



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# Modelos Matemáticos e Equações Diferenciais Ordinárias.

**Rogério Piva**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora  
**Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti**

**2016**

517.384 Piva, Rogério

P693m Modelos Matemáticos e Equações Diferenciais Ordinárias./ Rogério Piva- Rio Claro: [s.n.], 2016.

86 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientadora: Marta Cilene Gadotti

1. Existência e Unicidade de Solução. 2. Sistemas Lineares. 3. Estabilidade. 4. Modelos de 1ª e 2ª Ordem. 5. Cálculo para Ensino Médio. I. Título

## TERMO DE APROVAÇÃO

Rogério Piva

MODELOS MATEMÁTICOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS.

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti  
Orientadora

Prof(a). Dr(a). Carina Alves  
IGCE/UNESP/Rio Claro(SP)

Prof. Dr. Wladimir Seixas  
CCTS/UFSCar/Sorocoba(SP)

**Rio Claro, 15 de Dezembro de 2016**

*Ao meu pai.*

# Agradecimentos

A minha mãe Tianinha, quem eu amo e admiro.

Aos meus amigos do mestrado: a Juliana, a Tássia, o Luiz Rodrigo e a Gabriela.

Aos professores do Instituto de Matemática: a Martinha, o Jamil, a Renata, o Thiago, a Suzy, a Alice e o Rawlilson.

Aos monitores de sala: o Vitor Simões e o Renanda.

Aos funcionários do Instituto de Matemática, do R.U. e da biblioteca.

A quem me apresentou o PROFMAT: o Pedro Braga.

Ao Departamento de Matemática da Unesp de Rio Claro, pela iniciativa desafiadora de promover o PROFMAT no campus de Rio Claro.

Gratidão por tudo.

*O verdadeiro discípulo é aquele que supera o mestre.*

Aristóteles.

# Resumo

As equações diferenciais ordinárias constituem ferramenta importante na modelagem de alguns problemas, sejam físicos, ecológicos, econômicos, etc. Neste trabalho são apresentados os resultados clássicos de equações diferenciais ordinárias, são realizadas algumas aplicações e finalmente é apresentada na proposta didática para o ensino médio em como a derivada de uma função pode ser calculada de uma forma intuitiva.

**Palavras-chave:** Existência e Unicidade de Solução, Sistemas Lineares, Estabilidade, Modelos de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> Ordem, Cálculo para Ensino Médio.

# Abstract

The ordinary differential equations are an important tool in the modeling of some problems, whether of physical, ecological or economical nature. In this work the classical results of ordinary differential equations are presented. Some of them are made and at the end there is a didactic proposal to find a derivate function in a intuitive way for high school students.

**Keywords:** Existence and Uniqueness of Solution, Linear Systems, Stability, 1st and 2nd Order Models, Calculus for High School.



# Lista de Figuras

1.1	Para $I \in [t_0 - a, t_0 + a]$ e $I \in [t_0 - \frac{b}{M}, t_0 + \frac{b}{M}]$ . . . . .	19
3.1	(a) Solução de equilíbrio $y_0$ estável (b) Solução de equilíbrio $y_0$ assintoticamente estável. . . . .	48
4.1	Modelos malthuseanos de crescimento populacional. . . . .	54
4.2	Curva logística conforme modelo de Verhulst. . . . .	57
4.3	Sistema massa e mola . . . . .	58
4.4	Relação entre $\delta$ e $c_1$ e $c_2$ . . . . .	61
4.5	Gráfico de $y(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta)$ . . . . .	61
4.6	Gráfico de $y(t) = R e^{-\frac{ct}{2m}} \cos(\omega_0 t - \delta)$ . . . . .	64
4.7	Órbita do sistema das equações (4.12) e (4.13). . . . .	69
4.8	Órbitas do sistema por (4.12) e (4.13). . . . .	69
5.1	Obtenção da reta tangente. . . . .	72
5.2	Estudo da função quadrática $f(x) = x^2$ . . . . .	72
5.3	Reta tangente . . . . .	73
5.4	Relação entre o comportamento de $f(x) = x^2$ com o sinal de $f'(x) = 2x$ . . . . .	75
5.5	Recipientes de mesma capacidade e altura $H$ . . . . .	75
5.6	Gráfico da altura do nível da água dos recipientes da Figura 5.5 em função do tempo $t$ . . . . .	76
5.7	Estudo de $\Delta y_i$ . . . . .	77
5.8	Corte meridional no recipiente (b) . . . . .	78
5.9	Tabela de População de habitantes de Artur Nogueira. . . . .	80
5.10	Tabela auxiliar para relacionar $n$ com o ano correspondente. . . . .	83
5.11	Gráfico e pontos obtidos através do software MATLAB. . . . .	83

# Sumário

<b>1</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>12</b>
1.1	Breve Introdução às Equações Diferenciais . . . . .	12
1.1.1	Classificando as Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	13
1.1.2	Soluções para EDO's . . . . .	15
1.2	Problema de Valor Inicial . . . . .	16
1.3	Existência e Unicidade de Solução de EDO de Primeira Ordem . . . . .	16
1.3.1	Iteradas de Picard . . . . .	17
1.3.2	Prova dos Resultados . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Sistemas de Equações Diferenciais</b>	<b>25</b>
2.1	Sistemas Homogêneos e Não Homogêneos . . . . .	25
2.2	Sistemas Lineares Homogêneos com os Coeficientes Constantes . . . . .	29
2.2.1	Exponencial Matricial . . . . .	34
2.2.2	O Método dos Autovalores e dos Autovetores para determinar Soluções . . . . .	36
2.3	Sistemas Lineares Não Homogêneos . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Estudo de Estabilidade</b>	<b>47</b>
3.1	Pontos de Equilíbrio . . . . .	47
3.2	Sistemas Lineares . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>53</b>
4.1	Dinâmica Populacional: Malthus e Verhulst . . . . .	53
4.2	Sistema Massa e Mola: Um Modelo de 2 <sup>a</sup> Ordem . . . . .	58
4.2.1	Vibrações Livres . . . . .	59
4.2.2	Vibrações Livres Amortecidas . . . . .	61
4.3	Presa e Predador: Um Modelo Não Linear . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Propostas de Atividades para o Ensino Médio: Pré Cálculo e Malthus</b>	<b>70</b>
5.1	Pré Cálculo . . . . .	70
5.1.1	Apresentando os Conceitos: 1 <sup>a</sup> Parte . . . . .	71
5.1.2	Aplicando os Conceitos: 2 <sup>a</sup> Parte . . . . .	75
5.1.3	Aprofundando os Conceitos: 3 <sup>a</sup> Parte . . . . .	78

5.2	Malthus: uma aplicação para as Funções Exponenciais . . . . .	80
5.2.1	Obtendo a Constante . . . . .	80
5.2.2	Construindo a Função . . . . .	81
5.2.3	Ajuste do Domínio . . . . .	82
	<b>Referências</b>	<b>85</b>

# Introdução

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre as equações diferenciais ordinárias (EDO) e algumas aplicações. A abordagem foi feita de forma qualitativa, preocupando-se em apresentar os conceitos e teoremas, todos devidamente provados.

Este trabalho é dividido em duas partes: a primeira parte abordando o estudo de sistemas lineares de equações diferenciais e aplicações e na segunda parte duas propostas didáticas para o profissional de matemática que leciona para o Ensino Médio.

Após um certo tempo de pesquisa, sobre qual tema seria abordado neste trabalho, a escolha foi feita na seguinte premissa: toda equação diferencial ordinária linear de ordem  $n$  pode ser expressa em forma de um sistema de  $n$  equações lineares ordinárias. Para o estudo desse conteúdo, escolheu-se duas obras como base: [1, 2].

A primeira pergunta a ser respondida quando se trabalha com modelos de equações diferenciais é com respeito à existência de solução para tal problema e depois se tal solução é única. De início, faz-se uma apresentação sobre os conceitos e elementos que definem uma EDO para então apresentar a demonstração de um dos teoremas mais importantes e que consiste na prova da existência e da unicidade da solução de problema de valor inicial (PVI). Este resultado é de extrema importância para o estudo dos sistemas lineares de EDO's.

Próximo passo é mostrar a conversão de uma EDO linear de ordem  $n$  em um Sistema Linear de EDO's de  $n$  equações, cujo procedimento é bem simples. Tendo então o sistema linear em mãos, o desafio nesta parte do trabalho é mostrar que o conjunto das soluções de um sistema de EDO's lineares homogêneas é um subespaço vetorial permitindo então que cada solução possa ser escrita como combinação linear de elementos de uma base de  $n$  vetores linearmente independentes, ou seja, com o auxílio da Álgebra Linear, pode-se então aplicar o conceito de base para gerar o espaço das soluções do sistema linear homogêneo.

Em seguida, fez-se o estudo sobre estabilidade de uma solução de equilíbrio de sistemas autônomos.

Depois das apresentações dos conceitos básicos e teóricos, devidamente demonstrados, aplica-se então em alguns modelos cuja finalidade é visualizar situações-problemas. A finalidade principal desta parte do trabalho é a aplicação da modelagem matemática para cada problema proposto e a apresentação de uma resolução algébrica, utilizando todos os conceitos apresentados inicialmente neste trabalho. Foram escolhidos 3 problemas de acordo com o grau de dificuldade na resolução de cada um, finalizando com um caso não linear.

São duas as propostas didáticas para a última parte do trabalho: A proposta didática pré-cálculo cujo objetivo é introduzir ao aluno de Ensino Médio, conceitos de cálculos de uma forma acessível e despretensiosa aos rigores matemáticos focando apenas em exemplos e visualizações da ideia intuitiva de derivada. A proposta didática Malthus consiste em apresentar ao aluno do Ensino Médio um conteúdo abordado neste trabalho.

Todos os gráficos, desenhos e ilustrações desse trabalho, com exceção ao gráfico apresentado na atividade na proposta didática Malthus que foi feito através do Matlab; foram devidamente construídos pelo autor desse trabalho através do programa Powerpoint.

De uma forma resumida, o primeiro capítulo apresenta todos os conceitos básicos e introdutórios sobre as EDO's e PVI focando principalmente nas soluções. Através das iteradas de Picard apresenta-se a demonstração da existência e unicidade de um PVI.

No segundo capítulo será abordado de forma qualitativa o estudo dos sistemas lineares de EDO's apresentando inicialmente todos os resultados necessários para se comprovar de que o conjunto solução é também um subespaço vetorial para então apresentar o Método dos Autovalores e Autovetores como método de resolução.

No terceiro capítulo o conceito de estabilidade de uma solução de equilíbrio é apresentado e comprovado apenas, limitando ao conteúdo necessário a este trabalho.

O quarto capítulo apresenta as aplicações de modelagem matemática consistindo de aplicações de EDO's lineares através do Modelo de Malthus e Verhulst; modelando o fenômeno físico massa-e-mola, estuda-se uma equação linear de 2ª ordem podendo então ser convertida um sistema linear de duas EDO's e também apresenta-se um modelo não-linear de sistemas de EDO's através do modelo presa e predador.

E finalmente o último capítulo consiste na parte didática deste trabalho apresentando duas propostas de atividades para o Ensino Médio.

# 1 Equações Diferenciais Ordinárias

Para uma melhor compreensão dos sistemas de EDO, é importante apresentar toda a base do conteúdo das EDO's, como notações e definições básicas e exemplos. Neste capítulo, a prova da existência e unicidade de um PVI descrito por uma EDO será o foco principal para então usar esse resultado no próximo capítulo. O estudo desse capítulo é baseado nas referências [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

## 1.1 Breve Introdução às Equações Diferenciais

**Definição 1.1.** *Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas. De modo geral, toda equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, denominaremos como equação diferencial (ED). Uma equação diferencial é chamada ordinária (EDO) se a função incógnita depende de apenas uma variável independente. Se a função incógnita depende de mais de uma variável independente, denomina-se como uma equação diferencial parcial (EDP) ou equação de derivadas parciais.*

Apesar dessa introdução abordar as equações diferenciais de modo geral, este trabalho consistirá de um estudo focado exclusivamente ao universo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

A derivada de uma função pode ser expressa através de três notações oficiais:

- Notação  $\frac{dy}{dx}$ : representa a derivada da função  $y = y(x)$  em relação à  $x$ .
- Notação  $y'$  por apóstrofos: também representa a derivada da função  $y = y(x)$  em relação à  $x$ ; notação mais usual nas representações de EDO's.
- Notação  $\dot{x}$ : representa a derivada da função  $x = x(t)$  em relação a variável independente  $t$  tempo.
- Notação  $\frac{\partial y}{\partial x}$ : representa a derivada parcial da função  $y$  em relação a  $x$ , em que  $y$  possui mais de uma variável independente.

**Exemplo 1.2.** Alguns casos de EDO's envolvendo as notações citadas anteriormente:

$$\frac{dy}{dx} + 3x = 2, \quad (1.1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 5y = 0. \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} \dot{u} = 3v - 5t \\ \dot{v} = u + v - 5 \cos t. \end{cases}, 000000 \quad (1.3)$$

Pode-se escrever o sistema de equações diferenciais (1.3) na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v - 5t \\ u + v - 5 \cos t \end{bmatrix}$$

↕

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5t \\ -5 \cos t \end{bmatrix}.$$

Se  $X = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ ,  $\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , e  $b(t) = \begin{bmatrix} -5t \\ -5 \cos t \end{bmatrix}$  em que  $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , obtém-se um sistema de EDO's da seguinte forma:

$$\dot{X} = AX + b(t).$$

Mais alguns exemplos de EDO:

$$y' + y - 2x = 0,$$

$$2y'' + 3y' - x^2y' = 5y.$$

Serão usadas as notações  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$  para representar a derivada de ordem um, dois e três respectivamente. Genericamente a notação  $y^{(n)}$  ou  $\frac{d^n y}{dt^n}$  representa a derivada de  $y$  de ordem  $n$ . Como exemplos, temos:

$$\begin{aligned} y^{(5)} &= 2y + 1, \\ t \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial v} &= u^2, \\ t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

### 1.1.1 Classificando as Equações Diferenciais Ordinárias

Define-se a ordem de uma EDO como sendo a ordem da mais alta derivada que aparece na equação diferencial. Verifica-se que a ordem da equação (1.1) é de primeira ordem (ou ordem um); analisando a equação (1.2) nota-se que apesar de  $\frac{dy}{dx}$  estar elevado ao cubo, a ordem da equação será dois caracterizando assim uma equação diferencial de segunda ordem.

A seguir, alguns tipos específicos de EDO's.

## Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Toda equação diferencial do tipo

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = f(x),$$

será classificada como equação diferencial ordinária linear de ordem  $n$ .

As duas principais características das equações diferenciais ordinárias lineares são:

- i. A função incógnita e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo a função incógnita é um.
- ii. Os coeficientes da equação depende exclusivamente da variável independente.

Toda equação que não é linear é chamada de *não-linear*.

### Exemplo 1.3.

$$y'' - 2y' - y = 0, \quad (1.5)$$

$$x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 5x \frac{dy}{dx} - 7y = e^{2x}, \quad (1.6)$$

$$y \frac{dy}{dx} + 2x = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y^3 = 0. \quad (1.8)$$

As equações (1.5) e (1.6) são equações diferenciais ordinárias lineares de segunda e terceira ordem, respectivamente. As equações (1.7) e (1.8) são equações diferenciais ordinárias não lineares de primeira e segunda ordem respectivamente. Note que a condição da variável dependente ser um coeficiente da equação (1.7) enquanto na (1.8) a variável dependente possui expoente diferente de um, faz com que estas equações não se enquadrem nas condições de EDO's lineares.

## Equações Diferenciais Homogêneas

Toda equação diferencial que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.9)$$

é chamada de equação diferencial *homogênea*. Por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

é homogênea, pois pode ser escrita da forma

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Uma equação diferencial é *não-homogênea* se não for possível expressar a equação diferencial na forma (1.9).



