

ALEXANDRE PINHO DOS SANTOS SOUZA

Aplicações Cosmológicas do Campo  
Espinorial ELKO

Guaratinguetá

2016

ALEXANDRE PINHO DOS SANTOS SOUZA

## Aplicações Cosmológicas do Campo Espinorial ELKO

Versão original

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista para obtenção do título de Doutor em Ciências pelo Programa de Pós-graduação em Física.

Área de Concentração: Física: Cosmologia

Orientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira

Coorientador: Prof. Dr. Álvaro de Souza Dutra

Guaratinguetá

2016

<p>29a</p>	<p>S7 Souza, Alexandre Pinho dos Santos  Aplicações Cosmológicas do Campo Espinorial Elko / Alexandre Pinho dos Santos Souza – Guaratinguetá, 2016  182 f. : il.  Bibliografia: f. 145-149</p> <p>Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2016.  Orientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira  Coorientador: Prof. Dr. Álvaro de Souza Dutra</p> <p>1. Energia escura (Astronomia) 2. Cosmologia. Título</p> <p style="text-align: right;">CDU 524.82(043)</p>
------------	---

*ALEXANDRE PINHO DOS SANTOS SOUZA*

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“DOUTOR EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

  
Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto  
Coordenador

*BANCA EXAMINADORA:*

  
Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA  
Orientador / UNESP-FEG

  
Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA  
UNESP-FEG

  
Prof. Dr. DENIS DALMAZI  
UNESP-FEG

  
Prof. Dr. ROLDÃO DA ROCHA JÚNIOR  
Universidade Federal do ABC

  
Prof. Dr. JOSÉ ABDALLA HELAYËL-NETO  
CBPF/RJ

*Agosto de 2016*

## DADOS CURRICULARES

### ALEXANDRE PINHO DOS SANTOS SOUZA

**NASCIMENTO** 13.02.1988 - DESCALVADO/SP

**FILIAÇÃO** Diógenes de Souza  
Márcia Pinho dos Santos Souza

#### FORMAÇÃO

Graduação em Física (bacharelado)

**2006-2011** Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Campus de Guaratinguetá - Guaratinguetá - SP - Brasil

Mestrado em Física

**2011-2013** Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Campus de Guaratinguetá - Guaratinguetá - SP - Brasil

Doutorado em Física

**2013-2016** Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Campus de Guaratinguetá - Guaratinguetá - SP - Brasil

*Dedico esta tese aos meus pais, Diógenes e Márcia*

## Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por sempre estar ao meu lado.

Ao nosso senhor Jesus Cristo, cuja história serve como o maior exemplo de fé e caridade.

Aos meus pais, Diógenes e Márcia, por todo amor e apoio dado ao longo de toda minha vida.

Ao meu irmão Matheus, pela nossa amizade.

À minha namorada, e futura esposa, Nicole por todo amor e força nos momentos difíceis.

Ao meu amigo Prof. Cornetti pelas recentes conversas, conselhos dados e por ser um exemplo de dedicação aos nossos pais.

Ao meu Orientador Saulo Henrique Pereira, pelos conhecimentos, pela compreensão e paciência ao longo deste doutorado.

Aos Professores Elias e Denis e ao amigo Alessandro pelas discussões e pela ajuda no estudo sobre gravitação massiva.

Ao amigo Rodolfo pela ajuda no estudo sobre o ELKO.

Aos meus amigos de pós-graduação André, Nilton, Felipe, Thalita, Carlos e Sérgio.

Aos Professores Marcelo Hott, Julio e Olívia por terem feito parte de minha vida dentro da FEG.

Aos trabalhadores do Centro Espírita Fé, Amor e Caridade de Taubaté, por toda a força dada neste momento difícil vivido pela minha família.

Ao meu amigo Lamin, pelo apoio e pelas nossas conversas.

Aos amigos de minha família, Zeli, José Alex, Nê e Claudio por toda ajuda e dedicação dada.

A todos aqueles que rezaram pelo meu pai, por mim e pela minha família.

À CAPES pelo apoio financeiro dado durante o doutorado.

*“Je suis Diogène”*

*(Alexandre Pinho dos Santos Souza)*



## Resumo

SOUZA, Alexandre Pinho dos Santos. **Aplicações Cosmológicas do Campo Espinorial ELKO**: ELKO, Gravitação Massiva e Constante Cosmológica. 2016. 181 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade do Estado de São Paulo, Guaratinguetá, 2016.

Dentro da cosmologia, o modelo  $\Lambda$ CDM é considerado, pela comunidade científica, como aquele que melhor descreve o universo. Todavia, tal modelo sofre de alguns males que ainda precisam ser sanados. Entre eles se destacam o problema da constante cosmológica e o problema da coincidência cósmica. Atribui-se, neste modelo, a expansão acelerada do universo a um ente de origem desconhecida, chamado de energia escura. Parte da solução destes problemas está intimamente ligado em saber a natureza da energia escura. Por outro lado, devido a propriedades intrínsecas do espinor ELKO, faz-se possível atribuir ao mesmo o papel de energia escura. Deste modo, constrói-se aplicações cosmológicas do ELKO que possibilitem a resolução completa ou parcial dos problemas mencionados. Estas aplicações consistem basicamente na análise do sistemas de equações de Friedmann oriundas da anexação do Lagrangeano do ELKO na ação de Einstein-Hilbert. Dentro desse sistema se insere a mão o possível decaimento do ELKO em outros elementos que constituem o universo. Com este se alivia o problema da coincidência cósmica, enquanto que se confirma que o ELKO pode figurar como energia escura por meio dos resultados do sistema geral. Ao fim do trabalho se observa uma outra aplicação do ELKO, desta vez no cenário cosmológico de Einstein-Cartan. Neste se mostra que o modelo cosmológico que contém o ELKO como energia escura, e na presença de termo de torção, é análogo ao modelo cosmológico  $\Lambda(t)$ .

Palavras-chaves: ELKO. Energia Escura. Expansão Acelerada.

## Abstract

Souza, Alexandre Pinho dos Santos. **Cosmological Applications of ELKO Spinorial Field**: ELKO, Massive Gravity and Cosmological Constant. 2016. 181 p. Thesis (Doctor of Science) – Engineering College of Guaratinguetá, University of the State of São Paulo, Guaratingueta, 2016.

In cosmology the  $\Lambda$ CDM model is the most accepted way to describe the universe. However, this model suffers some problems that have to be solved. Namely there are two of them which are attached in this thesis. They are the cosmic coincidence and the cosmological constant problem. Due this model it is possible to relate the universe's accelerated expansion to dark energy. Part of solving these problems pass through knowing the origin of dark energy. It is known that the spinor ELKO has some fundamental properties that able scientists to connect them to dark universe elements, e.g. dark energy. So, some applications of ELKO in cosmology have been made in order to explore this possibility and to solve those fundamental problems. These application are based on analyzing ELKO in dynamical systems formed by Friedmann's equations, where these equations comes from putting ELKO's Lagranian in the Einstein-Hilbert action. In this system it is inserted a term of decaying. With such term it is possible to alleviate cosmic coincidence problem. On the other hand it is also possible to justify ELKO as dark energy as wished at the beginning. Last but not least, another application of ELKO in cosmology has been investigated. For such case is was shown that, with some considerations and approximations, ELKO in cosmology allied with Einstein-Cartan formalism can mimic  $\Lambda(t)$  cosmology results.

Keywords: ELKO. Dark Energy. Accelerated Expansion.

## Lista de figuras

Figura 1 – Gráfico de $H(z) \times z$ de (437) junto com os dados observacionais obtidos de (SHAROV; VORONTSOVA, 2014). . . . .	141
---	-----

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Condições de estabilidade referentes as equações (408) e (409), dependentes dos parâmetros de estado de DM e ELKO, e correspondentes à interação $Q_1 = \beta x^2$ . . . . .	129
Tabela 2 – Condições de estabilidade referentes as equações (413) e (414), dependentes dos parâmetros de estado de DM e ELKO, e correspondentes à interação $Q_1 = \beta v^2 x^2$ . . . . .	131
Tabela 3 – Condições de estabilidade referentes as equações (417) e (418), dependentes dos parâmetros de estado de DM e ELKO, e correspondentes à interação $Q_1 = \beta(x^2 + y^2)x^2$ . . . . .	133
Tabela 4 – Condições de estabilidade referentes as equações (421) e (422), dependentes dos parâmetros de estado de DM e ELKO, e correspondentes à interação $Q_1 = \beta(v^2 - y^2)$ . Define-se os seguintes parâmetros: $\delta_1 = \frac{3}{4} - \beta - \frac{1}{4}\sqrt{9 + 16\beta^2}$ ; $\delta_2 = 1 - \beta - \sqrt{1 + \beta^2}$ ; $\delta_3 = \frac{3}{2} - \beta - \frac{1}{2}\sqrt{9 + 4\beta^2}$ ; $\delta_4 = \frac{7}{4} - \beta - \frac{1}{4}\sqrt{1 + 16\beta^2}$ ; $\delta_5 = \frac{9}{4} - \beta - \frac{1}{4}\sqrt{9 + 16\beta^2}$ ; $\delta_6 = \frac{5}{2} - \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\beta^2}$ ; 135	135

## Lista de abreviaturas e siglas

ELKO	Autoespinores do operador conjugação de carga
RG	Relatividade Geral
MP	Modelo Padrão
FLRW	Friedmann-Robertson-Walker-Lêmaître
DM	“Dark Matter” ou Matéria Escura
DE	“Dark Energy” ou Energia Escura
CDM	“Cold Dark Matter” ou Matéria Escura Fria (não-Relativística)
I-vdW	Infeld - van der Waerden
FPK	Fierz-Pauli-Konfink

## Sumário

1	Introdução . . . . .	17
I	<b>Fundamentos da Pesquisa: Relatividade Geral, Cosmologia e ELKO</b>	<b>21</b>
2	Relatividade Geral . . . . .	24
2.1	Introdução à Relatividade Geral . . . . .	24
2.2	Métricas . . . . .	27
2.3	Transporte Paralelo . . . . .	28
2.4	Derivada Covariante . . . . .	29
2.5	Conexão Afim . . . . .	30
2.6	Torção . . . . .	31
2.7	Tensor de Riemann . . . . .	32
2.8	Tensor de Ricci e o Escalar de Curvatura . . . . .	34
2.9	Equação de Einstein . . . . .	35
3	Cosmologia Básica . . . . .	38
3.1	Introdução à Cosmologia . . . . .	38
3.1.1	Radiação . . . . .	48
3.1.2	Poeira . . . . .	49
3.1.3	Vácuo . . . . .	49
3.1.4	Desvio para o Vermelho . . . . .	49
3.1.5	Horizonte de Eventos . . . . .	51
3.2	Modelos Cosmológicos . . . . .	52
3.2.0.1	Poeira . . . . .	54
3.2.0.2	Radiação . . . . .	54
3.2.0.3	Vácuo . . . . .	55
3.2.1	Modelo de Einstein . . . . .	55
3.2.2	Modelo de Lemâitre . . . . .	57
3.2.3	Modelo de Friedmann . . . . .	58
3.2.4	Modelo de Kasner . . . . .	60

3.2.5	Modelo de Gödel . . . . .	62
3.3	Dinâmica de Expansão . . . . .	63
3.4	Observações . . . . .	65
4	<b><u>Eigenspinoren des Ladungskonjugationsoperator:</u></b> <b>ELKO</b> . . . . .	69
4.1	<b>ELKO: Origem e Características</b> . . . . .	69
4.1.1	<b>Construção de Espinor de Dirac</b> . . . . .	70
4.1.2	<b>ELKO</b> . . . . .	73
4.1.2.1	Estrutura Formal do ELKO . . . . .	73
4.1.2.2	Operador Conjugação de Carga . . . . .	75
4.1.2.3	Helicidade do ELKO . . . . .	76
4.1.2.4	Forma Geral do ELKO . . . . .	77
4.1.2.5	Dual do ELKO . . . . .	79
4.1.2.6	Ortonormalidade e Relação de Completeza . . . . .	82
4.1.2.7	Somas de Spin do ELKO . . . . .	84
4.1.3	<b>ELKO como Elemento “Escuro”</b> . . . . .	85
4.1.3.1	Equação de Dirac e de Klein-Gordon . . . . .	86
4.1.3.2	Partículas que o ELKO Representa . . . . .	88
4.1.3.3	Propagador do ELKO . . . . .	92
4.1.3.4	Dimensão de Massa: ELKO . . . . .	96
4.1.3.5	Interações do ELKO . . . . .	98
II	<b>Estrutura do ELKO na Cosmologia</b>	<b>100</b>
5	<b>ELKO: Aplicações na Cosmologia</b> . . . . .	102
5.1	<b>Dinâmicas do ELKO na Cosmologia</b> . . . . .	105
5.2	<b>Equações Dinâmicas Livres de Torção</b> . . . . .	109
5.2.1	<b>Sistema Dinâmico do ELKO: 1º Caso</b> . . . . .	111
5.2.1.1	Análise de Estabilidade: $\frac{\Lambda}{2H} = -\epsilon$ . . . . .	114
5.2.1.1.1	$Q_1 = 0$ . . . . .	115
5.2.1.1.2	$Q_1 = \beta$ . . . . .	116
5.2.1.1.3	$Q_1 = \beta v^2$ . . . . .	116

5.2.1.1.4	$Q_1 = \beta x^2$	116
5.2.1.1.5	$Q_1 = \beta vx^2$	116
5.2.1.1.6	$Q_1 = \beta xv^2$	116
5.2.1.1.7	$Q_1 = \beta x^2 v^2$	117
5.2.1.2	Análise de Estabilidade: $\frac{\Lambda}{2H} = -\delta$	117
5.2.1.2.1	$Q_1 = 0$	118
5.2.1.2.2	$Q_1 = \beta$	118
5.2.1.2.3	$Q_1 = \beta x^2$	119
5.2.1.2.4	$Q_1 = \beta v^2$	119
5.2.1.2.5	$Q_1 = \beta x^2 v^2$	120
5.2.1.3	Conclusão Prévia: 1º Caso	121
<b>5.2.2</b>	<b>Sistema Dinâmico do ELKO: 2º Caso</b>	121
5.2.2.1	$Q_1 = 0$	127
5.2.2.2	$Q_1 = \beta$	127
5.2.2.3	$Q_1 = \beta x^2$	128
5.2.2.4	$Q_1 = \beta x^2 v^2$	130
5.2.2.5	$Q_1 = \beta (x^2 + y^2) x^2$	132
5.2.2.6	$Q_1 = \beta (v^2 - y^2)$	134
5.2.2.7	Conclusão Prévia: 2º Caso	137
<b>5.3</b>	<b>Einstein-Cartan e ELKO na Cosmologia Vs. Cosmologia <math>\Lambda(t)</math></b>	138
<b>5.3.1</b>	<b>Conclusão Prévia: ELKO Vs. <math>\Lambda(t)</math></b>	142
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	143
	<b>Referências<sup>1</sup></b>	147
	<b>Apêndice A – Derivada Covariante do ELKO e a Conexão de Spin</b>	152
<b>A.1</b>	<b>Derivada Covariante de um Espinor</b>	152
<b>A.1.1</b>	<b><math>\Gamma_\mu</math> via Derivada Covariante Geral</b>	154
<b>A.1.2</b>	<b><math>\Gamma_\mu</math> via Símbolos de Infeld - van der Waerden</b>	156

<sup>1</sup> De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.



	Apêndice B—Classificação de Lounesto . . . . .	161
B.1	Classificação Convencional . . . . .	161
B.2	Classificação do ELKO: Deformação da Álgebra de Clifford . . . . .	163
	Apêndice C—Sistemas Dinâmicos . . . . .	166
C.1	Sistemas Lineares . . . . .	166
C.2	Sistemas Linearizados . . . . .	169
	Apêndice D—Variação do termo $\sqrt{-g}$ . . . . .	172
D.1	Fórmula de Jacobi . . . . .	172
D.2	“Atalho” para determinar $\delta\sqrt{-g}$ . . . . .	174
	Apêndice E—Variação do termo $R_{\mu\nu}$ . . . . .	175
	Apêndice F—Derivadas Covariantes como Termos de Superfície na Ação de Einstein-Hilbert . . . . .	176
	Apêndice G—Equações de Friedmann via Equações de Euler-Lagrange . . . . .	177
G.1	Equações de Einstein com Torção . . . . .	178
G.2	Equações de Euler-Lagrange: $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta N(t)}$ , $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta a(t)}$ , $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi(t)}$ , $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta h(t)}$ e $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta f(t)}$ . . . . .	179

# 1 Introdução

Dentre as diversas áreas da Física, pode-se considerar a cosmologia como uma das mais intrigantes e interessantes. De certa maneira a cosmologia possui a audaciosa tarefa de contar a história do nosso universo. O significado desta ampla questão consegue captar a imaginação e até mesmo devotar fé de parte da comunidade científica. A complexidade de saber de onde viemos e para onde vamos está imersa neste infinito que é o Universo. Sendo assim, conhecer a origem do Universo de certa maneira também é conhecer a nossa. A riqueza por detrás desta pergunta move linhas religiosas, filosóficas e científicas que estão presentes em nossa sociedade por mais de dois mil anos.

Resumidamente a cosmologia procura responder qual a origem do Universo e como ele evoluiu até se tornar o que é nos dias de hoje. Os cosmólogos possuem um fado extremamente pesado que se remete ao motivo puro e verdadeiro pelo qual os físicos são físicos. O amor pela ciência e pela natureza. Tal peso se demonstra evidente quando se verifica que aquilo que a cosmologia procura responder nunca de fato será respondido. O que realmente ocorre é que cada cosmólogo procura a resposta mais provável e mais aceitável do ponto de vista científico.

Dentro deste cenário abstrato se encontram questões como o problema da coincidência cósmica, da constante cosmológica, da aceleração do Universo entre muitas outras. Neste trabalho procuramos encontrar e estudar possíveis teorias para estabelecer a aceleração do universo de acordo com os resultados observacionais.

Quando se analisa a presença da constante cosmológica dentro das equações de movimento, considerando a métrica FRW, observa-se que a mesma pode fazer o papel de acelerar o Universo. Tecnicamente a constante cosmológica foi criada por Einstein como forma de manter o Universo estático, como ele acreditava. Do ponto de vista da física a constante cosmológica consiste na energia do vácuo. Entretanto no cálculo deste valor existe uma divergência absurda na previsão observacional e aquela fornecida pela teoria de campos. Este problema é amplamente discutido em ([WEINBERG, 1989](#); [PAVON, 1991](#); [CARVALHO; LIMA; WAGA, 1992](#); [LIMA; TRODDEN, 1996](#); [CARNEIRO; LIMA, 2005](#); [SHAPIRO; SOLA; STEFANCIC, 2005](#); [ELIZALDE et al., 2005](#); [ALCANIZ; LIMA, 2005](#); [CUNHA; ALCANIZ; LIMA, 2004](#); [CARVALHO et al., 2006](#); [ABRAMO; PINTO-NETO, 2006](#)).

Por outro lado existem trabalhos que discutem outras abordagens que reinterpretam este problema não mais levando em conta o ponto de vista da teoria de campos. Numa

destas vertentes se baseia na invalidação da física por detrás da constante cosmológica, que é sumariamente vista como um multiplicador de Lagrange na teoria unimodular (ALVAREZ, 2005; NG; DAM, 1991; CRISTÓBAL, 2014).

Na literatura é possível encontrar diversos outros elementos que também podem expandir o universo aceleradamente. Pode-se creditar a aceleração a uma característica repulsiva da energia escura (abrevia-se como DE, que vem do inglês “Dark Energy”), que segundo o modelo  $\Lambda$ CDM compõe cerca de 75% do nosso universo. Na teoria massiva da gravitação também se verifica que a massa do gráviton pode assumir um termo de expansão do universo de forma acelerada. Ainda dentro desta proposta, um tanto obscura, da origem da DE, modelam-se campos que podem assumir o papel desta energia. Nesta vertente são utilizados campos escalares, vetoriais ou senão espinoriais.

Em (CARVALHO et al., 2006; ABRAMO; PINTO-NETO, 2006; CHO; KEUM, 1998; MATOS; GUZMAN; URENA-LOPEZ, 2000; MATOS; VAZQUEZ-GONZALEZ; MAGANA, 2009; URENA-LOPEZ; REYES-IBARRA, 2009; MAGANA et al., 2012; ROBLES; MATOS, 2012; MATOS; GUZMAN, 2000; SUÁREZ; ROBLES; MATOS, 2014; URENA-LOPEZ, 2009; MAGANA; MATOS, 2012) se pode ver trabalhos onde campos escalares são colocados como possíveis aceleradores na expansão do universo. Por outro lado, verifica-se em (JENTSCHURA; WUNDT, 2013; BABOUROVA; FROLOV; KOSTKIN, 2011; SUN; SHEN, 2006) vertentes que atribuem aos espinores o papel de DE. Parte de nossa pesquisa consistiu em investigar se o espinor ELKO pode ser de fato posto como um campo viável para ser denominado como DE.

Para estudar o comportamento do campo ELKO no papel de DE foi necessário incluí-lo na dinâmica de evolução do universo que é analisada por meio das equações de Friedmann. Além destas equações ainda são consideradas as equações de conservação correspondentes. Todavia este conjunto de equações não se demonstram solúveis analiticamente. Por este motivo, a viabilidade de se possuir o ELKO como possível fonte de aceleração do Universo foi testada por meio do formalismo de sistemas dinâmicos.

Por outro lado, ainda existem questionamentos com relação ao restante do universo. Se segundo o modelo  $\Lambda$ CDM o universo é composto de cerca de 75% de constante cosmológica (ou DE), existem outros 20% que correspondem a chamada matéria escura, enquanto que somente 5% do universo é conhecido de acordo com a ciência. Existem evidências observacionais que fazem os cientistas acreditarem que exista essa matéria “invisível” presente na dinâmica do universo. De acordo com a curva de rotação das galáxias se verifica de maneira clássica que falta matéria no centro de determinadas galáxias para

explicar as velocidades de estrelas que orbitam em suas extremidades. Como a massa da galáxia é estimada pela luminosidade, crê-se que falta matéria que não pode ser observada nesses núcleos galácticos.

De acordo com a detecção de raios X, originadas pelo efeito Bremsstrahlung, onde elétrons de gás ionizados emitem quando são freados, verifica-se que a massa das galáxias que produzem esse efeito também são maiores do que as matéria luminosa. Existem também os efeitos de lentes gravitacionais que podem ser utilizados para comprovar a existência deste material escuro, que faz parte do modelo  $\Lambda$ CDM.

Assim como no caso da energia escura, a matéria escura também vem sendo modelada por meio de diferentes campos dentro da literatura. Não obstante, neste trabalho a mesma é colocada em pé de igualdade com a matéria bariônica devido as suas propriedades gravitacionais atrativas. Mesmo assim suas propriedades estão longe ainda de serem descobertas.

Este trabalho se divide em dois blocos fundamentais. No primeiro deles são descritos os fundamentos de três teorias utilizadas como base do presente trabalho. Estas teorias são dadas pela Relatividade Geral (RG), cosmologia e a teoria espinorial do ELKO. Logo, estrutura-se nesta parte a base de toda a pesquisa realizada até então. Descreve-se, portanto, os problemas correntes na cosmologia, além de técnicas de observação e a teoria que possibilita a descrição do universo como sendo homogêneo e isotrópico.

Nos fundamentos da RG segue descrito toda a base desde a métrica até a obtenção das equações de Einstein, passando pelo escalar de curvatura e a introdução da torção. Na base sobre o ELKO se apresentam informações imprescindíveis que o justificam como candidato a elemento “escuro”, além de suas características espinoriais, como helicidade, ortonormalidade, somas de spin e propagador, por exemplo.

No segundo bloco segue descrito o estudo realizado sobre o espinor ELKO no papel de energia ou matéria escura. Inicia-se este segundo bloco com a introdução das equações de Friedmann e equações de continuidade do ELKO aplicado na cosmologia nos moldes de Einstein-Cartan. Decorrente desta teoria se dividem três trabalhos distintos. Em dois deles, verifica-se a possibilidade do ELKO representar um elemento “escuro” para o caso livre de torção. Ambos os trabalhos lançam mão de sistemas dinâmicos na construção de seus resultados. Enquanto que no primeiro trabalho o ELKO é testado como DE, no posterior o mesmo é generalizada de forma a poder agir como matéria escura também. Procura-se, em ambos os casos, aliviar o problema da coincidência cósmica por meio de diferentes tipos

de conversão de matéria em energia escura (ou vice versa). Na outra aplicação, utiliza-se as equações do modelo cosmológico com torção para mostrar que este pode imitar os resultados provenientes de uma teoria cosmológica  $\Lambda$  variável.

No final deste bloco se apresentam as conclusões e discussões finais dos resultados obtidos neste trabalho, além dos apêndices necessários para compreender certas passagens e ferramentas ao longo da tese.

# Parte I

## Fundamentos da Pesquisa: Relatividade Geral, Cosmologia e ELKO

Neste capítulo são caracterizadas as bases correspondentes da RG e da Cosmologia, preponderantes para a descrição de qualquer modelo de Universo em regime de expansão acelerada. Apresenta-se também a teoria completa para a descrição do espinor ELKO, desde sua construção até a obtenção do propagador e sua densidade Lagrangeana. Primeiramente é apresentado a base da RG, que descreve a dinâmica dos objetos massivos do Universo. Logo, nesta parte, lança-se mão da teoria de gravitação de Einstein, onde o principal foco é a sua estruturação a fim de obter as equações de Einstein. Tais equações se demonstram imprescindíveis para obter a base teórica que é utilizada para interpretar as observações cosmológicas e, portanto, impor-se vínculos e restrições aos modelos estudados. Para isso, descreve-se um roteiro básico dado pela seguinte lista:

- Métricas.
- Transporte Paralelo e Derivadas Covariantes.
- Conexões e Torção.
- Curvatura.
- Tensor de Ricci.
- Parte de Matéria e o Tensor Energia-Momento.
- Equação de Einstein.

A partir da base de RG, monta-se a estrutura teórica da cosmologia. Nela, o ponto de partida reside na descrição de uma métrica que é condizente com o princípio cosmológico, que dita, em resumo, que o Universo é homogêneo e isotrópico. Logo, uma métrica homogênea e isotrópica é criada. Por meio desta simples base, toda a estrutura de observações é verificada com, por exemplo, o desvio do espectro de radiação para o vermelho entre outras verificações. A estrutura teórica do Universo é proposta por meio de um modelo cosmológico, que na sua quase totalidade é verificado por meio das equações de Friedmann. Estas equações são fruto da métrica proposta inserida nas equações de Einstein. Categoricamente, as equações de Friedmann são originárias da inserção da métrica de Friedmann (métrica Friedmann-Robertson-Walker-Lemâitre, ou métrica FLRW, por simplicidade) nas equações de Einstein. Todavia qualquer métrica pode ser inserida nas equações da RG. Nestes casos, a escolha da métrica é um indicativo do modelo que se deseja estudar, como se pode ver nos modelos apresentados ainda nesta parte. Os modelos cosmológicos presentes podem ter sido apenas uma tentativa de descrição do Universo

atual, como no caso de Einstein ou senão uma simples aplicação matemática que pode, por ventura, caracterizar o Universo numa outra fase de evolução que não a atual.

Na descrição final desta parte, estuda-se o espinor ELKO. Nesta, procura-se de forma didática apresentar sua construção com as principais diferenças para os espinores de Dirac. Fazem parte deste “tour” pelo ELKO três seções distintas. Na primeira se exemplifica a construção do espinor de Dirac, a título de comparação. Na segunda seção é apresentada a estrutura matemática completa do ELKO a partir de sua criação, além da “confeção” do seu dual. Relações de ortonormalidade e completeza também são analisadas. Por fim, na última seção, verificam-se aquelas características que corroboram para que o ELKO seja um bom candidato a elemento “escuro”. Entre elas o fato do ELKO respeitar somente a equação de Klein-Gordon, além do formato de seu propagador e as possíveis interações com partículas do Modelo Padrão (MP).



## 2 Relatividade Geral

Neste capítulo seguem descritos os conceitos básicos da Relatividade Geral (RG) que são necessários para compreender o estudo realizado. Como o foco principal deste trabalho é a inserção do ELKO nas equações de Friedmann, procura-se dar prioridade em descrever um caminho simples até a determinação das equações de Einstein. Isto porque um dos caminhos de se obter as equações de Friedmann é via equações de Einstein. Mesmo sendo a RG um assunto riquíssimo, prefere-se seguir a estrutura básica de dedução. Maiores informações são encontradas na literatura básica de RG ([WEINBERG, 1972](#); [WALD, 1984](#); [CARROLL, 2004](#)).

O presente capítulo se divide conforme a estrutura em seguida. Inicia-se o capítulo com a seção (2.1), que é referente à introdução da RG, onde se procura elencar suas motivações históricas e suas bases, com foco principal no princípio de equivalência. Baseado neste princípio, justifica-se a introdução de métricas para descrever o problema de acordo com os postulados de metricidade. Deste modo a seção (2.2) descreve os aspectos referentes as métricas.

Dado que cada métrica indica um referencial, tem-se a definição de transporte paralelo, que possibilita a definição de derivadas e da álgebra envolvida em questão. Deste modo seguem as seções sobre transporte paralelo e derivada covariante, dadas por (2.3) e (2.4), respectivamente.

Elemento preponderante na definição da derivada covariante, apresenta-se na seção seguinte, (2.5), uma breve explanação sobre a conexão afim. Esta, por sua vez, está correlacionada com um elemento geométrico fundamental nesta pesquisa, a torção, que é abordada logo em sequência, na seção (2.6).

Após a seção sobre torção seguem as seções com as informações básicas sobre o tensor de Ricci, (2.7), e o escalar de curvatura, (2.8). Por fim, por meio de todo o “background” estudado até então, escreve-se, na seção final, a equação de Einstein por meio da extremização da ação de Einstein-Hilbert.

### 2.1 Introdução à Relatividade Geral

A Relatividade Geral (RG) é a teoria do espaço-tempo, e gravitação formulada por Einstein em 1915. Devido ao seu arcabouço tensorial essa teoria demorou um tempo

para ser abordada pelo restante da comunidade científica. Além disso, por a gravidade ser uma força fraca, não havia experimentos laboratoriais que confirmassem a validade da RG. Deste modo a gravitação é demasiado fraca para desempenhar um papel importante no laboratório. Sendo assim um forte interesse na RG começou a ser reavivado a partir do final dos anos 1950, por conta de suas aplicações astronômicas.

Talvez o maior obstáculo para a compreensão das teorias da relatividade especial e geral seja a dificuldade em perceber que uma série de suposições básicas sobre a natureza do espaço e do tempo estão simplesmente erradas. Quando se fala em gravitação clássica instantaneamente se pensa na lei de gravitação universal de Newton. Até o advento da RG, aparentemente não havia nenhuma lacuna não preenchida sobre a gravitação.

O problema que surgiu era baseado na relação entre a, recém descoberta, Relatividade Especial (RE) e a gravitação de Newton. A princípio a gravitação clássica não dava conta de descrever o tempo de interação entre corpos massivos, cujas massas variam com o tempo. Representa-se este problema por meio da equação da força gravitacional entre dois corpos, dada por

$$\vec{F} = -\frac{MmG}{r^3}\vec{r}, \quad (1)$$

onde  $M$  e  $m$  são as massas dos corpos mencionados e  $r$  é a distância entre eles.  $G$ , naturalmente, representa a constante gravitacional universal. Supõe-se agora que a massa  $M$  varia ao longo do tempo, logo  $M \rightarrow M(t)$ . Deste modo se reescreve (1) como

$$\vec{F}(t) = -\frac{M(t)mG}{r^3}\vec{r}. \quad (2)$$

Nota-se que a variação de  $M(t)$  parece não ser comportada pela teoria da RE, i.e. a equação parece evocar uma influência instantânea no outro corpo, violando assim a RE. Por outro lado as equações de Maxwell já vem consistentes com RE. A correção que deveria ocorrer em  $M(t)$  deveria ser algo análogo ao eletromagnetismo, como os potenciais retardados, por exemplo. Logo em (2) deveria haver um termo do tipo  $M(t - r/c)$  ao invés de  $M(t)$ .

Uma outra questão paralela, inerente aos princípios da RG, refere-se à massa de inércia e massa gravitacional. Por definição a massa de inércia se faz presente numa expressão como:

$$\vec{F} = m_i\vec{a}, \quad (3)$$

enquanto que a massa gravitacional é descrita via

$$\vec{F} = m_g\vec{g}. \quad (4)$$

Anteriormente, acreditava-se que essas se comportavam de maneiras distintas, de forma a possuírem valores diferentes. Deste modo, ao se considerar a força exercida sob um corpo se notava que

$$\vec{a} = \frac{m_g}{m_i} \vec{g}, \quad (5)$$

de modo que a aceleração de um determinado corpo dependesse do seu material, por exemplo. Todavia, conforme constatado por Galileo, os corpos massivos caem de maneira equivalente na presença de um campo gravitacional, quando não influenciado por outras forças (atrito, empuxo, etc.). Ademais, experimentos como o de Eötvös (ou balança de torção), mostram que a diferença entre  $m_g$  e  $m_i$  chega a uma parte em  $10^{11}$ .

Deste modo, é por meio de  $m_g = m_i$  que Einstein inicia a construção da RG. O seu ponto de partida, e a base da RG, é o Princípio de Equivalência. Este diz que nenhuma experiência em mecânica pode distinguir entre um campo gravitacional e um referencial não-inercial. Imagina-se, por exemplo, um foguete que não possui janelas ou maneira de saber se ele está em movimento ou não. Um astronauta em seu interior experimenta a mesma sensação de estar parado na base de lançamento ou estar no meio do espaço (sem interações gravitacionais) com uma aceleração  $\vec{a} = \vec{g}$ . Ou seja, ele não é capaz de dizer se está em um campo gravitacional ou sendo acelerado através do espaço vazio. Este mesmo princípio causa o efeito de que os objetos flutuam quando um elevador está em queda livre, por exemplo.

Percebe-se que os referenciais, assim como na RE, são preponderantes para determinar a ação da influência de corpos massivos sobre um corpo massivo específico. De maneira simples se pode representar cada referencial por uma métrica. De forma mais rigorosa esta formulação indica que a RG deve ser uma teoria métrica, que conseqüentemente deve respeitar os três postulados de metricidade:

1. O espaço tempo é deformado pela presença de um dado campo gravitacional, podendo assim ser representado por uma estrutura métrica efetiva, distinta da Minkowskiana.
2. As partículas-teste tem seus movimentos determinados pelas geodésicas desta geometria.
3. Ao se escolher um referencial local de Lorentz, quaisquer leis naturais, de origem não gravitacional, devem ser aquelas que satisfazem aos princípios da RE.

A partir deste ponto segue uma sequência de seções simplificadas que formam um caminho até a equação de Einstein, que é o ponto de partida para a criação dos modelos cosmológicos aqui estudados.

## 2.2 Métricas

As métricas em si já representam um papel importante na RE, mais especificamente a métrica de Minkowski. A mesma é utilizada para representar o espaço tempo, uma vez que na RE o tempo ganha “status” de dimensão espacial, ficando em pé de igualdade com o espaço. Define-se o diferencial de distância ao quadrado como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (6)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski, que quando se simplifica  $c = 1$ , é dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Conforme descrito na seção anterior, (2.1), a métrica que descreve um espaço pode ser deformada quando está sob ação de um campo gravitacional. Da mesma forma, o espaço de Minkowski pode possuir outra métrica, que não (7), quando se adota outra geometria, por exemplo. Para a geometria esférica se tem que a métrica de Minkowski é dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r \sin \theta)^2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Por conta deste novo ponto de vista, entende-se um espaço plano modificado, por uma fonte massiva, como espaço curvo. Geralmente, dentro da literatura, representa-se uma métrica de um espaço curvo qualquer como sendo  $g_{\mu\nu}$ . Como se pode ver na seção seguinte, (2.3), faz-se necessário um formalismo especial para se estudar elementos básicos da geometria plana no espaço curvo.

## 2.3 Transporte Paralelo

Como se pode supor, existem problemas quando se tenta reproduzir certos resultados obtidos no espaço plano em espaço curvo. Procura-se nesta seção justificar que uma derivada, como se conhece, não mais possui a sua validade quando em espaço curvo, i.e. quando na presença de um campo gravitacional.

Por meio da definição de derivada usual em espaço plano fica claro que existe uma certa equivalência de todos os pontos do espaço e a definição vetorial. Isso é, não existe nenhum ponto privilegiado em que, por exemplo, uma soma vetorial, seja diferente dos demais. Por outro lado, quando se considera que o espaço estudado é curvo existe uma dificuldade inerente em se saber se todos os pontos do mesmo possuem as mesmas propriedades e se as operações geométricas usuais continuam válidas em tal cenário. Sendo assim um vetor normal a superfície de uma dada região, como uma casca esférica na geometria (2), a princípio não é paralelo a um outro vetor também normal a uma outra região da mesma superfície. Portanto se faz necessária a construção de um novo ferramental que possa permitir a definição de elementos importantes para a física quando o espaço não for plano. Devido a definição de derivada em espaço plano, considera-se este um local onde se faz necessário aplicar tal ferramental.

A estratégia para definir uma derivada em espaço curvo é de certa forma “fabricar” um local onde se saiba trabalhar. Em outras palavras, faz-se necessário obter um elemento que traga esses vetores em espaço curvo para a geometria usual euclidiana, onde as operações são conhecidas. O encarregado de fazer esse serviço é a conexão afim, que é responsável por executar o transporte paralelo.

De maneira simples e direta, o transporte paralelo é a ação de trazer um vetor de um ponto do espaço para outro, de forma a manter o mesmo apontando para a mesma direção. Todavia no espaço curvo existe uma falha em transportar um vetor paralelamente por uma curva fechada infinitesimal. O vetor inicial e final não são necessariamente paralelos após o transporte e isso é fruto de uma não comutatividade das derivadas.

Segue na próxima seção a estrutura que a derivada covariante deve obedecer, assim como os indícios da forma que a conexão deve possuir

## 2.4 Derivada Covariante

Nesta seção, baseada em (WALD, 1984), adota-se um ponto de vista mais formal. Entretanto, pode-se entender tanto a derivada covariante, quanto o transporte paralelo do ponto de vista geométrico. Nesta abordagem, não adotada aqui, entende-se a necessidade da existência da conexão, já que não se pode comparar um vetor inicial com sua versão deslocada em um espaço curvo.

Para encontrar a conexão e forma da derivada covariante, define-se a derivada como sendo dada por  $\nabla$ . Além disso também se define as propriedades dessa derivada frente a sua aplicação em elementos de campos tensoriais (definidos por  $\mathfrak{S}(k, l)$ , onde  $k$  e  $l$  são os “ranks” tensoriais contravariante e covariante, respectivamente) e em campos escalares (definidos por  $\mathfrak{S}$ )

**Linearidade :**

Tem-se para todos  $A, B \in \mathfrak{S}(k, l)$  e  $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$

$$\nabla_c (\alpha A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) = \alpha \nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta \nabla_c B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \quad (9)$$

**Regra de Leibnitz :**

Para todo  $A \in \mathfrak{S}(k, l)$  e  $B \in \mathfrak{S}(k', l')$

$$\begin{aligned} \nabla_e (A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} B^{a_1 \dots a_{k'}}_{b_1 \dots b_{l'}}) &= \nabla_e (A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) B^{a_1 \dots a_{k'}}_{b_1 \dots b_{l'}} + \\ &+ A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \nabla_e (B^{a_1 \dots a_{k'}}_{b_1 \dots b_{l'}}) \end{aligned} \quad (10)$$

**Derivada Direcional :**

Para todo  $t$  como curva no espaço tempo e  $f \in \mathfrak{S}$

$$t(f) = t^a \nabla_a f \quad (11)$$

**Ausência de Torção :**

Para todo  $f \in \mathfrak{S}$

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f \quad (12)$$

Todavia a derivada covariante  $\nabla$  é definida em um ponto específico do espaço. Sendo assim, pode-se definir uma outra derivada como sendo  $\bar{\nabla}$ . A diferença dessas duas

derivadas define um mapa de tensores em um determinado ponto para a sua vizinhança. Conforme a propriedade de linearidade, na definição desta derivada, atesta-se a existência de um tensor do tipo  $(1, 2)$  que faz o serviço de mapear o próprio tensor  $\omega_b$ , sendo assim:

$$(\bar{\nabla}_a - \nabla_a) \omega_b = C^c_{ab} \omega_c, \quad (13)$$

onde  $C^c_{ab}$  é conhecido como conexão afim.

Por meio da última condição é possível demonstrar que  $C^c_{ab}$  é simétrico na troca de índices inferiores ( $C^c_{ab} = C^c_{ba}$ ). Agora que se sabe como um vetor do tipo covariante se transforma se faz necessário definir a ação de  $(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)$  em um vetor contravariante para que se possa determinar e generalizar a ação desta derivada em um tensor de tipo  $(k, l)$ . Ao se aplicar  $(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)$  no escalar  $(\omega_b t^b)$  e considerando as propriedades da regra de Leibnitz e a derivada direcional se obtém que

$$(\bar{\nabla}_a - \nabla_a) t^b = C^b_{ac} t^c, \quad (14)$$

Para generalizar a derivada covariante basta utilizar as equações (13) e (14) para os índices contravariantes e covariantes, já que cada índice se comporta independentemente como se fosse um vetor. Logo, para  $T \in \mathfrak{S}(k, l)$ , tem-se que

$$\nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = \bar{\nabla}_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \sum_{i=1}^k C^{b_i}_{ad} T^{b_1 \dots d \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} - \sum_{j=1}^l C^d_{ac_j} T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots d \dots c_l}. \quad (15)$$

Apresenta-se na próxima seção qual a condição deve ser atendida para que a conexão afim seja conhecida como símbolos de Christoffel, que são utilizados em larga escala na RG.

## 2.5 Conexão Afim

Tendo sido definida a forma de uma derivada covariante é possível identificar o símbolo de Christoffel ( $\Gamma^a_{bc}$ ) no tensor quando se impõe que  $\bar{\nabla}_a$  seja igual à derivada ordinária  $\partial_a$ . Em outras palavras, escolhe-se o espaço de Minkowski para ser o referencial padrão, onde se “sabe” calcular as derivadas. Pode-se entender esse formato de derivada como sendo a “escolha de Einstein”, que representa a teoria da RG usual. Ou seja, tem-se que

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma^b_{ac} t^c \quad (16)$$

Tem-se, portanto, que o vetor  $v^b$  é transportado paralelamente por uma curva  $C$ , cuja tangente é  $t^a$ , se, e somente se

$$t^a \nabla_a v^b = 0, \quad (17)$$

que pode ser aplicado índice a índice da mesma maneira que na equação (15).

A partir de agora se deve determinar qual é a forma da conexão  $C^b_{ac}$ . Para tanto se considera, primeiramente, que um produto interno de dois vetores também deve permanecer o mesmo quando transportado paralelamente. Escrevendo o produto interno de  $y^a$  e  $z^b$  como sendo  $g_{ab}y^a z^b$  é possível verificar a dependência da conexão com a derivada da métrica ( $g_{ab}$ ). Isto é,

$$t^a \nabla_a (g_{ab} y^a z^b) = 0 \quad (18)$$

Como se pode verificar por meio da regra de Leibnitz e da equação (17), a equação acima resulta em

$$\nabla_a (g_{ab}) = 0, \quad (19)$$

que quando substituída na equação (15), resulta em uma relação direta entre a métrica e a conexão, dada por

$$\bar{\nabla}_a g_{bc} = C^d_{ab} g_{dc} + C^d_{ac} g_{bd}. \quad (20)$$

A partir de algumas manipulações explorando a simetria dos índices da conexão é factível obter a seguinte expressão:

$$C^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\bar{\nabla}_a g_{bd} + \bar{\nabla}_b g_{ad} - \bar{\nabla}_d g_{ab}), \quad (21)$$

que quando  $\bar{\nabla}_a \rightarrow \partial_a$  resulta na forma final dos símbolos de Christoffel, dada por

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}). \quad (22)$$

Procura-se escrever os índices, outrora latinos  $a, b, c \dots$ , por meio de letras gregas,  $\alpha, \beta, \gamma \dots$ , a fim de diferenciar quando se adota a “escolha de Einstein” das demais, i.e.  $\bar{\nabla}_a \rightarrow \partial_a$ .

## 2.6 Torção

Nesta seção se deixa de lado a ausência de torção na derivada covariante, vista na seção anterior, de maneira a analisar a estrutura básica dos termos de torção. Como se pode ver ao longo desta tese, a torção pode desempenhar vários papéis importantes na cosmologia, além de alterar consideravelmente as equações cosmológicas estudadas.

A definição de torção se dá, em oposição a (12), por meio da aplicação do comutador de derivadas covariantes em um campo escalar, isto é

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] f \equiv S^\mu_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \quad (23)$$



onde  $S^\mu{}_{\alpha\beta}$  é dado por

$$S^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu, \quad (24)$$

que é antissimétrico nos índices  $\alpha$  e  $\beta$ . Na teoria de Einstein-Cartan o tensor torção se relaciona com o conteúdo espinorial do espaço-tempo. Como o mesmo desaparece no espaço vazio, a teoria de Einstein-Cartan é indistinguível da RG para experimentos tomados no vácuo. Pela própria definição de derivada covariante, encontra-se que

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\lambda\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda\nu}. \quad (25)$$

Ao se construir com (25) a estrutura de derivadas da conexão afim (22) se obtém a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} &= \Gamma_{\lambda\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\nu\mu} + \Gamma_{\nu\lambda\mu} - \Gamma_{\mu\nu\lambda} - \Gamma_{\nu\mu\lambda} \\ &= 2\Gamma_{\lambda\mu\nu} - S_{\lambda\mu\nu} - S_{\mu\nu\lambda} - S_{\nu\mu\lambda}, \end{aligned} \quad (26)$$

onde os índices de  $S$  são baixados e erguidos se utilizando a métrica  $g_{\mu\nu}$ , de modo que  $S_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\sigma} S^\sigma{}_{\mu\nu}$ . Ao se isolar a conexão afim na equação (26) se obtém a seguinte expressão

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + S_{\lambda\mu\nu} + S_{\mu\nu\lambda} + S_{\nu\mu\lambda} \right), \quad (27)$$

onde se define o termo de contorção como

$$K_{\lambda\mu\nu} = S_{\lambda\mu\nu} + S_{\mu\nu\lambda} + S_{\nu\mu\lambda}. \quad (28)$$

Define-se, por fim, a conexão com termos de torção como a soma da conexão livre de torção mais o tensor de contorção, logo

$$\tilde{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\mu\nu} + K_{\lambda\mu\nu}, \quad (29)$$

onde os termos com til representam a presença de torção.

## 2.7 Tensor de Riemann

Após este pequeno “desvio de curso” por conta da definição da torção, retorna-se à busca por elementos e propriedades oriundas das derivadas covariantes. Verificando a comutação das derivadas covariantes e levando em consideração a propriedade de linearidade das derivadas, encontra-se a seguinte expressão

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c = R_{abd}{}^c t^d \quad (30)$$

onde  $R_{abd}{}^c$  é conhecido como tensor de Riemann, que pode ser generalizado para a aplicação do comutador com um tensor  $T$  do tipo  $(k, l)$  qualquer. Isto é,

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{b_1 \dots b_k}{}_{c_1 \dots c_l} = - \sum_{i=1}^k R_{abe}{}^{c_i} T^{b_1 \dots e \dots b_k}{}_{c_1 \dots c_l} + \sum_{j=1}^l R_{abd_j}{}^e T^{b_1 \dots b_k}{}_{c_1 \dots e \dots c_l}. \quad (31)$$

Por sua vez é possível, depois de alguns cálculos não triviais, determinar a forma do tensor de Riemann em função dos símbolos de Christoffel. Obtém-se que

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho} \Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho} \Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu}. \quad (32)$$

Dado a forma explícita do tensor de Riemann utilizado na RG, determina-se quais as suas características principais. Tem-se que este tensor possui as seguintes propriedades:

- (I)  $R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$
- (II)  $R_{[abc]}{}^d = 0$
- (III)  $R_{abcd} = -R_{abdc}$
- (IV)  $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0$

Seguem as provas das propriedades elencadas anteriormente. A prova de (I) decorre trivialmente da relação (30). Por outro lado, para provar (II) é necessário analisar a estrutura da equação (30) para um vetor covariante  $\omega_c$ . Tem-se com isto que

$$\nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} = 0. \quad (33)$$

A partir desta expressão se chega em:

$$2\nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} = \nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} - \nabla_{[b} \nabla_a \omega_{c]} = R_{[abc]}{}^d \omega_d = 0, \quad (34)$$

que prontamente prova a relação (II). A propriedade (III) segue da equação (31) aplicada à métrica  $g_{ab}$ . Logo,

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) g_{cd} = R_{abc}{}^e g_{ed} + R_{abd}{}^e g_{ce} = R_{abcd} + R_{abdc} = 0 \quad (35)$$

que gera, por sua vez, (III).

Já para provar a relação (IV), conhecida como identidade de Bianchi, lança-se mão de duas expressões distintas, dadas por

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \nabla_c \omega_d = R_{abc}{}^e \nabla_e \omega_d + R_{abd}{}^f \nabla_c \omega_f, \quad (36)$$

$$\nabla_a (\nabla_b \nabla_c \omega_d - \nabla_c \nabla_b \omega_d) = \nabla_a (R_{bcd}{}^e \omega_e) = \nabla_a (R_{bcd}{}^e) \omega_e + R_{bcd}{}^e \nabla_a (\omega_e), \quad (37)$$

Ao se antissimetrizar os índices  $a$ ,  $b$  e  $c$  nas equações (36) e (37), tem-se que os lados esquerdos se tornam iguais. Igualmente os lados direitos se tornam:

$$R_{[abc]}{}^e \nabla_e \omega_d + R_{[ab|d]}{}^f \nabla_c \omega_f = \nabla_{[a} (R_{bc]d}{}^e) \omega_e + R_{[bc|d]}{}^e \nabla_{a]} (\omega_e), \quad (38)$$

onde as barras indicam que o índice  $d$  não foi antissimetrizado. Tem-se, por meio da relação (II), que o primeiro termo do lado esquerdo é nulo. Por outro lado os segundos termos da equação se anulam de modo que

$$\omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0, \quad (39)$$

que confirmam, finalmente, a relação (IV).

## 2.8 Tensor de Ricci e o Escalar de Curvatura

Dois outros valores relacionados com o tensor de Riemann desempenham um papel importante em RG. O tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  é definido por

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b. \quad (40)$$

Este é um tensor com dois índices covariantes que é simétrico segundo a relação

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} = g^{\sigma\rho} R_{\rho\nu\sigma\mu} = R_{\nu\mu} \quad (41)$$

Por conseguinte, o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  tem 10 componentes independentes no espaço-tempo. O escalar curvatura ou escalar de Ricci  $R$  é a contração do tensor de Ricci com o tensor métrico (contravariante):

$$R = R_a{}^a. \quad (42)$$

Este é, obviamente, um escalar, e, por conseguinte, possui o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas.

Por meio desta última definição se faz possível escrever a equação de Einstein, que é uma peça fundamental para qualquer tentativa de se criar um modelo cosmológico.

