



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Dinâmica e Bifurcações de Campos Vetoriais Polinomiais em \mathbb{R}^3 com um Cilindro Invariante

Naiara Aparecida dos Santos Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Setembro de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Dinâmica e Bifurcações de Campos Vetoriais Polinomiais em \mathbb{R}^3 com um Cilindro Invariante

Naiara Aparecida dos Santos Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Setembro de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

S581d Silva, Naiara Aparecida dos Santos.
Dinâmica e bifurcações de campos vetoriais polinomiais em R^3 com um cilindro invariante / Naiara Aparecida dos Santos Silva. - Presidente Prudente : [s.n.], 2016
79 f. : il.

Orientador: Marcelo Messias
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Superfície algébrica invariante. 2. Cilindro invariante. 3. Bifurcação de Hopf e ciclo limite. I. Messias, Marcelo. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: DINÂMICA E BIFURCAÇÕES DE CAMPOS VETORIAIS
POLINOMIAIS EM R^3 COM UM CILINDRO INVARIANTE

AUTORA: NAIARA APARECIDA DOS SANTOS SILVA

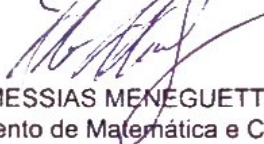
ORIENTADOR: MARCELO MESSIAS

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em MATEMÁTICA
APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:



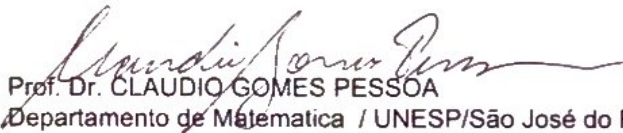
Prof. Dr. MARCELO MESSIAS

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Prof. Dr. CLAUDIO GOMES PESSOA

Departamento de Matemática / UNESP/São José do Rio Preto

Presidente Prudente, 16 de setembro de 2016

Aos meus pais, Dilsa e Aparecido, e meu irmão, Fabiano, dedico.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo.

Agradeço também a minha família, meus pais Dilsa e Aparecido e ao meu irmão Fabiano pelo incentivo e compreensão, que me permitiram chegar até aqui.

Agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para que eu pudesse progredir como pessoa e como acadêmica, seja compartilhando seus conhecimentos ou o riso.

Ao professor Marcelo Messias pela paciência e por todos os ensinamentos.

Por fim, aos funcionários da Seção de Pós-Graduação e Escritório de Pesquisa. E ainda, em especial agradeço a Vera, secretária da Direção, por sempre me atender com tanto carinho e o empenho em reservar um horário na apertada agenda do orientador.

Agradeço à FAPESP, processo nº 2014/14096-2, pelo auxílio financeiro.

“A parte mais difícil do final é o recomeço”.

Linkin Park

Resumo

Neste trabalho fazemos o estudo de uma classe de sistemas diferenciais polinomiais quadráticos definidos em \mathbb{R}^3 que possui um cilindro como superfície algébrica invariante. Mais especificamente, fizemos o estudo da estabilidade e das bifurcações locais dos pontos singulares, utilizando para isto a estrutura do espaço de fase, ou seja, a restrição geométrica dada pela existência do cilindro invariante. Provamos que ocorre uma bifurcação de Hopf sobre o cilindro, que leva a criação de um ciclo limite estável, para determinados valores dos parâmetros. Mostramos também a existência de órbitas homoclínicas, heteroclínicas e centros, contidos nestes cilindros. O estudo apresentado visa contribuir para o entendimento do complicado comportamento dinâmico dos sistemas diferenciais (ou campos vetoriais) polinomiais definidos em \mathbb{R}^3 .

Palavras-Chave: *Superfície Algébrica Invariante, Cilindro Invariante, Estabilidade, Bifurcação de Hopf, Ciclo Limite.*

Abstract

In this work we study a class of quadratic polynomial differential systems defined in \mathbb{R}^3 which has a cylinder as invariant algebraic surface. More specifically, we study the stability and local bifurcations of singular points, using for this the structure of the phase space, that is, the geometric constraint provided by the existence of the invariant cylinder. We prove that there is a Hopf bifurcation on the cylinder, which leads to the creation of a stable limit cycle, for certain parameter values. We also show the existence of homoclinic orbits, heteroclinic orbits and centers, contained in these cylinders. These elements are key ingredients to understand the complicated dynamic behavior of small perturbations of these differential systems in \mathbb{R}^3 .

Keywords: *Invariant Algebraic Surface, Invariant Cylinder, Stability, Hopf Bifurcation, Limit cycle.*

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 3.1 | Centro para $a = 0, c = 0, bd = -1$ | 27 |
| 3.2 | Sela para $a = 0, c = 0, bd = 1$ | 27 |
| 3.3 | Nó atrator para $a = -0.3, c = -3$ | 27 |
| 3.4 | Nó repulsor para $a = 0.3, c = 3$ | 27 |
| 3.5 | Espiral atratora para $a = -0.5, c = -0.5$ | 27 |
| 3.6 | Espiral repulsora para $a = 0.5, c = 0.5$ | 27 |
| 3.7 | Nó impróprio atrator para $a = -2, c = -2$ | 28 |
| 3.8 | Nó impróprio repulsor para $a = 0.5, c = 2$ | 28 |
| 3.9 | $a = 0, c=0$ | 29 |
| 3.10 | $a = 0, c>0$ | 29 |
| 3.11 | $a = 0, c<0$ | 29 |
| 3.12 | Retrato de fase do sistema (7) mostrando dois focos instáveis com $a = 0, bd > \frac{-c^2z}{2}$ e $z > 0$ | 29 |
| 3.13 | Centro no campo restrito para a carta positiva | 30 |
| 3.14 | Sela no campo restrito para a carta positiva | 30 |
| 3.15 | Nó atrator no campo restrito para a carta positiva. | 30 |
| 3.16 | Nó repulsor no campo restrito para a carta positiva. | 31 |
| 3.17 | Espiral atratora no campo restrito para a carta positiva. | 31 |
| 3.18 | Espiral repulsora no campo restrito para a carta positiva. | 31 |
| 3.19 | Retrato de fase do sistema (10) $tr(A) = 0, det(A) = -2bd < 0$ | 32 |
| 3.20 | Retrato de fase do sistema (10) $tr(A) = 0, det(A) = -2bd > 0$ | 32 |
| 3.21 | Retrato de fase do sistema (14) para os casos <i>i</i>) $\nu_1 \leq -2\sqrt{2rh + r^2}$, <i>ii</i>) $-2\sqrt{2rh + r^2} < \nu_1 < 0$ e <i>iii</i>) $0 < \nu_1 < 2\sqrt{2rh + r^2}$ | 34 |
| 3.22 | Retrato de fase do sistema (14) para os casos <i>iv</i>) $\nu_1 = 0$, <i>v</i>) $\nu_1 > 2\sqrt{2rh + r^2}$ | 35 |
| 4.1 | Bifurcação de Hopf Supercrítica | 38 |
| 4.2 | Bifurcação de Hopf Supercrítica no espaço (x_1, x_2, α) | 39 |
| 4.3 | Retrato de fase do sistema (6): a) Espiral estável para o valor de parâmetro $c = -0.5$; b) Espiral fracamente estável para o valor de parâmetro $c = -0.01$ | 59 |
| 4.4 | Retrato de fase do sistema (6): a) Ciclo limite criado com a bifurcação de Hopf que ocorre quando c passa pelo valor crítico $c = 0$; b) Espiral instável para o valor $c = 0.05$ | 59 |
| 5.1 | Orientação das cartas locais $U_i, i = 1, 2, 3$ nos pontos infinitos na direção positiva dos eixos coordenados x, y e z , usados para desenhar o retrato de fase do sistema (2) na esfera de Poincaré no infinito. | 64 |
| 5.2 | Carta U_1 | 65 |
| 5.3 | Carta U_2 | 65 |
| 5.4 | Carta U_3 | 65 |
| 5.5 | Esfera de Poincaré | 65 |

| | | |
|------|---|----|
| 5.6 | Retrato de fase do sistema (7) no infinito para valores de parâmetro $a > 0, c > 0$. | 65 |
| 5.7 | Carta U_1 | 66 |
| 5.8 | Carta U_2 | 66 |
| 5.9 | Carta U_3 | 66 |
| 5.10 | Esfera de Poincaré | 66 |
| 5.11 | Retrato de fase do sistema (7) no infinito para valores de parâmetro $a > 0, c = 0$. | 66 |
| 5.12 | Carta U_1 | 67 |
| 5.13 | Carta U_2 | 67 |
| 5.14 | Carta U_3 | 68 |
| 5.15 | Esfera de Poincaré | 68 |
| 5.16 | Retrato de fase do sistema (7) no infinito para valores de parâmetro $a > 0, c < 0$. | 68 |
| 5.17 | órbita homoclínica estável | 68 |
| 5.18 | órbita homoclínica | 68 |
| 5.19 | órbita homoclínica instável | 68 |

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Resumo | 5 |
| Abstract | 7 |
| Lista de Figuras | 8 |
| Capítulos | |
| 1 Introdução | 13 |
| 2 Preliminares | 15 |
| 2.1 Campos vetoriais | 15 |
| 2.2 Conjuntos invariantes | 16 |
| 2.3 Superfícies Algébricas Invariantes e Integrais primeiras | 18 |
| 2.4 Formas Normais de campos vetoriais polinomiais de grau m com uma quádrlica invariante | 20 |
| 3 Campos vetoriais quadráticos com um cilindro invariante | 23 |
| 3.1 Dinâmica e bifurcações de uma subclasse do sistema (1) | 25 |
| 3.2 Dinâmica do sistema restrito ao cilindro invariante | 29 |
| 3.3 Exemplo: Estudo do Sistema de Rabinovich com um Cilindro Invariante | 33 |
| 4 Bifurcação de Hopf | 37 |
| 4.1 Caso Bidimensional | 37 |
| 4.1.1 Teorema da Bifurcação de Hopf | 39 |
| 4.2 Método da Projeção | 48 |
| 4.3 Condição de Transversalidade | 53 |
| 4.4 Bifurcação de Hopf em Uma Classe de Sistemas Quadráticos com um Cilindro Invariante | 54 |
| 5 Análise no Infinito | 61 |
| 5.1 Técnica de Compactificação de Poincaré | 62 |
| 5.2 Cartas Locais | 62 |
| 5.3 Análise do Sistema Compactificado | 64 |
| 5.4 Órbitas e Bifurcação Homoclínica | 67 |
| 6 Conclusão | 69 |
| Referências | 69 |

Apêndices

| | | |
|----------|---|-----------|
| A | Cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov | 71 |
| A.1 | Cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov para valores de parâmetro $bd < 0$ para o valor de bifurcação $c = 0$ | 71 |
| A.2 | Cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov para valores $bd < 0$ para o valor de bifurcação $c = 0$ | 74 |

Introdução

A análise matemática dos fenômenos naturais envolvendo variações de grandezas físicas com o tempo leva ao estudo da derivada como taxa de variação e, conseqüentemente, ao estudo das equações diferenciais, que são comumente utilizadas na modelagem matemática de fenômenos naturais relacionados a diversas áreas do conhecimento. Neste contexto, o estudo de sistemas tridimensionais de equações diferenciais ordinárias, da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y, z) \\ \dot{y} &= Q(x, y, z) \\ \dot{z} &= R(x, y, z)\end{aligned}\tag{1}$$

onde P , Q e R são funções de classe C^k , $k \geq 1$, definidas em um aberto U do \mathbb{R}^3 , nas variáveis x , y , e z é de extrema relevância, tanto do ponto de vista teórico quanto das aplicações de métodos matemáticos na modelagem e análise dos fenômenos naturais das ciências em geral. Note que, ao sistema diferencial (1) está naturalmente associado o campo vetorial

$$X(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),\tag{2}$$

ou simplesmente $X = (P, Q, R)$. No caso em que as funções P , Q e R são polinômios nas variáveis x , y e z o sistema (1) está definido para todo (x, y, z) em \mathbb{R}^3 e é chamado de *sistema diferencial polinomial de grau d* , onde $d = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q), \text{grau}(R)\}$.

Sistemas do tipo (1) aparecem frequentemente na literatura devido a sua importância teórica, bem como as suas aplicações matemáticas, uma vez que sistemas polinomiais são muito usados na modelagem de problemas naturais, aparecendo em Física, Química, Biologia e demais ciências, conforme pode ser visto em [10] e referências ali contidas.

Com isso, muitos pesquisadores têm estudado esse tipo de sistema, buscando descrever a dinâmica das soluções, que está longe de ser completamente entendida, mesmo no caso quadrático, ou seja, no caso $d = 2$. Isso ocorre pois a dinâmica gerada pelo fluxo do sistema (1) com grau $d \geq 2$ é, em geral, muito complexa e difícil de ser estudada. Além de pontos singulares, órbitas periódicas, órbitas homoclínicas e heteroclínicas que são geralmente encontrados no plano de fase de sistemas diferenciais (ou campos vetoriais) polinomiais no plano, sistemas tridimensionais do tipo (1) podem apresentar um comportamento dinâmico bem mais complexo, com a ocorrência de toros invariantes, órbitas quase periódicas, atratores estranhos ou caóticos, além de outros fenômenos dinâmicos.

Uma das ferramentas usadas para o estudo da dinâmica de sistemas diferenciais polinomiais é a determinação de superfícies algébricas de dimensão dois em \mathbb{R}^3 , que são

invariantes pelo fluxo desses sistemas. Quando o sistema (1) apresenta uma superfície algébrica invariante, esse fato auxilia muito no estudo da dinâmica do sistema, conforme mostra os resultados apresentados em [7, 8].

Em [1], os autores fornecem as formas normais dos campos vetoriais ou sistemas diferenciais polinomiais (1) ou, equivalentemente dos campos vetoriais (2), que apresentam uma quádrlica como superfície algébrica invariante. As quádrlicas ali consideradas são: cone, cilindro elíptico, cilindro parabólico, cilindro hiperbólico, parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas e esfera (ou elipsoide). O artigo (1) traz um estudo puramente algébrico, apresentando todas as formas normais dos sistemas diferenciais que tem estas quádrlicas invariantes, porém não apresenta nenhum estudo sobre a dinâmica de tais sistemas. Neste contexto, em [2], os autores fazem um estudo da dinâmica e integrabilidade dos campos vetoriais quadráticos definidos em \mathbb{R}^3 que apresentam um parabolóide invariante, utilizando a existência de tal superfície para mostrar a existência de ciclos limites, centros, órbitas homoclínicas e heteroclínicas, além de vários outros resultados sobre a dinâmica e integrabilidade dos sistemas considerados.

Neste trabalho, na linha do que foi feito em [2], consideramos sistemas diferenciais (ou campos vetoriais) quadráticos definidos em \mathbb{R}^3 que apresentam um cilindro como superfície algébrica invariante. Como esperado, a existência de tal superfície apresenta implicações interessantes no comportamento dinâmico global das soluções do sistema e, em particular, na existência de ciclos limites, órbitas homoclínicas e centros. Mais especificamente, para uma subclasse de tais sistemas, fizemos o estudo da estabilidade e das bifurcações locais dos pontos singulares, utilizando para isto a estrutura do espaço de fase, ou seja, a restrição geométrica dada pela existência do cilindro invariante. Provamos que ocorre uma bifurcação de Hopf sobre o cilindro, que leva a criação de um ciclo limite estável, para determinados valores dos parâmetros. Mostramos também a existência de órbitas homoclínicas, heteroclínicas e centros, contidos nestes cilindros. A constatação da existência desses tipos de elementos dinâmicos é importante e ajuda muito na compreensão do complicado comportamento dinâmico da classe de sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 aqui considerada.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos básicos da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. No Capítulo 3 apresentamos a análise da dinâmica de uma classe de sistemas diferenciais polinomiais quadráticos em \mathbb{R}^3 que apresenta um cilindro como superfície algébrica invariante. No Capítulo 4, apresentamos a teoria de Bifurcação de Hopf, utilizando-a para mostrar a ocorrência de tal tipo de bifurcação nos sistemas diferenciais com cilindro invariante, que leva a criação de um ciclo limite. No Capítulo 4 é apresentado a teoria da Compactificação de Poincaré, usada para estudar o comportamento global das soluções ilimitadas de campos vetoriais polinomiais, que não poderiam ser estudadas em regiões compactas do espaço de fase. Utilizamos tal teoria para fazer uma análise no infinito de uma classe de sistemas diferenciais quadráticos com um cilindro invariante. No capítulo 5 apresentamos algumas conclusões e comentários sobre o estudo desenvolvido e, por fim, no Apêndice A, são apresentados os cálculos relativos a bifurcação de Hopf no sistema estudado, elaborados com o software MAPLE.

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns dos principais resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias que são usados no estudo de sistemas diferenciais, dentre os quais se incluem os sistemas diferenciais polinomiais como (1). Os resultados aqui apresentados referem-se ao estudo da estabilidade dos pontos singulares desses sistemas, obtidos quando resolvemos a equação $\dot{x} = f(x) = 0$, e também ao estudo de bifurcações das soluções, e podem ser encontrados em [6, 9], inclusive com as provas dos teoremas.

2.1 Campos vetoriais

Seja Δ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ em Δ é uma aplicação $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$. Associamos ao campo vetorial f de classe C^k a equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

onde o ponto denota a derivada com relação à variável t .

As soluções da equação (1) são dadas por funções $\phi : I \rightarrow \Delta$ que satisfazem

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(\phi(t)),$$

para todo $t \in I$, sendo I é um intervalo da reta, onde representamos por $\phi(t, y) = \phi_t(y)$ a solução de f por y , ou seja, $\phi(0, y) = y$. Dizemos ainda que o conjunto $\gamma_y = \{\phi(t, y) : t \in I\} \subseteq \Delta$, ou seja, a imagem da solução de (1) por y , é a *órbita* de f por y . A decomposição de Δ em órbitas de f é denominada retrato de fase de (1).

Um ponto $x_0 \in \Delta$ é denominado ponto singular de f se $f(x_0) = 0$ e, caso contrário, ou seja, se $f(x_0) \neq 0$ o ponto x_0 é chamado ponto regular.

Definição 1 A aplicação $\phi : I \times \Delta \rightarrow \Delta$ tal que $\phi(t, x)$ é a solução de (1) com $\phi(0, x) = x \in U$, é chamada *fluxo gerado por f* .

Definição 2 O ponto x_0 é dito ser ponto de equilíbrio estável para f se, para qualquer vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que $W \subseteq \Delta \cap U$ e $\phi(t, x) \in U$, para quaisquer $x \in W$ e $t > 0$.

Definição 3 Dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para f se, além de ser estável, satisfaz a condição $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_0$, para qualquer $x \in W$.

Caso x_0 não seja ponto de equilíbrio estável, dizemos que ele é instável.

A definição seguinte nos diz que dados dois campos vetoriais f_1 e f_2 definidos nos abertos Δ_1 e Δ_2 de \mathbb{R}^n eles serão equivalentes quando existir uma transformação contínua tal que o retrato de fase de um seja obtido do retrato de fase do outro por meio desta transformação.

Definição 4 Sejam f_1 e f_2 campos vetoriais definidos em Δ_1 e Δ_2 , conjuntos abertos de \mathbb{R}^n , respectivamente. O campo f_1 é topologicamente equivalente (C^r - equivalente) a f_2 quando existe um homeomorfismo (difeomorfismo de classe C^r) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ que leva órbitas de f_1 em órbitas de f_2 preservando a orientação. Mais precisamente, seja $y \in \Delta_1$ e $\gamma^1(y)$ a órbita orientada de f_1 passando por y ; então $h(\gamma^1(y))$ é a órbita orientada $\gamma^2(h(y))$ de f_2 passando por $h(y)$.

Definição 5 Sejam $\phi_1 : I_1 \times \Delta_1 \rightarrow \Delta_1$ e $\phi_2 : I_2 \times \Delta_2 \rightarrow \Delta_2$ os fluxos gerados pelos campos $f_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. Dizemos que f_1 é topologicamente conjugado (C^r - conjugado) a f_2 quando existe um homeomorfismo (difeomorfismo de classe C^r) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que $h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in I_1 \times \Delta_1$.

Definição 6 Dizemos que um ponto singular x_0 de um campo vetorial $f \in C^k$, $1 \leq k \leq \infty$ é hiperbólico se todos os autovalores da matriz jacobiana $Df(x_0)$ têm parte real diferente de zero.

A seguir apresentamos um dos mais importantes resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais, o Teorema de Hartman-Grobman, que nos dá uma caracterização local dos pontos singulares hiperbólicos, do ponto de vista da conjugação topológica.

Teorema 1 Teorema de Hartman-Grobman Seja $x_0 \in \Delta$ um ponto de equilíbrio do campo de vetores $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definido no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se x_0 é uma singularidade hiperbólica, então f em x_0 é localmente topologicamente conjugado ao campo linear $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ em 0.

2.2 Conjuntos invariantes

A fim de simplificar a notação, consideraremos nesta seção campos vetoriais em \mathbb{R}^m ao invés de \mathbb{R}^n .

Definição 7 Dizemos que um conjunto $C \subseteq \Delta$ é invariante pelo fluxo ϕ do campo f , se $\phi_t(C) \subseteq C$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, dizemos que C é positivamente invariante se $\phi_t(C) \subseteq C$, para todo $t \geq 0$, e negativamente invariante se $\phi_t(C) \subseteq C$, para todo $t \leq 0$.

Dizemos que o conjunto estável de um ponto de equilíbrio x_0 qualquer é o conjunto $W^e(x_0)$ dos pontos cujas trajetórias tendem ao ponto x_0 quando t tende ao infinito, ou seja, y está no conjunto estável de x_0 se, e somente se, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(y) = x_0$. Analogamente, o conjunto instável de um ponto singular x_0 é o conjunto $W^i(x_0)$ dos pontos $y \in \Delta$ tais que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(y) = x_0$. Note, $W^e(x_0)$ é uma superfície de dimensão igual à do espaço vetorial gerado pelos autovetores da matriz jacobiana $Df(x_0)$, que estão associados aos autovalores com parte real negativa. Nesse caso, o conjunto estável é denominado variedade estável.

