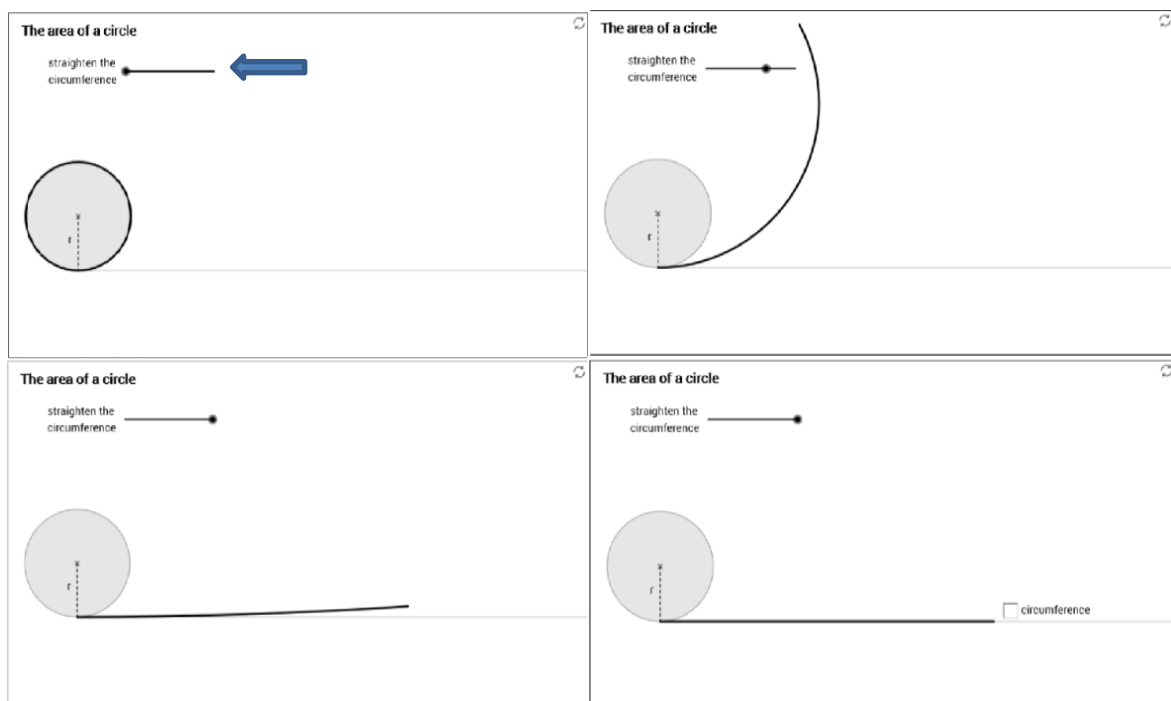
Não é meu intuito comparar qualitativamente o *Cabri Geometry* com o GeoGebra. Quero apenas reforçar a afirmativa: É preciso, no mínimo, habituar-se às particularidades e se questionar sobre o funcionamento de cada programa.

Nossas tecnologias tradicionais permitem o ensino de matemática baseada na Matemática do Matemático (ver item 2.3.1 - A Matemática do Matemático (MM)) e na

Matemática da Escola (ver item 2.3.2 – A Matemática da Escola (ME)). O GeoGebra permite novas formas de se discutir e articular diferentes modos de produção dos significados matemáticos. A seguir, apresento um exemplo do que considero transitar pela Matemática do Matemático, pela Matemática da Escola e pela Matemática do GeoGebra (ver item 2.3.3 – A Matemática do GeoGebra (MG)).

Para ilustrar o que acontece na Matemática da Escola apresento um tema comum que é o cálculo da área do círculo. Convencer estudantes acerca de como podemos deduzir uma expressão geral para o valor desta área, pode ser uma dificuldade didática muito interessante. Veja a evolução de uma construção dinâmica<sup>4</sup> (ver Figura 10 e Figura 11) que pode ser associada aos significados matemáticos considerados legítimos<sup>5</sup>.

Figura 10 - Alusão à retificação da circunferência de um círculo



Fonte: O autor

A figura acima reúne recortes de uma primeira etapa. Movendo-se o botão do controle deslizante (destacado pela seta azul do primeiro recorte) modifica-se

<sup>4</sup> As possibilidades de figuras estáticas não dão conta de expressar todas as sensações possíveis de uma animação, recomendo que acesse:

<http://www.geogebra.org/m/fyqAUV22?doneurl=%2Fmaterials%2F>.

<sup>5</sup> Quando uso os termos “*significados matemáticos considerados legítimos*”, uso para falar que as práticas de professores de matemática lidam com diferentes modos de produção de significado. (ver item 2.3)

continuamente o contexto da figura. Possibilitando dizer que esticamos a circunferência ou que encontramos um segmento cujo comprimento equivale ao comprimento da circunferência. Falar em “botão de controle deslizante”, “esticar uma circunferência” e “segmentos de comprimentos equivalentes” exemplifica o transitar entre diferentes linguagens e modos de se produzir significados matemáticos legítimos.

Talvez, alguém mais curioso em relação à Matemática do Matemático queira saber qual o processo que se usou, existem demonstrações da impossibilidade de retificação da circunferência com construções de régua e compasso.

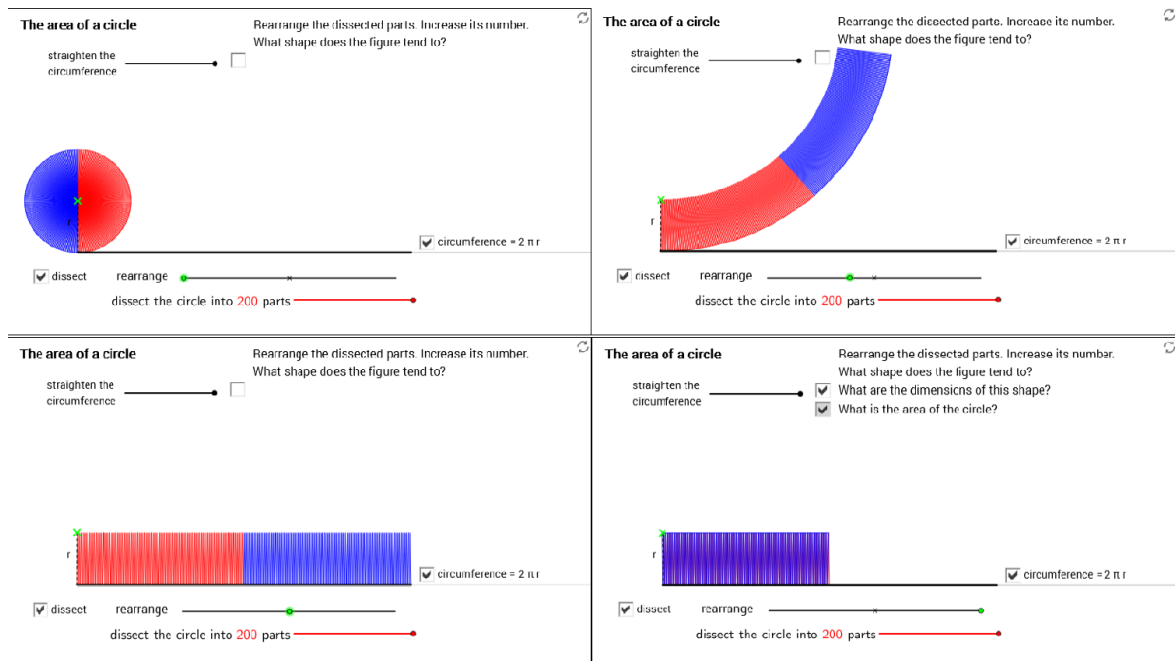
Uma explicação plausível seria mostrar que o autor da construção se aproveitou de algumas características idiossincráticas da Matemática do GeoGebra, tentando fornecer algo útil a Matemática da Escola.

Não quero correr o risco de cansar o leitor com os intrincados detalhes de programação e de matemática envolvidos na questão. Até porque a intenção é apontar a necessidade de democratização da Matemática do GeoGebra para transitar entre estas linguagens.

Vou falar assim. O autor usou alguns comandos do software aliando parametrizações matemáticas e controle dos atributos visuais dos objetos construídos.

Na construção dinâmica referenciada pela Figura 10, temos um arco circular e um segmento de reta, dinamicamente definidos. O processo matemático computacional que o autor usou e que a Matemática do GeoGebra consegue efetivar, define o arco circular até a penúltima posição do botão do controle deslizante e omite o segmento; é isto o que o leitor vê até o terceiro recorte. No último recorte, o arco está definido para sumir e daí aparecer o segmento. Vamos seguir ainda falando da mesma construção.

Figura 11 - Alusão à quadratura da área do círculo



Fonte: O autor

Nessa segunda etapa (ver Figura 11), o que se vê é um conjunto de outros objetos, que podem ser construídos e controlados segundo algumas regras internas do GeoGebra. Quando se retifica a circunferência, aparece uma “caixa para exibir objetos” (uma forma de modificar valores booleanos no GeoGebra), ao marcar-se esta caixa, aparece uma expressão algébrica para representar o comprimento do arco completo da circunferência, outros dois controles deslizantes e mais uma caixa para exibir objetos. A partir da interação com estes outros objetos, considerando sugestões tácitas (penso assim devido ao uso das cores e a sequência em que os objetos vão aparecendo), pode-se falar em outros significados matemáticos, ou seja, falar que conseguimos obter um retângulo cuja área é equivalente à área do círculo.

O autor parece sugerir (nas minhas palavras e compreensão) que a ideia é mostrar que o comprimento da base do retângulo, equivale à metade do comprimento da circunferência e, que a altura deste retângulo equivale ao raio. Considerando que o autor optou (de modo inspirador, original e sofisticado), pela estratégia de construir uma “lista” (outro objeto peculiar e poderoso do GeoGebra) de setores circulares (formados por outras listas de pontos parametrizados) e, usando comandos de translações e rotações de vetores, também, dependentes dos

pontos parametrizados, eu diria que o autor sugere que podemos “desenrolar” o círculo, aumentar a quantidade de setores circulares, fazendo o comprimento de seus arcos tenderem a diminuir, “retificando-os”. Daí, encaixamos os setores de modo a dar a impressão de formarmos o retângulo. Supondo que o cálculo da área de um retângulo seja mais acessível ao estudante, pergunta-se: qual a área do círculo?

Deve haver uma infinidade de falas possíveis e estratégias de construções similares. Mas eu pergunto: o leitor tem alguma dúvida de que a construção tem potencial pedagógico? Será que um professor de matemática não precisaria transitar entre conhecimentos de caráter matemático, didático matemático e algoritmos de programação, entre outras coisas, para construir ou até mesmo usar em sala?

O GeoGebra fornece uma nova perspectiva para o ensino de matemática. Esta nova perspectiva traz consigo a necessidade de novos olhares, novos problemas e novas formas de investigação. É comum e conhecido o trânsito entre a Matemática do Matemático e a Matemática da Escola, visto que isto é ensinado em diferentes níveis de profundidade aos professores durante o seu processo de formação continuada. Entretanto, a adição dessa ferramenta tecnológica digital, faz com que esse trânsito ocorra entre três diferentes formas de se trabalhar o ensino de matemática, isto é, agora é preciso considerar o que eu chamo de Matemática do GeoGebra.

Minha tese é de que professores de matemática que usam o GeoGebra, transitam pela Matemática do Matemático, a Matemática da Escola e a Matemática do GeoGebra e que este complexo movimento, precisa lidar com as limitações do software para potencializar os diferentes modos de produção de significados matemáticos e incitar posturas que visem estimular o pensamento crítico.

O objetivo principal deste trabalho é demonstrar que o GeoGebra apresenta uma maneira diferente de produzir significados matemáticos. Sugerindo sua relevância para o ensino de matemática e de se discutir sua linguagem, possibilidades e limitações. Como objetivos específicos, esta pesquisa procurou:

- Descrever como professores de matemática que usam o GeoGebra, lidam com questões sobre a validade matemática e didática quando confrontados com algumas limitações do GeoGebra.



- Caracterizar formas de trânsito entre a Matemática do Matemático (MM), a Matemática da Escola (ME) e a Matemática do GeoGebra (MG).

## CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTOS E PRESSUPOSTOS

Neste capítulo apresento e discuto o *software* GeoGebra, bem como analiso algumas pesquisas sobre o uso desta ferramenta no contexto do ensino de matemática. Ao final, as minhas concepções sobre os significados dos termos Matemática do Matemático, Matemática da Escola e Matemática do GeoGebra são expostas.

### 2.1 - Breve histórico do GeoGebra: criação, desenvolvimento, características e comunidade de usuários

Segundo Preiner (2008, p.36), o GeoGebra foi originado durante o trabalho de mestrado de Markus Hohenwarter no ano de 2001, junto a Universidade Salzburg, na Áustria. Sua intenção inicial foi disponibilizar um software capaz de lidar de forma dinâmica e simultaneamente com as representações algébricas e geométricas, voltando-se para os níveis escolares que chamamos de Ensino Médio e Universitário.

Disponibilizado ao público pela Internet, em 2002, foi rápida e positivamente avaliado por vários outros professores de matemática. Neste ano, recebeu seu primeiro prêmio, o *European Academic Software Award* (EASA). Com uma bolsa de estudos cedida pela Academia Austríaca de Ciências, o autor continuou o projeto em seu doutorado, estudando as implicações pedagógicas do GeoGebra em escolas de ensino médio daquele país.

Desde então, o software continuou a ser desenvolvido e a ser laureado com outros 14 prêmios internacionais. Obteve aporte financeiro de Fundações Científicas e apoio de diferentes Instituições Educacionais em vários continentes.

Inicialmente, o software estava somente sob uma licença de Código Livre e gratuito, permitindo e motivando pesquisadores e profissionais especializados em diversas áreas, a contribuir com o autor original. Atualmente é um Software de Código Aberto, disponível gratuitamente para usuários não comerciais<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup> Bem resumidamente, a licença de código aberto permite que se acesse o código, mas não permite mais mudanças diretas nas versões, a não ser pela equipe fechada do International GeoGebra Institute (IGI).

Desde o ano de 2003, devido ao trabalho de vários voluntários, o software é disponibilizado em diversos idiomas, atualmente são 68 opções de idiomas; alcançando usuários de pelo menos 190 países.

A princípio, era escrito somente em linguagem de programação código Java<sup>7</sup>, permitindo utilizá-lo em navegadores de Internet e instalá-lo em diferentes sistemas operacionais de computadores pessoais. Com o desenvolvimento dos dispositivos móveis, uma versão em código HTML5<sup>8</sup> foi implementada e agora pode ser usado, também, em celulares e *tablets*.

Outros softwares, geralmente classificados como de Geometria Dinâmica, permitem apenas criar objetos e representações a partir de processos e ferramentas que simulam construções com régua e compasso e em alguns casos apresentam a visualização da representação algébrica correspondente. No GeoGebra, além destas possibilidades, o usuário pode criar e modificar objetos através da interação direta sobre ambas. Também é possível criar e interagir a partir de entradas na forma de comandos; e estes, são desenvolvidos com aproximações de sua sintaxe com a notação matemática usual aos ambientes científicos e escolares.

No GeoGebra, também, é possível criar intrincados textos matemáticos por meio do uso de linguagem *Latex*<sup>9</sup>. Por intermédio do teclado, mouse ou toque direto sobre a tela, qualquer modificação efetuada pelo usuário resulta em modificação simultânea a todas as representações correspondentes.

No tocante as áreas de conhecimento matemático, o GeoGebra reúne funcionalidades específicas para: geometria bi e tridimensional; álgebra elementar e linear; gráficos cartesianos, polares e isométricos; probabilidade; estatística e matemática financeira, em um único pacote, interligando todas as representações por meio de seis interfaces visuais (duas janelas de visualização 2D, uma janela de visualização 3D, uma janela de visualização das representações algébricas, uma janela com planilha eletrônica e uma janela para cálculos simbólicos chamada de CAS. Todas as janelas e elementos são customizáveis, podendo-se modificar a aparência e omitir/exibir qualquer um deles<sup>10</sup>.

---

7 Uma introdução está em <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Java>> (linguagem\_de\_programação)

8 Sugiro acessar: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/HTML5>> para um rápido reconhecimento.

9 Sugiro acessar: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/LaTeX>> para aprimorar o conhecimento, caso necessário.

10 Sugiro acessar [ogebra.com.br](http://ogebra.com.br) para constatar brilhante material de introdução e

Ao final de 2007, os desenvolvedores do GeoGebra criaram uma organização não governamental, o *International GeoGebra Institute* (IGI). Construiu-se um sítio da internet<sup>11</sup> que o distribui gratuitamente e se formalizou uma equipe diretamente responsável em fornecer atualizações, material instrucional e suporte técnico.

Este sítio fornece espaços virtuais para a formação e desenvolvimento de comunidades virtuais na forma de fóruns de discussão<sup>12</sup> e grupos de produção colaborativa<sup>13</sup>. Todas as produções, a partir do GeoGebra, podem ser postadas em um repositório de mídias digitais, o GeoGebraTube<sup>14</sup>; atualmente, com mais de 450 mil materiais, crescendo a cada instante. Estes materiais, geralmente envolvem construções dinâmicas que permitem interação imediata, cópia e reuso direto em outros sites, blogs ou ambientes virtuais de ensino. A partir de cada material, pode-se acessar o perfil do autor e verificar que muitos usuários são de diversas nacionalidades, profissões e interesses.

A quantidade e diversidade de perfis é um fator para justificar a fama ímpar do *software*. O fórum de discussões virtuais, mantido pelo IGI, possui mais de 40,5 mil membros que se dividem em 27 idiomas, com mais de 120,6 mil posts distribuídos em mais de 27,3 mil tópicos.

Atualmente, este Instituto é composto de uma rede de 41 Institutos GeoGebra (GI), onde cada instituto está ligado a uma instituição de ensino que na maioria estão instalados em Universidades.

Outro fato interessante é que na rede social *Facebook*, além de vários grupos de diferentes nacionalidades, existem dois grupos brasileiros que reúnem milhares de pessoas, discutindo, compartilhando e produzindo conhecimento ativamente. O primeiro grupo público brasileiro “O GeoGebra”<sup>15</sup> registra mais de 5 mil membros. O segundo grupo público “GeoGebra Brasil”<sup>16</sup> tem quase 4 mil membros. No entanto, o número de membros destes grupos cresce diariamente. Esse fato pode ser comprovado, pois em setembro de 2014, havia cerca de 2 mil membros no primeiro

---

aprofundamento.

11 Sugiro acessar <http://www.geogebra.org>

12 Sugiro acessar <http://www.geogebra.org/help/>

13 Sugiro acessar <http://tube.geogebra.org/groups>

14 Sugiro acessar <http://tube.geogebra.org/>

15 Se o leitor for usuário da rede social Facebook, pode acessar o grupo em [www.facebook.com/groups/oGeoGebra/?ref=bookmarks](http://www.facebook.com/groups/oGeoGebra/?ref=bookmarks).

16 Se o leitor for usuário da rede social Facebook pode acessar o grupo em [www.facebook.com/groups/180800351982211/?ref=bookmarks](http://www.facebook.com/groups/180800351982211/?ref=bookmarks).

grupo, ou seja, houve um crescimento de mais de 150% na quantidade de membros. A página no *Facebook*, criada pelo IGI<sup>17</sup>, registra mais de 73 mil curtidas de pessoas distintas. No *Twitter*, a conta do IGI conta com ao menos 11,5 mil seguidores.

Até mesmo o *Google+*, que luta para se tornar mais popular, tem 2 mil membros na comunidade iniciada pelo IGI. No *YouTube*, são mais de 4 mil canais, 33,6 mil vídeos e 4,8 mil *playlists* com milhões de visualizações.

Esses números confirmam muito mais do que interesse sobre o GeoGebra. Talvez, pode-se pensar que são números pequenos se comparados aos vários milhões de usuários da *Khan Academy*<sup>18</sup>, porém, considerando que até o ano de 2010, segundo Lavicza (2011), a partir do sítio do GeoGebra, o software foi baixado 3,8 milhões de vezes e, além disso, instalado em 5,5 milhões de *laptops* do programa *Um laptop por Criança*<sup>19</sup>; é possível afirmar que existem muitos usuários do GeoGebra.

No Brasil, o Programa Nacional de Tecnologia Educacional (PROINFO) distribuiu mais de 700 mil *tablets* aos professores da Educação Básica, sendo o GeoGebra um de seus softwares pré-instalados, conforme pode-se verificar no Diário Oficial da União nº 103 publicado em 2 de junho de 2014.

Um aspecto que comentei anteriormente e considero relevante é a possibilidade de acessar os perfis *online* destes usuários citados, constatando-se algumas de suas informações pessoais. Nestas miríades de perfis, encontram-se professores e estudantes de vários níveis e disciplinas, pesquisadores em Educação Matemática, Ensino de Ciências, Ciências da Computação e Matemática. Encontram-se designers gráficos, programadores e toda sorte de pessoas interessadas no GeoGebra. Buscando delimitar-me ao público de meu interesse, na próxima seção, apresento o meu exercício de analisar publicações acadêmicas voltadas ao universo dos professores e alunos de matemática.

---

<sup>17</sup> A página do IGI no *Facebook* é “Geogebra@geogebra” e pode ser acessado por este link: <<https://www.facebook.com/geogebra/?fref=ts>>

<sup>18</sup> Caso o leitor não conheça, recomendo acessar <https://pt.khanacademy.org/about>.

<sup>19</sup> *One Laptop per Child*, tradução minha.

## 2.2 - Pesquisas sobre a utilização do GeoGebra no ensino de matemática

A revisão literária aponta um movimento contínuo de pesquisadores interessados no software GeoGebra. No portal de periódicos<sup>20</sup> da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), confirma-se crescente produção acadêmica ao permitir visualizar que entre os anos de 2006 a 2010 haviam 34 diferentes publicações. De 2010 a 2015 já é possível acessar 242 publicações. Essa evolução é similar ao pesquisarmos a base internacional de dados *Science Direct*, pois em 2007 havia apenas uma publicação, chegando a 23 publicações em 2015 e totalizando 92 publicações neste período. Outras bases de dados internacionais permitem acessar centenas.

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), em funcionamento desde 2010, disponibiliza um total de 2333 publicações em sua seção de dissertações, destas, 142 dissertações apresentam a palavra GeoGebra em seus títulos, indicando propostas de uso do GeoGebra para ensinar diversos tópicos de conteúdo matemático escolar. Destas bases de publicações destacam-se temas que procuram articular:

- O desenvolvimento de habilidades e competências do pensamento matemático por meio das várias possibilidades de representação algébrica e geométrica, simultaneamente interligadas;
- O uso das perspectivas de visualização, preferencialmente pautando-se em animações que explorem situações dos invariantes geométricos das propriedades matemáticas que se pretende discutir;
- Atitudes e características motivacionais, acerca do uso ou não do software por parte dos estudantes e professores;
- O estudo da eficiência do software no ensino e aprendizagem da matemática escolar;
- A proposição de estudo de tópicos da matemática escolar pautando-se em exemplos e atividades com construções digitais que permitem falar sobre ou incitar discussões de tais tópicos.

---

<sup>20</sup> Sugiro acessar <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

Neste contexto, parece haver unanimidade de que o uso desse software acrescenta novas e consistentes direções para o ensino de matemática. Parece haver consenso de que a dificuldade dos estudantes em compreender representações algébricas pode ser superada pelas representações geométricas e dinâmicas. Há uma clara indicação de que visualizar fatos matemáticos podem induzir os estudantes a desenvolver sua capacidade de abstração, levando-os a inserir-se em um movimento de modelar matematicamente situações problemas, estabelecer conjecturas, testá-las e formalizar adequada e matematicamente a construção de seus conhecimentos.

Assumindo que todas estas possibilidades são extremamente enriquecedoras ao contexto do ensino de matemática, cabe perguntar: Estariam os professores de matemática, preparados para todas estas possibilidades?

Vejamos com um pouco mais de detalhes algumas pesquisas correlacionadas ao GeoGebra. O meu interesse foi olhar para estas pesquisas e verificar os exercícios de compreensão e preparo dos professores em relação às possibilidades e limitações do software.

O pesquisador Andrade (2013), trabalhou em sua pesquisa, com o estudo de Sistemas de Equações Lineares por meio de Resolução de Problemas. Andrade (2013) fez uso do GeoGebra para desenvolver atividades com o aluno, considerando que a utilização deste software pode ser um diferencial para superar o desinteresse dos alunos e tornar as aulas mais atrativas. Sua pesquisa foi focada no aluno. Não foi possível perceber que o professor tem uma compreensão mais profunda do software e suas possibilidades. Ele aborda a importância dessa tecnologia e faz algumas citações destacando a importância do professor se qualificar para repensar a Educação Básica e o Ensino Superior e assim sanar as exigências da sociedade moderna, que não quer mais a matemática com o intuito de treinamento e o desenvolvimento de ações extremamente mecânicas.

O professor conseguirá se inserir neste novo contexto da matemática se estiver preparado. Segundo Onuchic (1999, p. 211), “A preparação do professor tem um efeito direto na realização dos alunos, pois ninguém dispõe tanto tempo ou tanta influência sobre os alunos quanto os próprios professores”.

Na pesquisa de Baccarin (2013), cujo objetivo foi apresentar uma sequência

de atividades para o ensino de matemática, direcionadas a professores e estudantes do Ensino Médio. O GeoGebra foi utilizado em algumas atividades propostas, envolvendo a Teoria de Georg Cantor sobre conjuntos infinitos, visando proporcionar uma visão geométrica e gerar inquietações nos alunos, tornando-os sujeitos ativos, reflexivos e envolvidos com a questão proposta na pesquisa. O autor destaca o papel do professor de cativar os alunos para o interesse pelo conhecimento proposto, sem fugir das abstrações intrínsecas à formação matemática. Além disso, destaca que em seu projeto, o professor exercerá o papel de mediador. Não encontrei indícios sobre a necessidade do professor ter um conhecimento mais aprofundado em relação ao software GeoGebra.

Paes (2013) em sua pesquisa, relata que Oliveira (2010a), trabalhou as transformações no plano complexo utilizando o software GeoGebra e que não utilizou o registro matricial. Paes (2013), destaca a importância da participação dos alunos na construção do conhecimento e da utilização do software GeoGebra, como uma das possibilidades para o desenvolvimento de atividades pautadas nos diferentes registros dos números complexos, mas utiliza o software somente para plotagem gráfica e não explora nenhum outro recurso do software. No desenvolvimento das atividades, a pesquisadora destaca que o professor deve acompanhar os grupos, orientando e instigando na busca pelas respostas. Ainda, destaca que a sua pesquisa visa suprir uma deficiência dos alunos e professores em relação ao conjunto dos números complexos e que as dificuldades dos professores contribuíam para que acontecesse a mesma situação com os alunos. Esta pesquisadora cita Burak (2005, p. 10) em relação à necessidade de romper com a forma tradicional de conduzir o processo de ensino e que:

Quando o professor se propõe a compartilhar o processo de ensino que usualmente é deflagrado pelo professor, ele se sujeita a perder um pouco da sua segurança, pois, depara-se com o desconhecido, não possui domínio completo da situação, rompe com a forma linear de se tratar com o conteúdo matemático. (BURAK, 2005, p. 10)

Silva (2013a) também trabalhou com os números complexos utilizando o GeoGebra. Elaborou uma sequência didática baseada na Engenharia Didática de Michèle Artigue. O software é utilizado apenas para realizar a plotagem da representação geométrica dos números complexos, bem como a sua caracterização vetorial. Ela destaca que o professor é “copartícipe” dos alunos no processo de



investigação e que o professor deve realizar seu trabalho de maneira que se sinta mais seguro e seja um mediador da construção do conhecimento. A autora comenta que em algumas situações, as coordenadas dos pontos são facilmente visualizadas no plano cartesiano, mas existem casos que os valores encontrados não são exatos (na minha leitura, a autora não considera que a janela de visualização fornece apenas aproximações decimais), tornando difícil a obtenção das coordenadas corretas do ponto e destaca que, nem sempre, a estratégia geométrica é uma boa opção para se buscar a resposta de uma situação-problema. A autora parece desconhecer algumas das funcionalidades da janela CAS (Sistema de Computação Algébrica, capaz de cálculos simbólicos), a qual poderia dar suporte a sua intenção de representar os “valores exatos”, na forma fracionária.

As pesquisas desenvolvidas por Silva (2013b) e Zandonadi (2013) obtiveram padrões similares à pesquisa de Silva (2013a). Utilizou-se o software GeoGebra para tratar também dos números complexos, mas ambos pesquisadores exploraram ainda as funções exponenciais e logarítmicas.

O pesquisador Silva (2013b) destaca a falta de incentivos e investimentos para que a utilização do computador seja efetiva pelo professor e de forma natural. Alega que alguns ficam receosos de usá-lo para trabalhar conteúdos matemáticos com seus alunos em função de falta de formação suficiente para explorar a tecnologia ou falta de familiarização com os programas, softwares ou simuladores. Além disso, existem professores que não querem sair de sua “zona de conforto”, insistindo na necessidade do controle da situação. Este pesquisador apresenta um ponto de vista de Borba e Penteado (2003) em relação ao uso da informática em contexto de sala de aula:

Se o professor não tiver espaço para refletir sobre as mudanças que acarretam a presença da informática nos coletivos pensantes, eles tenderão a não utilizar essas mídias, ou a utilizá-las de maneira superficial, domesticando, portanto, essa nova mídia (BORBA; PENTEADO, 2003, p. 88).

Zandonadi (2013) em sua pesquisa utilizou uma sequência didática associada ao software GeoGebra com a finalidade de facilitar o trabalho do professor e ajudar os alunos na compreensão de novos conteúdos. Este pesquisador destaca que existem professores sem o preparo adequado para atuarem nesta realidade em que se configura a escola atualmente.

Pereira (2013), em sua pesquisa, apresenta algumas atividades com fractais circulares, discutindo um pouco acerca do uso das tecnologias no contexto educacional e utiliza o GeoGebra para o desenvolvimento das atividades com a intenção de contribuir para um ensino mais prazeroso e dinâmico da Matemática aliada ao uso das tecnologias. Este pesquisador, quando aborda a questão do ensino de Geometria na educação básica, cita Pavanello (1989) e Lorenzato (1995) para retratar a realidade do ensino deste conteúdo, considerado de grande importância, mas, muitas vezes, deixado de lado em função da grande dificuldade que muitos professores têm para ensiná-lo.

A pesquisadora Codato-Segura (2013), em seu estudo, trabalhou uma sequência didática com aplicações de conceitos de Geometria Analítica, por meio da releitura de obras de arte com estilo abstracionista e utilizou o GeoGebra. Destaca em sua pesquisa, que o intuito era tornar o ensino de matemática mais atraente e significativo com a utilização de recursos tecnológicos e o ensino interdisciplinar, com o intuito do professor e dos alunos assumirem o papel de sujeitos cognitivos<sup>21</sup>. Tendo em vista que a utilização do software favorece a construção de significados em matemática a partir da representação de conceitos, do estudo das propriedades intrínsecas às construções, da visualização das formas algébricas e geométricas, além de favorecer a interação aluno/computador. Ela destaca que cabe ao professor, a tarefa de expandir as reflexões com os alunos, em relação aos resultados obtidos nas atividades propostas. Destaca, também, que a utilização do GeoGebra pode ser capaz de motivar o aluno, a desenvolver suas potencialidades de argumentação, compreensão, comunicação, elaboração de críticas ou propostas e desenvolver atitudes que possibilitem um aprendizado permanente.

Ainda, segundo Codato-Segura (2013), a realidade de muitas escolas apresenta defasagem de recursos e professores mal preparados ou desinteressados, no que diz respeito à inserção das tecnologias como ferramentas de ensino e aprendizagem. Esta pesquisadora cita Valente (1999, p. 19) que diz: “[...] cabe ao professor promover a aprendizagem do aluno para que este possa construir o conhecimento dentro de um ambiente que o desafie e o motive para a exploração, a

---

<sup>21</sup> Sujeito elaborador de conhecimentos válidos com capacidade de se transformar no processo de interação com o meio.

reflexão, a depuração de ideias e a descoberta [...]”. Ainda, destaca que à medida que o professor muda a sua prática pedagógica, utilizando os recursos tecnológicos, surge a possibilidade de questionamentos, de modo que, nem sempre, o professor estará preparado para responder, mas que isso, mostra-se instigante e levanta a possibilidade de construir um conhecimento matemático mais significativo, autônomo, criativo e reflexivo, capaz de incitar o “aprender a aprender, saber pensar, saber tomar decisões e construir seu próprio conhecimento” (Valente, 1999).

A pesquisa de Zanella (2013), apresenta uma proposta de trabalho que utiliza o software GeoGebra e outros materiais concretos (alfinetes, látex colorido, esferas de isopor, canudos de refrigerante, transferidor, entre outros), para fazer uma comparação entre os conceitos da Geometria Euclidiana e da Geometria Esférica, utilizando o software para realizar as plotagens, sem registros. Zanella (2013), salienta que a incorporação do instrumento tecnológico na sala de aula, permite explorar relações matemáticas e refletir sobre grandezas. E apesar de julgar interessante a menção interdisciplinar que faz com a Geografia, apontando ideias sobre Sistema de Posicionamento Global (GPS), não identifiquei o exercício da reflexão com ou a partir do *software* ou registros de discussões sobre suas limitações.

Em uma pesquisa realizada por Lovis (2009), envolvendo a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica, utilizou-se o GeoGebra para averiguar os conhecimentos de um grupo de professores em relação a estes conteúdos e expandir os conceitos existentes. Além de verificar as possíveis contribuições deste software no ensino das geometrias, buscou-se trabalhar com um grupo de professores da rede pública, onde, além dos conhecimentos geométricos envolvidos, foi possível discutir questões de cunho histórico, matemático e filosófico matemático. Os professores participantes desta pesquisa, confirmaram suas dificuldades em lidar com conhecimentos geométricos e do uso dos recursos tecnológicos digitais. Nas entrevistas realizadas com esses professores, a minoria confirma a utilização do software em contexto de sala de aula. A maioria confirma que não recebeu nenhum treinamento para o uso dos recursos computacionais. Nesta pesquisa, uma das categorias de análise, envolveu o uso de novas Tecnologias na Educação e o GeoGebra, destacando a necessidade de formação de professores com relação ao

uso de novas tecnologias na educação, destacando-se as dificuldades e as facilidades dos professores ao utilizar o GeoGebra e suas potencialidades para aprender o conteúdo de Geometria Euclidiana e Geometria Não-Euclidiana. Os resultados apontaram, que a maioria dos professores participantes da pesquisa tem laboratório de informática, no entanto, raramente, utiliza esses laboratórios, alegando falta de intimidade com o *software*.

Em relação ao fato do professor não utilizar os laboratórios de informática, a falta de preparação para enfrentar todas essas mudanças, acaba adiando a introdução dos recursos tecnológicos. De acordo com Valente (1999):

A formação do professor deve prover condições para que ele construa conhecimento sobre as técnicas computacionais, entenda por que e como integrar o computador na sua prática pedagógica e seja capaz de superar barreiras de ordem administrativa e pedagógica (VALENTE, 1999, p. 27).

E ainda, Lovis (2009) reforça a posição do papel do professor:

[...] o aluno tem a possibilidade de construir figuras e analisar se suas propriedades de fato são verificadas, formular argumentos válidos para descrever essas propriedades, fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios. [...] embora sejam muitas as potencialidades que os softwares de matemática oferecem à educação, é necessário ficar atento que a qualidade da utilização dos mesmos depende da forma como eles são utilizados pelos professores. Não podemos deixar de destacar o papel do professor durante as aulas com o auxílio computacional, que deve ser o de “vigiar” as hipóteses e conjecturas dos alunos para que estes não se precipitem em fazer generalizações incorretas dos conteúdos estudados (LOVIS, 2009, p. 57).

Cabe ressaltar que, em relação às dificuldades para utilizar o GeoGebra, os professores participantes da pesquisa de Lovis (2009), apontam insegurança, falta de prática ou pouca familiarização com o software. Muitos reiteram argumentos da insuficiência de tempo (diga-se de passagem, uma situação ubíqua) ou falta de cursos para aprender mais sobre os recursos tecnológicos. Outros apontam a falta de conhecimento básico em informática. É interessante notar que a maioria dos participantes afirma que o software contribuiu para o aprendizado do conteúdo, no entanto, os resultados da pesquisa, confirma que os mesmos, não conseguiram elaborar as construções propostas e tiveram dificuldades nos conteúdos de Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica.

O trabalho de Ferreira (2011) resgata as dificuldades dos professores (apresentadas nas dissertações de Santos (2009a) e Lovis (2009)) em relação aos

conteúdos referentes às Geometrias não euclidianas. Ferreira (2011), apresenta uma proposta didática para que os futuros professores possam reconstruir o modelo do Disco de Poincaré<sup>22</sup>, e assim, investigar alguns conceitos matemáticos e geométricos. Nesta pesquisa, aparece a possibilidade de surgirem conceitos não científicos (equivocados) advindos de apenas se considerar a métrica euclidiana.

Em outra pesquisa, com a utilização de materiais concretos, como palitos de fósforo, geoplano (material e virtual) e o GeoGebra, Santos (2014b) trabalhou com o estudo de problemas isoperimétricos<sup>23</sup>, com o intuito de aprimorar o processo de ensino e aprendizagem de geometria na Educação Básica. O GeoGebra, mais uma vez, foi utilizado somente para as construções e plotagens, parecendo pouco se importar com a geração de questionamentos ou mesmo a compreensão dos processos realizados neste software. Santos (2014b), destaca que as construções no GeoGebra estimulam a aprendizagem, mas o faz de modo informal. Ressalta que o nível de aprofundamento da aprendizagem dos alunos, é definido pelo professor e que este, deve buscar alternativas para motivar o processo ensino e aprendizagem, a fim de, desenvolver as competências e habilidades relacionadas aos conteúdos matemáticos, o raciocínio lógico-dedutivo, a concentração, a organização e o senso cooperativo. Santos (2014b) enfatiza a importância da demonstração de princípios geométricos e que o professor seja um mediador do processo para facilitar a aprendizagem.

A pesquisadora Modesto (2015), em sua pesquisa de intenções declaradamente interdisciplinares, envolve a matemática e a arte. Trabalhou conceitos geométricos por meio da observação e construção de fractais com o software GeoGebra, explorando as obras do artista gráfico Maurits Cornelis Escher. Modesto (2015), inicialmente, buscou que os estudantes, respondessem questionários que envolviam questões sobre as ideias de área, perímetro, proporcionalidade, Teorema de Pitágoras e padrões de progressão geométrica. Em seguida, para realizar as atividades no GeoGebra, foram disponibilizados alguns roteiros. É perceptível a preocupação com o processo de aprendizagem dos alunos, pois o texto, apresenta o registro de discussão sobre as construções, novamente,

---

<sup>22</sup> Modelo proposto por Henri Poincaré (1854 – 1912), para lidar com a Geometria Hiperbólica.

<sup>23</sup> Isoperimétrico significa mesmo perímetro. Problemas isoperimétricos são aqueles problemas que envolvem figuras com mesmo perímetro.

utilizando-se de outros questionários. O papel do professor, no desenvolvimento desta pesquisa, declara ser o de orientador das atividades e transmissor de conceitos matemáticos já elaborados.

A pesquisa de Oliveira (2015b), trabalhou com a matemática e música, abordando o conteúdo de trigonometria. Ele apresentou um capítulo com a preocupação de oferecer subsídios aos professores em relação aos elementos de teoria musical e indicou diversas referências para aprofundamento. A função do professor no desenvolvimento das atividades propostas, nesta pesquisa, também se declara como de orientador. O uso do GeoGebra foi relativamente tímido, focando-se em apresentar construções prontas, para apoiar a observação e reflexão em relação a conectividade da matemática e a música.

Após a análise destas dissertações, observei que alguns pesquisadores utilizam o GeoGebra para desenvolver propostas de ações somente com alunos. Outros visam o aluno e o professor e raramente somente o professor. É interessante notar, que a maioria das pesquisas analisadas, não me permitiu reconhecer reflexões das possibilidades e limitações do GeoGebra. A maioria das pesquisas se pauta em usar tutoriais/roteiros, pouco revelando sobre a produção e reflexão dos significados matemáticos ou dos resultados computacionais envolvidos.

Até esta parte tratei de pesquisas de mestrado, tanto profissional como acadêmico. A seguir, apresento análises de algumas teses.

Borssoi (2013), aproximou aspectos da Modelagem Matemática à Aprendizagem Significativa segundo Ausubel. Os participantes de sua pesquisa, realizaram atividades de Modelagem Matemática mediadas pela tecnologia digital, e para tanto, usaram os softwares *GeoGebra*, *Maple*, *Gnuplot*, *Winplot*, entre outros. Estes softwares foram utilizados para construção, visualização e reflexão dos resultados. Em determinados momentos, mais de um software foi utilizado, buscou-se comparar as diferenças de seus resultados, relativos às mesmas atividades, permitindo refletir sobre as possibilidades e limitações encontradas.

O resultado obtido pelo algoritmo do programa Maple não se aproximou da equação obtida através do ajuste de curvas do Excel. Para confirmar qual das equações estava correta, foi utilizado outro software matemático, o GeoGebra, que forneceu um resultado bastante próximo ao do Excel (BORSSOI, 2013, p. 236).

Nesta pesquisa, é interessante notar que a maioria dos participantes, apesar

de afirmar conhecer as funcionalidades do GeoGebra, registram algumas tentativas infrutíferas de se utilizar o GeoGebra para construir gráficos, levando a autora a escrever que “[...] não deu pra usar a tecnologia pra ajudar a gente a resolver esse problema” (BORSSOI, 2013, p.77). Na direção de superar situações similares, a autora relata que “[...] foi possível perceber algumas limitações quanto ao uso de um programa que o grupo alegava conhecer (GeoGebra), mas, a orientação da professora fez os alunos perceberem funcionalidades do programa que desconheciam” (BORSSOI, 2013, p.155). Conclusivamente, os participantes pareceram colocar-se em um processo contínuo de construção dos seus conhecimentos, delineando discussões interessantes pela criticidade utilizada, tanto na atividade como em relação aos recursos tecnológicos utilizados. Inquietantemente, a autora indica que os resultados, apontaram que a tecnologia digital, tem uso de forma restrita e com pouca integração às aulas.

Os pesquisadores Cargnin (2013) e Silva (2016), assim como Borssoi (2013), trabalharam em suas pesquisas com propostas direcionadas aos alunos.

No caso de Cargnin (2013), foi proposto uma sequência didática para alunos das Engenharias Civil, Ambiental e de Produção e da Licenciatura em Química. Os softwares GeoGebra e wxMaxima foram utilizados como recursos didáticos para a resolução das atividades. A pesquisadora destacou que a exploração computacional em atividades autônomas, trouxe importantes contribuições para a aprendizagem dos conceitos de Integral de Riemann para funções com uma variável real. Interessantemente, os alunos se envolveram em atividades que possibilitaram o trabalho colaborativo. Inicialmente, um número expressivo de alunos apresentou dificuldade no uso dos comandos do GeoGebra.

Segundo uma aluna participante da pesquisa de Cargnin (2013), uma das dificuldades mencionadas em relação ao uso do GeoGebra, envolveu o uso de valores muito pequenos, levando-a a ter de lidar com gráficos muito próximos ao eixo x, sendo necessário usar o zoom várias vezes e ainda assim não se dar por satisfeita. Outro apontamento, alguns alunos participantes desta pesquisa, quando trabalharam com a ideia de convergência, afirmaram que “à medida que a ordem de grandeza diminuía, a escolha dos estudantes recaía sobre o wxMaxima, já que o poder de cálculo desta era superior ao do GeoGebra”. Mesmo assim o GeoGebra foi

utilizado para a realização de cálculos, construção de gráficos e análise dos resultados. Os alunos desta pesquisa lamentaram que no GeoGebra não está implementada, a opção da solução passo-a-passo, enquanto que outros softwares, como, por exemplo o Maple, oferecem este recurso. Outro detalhe extremamente relevante, a sequência didática proposta, exigia a reflexão da atividade desenvolvida e a necessidade de aprofundamento dos conceitos através de discussões coletivas.

Nesta mesma linha de trabalho, Silva (2016) procurou apresentar as contribuições da informática na construção de conceitos matemáticos. Utilizando situações-problema, desafiou os sujeitos envolvidos a discutirem suas concepções, levando-os a tratar da validação/reformulação de hipóteses matemáticas, sobre possíveis modelos matemáticos que pudessem representar e explicar diferentes fenômenos. Com o auxílio do software GeoGebra, foram desenvolvidos dois objetos virtuais (Cadeia de Markov – 2D e Cadeia de Markov – 3D) para desafiar e auxiliar os sujeitos na investigação.

Nas pesquisas de Cargnin (2013) e Silva (2016) foram abordadas possibilidades e limitações em relação ao conhecimento matemático, mas não foram apresentadas diferentes formas para a ampliação da discussão sobre o uso do GeoGebra, tampouco tratou-se das suas limitações.

As pesquisas de Baldini (2014) e Cavalcanti (2014) discutiram a formação de professores associada ao GeoGebra. As duas pesquisadoras abordaram as possibilidades de utilização das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no ambiente educacional, mas não explicitaram suas indicações sobre o que poderia ser feito a respeito das possibilidades e limitações do software.

Baldini (2014) trabalhou com a formação de professores e a integração das TDIC (Tecnologia Digitais de Informação e Comunicação). Em suas investigações, focou-se em identificar quais elementos da prática de uma Comunidade de Prática de Formação de Professores de Matemática que utilizam o GeoGebra, permitem o desenvolvimento profissional tanto daqueles que estão atuando, como daqueles que estão em processo de formação inicial. Para esta pesquisadora a aprendizagem e a mobilização/constituição de conhecimentos, para o uso do GeoGebra em sala de aula, foi utilizado como indicador de desenvolvimento profissional, com rara indicação sobre a discussão dos significados matemáticos junto ao software.



Baldini (2014) destaca a oportunidade da participação ativa dos membros no processo de formação; o sentimento de desafio para participar da resolução das tarefas; a partilha de experiências; a possibilidade de expor erros sem gerar constrangimentos; apresentar, justificar, explorar e comparar das diversas estratégias utilizadas pelos participantes; a possibilidade de utilizar “lápiz e papel” e as TDIC; a presença do *expert* no grupo; o desenvolvimento de relacionamentos/interações, com respeito e confiança, além da solidariedade e a criatividade. Baldini (2014), sugeriu que para a formação de professores, na perspectiva do desenvolvimento profissional, devem ser considerados os espaços de discussões, que o uso das TDIC, desencadeia em conjunto com os aspectos identificados. É importante indicar que esta pesquisadora reforçou em seu trabalho o uso de um recurso que o GeoGebra oferece, o “protocolo de construção”, que permite ao usuário do software ver a sequência de passos e as ferramentas utilizadas ao longo do processo de construção de uma figura. Um detalhe interessante é que os demais pesquisadores que fazem uso do GeoGebra acabam não citando a existência desta ferramenta.

Nesta mesma linha de formação de professores de matemática, mas com a particularidade de trabalhar na modalidade EaD, a pesquisadora Cavalcanti (2014), investigou o funcionamento e a efetividade de um Laboratório Virtual de Ensino de Matemática. Os participantes da pesquisa utilizaram os softwares C.a.R. (*Compass and Ruler* ou Régua e Compasso) e o GeoGebra para desenvolver as atividades didáticas. A análise interpretativa da pesquisadora teve como referência os extratos textuais gerados no fórum de discussão do Ambiente Virtual do Moodle. Essa pesquisa permitiu verificar a relevância de desenvolver matemática com uso dessas ferramentas para aplicação na prática dos futuros professores. A pesquisadora destacou a oportunidade dos participantes em construir objetos matemáticos, a partir da apropriação de linguagens específicas dos softwares matemáticos, além de cumprirem com as tarefas avaliativas e a autonomia conquistada. Toda pesquisa foi desenvolvida de forma colaborativa e, segundo a autora, contribuiu para incentivar a utilização destes recursos tecnológicos.

Cabe registrar, segundo a pesquisadora, a utilização de softwares

matemáticos pelos professores, no processo de ensino e aprendizagem, implica em:

[...] não apenas propor ao futuro professor o uso do computador, mas o desenvolvimento de uma prática pedagógica diferenciada na construção de conhecimentos, dividindo com o aluno o prazer de aprender a aprender, onde o professor assume o papel de mediador e o aluno torna-se sujeito participante desta ação didática (CAVALCANTI, 2014, p. 63-64).

E ainda, diz que os softwares permitem:

[...] identificar os pontos de fragilidade relativos à dificuldade de compreensão do conteúdo matemático, falhas na escolha de estratégias relativas a execução e construção feita pelo estudante que acarretaram os erros possíveis com a verificação dos passos gravados na Lista de Objetos, local que propicia conferir os elementos envolvidos na construção (pontos, segmentos, retas, polígonos, círculos, etc.) oportunizando ao professor o acompanhamento do desempenho individual do estudante no processo educativo (CAVALCANTI, 2014, p. 74).

Cavalcanti (2014) também cita:

No que tange a exploração, o aluno pode formular suas próprias conjecturas e tentar verificar se elas são válidas. Ou seja, o próprio aluno irá realizar a verificação e validação da conjectura que formulou. Isso só é possível devido aos recursos dos softwares, como o arrastar, que possibilita a simulação de diferentes casos da figura. Como se o aluno estivesse verificando todos os casos possíveis de uma mesma família de configuração (ZULATTO, 2002, p. 33).

Cavalcanti (2014) apresentou as funcionalidades dos dois softwares C.a.R. e GeoGebra, apontando que dentre as possibilidades geradas pela utilização dos programas, o *feedback* constante e procedente da comunicação com a visualização das ações, em paralelo com a testagem das hipóteses, permite checar as “verdades matemáticas” diretamente com as representações construídas. Parecendo, assim, falar da transição da fase abstrata dos argumentos para a demonstração matemática.

Em relação ao GeoGebra, esta pesquisadora destaca que:

[...] estão reunidos recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo num único sistema para utilização em Educação Matemática nas escolas de Educação Básica e de Ensino Superior, estando disponível gratuitamente em vários idiomas para download com softwares interativos em páginas da WEB e em versões para diversos sistemas operacionais, inclusive o Linux, um sistema operacional gratuito (CAVALCANTI, 2014, p. 78).

Cavalcanti (2014) em função de sua pesquisa envolver um curso na modalidade EaD, optou por disponibilizar tutoriais para o desenvolvimento das atividades propostas, apoiando-se em orientações suplementares assincronamente.

Em alguns momentos, ficou evidente no relato dos alunos a grande dificuldade que alguns deles têm para manipular os recursos tecnológicos. Essa constatação pode ser reforçada quando essa pesquisadora diz:

[...] as dificuldades relacionadas à ambientação com a interface dos softwares C.a.R e GeoGebra, mais especificamente com os comandos, menus, caixas de diálogos, sistema de ajuda *on line*, etc precisam ser trabalhadas de forma mais contundente para auxiliar na construção dos objetos matemáticos e respectiva realização de atividades solicitadas nesse processo formativo. Percebe-se que na formação inicial de professores é condição *sine qua non* se apropriar destas linguagens computacionais com maior solidez para aplicação futura no exercício profissional. (CAVALCANTI, 2014, p. 274).

A autora reforça a minha suposição de que um fator muito importante, em relação à incorporação das TDIC para a formação docente dos futuros professores de matemática, é compreender a importância de dominar as especificidades dos softwares matemáticos; conhecer as interfaces desses recursos e o que propiciam para serem utilizados na prática docente auxiliando a construção do conhecimento.

Interpreto que a autora, quando fala em “dificuldades relacionadas à ambientação com a interface dos softwares”, pode também estar falando da linguagem específica do GeoGebra, pode estar falando das dificuldades em relação a necessidade do desenvolvimento e naturalização da atividade de programação de computadores. Não é comum a intimidade de professores de matemática com programação, mesmo que a linguagem esteja tentando disfarçar-se em uma roupagem de notação matemática da escola. Posso afirmar, mesmo que informalmente (considerando minha imersão nos grupos de redes sociais), que muitos usuários (mesmo os que já o usam há algum tempo) ainda se mostram desconfortáveis em programar com o código GeoGebra.

Em suas pesquisas, Rodrigues (2013) e Dantas (2016) forneceram estratégias interessantes de como incentivar o aprofundamento da aprendizagem matemática e uso do GeoGebra. Rodrigues (2013) investigou as possibilidades e limites de um Grupo de Trabalho de professores de Matemática, que utilizam softwares educacionais, incluindo o GeoGebra.

Dantas (2016) investigou os processos de interação e desenvolvimento de uma rede sócio profissional *online* de professores de matemática, para isso constituiu uma grande comunidade de interessados e colaboradores, por meio da

oferta de um curso de GeoGebra.

Rodrigues (2013) e Dantas (2016) tiveram a mesma preocupação, a formação continuada dos professores utilizando o software GeoGebra. Enquanto que no trabalho de Rodrigues (2013), se observou a importância das interações dos professores no grupo de trabalho presencial, Dantas (2016), teve o intuito de utilizar uma estrutura tecnológica, procedimental e conceitual, especificamente desenvolvida, para que os professores participassem de uma comunidade *online* (a distância) e pudessem dialogar com seus pares, tomar decisões e estabelecer redes colaborativas.

Nas duas pesquisas, a utilização do recurso do computador pelos docentes, foi indispensável e constituiu uma grande possibilidade para o ensino de conceitos matemáticos. Cabe anotar que Dantas (2016), introduziu e instigou o uso dos comandos do código GeoGebra.

Além dos conhecimentos aprofundados com a experiência destes trabalhos em grupo, seja presencialmente ou não, estes trabalhos propiciaram aos seus participantes um ambiente de ação-reflexão-ação de sua prática, conforme apontado por Rodrigues (2013); gerando um clima de auto compreensão e compreensão do outro.

Para Dantas (2016) foi muito importante o caminho percorrido pelos professores pertencentes à comunidade colaborativa *online*, utilizando a coautoria e a coprodução como formas de trabalho, em suas palavras, “[...] a partir da interação e da colaboração, podem desenvolver conjuntamente ideias, objetos e materiais para a sua ação didática”. O que fica claro na proposta de Dantas (2016), é seu principal objetivo de instigar os professores pertencentes a sua comunidade *online*, a construir o conhecimento de forma colaborativa, mesmo que a situação proposta já tenha um resultado em algum lugar do mundo *online*.

No Curso de GeoGebra de Dantas (2016), os cursistas tiveram a oportunidade de acessar diferentes abordagens de uso do GeoGebra, por meio de vídeo-aulas, recurso este, não utilizado nas demais pesquisas que foram analisadas. O desenvolvimento desses vídeos mostra-se como um caminho profícuo para se aproximar os diferentes modos de produção de significados e possibilitar naturalizações da Matemática do GeoGebra. Dantas (2016) transita com fluidez e

fornece um ótimo exemplo de como democratizar o GeoGebra. Reconhecidamente, por outros professores de matemática, que fizeram ou moderaram diferentes edições do curso, tal afirmativa se repete em seus registros das interações ou avaliações.

Um aspecto que Rodrigues (2013) abordou em relação aos professores e é comum a outros pesquisadores, envolve a questão de que:

[...] tornamo-nos vulneráveis nesse modelo de ensino por causa do domínio que esse nos exige. No entanto, não deixamos de reconhecer sua importância na área educacional, principalmente na disciplina da Matemática, por isso nos propusemos a construir e elaborar atividades de forma dinâmica, criar situações que motivem os alunos, buscar desafiá-los para a aprendizagem de conceitos matemáticos ao utilizar esses recursos (RODRIGUES, 2013, p. 71).

Segundo Rodrigues (2013), essa vulnerabilidade leva os professores a não utilizarem os recursos tecnológicos no ensino de matemática e a se manterem na sua zona de conforto.

Vale ressaltar que a realidade está mudando e cada vez mais a interação e a colaboração se torna presente na vida desses educadores, que em cursos de formação continuada, partilham seus anseios e suas angústias, bem como as conquistas obtidas na realização de seu trabalho, utilizando a tecnologia como suporte.

Essas duas pesquisas exemplificam essa possível mudança de cenário, em que professores estudando em grupos, reforçam o interesse por descobrirem diversas possibilidades de utilização do GeoGebra.

As pesquisas apresentadas confirmaram o interesse dos profissionais da Educação e Ensino de Matemática, e as potencialidades da escolha do GeoGebra para explorar situações, envolvendo a junção da álgebra, geometria e cálculo e etc. As pesquisas mostraram o uso em todos os níveis escolares e forneceram contribuições relevantes. Em resumo, pode-se ensinar e aprender matemática, assim como discutir a sua didática com o GeoGebra.

Mas eu gostaria que o leitor notasse que, em geral, os sujeitos pesquisados não se mostram muito experientes no uso do GeoGebra. As pesquisas orbitaram em torno de introduzir ou aprender sobre matemática com o apoio do software. Parte dessas pesquisas observadas, ofereceu aos sujeitos dos estudos, construções

prontas ou roteiros a seguir. Mesmo considerando os investigadores destas pesquisas, como usuários experientes do GeoGebra, não me foi possível, a partir das informações dadas, refletir ou discutir como foram criados tais roteiros.

Outro ponto que julgo relevante, a maioria dos roteiros se pauta apenas no uso da janela de visualização geométrica, parecem apostar demais na visualização das representações dinâmicas e anotam que para lidar com as representações algébricas, precisam retornar ao registro escrito. Parecem não conhecer as possibilidades da janela CAS. Não quero com este último parágrafo menosprezar as contribuições, afirmo apenas que existem possibilidades que podem não estar sendo consideradas, o que aponta para a necessidade de estendermos as aproximações, às diferentes possibilidades de linguagem e representações possíveis da Matemática do GeoGebra.

Mesmo com estas contribuições que já existem, acredito na relevância da minha pergunta problematizadora: Como usuários considerados experientes em usar o GeoGebra para ensinar matemática, lidam com a transição entre a linguagem da matemática e do GeoGebra e como tratam as questões sobre a validade matemática e didática, das possibilidades e limitações que o software oferece?

### 2.3 - Acerca dos diferentes modos de produção de significados matemáticos e do transitar entre eles

Mas afinal, o que eu quero dizer quando uso os termos: a Matemática do Matemático (MM), a Matemática da Escola (ME) e Matemática do GeoGebra (MG)? E ainda, quais seriam os sentidos que pretendo adotar quando falo em transitar entre estas matemáticas?

Considero importante começar dizendo que não pretendo definir o que é matemática. Esta tarefa já foi assumida por pessoas que julgo muito mais capazes e geralmente acabam por lidar em intermináveis querelas filosóficas. Nesta seção, intento apresentar as bases em que me pautei para constituir meus olhares sobre as produções e falas dos usuários do GeoGebra.

Desejo adotar um pressuposto orientador. Existem diferentes modos de se produzir significados matemáticos e é preciso transitar entre eles. Deixe-me registrar

algo sobre como compreendo a natureza dos significados matemáticos.

No campo da Filosofia da Matemática, me parece possível reconhecer, a grosso modo, uma diferenciação macroscópica entre duas categorias teóricas. D'Amore (2005) (fazendo jus a Kutschera (1979)) fala em “*teorias realistas*” (ou *figurativas*) e “*teorias pragmáticas*”.

Em relação às *teorias realistas*, D'Amore (2005) assume que significado é:

Uma relação convencional entre signos e entidades concretas ou ideais que existem independentemente dos signos linguísticos; conseqüentemente, esses signos e entidades pressupõem um realismo conceitual. (GODINO, BATANERO, 1994 *apud* D'AMORE, 2005, p.25).

Prossegue D'Amore (2005), apoiando-se em Kutschera (1979):

Segundo essa concepção, o significado de uma expressão linguística não depende de sua utilização em situações concretas, mas acontece que o seu uso se sustenta no significado, sendo possível uma nítida divisão entre semântica e pragmática. (KUTSCHERA, 1979 *apud* D'AMORE, 2005, p.25).

D'Amore (2005) considera que tais afirmações são pressupostos ontológicos da semântica realista e quando aplicados à matemática, levam a uma visão platônica dos objetos matemáticos, de modo a concebê-los em uma realidade ideal, como verdades definitivas e independentes das experiências sensoriais da humanidade.

Em relação às *teorias pragmáticas*, D'Amore (2005) diz:

Nas teorias pragmáticas, as expressões linguísticas possuem significados diferentes de acordo com o contexto no qual são utilizadas e, portanto, torna-se impossível qualquer observação científica, pois a única análise possível é “pessoal” ou subjetiva, todavia circunstanciada e não generalizável. Não é possível fazer outra coisa a não ser examinar os diferentes “usos”: com efeito, o conjunto deles determina o significado dos objetos. [...] Os objetos matemáticos são, portanto, símbolos de unidades culturais que emergem de um sistema de utilizações que caracterizam as pragmáticas humanas (ou, pelo menos, de grupos homogêneos de indivíduos) e que se modificam continuamente no tempo, inclusive segundo as necessidades. Com efeito, os objetos matemáticos e o significado de tais objetos dependem dos problemas que são enfrentados em matemática, bem como dos respectivos processos de resolução. (D'AMORE, 2005, p.26-27).

Gostaria de chamar a atenção do leitor a um aspecto interessante que permite diferenciar este segundo modo de produzir significados matemáticos. Para os pragmáticos, os objetos matemáticos emergem das práticas humanas e se modificam. Em contraste a primeira perspectiva, tais objetos são mutáveis, o que

nos leva a considerar verdades relativas, adotadas conforme a plausibilidade de sua associação ao contexto. Vejamos uma síntese de tais vertentes teóricas (veja Quadro 1).

Quadro 1 - Teorias "realistas" x teorias "pragmáticas"

|   | TEORIAS "REALISTAS"  | TEORIAS "PRAGMÁTICAS"   |
|---|--|---|
| <b>Significado</b>                        | Relação convencional entre signos e entidades concretas ou ideais, independentes dos signos linguísticos | Depende do contexto e do uso  |
| <b>Semântica versus pragmática</b>        | Divisão nítida   | Sem divisão ou divisão não-nítida   |
| <b>Objetividade ou intersubjetividade</b> | Total  | Ausente ou discutível   |
| <b>Semântica</b>                          | As expressões mesmo linguísticas possuem funções puramente semânticas                                    | As expressões linguísticas e as palavras possuem significados "pessoais", são significativas em contextos oportunos, mas não têm significados absolutos, de <i>per se</i> |
| <b>Análise</b>                            | Possível e lícita: a lógica por exemplo  | Possível apenas uma análise "pessoal" ou subjetiva, não-generalizável, não-absoluta   |
| <b>Visão epistemológica subsequente</b>   | Concepção platônica dos objetos matemáticos  | Concepção problemática dos objetos matemáticos  |
| <b>Conhecer</b>                           | Descobrir  | Usar em contextos adequados   |
| <b>Conhecimento</b>                       | É um absoluto  | É relativo à circunstância e ao uso específico  |
| <b>Exemplos</b>                           | Wittgenstein do <i>Tractatus</i> , Frege, Carnap, Russel, Cantor, Bernays, Gödel                         | Wittgenstein das <i>Pesquisas filosóficas</i> , Lakatos   |

Fonte: (D'AMORE, 2005, p.27-28)

Afinal, qual a natureza dos objetos matemáticos? De certo modo, este seria um dos cerne do que considero relevante para apontar a possibilidade de criar minhas categorias e abordagem de análise.