## 2.9 Equação de Einstein

Nesta seção se deduz as equações de Einstein por meio do princípio de mínima ação da ação de Einstein-Hilbert. Existe também no apêndice (G.1) uma discussão referente a presente dedução quando existem termos de torção dentro da conexão afim (Christoffel).

A derivação de equações de uma ação possui algumas vantagens. Primeiramente, ela permite a unificação da RG com outras teorias de campo clássica (como a teoria de Maxwell), que também são formulados em termos de uma ação. Ao longo do processo, a derivação a partir de uma ação identifica um candidato natural para o termo fonte acoplar a métrica aos campos de matéria. Além disso, a ação permite a fácil identificação das quantidades conservadas através do teorema de Noether, por estudar suas simetrias.

Tem-se que a ação de Einstein-Hilbert é definida como

$$S_{EH} = \int dt d^3x \sqrt{-g} \frac{R}{2\kappa^2}, \quad (43)$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura, como visto na seção anterior. Por outro lado  $g$  é o determinante da métrica  $g_{\mu\nu}$ , com  $\kappa = \sqrt{8\pi G}$ . O termo  $d^3x \sqrt{-g}$  é o invariante de volume, que garante que determinados volumes equivalham frente a mudanças de referenciais.

Para se obter uma equação de movimento a partir desta ação se deve extremizá-la. Como todos os fatores dependem da métrica, procura-se variar todos os termos presentes,  $\sqrt{-g}$  e  $R$ , com relação a  $g_{\mu\nu}$  de maneira a deixar o fator variado  $\delta g_{\mu\nu}$  em evidência. Escreve-se o escalar de curvatura como  $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  de modo a simplificar a resolução, logo

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \delta [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}] = 0, \quad (44)$$

onde a variação do termo entre parenteses é dado por

$$\delta [\sqrt{-g} R] = \delta (\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \delta (R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} + \delta (g^{\mu\nu}) \sqrt{-g} R_{\mu\nu}. \quad (45)$$

A variação de  $\sqrt{-g}$ , presente no primeiro termo do lado direito da equação (45), é deduzida no apêndice (D) e possui a seguinte estrutura

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (46)$$

Por outro lado, a variação do segundo termo, dada por  $\delta R_{\mu\nu}$ , é descrita no apêndice (E). A relação buscada é dada pela equação (579). Ao substituí-la no segundo termo de (45), obtém-se

$$\delta (R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda). \quad (47)$$

Por a derivada covariante da métrica ser, por definição, nula, pode-se inserí-la dentro das derivadas covariantes. Logo,

$$\delta(R_{\mu\nu})\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \sqrt{-g}[\nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)]. \quad (48)$$

De acordo com a expressão (583), presente no apêndice (F), pode-se reescrever a equação (48) da seguinte maneira

$$\delta(R_{\mu\nu})\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \partial_\lambda(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda). \quad (49)$$

Ao observar o termo descrito (49) se reconhece termos do tipo derivadas totais que quando integradas sob todo o espaço-tempo, anula-se segundo o teorema de Gauss, assim como descrito no apêndice (F).

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int d^4x \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \\ &+ \int d^4x [\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \partial_\lambda(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)], \end{aligned} \quad (50)$$

onde a segunda integral do lado direito da equação é nula, por se tratar de uma derivada total (vide apêndice (F)). Deste modo a integral remanescente também deve ser nula. A única forma disto ocorrer é se o termo entre parênteses for nulo, já que a métrica não é constante. É este o termo que dá origem à parte geométrica das equações de Einstein, representada por  $G_{\mu\nu}$ . Logo

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (51)$$

Por a descrição presente na equação (51) ser puramente geométrica, dá-se aqui indícios de como se obtém a sua parte de matéria, por questão de completeza. Em (5.2.1) e (5.2.2) se apresentam ações que já contém elementos de matéria na densidade Lagrangeana. Reescreve-se a ação (43) com um termo extra, que representa uma densidade Lagrangeana qualquer, dada por  $\mathcal{L}_m$ .

$$S_{EHm} = \int dt d^3x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m \right). \quad (52)$$

Tendo que o termo  $R$  dá origem a parte geométrica da equação de Einstein, dada por (51), prontamente se escreve o correspondente de matéria da extremização como:

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m, \quad (53)$$

de maneira a obter a expressão final para a equação de Einstein, dada basicamente por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (54)$$

De modo que esta é a equação chave que descreve o movimento dos corpos governados pela ação gravitacional. Toma-se esta equação como ponto de partida para a análise cosmológica de qualquer modelo que procure descrever o universo.

### 3 Cosmologia Básica

Seguem descritos neste capítulo os principais aspectos referentes à cosmologia básica para melhor compreender o estudo realizado. Apesar das observações darem os principais vínculos que permitem a verificação do modelo cosmológico do ELKO, aqui proposto, busca-se uma abordagem mais teórica neste capítulo. Deste modo a discussão observacional é tratada de maneira qualitativa sem se ater às técnicas de observação ou na redução de dados. Procura-se, portanto, estudar a estrutura que permite a inserção do ELKO na cosmologia, por meio da construção padrão de modelos cosmológicos. O presente capítulo está dividido conforme descrito a seguir.

Na introdução, seção (3.1), procura-se discutir um pouco sobre os fundamentos da cosmologia, onde se aborda suas noções primordiais, como o desvio para o vermelho e o horizonte de eventos.

Como pode ser constatado no decorrer deste capítulo, o universo é tomado como isotrópico e homogêneo. Dado isto são apresentados modelos na seção (3.2), que são construídos ao redor destas duas principais características. Isto é, os modelos se diferenciam ao se considerar o universo não isotrópico ou não homogêneo, por exemplo. Enfim, destaca-se, na seção (3.2), cinco diferentes modelos criados na tentativa de descrever o universo. São eles: Modelo de Einstein, Lemâitre, Friedmann, Kasner e Gödel. Como fica claro a seguir, o modelo de Friedmann é considerado como aquele que mais se aproxima na descrição do universo, segundo a comunidade científica.

Após apresentar tais modelos seguem outras duas seções, que encerram este capítulo. No penúltimo, (3.3), são mostrados alguns aspectos sobre a expansão do universo aliado com a teoria recém discutidas nas seções anteriores. Por último são apresentadas, na seção (3.4), informações breves sobre as observações e como os dados experimentais, fundamentais para a cosmologia, são obtidos.

#### 3.1 Introdução à Cosmologia

No caráter fundamental da física, busca-se entender a estrutura da evolução do universo por meio de um princípio básico. Tal princípio, conhecido como Princípio Cosmológico, guia os cosmólogos na construção de todas as teorias e nas interpretações das diversas observações. Apesar deste não ser indubitavelmente verdadeiro, sua essência serve

como ponto de partida para qualquer física que se queira encontrar no Universo à longas distâncias.

O Princípio Cosmológico diz, resumidamente, que toda física do universo, em toda a sua extensão, resume-se aos mesmos conceitos e leis físicas que são utilizados nas vizinhanças do Sistema Solar. Isto é, espera-se que as leis físicas conhecidas sejam as mesmas em qualquer parte do universo. Outro ponto fundamental, de acordo com observações cosmológicas e com um senso científico apurado, aponta que o Universo é espacialmente homogêneo e isotrópico. O mesmo senso que indica que a Terra não está em local privilegiado no centro do Sistema Solar também demonstra que a Galáxia não está em nenhum local privilegiado no Universo. Com isso as observações indicam que quando as grandes escalas são consideradas não existem direções preferenciais com mais ou menos matéria. Aliando essas máximas, tem-se que a estrutura do Universo se repete em todas as direções e em todos os pontos do Universo. Isto é, o mesmo é considerado homogêneo e isotrópico.

Todavia, como já mencionado, este conceito pode não ser verdadeiro. Porém, ele é o único pilar que se possui para os cosmólogos tatearem tudo aquilo que se procura responder. Este é um processo corriqueiro quando se tenta descobrir novas coisas na ciência.

Tendo, portanto, o Princípio Cosmológico como ponto de partida, faz-se necessário averiguar qual a Física conhecida que governará os fenômenos que a Cosmologia procura estudar. Por meio das observações se faz natural que a grande maioria dos corpos celestes são eletricamente neutros. Sendo assim, deve-se apenas considerar a atração gravitacional, uma vez que a força forte e fraca se pronunciam somente em escala subatômica. Como já visto anteriormente, a RG dá conta das interações desses corpos celestes quando se considera as escalas astronômicas e corpos muito massivos.

Na RG, como também visto, o espaço-tempo possui o papel principal já que qualquer interação entre corpos é reflexo da sua deformação. Praticamente toda a informação do espaço-tempo pode ser extraído de sua métrica. Logo, o passo inicial para a cosmologia é encontrar uma métrica que atenda às exigências ditadas pelo Princípio Cosmológico, a isotropia e a homogeneidade.

Todos os pontos do espaço equivalentes podem ser descritos por um comprimento infinitesimal do tipo

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (55)$$



que em coordenadas esféricas é representado por

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (56)$$

Por meio do vínculo  $r = a$ , onde  $a$  é o raio da esfera, é possível verificar que existem somente três geometrias de espaço-tempo que podem satisfazer o Princípio Cosmológico. Com o vínculo o espaço tridimensional passa a ser somente bidimensional, com os seus graus de liberdades limitados à superfície de uma esfera. Todavia se pode restituir facilmente a terceira dimensão de forma que o comprimento infinitesimal passa a ser dado por

$$dl^2 = dq^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (57)$$

Desta maneira, quando um vínculo análogo do tipo  $q^2 + x^2 + y^2 + z^2 = q^2 + r^2 = ka^2$  é aplicado, pode-se fazer um espaço tridimensional surgir de um outro quadridimensional. Vem deste vínculo a expressão  $qdq + r dr = 0$  que é utilizada para obter o comprimento

$$dl^2 = a^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (58)$$

Nota-se que para obter tal expressão foi necessário uma redefinição de  $r$  ( $\frac{r}{a} \rightarrow r$ ). Baseando-se na métrica de Minkowski, combina-se o comprimento infinitesimal obtido com a parcela temporal do espaço-tempo. Logo,

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (59)$$

onde a própria métrica de Minkowski é recuperada quando  $a = \pm 1$  e  $k = 0$ . Por meio do próprio vínculo utilizado se verifica que para  $k = 0$  o espaço tempo é Euclidiano, para  $k = 1$  ele é esférico e para  $k = -1$  é hiperesférico.

Por meio do conceito recente de que o Universo se expande aceleradamente o fator de escala surge de maneira intuitivamente mais clara. Isto é, de modo a mantermos a isotropia e homogeneidade do espaço, pode-se inserir a mão dois fatores tanto na parte temporal quanto na parte espacial desta métrica. O que resulta em

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (60)$$

onde  $a(t)$  é o fator de escala e  $N(t)$  é conhecido como função lapso. Essa função pode ser suprimida por meio de uma simples redefinição do tempo. Todavia tal termo é deixado

intacto a fim de que o processo de obtenção das equações de Friedmann seja simplificado (como pode ser visto em (5.1) e no apêndice (G.2).

A expressão (60) se demonstra invariante por rotações e pela translação do tipo

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v} \left\{ (1 - k\vec{x}^2)^{1/2} - \left[ 1 - (1 - k\vec{v}^2)^{1/2} \right] \left( \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \right) \right\}, \quad (61)$$

onde  $\vec{v}$  é um vetor deslocamento qualquer. Com (61) se pode verificar que qualquer ponto fixo do espaço pode representar a origem do sistema de maneira equivalente à equação (60). De certo modo, a própria homogeneidade do espaço somente é verificada para uma determinada classe de observadores. Esses são conhecidos como observadores comoveis e a sua definição corresponde àqueles observadores que estão em queda livre em relação às galáxias e os demais objetos celestes. Sendo assim, por meio da métrica (60) as coordenadas espaciais comoventes são constantes ao longo de sua história, e somente o fator de escala atua na evolução do sistema. Um exemplo simples para compreender esta ideia é imaginar um balão com dois pontos desenhados com canetinha. Ao inflar ou desinflar o balão esses pontos se afastam ou se aproximam, respectivamente, no âmbito externo. Por outro lado as suas coordenadas permanecem inalteradas.

Outra opção para descrever a métrica referente à expressão (60) é redefinir uma função  $\sigma(\chi)$ , onde seus valores estão correlacionados com o tipo de Universo estudado. Logo, encontra-se que

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)], \quad (62)$$

onde a alteração foi baseada na substituição  $r = \sigma(\chi)$ . Com isso, pode-se encontrar que esta função pode assumir os valores de  $\text{sen}(\chi)$  para  $k = 1$ ,  $\chi$  para  $k = 0$  e  $\text{senh}(\chi)$  para  $k = -1$ .

Tendo, portanto, a métrica que se acredita descrever o cenário cósmico do Universo, deve-se obter as equações de Einstein correspondentes. Utiliza-se então todo o conjunto de equações da RG revisada no princípio desta tese. Os tensores de Ricci, não nulos, correspondentes à métrica de (62) são dados por

$$\begin{aligned}
R_{00} &= 3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - 3\frac{\dot{a}(t)\dot{N}(t)}{a(t)N(t)}, \\
R_{11} &= -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{N^2(t)} - 2\left(\frac{\dot{a}(t)}{N(t)}\right)^2 + 2\frac{\sigma''(\chi)}{\sigma(\chi)} + \frac{a(t)\dot{a}(t)\dot{N}(t)}{N^3(t)}, \\
R_{22} &= -\frac{a(t)\ddot{a}(t)\sigma^2(\chi)}{N^2(t)} - \frac{2\dot{a}(t)^2\sigma^2(\chi)}{N^2(t)} + \sigma(\chi)\sigma''(\chi) + \\
&\quad + \sigma'^2(\chi) + \frac{a(t)\dot{a}(t)\dot{N}(t)\sigma^2(\chi)}{N^3(t)} - 1, \\
R_{33} &= \text{sen}^2(\chi) \left[ -\frac{a(t)\ddot{a}(t)\sigma^2(\chi)}{N^2(t)} - \frac{2\dot{a}(t)^2\sigma^2(\chi)}{N^2(t)} + \right. \\
&\quad \left. + \sigma(\chi)\sigma''(\chi) + \sigma'^2(\chi) + \frac{a(t)\dot{a}(t)\dot{N}(t)\sigma^2(\chi)}{N^3(t)} - 1 \right]. \tag{63}
\end{aligned}$$

Por consequência se obtém o seguinte escalar de curvatura

$$\begin{aligned}
R &= 6\frac{\ddot{a}(t)}{N^2(t)a(t)} + 6\left(\frac{\dot{a}(t)}{N(t)a(t)}\right)^2 - \frac{2\sigma''(\chi)}{a^2(t)\sigma(\chi)} + \\
&\quad - \frac{2\sigma'^2(\chi)}{a^2(t)\sigma^2(\chi)} + \frac{2}{a^2(t)\sigma^2(\chi)} + 6\frac{\dot{a}(t)\dot{N}(t)}{a(t)N^3(t)}. \tag{64}
\end{aligned}$$

Por outro lado, os componentes diagonais do tensor de Einstein são dados por

$$\begin{aligned}
G_{00} &= -3\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 + \frac{2N^2(t)\sigma''(\chi)}{a^2(t)\sigma(\chi)} + \frac{N^2(t)\sigma'^2(\chi)}{a^2(t)\sigma^2(\chi)} - \frac{N^2(t)}{a^2(t)\sigma^2(\chi)}, \\
G_{11} &= 2\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{N^2(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{N(t)a(t)}\right)^2 - \left(\frac{\sigma'(\chi)}{\sigma(\chi)}\right)^2 + \frac{1}{\sigma^2(\chi)} - 2\frac{a(t)\dot{a}(t)\dot{N}(t)}{N^3(t)}, \\
G_{22} &= 2\frac{a(t)\ddot{a}(t)\sigma^2(\chi)}{N^2(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)\sigma^2(\chi)}{N^2(t)} - \sigma(\chi)\sigma''(\chi) - 2\frac{a(t)\dot{a}(t)\dot{N}(t)\sigma^2(\chi)}{N^3(t)}, \\
G_{33} &= \text{sen}^2(\chi) \left[ 2\frac{a(t)\ddot{a}(t)\sigma^2(\chi)}{N^2(t)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\dot{a}^2(t)\sigma^2(\chi)}{N^2(t)} + \sigma(\chi)\sigma''(\chi) - 2\frac{a(t)\dot{a}(t)\dot{N}(t)\sigma^2(\chi)}{N^3(t)} \right]. \tag{65}
\end{aligned}$$

Através das formas correspondentes para a função  $\sigma(\chi)$  é possível reescrever as equações (63), (64) e (65) em função dos valores de  $k$ . A simples substituição das funções nas expressões anteriores já indicam a estrutura geral das equações de Einstein. Nota-se que as equações  $G_{11}$ ,  $G_{22}$  e  $G_{33}$  estão em mesmo pé de igualdade a menos de um fator correspondente da métrica, que é prontamente suprimido por conta da parte de matéria do lado direito das equações, que compensam a aparente desigualdade. Sendo assim, as equações de Einstein possuem a seguinte forma compacta para a métrica FLRW

$$G_{00} = -3\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 - \frac{3k}{a^2(t)}, \quad (66)$$

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = 2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}(t)^2 - k, \quad (67)$$

onde neste caso  $N(t) = 1$ , já que o mesmo não possui nenhum conteúdo cosmológico aparente. Na seção sobre os modelos cosmológicos é possível se verificar a verdadeira facilidade em se manter a função lapso na métrica, quando se busca derivar as equações de Friedmann.

Tendo a parte geométrica das equações de Einstein devidamente descrita, necessita-se caracterizar sua parte de matéria. De acordo com a definição das métricas é preciso ter a noção de referencial. As mesmas são todas definidas no referencial comovente, que por sua vez é interpretado como um fluido cósmico que se move junto com a “malha” do espaço-tempo do universo. (assim como o exemplo do balão visto anteriormente). Desta forma, faz-se necessário o estudo dos campos de velocidade associados à métrica, que no que lhe concerne também modela o espaço-tempo.

Primeiramente se identifica a variável  $v^\mu$  como um campo vetorial do tipo tempo. Para cada ponto do espaço-tempo se define um subespaço tridimensional de vetores ortogonais, que são ortogonais aos campos de velocidades normalizados  $v^\mu$ . Logo,

$$v_\mu v_\nu g^{\mu\nu} = 1. \quad (68)$$

Logicamente é possível descrever uma classe inteira de observadores que por ventura se movam com esta velocidade. Pode-se, para esta classe, definir o tensor projeção, que projeta tensores por exemplo no espaço tridimensional que é perpendicular a  $v^\mu$ . Tal tensor é dado por

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu. \quad (69)$$

A importância da definição deste projetor se demonstra clara quando se define o tensor de energia-momento, que descreve a matéria na equação de Einstein (lado direito da equação (54)). Da definição (69), tem-se que  $h^2 = h$ , que  $h$  é perpendicular à  $v^\mu$  e que  $h_{\mu\nu}$  é simétrico (i.e.  $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ ).

Retornando um pouco à ideia de referenciais, encontra-se na classe de observadores, ou nos diversos conjuntos de velocidades, uma série de grupos que possuem diferentes parâmetros afim distintos. Quando se estuda um desses grupos, cujos parâmetros são os

tempos próprios e todos eles são iguais, é possível obter uma importante função. Sendo a mesma uma peça essencial para caracterizar cada um dos referenciais escolhidos. Tem-se que a velocidade de afastamento entre o ponto  $P$  e  $P + dP$  é dado por

$$v_{(rel)}^\alpha = Q_{\alpha\mu}\eta^\mu, \quad (70)$$

onde  $\eta^\mu$  é conhecido como vetor conexão, que é o vetor que liga duas curvas com mesmo tempo próprio na vizinhança de um dado ponto, neste caso  $P$ . Por outro lado  $Q_{\alpha\mu}$  é dado por

$$Q^\alpha{}_\mu = h^\alpha{}_\beta h_\mu{}^\lambda v^\beta{}_{;\lambda}, \quad (71)$$

com  $;\lambda$  representando a derivada covariante. Por meio do teorema de decomposição de tensores em partes irredutíveis, escreve-se  $Q_{\alpha\beta}$  como

$$Q_{\alpha\beta} = \Theta h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}, \quad (72)$$

onde  $\sigma_{\alpha\beta}$  é o tensor simétrico de traço nulo,  $\omega_{\alpha\beta}$  o tensor antissimétrico e  $\Theta$  representa a parcela correspondente ao traço suprimido em  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Algebricamente, representa-os por

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(Q_{\alpha\beta} - Q_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}h_{[\alpha}{}^\mu h_{\beta]}{}^\lambda v_{\mu;\lambda}, \quad (73)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}h_{[\alpha}{}^\mu h_{\beta]}{}^\lambda v_{\mu;\lambda} - \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta}, \quad (74)$$

$$\Theta = h^{\alpha\lambda}v_{\alpha;\lambda} = v^\alpha{}_{;\alpha}. \quad (75)$$

Das definições (73) e (74), constata-se que as mesmas são perpendiculares à  $v^\mu$ . Conclui-se, portanto, que a equação (70) é capaz de descrever propriedades preponderantes do espaço-tempo. Isto é, a maneira pela qual curvas de mesmo tempo próprio se relacionam, possuem relação íntima com a estrutura do espaço-tempo. Logo, pode-se aferir se o universo é, por exemplo, isotrópico, irrotacional ou se está em expansão simplesmente observando  $Q_{\alpha\beta}$ . Tal fato se demonstra evidente dado que  $h$  carrega informação da métrica ( $g_{\mu\nu}$ ) e do observador ( $v^\mu$ ).

Tendo que  $Q_{\alpha\beta}$  depende de  $\omega_{\alpha\beta}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\Omega$ , deve-se examinar a evolução desses parâmetros ao longo da curva específica. Da definição do tensor de curvatura (equação (40)), tem-se que

$$v_{\alpha;\beta;\gamma} - v_{\alpha;\gamma;\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma}v^\epsilon, \quad (76)$$

ao multiplicar (76) por  $v^\gamma$ , obtém-se

$$(v_{\alpha;\beta})' - v_{\alpha;\gamma;\beta}v^\gamma = R_{\alpha\varepsilon\beta\gamma}v^\varepsilon v^\gamma, \quad (77)$$

onde o ponto significa a derivação na direção  $v_\alpha$ .

$$\dot{v}_\beta = v_{\beta;\alpha}v^\alpha. \quad (78)$$

Em (77), o segundo termo do lado esquerdo da equação pode ser reescrito como  $(\dot{v}_\beta)_\beta - v_{\alpha;\gamma}v^\gamma_{;\beta}$ . Logo,

$$(v_{\alpha;\beta})' - \dot{v}_{\alpha;\beta} + v_{\alpha;\gamma}v^\gamma_{;\beta} = R_{\alpha\varepsilon\beta\gamma}v^\varepsilon v^\gamma, \quad (79)$$

por meio de manipulações algébricas, encontra-se que  $h^\alpha_\beta h^\mu_\lambda v_{\alpha;\mu} = v_{\beta;\lambda} - \dot{v}_\beta v_\lambda = Q_{\beta\lambda}$ , que permite por consequência, reescrever (79) da seguinte forma

$$h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (Q_{\mu\nu} + a_\mu v_\nu)' - h_\alpha^\mu h_\beta^\nu a_{\mu;\nu} + h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (Q_{\mu\gamma} + a_\mu v_\gamma)(Q^\gamma_\nu + a^\gamma v_\nu) = R_{\alpha\varepsilon\beta\gamma}v^\varepsilon v^\gamma. \quad (80)$$

Com  $a_\mu Q^\mu_\nu = 0$ , obtém-se por fim

$$h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{Q}_{\mu\nu} + a_\alpha b_\beta - h_\alpha^\mu h_\beta^\nu a_{\mu||\nu} + Q_{\alpha\gamma}Q^\gamma_\beta = R_{\alpha\varepsilon\beta\gamma}v^\varepsilon v^\gamma. \quad (81)$$

Esta é a equação base para verificar a evolução dos parâmetros citados anteriormente. Todavia, é possível ainda obter uma expressão mais compacta e elegante. Para isso se contrai, em (81), os índices  $\alpha$  e  $\beta$ , logo:

$$h_{\mu\nu}\dot{Q}^{\mu\nu} + a_\alpha a^\alpha - h^{\mu\nu} a_{\mu||\nu} + Q_{\mu\nu}Q^{\mu\nu} = R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu. \quad (82)$$

Entretanto

$$h_{\mu\nu}\dot{Q}^{\mu\nu} = (h_{\mu\nu}Q^{\mu\nu})' - \dot{h}_{\mu\nu}Q^{\mu\nu} = (Q^\mu_\mu)' + a^\mu v^\nu Q_{\mu\nu} + a^\nu v^\mu Q_{\mu\nu} = (Q^\mu_\mu)' \quad (83)$$

Como se sabe  $\Theta$  é o traço de  $Q_{\alpha\beta}$ , logo

$$\dot{\Theta} + a_\alpha a^\alpha - a^\alpha_{||\mu} + a_{\mu;\nu}v^\nu v^\mu + Q_{\alpha\mu}Q^{\mu\alpha} = R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu. \quad (84)$$

O último termo do lado esquerdo da equação (84) pode ser expandido por meio de (72), de modo que

$$Q_{\alpha\mu}Q^{\alpha\mu} = \left(\frac{\Theta}{3}h_{\alpha\mu} + \sigma_{\alpha\mu} + \omega_{\alpha\mu}\right) \left(\frac{\Theta}{3}h^{\alpha\mu} + \sigma^{\alpha\mu} + \omega^{\alpha\mu}\right) = \frac{\Theta^2}{3} + \sigma_{\alpha\mu}\sigma^{\alpha\mu} + \omega_{\alpha\mu}\omega^{\alpha\mu}, \quad (85)$$

donde  $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\mu}\sigma^{\alpha\mu}$  e  $\omega^2 = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\mu}\omega^{\alpha\mu}$ . Sendo assim,  $Q_{\alpha\mu}Q^{\alpha\mu} = \frac{\Theta^2}{3} + 2\sigma^2 - 2\omega^2$ . Então

$$\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3} + 2\sigma^2 - \omega^2 - a^\mu_{;\mu} + \dot{a}_\mu v^\mu + a^\mu a_\mu = R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu. \quad (86)$$

Entretanto o penúltimo termo do lado esquerdo de (86) é dado por

$$\dot{a}_\mu v^\mu = (a_\mu v^\mu)' - a_\mu a^\mu = -a_\mu a^\mu. \quad (87)$$

Por fim, tem-se que

$$\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3} + 2\sigma^2 - \omega^2 - a^\mu{}_{;\mu} + \dot{a}_\mu v^\mu + a^\mu a_\mu = R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu. \quad (88)$$

Esta equação é conhecida, em cosmologia, como equação de Raychaudhuri, e por meio da mesma é possível demonstrar que o universo de Friedmann é singular. Verifica-se, portanto, o caráter do modelo cosmológico utilizando esta equação. Na seção sobre modelos cosmológicos, (3.2), tal propriedade se demonstra mais evidente e clara.

Depois de ter o referencial do Observador devidamente descrito, assim como as características primordiais do universo, de acordo com o modelo idealizado, faz-se necessário uma descrição apurada da matéria. A essência da matéria reside no lado direito das equações de Einstein. Ela é a responsável pela criação de um espaço-tempo curvo.

A partir da definição do tensor energia-momento se insere as propriedades do referencial e da matéria dominante no universo. De acordo com os modelos cosmológicos mais aceitos na literatura, entende-se que o universo é formado por distintos períodos, onde se acredita que cada uma delas possui uma determinada “matéria” em abundância. Tecnicamente se divide essas “matérias” em, por exemplo, poeira, radiação e vácuo. Há posteriormente uma descrição mais precisa de cada um desses casos, assim como seus tensores de energia-momento.

Utilizando a velocidade normalizada, dada pela equação (68), pode-se separar o tensor energia-momento do fluido cosmológico em

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu - p h_{\mu\nu} + q_{(\mu} v_{\nu)} + \pi_{\mu\nu}. \quad (89)$$

Nesta expressão,  $\rho$  representa a densidade de energia,  $p$  a pressão,  $q_\mu$  a propagação de calor e  $\pi_{\mu\nu}$  é a pressão não isotrópica do fluido cosmológico. Neste formato, a equação (89) não representa somente um fluido especial, mas sim o mais geral dos fluidos.

Entretanto, procura-se estudar somente o universo constituído por fluidos especiais. Com isto  $q_\mu$  e  $\pi_{\mu\nu}$  são nulos na (89). Logo o tensor aqui utilizado é

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu - p h_{\mu\nu}, \quad (90)$$

que por meio das propriedades inerentes à  $v_\mu$ , pode ser invertida como  $\rho = T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$  e  $p = \frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$ . Após obter a expressão que descreve o tensor energia-momento, o caminho

natural a ser seguido é obter a lei de conservação de energia do sistema. Tal conservação é representada pela forma covariante

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (91)$$

A conservação adiciona assim uma equação de movimento extra, quando se analisa as equações de Friedmann, como se apresenta no presente estudo. A equação é dada, portanto, por

$$\dot{\rho} + (\rho + p) \Theta = 0. \quad (92)$$

O elemento  $\Theta$ , da equação (92), depende basicamente do referencial e da métrica que descreve o universo. Por outro lado  $p$  e  $\rho$  são variáveis que dependem do referencial e do material. Isto é, da matéria que compõe o universo e conseqüentemente distorce o espaço-tempo.

Como já foi dito, diversas épocas do universo podem ser descritas considerando a dominância de determinada matéria. Entretanto, o universo pode ser modelado com uma mistura de elementos, de maneira a ser mais realista. De acordo com (CARVALHO et al., 2006; ABRAMO; PINTO-NETO, 2006; CHO; KEUM, 1998; MATOS; GUZMAN; URENA-LOPEZ, 2000; MATOS; VAZQUEZ-GONZALEZ; MAGANA, 2009; URENA-LOPEZ; REYES-IBARRA, 2009; MAGANA et al., 2012; ROBLES; MATOS, 2012; MATOS; GUZMAN, 2000; SUÁREZ; ROBLES; MATOS, 2014; URENA-LOPEZ, 2009; MAGANA; MATOS, 2012), diversos modelos podem ser pensados como campos escalares no papel de DM. Existe também em (JENTSCHURA; WUNDT, 2013; BABOUROVA; FROLOV; KOSTKIN, 2011; SUN; SHEN, 2006) casos onde campos de Dirac são levados em conta. Por fim, e é neste caso onde o presente trabalho se insere, há casos onde campos espinoriais são modelados fazendo o papel de DM (ou energia escura).

Todos estes casos são estudados simplesmente se adicionando tensores energia-momento correspondentes aos novos elementos no lado direito da equação de Einstein, junto com  $T_{\mu\nu}$ . Para o caso da matéria que se comporta como fluido perfeito, poeira, radiação, etc, termos extras são adicionados às densidades de energia ( $\rho$ ) e às pressões ( $p$ ).

Antes de verificar os tipos de materiais dominantes mais comuns na literatura, deve-se considerar que pode existir uma dependência entre  $p$  e  $\rho$ , dada pela equação característica

$$p = \omega\rho, \quad (93)$$



onde  $\omega$  é uma constante e seu valor indica o tipo de matéria estudada. Verifica-se também uma ligação íntima entre as expressões (90) e (93), como se pode ver nos exemplos de materiais mais a seguir.

Como antes mencionado a dinâmica de expansão do universo é descrito pela métrica FLRW. Para esta métrica e considerando o referencial comoviente se obtém que  $\Theta = 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ . Logo a equação (92) é reescrita como

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\rho + p) = 0. \quad (94)$$

Aliando esta equação com a equação característica, (93), gera o seguinte formato para a densidade de energia

$$\rho \sim a(t)^{-3-3\omega}, \quad (95)$$

que por consequência possui diferentes valores para cada tipo de material.

### 3.1.1 Radiação

Para um universo completamente tomado por radiação é razoável que as partículas fundamentais e a radiação (já que as grandes estruturas como galáxias não foram formadas) se encontrem em equilíbrio térmico. Resultando então na seguinte aproximação:

$$p = \frac{\rho\langle v^2 \rangle}{3c^2}, \quad (96)$$

onde  $\langle v^2 \rangle$  é o valor médio do quadrado da velocidade dos constituintes e  $c$  é a velocidade da luz. Quando altas temperaturas são consideradas é possível fazer a seguinte aproximação,  $p \approx \frac{\rho}{3}$  que remete à expressão exata do gás de fótons.

Pode-se inferir que o volume do universo é dado por  $a(t)^3$ . Logo, se o universo é preenchido por radiação, acredita-se, por aproximação, que o número de fótons com frequência  $\nu$  se conserve. Isto é, dada a densidade

$$\rho = \frac{N(\nu)h\nu}{a(t)^3}, \quad (97)$$

$N(\nu)$ , que representa o número de fótons, é constante. Como observado em (3.1.4), a frequência  $\nu$  é proporcional à  $a(t)^{-1}$ . Sendo assim, a forma final para a densidade de energia é

$$\rho_{rad} \sim \frac{1}{a(t)^4}. \quad (98)$$

Tal expressão é prontamente respeitada ao se substituir  $\omega = \frac{1}{3}$  em (95).

### 3.1.2 Poeira

Neste caso, ao invés da conservação do número de fótons, é a conservação da massa que indica a forma da densidade de energia. Isto é,  $\rho a(t)^3 = cte$ , onde  $a(t)^3$  representa o volume. Sendo assim, a densidade é proporcional à

$$\rho_{po} \sim \frac{1}{a(t)^3}. \quad (99)$$

Por meio da equação (95) e a proporção anterior se descobre que  $\omega = 0$ , que resulta finalmente em  $p = 0$  para um universo dominado por poeira.

### 3.1.3 Vácuo

O vácuo consiste em um caso especial que pode ser simplesmente reinterpretado como uma constante cosmológica, que muitas vezes é encarada como a energia do vácuo. A adição de um termo do tipo constante cosmológica nas equações de Einstein é dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}. \quad (100)$$

A motivação de se criar tal termo se faz presente no modelo de Einstein, apresentado na seção a seguir. Comparando o termo da constante cosmológica, descrito pelo terceiro termo do lado esquerdo de (100), com (90) resulta em

$$\rho v_\mu v_\nu - p(g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu) = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (101)$$

que é prontamente satisfeito para  $p = -\rho$  com  $\Lambda = \rho$ . Como pode se verificar este resultado independe do referencial adotado. Isto significa que a equação característica mantém seu formato  $p = \omega\rho$  para quaisquer escolhas de  $v_\mu$ . Ao substituir  $\omega = -1$  em (95) o caráter de constante cosmológica de  $\rho$  é novamente recuperado ( $\rho = \Lambda$ ).

### 3.1.4 Desvio para o Vermelho

Depois de se poder descrever a expansão do Universo, por meio do fator de escala  $a(t)$ , permanece ainda uma questão em aberto. Esta, refere-se ao modo pelo qual este fator é medido de acordo com observações. Isto é, averiguar se, de fato, a função  $a(t)$  descreve a natureza. As mais importantes informações cósmicas sobre o fator de escala são obtidos por meio do “redshift”.

Este fenômeno se baseia na observação de objetos muito distantes, onde a radiação captada tem a sua frequência alterada devido às variações no fator de escala  $a(t)$ . Eis a seguir um exemplo simplificado de como isto de fato ocorre.

Imagina-se que há um observador na origem do sistema e que se aproximam dele, radialmente ( $d\theta = 0$  e  $d\phi = 0$ ), raios luminosos. Como se sabe um raio de luz é representado por um elemento de linha nulo, i.e.  $ds = 0$ . De acordo com a métrica FLRW e o elemento de linha, dado pela equação (60), tem-se que

$$\frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (102)$$

onde o sinal na frente da expressão do lado direito depende do sentido percorrido pelos fótons. Neste caso o sinal é negativo, já que a radiação vai de encontro ao observador. Posteriormente se integra a equação (102) nos limites de  $r_1$  e  $t_1$ , que são a posição comovente e tempo inicial correspondente à emissão, e 0 e  $t_0$ , que indicam a origem e o seu tempo.

Deste modo, escreve-se

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (103)$$

com os limites de integração de tempo invertidos por conta do sinal negativo. O lado direito dá origem a uma função que não depende do tempo. Deste modo, pode-se tomar a variação de (103) para se obter

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}. \quad (104)$$

É possível interpretar os intervalos de tempo  $\delta t_0$  e  $\delta t_1$  como frequências observadas, i.e.  $\nu_0 = 1/\delta t_0$  e  $\nu_1 = 1/\delta t_1$ . Por consequência se pode reescrever (104) da seguinte maneira

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \quad (105)$$

Ao observar esta forma se conclui que se o fator de escala está em expansão a frequência observada está diminuindo. Este é justamente o fenômeno do “redshift”, pelo qual se baseiam umas das medidas atuais que indicam que o universo está de fato em expansão. Coloca-se a equação (105) em um formato convencional como

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}, \quad (106)$$

onde  $z = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ , para  $\lambda$  como comprimento de onda da radiação captada. Deste modo, identifica-se o regime no qual o universo se encontra por meio do parâmetro  $z$ . Logo,

- $z > 0 \rightarrow$  universo em contração

- $z = 0 \longrightarrow$  universo estático
- $z < 0 \longrightarrow$  universo em expansão

Foi utilizando este princípio que Hubble constatou um desvio para o vermelho no ano de 1929.

### 3.1.5 Horizonte de Eventos

Outro conceito importante na cosmologia é o horizonte de eventos. Neste se estipula um limite no qual informações de dois eventos, em distintas localizações no espaço-tempo, não podem ser trocadas. Isto é, dada uma velocidade máxima na qual uma partícula viaja deve existir um limiar, um horizonte, onde esta pode alcançar. Para isso se lança mão do lado direito da equação (103) para descrever a distância entre certo ponto do espaço com distância  $r_1$  da origem. Denomina-se tal função por  $f(r)$ , logo

$$f(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}. \quad (107)$$

Tecnicamente a distância entre o ponto  $r = r_1$  e  $r = 0$  (origem) é dado por

$$l(t) = a(t)f(r_1). \quad (108)$$

Pode-se reescrever a equação (103) de maneira que um fóton emitido em direção à origem

$$\int_{t_e}^t \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_e}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}, \quad (109)$$

onde  $t_e$  é o tempo de emissão e  $r_e$  é o ponto onde o mesmo foi emitido. Segue desta expressão que

$$f(r) = f(r_e) - \int_{t_e}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (110)$$

Ao se supor que o segundo termo do lado direito de (110) é limitada e convergente, com valor de  $f_0$ . Neste limite, portanto, a origem é atingido pelo fóton que partiu do ponto  $r_0$  depois de um tempo infinito. Isto é,

$$f(r) = f(r_0) - \int_{t_e}^{\infty} \frac{dt}{a(t)} = f(r_0) - f_0 = 0. \quad (111)$$

Desta expressão se obtém o limite que se procura nesta subseção. Os tempos anteriores a  $t_0$  resultam que  $f(r) > f(r_e)$ , que por sua vez indica que tais fótons nunca serão observados.

Se passarmos essa ideia para o início dos tempos se obtém que

$$f(r) = f(r_e) - \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (112)$$

Sendo assim um fenômeno somente é observado se  $f(r)$  se anular. De modo que só é possível saber se uma partícula é observada se a integral  $\int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$  converge para  $t_0 \rightarrow 0$ .

### 3.2 Modelos Cosmológicos

Nesta seção seguem descritos alguns modelos cosmológicos baseados no conteúdo caracterizado anteriormente. Aqui segue apresentado qual é o comportamento cosmológico do universo de acordo com sua composição.

Ao se adotar o referencial comovente, tem-se que  $v_\mu = \delta_\mu^0$ , que por sua vez resulta no seguinte formato para o tensor energia-momento (90).

$$T_{\mu\nu} = \rho \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - p (g_{\mu\nu} - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0), \quad (113)$$

logo para  $\mu = 0$  e  $\nu = 0$

$$T_{00} = \rho. \quad (114)$$

Substituindo (114) no termo “00” da equação de Einstein resulta em uma das equações de Friedmann.

$$G_{00} + \Lambda g_{00} = -\kappa^2 \rho \rightarrow -3 \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 - \frac{3k}{a(t)^2} + \Lambda = -\kappa^2 \rho. \quad (115)$$

Esta equação é primordial para se tratar de expansão do universo. Em outras palavras, considerando um universo isotrópico e homogêneo conduz a escolha da métrica FLRW, que por consequência resulta na equação (115). Tal equação faz parte do “script” de todos os modelos cosmológicos aqui presentes. Como é possível verificar nas seções posteriores, ela se torna um elemento fundamental para testar o modelo adotado com os dados observacionais.

Outra equação importante utilizada para testar a viabilidade do modelo frente aos dados observacionais é a segunda equação de Friedmann. Por simplicidade, a primeira equação carrega informação somente do termo  $\dot{a}(t)^2$  enquanto que a segunda carrega informação do termo  $\ddot{a}(t)$ . Para obter informações a respeito de  $\ddot{a}(t)$ , deve-se utilizar os outros termos diagonais da equação de Einstein, isto é

$$G_{11} + \Lambda g_{11} = -T_{11} \rightarrow 2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}(t)^2 - k + \Lambda a(t)^2 = \kappa^2 p a(t)^2, \quad (116)$$

que depois de simplificações gera

$$2 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 - \frac{k}{a(t)^2} = \kappa^2 p - \Lambda. \quad (117)$$

Como segue descrito na seção de fundamentos observacionais de cosmologia, o fator de escala é o protagonista em qualquer tentativa de se descrever o universo por meio dos modelos propostos. Grande parte do trabalho nesta área é encontrar uma expressão analítica que descreve  $a(t)$ .

A receita a ser seguida é “simplesmente” inserir matéria no lado direito das equações de Einstein e resolver as equações de Friedmann correspondentes, juntamente com as leis de conservação. Entretanto a forma de  $a(t)$  depende de valores iniciais, que logicamente não são conhecidos. A solução para a forma de  $a(t)$  e os vínculos observacionais da teoria se baseiam na razão de valores chaves, apresentadas a seguir, em épocas distintas.

A primeira grandeza a ser obtida é a constante de Hubble, dada por  $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ . Reescrevendo (115) em função de H dá origem a

$$H^2 = \frac{\kappa^2 \rho}{3} - \frac{k}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (118)$$

Outra importante grandeza informa a aceleração de expansão do universo. Ela é conhecida como parâmetro de desaceleração e é descrita como:

$$q = \frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}(t)^2}. \quad (119)$$

Para obter a expressão de  $\ddot{a}(t)$ , subtrai-se (118) da equação (117) que resulta, após algumas manipulações, em

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{1}{6}\kappa^2(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (120)$$

Para dar sequência se define a chamada densidade crítica, definida quando  $\Lambda = 0$ .

$$\rho_c = \frac{3}{\kappa^2} \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{3H^2}{\kappa^2}. \quad (121)$$

Pode-se então reescrever (118) da seguinte forma

$$k = \frac{a(t)^2}{3} (\rho - \rho_c). \quad (122)$$

Isso permite determinar o tipo de universo estudado a partir da comparação entre  $\rho$  e  $\rho_c$ .

Em outras palavras, tem-se que

$$\begin{aligned} \rho &> \rho_c \Rightarrow k > 0 \Rightarrow k = 1 \\ \rho &= \rho_c \Rightarrow k = 0 \\ \rho &< \rho_c \Rightarrow k < 0 \Rightarrow k = -1. \end{aligned} \quad (123)$$

Com isto, independentemente da escolha dos constituintes do universo, as curvaturas são 1, 0 e  $-1$  conforme a densidade é maior, igual ou menor que  $\rho_c$ . A equação (120) pode ser reescrita em função da densidade crítica, de forma que

$$q = \frac{\rho + 3p}{2\rho_c} \quad (124)$$

Um exemplo de análise é imaginar o universo constituído em sua maioria por matéria não-relativística  $p \ll \rho$ . Neste caso a constante de curvatura pode ser 1, 0 e  $-1$  para  $q > \frac{1}{2}$ ,  $q = \frac{1}{2}$  e  $q < \frac{1}{2}$ , respectivamente. A diferença entre  $\rho$  e  $\rho_c$  é fruto da escolha do material que constitui o universo e/ou a presença da energia do vácuo ( constante cosmológica,  $\Lambda$ ).

Esta análise é comum para os dias atuais, ou seja, o tempo adotado para todas as variáveis é  $t_0$ , que por sua vez converte  $H \rightarrow H_0$ , que é o parâmetro de Hubble corrente. Para  $t = t_0$ , a densidade crítica é dada por

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.878 \times 10^{-29} h^2 g/cm^3, \quad (125)$$

onde  $h$  é a constante de Hubble em unidades de  $100 km s^{-1} (Mpc)^{-1}$ . Verifica-se na seção (3.4) algumas informações adicionais sobre  $H_0$ , assim como a maneira que o seu valor é determinado. Para  $k = 0$  se obtém soluções bem simples para o universo dominado por poeira, radiação e vácuo.

### 3.2.0.1 Poeira

Neste caso  $\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}$  e a solução de equação (115) resulta em  $a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}$ , com  $q_0 = \frac{1}{2}$ . Da definição de idade do universo, descrito na seção observacional, tem-se que a mesma é dada por  $t_0 = \frac{2}{3H_0} = 6.52 \times 10^9 h^{-1}$  anos, para este caso.

### 3.2.0.2 Radiação

Para a radiação dominante no universo, a densidade é dada por  $\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}$ . O fator de expansão é  $a(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$  com  $q_0 = 1$ , onde a idade do universo para esse caso é dada por  $t_0 = \frac{1}{2H_0}$ .

### 3.2.0.3 Vácuo

A descrição do vácuo infere que  $T_{\mu\nu} = -\rho g_{\mu\nu}$ , onde  $p = -\rho$ . Aqui  $\rho$  é constante e o fator de expansão é dado por  $a(t) \sim e^{Ht}$ , onde a constante de Hubble é sempre constante e dada por  $H = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}$ , com  $q_0 = -1$ .

Apesar dos três casos anteriores, uma situação mais realista é a mistura de materiais. Esta mistura está melhor descrita na seção correspondente ao modelo de Friedmann, apresentado a seguir.

### 3.2.1 Modelo de Einstein

Neste modelo, idealizado por Einstein, descreve-se um universo estático e imutável. Como é possível verificar no decorrer da descrição do universo a seguir, este modelo se demonstra incompatível de acordo com a equação de Raychaudhuri, dado por (88). Como a crença de Einstein nesse tipo de universo era despida de base científica foi necessário a introdução da constante cosmológica para ajustar o problema constatado na equação de Raychaudhuri. Apesar do mesmo ter encarado esta constante como o seu maior erro, verifica-se em diversos modelos que sua interpretação física é enigmática e ainda não constatada fisicamente. Do ponto de vista de teoria de campos essa seria a energia do “ground state” de todos os campos, cujas partículas representam o MP. Por outro lado, a mesma é vista como a energia do vácuo presente nas observações e interpretadas pelo modelo  $\Lambda$ CDM, o modelo mais aceito pela comunidade científica. A discrepância nos valores de ambos os pontos de vista dá origem ao famoso problema da constante cosmológica. Neste trabalho foi verificado que a constante cosmológica pode ser originada pelo campo espinorial ELKO ao agir como DE.

A curvatura do universo neste modelo é dada por meio da matéria, descrita pela densidade de energia  $\rho$ , com a velocidade do fluido em um sistema comovente dada por  $v^\mu = \delta_\mu^0$ . Neste cenário, onde o fluido é estático, não possui rotação, não acelera e não se deforma a equação de Raychaudhuri é dada por

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0. \quad (126)$$



Para obter  $R_{\mu\nu}$  se pode inverter a equação de Einstein, dada por (51) e com a presença da constante cosmológica, de maneira que

$$R_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (127)$$

Ao substituir (127) em (126) é possível verificar que a ausência da constante cosmológica acarreta em uma incoerência na estrutura na qual o universo foi imaginado inicialmente. Seria necessário que  $\rho$  fosse nulo para que (126) fizesse sentido. Por esse motivo Einstein lançou mão da ideia de inserir um termo à mão em suas equações. Sendo assim, tem-se que

$$\rho = 2\Lambda. \quad (128)$$

Uma vez tendo que  $a(t)$  é constante, basta encontrar  $\sigma(\chi)$  (equação (62)) para descrever o modelo de Einstein completamente, uma vez que  $N(t) = 1$ . Os componentes “00”, “11” e “22” da equação (127) resultam nas seguintes expressões, respectivamente:

$$\frac{3\epsilon}{a(t)^2} = 8\pi G\rho + \Lambda, \quad (129)$$

$$\frac{1}{a(t)^2} \left[ 2 \frac{\sigma''(\chi)}{\sigma(\chi)} + 3\epsilon \right] = \Lambda \quad (130)$$

e

$$\frac{1}{a(t)^2} \frac{\sigma''(\chi)}{\sigma(\chi)} = -\Lambda. \quad (131)$$

Ao substituir estes valores na definição do escalar de curvatura, descrita pela equação (64), obtém-se que a mesma é dado por

$$R = 4 \frac{\sigma''(\chi)}{\sigma(\chi)} - \frac{2}{\sigma(\chi)^2} + 2 \left( \frac{\sigma'(\chi)}{\sigma(\chi)} \right)^2 = 6\epsilon \quad (132)$$

que consequentemente resulta em  $\epsilon = 1$ . Substituindo esta informação na equação (129) possibilita encontrar uma relação entre a densidade de energia e a constante cosmológica, dada por

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G}. \quad (133)$$

Conclui-se, portanto, que a métrica que descreve o modelo de Einstein, segundo a equação (62), é dada por

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{\Lambda} \left[ d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (134)$$

algo que claramente não atende as expectativas consequentes das observações, já que o universo foi “criado” como sendo estático por Einstein logo no começo de suas deduções.

### 3.2.2 Modelo de Lemâitre

Neste modelo, proposto por Lemâitre aproximativamente no ano de 1920, propõe-se que o universo possui uma constante cosmológica não nula, onde a densidade de energia é desprezível frente à própria constante. Desta maneira as equações de Einstein originam as seguintes expressões

$$3 \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 + \frac{3k}{a(t)^2} = -\Lambda \quad (135)$$

e

$$2 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 + \frac{1}{a(t)^2} \frac{\sigma''(\chi)}{\sigma(\chi)} = -\Lambda. \quad (136)$$

Destas duas equações se pode ramificar três diferentes casos de acordo com o tipo de universo considerado,  $k = -1$  para universo aberto,  $k = 0$  para universo euclideano e  $k = 1$  para universo fechado. Estão estes três casos apresentados em seguida

- Universo Aberto ( $k = -1$ ):

Para este tipo de universo as equações (135) e (136) são dadas por

$$3 \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 - \frac{3}{a(t)^2} = -\Lambda \quad (137)$$

e

$$2 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 - \frac{1}{a(t)^2} = -\Lambda, \quad (138)$$

onde para isso, a função  $\sigma(\chi)$  é igual a  $\sinh(r)$ . Neste caso o parâmetro de expansão é dado por  $\sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} \sinh(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t)$  quando  $\Lambda > 0$  e  $\sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} \sin(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t)$  para  $\Lambda < 0$ .