Observação 1 $S \subseteq \mathbb{R}^m$ é uma superfície imersa de classe C^1 e dimensão k se existe uma aplicação injetora $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que $g(\mathbb{R}^k) = S$ e a aplicação linear $Dg(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ é injetora para cada $x \in \mathbb{R}^k$.

De posse desse resultado, temos

Teorema 2 (Teorema da Variedade Estável) Seja $x_0 \in \Delta$ um ponto de equilíbrio hiperbólico do campo de vetores $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ definido no aberto $\Delta \subseteq \mathbb{R}^m$. A variedade estável $W^e(x_0)$ é uma superfície imersa de classe C^1 e o espaço tangente a $W^e(x_0)$ em x_0 é o subespaço vetorial de \mathbb{R}^m gerado pelos autovetores associados aos autovalores de $Df(x_0)$ com parte real negativa.

Resultado análogo é válido para o conjunto $W^i(x_0)$.

Definição 8 (Conjuntos α e ω limite) Sejam $f : \Delta \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ definido no aberto Δ e $\phi(t) = \phi(t, p)$ a órbita de f passando por p , definida no seu intervalo máximo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_-(p) = -\infty$ e $\omega_+(p) = \infty$, definimos os conjuntos α -limite e ω -limite de p por

$$\begin{aligned}\omega(p) &= \{q \in \Delta : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \phi_{t_n} \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}; \\ \alpha(p) &= \{q \in \Delta : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \phi_{t_n} \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.\end{aligned}$$

O resultado a seguir fornece propriedades básicas acerca dos conjuntos α e ω -limite.

Teorema 3 Seja $f : \Delta \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ definido no aberto Δ , e sejam $\gamma^+(p) = \{\phi(t, p) : t \geq 0\}$ e $\gamma^-(p) = \{\phi(t, p) : t \leq 0\}$ as semi-órbitas positiva e negativa, respectivamente, do campo f pelo ponto p . Se $\gamma^+(p)$ (respectivamente, $\gamma^-(p)$) está contida num subconjunto compacto $K \subset \Delta$, então:

- a) $\omega(p) \neq \emptyset$ (respectivamente, $\alpha(p)$);
- b) $\omega(p)$ é compacto (respectivamente, $\alpha(p)$);
- c) $\omega(p)$ é invariante por f , (respectivamente, $\alpha(p)$), ou seja, se $q \in \omega(p)$, então a órbita de f pelo ponto q está contida em $\omega(p)$;
- d) $\omega(p)$ é conexo (respectivamente, $\alpha(p)$).

A seguir apresentamos o teorema que dá uma caracterização completa dos conjuntos ω -limite de órbitas limitadas de campos vetoriais planares. Este resultado só vale para campos vetoriais definidos em \mathbb{R}^2 , não havendo similar para o caso de campos vetoriais ou sistemas diferenciais em \mathbb{R}^3 . Porém, como vamos trabalhar com superfícies algébricas invariantes, que tem dimensão dois em \mathbb{R}^3 , o resultado passa a ser útil para se estudar os campos restritos à essas superfícies.

Teorema 4 (Teorema de Poincaré-Bendixson) *Seja $\phi(t) = \phi(t, p)$ uma órbita de f , definida para todo $t \geq 0$, tal que $\gamma^+(p)$ esteja contida num conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que o campo f possui um número finito de pontos de equilíbrio em $\omega(p)$. Têm-se as seguintes alternativas:*

- a) *se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*
- b) *se $\omega(p)$ contém pontos regulares e de equilíbrio então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tendendo a um desses pontos de equilíbrio quando $t \rightarrow \pm\infty$.*
- c) *Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto de equilíbrio.*

2.3 Superfícies Algébricas Invariantes e Integrais primeiras

Consideremos o campo vetorial polinomial $X = (P, Q, R)$, associado ao sistema diferencial (1). Dizemos que uma função analítica não-constante $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma integral primeira de X em um subconjunto aberto U de \mathbb{R}^3 se $H(x(t), y(t), z(t)) = c$ em U , ou seja, H é constante ao longo das soluções de X contidas em U . Note que H é uma *integral primeira* de X em U se, e somente se,

$$X(H) = \langle X, \nabla H \rangle = P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} + R \frac{\partial H}{\partial z} \equiv 0$$

em U , onde ∇H é o vetor gradiente de H .

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto. Dizemos que uma função analítica $I(x, y, z, t) : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um invariante do campo vetorial polinomial X em U se $I(x, y, z, t) = c$, com c constante, para todos os valores de t para os quais as soluções $\phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de X estão definidas e contidas em U , ou seja, temos

$$\frac{dI}{dt} = P \frac{\partial I}{\partial x} + Q \frac{\partial I}{\partial y} + R \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial I}{\partial t} \equiv 0.$$

Seja $f \in \mathbb{C}[x, y, z] \setminus \mathbb{R}$. A superfície $f(x, y, z) = 0$ é uma superfície algébrica invariante do campo vetorial (ou sistema diferencial) polinomial (1) se para algum polinômio $K \in \mathbb{C}[x, y, z]$ temos

$$X(f) = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial z} = Kf,$$

onde o polinômio K é chamado o cofator da superfície invariante $f = 0$. Observe que, se m é o grau do campo polinomial, então o grau de K é no máximo $m - 1$. Além disso,

se $K = 0$ temos que f é uma integral primeira para o campo X . Se $f(x, y, z) = 0$ é uma superfície algébrica invariante, então f é também chamado de polinômio de Darboux de X . Segue da equação acima que a superfície $f(x, y, z) = 0$ é invariante pelo fluxo de (1), ou seja, se uma solução possui um ponto nesta superfície, então a órbita inteira permanece contida nela.

Observação 2 *Note que o conceito de invariante é mais fraco do que o de integral primeira, uma vez que a integral primeira fornece informação global a respeito do comportamento do campo X enquanto o invariante, em geral, fornece informações apenas sobre o conjunto α ou ω -limite do campo.*

Seja $g, h \in \mathbb{C}[x, y, z] \setminus \{0\}$ e assumamos que g e h são relativamente primos no anel $\mathbb{C}[x, y, z]$, ou que $h = 1$. Então, a função $F = \exp(g/h)$ é chamada um fator exponencial do sistema (1) se para algum polinômio $L \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grau no máximo $m - 1$ temos que

$$X(F) = P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} + R \frac{\partial F}{\partial z} = LF.$$

Observe que em algum sentido um invariante I é uma integral primeira do sistema (1) que depende do tempo t . Dizemos que um invariante I de X é do tipo Darboux, ou simplesmente um invariante de Darboux se ele pode ser escrita como

$$I(x, y, z, t) = f_1^{\nu_1} \cdots f_p^{\nu_p} F_1^{\eta_1} \cdots F_q^{\eta_q} e^{st},$$

onde as f_i , $i = 1, \dots, p$ são superfícies algébricas invariantes de X , F_j , $j = 1, \dots, q$ são fatores exponenciais de X , $\nu_i, \eta_j \in \mathbb{C}$ e $s \in \mathbb{R} \setminus 0$. O referido invariante de Darboux fornece informações sobre os conjuntos α e ω -limite das órbitas de (1).

Proposição 1 *Seja $I(x, y, z, t) = f(x, y, z)e^{st}$ um invariante de Darboux do sistema (1). Seja $p \in \mathbb{R}^3$ e $\phi_p(t)$ uma solução de do sistema (1) com intervalo máximo (α_p, ω_p) tal que $\phi_p(0) = p$. As seguintes afirmações ocorrem.*

a) *Se $\omega_p = \infty$, então $\omega(p) \subset \{f(x, y, z) = 0\} \cup \mathbb{S}^2$;*

b) *Se $\alpha_p = -\infty$, então $\alpha(p) \subset \{f(x, y, z) = 0\} \cup \mathbb{S}^2$;*

onde \mathbb{S}^2 é a bola de Poincaré, que desempenha o papel do infinito de \mathbb{R}^3 .

Proposição 2 *Suponhamos que o sistema (1) possui uma superfície algébrica invariante $\mathbb{S} = \{f = 0\}$. Então para toda órbita Y não limitada que tem condição inicial fora de \mathbb{S} , tem-se que, ou $\alpha(Y) \subset \mathbb{S}$ e $\omega(Y) \subset \mathbb{S}_\infty$, ou $\omega(Y) \subset \mathbb{S}$ e $\alpha(Y) \subset \mathbb{S}_\infty$, onde \mathbb{S}_∞ é a esfera de Poincaré no infinito.*

Estes resultados mostram a importância do estudo das superfícies algébricas invariantes. De fato, pode depreender deles que o comportamento assintótico das soluções ocorre sobre tais superfícies, nas partes compactas do espaço de fase.

2.4 Formas Normais de campos vetoriais polinomiais de grau m com uma quádrlica invariante

Nesta seção caracterizamos as formas normais de todos os campos vetoriais ou sistemas diferenciais polinomiais (1), definidos em \mathbb{R}^3 , que possuem uma quádrlica não-degenerada $\mathbb{Q}^2 = \mathcal{G}^{-1}$ como uma superfície algébrica invariante, isto é $X\mathcal{G} = K\mathcal{G}$, onde \mathcal{G} define uma das quádrlicas não-degeneradas, as quais depois de uma mudança de coordenadas afim podem ser escritas da forma:

$$(C) \text{ Cone: } \mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z,$$

$$(EC) \text{ Cilindro elíptico: } \mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1,$$

$$(PC) \text{ Cilindro parabólico: } \mathcal{G}(x, y, z) = z^2 - x,$$

$$(HC) \text{ Cilindro hiperbólico: } \mathcal{G}(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1,$$

$$(EP) \text{ Parabolóide elíptico: } \mathcal{G}(x, y, z) = y^2 - z^2 - x,$$

$$(HP) \text{ Parabolóide hiperbólico: } \mathcal{G}(x, y, z) = y^2 - z^2 - x,$$

$$(HOS) \text{ Hiperboloide de uma folha: } \mathcal{G}(x, y, z) = z^2 - x,$$

$$(HTS) \text{ Hiperboloide de duas folhas : } \mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 1,$$

$$(S) \text{ Esfera ou elipsoide: } \mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

e K é um polinômio de grau no máximo $m - 1$.

Para explicitar tais formas normais, em [1] os autores utilizaram a definição e o teorema dados a seguir.

Definição 9 *Sejam f_1, f_2 e f_3 funções reais definidas num subconjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^3$. A matriz jacobiana das funções f_1, f_2 e f_3 é definida por:*

$$\begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z} \\ f_{3x} & f_{3y} & f_{3z} \end{pmatrix} \quad (2)$$

onde $f_{iv} = \partial f_i / \partial v$, com v percorrendo as variáveis x, y e z com $i = 1, 2, 3$. O jacobiano das funções f_1, f_2 e f_3 é o determinante da matriz J , e aqui será denotado por

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \det(J).$$

Teorema 5 *Seja f_1 um polinômio em $\mathbb{R}[x, y, z]$. Então, qualquer sistema diferencial polinomial em \mathbb{R}^3 tendo $f_1 = 0$ como superfície algébrica invariante é da forma:*

$$\dot{v} = \lambda_1\{v, f_2, f_3\} + \lambda_2\{f_1, v, f_3\} + \lambda_3\{f_1, f_2, v\} \quad (3)$$

onde v percorre as variáveis x, y e z , $\lambda_1 = \phi f_1$, enquanto ϕ, λ_2 e λ_3 são funções racionais e f_2 e f_3 são polinômios arbitrários em $\mathbb{R}[x, y, z]$ que devem ser escolhidos de maneira que o jacobiano $\{f_1, f_2, f_3\} \neq 0$.

O teorema a seguir é o mais importante desta seção, pois dá as formas normais de todos os sistemas diferenciais polinomiais em \mathbb{R}^3 tendo uma das quádricas não-degeneradas apresentadas acima como superfície algébrica invariante. Sua demonstração completa pode ser encontrada em [1].

Teorema 6 *Suponha que uma quádrica não-degenerada $\mathcal{G} = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial polinomial (1). Então após uma mudança de coordenadas afim o sistema (1) e a quádrica $\mathcal{G} = 0$ podem ser escritos em uma das seguintes formas normais, onde A, B, C, D, E, F, G e Q são polinômios arbitrários de $\mathbb{R}[x, y, z]$.*

i) *Se \mathcal{G} é do tipo (S), então o sistema (1) pode ser escrito como*

$$\dot{x} = \mathcal{G}A - 2yD + 2zE, \quad \dot{y} = \mathcal{G}B + 2xD - 2zF, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C - 2xE + 2yF,$$

$$\text{onde } \mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

ii) *Se \mathcal{G} é do tipo (PC), então o sistema (1) pode ser escrito como*

$$\dot{x} = \mathcal{G}A + 2zE, \quad \dot{y} = Q, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C + E,$$

$$\text{onde } \mathcal{G}(x, y, z) = z^2 - x.$$

iii) *Se \mathcal{G} é do tipo (HC), então o sistema (1) pode ser escrito como*

$$\dot{x} = \mathcal{G}A - 2zE, \quad \dot{y} = Q, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C - 2xE,$$

$$\text{onde } \mathcal{G}(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1.$$

iv) *Se \mathcal{G} é do tipo (EC), então o sistema (1) pode ser escrito como*

$$\dot{x} = \mathcal{G}A + 2zE, \quad \dot{y} = Q, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C - 2xE,$$

$$\text{onde } \mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1.$$

v) *Se \mathcal{G} é do tipo (EP), então o sistema (1) pode ser escrito como*

$$\dot{x} = \mathcal{G}A - 2yD + 2zE, \quad \dot{y} = \mathcal{G}B - 2zF - D, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C + E + 2yF,$$

$$\text{onde } \mathcal{G}(x, y, z) = y^2 + z^2 - x.$$

vi) *Se \mathcal{G} é do tipo (HP), então o sistema (1) pode ser escrito como*

$$\dot{x} = \mathcal{G}A - 2yD - 2zE, \quad \dot{y} = \mathcal{G}B - D + 2zF, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C + E + 2yF,$$

$$\text{onde } \mathcal{G}(x, y, z) = y^2 - z^2 - x.$$

vii) *Se \mathcal{G} é do tipo (HOS), então o sistema (1) pode ser escrito como*

$$\dot{x} = \mathcal{G}A - 2yD - 2zE, \quad \dot{y} = \mathcal{G}B + 2xD + 2zF, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C - 2xE + 2yF,$$

onde $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$.

viii) Se \mathcal{G} é do tipo (HTS), então o sistema (1) pode ser escrito com o mesmo sistema da afirmação (HOS), com $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 1$.

ix) Se \mathcal{G} é do tipo (C), então o sistema (1) pode ser escrito como

$$\dot{x} = \mathcal{G}A - 2yD - 2zE + xG, \quad \dot{y} = \mathcal{G}B + 2xD + 2zF + yG, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C - 2xE + 2yF + zG,$$

onde $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Como dito anteriormente, neste trabalho estamos interessados em estudar a dinâmica e bifurcações de subclasses dos sistemas diferenciais polinomiais quadráticos que possuem um cilindro elíptico como superfície algébrica invariante. Do caso (EC) do Teorema 6, segue que a forma normal destes sistemas é dada por

$$\dot{x} = \mathcal{G}A + 2zE, \quad \dot{y} = Q, \quad \dot{z} = \mathcal{G}C - 2xE, \tag{4}$$

onde $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1 = 0$ é a equação normalizada do cilindro considerado, A e C são constantes reais arbitrárias, sendo $E(x, y, z)$ um polinômio de grau menor ou igual a um. Nos próximos capítulos faremos um estudo da dinâmica e de bifurcações que ocorrem em subclasses de sistemas diferenciais polinomiais do tipo (4), obtidas escolhendo-se certos tipos particulares de polinômios Q e E .

Campos vetoriais quadráticos com um cilindro invariante

Neste capítulo, vamos focar no estudo de uma classe de sistemas diferenciais definidos em \mathbb{R}^3 que possui um cilindro como superfície algébrica invariante. Do Teorema 6 enunciado no Capítulo 2, segue que a forma normal destes tipos de sistemas é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathcal{G}A + 2zE(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= \mathcal{G}C - 2xE(x, y, z),\end{aligned}\tag{1}$$

onde $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1 = 0$ é o cilindro elíptico invariante. Como estamos interessados no caso quadrático apenas, então tomamos $A, C \in \mathbb{R}$, $E(x, y, z)$ polinômio arbitrário de grau menor ou igual a um e $Q(x, y, z)$ é um polinômio arbitrário de grau menor ou igual a dois. No que segue, vamos considerar

$$\begin{aligned}E(x, y, z) &= \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z, \\ Q(x, y, z) &= \beta_0 + \beta_1x + \beta_2y + \beta_3z + \beta_4xy + \beta_5xz + \beta_6yz + \beta_7x^2 + \beta_8y^2 + \beta_9z^2,\end{aligned}\tag{2}$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 0 \dots 3, j = 0, \dots, 9$.

É importante considerar o fluxo do sistema (1) restrito ao cilindro $\mathcal{G} = 0$, já que esta superfície é invariante pelo fluxo do sistema. Para tanto, basta tomarmos $z = \pm\sqrt{1 - x^2}$ no sistema (1), donde obtemos que a forma normal deste sistema restrito a superfície invariante $\mathcal{G} = 0$ é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\sqrt{1 - x^2}(\alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3\sqrt{1 - x^2}), \\ \dot{y} &= \beta_0 + \beta_1x + \beta_2y + \beta_3\sqrt{1 - x^2} + \beta_4xy + \beta_5x\sqrt{1 - x^2} \\ &\quad + \beta_6y\sqrt{1 - x^2} + \beta_7x^2 + \beta_8y^2 + \beta_9(1 - x^2),\end{aligned}\tag{3}$$

para a carta positiva dada por $z = \sqrt{1 - x^2}$ e

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2\sqrt{1 - x^2}(\alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3\sqrt{1 - x^2}), \\ \dot{y} &= \beta_0 + \beta_1x + \beta_2y - \beta_3\sqrt{1 - x^2} + \beta_4xy - \beta_5x\sqrt{1 - x^2} \\ &\quad - \beta_6y\sqrt{1 - x^2} + \beta_7x^2 + \beta_8y^2 + \beta_9(1 - x^2),\end{aligned}\tag{4}$$

para a carta negativa $z = -\sqrt{1-x^2}$.

Enquanto existem milhares de trabalhos sobre o estudo da dinâmica de sistemas diferenciais polinomiais planares quadráticos, o mesmo não ocorre com sistemas diferenciais de grau maior ou igual a dois no espaço \mathbb{R}^3 , principalmente no caso mais geral, devido a existência de muitos parâmetros envolvidos que leva a grandes dificuldades em descrever os retratos de fase do mesmo.

Para o caso geral dado pelo sistema (1), usando o cilindro invariante $\mathcal{G} = x^2 + z^2 - 1 = 0$ podemos provar os seguintes teoremas, que fornecem informações importantes sobre a existência de integrais primeiras e invariantes de Darboux.

Teorema 7 *A função $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1$ é uma integral primeira do sistema (1) se, e somente se, $A = C = 0$.*

Demonstração. Note que o cilindro invariante $\mathcal{G} = x^2 + z^2 - 1 = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (1) com cofator $K = 2xA + 2zC$. Logo, $K \equiv 0$ se, e somente se, $A = C = 0$. ■

Teorema 8 *O sistema (1) tem um invariante de Darboux construído unicamente usando o cilindro invariante $\mathcal{G} = 0$ se, e somente se, $A = 0$ e $C \neq 0$. Mais ainda, tal invariante de Darboux é dado por $I(x, y, z, t) = (x^2 + z^2 - 1)e^{-2zCt}$.*

Demonstração. Assuma que o sistema (1) tem um invariante de Darboux $I = I(x, y, z, t)$ construído unicamente usando o cilindro invariante $\mathcal{G} = 0$. Por um resultado da teoria de integrabilidade de Darboux temos que existe $\nu = \nu_1 + i\nu_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^p \nu_i K_i + \sum_{j=1}^q \eta_j L_j = -s. \quad (5)$$

Considere $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, uma vez que se $\nu_2 \neq 0$, então $A = C = 0$ e, pelo Teorema 7, $\mathcal{G} = 0$ é uma integral primeira polinomial do sistema (1). Como o cofator da superfície algébrica invariante $\mathcal{G} = 0$ é $K = 2zC + 2xA$, e pela igualdade (5) acima, obtemos que $A = 0$ e $C = -s/(2z\alpha)$, $z \neq 0$.

Além disso, por esse mesmo resultado, temos $I = \mathcal{G}^\alpha e^{st} = [(x^2 + z^2 - 1)e^{-2zCt}]^\alpha$ é um invariante de Darboux do sistema (1). Podemos considerar $I = (x^2 + z^2 - 1)e^{-2zCt}$. De fato,

$$\frac{dI}{dt} = (2xP + 2zR)e^{-2zCt} - 2zC(x^2 + z^2 - 1)e^{-2zCt} = 0.$$

O que completa a prova. ■

Agora vamos provar que, nas hipóteses do Teorema 8, o sistema (1) não exibe comportamento caótico.

Proposição 3 *Suponha que $A = 0$ e $C \neq 0$ no sistema (1) e existe um número finito de pontos singulares no cilindro invariante $\mathcal{G} = 0$ e no bordo \mathbb{S}^2 da bola de Poincaré (isto é, no infinito). Então, o sistema (1) não exibe comportamento caótico.*

Demonstração. Considere $A = 0$ e $C \neq 0$ no sistema (1). Então, de acordo com o Teorema 8, $I(x, y, z, t) = (x^2 + z^2 - 1)e^{-2zCt}$ é uma invariante de Darboux do sistema (1). Pela Proposição 1 da Seção 2.3, dada uma órbita do sistema (1) seu conjunto ω -limite está contido em $\{\mathcal{G} = 0\} \cup \mathbb{S}^2$, onde $\mathcal{G} = x^2 + z^2 - 1 = 0$ é o cilindro invariante e \mathbb{S}^2 é a

esfera de Poincaré, que corresponde ao infinito do \mathbb{R}^3 . Considerando o cilindro invariante $\mathcal{G} = 0$ e sua extensão à esfera de Poincaré, que se reduz a dois pontos (pontos finais do eixo y), temos que, após a compactificação, $\{\mathcal{G} = 0\} \cup \mathbb{S}^2$ é um conjunto compacto. Como, por hipótese, $\{\mathcal{G} = 0\} \cup \mathbb{S}^2$ tem um número finito de singularidades e como $\mathcal{G} = 0$ e \mathbb{S}^2 são superfícies bidimensionais, aplicando o Teorema de Poincaré-Bendixson, temos que o conjunto ω -limite das órbitas do sistema (1) é ou um ponto singular ou uma órbita periódica ou um gráfico. O mesmo é verdade para o conjunto α -limite. Portanto, o sistema (1) não exibe comportamento caótico. ■

Como dissemos, uma análise da dinâmica e das bifurcações que ocorrem com as soluções do sistema (1) se torna muito complicada, devido ao grande número de parâmetros envolvidos (são 16 parâmetros). Dessa forma, na próxima seção faremos uma análise da dinâmica de uma subclasse desse sistema, como um primeiro passo para o entendimento de seu retrato de fase.