## Equações Diferenciais Autônomas

Uma equação diferencial é *autônoma* se a função  $f$  depende apenas da variável dependente, isto é, toda equação diferencial autônoma é do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

A equação diferencial será identificada como *não-autônoma* caso a função  $f$  dependa também da variável independente.

### 1.1.2 Soluções para EDO's

Considere  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $\Omega$  aberto. Uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem será representada por

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1.10)$$

**Definição 1.4.** Qualquer função  $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$  definida em algum intervalo  $I$ , que quando substituída na equação diferencial, isto é,  $\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(t, \tilde{x}(t)) \forall t \in I$ , é chamada de solução de (1.10) no intervalo  $I$ .

**Exemplo 1.5.** A seguir alguns exemplos de soluções de equações diferenciais:

a) *Equação diferencial:*  $2y' + y = 0$ ,  
*Uma solução:*  $y = e^{-\frac{x}{2}}$ .

Para verificar que de fato  $y$  é solução, deriva-se a função em relação à  $x$ :

$$y' = e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right).$$

Assim:

$$2y' + y = 2\left[e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)\right] + e^{-\frac{x}{2}} = -e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} = 0.$$

b) *Equação diferencial:*  $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}$ .  
*Uma solução:*  $y = e^{3x} + 10e^{2x}$ .

De fato:

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x} + 20e^{2x}.$$

Assim:

$$\frac{dy}{dx} - 2y = [3e^{3x} + 20e^{2x}] - 2(e^{3x} + 10e^{2x}) = 3e^{3x} + 20e^{2x} - 2e^{3x} - 20e^{2x} = e^{3x}.$$

c) *Equação diferencial:*  $y'' - 6y' + 13y = 0$ .  
*Uma solução:*  $y = e^{3x} \cos 2x$ .

De fato:

$$y' = e^{3x}(3 \cos 2x - 2 \sin 2x), \text{ e}$$

$$y'' = e^{3x}(5 \cos 2x - 12 \sin 2x).$$

Assim:

$$y'' - 6y' + 13y = e^{3x}(5 \cos 2x - 12 \sin 2x) - 6e^{3x}(3 \cos 2x - 2 \sin 2x) + 13e^{3x} \cos 2x = 5e^{3x} \cos 2x - 12e^{3x} \sin 2x - 18e^{3x} \cos 2x + 12e^{3x} \sin 2x + 13e^{3x} \cos 2x = 0.$$

## 1.2 Problema de Valor Inicial

Um *problema de valor inicial* (PVI) consiste em uma equação diferencial, juntamente com condições iniciais impostas à função incógnita e suas derivadas, desde que essas condições iniciais sejam restritas a um mesmo valor fixado da variável independente.

Abordando apenas o conjunto das equações diferenciais de primeira ordem, temos:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sujeita à condição inicial  $y(x_0) = y_0$  em que  $x_0$  é um número em algum intervalo  $I$  e  $y_0$  é um elemento de  $\mathbb{R}^n$ .

Também pode-se definir um problema de valor inicial quando depara-se com a situação:

resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.11}$$

que satisfaça

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.12}$$

A solução de um PVI possibilita visualizar uma de várias soluções da EDO ou seja, geometricamente falando esta solução está contida numa coleção de funções que satisfaz a equação diferencial em algum intervalo  $I$  contendo a condição inicial  $x_0$ .

Para que a EDO admita uma solução, esta deverá satisfazer algumas condições para comprovar sua existência e sua unicidade. Este conteúdo será abordado na próxima seção.

## 1.3 Existência e Unicidade de Solução de EDO de Primeira Ordem

Nesta seção será provada a existência para o caso escalar.

Supondo que  $f$  seja contínua numa região  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e que  $(x_0, y_0)$  seja um ponto arbitrário de  $D$ , resolver um problema de valor inicial envolvendo equações diferenciais de primeira ordem é equivalente a determinar uma função contínua  $y(x)$  definida em algum intervalo  $I$  contendo  $x_0$ , tal que  $y(x)$  satisfaça a seguinte equação integral:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \tag{1.13}$$

Partindo do PVI (1.11) (1.12) e integrando ambos os lados, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, chega-se à equação integral desejada. O próximo passo será buscar a solução da equação integral através da construção de uma sequência de funções que convergem para a solução  $y(x)$  tão desejada, conseguindo desta forma, recursos necessários para provar que  $y(x)$  existe e é única.

### 1.3.1 Iteradas de Picard

Antes de iniciar a demonstração do teorema central desta seção, é pertinente entender o raciocínio de Picard que o levou à demonstração do teorema. Nessa subseção apenas destaca-se as iteradas através de um exemplo de fácil visualização e compreensão para que o leitor possa perceber o método.

Por exemplo, a partir do PVI:

$$y' = ky,$$

$$y(0) = 1.$$

Neste caso,  $f(x, y) = ky$ ,  $y_0 = 1$  e  $x_0 = 0$  deseja-se encontrar uma sequência de funções  $(y_n)$ , tal que

$$y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \quad (1.14)$$

em que

$$f(t, y_{n-1}) = ky_{n-1}.$$

Percebe-se que para cada iterada, gera-se um termo  $y_n$  em função de  $y_{n-1}$ . Observe:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_0^x f(t, y_0) dt, \\ &= 1 + \int_0^x k dt, \\ &= 1 + kx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_0 + \int_0^x f(t, y_1(t)) dt, \\ &= 1 + \int_0^x k(1 + kt) dt, \\ &= 1 + \int_0^x k dt + \int_0^x k^2 t dt, \\ &= 1 + kx + \frac{(kx)^2}{2!}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_3(x) &= y_0 + \int_0^x f(t, y_2(t)) dt, \\
&= 1 + \int_0^x k \left( 1 + kt + \frac{(kt)^2}{2!} \right) dt, \\
&= 1 + \int_0^x k dt + \int_0^x k^2 t dt + \int_0^x \frac{k^3 t^2}{2!} dt, \\
&= 1 + kx + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^3}{3!}.
\end{aligned}$$

Generalizando, tem-se:

$$y_n(x) = 1 + kx + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^3}{3!} + \dots + \frac{(kx)^n}{n!}. \quad (1.15)$$

Substituindo  $kx$  por uma variável  $z$ , (1.15) pode ser escrita como:

$$y_n(x) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!},$$

logo, identificando-se como uma Série de Taylor, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(z) = e^z,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = e^{kx}.$$

Note que o limite da sequência  $(y_n)$  dada pelas iteradas de Picard é solução do PVI proposto. pois  $y'(x) = ke^{kx} = ky(x)$  e  $y(0) = 1$ .

### 1.3.2 Prova dos Resultados

Nesta subseção serão apresentadas as provas dos resultados baseadas na referência [1].

O lema apresentado a seguir será a base para a demonstração do teorema principal desta seção.

**Lema 1.6.** *Sejam  $a$  e  $b$  números reais positivos, onde  $R$  é o retângulo:  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ ,  $|y - y_0| \leq b$ , tal que  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $M = \max_{(t,y) \in R} |f(t, y)|$  em que  $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$ . Então:*

$$|y_n(t) - y_0| \leq M(t - t_0) \quad (1.16)$$

para  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ , em que  $y_n$  é dada por (1.14)

Resumidamente, a ideia principal deste lema é mostrar que cada função da sequência  $(y_n)$  está contida no retângulo proposto pelo Lema 1.6, ou seja, mostrar que  $y_n$  é uniformemente limitada,  $n \in \mathbb{N}$ . A partir de (1.16) observa-se que:

$$y_0 - M(t - t_0) \leq y_n \leq y_0 + M(t - t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Portanto, toda função da sequência  $(y_n)$  está contida na região limitada entre as retas  $y = y_0 - M(t - t_0)$  e  $y = y_0 + M(t - t_0)$ , conforme a Figura 1.1

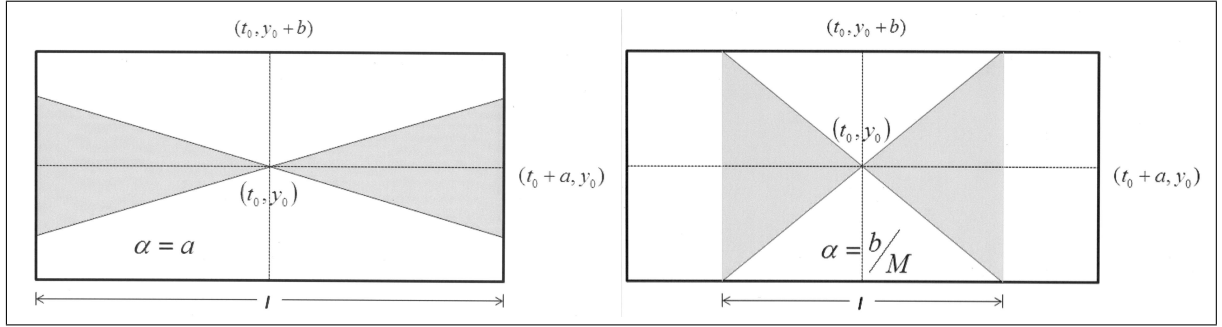


Figura 1.1: Para  $I \in [t_0 - a, t_0 + a]$  e  $I \in [t_0 - \frac{b}{M}, t_0 + \frac{b}{M}]$

**Demonstração:** Prova-se usando o processo de indução em  $n$ . Para  $n = 0$  a desigualdade (1.16) é satisfeita. Considerando verdadeira a hipótese sobre  $n$  em (1.16), tem-se que é verdadeira também para  $n + 1$ . De fato:

$$|y_{n+1} - y_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, y_n) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n)| ds \leq \int_{t_0}^t M ds = M(t - t_0)$$

para todo  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ . ■

O próximo objetivo é mostrar que a seqüência dada pelas iteradas de Picard converge no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ , se  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existir e for contínua no retângulo  $R$ .

**Teorema 1.7.** *Sejam  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  contínuas no retângulo  $R : t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha, |y - y_0| \leq b$  tal que  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $M = \max_{(t,y) \in R} |f(t, y)|$ , em que  $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$ . Então, o problema de valor inicial  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  tem pelo menos uma solução  $y(t)$  definida no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ .*

**Demonstração:** Observe que  $y_n(t)$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$y_n(t) = y_0(t) + [y_1(t) - y_0(t)] + [y_2(t) - y_1(t)] + [y_3(t) - y_2(t)] + \cdots + [y_n(t) - y_{n-1}(t)].$$

A seqüência  $(y_n)$  convergirá somente se a série infinita

$$y_0(t) + [y_1(t) - y_0(t)] + [y_2(t) - y_1(t)] + [y_3(t) - y_2(t)] + \cdots + [y_n(t) - y_{n-1}(t)] + \cdots \quad (1.17)$$

for convergente. Para provar que a seqüência infinita  $(y_n)$  converge, basta mostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| < \infty. \quad (1.18)$$

Inicia-se observando o seguinte:

$$\begin{aligned} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, y_{n-1}) - f(s, y_{n-2})) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_{n-1}) - f(s, y_{n-2})| ds \\ &= \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial f}{\partial y}(s, \mu(s)) \right| |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds \end{aligned}$$

pelo Teorema do Valor Médio aplicado à segunda componente, existe  $\mu(t)$  entre a região limitada pelas curvas  $y_{n-1}$  e  $y_{n-2}$ , tal que

$$|f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(s, \mu(s)) \right| |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)|$$

Segue imediatamente do Lema 1.6 que todos os pontos  $(s, \mu(s))$  pertencem ao retângulo  $R$  para  $t_0 < s < t + \alpha$ . Segue que

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq L \int_{t_0}^t |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha, \quad (1.19)$$

onde

$$L = \max_{(t,y) \in R} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|.$$

Para  $n = 2$  em (1.19) tem-se:

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq L \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_0| ds \leq L \int_{t_0}^t M(s - t_0) ds = \frac{LM(t - t_0)^2}{2}.$$

Para  $n = 3$ , tem-se:

$$|y_3(t) - y_2(t)| \leq L \int_{t_0}^t |y_2(s) - y_1(s)| ds \leq L \int_{t_0}^t \frac{LM(s - t_0)^2}{2} ds = \frac{L^2 M(t - t_0)^3}{3!}.$$

Agora, supondo que a desigualdade é válida para  $n$ , isto é,

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \frac{L^{n-1} M(t - t_0)^n}{n!}, \quad (1.20)$$

prova-se a validade da mesma para  $n + 1$ , ou seja,

$$|y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq \frac{L^n M(t - t_0)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

É imediato, pois:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &\leq L \int_{t_0}^t |y_n(s) - y_{n-1}(s)| ds \leq L \int_{t_0}^t \frac{L^{n-1} M(s - t_0)^n}{n!} ds = \\ &= \frac{L^n M(t - t_0)^{n+1}}{(n + 1)!}, \end{aligned}$$

para todo  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ .

Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_0(t)| &= |y_1(t) - y_0| + |y_2(t) - y_1(t)| + \dots + |y_n(t) - y_{n-1}| + \dots \\ &\leq M(t - t_0) + \frac{ML(t - t_0)^2}{2} + \frac{ML^2(t - t_0)^3}{3!} + \dots + \frac{ML^{n-1}(t - t_0)^n}{n!} + \dots \\ &\leq M(t - t_0) + \frac{ML(t - t_0)^2}{2} + \frac{ML^2(t - t_0)^3}{3!} + \dots + \frac{ML^{n-1}(t - t_0)^n}{n!} + \dots \\ &= \frac{M}{L} \left[ L(t - t_0) + \frac{L^2(t - t_0)^2}{2} + \frac{L^3(t - t_0)^3}{3!} + \dots + \frac{L^n(t - t_0)^n}{n!} + \dots \right] \\ &= \frac{M}{L} \left[ L(t - t_0) + \frac{[L(t - t_0)]^2}{2} + \frac{[L(t - t_0)]^3}{3!} + \dots + \frac{[L(t - t_0)]^n}{n!} + \dots \right] \\ &= \frac{M}{L} (e^{(t-t_0)L} - 1). \end{aligned}$$

para todo  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ .

Desta forma, foi possível mostrar que a série é convergente e, desse modo, as iteradas de Picard convergem para todo  $t$  pertencente ao intervalo  $[t_0, t_0 + \alpha]$ . De forma análoga, mostra-se que a sequência  $(y_n(t))$  converge para todo  $t$  tomado no intervalo  $[t_0 - \alpha, t_0]$ .

O limite da sequência  $(y_n(t))$  será indicado por  $y(t)$ .