Cabe considerar que um leitor mais crítico e com leitura apurada da Filosofia da Matemática, poderia criticar a aparente digressão que proporei. O leitor poderia dizer que estas duas vertentes teóricas não são totalmente suplementares e tampouco explicitamente auto excludentes, no entanto, momentaneamente, vou considerá-las distintas, e procurarei aproximá-las pela minha compreensão de que professores de matemática transitam entre as mesmas.

Falemos da questão aparentemente digressiva. Ressalto que minha intenção, é relacionar algumas das razões, que me levaram a tentar compreender como se pode lidar com os diferentes modos de produção de significados matemáticos, quando professores usam o GeoGebra para ensinar.



Os objetos matemáticos são descobertos ou inventados? Ou de outra forma: a existência dos objetos matemáticos depende ou independe do sujeito que busca tratá-los?

Para responder a estas questões, historicamente, *realistas* e *pragmáticos* contrapuseram seus pontos de vista.

Os *realistas* supõem a realidade do universo matemático, de forma independente da realidade física. Os objetos possuem propriedades próprias que existem *a priori* do sujeito. O ser humano que se entende como matemático realista, não inventa esta realidade objetiva que lhe é exterior. Entende-se como um descobridor. Tal posição, enquanto perspectiva filosófica tem por base a filosofia de Platão. Para o platonismo, os objetos matemáticos existem, embora não sejam objetos físicos ou materiais. A sua existência é um fato objetivo, totalmente independente do nosso conhecimento. Existem fora do espaço e do tempo, são não mutáveis, não sendo criados e são atemporais. Desse modo, a matemática tem uma existência autossuficiente, respeitando sua lógica e leis internas. Fazer matemática traduz-se na descrição e descoberta desses objetos e de suas relações.

Já a perspectiva filosófica dos *pragmáticos*, adota a postura de que toda a realidade matemática é subordinada às construções cognitivas dos matemáticos que inventam essa realidade. Os objetos matemáticos são livres invenções dos seres humanos, não existem independentemente. Suas propriedades seriam o que o pensamento pode criar e tornar plausível.

Aqui chamo atenção a um ponto que considero nevrálgico. O possível antagonismo destas duas posições sobre a existência e realidade dos objetos matemáticos pode estar muitas vezes presente, simultaneamente, no pensamento dos professores de Matemática. De um ponto de vista, professores de matemática compreendem sua disciplina dando passagem do concreto ao abstrato, de forma reveladora; mas também se maravilham e ensinam a aplicabilidade da matemática à interpretação do mundo físico.

#### **Diálogo sobre a existência de entes geométricos no mundo físico**

Pergunta dirigida aos alunos:

Afinal o que é um ponto, o que é uma reta, o que é um plano - na verdadeira acepção destes termos?

Na melhor das hipóteses obtém-se a resposta cómoda habitual (...): Trata-se aí de termos primitivos, isto é de termos que não são definidos

logicamente a partir de outros.

Mas o professor não deve de modo nenhum contentar-se com esta resposta. Deve sim voltar à carga: Também os termos gato, rosa, etc. são termos primitivos, no mesmo sentido, e, no entanto, todos sabem reconhecer um gato, uma rosa etc.

Ora quem é que já viu um ponto, uma reta ou um plano?

Os alunos terão de admitir que ninguém viu tais coisas. Mas há que lembrar-lhes: Também ninguém viu ou espera ver centauros, sereias ou dragões. Todos sabem que não existem seres vivos com os atributos que estes nomes invocam: trata-se de meras criações da fantasia humana. Pois serão as figuras geométricas, como os centauros e as sereias, nada mais do que produtos da nossa imaginação?

Os alunos hão de talvez dizer que não se trata da mesma coisa. É preciso encorajá-los nesse sentido e observar: A cada passo chamamos pontos, segmentos de reta, esferas, etc. há certos entes do mundo físico, tais como o sinal deixado pela ponta de um lápis sobre o papel, um fio bem esticado, uma bola de bilhar, etc.

Mas haverá logo quem repare: Pois, sim, mas toda a gente sabe que essas coisas não são pontos, não são segmentos de reta, não são esferas.

Ao que o professor dirá: Todavia essas coisas seriam pontos, segmentos de reta, esferas, etc. se verificassem determinadas condições que são os axiomas e as definições da Geometria de Euclides. E perguntará logo em seguida: Esses objetos do mundo físico não verificam as referidas condições?

Se adotarmos a lógica bivalente a resposta só poderá ser “verificam” ou “não verificam”.

O aluno escolhe provavelmente a segunda (a primeira é demasiado vulnerável). Logo: Se essas coisas não verificam as referidas condições, a geometria é inaplicável ao mundo físico, não é verdade?

Mais uma vez a resposta terá que ser “sim” ou “não”, e o aluno optará provavelmente pela negativa (a primeira é incompatível com a anterior resposta).

Mas o professor deverá por novamente os alunos perante a realidade: No entanto, se medirmos os três ângulos internos de um triângulo, verificamos que a soma dos três é igual a  $180^\circ$  (...) A cada passo vemos confirmadas as previsões teóricas da geometria euclidiana, cujas aplicações são fundamentais na ciência e na técnica (...). Parece, pois, que chegamos a uma conclusão absurda, desconcertante: A GEOMETRIA É E NÃO É APLICÁVEL AO MUNDO FÍSICO.

Como poderá ser isto? (SILVA, 1964 apud PONTE, 1997, p. 12-13).

A citação acima tem o intuito de incitar o leitor a considerá-la um exemplo paradoxal, de carácter possivelmente impeditivo ao ato de se ensinar matemática. Mas, obviamente não é isto que se pode vivenciar das práticas de sala de aula. Pode-se e se ensina matemática nas escolas.

Considero que os professores transitam em diferentes perspectivas epistemológicas para produzir e lidar com diferentes significados matemáticos.

Talvez o leitor concorde que os professores tendem a ser pragmáticos. Professores “inventam” e lidam com as “invenções” matemáticas dos estudantes. Ademais, acredito que os professores não desvalorizam a segurança de se partir ou

buscar lidar com ao menos uma parte das premissas das teorias realistas, preferencialmente, aquelas que lhe dão alguma legitimidade matemática e lhe parecem potencialmente didáticas.

Apesar das controvérsias sobre a natureza dos objetos matemáticos, os professores se põem a fazer diferentes atividades matemáticas; seus objetivos, a meu ver, estão mais relacionados com a manutenção da discussão e construção de significados aceitáveis aos envolvidos em suas aulas e convergentes a alguma plausibilidade matemática. Daí o meu uso da palavra transitar.

Posições filosóficas referentes à matemática acabam por influenciar significativamente a reflexão sobre a construção de conceitos e princípios orientadores ao ensino e aprendizagem desta ciência (cf. Ponte, 1997, *passim*).

Professores pretendem ajudar os aprendizes na compreensão do corpo de saberes matemático; corpo este, que é produto contingencialmente evolutivo, além de ser histórica e culturalmente constituído.

Outro aspecto que considero para justificar minha abordagem é o meu pressuposto de que a linguagem permite reconhecer o transitar entre os diferentes modos de produção de significados matemáticos.

Sustento que há diferenças entre a linguagem dos matemáticos profissionais e a linguagem dos professores de matemática, no entanto, estudos mais aprofundados demonstram que existe predileção pelos significados matemáticos legitimados pelos matemáticos profissionais (cf. MOREIRA, 2004).

Quando falo em Matemática do Matemático, Matemática da Escola e Matemática do GeoGebra<sup>24</sup>, concebo-as como *jogos de linguagem*, adjetivações das diferentes práticas matemáticas dos professores de matemática.

[...] **os significados** em geral, os **da matemática em particular**, não estão prévia e definitivamente determinados, mas encontram-se nos diferentes usos que fazemos dos conceitos, ou seja, **dependem dos jogos de linguagem de que participam**. Assim, **as adjetivações indicam diferentes usos, em situações e contextos específicos, determinados pela força normativa das formulações de cada grupo**; em outras palavras, **as adjetivações referem-se a diferentes práticas matemáticas**. (VILELA, 2009, p.193, grifos acrescentados)

Pode ser didática e cientificamente arriscado, insistir em apostar totalmente

---

<sup>24</sup> Esta é uma das caracterizações iniciais que adoto para a Matemática do GeoGebra, considero que existem mais aspectos e o leitor poderá verificar meus argumentos na próxima seção.

no ensino segundo uma perspectiva que supõe somente a existência de um saber matemático imutável, eterno, fortemente estruturado, infalível, rigoroso e abstrato por natureza. Modernamente, pareceria que mesmo com um barco a motor, estaríamos insistindo em usar os remos. Porém, é desejável evitar o relativismo absoluto, distorcendo ideias matemáticas com usos abusivos da linguagem.

Convido o leitor a me acompanhar nesta linha de raciocínio em que estou considerando diferentes concepções e objetivos quando tratamos de discutir, ensinar e aprender matemática. Alguns pretendem pesquisar e/ou produzir conhecimentos matemáticos com base em axiomas e teoremas; outros pretendem aprender algo da matemática. Aos professores, importa o articular dos diferentes modos de produzir significados matemáticos e dar condições de trânsito a todos. O GeoGebra foi criado para ajudar no ensino e na aprendizagem, reunindo funcionalidades que lhes são características e que acabam permitindo diferentes representações matemáticas, que se pautam no caráter algébrico e no caráter figural. E, eu penso que o uso do GeoGebra permite lidar com os diferentes modos de produção de significados matemáticos e do transitar entre eles.

### 2.3.1 - A Matemática do Matemático (MM)

Em suma, entendo que a Matemática do Matemático (MM) tem como objetivo mais geral, a produção e discussão de significados mais voltados à linguagem e formalismos matemáticos.

[...] vou procurar apenas alinhar duas características do que parece ser a Matemática para os matemáticos [...] Começo com uma ideia apresentada por nosso colega Roberto Baldino, que considera que a Matemática dos matemáticos seja resultado de um esforço (processo histórico) de colar significados a significantes. O que entendo por isso pode ser exemplificado na seguinte situação: se um matemático diz que "limite de uma função  $f$  é tal e tal e tal", é isso que "limite de uma função  $f$ " fica sendo, e isso não se dá por alguma causa natural (definição descritiva), mas por uma determinação simbólica (definição constitutiva). [...] Para dar um nome a isto, direi que a **Matemática do matemático é internalista**. A este internalismo juntamos

uma outra característica importante, que é a de que **os objetos da Matemática do matemático têm uma natureza simbólica**. Esta natureza simbólica [...] quer dizer que os objetos são conhecidos não no que eles são, mas apenas em suas propriedades, no que deles se pode dizer. [...] Juntas, estas duas características - internalismo e objetos simbólicos - dão conta de muito do que se quer dizer quando se diz, ainda que informalmente, que **a Matemática do matemático é "teórica" ou "abstrata"** [...] (LINS, 2004a, p.95-96, grifos acrescentados)

Empresto-me de algumas das ideias<sup>25</sup> de Lins (2004a) para buscar reforçar a caracterização da Matemática do Matemático (MM) que adoto neste trabalho. Resgato que, possivelmente existe simultaneidade das influências realistas e pragmáticas no arcabouço teórico dos professores de matemática, quando se focam em tratar dos significados matemáticos. Os objetos matemáticos são admitidos tanto no sentido da realidade platônica, como podem ser negociados pragmaticamente. Neste sentido, existem verdades desejáveis; esta é uma conclusão prévia advinda das minhas reflexões sobre as conversas que travei com os professores que entrevistei. No capítulo 4, o leitor poderá confirmar que não raramente, a segurança em dizer se um resultado obtido com o GeoGebra é confiável ou não, se corresponde ao “certo” ou “errado”, parte de pressupostos circunscritos a Matemática do Matemático. As argumentações e justificativas buscam delimitar-se ao contexto da construção de uma cultura particular, um modo característico de se produzir significados matemáticos. Uma clara tentativa de se apoiar em definições formais e não ambíguas.

Um exemplo, argumentativo e pessoal, relativamente simples, possivelmente até trivial para os atuais matemáticos profissionais, mas bastante controverso quando tento apresentá-lo em minhas aulas de matemática, voltadas a licenciandos com quem trabalho, pode me ajudar a apontar a direção em que estou pensando para caracterizar o uso de linguagem na Matemática do Matemático.

A expressão “ $a - (-b) = a + b$ ”<sup>26</sup>, sendo “ $a$ ” e “ $b$ ” números inteiros, traz algumas definições implícitas em seu bojo teórico e não raramente me é requerido

<sup>25</sup> Apesar de procurar usar uma terminologia muito similar a de Lins (2004), compreendo que sua base teórica é diferente da minha.

<sup>26</sup> Usarei as aspas para diferenciar texto verbal de expressões matemáticas literais.

que explique ou justifique matematicamente os seus significados. Inicia-se a pauta de definições.

Primeiro é preciso reconhecer que a expressão evoca a ideia de números relativos, simétricos ou opostos. A ideia de número precisa ser estendida a um campo mais abstrato, não é possível tratar a ideia de número apenas como a ideia intuitiva de quantidade. É preciso estendê-la.

Neste caso, é preciso associar estes números a ideia de uma reta numérica. Cada ponto que constitui esta reta numérica está associado a um e somente a um número. Escolhe-se um ponto sobre esta reta e associa-se a este, o número 0 (zero), definindo-se a origem desta reta numérica. Pautando-se na definição de que distância (considerando o plano euclidiano) é o menor segmento de reta que une dois pontos distintos (todos contidos no plano), define-se que os pontos a direita desta origem, estão associados aos números positivos; simetricamente em relação à origem e no sentido oposto, os pontos a esquerda da origem são associados aos números negativos. Deste modo, podemos dizer que o número qualquer “ $a$ ” (exceto o número zero) tem como número simétrico ou oposto o número “ $-a$ ”.

Voltando a expressão “ $a - (-b) = a + b$ ”. É preciso definir as operações de soma e subtração para os números relativos desta expressão dada. A operação de soma é representada pelo símbolo “+” e aparece no segundo termo da igualdade da expressão e a operação de subtração é representada pelo símbolo “-” e aparece antes do parêntese no primeiro termo da expressão dada. Para isso, pode-se dizer que a soma “ $a + b$ ” equivale ao processo de: a partir da origem, primeiro encontrar o ponto que está a “ $|a|$ ”<sup>27</sup> unidades de distância do ponto associado ao número 0 (zero), respeitando-se o sentido negativo ou positivo<sup>28</sup> para marcar este ponto. Em seguida a partir do ponto associado ao número “ $a$ ”, encontra-se o ponto que está a “ $|b|$ ” unidades de distância<sup>29</sup> do ponto associado ao número “ $a$ ”; o número resultante da soma e representado pela expressão “ $a + b$ ” está, também, representado pelo ponto onde foi marcado o número “ $b$ ”.

Em relação à operação subtração, define-se: a subtração com números

<sup>27</sup> lê-se módulo de “ $a$ ” e com isso pode-se falar em comprimentos

<sup>28</sup> “ $|a|$ ” unidades de distância - isto dependerá do número “ $a$ ”, pois se for positivo marca-se o ponto a direita de 0 (zero), se for negativo marca-se o ponto a esquerda

<sup>29</sup> “ $|b|$ ” unidades de distância - é importante apontar que se “ $b$ ” for positivo deve ser marcado a direita de “ $a$ ” e se “ $b$ ” for negativo deve ser marcado a esquerda de “ $a$ ”

relativos é a soma com o número oposto. Em um sentido lógico, então, pode-se explicar porque se deve manter a primeira parcela (designada pelo símbolo “a”) e porque os símbolos “-”, “-” e “( )” desaparecem e restam os símbolos “+” e “b”. O primeiro símbolo (“-”) que designa a operação de subtração deve ser entendido como uma soma e a expressão “(-b)” (os parênteses têm a função de evitar uma possível interpretação de que o segundo símbolo (“-”) também designa a operação subtração) é trocado pelo número simétrico ou oposto, representado por “b”.

Quando me questionam sobre o produto de números inteiros, acabo apresentando algo similar a seguinte citação:

O Teorema de Hankel resolve o problema da regra dos sinais definitivamente do ponto de vista matemático[...] Em 1867, Hankel dá a resposta matemática definitiva para a questão, com o seguinte resultado: a única multiplicação nos reais que prolonga a multiplicação usual sobre  $\mathbb{R}^+$ , respeitando as distributividades à esquerda e à direita é aquela que obedece a regra usual dos sinais para a multiplicação[...] Demonstração:  $0 = a \cdot 0 = a \cdot (b + \text{op } b) = \mathbf{a \cdot b + a \cdot \text{op } b}$ . (op x indica o oposto aditivo de x).  $0 = 0 \cdot \text{op } b = (\text{op } a + a) \cdot \text{op } b = \mathbf{\text{op } a \cdot \text{op } b + a \cdot \text{op } b}$ . Obtemos, portanto, comparando estes dois resultados em itálico, que  $\mathbf{ab = \text{op } a \cdot \text{op } b}$ . (MORETTI, 2012, p.702-703, grifos acrescentados)

Emblematicamente, toda esta elucubração ou uso do simbolismo matemático é raramente considerado agradável ou explicativo. Em alguns relatos (e eu não os condeno), constato até que as justificações afastam o interesse inicial dos requerentes. Coloco-me até a duvidar de sua utilidade didática em minhas práticas, entretanto, conforta-me o fato de que alguns se consideram satisfeitos e afirmam entender a matemática formal como estofo teórico da situação.

Não pretendo julgar ou discutir aqui, qual a escala de sucesso desta forma de pensar e praticar matemática. Interessa-me apontar que professores de matemática (em algumas situações similares aos meus exemplos) buscam pautar-se em linguagem própria da Matemática do Matemático (internalista e simbólica), assumindo ou constituindo definições formais em suas argumentações. Baseiam-se em um encadeamento lógico de axiomas ou teoremas para provar ou refutar suas afirmações matemáticas. E será este, o enquadramento que utilizarei para justificar minhas classificações das falas dos entrevistados como sendo da MM.

### 2.3.2 – A Matemática da Escola (ME)

Início a composição da minha caracterização da Matemática da Escola (ME), considerando o seguinte pensamento:

A matemática do professor de matemática é caracterizada pela sua aceitação de significados não matemáticos para coisas que poderiam ser de outra maneira chamada “matemática”. Em alguns casos esses significados não matemáticos são totalmente bem conhecidos e aceitos nas escolas, por exemplo, “equações são balanças de dois pratos”, e usados como recursos para (supostamente) facilitar a aprendizagem. (LINS, 2004b, *apud* LINARDI, 2006, tradução de Patricia Rosana Linardi)

Agora, voltemos à expressão “ $a - (-b) = a + b$ ”. Possivelmente o leitor possui em suas memórias algo de como seus professores de matemática buscavam explicar as operações aritméticas básicas com números relativos e por isso, pergunto: o leitor se lembra da frase “menos com menos dá mais”?

Qual ou quais seriam os significados matemáticos possíveis para esta fala dentro da Matemática da Escola? Existem várias justificações comumente adotadas (*i.e.* a famigerada *regra dos sinais*) pelos professores de matemática e que são legitimadas dentro dos jogos de linguagem do que denomino como Matemática da Escola. A fim de apresentar mais desses jogos de linguagem, vejamos algumas outras possibilidades, registradas pelo internacionalmente reconhecido, autor e professor Ian Stewart:

#### **Por que menos com menos dá mais?**

Quando somos apresentados pela primeira vez aos números negativos, dizem-nos que ao multiplicarmos dois números menores que zero encontramos um número positivo, de modo que, por exemplo,  $(-2) \times (-3) = +6$ , isso muitas vezes parece bastante intrigante.

O primeiro ponto que devemos notar é que, partindo das convenções habituais da aritmética sobre os números positivos, temos a liberdade de definir  $(-2) \times (-3)$  como bem entendermos. Poderia ser  $-99$ , ou  $127\pi$ , se desejarmos. Portanto, a principal questão não é quanto ao valor real, e sim quanto ao valor adequado. Diversas linhas de pensamento convergem para o mesmo resultado - isto é, que  $(-2) \times (-3) = +6$ . Incluí aqui o sinal + para enfatizar.

Mas por que isto é adequado? Eu gosto da ideia de interpretar um número negativo como uma dívida. Se minha conta no banco contém  $\$-3$ , então eu devo  $\$3$  ao banco. Suponha que minha dívida seja multiplicada por 2 (positivo): nesse caso, ela certamente se transformará em uma dívida de  $\$6$ . Portanto, faz sentido insistir que  $(+2) \times (-3) = -6$ , e a maioria de nós ficaria satisfeita com isso. No entanto, o que seria  $(-2) \times (-3)$ ? Bem, se o banco cancelar amavelmente duas dívidas de  $\$3$  cada uma, eu terei  $\$6$  a mais - minha conta se alterou exatamente como se alteraria se eu tivesse depositado  $\$6$ . Portanto, em termos bancários, queremos que  $(-2) \times (-3)$  seja igual a  $+\$6$ .



O segundo argumento é que  $(+2) \times (-3)$  e  $(-2) \times (-3)$  não podem ser ambos iguais a  $+6$ . Se fosse assim, poderíamos eliminar o  $-3$  e deduzir que  $+2 = -2$ , o que é bastante tolo.

O terceiro argumento se inicia ressaltando uma premissa não declarada no segundo argumento: de que as leis habituais da aritmética devem continuar válidas para os números negativos. E prossegue, acrescentando que esse é um objetivo razoável, ainda que seja apenas pela elegância matemática. Se quisermos que as leis habituais continuem válidas, então

$$(+2) \times (-3) + (-2) \times (-3) = (2-2) \times (-3) = 0 \times (-3) = 0$$

Portanto

$$-6 + (-2) \times (-3) = 0$$

Somando 6 a ambos os lados, vemos que

$$(-2) \times (-3) = +6$$

De fato, um argumento semelhante justifica que  $(+2) \times (-3)$  é igual a  $-6$ .

Juntando todas as ideias: a elegância matemática nos leva a definir que menos vezes menos é igual a mais. Em aplicações como nas finanças, essa escolha se adapta diretamente à realidade. Assim, além de mantermos a simplicidade da aritmética, acabamos com um bom modelo para certos aspectos importantes do mundo real.

Poderíamos fazer a coisa de um jeito diferente, mas acabaríamos complicando a aritmética e reduzindo sua aplicabilidade. Basicamente, essa é a melhor solução. Ainda assim, "menos com menos dá mais" é uma convenção humana consciente, e não um fato inevitável da natureza. (STEWART, 2009, p.46-47)

Com a citação acima espero que o leitor concorde que quando se trata de ensinar matemática, priorizando a aprendizagem, os professores procuram apropriar-se de outra linguagem em particular, procuram falar de um modo que não necessariamente está preso aos modos de produção de significados da Matemática do Matemático.

A Matemática da Escola é mais "maleável" em sua linguagem. Ela permite outros modos de produção de significados matemáticos. Esses significados matemáticos são considerados legítimos e plausíveis quando permitem às pessoas resolver problemas de outras ordens e quando ajudam as pessoas a tratarem de situações que se aproveitam dos números, formas geométricas e etc. em seu cotidiano.

Os professores compreendem que nem todos os estudantes procuram tornar-se matemáticos profissionais e que uma grande parte desses estudantes, está mais interessada em usar os conhecimentos matemáticos para outros fins. Neste sentido, em alguma medida, não lhes interessa o formalismo matemático.

A linguagem simbólica pode até ser aproveitada pelo seu caráter sintético e potencial semiótico, possibilitando falar de abstrações matemáticas, mas não é difícil vivenciar situações em sala de aula, em que aparece o sentimento de frustração dos

estudantes, quando precisam lidar com expressões literais. Por exemplo, nas salas de aulas, muito provavelmente vai se ouvir o pedido para que o professor não use “letras” quando for ensinar sobre a subtração com números inteiros. O professor sabe que usar casos particulares de números não é aceito pelo matemático, quando se pretende apontar uma generalidade, mas sustento que os professores, pragmaticamente, assumem posturas pela manutenção do diálogo.

Saliento aqui a minha posição de que é relevante considerar ou buscar compreender em que implica lidar com o processo de construção do pensamento abstrato de conceitos matemáticos:

Estudos de natureza cognitiva também apontam diferenças importantes que são observadas quando se percebe um determinado conceito como um objeto de trabalho dentro da matemática científica ou, sob outra perspectiva, como objeto de ensino dentro da prática pedagógica associada à matemática escolar. Por exemplo, **Sfard (1991) desenvolve uma análise do processo de abstração na matemática, relacionando dois aspectos de um mesmo conceito: o aspecto operacional (em que o conceito é visto como processo) e o estrutural (o conceito como objeto)**. Para ela, muitos conceitos matemáticos apresentam, dual e complementarmente, os aspectos operacional e estrutural, sendo que, no processo de formação do conceito, o aspecto operacional seria precedente e, portanto, uma base sobre a qual se construiria a sua dimensão estrutural. O nível de abstração mais elevado — correspondente ao aspecto estrutural — seria atingido através das fases de interiorização (em que se modelam mentalmente as ações correspondentes ao aspecto operacional do conceito), de condensação (em que as ações interiorizadas são coordenadas de modo que o processo é captado como um todo) e de reificação (em que o processo se transforma finalmente em objeto). Sfard fornece vários exemplos de conceitos básicos da matemática escolar — números naturais, racionais, negativos, função — que teriam passado por processos de interiorização e condensação até serem reificados como objetos matemáticos. E cita resultados de algumas de suas pesquisas, que reforçariam a tese de que, **no processo de aprendizagem, o aspecto operacional do conceito precede o estrutural**. Uma implicação dessa tese seria a **insuficiência e inadequação, para a educação escolar, de uma visão do conhecimento matemático como um sistema formal-dedutivo**, própria da matemática científica, uma vez que as definições formais representam os conceitos já no seu aspecto estrutural, ocultando, de certa forma, as etapas de interiorização e de condensação que, em princípio, facilitariam a construção da reificação. (MOREIRA, 2004, p.21-22, grifos acrescentados)

Portanto, assumo a Matemática da Escola, como um modo de produzir significados matemáticos, que primeiro, visa o aspecto operacional do processo de construção de conceitos, transitando para ao aspecto estrutural, buscando torná-los objetos, pautando-me no reconhecimento dos jogos de linguagem que permeiam nossas práticas.

### 2.3.3 – A Matemática do GeoGebra (MG)

Em alguns trechos anteriores deste texto, posso ter dado a impressão de que manuais/tutoriais ou roteiros são propostas menores, ou seja, de que são menos profundos em seu conteúdo; no entanto, preciso registrar que não penso assim. Na minha prática de construção do que considero ser, saber algo sobre o modo de falar dos comandos, ícones e manipulações dos objetos do GeoGebra, tais textos são seminiais. Ressalto, estes materiais (manuais/tutoriais ou roteiros), podem ser uma forma de se fornecer uma aproximação aos significados, que o grupo de usuários do GeoGebra, assume como legítimos quando se comunicam.

Este é o primeiro ponto que considero para caracterizar a Matemática do GeoGebra. Existe um modo diferente de produzir significados matemáticos quando se usa o GeoGebra, um jogo de linguagem comum aos professores usuários do software e de alguma forma, é possível diferenciá-lo dos jogos de linguagem já apresentados anteriormente. Nem melhor ou pior, diferente.

Pode até ser que alguém considere que o que o torna legítimo, tenha origem e fundamento na maleabilidade da linguagem da Matemática da Escola, e provavelmente o argumento tem validade. Entretanto, considero que seja também importante, notar que a Matemática da Escola existe independentemente do GeoGebra e que a Matemática do GeoGebra, permite falar de um modo que lhe é peculiar e fazer “coisas” que não eram tão disseminadas.

O que significa falar *“use o controle deslizante para notar que o coeficiente angular da equação de reta e a inclinação de seu gráfico dependem do número a”*, o que significa falar *“arraste o ponto A e note que os triângulos são semelhantes”* ?

Peço ao leitor, que tente encontrar falas como estas, sem estar no contexto de uso do GeoGebra, sem reconhecer a Matemática da GeoGebra como uma linguagem legítima aos que pretendem usá-la. Apresento algumas figuras para exemplificar, como alguém que pertence a uma comunidade do GeoGebra, procura conversar, a partir de uma construção com o software, articulando algumas possibilidades do GeoGebra e o interesse em discutir matemática.

A primeira imagem (ver Figura 12) é apenas para mostrar que as imagens na sequência, têm origem em uma comunidade virtual efetivamente ativa.

*Figura 12 - Exemplo de uma comunidade virtual interessada no GeoGebra*

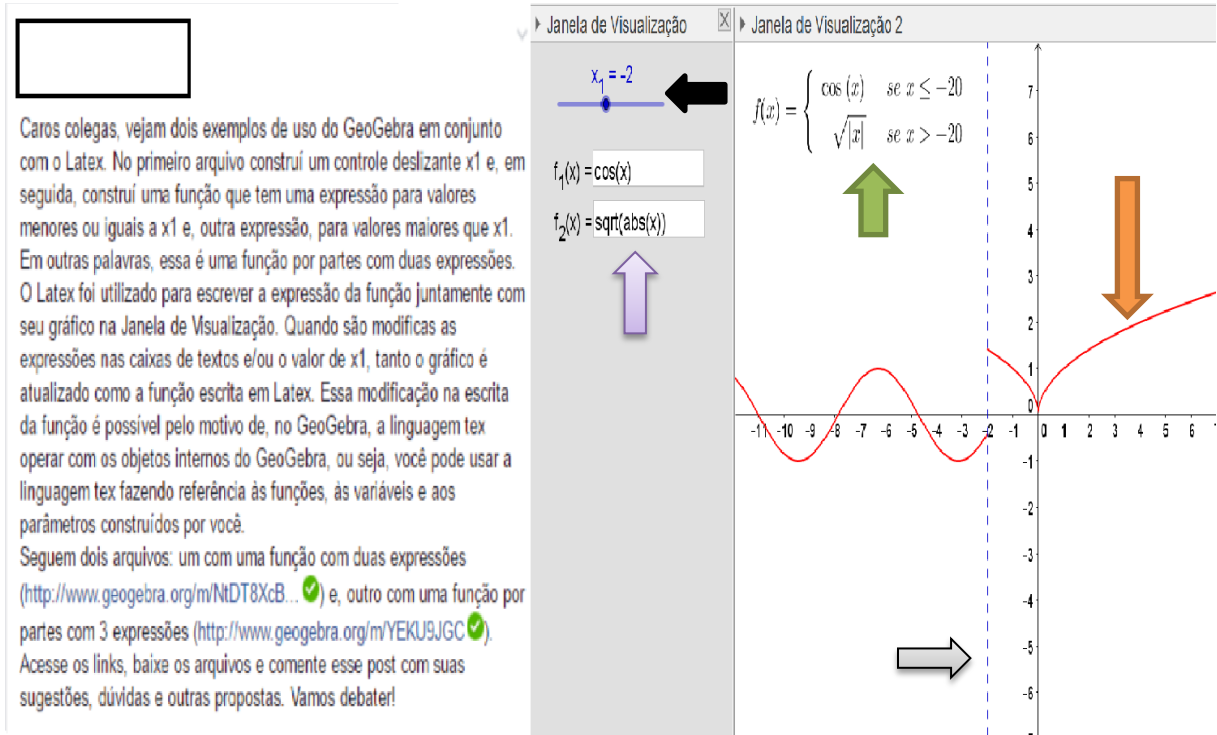


*Fonte: O autor*

O exemplo a seguir (ver Figura 13), denota, na minha interpretação, o jogo de linguagem que geralmente está nas práticas de seus membros, boa parte, professores de matemática.<sup>30</sup>

<sup>30</sup> Considerando um posicionamento que busca ter ética, optei por não identificar a pessoa que emitiu o post. Mas o grupo é público e se necessário, é possível a qualquer pessoa, entrar e verificar as profissões e interesses de cada membro, além da veracidade das publicações que denotam o que chamo de jogo de linguagem da Matemática do GeoGebra.

Figura 13 – Exemplo do que considero uso do jogo de linguagem da Matemática do GeoGebra



Fonte: O autor

Neste exemplo<sup>31</sup>, o leitor pode confirmar a presença (na parte escrita a esquerda) de alguns termos, pouco comuns a pessoas que não usam o GeoGebra. Também é possível notar as explicações do autor. Vou fazer uma leitura destas explicações, associando-as às imagens a direita. Quando ele fala de “controles deslizantes” (indicado pela seta de cor preta), entendo que também está falando da possibilidade de modificar a posição do “botão do controle deslizante” (o pequeno círculo ou objeto peculiar do GeoGebra, que está sobre o que pode ser visto como um segmento de reta ou outro objeto peculiar, ambos na cor azul), chamou-o de  $x_1$ . Definiu uma função dependente deste  $x_1$ . Tal função foi denominada como  $f(x)$  e também depende de duas outras funções. Estas outras funções foram denominadas  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  e são definidas por expressões analíticas que podem ser redefinidas, para isso, pode-se reescrevê-las (utilizando a sintaxe adequada) ao se digitar nas respectivas “caixas de texto” (indicadas pela seta de cor roxa). Caso algum usuário

<sup>31</sup> Mais uma vez eu reforço a indicação de acesso à construção dinâmica, para que o leitor tenha outra possibilidade de buscar compreender todas as relações entre os objetos da imagem. Se aceitar a sugestão, o leitor pode acessar a construção em <http://ggbm.at/NtDT8XcB>.

decida modificar as expressões nas caixas de texto, a representação algébrica (o texto caracteristicamente de cunho matemático, de cor preta e indicado pela seta de cor verde) se modifica também.

Voltando ao botão do controle deslizante; se modificada a posição deste botão, a representação gráfica de  $f(x)$  (a linha de cor vermelha indicada pela seta de cor laranja) e a linha em pontilhado (indicada pela seta de cor cinza), modificam-se simultaneamente. Para uma parte dos usuários do GeoGebra, é comum falar ou escrever dessa forma.

E para o leitor? Parece com um jogo de linguagem que fala de matemática? Sugere que os objetos do GeoGebra têm alguma relação proveitosa à didática da matemática? Muitas pessoas provavelmente se interessam por essas possibilidades. Indico alguns trabalhos que procuram explorar estas várias representações articuladas dinamicamente ((Gonçalves; Reis, 2014), (Gravina, 2015), (Gravina et al., 2012) e Kabaca (2013)). Estes trabalhos apontam basear-se nas ideias das *diferentes representações semióticas*. Uma relevante linha teórica, iniciada por Raymond Duval e que pode ser, reconhecida nos trabalhos de Duval (1995) e Duval (2006).

Preciso pedir que o leitor me perdoe por este desvio, porém, mais a frente, quando for apresentar as análises, o leitor irá notar que irei apontar o potencial semiótico destas construções dinâmicas.

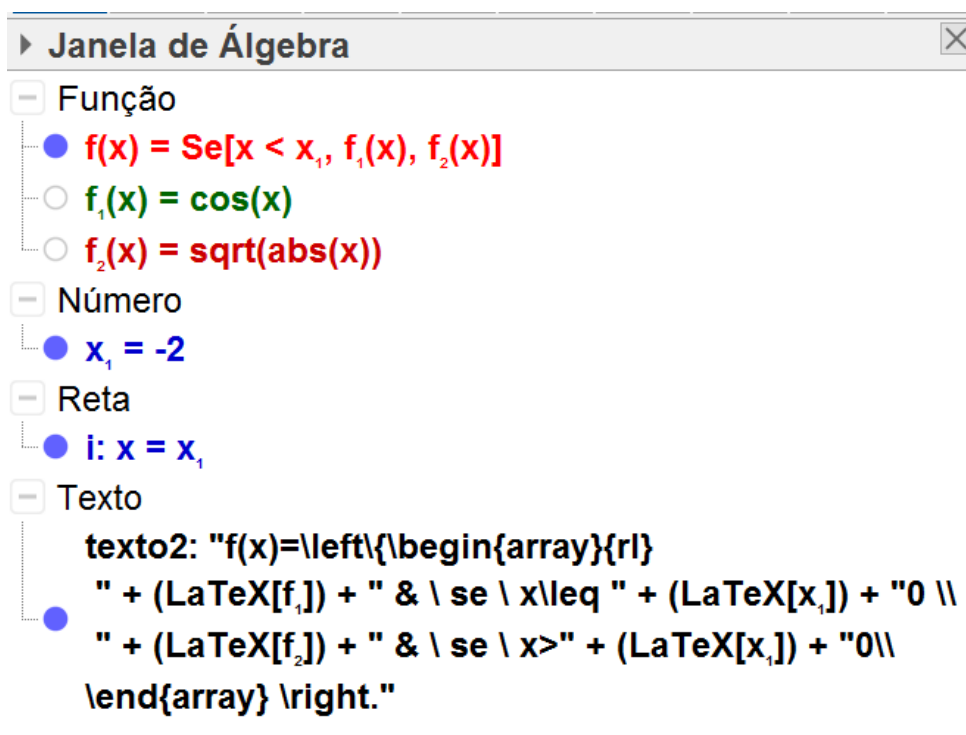
Volto a falar da construção relativa à Figura 13. O autor parece dar especial atenção à explicação sobre como o que ele chama de “*escrita da função*”, também se modifica. Ele fala em *Latex* e linguagem *tex*. Vou usar um recorte da escrita do autor, para não exigir que se volte à imagem:

*“O Latex foi utilizado para escrever a expressão da função juntamente com seu gráfico na Janela de Visualização. Quando são modificadas as expressões nas caixas de textos e/ou o valor de  $x_1$ , tanto o gráfico é atualizado como a função escrita em Latex. Essa modificação na escrita da função é possível pelo motivo de, no GeoGebra, a linguagem tex operar com os objetos internos do GeoGebra, ou seja, você pode usar a linguagem tex fazendo referência às funções, às variáveis e aos parâmetros construídos por você.”*

Preciso ressaltar, o jogo de linguagem a que me refiro, além de considerar os termos incomuns a Matemática do Matemático e a Matemática da Escola, trata de considerar os aspectos computacionais que podem ser associados às possibilidades e características dos objetos e interfaces (as diferentes janelas) do GeoGebra.

Para se construir ou compreender como esta construção dinâmica funciona, no sentido computacional, é proveitoso ler, também, outras linguagens; linguagens comuns aos computadores e particulares a alguns softwares. Neste caso, é interessante aprender a lidar com a linguagem *Latex* e a linguagem do código GeoGebra. Veja a Figura 14 a seguir:

Figura 14 - Janela da Álgebra da construção relativa à Figura 13



Fonte: O autor

Machado (1995), apresenta interessante reflexão sobre a informática na escola, apontando algo sobre o significado do computador no processo educacional. Empresto-me de algumas de suas reflexões para reforçar a argumentação que apresentei pouco antes da Figura 14:

De fato, o computador não é mais uma máquina enquanto um dispositivo que transforma energia de determinado tipo em outro, mas sim uma máquina que opera com informações, que transforma mensagens de entrada em mensagens de saída. **Não se pode, no entanto, introduzir**

**neste equipamento as informações de uma forma qualquer; é preciso saber comunicar-se com a máquina, saber interpretar suas respostas.** Em tais situações, é fundamental a quantificação da informação. Por exemplo, em qualquer programa que seja elaborado para introduzir uma mensagem no computador, o grau de dificuldade na passagem de uma instrução para outra não pode ser muito grande, não pode ser maior do que um bit, que é uma unidade para medir-se quantidade de informação. **Essa matemática da informação relaciona-se harmoniosamente com o computador, assim como a questão do controle.** O computador é um instrumento onde a necessidade do controle é natural. Ele é, então, um instrumento naturalmente cibernético e informacional, no sentido de que **a entrada e a saída são mensagens e o controle da relação entre ambas é um problema fundamental a cada momento.** (MACHADO, 1995, p.237, grifos acrescentados)

Machado (1995) é mais incisivo em afirmar que é preciso saber comunicar-se com os softwares e computadores. Eu prefiro chamar atenção, a um aspecto da Matemática do GeoGebra, suas possibilidades são potencializadas se aprendermos mais sobre as linguagens de programação que o software permite lidar. É interessante saber mais sobre a *“matemática da informação”*.

Para usar o software, não é indispensável saber mais de como ele funciona. Mas certamente, falando em buscar autonomia profissional e intelectual, isso pode ajudar.

A citação a seguir, é uma tentativa de articulação entre as ideias de Machado (1995) e as minhas. Peço que se note que já se passaram 21 anos desde a produção deste autor. No subitem da obra original, o autor estava falando das possibilidades que a formação de redes entre escolas e centros especializados; produtores e disseminadores de materiais didático pedagógicos. Esta foi uma proposta muito comum (e criticada) em políticas públicas de décadas passadas (cf. Straub, 2012 e Valente; Almeida, 1997, *passim*). Vejamos uma citação que aponta questões pertinentes e correlatas:

Computadores: democratização x controle

**A presença de computadores na escola está frequentemente associada à democratização do acesso ao conhecimento [...] há que se considerar, no entanto, certas características de controle intrinsecamente relacionadas.** [...] a do controle que essa forma de utilização possibilita. [...] uma rede tem um lado interessante e um lado muito delicado, muito desinteressante. É claro que, **teoricamente, havendo uma tal rede disponível, qualquer professor pode ser simultaneamente usuário e produtor de materiais.** Teoricamente, insistimos, o professor pode fazer circular sua própria produção na rede. Mas lembremos que o professor também pode produzir seu próprio livro didático e, no entanto, vive frequentemente sob o jugo de um livro determinado por condições objetivas de mercado. Nunca foi proibido ao professor produzir seu próprio



material, mas as circunstâncias em que trabalha são de tal ordem que ele há muito se transformou em **um usuário até certo ponto acrítico** do livro. **Em princípio**, isso **não é inevitável** em uma rede de computadores, mas o risco parece-nos muito maior ainda do que em relação ao livro didático. Maior no seguinte sentido: **a produção de materiais de qualidade** para circular nesse tipo de rede é muito mais complexa, para o professor, do que a produção de um livro didático; **teoricamente, exige muito mais competência**. Então, apesar de, em princípio, haver liberdade, na prática, o professor pode tornar-se muito mais dependente da rede do que o é em relação ao livro. **É necessário prestar-se atenção a esse ponto**, pois normalmente o único lado que aparece nessa discussão é o da democratização de acesso ao saber. (MACHADO, 1995, p.244-246, grifos acrescentados)

Não estou fazendo um paralelo entre a rede que Machado (1995) fala e a comunidade do GeoGebra. A produção em um grupo virtual como a que apontei se dá de forma descentralizada, rica em diferenças e propostas de construções. Mas considero que ele apontou uma crítica sobre a construção da autonomia docente, algo que considero de atemporal relevância a formação de professores. E devo lembrar ao leitor, minhas intenções arremetem-se a aproximação de minha pesquisa e reflexões, ao contexto institucional da formação inicial de professores.

Afirmo pouco antes, é interessante saber mais sobre a *“matemática da informação”*. E outro prolífico pesquisador da Informática na Educação também já o disse, ao seu modo:

[...] os softwares utilizados podem ser os softwares abertos de uso geral, como as linguagens de programação, sistemas de autoria de multimídia, ou softwares como processadores de texto, software para criação e manutenção de banco de dados. Em todos esses casos, o aluno usa o computador para resolver problemas ou realizar tarefas como desenhar, escrever, calcular etc. **A construção do conhecimento advém do fato de o aluno ter de buscar novos conteúdos e estratégias para incrementar o nível de conhecimento que já dispõe sobre o assunto que está sendo tratado via computador** (VALENTE, 1999, p. 12, grifos acrescentados).

Para minha prática profissional interessa considerar que o aluno é um futuro professor de matemática. Daí apontar a relevância de se caracterizar o aspecto computacional, o aspecto de diferentes linguagens de programação como algo interessante. Interesse-me por estimular a autonomia dos discentes. Autonomia que os roteiros dificultam. Entendo que roteiros, servem para aproximar o usuário iniciante. Mas não acredito que permitam ler e pensar sobre a Matemática do GeoGebra. Também considero que manuais, não dão conta de incitar profundas aprendizagens.

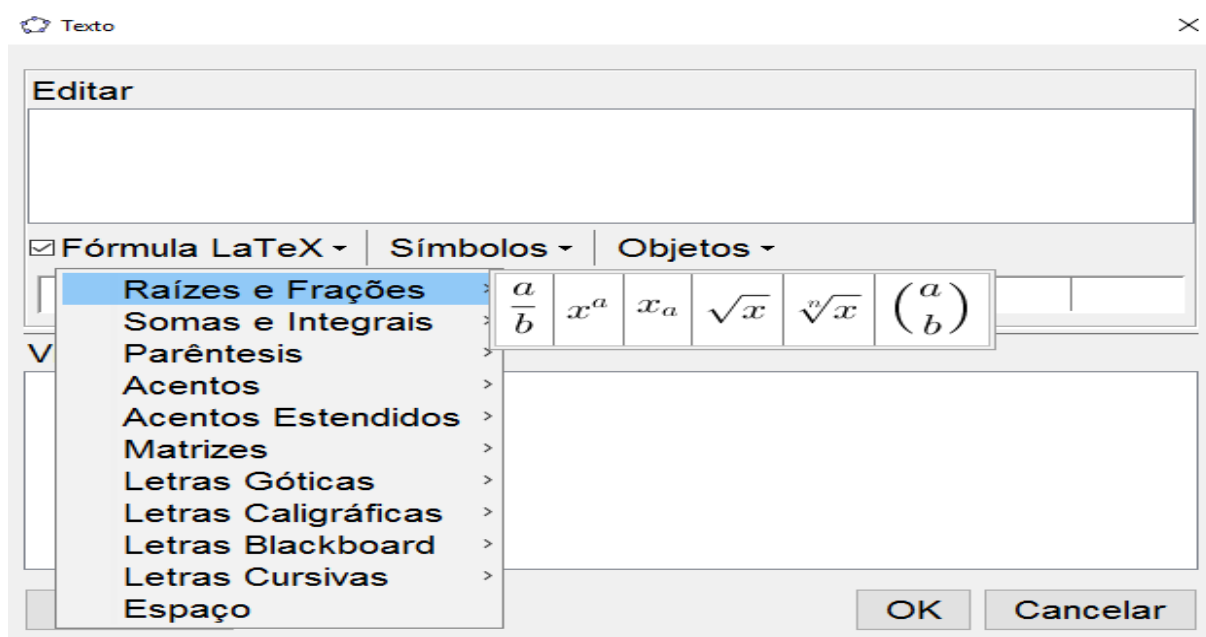
Não é incomum, na literatura correlata ao GeoGebra, vê-lo definido como um software de Geometria Dinâmica. Na seção 2.1 apontei várias funcionalidades do GeoGebra. Várias delas, não estão presentes em softwares similarmente classificados como de Geometria Dinâmica. No sítio do IGI, podemos encontrar:

O que é o GeoGebra?<sup>32</sup>

**O GeoGebra é um software de matemática dinâmica** para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote **fácil de se usar**. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. (INSTITUTE..., 2016, grifos acrescentados)

Suponho que o leitor concorde que a palavra “fácil” é relativa. Voltando ao que se vê na Figura 14, alguém poderia dizer que é difícil ler aquela linguagem. Entretanto, os desenvolvedores têm se aproveitado de alguns recursos de interface gráfica, para “facilitar” as aproximações das notações matemáticas, comuns as salas de aula, à linguagem do código GeoGebra e ao uso da linguagem *Latex*. Para textos em *Latex*, por exemplo, usam-se macros que permitem pré-visualizar a notação pretendida (ver Figura 15):

Figura 15 - Exemplo de uso de macro para construir textos em *Latex*

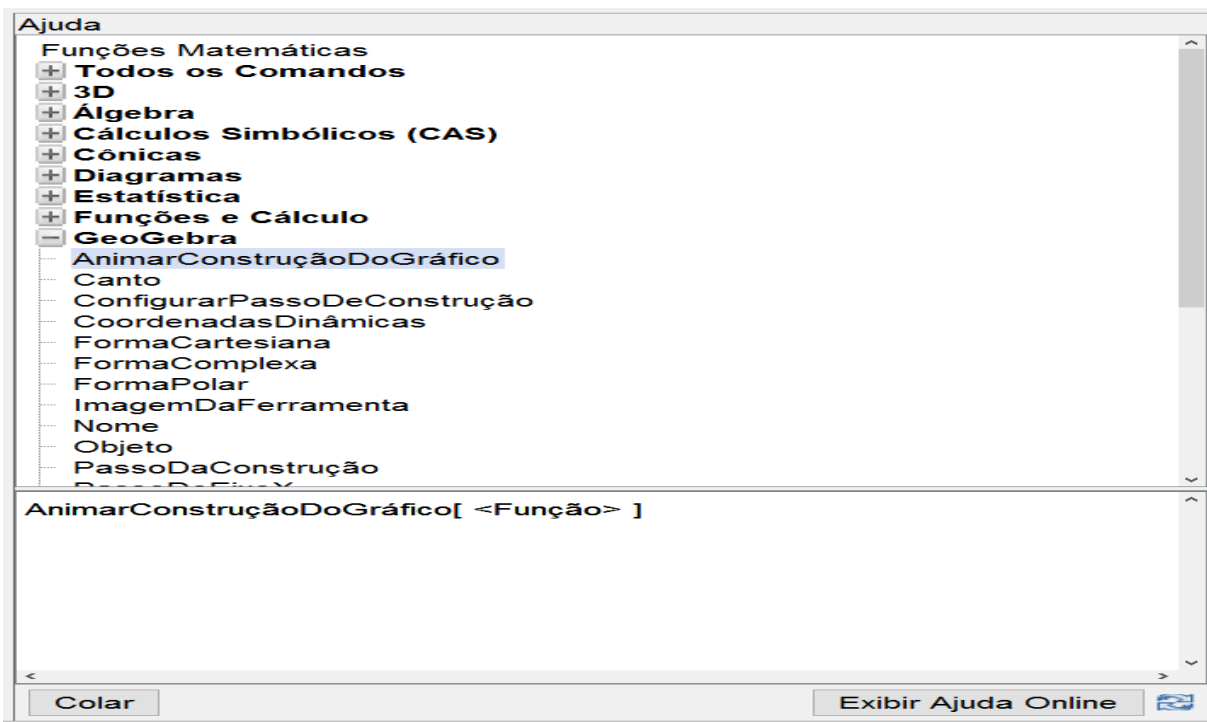


Fonte: O autor

<sup>32</sup> Considero que Dantas (2016) apresentou reflexões bem mais interessantes sobre esta pergunta. Recomendo fortemente a leitura.

E também existe uma forma de acessar a sintaxe para cada comando peculiar do software (ver Figura 16).

Figura 16 - Tela de Ajuda para os comandos do GeoGebra



Fonte: O autor

Será que isto basta?

Nesta possível construção do conhecimento matemático, mediada pelo computador, e em conjunto com softwares matemáticos, surge a possibilidade de o estudante atribuir novos significados advindos de suas reflexões sobre as atividades desenvolvidas, além disso, é preciso compreender algumas limitações desses recursos tecnológicos.

Por exemplo, como será que os computadores representam os números?

Como será que as operações aritméticas funcionam para os computadores?

Será que estas perguntas poderiam contribuir para caracterizarmos um pouco mais a Matemática do GeoGebra?

Diferentemente da Matemática do Matemático, a Matemática do GeoGebra utiliza uma representação numérica limitada e discreta. O que é bem diferente de se considerar um sistema numérico contínuo. Tentarei dar uma breve explicação sobre esta diferença.

Um computador manipula e armazena valores numéricos em formato binário. A quantidade de *bits* define os valores numéricos a serem representados.

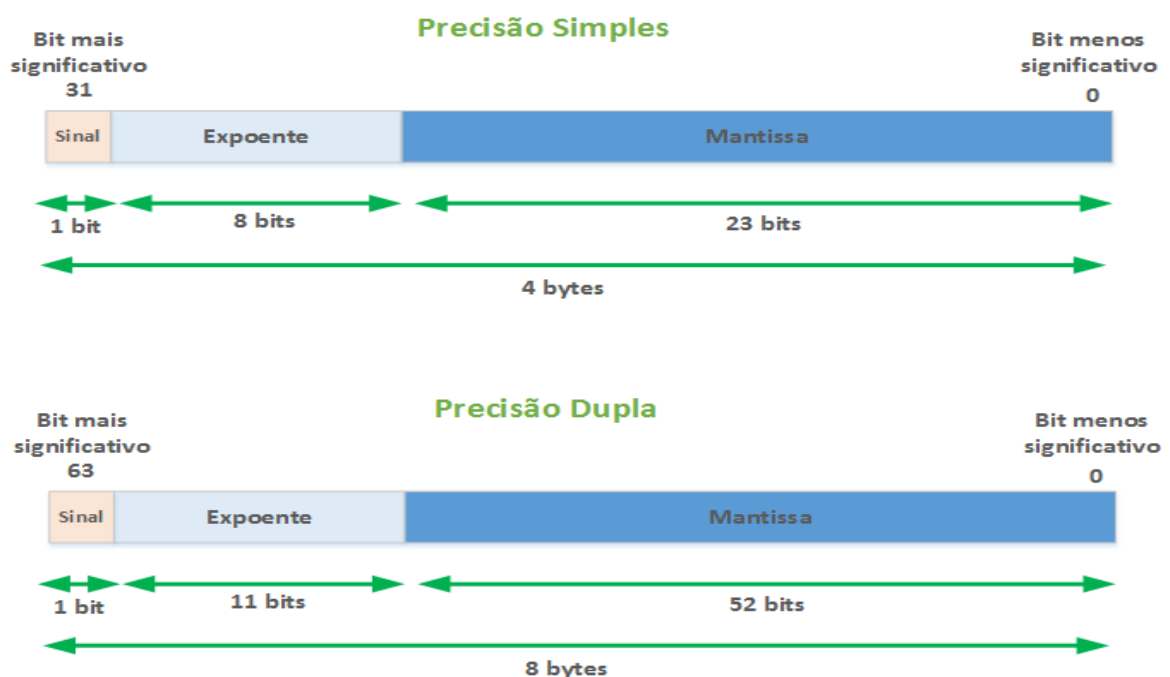
Os números inteiros podem ser representados por uma base fixa  $\beta = 2$ . Para  $n > 0$ , qualquer número inteiro  $n$  pode ser representado como:

$$n = \pm(n_0\beta^0 + n_1\beta^1 + n_2\beta^2 + \dots + n_k\beta^k) \text{ onde } n_i, i = 0, -1, -2, \dots, -k.$$

A representação de números positivos e números negativos no computador requer um *bit* de sinal (+ ou -). *Bit* 1 para negativo e *bit* 0 para positivo.

A representação dos números reais utiliza o formato de ponto flutuante<sup>33</sup> com  $m * \beta^e$  onde “m” é a mantissa, “ $\beta$ ” a base numérica (base 2), “e” o expoente. Nos computadores atuais utiliza-se o padrão IEEE 754 (ver Figura 17), com 32 *bits* ou 4 *bytes* para precisão simples e 64 *bits* ou 8 *bytes* para precisão dupla.

Figura 17 - IEEE 754: Notação de ponto flutuante com 32 e 64 bits



Fonte: IEEE 754

Linguagens de computação como C, C++ e Java utilizam o padrão IEEE 754 por intermédio dos tipos de dados fundamentais numérico *char*, *short*, *int*, *long* e ponto flutuante *float* e *double*. Uma vez que o software GeoGebra foi construído com

<sup>33</sup> O seguinte endereço é recomendado pelos desenvolvedores do GeoGebra:  
[http://docs.oracle.com/cd/E19957-01/806-3568/ncg\\_goldberg.html](http://docs.oracle.com/cd/E19957-01/806-3568/ncg_goldberg.html)

a linguagem Java, segue e utiliza os padrões definidos na norma IEEE 754.

Qualquer sistema de numeração realiza operações como somas, subtrações, multiplicações e divisões. Diferentes técnicas ou algoritmos podem ser empregados para realizar tais cálculos. Entretanto, é importante considerar e refletir sobre alguns problemas que podem ocorrer nos cálculos executados pelo computador. Por exemplo, os efeitos de arredondamento nas operações, que podem levar a perda de dados. Operações entre números muito grandes e números muito pequenos levam ao cancelamento de dados e/ou propagação de erros e instabilidade numérica, levando a acúmulos de erros e no mal condicionamento do problema, onde uma ínfima variação nos dados de entrada pode levar a soluções completamente diferentes. Muitas vezes, estes problemas passam despercebidos, não são observados ou são simplesmente negligenciados pelo usuário.

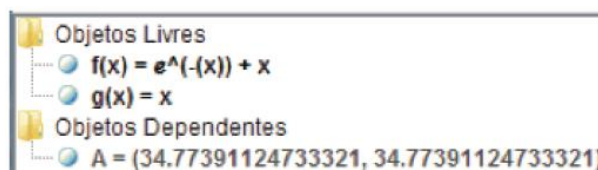
A Matemática do GeoGebra também pode ser caracterizada por este aspecto.

Sua aritmética é diferente e apresenta limitações com as quais podemos nos deparar.

Vou agora apresentar uma situação com um limite associado a este aspecto. Peço ao leitor que considere a situação com atenção. Este exemplo, foi utilizado como o *episódio 1*, constante do roteiro da entrevista semiestruturada que efetuei com sete professores de matemática e que foram considerados experientes em ensinar matemática e no uso do GeoGebra.

Na Revista do Professor de Matemática nº 70, encontramos a seguinte situação:

O gráfico da função  $y = e^{-x} + x$  intercepta a reta  $y = x$ ?  
 Uma aluna que estava procurando assíntotas da função  $y = e^{-x} + x$  e encontrou o resultado correto,  $y = x$ , e perguntou-me se o gráfico da função interceptava o gráfico da reta. Eu disse que não e ela respondeu que o *GeoGebra* (ver RPM 67 e RPM 68) estava dando resposta afirmativa. Então fui com ela ao computador e entrei, no Campo de Entrada, com os seguintes comandos:  
 $f(x) = \exp(-x) + x$  <Enter>  
 $g(x) = x$  <Enter>  
 Interseção[f,g] <Enter>  
 O *software* "disse" que essas curvas possuem uma interseção no ponto (34,7739; 34,7739). A figura a seguir mostra a Janela de Álgebra do GeoGebra 3.2 em que o ponto A é considerado como interseção entre as duas curvas.



Obviamente, a equação  $y = e^{-x} + x = x$  não possui solução real, pois caso contrário teríamos  $e^{-x} + x = 0$  para algum  $x$  real, o que não ocorre. Por que o software acusa interseção? Na verdade, este exemplo, ele está programado para trabalhar com 15 casas após a vírgula. Como a função  $y = e^{-x} + x$  tende a zero rapidamente, o número de casas com valor nulo ultrapassa as 15 com as quais ele está trabalhando, e assim ele "pensa" que as curvas se encontram. Observamos que, já para  $x = 35$ , temos  $e^{-35} = 6,3051167601469892 \times 10^{-16}$ . (ARAÚJO, 2004, p.50)

O autor da citação acima dá uma explicação que pode ser legitimada no jogo de linguagem da ME e parece ter certeza da resposta correta, devido a um significado legítimo à MM. Entretanto, se olharmos com atenção, o final da citação mostra que o autor aponta que nesta situação, o software estava precisando operar com um número ínfimo.

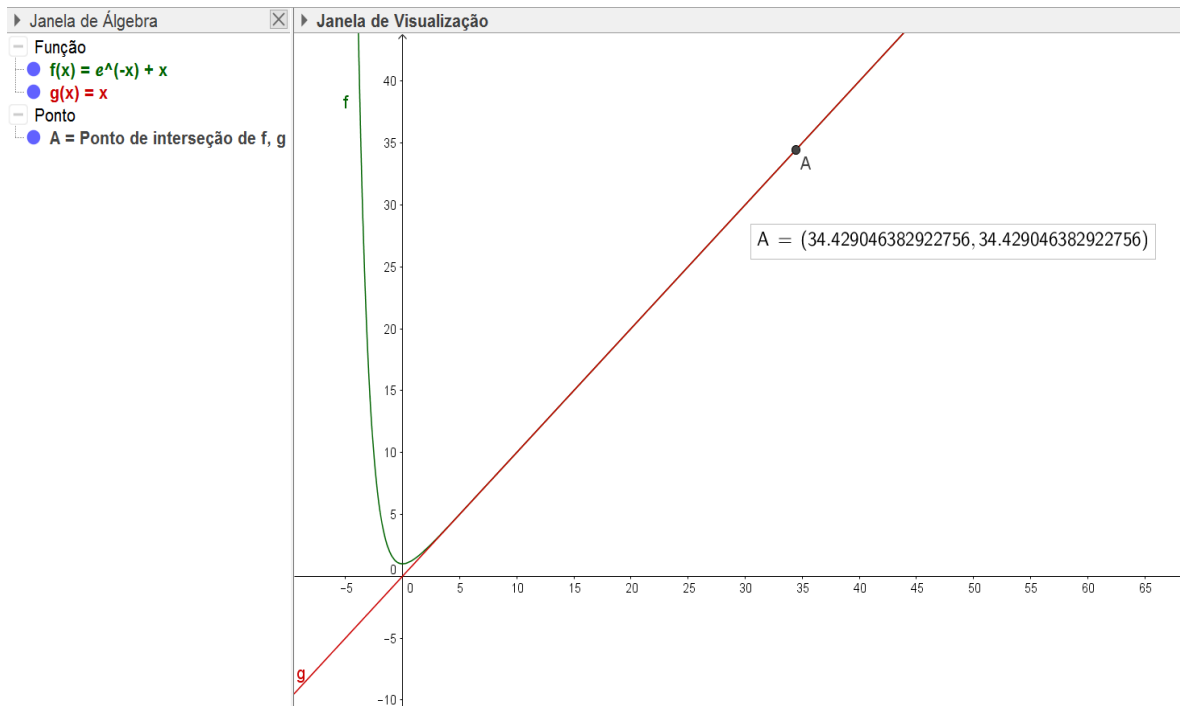
Desse modo, podemos ver um bom exemplo de como a aritmética do ponto flutuante com dupla precisão, um aspecto computacional da MG, também tem limites para representar e operar com os números reais.