3.1 Dinâmica e bifurcações de uma subclasse do sistema (1)

A fim de simplificar a análise desse sistema, tendo em vista a dificuldade de se fazer uma análise no caso geral, tomaremos $A = C = a$, $Q = bx$ e $E = xc + yd$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Desse modo, consideramos daqui em diante neste capítulo a classe de sistemas diferenciais contidas em (1), dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 + z^2 - 1)a + 2z(xc + yd) \\ \dot{y} &= bx \\ \dot{z} &= (x^2 + z^2 - 1)a - 2x(xc + yd) \end{aligned} \tag{6}$$

que possui duas singularidades, $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Note que o sistema tridimensional (6), para $a = 0$, possui uma integral primeira dada pela função que define o cilindro invariante, ou seja, $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1$.

Linearizando o campo, temos que a matriz Jacobiana de (6) é dada por

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xa + 2zc & 2zd & 2za + 2xc + 2yd \\ b & 0 & 0 \\ 2xa - 4xc - 2yd & -2xd & 2za \end{pmatrix}$$

Utilizemos essa matriz para estudar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio do sistema (6). A matriz jacobiana aplicada no ponto singular $(0, 0, 1)$ tem como autovalores

$$\lambda_1 = c - \sqrt{c^2 + 2bd}, \quad \lambda_2 = c + \sqrt{c^2 + 2bd}, \quad \lambda_3 = 2a.$$

enquanto que os autovalores da matriz jacobiana aplicada em $(0, 0, -1)$ são dados por

$$\lambda_1 = -c - \sqrt{c^2 + 2bd}, \quad \lambda_2 = -c + \sqrt{c^2 + 2bd}, \quad \lambda_3 = -2a.$$

Utilizando o Teorema de Hartman-Grobman, temos, de forma sintética as seguintes possibilidades para a estabilidade local dos pontos singulares, dependendo dos valores dos parâmetros (observe que há uma certa simetria entre os autovalores e, conseqüentemente,

haverá uma complementaridade com relação à estabilidade local dos pontos singulares). Vamos dividir a análise em duas situações: $a \neq 0$ e $a = 0$.

Para $a \neq 0$ temos as seguintes possibilidades para a estabilidade local da singularidade $(0, 0, 1)$.

- a) Para $0 > bd \geq -\frac{c^2}{2}$, $0 > a > \frac{c + \sqrt{c^2 + 2bd}}{2}$ todos os autovalores são negativos e com isso o ponto singular $(0, 0, 1)$ é localmente um atrator;
- b) Para $bd = -\frac{c^2}{2}$, $2a < c < 0$, o ponto singular $(0, 0, 1)$ é localmente um nó atrator impróprio;
- c) Para $0 > bd \geq -\frac{c^2}{2}$, $0 < a < \frac{c + \sqrt{c^2 + 2bd}}{2}$ e $c > 0$, o ponto $(0, 0, 1)$ é localmente um nó repulsor;
- d) Para $bd = -\frac{c^2}{2}$, $0 < 2a < c$ o ponto de equilíbrio é localmente um nó repulsor impróprio;
- e) Para $c > 0$, $bd < -\frac{c^2}{2}$ e $a \in \mathbb{R}$, $(0, 0, 1)$ é localmente uma foco repulsora;
- f) Para $c < 0$, $bd < -\frac{c^2}{2}$ e $a \in \mathbb{R}$, $(0, 0, 1)$ é localmente uma foco atratora.

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito para a análise da estabilidade local da singularidade $(0, 0, 1)$, podemos analisar a estabilidade local da singularidade $(0, 0, -1)$. Temos os seguintes casos a considerar, ainda para $a \neq 0$.

- a) $0 < bd \leq \frac{c^2}{2}$, $0 < a < \frac{c - \sqrt{c^2 - 2bd}}{2}$, $c > 0$ todos os autovalores são negativos e com isso o ponto de equilíbrio é localmente um atrator;
- b) Para os valores de parâmetro $0 < bd \leq \frac{c^2}{2}$, $a < -\frac{c + \sqrt{c^2 - 2bd}}{2} < 0$, $c < 0$, o ponto singular $(0, 0, -1)$ é localmente um nó repulsor ;
- c) Para os valores de parâmetro $bd = \frac{c^2}{2}$, $2a > c > 0$ é localmente um atrator impróprio;
- d) Para os valores de parâmetro $bd = \frac{c^2}{2}$, $0 > 2a > c$ o ponto de equilíbrio é localmente um nó repulsor impróprio.
- e) A singularidade $(0, 0, -1)$ é localmente uma foco repulsora se $c < 0$, $bd > \frac{c^2}{2}$ e $a \in \mathbb{R}$
- f) A singularidade $(0, 0, -1)$ é localmente uma foco atratora se $c > 0$, $bd > \frac{c^2}{2}$ e $a \in \mathbb{R}$.

Apresentamos alguns exemplos dos retratos de fase da análise de (6) feita acima nas figuras 3.1 - 3.8 para diferentes condições iniciais (representadas por cores diferentes).

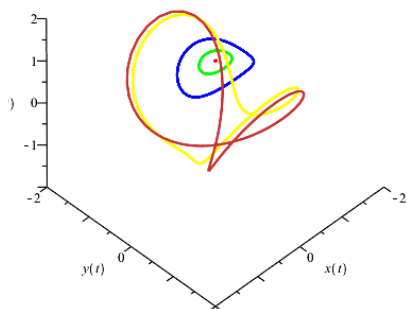


Figura 3.1: Centro para $a = 0$, $c = 0$, $bd = -1$

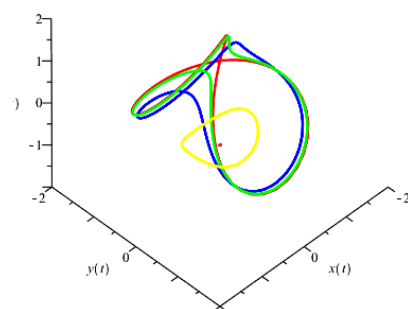


Figura 3.2: Sela para $a = 0$, $c = 0$, $bd = 1$

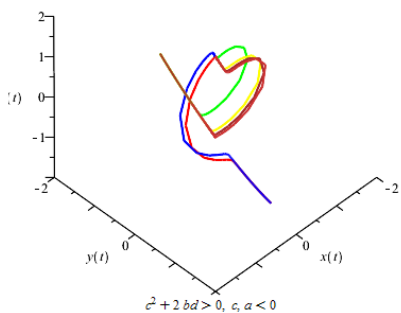


Figura 3.3: Nó atrator para $a = -0.3$, $c = -3$

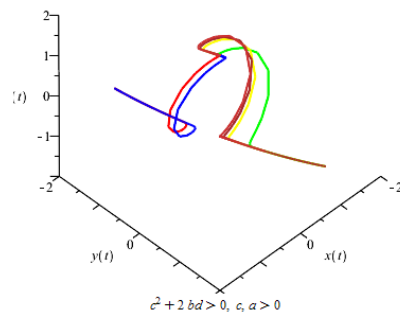


Figura 3.4: Nó repulsor para $a = 0.3$, $c = 3$

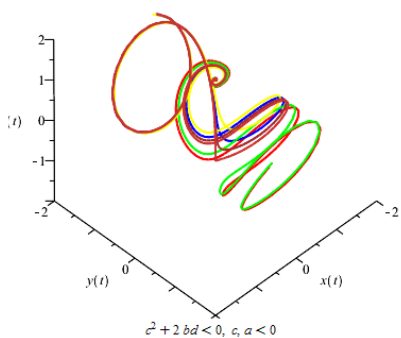


Figura 3.5: Espiral atratora para $a = -0.5$, $c = -0.5$

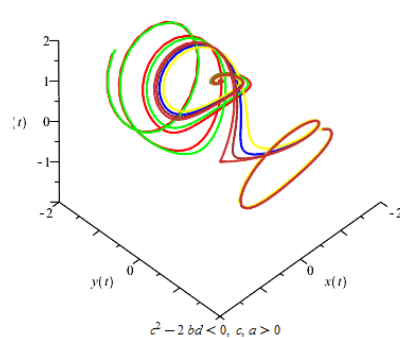


Figura 3.6: Espiral repulsora para $a = 0.5$, $c = 0.5$

Para $a = 0$, o sistema (6) se reduz a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2z(xc + yd) \\ \dot{y} &= bx \\ \dot{z} &= -2x(xc + yd) \end{aligned} \tag{7}$$

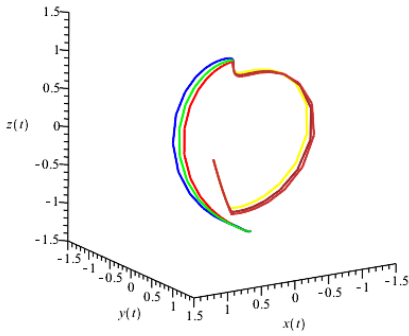


Figura 3.7: Nó impróprio atrator para $a = -2$, $c = -2$

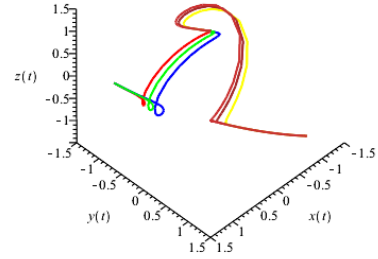


Figura 3.8: Nó impróprio repulsor para $a = 0.5$, $c = 2$

e, como observado anteriormente, o sistema assim obtido apresenta uma integral primeira dada por $\mathcal{G}(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1$. Assim, o espaço de fase é folheado por cilindros invariantes e temos duas retas de singularidades, dadas pelos eixos y e z , ou seja, os pontos da forma $(0, y, 0)$ e $(0, 0, z)$ são singularidades para todo $y, z \in \mathbb{R}$. Os autovalores da matriz jacobiana do sistema calculados nos pontos $(0, y, 0)$ são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2ydi$. Dessa forma, as singularidades sobre o eixo- y , que é envolvido pelos cilindros invariantes, são não-hiperbólicas.

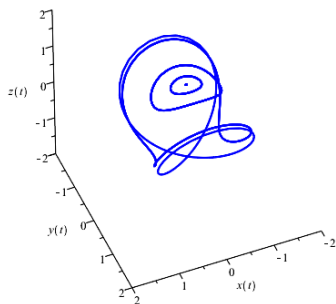
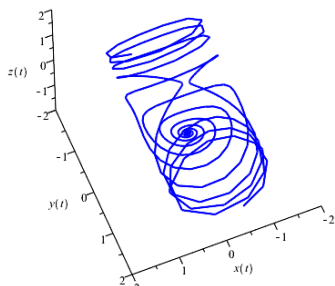
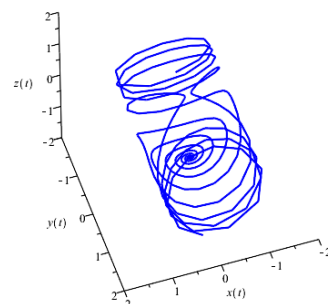
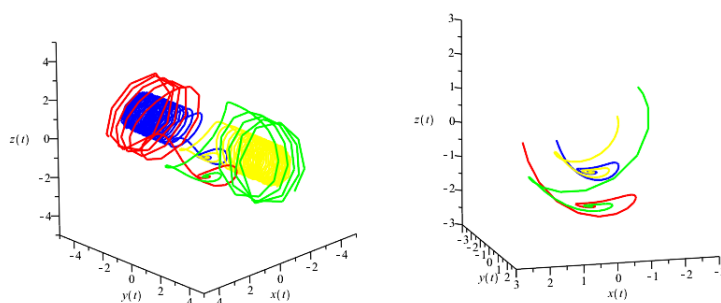
Por outro lado, os autovalores da matriz jacobiana nos pontos singulares $(0, 0, z)$ são dados por:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = zc + \sqrt{(2bd + c^2)z}, \quad \text{e} \quad \lambda_3 = zc - \sqrt{(2bd + c^2)z}.$$

Assim, fazendo a análise dos autovalores obtemos que: Para $z < 0$,

- i) se $bd < \frac{-c^2z}{2}$ os autovalores $\lambda_{2,3} = zc \pm \sqrt{(2bd + c^2)z}$ são reais e de sinais opostos;
- ii) se $bd > \frac{-c^2z}{2}$ os autovalores $\lambda_{2,3} = zc \pm \sqrt{(2bd + c^2)z}$ são complexos conjugados e, para valores $c > 0$ a parte real dos autovalores $\text{Re}(\lambda_{2,3}) < 0$ (respectivamente $\text{Re}(\lambda_{2,3}) > 0$ se $c < 0$).

Para $z > 0$, a análise dos autovalores $\lambda_{2,3}$ é semelhante ao apresentado nos itens acima, salvo que temos, respectivamente autovalores complexos conjugados ($\text{Re}(\lambda_{2,3}) < 0$ se $c < 0$ e $\text{Re}(\lambda_{2,3}) > 0$ se $c > 0$) e autovalores reais para *i)* e *ii)*. Temos ainda, o caso degenerado quando $z = 0$, ou seja, $\lambda_{1,2,3} = 0$. As figuras 3.9-3.13 apresentam alguns dos retratos de fase do sistema (7) nos pontos singulares $(0, 0, z)$. Note que para os valores de parâmetro $a = 0, c = 0, bd > 0$ ($bd < 0$) temos que um dos pontos singulares é sela, enquanto que o outro é um centro (visto que pelo Teorema 7 temos uma integral primeira para $A = 0$), e com isso podemos observar a ocorrência de uma conexão entre uma variedade instável e uma variedade estável da sela, o que caracteriza a existência de uma órbita homoclínica no retrato de fase do sistema (6), sobre os cilindros invariantes. Observe ainda que para o valor do parâmetro $c \neq 0$, temos conexões heteroclínicas das variedades instáveis do ponto de sela com o foco atrator. Como os cilindros invariantes são encaixantes, e folheam o retrato de fase, essas estruturas de órbitas homoclínicas e heteroclínicas se repetem em cada um dos cilindros invariantes. Existe, portanto, um conjunto infinito de tais conexões.

Figura 3.9: $a = 0, c=0$.Figura 3.10: $a = 0, c>0$.Figura 3.11: $a = 0, c<0$.Figura 3.12: Retrato de fase do sistema (7) mostrando dois focos instáveis com $a = 0, bd > -\frac{c^2}{2}$ e $z > 0$.

3.2 Dinâmica do sistema restrito ao cilindro invariante

Nesta seção estudamos a dinâmica do sistema (6), que tem por singularidades os pontos $P_1 = (0, 0, 1)$ e $P_2 = (0, 0, -1)$. Lembrando que $G = x^2 + z^2 - 1$ é a equação do cilindro invariante em sua forma normal, fazemos a restrição do fluxo do campo associado ao sistema (6) a esta superfície a fim de obter a mais importante propriedade dinâmica acerca do espaço de fase do mesmo. Assim, temos que a restrição ao cilindro é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \pm 2\sqrt{1-x^2}(xc + yd) \\ \dot{y} &= bx \end{aligned} \quad (8)$$

cujo ponto singular é $(0, 0)$. Note que o sistema é invariante sob a mudança de variável $(x, y) \rightarrow (-x, y)$, visto que a solução permanece a mesma. Logo, o sistema é simétrico com relação ao eixo y .

Fazendo a linearização do campo restrito a carta positiva, temos que a sua matriz jacobiana é dada por:

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{2(xc+yd)x}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2}c & 2\sqrt{1-x^2}d \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

que aplicada ao ponto singular resulta em

$$D(0,0) = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são dados por

$$\lambda_{1,2} = (c + \sqrt{c^2 + 2bd}, c - \sqrt{c^2 + 2bd}).$$

Com isso, temos que a origem é

1. centro se $c = 0$, $bd < 0$, pois o sistema possui uma integral primeira dada por

$$\frac{\sqrt{-(x-1)(x+1)}y^2}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}b}{d} + k_1 = 0.$$

para $c = 0$

2. sela se $c = 0$, $bd > 0$;
3. nó repulsor se $c > 0$ e $bd > -\frac{c^2}{2}$;
4. nó atrator se $c < 0$ e $bd > -\frac{c^2}{2}$;
5. espiral repulsora $c > 0$, $bd < -\frac{c^2}{2}$ e $a < 0$;
6. espiral atratora se $c < 0$, $bd < -\frac{c^2}{2}$ e $a > 0$.

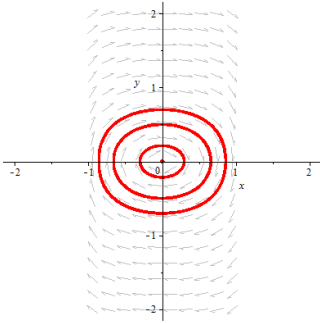


Figura 3.13: Centro no campo restrito para a carta positiva

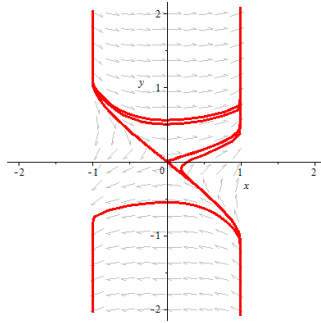


Figura 3.14: Sela no campo restrito para a carta positiva

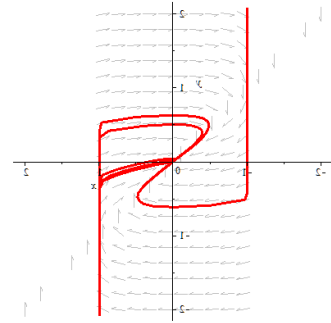


Figura 3.15: Nó atrator no campo restrito para a carta positiva.

Agora, se o traço da matriz Jacobiana do sistema restrito ao campo é não nulo e o seu determinante é nulo, ou seja, $2c \neq 0$ e $-2bd = 0$, respectivamente, o sistema torna-se, supondo $d = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\sqrt{1-x^2}(xc) \\ \dot{y} &= bx. \end{aligned} \tag{9}$$

Daí, temos a matriz Jacobiana

$$D(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{(xc)x}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2}c & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

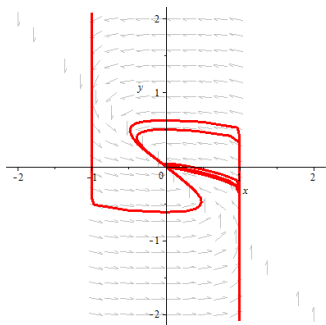


Figura 3.16: Nó repulsor no campo restrito para a carta positiva.

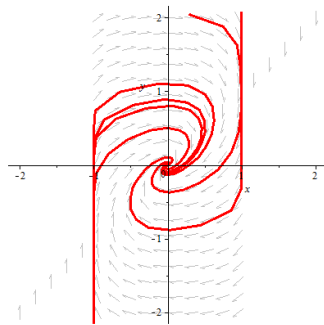


Figura 3.17: Espiral atratora no campo restrito para a carta positiva.

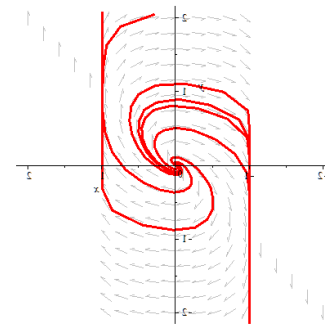


Figura 3.18: Espiral repulsora no campo restrito para a carta positiva.

que aplicada no ponto singular $(0, y)$ resulta em

$$D(0, y) = \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

e os autovalores são

$$\lambda_{1,2} = (0, 2c).$$

Com isso, fazendo a mudança de variável $(x, y) = (-\frac{2cu}{b}, u + v)$ e introduzindo a nova variável independente $dt = (-2c)ds$, o sistema (9) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u - \frac{2cu^3}{b^2} \\ \dot{v} &= \frac{2c^2u^3}{b^2}. \end{aligned}$$

Se $\varphi(u) = \frac{2c^2u^3}{b^2}$ é a solução da equação $u - \frac{2cu^3}{b^2} = 0$, temos que a singularidade $(0, y)$ é um nó estável se $\frac{2c^2}{b^2} > 0$ ou um nó instável se $\frac{2c^2}{b^2} < 0$. Mais ainda se $c = 0$, temos uma linha de singularidade para o sistema (9).

Agora, se o traço da parte linear do sistema restrito é nulo e o determinante é não nulo, temos $c = 0$ e $-2bd \neq 0$ e

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\sqrt{1-x^2}(yd) \\ \dot{y} &= bx. \end{aligned} \tag{10}$$

o retrato de fase é como mostrado nas figuras 2.23 e 2.24. Note que este sistema é invariante sobre a mudança de variável $(x, y) \rightarrow (-x, y)$ e com isso temos que ele é simétrico com relação ao eixo y . Além disso, como o sistema (10) possui uma integral primeira dada por

$$\frac{\sqrt{-(x-1)(x+1)}y^2}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}b}{d} + k_1 = 0,$$

o que permite entender o comportamento qualitativo das soluções do sistema em questão, temos que para os valores de parâmetro $c = 0$ e $bd < 0$, a origem de (10) é um centro.