Prosseguindo, ainda falta mostrar que o limite da sequência  $(y_n(t))$  será solução do problema de valor inicial (1.13). Retomando a recorrência das iteradas de Picard têm-se a equação:

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds.$$

Tomando os limites em ambos os lados, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right] \\ y(t) &= y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Logo, para provar que a equação (1.21) satisfaz (1.13), basta mostrar que:

$$\int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right]. \quad (1.22)$$

Assim, provar (1.22) equivale a mostrar que a diferença abaixo

$$\left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right|$$

tende a zero quando  $n$  tende ao infinito. Sabemos que  $y(t)$  é o limite de funções  $y_n(t)$  cujos gráficos estão em  $R$ , logo o gráfico de  $y(t)$  também está contido em  $R$ , portanto:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right| &\leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, y_n(s))| ds \leq L \int_{t_0}^t |y(s) - y_n(s)| ds \end{aligned}$$

onde  $L$  foi definido nas condições da equação (1.19). Voltando à sequência  $(y_n(t))$  temos:

$$y(s) = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i(s) - y_{i-1}(s)| \quad (1.23)$$

$$y_n(s) = y_0 + \sum_{i=1}^n |y_i(s) - y_{i-1}(s)|. \quad (1.24)$$

Subtraindo a equação (1.24) de (1.23) obtemos:

$$\begin{aligned} y(s) - y_n(s) &= \sum_{i=1}^{\infty} |y_i(s) - y_{i-1}(s)| - \sum_{i=1}^n |y_i(s) - y_{i-1}(s)| \\ y(s) - y_n(s) &= \sum_{i=1}^n |y_i(s) - y_{i-1}(s)| + \sum_{i=n+1}^{\infty} |y_i(s) - y_{i-1}(s)| - \sum_{i=1}^n |y_i(s) - y_{i-1}(s)| \end{aligned}$$

$$y(s) - y_n(s) = \sum_{i=n+1}^{\infty} |y_i(s) - y_{i-1}(s)|.$$

Por consequência a (1.20) tem-se

$$\begin{aligned} |y(s) - y_n(s)| &\leq M \sum_{i=n+1}^{\infty} L^{i-1} \frac{(s-t_0)^i}{i!} \\ |y(s) - y_n(s)| &\leq \frac{M}{L} \sum_{i=n+1}^{\infty} L^i \frac{(s-t_0)^i}{i!}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Manipulando as seguintes desigualdades, tem-se:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right| &\leq \\ &\leq L \int_{t_0}^t |y(s) - y_n(s)| ds \leq L \int_{t_0}^t \frac{M}{L} \sum_{i=n+1}^{\infty} L^i \frac{(s-t_0)^i}{i!} ds, \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right| &\leq M \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_{t_0}^t L^i \frac{(s-t_0)^i}{i!} ds \leq M \sum_{i=n+1}^{\infty} L^i \frac{(\alpha)^i}{i!} \int_{t_0}^t ds = \\ &= M(t-t_0) \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{L^i \alpha^i}{i!} \leq M\alpha \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{(L\alpha)^i}{i!}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Observa-se que o último membro da desigualdade (1.26) consiste no resto do desenvolvimento (convergente) em série de Taylor de  $e^{L\alpha}$ . Note que quando  $n$  tende ao infinito, a soma em (1.26) tende a zero; portanto,

$$\int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right]$$

e  $y(t)$  satisfaz o PVI (1.13).

Resta provar que  $y(t)$  é contínua, isto é, para todo  $\delta > 0$  existe um  $\eta > 0$  com  $\delta$  e  $\eta$  reais tal que

$$|y(t+h) - y(t)| < \delta \quad \text{se} \quad |h| < \eta.$$

Apesar de não conseguir uma forma explícita de  $y(t)$ , uma alternativa é usar o seguinte recurso: toma-se um  $N$  suficientemente grande e escreve-se  $y(t)$  assim

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t+h) - y(t) + y(t) - y_N(t+h) + y_N(t+h) - y_N(t) + y_N(t) \Rightarrow \\ y(t+h) - y(t) &= y(t+h) - y_N(t+h) + y_N(t+h) - y_N(t) + y_N(t) - y(t) \Rightarrow \\ |y(t+h) - y(t)| &= |y(t+h) - y_N(t+h) + y_N(t+h) - y_N(t) + y_N(t) - y(t)| \end{aligned}$$

Desse modo,

$$|y(t+h) - y(t)| \leq |y(t+h) - y_N(t+h)| + |y_N(t+h) - y_N(t)| + |y_N(t) - y(t)|. \quad (1.27)$$

Dado um  $\delta$ , toma-se um  $N$  suficientemente grande tal que

$$\frac{M}{L} \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{(kL)^i}{i!} < \frac{\delta}{3}.$$



Retomando a relação (1.25), obtém-se

$$|y(t+h) - y_N(t+h)| < \frac{\delta}{3} \quad e \quad |y_N(t) - y(t)| < \frac{\delta}{3}$$

para  $t$  e  $h$  suficientemente pequeno.

A função  $y_N(t)$  é contínua pois foi construída por  $N$  interações de funções contínuas, assim dado  $\delta > 0$  existe  $\eta$  tal que

$$|y_N(t+h) - y_N(t)| < \frac{\delta}{3}, \quad \text{para} \quad |h| < \eta.$$

Substituindo em (1.27) tem-se:

$$|y(t+h) - y(t)| \leq \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta$$

para  $|h| < \eta$ , portanto,  $y(t)$  é contínua. ■

Com todos os passos acima já é possível considerar  $y(t)$  uma solução da equação integral (1.13), implicando que  $y(t)$  também será solução de (1.11) e (1.12)

O que resta ainda verificar é se a solução  $y(t)$  é única no intervalo  $[t_0, t_0 + \alpha]$ .

A prova do próximo teorema irá encerrar essa seção, mostrando a unicidade da solução do PVI dado.

**Teorema 1.8.** *Sejam  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  contínuas no retângulo  $R : t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha, |y - y_0| \leq b$  tal que  $R \subseteq \mathbb{R}^2$ . Calculemos  $M = \max_{(t,y) \in R} |f(t,y)|$  e seja  $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$ . Então, o problema de valor inicial (1.11) e (1.12) tem uma única solução  $y(t)$  no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ .*

**Demonstração:** O Teorema 1.7 garante que existe pelo menos uma solução em  $R$ . Seja  $z(t)$  outra solução além de  $y(t)$  do PVI proposto pelo Teorema 1.8. Então:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad e \quad z(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds.$$

Subtraindo as duas equações, tem-se:

$$y(t) - z(t) = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds.$$

Tomando o valor absoluto em ambos membros:

$$|y(t) - z(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds \right|.$$

Como  $y(t)$  e  $z(t)$  são soluções de uma equação que satisfaz o Teorema 1.7, obtém-se a desigualdade:

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \leq L \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds, \quad (1.28) \end{aligned}$$

onde  $L$  é como na prova do Teorema 1.7. Por conveniência, toma-se a função definida por:

$$U(t) = \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds. \quad (1.29)$$

É de imediato:

$$\begin{aligned} U(t_0) &= 0 \\ U(t) &\geq 0, \quad \forall t > t_0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Além disso,  $U(t)$  é derivável pois  $U'(t) = |y(t) - z(t)|$ . Portanto pode-se escrever a desigualdade (1.28) da seguinte forma:

$$U'(t) - L \cdot U(t) \leq 0,$$

multiplicando ambos os lados pelo fator integrante positivo  $e^{-Lt}$  tem-se:

$$\begin{aligned} e^{-Lt}[U'(t) - L \cdot U(t)] &\leq 0 \\ [e^{-Lt} \cdot U(t)]' &\leq 0. \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados no intervalo de 0 a  $t$  obtém-se:

$$e^{-Lt} \cdot U(t) \leq 0. \quad (1.31)$$

Da desigualdade (1.31) e como o fator  $e^{-Lt}$  sempre é positivo para todo  $t$  real, segue que:

$$U(t) \leq 0. \quad (1.32)$$

Das desigualdades (1.30) e (1.32) conclui-se que:

$$U(t) = 0$$

para todo  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ . Então, por (1.29) obtém-se a igualdade:

$$y(t) = z(t), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha]$$

comprovando que a solução do PVI (1.11) e (1.12) é única. ■

## 2 Sistemas de Equações Diferenciais

Todo o conteúdo necessário para mostrar que o conjunto solução de uma EDO linear e homogênea de grau  $n$  é um subespaço vetorial será apresentado conforme a referência [1]. Alguns resultados não serão demonstrados pelo fato de não se adequarem ao esolpo do texto. Neste capítulo, as referências [2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] também foram utilizadas.

Os sistemas de equações diferenciais são constituídos por um conjunto finito de equações diferenciais de primeira ordem , isto é:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.1)$$

Uma solução de (2.1) pode ser representada pela matriz coluna  $X$  composta por  $n$  funções:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

tais que  $\frac{dx_j}{dt} = f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n), j = 1, 2, \dots, n$ .

### 2.1 Sistemas Homogêneos e Não Homogêneos

Além das equações diferenciais do sistema (2.1), comumente impõem-se condições iniciais sobre as funções soluções em um certo valor inicial obtendo então um problema de valor inicial.

Pode-se também converter uma equação diferencial linear de ordem  $n$  num sistema de  $n$  equações de primeira ordem. A seguir, alguns exemplos:

**Exemplo 2.1.** Seja o PVI dado por:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0; \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0. \quad (2.3)$$

Note que a equação em (2.3) pode ser transformada, por uma mudança de variável em um sistema de 1<sup>a</sup> ordem, considerando as variáveis  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ :

$$x_1(t) = y(t),$$

$$x_2(t) = y'(t),$$

tem-se que

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -p(t)x_2(t) - q(t)x_1(t) \end{cases}.$$

Considerando  $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$  pode-se reescrever o sistema na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Assim:

$$f(t, (x_1, x_2)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

e a equação em (2.3) pode ser escrita na forma:

$$\dot{X}(t) = f(t, (x_1, x_2)).$$

Neste caso  $f(t, (x_1, x_2))$  possui o seguinte formato:

$$f(t, (x_1, x_2)) = A(t) \cdot X(t).$$

Escrevendo (2.4) na forma

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t),$$

a solução da equação (2.3) pode ser obtida resolvendo o sistema de EDO's obtido em (2.4).

**Exemplo 2.2.** Com o mesmo raciocínio para a seguinte EDO de terceira ordem:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + p(t)\frac{d^2y}{dt^2} + q(t)\frac{dy}{dt} + r(t)y = s(t)$$

pode-se escrever essa equação diferencial de 3<sup>a</sup> ordem na seguinte forma de sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) & -r(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s(t) \end{bmatrix}.$$

Generalizando para uma EDO linear de ordem  $n$  expressa na forma:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \mu_n(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + \mu_2(t)\frac{dy}{dt} + \mu_1(t)y = s(t) \quad (2.5)$$

e tomando as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} &= x_n(t) \end{aligned}$$

pode-se escrever a equação (2.5) na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\mu_1(t) & -\mu_2(t) & \dots & -\mu_{n-1}(t) & -\mu_n(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s(t) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Portanto, a equação (2.5) foi reescrita na forma de um sistema de EDO's obtendo a equação matricial da forma:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t), \quad (2.7)$$

com  $A(t)$  uma função matricial definida conforme a EDO que a originou e  $b(t)$  um vetor coluna. Note que a solução é um vetor coluna  $X(t)$ . Observe que a função matricial  $A(t)$  quadrada de ordem  $n$  obedece o padrão de que a última linha sempre será composta por todas as funções  $\mu_i$  e o outros elementos seriam compostos por 0 ou 1.

O próximo propósito é mostrar que um PVI da forma (2.7) com uma condição inicial  $X_0 = X(t_0)$  admitirá uma única solução.

**Teorema 2.3.** *Para todo  $(t_0, X_0) \in I \times \Omega$ , tal que  $I \subset \mathbb{R}$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , existe uma única solução  $\varphi(t) = \varphi(t)$  de (2.7) definida em  $I$  tal que  $\varphi(t_0) = X_0$ .*

**Demonstração:** A prova a seguir obedecerá o método das aproximações sucessivas conforme foi visto na prova do Teorema 1.7. Seja a sequência de funções  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  construída da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \varphi_0 = X_0 \\ \varphi_i(t) = X_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi_{i-1}(s) + b(s)] ds \end{cases} \quad (2.8)$$

Para qualquer intervalo compacto  $[a, b] \subset I$ , a sequência  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para uma solução de (2.7). De fato, sejam:

$$K = \sup\{\|A(s)\|; s \in [a, b]\} \quad e$$

$$c = \sup\{|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)|; s \in [a, b]\}.$$

Nota-se que:

$$\begin{aligned} |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)(\varphi_1(s) - \varphi_0(s))ds \right| \leq \int_{t_0}^t |A(s)(\varphi_1(s) - \varphi_0(s))| ds \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t Kc ds = Kc(t - t_0) \leq Kc |t - t_0|. \end{aligned}$$

Usando esta última desigualdade, obtém-se

$$\begin{aligned} |\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)(\varphi_2(s) - \varphi_1(s))ds \right| \leq \int_{t_0}^t |A(s)(\varphi_2(s) - \varphi_1(s))| ds \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t K^2c |s - t_0| ds = \frac{K^2c(t - t_0)^2}{2!} = \frac{K^2c |t - t_0|^2}{2!}. \end{aligned}$$

Generalizando:

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{K^n c |t - t_0|^n}{n!}. \quad (2.9)$$

Por indução, suponha o resultado verdadeiro para  $n$  e prova-se para  $n + 1$ :

$$|\varphi_{n+2}(t) - \varphi_{n+1}(t)| = \left| \int_{t_0}^t A(s)(\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t))ds \right| \leq \int_{t_0}^t |A(s)(\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t))| ds.$$

Pela hipótese de indução 2.9 segue que

$$|\varphi_{n+2}(t) - \varphi_{n+1}(t)| \leq \int_{t_0}^t \frac{K^{n+1}c(s - t_0)^n}{n!} ds = \frac{K^{n+1}c(t - t_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \leq \frac{K^{n+1}c |t - t_0|^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Como  $|t - t_0| < b - a$ , segue que

$$\max_{t \in [a, b]} |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{K^n c (b - a)^n}{n!}$$

para todo  $n$ .

Toma-se agora a série de aplicações obtida escrevendo  $\varphi_i(t)$  da seguinte forma:

$$\varphi_i(t) = \varphi_0(t) + \underbrace{(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))} + \underbrace{(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))} + \dots + \underbrace{(\varphi_{i-1}(t) - \varphi_{i-2}(t))} + \underbrace{(\varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t))},$$

$$\varphi_i(t) = \varphi_0(t) + \sum_{j=0}^{i-1} (\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)) \leq \varphi_0(t) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{K^j c |b - a|^j}{j!}.$$

Como  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^n c |b - a|^n}{n!}$  converge, tem-se que  $\varphi_i$  converge uniformemente pelo Teste de Weierstrass <sup>1</sup>. Seja então  $\varphi(t)$  o limite pontual de  $\varphi_i(t)$ . Fazendo  $i$  tender ao infinito em (2.8) tem-se que, para todo  $t \in I$ ,

$$\varphi(t) = X_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds.$$

<sup>1</sup>A condição  $\sum |f_n| \leq +\infty$  é garantida pela existência de uma série convergente  $\sum c_n$  de constantes positivas tais que  $|f_n(t)| \leq c_n$  para todo  $t \in M$ . Nestas condições, o teste de Weierstrass afirma que a série  $\sum f_n$  converge uniformemente em  $M$  para  $f_k : M \rightarrow \mathbb{R}^n$

Derivando com respeito a  $t$ , verifica-se que  $\varphi(t)$  satisfaz (2.7).

Ainda falta mostrar a unicidade. Suponha que  $\phi(t)$  seja outra função que satisfaça (2.7). Assim para todo  $t \in I$ ,

$$\phi(t) = X_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\phi(s) + b(s)] ds.$$

Seja  $m = \sup\{|\phi(t) - \varphi_1(t)|, t \in [a, b]\}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} |\phi(t) - \varphi_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)(\phi(s) - \varphi_1(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |A(s)(\phi(s) - \varphi_1(s))| ds \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t Km ds = Km(t - t_0) \leq Km |t - t_0|. \end{aligned}$$

Usando a última desigualdade obtém-se

$$\begin{aligned} |\phi(t) - \varphi_3(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)(\phi(s) - \varphi_2(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |A(s)(\phi(s) - \varphi_2(s))| ds \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t K^2 m(s - t_0) ds = \frac{K^2 m(t - t_0)^2}{2!} \leq \frac{K^2 m |t - t_0|^2}{2!}. \end{aligned}$$

Provando por indução, similarmente como a última prova por indução feita, chega-se que:

$$|\phi(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{K^{n-1}m}{(n-1)!} |t - t_0|^{n-1} \leq \frac{K^{n-1}m}{(n-1)!} (b-a)^{n-1},$$

ou seja, a série  $\sum_{j=0}^n |\phi(t) - \varphi_j(t)|$  converge uniformemente pelo Teste de Weierstrass.