Note que uma estudante, mesmo depois de ter encontrado uma resposta legítima na MM, acabou ficando em dúvida, e isso se deu por se tentar validar ou comparar o resultado com a MG. Considero este exemplo<sup>34</sup>, uma boa forma de reforçar minha suposição de que mais usuários precisam considerar diferentes aspectos da MG.

Mesmo na versão atual, o GeoGebra ainda apresenta um resultado muito similar na Janela de Álgebra e na Janela de Visualização (ver Figura 18).

<sup>34</sup> O leitor irá também confirmar que nas entrevistas, o episódio 1 causou grande surpresa.

Figura 18- Ponto de intersecção que evidencia um limite computacional da MG



Fonte: O autor

Apresento agora, outro importante exemplo, outro limite do aspecto computacional da MG. Peço atenção especial a este exemplo também, o mesmo foi usado como o *episódio 2*, no roteiro de entrevista semiestruturada.

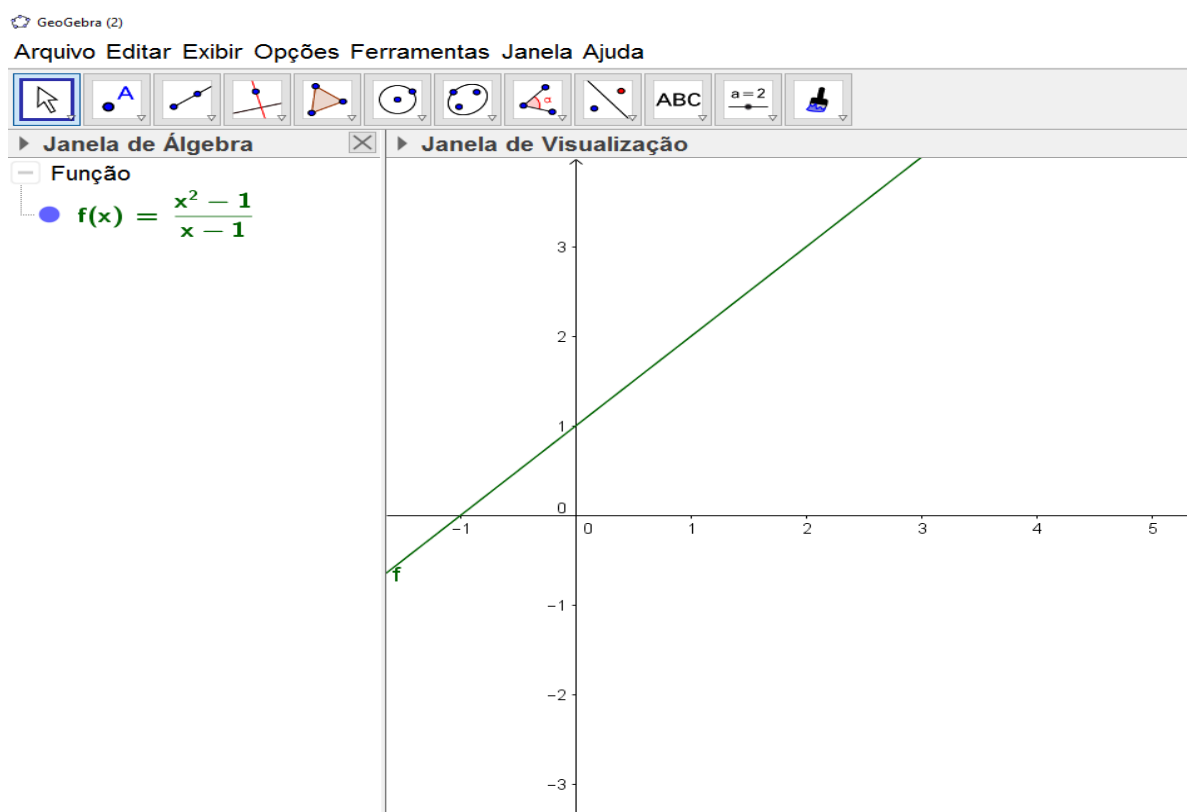
Eu trabalho com diferentes softwares matemáticos com fins educacionais e sempre tento comparar seus resultados, exercitando minha compreensão sobre o que são capazes de fazer. Certa vez, depois de dar uma aula de Cálculo Diferencial e Integral, pedi aos estudantes que praticassem algumas resoluções de exercícios. Parte do enunciado de um destes exercícios pedia que se fizesse o gráfico da seguinte expressão:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Diversos estudantes já estavam começando a se habituar a usar o GeoGebra. Dois deles me procuraram depois de alguns dias, com a seguinte pergunta: *Professor, será que o GeoGebra pode errar? Fizemos um gráfico nele, e o resultado não parece com os gráficos que o senhor mostrou em sala. Não mostram que o gráfico da função deve estar com um ponto faltando.*

Os estudantes estavam esperando que o GeoGebra mostrasse um gráfico que geralmente apresentamos nos quadros negros de nossas aulas. Na ME estes gráficos são significados matemáticos legítimos. Pode até parecer muita ingenuidade destes estudantes, mas será que outros usuários do GeoGebra, também não esperariam que o software considerasse uma intenção de cunho didático? Geralmente os professores ressaltam o tal ponto faltando para evidenciar que a função não se define naquele ponto. Como o leitor verá nos resultados das entrevistas, mesmo usuários experientes se surpreendem ao confirmar que o software, que intenta ser uma ferramenta didática, não apresenta uma representação gráfica equivalente. Espero com este exemplo, mostrar que para os professores de matemática, é preciso discutir-se que as imagens geradas por softwares como o GeoGebra, não consideram a mesma lógica. Este é outro aspecto que deve buscar-se considerar sobre a MG. É relevante que discutamos como estas imagens são geradas. Na Figura 19 podemos ver um gráfico que o GeoGebra gera se dermos entrada com a expressão que apresentei pouco acima:

*Figura 19 - Exemplo de gráfico do GeoGebra que não corresponde a ME*



Fonte: O autor



Portanto, assumo a Matemática do GeoGebra, como outra forma de produzir significados matemáticos, que são legítimos dentro de outro jogo de linguagem.

No entanto, espero ter dado exemplos suficientes para mostrar que além das possibilidades, há limites, e os mesmos são relevantes ao ensino de matemática.

Finalizo apontando que para usar o GeoGebra, é importante notar-se que o trânsito entre diferentes modos de se produzir significados matemáticos, parecem indissociáveis.

### CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA

A pesquisa realizada teve como embasamento teórico os trabalhos de diversos pesquisadores. E sendo um procedimento formal, necessita de pensamento reflexivo acerca da realidade em questão, exigindo um tratamento científico para trilhar o conhecimento da realidade ou descobrir verdades parciais (LAKATOS; MARCONI, 1993).

Segundo Silva e Menezes (2001, p. 20) a pesquisa é qualitativa quando a forma de abordar o problema considerar:

[...] que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicos no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores que tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem (SILVA; MENEZES, 2001, p. 20).

A tentativa de compreensão mais detalhada dos significados e características situacionais são características da pesquisa qualitativa. Esse tipo de pesquisa é rico em dados descritivos que o pesquisador obtém no contato direto com os sujeitos da pesquisa, com o ambiente e com as conversas, preocupando-se em retratar as perspectivas dos participantes. Além disso, essa abordagem de pesquisa privilegia a compreensão dos comportamentos, dos valores, das crenças, das representações, das opiniões e das atitudes. O pesquisador investiga o sujeito com o intuito de compreender suas experiências ou como eles as interpretam e o modo como se estrutura o ambiente que convivem (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Em função destas características apresentadas por Silva e Menezes (2001) e Bogdan e Biklen (1994) considero esta pesquisa como de cunho qualitativo.

A estratégia de pesquisa que utilizei foi o estudo de caso qualitativo, pois segundo Platt (1992) citado por Godoy (2010), esse tipo de estudo tem a característica fundamental de envolver a busca por significados que são atribuídas pelos sujeitos às suas vivências e experiências pessoais.

Segundo Stake (1994) citado por Godoy (2010):

[...] quando falamos em estudo de caso, não estamos nos referindo a uma escolha metodológica, mas, fundamentalmente, à escolha de um determinado objeto a ser estudado, que pode ser uma pessoa, um programa, uma instituição, uma empresa ou determinado grupo de pessoas que compartilham o mesmo ambiente e a mesma experiência (STAKE, 1994 *apud* GODOY, 2010, p. 119).

Definida a escolha pela estratégia de um estudo de caso qualitativo, optei por escolher como sujeitos da pesquisa, professores licenciados em Matemática e que apresentassem características que me permitissem considerá-los experientes no uso do GeoGebra. Passei alguns meses pesquisando perfis e produções de vários perfis. Nesta etapa da pesquisa foram selecionados doze professores de matemática que atendiam os critérios que estabeleci. Entrei em contato com eles e os questioneei se podiam me ajudar na pesquisa, sete deles aceitaram participar.

As características dos entrevistados segundo os critérios estabelecidos para selecionar os sujeitos da pesquisa são apresentadas no Quadro 2.

Para a etapa da coleta de dados, elaborei um roteiro protótipo de entrevista semiestruturada e o submeti para ser convalidado por especialistas no trabalho com entrevistas acadêmicas. Após realizar as revisões sugeridas pelos especialistas, acabei por formalizar um roteiro de entrevista (ver Apêndice A) com um conjunto amplo de perguntas direcionadas a mais itens dos que esta pesquisa procurou lidar.

A intenção principal desta estratégia foi a de aproveitar as informações de outras montas para trabalhos futuros.

Considerando o roteiro maior, pedi aos entrevistados para falarem do processo de adoção do software, motivação, objetivos, usos, modos de construção de objetos do GeoGebra, suas práticas e algumas concepções sobre matemática, escola, ensino, aprendizagem, avaliação e formação de professores. Em meio a quarenta e uma questões direcionadoras, para esta pesquisa, adotei um sub roteiro, relativo ao item 16 do roteiro maior.

Quadro 2 - Caracterização dos entrevistados segundo os critérios estabelecidos

| Crítérios  | P1   | P2  | P3  | P4   | P5   | P6  | P7   |
|--|--|---|---|--|--|---|--|
| <b>Títulos de Graduação</b>  | Licenciatura Plena em Matemática   | Licenciatura Plena em Matemática  | Licenciatura em Matemática e Bacharelado  | Licenciatura Plena em Matemática   | Licenciatura Plena em Matemática   | Licenciatura Plena em Matemática                        | Licenciatura Plena em Matemática   |
| <b>Títulos de Pós-graduação</b>  | Mestrado em Matemática Aplicada e Doutorado em Matemática  | Especialização, Mestrado e Doutorado em Matemática                                  | 4 Especializações em Informática Educativa, Mestrado e Doutorado em matemática              | Mestrado em Educação Matemática  | Mestrado e Doutorado em Matemática   | ---   | Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática e Doutorado em Educação Matemática                        |
| <b>Tempo de experiência docente</b>  | 31 anos  | 20 anos   | 33 anos   | 6 anos   | 26 anos  | 20 anos   | 16 anos  |
| <b>Níveis escolares em atuou</b>   | Ensino Médio e Superior  | Ensino Fundamental, Médio e Superior  | Ensino Fundamental, Médio e Superior  | Ensino Fundamental e Médio   | Ensino Superior  | Ensino Fundamental e Médio                              | Ensino Médio e Superior  |
| <b>Onde atua no momento</b>  | Universidade Pública   | Universidade Pública  | Universidade Privada  | Universidade Pública   | Universidade Pública   | Escolas Públicas e privadas.                            | Universidade Pública   |
| <b>Tempo de experiência com o GeoGebra</b>   | 7 anos   | 8 anos  | 7 anos  | 4 anos   | 13 anos  | 6 anos  | 11 anos  |
| <b>Usos profissionais do GeoGebra</b>  | Atividades de ensino para professores em formação inicial nas modalidades presencial e à distância | Atividades de ensino para professores em formação inicial na modalidade presencial. | Atividades de ensino para professores em formação de Pós-Graduação na modalidade presencial | Atividades de ensino para professores em formação continuada na modalidade à distância | Atividades de ensino para professores em formação inicial e continuada na modalidade presencial e à distância. | Atividades de ensino para estudantes da Educação Básica | Atividades de ensino para professores em formação inicial e continuada na modalidade presencial e à distância. |
| <b>Disponibiliza construções no GeoGebraTube ?</b>   | Sim  | Sim   | Sim   | Sim  | Sim  | Sim   | Sim  |
| <b>Pertence a um Instituto GeoGebra brasileiro</b>   | Sim  | Não   | Sim   | Não  | Sim  | Não   | Sim  |
| <b>Pertence a grupo de pesquisa ou extensão com linha, trabalho ou objeto de estudo correlato ao GeoGebra?</b> | Sim  | Sim   | Sim   | Sim  | Sim  | Não   | Sim  |
| <b>Já orientou ou orienta pesquisas correlatas ao GeoGebra?</b>  | Sim  | Sim   | Sim   | Não  | Sim  | Não   | Sim  |
| <b>Já avaliou pesquisas correlatas ao GeoGebra?</b>  | Sim  | Sim   | Sim   | Sim  | Sim  | Não   | Sim  |
| <b>Já participou de algum projeto de pesquisa ou extensão correlato ao GeoGebra?</b>                           | Sim  | Sim   | Sim   | Sim  | Sim  | Sim   | Sim  |
| <b>Já participou de algum curso correlato ao GeoGebra?</b>   | Sim  | Sim   | Sim   | Sim  | Sim  | Sim   | Sim  |
| <b>Já ofertou algum curso correlato ao GeoGebra?</b>   | Sim  | Sim   | Sim   | Sim  | Sim  | Sim   | Sim  |
| <b>É autor de textos acadêmicos correlatos ao GeoGebra?</b>  | Sim  | Sim   | Sim   | Sim  | Sim  | Não   | Sim  |

Fonte: O autor

O sub roteiro constituiu-se da seguinte forma:

1º passo - Pergunta-se: Qual o seu posicionamento sobre a necessidade de se entender o processo para obtenção de um objeto gráfico, resultado numérico ou resultado algébrico com o GeoGebra?

2º passo – Pede-se ao entrevistado para que, considerando as expressões analíticas das funções  $f(x) = e^{-x} + x$  e  $g(x) = x$  (peço que o leitor se lembre que apresentamos tal situação quase ao final da seção 2.3.3 e que a denominamos como *episódio 1*), responda se há algum ponto de intersecção entre as curvas dos gráficos referentes a cada função.

3º passo – Pede-se para o entrevistado verificar com o apoio do GeoGebra, se há ponto de intersecção para estas funções.

4º passo – Pede-se para o entrevistado que responda como lidaria com a possível contradição entre a resposta apresentada no 2º passo e a resposta que o software fornece. Em caso de não contradição entre as respostas, pede-se ao entrevistado para que responda como lidaria com a situação se precisasse explicar o resultado do software.

5º passo – Pede-se ao entrevistado que responda qual o gráfico que ele espera que o GeoGebra forneça para a expressão  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ . (peço que o leitor se lembre que também apresentamos esta situação ao final da seção 2.3.3 e que a denominamos como *episódio 2*)

6º passo – Pede-se ao entrevistado que responda qual seria o gráfico que ele espera que o GeoGebra apresente.

7º passo – Pede-se ao entrevistado que construa o gráfico com o apoio do software.

8º passo – Pede-se para o entrevistado que responda como lidaria com a possível contradição entre a resposta apresentada no 7º passo e a resposta que o software fornece. Em caso de não contradição entre as respostas, pede-se ao entrevistado para que responda como lidaria com a situação se precisasse explicar o resultado do software.

É importante apontar que se registrou todas as situações relativas ao roteiro maior e do sub roteiro. Registrou-se o áudio das falas, vídeo das atitudes comportamentais e o vídeo da tela de computador (com o apoio do software CAMTASIA<sup>35</sup>) onde ocorreram as manipulações do GeoGebra.

Essa forma de conduzir a coleta de dados teve como objetivo, coletar as descrições, conversas e diálogos, bem como seus apontamentos por escrito e ou manipulação do GeoGebra, com o intuito de preservar os dados a serem analisados (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Para que essa coleta de dados oferecesse os subsídios necessários, para a análise que apresento posteriormente, foi indispensável que, no decorrer da entrevista, fossem formuladas perguntas complementares. Neste sentido Garnica (2004) orienta que é necessário selecionar um grupo de participantes, que sejam considerados significativos para o tema da pesquisa, em seguida contatá-los. A partir do momento que esses sujeitos aceitem o seu convite, o próximo passo é entrevistá-los utilizando um roteiro previamente determinado, mas que seja aberto o suficiente para aproveitar as várias experiências relatadas por eles.

Em dia e horário pré-estabelecido, viajei até as respectivas cidades e locais<sup>36</sup>, definidos por cada entrevistado. Dessa forma, o ambiente utilizado para a realização de cada entrevista, foi familiar aos entrevistados. Vale destacar que, antes do início de cada entrevista, foi apresentado o termo de consentimento livre e esclarecido para cada um dos entrevistados e todos concordaram e assinaram.

O fato de existir um roteiro de entrevista elaborado previamente, não comprometeu a liberdade entre entrevistado e entrevistador. As orientações de Bogdan e Biklen (1994) foram utilizadas para a sua realização, sendo conduzida se assemelhando “a uma conversa de amigos”, criando um ambiente que encorajasse “o sujeito a falar sobre uma área de interesse” e com isso o entrevistador tem a oportunidade de explorar mais profundamente os temas em questão, ressaltando o caráter qualitativo.

Preparei os dados para coletar as informações. Tratei cada vídeo e respectivo

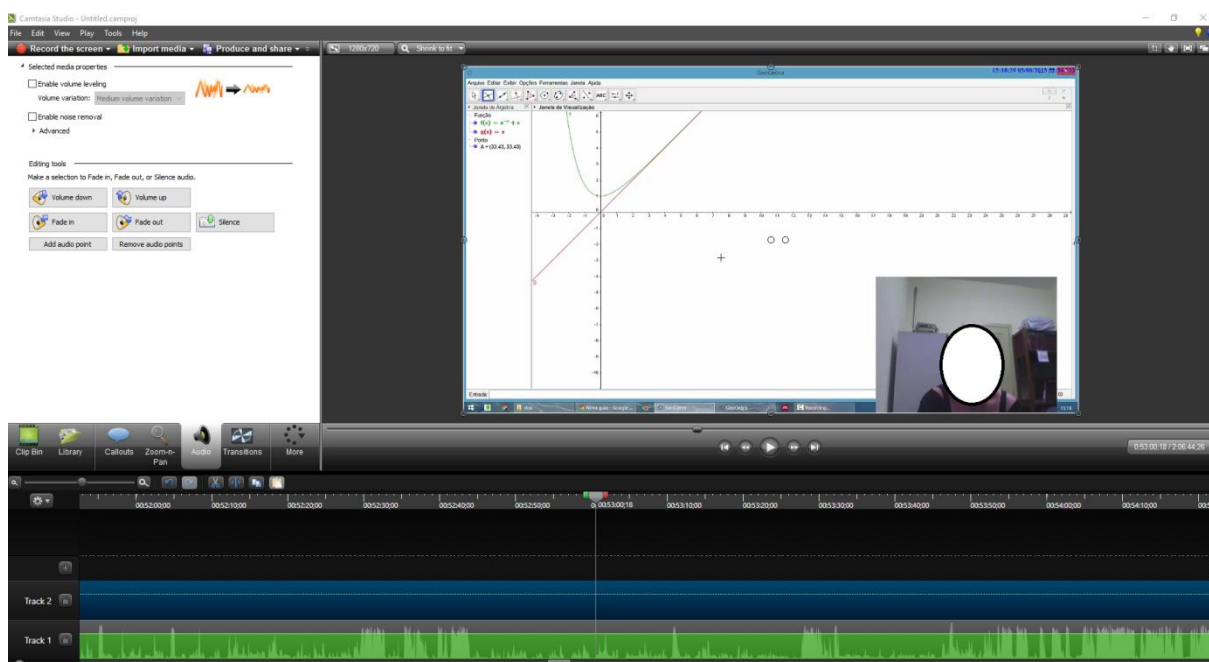
---

<sup>35</sup> Para maiores informações sugiro o acesso a <https://www.techsmith.com/camtasia.html>. Utilizei uma versão de demonstração, ofertada para trinta dias.

<sup>36</sup> A fim de indicar a diversidade dos entrevistados, registro as cidades visitadas: Rio Claro/SP, São Paulo/SP, Rio de Janeiro/RJ, Belo Horizonte/MG, Uberlândia/MG e Santa Maria/RS.

áudio, editando-os e sincronizando-os com o apoio do software CAMTASIA, uma ferramenta profissional para gravar telas de computadores e tratamento de áudio e vídeo (ver Figura 20).

Figura 20 - Exemplo de tratamento de entrevista com o CAMTASIA



Fonte: O autor

Na primeira etapa do tratamento dos dados, fiz a primeira codificação dos vídeos e áudios de cada entrevista (Moraes e Galiazzi, 2007). Para isso, codifiquei cada entrevista com o apoio do software MAXQDA<sup>37</sup> (ver Figura 21), uma ferramenta profissional que permite tratar qualitativamente diferentes materiais como áudio, vídeo, imagem e textos. A primeira codificação se deu separando os momentos da entrevista, associando-os a cada resposta do roteiro completo e do sub roteiro. Nesta etapa inicial, busquei aproximar-me do contexto geral de cada entrevista.

Na próxima etapa, realizei as transcrições<sup>38</sup> (com o apoio do software MAXQDA) da parte relativa ao sub roteiro, para cada entrevista. Após diversas leituras, de forma cuidadosa, fui me habituando com o que emergiu destas falas.

Após realizar diversos ensaios de análises destas transcrições, constituí o hábito de buscar integrar-me aos diferentes significados matemáticos que estes

<sup>37</sup> Para maiores informações sugiro o acesso a <http://www.maxqda.com/>. Comprei uma licença para estudantes com validade de seis meses.

<sup>38</sup> Essas transcrições estão nos anexos A, B, C, D, E, F e G.

entrevistados apontaram. Esse fato me levou a trabalhar com um estudo múltiplo de caso.

Figura 21 - Tela do MAXQDA com exemplo de entrevista codificada

The screenshot displays the MAXQDA software interface. On the left, there is a 'Sistema de Códigos' (Code System) pane with a tree view showing categories like 'entrevistas', 'percepção se existe ou não mg', and 'percepção se existe ou não mm'. The main window shows a transcript of an interview with a timeline at the bottom. Various segments of the text are highlighted with colored markers corresponding to the codes in the system. On the right, there is a video player showing a recording of the interview, with a circular inset showing a close-up of the speaker's face. The video player includes a progress bar and a volume control icon.

Fonte: O autor

De acordo com Merriam (1988) citado por Godoy (2010), dependendo da natureza dos seus objetivos, o estudo de caso pode ser realizado por três tipos diferentes: descritivo, interpretativo e avaliativo. O segundo tipo, o estudo de caso interpretativo, foi a opção escolhida, pois busca uma rica descrição do fenômeno estudado, procura padrões nos dados e permite desenvolver categorias conceituais, possibilitando que o fenômeno seja interpretado ou teorizado.

Nesta pesquisa, o fenômeno inicial envolveu a busca por indícios de produção e trânsito dos três tipos de significados matemáticos, a MM, a ME e a MG.

Segundo classificação de Bogdan e Biklen (1994) utilizou-se a investigação qualitativa livre e a análise dos dados foi realizada à luz de alguns critérios da Análise Textual Discursiva segundo Moraes e Galiazzi (2007).

Esse processo de intimidade com os dados coletados, também chamado por Moraes e Galiazzi (2007) de “processo de impregnação”, tem por objetivo aprofundar as leituras, selecionar os aspectos importantes dos fenômenos a serem



trabalhados posteriormente, delimitar e destacar as unidades básicas de análise a partir dos materiais pesquisados.

Segundo Moraes e Galiuzzi (2007) a criação das categorias e das subcategorias, levando-se em consideração os objetivos da pesquisa atende o critério de validade. Vale destacar que estes pesquisadores consideram que as categorias têm validade quando são úteis a pesquisa.

A homogeneidade das categorias é destacada por Moraes e Galiuzzi (2007), pois a sua organização deve se dar a partir de um único critério.

Nesta pesquisa, o princípio da exaustão que Moraes e Galiuzzi (2007) apontam, destaca-se como uma necessidade para criação das categorias. Vale destacar que, o fato da construção de categorias, ser exaustivo, não quer dizer que todos os dados coletados serão utilizados, mas sim, que todos os dados sejam classificados em função do objetivo da pesquisa. Esse princípio foi observado, tendo em vista que foram utilizados os excertos das falas dos sujeitos da pesquisa, procurando aproximá-los dos objetivos da pesquisa.

A partir dos objetivos da pesquisa, seguindo as características da Análise Textual Discursiva criei as categorias de análise, *a posteriori*.

A partir da codificação das falas, as categorias de análise consideradas, são as seguintes:

- a. Matemática do Matemático (MM)
- b. Matemática da Escola (ME)
- c. Matemática do GeoGebra (MG)
- d. Trânsito entre as matemáticas
- e. Percepção da MG
- f. Necessidade de compreensão da MG
- g. Aparente compreensão da MG
- h. Aparente incompreensão da MG

As análises de cada uma dessas categorias são formalizadas com a apresentação de quadros, que contém os excertos que evidenciam cada uma. Além disso, são apresentados os resultados da análise em relação ao transitar pelas três Matemáticas: MM, ME e MG, bem como os excertos que evidenciam este caso.

Apresento as tabelas com as confirmações ou não de indícios, de que os

entrevistados forneceram elementos às categorias de análise. Apresento as codificações que denotam presença ou ausência de surpresa, desconforto ou incompreensão dos entrevistados, em relação aos resultados matemáticos do GeoGebra, relativos aos episódios 1 e/ou 2. Apresento as tabelas com as confirmações ou não, de indícios de que os entrevistados forneceram elementos de, surpresa e/ou desconforto e/ou incompreensão em relação aos resultados matemáticos do GeoGebra relativos aos episódios 1 e/ou 2.

Em seguida realizo uma análise do transitar comum que foi percebido ao observar como falaram das possibilidades do GeoGebra e para finalizar, apresento a análise de como P1 lidou com as limitações através de explicações baseadas na MM, propondo uma possibilidade para aprender a lidar com limitações do GeoGebra, como as que consideramos na seção 2.3.3.

## CAPÍTULO 4 – ANÁLISES E RESULTADOS

Prender-se a uma disputa sobre o que é a verdade dos objetos matemáticos, pode ser pouco proveitoso para lidar com o fenômeno da Educação em Ciências e Matemática.

Acredito que como pesquisadores, buscamos organizar as contribuições do método científico. Não considero que o que desejamos, seja mostrar um mundo melhor ou perfeito. O senso comum admite que a ciência, em boa parte, é o que nos permitiu chegar a um patamar de algumas melhorias de qualidade de vida, também admite que a ciência representa nossa curiosidade, nossa vontade de explicar as coisas e procurar dar sentidos ao que vivemos. Machado (2013) em seu texto “ Mil e uma #76 – Goodman e os modos de fazer mundos”, aponta:

A resposta de Nelson Goodman (1906-1998) à disputa platônica aristotélica sobre a natureza da realidade é radical e inspiradora: o mundo é o que compreendemos dele, universos são tanto construídos quanto descobertos, a compreensão e a criação andam juntas. O que importa são os modos de fazer mundos, que é o título de um de seus livros mais originais.

Entre os modos de fabricação, ele destaca:

- a composição/decomposição do que existe (os fatos), o que dá origem a novos objetos ou configurações, ao que é imaginado (os fictos);
- a enfatização de certos elementos, o que pode conduzir à deformação intencional, e à complementação ou supressão do que se considera relevante ou irrelevante;
- a ordenação do que já se registrou e destacou, com a construção de uma narrativa, o que introduz a temporalidade, possibilita a fixação e favorece a extrapolação.

Dividir, combinar, imaginar, destacar, suprimir, completar, ordenar, extrapolar seriam, então, verbos fundamentais para a construção de mundos. (MACHADO, 2013)

Minha pesquisa partiu do ponto de vista de que o GeoGebra é relevante à escola, mas sobretudo, que é interessante às pessoas que desejam discutir sobre matemática. Julgo proveitoso resgatar que minha tese é a de que professores de matemática que usam o GeoGebra, transitam pela Matemática do Matemático, a Matemática da Escola e a Matemática do GeoGebra e que este complexo movimento, precisa lidar com as limitações do software, para potencializar os diferentes modos de produção de significados matemáticos e incitar posturas que visem estimular o pensamento crítico. Deste modo, considero que o fio condutor

para a leitura das análises e resultados que apresento a seguir é: reconhecer indícios que mostrem que os entrevistados usaram as três linguagens, condição necessária para haver trânsito entre as matemáticas, e que se mostrou indispensável nas explicações dadas pelos entrevistados; notar o trânsito que os entrevistados praticaram e constatar a existência dos indícios que caracterizaram suas percepções da MG, reconhecimentos da necessidade de compreensão da MG e evidenciar que mesmo professores experientes, podem aparentar compreensão e incompreensão da MG.

Este capítulo trata da análise dos resultados obtidos, no sentido empírico. Para ornar a-la, foi elaborado um protocolo de análise. Primeiro, apresento uma análise inicial do conteúdo geral da entrevista. Depois apresento os quadros com os excertos das entrevistas que denotam referências às categorias.

#### 4.1 – Protocolo das análises

Apresento, a seguir, o protocolo definido para a análise das entrevistas:

- I. Análise interpretativa para cada entrevista
- II. Codificações das falas em categorias de análise:
  - a. Matemática do Matemático (MM)
  - b. Matemática da Escola (ME)
  - c. Matemática do GeoGebra (MG)
  - d. Trânsito entre as matemáticas
  - e. Percepção da MG
  - f. Necessidade de compreensão da MG
  - g. Aparente compreensão da MG
  - h. Aparente incompreensão da MG
- III. Tabelas com as confirmações ou não de indícios de que os entrevistados forneceram elementos às categorias de análise.
- IV. Codificações que denotam presença ou ausência de surpresa, desconforto ou incompreensão dos entrevistados em relação aos resultados matemáticos do GeoGebra relativos aos episódios 1 e ou 2.

- V. Tabelas com as confirmações ou não de indícios de que os entrevistados forneceram elementos de surpresa e/ou desconforto e/ou incompreensão em relação aos resultados matemáticos do GeoGebra relativos aos episódios 1 e/ou 2.
- VI. Análise do transitar comum que foi percebido ao observar como falaram das possibilidades do GeoGebra.
- VII. Análise de como P1 lidou com as limitações através de explicações baseadas na MM.

#### 4.2 – Análises das entrevistas

Nesta seção apresento algumas análises iniciais dos conteúdos de cada entrevista. Depois mostro os excertos das falas, ligando-os às categorias de análise.

Tais olhares, acabaram sendo guias para a reflexão mais imbricada ao final do capítulo. São recortes mais abertos, que foram sendo coletados mais por seu conteúdo direto e o meu exercício de interpretação do contexto. Serviram para confirmar a presença dos objetos de estudo e mostrar que as categorias não são auto excludentes.

Inicialmente, a intenção é dar algumas pistas gerais sobre o que foi dito, compartilhando com o leitor outra possibilidade de se aproximar das falas, sem que necessariamente, seja preciso ler cada entrevista na íntegra, para prosseguir neste capítulo. Não espero com isso, sugerir que a leitura das entrevistas seja dispensável ou desinteressante, muito pelo contrário, cada entrevista traz em si um corpo de conhecimentos e estão disponibilizadas nos anexos na forma de transcrições.

Por mais que eu me esforce na construção de cada transcrição, acredito não conseguir imprimir todos os sentidos reais das situações. Em cada entrevista, houve anotações a mão, usos do GeoGebra, risos, interjeições e muito mais. Mas não sou um cientista das ciências sociais, experiente em transcrições profissionais, sou um professor de matemática, que busca aprofundar-se na pesquisa em educação. Quero apenas compartilhar o máximo de informação que consegui registrar, tratar e refletir.

Uma última observação, a escolha da sequência de apresentação das categorias, reflete uma direção de leitura. Primeiro, procurei ver os elementos das três adjetivações e como transitaram. Em seguida, olhei para as percepções sobre a MG, buscando ver se reconheciam a necessidade de compreendê-la. Por fim, tentei identificar as possíveis compreensões ou incompreensões.

#### 4.2.1 – Análise interpretativa: entrevista com P1

A análise interpretativa com o entrevistado P1, seguindo os itens do protocolo definido, possibilitaram os resultados apresentados, a seguir.

P1 é uma profissional que se pauta, principalmente, em suas convicções didáticas e parece ser coerente com as mesmas, em sua prática de usar ou discutir o GeoGebra. Declara acreditar que discussões mais aprofundadas sobre os resultados matemáticos do software, por parte dos estudantes, podem desestimular o interesse e até mesmo comprometer o entendimento inicial das ideias matemáticas que fazem parte de seus objetivos didáticos. Apesar de ser uma profissional experiente em docência, apresentar um currículo denso em qualificação matemática e confirmar minha suposição de que é uma usuária experiente do software, não deixou de se surpreender com os resultados exibidos pelo software no que se refere aos dois episódios utilizados para problematizar e estimular a entrevista.

P1 mostrou-se receptiva às possibilidades de se aproveitar os episódios, incluindo-os em seu acervo pessoal de experiências. P1 tem critérios interessantes para se decidir sobre a discussão aprofundada ou não dos resultados matemáticos do GeoGebra. Dizendo que tudo depende muito dos perfis dos alunos e da disciplina em que o curso está ocorrendo. Esta professora não teme adentrar em zonas de risco. Sua surpresa é maior quando defrontada com o episódio 1. Contudo, oferece uma explicação que parte da MM, dizendo que é um erro de aproximação numérica.

Destaco que P1 parece sempre partir de seus objetivos didáticos, quando propõe atividades ou analisa as possibilidades e limites do GeoGebra. Também é perceptível que suas explicações e argumentações pautam-se em seus

conhecimentos matemáticos e que lhe são os mais confiáveis. Suas contribuições durante a entrevista me levam a afirmar que a entrevistada está aberta a lidar com as características peculiares da matemática do GeoGebra, mas não lida com os aspectos computacionais. Compreendo que sua movimentação argumentativa, durante a entrevista, aponta que seu discurso apresenta indícios claros das concepções da matemática do matemático e da matemática da escola. É relevante apontar que P1 estabelece que o sucesso de seus objetivos didáticos é a constante motivação para continuar a usar o GeoGebra.

Os resultados destas análises são apresentados nos excertos da entrevista com P1 nos quadros 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

Nos quadros 3, 4 e 5 são apresentados os excertos referentes a Matemática do Matemático (MM), a Matemática da Escola (ME) e a Matemática do GeoGebra (MG), respectivamente.

*Quadro 3 – Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM)*

| Nome do documento | Código  | Segmento   |
|-------------------|---------|--|
| entrevista P1     | P1 – mm | Ahhh agora se é um outro curso, de um método matemático, é interessante que o aluno já aprenda o desenvolvimento matemático que não tem nada a ver com a tecnologia.   |
| Entrevista P1     | P1 – mm | William: Duas funções $f(x)$ e $g(x)$ , exponencial de menos $x$ , mais $x$ ; e $x$ . Essas duas curvas se interceptariam? O quê diria a Ana de conhecimento matemático. Essas curvas se interceptariam?<br>P1: ...(fazendo os cálculos de cabeça) Não. (fazendo cálculos novamente) hummm, não sei. |
| Entrevista P1     | P1 – mm | Eu ia igualar né, aí corta, corta, e elevado a menos $x$ é igual a zero não existe nenhum $x$ . Não, não tem.  |
| Entrevista P1     | P1 – mm | Sem duvida a prova matemática é contundente.   |
| Entrevista P1     | P1 – mm | Bom, matematicamente é contundente, igualou, cortou e não há nenhum $x$ igual a zero. Acabou, morreu correto?  |

|                  |         |  |
|------------------|---------|--|
| Entrevista<br>P1 | P1 – mm | Não é descontinuidade. O problema é do domínio. Para ter continuidade o ponto tem que estar no domínio. Então neste caso é problema de domínio, não de continuidade. Para dizer que a função é contínua tem que redefinir um ponto que não está no domínio correto? Esse aí é um caso que eu uso muito, principalmente com limite. Porque eles confundem aquele negócio de continuidade e pontos que não estão no domínio né. Continuidade só discutimos com pontos do domínio. Então esse probleminha aqui não é problema de continuidade. É problema de não pertencer ao domínio. Então essas duas funções são coincidentes, exceto naquele ponto que não pertence ao domínio desta, e pertence ao domínio da outra. |
|------------------|---------|--|

*Quadro 4 – Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a Matemática da Escola (ME)*

| Nome do documento | Código  | Segmento  |
|-------------------|---------|---|
| entrevista<br>P1  | P1 – me | Encontrei uma rotina de como levar o GeoGebra, como conhecer o aluno, mostrar, e fazer algumas provinhas matemáticas né. Eu hoje tiro as provas matemáticas, é mais mostrar que o resultado vale!   |
| Entrevista<br>P1  | P1 – me | No ambiente de aula não interessa. Quer dizer, eu tento ligar a matemática com o resultado que está aparecendo aqui... tá. Em geral eu diria estatisticamente entre trinta e trinta e cinco por cento captam a relação os outros ficam com a imagem. Mas eu prefiro que fiquem o resto setenta por cento com a imagem do que com nada, com a ideia de que não entendeu, que não falei da matemática né. Vou lá e mostro aqui, está vendo que é verdade. Ah por isso que é verdade? Não, tem uma prova disso. Correto? Você está interessado em ver a prova? Vou lá e faço a prova. Trinta por cento presta atenção o resto roooccccc (som de roncando). Mas o que ficou? Ficou a imagem da prova né. Por exemplo, o teorema do valor médio.           |
| Entrevista<br>P1  | P1 – me | Limite, eu ensino limite com o GeoGebra visualizando. Todo mundo aprende, noventa e cinco por cento aprende. Aprende e o aluno se dá muito bem na prova de limite. E foi o GeoGebra que nos ajudou.   |
| Entrevista<br>P1  | P1 – me | <b>William:</b> A senhora tem experiência de trabalhar com essas ideias antes de usar o GeoGebra?<br><b>P1:</b> Tenho, ah não dá em nada. É pior... claro, aí sim que aluno nem gravava aquilo. Porque eu falava, fazia um desenho bonito. Perguntava no outro dia e ahnnn???<br><b>William:</b> mesmo esses trinta por cento que geralmente já tem uma pré-disposição?<br><b>P1:</b> De trinta por cento eu baixo pra dez agora...<br><b>William:</b> Interessante, a senhora tem consciência de que mudou o aproveitamento do seu trabalho em sala?<br><b>P1:</b> Claro, cem por cento... isso aí eu tenho e tive várias experiências.<br><b>William:</b> Então vê necessidade de continuar?<br><b>P1:</b> Sim, só quando me aposentar, vou deixar. |
| Entrevista<br>P1  | P1 – me | Ahhh agora se é um outro curso, de um método matemático, é interessante que o aluno já aprenda o desenvolvimento matemático que não tem nada a ver com a tecnologia.  |



|                         |                   |   |
|-------------------------|-------------------|---|
| Entrevista<br><b>P1</b> | <b>P1</b> –<br>me | <p>E é um limite no infinito por exemplo, ele junta. Aí tu vêes aquilo de um lado de outro ta juntinho, não tem descontinuidade. Aí eu queria ver e não vejo de jeito nenhum.</p> <p><b>William:</b> Planos assintóticos não vê de jeito nenhum?</p> <p><b>P1:</b> Não, isso está cheio. Isso é rotina. Na frente de cinquenta, setenta alunos, setenta alunos, aconteceu esse tipo de coisa. Alguma eu previ e levo de propósito para o aluno dizer o que aconteceu gente? Ó meu deus, faço de conta sabe?</p> <p><b>William:</b> Deve ser fantástico assistir sua aula!</p> <p><b>P1:</b> Sou boa atriz né.... Aí vai os alunos... é mesmo, como?</p>   |
| Entrevista<br><b>P1</b> | <b>P1</b> –<br>me | <p>Ai que tá, por exemplo, eu deixo meus aluninhos uns três meses lidar com resultados assim, fáceis, visuais. Em certos momentos eu começo a questionar, mas porque? O que será? Vamos analisar. Então aí o aluno vai aos pouquinhos como uma criança. Como anda tua filha? Você colocou-a em pé e disse anda?</p> <p>Não, isso é uma passagem gradual, um passinho aqui, outro passinho aqui. Por quê? Porque senão você cai. Então se ele pergunta cedo, ok vamos explorar. Agora senão ele fica contente com o resultado tudo bem, vamos lá. Pelo menos isso, ou seja, com GeoGebra minha intenção é pegar mais audiência. Senão estava passando trinta por cento, agora passa setenta. E esse setenta é melhor que os trinta anterior? É, pelo menos qualitativamente falando, eles têm ideias e tem visões, visualizações. Então acho que está bom.</p> |

*Quadro 5 – Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG)*

| Nome do documento    | Código         | Segmento  |
|----------------------|----------------|---|
| entrevista <b>P1</b> | <b>P1</b> – mg | Encontrei uma rotina de como levar o GeoGebra, como conhecer o aluno, mostrar, e fazer algumas provinhas matemáticas né. Eu hoje tiro as provas matemáticas, é mais mostrar que o resultado vale!   |
| Entrevista <b>P1</b> | <b>P1</b> – mg | Limite, eu ensino limite com o GeoGebra visualizando. Todo mundo aprende, noventa e cinco por cento aprende. Aprende e o aluno se dá muito bem na prova de limite. E foi o GeoGebra que nos ajudou.   |
| Entrevista <b>P1</b> | <b>P1</b> – mg | Claro! Sempre. Eu faço inclusive inequações no GeoGebra, muito bom! Cálculo um, nós vamos falando, como você resolve isso maior que isso?   |
| Entrevista <b>P1</b> | <b>P1</b> – mg | Agora vem aqui no GeoGebra e acontece esse negócio, fica frustrante. Para um aluninho digamos ou para o professor que está dizendo olha.  |
| Entrevista <b>P1</b> | <b>P1</b> – mg | <p><b>William:</b> E o objeto que se obteve com o GeoGebra que não mostra isso. Ele incorre..</p> <p><b>P1:</b> A gente ajusta. O software é nosso secretário, nós temos que ser os chefes. Então eu como pensadora de cálculo um ou matemática ou observador. Corrijo o que o software não fez correto. Aqui foi mais feio.</p>  |
| Entrevista <b>P1</b> | <b>P1</b> – mg | Mas já me encontrei em outras situações, não dez vezes, não cem vezes, eu diria umas quinhentas vezes. Do software eu vou lá e outra coisa (cara de espanto) que eu não esperava. Então como fazer? Aqui que acho a aula melhor. A melhor aula é essa que falhou o software. Por quê? Porque aí vamos analisar gente, analisar a palavra maravilhosa, aí vem a matemática. Amo a matemática, quando não tinha o GeoGebra ainda amava ela. |

|               |         |  |
|---------------|---------|--|
| Entrevista P1 | P1 – mg | As vezes pega de surpresa a mim mesma, como agora que tu me pegaste nesse né! E aí como fazemos? Boa, boa, excelente. Esse ponto é um ponto importantíssimo para lidar com o software. Na frente de um público que pensa que software é Deus, não. |
| Entrevista P1 | P1 – mg | X-1 que é uma reta, e eu acho que o GeoGebra faz isso sim. Eu já fiz isso. (Manipulando o software). Aí apareceu a reta, isso aí eu já fiz e posso explicar.   |

No quadro 6 são apresentados os excertos que evidenciam o trânsito do entrevistado P1 entre as três matemáticas: MM, ME e MG.

*Quadro 6 – Excertos da entrevista de P1 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas*

| Nome do documento | Código                        | Segmento  |
|-------------------|-------------------------------|---|
| entrevista P1     | trânsito entre as matemáticas | Encontrei uma rotina de como levar o GeoGebra, como conhecer o aluno, mostrar, e fazer algumas provinhas matemáticas né. Eu hoje tiro as provas matemáticas, é mais mostrar que o resultado vale!   |
| Entrevista P1     | trânsito entre as matemáticas | Disso já me convenci. Especialmente nos cursos iniciais de cálculo. Eu vou para métodos matemáticos ou vou para um curso de matemática, muda a minha relação com o GeoGebra. O GeoGebra é uma ferramenta visual. Mas a parte matemática tem descrita no quadro.   |
| Entrevista P1     | trânsito entre as matemáticas | Uma menina inteligentíssima de outro polo, muito boa. Ai eu falei limite e o cabelo dela (ficou em pé) professora nem fale nisso. Bem vou falar um pouquinho depois que a gente terminar você me diga sua opinião é muito importante. Terminamos e ela falou, se eu soubesse que era fácil assim teria feito muito bem minhas provas, eu disse pronto já valeu. Essa experiência foi sensacional, menina que terminou sendo muito boa. Eu preciso muito ter essa aluna a distância. Mas ela disse... quando eu falei limite ela ficou assim desmaiou, não, não quero. Quando eu terminei a rotina ai eu colocava e ia falando e eles iam respondendo e flui totalmente isso como uma coisa que nasceu com eles. |
| Entrevista P1     | trânsito entre as matemáticas | Um processo numérico não é a perfeição de uma prova matemática claro.   |
| Entrevista P1     | trânsito entre as matemáticas | William: Ah, a senhora já tem rapidamente um olhar.<br>P1: Éhhhhh, mas não tem!<br>William: Mas não tem no nosso objetivo que é desenvolver o pensamento matemático.<br>P1: Muito bom, gostei! A ideia aqui é que é um processo numérico.<br>William: A senhora vê isso como falha?<br>P1: Não, porque a gente se acostuma.   |
| Entrevista P1     | trânsito entre as matemáticas | De novo, vai depender, entendeu? Isso aqui é uma situação muito particular, que pode acontecer em uma aula. Ai a matemática tem que vir apoiar, sem dúvida. Neste momento a matemática apoia. O que aconteceu?  |
| Entrevista P1     | trânsito entre as matemáticas | Sim! Exceto por um ponto. Ai eu explico, ai eu explico. Porque no um não está definido correto. Ai eu explico, aqui é problema de domínio. Essas duas funções coincidem exceto no ponto onde isso aqui é um. Na verdade estritamente aqui faríamos um burquinho. Ai eu vou, venho com um pontinho. Clico aqui e faço ele.   |

|               |                               |  |
|---------------|-------------------------------|--|
| Entrevista P1 | trânsito entre as matemáticas | William: E o objeto que se obteve com o GeoGebra que não mostra isso. Ele incorre...<br>P1: A gente ajusta. O software é nosso secretário, nós temos que ser os chefes. Então eu como pensadora de cálculo um ou matemática ou observador. Corrijo o que o software não fez correto. Aqui foi mais feio.   |
| Entrevista P1 | trânsito entre as matemáticas | Eu tenho outra coisinha pra te mostrar em relação a isso. Um pouquinho mais complicada, mas o assunto da serie de potência. Isso é um negócio que o aluno não entende. Não entende mesmo. Olha já explorei isso muitas vezes até que agora eu já encontrei um jeitinho de induzir um aluno a entender o porque que a gente corta pedaços dos polinômios aproximadores. E aqui no GeoGebra fica óbvio que isso tem que ser feito. Bem, o GeoGebra faz o que todo mundo faz ta o polinômio...  |
| entrevista P1 | trânsito entre as matemáticas | William: É que eu queria perguntar. Se eu sou seu aluno, ai você me diz: olha vamos usar o software, porque ele plota o gráfico com um pouco mais de fidelidade, vou assumir que você ainda foi cuidadosa. Mais fidelidade, mais beleza, proporcionalidade. Posso degenerar os eixos e ser feliz. E eu me deparo com uma situação como essa e tenho um choque epistemológico no sentido de: não era esse o objeto que eu queria. Como a senhora lidaria com uma possível descrença da minha parte?<br>P1: Não, não! Isso aqui que foi feito é uma simulação. Então como simulação tem seus defeitos. É claro por exemplo, isso de passar assim. É lógico que isso vai acontecer, porque o software não percebe esse detalhe. Porque é um detalhe matemático. É o que tu falou como levar a matemática para interpretar o que o software fez. E corrigi-lo e isso eu faço direto. Aqui tu me pegou! Esse ai eu não sabia. Não sabia que ia fazer isso. E não entendi muito o porque também não. Porque que ele faz isso? Mas já me encontrei em outras situações, não dez vezes, não cem vezes, eu diria umas quinhentas vezes. Do software eu vou lá e outra coisa (cara de espanto) que eu não esperava. Então como fazer? Aqui que acho a aula melhor. A melhor aula é essa que falhou o software. Porque? Porque ai vamos analisar gente, analisar o palavra maravilhosa, ai vem a matemática. Amo a matemática, quando não tinha o GeoGebra ainda amava ela. Era ainda meio escura né, meia insossa né? Só na nossa mente e na nossa imaginação e esse carinho aqui me ajuda a ver, ótimo! Mas ele é meu secretário! Eu sou a que manda aqui, eu sou a que devo analisar, a que devo corrigir. O que tu trouxe é sensacional, esse ponto é muito bom. Pois é um ponto que eu faço naturalmente sem nenhum trauma. Eu continuo sendo fã do GeoGebra, mesmo com esses defeitos. Porque os outros softwares também ve com esse tipo de coisa. Quando estava preparando coisas para o cálculo três, que é o cálculo em três dimensões... ai é que tu encontra frustração mesmo. Porque ele tenta juntar as coisas e não é um pontinho, mas é um plano que ele tenta juntar. E é um limite no infinito por exemplo, ele junta. Ai tu vê aquilo de um lado de outro ta juntinho, não tem descontinuidade. Ai eu queria ver e não vejo de jeito nenhum. |
| Entrevista P1 | trânsito entre as matemáticas | William: É outra crença, o meu medo é a outra crença. Assim como muita gente apresenta argumento matemáticos baseando-se em autoridade. Ah confia em mim! Eu falo: não leva a mal não, mas eu aprendi que o primeiro passo matemático é não confiar. Eu não confio.<br>P1: Esse é mais um motivo para uso do software. Essa ai é uma exploração que eu faço muito nesse curso que estou fazendo agora de séries de potência. Ai que vai essa parte. Porque que o software faz isso gente, se me prometeram matematicamente que isso ia ficar grudado. E o bicho vai embora, vai pra baixo vai pro lado. Aí eu vou com um negócio, um teorema da matemática que diz que tem o raio de convergência. Se você sai do raio o bicho vai embora para outro lado, não tem nada de convergência. E eu vejo lá no software, a gente ajusta.   |

|               |                               |  |
|---------------|-------------------------------|--|
| Entrevista P1 | trânsito entre as matemáticas | <p>William: Eu vou compartilhar. Eu pessoalmente tenho procurado olhar pro código. Porque é uma produção de outra pessoa baseada em conhecimento matemático, isso não é magia. É o que eu tento dizer para as pessoas.</p> <p>P1: E ele escreve direitinho aqui ó. A função não descreve a função <math>x+1</math> né.</p> <p>William: Ai se a senhora usar o CAS, a senhora vai ver que ela da outra output, então eu William estou optando por representações, todas as possíveis, se eu der o input na planilha qual é o output?</p>  |
| Entrevista P1 | trânsito entre as matemáticas | <p>: ... (conversa paralela)... Muitas vezes coloco aqui no software e falo, agora me explique o porque!</p> <p>William: Era o que eu queria chamar a atenção. Lidar com essa crença mesmo sem tecnologia. Quantas pessoas envelhecem, se formam, fazem pós-graduação e ai eu volto e pergunto: você tem pelo menos algum argumento que não seja acredite em mim. Quando ele pergunta porque que o produto de dois números estritamente negativos é estritamente positivo. A criança de doze anos é obrigada a lidar com uma ideia que demorou dois mil ano para ser constituída e tudo... ah no futuro você vai saber, quanta gente se forma e você pergunta e olha. Ah ele que falou, uma pessoa séria daquela não ia mentir pra mim, mas isso não vai formar o pensamento matemático na minha opinião.</p> <p>P1: Ai que tá, por exemplo . eu deixo meus aluninhos uns três meses lidar com resultados assim, fáceis, visuais. Em certos momentos eu começo a questionar, mas porque? O que será? Vamos analisar. Então ai o aluno vai aos pouquinhos como uma criança. Como anda tua filha? Você colocou ela em pé e disse anda? Não, isso é uma passagem gradual, um passinho aqui, outro passinho aqui. Por que? Porque senão você cai. Então se ele pergunta cedo, ok vamos explorar. Agora senão ele fica contente com o resultado tudo bem, vamos lá. Pelo menos isso, ou seja, com GeoGebra minha intenção é pegar mais audiência. Senão estava passando trinta por cento, agora passa setenta. E esse setenta é melhor que os trinta anterior? É! Pelo menos qualitativamente falando eles tem ideias e tem visões, visualizações. Então acho que ta bom.</p> |

No quadros 7 e 8 são apresentados os excertos referentes a percepção do entrevistado P1 em relação a MG e a necessidade de compreensão da MG, respectivamente.

*Quadro 7 – Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a percepção da MG*

| Nome do documento | Código          | Segmento   |
|-------------------|-----------------|--|
| entrevista P1     | percepção da mg | Ahhh agora se é um outro curso, de um método matemático, é interessante que o aluno já aprenda o desenvolvimento matemático que não tem nada a ver com a tecnologia. |
| Entrevista P1     | percepção da mg | Um processo numérico não é a perfeição de uma prova matemática claro.  |

|               |                 |   |
|---------------|-----------------|---|
| Entrevista P1 | percepção da mg | <p>William: É que eu queria perguntar. Se eu sou seu aluno, ai você me diz: olha vamos usar o software, porque ele plota o gráfico com um pouco mais de fidelidade, vou assumir que você ainda foi cuidadosa. Mais fidelidade, mais beleza, proporcionalidade. Posso degenerar os eixos e ser feliz. E eu me deparo com uma situação como essa e tenho um choque epistemológico no sentido de: não era esse o objeto que eu queria. Como a senhora lidaria com uma possível descrença da minha parte?</p> <p>P1: Não, não! Isso aqui que foi feito é uma simulação. Então como simulação tem seus defeitos. É claro, por exemplo, isso de passar assim. É lógico que isso vai acontecer, porque o software não percebe esse detalhe. Porque é um detalhe matemático. É o que tu falou como levar a matemática para interpretar o que o software fez. E corriji-lo e isso eu faço direto. Aqui tu me pegou! Esse ai eu não sabia. Não sabia que ia fazer isso. E não entendi muito o porque também não. Porque que ele faz isso? Mas já me encontrei em outras situações, não dez vezes, não cem vezes, eu diria umas quinhentas vezes. Do software eu vou lá e outra coisa (cara de espanto) que eu não esperava. Então como fazer? Aqui que acho a aula melhor. A melhor aula é essa que falhou o software. Porque? Porque ai vamos analisar gente, analisar o palavra maravilhosa, ai vem a matemática. Amo a matemática, quando não tinha o GeoGebra ainda amava ela. Era ainda meio escura né, meia insossa né? Só na nossa mente e na nossa imaginação e esse carinho aqui me ajuda a ver, ótimo! Mas ele é meu secretário! Eu sou a que manda aqui, eu sou a que devo analisar, a que devo corrigir. O que tu trouxe é sensacional, esse ponto é muito bom. Pois é um ponto que eu faço naturalmente sem nenhum trauma. Eu continuo sendo fã do GeoGebra, mesmo com esses defeitos. Porque com os outros softwares também se vê esse tipo de coisa. Quando estava preparando coisas para o cálculo três, que é o cálculo em três dimensões... ai é que tu encontra frustração mesmo. Porque ele tenta juntar as coisas e não é um pontinho, mas é um plano que ele tenta juntar. E é um limite no infinito por exemplo, ele junta. Ai tu vê aquilo de um lado de outro ta juntinho, não tem descontinuidade. Ai eu queria ver e não vejo de jeito nenhum.</p> |
| Entrevista P1 | percepção da mg | <p>William: É outra crença, o meu medo é a outra crença. Assim como muita gente apresenta argumento matemáticos baseando-se em autoridade. Ah confia em mim! Eu falo: não leva a mal não, mas eu aprendi que o primeiro passo matemático é não confiar. Eu não confio.</p> <p>P1: Esse é mais um motivo para uso do software. Essa ai é uma exploração que eu faço muito nesse curso que estou fazendo agora de séries de potência. Ai que vai essa parte. Porque que o software faz isso gente, se me prometeram matematicamente que isso ia ficar grudado. E o bicho vai embora, vai pra baixo vai pro lado. Aí eu vou com um negócio, um teorema da matemática que diz que tem o raio de convergência. Se você sai do raio o bicho vai embora para outro lado, não tem nada de convergência. E eu vejo lá no software, a gente ajusta.</p>   |

*Quadro 8 – Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a necessidade de compreensão da MG*

| Nome do document | Código                           | Segmento  |
|------------------|----------------------------------|---|
| entrevista P1    | necessidade de compreensão da mg | Ahh, matematicamente há necessidade sim. Bom, espera aí. Depende do ambiente em que estamos trabalhando. No ambiente de aula não interessa. Quer dizer, eu tento ligar a matemática com o resultado que está aparecendo aqui... tá. Em geral eu diria estatisticamente entre trinta e trinta e cinco por cento captam a relação os outros ficam com a imagem. Mas eu prefiro que fiquem o resto setenta por cento com a imagem do que com nada, com a idéia de que não entendeu, que não falei da matemática né. Vou lá e mostro aqui, ta vendo que é verdade. Ah por isso que é verdade? Não, tem uma prova disso. Correto? Você está interessado em ver a prova? Vou lá e faço a prova. Trinta por cento presta atenção o resto roooooo (som de roncando). Mas o que ficou? Ficou a imagem da prova né. Por exemplo o teorema do valor médio. Eu faço aqui, está vendo? Eu pego a cordinha... está vendo que é paralela? Está vendo? Pronto ai vai embora. Se é um cálculo I de engenharia, se é um cálculo I de matemática... e por que será isso? Vamos ver porque, ai dou uma provinha. É como te digo, trinta por cento fica com a ideia da prova o resto ficou quem aquela ideia de paralelo pronto. |
| Entrevista P1    | necessidade de compreensão da mg | Depende da audiência, em algumas audiências isso não é foco e nem deve ser. Isso tenho discussões com meus coleguinhas aqui. Ah não, você como ensina? Mostra aqui, não tá vendo que é verdade? Pronto! Tem que provar? Não!  |
| Entrevista P1    | necessidade de compreensão da mg | William: A pergunta do seu companheiro, a senhora diria que ela é da natureza da credibilidade do processo do programa?<br>P1: Sim!<br>William: Quando ele diz: Ah tem que mostrar pra todo mundo?<br>P1: Sim! Sim!... Não mostrar via prova né!<br>William: Ah ele não exige que se explique o que o software fez pra chegar?<br>P1: Não, quer dizer não, eu! Ele disse sim, explique! Eu acho que não é necessário né. Eu acho que não! No sentido de bens de valores eles tem que se adaptar!  |
| Entrevista P1    | necessidade de compreensão da mg | As vezes pega de surpresa a mim mesma, como agora que tu me pegou nesse né! E ai como fazemos? Boa, boa, excelente. Esse ponto é um ponto importantíssimo para lidar com o software. Na frente de um público que pensa que software é Deus, não.  |

Nos quadros 9 e 10 são apresentados os excertos que denotam referência a aparente compreensão da MG e a aparente incompreensão da MG, respectivamente, pelo entrevistado P1.