- Universo Euclidiano ( $k = 0$ ):

O universo Euclidiano é representado pelas seguinte equações

$$3 \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = -\Lambda \quad (139)$$

e

$$2 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = -\Lambda. \quad (140)$$

Quando  $k = 0$ , tem-se que  $\sigma(\chi) = r$ . Neste caso o fator de expansão é dado por  $a(t) = a_0 e^{\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}} t}$ , que de acordo com a equação (139), força que a constante cosmológica deva ser negativa ( $\Lambda < 0$ ).

- Universo Fechado ( $k = 1$ ):

Por fim, o universo fechado é descrito por

$$3 \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 + \frac{3}{a(t)^2} = -\Lambda \quad (141)$$

e

$$2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 + \frac{1}{a(t)^2} = -\Lambda. \quad (142)$$

com a função  $\sigma(\chi)$  dada por  $\sin(r)$ . Para este caso, tem-se que o fator  $a(t)$  é dado por  $\sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} \sinh(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}t)$ , com a obrigatoriedade de  $\Lambda$  ser negativa, de maneira que (141) faça sentido.

Verifica-se, com exceção do caso onde  $a(t) = \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} \sin(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}t)$ , que todas as soluções conduzem a casos de universo em expansão. Todavia, a expansão acelerada, ditada pelos dados observacionais, não se adéqua aos mesmos. Na seção sobre a dinâmica de expansão existem justificativas que demonstram que o modelo de Friedmann melhor ajusta os dados experimentais. Por este motivo ele é considerado o modelo melhor aceito pela comunidade científica.

### 3.2.3 Modelo de Friedmann

O modelo de Friedmann, ou modelo  $\Lambda$ CDM é uma outra classe de modelo onde se pode ter o Universo se expandindo aceleradamente. Na seção a seguir, intitulada dinâmica de expansão, descreve-se como o presente modelo é a melhor aproximação para interpretar os dados observacionais. Como já visto anteriormente, diversos tipos de materiais podem ter dominado o universo de forma a deformá-lo de maneira a termos diferentes parâmetros de expansão. Foram estudados os casos da poeira, radiação e vácuo, por exemplo. Cada um desses materiais pode ter ditado a maneira pela qual o universo se comportou em determinada fase de sua existência. Entretanto o cenário atual não comporta um universo no qual apenas um elemento domine. Por esse motivo, com o modelo de Friedmann, busca-se fazer uma mistura de materiais de maneira que um cenário mais geral e amplo possa ser estudado.

Recapitulando, as equações de Einstein são dadas por

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 + \frac{k}{a(t)^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (143)$$

e

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p)a(t). \quad (144)$$

Nestas equações a parte de matéria, como também já visto, são representadas por  $\rho$  e  $p$ , que representam a densidade de energia e pressão de um fluido perfeito. Como todos os

materiais estudados são considerados fluidos perfeitos basta somar todas as densidades e pressões de todos os elementos. Desta forma a equação (143) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 + \frac{k}{a(t)^2} = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_m^0}{a(t)^3} + \frac{\rho_r^0}{a(t)^4} + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right), \quad (145)$$

onde  $\rho_m^0$  e  $\rho_r^0$  são as densidades de energia de poeira e radiação, respectivamente, em algum momento de evolução do universo. Tais constantes são, em outras palavras, as constantes de integração originadas das expressões de densidade dependentes dos parâmetros de expansão, dados pelas equações (93) e (94), respectivamente.

Simplifica-se a expressão (145) por meio das seguintes redefinições

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}, \quad (146)$$

$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}, \quad (147)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G\rho_c}. \quad (148)$$

De modo que

$$k = \frac{8\pi G a(t)^2 \rho_c}{3} (\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - 1). \quad (149)$$

A interpretação das redefinições (146), (147) e (148) se baseia na ideia de diferentes densidades de material que compõe o universo. Uma maneira mais abrangente de ver a equação acima é interpretar o termo correspondente ao tipo de universo como sendo uma densidade também, logo

$$\Omega_k = -\frac{3k}{8\pi G a(t)^2 \rho_c}. \quad (150)$$

Desta maneira a equação (149) pode ser remanejada como uma pura soma de densidades onde o total dever ser 1 (ou 100%). A soma é dada simplesmente por

$$(\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k) = 1. \quad (151)$$

Conclui-se que esses “ $\Omega$ s”, que dependem do tempo, variam com o decorrer da evolução do universo e conseqüentemente modelam a maneira pela qual o universo se expande, ou seja, o parâmetro de expansão  $a(t)$ . Nota-se que somente  $\Omega_k$  pode ser negativo por conta da dependência direta com o fator  $k$ . Na próxima seção se apresenta como determinar o valor de  $\Omega_k$  a partir da densidade de outros elementos do universo. Em outras palavras, este

processo indica qual é o tipo de universo, pelo menos nos dias de hoje. Para isso basta ver o sinal desta densidade ou se a mesma é igual a zero.

Conclui-se, portanto, que com esse tipo de modelo é possível analisar o universo de maneira mais completa sem abrir mão da homogeneidade e isotropia do universo, como se pode verificar nos dois modelos seguintes, de Gödel e de Kasner.

### 3.2.4 Modelo de Kasner

Como visto anteriormente existe o chamado horizonte de eventos, relacionado com um limite do universo o qual não se tem acesso devido a sua idade e sua taxa de expansão. Desta forma, dependendo dos tempos, distintas regiões do espaço não se comunicam, o que poderia ser um problema para justificar a homogeneidade do universo e o processo pelo qual o mesmo se tornou homogêneo. Uma forma de contornar esse problema seria admitir que numa determinada época o universo era anisotrópico. Tanto o presente modelo, de Kasner, quanto o apresentado a seguir, de Gödel, possuem métricas anisotrópicas.

Neste modelo, proposto pelo matemático Kasner em 1921, a evolução do universo ocorre sem interferência apreciável da matéria. A métrica do modelo é dada por

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dx^2 - b(t)^2 dy^2 - c(t)^2 dz^2, \quad (152)$$

onde cada um dos fatores  $a(t)$ ,  $b(t)$  e  $c(t)$  são análogos do fator de expansão associado aos modelos homogêneos e isotrópicos apresentados até então. Pode-se, ao observar a estrutura de (152), concluir que, se todos os parâmetros forem de fato diferentes, o universo se expandiria de distintas maneiras na direção de cada eixo espacial. O termos não nulos do tensor de Ricci são dados por

$$R_{00} = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\ddot{b}(t)}{b(t)} - \frac{\ddot{c}(t)}{c(t)}, \quad (153)$$

$$R_{11} = a(t) \left[ \ddot{a}(t) + \dot{a}(t) \left( \frac{\dot{b}(t)}{b(t)} + \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \right) \right], \quad (154)$$

$$R_{22} = b(t) \left[ \ddot{b}(t) + \dot{b}(t) \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \right) \right], \quad (155)$$

$$R_{33} = c(t) \left[ \ddot{c}(t) + \dot{c}(t) \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{b}(t)}{b(t)} \right) \right]. \quad (156)$$

Um universo sem matéria, e sem constante cosmológica, resulta, de acordo com a equação (127), em  $R_{\mu\nu} = 0$ . Desta forma é necessário que as expressões (153), (154), (155) e (156) sejam nulas individualmente. Kasner propôs uma série de soluções baseadas em potências de  $t$ . De forma que

$$a(t) = t^{p_1}, \quad (157)$$

$$b(t) = t^{p_2}, \quad (158)$$

$$c(t) = t^{p_3}, \quad (159)$$

onde  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  são constantes. Ao supor tal classe de soluções se encontra duas restrições que as constantes  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  devem respeitar. Tais restrições são dadas por

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad (160)$$

$$(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 = 1. \quad (161)$$

Para a velocidade  $v^\mu = \delta_0^\mu$ , os parâmetros relacionados ao tensor  $Q_{\alpha\mu}$  são os seguintes

$$\Theta = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{b}(t)}{b(t)} + \frac{\dot{c}(t)}{c(t)}, \quad (162)$$

$$\sigma_1^1 = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \frac{1}{3}\Theta, \quad (163)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\dot{b}(t)}{b(t)} - \frac{1}{3}\Theta, \quad (164)$$

$$\sigma_3^3 = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \frac{1}{3}\Theta, \quad (165)$$

$$\omega_{\mu\nu} = 0. \quad (166)$$

Por meio destes parâmetros se conclui que o universo, segundo este modelo, de fato se expande de forma distinta nos três eixos espaciais, logo de maneira anisotrópica por conta de (163), (164) e (165)), e que não possui rotação, de acordo com (166). Por conta tanto do horizonte, quanto da singularidade inicial, o presente modelo pode caracterizar um estágio anterior, quiza caótico, ao modelo de Friedmann.

### 3.2.5 Modelo de Gödel

O modelo de Gödel pertence a uma outra classe de modelos, que diferentemente de Friedmann, não são homogêneos. Neste caso há a existência de matéria com pressão nula e densidade de energia constante em toda a extensão do universo (i.e.  $T_{\mu\nu} = \rho\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0$ ). A peculiaridade deste modelo reside no fato de existirem curvas as quais é possível a comunicação com o passado, ou seja, existe uma região do universo que é acausal. Entretanto essa propriedade somente é apreciável numa geometria que não a cartesiana nos termos espaciais. Foca-se, portanto, nesta seção somente as propriedades mais gerais de uma métrica não homogênea (para mais detalhes se pode consultar (NOVELLO et al., 2010)).

A métrica referente ao modelo de Gödel é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{cx} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ e^{cx} & 0 & \frac{1}{2}e^{2cx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (167)$$

Os termos não-nulos dos tensores de Ricci, correspondentes à métrica (167) são dados por

$$R_{00} = c^2, \quad (168)$$

$$R_{02} = c^2 e^{cx}, \quad (169)$$

$$R_{20} = c^2 e^{cx}, \quad (170)$$

$$R_{22} = c^2 e^{2cx}. \quad (171)$$

Por outro lado o escalar de curvatura é

$$R = c^2. \quad (172)$$

Ao substituir os termos recém apresentados e a parte de matéria ( $T_{\mu\nu} = \rho\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0$ ) na equação de Einstein (com constante cosmológica e  $\kappa = 1$ ) se obtém

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left( \frac{c^2}{2} - \Lambda \right) + \rho\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0. \quad (173)$$

Conclui-se, por meio dos termos “00” e “11” de (173) que

$$\rho = 2\Lambda = c^2. \quad (174)$$

Sendo assim tanto  $\rho$ , quanto  $\Lambda$  devem ser positivos, uma vez que a quantidade  $c^2 > 0$ .

### 3.3 Dinâmica de Expansão

Nesta seção se procura dar continuidade na explicação sobre a dinâmica de expansão do universo. Por duas vezes neste capítulo se analisa o comportamento de diferentes materiais quando estes compõem o universo. Primeiramente foram estudados os seus comportamentos frente as equações de conservação (conservação do tensor energia-momento). Neste se analisa três diferentes possibilidades, que são a radiação, poeira e vácuo, descritos em (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.3), respectivamente. Nestas subseções se apresenta as equações correspondentes de cada matéria com relação ao parâmetro de expansão, onde suas deduções surgem das próprias equações de conservação junto com a equação característica  $p = \omega\rho$ .

Por outro lado, num segundo instante, analisa-se as equações de Friedmann, pelas quais se pode caracterizar a expansão do universo, por exemplo. Neste tratamento o foco principal se baseia nas equações (118) e (367), pelas quais se estuda a composição e a aceleração de expansão do universo. Deste modo nesta segunda parte é possível fazer a conexão entre  $H^2 \longleftrightarrow \rho$ . Conforme visto nas subseções (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.3), torna-se possível descrever a densidade de energia de cada elemento por meio da densidade crítica e o fator de expansão  $a(t)$ . Todavia este estudo é realizado de maneira individual, como se o universo fosse constituído por somente aquele material específico. Logo, um cenário mais realista se dá por meio da mistura de diferentes elementos na constituição do universo. Neste caso se escreve a densidade de energia como

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[ \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{r0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 \right], \quad (175)$$

onde os parâmetros de densidade  $\Omega_i$  são escritos de forma que

$$\Omega_i = \frac{\rho_{0,i}}{\rho_{0,crit}}. \quad (176)$$

De acordo com a equação (118) se determina a conservação de densidade de energia do universo, descrita por

$$\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{k0} = 1, \quad (177)$$



onde os termos  $\Omega_{\Lambda 0}$  e  $\Omega_{k0}$  são dados por

$$\Omega_{\Lambda 0} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \quad (178)$$

$$\Omega_{k0} = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}. \quad (179)$$

Entende-se estes parâmetros  $\Omega$ s como sendo as densidades de energia correspondentes a certa parcela do universo num dado instante do tempo. Deste modo a equação (177) mostra que a densidade de energia de tudo que está contido no universo é igual a 1. Entretanto, segundo a formulação da equação de Friedmann (118) também “ganham” a sua parcela de contribuição para formar o universo. Por este motivo as densidades (178) e (179) também devem entrar nos cálculos.

Segue um exemplo que esclarece o papel destas densidades. Existe um termo muito utilizado em cosmologia que é “o universo em que vivemos é quase plano”. À primeira vista, considerando somente a constante  $k$ , imagina-se esta afirmação como absurda, já que  $k$  somente pode assumir os valores 1, 0 e  $-1$  para espaço fechado, plano e aberto, respectivamente. Por outro lado, por meio da equação (179), verifica-se que os valores possíveis podem ser dos mais diversos, de acordo com  $a_0^2 H_0^2$ . A determinação destes valores segue da equação que é apresentada em seguida.

Finalmente se obtém, por meio da equação de Friedmann (118) e as equações (175) e (177), que

$$H^2 = H_0^2 \left[ \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{r0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 + (1 - \Omega_{\Lambda 0} - \Omega_{m0} - \Omega_{r0}) \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \right]. \quad (180)$$

É por meio da equação (180) que se faz a conexão entre o modelo estudado e as observações. Como se observa na equação (106), pode-se escrever as razões  $\frac{a_0}{a}$  em função do parâmetro  $z$ , que indica o desvio para o vermelho e conseqüentemente a expansão do universo. Logo, por meio de medições de  $z$  e do parâmetro de Hubble correspondente para a época, torna-se possível obter uma curva quando se utiliza a equação (180). Na próxima seção seguem descritos algumas informações adicionais sobre  $H_0$ . Conclui-se com esta curva, portanto, que se pode escrever as densidades correspondente de modo a ajustar o modelo e a curva experimental.

Por meio desta curva é que se obtém as densidades que são utilizadas ao longo desta tese para o teste dos modelos cosmológicos com o ELKO. Por questão de completeza, entende-se melhor o exemplo anterior a equação (180) ao se saber que o valor de  $\Omega_{k0}$  é

negativo e muito pequeno. Deste modo o universo possui  $k = 1$  com  $a_0^2 H_0^2$  sendo muito grande.

Encerra-se esta seção mencionando que o modelo recém apresentado, descrito pela equação (180), é o modelo  $\Lambda$ CDM, já visto anteriormente. Este é considerado, por grande parte da comunidade científica, como o modelo que melhor reproduz os dados observacionais do universo dos dias de hoje. Neste, considera-se o universo como sendo composto por constante cosmológica  $\Lambda$ , radiação e matéria escura fria (CDM), além da parcela da constante  $k$ . Deste modo, utiliza-se, ao longo desta tese, os resultados oriundos deste renomado modelo e os dados cosmológicos correspondentes a fim de testar o modelo proposto com o ELKO.

### 3.4 Observações

Assim como em outras áreas da física, a cosmologia demonstra ser totalmente dependente de observações a fim de confirmar seus modelos e teorias. Conforme visto ao longo deste capítulo, há uma gama de elementos teóricos construídos para se determinar a aceleração de expansão, a composição e idade do universo, por exemplo. Por conta desta tese não possuir um âmbito observacional e/ou experimental, procura-se apenas elencar alguns tipos de observações e medições importantes para a cosmologia. Detalhes aprofundados e técnicos sobre as observações podem ser obtidos na literatura.

Deste modo, foca-se nesta seção em “completar” a conexão entre as medições de “redshift” com os modelos cosmológicos, em especial o  $\Lambda$ CDM. Em outras palavras, dá-se aqui a origem dos possíveis valores do parâmetro de Hubble, conforme visto anteriormente em (125) e (180). Conforme visto na seção anterior, (3.3), a conexão entre modelo e observação passa pelas definições encontradas na seção (3.1.4) aliadas a estrutura do modelo de Friedmann, (3.2.3). Como também visto, na mistura dos conceitos fundamentais de ambas as vertentes é possível determinar os valores dos parâmetros  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$ ,  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_k$ .

Determina-se a composição do universo justamente por meio de tais parâmetros, possibilitando também estipular o regime de aceleração do mesmo via parâmetro  $q$ , dado pela equação (367). Conclui-se da seção (3.3) que são necessário a princípio dois parâmetros para obter as densidades  $\Omega$ , são eles  $z$  e  $H$ . Como o parâmetro  $z$  já foi discutido em (3.1.4), procura-se, por completeza, analisar o parâmetro de Hubble.

Escolhe-se apresentar esta relação entre “redshift” e modelo pois esta é a medição clássica utilizada para justificar a expansão do universo. O próprio Edwin Hubble já havia verificado este desvio para o vermelho. Apesar disto existem outros tipos de observações que geram resultados relevantes. Distância de supernovas, espectros de potência de matéria e da radiação cósmica de fundo, além da determinação do brilho das galáxias são apenas alguns tipos de medições fruto das observações.

Destas medidas se pode extrair diversas informações físicas relevantes. A radiação cósmica de fundo, por exemplo, serve como base para se afirmar que o universo é isotrópico e homogêneo. Deste modo, esta observação corrobora o princípio cosmológico, que serve como origem para toda a teoria cosmológica apresentada desde a métrica FLRW. Por conta da descoberta de um pico de radiação específico para as supernovas, fez-se possível utilizá-las como velas padrão. Criou-se programas, como o Supernova Cosmology Project e o High-z Supernova Team, cujos resultados experimentais possibilitaram um melhor mapeamento do universo. Por meio das medições do parâmetro  $z$ , definido em (106), impulsionou-se a criação de modelos que contivessem algum elemento com pressão negativa, de modo a possibilitar a expansão do universo.

Outro dado físico que pode ser estimado por conta das observações é a distribuição da massa das galáxias. Faz-se isso graças ao efeito Doppler que permite a estimativa das velocidades de rotação as galáxias. Aliando esta velocidade com a lei de Newton,  $GM(r)/r^2 = V(r)^2/r$ , tem-se uma estimativa da massa presente no núcleo da galáxia. Nesta expressão clássica  $G$  representa a constante gravitacional,  $M(r)$  é a massa do núcleo da galáxia,  $r$  é a distância entre as estrelas periféricas da galáxia e o seu centro e finalmente  $V(r)$  é a velocidade das estrelas. A análise da dispersão das velocidades é um estudo que corrobora a existência da DM, por exemplo. Para maiores informações e outros exemplos se pode consultar (STEVEN, 2008; NOVELLO et al., 2010).

A partir desta parte da seção, procura-se descrever o caminho entre os modelos cosmológicos e o “redshift”. De acordo com observações feitas por Hubble em 1931, confirma-se uma relação aproximadamente linear para as galáxias observadas. Verificou-se que

$$v = H_0 D, \tag{181}$$

onde  $v$  a velocidade de recessão e  $D$  é a distância até a galáxia do observador. Por outro lado  $H_0$  é o parâmetro de Hubble, já definido em (125). Reescreve-se aqui  $H_0$  em função do parâmetro adimensional  $h$  como:

$$H_0 = 100h \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}, \quad (182)$$

onde os dados de Hubble mostravam que  $h \approx 5$ . Entretanto os dados de Hubble não continham ainda dados referentes a dois tipo de cefeida. Tem-se que um dos projetos principais do telescópio Hubble era justamente a determinação de  $H_0$  por meio de uma série de métodos de medida de distâncias. Os resultados desse projeto foram os seguintes:

- $h = 0.71 \pm 0.2 \pm 0.6$  para supernovas Ia
- $h = 0.71 \pm 0.03 \pm 0.07$  para a relação de Tully-Fisher
- $h = 0.70 \pm 0.05 \pm 0.06$  para flutuações de brilho superficial
- $h = 0.72 \pm 0.09 \pm 0.07$  para supernovas do tipo II
- $h = 0.82 \pm 0.06 \pm 0.09$  para plano fundamental

Tem-se que as últimas incertezas representam erros sistemáticos.

Todas as medições determinam  $H_0$  por meio da relação (181), entre velocidade e distância. Já a combinação de todos os dados apresentados anteriormente resultam em  $h = 0.72 \pm 0.08$ , que é considerado como um padrão hoje em dia.

Deste modo, por meio de medidas recentes, procura-se determinar os valores de  $H$  dos dias de hoje, conforme a equação (180). Por outro lado, com as medições de “redshift”, com as quais também se obtém  $H$ , pode-se traçar uma curva que permite vincular os valores  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$ ,  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_k$ , conforme a seção anterior, (3.3). Ao final da seção (5.3) está contido um exemplo deste tipo de aplicação num modelo que possui o ELKO.

É no âmbito da determinação das densidades  $\Omega$  que a outrora mencionada questão da coincidência cósmica surge. Isto é, segundo (ADE et al., 2014), tem-se que para os dias de hoje as densidades da constante cosmológica ( $\Lambda$ ) e da DM (mais a matéria bariônica) são  $\Omega_m \simeq 0.315$  e  $\Omega_\Lambda \simeq 0.685$ . A questão a ser respondida é: Por que as densidades de  $\Lambda$  e matéria escura (DM) possuem, para os dias de hoje, a mesma ordem de grandeza?

Em outras palavras, acredita-se ser muito pouco provável o universo atual estar passando por um período privilegiado no qual os cientistas podem apreciá-lo. Uma maneira de explicar este cenário é justamente creditar a propriedade de interação e conversão de  $\Lambda$  em DM, por exemplo. Este é conhecido como problema da coincidência cosmológica, cujo

estudo, para aplicações do ELKO na cosmologia, segue apresentado nas seções (5.2.1) e (5.2.2).

## 4 Eigenspinoren des Ladungskonjugationsoperator: ELKO

Nesta parte está apresentada a estrutura básica utilizada por Ahluwalia e Grumiller na criação do espinor ELKO (AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005a; AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005b; AHLUWALIA, 2013), assim como suas características que o tornam um bom candidato a elemento “escuro”. A estrutura aqui presente é baseada em (ROGÉRIO, 2014; AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005b) e possui, portanto, o intuito de ser didático desde a caracterização dos espinores de Dirac e as suas principais diferenças com relação ao ELKO. Nesta diferenciação é mostrada a definição dos operadores de carga que dão nome ao espinor ELKO. Após o espinor de Dirac, a estrutura formal do ELKO é apresentada por meio de tais operadores. Também são descritos a sua forma explícita, o seu dual e suas relações de completeza e ortonormalidade. Tendo o ELKO sido definido, com suas principais características matemáticas, apresenta-se propriedades as quais se faz possível entender o ELKO como matéria ou energia escura. Nesta parte final se verifica se o espinor ELKO respeita as equações de Dirac e Klein-Gordon. Após esta verificação são obtidas as características de partícula do ELKO, suas possíveis interações e o seu propagador. Dentre essas características se destaca que o ELKO somente respeita Klein-Gordon e possui dimensão de massa um, de acordo com o seu propagador.

### 4.1 ELKO: Origem e Características

A nomenclatura ELKO é originada do acrônimo alemão **Eigenspinoren des Ladungskonjugationsoperators**, que significa autoespinores de operadores de conjugação de carga. O motivo do mesmo ser aplicado à cosmologia, como possível candidato à DE, deve-se ao fato dele possuir dimensão de massa 1. Por detrás desta propriedade, reside o fato de que este espinor somente respeita a equação de Klein-Gordon. Isto é, mesmo sendo o ELKO um campo associado à uma partícula fermiônica de spin  $1/2$ , ele não respeita a equação de Dirac. A dimensão de massa também é reflexo do propagador do ELKO corresponder ao propagador de um campo escalar. Tais propriedades refletem o fato de que as componentes espinoriais do ELKO estão relacionadas pelas matrizes de Pauli e não pela paridade. Ele, portanto, aparece em pé de igualdade com os campos escalares. Além disso, o ELKO não interage eletromagneticamente. Por esta e pelas razões anteriores o ELKO é chamado de espinor escuro (“Dark Spinor”).

Este capítulo está dividido em três seções distintas. Faz-se presente na primeira seção uma introdução básica da construção do espinor de Dirac. Com ela se procura apresentar a própria construção do espinor ELKO de forma mais contextualizada e didática, procurando elencar suas diferenças e semelhanças. Na segunda seção se apresenta, além da própria construção do ELKO, todas suas características mais fundamentais. Nesta, seguem subseções específicas sobre a sua estrutura, operadores conjugação de carga, a helicidade e o dual do ELKO, além da relação de completeza e ortonormalidade. Segue por fim na terceira seção alguns tópicos que justificam o ELKO como elemento “escuro”. Entre eles as partículas que o ELKO representa, seu propagador e suas principais interações.

#### 4.1.1 Construção de Espinor de Dirac

Como se sabe, a origem da equação de Dirac foi uma tentativa de banir a incômoda densidade de probabilidade negativa presente na equação de Klein-Gordon. Tal problema reside no fato da equação de Klein-Gordon possuir o fator  $E^2$ , que conseqüentemente conduz à energia negativa. Forçou-se, portanto, uma equação que fosse linear no operador Energia ( $i\hbar\partial_t$ ). Uma equação linear foi obtida, todavia uma nova e riquíssima estrutura física surgiu com este advento. Por outro lado, as energias negativas de outrora continuaram presentes só que de uma outra maneira sutil. As antipartículas, primeiramente consideradas um erro, ressurgiram de maneira mais elegante e limpa. Essa nova estrutura é formada pelos espinores e como bem se sabe eles são responsáveis pela caracterização das partículas de spin 1/2. Da mesma forma que se imagina a equação de Dirac como uma raiz quadrada da equação de Klein-Gordon, os espinores e as partículas de spin 1/2 emergem como um alicerce da física de partículas. Algo de fato fundamental e intrínseco da matéria. Com o vinda da Teoria de Campos estes espinores foram amplamente utilizados na caracterização dos campos dessa classe de partículas.

Da Teoria Quântica de Campos, tem-se que os campos de Majorana e de Dirac podem ser descritos pelos espinores de Dirac, que na representação de Weyl são dados por

$$\psi(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \phi_R(\vec{p}) \\ \phi_L(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (183)$$

Nesta equação (183), os quadri-espinores de Dirac são representados por um par de espinores simples, onde  $\phi_R(\vec{p})$  é um espinor de Weyl massivo que se transforma como objetos  $(\frac{1}{2}, 0)$  da representação do espaço e  $\phi_L(\vec{p})$ , que também é um espinor de Weyl

massivo, transforma-se como objetos  $(0, \frac{1}{2})$  na mesma representação de espaço. O vetor  $\vec{p}$ , por sua vez, representa o momento do espinor. Estes espinores são conhecidos como espinores de mão direita (Right) e espinores de mão esquerda (Left), respectivamente.

De acordo com as equações de onda e pelo fato de não se poder identificar para onde o spin aponta quando um espinor está em repouso, tem-se que  $\phi_R(\vec{0}) = \pm \phi_L(\vec{0})$ . Estes espinores possuem a seguinte transformação quando se aplica a eles um “boost” de Lorentz qualquer

$$\phi_R(\vec{p}) \longrightarrow e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}\phi_R(\vec{0}), \quad (184)$$

quando o espinor é “direito” e

$$\phi_L(\vec{p}) \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}\phi_L(\vec{0}), \quad (185)$$

para o espinor “esquerdo”. Nestas transformações  $\sigma$  representam as matrizes de Pauli e  $\varphi$  o parâmetro de “boost”. Pode-se reescrever os fatores  $e^{\pm\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}$  da seguinte maneira

$$e^{\pm\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}} \longrightarrow \left[ I \cosh\left(\frac{\varphi}{2}\right) \pm \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sinh\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right], \quad (186)$$

onde o versor  $\hat{n}$  indica a direção do “boost”. Os outros parâmetros do “boost” são dados por

$$\varphi = \frac{|\vec{p}|}{m}, \quad \cosh(\varphi) = \frac{E}{m}, \quad \sinh(\varphi) = \frac{|\vec{p}|}{m}. \quad (187)$$

Com os valores desses parâmetros definidos se pode, então, escrever as transformações dos espinores de mão direita e esquerda como

$$\phi_R(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( I + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right) \phi_R(\vec{0}), \quad (188)$$

$$\phi_L(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( I - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right) \phi_L(\vec{0}), \quad (189)$$

respectivamente. Lançando mão da propriedade de que não se pode definir o spin de um espinor em repouso é possível escrever  $\phi_R(\vec{p})$  em função de  $\phi_L(\vec{p})$  ou vice-versa. Pode-se isolar os termos  $\phi_R(\vec{0})$  e  $\phi_L(\vec{0})$  das equações (188) e (189), simplesmente multiplicando ambas por  $\left( I - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \right)$  e  $\left( I + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \right)$ , respectivamente. Depois de isolar estes espinores, que estão em repouso, basta substituí-los na outra equação. Tal processo gera

$$\phi_R(\vec{p}) = \left( \frac{E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \right) \phi_L(\vec{p}), \quad (190)$$



$$\phi_L(\vec{p}) = \left( \frac{E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \right) \phi_R(\vec{p}). \quad (191)$$

Ambas equações podem ser rearranjadas de modo mais compacto, que por sua vez se remete aos espinores de Dirac da equação (183). Logo,

$$\begin{pmatrix} -m & E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R(\vec{p}) \\ \phi_L(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (192)$$

Esta expressão pode ser remodelada mais uma vez, só que desta vez por meio das matrizes gamma do formalismo covariante. Essa remodelagem origina a equação de Dirac. Na representação de Weyl, enquanto que as matrizes  $\gamma$  são dadas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (193)$$

a equação de Dirac é dada por

$$(\gamma_\nu p^\nu - mI) \psi(\vec{p}) = 0. \quad (194)$$

Tendo a construção da equação de Dirac baseada nos “boosts“, resta ainda a caracterização das transformações decorrentes das rotações. Tecnicamente este conjunto de transformações completas caracteriza um grupo, no qual os espinores de Dirac se inserem. Como é de praxe, o conjunto de transformações é descrito por meio de seus geradores. Neste caso,  $\mathbf{J}$  representa o gerador de rotações, enquanto que  $\mathbf{K}$  é o gerador de “boosts“. Ambos os geradores não se demonstram um grupo fechado de transformações, uma vez que não respeitam as relações de comutação. Logo, as transformações relativísticas dos espinores de Dirac dependem da existência de dois conjuntos  $SU(2)$ , dados por

$$SU(2)_A \longrightarrow \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{J} + i\mathbf{K}) \quad (195)$$

$$SU(2)_B \longrightarrow \mathbf{B} = \frac{1}{2} (\mathbf{J} - i\mathbf{K}) \quad (196)$$

Tendo os grupos fechados se pode caracterizar os espinores de mão esquerda e mão direita. Para  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{J} = \frac{\sigma}{2}$ , caracteriza-se o espinor de mão direita no espaço de Weyl (i.e.  $(\frac{1}{2}, 0)$ ). Neste caso  $\mathbf{K} = -i\frac{\sigma}{2}$ . Por outro lado, para  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{J} = \frac{\sigma}{2}$  o espinor representado é o de mão esquerda no espaço de Weyl (i.e.  $(0, \frac{1}{2})$ ), onde  $\mathbf{K} = i\frac{\sigma}{2}$ .

Tendo os grupos sido bem definidos, via equações (195) e (196), faz-se possível utilizar o espaço vetorial correspondente as matrizes  $\gamma$  para definir elementos e operadores da teoria. Logo, desta estrutura surge uma nova simetria, i.e. a conjugação de carga. O operador associado com esta simetria é

$$C = \begin{pmatrix} 0 & i\Theta \\ -i\Theta & 0 \end{pmatrix} K, \quad (197)$$

que é um operador relacionado com o elemento de base  $\gamma_2$ . Por outro lado o operador  $K$  conjuga os espinores a sua direita e  $\Theta$  é o operador de reversão temporal de spin 1/2 de Wigner, que por sua vez é dado por

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (198)$$

Logo, é por meio destes operadores que se faz possível a construção do espinor ELKO, como segue presente na seção posterior.

#### 4.1.2 ELKO

Nesta seção o espinor ELKO é caracterizado matematicamente. Aqui o operador conjugação de carga, visto na seção anterior, faz-se fundamental para a construção do ELKO, uma vez que estes são seus auto-espinores, com autovalores  $\pm 1$ .

##### 4.1.2.1 Estrutura Formal do ELKO

Por construção o espinor ELKO possui a seguinte forma:

$$\Lambda(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \pm\sigma_2\phi_L^*(\vec{p}) \\ \phi_L(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad (199)$$

onde o parâmetro  $\sigma_2$  representa a segunda matriz de Pauli. Esta expressão é particularmente é igual ao espinor de Majorana quando o sinal do espinor superior é menos. Em outras palavras, o espinor ELKO não passa de uma variedade desses espinores. Com relação aos componentes dos espinores é possível observar que as suas transformações, tanto dos

espinores de mão direita quanto de mão esquerda, de acordo com as equações (184) e (185), possuem as seguintes propriedades

$$\left(e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}\right)^{-1} = \left(e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}\right)^\dagger, \quad (200)$$

$$\left(e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}\right)^{-1} = \left(e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}\right)^\dagger. \quad (201)$$

Além disto se constata uma outra propriedade, agora entre o vetor  $\sigma$  e o operador de reversão temporal de Wigner ( $\Theta$ ), que é dada por

$$\Theta \left[\frac{\vec{\sigma}}{2}\right] \Theta^{-1} = -\left[\frac{\vec{\sigma}}{2}\right]^*. \quad (202)$$

Por meio das equações (200), (201) e (202) se pode verificar que  $\pm\Theta\phi_L^*(\vec{p})$  se transforma como um espinor de mão direita, enquanto que  $\pm\Theta\phi_R^*(\vec{p})$  se transforma como um espinor de mão esquerda. Quando se conjuga as equações (188) e (189) e em seguida se multiplica, pela esquerda, pelo operador  $\Theta$ , obtém-se as seguintes expressões:

$$\Theta\phi_L^*(\vec{p}) = e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}\Theta\phi_L^*(\vec{0}), \quad (203)$$

$$\Theta\phi_R^*(\vec{p}) = e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}\Theta\phi_R^*(\vec{0}). \quad (204)$$

De forma bem geral se pode definir uma classe de espinores cujas componentes de mão direita são escritas em função das de mão esquerda ou vice-versa. Nesta construção os fatores  $\Theta\phi_L^*(\vec{p})$  e  $\Theta\phi_R^*(\vec{p})$  se transformam como espinores de mão direita e de mão esquerda, respectivamente. Logo,

$$\Lambda(\vec{p}) = \begin{pmatrix} (\zeta_\lambda\Theta)\phi_L^*(\vec{p}) \\ \phi_L(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad (205)$$

$$\rho(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \phi_R(\vec{p}) \\ (\zeta_\rho\Theta)^*\phi_R^*(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (206)$$

onde  $\zeta_\lambda$  e  $\zeta_\rho$  são fases arbitrárias, que são definidas quando ambos os espinores fazem o papel de auto-espinores do operador conjugação de carga, assim como o espinor de Majorana (que possui autovalor igual a 1).

#### 4.1.2.2 Operador Conjugação de Carga

O operador conjugação de carga, do qual o ELKO é um auto-espinor, é o mesmo presente no final da seção sobre a construção do espinor de Dirac, dado pela equação (197). Isto é,

$$C\lambda(\vec{p}) = \pm\lambda(\vec{p}), \quad (207)$$

$$C\rho(\vec{p}) = \pm\rho(\vec{p}). \quad (208)$$

Com tais autovalores as fases arbitrárias são  $\zeta_\lambda = \pm i$  e  $\zeta_\rho = \pm i$ . Intuitivamente, a partir do autovalor do espinor de Majorana para o operador conjugação de carga, tem-se que os autovalores dos espinores (207) e (208) dependem do sinal referente ao espinor superior na definição da equação (199). Deste fato emerge uma classificação preponderante dentro dos espinores ELKO. De agora em diante somente o espinor  $\lambda(\vec{p})$  é analisado, por simplicidade. De acordo com (207) são dois os tipos de espinores. Quando o autovalor é positivo o espinor é classificado como auto-conjugado, enquanto que o mesmo é conhecido como anti auto-conjugado quando o autovalor é negativo. Utiliza-se a representação clássica dos espinores baseados na nomenclatura originada do inglês.  $S$  vem do termo “Self-Conjugate”, por outro lado o símbolo  $A$  indica “Anti-Self-Conjugate”, que significam auto-conjugado e anti auto-conjugado, respectivamente. Sendo assim, a fim de definir os espinores  $\lambda^S(\vec{p})$  e  $\lambda^A(\vec{p})$ , pode-se utilizar, aliados com os respectivos “boosts”, os seguintes espinores em repouso

$$\lambda^S(\vec{0}) = \begin{pmatrix} i\Theta\phi_L^*(\vec{0}) \\ \phi_L(\vec{0}) \end{pmatrix}, \quad (209)$$

$$\lambda^A(\vec{0}) = \begin{pmatrix} -i\Theta\phi_L^*(\vec{0}) \\ \phi_L(\vec{0}) \end{pmatrix}. \quad (210)$$

Uma característica física fundamental decorrente de um espinor ser auto-espinor de  $C$  é que quando visto como partícula, tal espinor representa também sua antipartícula. Disto resulta que a carga desta partícula deve ser nula. Apresenta-se na seção (4.1.3) como isto corrobora para o ELKO ser considerado um “Dark Spinor”.

### 4.1.2.3 Helicidade do ELKO

Nesta subseção é apresentada uma outra estrutura interessante com relação aos espinores ELKO. Tendo que os espinores “primordiais“ do ELKO,  $\phi_L(\vec{0})$  e  $\phi_R(\vec{0})$  são auto-espinores do operador de helicidade é possível verificar que a parcela oposta de espinores que se transformam de maneira distinta possui helicidade oposta. Em outras palavras, os espinores superior e inferior do ELKO possuem helicidades diferentes.

O operador de helicidade exprime claramente a sua definição física, que é a projeção do spin na direção do movimento. Isto é,  $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ . Sendo  $\phi_L(\vec{0})$  seu auto-espinor, tem-se que

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \phi_L(\vec{0}) = \pm \phi_L(\vec{0}). \quad (211)$$

Para se poder distinguir os auto-espinores correspondentes a cada autovalor, de agora em diante os sinais + ou - são super-escritos nos auto-espinores,  $\phi_L^+(\vec{0})$  e  $\phi_L^-(\vec{0})$ . De modo que

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \phi_L^\pm(\vec{0}) = \pm \phi_L^\pm(\vec{0}), \quad (212)$$

onde a mesma estrutura é válida para os espinores de mão direita. De acordo com a construção presente em (209) e (210), faz-se necessário verificar a helicidade dos espinores superiores,  $\pm i \Theta \phi_L^*(\vec{0})$ . Deseja-se mostrar, portanto, que

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \Theta \left[ \phi_L^\pm(\vec{0}) \right]^* = \mp \Theta \left[ \phi_L^\pm(\vec{0}) \right]^*. \quad (213)$$

Para isto, conjuga-se a equação (212) e em seguida se substitui o elemento  $\sigma^*$  pelo negativo do lado esquerdo da equação (202). Depois deste passo, tem-se

$$\Theta \vec{\sigma} \Theta^{-1} \cdot \hat{p} \left[ \phi_L^\pm(\vec{0}) \right]^* = \mp \left[ \phi_L^\pm(\vec{0}) \right]^*. \quad (214)$$

Todavia  $\Theta^{-1} = -\Theta$ , que resulta em

$$-\Theta \vec{\sigma} \Theta \cdot \hat{p} \left[ \phi_L^\pm(\vec{0}) \right]^* = \mp \left[ \phi_L^\pm(\vec{0}) \right]^* \quad (215)$$

ou então

$$\Theta^{-1} \vec{\sigma} \Theta \cdot \hat{p} \left[ \phi_L^\pm(\vec{0}) \right]^* = \mp \left[ \phi_L^\pm(\vec{0}) \right]^*. \quad (216)$$

Para provar (213) basta multiplicar o fator  $\Theta$  pela esquerda. A conclusão que se obtém é que o espinor ELKO é um espinor de dupla helicidade.

Não obstante, as equações características originadas pelo operador helicidade possibilita obter uma forma específica para seus auto-espinores. Nesta equação característica, dada por (212), o versor do momento é  $\hat{p} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ , onde  $\phi$  é o ângulo azimutal e  $\theta$  o ângulo longitudinal da direção do momento. Deste modo, os espinores de mão esquerda, com helicidade positiva, podem ser descritos trigonometricamente por

$$\phi_L^+ (\vec{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (217)$$

enquanto que os de mão esquerda negativos são

$$\phi_L^- (\vec{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (218)$$

Pode-se obter as formas trigonométricas dos auto-espinores de mão direita por meio da correspondente direita da equação (212), a expressão (216). De qualquer maneira, o fator  $\sqrt{m}$  (onde  $m$  representa a massa da partícula) se faz presente sem qualquer uma das representações trigonométricas. Este é um fator inserido à mão a fim de se ajustar estes espinores ao fato de não haver partículas sem massa em repouso. Logo, se a massa da partícula,  $m$ , for nula, o auto-espinor em repouso consequentemente também se torna nulo (AHLUWALIA; GOLDMAN; JOHNSON, 1994). Por questão de consistência é necessário que o fator seja proporcional à  $m^j$ , onde  $j$  é o spin da partícula, segundo (ROGÉRIO, 2014; MARINOV, 1968).

#### 4.1.2.4 Forma Geral do ELKO

Tendo a helicidade caracterizada, pode-se ampliar a definição do ELKO em repouso das equações (209) e (210). Os ELKOs, a partir de agora em diante, carregam um índice subscrito de acordo com a ordem das helicidades de seus espinores de mão esquerda e direita. Utiliza-se o símbolo  $\{+, -\}$  quando o espinor superior possui helicidade positiva enquanto que o espinor inferior possui helicidade negativa. Quando se tem  $\{-, +\}$  as helicidades também são invertidas. Em outras palavras, o primeiro sinal indica a helicidade do espinor superior e o segundo sinal do inferior. Logo, os espinores auto-conjugado e anti auto-conjugados se dividem em dois tipos cada, dados por

$$\lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{0}) = \begin{pmatrix} i\Theta [\phi_L^-(\vec{0})]^* \\ \phi_L^-(\vec{0}) \end{pmatrix}, \quad (219)$$

$$\lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{0}) = \begin{pmatrix} i\Theta [\phi_L^+(\vec{0})]^* \\ \phi_L^+(\vec{0}) \end{pmatrix}, \quad (220)$$

para os autoconjugados e

$$\lambda_{\{+,-\}}^A(\vec{0}) = \begin{pmatrix} i\Theta [\phi_A^-(\vec{0})]^* \\ \phi_A^-(\vec{0}) \end{pmatrix}, \quad (221)$$

$$\lambda_{\{-,+\}}^A(\vec{0}) = \begin{pmatrix} i\Theta [\phi_A^+(\vec{0})]^* \\ \phi_A^+(\vec{0}) \end{pmatrix}, \quad (222)$$

para os anti auto-conjugados. Considerando esta estrutura é possível aplicar um “boost” qualquer e obter os espinores com qualquer momento  $\vec{p}$ . Como o espinor superior é do tipo mão direita enquanto que o inferior é de mão esquerda, pode-se aplicar o “boost” por meio da matriz ( $4 \times 4$ )

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}} \end{pmatrix}. \quad (223)$$

Aplicando-se a matriz (223) nos espinores (219), (220), (221) e (222), obtém-se os espinores com um momento  $\vec{p}$  qualquer. Suas formas finais se assemelham as equações (188) e (189) e são dadas por

$$\lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( I + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \right) \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{0}), \quad (224)$$

$$\lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( I - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \right) \lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{0}), \quad (225)$$

para os espinores auto-conjugados e

$$\lambda_{\{+,-\}}^A(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( I + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \right) \lambda_{\{+,-\}}^A(\vec{0}), \quad (226)$$

$$\lambda_{\{-,+\}}^A(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( I - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \right) \lambda_{\{-,+\}}^A(\vec{0}), \quad (227)$$

para os anti auto-conjugados. Verifica-se que os espinores ELKO possuem uma transformação de “boost” semelhante a cada um dos pares dos biespinores de Dirac, dados por (188) e (189). Tal estrutura se demonstra preponderante para a forma do dual do ELKO, como se constata na seção a seguir.

#### 4.1.2.5 Dual do ELKO

A ideia por detrás dos duais, tanto para o ELKO quanto para o próprio campo de Dirac, é se obter um escalar quando os mesmos são compostos com os campos usuais. O significado físico desta afirmação se baseia na invariância e na covariância de seus valores para diversos referenciais possíveis. Uma grandeza escalar se demonstra invariante por transformações de Lorentz. Por outro lado, as grandezas covariantes também são interessantes do ponto de vista físico, pois elas possuem uma mesma forma para qualquer referencial, mantendo assim a sua maneira de se transformar. Essas características são na realidade uma propriedade imprescindível que permite as medições físicas coerentes e, portanto, validam a teoria proposta frente a natureza. Tais fatos estão intimamente ligados com as definições dos bilineares e consequentemente a classificação de Lounesto (ROCHA; RODRIGUES JR., 2006; LOUNESTO, 2001).

Segue no apêndice (B) uma breve explicação sobre os bilineares e a classificação de Lounesto. Também se demonstra neste apêndice que o ELKO possui uma estrutura distinta da proposta por essa classificação, e portanto não pode ser classificado segundo a mesma. O problema que ocorre é fruto do fato de que os espinores de Dirac foram utilizados para construção das classes de espinores. No decorrer deste capítulo fica claro que não se pode construir um dual para o ELKO a “la Dirac”.

Ao se testar produzir um dual para o espinor ELKO, do mesmo modo que é produzido para Dirac, é possível verificar que suas composições com os usuais é ou nula ou imaginária. Algo indubitavelmente problemático do ponto de vista de medições. Sendo assim, se o dual do ELKO for definido como sendo

$$\bar{\lambda}_{\{\pm, \mp\}}^{S/A}(\vec{p}) = [\bar{\lambda}_{\{\pm, \mp\}}(\vec{p})]^\dagger \gamma_0 \quad (228)$$



ou seja, igual ao espinor de Dirac, as combinações são

$$\bar{\lambda}_\alpha^C(\vec{p}) \lambda_{\alpha'}^{C'}(\vec{p}) = 2im \varepsilon_{\alpha\alpha'}^C \delta_C^{C'}, \quad (229)$$

onde  $\varepsilon_{\alpha\alpha'}^C$ , com  $C = S$ , é igual a  $-1$  para  $\alpha = \{+, -\}$  e  $\alpha' = \{-, +\}$ , igual a  $1$  para  $\alpha = \{-, +\}$  e  $\alpha' = \{+, -\}$  e igual a zero para  $\alpha = \alpha'$ . Por outro lado, quando  $C = A$ , tem-se que  $\varepsilon_{\alpha\alpha'}^C$  é igual a  $1$  para  $\alpha = \{+, -\}$  e  $\alpha' = \{-, +\}$ , igual a  $-1$  para  $\alpha = \{-, +\}$  e  $\alpha' = \{+, -\}$  e também igual a zero para  $\alpha = \alpha'$ . Nesta equação não se deve interpretar os índices  $C$  covariante e contravariante como uma soma, de acordo com a notação de Einstein.

Deste modo se deve buscar uma outra definição que conserve o caráter da expressão (229) com relação às helicidades e os tipos de espinores (auto-conjugados e anti auto-conjugados). Nesta construção se deve garantir que a norma do espinor seja real e também garantir uma norma positiva definida para dois dos quatro ELKOs e norma negativa definida para os dois restantes (ROGÉRIO, 2014; AHLUWALIA, 2013). Esta última exigência é uma forma de se garantir a simetria já presente na equação (229).

De acordo com (ROGÉRIO, 2014; AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005b; AHLUWALIA, 2013), faz-se plausível supor uma construção de dual de um espinor genérico  $\varrho_\alpha(\vec{p})$  da seguinte maneira

$$\tilde{\varrho}_\alpha(\vec{p}) = [\Xi \varrho_\alpha(\vec{p})]^\dagger \eta, \quad (230)$$

onde o operador  $\Xi$  possui a função de converter o espinor  $\varrho_\alpha$  em um espinor  $\varrho_{\alpha'}$  do seu próprio conjunto. Como alertado no final da subseção anterior, a estrutura das transformações de “boost” do ELKO é imprescindível para entender a função de  $\Xi$  em (230). Os termos correspondentes às transformações dependem de  $E$ ,  $\vec{p}$  e  $m$ . Deles, somente  $m$  é invariante por transformações de Lorentz. Deste modo unicamente  $m$  pode aparecer na expressão final, já que tal composição representa uma medida física. Tal característica já é obtida quando se cria um dual do ELKO “a la Dirac”, como visto em (229). Deste modo a criação deste novo dual para o ELKO não pode falhar em manter propriedades desejáveis já obtidas. Após se obter a forma da matriz  $\eta$ , discute-se um pouco mais o papel de  $\Xi$  na prática.