Portanto, a diferença  $|\phi(t) - \varphi_j(t)|$  converge também a zero, o que implica:

$$\phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t).$$

Desta forma, mostrou-se que a solução encontrada é única. ■

## 2.2 Sistemas Lineares Homogêneos com os Coeficientes Constantes

Nessa seção será abordado o estudo dos sistemas lineares de EDO's para os sistemas homogêneos com os coeficientes constantes. Defini-se *Sistemas Lineares Homogêneos* todos os sistemas da forma (2.7) tal que  $b(t)$  seja o vetor nulo. Além do caso homogêneo, a função matricial  $A(t)$  definida em (2.7) será composta apenas por valores constantes, ou seja  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  para  $i, j \in 1, \dots, n$ . O objetivo principal será mostrar como construir a solução geral de um sistema de  $n$  equações lineares homogêneas com os coeficientes constantes, isto é, de um sistema na forma:

$$\dot{X}(t) = AX(t) \tag{2.10}$$

onde  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ .

Sabe-se que (2.10) é um caso especial de (2.7). Como já se sabe, o PVI admite uma única solução, como já demonstrado no Teorema 2.3. O próximo passo é mostrar que as soluções obtidas de (2.7) satisfazem a condição de ser um espaço vetorial de dimensão finita. Assim, toda solução de (2.10) será escrita como combinação linear dos elementos de uma base.

Seja  $V$  o conjunto de todos os vetores

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

que são soluções da equação vetorial diferencial

$$\dot{X} = AX, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Para que  $V$  seja um espaço vetorial, primeiro será verificado duas condições iniciais através do lema abaixo.

**Lema 2.4.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Para quaisquer vetores  $X$  e  $Y$  e qualquer constante real  $c$ ,*

$$(a) \quad A(cX) = cAX,$$

$$(b) \quad A(X+Y) = AX + AY.$$

**Demonstração:** Considere:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ e } Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Tem-se que  $cA_{n \times n}X_{n \times 1}$  é um vetor coluna do tipo  $W_{n \times 1}$  cuja a  $i$ -ésima componente do vetor é dada por:

$$w_i = c \cdot a_{i1} \cdot x_1 + c \cdot a_{i2} \cdot x_2 + c \cdot a_{i3} \cdot x_3 + \dots + c \cdot a_{in} \cdot x_n,$$

pode-se escrever  $W_n(t)$  na forma:

$$w_i = c \cdot (a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + a_{i3} \cdot x_3 + \dots + a_{in} \cdot x_n).$$

Tomando o vetor  $A_{n \times n}(cX_{n \times 1})$ , pode-se escrevê-lo na forma vetor coluna do tipo  $Z_{n \times 1}$ :

$$z_i = a_{i1} \cdot (c \cdot x_1) + a_{i2} \cdot (c \cdot x_2) + a_{i3} \cdot (c \cdot x_3) + \dots + a_{in} \cdot (c \cdot x_n),$$



e pode-se escrever  $Z_n(t)$  na forma:

$$z_i = c \cdot (a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + a_{i3} \cdot x_3 + \dots + a_{in} \cdot x_n).$$

Comparando os resultados, concluí-se que  $w_i(t) = z_i(t)$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , provando assim a primeira parte do lema.

(b) A  $i$ -ésima componente do vetor  $A(X + Y)$  pode ser escrita na forma:

$$a_{i1} \cdot (X_1 + Y_1) + a_{i2} \cdot (X_2 + Y_2) + a_{i3} \cdot (X_3 + Y_3) + \dots + a_{in} \cdot (X_n + Y_n). \quad (2.12)$$

realizando as distributivas, a expressão (2.12) pode ser escrita na forma:

$$a_{i1} \cdot X_1 + a_{i2} \cdot X_2 + a_{i3} \cdot X_3 + \dots + a_{in} \cdot X_n + a_{i1} \cdot Y_1 + a_{i2} \cdot Y_2 + a_{i3} \cdot Y_3 + \dots + a_{in} \cdot Y_n.$$

Observa-se que essa é a notação da  $i$ -ésima componente da soma entre os vetores  $AX + AY$ . Portanto:

$$A(X + Y) = AX + AY.$$

■

**Teorema 2.5.** *Sejam  $X(t)$  e  $Y(t)$  duas soluções de  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$ . Então:*

(a)  $c \cdot X(t)$  é solução para qualquer constante real  $c$ .

(b)  $X(t) + Y(t)$  é solução também.

**Demonstração:** A partir do Lema 2.4, prova-se que:

(a) Se  $X(t)$  é solução então:

$$\frac{d[c \cdot X(t)]}{dt} = c \cdot \frac{dX(t)}{dt} = c \cdot \dot{X}(t) = c \cdot A \cdot X(t) = A \cdot (c \cdot X(t)).$$

Logo,  $c \cdot X(t)$  satisfaz a equação diferencial  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  e portanto  $c \cdot X(t)$  é solução também.

(b) Se  $X(t)$  e  $Y(t)$  são soluções então:

$$\frac{d[X(t) + Y(t)]}{dt} = \frac{dX(t)}{dt} + \frac{dY(t)}{dt} = A \cdot X(t) + A \cdot Y(t) = A \cdot [X(t) + Y(t)].$$

Logo,  $X(t) + Y(t)$  é solução também.

■

Portanto, se  $X(t)$  e  $Y(t)$  são soluções de  $\dot{X}(t) = AX(t)$ , então qualquer combinação linear  $a \cdot X(t) + b \cdot Y(t)$  também será solução.

Assim,  $V$  é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções vetoriais, o que é garantido pelo Teorema 2.5. Os próximos resultados irão provar que este espaço possui dimensão igual a  $n$  onde  $n$  é a ordem da matriz  $A$ .

**Teorema 2.6.** (*Teste para independência linear*) Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  soluções de  $\dot{X} = AX$ . Dado  $t_0$  então  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  são soluções linearmente independentes se, e só se,  $X_1(t_0), X_2(t_0), X_3(t_0), \dots, X_n(t_0)$  forem vetores linearmente independentes.

**Demonstração:** A maneira mais simples de realizar essa prova é usar a contrapositiva:

Suponha que  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  são soluções linearmente dependentes, então, existem constantes  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  não todas nulas, tais que:

$$c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + \dots + c_nX_n = 0.$$

Tomando  $t = t_0$  na equação, obtém-se

$$c_1X_1(t_0) + c_2X_2(t_0) + c_3X_3(t_0) + \dots + c_nX_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

portanto  $X_1(t_0), X_2(t_0), X_3(t_0), \dots, X_n(t_0)$  são vetores linearmente dependentes.

Reciprocamente, suponha que para um certo  $t_0$ , os valores para  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  determinam vetores linearmente dependentes em  $\mathbb{R}^n$ . Isso significa que existem constantes  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ , não todas nulas, tais que:

$$c_1X_1(t_0) + c_2X_2(t_0) + c_3X_3(t_0) + \dots + c_nX_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Adotando as mesmas constantes  $X_1(t_0), X_2(t_0), X_3(t_0), \dots, X_n(t_0)$ , constrói-se uma função vetorial:

$$\phi(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + c_3X_3(t) + \dots + c_nX_n(t).$$

Esta função satisfaz (2.10) pois é uma combinação linear de soluções com  $\phi(t_0) = 0$ . Portanto pelo Teorema 2.3, tem-se que  $\phi(t) = 0$  para todo  $t$ , implicando que  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  são soluções linearmente dependentes. ■

**Teorema 2.7.** *A dimensão do espaço  $V$  de todas as soluções do sistema linear homogêneo de equações diferenciais é  $n$ .*

**Demonstração:** Basta construir uma base para  $V$  que contenha  $n$  elementos. Seja

$\phi^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  soluções do problema de valor inicial

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X(0) = e^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n. \quad (2.13)$$

onde  $e^1, e^2, \dots, e^n$  é a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ .

Por hipótese, para  $i = 1$ :

$$\phi^1(0) = e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

para  $i = 2$ :

$$\phi^2(0) = e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

assim sucessivamente. Para  $i = n$ :

$$\phi^n(0) = e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 2.3 segue que  $\phi^i(t)$  existe para todo  $t$  e é única.

Para mostrar que  $\phi^1, \dots, \phi^n$  é uma base de  $V$ , verifica-se que o conjunto é linearmente independente. Sejam  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$c_1\phi^1(0) + c_2\phi^2(0) + c_3\phi^3(0) + \dots + c_n\phi^n(0) = 0 \quad (2.14)$$

tal que o zero do segundo membro de (2.14) representa o vetor nulo em  $V$ . logo,

$$c_1e^1 + c_2e^2 + c_3e^3 + \dots + c_ne^n = 0 \quad (2.15)$$

Observa-se que  $e^1, e^2, e^3, \dots, e^n$  determinam uma base canônica em  $\mathbb{R}^n$  então  $e^1, e^2, e^3, \dots, e^n$  são linearmente independentes. Como a soma em (2.15) resulta em zero, a única possibilidade de escrever essa soma é  $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, \dots, c_n = 0$ , implicando

em (2.14) que as soluções de  $V$ , determinadas por  $\phi^1, \phi^2, \phi^3, \dots, \phi^n$  são linearmente independentes em  $V$ , condição comprovada no Teorema 2.10.

Para provar que  $\phi^1, \phi^2, \phi^3, \dots, \phi^n$  gera  $V$ , é preciso mostrar que toda solução  $X(t)$  de  $V$  pode ser escrita como combinação linear das  $\phi^i$ . Seja  $X(t)$  uma solução qualquer de (2.10) tal que  $X(0) = c$ , onde:

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Com essas constantes, constrói-se a seguinte função:

$$\phi(t) = c_1\phi^1(t) + c_2\phi^2(t) + \dots + c_n\phi^n(t).$$

Sabe-se que  $\phi(t)$  satisfaz (2.10) pois é uma combinação linear de soluções comprovado pelo Teorema 2.5.

Por outro lado, tem-se:

$$\phi(0) = c_1\phi^1(0) + c_2\phi^2(0) + \dots + c_n\phi^n(0) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = X(0).$$

Como  $X(t)$  e  $\phi(t)$  satisfazem o mesmo sistema linear homogêneo de equações diferenciais e as condições iniciais de  $X(t)$  e  $\phi(t)$  são iguais para  $t = 0$ , segue pelo Teorema 2.3,  $X(t)$  e  $\phi(t)$  devem ser únicas. Portanto, são iguais e pode-se assim escrever a igualdade:

$$X(t) = c_1\phi^1(t) + c_2\phi^2(t) + \dots + c_n\phi^n(t)$$

o que mostra que  $\{\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n\}$  gera  $V$ . ■

### 2.2.1 Exponencial Matricial

No início dessa subseção será útil lembrar de algumas propriedades sobre o espaço  $M_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij})_{n \times n}; a_{ij} \in \mathbb{R}; 1 \leq i, j \leq n\}$ . Este espaço é de dimensão finita, a saber  $\dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$  e para  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e norma definida por  $\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$  satisfazendo:

- i)  $\|A\| \geq 0$ ,
- ii)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ,
- iii)  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ ,

$$\text{iv) } \|A^n\| \leq \|A\|^n,$$

$$\text{v) } \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\text{vi) } \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Observe que  $x(t) = ce^{at}$  é solução da equação diferencial escalar  $\dot{x} = ax$  para qualquer constante  $a$ . Assim é de se esperar que  $X(t) = e^{At}v$  seja solução da equação diferencial vetorial  $\dot{X} = AX$  para todo vetor  $v$  constante onde  $e^{At}$  é uma matriz exponencial definida conforme abaixo:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!} + \cdots \quad (2.16)$$

Note que (2.16) é a série de MacLaurin da função escalar  $f(x) = e^{ax}$ . Para se usar essa expressão deve-se então garantir a convergência de (2.16).

De fato,

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \forall A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Então

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n;$$

onde

$$S_n = \sum_{j=0}^n \frac{A^j}{j!} = I + A + \cdots + \frac{A^n}{n!}.$$

Será mostrado que  $(S_n)$  é de Cauchy<sup>2</sup>, isto é,  $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0$  ocorra

$$|S_n - S_m| < \epsilon.$$

Considere  $n = m + p$ , com  $p \in \mathbb{N}$  e

$$\|S_n - S_m\| = \|S_{m+p} - S_m\| = \left\| \sum_{j=0}^{m+p} \frac{A^j}{j!} - \sum_{j=0}^m \frac{A^j}{j!} \right\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{m+p} \frac{A^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=m+1}^{m+p} \frac{\|A^j\|}{j!} \leq \sum_{j=m+1}^{m+p} \frac{\|A\|^j}{j!}$$

ou seja

$$\|S_n - S_m\| \leq \sum_{j=m+1}^{m+p} \frac{\|A\|^j}{j!}. \quad (2.17)$$

Como  $e^a = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!}$  é convergente  $\forall a \in \mathbb{R}$ , então  $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n_0$  e  $p \in \mathbb{N}$ , têm-se

$$\sum_{j=m+1}^{m+p} \frac{a^j}{j!} < \epsilon.$$

Sabendo que  $\|A\| \in \mathbb{R}$ , então para  $a = \|A\|$ , obtêm-se

$$\sum_{j=m+1}^{m+p} \frac{\|A\|^j}{j!} < \epsilon, \quad \forall m > n_0 \text{ e } p \in \mathbb{N}. \quad (2.18)$$

<sup>2</sup>Uma condição necessária e suficiente para que uma série  $\sum f_n(x)$ , onde os termos de  $f_n$  são funções com o mesmo domínio  $D$ , convirja uniformemente é que  $\forall \epsilon > 0 \exists N$  tal que  $n > N \Rightarrow |\sum_{j=n+1}^{n+p} f_j(x)| < \epsilon, \forall p \in \mathbb{N}$ .

Por (2.17) e (2.18) verifica-se que

$$\|S_n - S_m\| < \epsilon$$

comprovando assim que (2.16) converge uniformemente pelo Critério de Cauchy.

Como a série (2.16) converge então é diferenciável termo a termo e vale

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{n+1}t^n}{n!} + \dots = A \left[ I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \frac{A^nt^n}{n!} + \dots \right] = Ae^{At}, \quad (2.19)$$

portanto  $e^{At}v$  é solução da equação diferencial  $\dot{X} = AX$  para todo vetor  $v$  constante, uma vez que:

$$\frac{d}{dt}e^{At}v = Ae^{At}v = A(e^{At}v).$$

## 2.2.2 O Método dos Autovalores e dos Autovetores para determinar Soluções

Considere novamente um sistema de equações diferenciais homogêneo:

$$\dot{X} = AX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

O objetivo agora é determinar  $n$  soluções linearmente independentes  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ , ...,  $X_n(t)$ . Analisando (2.20) verifica-se que a derivada é a própria função multiplicada por uma matriz constante, ou seja, a solução tem comportamento exponencial. Isso sugere que a função  $X(t) = e^{\lambda t}v$ , onde  $v$  é um vetor constante, pode ser uma boa tentativa de ser solução de (2.20). De fato:

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}v = \lambda e^{\lambda t}v$$

e

$$A(e^{\lambda t}v) = e^{\lambda t}Av.$$

Logo  $X(t) = e^{\lambda t}v$  é uma solução de (2.20) se, e só se,  $\lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av$ . Dividindo ambos os membros por  $e^{\lambda t}$  obtem-se:

$$Av = \lambda v. \quad (2.21)$$

Portanto,  $X(t) = e^{\lambda t}v$  é uma solução de (2.20) se, e só se,  $\lambda$  e  $v$  satisfazem (2.21).

**Definição 2.8.** Um vetor não-nulo  $v$  satisfazendo (2.21) é chamado de um autovetor ou vetor próprio de  $A$  com autovalor ou valor próprio  $\lambda$ .