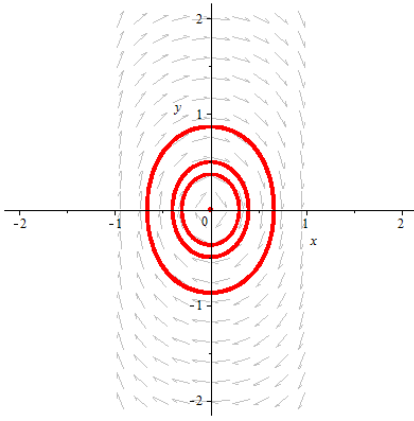


Figura 3.19: Retrato de fase do sistema (10) $tr(A) = 0, det(A) = -2bd < 0$.

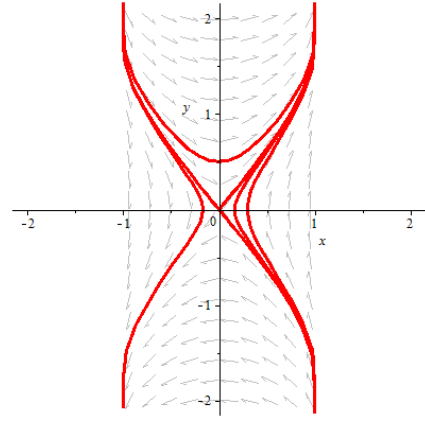


Figura 3.20: Retrato de fase do sistema (10) $tr(A) = 0, det(A) = -2bd > 0$.

O estudo qualitativo na carta negativa procede de maneira análoga ao da carta positiva obtendo assim resultados semelhantes, salvo a particularidade da variação dos parâmetros. Dessa forma, completamos a análise da dinâmica do sistema (6) restrito a superfície invariante em questão.

Agora, voltando ao sistema inicial (6), e tomando $c = 0$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x^2 + z^2 - 1)a + 2z(yd) \\ \dot{y} &= bx \\ \dot{z} &= (x^2 + z^2 - 1)a - 2x(yd)\end{aligned}\tag{11}$$

que preserva os pontos singulares do sistema original, dados por $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$.

Linearizando o campo, temos que a matriz Jacobiana é dada por

$$D(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xa & 2zd & 2za + 2yd \\ b & 0 & 0 \\ 2xa - 2yd & -2xd & 2za \end{pmatrix}$$

e os autovalores associados ao ponto singular $(0, 0, 1)$ são

$$\lambda_{1,2,3} = (\sqrt{2bd}, -\sqrt{2bd}, 2a)$$

enquanto que para $(0, 0, -1)$ são

$$\gamma_{1,2,3} = (\sqrt{-2bd}, -\sqrt{-2bd}, -2a).$$

Fazendo a análise da estabilidade dos pontos singulares, utilizando novamente o Teorema de Hartman Grobman, temos para $(0, 0, 1)$:

1. centro se $bd < 0, a = 0$ (visto que pelo Teorema 7 temos uma integral primeira para $A = 0$);
2. sela se $bd > 0, a \in \mathbb{R}$;
3. linha de singularidades (atratora) se $a < 0$ e $bd = 0$, onde $d = 0$;
4. linha de singularidades (repulsora) se $a > 0$ e $bd = 0$, onde $d = 0$;

5. linha de singularidades (atratora) se $a < 0$ e $bd = 0$, onde $b = 0$;
6. linha de singularidades (repulsora) se $a > 0$ e $bd = 0$, onde $b = 0$;

enquanto que para o ponto singular $(0,0,-1)$ temos

1. centro se $bd > 0$, $a = 0$ (visto que pelo Teorema 7 temos uma integral primeira para $A = 0$);
2. tipo sela se $bd < 0$, $a \in \mathbb{R}$;
3. linha de singularidades (atratora) se $a < 0$ e $bd = 0$, onde $d = 0$;
4. linha de singularidades (repulsora) se $a > 0$ e $bd = 0$, onde $d = 0$;
5. linha de singularidades (atratora) se $a < 0$ e $bd = 0$, onde $b = 0$;
6. linha de singularidades (repulsora) se $a > 0$ e $bd = 0$, onde $b = 0$.

O campo restrito a superfície invariante $x^2 + z^2 - 1 = 0$ do sistema (11) é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\sqrt{1-x^2}(yd) \\ \dot{y} &= bx. \end{aligned} \tag{12}$$

Observe que o sistema (12) torna-se sistema (10), cuja análise foi feita anteriormente.

Logo, com base no exposto acima, temos que as características principais do espaço de fase do sistema (12) são basicamente sela ou centro, já que pela análise da estabilidade do campo restrito na origem, obtemos ou dois autovalores complexos conjugados com parte real nula, ou dois autovalores reais com sinais opostos, além da existência da integral primeira.

Com isso, completamos o estudo da dinâmica de uma classe de sistemas diferenciais polinomiais que possui um cilindro como superfície algébrica invariante, dada pelo sistema (8). A análise desenvolvida nos permitiu observar a existência de um centro, englobado por uma órbita homoclínica no retrato de fase dos sistemas (6) e (11), bem como a possibilidade de existência de uma bifurcação do tipo Hopf para o valor crítico $c = 0$. No próximo capítulo, daremos a fundamentação teórica da bifurcação de Hopf e mostraremos que esse tipo de bifurcação realmente ocorre para o sistema (8), dando origem a um ciclo limite estável sobre o cilindro invariante.

Antes de passarmos ao próximo capítulo, na próxima seção daremos um exemplo de sistema físico, a saber, o sistema de Rabinovich, que aparece na modelagem de vários fenômenos naturais e que possui um cilindro como superfície algébrica invariante, mostrando que a existência de tais superfícies em sistemas diferenciais definidos em \mathbb{R}^3 não é uma hipótese puramente teórica. Detalhes sobre o estudo desse sistema podem ser encontrados em [7] e referências ali contidas.

3.3 Exemplo: Estudo do Sistema de Rabinovich com um Cilindro Invariante

Nessa seção vamos considerar um importante sistema de equações diferenciais em \mathbb{R}^3 que apresenta um cilindro como superfície algébrica invariante, a saber, o sistema de

Rabinovich que é dado por [7]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= hy - \nu_1 x + yz \\ \dot{y} &= hx - \nu_2 y - xz \\ \dot{z} &= -\nu_3 z + xy\end{aligned}\tag{13}$$

e dar uma descrição detalhada do seu fluxo sobre esses cilindros invariantes. Para os valores de parâmetros $\nu_2 = \nu_3 = 0$, e $\nu_1 \neq 0$, o sistema (13) apresenta cilindros invariantes da forma $H(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2hz$. Neste caso, o sistema (13) tem uma infinidade de cilindros invariantes, visto que $H(x, y, z)$ é uma integral primeira deste sistema.

O sistema (13) restrito ao cilindro invariante $y^2 + z^2 - 2hz = r^2$, $r > 0$ é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= hy - \nu_1 x + y(\sqrt{r^2 - y^2} + h) \\ \dot{y} &= hx - \nu_2 y - x(\sqrt{r^2 - y^2} + h)\end{aligned}\tag{14}$$

com $r \in \mathbb{R}$. Os pontos singulares do sistema (14) são $(0, 0)$, $(0, \pm\sqrt{r^2 - 4h^2})$. Temos os seguintes casos a considerar.

Se $r > 0$ então, a origem $(0, 0)$ é o único ponto singular do sistema (14) e os autovalores da parte linear na origem são $\lambda_{1,2} = -\frac{\nu_1}{2} \pm \frac{\sqrt{\nu_1^2 - 8rh - 4r^2}}{2}$. Seja $\Gamma = \nu_1^2 - 8rh - 4r^2$.

Então, a origem pode ser

- i) Um nó instável (se $\Gamma \geq 0$ ou seja, se $\nu_1 \leq -2\sqrt{2rh + r^2}$);
- ii) Um foco repulsor (se $\Gamma < 0$, ou seja, se $-2\sqrt{2rh + r^2} < \nu_1 < 0$);
- iii) Um foco atrator (se $\Gamma < 0$, ou seja, se $0 < \nu_1 < 2\sqrt{2rh + r^2}$);
- iv) Um centro se $\nu_1 = 0$.
- v) Um nó instável (se $\Gamma \geq 0$ ou seja, se $\nu_1 > 2\sqrt{2rh + r^2}$).

Nas figuras abaixo são mostrados os retratos de fase do sistema (14) para os casos i)...v).

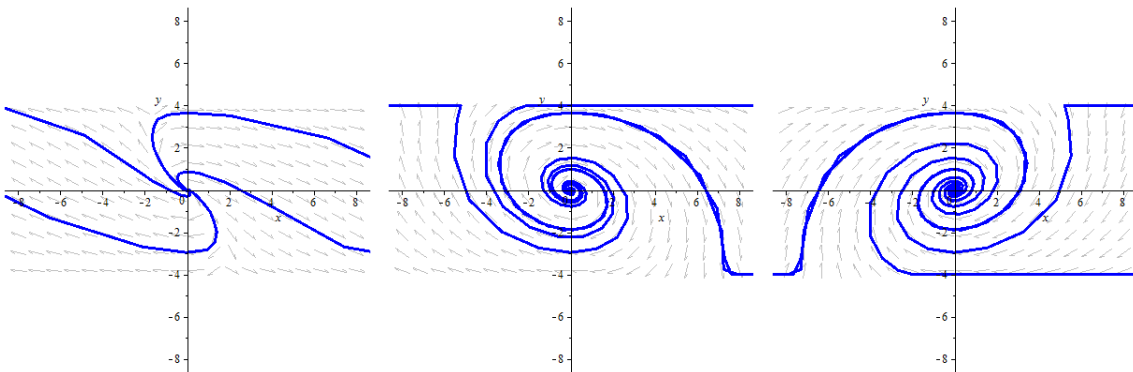


Figura 3.21: Retrato de fase do sistema (14) para os casos i) $\nu_1 \leq -2\sqrt{2rh + r^2}$, ii) $-2\sqrt{2rh + r^2} < \nu_1 < 0$ e iii) $0 < \nu_1 < 2\sqrt{2rh + r^2}$.

Com isso, completamos o estudo da dinâmica e estabilidade de uma classe de sistemas diferenciais polinomiais que possui um cilindro como superfície algébrica invariante. A análise desenvolvida nos permitiu observar a existência de um centro, englobado por uma órbita homoclínica no retrato de fase dos sistemas (6) e (11), bem como a existência de uma bifurcação do tipo Hopf para o valor crítico $c = 0$. No próximo capítulo, daremos a

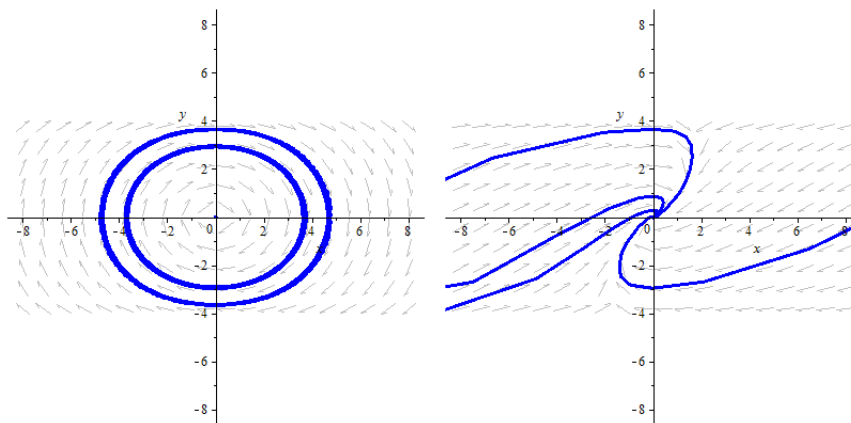


Figura 3.22: Retrato de fase do sistema (14) para os casos *iv*) $\nu_1 = 0$, *v*) $\nu_1 > 2\sqrt{2rh + r^2}$.

fundamentação teórica da bifurcação de Hopf e mostraremos que esse tipo de bifurcação realmente ocorre para o sistema (8), dando origem a um ciclo limite estável sobre o cilindro invariante.

Bifurcação de Hopf

Neste capítulo apresentamos um estudo da teoria da bifurcação de Hopf para um sistema de equações diferenciais ordinárias n -dimensional. Com o objetivo de melhor compreender a bifurcação de Hopf, apresentamos primeiro o caso bidimensional. Para isso, as definições e o método de projeção aqui apresentados foram baseados no livro de Kuznetsov [5],[6],[12].

4.1 Caso Bidimensional

A bifurcação de Hopf ocorre quando, para um determinado valor de parâmetro, os autovalores associados a matriz jacobiana em torno do ponto de equilíbrio deixam de ser hiperbólicos e passam a ser imaginários puros. Através desta perda de estabilidade temos a criação de um ciclo limite. Esta bifurcação pode ser subdividida em dois tipos: Bifurcação de Hopf supercrítica e Bifurcação de Hopf subcrítica. Como exemplo, considere o seguinte sistema bidimensional dependendo de um parâmetro

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \alpha y - y(x^2 + y^2).\end{aligned}\tag{1}$$

A origem $(0,0)$ é o único ponto de equilíbrio desse sistema, e a matriz jacobiana aplicada nesse ponto é dada por

$$D(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Note que os autovalores da matriz jacobiana são dados por $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$. Introduzindo a variável complexa $z = x + iy$ podemos reescrever (1) como

$$\dot{z} = (\alpha + i)z \pm z|z|^2,\tag{2}$$

onde $\bar{z} = x - iy$ e $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Usando a representação $z = \rho e^{i\theta}$, obtemos

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\theta} + \rho i\dot{\theta}e^{i\theta},\tag{3}$$

donde segue que

$$\dot{\rho}e^{i\theta} + \rho i\dot{\theta}e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}(\alpha + i \pm \rho^2). \quad (4)$$

Com isso, podemos escrever (1) em sua forma polar

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\alpha \pm \rho^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Analisando o sistema (5), temos na primeira equação que $\rho = 0$ é ponto de equilíbrio, para todo valor de $\alpha \geq 0$. Outro ponto de equilíbrio irá existir para determinados valores do parâmetro α , dependendo do sinal do termo cúbico em (5). Supondo (5) com sinal negativo, temos

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Assim, para valores de $\alpha > 0$, $\rho(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ é um ponto de equilíbrio da primeira equação em (6) e descreve uma órbita circular periódica que é percorrida com velocidade constante no sentido anti-horário. Dessa forma, a origem é um foco atrator para $\alpha < 0$, um foco repulsor para $\alpha > 0$ e para $\alpha = 0$, temos um foco atrator “fraco”. Quando $\alpha > 0$, a origem torna-se isolada por uma órbita fechada, denominada ciclo limite, que é única atratora e centrada na origem. Este ciclo é uma circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt{\alpha}$. Todas as órbitas internas ou externas a este ciclo, com exceção da origem, tendem ao ciclo limite quando $t \rightarrow \infty$ (ver Figura 4.1).

Observe que para o valor de parâmetro $\alpha = 0$, ocorreu uma mudança de estabilidade, onde o ponto de equilíbrio deixa de ser estável para se tornar um ciclo limite estável, sendo que este envolve o equilíbrio que antes era estável e que para $\alpha < 0$ torna-se instável, o que caracteriza a bifurcação de Hopf supercrítica. Para o caso da bifurcação subcrítica, temos um ponto de equilíbrio instável para $\alpha > 0$ que passa a ser estável quando α passa pelo valor crítico $\alpha = 0$, o que origina o ciclo limite instável.

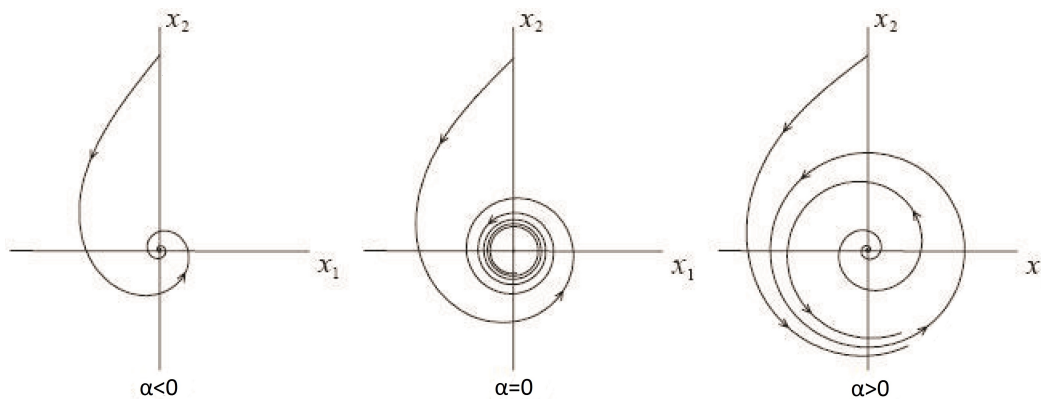


Figura 4.1: Bifurcação de Hopf Supercrítica

Agora, considerando a primeira equação de (5) com sinal positivo, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\alpha + \rho^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

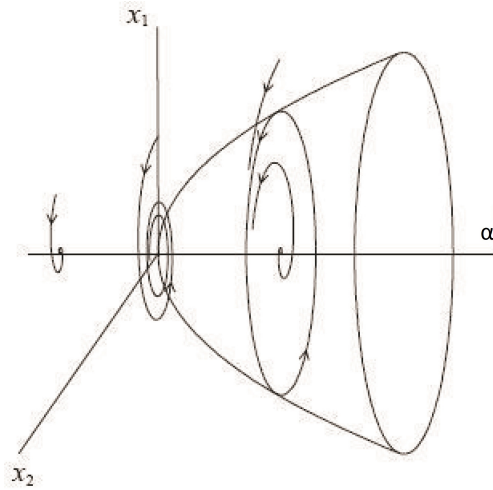


Figura 4.2: Bifurcação de Hopf Supercrítica no espaço (x_1, x_2, α)

A análise de (7) com sinal positivo é análoga ao caso negativo, podendo ser encontrada em [6]. Para esse caso a bifurcação de Hopf é denominada Subcrítica e caracteriza-se pelo desaparecimento de uma órbita periódica repulsora, que ocorre quando passamos $\alpha = 0$.

Definição 10 *Os sistemas (5), ou equivalentemente, (6) e (7), são denominados formas normais das bifurcações de Hopf.*

Consideremos agora o caso em que o sistema (1) tem o sinal dos termos de terceira ordem negativo,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (8)$$

A demonstração do Lema a seguir pode ser encontrada em [6].

Lema 1 *O sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(\|x_1\|), \quad (9)$$

onde $x_1 = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, $\|x_1\| = x^2 + y^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $O(\|x_1\|^4)$ representa os termos de ordem maior ou igual a 4, dependendo suavemente de α , é topologicamente equivalente em uma vizinhança da origem ao sistema (8).

4.1.1 Teorema da Bifurcação de Hopf

Na seção anterior estudamos o sistema (1) que representa a forma normal da bifurcação de Hopf e cujo sinal do termo de terceiro grau determinam o tipo de bifurcação, ou seja, supercrítica ou subcrítica. Agora, determinaremos condições para que um sistema qualquer seja topologicamente conjugado à forma normal apresentada.

Para isso, consideremos o sistema

$$\dot{x} = f(x_1, \alpha), \quad x_1 = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

onde f é uma função suave que possui em $\alpha = 0$ o equilíbrio x_0 com autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. De acordo com o Teorema da Função Implícita, como $\lambda = 0$ não é um autovalor da matriz Jacobiana, o sistema possui um único equilíbrio $x_0(\alpha)$ em uma vizinhança da origem para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno. Nesse caso, através de uma mudança de coordenadas, podemos levar este equilíbrio para a origem, de modo que, assumindo sem perda de generalidade, que $x = x_0$ é o equilíbrio do sistema para $|\alpha|$ suficientemente pequeno. Assim, temos que o sistema pode ser escrito como

$$\dot{x} = A(\alpha)x_1 + F(x, \alpha), \quad (10)$$

onde F é uma função suave cujos componentes $F_{1,2}$ tem expansão de Taylor em x_1 iniciando com os termos de primeira ordem, $F = O(\|x_1\|)$. A matriz jacobiana $A(\alpha)$ pode ser escrita como

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix},$$

onde os seus elementos são funções suaves de α . Note que os autovalores de $A(\alpha)$ são raízes da equação característica

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$$

com $\sigma = \sigma(\alpha) = a(\alpha) + d(\alpha) = \text{tr}A(\alpha)$, e $\Delta = \Delta(\alpha) = a(\alpha)d(\alpha) - b(\alpha)c(\alpha) = \det A(\alpha)$. Assim, obtemos

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\sigma(\alpha) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)} \right).$$

A condição de bifurcação de Hopf nos diz que

$$\sigma(0) = 0, \Delta(0) = \omega_0^2 > 0.$$

Para $|\alpha|$ pequeno, temos que

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha), \omega(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)}$$

e portanto, temos a seguinte representação para os autovalores

$$\lambda_1(\alpha) + i\omega(\alpha), \alpha(0) = 0 \quad e \quad \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

Lema 2 *Por meio da introdução de uma variável complexa z , o sistema (10) pode ser escrito para $|\alpha|$ suficientemente pequeno, em uma única equação da forma*

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \quad (11)$$

onde $g = O(\|z\|^2)$ é uma função suave de (z, \bar{z}, α) .