Este operador dever possuir um mapeamento invertível, que culmina na propriedade  $\Xi^2 = I$ . Por outro lado, a invariância de Lorentz dita que a matriz  $\eta$  deve comutar com os geradores de “boosts” e rotações. Isto é,

$$\{\mathbf{K}, \eta\} = 0 \quad (231)$$

para os “boosts” e

$$\{\mathbf{J}, \eta\} = 0 \quad (232)$$

para as rotações. Por meio de cálculos simples baseados nas equações (231) e (232), presentes em (ROGÉRIO, 2014; AHLUWALIA, 2013), demonstra-se que a matriz  $\eta$  é dada por

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (233)$$

ou seja,  $\eta = \gamma_0$ . Observa-se que, assim como no caso de Dirac, a matriz  $\gamma_0$  emerge da definição de um espinor dual. No caso de Dirac, as combinações, dadas pelas equações (188) e (189), multiplicam-se de maneira cruzada por conta da matriz  $\gamma_0$ . Isto é, na composição do dual de Dirac com seu usual surge a multiplicação de  $\sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( I + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right)$  por  $\sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( I - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right)$ , de maneira a resultar em  $2m$ , um invariante de Lorentz. Todavia este cenário não é apreciado no caso do ELKO por meio do dual do tipo (228). De acordo com as equações (224), (225), (226) e (227) todo o espinor possui os fatores  $\sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( I + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right)$  e  $\sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( I - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right)$ . Logo, para produzir a multiplicação citada acima é necessário que o dual possua a estrutura de outro usual, só que com helicidade trocada. Com isto, a função  $\Xi$  é justamente trocar a helicidade e trazer a estrutura deste outro usual à tona. Para o ELKO, a equação (229) indica que o operador  $\Xi$  é pode ser dado por

$$\Xi = \frac{1}{2m} \left[ \lambda_+^S(\vec{p}) \bar{\lambda}_+^S(\vec{p}) + \lambda_-^S(\vec{p}) \bar{\lambda}_-^S(\vec{p}) - \lambda_+^A(\vec{p}) \bar{\lambda}_+^A(\vec{p}) - \lambda_-^A(\vec{p}) \bar{\lambda}_-^A(\vec{p}) \right], \quad (234)$$

onde a construção formal deste operador se faz presente em (AHLUWALIA, 2013), por exemplo. Pode-se representá-lo por meio das funções  $\mathcal{G}(\phi)$ , apresentado na subseção 4.1.2.7. Resumidamente, tem-se que o dual do ELKO é dado por

$$\bar{\lambda}_\alpha(\vec{p}) = [\Xi \lambda_\alpha(\vec{p})]^\dagger \gamma_0, \quad (235)$$

onde o símbolo acima do  $\lambda$  do lado esquerdo da equação representa o novo dual do ELKO. Por sua vez, esta relação permite reescrever a regra contida na equação (229) da seguinte forma

$$\overline{\lambda}_\alpha^C(\vec{p}) \lambda_{\alpha'}^{C'}(\vec{p}) = 2m \delta_\alpha^{\alpha'} \delta_C^{C'} \beta^C, \quad (236)$$

onde  $\beta^C = 1$  para  $C = S$  e  $\beta^C = -1$  para  $C = A$ . Assim como anteriormente, os índices não exibem nenhum caráter de soma, segundo a notação de Einstein. Substituindo a equação (234) em (235) resulta no conjunto completo de duais, dados por

$$\overline{\lambda}_+^S(\vec{p}) = -i[\lambda_-^S(\vec{p})]^\dagger \gamma_0, \quad (237)$$

$$\overline{\lambda}_-^S(\vec{p}) = i[\lambda_+^S(\vec{p})]^\dagger \gamma_0, \quad (238)$$

$$\overline{\lambda}_+^A(\vec{p}) = -i[\lambda_-^A(\vec{p})]^\dagger \gamma_0, \quad (239)$$

$$\overline{\lambda}_-^A(\vec{p}) = i[\lambda_+^A(\vec{p})]^\dagger \gamma_0. \quad (240)$$

#### 4.1.2.6 Ortonormalidade e Relação de Completeza

Com o dual do ELKO se pode definir, por construção, as seguintes relações

$$\overline{\lambda}_\alpha^S(\vec{p}) \lambda_{\alpha'}^S(\vec{p}) = +2m \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (241)$$

$$\overline{\lambda}_\alpha^A(\vec{p}) \lambda_{\alpha'}^A(\vec{p}) = -2m \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (242)$$

Por sua vez a relação de completeza, baseada no operador (234), é dada por

$$\frac{1}{2m} \sum_\alpha \left[ \lambda_{\alpha'}^S(\vec{p}) \overline{\lambda}_\alpha^S(\vec{p}) - \lambda_{\alpha'}^A(\vec{p}) \overline{\lambda}_\alpha^A(\vec{p}) \right] = I \quad (243)$$

Segue na sequência a confirmação das expressões presentes. Para poder conferir as equações (241), (242) e (243), substitui-se nelas as equações (219), (220), (221) e (222). Por simplicidade, os cálculos são feitos com os espinores em repouso. Logo,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{\{-,+\}}^{\bar{A}}(\vec{0}) \lambda_{\{+,-\}}^A(\vec{0}) &= -i \left( \Theta \phi_L^+(\vec{0}) \right)^T \phi_L^-(\vec{0}) + i \left( \phi_L^+(\vec{0}) \right)^\dagger \Theta \left[ \phi_L^-(\vec{0}) \right]^* \\ &= \begin{pmatrix} -i \left( \Theta \phi_L^+(\vec{0}) \right)^T & \left( \phi_L^+(\vec{0}) \right)^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \Theta \left[ \phi_L^-(\vec{0}) \right]^* \\ \phi_L^-(\vec{0}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (244)$$

Este resultado aliado à representação dos espinores de mão esquerda e mão direita, dados pelas equações (217) e (218), resultam em

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{\{-,+\}}^{\bar{S}}(\vec{0}) \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{0}) &= -i\sqrt{m} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} i\sqrt{m} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} + \\ &+ i\sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} i\sqrt{m} \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \\ &= 2m \end{aligned} \quad (245)$$

Tal resultado também se confirma da mesma maneira para a equação (242). Utilizando este mesmo artifício é possível obter a relação de completude. De acordo com (ROGÉRIO, 2014), cada um dos termos da soma correspondente à relação de completude é dado por

$$\lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{0}) \bar{\lambda}_{\{-,+\}}^{\bar{S}}(\vec{0}) = m \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-i\phi} \\ ie^\phi & 1 \end{pmatrix}, \quad (246)$$

$$\lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{0}) \bar{\lambda}_{\{+,-\}}^{\bar{S}}(\vec{0}) = -m \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (247)$$

$$\lambda_{\{+,-\}}^A(\vec{0}) \bar{\lambda}_{\{-,+\}}^{\bar{A}}(\vec{0}) = -m \begin{pmatrix} -1 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & -1 \end{pmatrix} \quad (248)$$

$$\lambda_{\{-,+\}}^A(\vec{0}) \bar{\lambda}_{\{+,-\}}^{\bar{A}}(\vec{0}) = m \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (249)$$

Por fim, ao se substituir as expressões (246), (247), (248) e (249) na relação (243), confirma-se a autenticidade da relação de completude.

### 4.1.2.7 Somas de Spin do ELKO

Apresenta-se nesta subsecção uma breve explicação sobre a soma de spin e o operador de onda. Inicia-se o processo apresentando a seguinte soma

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta}^S(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^{\neg S}(\vec{p}) = \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\{-,+\}}^{\neg S}(\vec{p}) + \lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\{+,-\}}^{\neg S}(\vec{p}), \quad (250)$$

onde as outras duas combinações são, como visto anteriormente, dadas por

$$\lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\{-,+\}}^{\neg S}(\vec{p}) = 0, \quad (251)$$

$$\lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\{+,-\}}^{\neg S}(\vec{p}) = 0. \quad (252)$$

De acordo com as equações (246), (247), (248) e (249), pode-se reescrever os somatórios da equação (250) e seu correspondente antissimétrico como

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta}^S(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^{\neg S}(\vec{p}) = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 1 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 1 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (253)$$

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta}^A(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^{\neg A}(\vec{p}) = m \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & ie^{i\phi} \\ 0 & -1 & -ie^{-i\phi} & 0 \\ 0 & ie^{i\phi} & -1 & 0 \\ -ie^{-i\phi} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (254)$$

donde é possível se definir a seguinte matriz

$$\mathcal{G}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 0 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 0 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (255)$$

Disto resulta que as equações (253) e (254) podem ser reescritas como

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta}^S(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^{\neg S}(\vec{p}) = m (I + \mathcal{G}(\phi)), \quad (256)$$

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta}^A(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^{\neg A}(\vec{p}) = -m(I - \mathcal{G}(\phi)). \quad (257)$$

Segue da equação (236) que ao se aplicar os somatórios nos espinores opostos, isto é aplicar a equação (256) num espinor  $\lambda_{\beta}^A(\vec{p})$  e aplicar (257) num espinor  $\lambda_{\beta}^S(\vec{p})$ , obtém-se um resultado nulo. Em outras palavras, o lado direito das equações (256) e (257) funciona como o operador aniquilação do espinor ELKO. Logo,

$$[\mathcal{G}(\phi) - I] \lambda_{\beta}^S(\vec{p}) = 0, \quad (258)$$

$$[\mathcal{G}(\phi) + I] \lambda_{\beta}^A(\vec{p}) = 0. \quad (259)$$

Todavia tais operadores não são do tipo onda, já que não possuem dependência temporal. Decorre deste fato que a soma de spin do ELKO dependem da direção do espaço escolhida o que, portanto, indica uma quebra na simetria de Lorentz. Encontrar um termo do tipo  $\mathcal{G}(\phi)$  na soma de spins se demonstra um grande problema. A soma de spins é fundamental na dedução do propagador. Possuir um termo que não seja invariante de Lorentz dentro destas estruturas acarreta referenciais privilegiados nas medições físicas, o que mostra uma certa fragilidade da teoria. Discute-se, após a dedução do propagador do ELKO, como se pode contornar este problema.

### 4.1.3 ELKO como Elemento “Escuro”

Nesta seção seguem descritas características do espinor ELKO, que desta vez, possibilitam atribuir ao mesmo a propriedade de elemento “escuro”. Entre as principais propriedades que permitem esta ligação estão a forma do propagador do ELKO, suas interações com partículas do MP e o fato dele respeitar a equação de Klein-Gordon e não respeitar a equação de Dirac.

Diz-se que um determinado elemento é “escuro” devido à sua interação com os demais elementos conhecidos. Entende-se como elemento conhecido as partículas do MP. Logo, ser “escuro” indica que tal elemento possui apenas a interação gravitacional, dada via acoplamento com o Higgs.

O fato do ELKO não ser observado decorre de sua própria construção. Sendo ele auto-espinor do operador conjugação de carga resulta que a partícula que ele representa é

sua própria anti-partícula. Um contra-exemplo é imaginar o campo de Dirac, o qual ao se aplicar  $C$  em um elétron, resulta no antielétron. Deste modo, já que o ELKO é sua própria antipartícula, o mesmo deve ser neutro.

Por outro lado o fato do ELKO somente interagir com o Higgs é consequência direta de sua dimensão de massa. De certa forma os seguintes argumentos estão todos ligados, mas se pode entender a situação da seguinte forma: Tendo que o ELKO somente obedece a equação de Klein-Gordon faz que o mesmo possua um Lagrangeana igual a de um campo escalar. Pela análise dimensional desta Lagrangeana a dimensão de massa já é obtida para o ELKO. Ademais, confirma-se esta dimensão como verídica por meio do propagador, que também é igual ao de um campo escalar.

Ressalvas são feitas quando se obtém o propagador, por conta do fator  $\mathcal{G}(\phi)$ , entretanto a dimensão de massa para o ELKO mesmo assim é confirmada. De qualquer forma, segue desta dimensão a restrição de interação apenas com campos escalares, devido à renormalizabilidade. Logo, sendo o Higgs o principal escalar do MP, constata-se uma interação puramente gravitacional para o ELKO.

#### 4.1.3.1 Equação de Dirac e de Klein-Gordon

Nesta subseção seguem descritos os motivos pelos quais o campo espinorial ELKO satisfaz a equação de Klein-Gordon enquanto que não satisfaz a equação de Dirac. Tal característica endossa também a posição do ELKO como elemento “escuro”, já que não respeitar Dirac e respeitar Klein-Gordon dá a dimensão de massa ao campo. Por outro lado, os férmions que respeitam Dirac, diferentemente do ELKO, possuem dimensão correspondente de  $m^{3/2}$ . Resumidamente tudo é consequência da Lagrangeana.

A fim de se atestar que o ELKO não satisfaz a equação de Dirac, aplica-se aos espiniores o operador  $\gamma_\mu p^\mu$ . Logo,

$$\begin{aligned} \gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) \times \\ &\times \left[ E\gamma_0 + p \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} \right] \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{0}), \end{aligned} \quad (260)$$

Através do conjugado da equação (212) e a equação (213), além de algumas manipulações algébricas, obtém-se a seguinte expressão,

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{0}) = \gamma_0 \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{0}). \quad (261)$$

Com esta equação se pode substituir a matriz multiplicada por  $p$  no lado direito de (260) de forma que

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) (E+p) \gamma_0 \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{0}). \quad (262)$$

Ademais, na seção (4.1.2.5) foi possível verificar que a matriz  $\gamma_0$  possui a propriedade de “trocar” os índices  $\{+,-\}$  por  $\{-,+\}$  e vice-versa. Essa mudança pode ser dada pela seguinte forma

$$\gamma_0 \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{0}) = -i \lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{0}). \quad (263)$$

Depois de se substituir (263) em (262), e se resolver uma álgebra simples, obtém-se a equação

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}) = -im \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 + \frac{p}{E+m}\right) \lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{0}), \quad (264)$$

onde o fator  $\sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 + \frac{p}{E+m}\right)$  aplicado ao espinor em repouso  $\lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{0})$  representa um “boost” na direção  $\vec{p}$ , de forma que se reescreve (264) da seguinte maneira

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}) = -im \lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{p}). \quad (265)$$

Pode-se repetir o mesmo processo para os outros espinores ELKO de modo que as expressões sejam dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}) &= im \lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{p}), \\ \gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{p}) &= -im \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}), \\ \gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{+,-\}}^A(\vec{p}) &= -im \lambda_{\{-,+\}}^A(\vec{p}), \\ \gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-,+\}}^A(\vec{p}) &= im \lambda_{\{+,-\}}^A(\vec{p}). \end{aligned} \quad (266)$$

A fim de se colocar as expressões de (266) na forma da equação de Dirac, estrutura-se as mesmas da seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} \gamma_\mu p^\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_\mu p^\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_\mu p^\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_\mu p^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{p}) \\ \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}) \\ \lambda_{\{-,+\}}^A(\vec{p}) \\ \lambda_{\{+,-\}}^A(\vec{p}) \end{pmatrix} - im I \begin{pmatrix} -\lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}) \\ \lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{p}) \\ \lambda_{\{+,-\}}^A(\vec{p}) \\ -\lambda_{\{-,+\}}^A(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0, \quad (267)$$



que por sua vez pode ser compactado em

$$(\gamma_\mu p^\mu \delta_\alpha^\beta + imI\epsilon_\alpha^\beta) \lambda_\beta^S(\vec{p}) = 0 \quad (268)$$

$$(\gamma_\mu p^\mu \delta_\alpha^\beta - imI\epsilon_\alpha^\beta) \lambda_\beta^A(\vec{p}) = 0 \quad (269)$$

onde  $\epsilon_{\{-,+\}}^{\{-,+\}} = -\epsilon_{\{-,+\}}^{\{+,-\}} = 1$ . A exemplo da equação (236), os índices destes símbolos não representam somas. Justifica-se portanto que a estrutura encontrada não caracteriza a equação de Dirac, posto que  $\epsilon_\alpha^\beta$  altera o espinor onde o operador  $\gamma_\mu p^\mu$  é aplicado. Deste modo se confirma que o ELKO não respeita a equação de Dirac.

Por outro lado, o campo ELKO satisfaz a equação de Klein-Gordon, uma vez que a mesma representa a conservação de energia. O modo de comprovar isto é novamente por meio do operador  $\gamma_\nu p^\nu$ , que desta vez é aplicado nas equações (266). Isto é,

$$\begin{aligned} \gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}) &= im\gamma_\nu p^\nu \lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{p}), \\ \gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{p}) &= -im\gamma_\nu p^\nu \lambda_{\{+,-\}}^S(\vec{p}), \\ \gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{+,-\}}^A(\vec{p}) &= -im\gamma_\nu p^\nu \lambda_{\{-,+\}}^A(\vec{p}), \\ \gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-,+\}}^A(\vec{p}) &= im\gamma_\nu p^\nu \lambda_{\{+,-\}}^A(\vec{p}). \end{aligned} \quad (270)$$

A expressão  $\gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu$  pode ser convertida no operador D'Alambertiano ( $\square$ ) através da relação  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ . No lado direito das expressões se resubstitui as próprias equações, dadas por (266). Por consequência se constata que todos os espinores ELKO respeitam a equação de Klein-Gordon, isto é

$$(\square + m^2) \lambda_\beta^{(S/A)}(\vec{p}) = 0, \quad (271)$$

onde  $\beta$  pode ser  $\{+, -\}$  ou  $\{-, +\}$ .

#### 4.1.3.2 Partículas que o ELKO Representa

Dada a estrutura geral do espinor ELKO definida, como visto na seção anterior, pode-se utilizar o formalismo clássico da Teoria de Campos para descrever este campo, agora, como partícula. Logo, descrever o ELKO como uma partícula necessariamente passa pela construção de um campo, agora como operador, que é formado por soluções de ondas planas. Dentro destes estados também se encontram os operadores de criação e

aniquilação (destruição) de partículas, dados por  $c_\beta^\dagger(\vec{p})$  e  $c_\beta(\vec{p})$ , respectivamente. Segue deste formalismo, portanto, a seguinte relação

$$\eta(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\vec{p})} \sum_\beta \left[ c_\beta(\vec{p}) \lambda_\beta^S(\vec{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + c_\beta^\dagger(\vec{p}) \lambda_\beta^A(\vec{p}) e^{ip_\mu x^\mu} \right], \quad (272)$$

cujo dual é dado por

$$\bar{\eta}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\vec{p})} \sum_\beta \left[ c_\beta^\dagger(\vec{p}) \bar{\lambda}_\beta^S(\vec{p}) e^{ip_\mu x^\mu} + c_\beta(\vec{p}) \bar{\lambda}_\beta^A(\vec{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} \right]. \quad (273)$$

Em ambas expressões, (272) e (273), o fator  $a(p^\mu)$  representa uma função real, com o valor determinado no decorrer desta seção.

Como se verificou na subseção (4.1.3.1), o ELKO é um espinor que obedece a equação de Klein-Gordon. Por este motivo, escreve-se a seguinte relação

$$(I\eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu + m^2I)\eta(x) = 0. \quad (274)$$

Ao fazer o processo contrário, obtém-se a ação que dá origem a esta equação de movimento.

A mesma é dada por

$$S[\bar{\eta}(x), \eta(x)] = \int d^4x \mathcal{L}(\bar{\eta}(x), \eta(x)) = \int d^4x \left( \partial^\mu \bar{\eta}(x) \partial_\mu \eta(x) - m^2 \bar{\eta}(x) \eta(x) \right), \quad (275)$$

onde  $S[\bar{\eta}(x), \eta(x)]$  é a ação correspondente e  $\mathcal{L}(\bar{\eta}(x), \eta(x))$  a densidade Lagrangeana que origina a equação (274). A densidade de momento correspondente a essa densidade Lagrangeana é dada por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(\bar{\eta}(x), \eta(x))}{\partial \dot{\eta}(x)} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\eta}(x), \quad (276)$$

com seu conjugado representado por

$$\bar{\pi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(\bar{\eta}(x), \eta(x))}{\partial \dot{\bar{\eta}}(x)} = \frac{\partial}{\partial t} \eta(x). \quad (277)$$

Por meio destes se escreve a densidade hamiltoniana da seguinte forma

$$\mathcal{H} = \pi(x) \frac{\partial \eta(x)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\eta}(x)}{\partial t} \bar{\pi}(x) - \mathcal{L}. \quad (278)$$

Ao se integrar esta densidade hamiltoniana,  $\mathcal{H}$ , pelo espaço se pode obter a própria hamiltoniana, que para o presente caso é dada por

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left[ \partial^0 \bar{\eta}(x) \partial_0 \eta(x) - \partial^i \bar{\eta}(x) \partial_i \eta(x) + m^2 \bar{\eta}(x) \eta(x) \right]. \quad (279)$$

As derivadas parciais  $\partial_0\eta(x)$ ,  $\partial^0\bar{\eta}(x)$ ,  $\partial^i\bar{\eta}(x)$  e  $\partial_i\eta(x)$ , presentes na equação (279) são dadas, de acordo com as formas (272) e (273), respectivamente por

$$\begin{aligned} \partial^0\eta(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\vec{p})} \times \\ &\times \sum_{\beta} \left[ c_{\beta}(\vec{p}) \lambda_{\beta}^S(\vec{p}) (-ip^0) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \lambda_{\beta}^A(\vec{p}) (ip^0) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} \right], \end{aligned} \quad (280)$$

$$\begin{aligned} \partial^0\bar{\eta}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\vec{p})} \times \\ &\times \sum_{\beta} \left[ c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\vec{p}) (ip^0) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\vec{p}) (-ip^0) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} \right], \end{aligned} \quad (281)$$

$$\begin{aligned} \partial^i\eta(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\vec{p})} \times \\ &\times \sum_{\beta} \left[ c_{\beta}(\vec{p}) \lambda_{\beta}^S(\vec{p}) (ip_i) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \lambda_{\beta}^A(\vec{p}) (-ip_i) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} \right], \end{aligned} \quad (282)$$

$$\begin{aligned} \partial^i\bar{\eta}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\vec{p})} \times \\ &\times \sum_{\beta} \left[ c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\vec{p}) (-ip_i) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\vec{p}) (ip_i) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} \right]. \end{aligned} \quad (283)$$

Substituindo as equações (280), (281), (282) e (283) na hamiltoniana  $H$ , dada por (279), resulta em

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \sum_{\beta} \sum_{\beta'} \int \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\vec{p})} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^{\mu})}{2E(\vec{p}')} \left\{ \right. \\ &+ \left[ c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\vec{p}) (ip^0) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\vec{p}) (-ip^0) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} \right] \times \\ &\times \left[ c_{\beta'}(\vec{p}') \lambda_{\beta'}^S(\vec{p}') (-ip'^0) e^{-ip'_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta'}^{\dagger}(\vec{p}') \lambda_{\beta'}^A(\vec{p}') (ip'^0) e^{ip'_{\mu}x^{\mu}} \right] \\ &+ \left[ c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\vec{p}) (-ip_i) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\vec{p}) (ip_i) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} \right] \times \\ &\times \left[ c_{\beta'}(\vec{p}') \lambda_{\beta'}^S(\vec{p}') (ip'_i) e^{-ip'_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta'}^{\dagger}(\vec{p}') \lambda_{\beta'}^A(\vec{p}') (-ip'_i) e^{ip'_{\mu}x^{\mu}} \right] \\ &+ m^2 \left[ c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\vec{p}) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\vec{p}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} \right] \times \\ &\times \left. \left[ c_{\beta'}(\vec{p}') \lambda_{\beta'}^S(\vec{p}') e^{-ip'_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta'}^{\dagger}(\vec{p}') \lambda_{\beta'}^A(\vec{p}') e^{ip'_{\mu}x^{\mu}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (284)$$

Ao se efetuar a integração no espaço o fator exponencial se converte em uma função do tipo  $(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$ . Ademais, de acordo com a relação (236) a grande maioria das diversas

multiplicações entre duais e ELKOs da equação (284) é nula. As combinações não nulas resultam em

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)^2}{4E(\vec{p})^2} \sum_{\beta} \left[ (p_0^2 + \vec{p}^2 + m^2) \times \right. \\ \left. \times \left( c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) c_{\beta}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\vec{p}) \lambda_{\beta}^S(\vec{p}) + c_{\beta}(\vec{p}) c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\vec{p}) \lambda_{\beta}^A(\vec{p}) \right) \right]. \quad (285)$$

De maneira mais explícita, utiliza-se as relações dadas por (241) e (242) para obter que  $H$  pode ser escrito como

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2ma(p^\mu)^2}{4E(\vec{p})^2} \sum_{\beta} \left[ (p_0^2 + \vec{p}^2 + m^2) \left( c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) c_{\beta}(\vec{p}) - c_{\beta}(\vec{p}) c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \right) \right], \quad (286)$$

onde se tem adicionalmente que

$$2E(\vec{p})^2 = (p_0^2 + \vec{p}^2 + m^2) \quad (287)$$

onde por meio desta se reescreve a relação (286) como

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} ma(p^\mu)^2 \sum_{\beta} \left[ c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) c_{\beta}(\vec{p}) - c_{\beta}(\vec{p}) c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \right]. \quad (288)$$

Ainda não se apresentou nenhuma regra de comutação envolvendo os operadores criação e aniquilação. Todavia é claro que tais regras entre  $c_{\beta}(\vec{p})$  e  $c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p})$  fornece a energia que desaparece para uma configuração geral após o ordenamento normal. Por este motivo a estatística associada deve ser fermiônica:

$$\left\{ c_{\beta}(\vec{p}), c_{\beta'}^{\dagger}(\vec{p}') \right\} = b(p^\mu) (2\pi)^3 2E(\vec{p}) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\beta\beta'}, \quad (289)$$

onde  $b(p^\mu) \in \mathfrak{R}$  é determinado durante a interpretação de  $H$ . Implementando esta anti-comutação, na relação de comutação presente em (288), obtém-se que

$$H = -\delta^3(\vec{0}) \int d^3p a(p^\mu)^2 mb(p^\mu) \sum_{\beta} 2E(\vec{p}) \delta_{\beta\beta'} \\ + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a(p^\mu)^2 m \sum_{\beta} 2c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) c_{\beta}(\vec{p}). \quad (290)$$

A fim de se obter o ponto de energia zero que seja consistente com os campos fermiônicos se faz a seguinte escolha

$$a(p^\mu) = \sqrt{\frac{2E(\vec{p})}{m}}, \quad b(p^\mu) = \frac{1}{2E(\vec{p})}. \quad (291)$$

Com isto, tem-se que

$$H = -\delta^3(\vec{0}) \int d^3p \sum_{\beta} 2E(\vec{p}) \delta_{\beta\beta'} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2E(\vec{p}) \sum_{\beta} 2c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) c_{\beta}(\vec{p}) \quad (292)$$

Tendo a seguinte relação como verdadeira

$$\delta^3(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \quad (293)$$

pode-se usar o artifício de  $\vec{p} = \vec{0}$  de maneira que

$$\delta^3(\vec{0}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x. \quad (294)$$

Desta relação, reescreve-se o primeiro termo de (292) como

$$H_0 = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \sum_{\beta} 2E(\vec{p}) \delta_{\beta\beta'}, \quad (295)$$

onde o mesmo representa uma atribuição de energia de  $-\frac{1}{2}E(\vec{p})$  para cada helicidade dos graus auto-conjugados e anti-auto-conjugados para cada célula de  $\frac{1}{h^3}d^3x d^3p$  (em unidades naturais  $\hbar = 1$  implica que  $h = 2\pi$ ), de acordo com a mecânica estatística.

Das relações anteriores, presentes em (291), redefine-se tanto as regras de comutação dos operadores criação e destruição

$$\left\{ c_{\beta}(\vec{p}), c_{\beta'}^{\dagger}(\vec{p}') \right\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\beta\beta'}, \quad (296)$$

$$\left\{ c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}), c_{\beta'}^{\dagger}(\vec{p}') \right\} = \left\{ c_{\beta}(\vec{p}), c_{\beta'}(\vec{p}') \right\} = 0. \quad (297)$$

como também os operadores associados as partículas do ELKO (equações (272) e (273))

$$\eta(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\vec{p})}} \sum_{\beta} \left[ c_{\beta}(\vec{p}) \lambda_{\beta}^S(\vec{p}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \lambda_{\beta}^A(\vec{p}) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} \right], \quad (298)$$

$$\bar{\eta}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\vec{p})}} \sum_{\beta} \left[ c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\vec{p}) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\vec{p}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} \right]. \quad (299)$$

#### 4.1.3.3 Propagador do ELKO

Uma vez os campos e os seus anti-comutadores definidos, dados pelas equações (296), (297), (298) e (299) da seção anterior, pode-se definir a amplitude de uma partícula auto-conjugada de energia positiva de se propagar de  $x$  até  $x'$  como sendo

$$\mathcal{Q}_{x \rightarrow x'} = \varpi \left\langle 0 | \eta(x') \bar{\eta}(x) | 0 \right\rangle, \quad (300)$$

onde  $\varpi$  é um parâmetro que é determinado a posteriori, quando se normaliza o propagador integrando-o sob todo o espaço tempo. Neste cenário a amplitude  $\mathcal{Q}_{x \rightarrow x'}$  é integrada sobre todo o espaço de modo a se obter o valor 1, que assegura a presença da partícula em algum local do mesmo. Nesta interpretação  $|\mathcal{Q}_{x \rightarrow x'}|^2$  é a probabilidade de encontrar a partícula em algum lugar do universo.

Dado o referencial inercial, tem-se que uma partícula não pode ser aniquilada antes de ser criada, caso contrário a mesma estaria violando a relação de ordenamento temporal. Entretanto, assim como no caso dos espinores de Dirac, existe a interpretação de equivalência entre partículas criadas e aniquiladas nos tempos  $t$  e  $t'$  (com  $t < t'$ ) e antipartículas sendo criadas e aniquiladas nesses mesmos tempos. Estas anti-partículas possuem cargas opostas as suas correspondentes normais, e viajam na direção contrária do tempo. Ao considerar isto e que as amplitudes de propagação são antissimétricas pela troca  $x \rightarrow x'$ , escreve-se a amplitude como sendo

$$\mathcal{Q}_{x \rightarrow x'} = \varpi \left\langle 0 | \eta(x') \bar{\eta}(x) | 0 \right\rangle \theta(t' - t) - \varpi \left\langle 0 | \bar{\eta}(x) \eta(x') | 0 \right\rangle \theta(t - t'). \quad (301)$$

Invocando o operador de ordenamento temporal fermiônico,  $\mathcal{T}$ , remodela-se a amplitude anterior como

$$\mathcal{Q}_{x \rightarrow x'} = \varpi \left\langle 0 | \mathcal{T} \left[ \eta(x') \bar{\eta}(x) \right] | 0 \right\rangle \quad (302)$$

O primeiro termo de (301) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{x \rightarrow x'} &= \varpi \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\vec{p})}} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\vec{p}')}} \times \right. \right. \\ &\times \sum_{\beta'} \sum_{\beta} \left[ c_{\beta'}(\vec{p}') \lambda_{\beta'}^S(\vec{p}') e^{-ip'_{\mu} x^{\mu}} + c_{\beta'}^{\dagger}(\vec{p}') \lambda_{\beta'}^A(\vec{p}') e^{ip'_{\mu} x^{\mu}} \right] \times \\ &\times \left. \left[ c_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\vec{p}) e^{ip_{\mu} x^{\mu}} + c_{\beta}(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\vec{p}) e^{-ip_{\mu} x^{\mu}} \right] \right| 0 \right\rangle \theta(t' - t) \end{aligned} \quad (303)$$

Ao se utilizar a relação de anti-comutação descrita pela equação (296), conclui-se que

$$\left\langle 0 | c_{\beta}(\vec{p}) c_{\beta'}^{\dagger}(\vec{p}') | 0 \right\rangle + \left\langle 0 | c_{\beta'}^{\dagger}(\vec{p}') c_{\beta}(\vec{p}) | 0 \right\rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\beta\beta'} \langle 0 | 0 \rangle, \quad (304)$$

onde o segundo termo é nulo, já que se aplica o operador aniquilação no estado fundamental.

Deste modo, tem-se que

$$\left\langle 0 | c_{\beta}(\vec{p}) c_{\beta'}^{\dagger}(\vec{p}') | 0 \right\rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\beta\beta'}. \quad (305)$$

Aplicando este resultado no primeiro termo de (303) se obtém

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2mE(\vec{p})} \sum_{\beta} \lambda_{\beta}^S(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\vec{p}) e^{-ip_{\mu}(x'^{\mu}-x^{\mu})} \theta(t'-t), \quad (306)$$

enquanto que no segundo termo de (303) a aplicação gera a seguinte expressão

$$- \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2mE(\vec{p})} \sum_{\beta} \lambda_{\beta}^A(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\vec{p}) e^{ip_{\mu}(x'^{\mu}-x^{\mu})} \theta(t-t'). \quad (307)$$

Inserir-se os valores do primeiro e segundo termo, dados pelas equações (306) e (307), de volta na equação (296). Sendo assim a amplitude é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{x \rightarrow x'} &= \varpi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2mE(\vec{p})} \sum_{\beta} \left[ \theta(t'-t) \lambda_{\beta}^S(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\vec{p}) e^{-ip_{\mu}(x'^{\mu}-x^{\mu})} + \right. \\ &\quad \left. - \theta(t-t') \lambda_{\beta}^A(\vec{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\vec{p}) e^{ip_{\mu}(x'^{\mu}-x^{\mu})} \right] \end{aligned} \quad (308)$$

De acordo com as relações referentes as equações (256) e (257), troca-se os termos dependentes dos espinores ELKO de maneira a obter

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{x \rightarrow x'} &= \varpi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E(\vec{p})} \left[ \theta(t'-t) (I + \mathcal{G}(\phi)) e^{-ip_{\mu}(x'^{\mu}-x^{\mu})} + \right. \\ &\quad \left. - \theta(t-t') (I - \mathcal{G}(\phi)) e^{ip_{\mu}(x'^{\mu}-x^{\mu})} \right] \end{aligned} \quad (309)$$

Foca-se no segundo termo desta expressão. Nele, lança-se mão da troca  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ , além da relação  $\mathcal{G}(\phi) = -\mathcal{G}(\phi + \pi)$ , consequência direta da expressão (255). Deste modo, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{x \rightarrow x'} &= \varpi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E(\vec{p})} \left[ \theta(t'-t) (I + \mathcal{G}(\phi)) e^{-iE(\vec{p})(t'-t) + i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} + \right. \\ &\quad \left. - \theta(t-t') (I + \mathcal{G}(\phi)) e^{iE(\vec{p})(t'-t) + i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \right] \end{aligned} \quad (310)$$

Desta equação, pode-se fazer uma releitura das funções passo de Heaviside, agora apresentadas em seus modos integrais. Isto é,

$$\theta(t'-t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega(t'-t)}}{\omega - i\epsilon}, \quad (311)$$

para representar o primeiro termo e

$$\theta(t-t') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - i\epsilon}, \quad (312)$$

para o segundo. Ao inserir estas integrais, (311) e (312), na equação (310), obtém-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{x \rightarrow x'} &= -i\varpi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E(\vec{p})} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{(I + \mathcal{G}(\phi))}{\omega - i\epsilon} \times \\ &\times \left[ e^{i(\omega - E(\vec{p}))(t' - t) + i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} + e^{-i(\omega - E(\vec{p}))(t' - t) + i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \right] \end{aligned} \quad (313)$$

Executa-se, esta etapa, uma mudança de variáveis para cada uma das integrais. No primeiro se troca  $\omega \rightarrow p_0 = -(\omega - E(\vec{p}))$  enquanto que na segunda a troca é  $\omega \rightarrow p_0 = \omega - E(\vec{p})$ . Tais substituições alteram (313) de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{x \rightarrow x'} &= -i\varpi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E(\vec{p})} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \times \\ &\times \left[ \frac{(I + \mathcal{G}(\phi))}{E(\vec{p}) - p_0 - i\epsilon} + \frac{(I + \mathcal{G}(\phi))}{E(\vec{p}) + p_0 - i\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (314)$$

Aqui os termos entre colchetes são somados com os termos de segunda ordem em  $\epsilon$  suprimidos, assim como o limite de  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Efetuando isto resulta na seguinte equação:

$$\mathcal{Q}_{x \rightarrow x'} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[ i\varpi \frac{(I + \mathcal{G}(\phi))}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon} \right], \quad (315)$$

que representa, portanto, a expressão final para o propagador o ELKO.

Antes de avançar para a próxima seção, onde se justifica a dimensão de massa do campo ELKO (por meio do próprio propagador), faz-se necessário uma análise mais profunda sobre o propagador encontrado. Como já comentado na seção sobre a soma de spins, a função  $\mathcal{G}(\phi)$  se demonstra problemática nesta teoria. Pode-se verificar, por meio de (315), que o propagador também depende desta função, assim como também mencionado em (AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005a; AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005b; AHLUWALIA, 2016; ROGÉRIO, 2014). O motivo para isto ocorrer é devido aos termos do tipo  $\lambda_\beta^S(\vec{p}) \lambda_\beta^S(\vec{p})$  e  $\lambda_\beta^A(\vec{p}) \lambda_\beta^A(\vec{p})$ , que fazem os termos de soma de spins entrarem em cena.

A função  $\mathcal{G}(\phi)$  depende da direção do espaço considerada, logo a mesma não é um invariante de Lorentz. Isto quer dizer, em outras palavras, que as medições físicas resultam em valores diferentes quando em referenciais ou regiões distintas. Por razões óbvias, faz-se necessário contornar este problema a fim de se ter uma teoria sólida do posto de vista físico.

Existem duas formas de tentar evitar este problema. Cronologicamente, a primeira dita que uma direção específica seja escolhida. O preço a ser pago por isto é a necessidade de se restringir a um subgrupo da “Special Relativity” (SR), conhecido como “Very Special Relativity” (VSR). Ao se fazer esta escolha é possível “consertar” este problema, pelo menos



do ponto de vista matemático. Por outro lado a interpretação física dentro deste grupo pode ser um pouco vaga, já que neste cenário existem locais “privilegiados” do espaço. Cosmologicamente, poder-se-ia imaginar que a grandes distâncias a física conhecida, ou a gravidade, comportar-se-iam de forma distinta. Entretanto tais argumentos são meras especulações.

Em 2016, Ahluwalia desenvolveu um método no qual não é necessário abandonar a SR (AHLUWALIA, 2016). Com isto não há a necessidade dos argumentos anteriores e assim a física se mantém inalterada. Com isto, cria-se a possibilidade da aplicação do ELKO na cosmologia sem nenhuma ressalva. De qualquer forma, ambos os caminhos resultam em um propagador sem o fator  $\mathcal{G}(\phi)$ . Na proposta pioneira, na qual se lança mão da VSR, supõe-se que a direção encolhida é tal que a integral (315) não depende de  $\phi$ . Neste caso o termo  $\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})$  também não depende de  $\phi$ , de modo que a integral somente depende deste parâmetro por meio da função  $\mathcal{G}(\phi)$ . Consequentemente a integral sob um período desaparece, reduzindo, assim, a equação (315) a

$$\mathcal{Q}_{x \rightarrow x'} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[ i\varpi \frac{I}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (316)$$

Já no caso proposto em (AHLUWALIA, 2016), redefine-se os duais do ELKO de maneira a haver uma matriz extra na soma de spins. Tal matriz, que respeita certas propriedades, é a inversa do termo  $(I + \mathcal{G}(\phi))$  (existem duas matrizes na realidade, uma é a inversa de  $(I + \mathcal{G}(\phi))$  e a outra de  $(I - \mathcal{G}(\phi))$ ), via método de Penrose (PENROSE, 1955). De acordo com este artifício de Ahluwalia também se encontra que o propagador do ELKO é dado pela equação (316).

#### 4.1.3.4 Dimensão de Massa: ELKO

Uma importante conclusão fruto do propagador dado pela equação (316) é a dimensão do espinor ELKO. Procura-se nesta subseção mostrar como se chega a tal resultado. Todavia, faz-se necessário, antes disto, definir o fator  $\varpi$ .

Tem-se que a integral do propagador  $\mathcal{Q}_{x \rightarrow x'}$  deve ser unitária quando integrada sob todos os valores possíveis de  $x' - x$ . Logo,

$$(2\pi)^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta^4(p^\mu) \left[ i\varpi \frac{I}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon} \right] = 1. \quad (317)$$

A integral anterior faz a filtragem do fator  $\left[ i\varpi \frac{I}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon} \right]$  no ponto onde  $p^\mu = 0$ . Deste modo, chega-se à relação:

$$i\varpi \frac{I}{-m^2 + i\epsilon} = I \quad (318)$$

Sendo assim, ao se tomar o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , descobre-se que

$$\varpi = im^2. \quad (319)$$

Portanto, o propagador do ELKO é dado, finalmente, por

$$\mathcal{Q}_{x \rightarrow x'} = -m^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[ \frac{I}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon} \right], \quad (320)$$

onde ele é formalmente dado por

$$\mathcal{S}_{x \rightarrow x'}^{ELKO} = -\frac{1}{m^2} \mathcal{Q}_{x \rightarrow x'}, \quad (321)$$

de modo a satisfazer a seguinte relação:

$$\left( \partial_{\mu'} \partial^{\mu'} I + m^2 I \right) \mathcal{S}_{x \rightarrow x'}^{ELKO} = \delta^4(x^\mu - x^{\mu'}) I. \quad (322)$$

Confirma-se com esta expressão que o propagador do ELKO, de fato, possui o mesmo comportamento de um propagador de campo escalar, quando não há direção preferencial. Por conta deste motivo, credita-se ao ELKO a mesma dimensão correspondente ao campo escalar. Logo, o ELKO possui dimensão de massa um. Verifica-se a seguir (323) o propagador correspondente ao espinor de Dirac. Deste modo se constata que o fato do ELKO não respeitar a equação de Dirac e respeitar apenas Klein-Gordon, proporciona o mesmo comportamento ao seu propagador. O propagador de Dirac é dado por:

$$\mathcal{S}_{x \rightarrow x'}^{DIRAC} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[ \frac{\gamma^\mu p_\mu + mI}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (323)$$

Resumidamente se tem que todos os espinores presentes no MP, dados por Dirac, Weyl e Majorana obedecem uma equação de primeira ordem nas derivadas dos campos. Esta característica implica que o propagador quântico é proporcional, para altos valores de momento, ao fator  $p^{-1}$ . Este comportamento assintótico indica, entre outras coisas, que a dimensão de massa para tais campos deve ser  $m^{3/2}$ . Por outro lado, o ELKO, que obedece apenas Klein-Gordon, satisfaz uma equação de segunda ordem nas derivadas do campo. Isto implica que para grandes momentos o propagador se comporte desta vez como proporcional à  $p^{-2}$ . Por conta desta característica, conclui-se que o ELKO possui dimensão de massa um, em oposição aos outros espinores mencionados.

#### 4.1.3.5 Interações do ELKO

Depois da construção do operador  $\eta(x)$ , assim como a determinação de suas principais características, faz-se ainda necessário discutir quais as possíveis interações do ELKO com partículas do MP. Primeiramente se denomina  $\varsigma$  e  $\bar{\varsigma}$  como as “supostas” partículas do ELKO, correspondentes ao operador  $\eta(x)$ .

Na verificação das interações entre  $\varsigma$  e  $\bar{\varsigma}$  com as partículas do MP, surge, de modo natural, o questionamento sobre a renormalizabilidade da teoria. Simples argumentos de contagem de ordem da teoria podem, por exemplo, proibir interações quadri-fermiônicas ou potenciais não polinomiais para o Higgs. Mesmo tais fatores não sendo estritamente proibidos, suas escalas de energia fazem os mesmos serem suprimidos frente a fatores característicos da teoria.

Como foi verificado na subseção anterior, (4.1.3.4), o ELKO é um espinor que possui dimensão de massa um, de acordo com seu propagador. Por conta desta característica as interações das partículas  $\varsigma$  e  $\bar{\varsigma}$  e os campos do MP são inteiramente governados pela dimensão de massa e termos da contagem de energia. Por esta razão a Lagrangeana que representa tais interações é dada por

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}^{ELKO}(x) + \mathcal{L}^{int}(x), \quad (324)$$

onde o primeiro e o segundo termo do lado direito são dados respectivamente por:

$$\mathcal{L}^{ELKO}(x) = \partial^\mu \bar{\eta}(x) \partial_\mu \eta(x) - m^2 \bar{\eta}(x) \eta(x) + \alpha_E \left[ \bar{\eta}(x) \eta(x) \right]^2, \quad (325)$$

$$\mathcal{L}_{\phi\eta}^{int}(x) = \lambda_E \phi^\dagger(x) \phi(x) \bar{\eta}(x) \eta(x), \quad (326)$$

onde  $\phi(x)$  é o dubleto de Higgs,  $m$  a massa do ELKO e  $\lambda_E$ ,  $\alpha_E$  são constantes de acoplamento adimensionais. Tal Lagrangeana é composta por um termo semelhante ao de uma campo escalar, que possui termo de massa simples, dado pelo segundo termo do lado direito de (325), e um termo de auto interação, descrito pelo terceiro termo do lado direito de (325). Já a parte da Lagrangeana do ELKO, dada por  $\mathcal{L}_{\phi\eta}^{int}(x)$  e descrita pela equação (326), representa a interação entre ELKO e o Higgs.

Ademais, dada a neutralidade do ELKO após a aplicação do operador conjugação de carga (ou a neutralidade de  $\eta(x)$  via transformações de gauge  $U(1)$  locais), constata-se que interações do tipo:

$$\mathcal{L}_{F\eta}^{int}(x) = \epsilon_E \bar{\eta}(x) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \eta(x) F_{\mu\nu}(x), \quad (327)$$

são muito pouco prováveis. Isto é, a constante de acoplamento,  $\epsilon_E$ , possui um valor demasiado pequeno para ser levado em consideração, o qual afeta a propagação do fóton na interação com o ELKO. Por este motivo, junto com as conclusões anteriores, afirma-se que o ELKO é um “Dark Spinor”, que em outras palavras, significa que o ELKO somente interage, de maneira efetiva, gravitacionalmente.

## **Parte II**

# **Estrutura do ELKO na Cosmologia**

Nesta segunda parte da tese seguem descritos os resultados pertinentes à pesquisa realizada. Inicia-se com a aplicação do espinor ELKO na cosmologia, de acordo com a propriedade escura do mesmo, verificada na estrutura básica sobre o espinor na parte (I) deste trabalho. Desta maneira se procura apreciar o contexto geral da cosmologia, com alguns de seus problemas fundamentais, de forma a justificar o ELKO como possível redentor da teoria cosmológica vigente.

Admitindo o ELKO como um dos componentes do universo resulta na inserção de sua densidade Lagrangeana na ação de Einstein-Hilbert. Estuda-se então as equações de Friedmann decorrentes dessa inserção de maneira a caracterizar os principais parâmetros que descrevem o universo, como o fator de expansão  $a(t)$ , além dos materiais que também o compõe. Estuda-se inicialmente o cenário cosmológico completo, que contém os termos de torção. Justifica-se o estudo livre de torção para um regime de baixas energias. Para este caso se apresentam dois casos distintos baseados nos artigos publicados (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014) e (PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015). No primeiro deles o ELKO é encarado como DE num universo onde matéria bariônica e DM são representadas por um único material. Por outro lado, generaliza-se este cenário colocando o ELKO como diversos tipos de elementos junto com diferentes combinações de matéria. Neste, o ELKO pode ser visto tanto como matéria escura quanto energia escura. Em ambos trabalhos se lança mão dos sistemas dinâmicos para análise do conjunto de equações. Deste modo se discute a possibilidade do ELKO fazer o papel de elemento “escuro” baseado em pontos fixos atratores, confrontando e vinculando valores de variáveis com dados observacionais.

Após as seções correspondentes ao artigos (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014) e (PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015), apresenta-se um resultado fruto de outra aplicação do ELKO na cosmologia. Neste, abandona-se o regime de baixas energias de maneira a se ter resultados mais gerais. Com isto, considera-se ainda a torção nas equações de Friedmann neste estudo. Neste, verifica-se que o para uma variação lenta do campo ELKO se obtém resultados condizentes com o modelo de variação de constante cosmológica, o  $\Lambda(t)$ .

Ao final destas seções, que contém os resultados da pesquisa, seguem os capítulos referentes as discussões e conclusões de todo o trabalho. No final, ainda se encontram apêndices com explicações detalhadas de métodos, passagens matemáticas e teorias secundárias utilizadas ao longo da tese.

## 5 ELKO: Aplicações na Cosmologia

Resumidamente, o cenário geral que se aprecia na cosmologia é basicamente este: De acordo com observações, tem-se que o universo é aproximadamente isotrópico e homogêneo. Tal característica exige a utilização da métrica FLRW para sua descrição. Ainda de acordo com as observações, o universo se encontra num regime de expansão acelerada, que por sua vez abre precedente a introdução da chamada energia escura, responsável por acelerar o universo. Existem dentro da literatura uma série de ideias e teorias acerca da real origem desta energia. Dentre as diversas teorias que procuram caracterizar a DE, o modelo  $\Lambda$ CDM se mostra bastante promissor para uma considerável parcela da comunidade científica, já que os dados observacionais são fitados pelo modelo de maneira satisfatória.

Neste modelo a constante cosmológica de Einstein figura como a encarregada de acelerar o universo. Como visto anteriormente, ao imergir a métrica FLRW nas equações de Einstein se obtém as equações de Friedmann, que por sua vez relacionam a dinâmica de expansão do universo e toda a matéria nele contido. No modelo  $\Lambda$ CDM o universo é interpretado como sendo preenchido basicamente por matéria escura e matéria bariônica, com uma constante cosmológica não nula. É com este modelo que se obtém as conhecidas proporções de composição do universo, com aproximadamente 70% de DE, 25% de DM e finalmente 5% de matéria bariônica. Com esses dados, afirma-se, portanto, que apenas cerca de 5% do universo é conhecido. Sendo assim, neste modelo se verifica que a constante cosmológica faz o papel de DE.

Entretanto, este modelo sofre por questões básicas relacionadas com a origem da constante cosmológica e com as proporções correspondentes aos componentes do universo. No primeiro, conhecido como o problema da constante cosmológica, existe uma grande divergência entre os valores de constante segundo a cosmologia e a Teoria Quântica de Campos (TQC). De acordo com a TQC a constante seria vista como a energia do vácuo, onde seu valor é estimado a partir da energia do “ground state” de todos os campos cujas partículas representam o MP. Ao comparar ambos valores se encontra por volta de 118 ordens de grandeza de diferença. Na segunda questão pendente, conhecida como problema da coincidência cósmica, existe um questionamento do por quê o estágio atual do universo seria privilegiado a ponto de se ter as mesmas ordens de proporções de matéria bariônica e a matéria e energia escura.

A princípio existem três possibilidades para se resolver essas questões. Na primeira possibilidade, mantém-se o cenário apresentado anteriormente, ou seja, a RG e a cosmologia com o universo homogêneo e isotrópico são mantidos. Após manter essas características é preciso se procurar por outros elementos que possam atuar como DE. Dentro da literatura já existem diversos possíveis candidatos, como campos escalares, vetoriais e espinoriais (CARVALHO et al., 2006; ABRAMO; PINTO-NETO, 2006; CHO; KEUM, 1998; MATOS; GUZMAN; URENA-LOPEZ, 2000; MATOS; VAZQUEZ-GONZALEZ; MAGANA, 2009; URENA-LOPEZ; REYES-IBARRA, 2009; MAGANA et al., 2012; ROBLES; MATOS, 2012; MATOS; GUZMAN, 2000; SUÁREZ; ROBLES; MATOS, 2014; URENA-LOPEZ, 2009; MAGANA; MATOS, 2012; JENTSCHURA; WUNDT, 2013; BABOUROVA; FROLOV; KOSTKIN, 2011; SUN; SHEN, 2006). Uma vez o ELKO tendo sido confirmado apto a fazer papel de energia ou matéria escura, procura-se, neste trabalho, verificar a validade de tê-lo como agente responsável pela expansão. As outras duas possibilidades, não adotadas aqui, são os seguintes; Pode-se manter a gravitação e a isometria de maneira a procurar modelos inhomogêneos que levem a Friedmann em limites específicos. Outra possibilidade é encontrar outros modelos gravitacionais, tais como a teoria  $f(R)$ , modelo de branas ou então a gravitação quântica. Com essas teorias, busca-se uma forma onde os dados observacionais são encarados de um ponto de vista totalmente diferente, onde os problemas correntes, por ventura, não existam.

A receita básica de se verificar esta validade é inserir o tensor de energia momento correspondente ao ELKO no lado direito das equações de Einstein, junto com a DM e bariônica, e então resolver as equações de Friedmann decorrentes. Escolhe-se juntar a DM e bariônica em uma única classe de matéria devido às suas propriedades atrativas, que confrontam a possível propriedade repulsiva do ELKO. Sendo assim, modela-se o universo como sendo constituído de ELKO (DE) e matéria (DM e bariônica).

Ao se inserir novos elementos no sistema se obtém novas equações a serem consideradas, como as equações de conservação de energias dos elementos do universo (equação de continuidade). Adiciona-se um termo extra na equação de conservação individual de cada um dos elementos constituintes do universo de forma a anexar uma possível propriedade de conversão de ELKO em matéria ou vice-versa. Desta maneira, procura-se aliviar o problema da coincidência cósmica, uma vez que a conversão de matéria em ELKO (ou vice-versa) estaria prevista pela dinâmica das equações.