A partir de (2.21) obtém-se

$$0 = Av - \lambda v = (A - \lambda I)v. \quad (2.22)$$

Sabendo que  $v$  é um vetor não-nulo, então a equação (2.22) tem uma solução não trivial se, e só se,  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Portanto os autovalores  $\lambda$  de  $A$  são as raízes da equação

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix},$$

e os autovetores de  $A$  são então as soluções não nulas da equação  $(A - \lambda I)v = 0$ , para esses valores de  $\lambda$ . A partir do determinante da matriz  $A - \lambda I$  obtém-se um polinômio de grau  $n$ , chamado de polinômio característico de  $A$  e indicado por  $p(\lambda)$ . Para cada raiz  $\lambda_i$  de  $p(\lambda)$  existe pelo menos um vetor não nulo  $v^i$  tal que  $Av^i = \lambda_i v^i$ . Todo polinômio de grau  $n \geq 1$  tem pelo menos uma raiz complexa o que garante que toda matriz tem pelo menos um valor próprio e conseqüentemente, pelo menos um vetor próprio. Considerando que  $p(\lambda)$  possa vir a ter  $n$  raízes distintas, pode-se dizer que toda matriz  $n \times n$  tem no máximo  $n$  vetores próprios linearmente independentes, pois o espaço de todos os vetores

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

tem dimensão  $n$ .

**Observação 2.9.** Seja  $v$  um vetor de  $A$  com o valor próprio  $\lambda$ . Observa-se que:

$$A(cv) = cAv = c\lambda v = \lambda(cv)$$

para qualquer constante  $c$ . Portanto, qualquer vetor obtido pelo produto de uma constante por um vetor próprio de  $A$  também será um vetor próprio de  $A$ .

Para cada vetor próprio  $v^i$  de  $A$  com valor próprio  $\lambda_i$ , tem-se uma solução  $X_i(t) = e^{\lambda_i t} v^i$  de (2.20). Se  $A$  tem  $n$  vetores próprios linearmente independentes  $v^1, \dots, v^n$  com valores próprios  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , então  $v^1, \dots, v^n$  são soluções linearmente independentes de (2.20), conforme o Teorema (2.13), e  $X_i(0) = v^i$ . Pode-se então escrever toda solução  $X(t)$  de (2.20) na forma:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v^2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v^n, \quad (2.23)$$

cuja solução será denominada como solução geral de (2.20).

**Teorema 2.10.** *Quaisquer  $k$  autovetores de  $A$ ,  $v^1, \dots, v^k$ , com valores próprios distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  respectivamente, são linearmente independentes.*

**Demonstração:** A prova será feita por indução sobre  $k$ , o número de autovalores distintos. Para  $k = 1$  é imediato. Considere que quaisquer conjunto de  $n$  vetores de  $A$  sejam linearmente independentes com  $n < k$ . Seja então o conjunto  $v^1, \dots, v^n, v^{n+1}$  formado por vetores próprios de  $A$  com seus respectivos valores próprios  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ , todos distintos entre si. Toma-se a seguinte igualdade:

$$c_1 v^1 + c_2 v^2 + \dots + c_n v^n + c_{n+1} v^{n+1} = 0, \quad (2.24)$$

onde  $c_1, \dots, c_{n+1}$  são constantes a serem determinadas.

Aplicando  $A$  em ambos os membros de (2.24) obtém-se:

$$\lambda_1 c_1 v^1 + \lambda_2 c_2 v^2 + \dots + \lambda_n c_n v^n + \lambda_{n+1} c_{n+1} v^{n+1} = 0. \quad (2.25)$$

Multiplicando (2.24) por  $\lambda_1$  e subtraindo o resultado de (2.25),

$$(\lambda_2 - \lambda_1) c_2 v^2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_1) c_n v^n + (\lambda_{n+1} - \lambda_1) c_{n+1} v^{n+1} = 0.$$

Tem-se por hipótese que  $v^2, \dots, v^n, v^{n+1}$  são linearmente independentes, consequentemente:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) c_2 = 0, \quad (\lambda_3 - \lambda_1) c_2 = 0, \dots, \quad (\lambda_{n+1} - \lambda_1) c_{n+1} = 0.$$

Como  $\lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$  são distintos entre si, concluí-se que  $c_2, c_3, \dots, c_{n+1}$  são todos nulos. A equação (2.24) implica que  $c_1$  é zero também. Portanto,  $v^1, \dots, v^n, v^{n+1}$  são linearmente independentes. ■

### Autovalores Complexos

Se  $\lambda = \alpha + i\beta$  é um autovalor complexo de  $A$  com autovetor  $v = v_1 + iv_2$ , então  $X(t) = e^{\lambda t} v$  é uma solução com valores complexos da equação diferencial (2.20). Note que essa solução complexa é composta por duas soluções reais conforme o lema a seguir:

**Lema 2.11.** *Se  $X(t) = Y(t) + iZ(t)$  é uma solução com valores complexos de (2.20). Então, tanto  $Y(t)$  como  $Z(t)$  são soluções com valores reais de (2.20).*

**Demonstração:** Se  $X(t) = Y(t) + iZ(t)$  é uma solução complexa de (2.20) então:

$$\dot{X}(t) = \dot{Y}(t) + i\dot{Z}(t) = A(\dot{Y}(t) + i\dot{Z}(t)) = A\dot{Y}(t) + iA\dot{Z}(t).$$

Igualando as partes real e imaginária, obtém-se  $\dot{Y}(t) = AY(t)$  e  $\dot{Z}(t) = AZ(t)$ , portanto são soluções reais de (2.20). A função  $X(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(v^1 + iv^2)$  com valores complexos, pode ser expressa da forma:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t}(v^1 + iv^2) = e^{\alpha t} [\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t] (v^1 + iv^2) = \\ &= e^{\alpha t} [(v^1 \cos \beta t - v^2 \operatorname{sen} \beta t) + i(v^1 \operatorname{sen} \beta t + v^2 \cos \beta t)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Y(t) = e^{\alpha t} (v^1 \cos \beta t - v^2 \operatorname{sen} \beta t) \quad (2.26)$$



e

$$Z(t) = e^{\alpha t}(v^1 \operatorname{sen} \beta t + v^2 \operatorname{cos} \beta t) \quad (2.27)$$

são soluções reais de (2.20). ■

**Observação 2.12.** Se  $v$  é um autovetor de  $A$  com o autovalor  $\lambda$ , então  $\bar{v}$ , o complexo conjugado de  $v$ , é autovetor de  $A$  com o autovalor  $\bar{\lambda}$ .

Agora será mostrado que as soluções  $Y(t)$  e  $Z(t)$  são linearmente independentes. Por absurdo, admite-se que  $Y(t)$  e  $Z(t)$  são soluções linearmente dependentes, ou seja, existem  $k_1$  e  $k_2$  não nulos satisfazendo,

$$k_1 Y(t) + k_2 Z(t) = 0.$$

Substituindo (2.26) e (2.27), obtém-se

$$k_1 e^{\alpha t}(v^1 \operatorname{cos} \beta t - v^2 \operatorname{sen} \beta t) + k_2 e^{\alpha t}(v^1 \operatorname{sen} \beta t + v^2 \operatorname{cos} \beta t) = 0.$$

Simplificando toda a expressão por  $e^{\alpha t}$ , pois  $e^{\alpha t} > 0$  para todo  $t$  real

$$k_1(v^1 \operatorname{cos} \beta t - v^2 \operatorname{sen} \beta t) + k_2(v^1 \operatorname{sen} \beta t + v^2 \operatorname{cos} \beta t) = 0.$$

Manipulando o primeiro membro, tem-se

$$v^1[k_1 \operatorname{cos} \beta t + k_2 \operatorname{sen} \beta t] + v^2[k_2 \operatorname{cos} \beta t - k_1 \operatorname{sen} \beta t] = 0.$$

Como  $v^1$  e  $v^2$  são linearmente independentes por hipótese (cada um dos autovetores complexos estão associados a autovalores complexos distintos), implica que

$$k_1 \operatorname{cos} \beta t + k_2 \operatorname{sen} \beta t = 0,$$

$$k_2 \operatorname{cos} \beta t - k_1 \operatorname{sen} \beta t = 0.$$

Igualando as duas equações,

$$k_1 \operatorname{cos} \beta t + k_2 \operatorname{sen} \beta t = k_2 \operatorname{cos} \beta t - k_1 \operatorname{sen} \beta t.$$

e manipulando a igualdade, têm-se que

$$(k_1 - k_2) \operatorname{cos} \beta t + (k_1 + k_2) \operatorname{sen} \beta t = 0,$$

ou seja existem  $k_1$  e  $k_2$  não nulos tais que satisfazem a equação acima, o que implica que  $\operatorname{cos} \beta t$  e  $\operatorname{sen} \beta t$  são linearmente dependentes, o que é uma contradição.

**Observação 2.13.** Note que no caso de autovalores complexos, as soluções são dadas em termos da exponencial complexa. Assim trabalha-se no conjunto dos números complexos. Para descrever as soluções com variáveis reais, usa-se o Lema 2.11.

### Autovetores Iguais

Como o polinômio característico de  $A$  pode ter autovalores iguais, segue que a quantidade de vetores próprios linearmente independentes será menor ou igual a  $n$ , pois um autovalor de multiplicidade algébrica  $n_i$  pode gerar no máximo  $n_i$  autovetores linearmente independentes. Seja  $k$  a quantidade de autovetores distintos, precisa-se encontrar  $n - k$  soluções adicionais linearmente independentes. A estratégia resume-se em contruir uma técnica para encontrar essas soluções adicionais.

Note que:

$$e^{At} = e^{(At - \lambda t I + \lambda t I)} = e^{(A - \lambda I)t} e^{\lambda t I} v \quad (2.28)$$

e para quaisquer  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} e^{\lambda t I} v &= \left[ I + \lambda t I + \frac{\lambda^2 I^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n I^n t^n}{n!} + \cdots \right] v \\ &= \left[ 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n t^n}{n!} + \cdots \right] v = e^{\lambda t} v, \end{aligned}$$

onde  $I$  é a matriz identidade.

**Observação 2.14.** Se  $v$  satisfaz  $(A - \lambda I)^m v = 0$  para algum inteiro  $m$ , então a série infinita  $e^{(A - \lambda I)t} v$  converge e

$$e^{(A - \lambda I)t} v = \underbrace{v + t(A - \lambda I)v + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A - \lambda I)^{m-1} v}_{m \text{ termos}}$$

pois  $(A - \lambda I)^k v = 0 \quad \forall k \geq m$ .

Portanto, pode-se escrever (2.28), com as devidas substituições:

$$e^{At} v = e^{\lambda t} \left[ v + t(A - \lambda I)v + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A - \lambda I)^{m-1} v \right].$$

Para determinar as  $n$  soluções linearmente independentes da equação diferencial  $\dot{X} = AX$ , bastar seguir os seguintes passos::

- (1) Se  $A$  for diagonalizável, isto é, possuir  $n$  autovetores  $v_1, \dots, v_n$  linearmente independentes, então a equação diferencial  $\dot{X} = AX$  possuirá  $n$  soluções linearmente independentes da forma  $e^{\lambda t} v$ .
- (2) Suponha que  $A$  possua apenas  $k$  autovetores linearmente independentes, com  $k < n$ , garantindo assim  $k$  soluções linearmente independentes de  $\dot{X} = AX$ . Para encontrar as soluções adicionais, para cada autovalor  $\lambda$  de  $A$ , determina-se todos os vetores  $v$  para os quais  $(A - \lambda I)^2 v = 0$ , considerando que  $(A - \lambda I)v \neq 0$ . Para cada um desses vetores  $v$  determina-se a solução adicional dada por

$$e^{At} v = e^{\lambda t} [v + t(A - \lambda I)v],$$

pois  $m = 2$ .

- (3) Se ainda não for encontrado o número de soluções suficiente, retoma-se o mesmo procedimento, porém agora buscando  $v$ , para  $\lambda$ , um autovalor de  $A$  tal que  $(A - \lambda I)^3 v = 0$  com  $(A - \lambda I)^2 v \neq 0$ . Para cada um desses vetores  $v$  obtêm-se as seguintes soluções adicionais de  $\dot{X} = AX$

$$e^{At}v = e^{\lambda t} \left[ v + t(A - \lambda I)v + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I)^2 v \right].$$

- (4) Continua-se procedendo dessa maneira até encontrar, finalmente, as  $n - k$  soluções adicionais linearmente independentes.

A justificativa dos passos dados anteriormente pode ser encontrada em [6] e baseia-se na Forma de Jordan, ver [18].

É importante ressaltar nesse momento, que algumas provas, por serem fundamentadas na Álgebra Linear, não serão dadas, porém são de extrema importância para a constatação de resultados desse trabalho. O lema a seguir garante a eficácia do algoritmo apresentado anteriormente, que será aceito sem demonstração.

**Lema 2.15.** *Suponha que o polinômio característico de  $A$  tenha  $k$  raízes distintas  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  com multiplicidades  $n_1, \dots, n_k$  respectivamente. Suponha que  $A$  tem somente  $m_j < n_j$  autovetores linearmente independentes associados ao autovalor  $\lambda_j$ . Então, a equação  $(A - \lambda_j I)^2 v = 0$  tem no mínimo  $m_j + 1$  soluções independentes. De um modo geral, se a equação  $(A - \lambda_j I)^m v = 0$  tem somente  $k_j < n_j$  soluções independentes, então a equação  $(A - \lambda_j I)^{m_j+1} v = 0$  tem no mínimo  $k_j + 1$  soluções independentes.*

A importância desse lema é garantir que para um dado inteiro  $d_j$ , com  $d_j < n_j$ , tal que a equação  $(A - \lambda_j I)^{d_j} v = 0$  tem no mínimo  $n_j$  soluções linearmente independentes, logo para cada autovalor  $\lambda_j$  de  $A$  pode-se calcular  $n_j$  soluções linearmente independentes de  $\dot{X} = AX$  da forma:

$$X(t) = e^{\lambda_j t} \left[ v + t(A - \lambda_j I)v + \dots + \frac{t^{d_j-1}}{(d_j - 1)!} (A - \lambda_j I)^{d_j-1} v \right].$$

### Soluções Matrizes Fundamentais

Se  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  são  $n$  soluções linearmente independentes da equação diferencial

$$\dot{X}(t) = AX(t) \tag{2.29}$$

então toda solução  $X(t)$  pode ser escrita da forma:

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_n X_n(t). \tag{2.30}$$

Seja  $\underline{X}(t)$  a matriz  $n \times n$  cujas colunas são  $X_1(t), \dots, X_n(t)$ , então toda solução de (2.30) pode ser escrita da forma concisa  $X(t) = \underline{X}(t)C$  onde

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

**Definição 2.16.** Uma matriz  $n \times n$   $\underline{X}(t)$  é chamada uma solução matriz fundamental de (2.29) se suas colunas formam um conjunto de  $n$  soluções linearmente independentes de (2.29).

**Lema 2.17.** Uma matriz  $\underline{X}(t)$  é uma solução matriz fundamental de (2.29) se, e só se,  $\dot{\underline{X}} = A\underline{X}(t)$  e  $\det \underline{X}(0) \neq 0$ .

**Demonstração:** As  $n$  colunas de  $\underline{X}(t)$  serão escritas na forma  $X^1(t), \dots, X^n(t)$  obtendo assim:

$$\dot{\underline{X}}(t) = (\dot{X}^1(t), \dots, \dot{X}^n(t))$$

e

$$A\underline{X}(t) = (AX^1(t), \dots, AX^n(t)).$$

Portanto,  $\dot{X}^1(t) = AX^1(t), \dots, \dot{X}^n(t) = AX^n(t)$  são equivalentes à única equação matricial  $\dot{\underline{X}}(t) = A\underline{X}(t)$ . Além disso, as  $n$  soluções  $X^1(t), \dots, X^n(t)$  de (2.29) são linearmente independentes se, e só se,  $X^1(0), \dots, X^n(0)$  são vetores linearmente independentes de  $\mathbb{R}^n$ , pelo Teorema 2.10. Ou seja,  $\underline{X}(t)$  é uma solução matriz fundamental de (2.29) se, e só se,  $\dot{\underline{X}}(t) = A\underline{X}(t)$  e  $\det X(0) \neq 0$ . ■

**Lema 2.18.** A função com valores matriciais  $e^{At}$  é uma solução matriz fundamental de (2.29).

**Demonstração:** Conforme (2.19), mostra-se que  $e^{At}$  é uma solução de (2.29). Além disso, seu determinante calculado para  $t_0 = 0$  é 1 pois  $e^{At_0} = I$ . Portanto pelo Lema 2.17,  $e^{At}$  é uma solução matricial de (2.29). ■

**Lema 2.19.** Sejam  $\underline{X}(t)$  e  $\underline{Y}(t)$  duas soluções matrizes fundamentais de (2.29). Então existe uma matriz constante  $C$  tal que  $\underline{Y}(t) = C\underline{X}(t)$ .