Demonstração. Seja $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ um autovetor complexo de $A(\alpha)$ associado ao autovalor $\lambda(\alpha)$, dado por

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha),$$

e seja $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ um autovetor de $A(\alpha)$ associado ao autovalor $\bar{\lambda}(\alpha)$, ou seja,

$$A^T(\alpha)p(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha)p(\alpha).$$

É sempre possível normalizar p em relação a q , de modo que

$$\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1, \quad (12)$$

onde temos que $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$ é o produto interno usual em \mathbb{C}^2 . Dessa forma, qualquer vetor pode ser representado unicamente como

$$x = zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \quad (13)$$

para todo α pequeno, e para algum número complexo z . Aplicando o produto escalar em ambos os membros de (13), temos

$$\langle p, x \rangle = \langle p, zq + \bar{z}\bar{q} \rangle = \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle = z\langle p, q \rangle + \bar{z}\langle p, \bar{q} \rangle.$$

Da igualdade (12), temos que $\langle p, q \rangle = 1$, logo basta provarmos que $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. De fato,

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \left\langle p, \frac{1}{\lambda} A\bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Como $\lambda \neq \bar{\lambda}$, pois para $|\alpha|$ suficientemente pequeno temos que $\omega(\alpha) > 0$, podemos concluir que

$$\langle p, \bar{q} \rangle = 0. \quad (14)$$

Daí, temos a seguinte fórmula para determinar a variável complexa z

$$z = \langle p(\alpha), x_1 \rangle. \quad (15)$$

Agora, utilizando as equações (10), (12), (13), (14) e (15) temos que a variável complexa z satisfaz a equação

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \langle p(\alpha), \dot{x}_1 \rangle \\ &= \langle p, Ax_1 + F(x_1) \rangle \\ &= \langle p, Ax_1 \rangle + \langle p, F(x_1) \rangle \\ &= \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \langle p, A(zq) \rangle + \langle p, A(\bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \langle p, z\lambda q \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{\lambda}\bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \lambda z \langle p, q \rangle + \bar{\lambda}\bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha)) \rangle \end{aligned}$$

obtendo assim, a equação (11), onde $g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle$. ■

Escrevendo g em série de Taylor nas duas variáveis complexas (z e \bar{z}) obtemos

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l,$$

onde,

$$g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \overline{zq(\alpha)}) \rangle \Big|_{z=0},$$

para $k+l \geq 2$, $k, l = 0, 1, \dots$

Supondo que, para $\alpha = 0$, a função $F(x_1, \alpha)$ de (10) seja representada por

$$F(x_1, 0) = \frac{1}{2} B(x_1, x_1) + \frac{1}{6} C(x_1, x_1, x_1) + O(\|x_1\|^4),$$

em que, $B(x, y)$, $C(x, y, u)$, são funções multilineares simétricas de $x, y, u \in \mathbb{R}^2$. Em coordenadas, temos

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\epsilon, 0)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k} \Big|_{\epsilon=0} x_j y_k$$

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\epsilon, 0)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_k \partial \epsilon_l} \Big|_{\epsilon=0} x_j y_k u_l$$

para $i = 1, 2$. Então,

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}),$$

e

$$C(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^3 C(q, q, q) + 3z^2 \bar{z} C(q, q, \bar{q}) + 3z \bar{z}^2 C(q, \bar{q}, \bar{q}) + \bar{z}^3 C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}),$$

em que $q = q(0)$, $p = p(0)$. Assim, os coeficientes de Taylor g_{kl} , $k+l=2$ dos termos quadráticos e cúbicos em $g(z, \bar{z}, z)$ podem ser expressos pelas seguintes fórmulas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} g_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle, \\ g_{30} &= \langle p, C(q, q, q) \rangle, \quad g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{12} = \langle p, C(q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{03} = \langle p, C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle. \end{aligned}$$

No que segue, faremos mudanças de coordenadas (complexas) não-lineares a fim de simplificar a equação (11). Inicialmente, iremos remover todos os termos quadráticos através do lema a seguir.

Lema 3 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3), \quad (16)$$

em que $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas complexas

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2$$

para $|\alpha|$ suficientemente pequeno, na equação sem termos quadráticos

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3).$$

Demonstração. A mudança de variável inversa é dada por

$$w = z - \frac{h_{20}}{2}z^2 - h_{11}z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2}\bar{z}^2 + O(|z|^3).$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - h_{20}z\dot{z} - h_{11}(\bar{z}\dot{z} + z\dot{\bar{z}}) - h_{02}\bar{z}\dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20}\right)z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda}h_{11})z\bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda}h_{02}\right)\bar{z}^2 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{2}(g_{20} - \lambda h_{20})w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda}h_{11})w\bar{w} + \frac{1}{2}(g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda)h_{02})\bar{w}^2 + O(|w|^3). \end{aligned}$$

Escolhendo

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda} \text{ e } h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda},$$

os termos quadráticos de (16) são eliminados. Note que essas substituições são sempre possíveis, já que os denominadores são sempre diferentes de zero, para $|\alpha|$ suficientemente pequeno, visto que, $\lambda(0) = i\omega_0$, com $\omega_0 > 0$. ■

Assumindo que removemos todos os termos quadráticos, tentaremos eliminar os termos cúbicos também. Veremos que isso não é possível, pois existe um termo resistente, como mostra o lema a seguir.

Lema 4 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4), \quad (17)$$

em que, $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas complexa

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3,$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno, na equação com apenas um termo cúbico,

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4),$$

onde, $c_1 = c_1(\alpha)$.

Demonstração. A transformação inversa é dada por

$$w = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 + \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2}z^2\dot{z} - \frac{h_{21}}{2}(2z\bar{z}\dot{z} + z^2\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2}(\dot{z}\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) + \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2\dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \lambda\frac{h_{30}}{2}\right)z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \bar{\lambda}\frac{h_{21}}{2}\right)z^2\bar{z} + \left(\frac{g_{12}}{2} - \bar{\lambda}h_{12} - \lambda\frac{h_{12}}{2}\right)z\bar{z}^2 \\ &\quad + \left(\frac{g_{03}}{6} - \bar{\lambda}\frac{h_{03}}{2}\right)\bar{z}^3 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{6}(g_{30} - 2\lambda h_{30})w^3 + \frac{1}{2}(g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda})h_{21})w^2\bar{w} + \frac{1}{2}(g_{12} - 2\bar{\lambda}h_{12})w\bar{w}^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}(g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda})h_{03})\bar{w}^3 + O(|w|^4). \end{aligned}$$

Fazendo,

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\lambda} \text{ e } h_{03} = \frac{g_{03}}{3\lambda - \lambda},$$

conseguimos eliminar todos os termos cúbicos com exceção do termo $w^2\bar{w}$, o qual será tratado separadamente. Tendo em vista que os denominadores envolvidos não se anulam para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno, as substituições acima são válidas.

Uma tentativa de eliminar o termo $w^2\bar{w}$ é escolher

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}.$$

Isto é possível para $|\alpha| \neq 0$ pequeno, contudo para $\alpha = 0$ o denominador se anula, já que, $\lambda(0) + \bar{\lambda}(\alpha) = i\omega_0 - i\omega_0$. Assim, para obtermos uma transformação que dependa suavemente de $|\alpha|$, escolhemos $h_{21} = 0$, o que resulta em

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2},$$

finalizando a prova. ■

Definição 11 O termo $w^2\bar{w}$ é chamada de termo ressonante.

Combinando os dois lemas anteriores, temos o seguinte resultado.

Lema 5 (Forma Normal de Poincaré para a Bifurcação de Hopf). A equação

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + O(|z|^4), \quad (18)$$

em que, $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ e $g_{ij}(\alpha)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3,$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno, na equação com somente o termo cúbico ressonante:

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4), \quad (19)$$

em que, $c_1 = c_1(\alpha)$.

Demonstração. Observe que, obviamente uma das transformações definidas nos lemas 4 e 5 resolve o problema. Primeiro, façamos a transformação

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 \quad (20)$$

com $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$, $h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}$, e $h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}$, definidas no Lema 4. Isto anulará todos os termos quadráticos, porém, também irá alterar os coeficientes de termos cúbicos. Representaremos o coeficiente de $w^2 \bar{w}$ por $\frac{1}{2} \tilde{g}_{21}$. Aplicando o Lema 5 eliminamos todos os termos cúbicos exceto o termo $\frac{1}{2} \tilde{g}_{21}$, que é ressonante. ■

O que precisamos para determinar o coeficiente c_1 nos termos da equação dada (18) é um novo coeficiente $\frac{1}{2} \tilde{g}_{21}$ do termo $w^2 \bar{w}$ depois da transformação quadrática (20). Podemos calcular \dot{z} diferenciando (20),

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{20} w \dot{w} + h_{11} (\dot{w} \bar{w} + w \dot{\bar{w}}) + h_{02} \bar{w} \dot{\bar{w}}.$$

Substituindo \dot{w} e $\dot{\bar{w}}$ e levando em conta (19), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \lambda w + \left(\frac{\lambda h_{20} + g_{20}}{2} \right) w^2 + (\lambda h_{11} + g_{11}) w \bar{w} + \left(\lambda h_{02} + \frac{g_{02}}{2} \right) \bar{w}^2 \\ & + \left[g_{20} h_{11} + g_{11} \left(\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11} \right) + \frac{g_{02} \bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2} \right] w^2 \bar{w} + \dots \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes do termo cúbico $w^2 \bar{w}$ nas duas equações obtidas anteriormente, e, utilizando $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$, $h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}$, e $h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}$, temos

$$\begin{aligned} c_1(\alpha) &= g_{20} h_{11} + g_{11} \left(\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11} \right) + \frac{g_{02} \bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{g_{20} g_{11} (2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda + \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}. \end{aligned}$$

Para $\alpha = 0$, temos $\lambda(0) = i\omega_0$, logo

$$c_1 = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20} g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}.$$

Agora queremos transformar a forma normal de Poincaré na forma normal da bifurcação de Hopf estudada na seção anterior.

Lema 6 *Consideremos a equação*

$$\frac{dw}{dt} = (\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(|w|^4), \quad (21)$$

onde $\mu(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

Suponha que $\mu'(0) \neq 0$ e $\operatorname{Re} c_1(0) \neq 0$. Então, (21) pode ser transformada, por mudança de coordenada e reescalonamento do tempo, na equação

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|w|^4), \quad (22)$$

em que u é a nova coordenada complexa e, θ e β são os novos tempo e parâmetro, respectivamente; e $s = \operatorname{sinal}[\operatorname{Re} c_1(0)] = \pm 1$.

Demonstração. Considere um novo tempo $\tau = \omega(\alpha)t$. A direção de τ é preservada, uma vez que $\omega(\alpha) > 0$, para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeno. Então,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= [(\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(|w|^4)] \frac{1}{\omega(\alpha)} \\ &= \frac{\mu(\alpha) + i\omega(\alpha)}{\omega(\alpha)}w + \frac{c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)}w|w|^2 + O(|w|^4) \\ &= (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4), \end{aligned}$$

em que

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)} \text{ e } d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))}.$$

Podemos considerar β como novo parâmetro, pois

$$\beta(0) = 0, \beta'(0) = \frac{\alpha'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

e, portanto, o Teorema da Função Inversa garante a existência local e suave de $|\alpha|$ como função de β . Note que d_1 é complexo.

Através da mudança de variável $\theta = \theta(\tau, \beta)$, vamos reparametrizar, novamente, o tempo onde

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2)d\tau,$$

com $e_1(\beta) = \operatorname{Im} d_1(\beta)$.

Consideremos agora a expansão de $\frac{1}{(1+e_1(\beta)|w|^2)}$, para w próximo de zero, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta} \\ &= [(\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)] \frac{1}{(1 + e_1(\beta)|w|^2)} \\ &= [(\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)][1 - e_1(\beta)|w|^2 - e_1^2(\beta)|w|^4 + \dots] \end{aligned}$$

Como $e_1(\beta) = \operatorname{Im} d_1(\beta)$, encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\theta} &= (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 - (\beta + i)e_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^2) \\
&= (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 - \beta e_1(\beta)w|w|^2 - ie_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4) \\
&= (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 - \beta e_1(\beta)w|w|^2 - i\text{Im } d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4) \\
&= (\beta + i)w + (\text{Re } d_1(\beta) - \beta e_1(\beta))w|w|^2 + O(|w|^4).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(0) = \text{Re } d_1(0),$$

em que $l_1(\beta) = \text{Re } d_1(\beta) - \beta e_1(\beta)$ é um número real, com $l_1(0) = \text{Re } d_1(0)$ assim, temos

$$l_1(0) = \text{Re} \left(\frac{c_1(\alpha(0))}{\omega(\alpha(0))} \right) = \text{Re} \frac{c_1(0)}{\omega(0)}. \quad (23)$$

Introduzindo a nova variável complexa u , dada por

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}},$$

que é possível, já que $\text{Re } c_1(0) \neq 0$ e, assim, $l_1(0) \neq 0$. Então, a equação, torna-se

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|}u|u|^2 + O(|u|^4) = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4),$$

com $s = \text{sign} l_1(0) = \text{sign } \text{Re } c_1(0)$. ■

Definição 12 A função real $l_1(\beta)$ é chamada de primeiro coeficiente de Lyapunov.

Segue da equação (23) que o primeiro coeficiente de Lyapunov em $\beta = 0$, pode ser calculado pela fórmula

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re} (ig_{20}g_{11} + \omega_0g_{21}). \quad (24)$$

Reunindo os resultados anteriores, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 9 (Teorema de Hopf). Suponhamos que o sistema bidimensional

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (25)$$

com f suave, tendo a singularidade $x = 0$, para todo α suficientemente pequeno, com autovalores

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

em que $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ satisfazendo as seguintes condições

1. $\alpha'(0) \neq 0$ (transversalidade)
2. $l_1(0) \neq 0$, em que l_1 é o primeiro coeficiente de Lyapunov (Condição de não degenerescência).

Então, existem coordenadas invertíveis, mudanças de parâmetros e uma reparametrização do tempo transformando (25) em

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4).$$

Finalmente, apresentamos um resultado mais geral.

Teorema 10 (Forma Normal da Bifurcação de Hopf). *Qualquer sistema bidimensional*

$$x' = f(x, \alpha), \tag{26}$$

tendo em $\alpha = 0$ o equilíbrio $x = 0$, com autovalores

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0,$$

é localmente topologicamente equivalente em torno da origem, a uma das seguintes formas normais

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Observação 3 *Os dois últimos resultados juntamente com a análise da forma normal realizada na seção anterior e a fórmula dada por (24) para $l_1(0)$ fornecem todas as ferramentas necessárias para análise da bifurcação de Hopf em sistemas genéricos bidimensionais.*

4.2 Método da Projecção

Nesta seção estudaremos o método da projecção que consiste na transformação do sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}^m,$$

em uma base formada por seus autovetores generalizados e, em seguida, na projecção deste sistema usando apenas os autovetores correspondentes aos autovalores críticos (único par de autovalores com partes reais nulas) para restringí-lo ao caso bidimensional, cujo estudo já foi realizado.

Consideremos então o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (27)$$

onde $F(x) = O(\|x\|^2)$ é uma função suave e A corresponde à parte linear do sistema, com um ponto de equilíbrio não hiperbólico $x = 0$ e um único par de autovalores imaginários puros $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. Seja $q \in \mathbb{C}^n$ um autovetor complexo correspondente a λ_1 , então

$$Aq = i\omega_0 q, \quad A\bar{q} = -i\omega_0 \bar{q}.$$

Introduzindo também o autovetor adjunto $p \in \mathbb{C}^n$, tal que,

$$A^T p = -i\omega_0 p, \quad A^T \bar{p} = i\omega_0 \bar{p},$$

que satisfaz a normalização

$$\langle p, q \rangle = 1,$$

onde $\langle p, q \rangle = \sum_i^n \bar{p}_i q_i$ é o produto interno canônica de \mathbb{C}^n . O autoespaço real generalizado T^c , correspondente ao par de autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ da matriz A , tem dimensão dois e é gerado por $\{\text{Re}(q), \text{Im}(q)\}$. O autoespaço real T^{su} , correspondente a todos os outros autovalores de A , possui dimensão $n - 2$.

Lema 7 $y \in T^{su}$ se, e só se, $\langle p, y \rangle = 0$.

Como $\mathbb{R}^n = T^c \oplus T^{su}$, dado $x \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$x = zq + \bar{z}\bar{q} + y,$$

onde $z \in \mathbb{C}$, $zq + \bar{z}\bar{q} \in T^c$ e $y \in T^{su}$. Logo, podemos explicitar y e z com relação a x ,

$$\begin{aligned} \langle p, x \rangle &= \langle p, zq + \bar{z}\bar{q} + y \rangle \\ &= \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle + \langle p, y \rangle = z\langle p, q \rangle + \bar{z}\langle p, \bar{q} \rangle = z, \end{aligned}$$

visto que, $\langle p, y \rangle = 0$, $\langle p, q \rangle = 1$ e $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. Assim, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} z &= \langle p, x \rangle \\ y &= x - \langle p, x \rangle q - \langle \bar{p}, x \rangle \bar{q}. \end{aligned} \quad (28)$$

Lema 8 Nas coordenadas de (28), o sistema (27) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ \dot{y} &= Ay + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q}. \end{aligned} \quad (29)$$

Demonstração. Diferenciando z e considerando que se $y \in T^{su}$, então $Ay \in T^{su}$, e assim $\langle p, Ay \rangle = 0$; temos

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \langle p, \dot{x} \rangle \\
&= \langle p, Ax + F(x) \rangle \\
&= \langle p, Ax \rangle + \langle p, F(x) \rangle \\
&= \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\
&= \langle p, zAq \rangle + \langle p, \bar{z}A\bar{q} \rangle + \langle p, Ay \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\
&= z\langle p, i\omega_0 q \rangle + \bar{z}\langle p, -i\omega_0 \bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\
&= i\omega_0 z \langle p, q \rangle - i\omega_0 \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\
&= i\omega_0 z \langle p, q \rangle - i\omega_0 \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\
&= i\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle.
\end{aligned}$$

Agora, sendo $\langle p, Ay \rangle$, $\langle \bar{p}, Ay \rangle$, $\langle \bar{p}, \bar{q} \rangle$, $\langle p, \bar{q} \rangle$, $\langle \bar{p}, q \rangle$ todos nulos, temos:

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \dot{x} - \langle p, \dot{x} \rangle q - \langle \bar{p}, \dot{x} \rangle \bar{q} \\
&= Ax + F(x) - \langle p, Ax + F(x) \rangle q - \langle \bar{p}, Ax + F(x) \rangle \bar{q} \\
&= A(zq + \bar{z}\bar{q} + y) + F(x) - \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q} + y) + F(x) \rangle q \\
&\quad - \langle \bar{p}, A(zq + \bar{z}\bar{q} + y) + F(x) \rangle \bar{q} \\
&= Azq + A\bar{z}\bar{q} + Ay + F(x) - \langle p, zAq \rangle q - \langle p, \bar{z}A\bar{q} \rangle \bar{q} - \langle p, Ay \rangle q \\
&\quad - \langle p, F(x) \rangle q - \langle \bar{p}, zAq \rangle \bar{q} - \langle \bar{p}, \bar{z}A\bar{q} \rangle \bar{q} - \langle \bar{p}, Ay \rangle \bar{q} - \langle \bar{p}, F(x) \rangle \bar{q} \\
&= i\omega_0 zq - i\omega_0 \bar{z}\bar{q} + Ay + F(x) - i\omega_0 \bar{z} \langle p, q \rangle q + i\omega_0 z \langle p, \bar{q} \rangle q - \langle p, F(x) \rangle q \\
&\quad - i\omega_0 \bar{z} \langle \bar{p}, q \rangle \bar{q} + i\omega_0 z \langle \bar{p}, \bar{q} \rangle \bar{q} - \langle \bar{p}, F(x) \rangle \bar{q} \\
&= Ay + F(x) - \langle p, F(x) \rangle q - \langle \bar{p}, F(x) \rangle \bar{q} \\
&= Ay + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q}.
\end{aligned}$$

■

Expandindo o sistema (29) em série de Taylor em z , \bar{z} e y , obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \langle G_{10}, y \rangle z + \langle G_{01}, y \rangle \bar{z} + \dots \\
\dot{y} &= Ay + \frac{1}{2}H_{20}z^2 + H_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}H_{02}\bar{z}^2 + \dots,
\end{aligned} \tag{30}$$

em que G_{20} , G_{11} , G_{02} , $G_{21} \in \mathbb{C}$; G_{10} , G_{01} , $H_{ij} \in \mathbb{C}^n$; e podem ser calculados pela fórmulas seguintes

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \left. \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \right|_{z=0}, \quad i+j \geq 2 \\
\bar{G}_{10,i} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial z} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \right|_{(x,y)=(0,0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
\bar{G}_{10,i} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial \bar{z}} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \right|_{(x,y)=(0,0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
H_{ij} &= \left. \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} F(zq + \bar{z}\bar{q}) \right|_{z=0} - G_{ij}q - \bar{G}_{ji}\bar{q}, \quad i+j = 2,
\end{aligned}$$

e ainda, $\langle G, y \rangle = \sum_i^n \bar{G}_i y_i$.

Teorema 11 (Teorema da Variedade Central). *Localmente, existe um conjunto invariante $W^c(0)$ de (27) que é tangente a T^c em $x = 0$. Este conjunto é o gráfico de uma*

aplicação suave cujas derivadas parciais de todas as ordens são unicamente determinadas. Se $\phi(x, t)$ denota o fluxo associado ao sistema (27), então existe uma vizinhança U de $x_0 = 0$ tal que se $\phi(x, t) \in U$, $\forall t \geq 0 (t \leq 0)$, então $\phi(x, t) \rightarrow W^c(0)$ quando $t \rightarrow \infty (t \rightarrow -\infty)$.

Definição 13 O conjunto $W^c = W^c(0)$ é chamado de variedade central da origem.