*Quadro 9 – Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a aparente compreensão da MG*

| Nome do documento | Código                  | Segmento   |
|-------------------|-------------------------|--|
| entrevista P1     | aparente compreensão mg | (P1 digita o comando para intersecção).<br>William: Ele obteve.<br>P1: (expressão de espanto).<br>William: Como a senhora lidaria com isso?<br>P1: É porque é numérico né?   |
| Entrevista P1     | aparente compreensão mg | Um processo numérico não é a perfeição de uma prova matemática claro.  |
| Entrevista P1     | aparente compreensão mg | Bom, todos esse softwares: matemática, máxima e matlab. Todos usam a mesma base de codificação numérica, estou falando. Senão, aí tu vê a precisão. Ele precisava realmente disso para dar credibilidade né! Como tu acabou de falar... Lá está suspeito.  |
| Entrevista P1     | aparente compreensão mg | William: E o objeto que se obteve com o GeoGebra que não mostra isso. Ele incorre...<br>P1: A gente ajusta. O software é nosso secretário, nós temos que ser os chefes. Então eu como pensadora de cálculo um ou matemática ou observador. Corrijo o que o software não fez correto. Aqui foi mais feio. |

|               |                         |   |
|---------------|-------------------------|---|
| Entrevista P1 | aparente compreensão mg | <p>William: É que eu queria perguntar. Se eu sou seu aluno, ai você me diz: olha vamos usar o software, porque ele plota o gráfico com um pouco mais de fidelidade, vou assumir que você ainda foi cuidadosa. Mais fidelidade, mais beleza, proporcionalidade. Posso degenerar os eixos e ser feliz. E eu me deparo com uma situação como essa e tenho um choque epistemológico no sentido de: não era esse o objeto que eu queria. Como a senhora lidaria com uma possível descrença da minha parte?</p> <p>P1: Não, não! Isso aqui que foi feito é uma simulação. Então como simulação tem seus defeitos. É claro, por exemplo, isso de passar assim. É lógico que isso vai acontecer, porque o software não percebe esse detalhe. Porque é um detalhe matemático. É o que tu falou, como levar a matemática para interpretar o que o software fez. E corrigi-lo e isso eu faço direto. Aqui, tu me pegou! Esse aí, eu não sabia. Não sabia que ia fazer isso. E não entendi muito o porquê também não. Porque que ele faz isso? Mas já me encontrei em outras situações, não dez vezes, não cem vezes, eu diria umas quinhentas vezes. Do software eu vou lá e outra coisa (cara de espanto) que eu não esperava. Então como fazer? Aqui que acho a aula melhor. A melhor aula é essa que falhou o software. Por quê? Porque aí, vamos analisar, gente, analisar ô palavra maravilhosa, aí vem a matemática. Amo a matemática, quando não tinha o GeoGebra ainda amava ela. Era ainda meio escura né, meio insossa, né? Só na nossa mente e na nossa imaginação e esse carinho aqui, me ajuda a ver, ótimo! Mas ele é meu secretário! Eu sou a que manda aqui, eu sou a que devo analisar, a que devo corrigir. O que tu trouxe é sensacional, esse ponto é muito bom. Pois é um ponto que eu faço naturalmente sem nenhum trauma. Eu continuo sendo fã do GeoGebra, mesmo com esses defeitos. Porque nos outros softwares também se vê esse tipo de coisa. Quando estava preparando coisas para o cálculo três, que é o cálculo em três dimensões... aí é que tu encontra frustração mesmo. Porque ele tenta juntar as coisas e não é um pontinho, mas é um plano que ele tenta juntar. E é um limite no infinito, por exemplo, ele junta. Ai tu vê aquilo de um lado, de outro, tá juntinho, não tem descontinuidade. Aí eu queria ver e não vejo de jeito nenhum.</p> |
| Entrevista P1 | aparente compreensão mg | <p>As vezes pega de surpresa a mim mesma, como agora que tu me pegou nesse né! E aí, como fazemos? Boa, boa, excelente. Esse ponto é um ponto importantíssimo para lidar com o software. Na frente de um público que pensa que software é Deus, não.</p>  |
| Entrevista P1 | aparente compreensão mg | <p>William: É outra crença, o meu medo é a outra crença. Assim como muita gente apresenta argumento matemáticos baseando-se em autoridade. Ah confia em mim! Eu falo: não leva a mal não, mas eu aprendi que o primeiro passo matemático é não confiar. Eu não confio.</p> <p>P1: Esse é mais um motivo para uso do software. Essa aí, é uma exploração que eu faço muito nesse curso que estou fazendo agora de séries de potência. Aí que vai essa parte. Porque que o software faz isso gente, se me prometeram matematicamente que isso ia ficar grudado. E o bicho vai embora, vai pra baixo vai pro lado. Aí eu vou com um negócio, um teorema da matemática que diz que tem o raio de convergência. Se você sai do raio, o bicho vai embora para outro lado, não tem nada de convergência. E eu vejo lá no software, a gente ajusta.</p>   |



*Quadro 10 – Excertos da entrevista de P1 que denotam referências a aparente incompreensão da MG*

| Nome do documento | Código                       | Segmento  |
|-------------------|------------------------------|---|
| entrevista P1     | aparente incompreensão da mg | William: Eu gosto porque graficamente a gente mostra pra eles os intervalos, mas eu queria pedir ... (professora digitando a equação no GeoGebra) ... como que a senhora... o que a senhora usaria para pedir para o GeoGebra ver ou não se há...<br>P1: Igualaria né... ahhh ele não fez, então deixa eu colocar x e x, porque é isso que eu faço com a inequação né, certo. (digitando...)<br>William: Ele renomeou né? Parece que essa versão mudou. Ele tem ferramenta também né? O comando intersecção, tem a macro. Quer experimentar?<br>P1: Quero! (digitando o comando para intersecção).<br>William: Ele obteve.<br>P1: (expressão de espanto). |
| Entrevista P1     | aparente incompreensão da mg | William: Sim, o CAS. Que trabalha com uma perspectiva diferente, se a senhora escrever aí intersecção...<br>P1: (Manipulando o CAS) ... isso que te digo, que no final, O que está no CAS está na...<br>William: Eu usava o $\cap$ .<br>P1: (Manipulando o software) Intersecção, função, função, pronto. Interessante que aqui não apareceu aquele objeto com objeto né.   |
| Entrevista P1     | aparente incompreensão da mg | Agora vem aqui no GeoGebra e acontece esse negócio, fica frustrante. Para um aluninho digamos, ou para o professor que está dizendo olha.   |
| Entrevista P1     | aparente incompreensão da mg | Aqui tu me pegou! Esse ai eu não sabia. Não sabia que ia fazer isso. E não entendi muito o porque também não. Porque que ele faz isso?  |
| Entrevista P1     | aparente incompreensão da mg | Porque ele tenta juntar as coisas e não é um pontinho, mas é um plano que ele tenta juntar. E é um limite no infinito, por exemplo, ele junta. Ai tu vê aquilo de um lado, de outro, tá juntinho, não tem descontinuidade. Ai eu queria ver e não vejo de jeito nenhum.   |

#### 4.2.2 – Análise interpretativa: entrevista com P2

O entrevistado P2, proporcionou, a partir da análise interpretativa proposta e seguindo os itens do protocolo de análise, os seguintes resultados.

P2 admite a sua necessidade pessoal de compreensão dos processos implícitos que acabam por fornecer os resultados junto ao GeoGebra, no entanto, declara que seus vários compromissos e responsabilidades profissionais inviabilizam estudos mais apurados dos aspectos computacionais. Chama a atenção o fato que P2 tem experiência com programação e estabelece que esta é a via pela qual

acredita ser possível a construção de sua compreensão mais acurada. P2 não vê problemas em usar as funcionalidades do software sem questionamentos, e o faz com declarada sensação de confiança no software.

Conforme P2 foi confrontada com os episódios, percebeu-se seu desconforto e dificuldade em tentar dar explicações. P2 confirma sua forte relação de confiança com o software ao insistir em diferentes estratégias, pautadas, principalmente, nas funcionalidades e possibilidades do GeoGebra. Parece-nos que esta postura tem aspectos defensáveis, no sentido que a relação profissional da docência está fortemente arraigada em sua prática de usuário do GeoGebra.

Apesar de P2 declarar que já tinha constatado falhas em outros softwares voltados a matemática, curiosamente se surpreende em perceber que ainda persistem situações que contradizem resultados exclusivamente amparados em argumentações da matemática do matemático. P2 acredita fortemente que as limitações da matemática do GeoGebra podem ser superadas, apenas apurando-se a linguagem de programação por detrás, P2 parece ignorar aspectos relevantes sobre como as representações e operações ocorrem a partir de aproximações numéricas. Aqui, cabe o cuidado de frisar, parece que P2 não considera alguns aspectos de como a máquina opera matematicamente, mas apenas dizemos isto por não termos constatado em seu discurso, elementos que supúnhamos passíveis de estar presente em seu estofo conceitual, haja vista que P2 também apresenta um consistente currículo de formação em matemática e atua como formadora de professores há algum tempo.

A entrevista com P2 acaba por reforçar nosso interesse em chamar a atenção à necessidade de discussões que tratem das caracterizações, aproximações e distinções entre a matemática do matemático e da matemática do GeoGebra. A possibilidade de que tenhamos usuários do GeoGebra em estado de crença, delegando parte significativa do processo cognitivo à máquina, tornando-se como a própria P2 afirma, preguiçosos, merece reflexão.

Os resultados destas análises são apresentados nos excertos da entrevista com P2 nos quadros 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17.

Nos quadros 11, 12 e 13 são apresentados os excertos referentes a Matemática do Matemático (MM), a Matemática da Escola (ME) e a Matemática do GeoGebra (MG), respectivamente.

*Quadro 11 – Excertos da entrevista de P2 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM)*

| Nome do documento | Código  | Segmento  |
|-------------------|---------|---|
| entrevista P2     | P2 – mm | Tá, eu preciso de um papel. Quando é que “e a menos x é igual a zero”, não, não vai. Um sobre e a x, é, não se interceptam.   |
| Entrevista P2     | P2 – mm | Ou então eu vou pensar nas funções né? Aí o gráfico dessa aqui vai ficar mais complicado, mas enfim... (parece novamente realizar cálculos mentais e conferir suas anotações no papel)  |
| entrevista P2     | P2 – mm | Não, ia dizer não sei. Ah se eu precisasse afirmar, eu ia dizer, acho que sim, né? Mas pelas contas não.  |
| Entrevista P2     | P2 – mm | Exato, ia dar uma forma de conseguir enxergar o comportamento deste gráfico (aponta para a anotação do episódio 1) ia fazer, como é que vou te dizer, f de x igual a x, eu sei como é que funciona. Como é que eu ia fazer, ia fazer um esboço deste gráfico, bom, e no momento que em que fosse fazer o esboço deste gráfico, ia ver que isso aqui era praticamente uma assíntota, bom, vai ser assíntota sempre ou não? |
| Entrevista P2     | P2 – mm | O que que ia fazer, eu ia fazer isso na mão, aqui, para ver o que dá. Se eu resolver, aqui, não tem solução (fala e aponta para a anotação feita a mão da resolução da equação citada)  |

*Quadro 12 – Excertos da entrevista de P2 que denotam referências a Matemática da Escola (ME)*

| Nome do documento | Código  | Segmento  |
|-------------------|---------|---|
| entrevista P2     | P2 – me | Ahh eu espero uma reta, com um ponto no meio, um furo no ponto com x igual a um.  |
| Entrevista P2     | P2 – me | Claro, que o aluno percebesse isso, mas eu não explorei isso, é uma coisa interessante de falar para os alunos isso, que eu não explorei isso em aula, tu entendeste? Que ele não te dá o ponto de descontinuidade. |

*Quadro 13 – Excertos da entrevista de P2 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG)*

| Nome do documento | Código  | Segmento   |
|-------------------|---------|--|
| entrevista P2     | P2 – mg | Por exemplo, o que eu gosto muito de fazer com o GeoGebra, é conseguir botar aquela opção “se” lá. Botar um “if” lá”. E mostrar para os alunos que isso é possível. “Se” o ângulo for maior que noventa graus, a reta aparece assim, “se não for” a reta aparece assado. Ah, “se” a coordenada do ponto X for assim, aparece esse ponto, “se não for” não aparece. Então isso eu gosto de mostrar para os alunos. Que dá para fazer isso no GeoGebra. Mas os nossos alunos, por exemplo, não têm um curso de algoritmo de programação. Então eu tenho que...é como eu faço, primeiro eu ensino para eles, calc, excel né? Aí eu boto. Ahh se você quer dizer que seu aluno tá aprovado ou reprovado automaticamente, como é que você faz? E aí eu...pego isso e digo para eles: vale a mesma coisa lá no GeoGebra. |
| Entrevista P2     | P2 – mg | Eu preciso dele, tu entendes? Uma coisa que o GeoGebra me deixou, foi muito preguiçosa, isto também.   |
| Entrevista P2     | P2 – mg | Eu me caracterizo muito. O GeoGebra me deixou muito preguiçosa. Eu não penso mais, função tal, ahh eu vou lá e faço no GeoGebra, muito mais rápido, entende?   |
| Entrevista P2     | P2 – mg | Qual era o software que eu usava que fazia função módulo de x sobre x e fazia contínuo? Eu dizia, não, isso aqui está errado. Acho que era o maple, as primeiras versões. Isso aqui não tá legal. Então quer dizer, ele é um software que não tá bom, né? Ele faz uma reta aqui e a coisa não tá certa.  |
| Entrevista P2     | P2 – mg | É, e depois eu ia pegar dois pontos aqui e ia por exemplo, se eu fosse fazer isso aqui (ela clica na ferramenta ponto, cria um ponto sobre o eixo x), ia pegar dois pontos aqui e ia calcular aqui, a f (f é nome da primeira função que ela criou) de x de A (A seria o nome dado pelo GeoGebra ao ponto que ela criou sobre o eixo x) e a g (nome da segunda função que ela criou) de x de A, e ia verificar numericamente, ia ter de usar o CAS (ela se refere ao Sistema Computacional Algébrico do GeoGebra) de alguma forma, isso aqui ia ser uma boa exploração do CAS.   |

No quadro 14 são apresentados os excertos que evidenciam o trânsito do entrevistado P2 entre as três matemáticas: MM, ME e MG.

*Quadro 14 – Excertos da entrevista de P2 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas*

| Nome do documento | Código                        | Segmento   |
|-------------------|-------------------------------|--|
| entrevista P2     | trânsito entre as matemáticas | [...] mas a princípio, parece que elas deveriam se interceptar em algum ponto, né? (P2 e eu fazemos comentários sobrepostos e ela diz que está conferindo suas reflexões e anotações para ver se não está fazendo nada errado) Pela equação não, agora teria de fazer o gráfico pra ver, aí o que eu faria, faria o gráfico no GeoGebra. |

|               |                               |  |
|---------------|-------------------------------|--|
| Entrevista P2 | trânsito entre as matemáticas | Não, ia dizer não sei. Ah se eu precisasse afirmar, eu ia dizer, acho que sim, né? Mas pelas contas não.   |
| Entrevista P2 | trânsito entre as matemáticas | Ahh, eu confio mais nele (aponta para a tela do computador). Claro, porque eu erro. Ele erra também, pode errar. Mas eu erro mais.   |
| Entrevista P2 | trânsito entre as matemáticas | Pior que não, eu acho. (ela se põe a dar entrada com a expressão analítica da função referente ao episódio 2). Eu fiz com os alunos a reta e falei, bom, fatorei e tal e não fiz no GeoGebra o gráfico. Ó, ele não te dá a restrição de domínio, né? Será que eu fiz isso? E eu fiz o buraco... eu fiz o buraco no paint. Quer ver minha nota aqui? (ela me mostra uma prova escrita em papel com um situação similar)   |
| entrevista P2 | trânsito entre as matemáticas | Não, tanto que eu fiz aqui ó, e eu fiz o buraco, tá ali o buraquinho, eu fiz no paint. Agora que me dei conta.   |
| Entrevista P2 | trânsito entre as matemáticas | William – Tá, e esse choque então entre esse objeto esperado da mente da P2 com o objeto que o software dá? Ele está de novo no campo de se procurar entender por que é obtido e como é obtido?<br>P2 – sim, não, aqui eu acredito...<br>William – Isso afeta a confiança, a credibilidade, o pensamento?<br>P2 – O que eu vou te dizer assim, quando eu desconfio que a coisa não está certa, eu tento...ou por exemplo aqui, é claro que ia pensar mais, ia ficar pensando, ahh, mas como é que faço este gráfico? Bom, tal coisa, ahhh, quando x vai para o infinito o que acontece? Pra ter uma ideia se em algum momento isso ia...ou ia derivar, pra ver, enfim, ia ter de dar um jeito. |
| Entrevista P2 | trânsito entre as matemáticas | Exato, ia dar uma forma de conseguir enxergar o comportamento deste gráfico (aponta para a anotação do episódio 1) ia fazer, como é que vou te dizer, $f$ de $x$ igual a $x$ , eu sei como é que funciona. Como é que eu ia fazer, ia fazer um esboço deste gráfico, bom, e no momento que em que fosse fazer o esboço deste gráfico, ia ver que isso aqui era praticamente uma assíntota, bom, vai ser assíntota sempre ou não? Eu ainda estou incomodada com o resultado que deu, tu entendeu? Ou ia pegar um software, máxima por exemplo, que é um software para cálculo e ia fazer o quê? Ia jogar lá a equação e ia ver o que foi que ele deixou de ver.                                 |
| Entrevista P2 | trânsito entre as matemáticas | William – Isso (aponto para o resultado com o CAS) está mais próximo daquilo (aponto para a anotação)?<br>P2 – Está, está mais próximo. Porque o gráfico ali (aponta para representação gráfica feita pelo o GeoGebra) está me mentindo. Pelo menos é o que eu enxergo, né? Não sei se está certo ou não.  |

No quadro 15 e 16 são apresentados os excertos referentes a percepção do entrevistado P2 em relação a MG e a necessidade de compreensão da MG, respectivamente.

*Quadro 15 – Excertos da entrevista de P2 que denotam referências a percepção da MG*

| Nome do documento | Código          | Segmento   |
|-------------------|-----------------|--|
| entrevista P2     | percepção da mg | E com certeza tem muita matemática envolvida por trás desse negócio, muita mesmo. Por exemplo, como é que o cara faz a resolução dessa equação, dentro do software? Claro, tem a programação e tudo, mas como é que ele faz o gráfico? Deve ter alguma diferença entre estas duas abordagens que dá esse...  |
| entrevista P2     | percepção da mg | Por exemplo, o que eu gosto muito de fazer com o GeoGebra, é conseguir botar aquela opção “se” lá. Botar um “if” lá”. E mostrar pros alunos que isso é possível. “Se” o ângulo for maior que noventa graus, a reta aparece assim, “se não for” a reta aparece assado. Ah, “se” a coordenada do ponto X for assim, aparece esse ponto, “se não for” não aparece. Então isso eu gosto de mostrar pros alunos. Que dá pra fazer isso no GeoGebra. Mas os nossos alunos, por exemplo, não tem um curso de algoritmo de programação. Então eu tenho que...é como eu faço, primeiro eu ensino pra eles, calc, excel né? Aí eu boto. Ahh, se você quer dizer que seu aluno tá aprovado ou reprovado automaticamente, como é que você faz? E aí eu...pego isso e digo pra eles: vale a mesma coisa lá no GeoGebra. Tu consegue fazer. Então essa programação, tudo bem. Mas agora como é que foi feito o GeoGebra e tal, gostaria muito de saber, mas eu sei que eu P2, não tenho condições de entender como é que isso foi feito. |

*Quadro 16 – Excertos da entrevista de P2 que denotam referências a necessidade de compreensão da MG*

| Nome do documento | Código                           | Segmento   |
|-------------------|----------------------------------|--|
| entrevista P2     | necessidade de compreensão da mg | Eu acho que seria muito importante, eu gostaria muito de entender como é que essa coisa toda funciona. Como te falei, eu programei em pascal, eu via, eu fazia lá o negocinho e via as conicazinhas, que, adorava, achava o máximo. Mas morreu essa P2 que fazia programinha, faleceu lá em 96 quando comecei a dar aula. Tu entendeu? Porque eu não tive mais tempo pra sentar na frente do computador e ficar programando. Quando lançaram o delphi, eu achei o máximo, eu queria fazer coisa em delphi. Mas e o tempo pra programar? Eu não tinha, né? E bom, morreu. Então assim ó, hoje eu me contento em clicar no botão e ele aparecer. E tô pouco me importando como é que ele apareceu ali. Porque, bom, não tem como entender. |
| Entrevista P2     | necessidade de compreensão da mg | William – só pra confirmar, a programação, você vê valor em entender?<br>P2 – Claro, eu vejo um valor muito grande. Mas eu sei que eu não tenho...   |
| entrevista P2     | necessidade de compreensão da mg | Mas o posicionamento dela é...é relevante entender como que estes objetos são obtidos?<br>P2 – Claro que é, óbvio que é relevante. E com certeza tem muita matemática envolvida por trás desse negócio, muita mesmo. Por exemplo, como é que o cara faz a resolução dessa equação, dentro do software? Claro, tem a programação e tudo, mas como é que ele faz o gráfico? Deve ter alguma diferença entre estas duas abordagens que dá esse...   |

Nos quadros 17 são apresentados os excertos da entrevista com P2 que denotam a aparente incompreensão da MG.

*Quadro 17 – Excertos da entrevista de P2 que denotam referências a incompreensão da MG*

| Nome do documento | Código                       | Segmento  |
|-------------------|------------------------------|---|
| entrevista P2     | aparente incompreensão da mg | Então assim ó, hoje eu me contento em clicar no botão e ele aparecer. E tô pouco me importando como é que ele apareceu ali. Porque, bom, não tem como entender.   |
| Entrevista P2     | aparente incompreensão da mg | Mas agora como é que foi feito o GeoGebra e tal, gostaria muito de saber, mas eu sei que eu P2, não tenho condições de entender como é que isso foi feito.  |
| Entrevista P2     | aparente incompreensão da mg | William – o ato de não saber, interfere em alguma dimensão sobre a matemática P2 e os resultados matemáticos do GeoGebra?<br>P2 – Não, não. Mas, mas, por exemplo, em alguns momentos sim, tá? Por exemplo assim ó, se tu coloca uma função que tu sabe que não está definida naquele ponto e ele bota todo mundo contínuo. O GeoGebra já quase não faz mais isso, mas... |
| entrevista P2     | aparente incompreensão da mg | Cara, intercepta neste ponto (ela se refere a um ponto chamado de B que o GeoGebra apresenta depois dela pedir para verificar se há a intersecção entre as curvas), e é verdade isso? Agora eu fico aqui né? Na dúvida, pelo...   |
| entrevista P2     | aparente incompreensão da mg | Ahh eu espero uma reta, com um ponto no meio, um furo no ponto com x igual a um.  |
| Entrevista P2     | aparente incompreensão da mg | Eu ainda estou incomodada com o resultado que deu, tu entendeu?   |
| Entrevista P2     | aparente incompreensão da mg | Pois é, isso que ia te dizer como eu não trabalho com o CAS... (P2 abre a janela do CAS, dá entrada na igualdade das expressões das funções em questão e usa o comando resolver equação em x), como eu te falei, eu usei isso aqui umas vezes só, muito pouco. Ahh ele não me dá ninguém. E por que ele faz isso? Ele tem um erro, um bug?                                |
| Entrevista P2     | aparente incompreensão da mg | William – Isso (aponto para o resultado com o CAS) está mais próximo daquilo (aponto para a anotação)?<br>P2 – Está, está mais próximo. Porque o gráfico ali (aponta para representação gráfica feita pelo o GeoGebra) está me mentindo. Pelo menos é o que eu enxergo, né? Não sei se está certo ou não.   |
| Entrevista P2     | aparente incompreensão da mg | É, exato. Eu gostaria muito de entender, mas eu realmente não...  |

|               |                              |   |
|---------------|------------------------------|---|
| entrevista P2 | aparente incompreensão da mg | William – Tá, e esse choque então entre esse objeto esperado da mente da P2 com o objeto que o software dá? Ele está de novo no campo de se procurar entender por que é obtido e como é obtido?<br>P2 – sim, não, aqui eu acredito...<br>William – Isso afeta a confiança, a credibilidade, o pensamento?<br>P2 – O que eu vou te dizer assim, quando eu desconfio que a coisa não está certa, eu tento...ou por exemplo aqui, é claro que ia pensar mais, ia ficar pensando, ahh mas como é que faço este gráfico? Bom, tal coisa, ahhh, quando x vai para o infinito o que acontece? Pra ter uma ideia se em algum momento isso ia...ou ia derivar, pra ver, enfim, ia ter de dar um jeito. |
| Entrevista P2 | aparente incompreensão da mg | William – Mas tem algum jeito que você poderia testar dentro do GeoGebra? Pra mostrar algo em relação a este conflito do ponto? (enquanto eu pergunto, P2 se põe a usar aproximações do zoom para ver se o tal buraco realmente não aparece)<br>P2 – Ele não te dá mesmo né? É isso que estou querendo ver aqui. Eu poderia calcular a f de um. Eu ia pedir pra ele o que é a f de um, pronto, e ele vai me dar, indefinido. Tá, mas ele acaba não fazendo ou ele faz aqui, é isso que estou querendo...agora...  |

#### 4.2.3 – Análise interpretativa: entrevista com P3

A análise interpretativa com o entrevistado P3 seguiu os itens do protocolo definido e possibilitaram os resultados apresentados, a seguir.

Cabe iniciar, registrando que P3 não quis discutir o episódio 2. Para P3, estas discussões não são interessantes aos professores, alegando que existem várias outras vantagens de se utilizar o GeoGebra que acabam por superar estas limitações internas do software.

P3 estabelece seu posicionamento sobre a questão inicial pautando-se na justificativa de que o software é desenvolvido por programadores e, portanto, suscetível à falibilidade das escolhas dos desenvolvedores. P3 parece não se incomodar em tentar compreender o que está por trás destas escolhas. P3 aponta que se houverem discrepâncias entre os resultados obtidos pelo software e as considerações matemáticas de algum usuário, deve-se sempre preferir a argumentação de cunho estritamente matemático, preferencialmente de caráter algébrico. Nota-se que P3 não deseja inquirir sobre as razões e escolhas dos programadores. P3 não parece discernir entre o que é possível tratar matematicamente, no sentido abstrato e o que é possível fazer a partir das



possibilidades da matemática computacional. Entendo que sua postura abarca a caracterização do software como ferramenta alegórica, algo que permite algumas aproximações à matemática e, por conseguinte, não entende que o GeoGebra possa ser considerado mais seriamente como uma prática da matemática mais formal, serve para atividades escolares. P3, mesmo demonstrando certa surpresa ao constatar os resultados do episódio 1, afirma estar segura que seria uma situação bem particular e que pode ser corrigida com novas implementações na linguagem de programação. É possível ver que P3 já tinha uma referência que indicava que existem situações a serem evitadas quando se lida com a geometria dinâmica. Curiosamente, P3 não tentou ou sugeriu formas de explorar outras possibilidades com o GeoGebra para tentar confirmar se através de diferentes funcionalidades, seria possível discutir a existência ou não do tal ponto de intersecção. O ponto mais interessante a este pesquisador seria o fato de que P3 tem convicções bem seguras sobre a matemática do matemático e também reconhece que o GeoGebra é uma ferramenta potencialmente relevante ao contexto da matemática da escola.

Os resultados destas análises podem ser evidenciados nos excertos da entrevista com P3 nos quadros 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 e 25.

Nos quadros 18, 19 e 20 são apresentados os excertos referentes a Matemática do Matemático (MM), a Matemática da Escola (ME) e a Matemática do GeoGebra (MG), respectivamente.

*Quadro 18 – Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM)*

| Nome do document | Código  | Segmento  |
|------------------|---------|---|
| entrevista P3    | P3 – mm | Hummm... não sei dizer. Porque, assim matematicamente, eu não sei dizer se intercepta ou não. Porque uma é reta e a outra é uma coisa aí que é um gráfico de uma função meio esquisita.   |
| Entrevista P3    | P3 – mm | Não, se você vai por um outro caminho né? Algébrico. E você vê matematicamente que realmente não há intersecção e o software está dando uma intersecção, qual é o problema? Eu acho que você tem que acreditar naquilo que você fez, e não no software. |

*Quadro 19 – Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a Matemática da Escola (ME)*

| <b>Nome do documento</b> | <b>Código</b> | <b>Segmento</b>   |
|--------------------------|---------------|---|
| entrevista P3            | P3 – me       | Porque o software é um auxiliar. É uma ferramenta que complementa aquilo que você... uma compreensão melhor. Por exemplo, se eu vou nesse negócio aí, ah, mas eu quero compreender melhor. Pô, mas algebricamente eu estou vendo que não tem intersecção, agora o software me dá intersecção. Evidentemente num estudo... porque não é simples eles trabalharem com esse tipo de função do e elevado a não sei o que. Para os professores é complicado, tá certo? |
| Entrevista P3            | P3 – me       | Eu acho que esse é um ótimo sistema para a gente poder mostrar que o software não é perfeito. Nenhum software é perfeito.   |

*Quadro 20 – Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG)*

| <b>Nome do documento</b> | <b>Código</b> | <b>Segmento</b>  |
|--------------------------|---------------|--|
| entrevista P3            | P3 – mg       | Eu acho que eles têm que entender, e isso eu sempre também digo, que atrás desse software tem uma equipe de programadores de pessoas que fizeram o software. E pessoas são pessoas, elas podem errar.  |
| Entrevista P3            | P3 – mg       | Pois é, mas agora veja bem, se eu quero uma intersecção eu clico nesse objeto e clico nesse aqui. Antes disso eu vou apagar o seu ponto... Eu quero uma intersecção (P3 refaz a obtenção do ponto de intersecção utilizando a macro, parece que precisa confirmar que existe um ponto de intersecção se utilizarmos o GeoGebra) ... eu clico aqui e clico aqui, apareceu um ponto ele pode dizer... Ahhh, tem intersecção. Como é que apareceu esse ponto? |

No quadro 21 são apresentados os excertos que evidenciam o trânsito do entrevistado P3 entre as três matemáticas: MM, ME e MG.

*Quadro 21 – Excertos da entrevista de P3 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas*

| Nome do documento | Código                        | Segmento  |
|-------------------|-------------------------------|---|
| entrevista P3     | trânsito entre as matemáticas | Estão ali atrás, são programadores e evidentemente o que é muito discutido por exemplo: ah, eu vou demonstrar que um triângulo, um determinado teorema no GeoGebra por exemplo. Eles tem que entender que na demonstração formal de um teorema, por mais que você mova a construção que você fez pra ver se vale, você não consegue fazer todas as opções possíveis no software. Então isso demonstra que por mais que você mexa e vê isso é verdade é verdade é verdade... Pode ter uma situação onde não vai valer. Dependendo do lugarzinho que você for lá na tela, pronto furou né, não vale mais. E ele tem que entender que a matemática... o software não demonstra, ele mostra. Agora na matemática trabalhando formalmente, você tem que trabalhar com as propriedades da matemática, agora isso é muito discutido hoje em dia! |
| Entrevista P3     | trânsito entre as matemáticas | Mas tem que entender que alguém lá atrás fez o software. Por exemplo, se você quer mostrar um número que é irracional, mas ai vai ter só quinze casas decimais, como é que eu faço? Será que lá na frente esse número vai ser irracional mesmo? Então sempre tem que entender, pelo menos os professores tem que entender que atrás desse software tem pessoas que programaram, que fizeram e evidentemente as vezes algum erro pode acontecer. Quer dizer, não ficar maravilhado que tudo vai dar certo, pode acontecer de não dar certo alguma coisa. Mas ele não está aí pra mostrar que tem que dar certo tudo. Ele está aí pra te ajudar em algumas situações. Você não está ali pra descobrir bug ou que não vai dar certo ali.   |
| Entrevista P3     | trânsito entre as matemáticas | Se não é... ele tem que ir pelo argumento matemático e não pelo que o software está fazendo. Matematicamente se não tem intersecção, como é que o software está dando uma intersecção.  |
| Entrevista P3     | trânsito entre as matemáticas | William: E se eu estivesse trabalhando com a senhora e você estivesse me colocando numa situação onde o GeoGebra fosse uma complementação do meu trabalho. Então eu trabalho tradicionalmente com lápis e papel. E a senhora me sugeriu, use o GeoGebra pra te apoiar a verificar os seus resultados. A senhora diria que seria impossível que eu tivesse um choque epistêmico ou uma quebra de confiança, credibilidade. Ou será que eu ia me apoiar em alguma posição como de crença... eu acredito que o software...<br>P3: Não, se você vai por um outro caminho né? Algébrico. E você vê matematicamente que realmente não há intersecção e o software está dando uma intersecção qual é o problema? Eu acho que você tem que acreditar naquilo que você fez, e não no software. Porque tem pessoas atrás disso, e elas podem errar. |

|               |                               |   |
|---------------|-------------------------------|---|
| Entrevista P3 | trânsito entre as matemáticas | <p>William: Não era para existir, mas apareceu. É uma situação interessante? Potencialmente interessante?</p> <p>P3: É bastante interessante, tem um artigo que você talvez possa até procurar, que é do Michael Divilie... na África do Sul. Ele tem um artigo que chama assim: As armadilhas da geometria dinâmica. Então ele trás várias situações onde acontece isso daí que você está propondo. Que pode te enganar. Então por exemplo te uma das situações que vai lá pra não sei quantas casas decimais e depois mostra que não... É um problema da programação. Eu acho ótimo que isso aconteça, pois mostra que o software não é perfeito. Você tem que confiar no conteúdo matemático, nas propriedades matemáticas. E se você está fazendo ali algebricamente, ah tem intersecção, ah não tem intersecção. Se não tem intersecção por que é que ponto aparece? Se o ponto apareceu é porque tem erro de programação. Pra mim é tranquilo aceitar isso daí.</p> |
|---------------|-------------------------------|---|

No quadro 22 e 23 são apresentados os excertos referentes a percepção do entrevistado P3 em relação a MG e a necessidade de compreensão da MG, respectivamente.

*Quadro 22 – Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a percepção da MG*

| Nome do documento | Código          | Segmento   |
|-------------------|-----------------|--|
| entrevista P3     | percepção da mg | Eu acho que eles tem que entender, e isso eu sempre também digo, que atrás desse software tem uma equipe de programadores de pessoas que fizeram o software. E pessoas são pessoas, elas podem errar.  |
| Entrevista P3     | percepção da mg | <p>William: Mas eu posso errar? Na minha decisão. São considerações. Quem estaria certo? Como lidar com uma situação como essa? Quando o software confirmar o que eu fiz algebricamente, eu vou confiar nele? Eu vou acreditar? Ele tem credibilidade? Digamos que eu quero construir conceitos, acredito que há um momento que a gente olha pro resultado do software e aposta nele.</p> <p>P3: Eu acho que a gente nunca pode confiar cem por cento no software. A minha posição é essa! Definitivamente, cem por cento não pode confiar. Porque o software é um auxiliar. É uma ferramenta que complementa aquilo que você... uma compreensão melhor. Por exemplo, se eu vou nesse negócio aí, ah mas eu quero compreender melhor. Pô, mas algebricamente eu estou vendo que não tem intersecção, agora o software me dá intersecção. Evidentemente num estudo... porque não é simples eles trabalharem com esse tipo de função do e elevado a não sei o que. Para os professores é complicado, tá certo?</p> |

*Quadro 23 – Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a necessidade de compreensão da MG*

| Nome do documento | Código                           | Segmento   |
|-------------------|----------------------------------|--|
| entrevista P3     | necessidade de compreensão da mg | Eu acho que eles têm que entender, e isso eu sempre também digo, que atrás desse software tem uma equipe de programadores de pessoas que fizeram o software. E pessoas são pessoas, elas podem errar. Estão ali atrás, são programadores e evidentemente o que é muito discutido, por exemplo: ah, eu vou demonstrar que um triângulo, um determinado teorema no GeoGebra por exemplo. Eles têm que entender que na demonstração formal de um teorema. Por mais que você mova a construção que você fez pra ver se vale. Você não consegue fazer todas as opções possíveis no software. Então isso demonstra que por mais que você mexa e vê isso é verdade é verdade é verdade... Pode ter uma situação onde não vai valer. Dependendo do lugarzinho que você for lá na tela, pronto furou né, não vale mais. E ele tem que entender que a matemática... o software não demonstra, ele mostra. Agora na matemática trabalhando formalmente, você tem que trabalhar com as propriedades da matemática, agora isso é muito discutido hoje em dia! Alguns autores já aceitam a demonstração pelo software, então é uma coisa que ainda está discutida. Mas tem que entender que alguém lá atrás fez o software. Por exemplo, se você quer mostrar um número que é irracional, mas ai vai ter só quinze casas decimais, como é que eu faço? Será que lá na frente esse número vai ser irracional mesmo? Então sempre tem que entender, pelo menos os professores tem que entender que atrás desse software tem pessoas que programaram, que fizeram e evidentemente as vezes algum erro pode acontecer. Quer dizer, não ficar maravilhado que tudo vai dar certo, pode acontecer de não dar certo alguma coisa. Mas ele não está aí pra mostrar que tem que dar certo tudo. Ele está aí pra te ajudar em algumas situações. Você não está ali pra descobrir bug ou que não vai dar certo ali. |
| Entrevista P3     | necessidade de compreensão da mg | William: Mas eu posso errar? Na minha decisão. São considerações. Quem estaria certo? Como lidar com uma situação como essa? Quando o software confirmar o que eu fiz algebricamente, eu vou confiar nele? Eu vou acreditar? Ele tem credibilidade? Digamos que eu quero construir conceitos, acredito que há um momento que a gente olha para o resultado do software e aposta nele.<br>P3: Eu acho que a gente nunca pode confiar cem por cento no software. A minha posição é essa! Definitivamente cem por cento não pode confiar. Porque o software é um auxiliar. É uma ferramenta que complementa aquilo que você... uma compreensão melhor. Por exemplo, se eu vou nesse negócio aí, ah mas eu quero compreender melhor. Pô, mas algebricamente eu estou vendo que não tem intersecção, agora o software me dá intersecção. Evidentemente num estudo... porque não é simples eles trabalharem com esse tipo de função do e elevado a não sei o que. Para os professores é complicado, tá certo?  |

Nos quadros 24 e 25 são apresentados os excertos que denotam referência a aparente compreensão da MG e a aparente incompreensão da MG, respectivamente, pelo entrevistado P3.

*Quadro 24 – Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a aparente compreensão da MG*

| Nome do documento | Código                  | Segmento  |
|-------------------|-------------------------|---|
| entrevista P3     | aparente compreensão mg | Eu acho que eles tem que entender, e isso eu sempre também digo, que atrás desse software tem uma equipe de programadores de pessoas que fizeram o software. E pessoas são pessoas, elas podem errar. |
| Entrevista P3     | aparente compreensão mg | Eu acho que esse é um ótimo sistema pra gente poder mostrar que o software não é perfeito. Nenhum software é perfeito.  |

*Quadro 25 – Excertos da entrevista de P3 que denotam referências a aparente incompreensão da MG*

| Nome do documento | Código                       | Segmento   |
|-------------------|------------------------------|--|
| entrevista P3     | aparente incompreensão da mg | <p>Mas qual a sua intenção de perguntar se intercepta ou não? Você quer que eu verifique no software?</p> <p>William: Esse episódio é retirado... eu escolhi, para conversar sobre essa posição de cada um, se é preciso ou não compreender como que se obtém os objetos. Porque ele foi apresentado na RPM acredito que no número setenta. Em que o autor defende que é possível verificar que essas duas expressões não se interceptariam, que uma possibilidade de fazer isso é igualar as expressões analíticas e aí você termina com a equação e elevado a menos x é igual a zero. E por mais que o valor de x cresça o resultado do quociente converge pra zero, mas nunca será zero. Aí ele diz: quando a gente pede pro software, se a gente olhar aqui, o ponto A foi obtido com uma intersecção.</p> <p>P3: Pois é, mas agora veja bem, se eu quero uma intersecção eu clico nesse objeto e clico nesse aqui. Antes disso eu vou apagar o seu ponto... Eu quero uma intersecção (Operando o software) ... eu clico aqui e clico aqui, apareceu um ponto ele pode dizer... ahhh, tem intersecção. Como é que apareceu esse ponto?</p> |
| Entrevista P3     | aparente incompreensão da mg | Se não é... ele tem que ir pelo argumento matemático e não pelo que o software está fazendo. Matematicamente se não tem intersecção, como é que o software está dando uma intersecção?   |
| Entrevista P3     | aparente incompreensão da mg | <p>William: E procurar explicar o porquê que o software chegou à intersecção, qual o seu posicionamento sobre isso?</p> <p>P3: Porque existem pessoas ali atrás, alguém que está programando, e alguma coisa não está certa na programação, tem que arrumar. Como é que pode dar uma intersecção se não existe?</p>  |

#### 4.2.4 – Análise interpretativa: entrevista com P4

A partir da análise interpretativa e seguindo os itens do protocolo de análise definido, o entrevistado P4 proporcionou os resultados a seguir.

Nesta entrevista, falei muito mais do que em comparação as outras entrevistas. Tal comportamento se deu em razão de passarmos por prolongados momentos de silêncio. Acabei por adotar uma estratégia mais incisiva, para que pudéssemos ir tentando estimular cada vez mais o diálogo. P4 se mostra um dos usuários com interesses mais diferentes em relação aos usos que ele propõe para o GeoGebra. Em outros momentos, os quais não estão registrados nesta parte da entrevista, P4 afirma que pretende usar o GeoGebra para além de ensinar ou aprender matemática, pretende trabalhar em outras direções e significados. De qualquer modo, é importante apontar que P4 também se mostra surpreso com os resultados obtidos nos dois episódios.

Em relação ao que ele denominou ser um rigor matemático do GeoGebra, pode-se dizer que P4 passou a questionar os objetos obtidos e a buscar entender os processos internos do GeoGebra. P4 acredita que tal compreensão poderá lhe permitir falar com um público maior e realizar construções e atividades, para além do que ele entende serem comumente encontradas nas escolas. P4 também admite que a compreensão da matemática do GeoGebra, acaba por ser relevante para se trabalhar com atividades da sala de aula e para fazer matemática.

Em resposta a primeira questão desta parte da entrevista, P4 ressalta que conhece construções tão sofisticadas que para compreendê-las ou até mesmo reproduzi-las, é preciso ampliar sua leitura da linguagem e do processo de funcionamento que ele afirma ser implícito. P4 registra que sua prática com a linguagem, a qual ele denomina como sendo especificamente do GeoGebra, é o que melhor lhe guia para produzir e pensar. E este é um dos apontamentos mais interessantes que ressaltamos em relação a esta entrevista.

Por fim, é interessante notar que P4 não deixa de apontar formas diferentes de tentar explicar ou explorar as razões que levam o GeoGebra a apresentar os resultados que fornece no que toca ao episódio 1.

Os resultados destas análises podem ser evidenciados nos excertos da

entrevista com P4 nos quadros 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 e 33.

Nos quadros 26, 27 e 28 são apresentados os excertos referentes a Matemática do Matemático (MM), a Matemática da Escola (ME) e a Matemática do GeoGebra (MG), respectivamente.

*Quadro 26 – Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM)*

| Nome do documento | Código  | Segmento   |
|-------------------|---------|--|
| entrevista P4     | P4 – mm | <b>William</b> – Por quê? Até essa dualidade de informações faria o matemático dizer, não, não gosto disso.<br><b>P4</b> – Até isso.   |
| Entrevista P4     | P4 – mm | <b>William</b> – Tenta outro, pois na verdade está no roteiro. (Nos colocamos a tratar do episódio 2). Olhando só na expressão, você já esperaria o gráfico que a gente tá tendo?<br><b>P4</b> – Sim. Falar com certeza, né? Sim, esperaria.<br><b>William</b> – Por que?<br><b>P4</b> – Eu estou pensando na simplificação que eu vou fazer em relação a x ao quadrado menos um, podendo ser separado em dois polinômios, x mais um vezes x menos um.<br><b>William</b> – esse gráfico que nós temos, corresponde ao gráfico que você abstrairia se estivesse no espaço, na atividade de matemática somente?<br><b>P4</b> – Sim.  |
| Entrevista P4     | P4 – mm | <b>William</b> – Como matemático, há restrição, olhando para aquela expressão? Como é que a gente fala, o domínio daquela função.<br><b>P4</b> – Sim. Pensando... do que eu lembro, se eu não fosse considerar a simplificação, não, não sei se vou lembrar disso. Eu me lembro que para trabalhar com limite, a gente, o limite dessa função, por exemplo, tendendo a um, eu tinha que fazer a simplificação para poder depois aplicar o limite.<br><b>William</b> – Isso. Que aí, nesse caso existiria o limite né?<br><b>P4</b> – Nesse caso existiria o limite.<br><b>William</b> – Porque se a gente fizer tender a zero, vai dar zero sobre zero, era isso que você lembrava?<br><b>P4</b> – Era isso mesmo. |
| Entrevista P4     | P4 – mm | <b>William</b> – Um exercício clássico do cálculo, é, o domínio, diria um matemático, você pode concordar ou discordar, seria dizer qual é o conjunto de todos os valores possíveis para x, isso dentro do conjunto dos números reais, ainda né ( <b>P4</b> acena afirmativamente com a cabeça), que seriam permitidos ( <b>P4</b> fala rapidamente sim). No caso, para pensar nessa expressão, o matemático sempre chama a atenção, ó, não dá para ser todos os reais porquê...<br><b>P4</b> - O um não pode ser.   |
| Entrevista P4     | P4 – mm | <b>William</b> – Aí você me cria uma nova pergunta. Para estabelecer credibilidade do programa que eu tenho que fazer isso?<br><b>P4</b> – Não, nem tanto para estabelecer credibilidade.<br><b>William</b> – para aprender melhor? Para aprender mais corretamente? Para aproximar melhor? Sabe esse exercício, agora, você me deixou fascinado.<br><b>P4</b> – Eu acho que, é para continuar atendendo a necessidade. Enquanto matemático.   |



*Quadro 27 – Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a Matemática da Escola (ME)*

| Nome do documento | Código  | Segmento   |
|-------------------|---------|--|
| entrevista P4     | P4 – me | Nesse caso aqui, por estar trabalhando com ... quando você me falou, define a função, já estava pensando que está num diálogo bem próximo. Talvez se a gente considerar uma matemática, que o professor de matemática usa na sala, é, desconsiderando todo aquele formalismo e que permite, por exemplo, resolver equações por balanças de dois pratos, sim, então é matemática. |

*Quadro 28 – Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG)*

| Nome do documento | Código  | Segmento  |
|-------------------|---------|---|
| entrevista P4     | P4 – mg | Deixa eu pensar. (P4 começa a manipular a janela de visualização com a ferramenta mover do GeoGebra, e eu pergunto “você moveu pra..?”) A princípio eu movi, pra, talvez eu vejo o comportamento da função, é uma possibilidade   |
| entrevista P4     | P4 – mg | Para mim a primeira possibilidade seria verificar o comportamento da função na questão gráfica, talvez uma outra possibilidade seja construir controles deslizantes, e que obtenha valores, né? Vamos pensar, por exemplo, aqui (ele cria um controle deslizante e um número resultante da aplicação da função ao valor deste controle), vamos dizer que eu tenho um numero b que seja igual a um f do a, tenho um numero c que seja igual a g de a. Pelo resultado que o GeoGebra nos fornece, eles coincidem. |
| Entrevista P4     | P4 – mg | Não, não, como eu disse, não tinha pensado nessas possibilidades, né? Mas sim, né? Essas possibilidades geram uma nova necessidade. De por que aprender como essas coisas funcionam.  |

No quadro 29 são apresentados os excertos que evidenciam o trânsito do entrevistado P4 entre as três matemáticas: MM, ME e MG.

*Quadro 29 – Excertos da entrevista de P4 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas*

| Nome do documento | Código                        | Segmento  |
|-------------------|-------------------------------|---|
| entrevista P4     | trânsito entre as matemáticas | Nesse caso aqui, por estar trabalhando com...quando você me falou, define a função, já estava pensando que está num diálogo bem próximo. Talvez se a gente considerar uma matemática, que o professor de matemática usa na sala, é, desconsiderando todo aquele formalismo e que permite por exemplo, resolver equações por balanças de dois pratos, sim, então é matemática.   |
| entrevista P4     | trânsito entre as matemáticas | William – Eu vou aqui induzir, mas induzir a questão matemática, é, uma possibilidade é pegar as expressões analíticas e compara-las, né? Porque se nós estamos tratando de duas expressões com uma só variável independente, então, se eu iguala-las. Você toparia fazer isso no papel? (P4 concorda) Então se eu as igualar, eu posso fazer este exercício de análise. É uma equação, estou admitindo que ela é válida, então se eu fizer passagens válidas para obter equações equivalentes, por exemplo, você está subtraindo x em ambos os membros...essa equação final, ela te diz alguma coisa?<br>P4 – Me diz no sentido que eu posso, é, ao tender ao infinito esse x, ele vai resultar zero, certo?<br>William – A principio, eu dialogando com você, eu diria que não, tá? Porque pra mim o ente matemático, por menor que seja a grandeza, ela ainda é diferente de zero, então, diria um professor de cálculo que o limite pode ser zero, mas jamais vamos ter o resultado dessa divisão igual a zero.<br>P4 – Aí você vê como o resultado é diferente do que apresentado aqui (ele aponta para a tela do computador). |
| Entrevista P4     | trânsito entre as matemáticas | William – Esse é um ponto legal. O GeoGebra já tinha estabelecido com você um estado de credibilidade?<br>P4 – sim.<br>William – Você tinha uma segurança quando transitava do objeto GeoGebra, objeto matemático? Agora, aqui durante a entrevista, isso apareceu como uma ideia que você vai pensar? É isso?<br>P4 – é, apareceu como uma ideia de que até quando eu for...pensando ainda na questão de compreender o modo pelo qual a gente obtém essas coisas, o processo que o GeoGebra executa internamente e que me resulta em resultados como esse aqui por exemplo.  |
| Entrevista P4     | trânsito entre as matemáticas | William – Se uma das necessidades fosse, pelo GeoGebra, melhorar a compreensão do ente matemático?<br>P4 – Isso, isso. Daí eu precisaria. Do contrário, para essa funcionalidade, daí eu vejo que talvez tenham outras necessidades, aí sim pra uma credibilidade. Mas eu não estou considerando isso. Essa questão da credibilidade. Estou considerando que alguém poderia considerar. Isso pra mim não seria motivo suficiente pra me lançar em um estudo sobre a programação em Java, que é o que estrutura. Mas pensando em atividades de sala de aula, pensando em fazer matemática, sim.  |

Nos quadros 30 e 31 são apresentados os excertos referentes a percepção do entrevistado P4 em relação a MG e a necessidade de compreensão da MG, respectivamente.

*Quadro 30 – Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a percepção da MG*

| Nome do documento | Código          | Segmento   |
|-------------------|-----------------|--|
| entrevista P4     | percepção da mg | <p>William – Tá, mas se você fosse esse matemático que diz que é falho, é motivo pra abandoná-lo?</p> <p>P4 – Pra abandonar não.</p> <p>William – É o que? Motivo pra corrigi-lo?</p> <p>P4 – É motivo pra ficar atento, tendo em vista a minha necessidade, então, né? É motivo pra ficar atento porque agora eu passo a considerar de que se ele, tá cometendo esse erro em relação ao que a gente faz com conta, pensando no objeto matemático, no resultado que um matemático daria, então é questão de eu ficar mais atento a outros resultados que o GeoGebra pode fornecer.</p>   |
| Entrevista P4     | percepção da mg | <p>William – Se uma das necessidades fosse, pelo GeoGebra, melhorar a compreensão do ente matemático?</p> <p>P4 – Isso, isso. Daí eu precisaria. Do contrário, para essa funcionalidade, daí eu vejo que talvez tenham outras necessidades, aí sim pra uma credibilidade. Mas eu não estou considerando isso. Essa questão da credibilidade. Estou considerando que alguém poderia considerar. Isso pra mim não seria motivo suficiente pra me lançar em um estudo sobre a programação em Java, que é o que estrutura. Mas pensando em atividades de sala de aula, pensando em fazer matemática, sim.</p> <p>William – Mas é uma frente então, se a gente se constituir como pessoas que estudam matemática e trabalham a partir do GeoGebra?</p> <p>P4 – Sim, é uma frente. Uma possibilidade. E eu não tinha me atentado a isso.</p> |

*Quadro 31 – Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a necessidade de compreensão da MG*

| <b>Nome do documento</b> | <b>Código</b>                    | <b>Segmento</b>  |
|--------------------------|----------------------------------|--|
| entrevista P4            | necessidade de compreensão da mg | Esse interesse, eu sei dizer quando ele começou. Porque foi vendo coisas deste tipo do Daniel Mentrard, vendo coisas do tipo de um turco, que participa do grupo do GeoGebra, que o canal dele é Mesut Topal. Ele faz também umas coisas impressionantes. Visualmente falando, é o que impressiona. E coisas que eu vejo que se eu estivesse, hoje, o conhecimento de como elas funcionam internamente, que comandos estão sendo executados, enquanto eu estou utilizando uma destas ferramentas que tem uma função pré estabelecida, é, seria mais fácil. Seria pra mim, abrir um mundo de possibilidades que hoje eu não tenho ainda. Eu tenho possibilidades em relação a, vamos dizer assim, mais avançada, em relação a programação na linguagem que o GeoGebra compreende, a linguagem que ele reconhece e executa, que é uma linguagem própria dele, com os comandos, executando comandos que ele tem aqui, mas não numa linguagem estrutural no sentido de que o faz como um programa que seja o java, né? Então, sim, eu vejo essa necessidade, é uma das coisas que eu quero estudar, pra, que eu acho que me abre possibilidades, não somente em relação a construção, aos objetos que poderei realizar depois de dominar um pouco, é, a linguagem de programação. Mas em relação a discussão também, a discussão voltada para o ensino, ou em relação a dialogar com pessoas da área de programação, com mais elementos pra poder falar, que não seja apenas aqueles elementos que empiricamente eu vou mexendo e vou obtendo resultados, sem me dar conta ou sem me questionar sobre o modo como internamente eles funcionam. |
| Entrevista P4            | necessidade de compreensão da mg | William – Esse é um ponto legal. O GeoGebra já tinha estabelecido com você um estado de credibilidade?<br>P4 – sim.<br>William – Você tinha uma segurança quando transitava do objeto GeoGebra, objeto matemático? Agora, aqui durante a entrevista, isso apareceu como uma ideia que você vai pensar? É isso?<br>P4 – é, apareceu como uma ideia de que até quando eu for...pensando ainda na questão de compreender o modo pelo qual a gente obtém essas coisas, o processo que o GeoGebra executa internamente e que me resulta em resultados como esse aqui por exemplo.   |
| Entrevista P4            | necessidade de compreensão da mg | Não, não, como eu disse, não tinha pensado nessas possibilidades, né? Mas sim, né? Essas possibilidades geram uma nova necessidade. De por que aprender como essas coisas funcionam.   |

Nos quadros 32 e 33 são apresentados os excertos que denotam referência a aparente compreensão da MG e a aparente incompreensão da MG, respectivamente, pelo entrevistado P4.

*Quadro 32 – Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a aparente compreensão da MG*

| Nome do documento | Código                     | Segmento  |
|-------------------|----------------------------|---|
| entrevista P4     | aparente compreensão da mg | <p>Não tinha considerado por esta questão. Eu não tinha, até hoje eu não tinha, vamos dizer assim, desconfiado de um rigor matemático do GeoGebra. Eu sei...</p> <p>William – Você vê isso como falha? O programa tá bugado?</p> <p>P4 – Eu vejo como falha se a gente considerar a perspectiva de um matemático, né? Se eu considerar a perspectiva de quem está considerando isto como uma falha, para um matemático sim. Levando em consideração o rigor matemático, sim, é uma falha. Levando em consideração outras possibilidades, não.</p>   |
| Entrevista P4     | aparente compreensão da mg | <p>William – Se uma das necessidades fosse, pelo GeoGebra, melhorar a compreensão do ente matemático?</p> <p>P4 – Isso, isso. Daí eu precisaria. Do contrário, para essa funcionalidade, daí eu vejo que talvez tenham outras necessidades, aí sim pra uma credibilidade. Mas eu não estou considerando isso. Essa questão da credibilidade. Estou considerando que alguém poderia considerar. Isso pra mim não seria motivo suficiente pra me lançar em um estudo sobre a programação em Java, que é o que estrutura. Mas pensando em atividades de sala de aula, pensando em fazer matemática, sim.</p> |

*Quadro 33 – Excertos da entrevista de P4 que denotam referências a aparente incompreensão da MG*

| Nome do documento | Código                       | Segmento   |
|-------------------|------------------------------|--|
| entrevista P4     | aparente incompreensão da mg | <p>William – É, e é esse exercício que eu estou tendo muita sorte com você, Porque você está fazendo ele exatamente sabendo distinguir, olhar para os objetos. Então, um matemático afirmaria...esse exercício é tirado da RPM, eu já vou lembrar o numero, mas depois eu faço questão de te mostrar, e o professor chama muita a atenção, ele diz, cuidado, vocês estão usando o GeoGebra...cuidados ao usar o computador. Então ele falou que esse é um cuidado. É, vamos voltar ao GeoGebra. Você sabe que a gente tem como fazer a intersecção aqui (aponto para a entrada de comandos) e tem como fazer a intersecção aqui (aponto para a ferramenta intersecção), por favor use.</p> <p>P4 – Ele deu um ponto. A partir do qual ele se...</p> <p>William – E o matemático vai dizer não, não existe valor de x de tal forma que nós consigamos satisfazer esta equação. O GeoGebra diz que sim. É nesse sentido que eu estava te perguntando, é importante eu entender como ele obtém esse processo? Porque se</p> |

|               |                              |  |
|---------------|------------------------------|--|
|               |                              | <p>eu ensinar pro meus alunos que ele observa a intersecção...por favor, comece a escrever o comando “intersecção”, a gente teria...ó (aparecem as variações de intersecções que são possíveis fazer como GeoGebra, a partir da entrada de comandos), então se a gente fosse discutir estas diferentes opções, veríamos que tem diferentes processos, que também não entendemos o que está por trás. Uma outra possibilidade é na janela CAS (P4 abre a janela e começa a experimentar o mesmo comando), comece a escrever a intersecção, ó lá, intersecção função, função, ai a gente pode usar só os nomes é isso né?</p> <p>P4 – Sim, acho que assim já basta. Aqui ele disse não (aparece o ponto de interrogação na janela CAS). Não tinha considerado esta possibilidade.</p> <p>William – É, por isso que o que estou tentando fazer aqui, não é testando o quanto a gente conhece ou não o GeoGebra, até porque este é um exemplo que você não viu. Nossa, devem existir bilhares, né? Imagina combinar os comandos?</p> <p>P4 – Sim, e possibilidades de comandos que ele resulta em um ponto, ou ele resulta, por exemplo aqui (aponta e clica para os valores que ele criou para comparar os resultados do mesmo controle deslizante aplicado nas funções em discussão) com... aqui ele tá me dando o valor.</p> <p>William – Ahhh, ele calculou, ele disse que consegue ó. E tá coincidindo. Eu também faria o mesmo pensamento que você, então existe. Ele disse ó, aqui tem uma ferramenta que se eu cliquei, você clicou nos dois objetos, e ele nos dá definido. Eu não estou querendo te perguntar por que. Aliás professor, mais um exercício de responder. O que me interessa aqui, é pensar nisso, a gente precisa então, entender o que foi feito pra ele chegar aqui, por exemplo, a este ponto de interrogação? Você aceita isso? Lá no argumento você falou, seu posicionamento é de que precisamos saber, né?</p> <p>P4 – Não tinha considerado por esta questão. Eu não tinha, até hoje eu não tinha, vamos dizer assim, desconfiado de um rigor matemático do GeoGebra. Eu sei...</p> |
| entrevista P4 | aparente incompreensão da mg | Deixa eu pensar. (P4 começa a manipular a janela de visualização com a ferramenta mover do GeoGebra, e eu pergunto “você moveu pra?) A principio eu movi, pra, talvez eu vejo o comportamento da função, é uma possibilidade.  |

#### 4.2.5 – Análise interpretativa: entrevista com P5

A análise interpretativa com o entrevistado P5 seguindo os itens do protocolo definido possibilitaram aos resultados apresentados, a seguir.

P5 se mostrou um usuário que faz questão de enunciar suas posições sobre como é relevante a compreensão do funcionamento interno de qualquer software com fins educacionais, reconhece que existe uma linguagem peculiar e característica, quando se trata de usar o GeoGebra para lidar com matemática. É

importante salientar que P5 estabelece a necessidade de se considerar em qual estágio, está um usuário do GeoGebra; aos professores, P5 reconhece que é indispensável esta tarefa.

As responsabilidades docentes para com o aprendizado dos alunos é o seu argumento principal. Para P5, qualquer professor tem de estar preparado para lidar com as respostas que o GeoGebra oferece. P5 entende que é preciso buscar lidar com aspectos de linguagens de programação e apesar de parecer se surpreender com o resultado do episódio 1, logo aponta que é importante buscar contornar. P5 não entende que a limitação tratada seja um problema intransponível, ele aponta que, reconhecendo que há um processo numérico por trás, quando um professor encontrar uma limitação desta natureza, é importante salientar a natureza alegórica das representações figurativas e através da MM, apontar que o que está se buscando é exemplificar formas de se chegar às abstrações matemáticas.

P5 afirma já conhecer as limitações referentes ao episódio 2, e aponta que se o usuário conhecer o aspecto dos atributos e edição de imagens dos objetos no GeoGebra, o problema está resolvido, no sentido de representar adequadamente. Outro ponto interessante, P5 explica que o resultado do episódio 2 é uma questão de limitação tanto do GeoGebra, quanto de qualquer tecnologia. Ele frisa que alguns significados estritamente matemáticos, não podem ser representados, devido ao caráter particular da MM, considerando-os como conceitos estritamente ideais.

Os resultados destas análises podem ser evidenciados nos excertos da entrevista com P5 nos quadros 34, 35, 36, 37, 38, 39 e 40.

Nos quadros 34, 35 e 36 são apresentados os excertos referentes a Matemática do Matemático (MM), a Matemática da Escola (ME) e a Matemática do GeoGebra (MG), respectivamente.