**Demonstração:** Como  $\underline{X}(t)$  e  $\underline{Y}(t)$  são soluções matrizes fundamentais, então as colunas determinam um conjunto de soluções linearmente independentes de (2.29). Portanto, pode-se escrever cada coluna de  $\underline{Y}(t)$  como combinação linear das colunas  $\underline{X}(t)$ , ou seja, existem constantes  $c_1^j, \dots, c_n^j$  tais que

$$\underline{Y}^j(t) = c_1^j \underline{X}_1(t) + c_2^j \underline{X}_2(t) + \dots + c_n^j \underline{X}_n(t). \quad (2.31)$$

Seja  $C$  a matriz  $(c^1, c^2, \dots, c^n)$  onde

$$c^j = \begin{pmatrix} c_1^j \\ c_2^j \\ \vdots \\ c_n^j \end{pmatrix}.$$

Então  $\underline{Y}(t) = \underline{X}(t)C$ . ■

**Teorema 2.20.** *Seja  $\underline{X}(t)$  uma solução matriz fundamental da equação diferencial (2.29). Então*

$$e^{At} = \underline{X}(t)\underline{X}^{-1}(0).$$

**Demonstração:** Pelos Lemas 2.18 e 2.19 existe uma matriz constante  $C$  tal que

$$e^{At} = X(t)C. \quad (2.32)$$

Substituindo  $t = 0$ , obtém-se

$$I = \underline{X}(0)C,$$

trabalhando ambos os membros

$$\underline{X}^{-1}(0)I = \underline{X}^{-1}(0)\underline{X}(0)C,$$

$$\underline{X}^{-1}(0) = IC,$$

$$\underline{X}^{-1}(0) = C,$$

trocando  $C$  em (2.32), conclui-se que

$$e^{At} = \underline{X}(t)\underline{X}^{-1}(0).$$

■

Abaixo, alguns resultados que serão necessários para o desenvolvimento da teoria.

**Teorema 2.21.** *Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  são autovalores distintos de  $A$ , o qual  $\lambda_j$  tem multiplicidade  $n_j$  e  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  e se  $\rho$  é um número maior que a parte real <sup>3</sup> de  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , tal que*

$$\rho > \max_{j=1, \dots, k} \Re(\lambda_j) \quad (2.33)$$

então existe uma constante  $K > 0$  tal que

$$|e^{At}| \leq Ke^{\rho t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.34)$$

---

<sup>3</sup>Considerando que  $\lambda_k$  seja um autovalor complexo, a notação  $\Re(\lambda_k)$  refere-se apenas a parte Real de  $\lambda_k$

**Demonstração:** Pelo Teorema 2.20, a solução  $X(t)$  pode ser expressa na forma

$$X(t) = e^{At}X(0). \quad (2.35)$$

Pela hipótese, pode-se escrever a solução  $X(t)$  na forma

$$X(t) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j t} \left[ \sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{t^i}{i!} (A - \lambda_j I)^i \right] v^j, \quad \text{com } 0 \leq t < \infty. \quad (2.36)$$

Combinando (2.35) com (2.36) nota-se que cada elemento da matriz  $e^{At}$  é da forma  $\sum_{j=1}^k p_j(t)e^{\lambda_j t}$ , onde  $p_j(t)$  é um polinômio de grau não maior que  $n_j - 1$ . Se  $\rho$  foi escolhido satisfazendo a desigualdade (2.33), então

$$|t^k e^{\lambda_k t}| = t^k e^{\Re(\lambda_k)t} < e^{\rho t},$$

para  $t$  suficientemente grande, e todo termo do somatório  $\sum_{j=1}^k p_j(t)e^{\lambda_k t}$  é no máximo  $Me^{\rho t}$  ( $0 \leq t < \infty$ ) para alguma constante  $M$ . Uma vez que, são no máximo  $n^2$  termos na matriz  $e^{At}$ , tem-se a garantia de (2.34) com  $K = \tilde{M}n^2$ , onde  $\tilde{M}$  é o maior dos  $n^2$  valores de  $M$ . ■

**Corolário 2.22.** *Se a parte real de todos os autovalores de  $A$  forem negativos, então toda solução  $X(t)$  do sistema (2.10) aproxima-se de zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Mais precisamente, existem constantes  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , tais que*

$$\|X(t)\| \leq \delta e^{-\varepsilon t}.$$

**Demonstração:** Como  $X(t)$  é solução e tomando um vetor constante  $c$ , pode-se escrever  $X(t)$  na forma

$$X(t) = e^{At}c.$$

Toma-se um  $\varepsilon > 0$  tal que  $-\varepsilon$  seja maior ao máximo das parte reais dos autovalores de  $A$ , então pelo Teorema 2.21, pode-se escrever a seguinte desigualdade:

$$\|X(t)\| = \|e^{At}c\| \leq \|e^{At}\| \|c\| \leq K \|c\| e^{-\varepsilon t} = \delta e^{-\varepsilon t} \quad (0 \leq t < \infty)$$

onde  $\delta = K \|c\|$ . ■

## 2.3 Sistemas Lineares Não Homogêneos

Nesta seção serão abordados os sistemas não homogêneos do tipo:

$$Y' = A(t)Y + b(t) \quad (2.37)$$

onde  $A(t)$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $b(t)$  um vetor, ambos são considerados contínuos no intervalo  $I$ .

Pelo Teorema 2.3 tem-se que a equação diferencial (2.37) associada a uma condição inicial, caracterizando assim um PVI, admitirá sempre uma única solução. Todo o desenvolvimento apresentado a seguir, consiste em encontrar uma expressão para essa solução.

Para construir a solução de (2.37), considere  $\Theta(t)$  uma matriz fundamental do sistema homogêneo  $Y' = A(t)Y$  definida em  $I$ . Suponha que  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_2(t)$  sejam soluções do sistema (2.37) em  $I$ , então  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$  é solução do sistema homogêneo em  $I$ , e

$$\varphi_1'(t) = A(t)\varphi_1(t) + b(t),$$

$$\varphi_2'(t) = A(t)\varphi_2(t) + b(t).$$

Subtraindo ambas equações, obtém-se:

$$\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t) = A(t)[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]$$

$$[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]' = A(t)[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)],$$

satisfazendo assim o sistema homogêneo  $Y' = A(t)Y$ . Sendo  $c$  um vetor constante, pode-se escrever:

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \Theta(t)c,$$

$$\varphi_1(t) = \Theta(t)c + \varphi_2(t). \quad (2.38)$$

A partir de (2.38) percebe-se que para encontrar a solução geral de (2.37) é preciso encontrar uma solução particular de (2.37). Existe um método simples, conhecido por *Varição de Constantes* para determinar uma solução específica de (2.37), conhecendo uma matriz fundamental do sistema homogêneo  $Y' = A(t)Y$ .

Para a demonstração do próximo teorema, as soluções de (2.37) serão da forma:

$$\varphi(t) = \Theta(t)v(t), \quad (2.39)$$

onde  $v(t)$  é um vetor a ser determinado.

**Teorema 2.23.** *Se  $\Theta(t)$  é uma matriz fundamental de  $y' = A(t)y$  em  $I \subset \mathbb{R}$ , então a função*

$$\varphi(t) = \Theta(t) \int_{t_0}^t \Theta^{-1}(s)b(s)ds$$

*é a solução de (2.37) satisfazendo a condição inicial  $\varphi(t_0) = 0$  e válido em  $I$ .*

**Demonstração:** Supondo que a solução  $\varphi(t)$  de (2.37) exista, então substituindo (2.39) em (2.37) e usando a regra do produto, têm-se

$$\varphi'(t) = \Theta'(t)v(t) + \Theta(t)v'(t) = A(t)\Theta(t)v(t) + b(t).$$

Sabendo que  $\Theta(t)$  é uma matriz fundamental do sistema homogêneo, então  $\Theta'(t) = A(t)\Theta$ . Substituindo na equação acima

$$A(t)\Theta(t)v(t) + \Theta(t)v'(t) = A(t)\Theta(t)v(t) + b(t) \Rightarrow$$

$$\Theta(t)v'(t) = b(t).$$

Como  $\Theta(t)$  não é uma matriz singular em  $I$ , multiplica-se a igualdade anterior por  $\Theta^{-1}(t)$ , e integrando obtém-se:

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t \Theta^{-1}(s)b(s)ds,$$

note que, por hipótese

$$\varphi(t_0) = 0 \Rightarrow \Theta(t_0)v(t_0) = 0 \Rightarrow v(t_0) = \Theta^{-1}(t_0)0 \Rightarrow v(t_0) = 0,$$

então,

$$v(t) = \int_{t_0}^t \Theta^{-1}(s)b(s)ds, [t_0, t] \subseteq I,$$

e, portanto, (2.39) se torna

$$\varphi(t) = \Theta(t) \int_{t_0}^t \Theta^{-1}(s)b(s)ds, [t_0, t] \subseteq I. \quad (2.40)$$

Assim, se (2.37) tem um solução  $\varphi(t)$  na forma (2.39), então  $\varphi(t)$  é dada por (2.40).

Reciprocamente, define-se  $\varphi(t)$  por (2.40), derivando (2.40) e utilizando o Teorema Fundamental da Cálculo, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \Theta'(t) \int_{t_0}^t \Theta^{-1}(s)b(s)ds + \Theta(t)\Theta^{-1}(t)b(t) \\ &= A(t)\Theta(t) \int_{t_0}^t \Theta^{-1}(s)b(s)ds + b(t) \end{aligned}$$

e usando novamente (2.40)

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t),$$

para todo  $t$  pertencente a  $I$ . Retomando (2.40) substituindo  $t_0$  em  $t$ , tem-se:

$$\varphi(t_0) = \Theta(t_0) \int_{t_0}^{t_0} \Theta^{-1}(s)b(s)ds,$$

$$\varphi(t_0) = 0.$$

■

Combinando o Teorema 2.23 com as informações iniciais desta seção, observa-se que toda solução  $F(t)$  de (2.37) em  $I$  tem a forma:

$$F(t) = F_H(t) + \varphi(t),$$

onde  $\varphi(t)$  é a solução particular de (2.37) satisfazendo a condição inicial  $\varphi(t_0) = 0$ , e  $F_H$  é a solução do sistema homogêneo satisfazendo a mesma condição inicial em  $t_0$ .



## 3 Estudo de Estabilidade

Neste capítulo serão apresentadas as definições sobre estabilidade de ponto de equilíbrio de um sistema autônomo e os resultados principais. As referências usadas na construção deste capítulo foram [1, 2].

### 3.1 Pontos de Equilíbrio

Considere o sistema autônomo:

$$x' = f(x) \tag{3.1}$$

onde a função vetorial  $f$  de  $n$  componentes esta definida em um aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Assumise que  $f$  é de classe  $C^1$ , garantindo assim a existência e a unicidade de soluções de um PVI. O comportamento das soluções será indicado por curvas fornecendo assim uma análise qualitativa das soluções de (3.1), sem necessidade de expressar analiticamente as soluções.

A solução de (3.1) que em  $t_0$  vale  $x_0$  será denotada por  $\varphi(t; t_0, x_0)$ .

Seja então um sistema autônomo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f^1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f^2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f^n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{aligned}$$

O objetivo é obter uma descrição das soluções do sistema acima ou uma ideia do comportamento das soluções. Observe que uma solução dada por  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  descreve uma curva denominada como a *Órbita* da solução contida no espaço determinado pelo conjunto de pontos  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , cujo espaço será denominado por *espaço de fase* das soluções do sistema. Para cada condição inicial do sistema, obtém-se uma órbita descrita pela solução encontrada. O conjunto de todas as órbitas em  $\mathbb{R}^n$  será definido como *retrato de fase* das soluções do sistema.

**Exemplo 3.1.** Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \end{cases}$$

Sabendo que uma solução desse sistema é dada por  $x(t) = \cos t$  e  $y(t) = \sin t$ , o conjunto de pontos dados por  $(t, \cos t, \sin t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  descreve uma hélice no espaço tridimensional. Para esse exemplo, eliminando  $t$ , obtemos o plano  $\mathbb{R}^2$  definindo então o espaço de fase (plano de fase, neste caso) do sistema, e a circunferência descrita pela equação paramétrica  $(\cos t, \sin t)$  com  $t \in \mathbb{R}$  será a órbita da solução desse sistema.

**Definição 3.2.** Seja  $y = y_0$  um ponto crítico isolado de (3.1), ou seja  $f(y_0) = 0$ . Um ponto crítico é um ponto de equilíbrio de (3.1) e a solução  $y(t) = y_0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , é chamada solução de equilíbrio.

**Definição 3.3.** A solução de equilíbrio  $y_0$  de (3.1) é estável se para cada número  $\epsilon > 0$  é possível encontrar um número  $\delta > 0$  (pode depender de  $\epsilon$  apenas) tal que se  $\Psi(t)$  é qualquer solução de (3.1) tendo  $\|\Psi(t_0) - y_0\| < \delta$ , implica  $\|\Psi(t) - y_0\| < \epsilon$ ,  $\forall t \geq t_0$ . A solução de equilíbrio  $y_0$  é denominada instável se esta não for estável.

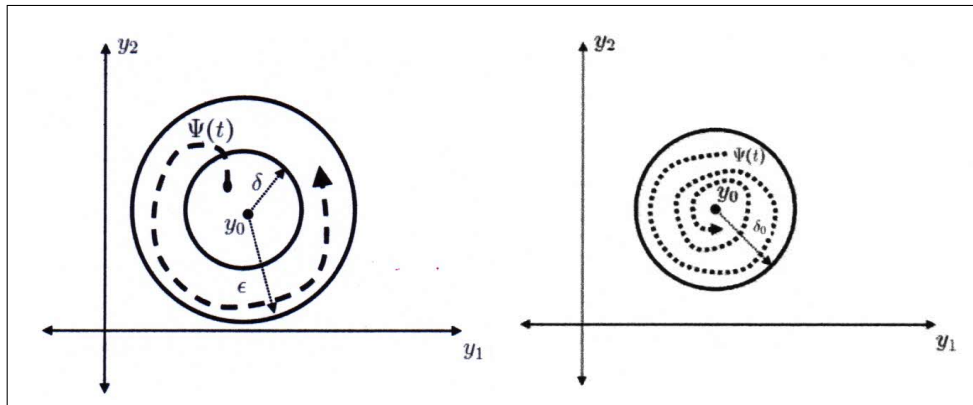


Figura 3.1: (a) Solução de equilíbrio  $y_0$  estável (b) Solução de equilíbrio  $y_0$  assintoticamente estável.

De uma forma mais geral, pode-se definir estabilidade de uma solução qualquer do sistema (3.1).

**Definição 3.4.** A solução de equilíbrio  $y_0$  é assintoticamente estável se for estável e existir um número  $\delta_0 > 0$  tal que se  $\Psi(t)$  é qualquer solução de (3.1) tendo  $\|\Psi(t_0) - y_0\| < \delta_0$ , então  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi(t) = y_0$ .

Embora neste trabalho seja tratado somente o caso autônomo, as definições dadas anteriormente podem ser generalizadas para o caso não autônomo  $\dot{x} = f(t, x)$ .

**Definição 3.5.** A solução  $\Psi(t)$  é estável se para todo  $\epsilon > 0$  e todo  $t_0 \geq 0$  existe um  $\delta > 0$  ( $\delta$  depende de  $\epsilon$  e possivelmente  $t_0$ ) tal que sempre que  $|\Psi(t) - y_0| < \delta$ , a solução  $\varphi(t; t_0, y_0)$  existe para todo  $t > 0$  e satisfaz  $|\Psi(t) - \varphi(t; t_0, y_0)| < \epsilon$  para todo  $t > t_0$ .