Observe que a variedade central possui a seguinte representação

$$y = V(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}w_{20}z^2 + w_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}w_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3), \quad (31)$$

onde $\langle p, w_{ij} \rangle = 0$. Diferenciando (31), e substituindo as derivadas \dot{z} e $\dot{\bar{z}}$ usando (30)

$$\dot{y} = w_{20}z\dot{z} + (\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}})w_{11} + w_{02}\bar{z}\dot{\bar{z}} + \dots = i\omega_0 w_{20}z^2 - i\omega_0 w_{02}\bar{z}^2 + \dots \quad (32)$$

Por outro lado, da segunda equação de (30), após substituir y pela expressão dada em (31) e agrupando os termos semelhantes, obtemos,

$$\dot{y} = \frac{1}{2}(Aw_{20} + H_{20})z^2 + (Aw_{11} - H_{11})z\bar{z} + \frac{1}{2}(Aw_{02} + H_{02})\bar{z}^2 + \dots \quad (33)$$

Igualando (32) e (33), obtemos que os vetores $w_{ij} \in \mathbb{C}^n$ dos termos quadráticos são dados por

$$\begin{aligned} w_{20} &= (2i\omega_0 E - A)^{-1}H_{20}, \\ w_{11} &= -A^{-1}H_{11}, \\ w_{02} &= (-2i\omega_0 E - A)^{-1}H_{02}, \end{aligned}$$

onde E é a matriz identidade. Assim, a expressão (31) fica,

$$y = V(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}(2i\omega_0 E - A)^{-1}H_{20}z^2 - A^{-1}H_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}(2i\omega_0 E - A)^{-1}H_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

e com isso, o sistema (30) restrito à sua variedade central pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \\ &\quad \langle G_{10}, V(z, \bar{z}) \rangle z + \langle G_{01}, V(z, \bar{z}) \rangle \bar{z} + \dots \end{aligned}$$

ou seja,

$$\dot{z} = i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}(G_{21} - 2\langle G_{10}, A^{-1}H_{11} \rangle + \langle G_{01}, (2i\omega_0 E - A)^{-1}H_{20} \rangle)z^2\bar{z} + \dots, \quad (34)$$

onde usamos o produto escalar em \mathbb{C}^n . Uma boa característica desse algoritmo acima é que ele dá o sistema restrito em sua forma complexa, adequadamente para a determinação do coeficiente de Lyapunov. Dessa forma, vamos escrever a função $F(x)$ em termos das

funções multilineares $B(x, y)$, $C(x, y, z)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4) \quad (35)$$

Assim, temos

$$\langle G_{10}, y \rangle = \langle p, B(q, y) \rangle, \langle G_{01}, y \rangle = \langle p, B(\bar{q}, y) \rangle,$$

e daí, a equação restrita (34) fica na forma

$$\dot{z} = i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}(G_{21} - 2\langle p, B(q, A^{-1}H_{11}) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 E - A)^{-1}H_{20}) \rangle)z^2\bar{z} + \dots, \quad (36)$$

onde

$$\begin{aligned} G_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle, G_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \\ G_{02} &= \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, G_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle \end{aligned} \quad (37)$$

e,

$$\begin{aligned} H_{20} &= B(q, q) - \langle p, B(q, q) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, q) \rangle \bar{q} \\ H_{11} &= B(q, \bar{q}) - \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, \bar{q}) \rangle \bar{q}. \end{aligned} \quad (38)$$

Agora, substituindo (37) e (38) em (36) e, usando as seguintes identidades

$$A^{-1}q = \frac{1}{i\omega_0}q, A^{-1}\bar{q} = \frac{-1}{i\omega_0}\bar{q}, (2i\omega_0 E - A)^{-1}q = \frac{1}{i\omega_0}q, (2i\omega_0 E - A)^{-1}\bar{q} = \frac{1}{3i\omega_0}\bar{q},$$

transformamos (36) em

$$\dot{z} = i\omega_0 z + \frac{1}{2}g_{20}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}g_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}g_{21}z^2\bar{z} + \dots,$$

onde temos que

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle,$$

e

$$\begin{aligned} g_{21} &= \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle \\ &- 2\langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 E - A)^{-1}B(q, q)) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{i\omega} \langle p, B(q, q) \rangle \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle \\ &\quad - \frac{2}{i\omega_0} |\langle p, B(q, \bar{q}) \rangle|^2 - \frac{1}{3i\omega} |\langle p, B(q, \bar{q}) \rangle|^2. \end{aligned}$$

Observe que os termos da última linha da equação anterior são imaginários puros e a terceira linha é dada por $g_{20}g_{21}$. Assim, aplicando a fórmula dada na seção anterior como

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}),$$

dada em (24), obtemos

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re}[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 E - A)^{-1}B(q, q)) \rangle]$$

Logo, esta fórmula parece ser mais conveniente para o estudo da bifurcação de Hopf em sistemas n-dimensionais, visto que ela expressa $l_1(0)$ usando os termos lineares, quadráticos e cúbicos, originais, assumindo que somente os autovetores críticos - ordinários e adjuntos - da matriz jacobiana são conhecidos.

4.3 Condição de Transversalidade

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais com um parâmetro

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad (39)$$

onde, $F(x, \alpha) = O(\|x\|^2)$ é uma função suave de x , com expansão de Taylor começando com pelo menos termos quadráticos, e ainda, dependendo suavemente de α . Seja $A(\alpha)$ a parte linear do sistema com um par de autovalores complexos conjugados

$$\lambda_{1,2} = \gamma(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

em que, para $\alpha = 0$ as seguintes condições são satisfeitas

$$\gamma(0) = 0, \omega(0) = \omega_0.$$

Lema 9 *Condição de Transversalidade* Considere o sistema (39) cuja matriz Jacobiana $A(\alpha)$ possui um par de autovalores imaginários puros para $\alpha = 0$, $\lambda_{1,2} = \gamma(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, $\gamma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Então

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}(0) = \operatorname{Re} \left\langle p, \frac{dA}{d\alpha}(0)q \right\rangle,$$

onde $p, q \in \mathbb{C}^n$ satisfazem

$$A(0)q = i\omega_0 q, A^T(0)p = -i\omega, e \langle p, q \rangle = 1.$$

Demonstração. Derivando ambos os membros da equação

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha),$$

com relação a α , temos

$$\frac{dA}{d\alpha}(\alpha)q(\alpha) + A(\alpha)\frac{dq}{d\alpha}(\alpha) = \frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha)q(\alpha) + \lambda(\alpha)\frac{dq}{d\alpha}(\alpha).$$

Aplicando o produto escalar em ambos os membros dessa equação, temos

$$\begin{aligned} \left\langle p, \frac{dA}{d\alpha}q + A\frac{dq}{d\alpha} \right\rangle &= \left\langle p, \frac{d\lambda}{d\alpha}q + \lambda\frac{dq}{d\alpha} \right\rangle \\ \left\langle p, \frac{dA}{d\alpha}q \right\rangle + \left\langle p, A\frac{dq}{d\alpha} \right\rangle &= \left\langle p, \frac{d\lambda}{d\alpha}q \right\rangle + \left\langle p, \lambda\frac{dq}{d\alpha} \right\rangle \\ \left\langle p, \frac{dA}{d\alpha}q \right\rangle + \left\langle A^T p, \frac{dq}{d\alpha} \right\rangle &= \frac{d\lambda}{d\alpha} \langle p, q \rangle + \lambda \left\langle p, \frac{dq}{d\alpha} \right\rangle \end{aligned}$$

Note que, para $\alpha = 0$, temos $A^T p = -i\omega_0 p$. Daí,

$$\begin{aligned} \left\langle p, \frac{dA}{d\alpha}(0)q \right\rangle + i\omega_0 \left\langle p, \frac{dq}{d\alpha} \right\rangle &= \left(\frac{d\lambda}{d\alpha}(0) + i\frac{d\omega}{d\alpha}(0) \right) \langle p, q \rangle + i\omega_0 \left\langle p, \frac{dq}{d\alpha} \right\rangle \\ \left\langle p, \frac{dA}{d\alpha}(0)q \right\rangle &= \left(\frac{d\lambda}{d\alpha}(0) + i\frac{d\omega}{d\alpha}(0) \right) \langle p, q \rangle, \end{aligned}$$

e, lembrando que $\langle p, q \rangle = 1$, temos

$$\left\langle p, \frac{dA}{d\alpha}(0)q \right\rangle = \frac{d\lambda}{d\alpha}(0) + i\frac{d\omega}{d\alpha}(0)$$

e, portanto

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}(0) = \operatorname{Re} \left\langle p, \frac{dA}{d\alpha}(0)q \right\rangle$$

■

Observação 4 Quando $l_1 < 0$ ($l_1 > 0$) uma família de órbitas periódicas estáveis (instáveis) pode ser encontrada. Assim, quando $l_1 < 0$ ($l_1 > 0$) temos a ocorrência de uma bifurcação de Hopf supercrítica (subcrítica).

4.4 Bifurcação de Hopf em Uma Classe de Sistemas Quadráticos com um Cilindro Invariante

Vamos agora considerar a classe de sistemas diferenciais polinomiais (6), estudada no Capítulo 2, dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 + z^2 - 1)a + 2z(xc + yd), \\ \dot{y} &= bx, \\ \dot{z} &= (x^2 + z^2 - 1)a - 2x(xc + yd), \end{aligned}$$

que possui os pontos singulares $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$. Vamos utilizar o estudo da bifurcação de Hopf apresentado na seção anterior para analisar a bifurcação que ocorre no ponto singular $(0,0,1)$, quando variamos o parâmetro c do sistema (6). Para isso, devemos estudar a estabilidade deste ponto e calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov utilizando o método de projeção.

Lembrando que a matriz jacobiana do sistema (6) aplicada no ponto $(0,0,1)$ é dada por

$$A(0,0,1) = \begin{pmatrix} 2c & 2d & 2a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \quad (40)$$

donde segue que o seu polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (-2c - 2a)\lambda^2 + (4ac - 2bd)\lambda + 4abd$$

e os autovalores são $\lambda_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2 + 2bd}$, $\lambda_3 = 2a$. Note que para valores de parâmetro $a < 0$, $c < 0$ e $bd < 0$ o ponto singular $(0,0,1)$ é localmente um atrator; se $a < 0$, $c > 0$ e $bd < 0$, temos que $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$ e assim, $(0,0,1)$ é instável. Agora, tomando o valor crítico $c = 0$, obtemos dois autovalores complexos conjugados com parte real nula e outro autovalor real negativo, o que caracteriza uma das hipóteses para ocorrência da bifurcação de Hopf no ponto singular $(0,0,1)$.

Para $c = 0$, a matriz jacobiana é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2d & 2a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Consideremos o caso particular em que $bd = -3$ e $a = -1$. Para esses valores de parâmetros, temos que os vetores

$$q = (-i\sqrt{6}, 1, 0) \quad \text{e} \quad p = \left(\frac{1}{2}i\sqrt{6} - 1, -3 - i\sqrt{6}, 1\right)$$

são os autovetores de A e A^T correspondente aos autovalores da A . Além disso, satisfazem $\langle p, q \rangle = 1$.

Agora, calcularemos as funções multilineares simétricas, conforme apresentado nas seções anteriores. Para isso, escrevemos o sistema (4) da seguinte forma

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (41)$$

onde $F(x)$ é uma função suave, e pode ser expandida da forma

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4),$$

onde $B(x, x)$ e $C(x, x, x)$, são funções bilineares e trilineares simétricas, respectivamente e são dadas por

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 F_i(\varepsilon, 0)}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_k} \Big|_{\varepsilon=0} x_j y_k,$$

$$C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,l=1}^3 \frac{\partial^3 F_i(\varepsilon, 0)}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l} \Big|_{\varepsilon=0} x_j y_k z_l,$$

em que $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ e $i = 1, 2, 3$. Escrevendo $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T$ e $z = (z_1, z_2, z_3)^T$, obtemos

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} B_1(x, y) \\ B_2(x, y) \\ B_3(x, y) \end{pmatrix}$$

enquanto que $C(x, y, z) = 0$, pois todas as derivadas de terceira ordem são nulas. Assim,

$$B(q, q) = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -i(-6 - i\sqrt{6}(-\frac{8}{5} - \frac{2}{15}i\sqrt{6}))\sqrt{6} + 6i\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

e,

$$B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ i(-6 - i\sqrt{6}(-\frac{8}{5} - \frac{2}{15}i\sqrt{6}))\sqrt{6} + 6i\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Escrevendo $s = A^{-1}B(q, \bar{q})$, temos que

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 - \frac{1}{6}i(-6 - i\sqrt{6}(-\frac{8}{5} - \frac{2}{15}i\sqrt{6}))\sqrt{6} - i\sqrt{6} \\ -\frac{1}{2}i(-6 - i\sqrt{6}(-\frac{8}{5} - \frac{2}{15}i\sqrt{6}))\sqrt{6} - 3i\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Agora, escrevendo $r = (2i\omega I - A)^{-1}B(q, q)$, onde I é a matriz identidade de ordem 3, obtemos

$$r = \begin{pmatrix} \frac{-287.9999994 + 23.51510146i + 66.62612093\sqrt{6} + 6i\sqrt{6}}{-39.19999988 - 82.30285504i} \\ \frac{-4.800000000 - 58.78775376i + \frac{128i}{5}\sqrt{6}}{-39.19999988 - 82.30285504i} \\ \frac{-195.8399995 - 529.8736195i}{-39.19999988 - 82.30285504i} \end{pmatrix}.$$

Por fim, aplicando a fórmula

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \text{Re}[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 E - A)^{-1}B(q, q)) \rangle]$$

obtemos

$$l_1(0) = -0.01848671524. \quad (42)$$

Para provar que de fato ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica, basta apenas verificar a condição de transversalidade. Calculando a derivada da matriz jacobiana $A(c)$ em

relação ao parâmetro c na expressão (40) e aplicando no valor crítico $c = 0$ encontramos

$$\frac{dA}{dc}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo a equação

$$\frac{d\gamma}{dc} = \operatorname{Re}\langle p, \frac{dA}{dc}(0)q \rangle$$

obtemos

$$\frac{d\gamma}{dc} = 6 \neq 0.$$

Note que ao trabalhar com sistemas não-lineares no plano sempre conseguimos explicitar os autovalores de suas matrizes jacobianas e assim podemos analisar a estabilidade local de seus pontos singulares. Contudo, muitas vezes não conseguimos fazer o mesmo para sistemas tridimensionais. Para o estudo de tais sistemas, podemos utilizar um resultado que relaciona os coeficientes do polinômio característico da matriz jacobiana aplicada em seus equilíbrios com a parte real de seus autovalores. Este resultado é conhecido como Condição de Estabilidade de Routh-Hurwitz. Assim, utilizando o polinômio característico associado a matriz jacobiana do sistema (6) nos respectivos pontos singulares $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$ e a condição de estabilidade de Routh-Hurwitz apresentado abaixo podemos analisar as condições de ocorrência da bifurcação de Hopf nesses pontos.

Teorema 12 *Considere o seguinte polinômio*

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (43)$$

com coeficientes reais, então

- *(Critério de Routh-Hurwitz) p é estável se, e somente se,*

$$a, b, c > 0 \text{ e } ab - c > 0 \quad (44)$$

- *Se $c > 0$ e $ab - c < 0$, então p tem duas raízes com parte real positiva e uma raiz real negativa;*
- *Se $a, b, c > 0$ e $ab - c = 0$, então p tem duas raízes complexas conjugadas com parte real nula e uma raiz real negativa;*

Este Teorema e sua demonstração podem ser encontrados em [5].

Teorema 13 *Considere o sistema (6), estudado no Capítulo 2 com os valores de parâmetros a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Então, o ponto de equilíbrio $(0,0,1)$ é um ponto espiral estável para (2) se $a < 0, bd < -\frac{c^2}{2}, c < 0$. Se $a < 0, bd < -\frac{c^2}{2}$ e $c = 0$, então $(0,0,1)$ é ponto espiral fracamente estável. E, se $a < 0, bd < -\frac{c^2}{2}$ e $c > 0$, $(0,0,1)$ se torna um ponto espiral*

instável e surge um pequeno ciclo limite estável envolvendo $(0,0,1)$. Ou seja, ocorre uma bifurcação de Hopf em $(0,0,1)$ para o valor crítico $c = 0$.

Demonstração. Considerando o polinômio característico associado a matriz jacobiana do sistema (6) aplicado no ponto de equilíbrio $(0,0,1)$ dado por

$$\lambda^3 - 2(a+c)\lambda^2 - 2(-2ca+bd)\lambda + 4abd = 0 \quad (45)$$

onde tomando $\alpha_1 = -2(a+c)$, $\alpha_2 = -2(-2ca+bd)$ e $\alpha_3 = 4abd$.

Usando o teorema anterior, temos

- $\alpha_1 > 0$ se $a < -c$;
- $\alpha_2 > 0$ se $c > \frac{bd}{2a}$;
- $\alpha_3 > 0$ se $abd > 0$;
- $\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3 > 0$ se $c > 0$ ou $c > -a + \frac{bd}{2}$

Assim, com base nisso temos que

- Se $-a > c > \frac{bd}{2a}$, $a < 0$, $bd < 0$, $c > 0$ ou $c < -a + \frac{bd}{2}$ temos que o ponto de equilíbrio $(0,0,1)$ é estável;
- Se $abd > 0$ e $c < 0$ ou $c > -a + \frac{bd}{2}$, temos que $(0,0,1)$ tem duas raízes com parte real positiva e uma raiz real negativa;
- Se $-a > c > \frac{bd}{2a}$, $a < 0$, $bd < 0$, $c = 0$ ou $c = -a + \frac{bd}{2}$, então o equilíbrio $(0,0,1)$ tem duas raízes complexas conjugadas com parte real nula e uma raiz real negativa, o que configura uma das condições para a ocorrência da bifurcação de Hopf.

Para comprovar a existência de tal bifurcação que ocorre no ponto de equilíbrio $(0,0,1)$ para o valor crítico $c = 0$, devemos calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov do sistema (6), como vimos nas seções anteriores. Para isso, usaremos o algoritmo apresentado por Kuznetsov e daí, obtemos

$$l(1) = -0.01848671524$$

para valores de parâmetros $a = -1$, $b = -1$ e $d = 3$. Logo, a bifurcação de Hopf que ocorre para o sistema é supercrítica. ■

Para o ponto de equilíbrio $(0,0,-1)$, vale o seguinte teorema, cuja prova é feita de maneira análoga.

Teorema 14 *Considere o sistema (6) com os valores de parâmetros a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Então, o ponto de equilíbrio $(0,0,-1)$ é um ponto espiral estável para (6) se $a > 0$, $bd > -\frac{c^2}{2}$, $c > 0$ e surge um pequeno ciclo limite estável envolvendo $(0,0,-1)$. Se $a > 0$, $bd > -\frac{c^2}{2}$, e $c = 0$, então $(0,0,-1)$ é ponto espiral fracamente estável. E, se $a > 0$, $bd > -\frac{c^2}{2}$ e $c < 0$, $(0,0,-1)$ se torna um ponto espiral instável. Ou seja, ocorre uma bifurcação de Hopf em $(0,0,-1)$ para o valor crítico $c = 0$.*

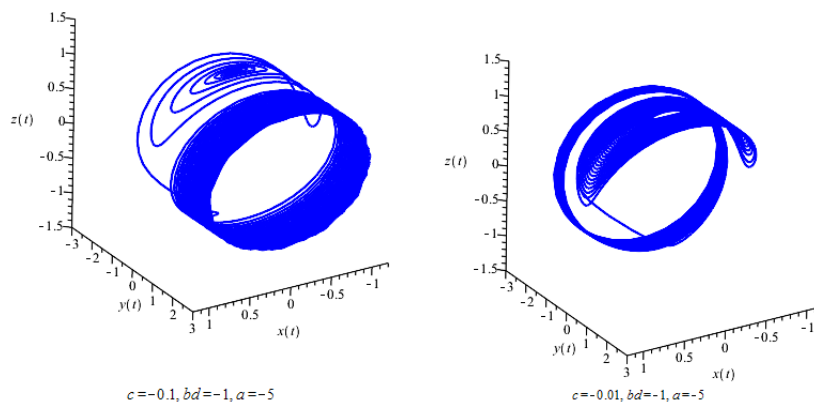


Figura 4.3: Retrato de fase do sistema (6): a) Espiral estável para o valor de parâmetro $c = -0.5$; b) Espiral fracamente estável para o valor de parâmetro $c = -0.01$.

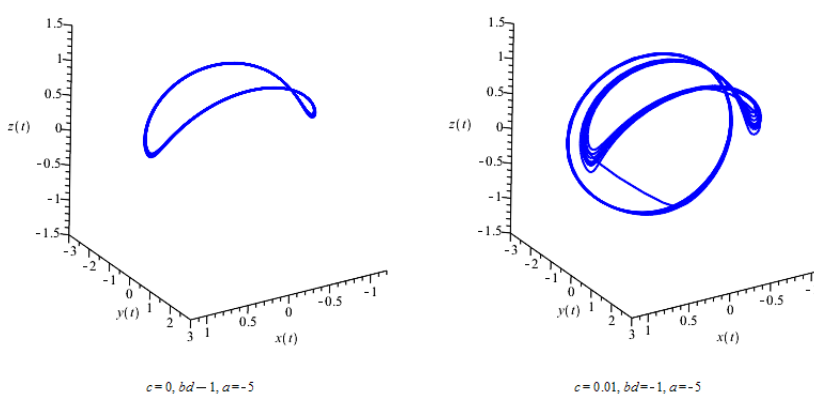


Figura 4.4: Retrato de fase do sistema (6): a) Ciclo limite criado com a bifurcação de Hopf que ocorre quando c passa pelo valor crítico $c = 0$; b) Espiral instável para o valor $c = 0.05$.

Análise no Infinito

No estudo do retrato de fase de campos vetoriais polinomiais definidos no \mathbb{R}^2 , em geral aparecem soluções ilimitadas que tendem para o infinito e que, portanto, não podem ser completamente estudadas em regiões compactas do plano. No entanto, existem técnicas como a compactificação de Poincaré que permite o estudo qualitativo global das soluções não limitadas de campos vetoriais polinomiais da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

onde P e Q são polinômios reais, de grau menor ou igual a n , nas variáveis x e y . Tal técnica consiste basicamente em mudanças de variáveis, que transforma o sistema (1) em um sistema definido na esfera \mathbb{S}^2 , menos o equador. Em seguida, multiplicando-se este sistema por um fator positivo, é possível estendê-lo analiticamente ao equador, que corresponde aos pontos do plano no infinito, além de ser invariante pelo sistema estendido.

O processo de compactificação proposto por Henri Poincaré pode também ser estendido a campos vetoriais polinomiais definidos no \mathbb{R}^n , como mostrado em [3] e [11], por exemplo. Neste caso mais geral, um campo vetorial polinomial X pode ser estendido de maneira única a um campo vetorial analítico na esfera \mathbb{S}^n , permitindo o estudo de X em uma vizinhança do infinito que é dado pelo equador \mathbb{S}^{n-1} da esfera \mathbb{S}^n .