**Quadro 34 – Excertos da entrevista de P5 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM)**

| Nome do documento | Código  | Segmento   |
|-------------------|---------|--|
| entrevista P5     | P5 – mm | Porque vai dar e elevado a menos x igual a zero e não tem a solução  |
| entrevista P5     | P5 – mm | Antes disso, o matemático P5... há intersecção?<br>P5: não tem, né, porque se você resolve aí fica elevado a menos x igual a zero, elevado a menos x igual a zero não vai  |
| entrevista P5     | P5 – mm | Primeiro é assim, né, você precisa ver se isso é ... se isso é contornável ou não, né? Porque assim, tem coisas que não tem jeito, se você usa, tem um processo numérico, matemático por detrás.   |
| Entrevista P5     | P5 – mm | Aí você fala isso é um ponto? Tem toda uma discussão, né? Que a própria maneira de como você vê um gráfico como uma folha de papel, ou desenhado no computador, não é o gráfico da função, aí triângulos não existem, retas não existem, pontos não existem... |
| entrevista P5     | P5 – mm | A expressão analítica tem, de repente, mais valor que...<br>P5: É, sim, com certeza...   |

**Quadro 35 – Excertos da entrevista de P5 que denotam referências a Matemática da Escola (ME)**

| Nome do documento | Código  | Segmento  |
|-------------------|---------|---|
| entrevista P5     | P5 – me | O professor sem dúvida, porque ele tem que conhecer as limitações que o software tem, ou as regras que o software usa, então o computador manda... faz aquilo que você mandou fazer, né, dentro do que ele foi programado, então você tem que entender isso.  |
| Entrevista P5     | P5 – me | Um aluno, você... eu não começaria, você primeiro mostra o que funciona, o tranquilo, né? Numa etapa final você começa a mostrar onde a tecnologia começa a falhar, né, tá certo? Então, eu diria que tem que saber, mas dependendo da pessoa tem o momento certo de saber essas coisas, né?  |
| Entrevista P5     | P5 – me | é que assim, tem que tomar cuidado com a pergunta, com a pergunta pontual, né, porque isso se insere num contexto, depende do você tá querendo fazer, né? Então... é... difícil dar uma resposta pra uma pergunta fora... precisaria ter um contexto, porque você tá querendo fazer o quê? Eu estou ensinando matemática básica, aí vou querer falar de funções quadráticas, e aí eu preciso falar desse tipo? Nem que você pegue uma função quadrática muito esquisita, com coeficientes super esquisitos, então eu acho que cabe... quer dizer, tem que pensar no que você tá querendo fazer, no qual objetivo que você quer, né, |
| entrevista P5     | P5 – me | Então, é o que... claro que quando eu falo isso com meus alunos, né, é... eu até faço uma provocação anterior, né, eu costumo falar assim pros meus alunos, primeiro dia de aula “quem for lá na frente no quadro e me desenhar um ponto passa na minha disciplina com dez, vai lá e me desenha um ponto”, tá certo? Vai lá o aluno inocente  |
| entrevista P5     | P5 – me | É, mas eu uso como uma mímica do que tradicionalmente ele vê no livro, né, tradicionalmente como as pessoas fazem, né, então, por exemplo, eu manualmente coloco uma bolotona enorme lá...  |



|               |         |  |
|---------------|---------|--|
| entrevista P5 | P5 – me | É... porque pra fazer uma mímica do que ele tá acostumado, porque ele vai abrir um livro, ele vai ver uma bola desse tamanho, ele vai ver o professor desenhando uma bola desse tamanho, embora o professor... volta antes da tecnologia, né, quando que alguém ia falar, “mas professor, esse é o gráfico mesmo, você pode tirar essa bolona, né?” Acho que nunca ninguém perguntou isso para um professor de cálculo fazendo o gráfico, né? “Esse é um gráfico mesmo de xis ao quadrado menos um sobre xis menos um? ”. Tira todo esse calhamaço de gente que nunca ninguém perguntou isso, porque abstrai, então tira um ponto, então simboliza que tira um ponto, né, tá certo?  |
| Entrevista P5 | P5 – me | Então eu uso, mas uso com uma... embora assim, né, você vai falar, é... eu não levo meus alunos pro laboratório, porque não dá tempo, naturalmente não dá tempo, porque tem várias outras dificuldades de você levar alunos no laboratório, tem o tempo deles pegarem, sentarem, prestarem atenção, você gasta aí uns quinze minutos até todo mundo começar entrar em fase e pensar no que você faz, né? Sem contar que tem as distrações, né, então é para fazer “a”, tá acessando o Facebook, então eu uso o GeoGebra em sala de aula, mais como um recurso visual, né? Se é para fazer algum experimento, eu chamo um aluno pra fazer, mexer ali e compartilhar com a turma, né?<br>William: Naquele momento.<br>P5: Naquele momento, uma coisa mais controlada, se a gente deixar livre, essas preocupações aparecem mais quando você deixa as pessoas livres, né, porque daí várias coisas podem acontecer.<br>William: Não haveria nem como antecipar?<br>P5: Não. |

**Quadro 36 – Excertos da entrevista de P5 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG)**

| Nome do documento | Código  | Segmento   |
|-------------------|---------|--|
| entrevista P5     | P5 – mg | O professor sem dúvida, porque ele tem que conhecer as limitações que o software tem, ou as regras que o software usa, então o computador manda... faz aquilo que você mandou fazer, né, dentro do que ele foi programado, então você tem que entender isso.   |
| Entrevista P5     | P5 – mg | Primeiro é assim, né, você precisa ver se isso é... se isso é contornável ou não, né? Porque assim, tem coisas que não tem jeito, se você usa, tem um processo numérico, matemático por detrás.  |
| Entrevista P5     | P5 – mg | É... são todas abstrações, né, então você tem que falar, “olha, então tem uma limitação, isso não é o gráfico da função, tá certo? Isso é uma alegoria, né, uma aproximação do gráfico da função”, então o que que você esperaria de, né, então fala assim, “não, vai lá e pega uma reta e tira um ponto, como que fica o desenho? ”. É como a gente faz, né? No papel a gente tira um círculo de, e fala, não é o mesmo desenho, tira aí cinquenta pontos, é o mesmo desenho. Mas eu aviso ele sim... |

No quadro 37 são apresentados os excertos que evidenciam o trânsito do entrevistado P5 entre as três matemáticas: MM, ME e MG.

*Quadro 37 – Excertos da entrevista de P5 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas*

| Nome do documento | Código                        | Segmento  |
|-------------------|-------------------------------|---|
| entrevista P5     | trânsito entre as matemáticas | Então você tem que ter um certo, sim... não, mas você pode falar, se você fosse fazer isso também né [risos]. Seu lápis é grosso, né, então, tecnologias têm as suas limitações, mas eu não começaria falando das limitações, eu começaria falando primeiro daquilo que você faz que não conseguia fazer, num primeiro momento, e depois mostrar “olha, você tem que tomar um certo cuidado, né?”, tá certo?  |
| Entrevista P5     | trânsito entre as matemáticas | William: Então, o senhor deixou bem claro o seu posicionamento, é como professor o senhor procura fazer isso e acredita que todo professor tem procurar compreender é... como esses objetos foram constituídos. A gente quando vai investigar a gente faz analiticamente, escreve, confia numa propriedade que a gente aprendeu, todas são representações, né, professor? Seja no papel, seja... não são isentas, matemáticas, mesmo que eu faça no lápis, por mais firme que seja...<br>P5: Se você quiser extrapolar, você fala assim pra esse matemático, né, a maneira de como você faz matemática e quer escrever palavras, e ele demonstrou que essa maneira, essa sua limitação, a limitação da sua tecnologia como matemático em fazer provas usando sequência de strings, tem coisas que são verdadeiras e você não vai conseguir demonstrar, é uma limitação da sua tecnologia como matemático, toda tecnologia tem uma limitação, então [risada], você fala assim, “não, o matemático com as suas demonstrações é...”, não! Tudo tem limitação, inclusive o matemático fazendo a continha com...                                   |
| entrevista P5     | trânsito entre as matemáticas | Por exemplo, a gente podia ensinar um licenciando, não... a conferir seu trabalho, que ele já fazia com o braço, com o caderno, a lista de exercício, e aí vamos supor que é um exercício comum, identificar intersecção entre curvas, identificar entre funções e... se a gente percebe, é... diria o matemático, se você tem uma contraprova, não é... [risos] você já tem que duvidar do processo, né, e aí colocando no contexto, como o senhor me pediu, como é que eu poderia... a pessoa daria certa credibilidade ao software, mas ela não pode dar uma credibilidade máxima... o William, o professor William vai dizer isso pra ele...<br>P5: Nessa situação não... se ele fazer... um calcular um monte de intersecções, e fala “olha, já que você tá calculando intersecções e um dos objetos pode ser meio esquisito”, ou dependendo da configuração que você tem, você tem que tomar um certo cuidado, né?” Tá certo?<br>William: A expressão analítica tem, de repente, mais valor que...<br>P5: É, sim, com certeza...<br>William: Porque você conseguiu ver um ponto na tela... é... é... a essência...<br>P5: sim... sim... |

|                  |                                     |  |
|------------------|-------------------------------------|--|
| entrevista<br>P5 | trânsito entre<br>as<br>matemáticas | <p>William: O outro caso, professor, é difícil dizer...</p> <p>P5: é, o outro eu conheço, que ele coloca xis mais um, né? Ele simplifica né?</p> <p>William: em essência, eu vou perguntar, sou professor de cálculo...</p> <p>P5: Sim...</p> <p>William: que gráfico o senhor espera olhando pra essa expressão?</p> <p>P5: Então, é o que... claro que quando eu falo isso com meus alunos, né, é... eu até faço uma provocação anterior, né, eu costumo falar assim pros meus alunos, primeiro dia de aula “quem for lá na frente no quadro e me desenhar um ponto passa na minha disciplina com dez, vai lá e me desenha um ponto”, tá certo? Vai lá o aluno inocente</p> <p>William: e levanta...</p> <p>P5: [risada] aí você fala isso é um ponto? Tem toda uma discussão, né? Que a própria maneira de como você vê um gráfico como uma folha de papel, ou desenhado no computador, não é o gráfico da função, aí triângulos não existem, retas não existem, pontos não existem...</p> <p>William: Nesse sentido material...</p> <p>P5: É... são todas abstrações, né, então você tem que falar, “olha, então tem uma limitação, isso não é o gráfico da função, tá certo? Isso é uma alegoria, né, uma aproximação do gráfico da função”, então o que que você esperaria de, né, então fala assim, “não, vai lá e pega uma reta e tira um ponto, como que fica o desenho?”. É como a gente faz, né? No papel a gente tira um círculo de, e fala, não é o mesmo desenho, tira aí cinquenta pontos, é o mesmo desenho. Mas eu aviso ele sim...</p> |
| entrevista<br>P5 | trânsito entre<br>as<br>matemáticas | <p>William: E aí a gente acaba caminhando, isso tudo é limite, pra discutir continuidade, então as pessoas, a minha suposição, da minha escolha desse episódio pra provocar os entrevistados é nesse sentido, como é que lida com isso, então, “ah, então eu não faria isso, eu não usaria o software”, não é o seu caso... o senhor continua usando o software mesmo, pra estudar essa expressão...</p> <p>P5: É, mas eu uso como uma mímica do que tradicionalmente ele vê no livro, né, tradicionalmente como as pessoas fazem, né, então, por exemplo, eu manualmente coloco uma bolotona enorme lá...</p> <p>William: Pra voltar, ali não é pra ver,</p> <p>P5: É... porque pra fazer uma mímica do que ele tá acostumado, porque ele vai abrir um livro, ele vai ver uma bola desse tamanho, ele vai ver o professor desenhando uma bola desse tamanho, embora o professor... volta antes da tecnologia, né, quando que alguém ia falar, “mas professor, esse é o gráfico mesmo, você pode tirar essa bolona, né?” Acho que nunca ninguém perguntou isso pra rum professor de cálculo fazendo o gráfico, né? “Esse é um gráfico mesmo de xis ao quadrado menos um sobre xis menos um?”. Tira todo esse calhamaço de gente que nunca, ninguém, perguntou isso, porque abstrai, então tira um ponto, então simboliza que tira um ponto, né, tá certo?</p>  |

Nos quadros 38 e 39 são apresentados os excertos referentes a percepção do entrevistado P5 em relação a MG e a necessidade de compreensão da MG, respectivamente.

**Quadro 38 – Excertos da entrevista de P5 que denotam referências a percepção da MG**

| Nome do documento | Código          | Segmento  |
|-------------------|-----------------|---|
| entrevista P5     | percepção da mg | [...]faz aquilo que você mandou fazer, né, dentro do que ele foi programado, então você tem que entender isso pra... pra.. porque quando você tá com o aluno, coisas podem aparecer e se você... de repente essas coisas aparecem justamente por conta de como o programa funciona, então você tem que conhecer, sem dúvida.                                  |
| Entrevista P5     | percepção da mg | [...]agora você vê, então a tecnologia que é culpada, né? A tecnologia que é culpada, a calculadora diz que pi é 3,1415, então é (incompreensível auditivamente) da calculadora que é a culpada, de repente é o que você tá dizendo né, tem que chamar em algum momento a atenção pra como que o seu instrumento funciona e quais são as limitações dele, né? |

**Quadro 39 – Excertos da entrevista de P5 que denotam referências a necessidade de compreensão da MG**

| Nome do documento | Código                           | Segmento  |
|-------------------|----------------------------------|---|
| entrevista P5     | necessidade de compreensão da mg | O professor sem dúvida, porque ele tem que conhecer as limitações que o software tem, ou as regras que o software usa, então o computador manda... faz aquilo que você mandou fazer, né, dentro do que ele foi programado, então você tem que entender isso pra... pra.. porque quando você tá com o aluno, coisas podem aparecer e se você... de repente essas coisas aparecem justamente por conta de como o programa funciona, então você tem que conhecer, sem dúvida. Um aluno, você... eu não começaria, você primeiro mostra o que funciona, o tranquilo, né? Numa etapa final você começa a mostrar onde a tecnologia começa a falhar, né, tá certo? Então, eu diria que tem que saber, mas dependendo da pessoa tem o momento certo de saber essas coisas, né? |
| Entrevista P5     | necessidade de compreensão da mg | é... pra mim, eu não tenho claro é quando você expõe, primeiro assim, uma coisa que eu percebo é que as pessoas tendem a ter uma fé em demasia na ferramenta, ou seja, não tem uma percepção de que existem coisas que a ferramenta não vai conseguir fazer, ou vai lhe dar uma resposta errada, né? Ou você tem que saber ler aquilo, né? Você faz o gráfico de um sobre xis, aí você anda pra cá, você vê o gráfico em cima do eixo xis, coladinho, né... ué, tem infinitas raízes, né?   |
| Entrevista P5     | necessidade de compreensão da mg | Então você tem que ter um certo sim... não, mas você pode falar se você fosse fazer isso também né [risos]. Seu lápis é grosso, né, então tecnologias têm as suas limitações, mas eu não começaria falando das limitações, eu começaria falando primeiro daquilo que você faz que não conseguia fazer, num primeiro momento e depois mostrar “olha, você tem que tomar um certo cuidado, né?”, tá certo?  |

No quadro 40 são apresentados os excertos do entrevistado P5 que denotam aparente compreensão da MG.

*Quadro 40 – Excertos da entrevista de P5 que denotam referências a aparente compreensão da MG*

| Nome do documento | Código                     | Segmento  |
|-------------------|----------------------------|---|
| entrevista P5     | aparente compreensão mg    | Primeiro é assim, né, você precisa ver se isso é... se isso é contornável ou não, né? Porque assim, tem coisas que não tem jeito, se você usa, tem um processo numérico, matemático por detrás  |
| entrevista P5     | aparente compreensão da mg | Embora... muita gente vá achar que a calculadora tá dizendo que pi é 3,1415 então o pi é 3,1415. Se você perguntar pra alguém o que que é pi, ela vai te responder que é 3,1415   |
| entrevista P5     | aparente compreensão da mg | É! Ou você coloca assim, "Ah, pede pra calculadora calcular pi", ela coloca 3.1415, ah, então pi é 3.1415?  |
| entrevista P5     | aparente compreensão mg    | William: Com a questão de ser contornável, de não ser, mas como agora eu sou pesquisador, eu estou, eu entendi que esse episódio seria interessante pra gente pensar... um usuário relativamente mais avançado, há caminhos né? O senhor daria caminhos pra lidar com isso, mas o senhor diria que isso afetaria a credibilidade?<br>P5: Não se você deixar bem claro, né, o como que essas coisas são feitas, você pode até ir pra um instrumento mais simples, divide um por três na sua calculadora, ela te dá um terço? Ela não tá te dando um terço. |

#### 4.2.6 – Análise interpretativa: entrevista com P6

O entrevistado P6, proporcionou, a partir da análise interpretativa proposta e seguindo os itens do protocolo de análise os seguintes resultados.

P6 confirma o interesse em usar a MG para tratar dos significados da MM, e para isso, P6 faz o uso do jogo de linguagem da ME.

É perceptível o incômodo de P6 com os resultados dos episódios 1 e 2. Tal foi minha impressão, que chamou atenção, a possível mudança de posição sobre a necessidade de compreensão da MG. Inicialmente, quando perguntado sobre a necessidade de se entender o processo por trás da obtenção dos objetos do GeoGebra, P6 registrou que, tal compreensão, não era necessária ao aprendizado matemático, mas faz uma ressalva, talvez, não seja tão necessário. P6 pareceu se incomodar com a possibilidade de que estudantes acabem descreditando-se de

que o uso do GeoGebra é válido. E assumiu que discutir os processos e limites da MG, podem até serem considerados como noções úteis para os alunos.

P6, para lidar com as limitações, as quais ele reiteradamente faz comparações à outros exemplos, e que parecem ser explicações para o episódio 1, aponta que o preparo anterior é uma postura mínima para o professor. Das explicações de P6, chama atenção o exemplo de aproximar a componente figural da MG ao problema da idealidade de alguns significados da MM. Outra questão muito rica é o seu apontar que estudantes tendem a ficar somente com a representação como a ideia matemática. Isto parece fortalecer minha leitura da necessidade de se transitar. Não é sempre válida a P6, a ideia de que as imagens ou alegorias levem às abstrações. Nesse sentido, para P6 é indispensável uso de linguagem da MM.

Por fim, anoto que P6 é um interessante usuário do GeoGebra. Sua postura de não temer os limites da MG, apesar de considerar a necessidade de preparo anterior, é uma indicação de que professores devem assumir-se como aprendizes constantes.

Os resultados destas análises podem ser evidenciados nos excertos da entrevista com P6 nos quadros 41, 42, 43, 44, 45 e 46.

Nos quadros 41, 42 e 43 são apresentados os excertos referentes a Matemática do Matemático (MM), a Matemática da Escola (ME) e a Matemática do GeoGebra (MG), respectivamente.

*Quadro 41 – Excertos da entrevista de P6 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM)*

| Nome do documento | Código  | Segmento   |
|-------------------|---------|--|
| entrevista P6     | P6 – mm | Se, se eu, por exemplo, quero uma função linear e opto por chegar pelos dois pontos é por que? Porque, ora, porque eu já sei que vai dá uma reta mesmo, então eu preciso de só de dois pontos para poder definir qual que vai ser o gráfico.   |
| Entrevista P6     | P6 – mm | Eles não vão se interceptar aqui nesse caso.<br>William: é essa, em g de x, é essa.<br>P6: não, elas não se interceptam...<br>William: você como o P6 matemático, diz: não se interceptam?<br>P6: é, essa igualdade aqui não...<br>William: não faz sentido?<br>P6: não, ela faz sentido né... só que não existe x que satisfaça essa igualdade né, digamos assim. |
| Entrevista P6     | P6 – mm | Então vai ser x mais um né? Uma reta lá, não definida no ponto... é menos um né? Não definida no ponto um.   |

|               |         |   |
|---------------|---------|---|
| Entrevista P6 | P6 – mm | É, é, que eu ia fazer essa simplificação, só que essa simplificação ela não vai no ponto um porque ela não está definida ali.   |
| Entrevista P6 | P6 – mm | Eu estou tratando uma função e tem que ver o domínio ou as condições de existência né? Mesmo que eu não tivesse falando propriamente em função né? Oh, é essa expressão aqui, isso aqui é uma fração racional, uma fração racional que não está definida no x igual a um, se eu encará-la como uma função... bom, então eu posso simplificar essa fração racional? Posso, para todos os valores de x, exceto o um. Ela não está definida no um, então o x é diferente de um lá. |

*Quadro 42 – Excertos da entrevista de P6 que denotam referências a Matemática da Escola (ME)*

| Nome do documento | Código  | Segmento   |
|-------------------|---------|--|
| entrevista P6     | P6 – me | Alguns gráficos, como que você vai explicar se você não tiver o GeoGebra? Você vai fazer uma tabelinha de pontos, praticamente, né? Você vai fazer uma tabelinha pondo os pontos lá e obviamente que, que nessa tabelinha, os pontos já estão convenientemente escolhidos pra você ter uma visão de abrangência mais geral, pra poder traçar o gráfico e traça o seu gráfico né?   |
| Entrevista P6     | P6 – me | então, basicamente, eu na minha visão, a gente não explica pro aluno direito como é que aquele gráfico é daquele jeito. Até porque na maioria das vezes você fala: bom, eu já sei que o gráfico é uma parábola. Você não obtém isso por dedução, você usa isso na verdade.   |
| Entrevista P6     | P6 – me | É! Eu sei que esse gráfico é uma parábola, então, então, bom eu vou pegar aqui uns pontos e tal, como eu sei que ele é uma parábola, olho aquele jeitão ali, então é aqui, pronto.   |
| Entrevista P6     | P6 – me | Importância de preparar a aula né? Vai que você vai pro negocio e diz: pô, a tá isso aqui é simples do jeito que... isso aqui é simples tá, pum, pum, chega na hora que você vai dá aula isso daí vai ser inesperado pra você no meio de uma aula? Imagina, por isso que tem que preparar né?  |
| Entrevista P6     | P6 – me | Então se eu olhar isso aqui como uma expressão de uma função, simplifica e tal, tira aquele ponto um ali que é... fica aquele burquinho né?  |
| Entrevista P6     | P6 – me | É! Você tem que lidar com ele e tem que explicar pra quem, pra quem... pros seus alunos e tal, saber discutir com eles, por que que isso aqui é apresentado assim quando você esperava assado?   |
| Entrevista P6     | P6 – me | É, é interessante sim, é como se você tá representando o domínio uma função na reta lá né? Aí bom, vamos ver aqui, por exemplo, até você fala: olha, você tem infinitos pontos aqui na reta, não tem jeito de analisar caso por caso porque eles são infinitos, mas vamos ver aqui, pega um negativo, um positivo, pegar o zero para ver o comportamento de uma função tipo x ao quadrado né? Pega alguns pontos lá e tal, por exemplo, como é x ao quadrado, se eu pego um positivo, pego um negativo, sempre a imagem vai ser positiva porque tá sendo elevada ao quadrado, faço uns exemplos lá e tal. Depois que eu acabei essa explanação, eu falo: então tá, qual que é o domínio dessa função aqui? Na verdade, eu estava trabalhando com função inversa, então eu crio o domínio restrito para poder ela ser inversível, aquela coisa toda. Ah, é menos 2, menos 1, 0, 1 e 2. Quer dizer, como eu representei só esses pontos, ele fez exatamente isso daí ele pegou só a representação. Eu não consegui passar para ele a ideia que o domínio na verdade era qualquer ponto que estava naquele intervalo que eu escolhi né? |

**Quadro 43 – Excertos da entrevista de P6 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG)**

| Nome do documento | Código  | Segmento  |
|-------------------|---------|---|
| entrevista P6     | P6 – mg | É! Todo software tem essa limitação né? Assim, é engraçado, é uma coisa boa para pensar mesmo, porque eu nunca tinha me preocupado.   |
| Entrevista P6     | P6 – mg | É! Se não como é que você vai me dizer um negócio que não tem espessura? Então aí o cara vai aceitar isso aí. Não beleza, então ele diz que parece que tá e de fato no desenho elas estão encostando uma na outra pelo fato do desenho delas precisarem ter espessura. Você pode diminuir essas espessuras até o mínimo que o software...   |
| entrevista P6     | P6 – mg | É! Exatamente. Mas ela sempre vai ter uma espessura, né. Então assim, tá beleza, tem espessura? Tem espessura. É outra limitação do software. Cara, será que eu posso dobrar... tem espessura, qual a espessura mínima? Vai ser uma limitação do software que a menor espessura que ele consegue desenhar para você. Aí é mínimo o que consigo diminuir da espessura, tanto o quanto eu queira né? Eu não consigo nem, nem, nem mesmo colocar aquela ideia de limite aí né, assim? Tá, mas eu posso fazer tanto quanto eu queira ou não? Não pode, o software vai te dá uma, uma... |
| entrevista P6     | P6 – mg | Não, não, de modo algum. Acho que é um resultado assim é, assim, é a limitação do software num é? Então você tem que... eu não veria como pejorativo nunca, é uma limitação que você tem que lidar com ele...   |

No quadro 44 são apresentados os excertos que evidenciam o trânsito do entrevistado P6 entre as três matemáticas: MM, ME e MG.

**Quadro 44 – Excertos da entrevista de P6 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas**

| Nome do documento | Código                        | Segmento   |
|-------------------|-------------------------------|--|
| entrevista P6     | trânsito entre as matemáticas | [...]alguns gráficos, como que você vai explicar se você não tiver o GeoGebra? Você vai fazer uma tabelinha de pontos, praticamente né. Você vai fazer uma tabelinha pondo os pontos lá e obviamente que nessa tabelinha os pontos já estão convenientemente escolhidos pra você ter uma visão de abrangência mais geral pra poder traçar o gráfico e traça o seu gráfico né? E ai vai, bom, ai você pode, uma possibilidade é você chegar pro aluno e falar: oh o que o computador faz exatamente isso mesmo. Só, só que ele faz com milhões de pontos... |
| entrevista P6     | trânsito entre as matemáticas | William: você vê isso como fragilidade, defeito, falha?<br>P6: não, como uma limitação. Porque como é que você vai...bom, a não ser que você entrasse com o conhecimento matemático ai né  |
| entrevista P6     | trânsito entre as matemáticas | é! Porque assim, o cara dificilmente iria ter uma pessoa que atentasse pra isso. Não, pera ai tem a ferramenta de intersecção, então eu vou usar essa ferramenta de intersecção e vou vê o que, que ele me responde né? Porque assim, eu olhava assim... tá mais pera ai, os gráficos tão coincidindo, não, não tão coincidindo, aquilo ali são assintóticos, porque não sei o que, sei lá, aí sim se explicaria porque na verdade a curva ideal que não tem espessura né, não tem jeito de você desenhar.   |



|               |                               |   |
|---------------|-------------------------------|---|
| Entrevista P6 | trânsito entre as matemáticas | É, exatamente. Eu estou tratando uma função e tem que vê o domínio ou as condições de existência né? Mesmo que eu não tivesse falando propriamente em função né? Oh, é essa expressão aqui, isso aqui é uma fração racional, uma fração racional que não está definida no x igual a um, se eu encara-la como uma função... bom, então eu posso simplificar essa fração racional? Posso, pra todos os valores de x, exceto o um. Ela não tá definida no um, então o x é diferente de um lá. Então se eu olhar isso aqui como uma expressão de uma função, simplifica e tal, tira aquele ponto um ali que é... fica aquele burquinho né? Vamos lá fazer aqui então. Eu só vou esconder aqui então ((parece manipular o software)) |
| entrevista P6 | trânsito entre as matemáticas | É, é ele compreender a limitação da representação das coisas né? Porque a ideia é a ideia. Representar não é o computador na verdade, você vai ter outras dificuldades, mas você também no quadro você não consegue representar exatamente a ideia que você tá querendo passar.   |

Nos quadros 45 e 46 são apresentados os excertos referentes a percepção do entrevistado P6 em relação a MG e a necessidade de compreensão da MG, respectivamente.

*Quadro 45 – Excertos da entrevista de P6 que denotam referências a percepção da MG*

| Nome do documento | Código          | Segmento  |
|-------------------|-----------------|---|
| entrevista P6     | percepção da mg | Basta você falar isso: oh, o software tá simplesmente calculando quanto que vale a função em cada pontinho ali e colocando ali depois né.   |
| Entrevista P6     | percepção da mg | É! Todo software tem essa limitação né? Assim, é engraçado, é uma coisa boa pra pensar mesmo, porque eu nunca tinha me preocupado.  |
| Entrevista P6     | percepção da mg | É! Se não como é que você vai me dizer um negócio que não tem espessura? Então ai o cara vai aceitar isso ai. Não beleza, então ele diz que parece que tá e de fato no desenho elas estão encostando uma na outra pelo fato do desenho delas precisarem ter espessura. Você pode diminuir essas espessuras até o mínimo que o software...   |
| entrevista P6     | percepção da mg | É! Exatamente. Mas ela sempre vai ter uma espessura, né. Então assim, tá beleza, tem espessura? Tem espessura. É outra limitação do software. Cara, será que eu posso dobrar... tem espessura, qual a espessura mínima? Vai ser uma limitação do software que a menor espessura que ele consegue desenhar pra você. Ai é mínimo o que consigo diminuir a espessura tanto o quanto eu queira né? Eu não consigo nem, nem, nem mesmo colocar aquela ideia de limite ai né assim? Tá, mas eu posso fazer tanto quanto eu queira ou não? Não pode, o software vai te dá uma, uma... |
| entrevista P6     | percepção da mg | William: mas você acha que discutir essa questão também pode ser levada a procurar a compreender porque é que o objeto é obtido...<br>P6: Claro! Isso... é bom o aluno ter essa noção de que como fato você tá lidando com o software, você vai ter certas coisas que o computador faz desse jeito por um motivo.   |
| Entrevista P6     | percepção da mg | Não, não, de modo algum. Acho que é um resultado assim é ((pausa)), assim, é a limitação do software num é? Então você tem que... eu não veria como pejorativo nunca, é uma limitação que você tem que lidar com ele...   |

*Quadro 46 – Excertos da entrevista de P6 que denotam referências a necessidade de compreensão da MG*

| Nome do documento | Código                           | Segmento  |
|-------------------|----------------------------------|---|
| entrevista P6     | necessidade de compreensão da mg | É eu acho, é.. não é necessário, para o aprendizado matemático estritamente não é necessário.   |
| Entrevista P6     | necessidade de compreensão da mg | Então é assim, não tem necessidade dele saber é... como que o software faz pra traçar o gráfico.  |
| Entrevista P6     | necessidade de compreensão da mg | Basta você falar isso: oh, o software tá simplesmente calculando quanto que vale a função em cada pontinho ali e colocando ali depois né.   |
| Entrevista P6     | necessidade de compreensão da mg | William: mas você acha que discutir essa questão também pode ser levada a procurar a compreender porque é que o objeto é obtido...<br>P6: Claro! Isso... é bom o aluno ter essa noção de como de fato, você tá lidando com o software, você vai ter certas coisas que o computador faz desse jeito por um motivo. |

#### 4.2.7 – Análise interpretativa: entrevista com P7

A partir da análise interpretativa e seguindo os itens do protocolo de análise definido, o entrevistado P7 proporcionou os resultados, a seguir.

P7 reconhece várias possibilidades para o uso do GeoGebra. Ele afirma que o software dá condições tanto de se falar de significados matemáticos da MM, como se presta para ajudar a alcançar objetivos da ME.

P7 reconhece que as possibilidades do GeoGebra dão condições para a prática e legitimidade a linguagem da MG. Ele afirma que a aproximação com os formalismos da MM são possíveis, mas não precisam ser considerados como os mais importantes. Parece que o importa é o movimento de se produzir significados matemáticos. Sua fala é provocativa.

P7 fala da possibilidade de se desenvolver um discurso em que se pode sair da caixa. Considero intrigante e instigante esta fala. P7 tem uma leitura diferente sobre como os significados matemáticos são produzidos quando usamos o

GeoGebra. P7 fala mais de uma vez que a lógica da MG é diferente da lógica de usar lápis e papel. Assim como mostra que compreende diferenças sutis entre a MM e a MG.

P7 demonstra surpresa com o ponto de intersecção que o GeoGebra encontra no primeiro episódio e assume que precisa estudar mais sobre o assunto. É importante anotar que P7 lida bem com as situações. P7 afirma que os significados matemáticos da MG são tão válidos quanto os da MM. E dá como exemplo o Teorema da Incompletude de Gödel para explicar que mesmo a MM tem suas fragilidades, concluindo que então, é normal que haja falhas na MG.

Para P7, os limites que discutimos nos episódios servem como exemplos das diferenças entre a matemática que se pratica e a matemática formal. P7 não reconhece os resultados obtidos nos episódios como erros, afirma que se houver alguma explicação, a coisa se resolve. Aliás, P7 dá explicações para cada situação. Ele relaciona os resultados aos limites dos processos numéricos da MG e até aponta que entende que o resultado do segundo episódio pode ser uma escolha dos programadores do GeoGebra.

P7, apesar de dar indícios de forte uso da linguagem da MM e apresentar afirmações convictas quando fala como um matemático é incisivo em apontar que, dentro de um contexto, que venha a ter uma explicação plausível e que seja aceita por alguém, os limites da MG podem ser sempre tratados e aproveitados.

Por último, considero difícil afirmar se P7 acredita ou não que é preciso compreender como os objetos do GeoGebra são obtidos. Perguntei isso no início, mas ele falou de forma indireta e me pareceu ir a outras direções.

Os resultados destas análises podem ser evidenciados nos excertos da entrevista com P7 nos quadros 47, 48, 49, 50, 51 e 52.

Nos quadros 47, 48 e 49 são apresentados os excertos referentes a Matemática do Matemático (MM), a Matemática da Escola (ME) e a Matemática do GeoGebra (MG), respectivamente.

Quadro 47 – Excertos da entrevista de P7 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM)

| Nome do documento | Código  | Segmento   |
|-------------------|---------|--|
| entrevista P7     | P7 – mm | <p>William: Preciso te convidar a dois episódios... produza duas funções para a gente ai. Uma talvez você já conheça... meu interesse é...</p> <p>P7: Qual função?</p> <p>William: e elevado a menos x, mais x. Agora a função identidade. No seu universo de matemática essas funções interceptam?</p> <p>P7: Não...</p> <p>William: Por que?</p> <p>P7: Deixa eu pensar cara. É elas vão interceptar, porque se eu fizer uma interpretação aqui de limite, elas vão ter um conjunto de pontos que elas são iguais. Se eu tender as duas aqui ao infinito... esse primeiro termo da função f de aqui vai tender a zero, certo. Quer dizer... em termos matemáticos elas não vão se interceptar. Até porque vai aparecer que... a reta identidade vai parecer... como chama uma reta quando???... Qual o nome dessa reta que a função tende a ela, mas... William: Assíntota?</p> <p>P7: Assíntota né. Me parece que o f de x... g de x igual a x é uma assíntota de f de x. Uma assíntota oblíqua.</p>  |
| Entrevista P7     | P7 – mm | Eu só acho que essa equação não vai ter solução sem utilizar limite.   |
| Entrevista P7     | P7 – mm | Aquela matemática formal que tem nos livros, ela não vai ser executada nem no software e nem em lugar nenhum. A não ser no estado formal, e é lógico, se eu admitir que as coisas se comportam daquele jeito.  |
| Entrevista P7     | P7 – mm | Então, o Gödel fala que ou um sistema é consistente ou um sistema é completo. Um sistema não pode ser duas coisas ao mesmo tempo. E quando a gente fala de sistema, inclusive na matemática, eu estou falando da incompletude, se um sistema for... nenhum sistema é as duas coisas simultaneamente. Inclusive vai ter coisas... afirmações matemáticas que não podem ser provadas dentro da matemática, certo? Tem enunciado que a gente não consegue provar a sua veracidade. Taí. A conjectura de ... e outras tantas em aberto. São enunciados feitos dentro da matemática que ainda não foi possível provar, ninguém conseguiu dizer que não é possível provar, mas ninguém conseguiu provar também. Então para mim, por conta disso... o sistema é incompleto, se ele fosse completo ele não conseguiria ser consistente. Ele poderia ter pelo menos uma afirmação que essa negação seria verdadeira nesse sistema. Porque Gödel provou que nenhum sistema é completo e consistente ao mesmo tempo |
| entrevista P7     | P7 – mm | Com essa expressão vai ser uma reta!   |
| Entrevista P7     | P7 – mm | No ambiente matemático ele é uma reta!   |

*Quadro 48 – Excertos da entrevista de P7 que denotam referências a Matemática da Escola (ME)*

| Nome do documento | Código  | Segmento   |
|-------------------|---------|--|
| entrevista P7     | P7 – me | Bom, se eu estou falando de formação de professores. Eu penso que é uma possibilidade de o professor aprender de um uso específico, que é o uso dessas ferramentas né.   |
| Entrevista P7     | P7 – me | [...]a gente pode desenvolver construções que envolvem sofisticados conhecimentos matemáticos, de cálculo mesmo né. E se a ideia do cara é aprender matemática, eu penso que ele oferece suporte a isso. A executar aquela matemática do livro didático mesmo, seja da educação básica ou da educação superior, no caso de um curso de matemática. |

*Quadro 49 – Excertos da entrevista de P7 que denotam referências a Matemática do GeoGebra (MG)*

| Nome do documento | Código  | Segmento   |
|-------------------|---------|--|
| entrevista P7     | P7 – mg | É lógico que a construção no software não obedece a lógica da construção com ... por exemplo com lápis, régua e borracha. Não obedece essa lógica. É uma outra lógica.   |
| Entrevista P7     | P7 – mg | Dá a possibilidade de desenvolver um discurso que saia um pouco dessa caixinha. De falar de matemática, vamos falar de outro significado. Porque é o seguinte cara, no caderno um ponto não arrasta. Na matemática um ponto não arrasta. Na matemática um ponto faz o que? Eu não sei! Na matemática essa movimentação não existe. No discurso aqui no GeoGebra... eu arrasto cara. Lá na matemática, seria transladar por vetores, seria transladar no sentido positivo ou no sentido negativo do eixo. Essa é a linguagem da matemática! Aqui não, aqui é arrastar, então como essa linguagem aqui do software se aproxima muito da linguagem que a gente fala no cotidiano. Então eu consigo juntar essa linguagem do cotidiano com uma mais rigorosa se eu quiser. E se eu não quiser, eu posso ficar somente aqui ó ... na linguagem dele. Aqui é legítimo falar de arrastar ponto. |
| Entrevista P7     | P7 – mg | Só que o software aí não vai exibir uma descontinuidade. Pois ele simplificou os polinômios.   |
| Entrevista P7     | P7 – mg | William: Por hora você não consegue rapidamente especular e dizer o porquê que ele conseguiu encontrar o ponto?<br>P7: A minha especulação seria que esse cálculo é feito por meio de cálculo numérico. E aí ele chegou no primeiro caso que dá um interpolação numérica.  |

No quadro 50 são apresentados os excertos que evidenciam o trânsito do entrevistado P7 entre as três matemáticas: MM, ME e MG.

*Quadro 50 – Excertos da entrevista de P7 que denotam referências ao trânsito entre as matemáticas*

| Nome do documento | Código                        | Segmento   |
|-------------------|-------------------------------|--|
| entrevista P7     | trânsito entre as matemáticas | <p>Eu acho que... bom, se eu estou falando de formação de professores. Eu penso que é uma possibilidade de o professor aprender de um uso específico, que é o uso dessas ferramentas né. Mas também penso que ele pode construir um tipo de conhecimento matemático ao realizar essas construções. É lógico que a construção no software não obedece a lógica da construção com... por exemplo com lápis, régua e borracha. Não obedece essa lógica. É uma outra lógica, mas a gente pode desenvolver construções que envolvem sofisticados conhecimentos matemáticos, de cálculo mesmo né. E se a ideia do cara é aprender matemática, eu penso que ele oferece suporte a isso. A executar aquela matemática do livro didático mesmo, seja da educação básica ou da educação superior, no caso de um curso de matemática. Então, eu acho que a construção dá a ele possibilidades de executar aquela matemática, mas se ele quiser extrapolar um pouco. Dá a possibilidade de desenvolver um discurso que saia um pouco dessa caixinha. De falar de matemática, vamos falar de outro significado. Porque é o seguinte cara, no caderno um ponto não arrasta. Na matemática um ponto não arrasta. Na matemática um ponto faz o que? Eu não sei! Na matemática essa movimentação não existe. No discurso aqui no GeoGebra... eu arrasto cara. Lá na matemática, seria transladar por vetores, seria transladar no sentido positivo ou no sentido negativo do eixo. Essa é a linguagem da matemática! Aqui não, aqui é arrastar, então como essa linguagem aqui do software se aproxima muito da linguagem que a gente fala no cotidiano. Então eu consigo juntar essa linguagem do cotidiano com uma mais rigorosa se eu quiser. E se eu não quiser, eu posso ficar somente aqui ó (P7 aponta para o computador e refere-se ao GeoGebra)... na linguagem dele. Aqui é legítimo falar de arrastar ponto.</p> |
| Entrevista P7     | trânsito entre as matemáticas | <p>Porque aquela matemática formal que tem nos livros, ela não vai ser executada nem no software e nem em lugar nenhum. A não ser no estado formal, e é lógico, se eu admitir que as coisas se comportam daquele jeito. Cara, não tem erro naquilo. Aquilo é possível porque as coisas foram construídas e definidas daquele jeito. E elas são daquele jeito e acabou. Se nós passarmos a oferecer uma solução tal... eu vou ter que dar um jeito de montar uma outra equação.</p> <p>William: Então você não admite o ponto A (interseção encontrada pelo GeoGebra no contexto do episódio 1) como um erro?</p> <p>P7: Não, não admito o ponto A como um erro. Porque se eu entender, se eu conseguir encontrar um explicação de como o software encontrou esse ponto A... Mas aí eu falo: essa matemática aplicada aqui não vai ser a réplica daquela.</p>   |
| Entrevista P7     | trânsito entre as matemáticas | <p>William: Vou te convidar a um outro episódio, eu vou te pedir pra considerar um caso clássico das funções. Dá uma olhada no roteiro, o episódio dois. Você diz que já deu aula de cálculo... é um clássico não é? Já de antemão o que você acha que vai ser o gráfico?</p> <p>P7: Com essa expressão vai ser uma reta!</p> <p>William: Vamos ver o que o software nos mostra. Diferença de dois quadrados. A gente queria tanto que os meninos fizessem isso no automático às vezes, em cálculo. É um quociente de polinômios muito</p>   |

utilizado pra chamar atenção do principio de fatoração e que vai nos ajudar a trabalhar alguns exercícios de limite.

P7: Só que o software aí não vai exibir uma descontinuidade. Pois ele simplificou os polinômios.

William: Você espera uma reta? No ambiente matemático, na sua mente matemática. Esse gráfico é uma reta?

P7: No ambiente matemático ele é uma reta!

William: Pra mim, tinha que ser no mínimo algo que lembrasse duas semi retas opostas!

P7: Ah tá, por causa da descontinuidade ali.

William: Pra mim, não dá uma reta, no sentido estrito da matemática, naquele ponto em especial. Nesse caso, eu poderia dizer que são duas semi retas de mesma direção e sentidos opostos? Pensando nisso, o software falhou? (P7 pede para o GeoGebra calcular o valor da função para  $x$  igual a um e constata que o software apresenta que tal valor é indefinido; conforme já apontamos como uma possibilidade no item 2.3.3). Ah, legal. Você já arrumou do próprio software uma outra coisa para pensar. E aquela resposta ali te ajuda?

P7: Ajuda, ajuda a justificar que ele não falhou. Porque eu posso falar assim: existe uma vizinhança tão próxima de um que tem imagem nesses pontos e não deu pra notar. Eu posso usar essa justificativa.

William: Então um jogo de linguagem já te faz continuar. Mas ainda assim, a sua posição é... esses exemplos são bons exemplos pra gente provocar e olhar? É importante saber como eles são gerados?

P7: Então, eu acho que são exemplos bons pra gente provar que o... provar, não é provar... pra gente discutir que há diferença entre a matemática que a gente pratica, essa formal. Que a gente adora, que a gente gosta dela. Que obedece as regras dos livros. E essa que a gente pratica aqui. Existem diferenças sutis.

William: Mais uma vez, é uma falha do software esse gráfico?

P7: Pra mim não. Não é.

William: É um posicionamento né?

P7: É uma escolha cara, eu acho que você vai chegar uma hora na programação e vai falar assim: cara e aí? Nós vamos colocar um pontinho aqui ou nós vamos fazer o que? Ah cara deixa ela aparecer continuamente, aí quando o cara tentar calcular...

No quadro 51 são apresentados os excertos referentes a percepção do entrevistado P7 em relação a MG.

*Quadro 51 – Excertos da entrevista de P7 que denotam referências a percepção da MG*

| Nome do documento | Código          | Segmento   |
|-------------------|-----------------|--|
| entrevista P7     | percepção da mg | Eu acho que... bom, se eu estou falando de formação de professores. Eu penso que é uma possibilidade de o professor aprender de um uso específico, que é o uso dessas ferramentas né. Mas também penso que ele pode construir um tipo de conhecimento matemático ao realizar essas construções. É lógico que a construção no software não obedece a lógica da construção com... por exemplo, com lápis, régua e borracha. Não obedece essa lógica. É uma outra lógica, mas a gente pode desenvolver construções que envolvem sofisticados conhecimentos matemáticos, de cálculo mesmo né. E se a ideia do cara é aprender matemática, eu penso que ele oferece suporte a isso. A executar aquela matemática do livro didático mesmo, seja da educação básica ou da educação superior, no caso de um curso de matemática.   |
| entrevista P7     | percepção da mg | William: Legal. Afeta a credibilidade do software, pra mim, pra você?<br>P7: Então, eu fiquei até com vontade de te interromper na hora que você falava do professor aí. Que não dá pra checar a matemática que eu quero praticar no software de matemática.<br>William: Eu só estava repetindo...<br>P7: O que o cara falou... eu não sei quem é o cara, mas eu vou falar assim. Eu vou dizer duas coisas do porque eu discordo do cara. Porque aquela matemática formal que tem nos livros, ela não vai ser executada nem no software e nem em lugar nenhum. A não ser no estado formal, e é lógico, se eu admitir que as coisas se comportam daquele jeito. Cara, não tem erro naquilo. Aquilo é possível porque as coisas foram construídas e definidas daquele jeito. E elas são daquele jeito e acabou. Se nós passarmos a oferecer uma solução tal... eu vou ter que dar um jeito de montar uma outra equação.<br>William: Então você não admite o ponto A (interseção encontrada pelo GeoGebra no contexto do episódio 1) como um erro?<br>P7: Não, não admito o ponto A como um erro. Porque se eu entender, se eu conseguir encontrar uma explicação de como o software encontrou esse ponto A... Mas aí eu falo: essa matemática aplicada aqui não vai ser a réplica daquela. |
| Entrevista P7     | percepção da mg | Mas o método que o software faz os cálculos dele aqui, vão falar assim, há proximidade suficiente pra falar que esse ponto pertence, porque deve ser um cálculo numérico.  |
| Entrevista P7     | percepção da mg | Então, eu acho que são exemplos bons pra gente provar que o... provar, não é provar... pra gente discutir que há diferença entre a matemática que a gente pratica, essa formal. Que a gente adora que a gente gosta dela. Que obedece as regras dos livros e essa que a gente pratica aqui. Existem diferenças sutis.  |



No quadro 52 são apresentados os excertos da entrevista com P7 que denotam referência a aparente compreensão da MG.

*Quadro 52 – Excertos da entrevista de P7 que denotam referências a aparente compreensão da MG*

| Nome do documento | Código                    | Segmento   |
|-------------------|---------------------------|--|
| entrevista P7     | aparente compreensão o mg | Por hora você não consegue rapidamente especular e dizer o porque que ele conseguiu encontrar o ponto?<br>P7: A minha especulação seria que esse cálculo é feito por meio de cálculo numérico. E aí ele chegou no primeiro caso que dá um interpolação numérica.   |
| Entrevista P7     | aparente compreensão o mg | William: Então você não admite o ponto A (interseção encontrada pelo GeoGebra no contexto do episódio 1) como um erro?<br>P7: Não, não admito o ponto A como um erro. Porque se eu entender, se eu conseguir encontrar um explicação de como o software encontrou esse ponto A... Mas aí eu falo: essa matemática aplicada aqui não vai ser a réplica daquela.   |
| Entrevista P7     | aparente compreensão o mg | William: [...] A questão é: a principio não era pra acontecer né? Eu digo, com princípios matemáticos, tomando os cuidados da nossa entrevista aqui, é isso. Você concordaria?<br>P7: Se for pra obedecer o que diz a matemática escrita formal. Não era pra acontecer. Mas o método que o software faz os cálculos dele aqui vão falar assim, há proximidade suficiente pra falar que esse ponto pertence, porque deve ser um cálculo numérico. |
| Entrevista P7     | aparente compreensão o mg | Ajuda, ajuda a justificar que ele não falhou. Porque eu posso falar assim: existe uma vizinhança tão próxima de um que tem imagem nesses pontos e não deu pra notar. Eu posso usar essa justificativa.   |

#### 4.2.8 – Confirmações ou não de indícios de que os entrevistados forneceram elementos às categorias iniciais

Nesta seção, são apresentadas as tabelas 1 e 2, as quais confirmam o uso de linguagem de cada matemática e as contribuições de cada entrevistado às categorias de análise.

*Tabela 1 – Confirmação de uso de linguagem de cada matemática*

| Sistema de Códigos | entrevista P1 | entrevista P2 | entrevista P3 | entrevista P4 | entrevista P5 | entrevista P6 | entrevista P7 |
|--------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| P1 - me            | ■             |               |               |               |               |               |               |
| P1 - mg            | ■             |               |               |               |               |               |               |
| P1 - mm            | ■             |               |               |               |               |               |               |
| P2 - me            |               | ■             |               |               |               |               |               |
| P2 - mg            |               | ■             |               |               |               |               |               |
| P2 - mm            |               | ■             |               |               |               |               |               |
| P3 - me            |               |               | ■             |               |               |               |               |
| P3 - mg            |               |               | ■             |               |               |               |               |
| P3 - mm            |               |               | ■             |               |               |               |               |
| P4 - me            |               |               |               | ■             |               |               |               |
| P4 - mg            |               |               |               | ■             |               |               |               |
| P4 - mm            |               |               |               | ■             |               |               |               |
| P5 - me            |               |               |               |               | ■             |               |               |
| P5 - mg            |               |               |               |               | ■             |               |               |
| P5 - mm            |               |               |               |               | ■             |               |               |
| P6 - me            |               |               |               |               |               | ■             |               |
| P6 - mg            |               |               |               |               |               | ■             |               |
| P6 - mm            |               |               |               |               |               | ■             |               |
| P7 - me            |               |               |               |               |               |               | ■             |
| P7 - mg            |               |               |               |               |               |               | ■             |
| P7 - mm            |               |               |               |               |               |               | ■             |

*Tabela 2 – Confirmação das contribuições de cada entrevistado às categorias de análise*

| Sistema de Códigos               | entrevista P1 | entrevista P2 | entrevista P3 | entrevista P4 | entrevista P5 | entrevista P6 | entrevista P7 |
|----------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| aparente compreensão mg          | ■             |               | ■             | ■             | ■             | ■             | ■             |
| aparente incompreensão da mg     | ■             | ■             | ■             | ■             |               | ■             | ■             |
| necessidade de compreensão da mg | ■             | ■             | ■             | ■             | ■             | ■             |               |
| percepção da mg                  | ■             | ■             | ■             | ■             | ■             | ■             | ■             |
| trânsito entre as matemáticas    | ■             | ■             | ■             | ■             | ■             | ■             | ■             |

#### 4.2.9 – Codificações que denotam presença ou ausência de surpresa, desconforto ou incompreensão dos entrevistados em relação aos resultados matemáticos do GeoGebra relativos aos episódios 1 e ou 2

O Quadro 53, a seguir, foi construído para reforçar a minha suposição de que mesmo usuários experientes em usar o GeoGebra, estão sujeitos a ter de lidar com os limites do software. Este fato pode ser evidenciado nos excertos contidos nas sete entrevistas realizadas, pois os entrevistados apresentam surpresa e/ou desconforto e/ou incompreensão em relação aos resultados obtidos pelo GeoGebra em um ou mais momentos em que discutimos os episódios 1 e 2.

*Quadro 53 – Confirmação de que todos os entrevistados apresentaram surpresa e/ou desconforto e/ou incompreensão em relação aos resultados obtidos pelo GeoGebra em um ou mais momentos em que discutimos os episódios 1 e 2*

|               |                        |   |
|---------------|------------------------|---|
| entrevista P1 | relativo ao episódio 1 | William: Eu gosto porque graficamente a gente mostra pra eles os intervalos, mas eu queria pedir ... (professora digitando a equação no GeoGebra) ... como que senhora... o que a senhora usaria para pedir para o GeoGebra ver ou não se há...<br>P1: Igualaria né... ahhh ele não fez, então deixa eu colocar x e x, porque é isso que eu faço com a inequação né, certo. (digitando...)<br>William: Ele renomeou né? Parece que essa versão mudou. Ele tem ferramenta também né? O comando intersecção, tem a macro. Quer experimentar?<br>P1: Quero! (digitando o comando para intersecção).<br>William: Ele obteve.<br>P1: (expressão de espanto). |
| Entrevista P1 | relativo ao episódio 1 | Agora vem aqui no GeoGebra e acontece esse negócio, fica frustrante. Para um aluninho digamos ou para o professor que está dizendo olha.  |
| Entrevista P1 | relativo ao episódio 1 | Aqui tu me pegou! Esse aí eu não sabia. Não sabia que ia fazer isso. E não entendi muito o porquê também não. Porque que ele faz isso?  |
| Entrevista P2 | relativo ao episódio 1 | Cara, intercepta neste ponto e é verdade isso? Agora eu fico aqui né? Na dúvida.  |
| Entrevista P2 | relativo ao episódio 2 | Ahh eu esperava uma reta, com um ponto no meio, um furo no ponto com x igual a um.  |
| Entrevista P2 | relativo ao episódio 1 | Eu ainda estou incomodada com o resultado que deu, tu entendeu?   |
| Entrevista P2 | relativo ao episódio 1 | Pois é, isso que ia te dizer como eu não trabalho com o CAS... (P2 abre a janela do CAS, dá entrada na igualdade das expressões das funções descritas no episódio 1 e usa o comando resolver equação em x), como eu te falei, eu usei isso aqui umas vezes só, muito pouco. Ahh ele não me dá ninguém. E por que ele faz isso? Ele tem um erro, um bug?   |
| Entrevista P2 | relativo ao episódio 1 | Porque o gráfico ali (aponta para representação gráfica feita pelo o GeoGebra) está me mentindo. Pelo menos é o que eu enxergo, né? Não sei se está certo ou não.   |
| Entrevista P3 | relativo ao episódio 1 | Pois é, mas agora veja bem, se eu quero uma intersecção eu clico nesse objeto e clico nesse aqui. Antes disso eu vou apagar o seu ponto... Eu quero uma intersecção (Operando o software) ... eu clico aqui e clico aqui, apareceu um ponto ele pode dizer... ahhh... tem intersecção. Como é que   |

| apareceu esse ponto? |                        |  |
|----------------------|------------------------|--|
| Entrevista P3        | relativo ao episódio 1 | Se não é... ele tem que ir pelo argumento matemático e não pelo que o software está fazendo. Matematicamente se não tem intersecção, como é que o software está dando uma intersecção?   |
| Entrevista P3        | relativo ao episódio 1 | William: E procurar explicar o porque que o software chegou a intersecção. Qual o seu posicionamento sobre isso?<br>P3: Porque existem pessoas ali atrás, alguém que está programando e alguma coisa não está certa na programação, tem que arrumar. Como é que pode dar uma intersecção se não existe?  |
| Entrevista P4        | relativo ao episódio 1 | Não tinha considerado por esta questão. Eu não tinha, até hoje eu não tinha, vamos dizer assim, desconfiado de um rigor matemático do GeoGebra. Eu sei...  |
| entrevista P5        | relativo ao episódio 1 | William: Então, a princípio, uma possibilidade interessante do GeoGebra é mostrar ahm... um comando intersecção ou a macro de intersecção. Antes disso, o matemático P5... há intersecção?<br>P5: não tem, né, porque se você resolve aí fica elevado a menos x igual a zero, elevado a menos x igual a zero não vai [risos]<br>William: se você achar esse xis, por favor, nos avise [risos]<br>William: Mas, no entanto, o senhor já testou?<br>P5: Não, esse aqui eu não testei não... [P5 falando baixo: intersecção de você com você, alguns cliques no computador], ele deu quem aí?<br>William: Ele deu "A".<br>P5: Cadê o "A"? O "A" tá com... cadê o ponto "A"? (Aparenta surpresa ao visualizar um ponto na Janela de Visualização)  |
| entrevista P6        | relativo ao episódio 1 | P6: Oh lá! É, eu nunca fiz isso não.<br>William: Aí a gente tem como pedir pra ele, pro programa encontrar a intersecção.<br>P6: isso! Não é, isso eu sei que existe, eu só nunca fiz mesmo.<br>William: Procurar a intersecção?<br>P6: Procurar as ... é, então tá, e as funções, vamos procurar a intersecção, é... onde é que fica mesmo?<br>William: É ai mesmo. Ali embaixo.<br>P6: A intersecção de dois objetos...tum, tum. Tá pensando ... é, ele achou um ponto, claro.<br>William: E ai ? O que, que o P6, matemático, o que P6 usuário do GeoGebra pensa disso?<br>P6: é isso vai ser... ele vai pegar essas funções reais até uma certa aproximação, então quer dizer que na prática, no desenho vai acabar ocorrendo uma...<br>William: uma intersecção?<br>P6: É! Eu não sei como que ele... |
| entrevista P6        | relativo ao episódio 1 | É! Todo software tem essa limitação né? Assim, é engraçado, é uma coisa boa pra pensar mesmo, porque eu nunca tinha me preocupado.   |
| Entrevista P6        | relativo ao episódio 2 | P6: Oh lá oh.<br>William: Ele deu uma reta né?<br>P6: Deu uma reta...<br>William: totalmente densa.<br>P6: Totalmente densa, bonitinha.<br>William: E se eu fosse usar sua mesma ideia, de discutir...<br>P6: isso aqui não tá, seu mouse... essa bolinha do seu mouse tá meio...<br>William: Eu não sei o que acontece com meu mouse.<br>P6: É, mas de fato por mais que se dê zoom, tá denso ali no um, né?<br>William: Uhum.<br>P6: Aqui, um... é, eu não esperava por isso também não.   |

|               |                        |  |
|---------------|------------------------|--|
| Entrevista P6 | relativo ao episódio 2 | P6: Então assim, por que, que ele tá mostrando uma coisa que, assim, estritamente tá errado né? Estritamente...<br>William: No sentido matemático?<br>P6: É! No sentido matemático. Esse gráfico não pode ser assim, ele tem que ter um buraquinho no um. Então assim, vamos dá zoom aí pra vê se vai chegar uma hora que aparece lá o buraquinho, mas de fato, isso eu não sei por que isso acontece. |
| Entrevista P6 | relativo ao episódio 1 | William: Entende a natureza da minha pergunta?<br>P6: sim, perfeitamente. Uma coisa que não é pra intersecção, mas ele vai indicar que tem né?   |
| Entrevista P7 | relativo ao episódio 1 | Bastaria tentar, se ele tem um ponto em comum, fazer a intersecção dos dois objetos. (P7 usa a entrada de comandos e digita o comando "Intersecção[f, g]"... ele diz que tem (P7 fica um tempo em silêncio em estado pensativo) [...] você me deixou agora com três dias de estudo aí na cabeça né?  |

#### 4.3 – Da visualização à discussão conceitual ou operacionalizar conceitos para construir objetos matemáticos estruturados: Um transitar consolidado

Nesta seção apresento um modo de transitar que se mostrou comum aos usuários entrevistados. Para isso, apresento recortes e articulações de suas falas, buscando fundamentar sua validade a partir da aproximação a alguns pontos teóricos já consolidados na pesquisa com Geometria Dinâmica e a perspectiva cognitiva da construção de conceitos matemáticos que busquei adotar (ver final da seção 2.2.2).

Em resumo, apresento uma interpretação do movimento entre os jogos de linguagens, que aponta o transitar partindo-se das possibilidades semióticas do movimento *componente figural – componente conceitual* (Gravina, 2001) da MG, pautando-se no pragmatismo da ME, para possibilitar chegar aos significados matemáticos formais da MM.

Primeiro falemos da MM para P1. Para começar peço que o leitor observe os excertos que busquei reunir para iniciar a discussão (ver Quadro 54).

##### *Quadro 54- Alguns excertos da entrevista de P1 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM)*

|               |           |  |
|---------------|-----------|--|
| entrevista P1 | excerto 1 | Eu ia igualar né, aí corta, corta, e elevado a menos x é igual a zero não existe nenhum x. Não, não tem. |
| Entrevista P1 | excerto 2 | Sem duvida a prova matemática é contundente.   |

|               |           |   |
|---------------|-----------|---|
| Entrevista P1 | excerto 3 | Bom, matematicamente é contundente, igualou, cortou e não há nenhum x igual a zero. Acabou, morreu, correto?  |
| Entrevista P1 | excerto 4 | Não é descontinuidade. O problema é do domínio. Para ter continuidade o ponto tem que estar no domínio. Então neste caso é problema de domínio, não de continuidade. Para dizer que a função é contínua tem que redefinir um ponto que não está no domínio, correto? Esse ai é um caso que eu uso muito, principalmente com limite. Porque eles confundem aquele negócio de continuidade e pontos que não estão no domínio, né? Continuidade, só discutimos com pontos do domínio. Então esse probleminha aqui não é problema de continuidade. É problema de não pertencer ao domínio. Então essas duas funções são coincidentes, exceto naquele ponto que não pertence ao domínio desta, e pertence ao domínio da outra. |

No conjunto dos excertos, é perceptível que as explicações e argumentações de P1, pautam-se em sua compreensão de conhecimentos matemáticos e que lhe seriam os mais confiáveis, segundo minha leitura.

Nos Excertos 1,3 e 4 vejo elementos claros do uso da linguagem matemática internalista e simbólica.

Do Excerto 1 ao 3, aponto que depois de fazer algumas anotações com lápis e papel, comparando as expressões analíticas das funções referentes ao episódio 1, P1 ressalta o argumento “[...]matematicamente é contundente[...]”, noto sua segurança em amparar-se no desenvolvimento algébrico e pensamento abstrato para afirmar de que não há ponto de intersecção na situação considerada.

Chama atenção a estrutura do Excerto 4. É notável na fala de P1, sua intenção de deixar clara, a sua distinção, entre os conceitos estritamente matemáticos de continuidade e domínio de uma função. Sua linguagem e elucubração podem ser comparadas a que usei no exemplo sobre números inteiros, no intento de mostrar como se pode falar na MM (ver seção 2.3.1).

Similarmente, é possível encontrar e verificar que todos os outros entrevistados fazem uso do jogo de linguagem característico da MM.

No Quadro 55, apresento pelo menos um exemplo para cada entrevistado (P2, P3, P4, P5, P6 e P7). Os excertos são recortes dos momentos em que eles trataram de dar explicações matemáticas; justificativas sobre o que poderia ser considerado matematicamente correto afirmar, em relação a uma ou outra das questões que lhes apresentei, para discutir os resultados do GeoGebra em relação aos episódios 1 e 2. Por hora, peço que o leitor confirme ou não, se concorda ou não, que há elementos plausíveis, para caracterizar que todos os entrevistados também transitam pela MM

(ver Quadro 55) e que a segurança de suas afirmações advém de objetos e significados sem corporeidade material, mas que “existem” em suas práticas.

*Quadro 55 – Alguns excertos das entrevistas com P2, P3, P4, P5, P6 e P7 que denotam referências a Matemática do Matemático (MM) nas suas falas.*

|               |            |   |
|---------------|------------|---|
| Entrevista P2 | excerto 5  | Tá, eu preciso de um papel. Quando é que “e a menos x é igual a zero”, não, não vai. Um sobre e a x, é, não se interceptam.   |
| Entrevista P3 | excerto 6  | Não, se você vai por um outro caminho, né? Algébrico. E você vê matematicamente, que realmente não há intersecção.  |
| Entrevista P4 | excerto 7  | [...]o limite dessa função, por exemplo, tendendo a um, eu tinha que fazer a simplificação para poder depois aplicar o limite.[...] Eu estou pensando na simplificação que eu vou fazer em relação a x ao quadrado menos um, podendo ser separado em dois polinômios, x mais um, vezes x menos um.[...]O um não pode ser.   |
| Entrevista P5 | excerto 8  | Aí você fala, isso é um ponto? Tem toda uma discussão, né? Que a própria maneira de como você vê um gráfico como uma folha de papel, ou desenhado no computador, não é o gráfico da função, aí triângulos não existem, retas não existem, pontos não existem...   |
| entrevista P6 | excerto 9  | Eu estou tratando uma função e tem que ver o domínio ou as condições de existência né? Mesmo que eu não tivesse falando propriamente em função né? Oh, é essa expressão aqui, isso aqui é uma fração racional, uma fração racional que não está definida no x igual a um, se eu encará-la como uma função... bom, então eu posso simplificar essa fração racional? Posso, para todos os valores de x, exceto o um. Ela não está definida no um, então o x é diferente de um lá. |
| Entrevista P7 | excerto 10 | [...]Se eu tender as duas aqui ao infinito... esse primeiro termo da função f de aqui vai tender a zero, certo. Quer dizer, em termos matemáticos elas não vão se interceptar. Até porque [...] g de x igual a x é uma assíntota de f de x. Uma assíntota oblíqua.  |

Acredito que seja possível ao leitor, concordar que P1, P2, P3, P4, P5, P6 e P7 produziram significados legítimos a MM, da forma como considere. (ver item 2.3.1)

Agora vejamos outro conjunto de excertos. Quero reunir indícios de que os entrevistados não se limitam a lidar com significados matemáticos, apenas pautando-se em explicações ou processos formais da MM (ver Quadro 56). Para os entrevistados, as intenções didáticas são relevantes para se decidir sobre o uso do GeoGebra. Falando de outro modo, entendo que os entrevistados assumem que o GeoGebra é um instrumento. Sendo, portanto, relevante apresentar uma referência do que seria considerar o GeoGebra como um instrumento didático.