**Definição 3.6.** A solução  $\Psi(t)$  é assintoticamente estável se for estável e existir  $\delta_0 > 0$  tal que sempre que  $|\Psi(t) - y_0| < \delta_0$ , a solução  $\varphi(t; t_0, y_0)$  aproxima-se da solução  $\Psi(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t; t_0, y_0) - \Psi(t)| = 0$ .

**Teorema 3.7.** (Desigualdade de Gronwall) Seja  $K$  uma constante não negativa e sejam  $f$  e  $g$  funções não-negativas contínuas num intervalo fechado  $[\alpha, \beta]$ , satisfazendo a inequação

$$f(t) \leq K + \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds,$$

para  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Então,

$$f(t) \leq Ke^{\int_{\alpha}^t g(s)ds}, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

**Demonstração:** Seja  $U(t) = K + \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds$ , e note que  $U(\alpha) = K$ . Por hipótese,  $f(t) \leq U(t)$  e pelo Teorema Fundamental do Cálculo e como  $g(t) \geq 0$ , obtém-se

$$U'(t) = f(t)g(t) \leq U(t)g(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Multiplicando esta inequação por  $e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds}$  obtém-se

$$U'(t)e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds} \leq U(t)g(t)e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds},$$

logo,

$$\begin{aligned} U'(t)e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds} - U(t)g(t)e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds} &\leq 0, \\ (U(t)e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds})' &\leq 0. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança da variável  $t$  para  $z$  e integrando na variável  $z$  de 0 até  $t$ , têm-se que

$$U(t)e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds} - U(\alpha) \leq 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U(t)e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds} - K &\leq 0, \\ U(t)e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds} &\leq K, \\ U(t) &\leq Ke^{\int_{\alpha}^t g(s)ds}, \end{aligned}$$

então

$$f(t) \leq U(t) \leq Ke^{\int_{\alpha}^t g(s)ds}, \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$$

obtendo assim a desigualdade desejada. ■

## 3.2 Sistemas Lineares

Antes da abordagem geral, no caso (3.1), primeiro prova-se um resultado de estabilidade da solução de equilíbrio do caso linear,  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  constante.

**Teorema 3.8.** (i) Se todos os autovalores de  $A$  com parte real não-positiva e iguais a zero forem de multiplicidade algébrica iguais a um, então a solução  $y_0 = 0$  de  $\dot{x} = Ax$  é estável. (ii) Se (e somente se) todos os autovalores de  $A$  tiverem a parte real negativa, então a solução  $y_0 = 0$  de (3.1) é assintoticamente estável. (iii) Se um ou mais autovalores de  $A$  possuírem a parte real positiva, então a solução  $y_0 = 0$  é instável.

**Demonstração:** (i) Basta mostrar que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\|\Psi(t_0)\| < \delta$  implica  $\|\Psi(t)\| < \epsilon$ ,  $\forall t \geq t_0$ . Como  $\Psi(t)$  é solução de  $\dot{x} = Ax$ , segue que  $\|\Psi(t)\| = e^{(t-t_0)A}\Psi(t_0)$  e pelo Teorema 2.21, toma-se  $0 > \rho > \max \Re(\lambda_j)$  para que exista  $k > 0$  tal que

$$\|e^{(t-t_0)A}\| \leq ke^{\rho(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Assim, dado  $\epsilon > 0$  basta tomar  $0 < \delta < \frac{\epsilon}{k}$ , pois

$$\|\Psi(t)\| = \|e^{(t-t_0)A}\Psi(t_0)\| = \|e^{(t-t_0)A}\| \cdot \|\Psi(t_0)\| \leq ke^{\rho(t-t_0)}\delta < e^{\rho(t-t_0)}\epsilon < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

Se a parte real do autovalor for nula, é imediato supondo que todos os autovalores são nulos e tomando  $\rho = 0$  no Teorema 2.21.

(ii) Pelo Corolário 2.22, tem-se que

$$\|\Psi(t) - y_0\| \leq \delta e^{-ct}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Psi(t) - y_0\| &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \delta e^{-ct}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Psi(t) - y_0\| &\leq 0 \end{aligned}$$

então, quando  $t$  tende ao infinito temos a igualdade

$$\|\Psi(t) - y_0\| = 0$$

$$\Psi(t) - y_0 = 0$$

$$\Psi(t) = y_0, \quad \forall t \geq t_0.$$

(iii) Segue da última parte do Teorema 2.21. ■

Considere agora o sistema

$$y' = (A + B(t))y, \tag{3.2}$$

onde  $A$  é uma matriz constante e  $B(t)$  contínua e "pequena" no sentido de que  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$ . Para um  $t$  muito grande, espera-se então encontrar soluções de (3.2) similares às equações de  $y' = Ay$ .

**Teorema 3.9.** Suponha que todos os autovalores de  $A$  possuam a parte real negativa e  $B(t)$  seja contínua para  $0 < t < \infty$  com  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$ . Então a solução nula ( $y_0 = 0$ ) de (3.2) é globalmente assintoticamente estável.

**Demonstração:** Dado qualquer  $(t_0, y_0)$ ,  $t_0 > 0$ , segue do Teorema 2.3 com  $A(t) = A + B(t)$ , que a solução  $\Psi(t; t_0, y_0)$  é única e existe para todo  $t \geq t_0$ . O problema consiste em mostrar que essa solução arbitrária que em  $t_0$  vale  $y_0$  satisfaz as definições 3.5 e 3.6. Pelo Teorema 2.23 e usando  $B(t)y$  como um "termo não homogêneo", pode-se escrever a solução pela equação integral

$$\Psi(t; t_0, y_0) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)\Psi(s; t_0, y_0)ds, \quad 0 \leq t < \infty \quad (3.3)$$

Pela hipótese em  $A$ , tem-se que  $e^{(t-t_0)A}$  satisfaz (2.34) com  $\rho$  e  $K$  previamente definidos. Desde que  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$ , dado qualquer  $\eta > 0$ , existe um número  $T > t_0$  tal que  $|B(t)| < \eta$  para  $t > T$ . Similarmente a (2.38) e usando agora o valor inicial  $\Psi(T, t_0, y_0)$ , tem-se

$$\Psi(t; t_0, y_0) = e^{(t-t_0)A}\Psi(T; t_0, y_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)\Psi(s; t_0, y_0)ds, \quad T \leq t < \infty.$$

Utilizando novamente (2.34) com  $t_0 = T$  e  $|B(t)| < \eta$  para  $t > T$ , obtém-se

$$|\Psi(t; t_0, y_0)| \leq Ke^{-\rho(t-T)}|\Psi(T; t_0, y_0)| + K\eta \int_{t_0}^t e^{-\rho(t-s)}|\Psi(s; t_0, y_0)|ds, \quad T \leq t < \infty.$$

Multiplicando ambos os lados por  $e^{\rho t}$ , obtém-se

$$|\Psi(t; t_0, y_0)|e^{\rho t} \leq Ke^{-\rho(t-T)}|\Psi(T; t_0, y_0)|e^{\rho t} + K\eta e^{\rho t} \int_{t_0}^t e^{-\rho(t-s)}|\Psi(s; t_0, y_0)|ds, \quad T \leq t < \infty,$$

ou seja,

$$|\Psi(t; t_0, y_0)|e^{\rho t} \leq Ke^{\rho T}|\Psi(T, t_0, y_0)| + K\eta \int_{t_0}^t e^{\rho s}|\Psi(s; t_0, y_0)|ds, \quad T \leq t < \infty.$$

Aplicando a Desigualdade de Gronwall, obtém-se

$$|\Psi(t; t_0, y_0)| \leq K|\Psi(T; t_0, y_0)|e^{-(\rho-K\eta)(t-T)}, \quad T \leq t < \infty. \quad (3.4)$$

A partir desse resultado pode-se concluir que se  $0 < \eta < \frac{\rho}{K}$ , a solução  $\Psi(\cdot; t_0, y_0)$  irá se aproximar de zero, porém resta mostrar que a solução  $y_0$  de (3.2) é estável. Para isso, deve-se então encontrar um limitante para  $|\Psi(T; t_0, y_0)|$ . Retornando em (3.3) e agora restringindo  $t$  no intervalo  $t_0 \leq t \leq T$ , tem-se

$$|\Psi(t; t_0, y_0)| \leq Ke^{-\rho(t-t_0)}|y_0| + KK_1 \int_{t_0}^t e^{-\rho(t-s)}|\Psi(s; t_0, y_0)|ds,$$

onde  $K_1 = \max_{t_0 \leq s \leq T} |B(s)|$ . Multiplicando por  $e^{\rho t}$  e aplicando a Desigualdade de Gronwall obtém-se

$$|\Psi(t; t_0, y_0)| \leq Ke^{-\rho(t-t_0)+KK_1(t-t_0)},$$

como  $-\rho(t-t_0) < 0$  então

$$|\Psi(t; t_0, y_0)| \leq Ke^{KK_1(t-t_0)}, \quad (3.5)$$

portanto

$$|\Psi(T; t_0, y_0)| \leq Ke^{KK_1(T-t_0)}. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.4) obtém-se

$$|\Psi(t; t_0, y_0)| \leq K^2 e^{K_1 K(T-t_0)} e^{-(\rho-K\eta)(t-T)}, \quad T \leq t < \infty. \quad (3.7)$$

Seja  $K_2 = \max \{K e^{K_1 K(T-t_0)}, K^2 e^{K_1 K(T-t_0)}\}$ , então, de (3.5) e (3.7) tem-se

$$|\Psi(t; t_0, y_0)| \leq \begin{cases} K_2 |y_0|, & \text{para } t_0 \leq t \leq T, \\ K_2 |y_0| e^{-(\rho-K\eta)(t-T)}, & \text{para } T \leq t < \infty. \end{cases}$$

Tomando  $\delta < \frac{\epsilon}{K_2}$  então, se  $|y_0| < \delta$  implica  $|\Psi(t; t_0, y_0)| < \epsilon$  para todo  $t \geq t_0$ . Portanto, a solução nula é assintoticamente estável, como a prova é válida para todo  $t \geq t_0$ , pode-se dizer então que a solução nula é globalmente assintoticamente estável. ■

Como consequência imediata segue o seguinte resultado:

**Corolário 3.10.** *Suponha que todos os autovalores de  $A$  possuam parte real negativa, então*

$$\|e^{At}\| \leq K e^{-\rho t}, \quad t \geq 0,$$

para algumas constantes  $K > 0$ ,  $\rho > 0$ . Seja  $B(t)$  contínua para  $0 \leq t < \infty$  e que exista  $T > 0$  tal que  $0 \leq t < \infty$ ,

$$|B(t)| < \frac{\rho}{K}, \quad t \geq T,$$

então a solução nula de (3.2) é globalmente assintoticamente estável.

## 4 Aplicações

Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações clássicas das equações diferenciais ordinárias para então aplicar todos os conteúdos apresentados previamente. Foram três modelos escolhidos obedecendo a ordem crescente do grau de dificuldade que cada um apresenta.

O primeiro modelo consiste no estudo do crescimento populacional de uma certa espécie e é dado por uma EDO linear de primeira ordem. O segundo problema trata de uma EDO de segunda ordem. Já o modelo presa-e-predador foi escolhido por ser representado através de um sistema de EDO's não-linear cuja solução é de difícil obtenção tal que estuda-se o comportamento utilizando recursos computacionais gráficos.

### 4.1 Dinâmica Populacional: Malthus e Verhulst

Esta primeira aplicação é baseada na referência [9].

A busca por modelos que descrevessem populações ao longo de um tempo, permitindo assim uma previsão sobre a população de qualquer espécie, sempre foi uma das prioridades para estudos envolvendo equações diferenciais.

A ideia inicial sobre os estudos a respeito de crescimento de população baseou-se de que essa variação fosse proporcional à população inicial e à variação do tempo. O primeiro modelo a ser estudado foi apresentado por Thomas Robert Malthus (1766-1834), publicado em 1798 enunciado então a Lei de Malthus.

Seja  $P = P(t)$  o total de indivíduos uma certa população em um instante  $t$ . Conforme a Lei de Malthus, nascimentos e falecimentos ocorrerão no decorrer de um certo intervalo de tempo  $\Delta t$ . Considere o número de nascimentos por  $\alpha P(t)\Delta t$  e o número de falecimentos por  $\beta P(t)\Delta t$  tal que  $\alpha$  e  $\beta$  são os índices de natalidade e mortalidade, respectivamente.

Sendo assim

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(t + \Delta t) - P(t), \\ \Delta P &= \alpha P(t)\Delta t - \beta P(t)\Delta t, \\ \Delta P &= (\alpha - \beta)\Delta t, P(t),\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = (\alpha - \beta)P(t).$$

Tomando  $\Delta t \rightarrow 0$  obtém-se da equação de diferenças, a equação diferencial

$$\dot{P}(t) = (\alpha - \beta)P(t). \quad (4.1)$$

A solução de (4.1) será

$$P(t) = P_0 e^{(\alpha - \beta)t}, \quad P(0) = P_0. \quad (4.2)$$

Se  $\alpha = \beta$  implica que a taxa de natalidade é igual a taxa de mortalidade, ou seja, a população permanecerá constante para todo  $t \geq t_0$  tal que  $P(t) = P_0$  (veja a figura 4.1a).

Se  $\alpha > \beta$  então a taxa de natalidade é maior que o de mortalidade fazendo com que a população cresça exponencialmente com o tempo (veja a figura 4.1b).

Se  $\alpha < \beta$  a população diminuirá tendendo a extinção a medida que  $t$  aumenta (veja a figura 4.1c).

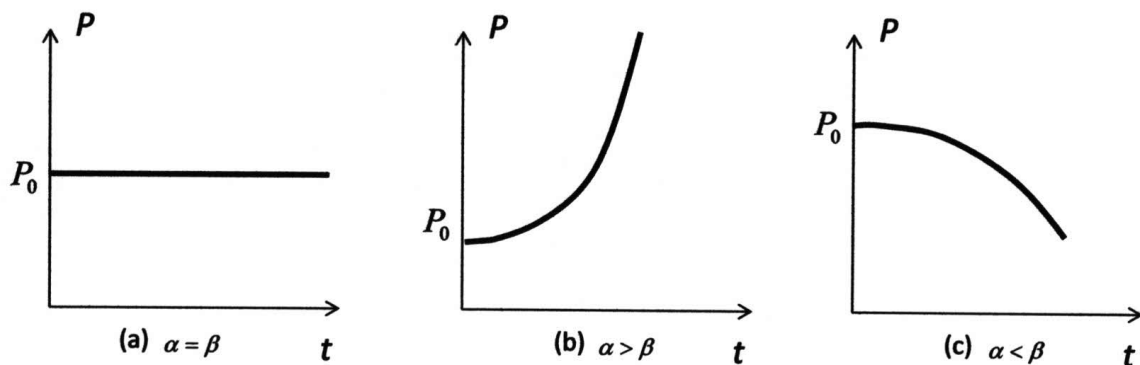


Figura 4.1: Modelos malthuseanos de crescimento populacional.

Em relação ao modelo de Malthus verifica-se que esse modelo aplica-se em poucos contextos de crescimento populacional pois ele falha ao induzir que o crescimento da população tende ao infinito, fato que não ocorre na vida real.

Levando em conta esses fatores inibidores fazendo com a população estabilize num limitante máximo e/ou mínimo, Verhulst propôs, em 1837, que o crescimento populacional atinja um limite máximo dado por  $P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ , limitando assim o crescimento populacional, contradizendo a ideia do crescimento infinito induzido pela Lei de Malthus. Também será considerado que a variação da população esteja sujeita a um fator de proporcionalidade inibidor  $f(P)$ .