Um recurso importante no estudo de campos polinomiais no disco de Poincaré é o programa *P4-Planar Polynomial Phase Portraits* que foi desenvolvido em regime de colaboração por pesquisadores da Espanha e Bélgica e com ele é possível obter o retrato de fase do sistema no disco de Poincaré ou no disco de Poincaré-Lyapunov, a critério do usuário. Além disso, podemos obter o retrato de fase do sistema próximo a alguma singularidade em uma parte finita do plano, bem como em qualquer uma das tradicionais cartas utilizadas no processo de compactificação. Um tutorial deste programa pode ser encontrado no Capítulo 9 de [4].

5.1 Técnica de Compactificação de Poincaré

5.2 Cartas Locais

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em três variáveis reais dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y, z) \\ \dot{y} &= Q(x, y, z) \\ \dot{z} &= R(x, y, z)\end{aligned}\tag{2}$$

onde P , Q e R são polinômios de grau arbitrário nas variáveis x , y e z . Ao sistema (2) está associado o campo vetorial polinomial $X = (P, Q, R)$, cujo grau n é definido como $n = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q), \text{grau}(R)\}$.

Em \mathbb{R}^4 , consideremos a esfera $\mathbb{S}^3 = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$, denominada esfera de Poincaré e $H_+ = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_4 > 0\}$, $H_- = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_4 < 0\}$ e $\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_4 = 0\}$ que são respectivamente os hemisférios norte e sul e o equador da esfera de Poincaré.

Denotemos o espaço tangente a \mathbb{S}^3 no ponto y por $T_y\mathbb{S}^3$. Desta forma, o espaço tangente no ponto $(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{S}^3$, dado por,

$$T_{(0,0,0,1)}\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, 1) \in \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$$

que pode ser identificado com o espaço \mathbb{R}^3 .

A projeção do campo vetorial X de \mathbb{R}^3 em \mathbb{S}^3 é obtida usando as projeções centrais definidas por $f_+ : \mathbb{R}^3 = T_{(0,0,0,1)}\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ e $f_- : \mathbb{R}^3 = T_{(0,0,0,1)}\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ dadas por:

$$f_{\pm} = \pm(x_1, x_2, x_3, 1)/\Delta x$$

onde $\Delta x = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^3 x_i^2}$, $i = 1, 2, 3$. Através das projeções centrais, o espaço \mathbb{R}^3 é identificado com os hemisférios norte e sul da esfera \mathbb{S}^3 . Além disso, o equador de \mathbb{S}^3 , dado por $\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_4 = 0\}$, pode claramente ser identificado com os pontos de \mathbb{R}^3 no infinito. As projeções f_+ e f_- determinam duas cópias do campo vetorial X sobre \mathbb{S}^3 , uma delas $Df_+ \circ X$ no hemisfério norte e a outra $Df_- \circ X$ no hemisfério sul. Denotemos por \bar{X} o campo vetorial definido em $\mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{S}^2 = \mathbb{S}_+ \cup \mathbb{S}_-$ que, restrito a \mathbb{S}_+ coincide com $Df_+ \circ X$ e restrito a \mathbb{S}_- coincide com $Df_- \circ X$. O campo vetorial $\bar{X}(y)$ pode ser estendido à esfera \mathbb{S}^3 toda, através da multiplicação pelo fator positivo y_4^{n-1} , onde n é o grau do campo vetorial X , com o que obtemos o campo estendido $p(X)(y) = y_4^{n-1}\bar{X}(y)$. Como \mathbb{S}^3 é uma variedade diferenciável, para obtermos as expressões do campo compactificado $p(X)$ tomamos oito cartas locais $(U_i, F_i), (V_i, G_i)$, onde

$$U_i = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_i > 0\}, \quad V_i = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_i < 0\},$$

para $i = 1, 2, 3, 4$; os difeomorfismos $F_i, G_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ para $i = 1, 2, 3, 4$ são dados pela transformação inversa da projeção central da origem sobre o espaço tangente à \mathbb{S}^3 nos pontos $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$ e $(0, 0, 0, \pm 1)$, respectivamente.

Façamos os cálculos para obtenção da expressão do campo na carta U_1 . Suponha que a origem $(0, 0, 0, 0)$, o ponto $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{S}^3$ e o ponto $(1, z_1, z_2, z_3)$ no espaço tangente a \mathbb{S}^3 em $(1, 0, 0, 0)$ são colineares. Desta forma temos

$$1/y_1 = z_1/y_2 = z_2/y_3 = z_3/y_4,$$

e, conseqüentemente, $F_1(y) = (y_2/y_1, y_3/y_1, y_4/y_1) = (z_1, z_2, z_3)$ define as coordenadas em U_1 . Como

$$DF_1(y) = \begin{pmatrix} -y_2/y_1^2 & 1/y_1 & 0 & 0 \\ -y_3/y_1^2 & 0 & 1/y_1 & 0 \\ -y_4/y_1^2 & 0 & 0 & 1/y_1 \end{pmatrix}$$

e $y_4^{n-1} = (z_3/\Delta z)^{n-1}$, o campo vetorial analítico $p(X)$ é escrito como

$$\frac{z_3^n}{(\Delta z)^{n-1}}(-z_1P + Q, -z_2P + R, -z_3P). \quad (3)$$

Procedendo analogamente ao que foi feito para a carta U_1 , temos que as expressões de $p(X)$ nas cartas U_2 , U_3 , e U_4 são dadas por:

$$\frac{z_3^n}{(\Delta z)^{n-1}}(-z_1Q + P, -z_2Q + R, -z_3Q) \quad (4)$$

na carta U_2 e,

$$\frac{z_3^n}{(\Delta z)^{n-1}}(-z_1R + P, -z_2R + Q, -z_3R) \quad (5)$$

na carta U_3 . A expressão de $p(X)$ na carta U_4 é

$$z_3^{n+1}(P, Q, R). \quad (6)$$

Por simetria, as expressões para $p(X)$ nas cartas locais V_i , $i = 1, 2, 3, 4$ são as mesmas que nas cartas U_i , multiplicadas por $(-1)^{n-1} = -1$, onde n é o grau do campo vetorial considerado. Usualmente, considera-se a projeção ortogonal do campo compactificado $p(X)$ do hemisfério norte fechado $\mathbb{S}_+ = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_4 \geq 0\}$ em $y_4 = 0$. Tal projeção consiste de uma bola fechada B , de raio um, cujo interior é difeomorfo ao \mathbb{R}^3 e cuja fronteira, dada pela esfera \mathbb{S}^2 , corresponde aos pontos do \mathbb{R}^3 no infinito. Assim, $p(X)$ fica definido na bola fechada B , de tal maneira que a fronteira \mathbb{S}^2 é invariante pelo fluxo de $p(X)$. Este novo campo vetorial definido em B é chamado de compactificação de Poincaré do campo vetorial polinomial X , e B é chamada de bola de Poincaré. Além disso, a esfera \mathbb{S}^2 , que é a fronteira de B e corresponde aos pontos no infinito do \mathbb{R}^3 , é chamada de esfera de Poincaré ou esfera do infinito.

Observe que todos os pontos da esfera invariante \mathbb{S}^2 no infinito nas coordenadas de qualquer carta local U_i e V_i tem $z_3 = 0$. Enquanto isso, os pontos no interior da bola de Poincaré, difeomorfa ao \mathbb{R}^3 , são dados nas cartas U_i , $i = 1, 2, 3$ para $z_3 > 0$ e nas cartas V_i , $i = 1, 2, 3$ para $z_3 < 0$. Ver a figura 5.1. Com o processo de compactificação apresentado obtemos seis campos vetoriais polinomiais definidos nas cartas locais U_i e V_i com $i = 1, 2, 3$ e assim, estudamos esses campos vetoriais usando a compactificação de Poincaré, agora em \mathbb{R}^2 , afim de obter seis campos vetoriais definidos no disco de Poincaré, correspondendo aos pontos no infinito de cada carta local.

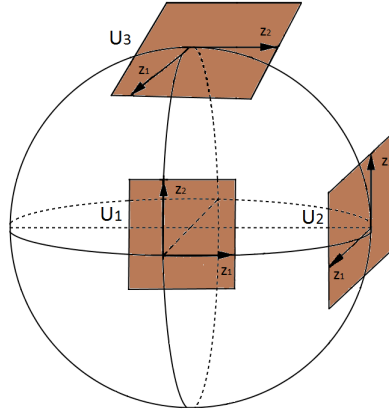


Figura 5.1: Orientação das cartas locais $U_i, i = 1, 2, 3$ nos pontos infinitos na direção positiva dos eixos coordenados x, y e z , usados para desenhar o retrato de fase do sistema (2) na esfera de Poincaré no infinito.

5.3 Análise do Sistema Compactificado

Nesta seção usamos a técnica de compactificação de Poincaré no sistema (2) com o propósito de estudar o comportamento global do mesmo.

Os retratos de fase do campo vetorial são feitos usando o software matemático Maple e os retrato de fase do campo compactificado são feitos com o auxílio do programa *Polynomial Planar Phase Portraits (P4)*, com o qual se estuda o sistema compactificado em cada uma das cartas U_i e $V_i, i = 1, 2, 3$, conforme descrito na seção anterior.

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 + z^2 - 1)a + 2z(xc + yd) \\ \dot{y} &= bx \\ \dot{z} &= (x^2 + z^2 - 1)a - 2x(xc + yd) \end{aligned} \quad (7)$$

cuja análise finita foi desenvolvida nos capítulos 3 e 4. Vimos que os pontos singulares são $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Usando a expressão (3), obtemos a expressão de $p(X)$ na carta local U_1

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1a - z_1az_2^2 + z_1az_3^2 - 2z_1z_2c - 2z_2z_1^2d + bz_3 \\ \dot{z}_2 &= -z_2a - az_2^3 + z_2az_3^2 - 2z_2^2c - 2z_2^2z_1d + a + az_2^2 - az_3^2 - 2c - 2z_1d \\ \dot{z}_3 &= -z_3(a + az_2^2 - az_3^2 + 2z_2c + 2z_1z_2d). \end{aligned} \quad (8)$$

Considerando $z_3 = 0$, o que corresponde aos pontos da esfera \mathbb{S}^2 no infinito, o sistema (8) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1a - z_1az_2^2 - 2z_1z_2c - 2z_2z_1^2d \\ \dot{z}_2 &= -z_2a - az_2^3 - 2z_2^2c - 2z_2^2z_1d + a + az_2^2 - 2c - 2z_1d \end{aligned} \quad (9)$$

que possui duas singularidades reais e duas complexas

$$\left(0, \frac{a-2c}{a}\right), \left(\frac{a-c}{d}, -1\right), (0, i), \left(-\frac{c}{d}, i\right)$$

A análise dos autovalores das singularidades reais nos diz que para $a > 2c > 0$ (respectivamente $0 > a > 2c$) o equilíbrio $\left(0, \frac{a-2c}{a}\right)$ é nó estável (respectivamente instável). Já a singularidade $\left(\frac{a-c}{d}, -1\right)$ é nó estável (resp. instável) se $a > c/2 > 0$ (resp. $0 > a > c/2$) e é sela-nó se $a = c$. Note que as únicas separatrizes do sistema são as do ponto de sela. Segue abaixo o retrato de fase do sistema na carta U_1 .

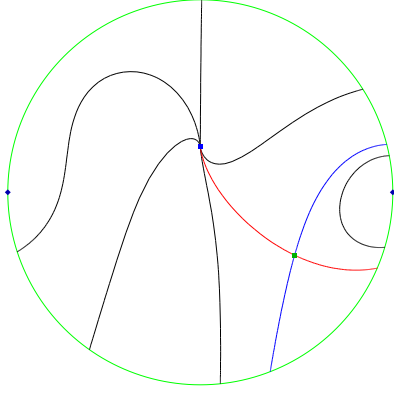
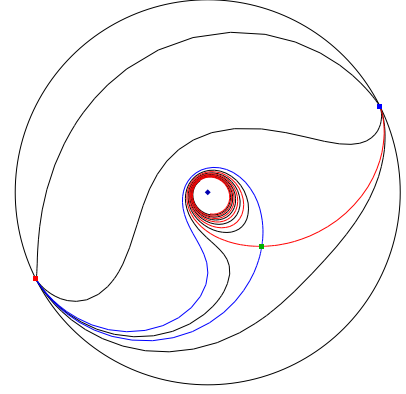
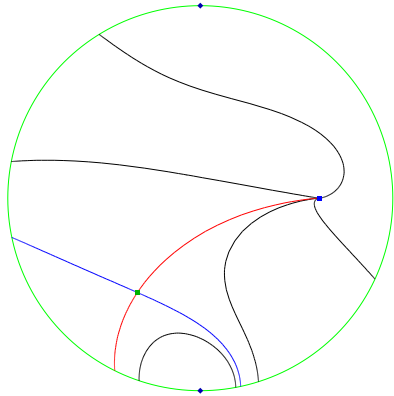
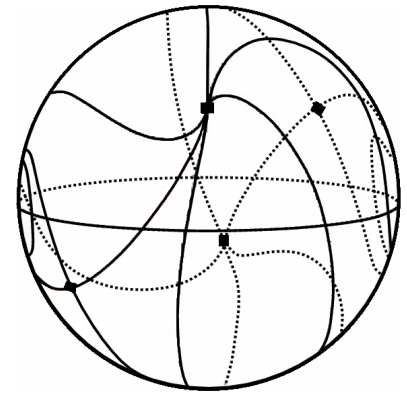
Figura 5.2: Carta U_1 Figura 5.3: Carta U_2 Figura 5.4: Carta U_3 

Figura 5.5: Esfera de Poincaré

Figura 5.6: Retrato de fase do sistema (7) no infinito para valores de parâmetro $a > 0$, $c > 0$.

Para a carta U_2 , temos que a expressão do campo compactificado é dado por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1^2 b z_3 + a z_1^2 + a z_2^2 - a z_3^2 + 2z_1 z_2 c + 2z_2 d \\ \dot{z}_2 &= -z_2 b z_1 z_3 + a z_1^2 + a z_2^2 - a z_3^2 - 2z_1^2 c - 2z_1 d \\ \dot{z}_3 &= -z_3^2 b z_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Considerando $z_3 = 0$, o que corresponde aos pontos da esfera \mathbb{S}^2 no infinito, o sistema (10) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= az_1^2 + az_2^2 + 2z_1z_2c + 2z_2d \\ \dot{z}_2 &= az_1^2 + az_2^2 - 2z_1^2c - 2z_1d \end{aligned} \tag{11}$$

cujas singularidades são

$$(z_1 = 0, z_2 = 0), \left(z_1 = -\frac{d}{c}, z_2 = \frac{id}{c}\right), \left(z_1 = \frac{d}{a-c}, z_2 = -\frac{d}{a-c}\right)$$

Analisando os autovalores do ponto singular $\left(\frac{d}{a-c}, -\frac{d}{a-c}\right)$ temos que para $0 > a > c/2$ (respectivamente $0 < a < c/2$) o ponto de equilíbrio é um nó estável (respectivamente instável) e para $c = a$ temos que a singularidade é do tipo sela-nó. As únicas separatrizes são as do ponto de sela.

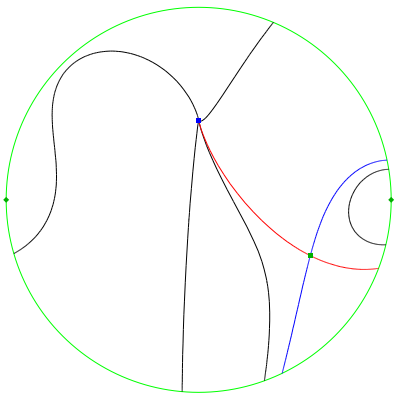


Figura 5.7: Carta U_1

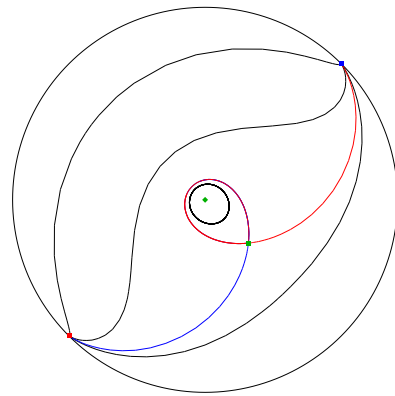


Figura 5.8: Carta U_2

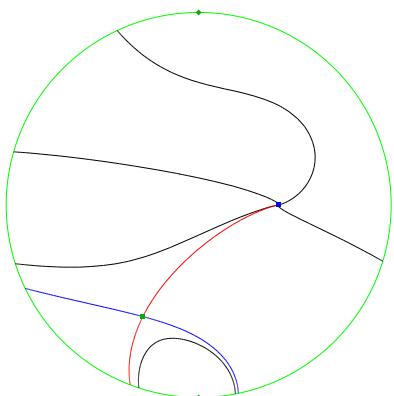


Figura 5.9: Carta U_3

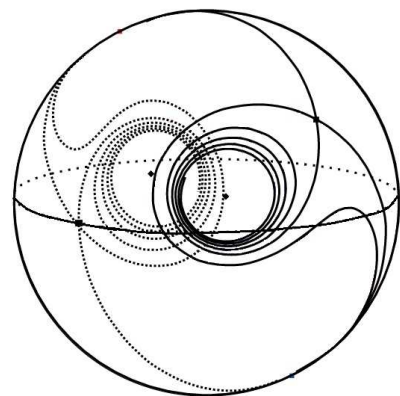


Figura 5.10: Esfera de Poincaré

Figura 5.11: Retrato de fase do sistema (7) no infinito para valores de parâmetro $a > 0$, $c = 0$.

Para a carta U_3 , temos que a expressão do campo compactificado é dado por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -az_1^3 - z_1a + z_1az_3^2 + 2z_1^3c + 2z_2z_1^2d + az_1^2 + a - az_3^2 + 2z_1c + 2z_2d \\ \dot{z}_2 &= -z_2az_1^2 - z_2a + z_2az_3^2 + 2z_2z_1^2c + 2z_2^2z_1d + z_1bz_3 \\ \dot{z}_3 &= -z_3(az_1^2 + a - az_3^2 - 2z_1^2c - 2z_1z_2d). \end{aligned} \quad (12)$$

Considerando $z_3 = 0$, o que corresponde aos pontos da esfera \mathbb{S}^2 no infinito, o sistema (12) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -az_1^3 - z_1a + 2z_1^3c + 2z_2z_1^2d + az_1^2 + a + 2z_1c + 2z_2d \\ \dot{z}_2 &= -z_2az_1^2 - z_2a + 2z_2z_1^2c + 2z_2^2z_1d \end{aligned} \quad (13)$$

cujas singularidades são

$$\left(\frac{a}{a-2c}, 0\right), (i, 0), \left(i, -\frac{ic}{d}\right), \left(-1, -\frac{a-c}{d}\right).$$

A análise das singularidades reais nos diz que o ponto $(a/(a-2c), 0)$ é nó estável (resp. nó instável) se $a > 2c > 0$ ($a < 2c < 0$), sela-nó se $a = c$, enquanto que $(-1, -(a-c)/d)$ é nó estável (resp. instável) se $0 > c > 2a$ ($0 < 2a < c$). Observe ainda que, como nas cartas anteriores, as únicas separatizes são as do ponto de sela.

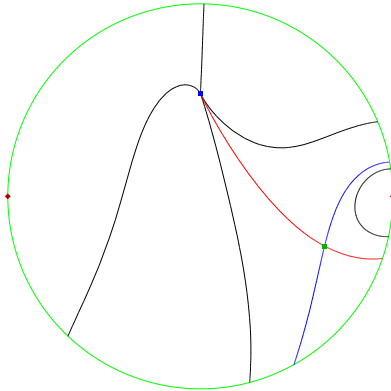


Figura 5.12: Carta U_1

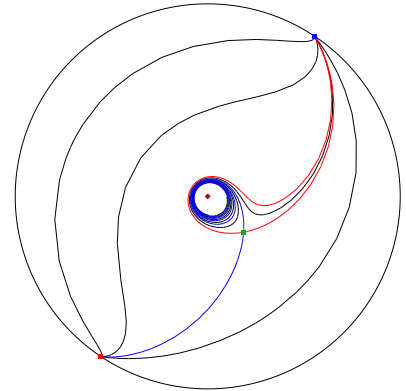


Figura 5.13: Carta U_2

5.4 Órbitas e Bifurcação Homoclínica

Uma trajetória homoclínica é o caminho cujos conjuntos α -limite e ω -limite constituem um mesmo ponto de sela, ou seja, é uma trajetória que é, ao mesmo tempo, variedade estável e variedade instável de um ponto de sela. Um sistema que apresenta tal comportamento, é o sistema no infinito, obtido com a compactificação estudada na seção anterior, na carta U_2 , ou seja, o sistema (11), que pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax^2 + ay^2 + 2xyc + 2yd \\ \dot{y} &= ax^2 + ay^2 - 2x^2c - 2xd \end{aligned} \quad (14)$$

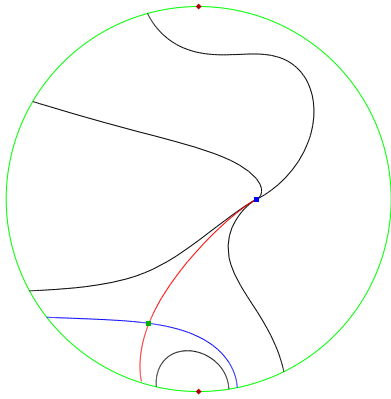


Figura 5.14: Carta U_3

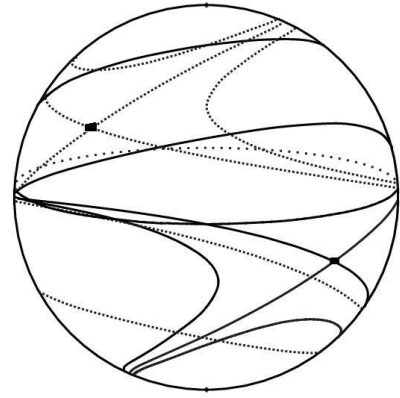


Figura 5.15: Esfera de Poincaré

Figura 5.16: Retrato de fase do sistema (7) no infinito para valores de parâmetro $a > 0$, $c < 0$.

Note que para o valor de parâmetro $c = 0$ o sistema apresenta uma integral primeira dada por

$$H(x, y) = ay + d \ln(x^2 + y^2) - ax \tag{15}$$

Igualando $H(x, y)$ a uma constante C_1 , obtêm-se curvas que descrevem as trajetórias percorridas pelo sistema no espaço de fase.