Uma vez o ELKO sendo um férmion, a maneira correta e completa de acoplá-lo à gravidade só pode ser dada por meio da presença da torção. Estes termos de torção



são descritos pela teoria de Einstein-Cartan. Ademais, segue desta inclusão que a torção prova ser essencial para a conservação do momento angular quando o momento angular de spin se demonstra relevante. Argumenta-se que a torção precisa estar presente na teoria fundamental da gravidade (CHEE; GUO, 2012; HAMMOND, 2010; JIMENEZ et al., 2012). Existem também modelos nos quais a torção figuram no papel central da teoria, como a gravidade teleparalela ou senão em teorias  $f(T)$ , onde a torção justifica a aceleração do universo para determinados cenários.

A forma de verificar a validade do ELKO como DE passa pela resolução do conjunto de equações existentes. As equações de Friedmann, equações de conservação e a equação de campo. Entretanto, devido à complexidade desse sistema de equações não é possível se encontrar soluções analíticas. Essa dificuldade se apresenta basicamente por conta da estrutura da pressão e densidade de energia do campo ELKO. Além da forma exótica do tensor energia momento do ELKO outros detalhes aumentam o grau de complexidade do sistema de equações. São eles, a taxa de decaimento entre o espinor e a matéria e os próprios termos de torção, por exemplo.

Por este motivo, escolhe-se o formalismo dos sistemas dinâmicos para se verificar a proposta do trabalho. Procura-se, então deixar as equações do problema no formato de um sistema dinâmico. Para isso se busca uma escolha de variáveis apropriada de forma que o sistema e os vínculos, frutos destas equações, não sejam demasiadamente difíceis de se resolver. Logicamente a escolha de variáveis não altera a física do problema, mas ela pode ser problemática para se resolver ou para ser invertida nos valores antigos, uma vez que os testes são feitos com valores observacionais, como a proporção de elementos que constituem o universo, por exemplo.

Segue na próxima seção a teoria completa do ELKO na cosmologia. Por meio desta teoria se apresenta duas vertentes baseadas nos avanços da pesquisa ao longo do doutorado. Num primeiro estágio, estudou-se a teoria livre de torção enquanto que já no estágio final da pesquisa um cenário mais geral e completo foi apreciado.

Apresenta-se, após a dedução da teoria completa, os resultados oriundos dos artigos publicados (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014) e (PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015). Neles a teoria completa resulta na teoria livre de torção quando se esta no regime de baixas energias. Nesta parte se procura aplicar o formalismo de sistemas dinâmicos para testar o ELKO no papel de DE.

Na parte final, tanto da pesquisa quanto do capítulo, estuda-se uma aplicação do ELKO na cosmologia por meio da teoria de Einstein-Cartan. Nela, constata-se que o ELKO nestas condições propicia resultados que reproduzem aqueles oriundos da cosmologia  $\Lambda(t)$ . Esta teoria se baseia numa constante cosmológica que varia lentamente no tempo. Prova-se ao final do capítulo que ambas as teorias são portanto equivalentes.

## 5.1 Dinâmicas do ELKO na Cosmologia

A maneira de inserir o ELKO na dinâmica gravitacional é considerá-lo como matéria nas equações de Einstein, que posteriormente dão origem às equações de Friedmann. Entretanto, escolhe-se obter as equações de Friedmann por meio do mecanismo apresentado no apêndice (G). Por este motivo se adiciona toda informação sobre o ELKO na densidade Lagrangeana do sistema.

A ação desse sistema é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} \tilde{R} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \bar{\lambda} \tilde{\nabla}_\nu \lambda - V(\bar{\lambda}\lambda) \right] + S_m, \quad (328)$$

onde  $\lambda$  é o espinor ELKO e  $\bar{\lambda}$  o seu dual,  $V(\bar{\lambda}\lambda)$  é o potencial do campo ELKO e finalmente  $S_m$  é a ação correspondente à parte de matéria do sistema (matéria bariônica mais a DM). Por outro lado, o fator  $\kappa$  é dado por  $\sqrt{8\pi G}$ . As derivadas covariantes, que contém termos de torção (representados pelo til), dos espinores ELKO e seus duais são dadas por

$$\tilde{\nabla}_\mu \lambda \equiv \partial_\mu \lambda - \tilde{\Gamma}_\mu \lambda, \quad (329)$$

$$\tilde{\nabla}_\mu \bar{\lambda} \equiv \partial_\mu \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \tilde{\Gamma}_\mu. \quad (330)$$

No apêndice (A) se encontram informações mais detalhadas sobre a derivada covariante de um espinor, presente nas equações (329) e (330), e a própria conexão de spin, dada por  $\tilde{\Gamma}_\mu$ . Também é possível notar neste apêndice que a presença ou não da torção nesta conexão é um tanto simples, já que se escreve a conexão de spin diretamente proporcional à conexão afim. Isto é, de acordo com a definição (29) a teoria livre, ou não, de torção depende somente se  $K$  (tensor de contorção) é nulo ou não.

De acordo com (BOEHMER, 2007b; BOEHMER, 2008; BOEHMER et al., 2010; BOEHMER; BURNETT, 2010; WEI, 2011) o campo ELKO pode ter a sua parte temporal separada, de forma que  $\lambda = \phi(t)\xi$  e  $\bar{\lambda} = \phi(t)\bar{\xi}$ , onde  $\xi$  e  $\bar{\xi}$  são espinores constantes. Fisicamente este

processo é possível graças a homogeneidade do universo, deste modo todo espaço-tempo é permeado pelo campo ELKO que somente evolui no tempo. Conclui-se, portanto, que ele não depende da região do espaço-tempo estudada. Além disso, por conta das propriedades do espinor ELKO (vide a seção (4.1.2.6), tem-se que  $\vec{\xi}\xi = 1$ .

Afim de se manter a coerência de um universo isotrópico e homogêneo, de acordo com (KOUWN et al., 2013), assume-se que a torção pode ser simplificada de modo que

$$S_{110} = S_{220} = S_{330} = -S_{101} = -S_{202} = -S_{303} = a(t)^2 h(t), \quad (331)$$

$$S_{ijk} = 2a(t)^3 f(t) \varepsilon_{ijk}, \quad (332)$$

onde  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}$  é um símbolo totalmente antissimétrico, com  $\varepsilon_{123} = 1$  e  $\varepsilon_{ijj} = 0$ . De acordo com a definição de torção, a métrica FLRW ( $ds^2 = N(t)^2 dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ ) e a equação (29) se obtém que as conexões não nulas são

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{00}^0 &= \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}, & \tilde{\Gamma}_{ij}^0 &= \frac{a(t)\dot{a}(t) + a(t)^2 h(t)}{N(t)^2} \delta_{ij}, & \tilde{\Gamma}_{0j}^i &= \frac{\dot{a}(t) + a(t)h(t)}{a(t)} \delta_{ij}, \\ \tilde{\Gamma}_{j0}^i &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \delta_{ij}, & \tilde{\Gamma}_{jk}^i &= -a(t)f(t)\varepsilon_{ijk}. \end{aligned} \quad (333)$$

Já as conexões de spin não nulas, de acordo com o apêndice (A), são dadas por

$$\Gamma_0 = 0, \Gamma_i = \left( \frac{\dot{a}(t) + a(t)h(t)}{2N(t)} \right) \gamma_0 \gamma_i + \left( \frac{f(t)}{4} \right) \varepsilon_{ijk} \gamma_k \gamma_j. \quad (334)$$

Afim de se obter o valor de (328), apresenta-se o escalar de curvatura com torção como sendo

$$\tilde{R} = -6 \left[ \frac{1}{a(t)N(t)} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}(t) + a(t)h(t)}{N(t)} \right) + \left( \frac{\dot{a}(t) + a(t)h(t)}{a(t)N(t)} \right)^2 - f(t)^2 \right]. \quad (335)$$

Decorrente dessas conexões e do escalar de curvatura (335), obtém-se que a densidade Lagrangeana correspondente a ação (328) é

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{N(t)} \left( 3 \frac{a(t)\dot{a}(t)^2}{\kappa^2} - 3 \frac{a(t)^3 h(t)^2}{\kappa^2} - \frac{1}{2} a(t)^3 \dot{\phi}(t)^2 - \frac{3}{8} a(t) \left( \dot{a}(t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a(t)h(t) \right)^2 \phi(t)^2 \right) - N(t) \left( 3 \frac{a(t)f(t)^2}{\kappa^2} + \frac{3}{8} a(t)f(t)^2 \phi(t)^2 + a(t)^3 V(\phi) \right), \end{aligned} \quad (336)$$

Por meio da seguinte Lagrangeana é possível se obter as equações de Friedmann com a equações de Euler-Lagrange com respeito aos parâmetro  $N(t)$  e  $a(t)$ , assim como visto no apêndice (A). No mesmo apêndice segue descrito o motivo pelo qual não há termos

de segunda ordem nas derivadas de  $a(t)$ , assim como termo derivadas de  $N(t)$ , em (336). Deste modo se consegue, respectivamente, as seguintes equações

$$3H^2 = \kappa^2 \left[ \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} + V(\phi) + \frac{3}{8}H^2\phi(t)^2 + \frac{3}{4}Hh(t)\phi(t)^2 + 3 \left( 1 + \frac{\kappa^2}{8}\phi(t)^2 \right) h(t)^2 + 3 \left( 1 + \frac{\kappa^2}{8}\phi(t)^2 \right) f(t)^2 + \rho_m \right], \quad (337)$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 = \kappa^2 \left[ \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} - V(\phi) - \frac{3}{8}H^2\phi(t)^2 - \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left( (H + h(t)) \phi(t)^2 \right) + 3 \left( 1 + \frac{\kappa^2}{8}\phi(t)^2 \right) h(t)^2 - 3 \left( 1 + \frac{\kappa^2}{8}\phi(t)^2 \right) f(t)^2 + p_m \right], \quad (338)$$

Nestas duas expressões foram colocados, à mão e por simplicidade, os termos de matérias correspondentes,  $\rho_m$  e  $p_m$ . Estes são fruto da Lagrangeana de matéria contida na ação  $S_m$ . Tem-se também, de acordo com o capítulo (3), que  $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  e conseqüentemente que  $\dot{H} = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2$ . Considera-se também que  $N(t) \rightarrow 1$ , uma vez que a função lapso não possui conteúdo cosmológico e só é utilizada aqui como artifício para se obter as equações (337) e (338). Nota-se, por fim, que a simplificação dos espinores ELKO para uma função de  $t$  escalar multiplicada por um espinor constante gera uma estrutura mais sofisticada que a encontrada para o campo escalar. Comparando com (CARVALHO et al., 2006; ABRAMO; PINTO-NETO, 2006; CHO; KEUM, 1998; MATOS; GUZMAN; URENA-LOPEZ, 2000; MATOS; VAZQUEZ-GONZALEZ; MAGANA, 2009; URENA-LOPEZ; REYES-IBARRA, 2009; MAGANA et al., 2012; ROBLES; MATOS, 2012; MATOS; GUZMAN, 2000; SUÁREZ; ROBLES; MATOS, 2014; URENA-LOPEZ, 2009; MAGANA; MATOS, 2012), verifica-se que o terceiro termo do lado direito de (337) e o terceiro e quarto termo do lado direito de (338) não aparecem no caso escalar normal. A estrutura usual das equações de Friedmann é na realidade dada por

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \rho_\phi + \rho_m \right], \quad (339)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} \left[ \rho_\phi + p_\phi + \rho_m + p_m \right], \quad (340)$$

Desta maneira, tem-se que a densidade de energia e a pressão do campo ELKO são

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{3}{8}H^2\phi^2 + \frac{3}{4}Hh(t)\phi(t)^2 + 3 \left( 1 + \frac{\kappa^2}{8}\phi(t)^2 \right) h(t)^2 + 3 \left( 1 + \frac{\kappa^2}{8}\phi(t)^2 \right) f(t)^2, \quad (341)$$

$$\begin{aligned}
p_\phi &= \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{3}{8}H^2\phi^2 - \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left((H+h(t))\phi(t)^2\right) + \\
&+ 3\left(1 + \frac{\kappa^2}{8}\phi(t)^2\right)h(t)^2 - 3\left(1 + \frac{\kappa^2}{8}\phi(t)^2\right)f(t)^2.
\end{aligned} \tag{342}$$

Todavia ainda existem duas equações que devem ser consideradas, são elas as equações de continuidade ou conservação. Elas são dadas por

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = Q, \tag{343}$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = -Q, \tag{344}$$

onde  $Q$  representa uma função que determina a taxa de conversão de matéria em ELKO ou vice-versa. O tipo de conversão depende do sinal desta função, i.e. para  $Q > 0$  o campo ELKO decai em matéria enquanto que para  $Q < 0$  a matéria decai em ELKO. Em ambas as equações o termo  $Q$  é inserido à mão, caso contrário a interação entre a matéria e o ELKO deveria estar contida na densidade Lagrangeana (336).

Nota-se que a equação (344) pode ser obtida por meio da equação de Euler-Lagrange da ação (328) com relação ao campo  $\phi(t)$ . Substituindo as expressões (341) e (342) em (344) é possível ver como tal equação resulta na equação de movimento de  $\phi(t)$ , dada por

$$\ddot{\phi}(t) + 3H\dot{\phi}(t) + V'(\phi) - \frac{3}{4}\left((H+h(t))^2 - f(t)^2\right)\phi(t) = -\frac{Q}{\dot{\phi}(t)}, \tag{345}$$

onde  $V'(\phi)$  denota a derivada do potencial ELKO  $V(\phi)$  com relação à  $\phi$ . Neste caso, assim como em (343) e (344), insere-se a taxa de decaimento a posteriori. Deste modo é por meio destas mesmas equações que se procura aliviar o problema da coincidência cósmica.

Nota-se que ainda nada foi dito a respeito dos termos de torção, representados na densidade Lagrangeana por  $f(t)$  e  $h(t)$ . As informações referentes a eles são provenientes das equações de Einstein-Cartan ou das equações de Euler-Lagrange. De acordo com as equações de Euler-Lagrange se tem que

$$\frac{6}{N(t)} \left[ \frac{a(t)^3 h(t)}{\kappa^2} + \frac{1}{8}a(t)^2 \left( \dot{a}(t) + a(t)h(t) \right) \phi(t)^2 \right] = 0, \tag{346}$$

$$6N(t)a(t)^3 \left( \frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{8}\phi(t)^2 \right) f(t) = 0, \tag{347}$$

que correspondem às equações  $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta h(t)}$  e  $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta f(t)}$ , respectivamente. Resulta das equações (346) e (347) os valores de  $h(t)$  e  $f(t)$  que validam as mesmas. Tais funções são dadas, portanto, por

$$h(t) = -\frac{1}{8} \frac{\kappa^2 \phi(t)^2}{(1 + \kappa^2 \phi(t)^2/8)} \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right), \quad f(t) = 0. \quad (348)$$

Desta maneira, deve-se substituir os valores dos campos de torção, (348) nas equações (337), (338) e (345) afim de se obter as equações cosmológicas finais. Ao se executar esta substituição, consegue-se as seguintes expressões

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} + V(\phi) + \frac{3}{8} \frac{H^2 \phi(t)^2}{(1 + \kappa^2 \phi(t)^2/8)} + \rho_m \right], \quad (349)$$

$$\begin{aligned} -2\dot{H} - 3H^2 &= \kappa^2 \left[ \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} - V(\phi) - \frac{3}{8} \frac{H^2 \phi(t)^2}{(1 + \kappa^2 \phi(t)^2/8)} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{\dot{H} \phi(t)^2}{(1 + \kappa^2 \phi(t)^2/8)} - \frac{1}{2} \frac{H \phi(t) \dot{\phi}(t)}{(1 + \kappa^2 \phi(t)^2/8)^2} + p_m \right], \end{aligned} \quad (350)$$

$$\ddot{\phi}(t) + 3H\dot{\phi}(t) + V'(\phi) - \frac{3}{4} \frac{H^2 \phi(t)}{(1 + \kappa^2 \phi(t)^2/8)^2} = -\frac{Q}{\dot{\phi}(t)}. \quad (351)$$

Logo, com estas equações mais a equação de conservação de matéria ((343) se forma o conjunto completo de equações para se analisar o ELKO num universo formado de matéria e energia escura.

Na próxima seção os resultados decorrentes das equações recém apresentadas são analisadas, só que sem a presença de torção.

## 5.2 Equações Dinâmicas Livres de Torção

De acordo com resultados recentemente apresentados (PEREIRA et al., 2016), verifica-se que o estudo do campo ELKO na cosmologia pode ser aproximada para um caso livre de torção, quando se esta num regime de baixas energias. Por este motivo aqui se apresentam os resultados decorrentes dos principais esforços deste projeto. Decorrente destes avanços se publicou os seguintes trabalhos (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014; PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015), com destaque para (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014), que se demonstra o mais fundamental e base para os outros. Suas ideias e estrutura principal seguem na sequência desta seção.

Antes de dar sequência as considerações pertinentes à resolução do sistema se faz necessário obter as equações correspondentes ao sistema livre de torção. O modo de se

obter essas equações é simplesmente fazer  $h(t)$  e  $f(t)$  nulos desde o começo. Tais resultados correspondem ao limite de baixas energias. Nele, o campo associado ao ELKO,  $\phi(t)$ , é muito menor que a massa de Planck ( $M_{Pl}$ ). Como  $\kappa = M_{Pl}^{-1}$ , conclui-se que  $\kappa^2\phi(t)^2 \ll 1$ . Aplicando este limite na primeira equação de (348) justifica a razão de também se anular a parte da torção  $h(t)$ , uma vez que  $f(t)$  já é nula por conta do vínculo decorrente de  $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta f(t)}$ . De modo semelhante, ao se aplicar este limite no sistema dado pelas equações (337), (338), (343) e (345) resulta no seguinte novo sistema:

$$3H^2 = \kappa^2 \left[ \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} + V(\phi) + \frac{3}{8}H^2\phi(t)^2 + \rho_m \right], \quad (352)$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 = \kappa^2 \left[ \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} - V(\phi) - \frac{3}{8}H^2\phi(t)^2 - \frac{1}{4}\frac{d}{dt}(H\phi(t)^2) + p_m \right], \quad (353)$$

$$\ddot{\phi}(t) + 3H\dot{\phi}(t) + V'(\phi) - \frac{3}{4}H^2\phi(t) = -\frac{Q}{\dot{\phi}(t)}, \quad (354)$$

onde se completa o sistema adicionando a conservação da parte de matéria do universo, representada pela equação (343).

Contudo, como se pode notar, o sistema de equações dado por (343), (352), (353) e (354) não pode ser resolvido algebricamente. Por conta disto, prefere-se analisar o cenário utilizando o formalismo de sistemas dinâmicos, onde se verificam pontos de estabilidades que sejam compatíveis com os dados observacionais vigentes.

Nas próximas duas subseções são apresentados duas vertentes do estudo do ELKO na cosmologia livre de torção. No primeiro deles, toma-se como base o artigo publicado (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014), onde o ELKO é encarado como DE. Neste caso, separa-se os constituintes do universo como gravitacionalmente atrativos e repulsores. Deste modo o ELKO possui a propriedade de expandir o universo enquanto que a matéria bariônica e escura são consideradas uma só. Por outro lado, no segundo caso, baseado em (PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015), cria-se um cenário mais amplo cosmologicamente. Neste o ELKO é testado como matéria e energia escura, além de radiação e matéria ultrarelativística. Tais características são ditadas por um vínculo aplicado à equação de estado do ELKO, de forma que  $p_\phi = \omega_\phi\rho_\phi$ .

### 5.2.1 Sistema Dinâmico do ELKO: 1º Caso

Nesta seção as equações cosmológicas, de um cenário onde o universo é constituído de ELKO e de DM, são analisadas por meio do formalismo de sistemas dinâmicos. A análise aqui apresentada corresponde aos resultados publicados em (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014). De acordo com a seção anterior, as equações são em resumo dadas por

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} + V(\phi) + \frac{3}{8} H^2 \phi(t)^2 + \rho_m \right], \quad (355)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} \left[ \dot{\phi}(t)^2 - \frac{1}{4} \frac{d}{dt} (H\phi(t)^2) + \rho_m + p_m \right], \quad (356)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = Q, \quad (357)$$

$$\ddot{\phi}(t) + 3H\dot{\phi}(t) + V'(\phi) - \frac{3}{4} H^2 \phi(t) = -\frac{Q}{\dot{\phi}(t)}, \quad (358)$$

onde ainda há uma relação entre  $\rho_m$  e  $p_m$  dado pela equação característica  $p_m = (\gamma - 1) \rho_m$ . Neste definição de equação característica se opta por escrever  $\omega_m = \gamma - 1$  por uma mera questão estética nas equações do sistema dinâmico, de acordo com (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014).

Neste caso são quatro equações e três variáveis. Entretanto, de acordo com a escolha de variáveis, baseadas em (BASAK et al., 2013; PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014), a primeira equação (355) do sistema se torna apenas um vínculo. Com isso são três equações e incógnitas a serem definidas,  $a(t)$ ,  $\phi(t)$  e  $\rho_m$ , para um dado valor de  $Q$ , que representa a interação entre ELKO e DM. De acordo com a parte final da seção anterior, a variável  $a(t)$ , conseqüentemente presente na forma de  $H$ , é absorvida por todas as variáveis de maneira que a nova variável está relacionada com a parte cinética do ELKO. De acordo com (BASAK et al., 2013), redefine-se  $\rho_\phi$  e  $p_\phi$  de maneira mais conveniente, logo

$$\rho_\phi = X + \tilde{V}, \quad (359)$$

$$p_\phi = X - \tilde{V}, \quad (360)$$

onde

$$X = \frac{1}{2} \dot{\phi}(t) - \frac{1}{8} \frac{d}{dt} (H\phi(t)^2), \quad (361)$$



$$\tilde{V} = V(\phi) + \frac{1}{8} \frac{d}{dt} (H\phi(t)^2) + \frac{3}{8} H^2 \phi(t)^2. \quad (362)$$

A partir desta redefinição e seguindo (BASAK et al., 2013; PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014), a escolha de variáveis utilizada é dada por

$$x = \frac{\kappa\sqrt{X}}{\sqrt{3H}}, \quad y = \frac{\kappa\sqrt{\tilde{V}}}{\sqrt{3H}}, \quad v = \frac{\kappa\sqrt{\rho_m}}{\sqrt{3H}}. \quad (363)$$

Por meio de tal escolha de variáveis é possível reescrever a equação de Friedmann (355) da seguinte maneira

$$x^2 + y^2 + v^2 = 1. \quad (364)$$

Esta equação representa o vínculo que as variáveis devem respeitar. A interpretação física dela surge ao se associar  $x^2 + y^2$  e  $v^2$  com a densidade de ELKO e matéria no universo, respectivamente. Isto é,

$$\Omega_\phi = \frac{\kappa^2 \rho_\phi}{3H^2} = x^2 + y^2, \quad \Omega_m = \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2} = v^2. \quad (365)$$

Essas densidades são preponderantes para a verificação do modelo estudado, pois essas densidades indicam a composição do universo em determinada época. Uma consequência decorrente da interpretação de densidades, para essas variáveis, é que  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$  e  $0 \leq v^2 \leq 1$ . Outro parâmetro imprescindível para a validação do modelo é dado por

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 3x^2 + \frac{3}{2}\gamma v^2, \quad (366)$$

que está correlacionado com o parâmetro de desaceleração, que pode ser verificado observacionalmente e é representado por

$$q = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)H^2} = \epsilon - 1. \quad (367)$$

Sendo assim, o universo se encontra em um regime de expansão acelerada quando  $q < 0$  ( $\epsilon < 1$ ), enquanto que quando  $q > 0$  ( $\epsilon > 1$ ) o mesmo está em expansão desacelerada.

De acordo com o resultado de observações recentes do satélite Planck, referentes à radiação cósmica de fundo (CMB) e o potencial de lentes gravitacionais, constata-se que o valor recente do parâmetro de desaceleração é  $q_0 \simeq -0.527$ . Para este valor de parâmetro as densidades correspondentes seriam  $\Omega_m \simeq 0.315$  e  $\Omega_\Lambda \simeq 0.685$ , que representam um universo constituído de 31.5% de DM e 68.5% de DE. Como a DE, segundo o modelo  $\Lambda$ CDM, é representado pela energia do vácuo (constante cosmológica), acredita-se que a

releitura desses valores neste modelo seria de algo por volta de desses valores. Há uma pequena discrepância, já que os valores apresentados foram fitados utilizando o modelo  $\Lambda$ CDM, mas se pode trabalhar com tais valores, por simplicidade e aproximação, já que o modelo é analisado via sistemas dinâmicos e não é resolvido analiticamente.

O sistema de equações, baseado na escolha de variáveis (363), é dado por

$$x' = (\epsilon - 3)x - \frac{\Lambda}{2H} \frac{y^2}{x} - \frac{Q_1}{x}, \quad (368)$$

$$v' = \left( \epsilon - \frac{3}{2}\gamma \right) v + \frac{Q_1}{v}, \quad (369)$$

$$y' = \left( \epsilon + \frac{\Lambda}{2H} \right) y, \quad (370)$$

onde  $'$  representa a derivada com relação à  $\ln a(t)$ , ou seja,  $f' = \frac{\dot{f}}{H}$ , sendo  $f$  uma função qualquer dependente do tempo. Tem-se também que  $\Lambda = \frac{\dot{V}}{V}$  e  $Q_1 = \frac{\kappa^2 Q}{6H^3}$ .

Tendo o sistema dinâmico em mãos, o primeiro passo a se tomar é encontrar os valores de variáveis que anulam as variações correspondentes. Isto é, neste caso, quais valores de  $x$ ,  $v$  e  $y$  que fazem  $x'$ ,  $v'$  e  $y'$  iguais a zero. Tais pontos são chamados de fixos segundo a terminologia do formalismo dos sistemas dinâmicos. Um detalhe que deve ser lembrado é que os valores desses pontos fixos estão vinculados à equação (364). Sendo assim, pode-se “baixar” a ordem do sistema para apenas duas equações. Logicamente a escolha de qual equação deve ser suprimida é meramente opcional, uma vez que o resultado segue o mesmo. Escolhe-se omitir a equação (370) do sistema de forma a separar suas soluções possíveis em duas classes distintas em função de  $x$  e  $v$ .

A princípio, fazer a equação (370) igual a zero parece simples, onde duas soluções óbvias surgem:  $y = 0$  ou  $\epsilon = -\frac{\Lambda}{2H}$ . Descarta-se a primeira opção pois  $y = 0$  indica que a parcela potencial  $\tilde{V}$  também é nula. Tal valor de potencial faz com que o parâmetro  $\Lambda$  possa ser, por ventura, mal comportado. Deste modo, deixa-se este caso para análise posterior em trabalhos futuros. Da segunda solução, dada por  $\epsilon = -\frac{\Lambda}{2H}$ , resulta, de acordo com a equação (366), uma expressão do tipo

$$3x^2 + \frac{3}{2}\gamma v^2 = -\frac{\Lambda}{2H}. \quad (371)$$

Ao analisar o sistema, nota-se que o potencial  $\tilde{V}$  segue não definido, i.e. o lado direito de (371) pode ser tomado como uma função qualquer do tipo  $Z(x, y, v)$ . Entretanto, a

condição de ponto fixo restringe essa função para uma forma específica dada pela equação (371). Em outras palavras, dentre uma classe inteira de funções que  $Z(x, y, v)$  poderia assumir, a mesma está restrita a ser igual a  $3x^2 + \frac{3}{2}\gamma v^2$ . Este é um tipo de entendimento acerca das soluções de  $y' = 0$ , com  $y \neq 0$ . A outra é semelhante, porém possui uma sutileza. Neste segundo caso, imagina-se uma classe específica de potenciais ELKO nos quais  $-\frac{\Lambda}{2H} = \delta$ , onde  $\delta$  é uma constante qualquer. Com isso, a condição  $y' = 0$  cria um novo vínculo. Tal condição é dada por  $3x^2 + \frac{3}{2}\gamma v^2 = \delta$ , que representa uma elipse no espaço das variáveis. Concluindo, este segundo caso é na realidade uma subdivisão do primeiro, só que com a exigência de que  $-\frac{\Lambda}{2H}$  seja contante.

### 5.2.1.1 Análise de Estabilidade: $\frac{\Lambda}{2H} = -\epsilon$

Nesta subseção são apresentados os resultados da análise de sistemas dinâmicos para o seguinte sistema

$$x' = -3xv^2 + \frac{3}{2}\gamma \frac{v^2}{x} (1 - v^2) - \frac{Q_1}{x}, \quad (372)$$

$$v' = 3vx^2 - \frac{3}{2}\gamma v (1 - v^2) + \frac{Q_1}{v}, \quad (373)$$

obtido por meio da substituição  $\frac{\Lambda}{2H} = -\epsilon$  e  $y = \sqrt{1 - x^2 - v^2}$  nas equações (368) e (369). Isto é, a ordem do sistema foi diminuída por meio do vínculo (364) além da escolha específica do valor de  $\frac{\Lambda}{2H}$ , que faz  $y' = 0$ . Os resultados apresentados são fruto de escolhas específicas de  $Q$ , que demonstram como ELKO e matéria se convertem um no outro.

Tal sistema, para este tipo de solução, é motivado pelo artigo (BASAK et al., 2013), onde existe um erro de um fator 2 ausente no sistema utilizado. De acordo com este artigo existem pontos estáveis para este caso e por conseguinte o ELKO pode ser encarado como DE. Após se verificar que o sistema original contém um erro, procura-se testar os resultados de (BASAK et al., 2013) a fim de constatar se as conclusões tiradas são corretas. Como fica claro no decorrer dos resultados desta subseção, de acordo com o método de sistemas dinâmicos presente no apêndice (C), nada pode ser afirmado sobre a estabilidade dos pontos fixos. Deste modo se confirma que, ao contrário do que é afirmado em (BASAK et al., 2013), não se pode encarar o ELKO como DE, para o presente caso.

Antes de se verificar cada caso é necessário caracterizar a estrutura de análise dos pontos fixos encontrados. Por meio desta, faz-se possível verificar se o ponto fixo obtido é

estável ou instável. Para definir o comportamento do sistema nas vizinhanças dos pontos fixos, a matriz  $M$  definida no apêndice (C) é necessária. Para o sistema representado pelas equações (372) e (373), a matriz é dada por

$$M = \begin{pmatrix} -3v^2 - \frac{3}{2}\gamma\frac{v^2}{x^2}(1-v^2) + \frac{Q_1}{x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial Q_1}{\partial x} & -6vx + \frac{3\gamma v}{x}(1-2v^2) - \frac{1}{x}\frac{\partial Q_1}{\partial v} \\ 6xv + \frac{1}{v}\frac{\partial Q_1}{\partial x} & 3x^2 - \frac{3}{2}\gamma(1-3v^2) - \frac{Q_1}{v^2} + \frac{1}{v}\frac{\partial Q_1}{\partial v} \end{pmatrix}. \quad (374)$$

Nota-se que os pontos fixos ainda não foram substituídos em (374), pois é necessário definir  $Q_1$  para se obter esses pontos. As interações entre ELKO e matéria estudadas são:

- $Q_1 = 0$ ,
- $Q_1 = \beta$ ,
- $Q_1 = \beta v^2$ ,
- $Q_1 = \beta x^2$ ,
- $Q_1 = \beta vx^2$ ,
- $Q_1 = \beta xv^2$ ,
- $Q_1 = \beta x^2 v^2$ ,

onde  $\beta$  são constantes. Seguem as análises, correspondentes a cada uma das interações anteriormente apresentadas, que confirmam a ausência de pontos fixos para o presente sistema de equações:

#### 5.2.1.1.1 $Q_1 = 0$

Neste caso, onde  $Q = 0$ , não há interação entre o ELKO e a matéria. Em (WEI, 2011) o mesmo caso foi estudado com outra escolha de variáveis e nenhum ponto estável foi encontrado. Para o sistema formado pelas equações (372) e (373), encontra-se  $[\bar{x} = x, \bar{v} = 0]$  e  $[\bar{x} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\bar{v}^2)}, \bar{v} = v]$  como pontos fixos. Todavia, para ambos os pontos não é possível afirmar se um deles é estável por meio dos mecanismos de sistemas dinâmicos aqui presentes, uma vez que  $\Delta = 0$  para ambos os pontos. Uma característica importante que se deve observar no primeiro ponto fixo é o fato de  $\bar{v} = 0$ . De acordo com a escolha de variáveis, dado pela equação (363), e a definição de densidades, dado por (365), verifica-se que o universo se encontra num regime onde não existe matéria. Por não haver interação este caso não representaria nenhum cenário físico de interesse.

5.2.1.1.2  $Q_1 = \beta$ 

Aqui  $Q = 6\beta\kappa^2 H^3$  de forma que a interação entre ELKO e matéria pode ser, na realidade, escrito em função das suas densidades,  $Q = 2\beta H(\rho_\phi + \rho_m)$ . Encontra-se um ponto fixo para este sistema, dado por  $[\bar{x} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \bar{v}^2) - \frac{\beta}{3\bar{v}^2}}, \bar{v} = v]$ , onde é fácil se verificar que  $\Delta = 0$ . Logo, nada se pode afirmar sobre este ponto fixo.

5.2.1.1.3  $Q_1 = \beta v^2$ 

Neste caso se tem que  $Q = 2\beta H\rho_m$ , com pontos fixos dados por  $[\bar{x} = x, \bar{v} = 0]$  e  $[\bar{x} = x, \bar{v} = \pm\sqrt{(1 - 2\bar{x}^2) - \frac{2}{3}\beta}]$ . Para este caso também não se pode afirmar nada sobre a estabilidade dos pontos encontrados. No primeiro ponto fixo, a mesma análise vista em (5.2.1.1.1) pode ser levada em consideração. Logo, não há importância física para a presente interação, mesmo que a estabilidade seja constatada por outro método.

5.2.1.1.4  $Q_1 = \beta x^2$ 

Desta vez a interação é dada por  $Q = \frac{1}{\sqrt{3}}\beta\kappa\sqrt{\rho_m}(\rho_\phi + p_\phi)$ . Os pontos fixos, por sua vez, são  $[\bar{x} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}v\frac{(1-\bar{v}^2)}{(3\bar{v}+\beta)}}, \bar{v} = v]$ , onde novamente  $\Delta = 0$ .

5.2.1.1.5  $Q_1 = \beta vx^2$ 

Para este caso a interação é dada por  $Q = \sqrt{\frac{2}{3}}\beta\kappa\rho_m\sqrt{\rho_\phi + p_\phi}$  com  $[\bar{x} = x, \bar{v} = 0]$  e  $[\bar{x} = x, \bar{v} = \pm\sqrt{1 - 2\bar{x}^2 - \frac{2}{3}\beta\bar{x}}]$  representando seus pontos fixos. De forma semelhante aos casos anteriores, nada se pode constatar sobre a estabilidade dos pontos via modelo adotado.

5.2.1.1.6  $Q_1 = \beta xv^2$ 

Neste sistema, tem-se que  $Q = \sqrt{\frac{2}{3}}\beta\kappa\rho_m\sqrt{\rho_\phi + p_\phi}$ . Seus pontos fixos são  $[\bar{x} = x, \bar{v} = 0]$  e  $[\bar{x} = x, \bar{v} = \pm\sqrt{1 - 2\bar{x}^2 - \frac{2}{3}\beta\bar{x}}]$ , com o determinante da matriz  $M$  igual a zero para ambos.

### 5.2.1.1.7 $Q_1 = \beta x^2 v^2$

Aqui a interação entre ELKO e matéria é descrita como sendo  $Q = \frac{1}{3}\beta\kappa^2\rho_m(\rho_\phi + p_\phi)$ , com pontos fixos dados por  $[\bar{x} = x, \bar{v} = 0]$  e  $[\bar{x} = x, \bar{v} = \pm\sqrt{1 - 2\bar{x}^2 - \frac{2}{3}\beta\bar{x}^2}]$ . A exemplo de todos os outros casos anteriores, verifica-se que  $\Delta$  é nulo.

Após constatar os resultados apresentados anteriormente ainda se tentou generalizar outros casos a fim de se encontrar pontos estáveis. A verificação foi realizada por meio de um software no qual se testou interações do tipo  $x^n f(v)$  e  $v^n f(x)$ , com  $n = 1, 2, 3, 4$ . Todavia os resultados inconclusivos se mantiveram de maneira a se concluir que as soluções de (WEI, 2011) se mantém para o cenário estudado. Isto é, a inexistência de pontos estáveis, pelo menos com o ferramental de sistemas dinâmicos utilizado.

### 5.2.1.2 Análise de Estabilidade: $\frac{\Lambda}{2H} = -\delta$

Tendo as tentativas de se obter pontos estáveis para o sistema sido frustradas, busca-se uma outra abordagem a fim de encontrá-los. Para isto se verificou uma particularização da solução  $\frac{\Lambda}{2H} = -\epsilon$ , que faz  $y' = 0$ . Nesta, admiti-se que  $\epsilon$  seria na realidade constante, o que representaria um novo vínculo físico. Tal vínculo pode ser capaz de selecionar pontos atratores com significado físico. Considera-se então potenciais ELKO,  $V(\phi)$ , que possam respeitar a relação  $\frac{\Lambda}{2H} = -\delta$ , onde  $\delta$  é estritamente contante.

Neste trabalho somente se testa a existência de pontos estáveis para as interações já apresentadas, deixando assim um estudo de possíveis potenciais para trabalhos futuros. Em outras palavras, não é necessário conhecer o potencial nesta análise. Como segue presente nesta seção, os resultados são positivos na busca de pontos atratores com significado físico. Entretanto ainda há espaço para novas investigações a respeito da classe de potenciais ELKO que podem atender as exigências aqui estabelecidas. Deixa-se tais investigações para trabalhos posteriores.

Com o advento de pontos estáveis, um novo leque de análises deve ser efetuada. Tem-se que, assim como na seção anterior, as interações  $Q$  são descritas em função de um parâmetro adimensional  $\beta$ . Deste modo, as condições de estabilidade impõe às constantes  $\beta$  e  $\delta$  certos valores específicos. Por meio do sinal de  $\beta$  se estabelece se ELKO decai em matéria ou vice-versa. Tecnicamente não há uma restrição clara com relação ao parâmetro  $\delta$ , contanto que o mesmo seja real. Sendo assim o problema da coincidência cósmica pode

ser aliviado contanto que ELKO e matéria coexistam, ou seja, faz-se necessário que  $\rho_m \neq 0$  e  $\rho_\phi \neq 0$ . Por este motivo as restrições de  $\beta$  e  $\delta$  também são delineadas por essas condições, além das restrições relacionadas às densidades  $\Omega_\phi$  e  $\Omega_m$ . Adicionalmente existe outro termo de ordem observacional que pode ser utilizado para estudar o caso. É o parâmetro de desaceleração, dado pela equação (367). Com ele se verifica qual a aceleração do universo segundo os resultados do modelo estudado, tornando-o apto a ser testado segundo os dados observacionais. Neste caso tal parâmetro se resume à expressão  $q = \delta - 1$ .

Aqui o sistema dinâmico dado pelas equações (368), (369) e (370) se resume ao seguinte sistema

$$x' = 3x(x^2 - 1 + \frac{\gamma}{2}v^2) + \frac{\delta}{x}(1 - x^2 - v^2) - \frac{Q_1}{x}, \quad (375)$$

$$v' = 3vx^2 - \frac{3}{2}\gamma v(1 - v^2) + \frac{Q_1}{v}. \quad (376)$$

Neste sistema o parâmetro  $\epsilon$  permanece fixo, de maneira que  $\bar{\epsilon} = \delta$ , onde  $y' = 0$ .

Os casos estudados para este sistema são os seguintes:

#### 5.2.1.2.1 $Q_1 = 0$

Para esta interação, encontra-se dois pontos fixos, sendo que somente um deles é válido de acordo com os critérios pré-estabelecidos. São eles  $[\bar{x} = \pm 1, \bar{y} = 0, \bar{v} = 0]$  e  $[\bar{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\delta}, \bar{y} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}\delta}, \bar{v} = 0]$ . Busca-se sempre pontos os quais  $y \neq 0$ , já que  $y = 0$  faz o parâmetro  $\Lambda$  se tornar mal definido. O segundo ponto fixo não sofre deste problema, entretanto existem limitações físicas envolvidas. A condição para este ponto ser estável, ou seja  $\Delta > 0$  e  $\tau < 0$  é simplesmente  $\delta < \frac{3}{2}$ . Como não há interação e não existe matéria neste cenário, a condição é extremamente limitada. Nesta situação, se não houver outro mecanismo, não considerado aqui, o universo estaria “preso” a um eterno período inflacionário. Este caso corresponde a um universo que somente possui DE, que é análogo ao caso de um universo formado somente de vácuo, como visto em (3.2.0.3).

#### 5.2.1.2.2 $Q_1 = \beta$

Novamente são encontrados dois pontos fixos que resolvem o sistema (375) e (376). Neste caso um deles também tem  $\bar{y} = 0$ , enquanto que o outro é dado por  $\bar{x} = \sqrt{\frac{2\delta^2 - 3\delta + 3\beta}{6\delta - 9}}$ ,

$\bar{y} = \sqrt{\frac{-2\delta^2+9\delta+3\beta-9}{6\delta-9}}, \bar{v} = \sqrt{\frac{2\beta}{3-2\delta}}$ . As condições para haver estabilidade se resumem a  $\beta \geq -\frac{3}{8}$  e  $\delta < \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{9+24\beta}$ , no entanto há ainda a condição que os pontos fixos sejam reais, que transforma as condições anteriores em  $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{9-24\beta} < \delta < \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{9-24\beta}$  para  $0 < \beta < \frac{3}{8}$ . Tem-se que para  $\beta \rightarrow 0$  a condição de  $\delta$  se resume a  $0 < \delta < \frac{3}{2}$  e para  $\beta \rightarrow \frac{3}{8}$  que  $\delta \rightarrow \frac{3}{4}$ . Para ambos os limites se constata que o parâmetro de desaceleração,  $q$ , permanece negativo. Este fato indica que o universo se encontra em expansão acelerada. Deste modo, conclui-se que é possível se aliviar o problema a coincidência cósmica se tais condições forem respeitadas.

#### 5.2.1.2.3 $Q_1 = \beta x^2$

O presente caso é similar aos dois anteriores onde dois pontos são encontrados e um deles é mal definido por conta de  $\bar{y} = 0$ . O ponto remanescente é  $\bar{x} = \sqrt{\frac{3\delta-2\delta^2}{9-6\delta+3\beta}}$ ,  $\bar{y} = \sqrt{\frac{9+3\beta-6\delta-2\beta\delta+2\delta^2}{9-6\delta+3\beta}}, \bar{v} = \sqrt{\frac{2\beta\delta}{9-6\delta+3\beta}}$ , onde é necessário que  $\beta \leq -\frac{3}{2}$  e  $\delta < 3 + \beta$  ou  $\beta > -\frac{3}{2}$  e  $\delta < \frac{3}{2}$  para que este ponto satisfaça a condição de estabilidade. Entretanto, para garantir que todos os pontos encontrados sejam reais as condições se resumem drasticamente a  $\beta > 0$  e  $0 < \delta < \frac{3}{2}$ .

Ao tomar estas condições no universo corrente se faz necessário que  $\delta = \frac{3}{2} \frac{\Omega_m(3+\beta)}{\beta+3\Omega_m}$ , onde  $\bar{v}^2 = \Omega_m = 0.315$ . Para satisfazer todas as condições é necessário que  $\frac{3}{2}\Omega_m < \delta < \frac{3}{2}$  para  $0 < \beta < \infty$ . Para estas condições, o parâmetro de desaceleração possui as seguintes condições  $-0.52 < q < 0.5$ . Logo, para o presente caso o problema da coincidência cósmica também é aliviado, desta vez para o universo corrente. Pelo sinal de  $\beta$ , que deve ser positivo, constata-se que o ELKO decai em matéria neste cenário. Por outro lado, devido ao parâmetro  $q$  poder ser positivo ou negativo, verifica-se que o universo pode estar num regime de expansão acelerada ou desacelerada.

#### 5.2.1.2.4 $Q_1 = \beta v^2$

Neste caso existe apenas um ponto disponível, descrito por  $\bar{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\delta}, \bar{y} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}\delta}, \bar{v} = 0$ . Apesar de não haver problema com  $\bar{y} = 0$ , existe uma outra limitação, agora física, relacionada a este ponto. Como já foi visto em outros casos de interações



anteriores, um ponto com  $\bar{v} = 0$  reflete um universo sem matéria. Havendo a conversão de ELKO em matéria poderia se descrever uma situação inicial em que a matéria do universo começa a ser criada. Todavia, neste ponto fixo, com  $\bar{v} = 0$ , a interação  $Q_1$  também é nula. Logo, se este é um ponto fixo estável o universo ficaria estagnado eternamente em um estágio inflacionário, assim como visto em (5.2.1.2.1).

#### 5.2.1.2.5 $Q_1 = \beta x^2 v^2$

Nesta interação há três tipos de pontos fixos, onde um deles possui  $\bar{y} = 0$  e os outros dois com  $\bar{y} \neq 0$ . O primeiro deste dois últimos pontos é dado por  $\left[ \bar{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\delta}, \bar{y} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}\delta}, \bar{v} = 0 \right]$ . A condição de estabilidade deste ponto é  $\beta < \frac{9-6\delta}{2\delta}$  para  $0 < \delta < 3$  e  $\beta > \frac{9-6\delta}{2\delta}$  para  $\delta < 0$ . Contudo, assim como o caso anterior, este ponto não representa o cenário atual do universo, uma vez que sofre do mesmo problema em que o universo permaneceria sempre no período inflacionário.

O segundo ponto, onde  $\bar{y} \neq 0$ , é  $\left[ \bar{x} = \sqrt{\frac{(3-2\delta)}{2\beta}}, \bar{y} = \sqrt{\frac{(3-2\delta)(3+2\beta)}{6\beta}}, \bar{v} = \sqrt{\frac{6\delta+2\delta\beta-9}{3\beta}} \right]$ , com estabilidade assegurada por três condições distintas. São elas: (i)  $\delta < \frac{9}{2(3+\beta)}$  se  $\beta < -3$ ; (ii)  $\frac{9(\beta+6-\sqrt{-\beta^2-3\beta})}{2\beta^2+15\beta+36} < \delta < \frac{3}{2}$  ou  $\frac{9}{2(3+\beta)} < \delta < \frac{9(\beta+6+\sqrt{-\beta^2-3\beta})}{2\beta^2+15\beta+36}$  se  $-\frac{3}{2} < \beta < 0$ ; e (iii)  $\frac{9}{2(3+\beta)} < \delta < \frac{3}{2}$  se  $\beta > 0$ . Deve-se aliar à estas condições a exigência de que os pontos encontrados sejam reais, ou seja,  $\bar{x}^2 \geq 0$ ,  $\bar{y}^2 \geq 0$  e  $\bar{v}^2 \geq 0$ . Ao impor estas, tem-se que apenas uma condição de estabilidade remanesce, a (iii). Logo, conclui-se que apenas se pode aliviar o problema da coincidência cósmica se  $\beta$  é positivo, que representa a situação onde ELKO decai em matéria. Para um acoplamento pequeno ( $\beta \rightarrow 0$ ) se verifica que  $\delta \rightarrow \frac{3}{2}$ , enquanto que para  $\beta \rightarrow \infty$  é necessário que  $0 < \delta < \frac{3}{2}$ .

Para os dias atuais, onde  $\bar{v}^2 = \Omega_m = 0.315$ , tem-se que  $\delta = \frac{3}{2} \frac{\Omega_m \beta + 3}{\beta + 3}$ . Para  $\beta \rightarrow 0$  se constata que  $\delta \rightarrow \frac{3}{2}$ , enquanto que para  $\beta \rightarrow \infty$  é necessário que  $\delta \rightarrow \frac{3}{2} \Omega_m$ . Estas condições são as mesmas que as encontradas na interação da subseção (5.2.1.2.3).

As condições presentes nas subseções (5.2.1.1.5) e (5.2.1.1.6) também foram investigadas no âmbito desta seção. Entretanto os pontos relevantes encontrados, e consequentemente os condições de estabilidade, são demasiadamente complicados para serem apresentados. A ideia que se deve extrair dessas condições é que mais uma vez se encontra

pontos de estabilidades, para determinadas interações, que confirmam que o ELKO pode ser candidato a DE.

### 5.2.1.3 Conclusão Prévia: 1º Caso

A primeira parte do presente trabalho, publicado em (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014), baseia-se na verificação dos resultados de (BASAK et al., 2013), que ao serem estudados se demonstraram inconsistentes por um fator 2. Tal descuido propaga conclusões erradas no final da análise. Deste modo se prova que, ao contrário do que se afirma em (BASAK et al., 2013), não há pontos de estabilidades no cenário presente em (5.2.1.1). Isto é, utilizando o formalismo de sistemas dinâmicos atestado pelo teorema de Hartmann-Großmann se verifica que nada pode ser concluído acerca dos pontos fixos encontrados, uma vez que  $\Delta = 0$  para todos aqueles que possuem significado físico e  $\bar{y} \neq 0$ .

De acordo com a literatura existem diversos artigos onde se assumem vários tipos de potenciais ELKO com outras escolhas de variáveis para se tentar contornar este problema. Aparentemente os resultados não são conclusivos, onde existem certas incoerências em alguns deles, como em (WEI, 2011), onde há um equívoco na escolha de variáveis, por exemplo. Entretanto, no presente trabalho, escolhe-se selecionar uma classe inteira de potenciais baseados na escolha  $\frac{\Lambda}{2H} = -\delta$ , onde  $\delta$  é uma constante e  $\Lambda = \frac{\dot{V}}{V}$ . Encontra-se interações favoráveis para os casos (5.2.1.2.2, (5.2.1.2.3) e (5.2.1.2.5), onde a estabilidade dos pontos fixos é dada por meio de condições que envolvem as constantes  $\beta$  e  $\delta$ . Para as interações (5.2.1.2.3) e (5.2.1.2.5) se verifica que é necessário que  $\frac{3}{2}\Omega_m < \delta < \frac{3}{2}$  para  $0 < \beta < \infty$ . Também se encontram limites no qual o parâmetro de desaceleração se aproxima com aquele ditado pelas observações. Tal limite é dada por  $-0.52 < q < 0.5$ , onde o valor deste parâmetro para os dias de hoje é  $q_0 \simeq -0.527$ . Desta forma, se o potencial do ELKO respeitar tal relação e manter a condição anterior é possível que o ELKO faça papel de DE e assim alivie o problema da coincidência cósmica, implicando na conversão de ELKO em matéria.

## 5.2.2 Sistema Dinâmico do ELKO: 2º Caso

Nesta subseção se analisa um sistema dinâmico onde o ELKO pode assumir as características de quatro diferentes elementos. São eles, energia escura, matéria (bariônica

ou escura), radiação e matéria ultrarelativística. Assim como no caso anterior, o ELKO se combina com outro elemento de forma a constituírem o universo. Isto é, baseado em (PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015), constrói-se um universo formado por dois materiais. Procura-se, portanto, testar diversas combinações de materiais de forma a generalizar o estudo. O material “que faz par” com o ELKO, para constituir o universo, também pode possuir qualquer uma das formas citadas acima (energia escura, matéria (bariônica ou escura), radiação e matéria ultrarelativística). Apresentam-se tabelas com as 16 combinações de universo para cada tipo de interação ( $Q$ ) entre os dois elementos.