Segundo Rabardel (1995), podemos compreender um software do tipo do GeoGebra como sendo um instrumento, tal instrumento é entendido como uma

entidade composta por dois aspectos, *artefato* e *sistemas de utilização*. Um instrumento deve ser visto como um *artefato*, algo que foi produzido para o sujeito, neste caso, o professor de matemática. Entender o GeoGebra como artefato é procurar reconhecer e constituir os usos que o professor faz dele. Deste modo, é preciso reconhecer as necessidades e objetivos do usuário. Rabardel (1995), quando fala do outro aspecto, *os esquemas de utilização*, aponta que é importante reconhecer o componente psicológico do uso do instrumento. *Os esquemas de utilização* mediam o sujeito e a atividade. Sendo a mediação, o reconhecimento dos esquemas pessoais ou sociais pré-existentes.

Este pequeno desvio foi necessário para justificar a razão pela qual, optei por grifar algumas partes em especial dos excertos do Quadro 55. A intenção é apontar os objetivos e esquemas de utilização que podem ser depreendidos nas falas.

*Quadro 56 – Excertos que denotam que os entrevistados não se limitam a lidar com significados matemáticos, apenas pautando-se em explicações ou processos formais da MM*

|               |            |   |
|---------------|------------|---|
| entrevista P1 | excerto 11 | No ambiente de aula não interessa. Quer dizer, eu tento <b>ligar a matemática com o resultado que está aparecendo aqui...</b> tá. Em geral eu diria estatisticamente entre trinta e trinta e cinco por cento captam a relação <b>os outros ficam com a imagem</b> . Mas eu <b>prefiro que fique o resto com a imagem, do que com nada</b> . Com a ideia de que não entendeu, que não falei da matemática né? Vou lá e mostro, aqui, está vendo que é verdade? Ahhh, <b>por isso que é verdade?</b> Não, <b>tem uma prova disso</b> . Correto? Você está interessado em ver a prova? <b>Vou lá e faço a prova</b> . Trinta por cento presta atenção o resto rooocccc (som de roncado). Mas o que ficou? <b>Ficou a imagem da prova</b> , né? |
| Entrevista P6 | excerto 12 | [...] não é necessário, para o aprendizado matemático, estritamente, não é necessário. [...] <b>alguns gráficos, como que você vai explicar se você não tiver o GeoGebra?</b>   |
| Entrevista P3 | excerto 13 | Porque <b>o software é um auxiliar</b> . É uma ferramenta <b>que complementa</b> aquilo que você... <b>uma compreensão melhor</b> .   |
| Entrevista P5 | excerto 14 | [...] <b>eu uso como uma mímica do que tradicionalmente ele vê no livro</b> , né, tradicionalmente como as pessoas fazem [...]  |
| entrevista P7 | excerto 15 | <b>Quando eu estava em sala de aula</b> , lecionando pra administração, ciências contábeis e matemática, <b>eu usava pra mostrar</b> em sala[...]   |
| entrevista P1 | excerto 16 | Limite, <b>eu ensino limite com o GeoGebra visualizando</b> . Todo mundo aprende, noventa e cinco por cento aprende. Aprende e o aluno se dá muito bem na prova de limite. E foi o GeoGebra que nos ajudou.   |



|               |            |   |
|---------------|------------|---|
| Entrevista P1 | excerto 18 | <p>Aí que tá, por exemplo, eu deixo meus aluninhos uns três meses <b>lidar com resultados assim, fáceis, visuais</b>. Em certos momentos eu começo a questionar, mas por que? O que será? <b>Vamos analisar</b>. Então aí o aluno vai aos pouquinhos como uma criança. Como anda tua filha? Você colocou-a em pé e disse anda?</p> <p>Não, <b>isso é uma passagem gradual</b>, um passinho aqui, outro passinho aqui. Por quê? Porque senão você cai. Então se ele pergunta cedo, ok vamos explorar. Agora senão, ele fica contente com o resultado tudo bem, vamos lá. Pelo menos isso, ou seja, com GeoGebra minha intenção é pegar mais audiência. Senão estava passando trinta por cento, agora passa setenta. E esse setenta é melhor que os trinta anterior? É, pelo menos qualitativamente falando, <b>eles têm ideias e têm visões, visualizações</b>. Então acho que está bom.</p> |
| Entrevista P4 | excerto 19 | <p>Nesse caso aqui, por estar trabalhando com ... quando você me falou, define a função, já estava pensando que está num <b>diálogo bem próximo</b>. Talvez se a gente considerar uma matemática, que o professor de matemática usa na sala, é, <b>desconsiderando todo aquele formalismo</b> e que permite, por exemplo, <b>resolver equações por balanças de dois pratos</b>, sim, então <b>é matemática</b>.</p>   |
| entrevista P2 | excerto 20 | <p>Por exemplo, o que eu gosto muito de fazer com o GeoGebra, é conseguir botar aquela opção “se” lá. Botar um “if” lá”. E <b>mostrar para os alunos</b> que isso é possível. “Se” o ângulo for maior que noventa graus, a reta aparece assim, “se não for” <b>a reta aparece</b> assado. Ah, “<b>se</b>” <b>a coordenada do ponto x for assim, aparece esse ponto</b>, “<b>se não for</b>” <b>não aparece</b>. Então isso eu gosto de mostrar para os alunos. Que dá para fazer isso no GeoGebra.</p>  |
| Entrevista P3 | excerto 21 | <p>[...] eu vou <b>demonstrar que um triângulo</b>, um determinado teorema no GeoGebra por exemplo.[...] <b>Dependendo do lugarzinho que você for lá na tela, pronto furou né, não vale mais</b>. E ele tem que entender que a matemática... <b>o software não demonstra, ele mostra</b>.</p>   |
| Entrevista P4 | excerto 22 | <p>Para mim <b>a primeira possibilidade seria verificar o comportamento da função na questão gráfica</b>, talvez uma outra possibilidade seja construir controles deslizantes, e que obtenha valores, né? Vamos pensar, por exemplo, aqui (ele cria um controle deslizante e um número resultante da aplicação da função ao valor deste controle), vamos dizer que eu tenho um numero b que seja igual a um f do a, tenho um numero c que seja igual a g de a. <b>Pelo resultado que o GeoGebra nos fornece</b>, eles coincidem.</p>  |
| Entrevista P4 | excerto 23 | <p>Deixa eu pensar. (P4 começa a manipular a janela de visualização com a ferramenta mover do GeoGebra, e eu pergunto “você moveu pra?”) A principio eu movi, pra, talvez <b>eu vejo o comportamento da função</b>, é uma possibilidade.</p>  |
| Entrevista P5 | excerto 24 | <p>É... porque pra <b>fazer uma mímica do que ele tá acostumado</b>, porque ele vai abrir um livro, <b>ele vai ver uma bola desse tamanho</b>, ele vai ver o professor desenhando uma bola desse tamanho, embora o professor... volta antes da tecnologia, né, quando que alguém ia falar, “mas professor, esse é o gráfico mesmo, você pode tirar essa bolona, né?” Acho que nunca ninguém perguntou isso para um professor de cálculo fazendo o gráfico, né? “Esse é um gráfico mesmo de xis ao quadrado menos um sobre xis menos um?”. Tira todo esse calhamaço de gente que nunca ninguém perguntou isso, porque abstrai, então tira um ponto, <b>então simboliza que tira um ponto</b>, né, tá certo?</p>  |

|               |            |   |
|---------------|------------|---|
| Entrevista P5 | excerto 24 | [...] aí você fala <b>isso é um ponto?</b> Tem toda uma discussão, né? Que a própria maneira de como <b>você vê um gráfico</b> como uma folha de papel, ou <b>desenhado no computador, não é o gráfico da função</b> , aí triângulos não existem, retas não existem, <b>pontos não existem...</b><br>[...]É... <b>são todas abstrações</b> , né, então você tem que falar, “olha, então tem uma limitação, <b>isso não é o gráfico da função</b> , tá certo? Isso é <b>uma alegoria</b> , né, <b>uma aproximação do gráfico da função</b> [...] |
|---------------|------------|---|

Concordo que os excertos trazem outros sentidos se lidos na totalidade e individualmente. Mas é muito difícil a análise do conteúdo das falas. Como estive presente nas entrevistas, afirmo que os recortes são de momentos em que cada entrevistado defendia um ponto de vista em comum, porque usar o GeoGebra e de que forma. Falavam das possibilidades, quando respondiam sobre os limites.

Gravina (2015) aponta que existem alguns aspectos muito significativos ao aproveitamento do potencial semiótico do GeoGebra. Aponto dois deles para tentar fazer uma leitura do que pude captar destes momentos:

[...] – na construção e na manipulação de figuras dinâmicas tem-se o germe do significado e da necessidade de uma demonstração. O procedimento de construção informa os ‘fatos declarados’. **As regularidades observadas mediante manipulação da figura dinâmica, informam sobre regularidades que não foram declaradas – os fatos implícitos – que se tronam passíveis de explicação via argumentação dedutiva.**[...] – com as figuras dinâmicas, as definições e os teoremas da geometria passam a ter componente figural com infinidade de representações e **assim criam-se condições para o desenvolvimento de habilidades para identificar, em processos de demonstração, sub-configurações de propriedades já conhecidas, necessárias ao desenrolar da argumentação** (GRAVINA, 2015, p.244-245, grifos do autor).

Os grifos dos excertos sugerem que se pode transitar partindo dos objetivos didáticos mais característicos a ME (aproveitando-se de aspectos do potencial semiótico da MG) para tentar estabelecerem-se processos que permitam ou talvez incitem discutir significados da MM. Esta proposição que tento depreender e que me parecem ser, as intenções tácitas, é amparada pelas ideias já confirmadas por um profundo estudo de Gravina (2001):

[...] É fato que a *interface* dinâmica propicia o processo de investigação, mas não garante, de imediato, a busca de explicações de natureza dedutiva. A precisão dos desenhos pode favorecer as validações empíricas, isto porque a busca de explicação para *fatos estáveis implícitos*, revelados pelo dinamismo da figura, nem sempre é uma atitude espontânea – o que é explicável pela crucial e necessária ascensão de patamar de conhecimento. Para os alunos, ainda em fase de transição de empírica, proporcionada pelo dinamismo da figura, e uma argumentação dedutiva. Mas constatou-se neste estudo que gradativamente a precisão e o dinamismo dos desenhos funcionaram a favor do acurado controle de *fatos declarados* e *fatos*

*implícitos*, condição primeira para o desenrolar do processo de demonstração, e também operaram como suporte às apreensões operativas, necessárias ao avanço do processo de demonstração (GRAVINA, 2001, p.192).

Vou tentar defender minha leitura de mais uma forma. No excerto 18, podemos encontrar um recorte de sua fala: *“Vou lá e mostro aqui, está vendo que é verdade. Ah por isso que é verdade? Não, tem uma prova disso. Correto? Você está interessado em ver a prova? Vou lá e faço a prova”*. Neste recorte, P1 conclui uma sequência de sua fala de como vê valor em partir das imagens, acreditando que os significados que emergirão, já lhe serão inicialmente interessantes. Parece estar falando no sentido de produzir significados menos legítimos a MM, porém, “aceitáveis” a ME.

Este é um jogo de linguagem que considero muito similar a “[...]As regularidades observadas mediante manipulação da figura dinâmica, informam sobre regularidades que não foram declaradas – os fatos implícitos – que se tornam passíveis de explicação via argumentação dedutiva” conforme diz Gravina (2015, p.244).

P1 fala “[...]isso é uma passagem gradual, um passinho aqui, outro passinho aqui[...]” e conclui *“É, pelo menos qualitativamente falando, eles têm ideias e têm visões, visualizações. Então acho que está bom.”*

Reforço, a citação e estes recortes me levam a considerar um jogo de linguagem que parte da aceitação da maleabilidade da linguagem presente em ME, buscando dar bases para discutir significados da MM, através da MG.

Por fim, uma última aproximação aos fundamentos que usei anteriormente. Defendo que os entrevistados consideram a ME, como um modo de produzir significados matemáticos, que primeiro, visa o aspecto operacional do processo de construção de conceitos, transitando para ao aspecto estrutural, buscando orná-los objetos; digo isso, pautando-me no reconhecimento dos jogos de linguagem que permeiam nossas práticas da ME, como apontado ao fim do item 2.2.2.

#### 4.4 – Reconhecimento de diferentes aspectos da MG e da história do GeoGebra, uma forma de aprender sobre como lidar com suas possibilidades e limites

Nesta seção apresento uma reflexão que emergiu da entrevista com P1. De certa forma, é possível identificar que outros entrevistados fazem uso de seus conhecimentos da MM para refletir sobre o funcionamento da MG. Porém, são muitas direções para olhar em um trabalho como este. Optei em escolher uma só entrevista e apresentar uma reflexão da possibilidade de compreender a MG a partir dos aspectos computacionais e históricos do desenvolvimento do software.

Começo reunindo alguns excertos da entrevista de P1 (ver Quadro 57).

*Quadro 57 – Excertos da entrevista de P1 que denotam seu uso da MM como estratégia para lidar com os limites da MG*

|               |           |  |
|---------------|-----------|--|
| entrevista P1 | excerto 1 | A gente ajusta. O software é nosso secretário, nós temos que ser os chefes. Então eu como pensadora de cálculo um ou matemática ou observador, corrijo o que o software não fez correto.   |
| Entrevista P1 | excerto 2 | [...] sso aqui que foi feito é uma simulação. Então como simulação tem seus defeitos. É claro, por exemplo, isso de passar assim. É lógico que isso vai acontecer, porque o software não percebe esse detalhe. Porque é um detalhe matemático. É o que tu falou, como levar a matemática para interpretar o que o software fez. E corrigi-lo e isso eu faço direto.  |
| Entrevista P1 | excerto 3 | Mas já me encontrei em outras situações, não dez vezes, não cem vezes, eu diria umas quinhentas vezes. Do software eu vou lá e outra coisa (cara de espanto) que eu não esperava. Então como fazer? Aqui que acho a aula melhor. A melhor aula é essa que falhou o software. Por quê? Porque aí vamos analisar, gente. Analisar, ahhh palavra maravilhosa, aí vem a matemática. Amo a matemática, quando não tinha o GeoGebra ainda amava ela. |

O Excerto 1 deixa claro que P1 estabelece uma postura segura e independente para fazer uso do GeoGebra. Sua certeza está nos significados matemáticos da MM.

No Excerto 2 vemos que P1 tem uma caracterização artificial da MG e reconhece seus limites. P1 concorda que é possível explicar tais limites ou outros resultados da MG, partindo da MM.

Do Excerto 3 e considerando que P1 atua principalmente na formação inicial de professores, lhe parece claro que discutir a MG é útil a ME.

E isto é algo dito há muito tempo:

A formação do professor deve prover condições para que ele construa conhecimento sobre as técnicas computacionais, entenda por que e como integrar o computador na sua prática pedagógica e seja capaz de superar barreiras de ordem administrativa e pedagógica (VALENTE, 1999, p. 27).

Ainda em consideração ao Excerto 3, considerando o recorte: “A melhor aula é essa que falhou o software. Por quê? Porque aí vamos analisar, gente. Analisar, ahhh palavra maravilhosa, aí vem a matemática. Amo a matemática, quando não tinha o GeoGebra ainda amava ela.” P1 aponta algo que encontramos na revisão literária, de acordo com o que diz Burak (2005):

Quando o professor se propõe a compartilhar o processo de ensino que usualmente é deflagrado pelo professor, ele se sujeita a perder um pouco da sua segurança, pois, depara-se com o desconhecido, não possui domínio completo da situação, rompe com a forma linear de se tratar com o conteúdo matemático. (BURAK, 2005, p. 10)

P1 está realmente adotando uma postura desejável para um professor de matemática. Noto sua atitude positiva, mas também aponto sua surpresa quando confrontada com o episódio 1:

[...]William: Como que a senhora, sem apoio do software, faria?

P1: Eu ia igualar né, aí corta, corta, e elevado a menos x é igual a zero, não existe nenhum x. Não, Não tem.[...]

[...]William: [...]O comando intersecção, tem a macro. Quer experimentar?

P1: Quero! (digitando o comando para intersecção).

William: Ele obteve.

P1: (expressão de espanto)[...]

Apesar do espanto, P1 logo se coloca a lidar com o limite da MG, partindo de um exercício de aproximação da MG a MM:

[...]P1: É porque é numérico né?

William: Ah, a senhora já tem rapidamente um olhar.

P1: Éhhhhh, mas não tem!

William: Mas não tem no nosso objetivo que é desenvolver o pensamento matemático.

P1: Muito bom, gostei! A ideia aqui é que é um processo numérico.

William: A senhora vê isso como falha?

P1: Não, porque a gente se acostuma.

William: Se eu sou seu aluno agora e pergunto o que aconteceu, a senhora me diz, é um processo numérico. E o que mais?

P1: Um processo numérico não é a perfeição de uma prova matemática, claro. Sem dúvida a prova matemática é contundente.[...]

Para P1 a sensação de desconforto muda quando lhe mostramos a possibilidade de fazer a mesma pergunta na Janela CAS e obter uma resposta mais próxima do que esperava.

[...]William: Bom, se a senhora quiser um outro espaço.

P1: O CAS né?

*William: Sim, o CAS. Que trabalha com uma perspectiva diferente, se a senhora escrever ai intersecção...[...]*

*P1: (Manipulando o software) Intersecção, função, função, pronto. Interessante que aqui não apareceu aquele, objeto com objeto, né.*

*William: São controles diferentes.*

*P1: Aiiii que bonitinho... boa, muito boa! Que gracinha, tá, tu já me indica o CAS, agora tomei a conhecer o que será que ele vai reportar.*

*William: Eu não estou mais trabalhando sem o CAS.*

*P1: Muito bom.[...]*

Mas o fato de ver uma resposta diferente, usando uma interface diferente, não a levou a considerar que a MG tem diferentes aspectos:

*[...]William: Seja aqui, ou seja aqui. (aponto primeiro para Janela de Visualização e depois para a Janela CAS) Eu tenho um processo de aproximação numérica? Tudo aqui é aproximação numérica? [...]*

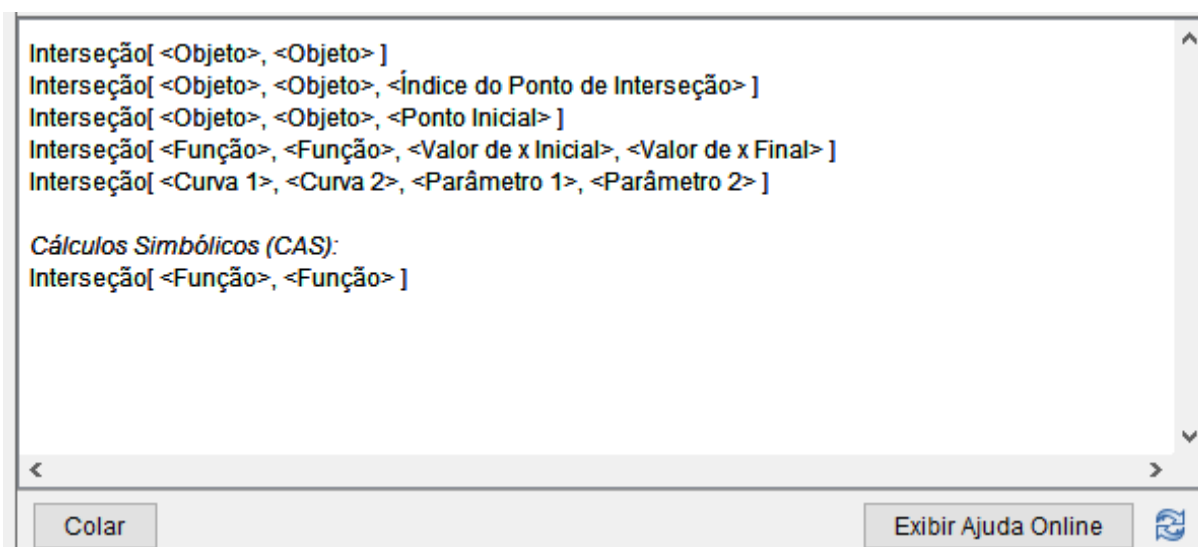
*P1: Mas esse é mais preciso.*

*William: É no mínimo, mais um espaço para dialogar.*

*P1: Bom, todos esses softwares: matemática, máxima e matlab. Todos usam a mesma base de codificação numérica, estou falando. Senão, aí tu vê a precisão. Ele precisava realmente disso para dar credibilidade né! Como tu acabou de falar... Lá está suspeito.[...]*

É importante registrar que existem diferentes sintaxes para o comando “Intersecção” e que a ajuda do software dá pistas que os métodos são distintos, conforme se pode ver na Figura 18 a seguir:

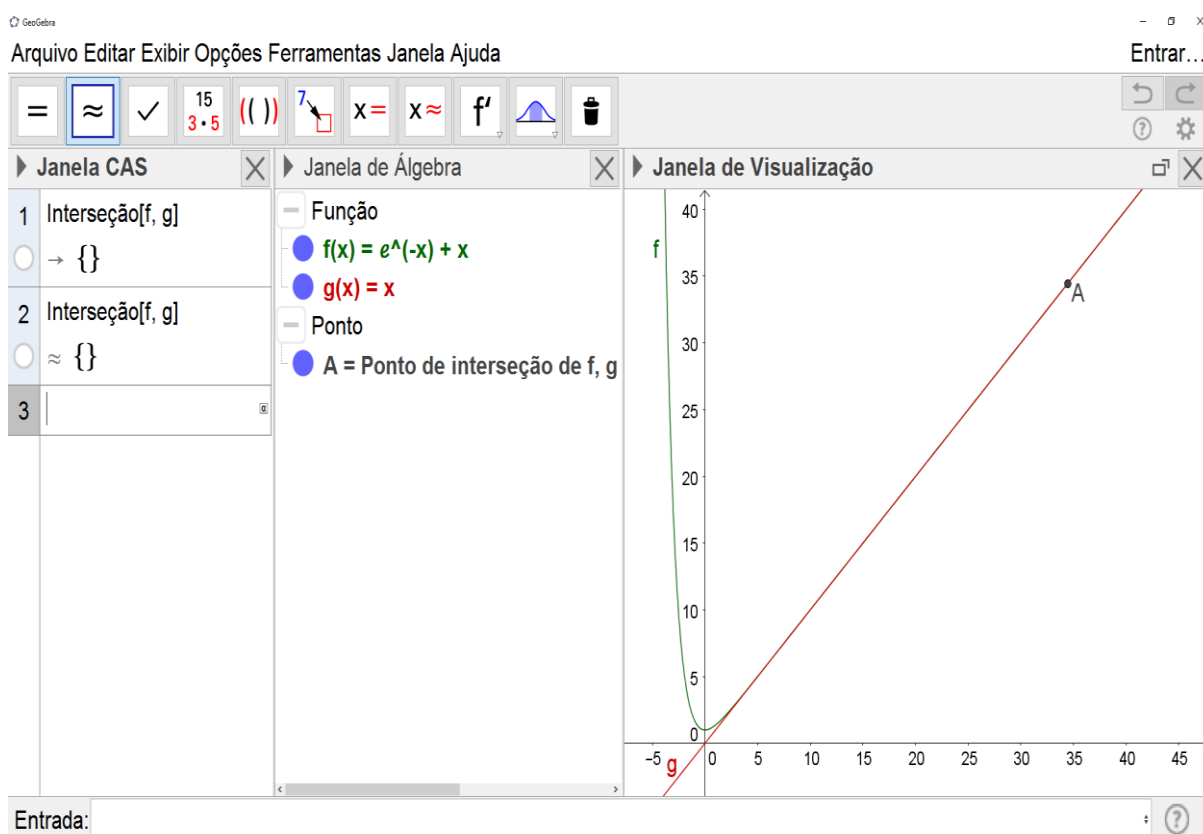
Figura 22 – Recorte da janela de ajuda para os comandos do GeoGebra



Fonte: O autor

A janela CAS permite fazer, tanto cálculos simbólicos quanto aproximações numéricas, mas a sintaxe particular do comando “Interseção[ <Função>, <Função> ]” e os resultados dos testes que vemos na Figura 22, comprovam que o ambiente da Janela CAS é diferente do ambiente das Janelas de Álgebra e de Visualização.

Figura 23 – Comparando a Janela CAS e a Janela de Álgebra

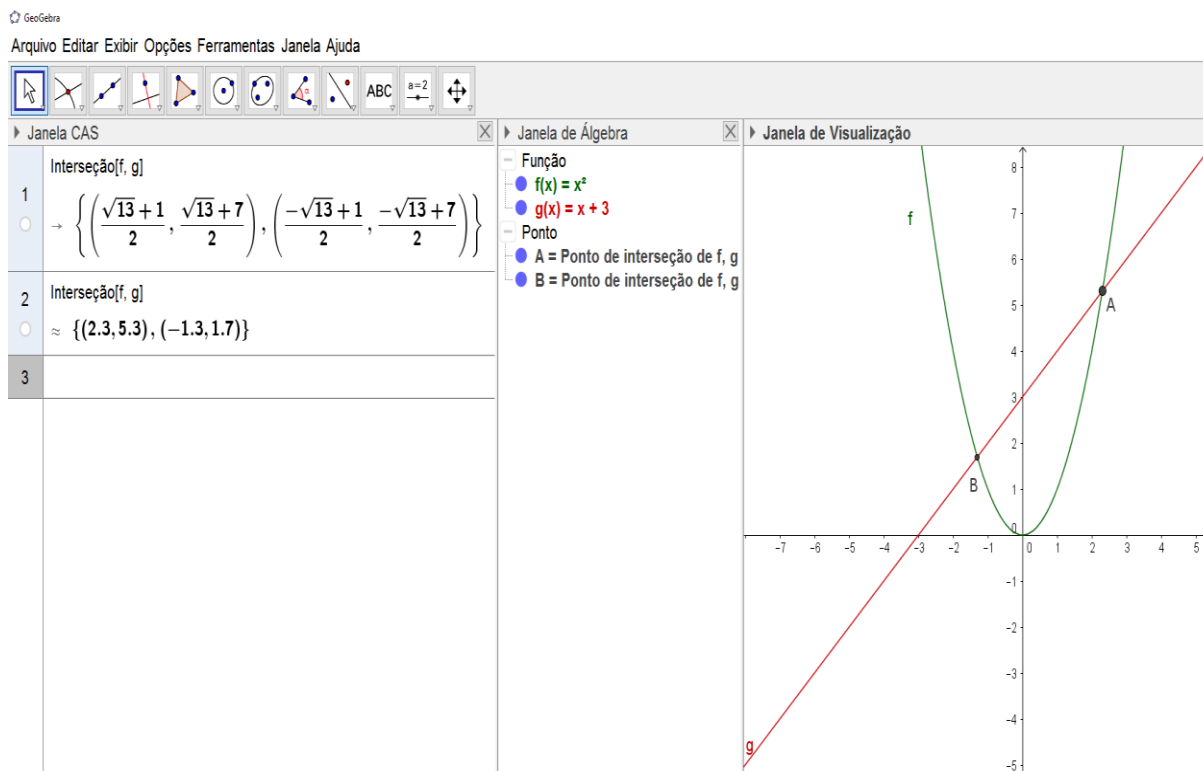


Fonte: O autor

Na linha 1 da janela CAS (mais a esquerda) pedimos uma avaliação simbólica (note o símbolo “  $\rightarrow$  ” em frente as chaves “  $\{ \}$  ”), na linha 2 pedimos uma avaliação numérica (note o símbolo “  $\approx$  ” em frente as chaves “  $\{ \}$  ”), no entanto, a resposta continua sendo algo que sugere não haver intersecção.

Farei outro rápido desvio para mostrar (veja Figura 24) que, para outras funções, as expressões dentro das chaves seriam números “exatos” e “aproximados”. Espero com isso fundamentar o argumento que usei sobre as diferenças entre os ambientes que estão por trás de cada janela do GeoGebra.

Figura 24 – Exemplo evidente do cálculo simbólico e do cálculo numérico computacional com a Janela CAS



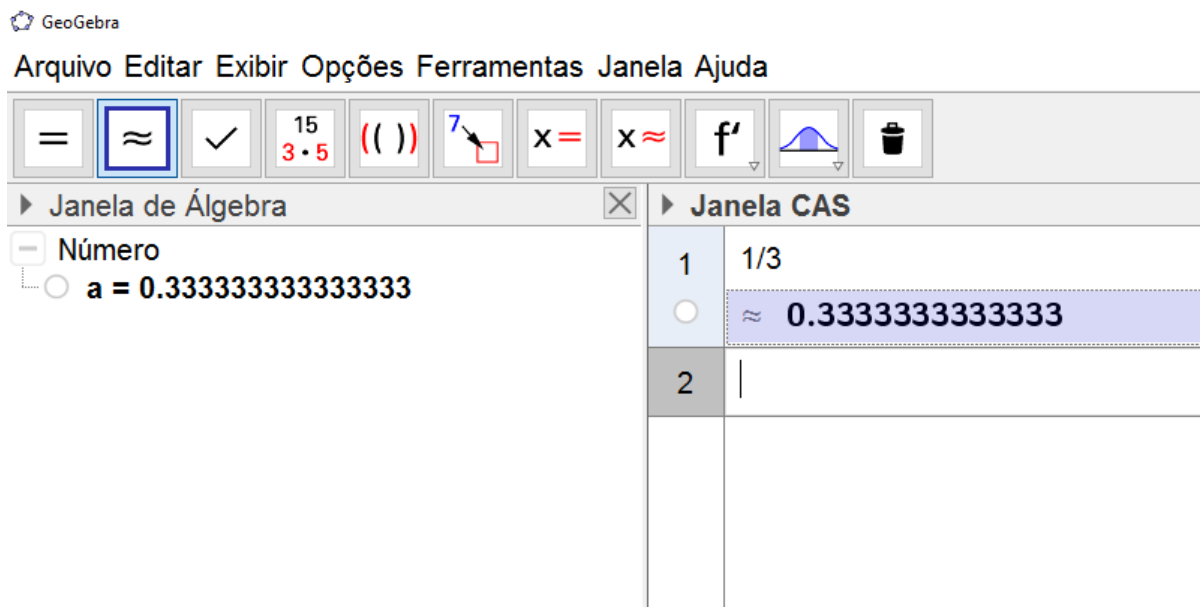
Fonte: O autor

Voltando a discussão sobre a entrevista de P1. Outro ponto interessante a ressaltar, P1 diz “*Mas esse é mais preciso.*”, quando emite sua avaliação da comparação dos resultados encontrados ao testar o mesmo (aparente) comando.

Porém, se compararmos as aproximações numéricas feitas por ambas as interfaces (janelas), veremos que o código GeoGebra (exclusivamente escrito em linguagem Java, e que é a base das Janelas de Visualização e Álgebra e da Entrada de Comandos) considera mais casas decimais do que uma mesma aproximação pedida para a Janela CAS (ver Figura 25).



Figura 25 – Comparação de quantidade máxima de casas decimais entre as Janelas de Álgebra e CAS



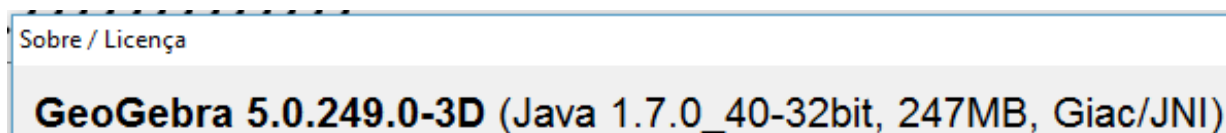
Fonte: O autor

Na Figura 25 temos duas aproximações para a expressão  $1/3$ , neste caso, configuramos o GeoGebra para o máximo de casas decimais (15 casas decimais) e pode-se confirmar que na Janela de Álgebra aparecem as 15 casas decimais. Enquanto que na Janela CAS aparecem somente 13 casas decimais. Por que acontece isso?

Buscar compreender a MG, não precisa ser apenas um exercício de se partir da MM. É recomendável que professores de matemática comecem a receber indicações dos processos de desenvolvimento de softwares.

Veja um recorte das informações que se obtém ao pedir informações sobre a licença do GeoGebra (ver Figura 26):

Figura 26 – Versão do GeoGebra



Fonte: O autor

Chamo atenção ao segundo item dentro dos parênteses, onde está escrito GIAC/JNI.

GIAC<sup>39</sup> é uma biblioteca C++, é o núcleo computacional do Sistema Computacional Algébrico (CAS), pode ser usado dentro de outros programas C++, e também programas escritos em Python, Java e Javascript. Exemplos de software usando Giac como kernel do CAS: GeoGebra (Java e Javascript interface), HP Prime Calculadora (C ++), o Pocket CAS (C ++), CAS Calc P11 (C ++). (PRESENTATION..., 2016, tradução minha).

Talvez o leitor pense ser improdutiva a citação acima, mas não a faço exigindo que se entendam os significados computacionais, no sentido do cientista de computação. Este profissional passa anos se preparando e ambientando para lidar com os modos de produção de significados que lhe devem ser comuns.

Não estou sugerindo que para usar o GeoGebra, deva-se estudar computação, pelo menos, não profundamente. Estou dizendo que é preciso que professores de matemática, reconheçam que saber das histórias dos softwares pode ser útil para dar direções de como lidar com situações intrigantes. Procurar saber como o GeoGebra constitui-se de diferentes linguagens de programação e reconhecer que há diferenças entre tais linguagens, pode ajudar na compreensão da MG.

A MG evolui em função do que os desenvolvedores escolhem ou são capazes (em um determinado momento) de oferecer. Na equipe dos desenvolvedores atuais, existem professores de matemática que se tornaram programadores para aproximar a MG da ME pretendida, mas é preciso reconhecer que há limites para a maquiagem que é possível se dar. A MG, na minha leitura, é um amálgama do que é possível se fazer com a maleabilidade da linguagem da ME, buscando representar os formalismos da MM, mas os aspectos particulares da matemática computacional, linguagens de programação e pensamento computacional, são fatores que acabam por influenciar o produto final.

---

<sup>39</sup> **Giac** is a C++ library, it is the CAS computing kernel, it may be used inside other C++ programs, and also Python, Java and Javascript programs. Examples of software using Giac as CAS kernel: GeoGebra (Java and javascript interface), HP Prime Calculator (C++), Pocket CAS (C++), CAS Calc P11 (C++).

Penso que é necessário começar a constituir material histórico e instrumental que também vá dando condições ao professor de matemática, de poder se aproximar de tais questões. Os desenvolvedores do GeoGebra buscam considerar as necessidades que os usuários apresentam (ver Figura 27).

Figura 27 – Recorte de uma discussão no fórum em inglês do IGI

The screenshot shows the GeoGebra forum interface. At the top, there is a navigation bar with 'GeoGebra' logo, a plus sign, and links for 'Materials' and 'Dow'. Below this is a secondary navigation bar with 'Home', 'Topics', and 'New Topic' buttons. The main content area shows a breadcrumb trail: 'GeoGebra > Topic > Idea > English'. The post itself is highlighted in yellow and has a green 'Answered' badge. The title is 'Decimal places' and it was shared by 'croob' 9 years ago. The text of the post asks: 'Can a future version have 10 decimal places. This would be really usefel when investigating limits using the zoom function.' It ends with 'Cheers Tobias' and a link to 'Show translation'. There is one 'like' button showing '1 I like this idea' and a 'Follow This Topic' button. Below the post, there are 'Comments (2)' with a sort dropdown set to 'Oldest'. The first comment is from Markus Hohenwarter, 9 years ago, with 1 heart. The comment text is: 'Well, I could increase the number of decimal spaces shown but this would not change the accuracy of internal computations. GeoGebra works with double precision floating point numbers and I don't want to show a lot of decimals that are simply wrong...'. It ends with 'Bests, Markus' and has options for 'Reply', 'Show translation', and 'URL'.

Fonte: O autor

Na Figura 27, na parte que está na cor amarela, o usuário “croob” pergunta se seria possível, em uma futura versão (note que o post é de 9 anos atrás) do GeoGebra, implementar ao menos o uso de 10 casas decimais. O usuário “croob” registra que se fosse possível, tal “avanço” seria útil para se investigar “limites”

(entendo que se fala da ideia matemática de “limite de uma função”) usando a função zoom. O próprio idealizador do software “*Markus Howenwarter*” responde que até poderia aumentar a quantidade de casas decimais aparentes, mas que isso não mudaria a acurácia das computações internas. E ainda explica que o GeoGebra trabalha com “ponto flutuante de precisão dupla” (ver seção 2.3.3 para resgatar os detalhes) para os números que o software trabalha. Por fim, ainda diz que não quer mostrar várias casas decimais por ser simplesmente errado. Curiosamente, hoje podemos expor até 15 casas decimais, mas como podemos ver no *episódio 1*, a acurácia da computação numérica ainda tem seus limites.

Para fechar, eu uso o GeoGebra há 11 anos e sempre fui percebendo que as implementações traziam ganhos e perdas, mas sempre reconheci que era preciso estar atento às mudanças em um instrumento que intento usar para ensinar. Por exemplo, a Janela CAS já passou por dois diferentes tipos de CAS kernel (“motor” de CAS); e podemos confirmar isto em, “[...] *tecnicamente os motores CAS utilizados dentro do GeoGebra são MathPiper e Maxima [...]*”<sup>40</sup> (Hohenwarter, Lavicza, 2010, tradução minha). Antes, os motores CAS usados, traziam poucas possibilidades, não se articulavam facilmente com as outras interfaces e eram muito lentos para dar respostas; talvez por isso, poucos usuários (mesmo experientes) usam ou reconhecem suas possibilidades atuais.

Com isso espero ter mostrado meu ponto de vista final, advindo dos resultados desta pesquisa. A constituição da MG é algo que perpassa a linguagem da ME, de modo que, mesmo acrescentando várias representações semióticas articuladas dinamicamente, é importante ir construindo intimidade com a história de seu desenvolvimento, isto pode ajudar a aprender mais sobre suas possibilidades e limites. Suponho que porque estas informações, geralmente, são pouco reconhecidas em nosso país, ou talvez porque os professores já têm muito que fazer, esta minha proposição ainda não seja muito divulgada ou considerada. Mas certamente é um caminho potencial e relevante para produção de pesquisa e instrumentação de professores com o GeoGebra.

---

<sup>40</sup> “[...] the cas engines used within GeoGebra are MathPiper and Maxima [...]”

## CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES

Penso que o mais importante a se dizer nestas considerações, é o que direi agora. Este trabalho não se trata de uma avaliação da qualidade do que os entrevistados disseram e nem sobre o conteúdo das dissertações e teses que procurei considerar para referenciar-me. Considero todos muito críticos de suas posturas e práticas.

Estou imerso em uma comunidade que passei a considerar muito criativa e proficiente no uso do GeoGebra. Não posso e nem quero fazer comparações ou emitir juízos de valor sobre o que os professores pesquisados e outros quaisquer, dizem ou praticam, não acredito que seja útil afirmar se é bom ou ruim. Se for questionado sobre isto, direi apenas que estão todos certos, pois somos profissionais em constante desenvolvimento. No Brasil, eu sustento que existem pessoas muito comprometidas com seu trabalho docente em relação à Matemática. São pessoas corajosas, generosas e muito simpáticas. A todos os interessados no GeoGebra, eu gostaria de poder agradecer pessoalmente por compartilharem o que fazem, por constituírem comunidades.

Acabei vivenciando a experiência de estudo mais significativa da minha vida, até o momento. Não acredito que será a última. Pretendo continuar imerso e construir um projeto de longo prazo, mas deixe-me, antes, falar sobre como considero se meus objetivos foram ou não alcançados. É indispensável, tanto ao formalismo da academia, quanto ao meu exercício de amadurecimento intelectual.

Sobre o primeiro objetivo, defendo que a descrição foi alcançada. Peço ao leitor que considere a complexidade de se tentar escutar, observar e de alguma forma, catalogar algo que aconteceu. Etnólogos e sociólogos intentam fazer isso (no meu grosso modo de dizer) profissionalmente e recebem preparo para isso. Eu, um professor de matemática, que trabalha com formação inicial de professores de matemática; aventurei-me em searas parecidas às destes profissionais. Julgo que não fiz nada que possa ser considerado um estudo dessa natureza. Fiz algo em que acredito, e quando digo que acredito, penso que agi de maneira coerente com o que o que escrevi.

Adotei critérios metodológicos e mantive-me atento a eles. Ao construir as categorias de análise, considero e defendo que as mesmas foram adequadas para descrever como alguns professores de matemática que usam o GeoGebra, lidaram com questões sobre a validade matemática e didática, quando confrontados com algumas limitações do GeoGebra. São informações atemporais, baseadas nas experiências de mergulhos intelectuais em práticas, que podem ser consideradas como sociais e profissionais. E, objetivamente ligadas a discutir matemática, ensino de matemática e o uso de uma ferramenta didática. Compreendo que não são experiências de caráter científico, no sentido do que se pode fazer nas Ciências Naturais ou daquelas em que se pode impor algum controle sobre variáveis. São experiências vividas, dão indícios e não provas. É deste modo que entendo que a Educação como Ciência, busca atualmente se constituir.

Meu segundo objetivo foi atingido e para mim, de forma muito satisfatória. Confirmei que os usos de diferentes linguagens estão presentes no discurso dos professores de matemática que usam o GeoGebra. Percebi e analisei diferentes formas de transitar. Conjecturei uma possibilidade comum, pautando-me nos fundamentos que adotei e a defendo como válida, assim como outros já haviam feito, ao falar em Geometria Dinâmica.

O grupo que existe em torno da linha de pesquisa em Informática na Educação em Ciências e Matemática, o qual adentrei durante este doutoramento, me foi e será muito valioso. Das várias discussões que meus parceiros de pesquisa e eu travávamos, certa vez me foi perguntado: Por que o termo *Matemática Dinâmica* não era tão comum na literatura que compartilhamos? Respondi por reflexo, que na minha interpretação, não eram as possibilidades semióticas e nem a infinidade de possibilidades de técnicas computacionais, os reais motivos para que o ensino de matemática com o GeoGebra, pudesse ser assim chamado. São os professores de matemática que são dinâmicos. É no seu transitar entre linguagens e troca de ideias que a dinâmica é mais poderosa e potencialmente efetiva.

Na minha resposta que julgo ter emergido, naquele momento, penso que está a maior possibilidade de estudo que quero me dedicar. O GeoGebra é um objeto de estudo que também pesquisei, do qual, entre outras coisas, busquei aprender como fazer construções interessantes às minhas aulas e do qual vou produzir mais

material acadêmico que discutam suas particularidades. Mas é o poder criativo e inspirador de se trabalhar coletivamente, que acredito ser o mais importante para o momento, para a agenda que mencionei no primeiro capítulo deste texto. Considero que atualmente, o mais importante, é a constituição e o incentivo de estratégias que multipliquem as possibilidades de aprendizagem, para o maior número de professores de matemática e que estejam envolvidos com o GeoGebra. E não são os textos acadêmicos, os mais eficientes ao desenvolvimento de práticas, ideias e ideais aos professores de matemática em formação inicial. É preciso praticar para se discutir e divulgar práticas.

Dantas (2016) em sua tese apresenta o que considero um rico e novo referencial, dentre suas várias contribuições, aponta uma conceituação que denomina como *interação produtiva* – “[...]aquela em que sujeitos produzem significados a partir do compartilhamento de interlocutores.” (Dantas, 2016, p.96). Sua proposta é muito interessante e não cabe tentar resumi-la nesta breve seção. Tenho certeza de que não conseguiria, e portanto, recomendo fortemente a leitura de toda a sua tese, mas é relevante apontar que é associada a reflexões sobre uma longa experiência com várias edições do “CURSO DE GEOGEBRA”<sup>41</sup>. O autor citado, envolveu-se na construção de uma plataforma online, e é um dos idealizadores e mantenedores de um projeto de abrangência nacional, que fomenta a democratização do GeoGebra. O curso propõe materiais em vídeo e texto, disponibilizando atividades desafiadoras, em um ambiente de interação que pode ser síncrona e/ou assíncrona, mas fundamentalmente interativo e proficiente. A procura por vagas é imensa. Várias vezes aparecem pessoas sugerindo que o curso seja transformado em uma proposta do tipo MOOC<sup>42</sup> (*Massive Open Online Course*), porém, apesar da evolução dos materiais e formatos de execução em relação aos períodos de tempo, a equipe organizadora entende que a garantia de interação é mais produtiva e interessante. Fui cursista e já colaborei como moderador em duas edições. O número de moderadores e possíveis cursistas não para de crescer.

---

<sup>41</sup> Peço ao leitor que caso se interesse por mais informações, acesse [http://ogeogebra.com.br/site/?page\\_id=250](http://ogeogebra.com.br/site/?page_id=250). Para confirmar as várias edições acesse <http://ogeogebra.com.br/curso/>.

<sup>42</sup> Um *Curso Online Aberto e Massivo* pode ser definido como um tipo de curso que potencializa a participação de grande número de pessoas. Eu entendo que apesar de contribuir muito para democratizar informação e formação, não necessariamente, possibilita *interação produtiva* conforme Dantas (2016).

Geralmente, quem faz o curso e pode disponibilizar tempo para aprender a também ser moderador, acaba se inserindo em um caminho não linear de aprendizagem sobre o GeoGebra e discute, entre outras coisas, o ensino de matemática e o GeoGebra.

Acredito que o modelo e as experiências deste curso devem ser implementados, também, como uma possibilidade em licenciaturas em Matemática. Para isso, pretendo iniciar um Instituto de GeoGebra onde trabalho, existem outros colegas, professores formadores, que já se mostraram interessados em apoiar a pesquisa e extensão que aproxime de mais formas nossos discentes, docentes e o GeoGebra. Esta será uma proposta de linha de pesquisa em ação, uma linha que tratarei de formalizar e incentivar no Grupo de Pesquisa<sup>43</sup> do qual sou coordenador.

Não menos importante, será a continuidade do processo de estudo das informações que ainda tenho registradas e que são resultantes da aplicação completa do roteiro que mencionei na metodologia. Pedi também aos entrevistados para falarem do processo de adoção de software, motivação para usá-lo e objetivos profissionais em relação ao mesmo. Tenho registrado também, informações sobre os usos das construções dinâmicas, modos de construção de materiais a partir do GeoGebra, suas práticas e algumas concepções sobre demonstrações com o software. Os entrevistados falaram da relação do GeoGebra com a escola, ensino, aprendizagem, avaliação e formação de professores. São mais de vinte horas de vídeos e áudios. Tenho certeza de que ajudarão a produzir o material sobre a história do software no Brasil e que mencionei como relevante no capítulo anterior.

Em paralelo a estes objetos de estudo, acrescento o interesse em aprofundar-me na produção de pesquisa e uso do ambiente da Janela CAS do GeoGebra para o ensino de matemática, já existe literatura rica no âmbito internacional, mas é preciso dedicar-me ainda a tradução cuidadosa para iniciar discussões destas referências.

---

<sup>43</sup> Clique em GPEM - Grupo de Pesquisa em Educação Matemática para acessar mais informações.



Para finalizar, acredito que este trabalho apontou questões interessantes para outros pesquisadores que tratam de trabalhar além de professores de matemática:

- É importante estudar se as limitações computacionais têm levado estudantes de outros cursos e níveis a conceberem significados matemáticos equivocados;

- É importante buscar constituir um banco de dados que aponte limitações computacionais de outros aspectos ou dos que já foram percebidos nesta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, F. J. **O ensino de sistemas de equações lineares por meio da resolução de problemas**. 2013. 114f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.
- ARAÚJO, L. C. L. Cuidado no uso do computador!. **Revista do Professor de Matemática**. nº70, p. 50-55. 2004.
- BACCARIN, F. L. **Conjuntos infinitos e suas surpresas: uma sequência de atividades**. 2013. 87f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.
- BALDINI, L. A. F. **Elementos de uma comunidade de prática que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de matemática na utilização do software Geogebra**. 2014. 220 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto, 1994.
- BORBA, M. C; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- BORSSOI, A. H. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. 2013. 255 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.
- BURAK, D. Modelagem Matemática: experiências vividas. In: IV Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática – CNMEM, 2005, Feira de Santana – BA. **Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática**. Feira de Santana – BA: Editora da UEFS, 2005. Disponível em: <<http://www.dionisioburak.com.br/#!artigos-eventos/cnxf> >. Acesso em: 30/05/2016.

CAMTASIA®. **Screen Recorder & Video Editor Software**. Trial Version. Disponível em: < [www.techsmith.com/camtasia.html](http://www.techsmith.com/camtasia.html)>. Acesso em: 20 jan. 2015.

CARGNIN, C. **Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real**: possibilidades de articulação de Mapas Conceituais com a teoria dos registros de representações semióticas. 2013. 416 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

CAVALCANTI, L. B. **Funcionamento e efetividade do laboratório virtual de ensino de matemática na formação inicial de professor de matemática na modalidade EaD**. 2014. 314 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

CODATO-SEGURA, C. S. **Releitura de obras de arte pelo viés da Geometria Analítica**: uma proposta interdisciplinar para o ensino da matemática. 2013. 110f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

DANTAS, S. C. **Design, implementação e estudo de uma rede sócio profissional online de professores de Matemática**. 2016. 229 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Campus de Rio Claro, Rio Claro, 2016.

D'AMORE, B. **Epistemologia e Didática da Matemática**. 4<sup>o</sup> ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DUVAL, R. Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. . p.142–157, 1995. Springer Berlin Heidelberg. Disponível em: <[http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-57771-0\\_10](http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-57771-0_10)>. Acesso em: 19/6/2016.

\_\_\_\_\_. Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 1–2, p. 103–131, 2006. Springer Netherlands. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10649-006-0400-z>>. Acesso em: 19/6/2016.

FERREIRA, L. **Uma proposta de ensino de geometria hiperbólica**: “construção do plano de Poincaré” com uso do software Geogebra. 2011. 290 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2011.

GARNICA, A. V. M. História oral e educação Matemática. In: BORBA, M. de C.; ARAUJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 87-109.

GEOGEBRA: dynamic mathematics for schools. Version 5.0. Salzburg: Department of Mathematics, University of Salzburg, 2016. Disponível em: <[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)>. Acesso em: 20 jan. 2016.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches vem Didactique des Mathématiques**. 14 (3), p. 325-355. 1994.

GODOY, A. S. Estudo de caso qualitativo. In: SILVA, A. B. da; GODOI, C. K.; BANDEIRA-DE-MELLO, R. (orgs.). **Pesquisa qualitativa em estudos organizacionais**: paradigmas, estratégias e métodos. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2010, p. 115-146.

GONÇALVES, D. C.; REIS, F. DA S. Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra. **Bolema: Mathematics Education Bulletin = Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 27, n. 46, p. 417–432, 2014. Disponível em: <<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8253>>. Acesso em: 14/5/2014.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 255f. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

\_\_\_\_\_. O potencial semiótico do geogebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 18, 2015. Disponível em: <<http://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/605>>. Acesso em: 6/12/2015.

\_\_\_\_\_.; BÚRIGO, E. Z.; BASSO, M. V. DE A.; GARCIA, V. C. V. **Matemática, mídias digitais e didática : tripé para formação de professores de matemática.** 1ª ed. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

\_\_\_\_\_.; SANTAROSA, L. M. C. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. **Informática na educação: teoria & prática**, v. 2, n. 1, p. 73–88, 1999. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/20962>>. Acesso em: 2/8/2013.

KABACA, T. Using dynamic mathematics software to teach one-variable inequalities by the view of semiotic registers. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 9, n. 1, p. 73–81, 2013. Disponível em: <<http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-84875541992&partnerID=tZOtx3y1>>..

KUTSCHERA, F. von. **Filosofía del lenguaje.** Gredos, Madrid. 1979.

HOHENWARTER, M. LAVICZA, Z. **GeoGebra, its community and future.** 2010. Disponível em: <[http://www.unsam.edu.ar/escuelas/humanidades/centros/c\\_didacticas/Hohenwarter-Lavicza-GeoGebra-ATCM-Final.pdf](http://www.unsam.edu.ar/escuelas/humanidades/centros/c_didacticas/Hohenwarter-Lavicza-GeoGebra-ATCM-Final.pdf)>. Acesso em: 7/1/2016.

INSTITUTE GEOGEBRA INTERNATIONAL. **O que é o GeoGebra?**. Disponível em <<http://www.geogebra.org/about>>. Acesso em: 20/06/2016.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. Fundamentos de metodologia científica. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1993.

LAVICZA, Z. GeoGebra-General-talk. 2011. Disponível em: <[http://www.unsam.edu.ar/escuelas/humanidades/centros/c\\_didacticas/GeoGebra-General-talk-2a.pdf](http://www.unsam.edu.ar/escuelas/humanidades/centros/c_didacticas/GeoGebra-General-talk-2a.pdf)>. Acesso em: 7/1/2016.

LÉVY, P. **Cibercultura.** 1ª ed. São Paulo: Ed. 34, 1999.

LINARDI, P. R. **Rastros da formação matemática na prática profissional do professor de matemática.** 2006. 291 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2006.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e Educação Matemática. In: M. de C. Borba; M. A. V. Bicudo (Orgs.); **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. 1ª ed., p.92–120, 2004ª. Cortez.

\_\_\_\_\_. Characterizing the mathematics of the mathematics teacher from the point of view of meaning production. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION - ICMI2004, Copenhagen. **Anais...** Copenhagen, 2004b. p. 72-72.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), ano III, 1995.

LOVIS, K. A. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica**: o que pensam e o que sabem os professores. 2009. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

\_\_\_\_\_.; FRANCO, V. Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o Ensino de Geometria Euclidiana. **Informática na educação: teoria & prática**, v. 16, n. 1, 2013. Disponível em: <<http://seer.ufrgs.br/InfEducTeoriaPratica/article/view/26104>>. Acesso em: 4/12/2014.

MACHADO, NI. J. **Epistemologia e diática: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente**. São Paulo: Cortez, 1995.

\_\_\_\_\_. Mil e uma #76 – Goodman e os modos de fazer mundos. Série de textos online: Mil e uma. 2013. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/mil-e-uma-76-goodman-e-os-modos-de-fazer-mundos/>. Acesso em: 25/10/2015.

MAXQDA. **Qualitative Data Analysis Software**. Version 12.0. Disponível em: <<http://www.maxqda.com/>>. Acesso em: 19 de novembro de 2015.

MERRIAM, S. B. **Case study research in education. A qualitative approach**. San Francisco (CA) Jossey-Bass, 1988.

MISKULIN, R. G. S. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria**, 1999. Universidade Estadual de Campinas. Disponível em:

<<http://www.cempem.fae.unicamp.br/lapemmec/coordenacao/tese.pdf>>. Acesso em: 30/3/2013.

MODESTO, Camila de Fátima. **Matemática e arte: explorando a geometria dos fractais e as tesselações de Escher**. 2015. 251 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva**. Ijuí: ed. Unijuí, 2007.

MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica**, 2004. UFMG. Disponível em:

<<http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/EABA-6ABMUH/2000000078.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 9/6/2015.

MORETTI, M. T. A regra dos sinais para a multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 26, n. 42b, p. 691–714, 2012. UNESP - Universidade Estadual Paulista / Pró-Reitoria de Pesquisa / Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Disponível em:

<[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-636X2012000200014&lng=pt&nrm=iso&tlng=en](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000200014&lng=pt&nrm=iso&tlng=en)>. Acesso em: 9/6/2016.

NASCIMENTO, E. G. A. **Evaluation of GeoGebra software as psycho-pedagogic and learning approach to geometry**, 2012. <http://www.teses.ufc.br>. Disponível em:

<<http://www.repositorio.ufc.br:8080/ri/handle/123456789/3081>>. Acesso em: 15/7/2013.

OLIVEIRA, C. N. C. **Números complexos: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos**. 2010<sup>a</sup>. 191f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010<sup>a</sup>.

OLIVEIRA, W. **Matemática e música**: interdisciplinaridade no ensino da trigonometria e uma proposta de atividades para sala de aula. 2015b. 196 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015b.

ONUCHIC, L. R. E. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Vigiani (org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. Rio Claro: Editora Unesp, 1999.

PAES, L. A. A. **Números complexos**: uma proposta didática baseada na modelagem matemática e em contextos históricos. 2013. 83f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de Geometria**: uma abordagem histórica. Dissertação de Mestrado – UNICAMP, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PEREIRA, A. S. **Fractais circulares**: algumas considerações e atividades. 2013. 81f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PLATT, J. “Case study” in american methodological thought. **Current Sociology**. v. 40. n. 1. P. 931-955, 1992.

PONTE, J. P. M. DA. A natureza da Matemática. **Didáctica - Matemática Ensino Secundário**. 1ª ed., p.9–44, Lisboa. 1997.

PREINER, J. **Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra**, 2008. University of Salzburg. Disponível em: <<http://archive.GeoGebra.org/static/publications/jpreiner-dissertation.pdf>>. Acesso em: 2/1/2016.

PRESENTATION of Xcas, the swiss knife for mathematics. Disponível em: <<https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html>>. Acesso em: 19/06/2016.



RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains**. Paris: Armand Colin, 1995.

RODRIGUES, G. M. **Desenvolvimento profissional em um grupo de trabalho: professores de matemática que ensinam por meio de softwares educacionais**. 2013. 291 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Campus de Bauru, Bauru, 2013.

SANTOS, J. M. **Isoperimetria na educação básica**. 2014b. 121 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014b.

SANTOS, T. S. **A inclusão das geometrias não-euclidianas no currículo da educação básica**. 2009<sup>a</sup>. 227 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação para a Ciência e a Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009<sup>a</sup>.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, 22 (1), p.1-36. 1991.

SILVA, D. C. **Modelagem matemática no processo de ensino e aprendizagem de números complexos: uma proposta didática**. 2013<sup>a</sup>. 88f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013<sup>a</sup>.

SILVA, E. L.; MENEZES, E. M. **Metodologia da Pesquisa e elaboração de dissertação**. 3. ed. vem. atual. Florianópolis: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC, 2001. p.20.

SILVA, G. H. G. DA; PENTEADO, M. G. Geometria dinâmica na sala de aula: o desenvolvimento do futuro professor de matemática diante da imprevisibilidade. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 19, n. 2, p. 279–292, 2013. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências, campus de Bauru. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1516-73132013000200004&lng=en&nrm=iso&tlng=pt](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132013000200004&lng=en&nrm=iso&tlng=pt)>. Acesso em: 23/9/2013.

SILVA, J. **Guia para a utilização do compêndio de matemática**, 1º volume, 6º ano. Lisboa: Ministério da Educação. 1964.

SILVA, L. F. **Usando o software Geogebra para explorar funções exponenciais e logarítmicas**: uma proposta de aplicações. 2013b. 43f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013b.

SILVA, R. S. **Cadeias de Markov e modelagem matemática**: da abstração pseudo-empírica à abstração refletida com uso de objetos virtuais. 2016. 191 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

STAKE, R. E. Case study methods in Educational research: seeking sweet water. In: JAEGER, R. M. (Ed.). **Complementary methods for research in education**. Washington, DC: American Educational Research Association. 1988. p. 253-265.

STEWART, I. **Almanaque das curiosidades matemáticas**. BOOK, Zahar, 2009.

STRAUB, S. L. W. **Política de Informática na Educação: O Discurso Governamental**, 29. ago. 2012. Biblioteca Digital da Unicamp. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000876473>>. Acesso em: 6/11/2014.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: NIED, 1999.

\_\_\_\_\_.; ALMEIDA, F. J. DE. Visão Analítica da Informática na Educação no Brasil: A questão da formação do professor. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, 1997. Disponível em: <<http://www.br-ie.org/pub/index.php/rbie/article/view/2324>>. Acesso em: 11/9/2015.

VILELA, D. S. Práticas matemáticas: contribuições sócio-filosóficas para a Educação Matemática. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, v. 17, n. 31, p. 191–212, 2009.

ZANDONADI, E. C. **Aplicação do software Geogebra no ensino de funções exponenciais e logarítmicas**. 2013. 75f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ZANELLA, I. A. **Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações**. 2013. 129 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas**. 2002. 316 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Campus de Rio Claro, Rio Claro, 2002.

## ANEXOS

### ANEXO A – Transcrição da Entrevista com P1 - Realizada em 11/08/2015

**William:** Qual o seu posicionamento sobre a necessidade de se entender o processo para obtenção de um objeto gráfico, resultado numérico ou resultado algébrico com o GeoGebra?

**P1:** Ahh, matematicamente há necessidade sim. Bom, espera aí. Depende do ambiente em que estamos trabalhando. No ambiente de aula não interessa. Quer dizer, eu tento ligar a matemática com o resultado que está aparecendo aqui... tá. Em geral eu diria estatisticamente entre trinta e trinta e cinco por cento captam a relação os outros ficam com a imagem. Mas eu prefiro que fique o resto, setenta por cento com a imagem do que com nada, com a ideia de que não entendeu, que não falei da matemática né. Vou lá e mostro aqui, está vendo que é verdade. Ah por isso que é verdade? Não, tem uma prova disso. Correto? Você está interessado em ver a prova? Vou lá e faço a prova. Trinta por cento presta atenção o resto. Mas o que ficou? Ficou a imagem da prova né. Por exemplo, o teorema do valor médio. Eu faço aqui, está vendo? Eu pego a cordinha... está vendo que é paralela? Está vendo? Pronto aí vai embora. Se for um cálculo I de engenharia, se for um cálculo I de matemática... e por que será isso? Vamos ver porque, aí dou uma provinha. É como te digo, trinta por cento fica com a ideia da prova o resto ficou quem aquela ideia de paralelo pronto.

**William:** A senhora tem experiência em trabalhar com essas ideias antes de usar o GeoGebra?

**P1:** Tenho, ah não dá em nada. É pior... claro, aí sim que aluno nem gravava aquilo. Porque eu falava, fazia um desenho bonito. Perguntava no outro dia e ahnnn???