Resolvendo o sistema para $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$, obtemos dois pontos de equilíbrio $(0, 0)$ e $(d/(a - c), -d/(a - c))$. Observe que a origem é um centro e para determinados valores das constantes a , d e c o equilíbrio $(d/(a - c), -d/(a - c))$ é sela. A observação do retrato de fase indica que a trajetória da sela descreve órbitas homoclínicas em torno da origem, saindo de $(d/(a - c), -d/(a - c))$ e retornando a ela num tempo infinito.

Note que para o valor crítico $c = 0$, a trajetória homoclínica é destruída, o que configura a ocorrência da chamada bifurcação homoclínica.

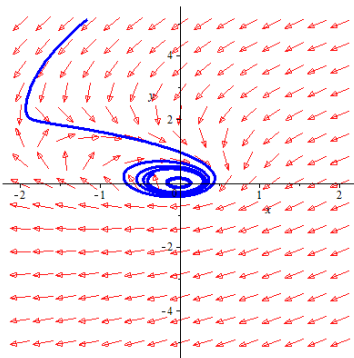


Figura 5.17: órbita homoclínica estável

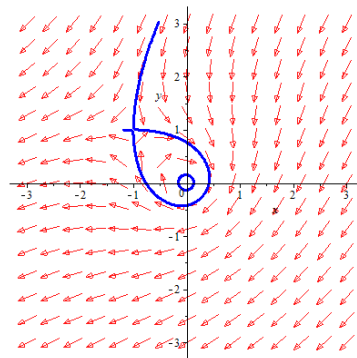


Figura 5.18: órbita homoclínica

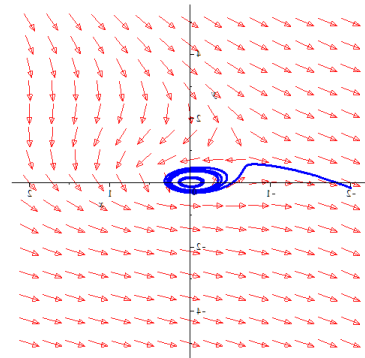


Figura 5.19: órbita homoclínica instável

Conclusão

O estudo e análise de uma classe de campos vetoriais ou sistemas diferenciais polinomiais definidos em \mathbb{R}^3 apresentando um cilindro como superfície algébrica invariante nos possibilitou determinar resultados interessantes acerca do comportamento dinâmico, como por exemplo a existência de integrais primeiras, órbitas homoclínicas e centros, contidos nestes cilindros, bem como a existência de uma bifurcação de Hopf quando variamos os parâmetros do sistema. Fizemos ainda os cálculos do primeiro coeficiente de Lyapunov com o auxílio do software Maple, também usado no desenvolvimento das simulações numéricas, que dão a descrição dos retratos de fase e que possibilitam comprovar a existência dos ciclos limites oriundo da bifurcação de Hopf.

Além disso, a análise do sistema via compactificação de Poincaré permitiu a análise global das soluções, inclusive das não limitadas e que tendem para o infinito e, com isso, observamos na carta compactificada U_2 a ocorrência de uma bifurcação homoclínica e de centros.

Portanto, a existência de um cilindro invariante, que determina uma restrição geométrica no espaço de fase, possibilitou o estudo de importantes propriedades dinâmicas do sistema estudado.

Cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov

A.1 Cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov para valores de parâmetro $bd < 0$ para o valor de bifurcação $c = 0$

Utilizando o software Maple, e baseando-nos em [5], temos o seguinte algoritmo que efetua o cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov para o sistema (2) do Capítulo 2. Considere o sistema n -dimensional

$$\dot{x} = F(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad (1)$$

com $n > 2$.

Temos

Passo 1: Encontre o valor crítico do parâmetro α_0 para o qual o sistema (1) possui um ponto de equilíbrio x_0 com autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, não havendo outros autovalores imaginários puros. Para $n = 3$, o valor crítico será encontrado resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} F(x, \alpha) &= 0, \\ \det M(x, \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

onde a matriz M é dada por

$$M = \begin{pmatrix} a_{22} + a_{11} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{33} + a_{11} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{33} + a_{22} \end{pmatrix}$$

e os a_{jk} são os elementos da matriz jacobiana $F_x(x, \alpha)$. Assim, temos que os autovalores de $A = F_x(x, \alpha_0)$, onde $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, são autovalores puramente imaginários, e $\lambda_3 \neq 0$.

Passo 2: Calcule os autovetores complexos $q, p \in \mathbb{C}^n$, que satisfazem

$$Aq = i\omega_0 q, A^t p = -i\omega_0 p, \langle p, q \rangle = 1$$

em que, $A = F_x(x, \alpha_0)$ e $\langle p, q \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{p}_k p_k$.

Passo 3: Encontre $s \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{C}^n$, tais que

$$As = B(q, \bar{q}), (2i\omega_0 I_n - A)r = B(q, q),$$

onde I_n é a matriz identidade $n \times n$ e $B(q, q)$ é definida por

$$B_i(q, p) = \sum_{j,k=1,\dots,n} \frac{\partial^2 F_i(x, \alpha_0)}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{x=x_0} q_j p_k,$$

para $i = 1, \dots, n$.

Passo 4: Calcule

$$l_1 = \frac{1}{2\omega_0} \text{Re}[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B(q, s) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, r) \rangle]$$

onde $B(q, \bar{q})$ é definida acima e

$$C_i(q, p, r) = \sum_{j,k,l=1,\dots,n} \frac{\partial^3 F_i(x, \alpha_0)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \Big|_{x=x_0} q_j p_k r_l,$$

para $i = 1, \dots, n$.

Assim, para o sistema (4) temos a seguinte sequência de comandos:

Nos cálculos seguintes os parâmetros a , b , c e d serão substituídos por $p[1]$, $p[2]$, $p[3]$ e $p[4]$, respectivamente.

```
> restart: >p[1] := -1 :
> p[2] := -1 :
> p[4] := 3:
>
> with(linalg): readlib(mtaylor): readlib(coeftayl):
>
>
> F[1] := (x[1]^2 + x[3]^2 - 1) * p[1] + 2 * x[3] * (x[1] * p[3] + x[2] * p[4]) :
> F[2] := p[2] * x[1] :
> F[3] := (x[1]^2 + x[3]^2 - 1) * p[1] - 2 * x[1] * (x[1] * p[3] + x[2] * p[4]):
```

Matriz Jacobiana do sistema:

```
> A := jacobian([F[1], F[2], F[3]], [x[1], x[2], x[3]]):
> B := transpose(A):
```

Matrizes Hessianas:

```
> H[1] := hessian(F[1], [x[1], x[2], x[3]]) :
> H[2] := hessian(F[2], [x[1], x[2], x[3]]) :
> H[3] := hessian(F[3], [x[1], x[2], x[3]]):
```

Matriz M:

```
M := matrix(3, 3, [A[2, 2] + A[1, 1], A[2, 3], -A[1, 3], A[3, 2], A[3, 3] +
```

$A[1, 1], A[1, 2], -A[3, 1], A[2, 1], A[3, 3] + A[2, 2]]$:

Encontrando os pontos de equilíbrio do sistema:

$sol := solve(F[1] = 0, F[2] = 0, F[3] = 0, det(M) = 0, p[3], x[1], x[2], x[3]);$
 $assign(sol[1]):$

Autovetores:

> $ev := eigenvects(map(eval, A), 'radical')$:
 > $q := ev[1][3][1]$:
 > $q1 := map(conjugate, q)$:
 > $ev := eigenvects(map(eval, B), 'radical')$:
 > $P := ev[3][3][1]$:
 > $P1 := map(conjugate, P)$:

Normalizando os autovetores:

> $sp := simplify(conjugate(evalm('&*'(transpose(P1), q))))$:
 > $p := map(simplify, map(evalc, evalm(P/sp)))$:
 > $p1 := map(conjugate, p)$:
 > $simplify(evalm('&*'(transpose(p1), q)))$:
 > $b := vector(3, [evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[1], q))), evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[2], q))), evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[3], q)))])$:
 > $c := vector(3, [evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[1], q1))), evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[2], q1))), evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[3], q1)))])$:
 > $s := evalm('&*'(inverse(A), c))$:
 > $r := evalm('&*'(inverse(2.44948974 * (2 * I) - A), b))$:
 > $f := vector(3, [evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[1], s))), evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[2], s))), evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[3], s)))])$:
 > $g := vector(3, [evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[1], r))), evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[2], r))), evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[3], r)))])$:

Função trilinear:

$A300 := diff(F[1], x[1], x[1], x[1])$:
 $A210 := diff(diff(F[1], x[1], x[1]), x[2])$:
 $A201 := diff(diff(F[1], x[1], x[1]), x[3])$:
 $A120 := diff(diff(F[1], x[2], x[2]), x[1])$:
 $A111 := diff(diff(diff(F[1], x[3]), x[2]), x[1])$:
 $A102 := diff(diff(F[1], x[3], x[3]), x[1])$:
 $A030 := diff(F[1], x[2], x[2], x[2])$:
 $A021 := diff(diff(F[1], x[2], x[2]), x[3])$:
 $A012 := diff(diff(F[1], x[3], x[3]), x[2])$:
 $A003 := diff(F[1], x[3], x[3], x[3])$:
 $B300 := diff(F[2], x[1], x[1], x[1])$:
 $B210 := diff(diff(F[2], x[1], x[1]), x[2])$:
 $B201 := diff(diff(F[2], x[1], x[1]), x[3])$:
 $B120 := diff(diff(F[2], x[2], x[2]), x[1])$:
 $B111 := diff(diff(diff(F[2], x[3]), x[2]), x[1])$:

```

B102 := diff(diff(F[2], x[3], x[3]), x[1]):
B030 := diff(F[2], x[2], x[2], x[2]):
B021 := diff(diff(F[2], x[2], x[2]), x[3]):
B012 := diff(diff(F[2], x[3], x[3]), x[2]):
B003 := diff(F[2], x[3], x[3], x[3]):
C300 := diff(F[3], x[1], x[1], x[1]):
C210 := diff(diff(F[3], x[1], x[1]), x[2]):
C201 := diff(diff(F[3], x[1], x[1]), x[3]):

```

```

C120 := diff(diff(F[3], x[2], x[2]), x[1]):
C111 := diff(diff(diff(F[3], x[3]), x[2]), x[1]):
C102 := diff(diff(F[3], x[3], x[3]), x[1]):
C030 := diff(F[3], x[2], x[2], x[2]):
C021 := diff(diff(F[3], x[2], x[2]), x[3]):
C012 := diff(diff(F[3], x[3], x[3]), x[2]):
C003 := diff(F[3], x[3], x[3], x[3]):

```

```

C[1] := A300 * q[1]^3 + 3 * A210 * q[1]^2 * q1[1] + 3 * A201 * q[1]^2 * q1[1] + 3 * A120 *
q[1] * (q[1]^2) + (6 * A111 * q[1] * q[1]) * q1[1] + 3 * A102 * q[1] * q1[1]^2 + A030 * q[1]^3 + 3 *
A021 * q[1]^2 * q1[1] + 3 * A012 * q[1] * q1[1]^2 + A003 * q1[1]^3:

```

```

C[2] := B300 * q[2]^3 + 3 * B210 * q[2]^2 * q1[2] + 3 * B201 * q[2]^2 * q1[2] + 3 * B120 *
q[2] * (q[2]^2) + (6 * B111 * q[2] * q[2]) * q1[2] + 3 * B102 * q[2] * q1[2]^2 + B030 * q[2]^3 + 3 *
B021 * q[2]^2 * q1[2] + 3 * B012 * q[2] * q1[2]^2 + B003 * q1[2]^3:

```

```

C[3] := C300 * q[3]^3 + 3 * C210 * q[3]^2 * q1[3] + 3 * C201 * q[3]^2 * q1[3] + 3 * C120 *
q[3] * (q[3]^2) + (6 * C111 * q[3] * q[3]) * q1[3] + 3 * C102 * q[3] * q1[3]^2 + C030 * q[3]^3 + 3 *
C021 * q[3]^2 * q1[3] + 3 * C012 * q[3] * q1[3]^2 + C003 * q1[3]^3:

```

```

C := vector(3, [C[1], C[2], C[3]]):

```

Se as derivadas de terceira ordem não fossem todas nulas precisaríamos considerar o vetor $C(q, q, q_1)$ e assim, o primeiro Coeficiente de Lyapunov seria dado pela expressão:

```

l[0] := simplify(evalc(Re(evalm('&*(transpose(p1), C))-2*evalm('&*(transpose(p1),
f)) + evalm('&*(transpose(p1), g)))/(2 * .3140224177)):

```

Mas, como as derivadas de terceira ordem são todas nulas, o primeiro coeficiente de Lyapunov é dado por:

```

> l[0] := simplify(evalc(Re(-4*p1[3]*q[1]*s[1]+2*p1[3]*q1[1]*r[1]))/(2*2.44948974)) :
-0.01848671524

```

A.2 Cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov para valores $bd < 0$ para o valor de bifurcação $c = 0$

```

> restart: > p[1] := -1 :
> p[2] := -1 :

```

```

> p[4] := 3:
>
> with(linalg): readlib(mtaylor): readlib(coeftayl):
>
>
> F[1] := (x[1]2 + x[3]2 - 1) * p[1] + 2 * x[3] * (x[1] * p[3] + x[2] * p[4]) :
> F[2] := p[2] * x[1] :
> F[3] := (x[1]2 + x[3]2 - 1) * p[1] - 2 * x[1] * (x[1] * p[3] + x[2] * p[4]):

```

Matriz Jacobiana do sistema:

```

> A := jacobian([F[1], F[2], F[3]], [x[1], x[2], x[3]]) :
> B := transpose(A):

```

Matrizes Hessianas:

```

> H[1] := hessian(F[1], [x[1], x[2], x[3]]) :
> H[2] := hessian(F[2], [x[1], x[2], x[3]]) :
> H[3] := hessian(F[3], [x[1], x[2], x[3]]):

```

Matriz M:

```

M := matrix(3, 3, [A[2, 2] + A[1, 1], A[2, 3], -A[1, 3], A[3, 2], A[3, 3] +
A[1, 1], A[1, 2], -A[3, 1], A[2, 1], A[3, 3] + A[2, 2]]):

```

Encontrando os pontos de equilíbrio do sistema:

```

sol := solve(F[1] = 0, F[2] = 0, F[3] = 0, det(M) = 0, p[3], x[1], x[2], x[3]);
assign(sol[3]):

```

Autovetores:

```

> ev := eigenvects(map(eval, A), 'radical') :
> q := ev[2][3][1] :
> q1 := map(conjugate, q) :
> ev := eigenvects(map(eval, B), 'radical') :
> P := ev[2][3][1] :
> P1 := map(conjugate, P):

```

Normalizando os autovetores:

```

> sp := simplify(conjugate(evalm('&*'(transpose(P1), q)))) :
> p := map(simplify, map(evalc, evalm(P/sp))) :
> p1 := map(conjugate, p) :
> simplify(evalm('&*'(transpose(p1), q))) :
> b := vector(3, [evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[1], q))), evalm('&*'(transpose(q), '&*
'(H[2], q))), evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[3], q)))]):
> c := vector(3, [evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[1], q1))), evalm('&*'(transpose(q), '&*
'(H[2], q1))), evalm('&*'(transpose(q), '&*'(H[3], q1)))]):
> s := evalm('&*'(inverse(A), c)) :

```

```

> r := evalm('&* '(inverse(2.44948974 * (2 * I) - A), b)) :
> f := vector(3, [evalm('&* '(transpose(q), '&* '(H[1], s))), evalm('&* '(transpose(q), '&* '(H[2], s))), evalm('&* '(transpose(q), '&* '(H[3], s)))] :
> g := vector(3, [evalm('&* '(transpose(q), '&* '(H[1], r))), evalm('&* '(transpose(q), '&* '(H[2], r))), evalm('&* '(transpose(q), '&* '(H[3], r)))] :

```

Função trilinear:

```

A300 := diff(F[1], x[1], x[1], x[1]) :
A210 := diff(diff(F[1], x[1], x[1]), x[2]) :
A201 := diff(diff(F[1], x[1], x[1]), x[3]) :
A120 := diff(diff(F[1], x[2], x[2]), x[1]) :
A111 := diff(diff(diff(F[1], x[3]), x[2]), x[1]) :
A102 := diff(diff(F[1], x[3], x[3]), x[1]) :
A030 := diff(F[1], x[2], x[2], x[2]) :
A021 := diff(diff(F[1], x[2], x[2]), x[3]) :
A012 := diff(diff(F[1], x[3], x[3]), x[2]) :
A003 := diff(F[1], x[3], x[3], x[3]) :
B300 := diff(F[2], x[1], x[1], x[1]) :
B210 := diff(diff(F[2], x[1], x[1]), x[2]) :
B201 := diff(diff(F[2], x[1], x[1]), x[3]) :
B120 := diff(diff(F[2], x[2], x[2]), x[1]) :
B111 := diff(diff(diff(F[2], x[3]), x[2]), x[1]) :
B102 := diff(diff(F[2], x[3], x[3]), x[1]) :
B030 := diff(F[2], x[2], x[2], x[2]) :
B021 := diff(diff(F[2], x[2], x[2]), x[3]) :
B012 := diff(diff(F[2], x[3], x[3]), x[2]) :
B003 := diff(F[2], x[3], x[3], x[3]) :
C300 := diff(F[3], x[1], x[1], x[1]) :
C210 := diff(diff(F[3], x[1], x[1]), x[2]) :
C201 := diff(diff(F[3], x[1], x[1]), x[3]) :

```

```

C120 := diff(diff(F[3], x[2], x[2]), x[1]) :
C111 := diff(diff(diff(F[3], x[3]), x[2]), x[1]) :
C102 := diff(diff(F[3], x[3], x[3]), x[1]) :
C030 := diff(F[3], x[2], x[2], x[2]) :
C021 := diff(diff(F[3], x[2], x[2]), x[3]) :
C012 := diff(diff(F[3], x[3], x[3]), x[2]) :
C003 := diff(F[3], x[3], x[3], x[3]) :

```

$$C[1] := A300 * q[1]^3 + 3 * A210 * q[1]^2 * q[1] + 3 * A201 * q[1]^2 * q[1] + 3 * A120 * q[1] * (q[1]^2) + (6 * A111 * q[1] * q[1]) * q[1] + 3 * A102 * q[1] * q[1]^2 + A030 * q[1]^3 + 3 * A021 * q[1]^2 * q[1] + 3 * A012 * q[1] * q[1]^2 + A003 * q[1]^3:$$

$$C[2] := B300 * q[2]^3 + 3 * B210 * q[2]^2 * q[1] + 3 * B201 * q[2]^2 * q[1] + 3 * B120 * q[2] * (q[2]^2) + (6 * B111 * q[2] * q[2]) * q[1] + 3 * B102 * q[2] * q[1]^2 + B030 * q[2]^3 + 3 * B021 * q[2]^2 * q[1] + 3 * B012 * q[2] * q[1]^2 + B003 * q[1]^3:$$

$$C[3] := C300 * q[3]^3 + 3 * C210 * q[3]^2 * q[1] + 3 * C201 * q[3]^2 * q[1] + 3 * C120 * q[3] * (q[3]^2) + (6 * C111 * q[3] * q[3]) * q[1] + 3 * C102 * q[3] * q[1]^2 + C030 * q[3]^3 + 3 * C021 * q[3]^2 * q[1] + 3 * C012 * q[3] * q[1]^2 + C003 * q[1]^3:$$

$$C021 * q[3]^2 * q1[3] + 3 * C012 * q[3] * q1[3]^2 + C003 * q1[3]^3:$$

$$C := \text{vector}(3, [C[1], C[2], C[3]]):$$

Se as derivadas de terceira ordem não fossem todas nulas precisaríamos considerar o vetor $C(q, q, q1)$ e assim, o primeiro Coeficiente de Lyapunov seria dado pela expressão:

$$l[0] := \text{simplify}(\text{evalc}(\text{Re}(\text{evalm}('&*(\text{transpose}(p1), C)) - 2 * \text{evalm}('&*(\text{transpose}(p1), f)) + \text{evalm}('&*(\text{transpose}(p1), g)))) / (2 * .3140224177)):$$

Mas, como as derivadas de terceira ordem são todas nulas, o primeiro coeficiente de Lyapunov é dado por:

$$> l[0] := \text{simplify}(\text{evalc}(\text{Re}(-4 * p1[3] * q[1] * s[1] + 2 * p1[3] * q1[1] * r[1])) / (2 * 2.44948974)) : \\ 0.01848671524$$

Referências

- [1] J. Llibre; M. Messias; A. C. Reinol. Normal Forms for Polynomial Differential Systems in \mathbb{R}^3 having an Invariant Quadric and a Darboux Invariant. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 25(1):16, 2015.
- [2] M. Messias; A. C. Reinol. Integrability and dynamics of quadratic three-dimensional differential systems having an invariant paraboloid. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 26(8):23, 2016.
- [3] A. Cima; J. Llibre. Bounded polynomial vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318:557–579, 1990.
- [4] F. Dumortier; J. Llibre; J. C. Artés. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 2 edition, 2006.
- [5] M. C. Galindo. Comportamento Caótico em Sistemas Dinâmicos e Aplicação no Estudo da Evolução de Tumores de Câncer. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista-FCT, 2012.
- [6] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 1998.
- [7] J. Llibre; M. Messias; P. R. Silva. On the global dynamics of the Rabinovich system. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41(275210):21, 2008.
- [8] J. Llibre; M. Messias; P. R. Silva. Global dynamics of the Lorenz system with invariant algebraic surfaces. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 20:3137–3155, 2010.
- [9] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA/CNPq, 1979.
- [10] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Westview Press, New York, 2001.
- [11] E. A. G. Velasco. Generic properties of polynomial vector fields at infinity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 143:201–222, 1969.
- [12] J. A. Véri. Estabilidade Global e Bifurcação de Hopf em um Modelo de HIV baseado em Sistemas do Tipo Lotka-Volterra. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista-FCT, 2013.