O modo de aplicar este tipo universo passa pelas equações de estado, tanto do ELKO, quanto do elemento remanescente. Escreve-se estas equações como sendo

$$p_\phi = \omega_\phi \rho_\phi, \quad (377)$$

para representar o ELKO e

$$p_m = \omega_m \rho_m, \quad (378)$$

para representar o segundo constituinte. Os termos associados ao índice subscrito  $\phi$  são os termos do ELKO, enquanto que, por simplicidade, os associados a  $m$  são os termos de matéria escura, chamados de DM (“Dark Matter”) assim como em (PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015). Reescreve-se agora as equações fundamentais, obtidas em (5.1), para o estudo cosmológico do ELKO. São elas as duas equações de Friedmann, dadas por (339) e (340) e as duas equações de continuidade, dadas por (343) e (344). Logo,

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \rho_\phi + \rho_m \right], \quad (379)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} \left[ \rho_\phi + p_\phi + \rho_m + p_m \right], \quad (380)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H (\rho_m + p_m) = Q, \quad (381)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H (\rho_\phi + p_\phi) = -Q. \quad (382)$$

De acordo com a Lagrangeana do sistema, descobre-se os valores de  $\rho_\phi$  e  $p_\phi$ . Eles são dados pelas equações (341) e (342), todavia nelas ainda estão incluídos termos de torção. Como já discutido no início deste capítulo, nos limites de baixas energias os termos de torção

podem ser desconsiderados, i.e.  $h(t) = 0$  e  $f(t) = 0$ . Aplicando estes valores às equações (341) e (342), obtém-se:

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} + V(\phi) + \frac{3}{8}H^2\phi(t)^2, \quad (383)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} - V(\phi) - \frac{3}{8}H^2\phi(t)^2 - \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(H\phi(t)^2\right). \quad (384)$$

Impor ao ELKO que  $p_\phi = \omega_\phi\rho_\phi$ , tendo os valores de  $p_\phi$  e  $\rho_\phi$ , significa na realidade impor um vínculo ao sistema dinâmico. Por outro lado, assim como na subseção anterior (5.2.1), o outro elemento precisa ser determinado. A princípio, seria necessário determinar  $p_m$  e  $\rho_m$ , mas a equação (378) reduz o número de variáveis a serem determinadas. Novamente, ao exemplo de (5.2.1), o número de variáveis do sistema é três, graças aos vínculos (377) e (378), além da própria equação (379), que também é um vínculo. A fim de obter o sistema final a ser resolvido, substitui-se as equações (377), (378), (383) e (384) nas equações do sistema (379), (380), (381) e (382). Logo,

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\left[\frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} + V(\phi) + \frac{3}{8}H^2\phi(t)^2 + \rho_m\right], \quad (385)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}\left[(1 + \omega_\phi)\left(\frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} + V(\phi) + \frac{3}{8}H^2\phi(t)^2\right) + (1 + \omega_m)\rho_m\right], \quad (386)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(1 + \omega_m)\rho_m = Q, \quad (387)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(1 + \omega_\phi)\rho_\phi = -Q. \quad (388)$$

Deve-se lembrar que o parâmetro  $Q$ , presente na equações de continuidade de DM e ELKO, é inserido à mão. Faz-se isso a fim de adicionar ao sistema a possibilidade de interação entre os elementos do universo. O objetivo desta termo de origem fenomenológica é aliviar o problema da coincidência cósmica. A mesma estratégia foi adotada em (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014; PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015), que é apresentada na seção anterior (5.2.1), assim como em (WANG; GONG; ABDALLA, 2005; ABDALLA et al., 2009; PEREIRA; JESUS, 2009).

Novamente o sistema de equações, composto pelas expressões (385), (386), (387) e (388), não pode ser resolvido algebricamente devido a sua complexidade. Lança-se mão,

portanto, do formalismo de sistemas dinâmicos para analisar a vizinhança de pontos fixos. Antes de encontrar os pontos fixos é necessário remodelar o sistema por meio da escolha de novas variáveis, que possibilita a obtenção do sistema dinâmico em si.

Define-se as novas variáveis como:

$$x = \frac{\kappa\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad y = \frac{\kappa\sqrt{\tilde{V}}}{\sqrt{3}H}, \quad v = \frac{\kappa\sqrt{\rho_m}}{\sqrt{3}H}, \quad (389)$$

onde  $\tilde{V} = V + \frac{3}{8}H^2\phi(t)^2$ . Esta escolha de variáveis possibilita reescrever a equação de Friedmann (385) na forma de um vínculo, dado por:

$$x^2 + y^2 + v^2 = 1, \quad (390)$$

que por sua vez pode ser interpretado como a soma de densidades de energia do universo,  $\Omega_\phi + \Omega_m = 1$ , onde de maneira igual à (5.2.1), tem-se que

$$\Omega_\phi = \frac{\kappa^2\rho_\phi}{3H^2} = x^2 + y^2, \quad \Omega_m = \frac{\kappa^2\rho_m}{3H^2} = v^2. \quad (391)$$

É por meio deste vínculo que se adiciona ao sistema informações observacionais, de acordo com as concentrações constatadas via modelo  $\Lambda$ CDM. Outro parâmetro utilizado para conectar os dados observacionais com o modelo aqui estudado é o parâmetro de desaceleração, definido na equação (367). Segundo a escolha de variáveis adotada em (389), tem-se que  $q$  é dado por

$$q = \frac{3}{2} [(1 + \omega_m)v^2 + (1 + \omega_\phi)(x^2 + y^2)] - 1, \quad (392)$$

onde se testa o limite deste parâmetro fazendo  $\omega_\phi = \omega_m = -1$ , que corresponde exatamente ao período inflacionário, com  $q = -1$ . Utilizando a definição (391), reescreve-se a equação (392) de forma mais interessante para se aplicar aos períodos específicos a serem estudados. Logo,

$$q = \frac{3}{2} [(1 + \omega_m)\Omega_m + (1 + \omega_\phi)\Omega_\phi] - 1, \quad (393)$$

onde basta substituir os valores das densidades,  $\Omega_m$  e  $\Omega_\phi$ , correspondentes a época analisada.

Aplica-se a derivada ' nas variáveis (390) com o intuito de se obter o sistema dinâmico propriamente dito. Tal derivada também se refere a uma derivada com respeito a  $\ln a(t)$ . Deste modo,

$$x' = \frac{3}{2} (\omega_m - \omega_\phi) v^2 x - \left[ \frac{3}{2} (1 + \omega_\phi) + \frac{\Lambda}{2H} \right] \frac{y^2}{x} - \frac{Q_1}{x}, \quad (394)$$

$$v' = \frac{3}{2} (\omega_\phi - \omega_m) (1 - v^2) v + \frac{Q_1}{v}, \quad (395)$$

$$y' = \left[ \frac{3}{2} (1 + \omega_\phi) + \frac{3}{2} (\omega_m - \omega_\phi) v^2 + \frac{\Lambda}{2H} \right] y, \quad (396)$$

onde  $\Lambda$  e  $Q_1$  possuem as mesmas definições dos artigos (BASAK et al., 2013; PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014; PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015), apresentadas na seção anterior, i.e.  $\Lambda = \frac{\dot{V}}{V}$  e  $Q_1 = \frac{\kappa^2 Q}{6H^2}$ . Deste cenário decorre um sistema de equações de três variáveis,  $x$ ,  $v$  e  $y$ . A resolução de tal sistema, formado pelas equações (394), (395) e (396), significa obter os pontos  $\bar{x}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{y}$  que resultam em  $x' = 0$ ,  $v' = 0$  e  $y' = 0$ . Todavia, este sistema de segunda ordem pode ser simplificado por meio da equação (390), que representa um vínculo de modo a termos apenas duas variáveis envolvidas.

Além disto, impõe-se outra restrição ao sistema, desta vez com relação ao tipo do potencial do ELKO,  $V(\phi)$ . Esta restrição é dada por  $\frac{\Lambda}{2H} \equiv -\delta$ , onde  $\delta$  representa um parâmetro constante. Com isto, faz-se não necessário especificar o potencial ELKO. Por outro lado, exige-se uma classe de potenciais ELKO que são necessário para satisfazer o sistema. Não obstante, esta é uma questão que pode ser resolvida posteriormente, em futuros trabalhos.

Nota-se na equação (396), assim como visto em (5.2.1), que existem duas maneiras diretas de fazer  $y' = 0$ . A mais óbvia e simples é fazer  $y = 0$ , entretanto tal escolha traz um sério problema para a definição de  $\Lambda$ . O fato de  $y$  ser nulo acarreta que  $V$  também o seja. Isto indica que o parâmetro  $\Lambda$  passa a ser mal comportado. Logo, por este motivo, exclui-se esta possibilidade.

A outra solução é obtida quando o termo entre parênteses de (396) se anula. Disto resulta que:

$$\delta = \frac{3}{2} (1 + \omega_\phi) + \frac{3}{2} (\omega_m - \omega_\phi) v^2, \quad (397)$$

onde esta expressão não representa um vínculo, já que não se pode baixar a ordem do sistema com a mesma, mas sim uma restrição. Com ela se determina o ponto fixo da variável  $v$ . Obrigatoriamente o seu valor fixo deve ser

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2\delta - 3(1 + \omega_\phi)}{3(\omega_m - \omega_\phi)}}. \quad (398)$$

Por outro lado, o novo sistema bidimensional, originado da aplicação do vínculo (390) nas equações (394), (395) e (396), é dado por

$$x' = \left[ \frac{3}{2} (1 + \omega_\phi) - \delta + \frac{3}{2} (\omega_m - \omega_\phi) v^2 \right] x + \left[ \delta - \frac{3}{2} (1 + \omega_\phi) \right] \frac{1 - v^2}{x} - \frac{Q_1}{x}, \quad (399)$$

$$v' = \frac{3}{2} (\omega_\phi - \omega_m) (1 - v^2) v + \frac{Q_1}{v}. \quad (400)$$

Para analisar o sistema, lança-se mão do formalismo de sistemas dinâmicos de Hartmann-Großmann, presente no apêndice (C). A matriz  $M$  correspondente ao sistema de equações (399) e (400) é dada por

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (401)$$

onde seus componentes são:

$$a = - \left[ \delta - \frac{3}{2} (1 + \omega_\phi) \right] \frac{1 - \bar{v}^2}{\bar{x}^2} + \frac{\bar{Q}_1}{\bar{x}^2} - \frac{1}{\bar{x}} \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial \bar{x}}, \quad (402)$$

$$b = 3 (\omega_m - \omega_\phi) \bar{x} \bar{v} + [3 (1 + \omega_\phi) - \delta] \frac{\bar{v}}{\bar{x}} - \frac{1}{\bar{x}} \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial \bar{v}}, \quad (403)$$

$$c = \frac{1}{\bar{v}} \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial \bar{x}}, \quad (404)$$

$$d = \frac{3}{2} (\omega_\phi - \omega_m) (1 - 3\bar{v}^2) - \frac{\bar{Q}_1}{\bar{v}^2} + \frac{1}{\bar{v}} \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial \bar{v}}, \quad (405)$$

onde  $\bar{Q}_1$  é a interação entre ELKO e DM com os pontos fixos,  $\bar{x}$  e  $\bar{v}$ , substituídos.

A análise de estabilidade dos pontos fixos  $\bar{x}$  e  $\bar{v}$  passa, de acordo com o apêndice (C), pela verificação dos valores do traço e do determinante de  $M$ , dado por (401). O primeiro passo para isto é determinar os tipos de interação,  $Q_1$ , que se deseja estudar. Escolhe-se a seguinte relação de interações para análise:

- $Q_1 = 0$ ,
- $Q_1 = \beta$ ,
- $Q_1 = \beta x^2$ ,
- $Q_1 = \beta x^2 v^2$ ,
- $Q_1 = \beta (x^2 + y^2) x^2$ ,
- $Q_1 = \beta (v^2 - y^2)$ ,

onde  $\beta$  são constantes que possuem a função de regular a conversão de ELKO em DM ou vice versa. Isto é, de acordo com as equações (387) e (388), para  $\beta > 0$  o campo ELKO decai em DM, enquanto que para  $\beta < 0$  o processo inverso ocorre.

Ao se considerar o parâmetro adimensional  $\beta$  são quatro os parâmetros livres da teoria, i.e.  $\omega_m$ ,  $\omega_\phi$ ,  $\delta$  e  $\beta$ . Escolhe-se fixar os valores de  $\omega_m$  e  $\omega_\phi$  de modo a realizar um estudo generalizado dos tipos de universo possíveis. Com isso apenas as condições entre  $\delta$  e  $\beta$  necessitam ser estudadas para se obter conclusões físicas sobre este modelo cosmológico. Os valores de  $\omega_m$  e  $\omega_\phi$  que são analisados são  $-1$ ,  $0$ ,  $1/3$  e  $1$ , que correspondem ao vácuo, poeira, radiação e matéria ultrarelativística, respectivamente. A análise dos parâmetros  $\delta$  e  $\beta$  é inspirada em (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014), cujos resultados são apresentados na seção (5.2.1). Procura-se nesta análise estudar dois períodos distintos do universo, o inflacionário e o corrente. Logo, obtém-se todos os valores de parâmetros ( $q$ ,  $\Omega_m$  e  $\Omega_\phi$ ) para tais épocas, comparando-os, posteriormente, com aqueles obtidos pela teoria aqui apresentada.

Segue, portanto, a análise cosmológica do sistema dinâmico apresentado, para os tipos de interações apresentadas anteriormente.

#### 5.2.2.1 $Q_1 = 0$

Neste caso não há interação entre ELKO e DM, deste modo ambos permanecem com suas densidades  $\rho_m$  e  $\rho_\phi$  fixas ao longo da evolução do sistema. Os pontos fixos que satisfazem  $x' = 0$ ,  $v' = 0$  e  $y' = 0$  são dados por  $\bar{x} = 1$ ,  $\bar{v} = 0$  e  $\bar{y} = 0$ . Tais pontos não descrevem nenhum cenário de interesse físico. Além do mais,  $\bar{y} = 0$  é um ponto fixo que deve ser evitado por trazer um mal comportamento ao parâmetro  $\Lambda$ , segundo sua definição,  $\Lambda = \frac{\dot{V}}{V}$ , e a definição da variável  $y$ , (389).

#### 5.2.2.2 $Q_1 = \beta$

Neste caso, onde a taxa de decaimento entre ELKO e DM é constante, é encontrado apenas pontos fixos do tipo  $\bar{x} \neq 0$ ,  $\bar{v} \neq 0$  e  $\bar{y} = 0$ , os quais admitem um universo com a mistura de elementos, em oposição ao caso anterior, (5.2.2.1). Todavia, este caso sofre do mesmo problema da interação  $Q_1 = 0$ . Existe novamente uma má definição do sistema quando  $\bar{y} = 0$ , resultando assim na exclusão dos resultados obtidos.



### 5.2.2.3 $Q_1 = \beta x^2$

Tal interação entre DM e ELKO corresponde a  $Q = \beta H \dot{\phi}^2$ . Os pontos fixos do sistema de equações (399) e (400) é dado por:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{(3 + 3\omega_m - 2\delta)(3 + 3\omega_\phi - 2\delta)}{6\beta(\omega_\phi - \omega_m)}}, \quad (406)$$

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{(2\delta - 3 - 3\omega_m)(2\beta - 2\delta + 3 + 3\omega_\phi)}{6\beta(\omega_\phi - \omega_m)}}, \quad (407)$$

onde o componente  $v$  deste ponto é sempre o mesmo para todas as interações. Ele é descrito pela equação (398). Por outro lado o determinante e o traço da matriz (401) são descritos por

$$\Delta = 4\delta^2 - 2\delta[2\beta + 6 + 3(\omega_m + \omega_\phi)] + 6\beta(1 + \omega_m) + 9(1 + \omega_m\omega_\phi + \omega_m + \omega_\phi), \quad (408)$$

$$\tau = 4\delta - 2\beta - 6 - 3(\omega_m + \omega_\phi). \quad (409)$$

De acordo com a teoria descrita no apêndice (C), faz-se necessário que  $\Delta > 0$  e  $\tau < 0$  para haja a estabilidade dos pontos fixos encontrados. Seguem as relações que os parâmetros  $\beta$  e  $\delta$  devem obedecer, para vários valores de  $\omega_m$  e  $\omega_\phi$ , a fim de garantir o ponto fixo como atrator. Os resultados encontrados se apresentam na tabela (1).

Conforme mencionado anteriormente, procura-se analisar com estes resultados dois períodos do universo. O período inflacionário e o período atual. No período inflacionário o universo era totalmente formado por vácuo, segundo o modelo  $\Lambda$ CMD. Trazendo este resultado para o presente estudo, interpreta-se um universo constituído somente de ELKO. Logo,  $\bar{v}^2 = 0$ , que por sua vez resulta que  $\bar{x}^2 = 0$  e  $\bar{y}^2 = 1$ , já que  $\delta = \frac{3}{2}(1 + \omega_\phi)$ . Fisicamente este ponto fixo representa a presença de ELKO somente na forma potencial, que decorre do fato de  $\dot{\phi} = 0$ . Combina-se esta informação com a forma da interação entre ELKO e DM, de maneira a se concluir que neste ponto não há conversão de ELKO em DM. Este resultado é semelhante ao encontrado em (5.2.1.2.1), que indica que o universo estaria estagnado em um período inflacionário. Deste modo não há interesse físico.

		Espinor ELKO			
		Vácuo ( $\omega_\phi = -1$ )	Poeira ( $\omega_\phi = 0$ )	Radiação ( $\omega_\phi = 1/3$ )	Ultrarelativístico ( $\omega_\phi = 1$ )
Matéria	Vácuo ( $\omega_m = -1$ )	—	s/ Pontos	s/ Pontos	s/ Pontos
	Poeira ( $\omega_m = 0$ )	$\delta \leq 3/2$ se $\beta \geq 3/2$ ou $\delta < \beta$ se $\beta < 3/2$	—	s/ Pontos	s/ Pontos
	Radiação ( $\omega_m = 1/3$ )	$\delta \leq \beta$ se $\beta \leq 2$ ou $\delta < 2$ se $\beta > 2$	$\delta \leq 2$ se $\beta \geq 1/2$ ou $\delta < 3/2 + \beta$ se $\beta < 1/2$	—	s/ Pontos
	Ultrarelativístico ( $\omega_m = 1$ )	$\delta \leq 3$ se $\beta \geq 3$ ou $\delta < \beta$ se $\beta < 3$	$\delta \leq 3$ se $\beta \geq 3/2$ ou $\delta < \beta + 3/2$ se $\beta < 3/2$	$\delta \leq 3$ se $\beta \geq 1$ ou $\delta < \beta + 2$ se $\beta < 1$	—

Tabela 1 – Condições de estabilidade referentes as equações (408) e (409), dependentes dos parâmetros de estado de DM e ELKO, e correspondentes à interação  $Q_1 = \beta x^2$

O foco da análise desta época recai sobre o componente fixo  $\bar{x}$ , que é o responsável pela interação. Em resumo, quando  $\bar{x} = 0$  não há interação. Escreve-se a equação (406) com  $\omega_\phi = -1$ . Isto é,

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\delta(3 + 3\omega_m - 2\delta)}{3\beta(\omega_m + 1)}}, \quad (410)$$

entretanto  $\delta$  é igual a zero, quando  $\omega_\phi = -1$ , tornando esta equação nula também. Observa-se que o problema inflacionário deste sistema é apenas pontual, já que com  $\bar{v}^2$  infinitesimalmente maior do que zero garante valores não nulos para  $\delta$  e por sua vez para  $\bar{x}^2$ . Logo, salva-se a análise e se explica o problema fisicamente com a presença de um pouco de qualquer outra matéria no sistema, seja ela bariônica, radiação ou ultrarelativística.

Por outro lado, o período atual do universo se demonstra mais interessante na discussão dos resultados da tabela (1). Tem-se para este caso que as variáveis são  $\bar{v}^2 = \Omega_m = 0.315$  e  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \Omega_\phi = 0.685$ , novamente de acordo com o modelo  $\Lambda$ CMD. Exige-se neste resultado que  $\omega_m = 0$ . Decorrente disto se apresentam três vertentes:

1.  $\delta \simeq 0.47$  se  $\omega_\phi = -1$ : De acordo com a célula ( $\omega_\phi = -1, \omega_m = 0$ ) se obtém que  $\beta > 0.47$ , assim como  $q \simeq -0.527$ . Tais valores são coerentes com um universo no qual ELKO decai em DM. De acordo com o parâmetro de desaceleração os resultados dos dias de hoje são, portanto, confirmados.
2.  $\delta \simeq 1.84$  se  $\omega_\phi = 1/3$ : Neste caso não há solução para  $\beta$ , de acordo com a tabela (1).
3.  $\delta \simeq 2.53$  se  $\omega_\phi = 1$ : Assim como no item anterior, não há solução para o parâmetro  $\beta$ .

Em resumo, de acordo com a equação (393), tem-se que as soluções, para os dias atuais, necessariamente devem conter  $\omega_\phi = -1$ . Caso contrário  $q$  seria positivo, indicando então um universo em expansão desacelerada. Dentre as possibilidades, somente o cenário inicial se aproxima dos resultados do modelo  $\Lambda$ CDM, já que as propriedades físicas de cerca de 31% do universo é atrativa gravitacionalmente.

Verifica-se ainda que as soluções onde  $\omega_\phi = -1$  ainda podem caracterizar outras épocas de expansão acelerada do universo, não discutidas aqui. Outro detalhe que se nota é que nunca há solução quando ambos os materiais possuem as mesmas propriedades termodinâmicas, i.e.  $\omega_\phi = \omega_m$ .

#### 5.2.2.4 $Q_1 = \beta x^2 v^2$

Para este tipo de interação se tem que  $Q = \frac{1}{3}\kappa^2\beta\rho_m\dot{\phi}^2$ . Por outro lado, os pontos fixos encontrados são

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{3 + 3\omega_m - 2\delta}{2\beta}}, \quad (411)$$

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{(2\delta - 3\omega_m - 3)(2\beta - 3\omega_m + 3\omega_\phi)}{6\beta(\omega_\phi - \omega_m)}}, \quad (412)$$

com o componente  $\bar{v}$  dado pela equação (398). A fim de analisar a estabilidade destes pontos se apresenta o determinante e traço da matriz  $M$ , descrita em (401), para a presente interação. Eles são dados por

$$\begin{aligned} \Delta = & \left(4 - \frac{8\beta}{3(\omega_m - \omega_\phi)}\right) \delta^2 + \frac{1}{\omega_m - \omega_\phi} \times \left[ (8 + 4\omega_m + 4\omega_\phi) \beta + \right. \\ & \left. - 6(\omega_m^2 - \omega_\phi^2 + 2\omega_m - 2\omega_\phi) \right] \delta + \frac{1}{\omega_m - \omega_\phi} \times \left[ -6\beta(1 + \omega_\phi + \omega_m + \omega_\phi\omega_m) + \right. \\ & \left. - 9(\omega_\phi - \omega_m + \omega_\phi^2 - \omega_m^2 + \omega_m\omega_\phi^2 - \omega_\phi\omega_m^2) \right], \end{aligned} \quad (413)$$

		Espinor ELKO			
		Vácuo ( $\omega_\phi = -1$ )	Poeira ( $\omega_\phi = 0$ )	Radiação ( $\omega_\phi = 1/3$ )	Ultrarelativístico ( $\omega_\phi = 1$ )
Matéria	Vácuo ( $\omega_m = -1$ )	—	s/ Pontos	s/ Pontos	s/ Pontos
	Poeira ( $\omega_m = 0$ )	$\frac{18}{2\beta+9} < \delta < \frac{3}{2}$ se $\beta > \frac{3}{2}$	—	s/ Pontos	s/ Pontos
	Radiação ( $\omega_m = 1/3$ )	$\frac{16}{\beta+6} < \delta < 2$ se $\beta > 2$	$\frac{(6\beta+13)}{4\beta+6} < \delta < 2$ se $\beta > \frac{1}{2}$	—	s/ Pontos
	Ultrarelativístico ( $\omega_m = 1$ )	$\frac{36}{\beta+9} < \delta < 3$ se $\beta > 3$	$\frac{3}{2} \frac{2\beta+21}{2\beta+9} < \delta < 3$ se $\beta > \frac{3}{2}$	$\frac{2(\beta+5)}{\beta+3} < \delta < 3$ se $\beta > 1$	—

Tabela 2 – Condições de estabilidade referentes as equações (413) e (414), dependentes dos parâmetros de estado de DM e ELKO, e correspondentes à interação  $Q_1 = \beta v^2 x^2$

$$\tau = \left( 2 - \frac{4\beta}{3(\omega_m - \omega_\phi)} \right) \delta + \frac{1}{\omega_m - \omega_\phi} \left[ 2\beta(1 + \omega_\phi) - 3(\omega_m - \omega_\phi - \omega_\phi^2 + \omega_m \omega_\phi) \right]. \quad (414)$$

Como visto anteriormente, a maneira de garantir a estabilidade dos pontos é ter que  $\Delta > 0$  e  $\tau < 0$ . Decorre destas exigências a tabela (2), que contém as condições correspondentes de  $\delta$  e  $\beta$ , para dados valores específicos de  $\omega_\phi$  e  $\omega_m$ . Na busca por conciliar os resultados da tabela (2) com a época da inflação, destaca-se novamente a condição de que  $\delta = \frac{3}{2}(1 + \omega_\phi)$ , uma vez que  $\bar{v} = 0$ . Como se sabe, a propriedade do ELKO deve ser do tipo vácuo no período inflacionário, já que existe somente ELKO preenchendo o universo. Logo, faz-se necessário que  $\omega_\phi = -1$ , onde tal condição conduz ao valor  $\delta = 0$ . Como se pode observar na tabela (2), não existe célula que seja condizente com  $\omega_\phi = -1$  e  $\delta = 0$  ao mesmo tempo. Em outras palavras, todos os valores de  $\delta$  devem ser maiores do que zero, nas células com  $\omega_\phi = -1$ , para que haja estabilidade dos pontos.

O fato do limite inferior de  $\delta$ , para a estabilidade, depender de  $\beta$  complica demasiadamente o estudo de limites apresentado no caso anterior, (5.2.2.3). Isso ocorre porque ao se admitir uma quantidade ínfima de qualquer matéria, que não seja DE (vácuo),

não garante a evolução com estabilidade dos pontos. Faz-se necessário que o parâmetro  $\beta \rightarrow \infty$  para haver estabilidade para qualquer pequeno valor de  $\delta$ . Como a interação é dada por  $Q_1 = \beta x^2 v^2$ , torna-se difícil obter um valor bem comportado para o mesmo, tendo em vista que  $\beta \rightarrow \infty$  com  $\bar{x}^2 \rightarrow 0$  e  $\bar{v}^2 \rightarrow 0$ .

Para os dias de hoje, onde segundo o modelo  $\Lambda$ CDM se tem que  $\omega_\phi = -1$  e  $\omega_m = 0$ , analisa-se os resultados da mesma forma que no caso anterior. Os casos são dados por:

1.  $\delta \simeq 0.47$  se  $\omega_\phi = -1$ : Obtém-se que  $\beta > 14.6$ . Como este valor de  $\beta$  é maior que o apresentado na célula, constata-se estabilidade para os pontos fixos. Neste cenário o espinor ELKO decai em DM, com  $q = -0.527$ .
2.  $\delta \simeq 1.84$  se  $\omega_\phi = 1/3$ : Neste caso não há solução para  $\beta$ , de acordo com a tabela (2).
3.  $\delta \simeq 2.53$  se  $\omega_\phi = 1$ : Assim como no item anterior, não há solução para o parâmetro  $\beta$ .

Novamente o fato de somente se investigar duas épocas distintas exclui certas possibilidades presentes na tabela (2). Entretanto existe ainda uma gama de possibilidades a serem exploradas, quando se tenta analisar outros períodos de evolução do universo.

Constata-se que tanto no caso anterior, quanto neste e nos posteriores, a fim de garantir um universo que se expanda aceleradamente, faz-se necessário que  $\omega_\phi = -1$ . A razão para isto é clara, já que o ELKO possui maior concentração e é a propriedade de vácuo que dá o caráter repulsivo ao universo. Matematicamente se verifica isto por meio da equação (393).

#### 5.2.2.5 $Q_1 = \beta (x^2 + y^2) x^2$

Representa-se o parâmetro  $Q$  para a presente interação como  $Q = \frac{1}{3} \frac{\kappa^2}{H} \beta \rho_\phi \dot{\phi}^2$ , onde se verifica que seus pontos fixos são dados por:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{2\delta - 3 - 3\omega_\phi}{2\beta}}, \quad (415)$$

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{2\delta (2\beta + 3\omega_m - 3\omega_\phi) - 6\beta (1 + \omega_m) + 9 (\omega_\phi^2 - \omega_m \omega_\phi - \omega_m + \omega_\phi)}{6\beta (\omega_\phi - \omega_m)}}, \quad (416)$$

		Espinor ELKO			
		Vácuo ( $\omega_\phi = -1$ )	Poeira ( $\omega_\phi = 0$ )	Radiação ( $\omega_\phi = 1/3$ )	Ultrarelativístico ( $\omega_\phi = 1$ )
Matéria	Vácuo ( $\omega_m = -1$ )	—	s/ Pontos	s/ Pontos	s/ Pontos
	Poeira ( $\omega_m = 0$ )	$0 < \delta < \frac{3\beta}{3+2\beta}$ se $\beta > 0$	—	s/ Pontos	s/ Pontos
	Radiação ( $\omega_m = 1/3$ )	$0 < \delta < \frac{2\beta}{2+\beta}$ se $\beta > 0$	$\frac{3}{2} < \delta < \frac{3+8\beta}{2+4\beta}$ se $\beta > 0$	—	s/ Pontos
	Ultrarelativístico ( $\omega_m = 1$ )	$0 < \delta < \frac{3\beta}{3+\beta}$ se $\beta > 0$	$\frac{3}{2} < \delta < \frac{9+12\beta}{6+4\beta}$ se $\beta > 0$	$2 < \delta < \frac{2+3\beta}{1+\beta}$ se $\beta > 0$	—

Tabela 3 – Condições de estabilidade referentes as equações (417) e (418), dependentes dos parâmetros de estado de DM e ELKO, e correspondentes à interação  $Q_1 = \beta(x^2 + y^2)x^2$

com o parâmetro  $\bar{v}$  descrito, como de praxe, pela expressão (398). As condições de estabilidades são ditadas pelas condições  $\Delta > 0$  e  $\tau < 0$ , de acordo com o apêndice (C). O determinante e o traço de  $M$  para este caso são

$$\begin{aligned} \Delta = & \left( 4 + \frac{8\beta}{3(\omega_m - \omega_\phi)} \right) \delta^2 + \frac{1}{\omega_m - \omega_\phi} \times \\ & \times \left[ 8\beta(1 + \omega_m) - 6(\omega_m^2 - \omega_\phi^2 + 2\omega_m - 2\omega_\phi) \right] \delta + \frac{1}{\omega_m - \omega_\phi} \times \\ & \times \left[ 6\beta(1 + \omega_m^2 + 2\omega_m) + 27(\omega_\phi \omega_m^2 + \omega_m^2 - \omega_m \omega_\phi^2 + \omega_m - \omega_\phi^2 - \omega_\phi) \right], \quad (417) \end{aligned}$$

$$\tau = \left( 2 + \frac{4\beta}{3(\omega_m - \omega_\phi)} \right) \delta + \frac{1}{\omega_m - \omega_\phi} \left[ -2\beta(1 + \omega_m) - 3(\omega_m - \omega_\phi + \omega_m^2 - \omega_m \omega_\phi) \right]. \quad (418)$$

Na tabela (3) seguem presentes as condições entre os parâmetros livres  $\delta$  e  $\beta$ , que garantem a estabilidade dos pontos fixos (415), (416) e (398). Na análise do período inflacionário para a tabela (3), onde  $\bar{v}^2 = 0$  e  $\omega_\phi = -1$ , verifica-se que o componente  $x$  do ponto fixo se torna  $\bar{x} = \sqrt{\frac{\delta}{\beta}}$ . Por outro lado, quando  $\bar{v}^2 = 0$  e  $\omega_\phi = -1$  o parâmetro  $\delta$  é

nulo. Quando isto ocorre  $\bar{x}$  também é nulo, que por sua vez significa em  $Q = 0$ . Quando  $Q$  é nulo o sistema permanece indefinidamente num estado inflacionário, assim como em (5.2.1.2.1) ou (5.2.2.3), por exemplo.

Tal caso somente pode ser remediado se num instante de tempo após o período inflacionário, onde  $\bar{v}^2 \simeq 0$ , mas não nulo. Neste cenário  $\delta \ll \beta$ , de forma que  $\bar{x}^2 \simeq 0$ , mas também não nulo. Tendo  $\bar{x}$  não nulo indica a presença de decaimento de ELKO em DM, logo o sistema evolui neste caso. Deste modo, com este tipo de decaimento, pode-se descrever o instante inicial do universo onde havia somente DE se convertendo em outros elementos (poeira, radiação e matéria ultrarelativística).

Novamente se analisa três possibilidades da tabela (3), donde dentre estes casos somente as células com  $\omega_\phi = -1$  asseguram a expansão acelerada. Conclui-se esta característica via equação (393). Seguem os casos:

1.  $\delta \simeq 0.47$  se  $\omega_\phi = -1$  e  $\omega_m = 0$ : Existe a estabilidade para quando  $\beta > 0.69$ , que está de acordo com a exigência da célula.
2.  $\delta \simeq 1.84$  se  $\omega_\phi = 1/3$  e  $\omega_m = 0$ : Não são encontradas condições de estabilidade.
3.  $\delta \simeq 2.53$  se  $\omega_\phi = 1$  e  $\omega_m = 0$ : Assim como no item anterior, não há estabilidade para os pontos  $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}]$ .

Verifica-se outras possibilidades de estabilidade, todavia as mesmas correspondem a distintas épocas que as aqui analisadas.

#### 5.2.2.6 $Q_1 = \beta (v^2 - y^2)$

Neste caso final a interação escolhida implica que  $Q = 2\beta H \left( \omega_m - \omega_\phi + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right)$ . Os pontos fixos,  $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}]$ , são dados por

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{4\delta^2 + 2\delta [4\beta - 6 - 3(\omega_m + \omega_\phi)] - 6\beta(2 + \omega_m + \omega_\phi) + 9(1 + \omega_m + \omega_\phi + \omega_m\omega_\phi)}{6\beta(\omega_\phi - \omega_m)}}, \quad (419)$$

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{(2\delta - 3 - 3\omega_\phi)(2\delta + 2\beta - 3 - 3\omega_m)}{6\beta(\omega_\phi - \omega_m)}}. \quad (420)$$

O último componente,  $\bar{v}$ , permanece sendo o mesmo para todos os casos já apresentado, já que ele é uma exigência do sistema escolhido. Ele é dado pela equação (398).

		Espinor ELKO			
		Vácuo ( $\omega_\phi = -1$ )	Poeira ( $\omega_\phi = 0$ )	Radiação ( $\omega_\phi = 1/3$ )	Ultrarelativístico ( $\omega_\phi = 1$ )
Matéria	Vácuo ( $\omega_m = -1$ )	—	$\delta_1 < \delta < -\beta$ se $-\frac{3}{2} \leq \beta < 0$ ou $\delta_1 < \delta < \frac{3}{2}$ se $\beta < -\frac{3}{2}$	$\delta_2 < \delta < -\beta$ se $-2 \leq \beta < 0$ ou $\delta_2 < \delta < 2$ se $\beta < -2$	$\delta_3 < \delta < -\beta$ se $-3 \leq \beta < 0$ ou $\delta_3 < \delta < 3$ se $\beta < -3$
	Poeira ( $\omega_m = 0$ )	s/ Pontos	—	$\delta_4 < \delta < \frac{3}{2} - \beta$ se $-\frac{1}{2} \leq \beta < 0$ ou $\delta_4 < \delta < 2$ se $\beta < -\frac{1}{2}$	$\delta_5 < \delta < \frac{3}{2} - \beta$ se $-\frac{3}{2} \leq \beta < 0$ ou $\delta_5 < \delta < 3$ se $\beta < -\frac{3}{2}$
	Radiação ( $\omega_m = 1/3$ )	s/ Pontos	s/ Pontos	—	$\delta_6 < \delta < 2 - \beta$ se $-1 \leq \beta < 0$ ou $\delta_6 < \delta < 3$ se $\beta < -1$
	Ultrarelativístico ( $\omega_m = 1/3$ )	s/ Pontos	s/ Pontos	s/ Pontos	—

Tabela 4 – Condições de estabilidade referentes as equações (421) e (422), dependentes dos parâmetros de estado de DM e ELKO, e correspondentes à interação  $Q_1 = \beta(v^2 - y^2)$ . Define-se os seguintes parâmetros:  $\delta_1 = \frac{3}{4} - \beta - \frac{1}{4}\sqrt{9 + 16\beta^2}$ ;  $\delta_2 = 1 - \beta - \sqrt{1 + \beta^2}$ ;  $\delta_3 = \frac{3}{2} - \beta - \frac{1}{2}\sqrt{9 + 4\beta^2}$ ;  $\delta_4 = \frac{7}{4} - \beta - \frac{1}{4}\sqrt{1 + 16\beta^2}$ ;  $\delta_5 = \frac{9}{4} - \beta - \frac{1}{4}\sqrt{9 + 16\beta^2}$ ;  $\delta_6 = \frac{5}{2} - \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\beta^2}$ ;

Decorrente destes valores se apresentam o determinante e o traço da matriz  $M$ , conforme as condições necessárias de estabilidade estabelecidas no apêndice (C). Eles são:

$$\Delta = 4\delta^2 + 2\delta [2\beta - 6 - 3(\omega_m + \omega_\phi)] - 6\beta(1 + \omega_\phi) + 9(1 + \omega_m + \omega_\phi + \omega_m\omega_\phi), \quad (421)$$

$$\tau = 4\delta - 6 + 2\beta - 3(\omega_m + \omega_\phi), \quad (422)$$

respectivamente. De forma coerente com a estrutura de estudo mostrada ao longo desta seção, fixam-se os valores de  $\omega_\phi$  e  $\omega_m$  de forma a restarem condições necessárias entre  $\beta$  e  $\delta$  a fim de garantir que  $\Delta > 0$  e  $\tau < 0$ . Tais resultados seguem apresentados na tabela (4).

Diferentemente dos outros casos estudados, este demonstra uma estrutura particular. Verifica-se estes novos resultados logo no início, ao se estudar a estabilidade do período



inflacionário. Segunda a tabela (4), constata-se que não existe estabilidade alguma para os pontos fixos encontrados.

Também se constata diferenças na análise do período corrente. A própria forma da tabela (4) já denuncia estes resultados. Nesta a instabilidade se encontra nas células abaixo da diagonal, enquanto que nos outros casos ela está acima. Em outras palavras não há estabilidade para  $\omega_\phi < \omega_m$ .

Logo, os resultados para os dias de hoje, com  $\bar{v}^2 = 0.315$  e  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 0.685$ , indicam que

1.  $\delta \simeq 0.47$  se  $\omega_\phi = 0$  e  $\omega_m = -1$ : Não existe estabilidade para este caso.
2.  $\delta \simeq 1.84$  se  $\omega_\phi = 0$  e  $\omega_m = 1/3$ : Observa-se que há estabilidade, para o presente valor de  $\delta$ , quando  $\beta$  negativo. Se  $\beta = -1/2$  as condições de seriam  $1.69 < \delta < 2$ .
3.  $\delta \simeq 2.53$  se  $\omega_\phi = 0$  e  $\omega_m = 1$ : Neste caso também existe estabilidade se o parâmetro  $\beta$  for negativo. Caso  $\beta = -3/2$ , as condições de  $\delta$  seriam  $2.07 < \delta < 3.0$ , que também inclui o valor  $\delta \simeq 2.53$ .

Para estes casos de estabilidade o processo de decaimento se inverte. Deste modo, tem-se que DM decai em ELKO, uma vez que  $\beta < 0$ . A princípio este caso parece destoar dos apresentados anteriormente, entretanto não se deve encarar tais resultados com estranheza.

O motivo desta inversão é mais uma questão de nomenclatura do que física. Isto é, define-se nesta seção dois elementos para compor o universo, chamados ELKO e DM. Todavia estes nomes são uma herança de trabalhos anteriores, já que as propriedades físicas são ditadas pelos parâmetros  $\omega_m$  e  $\omega_\phi$ . Sendo assim, os resultados aqui apresentados apenas demonstram um universo com cerca de 31% de DE (vácuo) com 69% restantes relacionados a poeira, radiação e matéria ultrarelativística. Este cenário apresenta estabilidade, porém não pode ser utilizado para se estudar o período atual, já que apenas inverter as densidades não livra o sistema dos traços do ELKO no termo  $\rho_\phi$ . i.e.  $\rho_\phi \neq \rho_m$ .

Por conta desta diferença se percebe que as condições de estabilidade deste caso são muito mais complicadas que as situações anteriores. Precisa-se definir valores alternativos de  $\delta$  para garantir a estabilidade. São elas,

- $\delta_1 = \frac{3}{4} - \beta - \frac{1}{4}\sqrt{9 + 16\beta^2}$
- $\delta_2 = 1 - \beta - \sqrt{1 + \beta^2}$
- $\delta_3 = \frac{3}{2} - \beta - \frac{1}{2}\sqrt{9 + 4\beta^2}$

- $\delta_4 = \frac{7}{4} - \beta - \frac{1}{4}\sqrt{1 + 16\beta^2}$
- $\delta_5 = \frac{9}{4} - \beta - \frac{1}{4}\sqrt{9 + 16\beta^2}$
- $\delta_6 = \frac{5}{2} - \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\beta^2}$

Pode-se fazer o estudo particular de cada um destes casos, todavia eles possuem pouco conteúdo físico por conta do descaminho dos dados observacionais perante a inversão de papéis do ELKO e DM.

### 5.2.2.7 Conclusão Prévia: 2º Caso

Nesta segunda aplicação de ELKO em sistemas dinâmicos cosmológicos, procura-se, por meio de uma generalização, estudar o comportamento de um universo formado por dois elementos com propriedades termodinâmicas quaisquer. São eles o ELKO e a DM. Assim como em (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014; PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015), o trabalho no qual esta seção se baseia, também adota uma classe de potenciais ELKO que respeita  $\frac{\Lambda}{2H} = -\delta$ . Desta forma se evita dar forma específica ao mesmo.

Adiciona-se à análise do ELKO na cosmologia da seção anterior a seguinte equação característica para o ELKO,  $p_\phi = \omega_\phi \rho_\phi$ . Com isso se procura fazer uma varredura com os seguintes valores de  $\omega$  tanto para o ELKO, quanto para DM:  $-1, 0, 1/3$  e  $1$ , que correspondem aos elementos vácuo, poeira, radiação e matéria ultrarelativística, respectivamente.

Apresenta-se tabelas que contém as condições entre  $\beta$  e  $\delta$  a fim de garantir a estabilidade dos pontos fixos encontrados, dados valores de  $\omega_m$  e  $\omega_\phi$ . Por meio destas se constata que não se pode encontrar um cenário inflacionário para o ELKO. Sempre há incoerência física quando se encontra os pontos fixos dados por  $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}] = [0, 1, 0]$ . O motivo para isto é a ausência de interação entre ELKO e DM para estes pontos. Com isto a tendência do sistema é permanecer sempre em um estágio onde só existe vácuo no universo.

Tenta-se, por outro lado, remediar este problema por meio de um pequeno deslocamento infinitesimal do ponto  $[0, 1, 0]$ . Imagina-se o ponto, por exemplo,  $[\varepsilon, 1 - 2\varepsilon, \varepsilon]$ , onde  $\varepsilon$  é infinitesimal. Neste caso a soma de densidades permanece sendo unitário e existe a possibilidade do universo sair da “inércia” de outrora, por meio do decaimento lento de ELKO em DM. Com esta análise se justifica momentos posteriores ao período inflacionário. Neles qualquer outro tipo de matéria pode ser criada de forma que as condições de estabi-

lidade sejam respeitadas. Pode-se encontrar esta análise nos casos (5.2.2.3) e (5.2.2.5), por exemplo.

Por outro lado, encontra-se casos de interesse físico mais fáceis de serem analisados quando se estuda o período dos dias atuais do universo. Na realidade, demonstra-se muito claramente a mesma estrutura presente no modelo  $\Lambda$ CDM, de um universo constituído de cerca de 30% de matéria e 70% de vácuo. Desta forma, são sempre as células correspondentes aos parâmetros  $\omega_\phi = -1$  e  $\omega_m = 0$  que melhor representam este cenário atual. Encontra-se estes resultados para os casos (5.2.2.3), (5.2.2.4) e (5.2.2.5), onde todos eles tem confirmadamente o parâmetro de desaceleração também condizente com as observações. i.e.  $q = -0.527$ .

Logicamente ainda há uma gama de resultados possíveis e passíveis de análise. Entretanto todos eles não se encaixam com a proposta desta seção, e de (PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015), de se estudar o período corrente e inflacionário. Por ventura, com os resultados apresentados nas tabelas (1), (2), (3) e (4) se possa caracterizar outros momentos do universo ou outros regimes, nos quais o mesmo se expande desaceleradamente, por exemplo.

### 5.3 Einstein-Cartan e ELKO na Cosmologia Vs. Cosmologia $\Lambda(t)$

Segue presente nesta seção uma aplicação da teoria completa, com torção, do ELKO na cosmologia. Mostra-se, baseado no trabalho recém enviado para publicação (PEREIRA et al., 2016), que quando há torção na aplicação do ELKO na cosmologia os resultados são compatíveis com aqueles obtidos via cosmologia  $\Lambda(t)$ . Entretanto, tais resultados somente são apreciados quando algumas condições são satisfeitas. No decorrer desta seção são elencados quais são as condições e como ambas teorias equivalem. Para apresentar tais conclusões se faz uso da teoria posteriormente apresentada na seção (5.1).

Primeiramente, reescreve-se por uma questão de facilidade as equações de Friedmann e de campo do ELKO, dadas por (349), (350) e (351). São elas

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} + V(\phi) + \frac{3}{8} \frac{H^2 \phi(t)^2}{(1 + \kappa^2 \phi(t)^2/8)} + \rho_m \right], \quad (423)$$

$$\begin{aligned} -2\dot{H} - 3H^2 = \kappa^2 \left[ \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} - V(\phi) - \frac{3}{8} \frac{H^2 \phi(t)^2}{(1 + \kappa^2 \phi(t)^2/8)} + \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{\dot{H} \phi(t)^2}{(1 + \kappa^2 \phi(t)^2/8)} - \frac{1}{2} \frac{H \phi(t) \dot{\phi}(t)}{(1 + \kappa^2 \phi(t)^2/8)^2} + p_m \right], \quad (424) \end{aligned}$$

$$\ddot{\phi}(t) + 3H\dot{\phi}(t) + V'(\phi) - \frac{3}{4} \frac{H^2\phi(t)}{(1 + \kappa^2\phi(t)^2/8)^2} = -\frac{Q}{\dot{\phi}(t)}, \quad (425)$$

onde os vínculos associados aos termos de torção, dados pela equação (348), já foram devidamente substituídos. Assim como visto anteriormente em (351), relembra-se que o fator  $Q$  na equação (425) é posto à mão, por simplicidade. Sabe-se também que quando se aplica o limite de baixas energias ( $\phi \ll M_{pl}$ ) ao campo  $\kappa^2\phi^2 \rightarrow 0$ , recupera-se a teoria livre de torção,  $h(t) = f(t) = 0$ . Por outro lado, no limite de altas energias ( $\phi \gg M_{pl}$ ) se pode escrever  $h(t) \approx -H$ . Ademais, substitui-se os valores de  $h(t)$  e  $f(t)$ , dados por (348) nas expressões do densidade e pressão do ELKO, descritos pelas equações (341) e (342). Tem-se portanto

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{3}{8} \frac{H^2\phi^2}{(1 + \kappa^2\phi^2/8)}, \quad (426)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{3}{8} \frac{H^2\phi^2}{(1 + \kappa^2\phi^2/8)} - \frac{1}{4} \frac{\dot{H}\phi^2}{(1 + \kappa^2\phi^2/8)} - \frac{1}{2} \frac{H\phi\dot{\phi}}{(1 + \kappa^2\phi^2/8)^2}. \quad (427)$$

Uma aplicação proeminente do campo espinorial ELKO como candidato à DE no universo revela uma distribuição quase homogênea do campo associado ao ELKO em todo o universo. Ademais, por meio das observações se constata que a DE, representada pelo ELKO neste modelo, não varia consideravelmente ao longo do tempo. Deste modo se considera que  $\phi \approx cte$ . Tais resultados podem ser observados em (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014) e (PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015), conforme descrito em (5.2.1) e (5.2.2). Isto conduz a uma condição em que o ELKO varia lentamente com o tempo. Matematicamente se tem que

$$\dot{\phi} \ll H\phi, \quad \ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}, \quad (428)$$

onde estas são conhecidas como condições de variação lenta do ELKO. Sob estas condições as equações (423) e (424) se tornam

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[ V(\phi) + \frac{3}{8} \frac{H^2\phi^2}{(1 + \kappa^2\phi^2/8)} + \rho_m \right], \quad (429)$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 = \kappa^2 \left[ -V(\phi) - \frac{3}{8} \frac{H^2\phi^2}{(1 + \kappa^2\phi^2/8)} - \frac{1}{4} \frac{\dot{H}\phi^2}{(1 + \kappa^2\phi^2/8)} + p_m \right], \quad (430)$$

onde os termos  $\rho_m$  e  $p_m$  são colocados a mão decorrentes de se adicionar o tensor energia momento correspondente no lado direito das equações de Einstein. Neste limite ainda se pode constatar que a relação entre  $\rho_\phi$  e  $p_\phi$  é agora dada por

$$p_\phi = -\rho_\phi - \frac{1}{4} \frac{\dot{H}\phi^2}{(1 + \kappa^2\phi^2/8)}, \quad (431)$$

com isto para a condição de variação lenta do parâmetro de Hubble, onde  $\dot{H} \approx 0$ , conclui-se que  $p_\phi \approx -\rho_\phi$ , que é a equação característica de um fluido que representa o vácuo, cujo comportamento é desejável para descrever a DE, por exemplo.

Toma-se um potencial que inclui um termo de massa e um de auto-interação para o campo espinorial ELKO, dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \lambda\phi^4, \quad (432)$$

onde  $m$  é a massa do ELKO e  $\lambda$  é uma constante adimensional de acoplamento. Desta maneira é possível reescrever a equação de Friedmann, dada por (429), por meio de

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho_m + \frac{\Lambda(t)}{3}, \quad (433)$$

com

$$\Lambda(t) = \Lambda_* + \nu H^2, \quad (434)$$

onde o parâmetro constante  $\Lambda_*$  é dado por

$$\Lambda_* \equiv \kappa^2 \left( \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \lambda\phi^4 \right), \quad \nu \equiv \frac{3}{8} \frac{\kappa^2\phi^2}{(1 + \kappa^2\phi^2/8)}. \quad (435)$$

Observa-se que tal modelo é exatamente análogo a ter um termo de constante cosmológica  $\Lambda_*$  mais um termo variável  $\nu H^2$ , com  $\nu$  como uma constante adimensional.