**William:** Mesmo esses trinta por cento que geralmente já tem uma pré-disposição?

**P1:** De trinta por cento eu baixo para dez agora...

**William:** Interessante, a senhora tem consciência de que mudou o aproveitamento do seu trabalho em sala?

**P1:** Claro, cem por cento... isso aí eu tenho e tive várias experiências.

**William:** Então vê necessidade de continuar?

**P1:** Sim, só quando me aposentar, vou deixar.

**William:** Desculpe interromper a senhora, você estava dizendo que teve experiências?

**P1:** É que no começo em 2009, minhas experiências eram... eu implementei errado a estratégia de levar pra aula. Mas tem que ser feito assim, porque você experimenta uma forma, diz não. Vou fazer um pouco diferente. Aí veio aquele comentário da menina, mas eu notei que eles abraçaram de alguma forma. Cadê professora? Posso usar? Por favor vamos usar!

E eu falava não, alguém me pediu para ser acadêmica né! ...Aí depois de ajustes com tentativa e erro né, agora, como te falei já previamente, encontrei uma rotina de como levar o GeoGebra, como conhecer o aluno, mostrar, e fazer algumas provinhas matemáticas né. Eu, hoje, tiro as provas matemáticas, é mais mostrar que o resultado vale!

Disso já me convenci. Especialmente nos cursos iniciais de cálculo. Eu vou para métodos matemáticos ou vou para um curso de matemática, muda a minha relação com o GeoGebra. O GeoGebra é uma ferramenta visual. Mas a parte matemática, tem descrita no quadro.

Então, você vai se adaptar a que audiência que você tem. Por exemplo... matemática do polo a distância, eu vou pela visualização. Limite, eu ensino limite com o GeoGebra visualizando. Todo mundo aprende, noventa e cinco por cento aprende. Aprende e o aluno se dá muito bem na prova de limite e foi o GeoGebra que nos ajudou.

**William:** O que tradicionalmente não ocorre?

**P1:** Uma menina inteligentíssima de outro polo, muito boa. Ai eu falei limite e o cabelo dela ficou em pé, professora nem fale nisso. Bem, vou falar um pouquinho, depois que a gente terminar você me diga sua opinião, é muito importante. Terminamos e ela falou, se eu soubesse que era fácil assim teria feito muito bem minhas provas, eu disse, pronto já valeu. Essa experiência foi sensacional, a menina terminou sendo muito boa. Eu preciso muito ter essa aluna a distância. Mas ela disse... quando eu falei limite ela ficou meio assim, não, não quero. Quando eu terminei a rotina, aí eu colocava e ia falando e eles iam respondendo e flui totalmente, como uma coisa que nasceu com eles.

**William:** E a senhora estava dizendo no começo quando eu perguntei, o seu posicionamento sobre se precisa entender o processo por trás para obter isso?

**P1:** Depende da audiência, em algumas audiências isso não é foco e nem deve ser. Isso, tenho discussões com meus coleguinhas aqui. Ah não, você, como ensina? Mostra aqui, não está vendo que é verdade? Pronto! Tem que provar? Não! Ahhh agora se é um outro curso, de um método matemático, é interessante que o aluno já aprenda o desenvolvimento matemático que não tem nada a ver com a tecnologia.

**William:** A pergunta do seu companheiro, a senhora diria que ela é da natureza da credibilidade do processo do programa?

**P1:** Sim!

**William:** Quando ele diz: Ah tem que mostrar pra todo mundo?

**P1:** Sim! Sim!... Não mostrar via prova, né?

**William:** Ah ele não exige que se explique o que o software fez pra chegar?

**P1:** Não, quer dizer não, eu! Ele disse sim, explique! Eu acho que não é necessário né. Eu acho que não! No sentido de bens de valores eles têm que se adaptar!

**William:** Eu preciso lhe convidar a um episódio!

**P1:** Ok, vamos lá!

**William:** Duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , exponencial de menos  $x$ , mais  $x$ ; e  $x$ . Essas duas curvas se interceptariam? O quê diria a Ana de conhecimento matemático. Essas curvas se interceptariam?

**P1:** ...(fazendo os cálculos de cabeça) não. (fazendo cálculos novamente) hummm, não sei.

**William:** Como que a senhora, sem apoio do software, faria?

**P1:** Eu ia igualar né, aí corta, corta, e elevado a menos  $x$  é igual a zero não existe nenhum  $x$ . Não, Não tem.

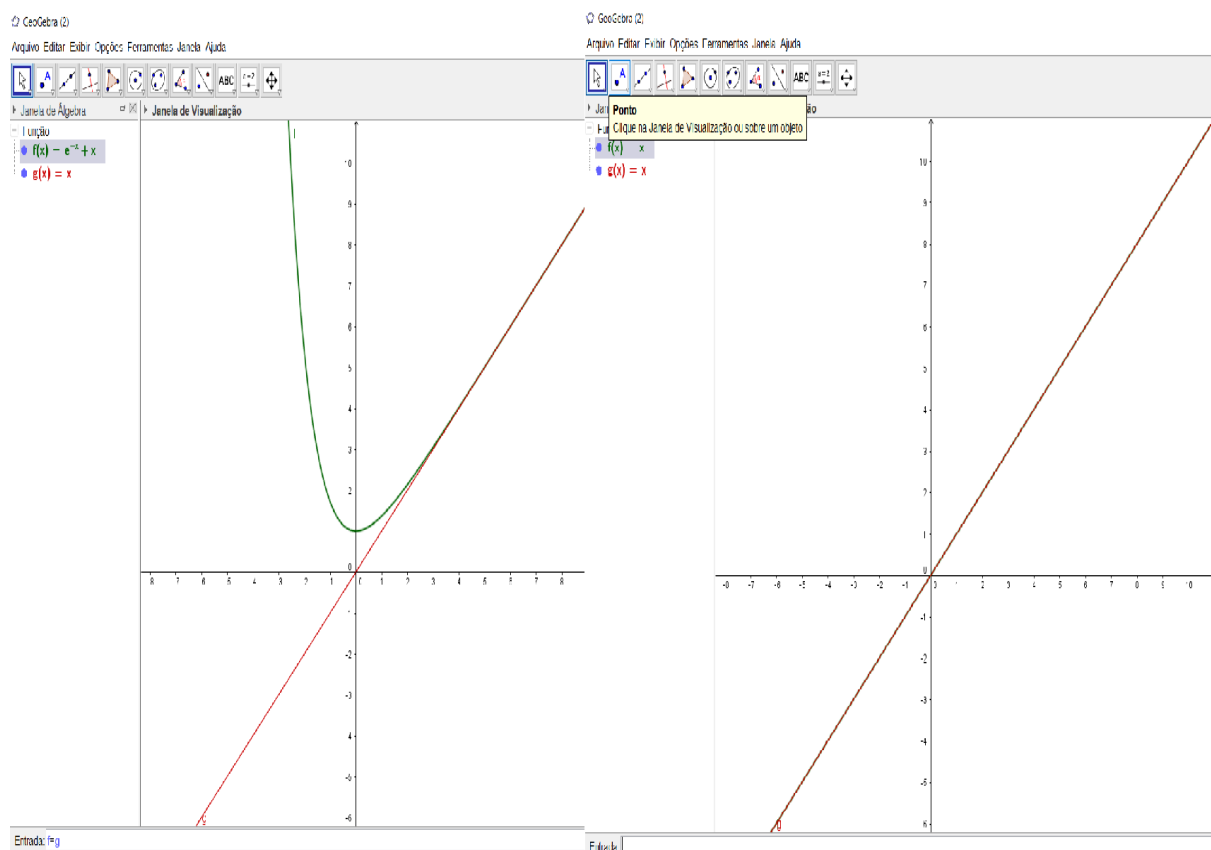
**William:** Era basicamente o que estávamos discutindo né? Então há um trabalho que você faz formal, que é baseado um pouco mais na nossa abstração. São processos um pouco distintos. Já experimentou fazer isso no GeoGebra?

**P1:** Claro! Sempre. Eu faço inclusive inequações no GeoGebra, muito bom! Cálculo um, nós vamos falando, como você resolve isso maior que isso?

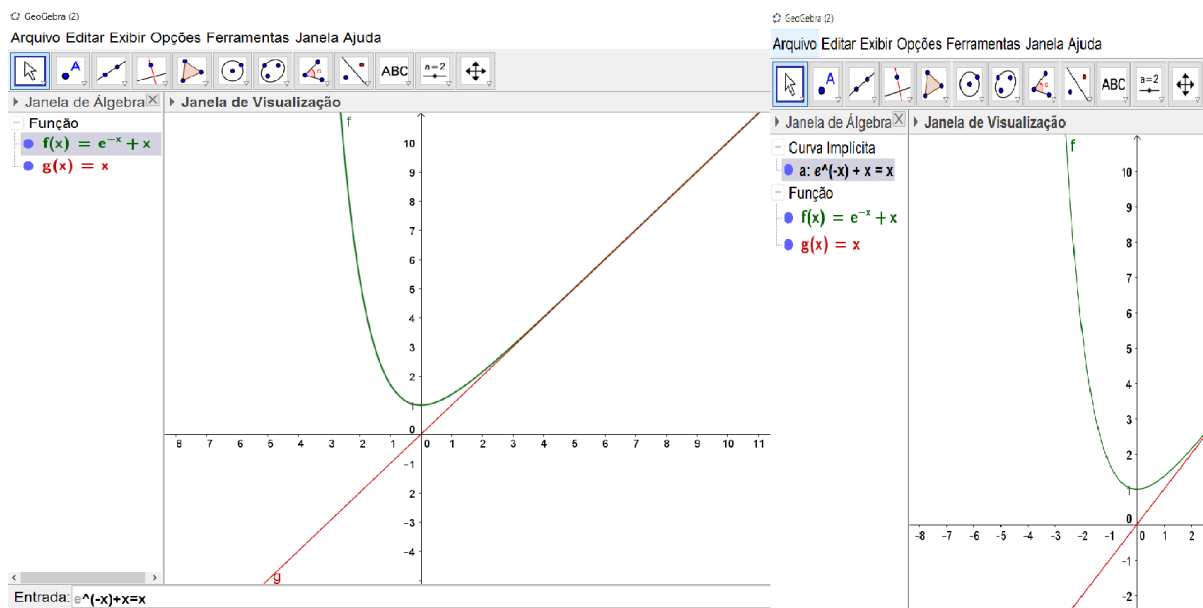
**William:** Eu gosto porque graficamente a gente mostra pra eles os intervalos, mas eu queria pedir ... (**P1** digita as expressões referentes ao episódio 1 no GeoGebra) ...

como que a senhora... o que a senhora usaria para pedir para o GeoGebra ver se há ou não...

**P1:** Igualaria né... ( **P1** escreve “ $f=g$ ” na entrada de comandos e obtém um resultado que não lhe parece útil, ver figuras a seguir)...ahhh ele não fez



então deixa eu colocar e elevado a menos x mais x igual a x, porque é isso que eu faço com a inequação né, certo. (**P1** digita “ $e^{-x} + x = x$ ” e obtém outro resultado que não lhe parece útil, ver figuras a seguir)



**William:** Construiu outro objeto. Ele tem ferramenta também né? Existe o comando intersecção e a macro. Quer experimentar?

**P1:** Quero! (**P1** digita o comando “Intersecção[f, g]”, situação idêntica ao que apresentamos na metodologia).

**William:** Ele obteve.

**P1:** (expressão de espanto).

**William:** Como a senhora lidaria com isso?

**P1:** É porque é numérico né?

**William:** Ah, a senhora já tem rapidamente um olhar.

**P1:** Éhhhhh, mas não tem!

**William:** Mas não tem no nosso objetivo que é desenvolver o pensamento matemático.

**P1:** Muito bom, gostei! A ideia aqui é que é um processo numérico.

**William:** A senhora vê isso como falha?

**P1:** Não, porque a gente se acostuma.

**William:** Se eu sou seu aluno agora e pergunto o que aconteceu, a senhora me diz, é um processo numérico. E o que mais?

**P1:** Um processo numérico não é a perfeição de uma prova matemática, claro. Sem dúvida a prova matemática é contundente.

**William:** Isso muda a credibilidade do software?



**P1:** Claro que não! Tu vai pro matlab, e vai fazer a mesma coisa.

**William:** Talvez não com esse episódio, mas pode haver outros.

**P1:** ahhh, eu acho que com esse episódio também. Ele não vai dizer que não tem. Ele vai encontrar.

**William:** Bom, se a senhora quiser um outro espaço.

**P1:** O CAS né?

**William:** Sim, o CAS. Que trabalha com uma perspectiva diferente, se a senhora escrever ai intersecção...

**P1:** (**P1** abre a janela CAS) ... isso que te digo, que no final. O que está no CAS está na...

**William:** Eu usava o máxima.

**P1:** (**P1** manipulando o software) Intersecção, função, pronto. Interessante que aqui não apareceu aquele, objeto com objeto né?

**William:** São controles diferentes.

**P1:** (**P1** observa que a janela CAS apresenta um par de chaves com nenhum resultado em seu interior, conforme mostramos na metodologia) Aiiii que bonitinho... boa, muito boa! Que gracinha, tá, tu já me indica o CAS, agora tomei a conhecer o que será que ele vai reportar.

**William:** Eu não estou mais trabalhando sem o CAS.

**P1:** Muito bom.

**William:** Seja aqui, aqui ou seja aqui (aponto para as janelas de visualização, de álgebra e do CAS), eu tenho um processo de aproximação numérica? Tudo aqui é aproximação numérica? Aqui está a representação numérica (aponto para o ponto que apareceu na janela de álgebra)?

**P1:** Mas esse é mais preciso (**P1** aponta para o resultado da janela CAS).

**William:** É no mínimo, mais um espaço para dialogar.

**P1:** Bom, todos esse softwares: matemática, máxima e matlab. Todos usam a mesma base de codificação numérica, estou falando. Senão ai tu vê a precisão. Ele precisava realmente disso para dar credibilidade né! Como tu acabou de falar... Lá está suspeito.

**William:** Mas eu não queria induzi-la.

**P1:** Tá ótimo.

**William:** Essa discussão é no caminho que a gente pensava em credibilidade de software?

**P1:** Claro. Precisa mostrar, eu gostaria. Vou tomar de ti (risos).

**William:** Não é meu! Vou ser sincero, esse episódio, eu acredito que foi na RPM setenta, que eu conheci.

**P1:** Uau! Que sensacional.

**William:** Um pessoalzinho que é cuidadoso que é uma coisa né! Eu adoro ver tudo que eles fazem também.

**P1:** Bom, matematicamente é contundente, igualou, cortou e não há nenhum  $x$  igual a zero. Acabou, morreu correto?

**William:** Eu, pessoalmente, concordo.

**P1:** Agora vem aqui no GeoGebra e acontece esse negócio, fica frustrante. Para um aluninho digamos, ou para o professor que está dizendo, olha...

**William:** E se a gente invertesse a situação e explicasse que ele podia verificar o trabalho manual com o software, e um dos exercícios fosse esse. Ele ia falar ué... ou eu estou errado aqui ou aqui! Aí está essa questão de errado, para muita gente é muito contundente, como a senhora disse. Até muda a postura, credibilidade. Por isso que estou lhe perguntando. Qual que era a sua posição sobre a necessidade de entender o processo. A senhora, por exemplo, entendeu o processo e deu uma explicação por aproximação numérica, ele deu um resultado que não é o que...

**P1:** De novo, vai depender, entendeu? Isso aqui é uma situação muito particular, que pode acontecer em uma aula. Aí a matemática tem que vir apoiar, sem dúvida. Neste momento a matemática apoia a responder, o que aconteceu?

**William:** Vamos fazer outro! A senhora que trabalha com cálculo.

**P1:** Vamos, adorei, está muito bonito. (**P1** passa a ler os registros no roteiro da entrevista para reconhecer a expressão do episódio 2).

**William:** Que gráfico você espera, a matemática Ana.

**P1:**  $x$  menos um é uma reta, e eu acho que o GeoGebra faz isso sim. Eu já fiz isso. (**P1** passa a digitar a expressão referente ao episódio 2). Aí, apareceu a reta, isso aí eu já fiz e posso explicar.

**William:** E eu posso dizer que isso é uma reta pensando no contexto matemático?

**P1:** Sim! Exceto por um ponto. Aí eu explico. Porque no um não está definido, correto? Aí eu explico, aqui é problema de domínio. Essas duas funções coincidem exceto no ponto onde isso aqui é um. Na verdade, estritamente aqui, faríamos um burquinho. Aí eu vou, venho com um pontinho. Clico aqui e faço ele.

**William:** Pra comunicar a descontinuidade?

**P1:** Não é descontinuidade. O problema é do domínio. Para ter continuidade o ponto tem que estar no domínio. Então neste caso é problema de domínio, não de continuidade. Para dizer que a função é contínua tem que redefinir um ponto que não está no domínio, correto? Esse aí é um caso que eu uso muito, principalmente com limite. Porque eles confundem aquele negócio de continuidade e pontos que não estão no domínio né. Continuidade, só discutimos com pontos do domínio. Então esse probleminha aqui não é problema de continuidade. É problema de não pertencer ao domínio. Então essas duas funções são coincidentes, exceto naquele ponto que não pertence ao domínio desta, e pertence ao domínio da outra.

**William:** E o objeto gráfico que se obteve com o GeoGebra não mostra isso. Ele incorre...

**P1:** A gente ajusta. O software é nosso secretário, nós temos que ser os chefes. Então eu como pensadora de cálculo um ou matemática ou observador, corrijo o que o software não fez correto. Aqui foi mais feio.

**William:** A senhora quer mostrar uma possibilidade de lidar? Se eu fosse seu estudante em algum momento...

**P1:** Eu tenho outra coisinha para te mostrar em relação a isso. Um pouquinho mais complicada, o assunto da série de potência. Isso é um negócio que o aluno não entende. Não entende mesmo. Olha já explorei isso muitas vezes até que agora, eu já encontrei um jeitinho de induzir um aluno a entender o porquê que a gente corta pedaços dos polinômios aproximadores. E aqui no GeoGebra fica óbvio que isso tem que ser feito. Bem, o GeoGebra faz o que todo mundo faz.

**William:** Tem algo que eu queria perguntar. Se eu sou seu aluno, ai você me diz: olha vamos usar o software, porque ele plota o gráfico com um pouco mais de fidelidade, vou assumir que você ainda foi cuidadosa, mais fidelidade, mais beleza, proporcionalidade; posso até degenerar os eixos e ser feliz... E eu me deparo com uma situação como essa e tenho um choque epistemológico no sentido de: não era

esse o objeto que eu queria. Como a senhora lidaria com uma possível descrença da minha parte?

**P1:** Não, não! Isso aqui que foi feito é uma simulação. Então, como simulação tem seus defeitos. É claro, por exemplo, isso de passar assim. É lógico que isso vai acontecer, porque o software não percebe esse detalhe. Porque é um detalhe matemático. É o que tu falou, como levar a matemática para interpretar o que o software fez? E corrigi-lo, isso eu faço direto. Aqui (**P1** aponta para a anotação referente ao episódio 1) tu me pegou! Esse aí eu não sabia. Não sabia que ia fazer isso. E não entendi muito o porquê também não. Porque que ele faz isso? Mas já me encontrei em outras situações, não dez vezes, não cem vezes, eu diria umas quinhentas vezes. Do software, eu vou lá, e outra coisa (cara de espanto) que eu não esperava. Então, como fazer? Aqui que acho a aula melhor. A melhor aula é essa que falhou o software. Por quê? Porque, aí vamos analisar gente, analisar ô palavra maravilhosa, aí vem a matemática. Amo a matemática, quando não tinha o GeoGebra, ainda amava ela. Era ainda meio escura né, meio insossa, né? Só na nossa mente e na nossa imaginação e esse carinho aqui me ajuda a ver, ótimo! Mas ele é meu secretário! Eu sou a que manda aqui, eu sou a que devo analisar, a que devo corrigir. O que tu trouxeste é sensacional, esse ponto é muito bom. Pois é um ponto que eu faço naturalmente sem nenhum trauma. Eu continuo sendo fã do GeoGebra, mesmo com esses defeitos. Porque os outros softwares também vêm com esse tipo de coisa. Quando estava preparando coisas para o cálculo três, que é o cálculo em três dimensões... aí é que tu encontras frustração mesmo. Porque ele tenta juntar as coisas e não é um pontinho, mas é um plano que ele tenta juntar. E é um limite no infinito, por exemplo, ele junta. Aí tu vêes aquilo de um lado de outro está juntinho, não tem descontinuidade. Aí eu queria ver e não vejo de jeito nenhum.

**William:** Planos assintóticos não se veem de jeito nenhum?

**P1:** Não, isso está cheio. Isso é rotina. Na frente de cinquenta, sessenta alunos, setenta alunos, aconteceu esse tipo de coisa. Alguma eu previ e levo de propósito para o aluno dizer o que aconteceu gente? Ó meu deus, faço de conta sabe?

**William:** Deve ser fantástico assistir sua aula!

**P1:** Sou boa atriz né. Aí vai os alunos... é mesmo, como?

**William:** Mas a sua intenção é invocar o matemático deles?

**P1:** Às vezes pega de surpresa a mim mesma, como agora que tu me pegou nesse, né? E aí como fazemos? Boa, boa, excelente. Esse ponto é um ponto importantíssimo para lidar com o software. Na frente de um público que pensa que software é Deus, não.

**William:** É outra crença, o meu medo é a outra crença. Assim como muita gente apresenta argumento matemáticos baseando-se em autoridade. Ah confia em mim! Eu falo: não leva a mal não, mas eu aprendi que o primeiro passo matemático é não confiar. Eu não confio.

**P1:** Esse é mais um motivo para uso do software. Essa aí é uma exploração que eu faço muito nesse curso que estou fazendo agora de séries de potência. Aí que vai essa parte. Porque que o software faz isso, gente, se me prometeram matematicamente que isso ia ficar grudado. E o bicho vai embora, vai pra baixo vai pro lado. Aí eu vou com um negócio, um teorema da matemática que diz que tem o raio de convergência. Se você sai do raio o bicho vai embora para outro lado, não tem nada de convergência. E eu vejo lá no software, a gente ajusta.

**William:** Eu vou compartilhar. Eu pessoalmente tenho procurado olhar pro código. Porque é uma produção de outra pessoa baseada em conhecimento matemático, isso não é magia. É o que eu tento dizer para as pessoas.

**P1:** E ele escreve direitinho aqui ó (**P1** aponta para a expressão do episódio 2). A função não descreve, equivale a função  $x+1$  né?

**William:** Aí se a senhora usar o CAS, a senhora vai ver que ela da outro output, então eu, **William**, estou optando por várias representações, todas as possíveis, se eu der o input na planilha qual é o output?

**P1:** Muitas vezes coloco aqui no software e falo, agora me explique o por que!

**William:** Era o que eu queria chamar a atenção. Lidar com essa crença, mesmo sem tecnologia. Quantas pessoas envelhecem, se formam, fazem pós-graduação e aí eu volto e pergunto: você tem pelo menos algum argumento que não seja, acredite em mim. Quando se pergunta por que o produto de dois números estritamente negativos é estritamente positivo, a criança de doze anos é obrigada a lidar com uma ideia que demorou dois mil anos para ser constituída e tudo... ah no futuro você vai saber, quanta gente se forma e você pergunta e olha. Ah ele que falou, uma pessoa séria

daquela não ia mentir pra mim, mas isso não vai formar o pensamento matemático na minha opinião.

**P1:** Ai que está, por exemplo, eu deixo meus aluninhos uns três meses lidar com resultados assim, fáceis, visuais. Em certos momentos eu começo a questionar, mas por quê? O que será? Vamos analisar. Então aí o aluno vai aos pouquinhos como uma criança. Como anda tua filha? Você colocou-a em pé e disse anda? Não, isso é uma passagem gradual, um passinho aqui, outro passinho aqui. Por quê? Porque senão você cai. Então se ele pergunta cedo, ok vamos explorar. Agora, senão, ele fica contente com o resultado, tudo bem, vamos lá. Pelo menos isso, ou seja, com o GeoGebra minha intenção é pegar mais audiência. Senão estava passando trinta por cento, agora passa sessenta. E esse sessenta é melhor que os trinta anterior? É, pelo menos qualitativamente falando, eles tem ideias e tem visões, visualizações. Então acho que está bom.

## ANEXO B – Transcrição da Entrevista com P2 – Realizada em 19/08/2015

**William:** Qual o seu posicionamento sobre a necessidade de se entender o processo para obtenção de um objeto gráfico, resultado numérico ou resultado algébrico com o GeoGebra?

**P2** – eu acho que seria muito importante, eu gostaria muito de entender como é que essa coisa toda funciona. Como te falei, eu programei em pascal, eu via, eu fazia lá o negocinho e via as conicazinhas, que adorava, achava o máximo. Mas morreu essa **P2** que fazia programinha, faleceu lá em 96 quando comecei a dar aula. Tu entendeu? Porque eu não tive mais tempo pra sentar na frente do computador e ficar programando. Quando lançaram o delphi, eu achei o máximo, eu queria fazer coisa em delphi. Mas e o tempo pra programar? Eu não tinha, né? E bom, morreu. Então assim ó, hoje eu me contento em clicar no botão e ele aparecer. E tô pouco me importando como é que ele apareceu ali. Porque, bom, não tem como entender.

**William** – só pra confirmar, a programação, você vê valor em entender?

**P2** – Claro, eu vejo um valor muito grande. Mas eu sei que eu não tenho...(William pergunta: por quê?) pra entender como é que as coisas funcionam, né? Eu tenho esse lado de entender como é que foi feito, como é que foi pensado, como é que foi programado. Por exemplo, o que eu gosto muito de fazer com o GeoGebra, é conseguir botar aquela opção “se” lá. Botar um “if” lá”. E mostrar pros alunos que isso é possível. “Se” o ângulo for maior que noventa graus, a reta aparece assim, “se não for” a reta aparece assado. Ah, “se” a coordenada do ponto X for assim, aparece esse ponto, “se não for” não aparece. Então isso eu gosto de mostrar pros alunos. Que dá pra fazer isso no GeoGebra. Mas os nossos alunos, por exemplo, não tem um curso de algoritmo de programação. Então eu tenho que...é como eu faço, primeiro eu ensino pra eles, calc, excel né? Aí eu boto. Ahh se você quer dizer que seu aluno tá aprovado ou reprovado automaticamente, como é que você faz? E aí eu...pego isso e digo pra eles: vale a mesma coisa lá no GeoGebra. Tu consegue fazer. Então essa programação, tudo bem. Mas agora como é que foi feito o GeoGebra e tal, gostaria muito de saber, mas eu sei que eu **P2**, não tenho condições de entender como é que isso foi feito.

**William** – o ato de não saber, interfere em alguma dimensão sobre a matemática **P2** e os resultados matemáticos do GeoGebra?

**P2** – Não, não. Mas, mas, por exemplo, em alguns momentos sim, tá? Por exemplo, assim ó, se tu coloca uma função que tu sabe que não está definida naquele ponto e ele bota todo mundo contínuo. O GeoGebra já quase não faz mais isso, mas...

**William** – Vou lhe convidar pra dois casos. Primeiro eu quero que a matemática **P2**, me responda. Eu quero que você considere aqui ó (aponto a anotação do roteiro escrito que mostra o episódio 1), como duas funções, “e elevado a menos x, mais x” é uma função, e a outra é a função identidade, x. Elas se interceptam?

**P2** – “e a menos x, mais x” e a função x. Quando x for...(parece fazer alguns cálculos ou procedimentos mentais e repete-os sem clareza na fala), elas vão se interceptar né? (**William** – não sei, não posso agora interferir), sim, sim. O quê que eu faria, pra ver se, se interceptam (**P2** pega no mouse e mostra que vai usar o GeoGebra, mas friso que primeiro, quero a resposta sem o uso do programa). Tá, eu preciso de um papel. Quando é que “e a menos x é igual a zero”, não, não vai. Um sobre e a x, é, não se interceptam. A princípio, eu acho que não.

**William** – Ah meu deus do céu, não é pra botar calça curta não (**P2** diz que entende que minha intenção não é criar uma situação ruim) é o seu processo de matemática. Então você também faz isso aqui (aponto para o registro escrito em que se produz uma igualdade com cada expressão analítica em um dos membros da equação), né? O modo como você produz matemática, depende de um registro escrito...

**P2** – ou então eu vou pensar nas funções né? Aí o gráfico dessa aqui vai ficar mais complicado, mas enfim...(parece novamente realizar cálculos mentais e conferir suas anotações no papel)

**William** – você também apostaria como matemática, na percepção imagética?

**P2** – mas a princípio, parece que elas deveriam se interceptar em algum ponto, né? (**P2** e eu fazemos comentários sobrepostos e ela diz que está conferindo suas reflexões e anotações para ver se não está fazendo nada errado) Pela equação não, agora teria de fazer o gráfico pra ver, aí o que eu faria, faria o gráfico no GeoGebra.

**William** – é isso aonde eu quero chegar.

**P2** – Eu preciso dele, tu entende? Uma coisa que o GeoGebra me deixou, foi muito preguiçosa, isto também.



**William** – ahhhh, você se caracteriza preguiçosa?

**P2** – Eu me caracterizo muito. O GeoGebra me deixou muito preguiçosa. Eu não penso mais, função tal, ah eu vou lá e faço no GeoGebra, muito mais rápido, entende? Quando alguém vem perguntar, professora como é que funciona...

**William** – há uma relação de credibilidade e de confiança junto ao software...legal...

**P2** – Eu confio. É claro. Daqui a pouquinho, óbvio que se...Qual era o software que eu usava que fazia função módulo de  $x$  sobre  $x$  e fazia contínuo? Eu dizia, não, isso aqui está errado. Acho que era o maple, as primeiras versões. Isso aqui não tá legal. Então quer dizer, ele é um software que não tá bom, né? Ele faz uma reta aqui e a coisa não tá certa.

**William** – Mas não tá bom, no sentido de dialogar com o que você confia de pensamento matemático?

**P2** – Exato. Mas isso aí, claro, há vinte anos, hoje em dia a coisa tá bem melhor.

**William** – Você está me falando, vamos experimentar. (**P2** se coloca então a usar o GeoGebra e a dar entrada nas expressões das funções que estamos discutindo)

**P2** – O que estou pensando é lá no infinito, né? Na real, na minha percepção aqui, se vou olhar aqui, mas se...

**William** – A matemática, se precisasse afirmar, ia dizer não?

**P2** – Não, ia dizer não sei. Ah se eu precisasse afirmar, eu ia dizer, acho que sim, né? Mas pelas contas não.

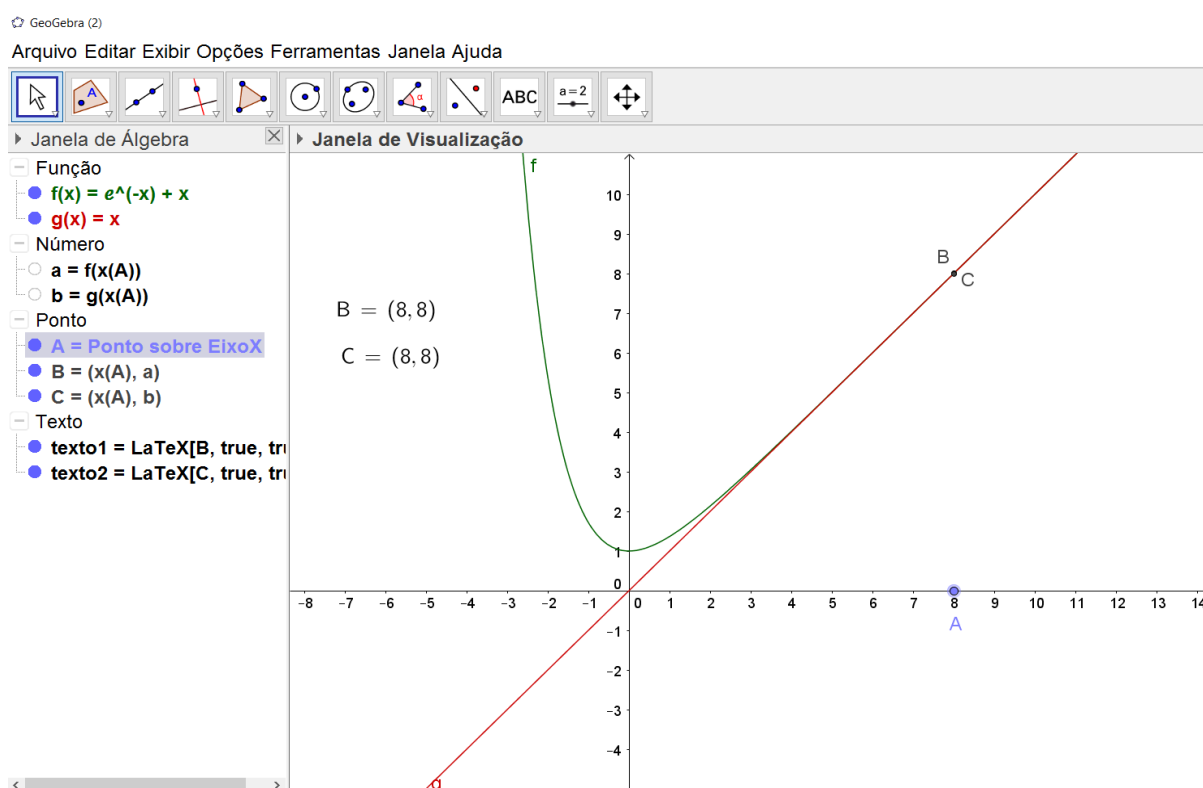
**William** – E no quê a matemática confia? Nesse processo mais abstrato, que dependeu de um registro...

**P2** – Não, porque olha só, se olhar aqui parece que sim (a **P2** se põe a manipular a janela de visualização do GeoGebra, dando zoom, e aparentemente, porque os gráficos não são mais discerníveis pela visualização a olho nu, parece querer dizer que teríamos vários pontos em comum entre as curvas), né? Mas o que quero fazer...cara que legal, eu nunca tinha pensado nisso aqui, boa essa. Espera aí que tem mais uma coisa aqui...

**William** – É, você, pra verificar, o que você está fazendo, é explorar visualmente? (**P2** utiliza o zoom para tentar perceber se as curvas se afastam ou se aproximam)

**P2** – É, e depois eu ia pegar dois pontos aqui e ia, por exemplo, se eu fosse fazer isso aqui (ela clica na ferramenta ponto sobre objeto e cria um ponto sobre o eixo  $x$ ,

depois cria dois números que dependem do  $x$  de  $A$ ), ia pegar dois pontos aqui e ia calcular aqui, a  $f$  ( $f$  é nome da primeira função que ela criou) de  $x$  de  $A$  ( $A$  seria o nome dado pelo GeoGebra ao ponto que ela criou sobre o eixo  $x$ ) e a  $g$  (nome da segunda função que ela criou) de  $x$  de  $A$ , e ia verificar numericamente (P2 cria os objetos que menciona e manipula o ponto  $A$  de modo a ir conferindo a variação numérica, parando quando os valores das coordenadas dos pontos se igualam, veja figura a seguir)(P2 não parece estar satisfeita com a possibilidade de que os pontos se igualam),



ia ter de usar o CAS (P2 se refere ao Sistema Computacional Algébrico do GeoGebra) de alguma forma, isso aqui ia ser uma boa exploração do CAS.

**William** – Ele (o GeoGebra) também tem a funcionalidade de intersecção, conhece?

**P2** – Sim, sim, claro. Foi uma que eu não... botá aqui né? (ela começa a digitar na entrada de comandos o comando “intersecção” e considera as duas funções em discussão). Cara, intercepta neste ponto (ela se refere a um ponto que o GeoGebra apresenta depois dela pedir para verificar se há a intersecção entre as curvas, a

situação é similar às possibilidades que mostramos na metodologia), e é verdade isso? Agora eu fico aqui né? Na dúvida, pelo...

**William** – Então, você entende porque eu tô querendo discutir? Você viria, então pro campo da discussão sobre como aquilo (o tal ponto que surpreende-a ao aparecer na tela do GeoGebra) é obtido e como você obteve aqui (falando das anotações no papel que ela produziu)? Em qual você confia mais?

**P2** – Ahh, eu confio mais nele (aponta para a tela do computador). Claro, porque eu erro. Ele erra também, pode errar. Mas eu erro mais.

**William** – Curiosamente, o outro fato (começo a falar e apontar para o episódio 2) é o que você tinha mencionado antes, né? Antes de fazer o gráfico, que gráfico você espera?

**P2** – Ahh eu espero uma reta, com um ponto no meio, um furo no ponto com x igual a um.

**William** – Já fez isso nele? (falo de fazer no GeoGebra)

**P2** – Pior que não, eu acho. (ela se põe a dar entrada com a expressão analítica da função referente ao episódio 2). Eu fiz com os alunos a reta e falei, bom, fatorei e tal e não fiz no GeoGebra o gráfico. Ó, ele não te dá a restrição de domínio, né? Será que eu fiz isso? E eu fiz o buraco... eu fiz o buraco no paint. Quer ver minha nota aqui? (ela me mostra uma prova escrita em papel com uma situação similar)

**William** – Você faria alguma outra coisa para discutir essa relação? Esse não é o objeto que você esperava?

**P2** – Não, tanto que eu fiz aqui ó, e eu fiz o buraco, tá ali o buraquinho, eu fiz no paint. Agora que me dei conta.

**William** – Porque você queria que a pessoa percebesse...

**P2** – Claro, que o aluno percebesse isso, mas eu não explorei isso, é uma coisa interessante de falar pro alunos isso, que eu não explorei isso em aula, tu entendeu? Que ele não te dá o ponto de descontinuidade.

**William** – Mas tem algum jeito que você poderia testar dentro do GeoGebra? Pra mostrar algo em relação a este conflito do ponto? (enquanto eu pergunto, **P2** se põe a usar aproximações do zoom para ver se o tal buraco realmente não aparece)

**P2** – Ele não te dá mesmo né? É isso que estou querendo ver aqui. Eu poderia calcular a f de um. Eu ia pedir pra ele o que é a f de um, pronto, e ele vai me dar,

indefinido (esta situação também é muito similar ao mostramos na metodologia). Tá, mas ele acaba não fazendo ou ele faz aqui, é isso que estou querendo...agora...

**William** – Tá, e esse choque então entre esse objeto esperado da mente da **P2** com o objeto que o software dá? Ele está de novo no campo de se procurar entender por que é obtido e como é obtido?

**P2** – sim, não, aqui eu acredito (P2 aponta para sua representação da reta com o furo).

**William** – Isso afeta a confiança, a credibilidade, o pensamento?

**P2** – O que eu vou te dizer assim, quando eu desconfio que a coisa não está certa, eu tento...ou por exemplo aqui, é claro que ia pensar mais, ia ficar pensando, ahh mas como é que faço este gráfico? Bom, tal coisa, ahhh, quando x vai para o infinito o que acontece? Pra ter uma ideia se em algum momento isso ia...ou ia derivar, pra ver, enfim, ia ter de dar um jeito.

**William** – A matemática tem artimanhas...

**P2** – Exato, ia dar uma forma de conseguir enxergar o comportamento deste gráfico (aponta para a anotação do episódio 1) ia fazer, como é que vou te dizer, f de x igual a x, eu sei como é que funciona. Como é que eu ia fazer, ia fazer um esboço deste gráfico, bom, e no momento que em que fosse fazer o esboço deste gráfico, ia ver que isso aqui era praticamente uma assíntota, bom, vai ser assíntota sempre ou não? Eu ainda estou incomodada com o resultado que deu, tu entendeu? Ou ia pegar um aplicativo, máxima, por exemplo, que é um aplicativo para cálculo e ia fazer o quê? Ia jogar lá a equação e ia ver o que foi que ele deixou de ver.

**William** – Experimenta com o CAS.

**P2** – Pois é, isso que ia te dizer como eu não trabalho com o CAS... (**P2** abre a janela do CAS, dá entrada na igualdade das expressões das funções em questão e usa o comando resolver equação em x), como eu te falei, eu usei isso aqui umas vezes só, muito pouco. Ahh ele não me dá ninguém, e por que ele faz isso? Ele tem um erro, um bug?

**William** – Quem está bugando? Eu, você ou o CAS?

**P2** – O que que ia fazer, eu ia fazer isso na mão, aqui (aponta uma folha de papel), pra ver o que dá. Se eu resolver, aqui, não tem solução (fala e aponta para a anotação feita a mão da resolução da equação citada), o CAS me dá algo...

**William** – Isso (aponto para o resultado com o CAS) está mais próximo daquilo (aponto para a anotação)?

**P2** – Está, está mais próximo. Porque o gráfico ali (aponta para representação gráfica feita pelo o GeoGebra) está me mentindo. Pelo menos é o que eu enxergo, né? Não sei se está certo ou não.

**William** – Depois do que nós estamos conversando, o posicionamento da **P2**...a **P2** não disse que não precisa entender, a **P2** disse, primeiro eu tenho questões de otimizar tempo, compromissos...

**P2** – É, exato. Eu gostaria muito de entender, mas eu realmente não...

**William** – Mas o posicionamento dela é...é relevante entender como que estes objetos são obtidos?

**P2** – Claro que é, óbvio que é relevante. E com certeza tem muita matemática envolvida por trás desse negócio, muita mesmo. Por exemplo, como é que o cara faz a resolução dessa equação, dentro do software? Claro, tem a programação e tudo, mas como é que ele faz o gráfico? Deve ter alguma diferença entre estas duas abordagens que dá esse...

## ANEXO C – Transcrição da entrevista com P3 – Realizada em 05/08/2015

**William:** Qual o seu posicionamento sobre a necessidade de se entender o processo para obtenção de um objeto gráfico, resultado numérico ou resultado algébrico com o GeoGebra?

**P3:** Eu acho que eles têm que entender, e isso eu sempre também digo, que atrás desse software tem uma equipe de programadores de pessoas que fizeram o software. E pessoas são pessoas, elas podem errar. Estão ali atrás, são programadores e evidentemente o que é muito discutido, por exemplo: ah, eu vou demonstrar que um triângulo, um determinado teorema no GeoGebra por exemplo. Eles têm que entender que na demonstração formal de um teorema. Por mais que você mova a construção que você fez pra ver se vale. Você não consegue fazer todas as opções possíveis no software. Então isso demonstra que por mais que você mexa e vê isso é verdade é verdade é verdade... Pode ter uma situação onde não vai valer. Dependendo do lugarzinho que você for lá na tela, pronto furou né, não vale mais. E ele tem que entender que a matemática... o software não demonstra, ele mostra. Agora na matemática trabalhando formalmente, você tem que trabalhar com as propriedades da matemática, agora isso é muito discutido hoje em dia! Alguns autores já aceitam a demonstração pelo software, então é uma coisa que ainda está discutida. Mas tem que entender que alguém lá atrás fez o software. Por exemplo, se você quer mostrar um número que é irracional, mas ai vai ter só quinze casas decimais, como é que eu faço? Será que lá na frente esse número vai ser irracional mesmo? Então sempre tem que entender, pelo menos os professores tem que entender que atrás desse software tem pessoas que programaram, que fizeram e evidentemente às vezes algum erro pode acontecer. Quer dizer, não ficar maravilhado que tudo vai dar certo, pode acontecer de não dar certo alguma coisa. Mas ele não está aí pra mostrar que tem que dar certo tudo. Ele está aí pra te ajudar em algumas situações. Você não está ali pra descobrir bug ou que não vai dar certo ali.

**William:** Nesse caminho eu vou lhe convidar a dois episódios... (manipulando o software)... essas duas expressões, como se eu ti fizesse a pergunta como uma

pessoa que utilizaria sua recursividade matemática no sentido abstrato, elas se interceptam?

**P3:** Você quer a minha posição? Ou se eu quero verificar se intercepta o que eu vou fazer? O que você acha que eu vou fazer dentro do software?

**William:** Primeiro eu quero saber sem o software. Você diria que elas se interceptam?

**P3:** hummm... não sei dizer. Porque, assim matematicamente, eu não sei dizer se intercepta ou não. Porque uma é reta e a outra é uma coisa aí que é um gráfico de uma função meio esquisita.

**William:** Que a gente não vai dar nome! Os alunos às vezes ficam decepcionados, porque a gente começa dando os nomes né, e logo para... a gente fala em reta, fala em parábola e logo fala: então, agora não tem mais nome...

**P3:** Mas qual a sua intenção de perguntar se intercepta ou não? Você quer que eu verifique no software?

**William:** Esse episódio é retirado... eu escolhi, para conversar sobre essa posição de cada um, se é preciso ou não compreender como que se obtém os objetos. Porque ele foi apresentado na RPM acredito que no número setenta. Em que o autor defende que é possível verificar que essas duas expressões não se interceptariam, que uma possibilidade de fazer isso é igualar as expressões analíticas e aí você termina com a equação e elevado a menos x igual a zero. E por mais que o valor de x cresça o resultado do quociente converge pra zero, mas nunca será zero. Aí ele diz: quando a gente pede pro software, se a gente olhar aqui (neste momento damos entrada nas expressões das funções do episódio 1 e usamos o comando intersecção). O ponto A foi obtido com uma intersecção.

**P3:** Pois é, mas agora veja bem, se eu quero uma intersecção eu clico nesse objeto e clico nesse aqui. Antes disso eu vou apagar o seu ponto... Eu quero uma intersecção (P3 refaz a obtenção do ponto de intersecção utilizando a macro, parece que precisa confirmar que existe um ponto de intersecção se utilizarmos o GeoGebra) ... eu clico aqui e clico aqui, apareceu um ponto ele pode dizer... ahhh, tem intersecção. Como é que apareceu esse ponto?

**William:** Como a senhora lidaria nesse ponto? Aceitando que o argumento matemático diz que não é pra haver...

**P3:** Se não é... ele tem que ir pelo argumento matemático e não pelo que o software está fazendo. Matematicamente se não tem intersecção, como é que o software está dando uma intersecção.

**William:** E se eu estivesse trabalhando com a senhora e você estivesse me colocando numa situação onde o GeoGebra fosse uma complementação do meu trabalho. Então eu trabalho tradicionalmente com lápis e papel. E a senhora me sugeriu, use o GeoGebra pra te apoiar a verificar os seus resultados. A senhora diria que seria impossível que eu tivesse um choque epistêmico ou uma quebra de confiança, credibilidade? Ou será que eu ia me apoiar em alguma posição como de crença... eu acredito que o software...

**P3:** Não, se você vai por um outro caminho né? Algébrico. E você vê matematicamente que realmente não há intersecção e o software está dando uma intersecção qual é o problema? Eu acho que você tem que acreditar naquilo que você fez, e não no software. Porque tem pessoas atrás disso, e elas podem errar.

**William:** Mas eu posso errar? Na minha decisão. São considerações. Quem estaria certo? Como lidar com uma situação como essa? Quando o software confirmar o que eu fiz algebricamente, eu vou confiar nele? Eu vou acreditar? Ele tem credibilidade? Digamos que eu quero construir conceitos, acredito que há um momento que a gente olha pro resultado do software e aposta nele.

**P3:** Eu acho que a gente nunca pode confiar cem por cento no software. A minha posição é essa! Definitivamente, cem por cento não pode confiar. Porque o software é um auxiliar. É uma ferramenta que complementa aquilo que você... uma compreensão melhor. Por exemplo, se eu vou nesse negócio aí, ah, mas eu quero compreender melhor. Pô, mas algebricamente eu estou vendo que não tem intersecção, agora o software me dá intersecção. Evidentemente num estudo... porque não é simples eles trabalharem com esse tipo de função do e elevado a não sei o que. Para os professores é complicado, tá certo?

**William:** Mas, por exemplo, quebraria minha confiança em usar a intersecção? No sexto ano, sétimo ano a gente pode usar a intersecção para resolver sistemas.

**P3:** Eu acho que esse é um ótimo sistema pra gente poder mostrar que o software não é perfeito. Nenhum software é perfeito.



**William:** E procurar explicar o porque que o software chegou a intersecção. Qual o seu posicionamento sobre isso?

**P3:** Porque existem pessoas ali atrás, alguém que está programando e alguma coisa não está certa na programação, tem que arrumar. Como é que pode dar uma intersecção se não existe?

**William:** Não era para existir, mas apareceu. É uma situação interessante? Potencialmente interessante?

**P3:** É bastante interessante, tem um artigo que você talvez possa até procurar, que é do Michael Divlie... na Africa do Sul. Ele tem um artigo que chama assim: As armadilhas da geometria dinâmica. Então ele trás várias situações onde acontece isso dai que você está propondo. Que pode te enganar. Então, por exemplo, tem uma das situações que vai lá pra não sei quantas casas decimais e depois mostra que não... É um problema da programação. Eu acho ótimo que isso aconteça, pois mostra que o software não é perfeito. Você tem que confiar no conteúdo matemático, nas propriedades matemáticas. E se você está fazendo ali algebricamente, ah tem intersecção, ah não tem intersecção. Se não tem intersecção por que é que ponto aparece? Se o ponto apareceu é porque tem erro de programação. Pra mim é tranquilo aceitar isso dai.

## ANEXO D – Transcrição da entrevista com P4 – Realizada em 31/07/2015

**William:** Qual o seu posicionamento sobre a necessidade de se entender o processo para obtenção de um objeto gráfico, resultado numérico ou resultado algébrico com o GeoGebra?

**P4** – Esse interesse, eu sei dizer quando ele começou. Porque foi vendo coisas deste tipo do Daniel Mentrard, vendo coisas do tipo de um turco, que participa do grupo do GeoGebra, que o canal dele é Mesut Topal. Ele faz também umas coisas impressionantes. Visualmente falando, é o que impressiona. E coisas que eu vejo que se eu estivesse, hoje, o conhecimento de como elas funcionam internamente, que comandos estão sendo executados, enquanto eu estou utilizando uma destas ferramentas que tem uma função pré-estabelecida, é, seria mais fácil. Seria pra mim, abrir um mundo de possibilidades que hoje eu não tenho ainda. Eu tenho possibilidades em relação a, vamos dizer assim, mais avançada, em relação a programação na linguagem que o GeoGebra compreende, a linguagem que ele reconhece e executa, que é uma linguagem própria dele, com os comandos, executando comandos que ele tem aqui, mas não numa linguagem estrutural no sentido de que o faz como um programa que seja o java, né? Então, sim, eu vejo essa necessidade, é uma das coisas que eu quero estudar, pra, que eu acho que me abre possibilidades, não somente em relação a construção, aos objetos que poderei realizar depois de dominar um pouco, é, a linguagem de programação. Mas em relação a discussão também, a discussão voltada para o ensino, ou em relação a dialogar com pessoas da área de programação, com mais elementos pra poder falar, que não seja apenas aqueles elementos que empiricamente eu vou mexendo e vou obtendo resultados, sem me dar conta ou sem me questionar sobre o modo como internamente eles funcionam.

**William** – Vou pedir para você fazer um episódio junto comigo. (começamos a usar o GeoGebra para discutir o episódio 1) vamos plotar a função e elevado a menos x, mais x; agora eu quero que você plote a função identidade. De cá, considerando, vou estar admitindo o que você já me falou, eles não os mesmos objetos, mas você disse que faz um diálogo desse objeto com o objeto matemático.

**P4** – Nesse caso aqui, por estar trabalhando com...quando você me falou, define a

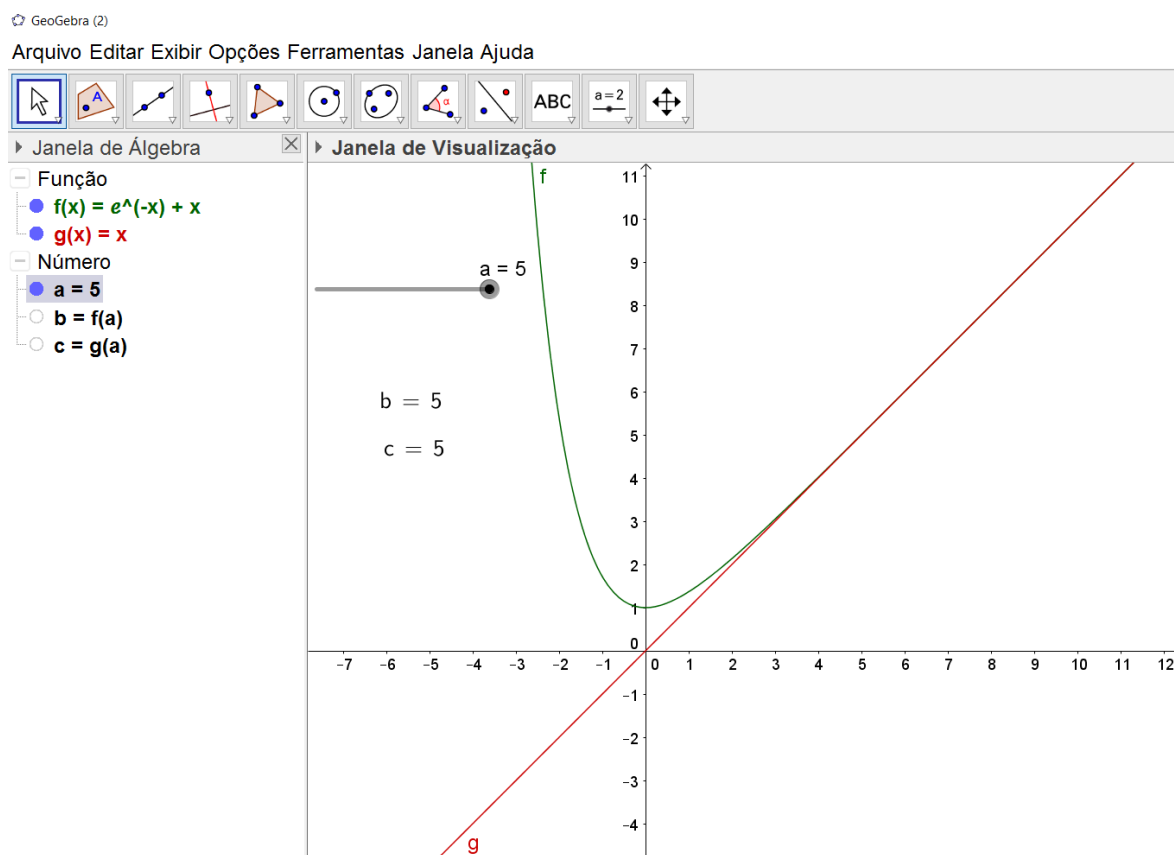
função, já estava pensando que está num diálogo bem próximo. Talvez se a gente considerar uma matemática, que o professor de matemática usa na sala, é, desconsiderando todo aquele formalismo e que permite, por exemplo, resolver equações por balanças de dois pratos, sim, então é matemática.

**William** – Você conhece e sabe que ele consegue, é um lugar, um aplicativo que nos ajuda, por exemplo, no gráfico. Nós temos a expressão algébrica, na verdade, as expressões analíticas das duas funções e os gráficos correspondentes; eles se interceptam? Como você faria para descobrir com o GeoGebra se estes dois se interceptam?

**P4** – Deixa eu pensar. (**P4** começa a manipular a janela de visualização com a ferramenta mover do GeoGebra, e eu pergunto “você moveu pra?”) A princípio eu movi, pra, talvez eu vejo o comportamento da função, é uma possibilidade.

**William** – dar uma dançada nos gráfico mesmo. Às vezes não entendo por que tem gente que não acha isso um mote. Se aqui (aponto para a janela dos gráficos) ele representa, né?

**P4** – Pra mim a primeira possibilidade seria verificar o comportamento da função na questão gráfica, talvez uma outra possibilidade seja construir controles deslizantes, e que obtenha valores, né? Vamos pensar, por exemplo, aqui, vamos dizer que eu tenho um numero  $b$  que seja igual a um  $f$  do  $a$ , tenho um numero  $c$  que seja igual a  $g$  de  $a$ . Pelo resultado que o GeoGebra nos fornece, eles coincidem. (veja a figura a seguir)



**William** – Fora do GeoGebra, você diria que estas funções se interceptam? Você tem algum instrumental para dizer que se encontram?

**P4** – Talvez, jogando valores pra função.

**William** – Eu vou aqui induzir, mas induzir a questão matemática, é, uma possibilidade é pegar as expressões analíticas e compara-las, né? Porque se nós estamos tratando de duas expressões com uma só variável independente, então, se eu iguala-las. Você toparia fazer isso no papel? (**P4** concorda) Então se eu as igualar, eu posso fazer este exercício de análise. É uma equação, estou admitindo que ela é válida, então se eu fizer passagens válidas para obter equações equivalentes, por exemplo, você está subtraindo  $x$  em ambos os membros...essa equação final, ela te diz alguma coisa?

**P4** – Me diz no sentido que eu posso, é, ao tender ao infinito esse  $x$ , ele vai resultar zero, certo?

**William** – A principio, eu dialogando com você, eu diria que não, tá? Porque pra mim

o ente matemático, por menor que seja a grandeza, ela ainda é diferente de zero, então, diria um professor de cálculo que o limite pode ser zero, mas jamais vamos ter o resultado dessa divisão igual à zero.

**P4** – Aí você vê como o resultado é diferente do que apresentado aqui (ele aponta para a tela do computador).

**William** – É, e é esse exercício que eu estou tendo muita sorte com você, Porque você está fazendo ele exatamente sabendo distinguir, olhar para os objetos. Então, um matemático afirmaria... esse exercício é tirado da RPM, eu já vou lembrar o numero, mas depois eu faço questão de te mostrar, e o professor chama muita a atenção, ele diz, cuidado, vocês estão usando o GeoGebra...cuidados ao usar o computador. Então ele falou que esse é um cuidado. É, vamos voltar ao GeoGebra. Você sabe que a gente tem como fazer a intersecção aqui (aponto para a entrada de comandos) e tem como fazer a intersecção aqui (aponto para a ferramenta intersecção), por favor, use.

**P4** – Ele deu um ponto. A partir do qual ele se...

**William** – E o matemático vai dizer não, não existe valor de  $x$  de tal forma que nós consigamos satisfazer esta equação. O GeoGebra diz que sim. É nesse sentido que eu estava te perguntando, é importante eu entender como ele obtêm, esse processo? Porque se eu ensinar pro meus alunos que ele observa a intersecção...por favor, comece a escrever o comando “intersecção”, a gente teria...ó (aparecem as variações de intersecções que são possíveis fazer como GeoGebra, a partir da entrada de comandos), então se a gente fosse discutir estas diferentes opções, veríamos que tem diferentes processos, que também não entendemos o que está por trás. Uma outra possibilidade é na janela CAS (**P4** abre a janela e começa a experimentar o mesmo comando), comece a escrever a intersecção, ó lá, intersecção função função, aí a gente pode usar só os nomes é isso né?

**P4** – Sim, acho que assim já basta. Aqui ele disse não (aparece um ponto de interrogação na janela CAS). Não tinha considerado esta possibilidade.

**William** – É, por isso que o que estou tentando fazer aqui, não é testando o quanto a gente conhece ou não o GeoGebra, até porque este é um exemplo que você não viu. Nossa, devem existir bilhares, né? Imagina combinar os comandos?

**P4** – Sim, e possibilidades de comandos que ele resulta em um ponto, ou ele resulta, por exemplo, aqui (aponta e clica para os valores que ele criou para comparar os resultados do mesmo controle deslizante aplicado nas funções em discussão) com... aqui ele tá me dando o valor.

**William** – Ahhh, ele calculou, ele disse que consegue ó. E tá coincidindo. Eu também faria o mesmo pensamento que você, então existe. Ele disse ó, aqui tem uma ferramenta que se eu cliquei, você clicou nos dois objetos, e ele nos dá definido. Eu não estou querendo te perguntar por que. Aliás professor, mais um exercício de responder. O que me interessa aqui, é pensar nisso, a gente precisa então, entender o que foi feito pra ele chegar aqui, por exemplo, a este ponto de interrogação? Você aceita isso? Lá no argumento você falou, seu posicionamento é de que precisamos saber, né?

**P4** – Não tinha considerado por esta questão. Eu não tinha, até hoje eu não tinha, vamos dizer assim, desconfiado de um rigor matemático do GeoGebra. Eu sei...

**William** – Você vê isso como falha? O programa tá bugado?

**P4** – Eu vejo como falha se a gente considerar a perspectiva de um matemático, né? Se eu considerar a perspectiva de quem está considerando isto como uma falha, para um matemático sim. Levando em consideração o rigor matemático, sim, é uma falha. Levando em consideração outras possibilidades, não.

**William** – Por quê? Até essa dualidade de informações faria o matemático dizer, não, não gosto disso.

**P4** – Até isso.

**William** – Tá, mas se você fosse esse matemático que diz que é falho, é motivo pra abandoná-lo?

**P4** – Pra abandonar não.

**William** – É o que? Motivo pra corrigi-lo?

**P4** – É motivo pra ficar atento, tendo em vista a minha necessidade, então, né? É motivo pra ficar atento porque agora eu passo a considerar de que se ele, tá cometendo esse erro em relação ao que a gente faz com conta, pensando no objeto matemático, no resultado que um matemático daria, então é questão de eu ficar mais atento a outros resultados que o GeoGebra pode fornecer.

**William** – Esse é um ponto legal. O GeoGebra já tinha estabelecido com você um estado de credibilidade?

**P4** – sim.

**William** – Você tinha uma segurança quando transitava do objeto GeoGebra, objeto matemático? Agora, aqui durante a entrevista, isso apareceu como uma ideia que você vai pensar? É isso?

**P4** – é, apareceu como uma ideia de que até quando eu for...pensando ainda na questão de compreender o modo pelo qual a gente obtêm essas coisas, o processo que o GeoGebra executa internamente e que me resulta em resultados como esse aqui por exemplo.

**William** – Tenta outro, pois na verdade tá no roteiro. (nos colocamos a tratar do episódio 2) Olhando só na expressão, você já esperaria o gráfico que a gente tá tendo?

**P4** – Sim. Falar com certeza, né? Sim, esperaria.

**William** – Por que?

**P4** – Eu estou pensando na simplificação que eu vou fazer em relação a  $x$  ao quadrado menos um, podendo ser separado em dois polinômios,  $x$  mais um vezes  $x$  menos um.

**William** – esse gráfico que nós temos, corresponde ao gráfico que você abstrairia se estivesse no espaço, na atividade de matemática somente?

**P4** – sim.

**William** – Como matemático, há restrição, olhando para aquela expressão? Como é que a gente fala, o domínio daquela função...

**P4** – Sim. Pensando...do que eu lembro, se eu não fosse considerar a simplificação, não, não sei se vou lembrar disso. Eu me lembro que para trabalhar com limite, a gente, o limite dessa função, por exemplo, tendendo a um, eu tinha que fazer a simplificação para poder depois aplicar o limite.