Diversos modelos com termo cosmológico variável são presentes na literatura. A forma específica apresentada aqui, com dependência em  $H^2$ , é motivada pelo grupo de renormalização do vácuo (SHAPIRO; SOLA; STEFANCIC, 2005). Em (COSTA; MAKLER, 2007) são discutidos soluções analíticas exatas para este modelo, com termos  $\Lambda_*$  e  $\nu$  fenomenológicos. Aqui tais termos aparecem relacionados com a massa do ELKO, com a constante de acoplamento  $\lambda$  e com o valor do campo ELKO  $\phi$ .

$$H^2 = \frac{1}{3(1-\zeta)} [\kappa^2\rho_m + \Lambda_*], \quad (436)$$

onde  $\zeta = \frac{\nu}{3}$ . Tem-se também que tal sistema pode ser resolvido, de modo a se restringir os parâmetros com dados observacionais. Neste caso não é necessário lançar mão da resolução via sistemas dinâmicos, como em (5.2.1) e (5.2.2). A equação (436) pode ser reescrita em função dos parâmetros de densidade de matéria atual,  $\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_{m0}}{3H_0^2}$  e do parâmetro  $\zeta$ :

$$\left( \frac{H}{H_0} \right)^2 = \frac{\Omega_m (1+z)^3 + 1 - \Omega_m - \zeta}{1 - \zeta}. \quad (437)$$

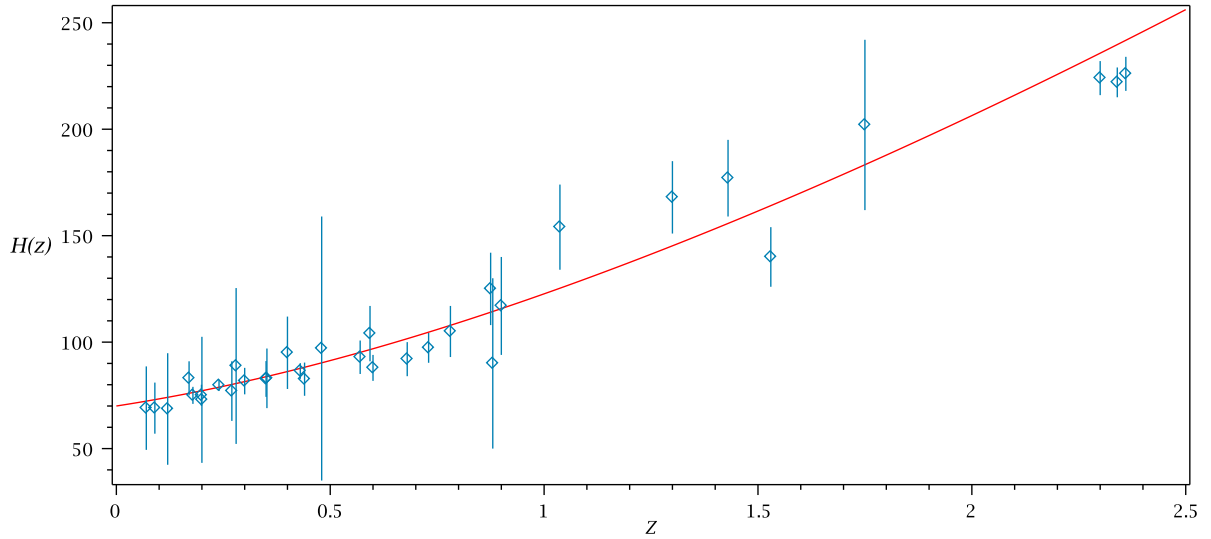


Figura 1 – Gráfico de  $H(z) \times z$  de (437) junto com os dados observacionais obtidos de (SHAROV; VORONTSOVA, 2014).

De acordo com as equação (151) no modelo de Friedmann e as equações (364), (365) e (390), (391), das aplicações sem torção, obtém-se a mesma relação de soma de densidades para o presente caso, logo

$$\Omega_m + \Omega_\phi = 1, \quad \Omega_\phi = \frac{\Lambda_*}{3H_0^2} + \zeta. \quad (438)$$

Os parâmetros livres  $(\Omega_m, \zeta)$  devem respeitar o limite físico  $\Omega \geq 0.04$ , que corresponde a densidade atual de bárions e  $\zeta \geq 0$ , já que um  $\zeta$  negativo violaria a condição de positividade de  $\phi^2$  vinda de (435). A equação (437) permite fazer vínculos com os dados observacionais de  $H(z)$ , obtidos de Sharov (SHAROV; VORONTSOVA, 2014). A Figura (1) mostra o gráfico da função  $H(z)$  dada por (437) com os valores  $H_0 = 70 \text{ km/s.Mpc}$ ,  $\Omega_m = 0.29$  e  $\zeta = 0.02$ . Os dados observacionais aparecem com barras de incerteza. Isso indica que a concordância com os dados observacionais é obtida quando temos cerca de 29% de matéria, e conseqüentemente cerca de 71% de DE (aqui atribuída ao campo ELKO), e um valor bastante pequeno para o parâmetro  $\zeta$ . Um tratamento estatístico mais elaborado obtido para dados de Supernovas-Ia apontam os valores de melhor ajuste para os parâmetros como  $\Omega_m = 0.287^{+0.026}_{-0.033}$  e  $\zeta = 0.00^{+0.11}_{-0.00}$  com precisão de  $1\sigma$ . Tais resultados estão em (PEREIRA et al., 2016).

### 5.3.1 Conclusão Prévia: ELKO Vs. $\Lambda(t)$

Nesta última aplicação cosmológica do ELKO, procura-se apresentar a versatilidade de se descrever o ELKO como elemento escuro dentro de um modelo cosmológico. Mostra-se que os resultados desta aplicação são compatíveis com aqueles obtidos via cosmologia  $\Lambda(t)$ , tendo, neste caso, os termos de torção mantidos. Todavia são necessárias algumas restrições para se chegar a tal conclusão.

De acordo com os resultados prévios e publicados em (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014) e (PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015), além de outros trabalhos na literatura, constata-se que o ELKO pode possuir o caráter de DE ou constante cosmológica. Por conta disto, assim como o vácuo, o mesmo se encontra distribuído por todo o universo de maneira mais ou menos constante, i.e.  $\phi \approx cte$ . A partir desta propriedade se supõe a condição de variação lenta de ELKO, que permite reescrever todas as equações cosmológicas de maneira simplificada.

Ao aplicar estas aproximações nas equações estudadas é possível estabelecer soluções sem a necessidade de utilizar o formalismo de sistemas dinâmicos. Deste modo se pode fazer a conexão direta dos resultados com os dados observacionais, onde os elementos chaves para tal comparação são as densidades de energia dos elementos, dadas por  $\Omega_m$  e  $\Omega_\phi$ . Mesmo sendo ainda necessário testar os resultados, conclui-se que o ELKO é uma “entidade” valiosa no estudo cosmológico vigente, cujo papel ainda precisa, e deve, ser bem explorado.

## 6 Conclusão

Nesta tese são apresentados resultados frutos da aplicação do ELKO na cosmologia. Conforme se verifica, o ELKO é um elemento espinorial relativamente novo, que possui propriedades escuras, que o tornam um candidato em potencial para estudos cosmológicos. Na cosmologia proveniente do modelo de Friedmann, por exemplo, encontra-se espaço para o ELKO no papel de uma parcela considerável do universo que é desconhecida. De acordo com este modelo, verifica-se a existência da energia e matéria escura, que possuem propriedades repulsivas e atrativas, respectivamente.

Aplicações do ELKO nestes papéis já tem sido investigados ultimamente de acordo com a literatura. Entretanto nem sempre os resultados são positivos. Procura-se neste trabalho, portanto, criar um cenário geral, onde é possível entender o modo pelo qual o ELKO evolui, quando colocado como elemento do universo. Neste sentido o ELKO, por ser um espinor, traz consigo a necessidade de incluir a torção no estudo das equações de Friedmann. Demonstra-se que o ELKO gera um sistema de equações mais sofisticadas que as provenientes dos campos escalares. Logo, termos extras surgem e trazem um grau de dificuldade a mais na sua resolução. Por conta deste grau de dificuldade todas as análises iniciais são feitas via sistemas dinâmicos.

O modo de averiguar a viabilidade de possuir o ELKO como parcela do universo é baseado na comparação dos resultados do modelo com os dados observacionais vigente. Além das proporções de materiais que constituem o universo ( $\approx 5\%$  de matéria bariônica,  $\approx 25\%$  de DM e  $\approx 70\%$  DE), tem-se também o dado referente a como o universo se expande aceleradamente. Deste modo, insere-se estes dados no modelo, que por sua vez retorna as condições que certos parâmetros livres devem respeitar para que a comparação seja factível.

Primeiramente, lança-se mão de aproximações de campo fraco que possibilitam a exclusão dos termos de torção nas equações analisadas. O ponto de partida foi a análise da literatura sobre ELKO na cosmologia, onde se verificou que a referência (BASAK et al., 2013) contém certos erros matemáticos cruciais. Demonstra-se em (5.2.1) que o fator olvidado é preponderante para se encontrar ou não pontos fixos atratores na análise dinâmica do sistema. Logo, confirma-se a inexistência de pontos estáveis em (BASAK et al., 2013) por conta de um fator 2 ausente. Neste estudo se considera o universo formado por ELKO, que



se imagina ser um termo de DE, e a DM. Divide-se sempre os materiais em dois grupos, os atratores (matéria escura) e repulsores (DE).

Baseado em (BASAK et al., 2013; PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014), desenvolve-se uma classe de soluções distintas, na qual não é necessário, por enquanto, especificar o potencial do ELKO para a resolução do sistema. Entretanto, esse meio de resolução implica na inserção de um vínculo, que naturalmente torna o problema mais restrito. A fim de se aliviar o problema da coincidência cósmica, insere-se o parâmetro  $Q$  como artifício construção do sistema de equações, o qual permite o decaimento de ELKO em matéria ou vice versa. Estuda-se diversos tipos de interação, onde se encontra resultados positivos para  $Q_1 = \beta$ ,  $Q_1 = \beta x^2$  e  $Q_1 = x^2 v^2$ , descritos em (5.2.1.2.2), (5.2.1.2.3) e (5.2.1.2.5), respectivamente. Entende-se “resultados positivos” como sendo resultados em que se pode confirmar o ELKO como DE.

Após a publicação de (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014), pensou-se em outras restrições que possibilitariam justificar a DE (ou vácuo) como o espinor ELKO. As ideias que deram origem ao artigo (PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015) foram inspiradas pela condição de resolução  $\delta = -\frac{\Lambda}{2H}$ , presente em (PEREIRA; PINHO; SILVA, 2014) e descrita na seção (5.2.1). A partir destas se cria, em (5.2.2), um cenário mais amplo para a aplicação do ELKO. Por meio de equações características termodinâmicas se estuda diversas combinações entre dois tipos de materiais que compõe o universo. Outro caso particular de sistema dinâmico é analisado em (PEREIRA; PINHO, 2014).

Procura-se neste estudo, apresentado em (PINHO; PEREIRA; JESUS, 2015), analisar somente duas épocas distintas do universo, o período inflacionário e o período atual. Entretanto, existem condições as quais podem ser usadas para explicar outras épocas do universo. Os resultados obtidos, para o período atual, indicam uma tendência do sistema em ter o ELKO como vácuo e o outro elemento (DM) como poeira (matéria bariônica). Resultados que confirmam o ELKO como vácuo estão presentes em (5.2.2.3), (5.2.2.4) e (5.2.2.5) ( $Q_1 = \beta x^2$ ,  $Q_1 = \beta x^2 v^2$  e  $Q_1 = \beta (x^2 + y^2) x^2$ ). Além das densidades correntes, a desaceleração do universo é também, conseqüentemente, reproduzida, i.e.  $q = -0.527$ .

Por outro lado, todos os resultados para o período inflacionário são passíveis de ressalvas. Aparentemente, um universo formado somente por vácuo não viabiliza a sua evolução. Isto ocorre por conta do parâmetro de interação  $Q$  que é sempre nulo no ponto fixo específico do sistema. Deste modo o universo permanece sendo somente formado por vácuo e não possuindo evolução no decorrer do tempo. Todavia, ao se adicionar um pouco

de qualquer matéria no “outro lado da balança”, faz-se possível apreciar uma evolução discreta. Tal evolução caracteriza uma pequena, porém presente, conversão de ELKO em outros elementos. Este fato por si só já basta para justificar o período pós inflacionário. Estes resultados são observados em (5.2.2.3) e (5.2.2.5), por exemplo.

Os resultados obtidos podem ser ainda trabalhados a fim de se obter mais informações físicas. Pode-se, por exemplo, enriquecer a verificação inicial, que se constata para todos os casos que o determinante da matriz  $M$  são  $\Delta = 0$ , por meio de técnicas de segunda ordem. Isto é, por meio da linearização do sistema, dada pela equação (552), observa-se uma limitação dos resultados do sistema com relação à região ao redor do ponto fixo. Nesta equação os termos de ordem mais altas são desprezados. Entretanto, quando a teoria linear falha na determinação da estabilidade, faz-se necessário recorrer à ordens maiores para tentar encontrar respostas.

Outro detalhe que deve ser estudado é a determinação da classe de potenciais ELKO decorrente da condição  $\delta = -\frac{\Lambda}{2H}$ . Por meio desta, pode-se anexar mais informações físicas ao espinor ELKO. Isto possibilita, portanto, a continuidade de análise do ELKO em outros sistemas dinâmicos específicos. Observa-se na Lagrangeana do ELKO, presente em (325), que o potencial do mesmo segue uma forma específica. O formato do potencial neste caso depende de características relacionadas ao ELKO satisfazer Klein-Gordon e não satisfazer Dirac. A comparação deste potencial com aqueles oriundos do sistema dinâmico escolhido, podem trazer resultados interessantes.

Ademais, pode-se investir tempo em futuros trabalhos em novas técnicas de resolução do sistema de equações, além de novas escolhas de variáveis ou a escolha de potenciais específicos, e.g.  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \Lambda\phi^4$ .

Por outro lado, os resultados obtidos na análise do ELKO com termos de torção se demonstra versátil por ser um análogo à cosmologia  $\Lambda(t)$ . As confirmações de que o campo ELKO pode representar o vácuo motivam aproximações que possibilitam a resolução do sistema diretamente, sem o auxílio do formalismo de sistemas dinâmicos, i.e.  $\phi \approx cte$ . Decorre disto as condições  $\dot{\phi} \ll H\phi$  e  $\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}$ , que simplificam demasiadamente o sistema.

Por meio desta simplificação é possível encontrar diretamente a conexão entre o modelo estudado e os dados observacionais, dada pela equação (437). Apesar da análise dos dados observacionais estar presente no artigo submetido (PEREIRA et al., 2016), tal técnica não foi desenvolvida pelo aluno ao longo do doutorado. Deixa-se, portanto, estudos mais aprofundados para futuros trabalhos.

Deste modo, conclui-se que o presente estudo se une a tantos outros que formam uma nova vertente de estudos cosmológicos, onde o ELKO é o principal protagonista. Recentemente houve a adição da busca de partículas associadas ao ELKO no CERN LHC (DIAS; CAMPOS; SILVA, 2012; ALVES et al., 2015). Por conta disto, todos os esforços de anexar o ELKO à cosmologia são válidos, já que é possível se obter novos vínculos ou descobertas por meio desta outra linha experimental/observacional. Prova-se, por meios dos resultados encontrados, que o ELKO é um excelente candidato a DE.

## Referências<sup>1</sup>

- ABDALLA, E. et al. Signature of the interaction between dark energy and dark matter in galaxy clusters. *Phys. Lett.*, B673, p. 107–110, 2009. Citado na página 123.
- ABRAMO, L. R.; PINTO-NETO, N. On the stability of phantom k-essence theories. *Phys. Rev.*, D73, p. 063522, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 47, 103 e 107.
- ADE, P. A. R. et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, v. 571, p. A16, 2014. Citado na página 67.
- AHLUWALIA, D. V. On a local mass dimension one Fermi field of spin one-half and the theoretical crevice that allows it. 2013. Citado 3 vezes nas páginas 69, 80 e 81.
- AHLUWALIA, D. V. A story of phases, duals, and adjoints for a local Lorentz covariant theory of mass dimension one fermions. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 96.
- AHLUWALIA, D. V.; GOLDMAN, J. T.; JOHNSON, M. B. Majorana - like  $(j,0) \times (0,j)$  representation spaces: Construction and physical interpretation. *Mod. Phys. Lett.*, A9, p. 439–450, 1994. Citado na página 77.
- AHLUWALIA, D. V.; GRUMILLER, D. Dark matter: A Spin one half fermion field with mass dimension one? *Phys. Rev.*, D72, p. 067701, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 95.
- AHLUWALIA, D. V.; GRUMILLER, D. Spin half fermions with mass dimension one: Theory, phenomenology, and dark matter. *JCAP*, v. 0507, p. 012, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 69, 80 e 95.
- ALCANIZ, J. S.; LIMA, J. A. S. Interpreting cosmological vacuum decay. *Phys. Rev.*, D72, p. 063516, 2005. Citado na página 17.
- ALVAREZ, E. Can one tell Einstein's unimodular theory from Einstein's general relativity? *JHEP*, v. 03, p. 002, 2005. Citado na página 18.
- ALVES, A. et al. Searching for Elko dark matter spinors at the CERN LHC. *Int. J. Mod. Phys.*, A30, n. 01, p. 1550006, 2015. Citado na página 146.
- BABOUROVA, O. V.; FROLOV, B. N.; KOSTKIN, R. S. Dirac's scalar field as an effective component of the dark energy and an evolution of the cosmological 'constant'. 2011. Citado 3 vezes nas páginas 18, 47 e 103.
- BASAK, A. et al. Attractor behaviour in ELKO cosmology. *JCAP*, v. 1304, p. 025, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 111, 112, 114, 121, 125, 143 e 144.
- BOEHMER, C. G. The Einstein-Cartan-Elko system. *Annalen Phys.*, v. 16, p. 38–44, 2007. Citado na página 179.
- BOEHMER, C. G. The Einstein-Elko system: Can dark matter drive inflation? *Annalen Phys.*, v. 16, p. 325–341, 2007. Citado na página 105.

<sup>1</sup> De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

- BOEHMER, C. G. Dark spinor inflation: Theory primer and dynamics. *Phys. Rev.*, D77, p. 123535, 2008. Citado na página 105.
- BOEHMER, C. G.; BURNETT, J. Dark spinors with torsion in cosmology. *Phys. Rev.*, D78, p. 104001, 2008. Citado na página 179.
- BOEHMER, C. G.; BURNETT, J. Dark energy with dark spinors. *Mod. Phys. Lett.*, A25, p. 101–110, 2010. Citado na página 105.
- BOEHMER, C. G. et al. Dark spinor models in gravitation and cosmology. *JHEP*, v. 07, p. 053, 2010. Citado na página 105.
- CARNEIRO, S.; LIMA, J. A. S. Decaying Lambda cosmology, varying G and holography. *Int. J. Mod. Phys.*, A20, p. 2465–2469, 2005. Citado na página 17.
- CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. [s.n.], 2004. ISBN 0805387323, 9780805387322. Disponível em: <<http://www.slac.stanford.edu/spires/find/books/www?cl=QC6:C37:2004>>. Citado na página 24.
- CARVALHO, F. C. et al. Scalar-field-dominated cosmology with a transient accelerating phase. *Phys. Rev. Lett.*, v. 97, p. 081301, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 47, 103 e 107.
- CARVALHO, J. C.; LIMA, J. A. S.; WAGA, I. On the cosmological consequences of a time dependent lambda term. *Phys. Rev.*, D46, p. 2404–2407, 1992. Citado na página 17.
- CHANG, Y.-C.; BOUHMADI-LÓPEZ, M.; CHEN, P. Phantom Dark Energy Spinors in Einstein-Cartan Gravity. 2015. Citado na página 179.
- CHEE, G.; GUO, Y. Exact de Sitter solutions in quadratic gravitation with torsion. *Class. Quant. Grav.*, v. 29, p. 235022, 2012. Citado na página 104.
- CHO, Y. M.; KEUM, Y. Y. Dilatonic dark matter and unified cosmology: A new paradigm. *Class. Quant. Grav.*, v. 15, p. 907–921, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 18, 47, 103 e 107.
- COSTA, S. Silva e; MAKLER, M. Connections among three roads to cosmic acceleration: Decaying vacuum, bulk viscosity, and nonlinear fluids. 2007. Citado na página 140.
- CRISTÓBAL, J. M. F. Unimodular theory: A little pedagogical vision. *Annals of Physics*, v. 350, p. 441 – 453, 2014. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491614002358>>. Citado na página 18.
- CUNHA, J. V.; ALCANIZ, J. S.; LIMA, J. A. S. Cosmological constraints on Chaplygin gas dark energy from galaxy clusters x-ray and supernova data. *Phys. Rev.*, D69, p. 083501, 2004. Citado na página 17.
- DIAS, M.; CAMPOS, F. de; SILVA, J. M. Hoff da. Exploring Elko typical signature. *Phys. Lett.*, B706, p. 352–359, 2012. Citado na página 146.
- ELIZALDE, E. et al. Dark energy: Vacuum fluctuations, the effective phantom phase, and holography. *Phys. Rev.*, D71, p. 103504, 2005. Citado na página 17.

FABBRI, L.; VIGNOLO, S. A modified theory of gravity with torsion and its applications to cosmology and particle physics. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 51, p. 3186–3207, 2012. Citado na página 179.

FABBRI, L.; VIGNOLO, S. ELKO and Dirac Spinors seen from Torsion. *Int. J. Mod. Phys.*, D23, n. 14, p. 1444001, 2014. Citado na página 179.

HAMMOND, R. T. The necessity of torsion in gravity. *General Relativity and Gravitation*, v. 42, n. 10, p. 2345–2348, 2010. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10714-010-1045-x>>. Citado na página 104.

JENTSCHURA, U. D.; WUNDT, B. J. From Generalized Dirac Equations to a Candidate for Dark Energy. *ISRN High Energy Phys.*, v. 2013, p. 374612, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 18, 47 e 103.

JIMENEZ, J. B. et al. The Bimetric variational principle for General Relativity. *Phys. Rev.*, D86, p. 084024, 2012. Citado na página 104.

KOUWN, S. et al. Dark spinor model with torsion and cosmology. *Mod. Phys. Lett.*, A28, p. 1350121, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 106, 177, 180 e 181.

LIMA, J. A. S.; TRODDEN, M. Decaying vacuum energy and deflationary cosmology in open and closed universes. *Phys. Rev.*, D53, p. 4280–4286, 1996. Citado na página 17.

LOUNESTO, P. *Clifford algebras and spinors*. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2001. Réimpressions : 2002, 2003. ISBN 0-521-00551-5. Disponível em: <<http://opac.inria.fr/record=b1135669>>. Citado 3 vezes nas páginas 79, 161 e 164.

MAGANA, J.; MATOS, T. A brief Review of the Scalar Field Dark Matter model. *J. Phys. Conf. Ser.*, v. 378, p. 012012, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 18, 47, 103 e 107.

MAGANA, J. et al. Structure formation with scalar field dark matter: the field approach. *JCAP*, v. 1210, p. 003, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 18, 47, 103 e 107.

MARINOV, M. Construction of invariant amplitudes for interactions of particles with any spin. *Annals of Physics*, v. 49, n. 3, p. 357 – 392, 1968. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491668900341>>. Citado na página 77.

MATOS, T.; GUZMAN, F. S. Scalar fields as dark matter in spiral galaxies. *Class. Quant. Grav.*, v. 17, p. L9–L16, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 18, 47, 103 e 107.

MATOS, T.; GUZMAN, F. S.; URENA-LOPEZ, L. A. Scalar field as dark matter in the universe. *Class. Quant. Grav.*, v. 17, p. 1707–1712, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 18, 47, 103 e 107.

MATOS, T.; VAZQUEZ-GONZALEZ, A.; MAGANA, J.  $\phi^2$  as Dark Matter. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 393, p. 1359–1369, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 18, 47, 103 e 107.

NG, Y. J.; DAM, H. van. Unimodular theory of gravity and the cosmological constant. *Journal of Mathematical Physics*, v. 32, n. 5, 1991. Citado na página 18.

- NOVELLO, M. et al. *Programa Mínimo de Cosmologia*. Rio de Janeiro, RJ: Jauá, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 66.
- PAVON, D. Nonequilibrium fluctuations in cosmic vacuum decay. *Phys. Rev.*, D43, p. 375–378, 1991. Citado na página 17.
- PENROSE, R. A Generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, v. 51, p. 406–413, 1955. Citado na página 96.
- PEREIRA, S. H.; JESUS, J. F. Can Dark Matter Decay in Dark Energy? *Phys. Rev.*, D79, p. 043517, 2009. Citado na página 123.
- PEREIRA, S. H.; PINHO, A. S. S. Elko applications in cosmology. *International Journal of Modern Physics D*, v. 23, n. 14, p. 1444008, 2014. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218271814440088>. Citado na página 144.
- PEREIRA, S. H.; PINHO, A. S. S.; SILVA, J. M. Hoff da. Some remarks on the attractor behaviour in ELKO cosmology. *JCAP*, v. 1408, p. 020, 2014. Citado 14 vezes nas páginas 101, 104, 109, 110, 111, 112, 121, 123, 125, 127, 137, 139, 142 e 144.
- PEREIRA, S. H. et al.  $\Lambda(t)$  cosmology induced by a slowly varying ELKO field. 2016. Citado 4 vezes nas páginas 109, 138, 141 e 145.
- PINHO, A. S. S.; PEREIRA, S. H.; JESUS, J. F. A new approach on the stability analysis in ELKO cosmology. *Eur. Phys. J.*, C75, n. 1, p. 36, 2015. Citado 12 vezes nas páginas 101, 104, 109, 110, 122, 123, 125, 137, 138, 139, 142 e 144.
- ROBLES, V. H.; MATOS, T. Flat Central Density Profile and Constant DM Surface Density in Galaxies from Scalar Field Dark Matter. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 422, p. 282–289, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 18, 47, 103 e 107.
- ROCHA, R. da; RODRIGUES JR., W. A. Where are ELKO spinor fields in Lounesto spinor field classification? *Mod. Phys. Lett.*, A21, p. 65–74, 2006. Citado na página 79.
- ROGÉRIO, R. *Campos Espinoriais ELKO*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 69, 77, 80, 81, 83 e 95.
- SHAPIRO, I. L.; SOLA, J.; STEFANCIC, H. Running G and Lambda at low energies from physics at M(X): Possible cosmological and astrophysical implications. *JCAP*, v. 0501, p. 012, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 140.
- SHAROV, G. S.; VORONTSOVA, E. G. Parameters of cosmological models and recent astronomical observations. *JCAP*, v. 1410, n. 10, p. 057, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 141.
- SILVA, J. M. Hoff da et al. On the bilinear covariants associated to mass dimension one spinors. 2016. Citado 4 vezes nas páginas 161, 162, 164 e 165.
- STEVEN, W. *Cosmology*. [S.l.]: Oxford University Press, 2008. Citado na página 66.



STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Cambridge (Mass.): Westview Press, 1994. Autre(s) tirage(s) : 2000. ISBN 978-0-7382-0453-6. Disponível em: <<http://opac.inria.fr/record=b1102899>>. Citado 4 vezes nas páginas 166, 168, 169 e 171.

SUN, Z.-Y.; SHEN, Y.-G. Dark energy cosmology with spinor field. *Int. J. Theor. Phys.*, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 18, 47 e 103.

SUÁREZ, A.; ROBLES, V. H.; MATOS, T. A Review on the Scalar Field/Bose-Einstein Condensate Dark Matter Model. *Astrophys. Space Sci. Proc.*, v. 38, p. 107–142, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 18, 47, 103 e 107.

URENA-LOPEZ, L. A. Bose-Einstein condensation of relativistic Scalar Field Dark Matter. *JCAP*, v. 0901, p. 014, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 18, 47, 103 e 107.

URENA-LOPEZ, L. A.; REYES-IBARRA, M. J. On the dynamics of a quadratic scalar field potential. *Int. J. Mod. Phys.*, D18, p. 621–634, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 18, 47, 103 e 107.

WALD, R. M. *General relativity*. Chicago, IL: Chicago Univ. Press, 1984. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/106274>>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 29.

WANG, B.; GONG, Y.-g.; ABDALLA, E. Transition of the dark energy equation of state in an interacting holographic dark energy model. *Phys. Lett.*, B624, p. 141–146, 2005. Citado na página 123.

WEI, H. Spinor Dark Energy and Cosmological Coincidence Problem. *Phys. Lett.*, B695, p. 307–311, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 105, 115, 117 e 121.

WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York, NY: Wiley, 1972. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/100595>>. Citado na página 24.

WEINBERG, S. The Cosmological Constant Problem. *Rev. Mod. Phys.*, v. 61, p. 1–23, 1989. Citado na página 17.



## Apêndice A – Derivada Covariante do ELKO e a Conexão de Spin

Neste apêndice estão descritos os conceitos básicos sobre a estrutura das derivadas covariantes de espinores. Como se pode observar no decorrer deste apêndice, a chave por detrás da conexão de spin ( $\Gamma_\mu$ ), elemento presente na derivada covariante, são as matrizes  $\gamma$ , que se relacionam com os geradores dos espinores no grupo de Lorentz. Entretanto, há outra vertente que pode ser apreciada na obtenção de  $\Gamma_\mu$ . Ela é baseada nos símbolos de Infeld-van der Waerden (I-vdW), que descrevem um isomorfismo entre vetores e espinores hermitianos de rank 2. Na seção seguinte deste apêndice está descrito a estrutura geral da derivada covariante. Nesta seção existem duas subseções, nas quais estão descritas as duas vertentes citadas para a definição da conexão de spin, via matrizes  $\gamma$  e via símbolos de I-vdW.

### A.1 Derivada Covariante de um Espinor

A primeira coisa que se deve ter claro em mente para estudar as derivadas covariantes aplicadas em espinores e suas conexões correspondentes são os índices de tais elementos. São três, as classes de índices dentro deste formalismo, os índices do espaço-tempo, descritos pelo alfabeto grego ( $\alpha, \beta, \gamma \dots$ ), os índices invariantes, descritos pelo alfabeto latino ( $a, b, c \dots$ ) e por fim os índices espinoriais, dados pelo alfabeto latino maiúsculo ( $A, B, C \dots$ ). Por questão de simplicidade os índices espinoriais são suprimidos tanto nesta seção quanto na subseção seguinte, estando presentes, portanto, somente na subseção (A.1.2), onde o isomorfismo entre vetores e espinores os fazem preponderantes.

Define-se primeiramente os “vierbeins” que caracterizam a métrica física ( $g_{\mu\nu}$ ) e consequentemente a métrica invariante ( $\eta_{\mu\nu}$ ). Logo,

$$e_\mu^a = [N(t), a(t), a(t), a(t)], \quad e^\mu_a = \left[ \frac{1}{N(t)}, \frac{1}{a(t)}, \frac{1}{a(t)}, \frac{1}{a(t)} \right], \quad (439)$$

onde a relação entre a métrica física e os “vierbeins” é dada por

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}, \quad (440)$$

onde  $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Sendo  $\gamma^a$  a matriz de Dirac com o índice invariante, pode-se obter  $\eta_{ab}$  por meio da seguinte expressão

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab}, \quad (441)$$

onde de maneira correspondente se obtém a relação das matrizes de Dirac dependentes do espaço-tempo, dadas por  $\gamma^\mu = e^\mu_a \gamma^a$ . Tal relação é descrita por

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (442)$$

As matrizes  $\gamma$  tanto as invariantes, quanto as dependentes do espaço-tempo, possuem dois índices espinoriais suprimidos. Tecnicamente, identifica-se um deles como sendo espinorial e o outro dual-espinorial. Dado isto, define-se  $L$  como a rotação de téttrade de modo que

$$\tilde{\gamma}^a = \Lambda^a_b L \gamma^b L^{-1}. \quad (443)$$

Já que as matrizes de Dirac são constantes em alguma representação escolhida, a condição  $\tilde{\gamma}^a = \gamma^a$  indica que a matriz  $L$  pode ser dada em função de  $\Lambda^a_b$ . Para as transformações de Lorentz infinitesimais:

$$\Lambda^a_b = \delta^a_b + \epsilon^a_b, \quad (444)$$

onde a antissimetria dos 6 coeficientes de Lorentz,  $\epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba}$  são consequências das definições

$$L = 1 + \frac{1}{2} \epsilon_{ab} G^{ab}, \quad L^{-1} = 1 - \frac{1}{2} \epsilon_{ab} G^{ab}, \quad (445)$$

onde  $G^{ab}$  são os geradores do grupo de Lorentz na representação espinorial. Descritos por

$$G^{ab} = \frac{1}{4} (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a). \quad (446)$$

O espinor  $\psi$  é definido como a quantidade que, com a rotação da téttrade, transforma-se como

$$\tilde{\psi} = L \psi. \quad (447)$$

Por outro lado o seu dual, dado por  $\bar{\psi}$ , transforma-se de maneira que

$$\tilde{\bar{\psi}} = \bar{\psi} L^{-1}. \quad (448)$$

Ao se derivar a equação (447) se obtém a seguinte expressão

$$\partial_\mu \tilde{\psi} = L (\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu L) \psi. \quad (449)$$

Verifica-se que a derivada de um espinor não se transforma como um espinor. A fim de “corrigir” este problema se define a conexão de spin  $\Gamma_\mu$  que se transforma, por sua vez, de acordo com

$$\tilde{\Gamma}_\mu = L \Gamma_\mu L^{-1} + (\partial_\mu L) L^{-1}. \quad (450)$$

Portanto, define-se a derivada covariante, representada anteriormente pela equação (329), como sendo

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \Gamma_\mu \psi. \quad (451)$$

Por outro lado, a derivada covariante de um espinor dual é consequentemente dada por

$$\nabla_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \bar{\psi} \Gamma_\mu, \quad (452)$$

assim como descrito na equação (330).

Deste modo, não a derivada simples, mas a derivada covariante de um espinor se transforma como tal, mantendo a coerência da teoria. Isto é

$$\nabla_\mu \tilde{\psi} = L \nabla_\mu \psi. \quad (453)$$

### A.1.1 $\Gamma_\mu$ via Derivada Covariante Geral

Esta subseção contém a estrutura de uma derivada covariante aplicada em um objeto “híbrido”, que possui índices invariantes e do espaço-tempo. Um exemplo de objeto desta natureza são as matrizes  $\gamma$ , que também possuem índices espinorias. Define-se a derivada covariante de um objeto com índices invariantes e vetoriais, representado neste caso por  $W^a{}_{b\mu}{}^\nu$ , de forma que

$$\nabla_\lambda W^a{}_{b\mu}{}^\nu = \partial_\lambda W^a{}_{b\mu}{}^\nu + \omega_\lambda{}^a{}_c W^c{}_{b\mu}{}^\nu - \omega_\mu{}^c{}_b W^a{}_{c\mu}{}^\nu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu W^a{}_{b\rho}{}^\nu - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho W^a{}_{b\rho}{}^\mu. \quad (454)$$

Como se pode notar,  $\omega_\lambda{}^a{}_c$  possui o mesmo comportamento que as conexões afim, descritas neste trabalho como os símbolos de Christoffel,  $\Gamma_{\lambda\rho}^\mu$ .

Procura-se, portanto, escrever a conexão de spin  $\Gamma_\mu$  presente nas equações (329) e (330), em função das conexões presentes na definição da equação (454). Ou seja, escrever  $\Gamma_\mu$  em função de  $\omega_\lambda{}^a{}_c$  e  $\Gamma_{\lambda\rho}^\mu$ . Para isto, faz-se necessário a introdução de um teorema que descreve a derivada covariante das matrizes  $\gamma$ . Apresenta-se primeiramente uma estrutura geral do teorema e posteriormente uma aplicação para o caso das derivadas covariantes.

O primeiro passo deste teorema consistem em conhecer o comportamento da variação das funções  $\gamma$  que possuem índices físicos de espaço-tempo ( $\gamma^\mu = e^\mu{}_a \gamma^a$ ). Considera-se a relação (467), reescrita como

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I. \quad (455)$$

Deve-se lembrar que as matrizes  $\gamma$  possuem ainda dois índices espinoriais que estão suprimidos nesta equação. Por consequência, verifica-se que o lado direito da equação também é matricial, retratado com a matriz identidade multiplicando o termo  $2g_{\mu\nu}$ . Com um deslocamento infinitesimal a expressão (455) se torna

$$\{\Delta\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \{\gamma^\mu, \Delta\gamma^\nu\} = 2\Delta g^{\mu\nu} I. \quad (456)$$

O teorema consiste justamente em que a solução mais geral desta equação, para  $\Delta\gamma^\mu$ , é dada por

$$\Delta\gamma^\mu = \frac{1}{2} (\Delta g^{\mu\lambda}) \gamma_\lambda - [M, \gamma^\mu], \quad (457)$$

onde  $M$  é uma matriz  $4 \times 4$ , determinada a partir do valor de  $\Delta g^{\mu\lambda}$ .

Para aplicar a solução (457) no caso das derivadas covariantes de  $\gamma$ , define-se  $\Delta\gamma^\mu$  como sendo  $dx^\rho \partial_\rho \gamma^\mu$ . Por outro lado, a matriz  $M$  pode ser decomposta de forma que  $M = dx^\mu M_\mu$ . Desta maneira, pode-se, somando o termo  $dx^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \gamma^\lambda$  nos dois lados da equação, reescrever a expressão (457) como sendo

$$dx^\mu (\partial_\mu \gamma^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \gamma^\lambda) = \frac{1}{2} dx^\mu (\Gamma_{\mu\kappa}^\nu g^{\kappa\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda g^{\kappa\nu}) \gamma_\lambda - dx^\mu [M_\mu, \gamma^\mu]. \quad (458)$$

Por conta da antissimetria na troca de  $\lambda$  e  $\nu$  nos termos entre parênteses no lado direito da equação anterior se pode compactar todo o lado direito num termo similar a  $dx^\mu [M_\mu, \gamma^\nu]$ . Isto é, condensa-se (458) de forma que

$$\partial_\mu \gamma^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \gamma^\lambda = - [\Gamma_\mu, \gamma^\nu], \quad (459)$$

onde  $dx^\mu$  foi descartado por multiplicar a expressão inteira. Por outro lado,  $\Gamma_\mu$  é dado como

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{8} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha [\gamma_\alpha, \gamma^\beta] + M_\mu. \quad (460)$$

A equação (460) já é uma descrição da conexão de spin utilizado na derivada covariante de um espinor, dado pelas equações (329) e (330). Por outro lado, a equação (459) é identificada como a definição da derivada covariante da matriz  $\gamma$ , que é igual a zero por definição ( $\nabla_\mu \gamma^\nu = 0$ ). Logo,

$$\nabla_\mu \gamma^\nu = \partial_\mu \gamma^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \gamma^\lambda + [\Gamma_\mu, \gamma^\nu] = 0. \quad (461)$$

Por questão de completeza se define a própria conexão de spin em função de  $\omega_\mu^a{}_b$ , que por sua vez pode ser escrito em função dos símbolos de Christoffel, tornando assim possível recuperar a equação (460). Primeiramente se deduz as propriedades simétricas de  $\omega_\mu^a{}_b$  por meio da derivada covariante da métrica  $\eta_{\mu\nu}$ , que por definição é igual a zero. Sendo assim a mesma é dada por

$$\nabla_\mu \eta_{ab} = \partial_\mu \eta_{ab} - \omega_\mu^c{}_a \eta_{cb} - \omega_\mu^c{}_b \eta_{ac} = 0. \quad (462)$$

Como  $\eta_{ab}$  é constante e simétrico na troca dos índices, conclui-se que  $\omega_{\mu a}^b = -\omega_{\mu b}^a$ . Ao se aplicar a derivada covariante no “vierbein” ( $e^a{}_\nu$ ) se pode obter a relação entre  $\omega_\mu^a{}_b$  e os símbolos de Christoffel, uma vez que  $\nabla_\mu e^a{}_\nu$  também é nulo. Isto é,

$$\nabla_\mu e^a{}_\nu = \partial_\mu e^a{}_\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\nu e^{\rho a} + \omega_\mu^b{}_a e^{\nu b} = 0. \quad (463)$$

Deste modo, portanto, escreve-se  $\omega_\mu^a{}_b$  como sendo

$$\omega_\mu^{ab} = e^a{}_\nu (\partial_\mu e^{b\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu e^{b\rho}). \quad (464)$$

É possível obter a relação desejada invertendo a expressão anterior e substituindo o resultado na equação (460). Outra possibilidade é comparar a relação (464) com a equação (463) multiplicada pela matriz  $\gamma^a$ . Nesta comparação, elimina-se  $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$  de maneira que se pode escrever  $\Gamma_\mu$  em função de  $\omega_\mu^b{}_a$ . Ambas possibilidades resultam em

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{8} \omega_\mu^{ab} [\gamma_a, \gamma_b] + M_\mu, \quad (465)$$

onde  $M_\mu$  é tomado, por simplicidade, como nulo.

Conclui-se, portanto, esta subseção com a forma final da conexão de spin, presente nas equações (329) e (330), que são constituintes essenciais na ação, dada pela equação (328), na qual o ELKO é introduzido no cenário cosmológico. A expressão final é dada por

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{8} \omega_\mu^{ab} [\gamma_a, \gamma_b] = \frac{1}{8} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha [\gamma_\alpha, \gamma^\beta]. \quad (466)$$

### A.1.2 $\Gamma_\mu$ via Símbolos de Infeld - van der Waerden

Nesta subsecção se demonstra que com o formalismo de espinores de dois componentes é possível representar um vetor real quadridimensional. Com os agentes responsáveis por este isomorfismo é factível obter a conexão de spin presente nas equações (329) e (330). A teoria por detrás deste isomorfismo é bem extensa e complexa. Por este motivo segue apresentado, resumidamente, todo o desenvolvimento até a obtenção dos símbolos de I-vdW. Tendo estes símbolos é possível “converter” os índices do espaço-tempo, dados pelas letras gregas, por índices espinoriais, dados pelo alfabeto latino com letras maiúsculas. Verifica-se, que ao converter os índices dos símbolos de Christoffel se obtém a conexão de spin, que tecnicamente é uma conexão “mista”, que possui índices de espaço-tempo e espinores. Tal característica é apreciada na equação (466), onde entretanto os índices espinoriais são omitidos. Nesta secção, torna-se mais clara a estrutura real da conexão de spin, já que os índices espinoriais não são mais suprimidos, uma vez que são imprescindíveis neste formalismo.

Define-se primeiramente uma base ortonormal vetorial qualquer do espaço-tempo, dada por  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ . Associado a esta base está uma métrica que define o espaço-tempo, a qual está relacionada uma assinatura. Em outras palavras, os sinais dos termos diagonais da métrica definem a assinatura do espaço-tempo, que para o presente caso se trata de  $\{+, -, -, -\}$ .

Dado certa assinatura, pode-se obter infinitas bases que são representadas pela mesma métrica, de modo que sendo  $g_{\mu\nu} = g(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$  um componente da métrica, tem-se que

$$g(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = g(\mathbf{e}'_\mu, \mathbf{e}'_\nu), \quad (467)$$

onde  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$  representam uma outra base que pode ser obtida por meio de uma transformação usual da base definida originalmente. A transformação dessas bases é feita por meio do matriz  $L$  ( $4 \times 4$ ). Logo,

$$\mathbf{e}_\mu = L^\nu{}_\mu \mathbf{e}'_\nu. \quad (468)$$

Decorre das equações (467) e (468) que

$$g_{\mu\nu} = L^\lambda{}_\mu L^\rho{}_\nu g_{\lambda\rho}, \quad (469)$$

que por sua vez indica que  $L^\mu{}_\nu$  é invertível, com determinante igual à  $+1$  ou  $-1$  e classificadas como matrizes ortogonais. O grupo pelo qual estas matrizes são classificadas é o  $O(p, q)$ , onde  $p$  e  $q$  indicam a assinatura da métrica. Nesta classificação  $p$  indica o número de sinais positivos enquanto que  $q$  indica o número de sinais negativos.

Quando as matrizes analisadas respeitam a relação (469) e o determinante delas é positivo o grupo estudado é classificado como  $SO(p, q)$ , um subgrupo da classificação

indicada anteriormente. Desta forma, estuda-se no presente trabalho o grupo  $SO(3, 1)$ , de acordo com todas as métricas utilizadas até então.

O mapeamento de um vetor do espaço-tempo ( $\mathfrak{R}^4$ ) pode ser feito por meio de um espinor  $2 \times 2$  ( $\mathfrak{R}^{2,2}$ ), de maneira que

$$(t, x, y, z) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t + z & x - iy \\ x + iy & t - z \end{pmatrix}. \quad (470)$$

Pode-se relacionar o determinante da matriz presente no lado direito da relação (470), chamada de matriz  $P$ , com o produto interno do vetor presente no lado esquerdo da mesma relação. Isto é,

$$\det P = \frac{1}{2} (t^2 - x^2 - y^2 - z^2). \quad (471)$$

Resumidamente, conclui-se que a matriz  $P$  representa o vetor  $(t, x, y, z)$ , pertencente ao grupo  $SO(3, 1)$ . Entretanto ainda é necessário caracterizar as transformações das bases do espaço-tempo neste novo cenário espinorial. Para executar esta função, lança-se mão das matrizes  $K$  e  $M$ . A transformação por meio destas é dada por

$$P' = KPM, \quad (472)$$

onde  $\det P' = (\det K)(\det P)(\det M)$ , que resulta em

$$(\det K)(\det M) = 1, \quad (473)$$

de maneira que

$$\det P' = \det P. \quad (474)$$

Neste caso  $P'$  representa um vetor do tipo  $(t', x', y', z')$ . Através da relação (474) se constata que o módulo do vetor é preservado. Também se verifica que os tipos de transformações são os “boosts” e as rotações, presentes no grupo de Lorentz (i.e.  $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ ). Isto significa que o mapeamento (472) é na realidade uma transformação ortogonal em  $\mathfrak{R}^{2,2}$ , ou seja, elementos do  $O(2, 2)$ .

Assumindo que a relação (474) é verdadeira, faz-se possível forçar que a transformação (472) também seja ortogonal por meio da redefinição  $\tilde{K} = (\det K)^{-1/2} K$  e  $\tilde{M} = (\det K)^{1/2} M$ . Deste modo, tem-se que a transformação

$$P' = \tilde{K}P\tilde{M}, \quad (475)$$

com  $\det \tilde{K} = \det \tilde{M} = 1$  corresponde à uma transformação ortogonal.

Pode-se passar esta transformação para a forma “matricial” ou “tensorial” utilizando índices para indicar as entradas do espinor  $P$  nas matrizes de transformação. Apesar de ter sido utilizado o termo matriz durante toda esta subseção, encara-se todos estes elementos como espinores de rank 2. Deste ponto em diante se atribui aos espinores estudados os índices  $A, B, C \dots$  para os componentes de  $\tilde{K}$ , que são prontamente diferentes dos

componentes de  $\tilde{M}$ , dados por  $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C} \dots$ . Esta classe distinta de índices se deve ao caráter de  $\tilde{K}$  e  $\tilde{M}$ . Assim como nas transformações matriciais a matriz multiplicada pelo lado direito da matriz transformada é transposta. Todavia, a correspondência desta transposição no formalismo espinorial é a dualidade. Deste modo  $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C} \dots$  representam os índices de espinores duais.

Como  $P$  “interage” com ambos espinores por meio da relação (475), conclui-se que o mesmo deve ter entrada dos dois tipos de índices de forma que a expressão final é dada por

$$P'^A_{\dot{B}} = K^A_C P^C_{\dot{D}} M^{\dot{D}}_{\dot{B}}. \quad (476)$$

Após ter a estrutura espinorial caracterizada, ainda é necessário estruturar melhor a passagem de  $\mathfrak{R}^4$  para  $\mathfrak{R}^{2,2}$ , presente em (470). Considera-se, primeiramente, uma nova base mais conveniente para descrever os componentes do espinor  $2 \times 2$ ,  $P$ , dada por  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4)$ . Tais bases são descritas como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 + i\mathbf{e}_3), & \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 - i\mathbf{e}_3), \\ \mathbf{E}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_1), & \mathbf{E}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4), \end{aligned} \quad (477)$$

que por sua vez estão inseridos na estrutura espinorial pela seguinte forma

$$\mathbf{e}_{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_4 & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_1 & -\mathbf{E}_3 \end{pmatrix}, \quad (478)$$

onde  $A, B = 1, 2$  e  $\dot{A}, \dot{B} = 1, 2$ .

A mesma estrutura da base do espaço-tempo vetorial se repete para a presente base espinorial, isto é

$$g(\mathbf{e}_{A\dot{B}}, \mathbf{e}_{C\dot{D}}) = -\epsilon_{AC} \epsilon_{\dot{B}\dot{D}}, \quad (479)$$

onde

$$\epsilon_{AB} = \epsilon_{A\dot{B}} = \epsilon^{AB} = \epsilon^{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (480)$$

que são conhecidos como os símbolos de Levi-Civita. Ademais, tais símbolos são utilizados para subir e baixar índices espinoriais.

Neste momento, em que a base da teoria está estabelecida se pode introduzir os símbolos de I-vdW, que fazem a conexão entre a base de  $\mathfrak{R}^4$ , dada por  $\mathbf{e}_\mu$ , e  $\mathfrak{R}^{2,2}$ , dada por  $\mathbf{e}_{A\dot{B}}$ . Logo,

$$\mathbf{e}_{A\dot{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^\mu_{A\dot{B}} \mathbf{e}_\mu. \quad (481)$$

Como consequência das equações (478) e (481) segue a expressão

$$\sigma^\mu_{A\dot{B}} \sigma^\nu_{C\dot{D}} g_{\mu\nu} = -2\epsilon_{AC} \epsilon_{\dot{B}\dot{D}} \quad (482)$$

que de certo modo exemplifica a passagem de determinado objeto do espaço-tempo usual para o cenário espinorial, já que os símbolos de Levi-Civita também se comportam como a métrica para os espinores.

Além disto, de acordo com as definições dos vetores de base  $\mathbf{e}_{A\dot{B}}$  e  $\mathbf{e}_\mu$ , encontra-se que os símbolos de I-vdW são, segundo as escolhas do presente trabalho, dados por

$$\begin{aligned}\sigma^1_{A\dot{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma^1_{A\dot{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma^1_{A\dot{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma^1_{A\dot{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{483}$$

Visto que os símbolos de I-vdW representam uma mudança de base, eles correspondem a uma relação invertível que, portanto, pode gerar

$$\sigma_{\mu A\dot{B}} \sigma_{\nu}^{A\dot{B}} = 2g_{\mu\nu}.\tag{484}$$

Há nesta equação, indícios de que a mesma estrutura da equação (467) pode ser reproduzida por meio dos símbolos de I-vdW.

Tendo os símbolos de I-vdW sido definidos, basta aplicá-los na conexão usual do espaço-tempo e “converter” seus dois primeiros índices em índices espinorias. Deste modo se realiza o isomorfismo que transporta a conexão usual em sua versão espinorial, onde o índice de  $\mathfrak{R}^4$  deixado inalterado representa a coordenada do quadri vetor que representa a derivada covariante. Isto é,

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} \longrightarrow \Gamma_{AB\lambda},\tag{485}$$

nesta representação o índice  $\lambda$  está ligado com  $\nabla_\lambda$ .

Devido à antissimetria dos dois primeiros índices da conexão afim, dá-se um tratamento especial na mudança de índices. Consequentemente,

$$\Gamma_{AB\lambda} \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \Gamma_{\dot{A}\dot{B}\lambda} \varepsilon_{AB} = \frac{1}{2} \sigma^\mu_{A\dot{A}} \sigma^\nu_{B\dot{B}} \Gamma_{\mu\nu\lambda}.\tag{486}$$

Verifica-se que ambos símbolos I-vdW do lado direito da equação realizam a troca dos índices  $\mu$  e  $\nu$  da conexão afim por índices espinorias. Ao se isolar os termos procurados desde o início da subseção, tem-se

$$\begin{aligned}\Gamma_{AB\lambda} &= \frac{1}{4} S^{\mu\nu}_{AB} \Gamma_{\mu\nu\lambda}, \\ \Gamma_{\dot{A}\dot{B}\lambda} &= \frac{1}{4} S^{\mu\nu}_{\dot{A}\dot{B}} \Gamma_{\mu\nu\lambda},\end{aligned}\tag{487}$$

onde  $S^{\mu\nu}_{AB}$  e  $S^{\mu\nu}_{\dot{A}\dot{B}}$  são dados por

$$\begin{aligned}S^{\mu\nu}_{AB} &= \sigma^{[\mu}_{A\dot{C}} \sigma^{\nu]}_{\dot{B}C}, \\ S^{\mu\nu}_{\dot{A}\dot{B}} &= \sigma^{[\mu}_{C\dot{A}} \sigma^{\nu]}_{\dot{B}C}.\end{aligned}\tag{488}$$



Por fim, conclui-se que a conexão de spin pode de fato ser escrita por meio dos símbolos de I-vdW por meio das equações (487) e (488). Nota-se, entretanto, que os índices antes omitidos das expressões (329) e (330), agora se fazem presentes. Pode-se, então, descrever ambas equações de uma maneira mais completa

$$\nabla_{\mu}\psi^A = \partial_{\mu}\psi^A - \Gamma^A{}_{B\mu}\psi^B, \quad (489)$$

$$\nabla_{\mu}\psi^{\dot{A}} = \partial_{\mu}\psi^{\dot{A}} + \Gamma^{\dot{A}}{}_{\dot{B}\mu}\psi^{\dot{B}}, \quad (490)$$

onde desta vez os índices estão presentes.

## Apêndice B – Classificação de Lounesto

Neste apêndice está descrito a classificação de Lounesto, segundo os bilineares covariantes dos espinores. Entretanto, assim como na construção do dual do ELKO na seção 4.1.2.5, verifica-se que a classificação de Lounesto, baseada no espinor de Dirac, não comporta a estrutura deste espinor. Por este motivo também segue descrito neste apêndice informações baseadas no artigo (SILVA et al., 2016), onde o processo de construção dos bilineares é feito para o ELKO, de forma a se redefinir algumas características da classificação de Lounesto convencional.

Deste modo seguem duas seções neste apêndice, onde a primeira descreve basicamente a classificação de Lounesto que é utilizada, por questão de completeza, para a discussão posterior dos bilineares do ELKO. Por outro lado, na segunda seção está descrito os principais argumentos e os elementos bilineares reconstruídos de modo a atender uma classificação baseada na de Lounesto. Por meio deste último, observa-se que existe um abuso de linguagem de alguns autores ao classificar o ELKO segundo Lounesto.

### B.1 Classificação Convencional

Existe uma classificação de espinores, segundo (LOUNESTO, 2001), que é bastante interessante tanto do ponto de vista físico quanto matemático. Esta classificação é baseada nos bilineares covariantes, que fisicamente representam as medições referentes aos espinores. Por sua vez suas propriedades covariantes garantem os resultados medidos mediante a mudanças de referenciais, deixando a teoria consistente.

A natureza física da classificação se foca sobre os covariantes bilineares, que são observáveis físicos que descrevem características físicas das partículas fermiônicas. As quantidades observáveis são dadas pela seguinte estrutura multi vetorial:

$$\sigma = \psi^\dagger \gamma_0 \psi, \quad (491)$$

$$\mathbf{J} = J_\mu \mathbf{e}^\mu, \quad (492)$$

$$\mathbf{S} = S_{\mu\nu} \mathbf{e}^\mu \wedge \mathbf{e}^\nu = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma_0 i \gamma_{\mu\nu} \psi \mathbf{e}^\mu \wedge \mathbf{e}^\nu, \quad (493)$$

$$\mathbf{K} = K_\mu \mathbf{e}^\mu = \psi^\dagger \gamma_0 i \gamma_{0123} \gamma_\mu \psi, \quad (494)$$

$$\omega = -\psi^\dagger \gamma_0 \gamma_{0123} \psi, \quad (495)$$

onde  $\gamma_{0123} = i\gamma_5$ . Nesta representação, tem-se, por exemplo, que a quantidade  $\mathbf{J}$  simboliza a densidade de corrente, onde o componente temporal,  $J_0 = \psi^\dagger \psi$ , é a densidade de

probabilidade da partícula. Deste modo os covariantes bilineares têm uma interpretação física na teoria Dirac. Isto ocorre após uma multiplicação adequada por algumas constantes físicas. Na realidade,  $eJ_0$  é interpretado como densidade de carga,  $ecJ_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) a densidade de corrente elétrica,  $(\frac{e\hbar}{2mc}) S^{ij}$  como densidade de momento magnético,  $(\frac{e\hbar}{2mc}) S^{0j}$  como a densidade momento elétrico,  $(\frac{\hbar}{2}) K_\mu$  como a densidade de spin. Já a interpretação do escalar  $\sigma$  e do pseudo-escalar  $\omega$  é menos clara. Todavia, tem-se que ambos os dois combinados geram  $\rho^2 = \sigma^2 + \omega^2 = |J|^2$ , onde  $\rho$  pode ser interpretado como a densidade de probabilidade.

A fim de garantir a classificação bilinear de Lounesto, faz-se necessário que as grandezas, apresentadas anteriormente, satisfaçam relações algébricas quadradas, conhecidas como identidades de Fierz-Pauli-Konfink (FPK). Tais identidades são dadas por

$$\mathbf{J}^2 = \omega^2 + \sigma^2, \quad (496)$$

$$J_\mu K_\nu - K_\mu J_\nu = -\omega S_{\mu\nu} - \frac{\sigma}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} S^{\alpha\beta}, \quad (497)$$

$$J_\mu K^\mu = 0, \quad (498)$$

$$\mathbf{J}^2 = -\mathbf{K}^2. \quad (499)$$

Os espinores que atendem as identidades de FPK podem ser classificados segundo a denominação de Lounesto. Esta classificação se resume a seis diferentes classes. Em seguida estão descritas quais são estas classes:

1.  $\sigma \neq 0, \quad \omega \neq 0$
2.  $\sigma \neq 0, \quad \omega = 0$
3.  $\sigma = 0, \quad \omega \neq 0$
4.  $\sigma = 0 = \omega, \quad \mathbf{K} \neq 0, \quad \mathbf{S} \neq 0.$
5.  $\sigma = 0 = \omega, \quad \mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{S} \neq 0.$
6.  $\sigma = 0 = \omega, \quad \mathbf{K} \neq 0, \quad \mathbf{S} = 0.$

Em várias referências se verifica que a classificação do ELKO é do tipo cinco. Entretanto, por meio do artigo (SILVA et al., 2016) e por meio de conversa privadas com um dos autores (R. J. Bueno Rogério), faz-se possível verificar que tal classificação é um erro. Atribui-se a isso o fato de todas as análises anteriores terem sido feitas com o espinor ELKO em repouso. Por conta disto, as características covariantes do mesmo foram perdidas e sua classificação se faz equivocada.

Como fica claro na próxima seção, o ELKO se trata de um tipo diferente de espinor, que foge das definições das equações (491), (492), (493), (494) e (495) assim como no caso da construção do seu dual na seção 4.1.2.5. O motivo para isto é que todos os

elementos desta seção são construídos com base nos espinores de Dirac. Sendo assim, muitas quantidades definidas nem ao menos são reais para o espinor ELKO.

## B.2 Classificação do ELKO: Deformação da Álgebra de Clifford

Neste início desta seção se mostra que o ELKO de fato não atende as identidades de FPK. Verifica-se que elementos imaginários são obtidos para as equações (491), (492), (493), (494) e (495). Prova-se por fim, que isto é fruto de se tratar o ELKO como uma classificação baseada no espinor de Dirac.

Define-se o espinor ELKO e o seu dual por

$$\lambda_{\{-,+\}}^S(\vec{p}) = \Lambda_-(p^\mu) \begin{pmatrix} -i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ i \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (500)$$

$$\overset{-S}{\lambda}_{\{-,+\}}(\vec{p}) = \Lambda_+(p^\mu) \begin{pmatrix} -i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} & i \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (501)$$

respectivamente, onde  $\Lambda_\pm$  representam os “boosts” aplicados nos espinores em referencial de repouso. A mesma estrutura se encontra caracterizada pelas equações (224) e (225), donde segue a definição dos “boosts”  $\Lambda_\pm$ .

Decorrente desta escolha de espinores, os elementos definidos pelas equações (491), (492), (493), (494) e (495) são dados por:

$$\sigma = -2m, \quad (502)$$

$$\omega = 0, \quad (503)$$

$$J_0 = 0, \quad (504)$$

$$J_1 = 2im \cos \theta \cos \phi, \quad (505)$$

$$J_2 = 2im \cos \theta \sin \phi, \quad (506)$$

$$J_3 = -2im \sin \theta, \quad (507)$$

$$K_0 = 0, \quad (508)$$

$$K_1 = -2m \sin \phi, \quad (509)$$

$$K_2 = 2m \cos \phi, \quad (510)$$

$$K_3 = 0, \quad (511)$$

$$S_{01} = -2im \sin \theta \cos \phi, \quad (512)$$

$$S_{02} = -2im \sin \theta \sin \phi, \quad (513)$$

$$S_{03} = -2im \cos \theta, \quad (514)$$

$$S_{12} = S_{13} = S_{23} = 0. \quad (515)$$

Conclui-se, por meio destes valores que as identidades de FPK não são satisfeitas, assim como visto em (SILVA et al., 2016).

Ainda baseado em (SILVA et al., 2016), verifica-se que se faz necessário uma chamada deformação da álgebra de Clifford a fim de que o ELKO satisfaça as identidades. É necessário que se obtenha valores reais para os observáveis e este problema ocorre justamente por conta de uma definição diferente de dual de Dirac e o dual do ELKO.

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}I, \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (516)$$

onde  $N$ , para o presente caso, é a dimensão quatro da métrica  $g_{\mu\nu}$ . Os geradores desta álgebra são as matrizes  $\gamma_\mu$ , além da própria identidade.

A abordagem padrão determina a complementação da base Clifford álgebra, a fim de garantir covariantes bilineares reais. Este complemento é realizada pela composição da base de vetor, utilizados como blocos de construção

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N-M}} \equiv \frac{1}{M!} \epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} \gamma^{\mu_{N-M+1}} \gamma^{\mu_{N-M+2}} \dots \gamma^{\mu_N}, \quad (517)$$

onde o menor valor de  $M$  é 2, com sua sequência dada por  $M = 2, 3 \dots N$ . Deste modo os elementos reais da álgebra de Clifford são dados por  $\{I, \gamma_\mu, \tilde{\gamma}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{N-2}}, \dots, \tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}\}$ . Por meio desta nova base, chamada pelos autores de (SILVA et al., 2016) de deformada, pode-se construir os bilineares do ELKO que atendem as condições da FPK. Os primeiros elementos surgem dos dois primeiros elementos, que são iguais aos anteriores de acordo com (LOUNESTO, 2001). Logo, tem-se que

$$\sigma = \overline{\lambda}_h(\vec{p}) I \lambda_h(\vec{p}), \quad (518)$$

$$J_\mu = \overline{\lambda}_h(\vec{p}) \gamma_\mu \lambda_h(\vec{p}), \quad (519)$$

onde  $h$  representa a helicidade do espinor. De acordo com a definição do dual do ELKO, dado pela equação (235), verifica-se que  $\overline{\lambda}_h(\vec{p}) = [\Xi \lambda_h(\vec{p})]^\dagger \gamma_0$ . Como as grandezas bilineares são reais, forçosamente é necessário que  $\gamma_0 = \Xi^\dagger \gamma_0^\dagger \Xi$  e  $\gamma_0 \gamma_\mu = \Xi^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma_0^\dagger \Xi$ . Utilizando a equação (517), faz-se possível

$$\left[ \overline{\lambda}_h(\vec{p}) \tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{N-M}} \lambda_h(\vec{p}) \right]^\dagger = (-1)^{M(M-1)/2} \overline{\lambda}_h(\vec{p}) \Xi \tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{N-M}} \Xi \lambda_h(\vec{p}), \quad (520)$$

que resulta finalmente na redefinição

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{N-M}} = \frac{i^{M(M-1)/2}}{M!} \Xi \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} \gamma^{\mu_{N-M+1}} \gamma^{\mu_{N-M+2}} \dots \gamma^{\mu_N} \Xi. \quad (521)$$

Conclui-se, a partir da redefinição (521) que os bilineares podem ser reescritos como reais, da seguinte maneira:

$$\sigma_E = \overline{\lambda}_h(\vec{p}) I \lambda_h(\vec{p}), \quad (522)$$

para o elemento  $I$ ,

$$J_{\mu_E} = \overline{\lambda}_h(\vec{p}) \gamma_\mu \lambda_h(\vec{p}), \quad (523)$$

para  $\gamma_\mu$ ,

$$\omega_E = -i \overline{\lambda}_h(\vec{p}) \gamma_5 \lambda_h(\vec{p}), \quad (524)$$

para o elemento  $\tilde{\gamma}$ ,

$$K_{\mu_E} = -\overline{\lambda}_h(\vec{p}) \Xi \gamma_5 \gamma_\mu \Xi \lambda_h(\vec{p}), \quad (525)$$

para o elemento  $\tilde{\gamma}_\mu$  e finalmente,

$$S_{\mu\nu_E} = i \overline{\lambda}_h(\vec{p}) \Xi \gamma_\mu \gamma_\nu \Xi \lambda_h(\vec{p}), \quad (526)$$

para  $\tilde{\gamma}_{\mu\nu}$  e onde  $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ .

Demonstra-se, portanto, claro que a classificação de Lounesto é inapropriada para o ELKO. Sendo assim se conclui que devido a natureza “exótica” deste espinor, o mesmo não pode ser classificado como os demais espinores. Entretanto, o trabalho (SILVA et al., 2016) representa um esforço pioneiro no intuito de criar uma nova classe de classificação para os espinores de dimensão de massa 1. Neste, as grandezas bilineares são reconstruídas, e apresentadas pelas equações (522), (523), (524), (525) e (526), a fim de se atender as identidades de FPK

## Apêndice C – Sistemas Dinâmicos

Segue neste apêndice uma explicação sucinta sobre sistemas dinâmicos e a estabilidade de pontos fixos. Utiliza-se esta teoria para analisar o sistema de equações provenientes das equações de Friedmann aliadas as equações de continuidade do ELKO e da matéria. Por conta de vínculos os sistemas estudados ao longo deste trabalho são todos bidimensionais.

Sistemas não lineares costumam sempre conter um maior grau de dificuldade em sua resolução. Por outro lado, como se demonstra no decorrer deste apêndice, a resolução de um sistema linear possui um processo simples e intuitivo. Deste modo, lança-se mão de utilizar um sistema linearizado para estudar o sistema cosmológico do ELKO. Com este, recupera-se as vantagens e o formalismo simplificado do sistema linear. Todavia, tal processo possui um limite de validade, que faz com que o estudo seja realizado somente nas imediações dos pontos fixos.

Deste modo, reescreve-se, por meio de uma mudança de variáveis, o sistema inicial em função de infinitesimais do espaço de fase que distam justamente dos pontos fixos que resolvem o mesmo sistema inicial. Por meio deste novo sistema se estuda o quão provável é que o sistema evolua de forma a permanecer nas vizinhanças daquele ponto fixo. Dai surge uma classificação de pontos fixos que também é abordada aqui.

Este apêndice é dividido em duas seções. Inicia-se, na primeira seção, com a teoria básica para a análise de um sistema linear bidimensional de equações. Já na segunda seção se deduz a técnica de linearização de sistemas não-lineares. Procura-se, com esta, possibilitar a utilização da teoria de sistemas lineares a fim de classificar e encontrar os pontos fixos do sistema de equações em questão. Toda teoria aqui contida foi escrita com base em (STROGATZ, 1994).

### C.1 Sistemas Lineares

Um sistema linear e bidimensional é dado basicamente pelas equações a seguir

$$\dot{x} = ax + by, \quad (527)$$

$$\dot{y} = cx + dy, \quad (528)$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são constantes e os “.” sobre  $x$  e  $y$  representam uma derivação com relação a um parâmetro em comum. Assume-se aqui o tempo como tal parâmetro. É possível obter uma escrita compacta para as equações (527) e (528). Ela é dada por:

$$\dot{\vec{x}} = M\vec{x}, \quad (529)$$

com  $M$  e  $\vec{x}$  dados por

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (530)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (531)$$

respectivamente. Entende-se um sistema como linear a partir do fato que a soma de suas soluções também é uma solução do sistema. Isto é, sendo  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$  soluções de um sistema de equações qualquer, conclui-se que a expressão

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2, \quad (532)$$

também é uma solução, onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

Após se constatar que determinado sistema é de fato linear, pode-se supor uma classe específica de soluções para ele. Toma-se o seguinte “ansatz” como solução:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}, \quad (533)$$

onde  $\vec{v}$  também é um elemento constante, que ainda precisa ser determinado, com o mesmo formato da equação (531).  $\lambda$  também é uma constante a ser determinada. A maneira tradicional de se determinar os parâmetros livres de um “ansatz” é substituí-lo na equação que o mesmo procura solucionar, logo

$$\lambda e^{\lambda t}\vec{v} = e^{\lambda t}M\vec{v}. \quad (534)$$

Como ambos os lados desta equação possuem o termo  $e^{\lambda t}$ , simplifica-se esta de forma a obter a equação característica seguinte

$$M\vec{v} = \lambda\vec{v}. \quad (535)$$

Com a teoria oriunda da álgebra linear, determina-se primeiramente os parâmetros  $\lambda$ , que são os autovalores da equação (535). Sua determinação passa pelo determinante

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (536)$$

que por sua vez dá origem à equação

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0, \quad (537)$$

onde  $\tau$  e  $\Delta$  são o traço e o determinante da matriz  $M$ , (530), respectivamente. Seus valores são

$$\tau = a + d, \quad \Delta = ad - bc. \quad (538)$$



Após resolver a equação de segundo grau dada por (537) se obtém:

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad (539)$$

como raízes (autovalores). Novamente conforme dita a álgebra linear, determina-se a partir de cada autovalor um autovetor correspondente. Deste modo é possível reescrever o “ansatz” inicial como uma soma das duas soluções encontradas. Em geral, reescreve-se a equação (533) como

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \quad (540)$$

que representa justamente a solução completa do sistema linear proposto. A determinação das constantes  $c_1$  e  $c_2$  se baseia, como de praxe, em condições iniciais dadas de antemão. Foca-se neste apêndice o papel dos autovalores, todavia a maneira de determinar  $c_1$  e  $c_2$  segue descrita em (STROGATZ, 1994), onde também existem diversos exemplos.

Ao possuir a solução do sistema linear em mãos, faz-se necessário averiguar a estabilidade do mesmo. Ou seja, investigar como o mesmo evolui diante da origem do sistema após um longo tempo transcorrido.

Conforme visto, as soluções dependem de exponenciais do tipo  $e^{\lambda t}$ . Deste modo, os possíveis valores de  $\lambda$  definem totalmente a evolução da solução. De forma análoga a soluções de equações diferenciais de segunda ordem, como o oscilador harmônico amortecido por exemplo, existem várias classes de soluções.

Existem basicamente três classes de autovalores  $\lambda$ , São elas:

- $\lambda$  real puro:  $\lambda \rightarrow \alpha$  para  $\alpha \in \mathfrak{R}$
- $\lambda$  imaginário puro:  $\lambda \rightarrow i\omega$  para  $\omega \in \mathfrak{R}$
- $\lambda$  imaginário:  $\lambda \rightarrow \alpha + i\omega$  para  $\alpha, \omega \in \mathfrak{R}$

O fato do sistema ser estável ou não depende do comportamento apresentado na lista anterior. Para o primeiro caso, onde  $\lambda \rightarrow \alpha$ , é claro que o exponencial mantém o seu caráter. Deste modo a aproximação ou não da origem depende o sinal deste termo, para determinar se a função tende ao infinito ou à zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Como a solução (540) depende de dois exponenciais, com dois autovalores, é necessário que haja uma coordenação entre ambos para garantir a estabilidade. Isto é, convergir a zero depende dos dois autovalores serem negativos, por exemplo. Para os dois positivos o sistema é instável e para um negativo e um positivo é do tipo sela.

Decorrente da explicação anterior é fácil verificar os outros dois casos. Quando o exponencial é imaginário puro, constata-se que o sistema é puramente oscilatório, onde sua solução depende da combinação de senos e cossenos. Neste caso, chama-se o ponto fixo (origem) de ponto central, já que no espaço de fase a solução o “circula”.

Bem, na mistura de autovalores do tipo  $\lambda \rightarrow \alpha + i\omega$  para  $\alpha, \omega \in \mathfrak{R}$ , verifica-se que para  $t \rightarrow \infty$  o termo oscilatório oriundo de  $\omega$  não demonstra muita informação sobre o “destino” da solução. Este termo somente dá à solução um caráter oscilatório, deixando para

a parte real  $\alpha$  o principal encargo de tornar a solução, estável, instável ou do tipo sela. As soluções destes casos são chamadas de espiral. Sendo assim a análise feita anteriormente para autovalores reais puros se mantém para estudar as presentes soluções. Informações mais detalhadas se fazem presentes, com diversos exemplos, em (STROGATZ, 1994).

Resume-se toda esta análise por meio do seguinte remanejamento

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}, \quad \Delta = \lambda_1\lambda_2, \quad \tau = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (541)$$

- Para  $\Delta < 0$ : Autovalores possuem sinais opostos, caracterizando assim um ponto de sela.
- Para  $\Delta > 0$ : Ambos os autovalores possuem o mesmo sinal ou são complexos conjugados, que caracterizam soluções centrais ou espirais.
  - \*  $\tau > 0$ : Os dois autovalores são positivos, de maneira que não há estabilidade.
  - \*  $\tau < 0$ : Os dois autovalores são negativos, garantindo, assim, a estabilidade a solução.
- Para  $\Delta = 0$ : Necessariamente um dos autovalores é nulo. Para este caso nada pode ser afirmado com relação a solução do sistema.

## C.2 Sistemas Linearizados

Define-se o sistema não-linear bidimensional por meio de

$$\dot{x} = f(x, y), \quad (542)$$

$$\dot{y} = g(x, y), \quad (543)$$

onde  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  são funções quaisquer que dependem de  $x$  e  $y$ . Novamente os “.” representam derivadas com relação ao tempo. Diferencia-se este sistema do anterior de forma superficial pela propriedade básica de que a soma das soluções não é necessariamente uma solução do sistema.

Para determinados pontos  $[\bar{x}, \bar{y}]$ , tem-se que as funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  são

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad g(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad (544)$$

onde os pontos que satisfazem a tal relação são conhecidos como pontos fixos.

Diferentemente do caso linear, encontrar as soluções de (542) e (543),  $x(t)$  e  $y(t)$ , não é geralmente um trabalho fácil. Em certos casos nem ao menos há soluções algébricas para o sistema. Como se procura estudar um sistema geral nesta seção, faz-se necessário tentar contornar esta dificuldade. Por esta razão, lança-se mão de um mecanismo que torne esta processo menos trabalhoso. Tem-se o processo de linearização como escolha factível.

Por meio da linearização do sistema é possível resgatar o tratamento visto na seção anterior, facilitando assim o estudo do sistema. Todavia, existe um preço a ser pago para que essa linearização seja realizada. Isto é, a linearização não passa do primeiro termo de uma expansão de infinitos termos, que descrevem uma função. Este processo é análogo a se tomar somente o termo linear de uma série para descrever a função que ela representa, e.g.  $\sin x \approx x$ .

Logicamente, tomar apenas um termo de uma expansão completa nem sempre resulta em uma função fidedigna com a original. Entretanto, para certos intervalos de valores é possível se encontrar boas aproximações. No âmbito de sistemas dinâmicos a restrição dos intervalos se dá nas vizinhanças dos pontos fixos. Sendo assim o novo campo de ação do sistema (542) e (543) são as variáveis  $\delta x$  e  $\delta y$ . Deste modo, a fim de se linearizar tal sistema se redefine as variáveis de modo que

$$\delta x = x - \bar{x}, \quad \delta y = y - \bar{y}. \quad (545)$$

Decorre do primeiro termo desta redefinição que

$$\dot{\delta x} = \dot{x}, \quad (546)$$

já que  $\bar{x}$  é constante. Substitui-se as redefinições, dadas por (545) e (546), na equação (542). Logo,

$$\dot{\delta x} = f(\bar{x} + \delta x, \bar{y} + \delta y). \quad (547)$$

Expandindo esta expressão em série de Taylor resulta em

$$\dot{\delta x} = f(\bar{x}, \bar{y}) + \delta x \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} + \delta y \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} + \mathcal{O}^2(\delta x \delta y, \delta x^2, \delta y^2) + \dots, \quad (548)$$

onde  $\mathcal{O}^2$  representa termos de segunda ordem nesta expansão. Por conta da equação (544), simplifica-se a equação anterior para

$$\dot{\delta x} = \delta x \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} + \delta y \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} + \mathcal{O}^2(\delta x \delta y, \delta x^2, \delta y^2) + \dots \quad (549)$$

De forma análoga se obtém o correspondente à derivada de  $\delta y$ . Logo,

$$\dot{\delta y} = \delta x \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} + \delta y \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} + \mathcal{O}^2(\delta x \delta y, \delta x^2, \delta y^2) + \dots, \quad (550)$$

que possibilita, por sua vez, escrever todo o novo sistema de maneira compactada. Sua expressão é dada por:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x} \\ \dot{\delta y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} & \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} \\ \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} & \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + \mathcal{O}^2 + \mathcal{O}^3 + \dots \quad (551)$$

Conforme mencionado anteriormente, toma-se o limite onde apenas a primeira ordem da expansão é relevante. Deste modo, o sistema linearizado é dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x} \\ \dot{\delta y} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{array} \right) \Bigg|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}, \quad (552)$$

onde em resumo os parâmetros  $\delta x$  e  $\delta y$  representam deslocamentos infinitesimais de  $x$  e  $y$  a partir do ponto fixo. De acordo com definições anteriores, escreve-se a matriz  $M$ , dos sistemas lineares, para representar a matriz do sistema linearizado. Isto é,

$$M = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{array} \right) \Bigg|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}, \quad (553)$$

onde a esta matriz linearizada é assegurada pela equivalência topológica estabelecida por Hartmann e Großmann (STROGATZ, 1994).

Como foi verificado na seção anterior, a estabilidade do ponto fixo é totalmente dependente da matriz  $M$ . Por meio desta é possível obter seu determinante e traço, que são por sua vez utilizados para estudar a estabilidade, conforme o resumo apresentado. Logo, dado um sistema não-linear, deve-se encontrar a matriz jacobiana, dada por (553). Lembra-se que nesta matriz jacobiana são substituídos os pontos fixos, de maneira a obter uma matriz, cujos componentes são números. Tomando esta como uma matriz de sistema linear, basta obter seus valores de determinante ( $\Delta$ ) e traço ( $\tau$ ). Finalmente, com os valores destes parâmetros, classifica-se o sistema segundo as regras de estabilidade antes mostradas.

## Apêndice D – Variação do termo $\sqrt{-g}$

Neste apêndice se deduz a variação do termo  $\sqrt{-g}$ , presente na variação da ação de Einstein-Hilbert, apresentada na seção (2.9). Para se obter tal variação se lança mão de dois processos distintos. Um deles se dá pela fórmula de Jacobi, utilizada para calcular a derivada do determinante de uma matriz qualquer. O outro é um truque, onde se obtém o termo desejado de maneira simplificada. Logo, apresenta-se na primeira parte deste apêndice a teoria baseada na fórmula de Jacobi. Após a apresentação desta teoria em termos matriciais, adapta-se o resultado final para o formalismo tensorial. Por outro lado a segunda parte contém uma versão simplificada do processo, que é baseado na derivada do logaritmo do determinante da matriz.

### D.1 Fórmula de Jacobi

Sabe-se que a variação de  $\sqrt{-g}$  é dada simplesmente por

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{\delta g}{\sqrt{-g}}. \quad (554)$$

Segue da equação (554) a necessidade de se obter a variação do determinante da métrica,  $\delta g$ . Para se obter é necessária a teoria de Jacobi.

A fórmula de Jacobi é dada pela seguinte forma

$$\frac{d}{dt}(\det A(t)) = \text{tr} \left( \text{adj} A(t) \frac{dA(t)}{dt} \right). \quad (555)$$

O ponto inicial é considerar a seguinte maneira de se escrever o determinante de uma matriz qualquer. A mesma é dada por

$$\det(A) = \sum_j A_{ij} \text{adj}^T(A)_{ij}, \quad (556)$$

calculada para uma linha  $i$  qualquer da matriz  $A$ . Considerando que o determinante é uma função que depende de cada um dos componentes de  $A$ , pode-se escrever a seguinte expressão

$$d[\det(A)] = \sum_i \sum_j \frac{\partial M}{\partial A_{ij}} dA_{ij}, \quad (557)$$

onde  $\det(A) = M(A_{11}, A_{12} \dots A_{mm})$ , com  $m$  como a dimensão da matriz  $m \times m$ . Segue de (557) e da relação (556) que

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A_{ij}} = \frac{\partial \sum_k A_{ik} \text{adj}^T(A)_{ik}}{\partial A_{ij}} = \sum_k \frac{\partial A_{ik} \text{adj}^T(A)_{ik}}{\partial A_{ij}}. \quad (558)$$

Aplicando a derivada parcial no termo da definição (556) resulta em

$$\sum_k \frac{\partial A_{ik} \text{adj}^T(A)_{ik}}{\partial A_{ij}} = \sum_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial A_{ij}} \text{adj}^T(A)_{ik} + \sum_k A_{ik} \frac{\partial [\text{adj}^T(A)_{ik}]}{\partial A_{ij}}. \quad (559)$$

Nota-se que se um elemento da matrix  $A_{ij}$  e do cofator  $adj^T(A)_{ik}$  estão na mesma linha ou coluna então o cofator não é função dos elementos  $A_{ij}$ . Por esta razão se afirma que

$$\frac{\partial [adj^T(A)_{ik}]}{\partial A_{ij}} = 0. \quad (560)$$

Por outro lado se tem que  $\frac{\partial A_{ik}}{\partial A_{ij}} = \delta_{jk}$ , que por sua vez resulta em

$$\frac{\partial det(A)}{\partial A_{ij}} = \sum_k \delta_{jk} adj^T(A)_{ik} = adj^T(A)_{ij}. \quad (561)$$

Por meio desta se conclui que a expressão (557) é na realidade dada por

$$d[det(A)] = \sum_i \sum_j adj^T(A)_{ij} dA_{ij}, \quad (562)$$

onde os somatórios e a multiplicação matricial fazem parte de um lema, dado por

$$\sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij} = tr(A^T B). \quad (563)$$

Ao se utilizar o lema anterior em (562) se confirma, portanto, a fórmula de Jacobi dada pela equação (555). Isto é,

$$d[det(A)] = tr[adj(A) dA]. \quad (564)$$

Retornando ao problema proposto, que é determinar a variação de  $g$ , pode-se colocar a matriz  $A$  da expressão anterior, (564), como sendo  $g_{\mu\nu}$ . Logo,

$$d[det(g_{\mu\nu})] = tr[adj(g_{\mu\nu}) dg_{\mu\nu}]. \quad (565)$$

Com auxílio da definição de  $adj(A)$ , dada por  $adj(A) = det(A) A^{-1}$ , reescreve-se a equação (565) como

$$dg = gg^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}, \quad (566)$$

onde  $adj(g_{\mu\nu}) = gg^{\mu\nu}$  e a própria soma de índices  $\mu$  e  $\nu$  representa o traço. Segue deste resultado que a equação (554) é dada por

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (567)$$

onde  $\delta(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = 0$ , que dá origem a troca de sinal da equação posterior, (567).

Conclui-se, portanto, que a variação de  $\sqrt{-g}$ , que é utilizada na obtenção da equação de Einstein, é dada pela equação (567).

## D.2 “Atalho” para determinar $\delta\sqrt{-g}$

O processo a ser apresentado se inicia por meio da variação do determinante de uma matriz qualquer  $A$ , dada por  $\delta\ln[\det(A)]$ . Escreve-se tal termo como

$$\delta\ln[\det(A)] = \ln[\det(A + \delta A)] - \ln[\det(A)], \quad (568)$$

que pela propriedade de logaritmo pode ser reescrita como

$$\delta\ln[\det(A)] = \ln \left[ \frac{\det(A + \delta A)}{\det(A)} \right]. \quad (569)$$

Desta vez se propriedade dos determinantes para se obter

$$\delta\ln[\det(A)] = \ln [\det (A^{-1} (A + \delta A))], \quad (570)$$

que por sua vez é igual a

$$\delta\ln[\det(A)] = \ln [\det (1 + A^{-1}\delta A)]. \quad (571)$$

Segue da relação entre traço e determinante que a equação (571) pode ser dada por

$$\delta\ln[\det(A)] = \ln [(1 + \text{tr} (A^{-1}\delta A))], \quad (572)$$

que finalmente pode ser aproximada para

$$\delta\ln[\det(A)] = \text{tr} (A^{-1}\delta A), \quad (573)$$

devido ao valor de  $\text{tr} (A^{-1}\delta A)$  ser pequeno. De maneira semelhante à seção anterior, encara-se a matriz  $A$  como sendo a métrica  $g_{\mu\nu}$ . Sendo assim, na expressão anterior (573), substitui-se  $\det (A) \rightarrow g$  e  $\text{tr} (A^{-1}\delta A) \rightarrow g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ , logo

$$\delta\ln[g] = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \quad (574)$$

que conseqüentemente indica que  $\delta g$  é dado por

$$\delta\ln[g] = \frac{\delta g}{g} \longrightarrow \delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \quad (575)$$

Por meio desta equação final se pode resolver o problema da variação do termo  $\sqrt{-g}$ , conforme descrito pela equação (554), com resultado apresentado por (567).

## Apêndice E – Variação do termo $R_{\mu\nu}$

Neste apêndice se deduz outro termo correspondente a extremização da ação de Einstein-Hilbert. Este termo, correspondente ao segundo termo do lado direito da equação (45), é dado pela variação do tensor de Ricci,  $\delta R_{\mu\nu}$ .

Para se obter o valor desta variação se inicia a construção por meio da variação do tensor de Ricci, originado do tensor de Riemann, dado pelo equação (32). Sua variação é, segundo a regra da cadeia, dado por

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} + \delta \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} - \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}. \quad (576)$$

A partir deste valor, tenta-se escrever as derivadas covariantes correspondentes às derivadas simples representadas pelos dois primeiros termos do lado direito de (576). Procura-se com isto encontrar derivadas covariantes dentro desta equação. Logo, tem-se que as derivadas são

$$\nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\eta} \delta \Gamma_{\eta\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} \delta \Gamma_{\mu\eta}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}, \quad (577)$$

$$\nabla_{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \partial_{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\eta} \delta \Gamma_{\eta\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\eta} \delta \Gamma_{\mu\eta}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}. \quad (578)$$

Isola-se os termos de derivadas simples das equações (577) e (578) para depois os substituir no primeiro e no segundo termo da equação (576), respectivamente. Devido à simetria entre os índices das conexões é possível cancelar todos os termos do tipo  $\Gamma \delta \Gamma$ , de modo a se obter

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} - \nabla_{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}, \quad (579)$$

que representa justamente a variação do tensor de Ricci.



## Apêndice F – Derivadas Covariantes como Termos de Superfície na Ação de Einstein-Hilbert

Neste apêndice é mostrado o princípio básico que permite que uma derivada covariante de um tensor seja nula quando dentro de uma integral em todo espaço-tempo. Tal artifício é utilizado neste trabalho para anular um termo na ação de Einstein-Hilbert.

Vem da definição de derivada covariante, dada pela equação (16), que

$$\nabla_{\mu} V^{\mu} = \partial_{\mu} V^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} V^{\lambda}. \quad (580)$$

Por a conexão desta equação possuir índices somados (índice covariante e contravariante iguais), pode-se reescrever a definição de conexão afim da seguinte forma

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} [\partial_{\lambda} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\rho\lambda} - \partial_{\rho} g_{\mu\lambda}] = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \partial_{\lambda} g_{\rho\mu}. \quad (581)$$

Pode-se uma vez mais reescrever esta conexão afim, desta vez, por meio das equações (567) e (574), que foram deduzidas anteriormente no apêndice (D).

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} \partial_{\lambda} \ln(g) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\lambda} (\sqrt{-g}). \quad (582)$$

Ao se resubstituir a equação (582) na definição (580) se obtém

$$\nabla_{\mu} V^{\mu} = \partial_{\mu} V^{\mu} + \frac{V^{\mu}}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} V^{\mu}) \quad (583)$$

Deste modo se a relação (583) for posta em uma integral sob todo o espaço-tempo, mostra-se que

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\mu} V^{\mu} = \int d^4x \partial_{\mu} (\sqrt{-g} V^{\mu}) = 0, \quad (584)$$

que é zero por meio do teorema de Gauss, no qual a integral volumétrica de uma derivada total (um divergente de uma função vetorial) é equivalente a uma integral de superfície cujos limites tendem ao infinito. Como  $V^{\mu}$ , para ser bem comportado, é nulo no infinito, conclui-se que (584) é de fato zero via teorema de Gauss.

## Apêndice G – Equações de Friedmann via Equações de Euler-Lagrange

Neste apêndice está descrita uma maneira alternativa de se obter as equações de Friedmann, dada uma ação que possua o termo de Einstein-Hilbert. A maneira clássica de se obter tais equações é decorrente das equações de Einstein, quando a métrica FLRW é utilizada para caracterizar o universo. A parte geométrica das equações de Einstein para este caso são caracterizadas pela equação (67). O termo “00” de  $G$  já representa a primeira equação de Friedmann, enquanto que a segunda é originada de uma combinação de “00” e “11”, assim como visto na seção (3.1).

Enquanto isto, a parte de matéria, dada pelo lado direito da equação de Einstein é fruto do tensor energia momento, obtido por meio da densidade Lagrangeana correspondente. Pode-se observar os correspondentes deste tensor energia momento por meio da equação (145). Cada elemento “escolhido” para compor o universo possui o seu próprio tensor, que quando representam fluidos perfeitos possuem a estrutura diagonal presente em (53).

O processo clássico descrito não se demonstra um problema se o tensor de energia momento da matéria contida no universo for conhecida, já que a parte geométrica não se altera uma vez que as equações de Einstein, após deduzidas (vide seção (2.9)), permanecem as mesmas.

Entretanto, de acordo com o artigo (KOUWN et al., 2013), faz-se necessário um termo extra quando a torção é incluída na conexão afim. Este termo extra é advindo do fato da extremização da ação de Einstein-Hilbert não ser mais a mesma, depois que as conexões deixam de ser simétricas. Em outras palavras, não se pode utilizar  $\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} = T_{\mu\nu}^m$  para obter as equações de Friedmann, onde o til representa a presença da torção.

Não obstante, as próprias equações de Einstein-Cartan, podem ser derivadas se a equação de Euler-Lagrange for tomada com relação aos termos da torção. Deste modo se simplifica demasiadamente a obtenção de todas as equações necessárias para a análise cosmológica do modelo em questão, especialmente quando a torção se faz presente.

Segue neste apêndice duas pequenas seções. Na primeira é apresentado o por quê não se utiliza  $\tilde{G}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^m$  para obter as equações de Friedmann. Enquanto isso na segunda se exemplifica a técnica utilizada no decorrer do trabalho para se obter as equações de Friedmann e Einstein-Cartan via equações de Euler-Lagrange.

## G.1 Equações de Einstein com Torção

De acordo com a seção (2.9) a equação de Einstein é fruto da extremização da ação de Einstein-Hilbert, dada, de maneira simplificada, por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (585)$$

Seguindo a sequência de dedução utilizada na seção (2.9), ao se extremizar a ação (585), três termos devem ser levados em conta, já que  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . Isto é,

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \quad (586)$$

Como também visto, o segundo termo do lado direito de (586) é obtido via apêndice (D) enquanto que o primeiro já está “pronto” para ser agrupado com termos variados em função da métrica,  $\delta g_{\mu\nu}$ . Deste modo, o termo remanescente é o foco desta análise. Verifica-se, no apêndice (E), toda uma estrutura para demonstrar que este fator não interfere na equação de Einstein final, tendo em vista que esse termo é nulo na integral da ação.

Nesta seção se argumenta, por meio de passagens do apêndice (E), que este termo não mais pode ser considerado nulo, devido a presença da torção. Para verificar isto, primeiramente se observa a equação (576). A ideia principal, e o motivo de se poder anular este termo é a possibilidade de se escrever essa variação de  $R_{\mu\nu}$  como derivadas covariantes. O modo de se fazer isto neste trabalho é encontrar os termos de derivadas covariantes correspondentes aos dois primeiros termos de derivadas simples de (576).

Tendo essas derivadas sido encontradas, basta substituí-las em (576). O cenário que se vê no apêndice (E) é que todos os termos do tipo  $\Gamma\delta\Gamma$  se anulam por conta da simetria dos índices inferiores das conexões afim. Esta é a diferença fundamental que se deve considerar aqui. A presença da torção faz com que esses termos não mais se anulem, já que com a torção as conexões deixam de ser simétricas. Com isso não se pode escrever o termo  $\delta R_{\mu\nu}$  puramente por termos do tipo derivadas covariantes.

Observa-se a seguir a estrutura de  $\delta R_{\mu\nu}$  quando os termos de torção são considerados. Para isto, substitui-se as equações (577) e (578), com termos de torção incluídos, em (576). Desta substituição se obtém que:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{R}_{\mu\nu} = & \nabla_\nu\delta\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda - \nabla_\lambda\delta\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + (K^\eta{}_{\nu\mu} - K^\eta{}_{\mu\nu})\delta\Gamma_{\lambda\nu}^\lambda + (K^\eta{}_{\nu\lambda} - K^\eta{}_{\lambda\nu})\delta\Gamma_{\mu\eta}^\lambda + \\ & + \Gamma_{\nu\mu}^\eta(\delta K^\lambda{}_{\eta\lambda} - \delta K^\lambda{}_{\lambda\eta}) + K^\eta{}_{\nu\mu}\delta K^\lambda{}_{\eta\lambda} - K^\eta{}_{\mu\nu}\delta K^\lambda{}_{\lambda\eta} + (K^\eta{}_{\nu\lambda} - K^\eta{}_{\lambda\nu})\delta K^\lambda{}_{\mu\eta}, \end{aligned} \quad (587)$$

onde assim como de praxe, o símbolo til representa a presença de torção. Como se pode observar, ao comparar (588) com a variação de  $R_{\mu\nu}$  dada pela equação (579), constata-se que a presença da torção traz uma grande alteração da estrutura geral da variação. Nota-se que, quando o termo de contorção é nulo, ambas as equações são iguais.

Ao inserir esta variação de volta na variação da ação de Einstein-Hilbert se observa que termos extras surgem, uma vez que não se pode reescrever o termo analisado em forma

de derivada total, que é nulo sob a integração. Os termos dependentes da variação da conexão,  $\delta\Gamma$ , dão origem a termos novos na própria equação de Einstein, já que os mesmos dependem da métrica, cuja variação é posta em evidência como visto em (50), com o termo  $\delta g^{\mu\nu}$ . Conclui-se, portanto, que os termos extras oriundos de  $(K^\eta{}_{\nu\mu} - K^\eta{}_{\mu\nu})\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\nu}$  e  $(K^\eta{}_{\nu\lambda} - K^\eta{}_{\lambda\nu})\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\eta}$  são os responsáveis por não se poder utilizar a equação  $\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} = T_{\mu\nu}^m$ , quando há a presença de torção no problema estudado.

Por outro lado os termos que independem da métrica, dados pelas variações dos termos de contorção ( $\delta K$ ), também devem ser nulos independentemente do resto dos termos. Isto é necessário para fazer a variação da ação de Einstein-Hilbert nula. Exigindo que os termos restantes, ligados a  $\delta K$ , sejam nulos dá origem as equações de Einstein-Cartan, definidas em (BOEHMER, 2007a; BOEHMER; BURNETT, 2008; FABBRI; VIGNOLO, 2012; FABBRI; VIGNOLO, 2014; CHANG; BOUHMADI-LÓPEZ; CHEN, 2015).

Por meio de algumas manipulações, reorganiza-se tais termos de modo a obter

$$S^{ij}{}_k + \delta_k^i S^j{}_l{}^l - \delta_k^j S^i{}_l{}^l = \frac{\tau^{ij}{}_k}{\kappa^2}, \quad (588)$$

onde  $S^{ij}{}_k$  é a torção, que se correlaciona com a contorção por meio da equação (28). A contorção, por sua vez, liga-se à conexão afim por meio de (29). Já o parâmetro  $\tau$  é inserido à mão e é dado por

$$\tau_k{}^{ji} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{mat}}{\partial K_{ij}{}^k}, \quad (589)$$

que tecnicamente é o correspondente de torção que está para a equação de Einstein-Cartan, assim como o tensor energia momento está para a equação de Einstein. Em (589) o termo  $\tilde{\mathcal{L}}_{mat}$  descreve naturalmente a parcela da densidade Lagrangeana de matéria.

## G.2 Equações de Euler-Lagrange: $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta N(t)}$ , $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta a(t)}$ , $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi(t)}$ , $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta h(t)}$ e $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta f(t)}$

Decorre da teoria de Euler-Lagrange a obtenção de equações movimento associadas aos campos. O processo é semelhante ao visto no formalismo Lagrangeano, onde as outrora variáveis e suas correspondentes variações com relação ao parâmetro geral (exemplo:  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  e  $t$ , respectivamente), são substituídas pelos campos e suas derivadas. Observa-se a seguir uma estrutura geral das equações de Euler-Lagrange. Segue a ação geral

$$S_{EL} = \int dt d^3x \mathcal{L}(t, \phi(t), \dot{\phi}(t), \ddot{\phi}(t) \dots), \quad (590)$$

onde  $\mathcal{L}$  é a densidade Lagrangeana, integrada em  $d^3x$  de modo a se obter a Lagrangeana do sistema. Logo, a integração desta Lagrangeana resulta na ação do sistema. As variáveis deste sistema são correspondentes a variação, com relação ao parâmetro  $t$ , do campo  $\phi(t)$ . Isto é, as variáveis são “ $\phi(t), \dot{\phi}(t), \ddot{\phi}(t) \dots$ ”. Pelo princípio de mínima ação se obtém a seguinte estrutura

$$\delta S_{EL} = \int dt d^3x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(t)} \delta\phi(t) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(t)} \delta\dot{\phi}(t) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ddot{\phi}(t)} \delta\ddot{\phi}(t) + \dots \right] = 0, \quad (591)$$

onde as variáveis das quais  $\mathcal{L}$  depende são omitidas por questão de praticidade. Para se obter a expressão que faz  $\delta S_{EL} = 0$  é necessário, por meio de derivadas totais, “transferir” as derivadas de “ $\delta\dot{\phi}(t), \delta\ddot{\phi}(t) \dots$ ” para as derivadas parciais que as acompanham, isto é

$$\int dt d^3x \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t)} \delta\phi(t) \right] = 0, \quad (592)$$

donde conclui-se que

$$\int dt d^3x \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t)} \right) \delta\phi(t) = - \int dt d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t)} \delta\dot{\phi}(t). \quad (593)$$

Efetuando esta lógica para os demais termos e depois os substituindo de volta em (591) resulta que

$$\begin{aligned} \delta S_{EL} = \int dt d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(t)} \delta\phi(t) + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t)} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{\phi}(t)} \right) + \dots \right) \delta\phi(t) \right] = 0, \end{aligned} \quad (594)$$

que possui o termo  $\delta\phi(t)$  mantido em evidência para todos as derivadas com exceção do termo  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t$ . Independentemente deste termo, a maneira de anular a expressão (594) passa obrigatoriamente por zerar os termo entre parênteses que multiplicam a variação do campo  $\delta\phi(t)$ . Logo,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(t)} \delta\phi(t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t)} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{\phi}(t)} \right) + \dots = 0, \quad (595)$$

que é a conhecida equação de Euler-Lagrange.

Dada esta pequena e sucinta revisão se pode então aplicar esta teoria no problema corrente. A densidade Lagrangeana da cosmologia estudada depende de vários fatores de distintas origens. Isto é, o fator de escala  $a(t)$ , a função lapso  $N(t)$ , o campo associado ao ELKO  $\phi(t)$ , podendo também depender de  $h(t)$  e  $f(t)$  caso haja torção no caso analisado. Tem-se, portanto, uma equação de Euler-Lagrange para cada uma dessas funções. Como verificado em (KOUWN et al., 2013), estas estão associadas a funções já conhecidas de antemão, como as equações de Friedmann, equação de continuidade e as equações de Einstein-Cartan.

Exemplifica-se este sistema por meio da densidade Lagrangeana  $\mathcal{L}(N(t), a(t), \dot{a}(t), \phi(t), \dot{\phi}(t), h(t), f(t))$ , dada pela equação (336). Nota-se que a dependência desta vai até a primeira ordem em derivadas para o fator de escala e o campo ELKO, i.e.  $\dot{a}(t)$  e  $\dot{\phi}(t)$ , enquanto que todos os outros termos aparecem em ordem zero, i.e.  $N(t)$ ,  $h(t)$  e  $f(t)$ .

Antes de se obter as equações correspondentes vale a pena reparar que termos do tipo derivadas totais sempre podem ser somadas à ação (590) de maneira a alterar a densidade Lagrangeana. Entretanto o modo completo das equações de Euler-Lagrange,

descrito por (595), sempre compensam qualquer alteração. Termos como o escalar de curvatura da métrica FLRW sempre aparecem com uma derivada de segunda ordem no fator de escala, dado por  $\ddot{a}(t)$ . Todavia se opta em escrever a densidade Lagrangeana (336) em função apenas de  $\dot{a}(t)$ , assim como (KOUWN et al., 2013) e a literatura em geral. Em outras palavras, a primeira razão do lado direito de (64) é suprimido ao se somar a derivada total  $-6 \int dt d^3x \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}(t)a(t)^2}{N(t)} \right)$  à ação (336).