**William** – Isso. Que aí, nesse caso existiria o limite né?

**P4** – Nesse caso existiria o limite.

**William** – Porque se a gente fizer tender a zero, vai dar zero sobre zero, era isso que você lembrava?

**P4** – Era isso mesmo.

**William** – Um exercício clássico do cálculo, é, o domínio, diria um matemático, você pode concordar ou discordar, seria dizer qual é o conjunto de todos os valores possíveis para  $x$ , isso dentro do conjunto dos números reais, ainda né (**P4** acena afirmativamente com a cabeça), que seriam permitidos (**P4** fala rapidamente sim). No caso, pra pensar nessa expressão, o matemático sempre chama a atenção, ó, não dá para ser todos os reais porque...

**P4** - O um não pode ser.

**William** – O um não pode ser. Porque a divisão por zero... nós temos aí uma ziquizira. Alguns dizem que não pode, outros dizem que é uma indeterminação, não é essa a discussão que estou querendo te chamar. O fato é, eu o **William**, quando penso no gráfico daquela expressão, eu posso até esperar que eu teria esse formato, eu tenho até uma certa crença bem segura, e é uma crença matemática, eu teria uma reta, mas não teria uma reta. Porque pra mim, se eu tivesse que fazer no braço, e dizer pra você, no ponto onde  $x$  é um, não importa pra mim o  $y$ , ali eu ia marcar aberto, ali não tem ponto, mas dali pra cá eu aceito, daqui pra cá eu aceito. Então, tentando fazer força pra usar linguagem matemática que eu conheço, eu ia dizer, eu tenho duas semi retas opostas, elas tem origem mas não tem fim, eu aceitaria todos os reais a partir dali e tal.

**P4** – E antes disso. E o GeoGebra não fornece esse resultado.

**William** – Não. Pra mim não é esse gráfico. Eu poderia fazer uma exploração como você fez. Por exemplo, a gente podia, cria um seletor (**P4** começa a manipular no GeoGebra como eu pedi; esta sequência corresponde ao que mostramos ser uma das possibilidades de lidar com o episódio 2), esse vai servir, ai faria um ponto aqui, que eu chamo de ponto parametrizado, então eu digo, abre o parênteses, não precisa nem dar o nome senão quiser, então eu digo, põe o  $a$  (nome do seletor criado há pouco) e o  $f$  de  $a$ , né? Eu chamo de ponto parametrizado, coincidentemente o nosso  $a$  está em um e aí o ponto não existe, move o  $a$ , uai o ponto existe, mas quando põe em um ele deixa de existir, então, aqui, você diria que percebe que o software também lida com isso? Se for pra determinar...

**P4** – Sim.



**William** – É um modo diferente de como ele determinou aquele ponto a partir da expressão, pra mim, é um modo diferente, de como ele determinou o gráfico e exibiria todos os pontos que pertencem a esta função. Então, se eu estivesse pensando em ensinar ou discutir este conceito, fazendo essa transição entre essa representação do GeoGebra e aquilo que eu chamo de objeto matemático puro, abstrato, eu tenho uma situação para lidar. E aí eu volto e te pergunto, assim, você já me disse que aceita e admite a necessidade que a gente precisa compreender então esse processo?

**P4** – Não, não, como eu disse, não tinha pensado nessas possibilidades, né? Mas sim, né? Essas possibilidades geram uma nova necessidade. De por que aprender como essas coisas funcionam.

**William** – Aí você me cria uma nova pergunta. Pra estabelecer credibilidade do programa que eu tenho que fazer isso?

**P4** – Não, nem tanto para estabelecer credibilidade.

**William** – Pra aprender melhor? Pra aprender mais corretamente? Pra aproximar melhor? Sabe esse exercício, agora, você me deixou fascinado.

**P4** – Eu acho que é pra continuar atendendo a necessidade. Enquanto matemático.

**William** – Se uma das necessidades fosse, pelo GeoGebra, melhorar a compreensão do ente matemático?

**P4** – Isso, isso. Daí eu precisaria. Do contrário, para essa funcionalidade, daí eu vejo que talvez tenham outras necessidades, aí sim pra uma credibilidade. Mas eu não estou considerando isso. Essa questão da credibilidade. Estou considerando que alguém poderia considerar. Isso pra mim não seria motivo suficiente pra me lançar em um estudo sobre a programação em Java, que é o que estrutura. Mas pensando em atividades de sala de aula, pensando em fazer matemática, sim.

**William** – Mas é uma frente então, se a gente se constituir como pessoas que estudam matemática e trabalham a partir do GeoGebra?

**P4** – Sim, é uma frente. Uma possibilidade. E eu não tinha me atentado a isso.

## ANEXO E – Transcrição da entrevista com P5 – Realizada em 04/08/2015

**William:** Bom, professor, qual que é a sua posição... qual que é o seu posicionamento sobre a necessidade de se entender o processo para obtenção de um objeto do gráfico? Ou também de um resultado numérico ou resultado algébrico, com o GeoGebra?

**P5:** Uhum, você tem... esse episódio eu entendi, o outro episódio, o um eu não entendi.

**William:** Não, na verdade... eu posso...

**P5:** porque vai dar elevado a menos  $x$  igual a zero e não tem a solução, é isso?

**William:** é, esses aqui vão problematizar a questão... primeiro...

**P5:** Tá.

**William:** Como é que o senhor vê isso? O senhor acha que eu usuário preciso entender como que o GeoGebra chega a fazer um gráfico? Como que ele consegue fazer pra interagir a representação, que a gente diz algébrica, com a representação geométrica? A gente interage aqui e interage aqui, como é obtido isso? O senhor acha que a gente precisa saber? Qual que é o seu posicionamento?

**P5:** Ah, a gente quem? Professor... o aluno? Ou a pergunta vale pra qualquer um?

**William:** É... em essência eu acredito que qualquer usuário é importante.

**P5:** O professor sem dúvida, porque ele tem que conhecer as limitações que o software tem, ou as regras que o software usa, então o computador manda... faz aquilo que você mandou fazer, né, dentro do que ele foi programado, então você tem que entender isso pra... pra... porque quando você tá com o aluno, coisas podem aparecer e se você... de repente essas coisas aparecem justamente por conta de como o programa funciona, então você tem que conhecer, sem dúvida. Um aluno, você... eu não começaria, você primeiro mostra o que funciona, o tranquilo, né? Numa etapa final você começa a mostrar onde a tecnologia começa a falhar, né, tá certo? Então, eu diria que tem que saber, mas dependendo da pessoa tem o momento certo de saber essas coisas, né? Então depende daquilo que...

**William:** Processos como inteligibilidade, crenças, podem aparecer aqui, não podem, professor? Afetar a credibilidade... se uma pessoa... a gente procura entender um processo e desenvolver o pensamento matemático, claro, estimulando a crítica na

peessoa que eu quero que desenvolva aquilo, né, mas a figura do professor é muito forte, às vezes. Quantas vezes a gente, não sei o senhor, mas eu já passei por aprendizagens e aceitei o argumento de autoridade, porque ele me convidava a esperar o momento com maior maturidade em que essa discussão seria cabível, o senhor entende? É como no sexto ano em que me pediram, né, um produto de dois números inteiros, estritamente negativos, será um número estritamente positivo, claro não com essa fala, mas é... convive comigo um pouquinho agora. Em algum momento justificaram, né, chegamos à construção estabelecendo simetria, era um momento pra se entender que aquilo era um sistema, então o senhor acredita que isso tem impacto, o que o software pode fazer, se a gente pegar uma criança hoje em que ela incorpore isso como parte do caderno, uma extensão do caderno, é... isso vai interferir no sentido de gerar crenças, olha a máquina deu uma resposta, eu posso confiar, porque a máquina não erra... coisas... o senhor entende e acredita que isso tem relevância?

**P5:** é... pra mim, eu não tenho claro é quando você expõe, primeiro assim, uma coisa que eu percebo é que as pessoas tendem a ter uma fé em demasia na ferramenta, ou seja, não tem uma percepção de que existem coisas que a ferramenta não vai conseguir fazer, ou vai lhe dar uma resposta errada, né? Ou você tem que saber ler aquilo, né? Você faz o gráfico de um sobre x, aí você anda pra cá, você vê o gráfico em cima do eixo x, coladinho, né... ué, tem infinitas raízes, né? Então é...

**William:** É exatamente isso...

**P5:** Então você tem que ter um certo, sim... não, mas você pode falar se você fosse fazer isso também né. Seu lápis é grosso, né, então tecnologias têm as suas limitações, mas eu não começaria falando das limitações, eu começaria falando primeiro daquilo que você faz que não conseguia fazer, num primeiro momento e depois mostrar “olha, você tem que tomar um certo cuidado, né?”, tá certo?

**William:** Por exemplo, o porquê que eu anotei aqui os episódios... é... o senhor quer escrever aí?

**P5:** sim

**William:** Talvez seja mais fácil... eu queria estudar uma função “e elevado a menos x mais x”

**P5:** Tá... tá... epa, deixa eu ver aqui...

**William:** Ah esse teclado dell...

**P5:** De menos x?

**William:** Isso. E mais x. Agora o segundo termo. Essa é uma função.

**P5:** Tá. Você quer definir uma função?

**William:** Isso. E a segunda função é a função identidade.

**P5:** Ah sim...

**William:** Então, a princípio, uma possibilidade interessante do GeoGebra é mostrar ahm... um comando intersecção ou a macro intersecção. Antes disso, o matemático P5... há intersecção?

**P5:** não tem, né, porque se você resolve aí fica e elevado a menos x igual a zero, e elevado a menos x igual a zero não vai.

**William:** se você achar esse x, por favor, nos avise.

**William:** Mas, no entanto, o senhor já testou?

**P5:** Não, esse aqui eu não testei não... [P5 falando baixo: intersecção de você com você, alguns cliques de computador], ele deu quem aí?

**William:** ele deu "A".

**P5:** Cadê o "A"? O "A" tá com... cadê o ponto "A"?

**William:** Como a gente tá com 34, né, ele tá um pouquinho ali em cima.

**P5:** Ah, sei.

**William:** Como lidar com isso?

**P5:** Primeiro é assim, né, você precisa ver se isso é... se isso é contornável ou não, né? Porque assim, tem coisas que não tem jeito, se você usa, tem um processo numérico, matemático por detrás, então se...

**William:** Por isso que eu perguntei...

**P5:** Porque tem uma coisa assim, você, por exemplo, já relatou isso aqui pro... pro pessoal do IGI...

**William:** a versão três...

**P5:** Não calculava a intersecção?

**William:** Desde a versão 3.2, isso foi percebido por um professor do IMPA [Instituto de Matemática Pura e Aplicada]...

**P5:** sim...

**William:** Que escreveu um artigo, ai meu Deus do céu, eu acredito que seja na RPM 70, lá ele vinha defender que não é pra, não se ensina, não se aprende matemática real com computador, que é uma ferramenta por vezes úteis...

**P5:** Uhum

**William:** Mas aí eu guardei, eu também faço um pouquinho do que o senhor estava me falando.

**P5:** Tá

**William:** Como é que eu lido.

**P5:** Uhum

**William:** Com a questão de ser contornável, de não ser, mas como agora eu sou pesquisador, eu tô, eu tô, eu entendi que esse episódio seria interessante pra gente pensar... um usuário relativamente mais avançado, há caminhos né? O senhor daria caminhos pra lidar com isso, mas o senhor diria que isso afetaria a credibilidade?

**P5:** Não se você deixar bem claro, né, o como que essas coisas são feitas, você pode até ir pra um instrumento mais simples, divide um por três na sua calculadora, ela te dá um terço? Ela não tá te dando um terço.

**William:** Nunca.

**P5:** É! Ou você coloca assim, "Ah, pede pra calculadora calcular pi", ela coloca 3.1415, ah, então pi é 3.1415?.

**William:** Não.

**P5:** Embora... muita gente vá achar que a calculadora tá dizendo que pi é 3,1415 então o pi é 3,1415. Se você perguntar pra alguém o que que é pi, ela vai te responder que é 3,1415.

**William:** Não fala da irracionalidade, ele não, ixi!

**P5:** Agora você vê, então a tecnologia que é culpada, né? A tecnologia que é culpada, a calculadora diz que pi é 3,1415, então é (incompreensível auditivamente) da calculadora que é a culpada, de repente é o que você tá dizendo né, tem que chamar em algum momento a atenção pra como que o seu instrumento funciona e quais são as limitações dele, né?

**William:** Então, o senhor deixou bem claro o seu posicionamento, é como professor, o senhor procura fazer isso e acredita que todo professor tem procurar compreender, é... como esses objetos foram constituídos. A gente quando vai investigar, a gente

faz analiticamente, escreve, confia numa propriedade que a gente aprendeu, todas são representações, né, professor? Seja no papel, seja... não são isentas, matemáticas, mesmo que eu faça no lápis, por mais firme que seja...

**P5:** Se você quiser extrapolar, você fala assim pra esse matemático, né, a maneira de como você faz matemática e quer escrever palavras, e ele demonstrou que essa maneira, essa sua limitação, a limitação da sua tecnologia como matemático em fazer provas usando sequência de strings, tem coisas que são verdadeiras e você não vai conseguir demonstrar, é uma limitação da sua tecnologia como matemático, toda tecnologia tem uma limitação, então, você fala assim, “não, o matemático com as suas demonstrações é...”, não! Tudo tem limitação, inclusive o matemático fazendo a continha com...

**William:** Goldbach já falou, né? Se você não tiver um sistema consistente...

**P5:** Gödel... né, Teorema de Completude de Gödel, então, é...

**William:** Gödel... de Gödel...

**P5:** Gödel... Então...

**William:** é um bom momento pra gente até falar de matemática avançada, né professor?

**P5:** É...

**William:** O outro episódio é interessante... é...

**P5:** É que assim, tem que tomar cuidado com a pergunta, com a pergunta pontual, né, porque isso se insere num contexto, depende do você tá querendo fazer, né? Então... é... difícil dar uma resposta pra uma pergunta fora... precisaria ter um contexto, porque você tá querendo fazer o quê? Eu tô ensinando matemática básica, aí vou querer falar de funções quadráticas, e aí eu preciso falar desse tipo? Nem que você pegue uma função quadrática muito esquisita, com coeficientes super esquisitos, então eu acho que cabe... quer dizer, tem que pensar no que você tá querendo fazer, no qual objetivo que você quer, né, pra ver se...

**William:** Por exemplo, a gente podia ensinar um licenciando, não... a conferir seu trabalho, que ele já fazia com o braço, com o caderno, a lista de exercício, e aí vamos supor que é um exercício comum, identificar intersecção entre curvas, identificar entre funções e... se a gente percebe, é... diria o matemático, se você tem uma contraprova, não é... você já tem que duvidar do processo, né, e aí colocando

no contexto, como o senhor me pediu, como é que eu poderia... a pessoa daria certa credibilidade ao software, mas ela não pode dar uma credibilidade máxima... o **William**, o professor **William** vai dizer isso pra ele....

**P5:** Nessa situação não... se ele fizer... calcular um monte de intersecções, e fala “olha, já que você tá calculando intersecções e um dos objetos pode ser meio esquisito, ou dependendo da configuração que você tem, você tem que tomar um certo cuidado, né?” Tá certo?

**William:** A expressão analítica tem, de repente, mais valor que...

**P5:** É, sim, com certeza...

**William:** Porque você conseguiu ver um ponto na tela... é... é... a essência...

**P5:** sim... sim...

**William:** O outro caso, professor, é difícil dizer...

**P5:** É, o outro eu conheço, que ele coloca x mais um, né? Ele simplifica né?

**William:** Em essência, eu vou perguntar, sou professor de cálculo...

**P5:** Sim...

**William:** que gráfico o senhor espera olhando para essa expressão?

**P5:** Então, é o que... claro que quando eu falo isso com meus alunos, né, é... eu até faço uma provocação anterior, né, eu costumo falar assim pros meus alunos, primeiro dia de aula “quem for lá na frente no quadro e me desenhar um ponto passa na minha disciplina com dez, vai lá e me desenha um ponto”, tá certo? Vai lá o aluno inocente

**William:** e levanta...

**P5:** Aí você fala, isso é um ponto? Tem toda uma discussão, né? Que a própria maneira de como você vê um gráfico como uma folha de papel, ou desenhado no computador, não é o gráfico da função, aí triângulos não existem, retas não existem, pontos não existem...

**William:** Nesse sentido material...

**P5:** É... são todas abstrações, né, então você tem que falar, “olha, então tem uma limitação, isso não é o gráfico da função, tá certo? Isso é uma alegoria, né, uma aproximação do gráfico da função”, então o que que você esperaria de, né, então fala assim, “não, vai lá e pega uma reta e tira um ponto, como que fica o desenho?”. É como a gente faz, né? No papel a gente tira um círculo de, e fala, não é o mesmo

desenho, tira aí cinquenta pontos, é o mesmo desenho. Mas eu aviso ele sim...

**William:** No entanto a gente poderia discutir questões como continuidade, descontinuidade, aqui tranquilamente, ainda dentro da ferramenta?

**P5:** Sim, sim, sim...

**William:** Esse é um exercício muito tradicional né, em disciplina de cálculo, ele...

**P5:** Sim...

**William:** A diferença de dois quadrados olha, vamos discutir limites, nesse sentido...

**P5:** É, é...

**William:** E aí a gente acaba caminhando, isso tudo é limite, pra discutir continuidade, então as pessoas, a minha suposição, da minha escolha desse episódio pra provocar os entrevistados é nesse sentido, como é que lida com isso, então, “ah, então eu não faria isso, eu não usaria o software”, não é o seu caso... o senhor continua usando o software mesmo, pra estudar essa expressão...

**P5:** É, mas eu uso como uma mímica do que tradicionalmente ele vê no livro, né, tradicionalmente como as pessoas fazem, né, então, por exemplo, eu manualmente coloco uma bolotona enorme lá...

**William:** Pra voltar, ali não é pra ver...

**P5:** É... porque pra fazer uma mímica do que ele tá acostumado, porque ele vai abrir um livro, ele vai ver uma bola desse tamanho, ele vai ver o professor desenhando uma bola desse tamanho, embora o professor... volta antes da tecnologia, né, quando que alguém ia falar, “mas professor, esse é o gráfico mesmo, você pode tirar essa bolona, né?” Acho que nunca ninguém perguntou isso prum professor de cálculo fazendo o gráfico, né? “Esse é um gráfico mesmo de  $x$  ao quadrado menos um sobre  $x$  menos um?”. Tira todo esse calhamaço de gente que nunca ninguém perguntou isso, porque abstrai, então tira um ponto, então simboliza que tira um ponto, né, tá certo?

**William:** a questão de adimensionalidade, ali, né, do ponto, não me permite, né, dizer... é até difícil de imaginar, eu até falo pras pessoas, “sei lá, eu imagino duas semi retas”, ali, aí ele me fala, “mas são duas semi retas, tem origem?”, “pois é, não dava pra teoria de reví”...

**P5:** Então eu uso, mas uso com uma... embora assim, né, você vai falar, é... eu não levo meus alunos pro laboratório, porque não dá tempo, naturalmente não dá tempo,



porque tem várias outras dificuldades de você levar alunos no laboratório, tem o tempo deles pegarem, sentarem, prestarem atenção, você gasta aí uns quinze minutos até todo mundo começar entrar em fase e pensar no que você faz, né? Sem contar que tem as distrações, né, então é pra fazer “a”, tá acessando o Facebook, então eu uso o GeoGebra em sala de aula, mais como um recurso visual, né? Se é pra fazer algum experimento, eu chamo um aluno pra fazer, mexer ali e compartilhar com a turma, né?

**William:** Naquele momento.

**P5:** Naquele momento, uma coisa mais controlada, se a gente deixar livre, essas preocupações aparecem mais quando você deixa as pessoas livres, né, porque daí várias coisas podem acontecer.

**William:** Não haveria nem como antecipar?

**P5:** Não.

**William:** como o senhor falou...

**P5:** Olha e agora eu tenho que responder isso daí, né?

## ANEXO F – Transcrição da entrevista com P6 – Realizada em 10/08/2015

**William:** Bom, professor, qual que é a sua posição... qual que é o seu posicionamento sobre a necessidade de se entender o processo para obtenção de um objeto do gráfico? Ou também de um resultado numérico ou resultado algébrico, com o GeoGebra?

**P6:** Ah tá! É eu acho é.. não é necessário, para o aprendizado matemático estritamente não é necessário. É bom, é como se você fizesse é, é, é, pô como é que se obtém, vamos pensar então, como é que você traça lá o gráfico da função que você tá a fim de trabalhar com o seu aluno? E vai lá, como é que eu obtive esse gráfico, né? Se é...se for um gráfico, igual eu estou vendo um exemplo aqui, que são gráficos que envolvem funções exponenciais... eu aqui, é uma, é uma, fração racional né? É... alguns gráficos, como que você vai explicar se você não tiver o GeoGebra? Você vai fazer uma tabelinha de pontos, praticamente, né? Você vai fazer uma tabelinha pondo os pontos lá e obviamente que, que nessa tabelinha os pontos já estão convenientemente escolhidos pra você ter uma visão de abrangência mais geral pra poder traçar o gráfico e traça o seu gráfico né? E aí vai, bom, aí você pode, uma possibilidade é você chegar pro aluno e falar: oh, o computador faz exatamente isso mesmo. Só, só que ele faz com milhões de pontos...

**William:** pinta, pinta, pinta...

**P6:** É! Calcular a função em cada pontinho e vai traçar isso aqui pra você. Basicamente, então, como ele faz? Ele faz do jeito que eu ia fazer no quadro aqui, se eu, se eu fosse desenhar, só que eu ia fazer só com quatro, cinco pontos, dependendo da função né... se, se eu, por exemplo, quero uma função linear e opto por chegar pelos dois pontos é por que? Porque, ora, porque eu já sei que vai dá uma reta mesmo, então eu preciso de só de dois pontos pra poder definir qual que vai ser o gráfico.

**P6:** Então, basicamente, eu na minha visão, a gente não explica pro aluno direito como é que aquele gráfico é daquele jeito. Até porque na maioria das vezes você fala: bom, eu já sei que o gráfico é uma parábola. Você não obtém isso por dedução, você usa isso na verdade.

**William:** A gente admite?

**P6:** É! Eu sei que esse gráfico é uma parábola, então, então, bom eu vou pegar aqui

uns pontos e tal, como eu sei que ele é uma parábola, olho aquele jeitão ali, então é aqui, pronto. Então é assim, não tem necessidade dele saber é... como que o software faz pra traçar o gráfico. Agora não sei se você quer saber os passos que eu tenho que colocar no GeoGebra.

**William:** Não, não, agora muito é mais essa posição política, que é o que você tá me dizendo.

**P6:** É!

**William:** Você acha que não precisa.

**P6:** É! Eu acho...

**William:** É como eu te disse, nós não estamos avaliando.

**P6:** é...

**William:** Porque importa posicionamento. O quê....

**P6:** Basta você falar isso: oh, o software tá simplesmente calculando quanto que vale a função em cada pontinho ali e colocando ali depois né.

**William:** Você estava me falando aqui dos episódios... por exemplo, é... os episódios, eles têm um pouquinho de outras funções, é um pouco mais pra problematizar algumas posições que eu já esperava...

**P6:** Unhum.

**William:** Mas eu vou te convidar... por exemplo, se eu considerar que  $e$  elevado a menos  $x$ , mais  $x$ , é uma função.

**P6:** Unhum.

**William:** E  $x$  é a outra função, então, função identidade e essa exponencial composta aí.

**P6:** Unhum.

**William:** Elas se interceptam? Os gráficos dessas funções se interceptam?

**P6:** Bom, se você pegar  $e$  elevado a  $x$ ...

**William:** Dentro do contexto matemático.

**P6:** Não, elas vão se interceptar, né? Você fala assim: a função identidade com a função exponencial?

**William:** É  $e$  elevado a menos  $x$  mais  $x$ .

**P6:** Ah, é elevado a menos  $x$ ?

**William:** isso!

**P6:** É porque eu não tinha visto aqui o menos. Mas de qualquer jeito...mas, mais  $x$ , igual a  $x$ ?

**William:** Isso!

**P6:** Né, bom, aí bom, é... você tá imaginando que você vai lançar essa pergunta em classe?

**William:** Não, eu quero perguntar pro **P6** agora.

**P6:** Ah, não, bom aí, o que, que eu pensaria...

**William:** Eu tenho duas funções...

**P6:** Eles não vão se interceptar aqui nesse caso.

**William:** É essa, em  $g$  de  $x$ , é essa.

**P6:** Não, elas não se interceptam...

**William:** Você como o **P6** matemático, diz: não se interceptam?

**P6:** É, essa igualdade aqui não...

**William:** Não faz sentido?

**P6:** Não, ela faz sentido né... só que não existe  $x$  que satisfaça essa igualdade né, digamos assim.

**William:** Ah, eu adoro esse... cara que maturidade cara, mas é isso que eu queria. Você experimentou isso no GeoGebra?

**P6:** Não, isso especificamente não.

**William:** Vamos fazer?

**P6:** Vamos.

**William:** Só quero vê aqui um negócio.

**P6:** Você então quer fazer essa comparação né?

**William:** É!

**P6:**  $f$  de  $x$  ((parece manipular o software)). Tem que escrever  $\exp$ , pôr  $\exp$  ou só o  $e$ ?

**William:** Eu já vi os dois casos.

**P6:** Então eu vou escrever o  $\exp$  aqui.

**William:** E isso aconteceu, foi mudando com as versões.

**P6:** É, pois é.

**William:** Quer mais água?

**P6:** Quero, faz o favor. Bom, então isso aqui (manipula o software),  $g$  de  $x$ ,  $x$ . Não, espera aí, o que eu fiz de errado? Ah tá (P6 percebe que digitou uma expressão

com um parênteses a mais e o GeoGebra acusou o erro).

**William:** Provavelmente nada, a gente não erra.

**P6:** Não, eu coloquei um par... é porque negócio de computador é isso né? É a dificuldade que você tem a mais que explicar pro...

**P6:** Bom, então eu já coloquei a sua função.

**William:** A ideia é... a gente sabe que ele tem a ferramenta de intersecção né?

**P6:** Aham!

**William:** Nós temos...

**P6:** É porque assim...

**William:** Aqui eu preciso que seja menos x (P6 havia digitado e elevado a x).

**P6:** Ah é menos x, eu esqueci, desculpa. Deixa eu só, só...

**William:** Nesse caso né?

**P6:** É!

**William:** Não tem que pedir desculpa nenhuma não.

**P6:** Eu esqueci de...

**William:** Separadores, cara, tá, chegando ali eu vou fazer isso aqui. Agora vai funcionar (eu estou falando de um cabo de energia para o computador). Eu estou te convidando a fazer essa experiência e você disse que ainda não a fez.

**P6:** Oh lá (P6 mostra que a função agora corresponde ao que se pediu)! É, eu nunca fiz isso não.

**William:** Aí a gente tem como pedir pra ele, pro programa encontrar a intersecção.

**P6:** Isso! Não, é, isso eu sei que existe, eu só nunca fiz mesmo.

**William:** Procurar a intersecção?

**P6:** Procurar as ... é, então tá, e as funções, vamos procurar a intersecção, é... onde é que fica mesmo?

**William:** É ai mesmo, ali em baixo (P6 usa a macro de intersecção).

**P6:** A intersecção de dois objetos. Tum, tum (clica nas duas curvas). Tá pensando ... é, ele achou um ponto, claro.

**William:** E aí? O que, que o P6, matemático, o P6 usuário do GeoGebra pensa disso?

**P6:** É, isso vai ser... ele vai pegar essas funções reais até uma certa aproximação, então quer dizer que na prática, no desenho vai acabar ocorrendo uma...

**William:** Uma intersecção?

**P6:** É! Eu não sei como que ele...

**William:** Entende a natureza da minha pergunta?

**P6:** Sim, perfeitamente. Uma coisa que não é pra ter intersecção, mas ele vai indicar que tem né?

**William:** Você vê isso como fragilidade, defeito, falha?

**P6:** Não, como uma limitação. Porque como é que você vai... bom, a não ser que você entrasse com o conhecimento matemático ai né e, e...

**William:** Limitação?

**P6:** É! Todo software tem essa limitação né? Assim, é engraçado, é uma coisa boa pra pensar mesmo, porque eu nunca tinha me preocupado.

**William:** Se você quiser uma dica de leitura disso... você lê a RPM?

**P6:** Como?

**William:** A Revista do Professor de Matemática?

**P6:** Ah sim, leio, aham.

**William:** Acho que é o número 70. Se você quiser eu tenho os CD's também, depois a gente pode compartilhar on-line.

**P6:** Aham.

**William:** Um professor discutiu essa situação. Então é uma leitura que pode ser interessante.

**P6:** É, porque é, tá vendo?

**William:** Mas está ligado a gente compreender como é que ele obtém o objeto não é?

**P6:** Importância de preparar a aula né? Vai que você vai pro negocio e diz: pô, a tá isso aqui é simples do jeito que... isso aqui é simples tá, pum, pum, chega na hora que você vai dá aula isso daí vai ser inesperado pra você no meio de uma aula? Imagina, por isso que tem que preparar né?

**William:** Eu penso. Mas também eu imagino que você já deve ter pensado que a gente estava muito bem preparado e... essa gurizada é de uma criatividade.

**P6:** É! Porque assim, o cara, dificilmente iria ter uma pessoa que atentasse pra isso. Não, espera aí, tem a ferramenta de intersecção, então eu vou usar essa ferramenta de intersecção e vou ver o que, que ele me responde né? Porque assim, eu olhava assim... tá mais pera ai, os gráficos tão coincidindo, não, não tão coincidindo, aquilo

ali são assintóticos, porque não sei o que, sei lá, aí sim se explicaria porque na verdade a curva ideal que não tem espessura né, não tem jeito de você desenhar.

**William:** Senão?

**P6:** É! Se não como é que você vai me dizer um negócio que não tem espessura? Então ai o cara vai aceitar isso ai. Não beleza, então ele diz que parece que tá e de fato no desenho elas estão encostando uma na outra pelo fato do desenho delas precisarem ter espessura. Você pode diminuir essas espessuras até o mínimo que o software...

**William:** Que o processamento aguenta né?

**P6:** É! Exatamente. Mas ela sempre vai ter uma espessura, né. Então assim, tá beleza, tem espessura? Tem espessura. É outra limitação do software. Cara, será que eu posso dobrar... tem espessura, qual a espessura mínima? Vai ser uma limitação do software que a menor espessura que ele consegue desenhar pra você. Ai é mínima o que consigo diminuir a espessura tanto o quanto eu queira né? Eu não consigo nem, nem, nem mesmo colocar aquela ideia de limite ai né assim? Tá, mas eu posso fazer tanto o quanto eu queira ou não? Não pode, o software vai te dá uma, uma...

**William:** Uma freada.

**P6:** Exatamente.

**William:** Que eu gostei da palavra que você usou.

**P6:** É!

**William:** Esse outro caso... o que, que você esperaria de gráfico dele?

**P6:** Não, é, pois é, a tá, isso aqui vai ser né? É... aquele gráfico, do x. Então aqui é x.

**William:** x ao quadrado menos um, sobre x menos um.

**P6:** Então vai ser x mais um né? Uma reta lá, não definida no ponto... é menos um né? Não definida no ponto um.

**William:** E você já experimentou fazer no software?

**P6:** Não, vamos lá.

**William:** Mas se você fosse fazer pro seu aluno um esboço manual, você ia chamar a atenção que ela não pode tá ali naquele ponto?

**P6:** É, é, que eu ia fazer essa simplificação, só que essa simplificação ela não vai no ponto um porque ela não tá definida ali.

**William:** Ia fazer a divisão né?

**P6:** É, fazer a divisão do...

**William:** É isso que eu gosto dessa questão, porque ela lembra a gente da discussão de domínio.

**P6:** É, exatamente. Eu estou tratando uma função e tem que ver o domínio ou as condições de existência né? Mesmo que eu não tivesse falando propriamente em função né? Oh, é essa expressão aqui, isso aqui é uma fração racional, uma fração racional que não está definida no  $x$  igual a um, se eu encará-la como uma função... bom, então eu posso simplificar essa fração racional? Posso, pra todos os valores de  $x$ , exceto o um. Ela não tá definida no um, então o  $x$  é diferente de um lá. Então se eu olhar isso aqui como uma expressão de uma função, simplifica e tal, tira aquele ponto um ali que é... fica aquele burquinho né? Vamos lá fazer aqui então. Eu só vou esconder aqui então (P6 fala de esconder os objetos já criados para discutir o episódio 1)

**William:** Fica a vontade.

**P6:** Pra não ficar...

**William:** É de novo aquele caso, você estava agora pouco me falando: eu gosto de trabalhar com as funções, é legal, a expressão gráfica pra discutir o domínio.

**P6:** Isso!

**William:** Mas, também gosto da outra palavra que você colocou. Não há um espaço ideal pra gente praticar a nossa ciência.

**P6:** Não, é, é verdade.

**William:** Porque... tanto é que você limita, se é o software ou a ponta desse lápis.

**P6:** Aham

**William:** Eu...

**P6:** Cadê a barra aqui? A barra de divisão que eu faço (P6 tem dificuldade em encontrar a tecla da barra inclinada para a direita). Vamos lá.

**William:** Quem manda a gente não desenvolver tecnologia? Tem que ficar usando os teclados iberrante dos outros.

**P6:** Eu não estou acostumado com o laptop sabe?

**William:** Vamos ser sincero, a máquina dos outros é dos outros né?

**P6:** Oh lá oh.



**William:** Ele deu uma reta né?

**P6:** Deu uma reta...

**William:** Totalmente densa.

**P6:** Totalmente densa, bonitinha.

**William:** E se eu fosse usar sua mesma ideia, de discutir...

**P6:** Isso aqui não tá, seu mouse... essa bolinha do mouse seu tá meio...(P6 menciona o fato de que o controle do mouse não consegue utilizar o zoom a contento)

**William:** Eu não sei o que acontece com meu mouse. Eu troco o mouse, o P3 fez a mesma coisa. Ele falou: uai William, eu quero arrumar isso aqui rápido pra dá zoom e não está funcionando...

**P6:** É, mais de fato por mais que deu zoom tá denso ali no um né?

**William:** Uhum.

**P6:** Aqui, um... é, eu não esperava por isso também não.

**William:** Mas você acha que discutir essa questão também pode ser levada a procurar a compreender porque é que o objeto é obtido...

**P6:** Claro! Isso... é bom o aluno ter essa noção de que como de fato você tá lidando com o software você vai ter certas coisas que o computador faz desse jeito por um motivo.

**William:** Isso!

**P6:** Então assim, por que, que ele tá mostrando uma coisa que, assim, estritamente tá errado né? Estritamente...

**William:** No sentido matemático?

**P6:** É! No sentido matemático. Esse gráfico não pode ser assim, ele tem que ter um burquinho no um. Então assim, vamos dar zoom aí pra vê se vai chegar uma hora que aparece lá o burquinho, mas de fato e isso eu não sei por que isso acontece.

**William:** Função... didática da limitação, ela é, como é que eu vou dizer? Esse resultado é necessariamente pejorativo se eu tivesse agora querendo construir essa discussão, travar essa discussão com o estudante?

**P6:** Não, não, de modo algum. Acho que é um resultado assim é, assim, é a limitação do software num é? Então você tem que... eu não veria como pejorativo nunca, é uma limitação que você tem que lidar com ele...

**William:** O P6 lidou né? Você soube dizer o que esperar...

**P6:** É! Você tem que lidar com ele e tem que explicar pra quem, pra quem... pros seus alunos e tal, saber discutir com eles, por que que isso aqui é apresentado assim quando você esperava assado?

**William:** Isso.

**P6:** Né?

**William:** Eu digo porque eu passei por situações assim é... deixa eu te dizer, que foi com o Cabri. Aí, poxa, super bem chicoteado pra definir o triângulo, os três pontos, não podem ser colineares, aquela coisa toda. A lei da desigualdade triangular... chicoteado sabe?

**P6:** Uhummm.

**William:** Um pouquinho mais velho que você.

**P6:** Uhummm.

**William:** Aquilo você falou, aí tinha uma outra escola (menciono uma conversa informal e anterior a pesquisa, falamos sobre como as licenciaturas eram diferentes).

**P6:** É, pois é.

**William:** Argumento de autoridade não é? Não era exatamente só racionalidade. Aí bem, aí eu tropecei no Cabri, fascinante também, menino. Só que eu pegava os pontos e jogava um em cima do outro e depois eu deixava o mouse e ele ficava me dizendo: isso aqui é um triângulo. Cara, eu ficava doido com aquilo. Como? Os pontos são coincidentes, porque que continua, porque o software... é um erro do software? E... e foi um dos momentos em que eu falei: cara, parece que vai ser sempre interessante pelo menos me perguntar até que ponto o programa representa as coisas, como ele obtém, sabe? Então, uma das coisas que está... porque, já pensou se eu falasse pro rapaz: olha, você está estudando, sei lá, intersecção de curvas, e aí não tem ninguém pra te ajudar. Pô, aprendi, o GeoGebra faz intersecções, trabalha com os pontos e aí não confere. Aí ele entende mal, ô meu, dá o confere. Tipo assim, se o que ele fez aqui bater com o que tá aqui.

**P6:** É, é isso.

**William:** Agora se acontecer uma situação dessa ele vai falar: Ou eu não sei fazer ou o software...

**P6:** É, é ele compreender a limitação da representação das coisas né? Porque a

ideia é a ideia. Representar não é o computador na verdade, você vai ter outras dificuldades, mas você também no quadro você não consegue representar exatamente a ideia que você tá querendo passar.

**William:** Quantas crianças que você já viu que, que...(neste momento eu peguei uma folha de sulfite) olham pra isto e chamam...

**P6:** Ah sim, o negócio do plano...

**William:** Não, lembrei que falava, esse aqui é o retângulo?

**P6:** É!

**William:** Aí porque eu pego aqui (pego no centro da folha), ninguém, quando chega lá na frente eu falo: meu, quais pontos pertencem ao retângulo? Vão falar: tudo que tá aqui (aponto para toda a região da folha). Eu falo: hummmm, mas foi eu que criei a situação né?

**P6:** Uhummm

**William:** Porque eu peguei no retângulo.

**P6:** Uhummm

**William:** Eu tinha que ele... eu queria que ele entendesse só os pontos sobre os segmentos que formam os lados...

**P6:** A tá.

**William:** Ou seja, ele não é uma região. O polígono não é uma região.

**P6:** Ahamm.

**William:** Mas eu é que dei a representação que o levou a, que o levou a...falar não ué, você pegava na folha e falava que era um retângulo, pediu só pra eu ignorar o 3D né?

**P6:** É, via como região né?

**William:** Aí ele falou: mas... ah, então foi eu que fiz o negócio. Aí eu fui entendendo, ah então tem a ver com o discurso, com o instante. Diagrama de Vem pra conjuntos, quantas pessoas a gente não pergunta: onde é que tem mais números, nos naturais ou nos inteiros? Oh rapaz, mas quantas me disseram: os inteiros ué, se o natural tá contido como é que pode ser menor?

**P6:** É, é interessante...

**William:** É o que você falou: o que nós usamos pra representar, comunicar, tem limitação.

**P6:** É, é interessante sim, é como se você tá representando o domínio uma função na reta lá né? Aí bom, vamos ver aqui, por exemplo, até você fala: olha, você tem infinitos pontos aqui na reta, não tem jeito de analisar caso por caso porque eles são infinitos, mas vamos ver aqui, pega um negativo, um positivo, pegar o zero pra ver o comportamento de uma função tipo  $x$  ao quadrado né? Pega alguns pontos lá e tal, por exemplo, como é  $x$  ao quadrado, se eu pego um positivo, pego um negativo, sempre a imagem vai ser positiva porque tá sendo elevada ao quadrado, faço uns exemplos lá e tal. Depois que eu acabei essa explanação, eu falo: então tá, qual que é o domínio dessa função aqui? Na verdade eu estava trabalhando com função inversa, então eu crio o domínio restrito pra poder ela ser inversível, aquela coisa toda. Ah, é menos 2, menos 1, 0, 1 e 2. Quer dizer, como eu representei só esses pontos, ele fez exatamente isso daí, ele pegou só a representação. Eu não consegui passar pra ele a ideia que o domínio na verdade era qualquer ponto que estava naquele intervalo que eu escolhi né?

**William:** Dá para orna-lo?

**P6:** Exatamente... não, claro que não

**P6:** Né, mas eu peguei só alguns ali como exemplo né? E aqueles que eu representei...

**William:** Na verdade, a resposta dele prova que ele teve muito carinho pelo que eu falei né? Ele levou muito a sério.

**P6:** É, exatamente.

**William:** Eu tenho essa sensação.

**P6:** É, é interessante.

**William:** E o professor fala: não, o guri não presta atenção pro que eu falo, ele não... cara, eu falei pra ele... o seu exemplo é perfeito.

**P6:** Ahamm.

**William:** E ele repetiu o que eu falei, eu vou ficar feliz. Tenho que olhar é se, será que eu tenho que falar alguma coisa? Provocar né?

**P6:** Exatamente.

**William:** Você falou: não, eu vou fazer um gancho.

**P6:** É, eu vou, é o que, que era mesmo? Eu vou até anotar aqui. O que o negócio lá, eu não vou deixar isso acontecer assim, eu vou provocar, às vezes eu vou bolar

uma coisa pra provocar aquilo né? O que, que era mesmo?

**William:** Sobre?

**P6:** Quando eu falei essa questão do provocar você falou de um erro que deu com você, eu falei: bom, eu não vou nem esperar acontecer, eu vou provocar pra que isso aconteça, pra exatamente...

**William:** foi no episódio dois, você...

**P6:** Foi aqui né (aponta para o gráfico referente ao episódio dois)?

**William:** É! Você falou: uai, eu vou preparar, mas vou orna a-lo antes de depender do software.

**P6:** É!

**William:** Na verdade... se eu entendi direitinho...

**P6:** É, mas é isso mesmo...

## ANEXO G – Transcrição da entrevista com P7 – Realizada em 31/07/2015

**William:** Bom, professor, qual que é a sua posição... qual que é o seu posicionamento sobre a necessidade de se entender o processo para obtenção de um objeto do gráfico? Ou também de um resultado numérico ou resultado algébrico, com o GeoGebra?

**P7:** Eu acho que... bom, se eu estou falando de formação de professores. Eu penso que é uma possibilidade de o professor aprender de um uso específico, que é o uso dessas ferramentas né. Mas também penso que ele pode construir um tipo de conhecimento matemático ao realizar essas construções. É lógico que a construção no software não obedece a lógica da construção com... por exemplo com lápis, régua e borracha. Não obedece essa lógica. É uma outra lógica, mas a gente pode desenvolver construções que envolvem sofisticados conhecimentos matemáticos, de cálculo mesmo né. E se a ideia do cara é aprender matemática, eu penso que ele oferece suporte a isso. A executar aquela matemática do livro didático mesmo, seja da educação básica ou da educação superior, no caso de um curso de matemática. Então, eu acho que a construção dá a ele possibilidades de executar aquela matemática, mas se ele quiser extrapolar um pouco, dá a possibilidade de desenvolver um discurso que saia um pouco dessa caixinha. De falar de matemática, vamos falar de outro significado. Porque é o seguinte cara, no caderno um ponto não arrasta. Na matemática um ponto não arrasta. Na matemática um ponto faz o que? Eu não sei! Na matemática essa movimentação não existe. No discurso aqui no GeoGebra... eu arrasto cara. Lá na matemática, seria transladar por vetores, seria transladar no sentido positivo ou no sentido negativo do eixo. Essa é a linguagem da matemática! Aqui não, aqui é arrastar, então como essa linguagem aqui do software se aproxima muito da linguagem que a gente fala no cotidiano. Então eu consigo juntar essa linguagem do cotidiano com uma mais rigorosa se eu quiser. E se eu não quiser, eu posso ficar somente aqui ó (P7 aponta para o computador e refere-se ao GeoGebra)... na linguagem dele. Aqui é legítimo falar de arrastar ponto.

**William:** Preciso te convidar a dois episódios... produza duas funções pra gente aí. Uma talvez você já conheça... meu interesse é...

**P7:** Qual função?

**William:** e elevado a menos  $x$ , mais  $x$ . Agora a função identidade. No seu universo de matemática essas funções interceptam?

**P7:** Não...

**William:** Por quê?

**P7:** Deixa eu pensar cara. É, elas vão interceptar, porque se eu fizer uma interpretação aqui de limite, elas vão ter um conjunto de pontos que elas são iguais. Se eu tender as duas aqui ao infinito... esse primeiro termo da função  $f$  daqui vai tender a zero, certo? Quer dizer... em termos matemáticos elas não vão se interceptar. Até porque vai aparecer que... a reta identidade vai parecer... como chama uma reta quando...? Qual o nome dessa reta que a função tende a ela mas..?

**William:** Assíntota?

**P7:** Assíntota né? Me parece que o  $f$  de  $x$ ...  $g$  de  $x$  igual a  $x$  é uma assíntota de  $f$  de  $x$ . Uma assíntota oblíqua.

**William:** Bom, um caminho que matemáticos usam, é fazer a comparação das expressões analíticas. E se partir dessa suposição, é afirmar que existe um expoente... um  $x$  que consiga transformar a base  $e$ , em zero. Consegue me acompanhar nesse sentido também? Se a gente fizer  $e$  elevado a menos  $x$  mais  $x$  igual a  $x$ . É uma equação equivalente a essa. Isso fere a sua compreensão do que é matemática? Isso é possível?

**P7:** Não, isso não fere minha compreensão. Eu só acho que essa equação não vai ter solução sem utilizar limite.

**William:** É isso aí, gostei. Legal, por favor, né? Não estou afirmando e nem querendo te incomodar. O software tem como ajudar a gente a fazer essa pergunta?

**P7:** Bom, fazer a pergunta já ajudou certo? Já ajudou porque você falou, desenha aí, represente aí... e me responda tal coisa. A pergunta já está feita, a questão é: será que o software poderia nos ajudar a responder essa pergunta? Aí depende de que resposta você quer...

**William:** Quero saber se elas têm um ponto em comum, pelo menos um.

**P7:** Bastaria tentar, se ele tem um ponto em comum, fazer a intersecção dos dois objetos. (P7 usa a entrada de comandos e digita o comando "Intersecção[f, g]")... ele

diz que tem... (P7 fica um tempo em silêncio, como se estivesse pensativo).

**William:** Vamos voltar para o nosso panorama P7. É importante saber... não... qual o seu posicionamento sobre a necessidade de você ter que entender como que esses objetos foram obtidos. Agora por exemplo, este ponto foi obtido de alguma forma. Quando você escrever, ou eu escrever, ou qualquer outro usuário escrever. Ele sabe só porque usou? Ele sabe como esse ponto foi obtido? Se você, P7 tivesse que especular, você iria dizer alguma coisa?

**P7:** Você me deixou agora com três dias de estudo aí na cabeça né?

**William:** O prazer é meu. Se você quiser o material, tem um professor na RPM, eu conheço essa questão da Revista do Professor de Matemática. Em que ele chama a atenção, diz algo como: de que fazer matemática com a máquina não dá no mesmo que fazer abstratamente, não serve da mesma forma e não é bem por aí. Eu não podia falar isso antes, para que a nossa conversa não ficasse induzida. Eu ainda estou numa entrevista, mas assim, você tem um certo conhecimento dele né (aponto para o software)? Por hora você não consegue rapidamente especular e dizer o porquê que ele conseguiu encontrar o ponto?

**P7:** A minha especulação seria que esse cálculo é feito por meio de cálculo numérico. E aí ele chegou no primeiro caso que dá um interpolação numérica.

**William:** Legal. Afeta a credibilidade do software, pra mim, pra você?

**P7:** Então, eu fiquei até com vontade de te interromper na hora que você falava do professor aí. Que não dá pra checar a matemática que eu quero praticar no software de matemática.

**William:** Eu só estava repetindo...

**P7:** O que o cara falou... eu não sei quem é o cara, mas eu vou falar assim. Eu vou dizer duas coisas do porque eu discordo do cara. Porque aquela matemática formal que tem nos livros, ela não vai ser executada nem no software e nem em lugar nenhum. A não ser no estado formal, e é lógico, se eu admitir que as coisas se comportam daquele jeito. Cara, não tem erro naquilo. Aquilo é possível porque as coisas foram construídas e definidas daquele jeito. E elas são daquele jeito e acabou. Se nós passarmos a oferecer uma solução tal... eu vou ter que dar um jeito de montar uma outra equação.

**William:** Então você não admite o ponto A (interseção encontrada pelo GeoGebra



no contexto do episódio 1) como um erro?

**P7:** Não, não admito o ponto A como um erro. Porque se eu entender, se eu conseguir encontrar uma explicação de como o software encontrou esse ponto A... Mas aí eu falo: essa matemática aplicada aqui não vai ser a réplica daquela.

**William:** Posso te convidar a um outro exercício? Vamos colocar aqueles pontos parametrizados (falo da possibilidade de investigar a situação conforme um dos modos que indiquei na metodologia). Cria um seletor aí, para podermos estudar aquela vizinhança. Aí vamos pensar num ponto que tenha... que esteja em função desse “a” e daquela função, ou seja, a abscissa seja “a” e a ordenada seja f de “a” (P7 faz o que indiquei).

**William:** Uma das perguntas que eu faria é: ele está em qual curva agora?

**P7:** Então, ela pertence? Cadê o pertence? (P7 começa escrever a palavra pertence na entrada de comandos e o GeoGebra oferece o comando “Pertence[<objeto>, <região>]”) Ah será que a região pode ser a curva? Vamos ver se a relação pertence vai ajudar. Pertence a f porque ele foi construído para pertencer a f certo? Vamos ver se ele pertence a g. (P7 experimenta o comando “Pertence[B, g]” e aparece uma mensagem de erro no software, ver figura a seguir).

GeoGebra

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

Janela de Álgebra

- Função
  - $f(x) = e^{(-x)} + x$
  - $g(x) = x$
- Número
  - $a = 33.8$
- Ponto
  - A = Interseção[f, g, (35.079737286772364, 35.079737286772364)]
  - B = (a, f(a))

Janela de Visualização

Entrada: PertenceARegião[B, g]

GeoGebra - Erro

Entrada inválida

Sintaxe:  
PertenceARegião[ <Ponto>, <Região> ]

OK Exibir Ajuda Online

Não, não, então não.

**William:** Existe outro comando, que talvez sirva, comando relação objeto objeto.

**P7:** Então vamos ver relação objeto objeto. Então B, objeto g, porque a f, ele está lá. (P7 vê a mensagem do software dizendo que pertence, conforme mostramos como uma das possibilidades na metodologia) B pertence a g (P7 se mostra pensativo de novo)...

**William:** Eu gosto muito disso aqui (aponto para o comando “Relação[<objeto>, <objeto>]”, eles ampliaram um pouco o motorzinho.

**P7:** Eu nunca tinha usado essa ferramenta William. Quando eu modifico aqui ele vai continuar a executar?

**William:** Não, é preciso testar cada caso... A questão é: a principio não era pra acontecer né? Eu digo, com princípios matemáticos, tomando os cuidados da nossa entrevista aqui, é isso. Você concordaria?

**P7:** Se for pra obedecer o que diz a matemática escrita formal. Não era pra acontecer. Mas o método que o software faz os cálculos dele aqui vão falar assim, há proximidade suficiente pra falar que esse ponto pertence, porque deve ser um cálculo numérico.

**William:** Mas você não vê como falha, não vê como... como é que eu vou lhe dizer? Será que há a possibilidade da pessoa passar a achar que o software é infalível e que ele tinha que corresponder a fazer matemática de verdade? Senão ele não serve pra fazer matemática, é uma interpretação possível né? Depende do que você ouviu. Eu não vou repetir o que o professor falou.

**P7:** Então, o Gödel fala que ou um sistema é consistente ou um sistema é completo. Um sistema não pode ser duas coisas ao mesmo tempo. E quando a gente fala de sistema, inclusive na matemática, eu estou falando da incompletude, se um sistema for... nenhum sistema é as duas coisas simultaneamente. Inclusive vai ter coisas... afirmações matemáticas que não podem ser provadas dentro da matemática, certo? Tem enunciado que a gente não consegue provar a sua veracidade. Taí a conjectura de... e outras tantas em aberto. São enunciados feitos dentro da matemática que ainda não foi possível provar, ninguém conseguiu dizer que não é possível provar,

mas ninguém conseguiu provar também. Então pra mim, por conta disso... o sistema é incompleto, se ele fosse completo ele não conseguiria ser consistente. Ele poderia ter pelo menos uma afirmação que essa negação seria verdadeira nesse sistema. Porque Gödel provou que nenhum sistema é completo e consistente ao mesmo tempo. Cara, se a gente não consegue esse nível de coisa com a matemática. Por que a gente quer esse nível de coisa com um software que visa simular matemática?

**William:** Vou te convidar a um outro episódio, eu vou te pedir pra considerar um caso clássico das funções. Dá uma olhada no roteiro, o episódio dois. Você diz que já deu aula de cálculo... é um clássico não é? Já de antemão o que você acha que vai ser o gráfico?

**P7:** Com essa expressão vai ser uma reta!

**William:** Vamos ver o que o software nos mostra. Diferença de dois quadrados... A gente queria tanto que os meninos fizessem isso no automático às vezes, em cálculo. É um quociente de polinômios muito utilizado pra chamar atenção do principio de fatoração e que vai nos ajudar a trabalhar alguns exercícios de limite.

**P7:** Só que o software aí não vai exibir uma descontinuidade. Pois ele simplificou os polinômios.

**William:** Você espera uma reta? No ambiente matemático, na sua mente matemática. Esse gráfico é uma reta?

**P7:** No ambiente matemático ele é uma reta!

**William:** Pra mim, tinha que ser no mínimo algo que lembrasse duas semi retas opostas!

**P7:** Ah tá, por causa da descontinuidade ali.

**William:** Pra mim, não dá uma reta, no sentido estrito da matemática, naquele ponto em especial. Nesse caso, eu poderia dizer que são duas semi retas de mesma direção e sentidos opostos? Pensando nisso, o software falhou? (P7 pede para o GeoGebra calcular o valor da função para  $x$  igual a um e constata que o aplicativo apresenta que tal valor é indefinido; conforme já apontamos como uma possibilidade na metodologia)

**William:** Ah, legal. Você já arrumou do próprio software uma outra coisa para pensar. E aquela resposta ali te ajuda?

**P7:** Ajuda, ajuda a justificar que ele não falhou. Porque eu posso falar assim: existe

uma vizinhança tão próxima de um que tem imagem nesses pontos e não deu pra notar. Eu posso usar essa justificativa.

**William:** Então um jogo de linguagem já te faz continuar. Mas ainda assim, a sua posição é... esses exemplos são bons exemplos pra gente provocar e olhar? É importante saber como eles são gerados?

**P7:** Então, eu acho que são exemplos bons pra gente provar que o... provar, não é provar... pra gente discutir que há diferença entre a matemática que a gente pratica, essa formal. Que a gente adora que a gente gosta dela. Que obedece as regras dos livros. E essa que a gente pratica aqui. Existem diferenças sutis.

**William:** Mais uma vez, é uma falha do software esse gráfico?

**P7:** Pra mim não. Não é.

**William:** É um posicionamento né?

**P7:** É uma escolha cara, eu acho que você vai chegar uma hora na programação e vai falar assim: cara e aí? Nós vamos colocar um pontinho aqui ou nós vamos fazer o que? Ah cara deixa ela aparecer continuamente, aí quando o cara tentar calcular...

## APÊNDICES

### APÊNDICE A – Roteiro de entrevista

1. Quando e como você conheceu o GeoGebra?
2. O que o levou a querer usar o GeoGebra?
3. Considerando a sua história de formação acadêmica ou profissional, quais fatores foram significativos para aproximá-lo e desenvolver domínio do GeoGebra?
4. Você utiliza o GeoGebra como ferramenta de estudo e/ou trabalho? Com que frequência? De que formas? Quais os principais objetivos destes usos?
5. Você considera que os seus objetivos, ao adotar o GeoGebra, foram ou estão sendo atingidos ? Por quê?
6. O quê você percebe acerca da relação entre o processo e os resultados das suas produções junto ao GeoGebra?
7. Como você avalia a sua experiência como usuário do GeoGebra?
8. Como você explica o que é o GeoGebra para outras pessoas?
9. Como você aprende a usar o GeoGebra?
10. Como você avalia as funcionalidades do GeoGebra? Quais são as vantagens e desvantagens?
11. Quais as funcionalidades do GeoGebra que você mais utiliza? Por quê?
12. Quais as funcionalidades do GeoGebra que você utiliza pouco ou não utiliza? Por quê?
13. Há alguma mudança que você realiza ou tenha realizado na configuração original do GeoGebra? Por quê?
14. Na sua percepção, as ferramentas do GeoGebra são fáceis ou difíceis de serem adaptadas às suas necessidades e preferências de uso?
15. Como você avalia a evolução das versões e recursos do GeoGebra? Tal evolução afetou ou afeta a forma como você aprende a usar, usa e se interessa pelo GeoGebra?
16. Qual o seu posicionamento sobre a necessidade de se entender o processo para obtenção de um objeto gráfico, resultado numérico ou resultado algébrico com o GeoGebra? Mostrar episódio 1 ( $e^{-x} + x = x$ ) e o episódio 2

$$( f(x) = (x^2 - 1)/(x-1) )$$

17. Quais as suas concepções acerca da transição ou transposição entre as sintaxes da linguagem matemática comum em sala de aula e a linguagem matemática do GeoGebra?
18. Você utiliza algum processo padrão ou roteiro quando planeja e executa uma construção ou applet com o GeoGebra? Você poderia comentar sobre o seu processo criativo?
19. Quais critérios você usa ao avaliar uma construção ou applet feito com o GeoGebra? Por favor, escolha aleatoriamente uma construção ou applet e a avalie.
20. Você poderia nos apresentar algum exemplo de construção ou applet que recomendaria? Por quais razões você a recomendaria?
21. Você poderia nos apresentar algum exemplo de construção ou applet que não recomendaria? Por quais razões você não a recomendaria?
22. Na sua compreensão, os objetivos didáticos e de desenvolvimento de pensamento matemático, influenciam o design de suas construções ou applets e propostas de uso?
23. Por favor, escolha uma construção de sua autoria e comente sobre o design da construção e proposta de uso. Suas construções ou propostas de uso se modificam conforme você as experimenta ou avalia?
24. Por favor, escolha uma construção que não seja de sua autoria e comente se faria alguma adaptação ou modificação.
25. Você percebe alguma mudança na forma como você estuda e comunica assuntos sobre matemática devido ao GeoGebra? Poderia comentar?
26. Você já constituiu algum conceito matemático necessariamente com o GeoGebra? Poderia comentar?
27. Algum conceito matemático que você já considerava de seu domínio, foi influenciado ao explorá-lo com o GeoGebra? Poderia comentar?
28. Considerando a sua compreensão dos termos representar, traduzir, modelar, generalizar, sintetizar, formalizar e provar; dentro do contexto do que você depreende como pensamento matemático, quais possibilidades e limitações você atribui ao GeoGebra?

29. Quais as suas concepções acerca de demonstrações matemáticas com o GeoGebra? Mostrar episódio 3 (área do círculo), episódio 4 (prova sem palavras) e episódio 5 (pesquisar por demonstrações no GeoGebraTube)
30. O uso do GeoGebra seria um tema que você discute coletivamente? De que forma? Quais as suas impressões acerca destas discussões?
31. Como você avalia a comunidade que tem se formado a partir do GeoGebra?
32. Qual a sua opinião a respeito da literatura em português sobre o GeoGebra?
33. Como você armazena e divulga seus arquivos GeoGebra? Você usa as possibilidades online do GeoGebra? Poderia nos dar algum ou alguns exemplos? Quais vantagens e desvantagens você percebe?
34. Você percebe alguma mudança na forma como se pode ensinar e aprender matemática com a adoção do GeoGebra?
35. Você acredita ser possível levar estudantes a usar o GeoGebra para resolver exercícios comuns a sala de aula? O que seria necessário? Você recomendaria?
36. Como você avaliaria a aprendizagem de um estudante utilizando o GeoGebra?
37. O que você diria sobre o uso do GeoGebra na formação inicial e continuada de professores de matemática? O que seria preciso para torná-lo de uso comum na comunidade de docentes formadores de professores de matemática?
38. Na sua percepção, quais seriam as razões que levariam alguém a adotar o GeoGebra como ferramenta de trabalho ou estudo? Quais seriam as razões que facilitariam e dificultariam essa adoção?
39. Quais as suas concepções sobre a natureza do conhecimento ou conhecimentos que emergiram da sua experiência prática de uso do GeoGebra para os diferentes fins que você busca?
40. Por favor, descreva uma situação de uso do GeoGebra que tenha sido significativa para você. Por favor, comente o que tornou a situação significativa.
41. Por favor, você teria outros comentários a fazer a respeito do GeoGebra?

## APÊNDICE B – Carta de cessão gratuita de direitos de depoimento oral

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “Júlio de Mesquita Filho”  
FACULDADE DE CIÊNCIAS – BAURU  
CESSÃO GRATUITA DE DIREITOS DE DEPOIMENTO ORAL

Pelo presente documento, eu

Entrevistado(a): \_\_\_\_\_

CPF: \_\_\_\_\_, RG: \_\_\_\_\_ emitido pelo(a) \_\_\_\_\_,

domiciliado/residente em (Av./Rua/nº/complemento/Cidade/Estado/CEP):

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

declaro ceder ao (à) Pesquisador(a):

\_\_\_\_\_

CPF: \_\_\_\_\_, RG: \_\_\_\_\_ emitido pelo(a) \_\_\_\_\_,

domiciliado/residente em (Av./Rua/nº/complemento/Cidade/Estado/CEP):

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

sem quaisquer restrições quanto aos seus efeitos patrimoniais e financeiros, a plena propriedade e os direitos autorais do depoimento de caráter histórico e documental que prestei ao (à) pesquisador(a) / entrevistador(a) aqui referido(a), na cidade de \_\_\_\_\_, Estado de \_\_\_\_\_, em \_\_\_\_\_, como subsídio à construção de sua tese de doutorado junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência. O(a) pesquisador(a) acima citado(a), fica conseqüentemente autorizado(a) a utilizar, divulgar e publicar, para fins acadêmicos e culturais, o mencionado depoimento, no todo ou em parte, editado ou não, bem como, permitir a terceiros, o acesso ao mesmo para fins idênticos, com a única ressalva de garantia de integridade de seu conteúdo, identificando ou não a fonte e o autor.

Local e data: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

---

(assinatura do entrevistado(a)/depoente)