Então

$$\dot{P}(t) = P \cdot f(P)$$

com

$$f(P) = \lambda \left( \frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right), \quad \lambda > 0.$$



então, explicitando  $f(P)$  na equação diferencial, obtém-se

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left( 1 - \frac{P}{P_\infty} \right), \quad \lambda > 0. \quad (4.3)$$

Comparando (4.3) com (4.1) têm-se

$$\alpha - \beta = \lambda - \frac{\lambda}{P_\infty}.$$

Note que a taxa de crescimento diminui conforme a população aumenta e tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . As únicas soluções de equilíbrio de (4.3) são  $P(t) = 0$  e  $P(t) = P_\infty$ ,  $t \geq 0$ . Considere agora  $P(t) \neq 0$  e  $P(t) \neq P_\infty$ , assim para resolver (4.3), será usada a técnica de frações parciais para resolver a integral. Ou seja, a partir

$$\dot{P}(t) = \lambda P(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{P_\infty} \right),$$

tendo  $P(t) \neq 0$  e  $P(t) \neq P_\infty$ , dividindo ambos os lados por  $P(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{P_\infty} \right)$ :

$$\frac{\dot{P}(t)}{P(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{P_\infty} \right)} = \lambda.$$

$$\left[ \frac{1}{P(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{P_\infty} \right)} \right] \dot{P}(t) = \lambda.$$

Integrando indefinidamente na variável  $t$  ambos os membros,

$$\int \left( \frac{1}{P(1 - \frac{P}{P_\infty})} \right) \dot{P} dt = \int \lambda dt \quad (4.4)$$

Obtém-se

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{1}{P(1 - \frac{P}{P_\infty})} \right) \dot{P} dt &= \int \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{(1 - \frac{P}{P_\infty})} \right) \dot{P} dt = \int \frac{1}{P} \dot{P} dt + \int \frac{1}{(1 - \frac{P}{P_\infty})} \dot{P} dt = \\ &= \ln |P| - \ln \left| 1 - \frac{P}{P_\infty} \right| = \ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{P_\infty}} \right| + C_1, \end{aligned}$$

onde  $C_1$  é a constante de integração

Substituindo novamente em (4.4) e integrando o 2º membro obtém-se

$$\ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{P_\infty}} \right| = \lambda t + C.$$

Se, quando  $t = 0$ ,  $P(0) = P_0$ , têm-se ainda

$$C = \ln \left| \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{P_\infty}} \right| = \ln \left| \frac{P_\infty P_0}{P_\infty - P_0} \right|,$$

logo,

$$\ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{P_\infty}} \right| = \lambda t + \ln \left| \frac{P_\infty P_0}{P_\infty - P_0} \right|.$$

Manipulando convenientemente a igualdade,

$$\ln \left| \frac{P(P_\infty - P_0)}{P_0(P_\infty - P)} \right| = \lambda t,$$

$$\frac{P(P_\infty - P_0)}{P_0(P_\infty - P)} = e^{\lambda t},$$

$$P(P_\infty - P_0) = P_0(P_\infty - P)e^{\lambda t},$$

$$PP_\infty - PP_0 = P_0P_\infty e^{\lambda t} - P_0Pe^{\lambda t},$$

$$P(P_\infty - P_0 + P_0e^{\lambda t}) = P_0P_\infty e^{\lambda t}.$$

Então

$$P(t) = \frac{P_0P_\infty e^{\lambda t}}{P_\infty - P_0 + P_0e^{\lambda t}} = \frac{P_0P_\infty}{P_\infty e^{-\lambda t} - P_0e^{-\lambda t} + P_0} = \frac{P_0P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-\lambda t} + P_0},$$

portanto

$$P(t) = \frac{P_\infty}{\left[ \frac{P_\infty}{P_0} - 1 \right] e^{-\lambda t} + 1}. \quad (4.5)$$

Através de (4.5), vê-se que a população depende dos parâmetros  $\lambda$ ,  $P_0$  e  $P_\infty$  que estabelecem a equação diferencial e a condição inicial sendo uma função do tempo, como era esperado.

Voltando em (4.3) tem-se

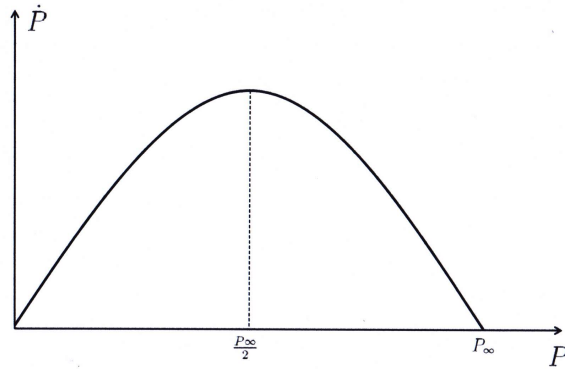
$$\dot{P} = \lambda P - \frac{\lambda}{P_\infty} P^2, \quad (4.6)$$

isto é,  $\dot{P}$  como função de  $P$  é uma parábola de concavidade para baixo e os pontos  $P(t) = 0$  e  $P(t) = P_\infty$ , como pontos de equilíbrios, onde a função é zero, e portanto  $P(t)$  é constante nesses pontos. Como  $\lambda > 0$ ,  $\dot{P}$  cresce para  $0 < P < \frac{P_\infty}{2}$  e  $\dot{P}$  decresce para  $\frac{P_\infty}{2} < P < P_\infty$ . Pelo gráfico tem-se que o valor máximo de  $\dot{P}$  ocorre quando  $P = \frac{P_\infty}{2}$ , isto é, o máximo da variação da população ocorre quando a população atingir a metade da população limite. Substituindo esse valor na equação para obter o tempo  $t_M$  quando a variação da população é máxima, obtém-se:

$$\frac{P_\infty}{2} = \frac{P_0P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-\lambda t_M} + P_0},$$

dividindo por  $P_\infty$ ,

$$(P_\infty - P_0)e^{-\lambda t_M} = P_0,$$



portanto,

$$e^{\lambda t_M} = \frac{P_\infty - P_0}{P_0},$$

e, então

$$t_M = \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{P_\infty - P_0}{P_0} \right|.$$

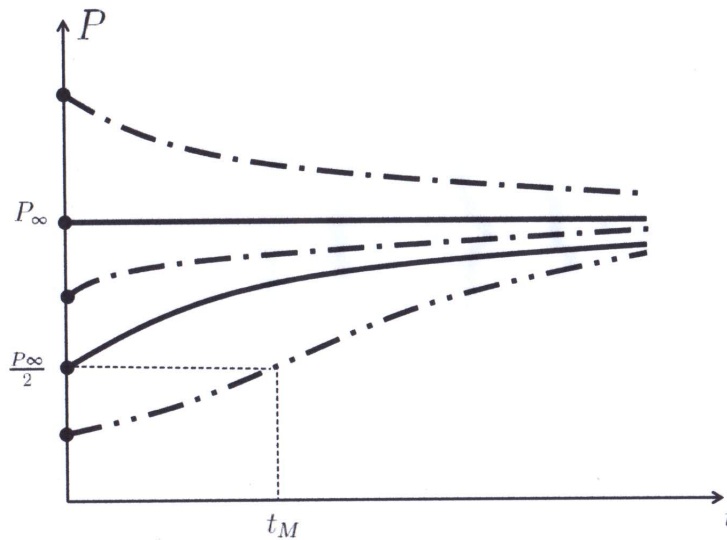


Figura 4.2: Curva logística conforme modelo de Verhulst.

Para analisar o gráfico de  $P = P(t)$ , considere então:

(i)  $P_0 < \frac{P_\infty}{2}$ : tomando no instante  $t_M$  tal que  $\dot{P}(t_M) = \frac{P_\infty}{2}$  e substituindo em (4.3) obtém-se

$$\frac{dP}{dt} = \lambda \frac{P_\infty}{4} \neq 0,$$

logo

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 0,$$

ou seja, o ponto  $t = t_0$  é um ponto de inflexão de  $P(t)$ .

(ii)  $P_0 = \frac{P_\infty}{2}$  têm-se  $t_M = 0$ ,

(iii)  $\frac{P_\infty}{2} < P_0 < P_\infty$ , a curva  $P(t)$  não tem ponto de inflexão pois a derivada sempre será positiva, portanto a população cresce tendendo a  $P_\infty$  sem mudar concavidade.

(iv)  $P_0 > P_\infty$  então a curva não tem ponto de inflexão e a derivada é negativa.

Próximo passo é analisar a concavidade da segunda derivada de  $P(t)$ . Voltando em (4.6) obtém-se

$$P'' = P'\lambda \left(1 - \frac{2P}{P_\infty}\right),$$

$$P'' = \lambda^2 \left(P - \frac{1}{P_\infty}P^2\right) \left(1 - \frac{2P}{P_\infty}\right).$$

Fazendo o estudo do sinal da segunda derivada, verifica-se que a concavidade de  $P$  será para cima para no intervalo  $]0; \frac{P_\infty}{2}[ \cup ]P_\infty; \infty[$  e para baixo no intervalo  $] \infty; 0[ \cup ] \frac{P_\infty}{2}; P_\infty[$  (veja Figura 4.2).

A vantagem do modelo de Verhulst sobre o de Malthus está principalmente no fato de levar-se em conta os efeitos da superpopulação e, em consequência,  $P(t)$  tenderá sempre a um valor  $P_\infty$  fixado.

## 4.2 Sistema Massa e Mola: Um Modelo de 2ª Ordem

Nesta seção, o enfoque será analisar a elongação de uma mola durante um certo tempo, baseado na referência [1]. Vale observar que a resolução apresentada foi obtida baseando-se na teoria dos capítulos anteriores de trabalho.

Através da Segunda Lei de Newton pode-se descrever o deslocamento através de uma equação diferencial de segunda ordem pois esse movimento é descrito através da aceleração.

Considera-se o caso de um pequeno objeto de massa  $m$  estar fixo em uma mola elástica de comprimento  $l$  que se encontra suspensa sob um suporte rígido horizontal (veja a Figura 4.3) podendo estar submerso a qualquer meio sofrendo as influências externas. As aplicações são diversas como por exemplo, o sistema de amortecedores de carro, reduzir o recuo de uma arma, estudos sismógrafos entre outros.

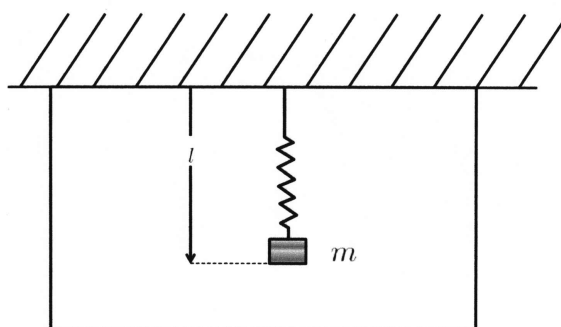


Figura 4.3: Sistema massa e mola

Neste caso será considerado que a massa se encontra inicialmente na posição de equilíbrio, ponto este que será adotado como a origem da função  $y(t)$  que fornece a posição da massa no instante  $t$ . Se o deslocamento  $\Delta y(t)$  for para baixo, então será positivo como sentido adotado de orientação. Considera-se que a força restauradora  $R$  da mola é da forma  $k\Delta l$  tal que  $k$  é a constante de elasticidade da mola medida em  $\frac{N}{m}$ . Para determinar  $y(t)$ , calcula-se a força resultante agindo sobre a mola; da posição de equilíbrio conclui-se que  $k\Delta l = mg$ .

A força  $R$  é a força restauradora da mola tal que sua atuação sempre é contrária ao movimento do bloco, restaurando sempre a mola à posição de equilíbrio e será dada pela fórmula  $R(t) = -k(\Delta l + y(t))$ .

Para os próximos resultados, será necessário o seguinte lema

**Lema 4.1.** *Seja  $y(t) = u(t) + iv(t)$  uma solução com valores complexos de  $ay'' + by' + cy = 0$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  reais. Então,  $y_1(t) = u(t)$  e  $y_2 = v(t)$  são duas soluções reais de  $ay'' + by' + cy = 0$ .*

**Demonstração:** Da hipótese, têm-se que:

$$a[u(t) + iv(t)]'' + b[u(t) + iv(t)]' + c[u(t) + iv(t)] = 0 \Rightarrow$$

$$a[u''(t) + iv''(t)] + b[u'(t) + iv'(t)] + c[u(t) + iv(t)] = 0 \Rightarrow$$

$$[au''(t) + bu'(t) + cu(t)] + i[av''(t) + bv'(t) + cv(t)] = 0,$$

e da igualdade de números complexos têm-se

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0 \text{ e } av''(t) + bv'(t) + cv(t) = 0,$$

concluindo a prova. ■

### 4.2.1 Vibrações Livres

Nesta subseção será desprezado qualquer elemento externo agindo sobre o sistema massa-mola que não altera o movimento. Considerando o caso mais simples do movimento livre não amortecido, obtém-se a seguinte equação

$$my'' = P_{bloco} + R,$$

$$my'' = mg - k(\Delta l + y),$$

$$my'' = mg - k\Delta l - ky,$$

$$my'' + ky = 0,$$

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0,$$

adotando  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , então

$$y'' + \omega_0^2 y = 0. \tag{4.7}$$

Denotando

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

pode-se reescrever (4.7) na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

portanto o sistema é do tipo  $\dot{x} = Ax$ , em que  $A$  é uma matriz quadrada de ordem 2 com coeficientes constantes. Para este problema, têm-se  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculando o polinômio característico de  $A$ , obtém-se

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0,$$

cujas soluções são os dois autovalores de  $A$ ,  $\lambda_1 = \omega_0 i$  e  $\lambda_2 = -\omega_0 i$ . Como os dois autovalores são distintos, então é possível encontrar dois autovetores linearmente independentes para cada autovalor correspondente.

Para  $\lambda_1 = \omega_0 i$ , toma-se o seguinte sistema para encontrar o autovetor  $v_1$

$$\begin{pmatrix} -\omega_0 i & 1 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0 i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e obtém-se a solução  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \omega_0 i x_1(t) \end{pmatrix}$ , de onde conclui-se que  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_0 i \end{pmatrix}$ . Similarmente para

$\lambda_2 = -\omega_0 i$  encontra-se o autovetor  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_0 i \end{pmatrix}$ , tal que a solução do sistema será dada

$$Y(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + a_2 e^{\lambda_2 t} v_2;$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = a_1 e^{\omega_0 i t} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_0 i \end{pmatrix} + a_2 e^{-\omega_0 i t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_0 i \end{pmatrix};$$

porém a solução da equação que buscamos é  $y(t) = y_1(t)$  e então

$$y(t) = a_1 e^{\omega_0 i t} + a_2 e^{-\omega_0 i t}.$$

Desenvolvendo os expoentes complexos, obtém-se

$$y(t) = a_1 (\cos \omega_0 t + i \operatorname{sen} \omega_0 t) + a_2 (\cos \omega_0 t - i \operatorname{sen} \omega_0 t).$$

Utilizando o Lema 4.1 têm-se que a solução de (4.7) é dada por

$$y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t. \quad (4.8)$$

Para conseguir analisar essa solução é conveniente reescrevê-la como função apenas do cosseno. Segue-se então o seguinte lema

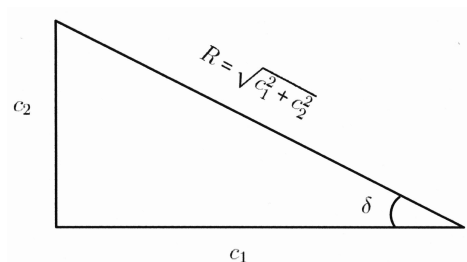


Figura 4.4: Relação entre  $\delta$  e  $c_1$  e  $c_2$ .

**Lema 4.2.** Qualquer função  $y(t)$  da forma (4.8) pode ser escrita sob a forma mais simples

$$y(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta) \quad (4.9)$$

onde  $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  e  $\delta = \text{tg}^{-1} \frac{c_2}{c_1}$ .

**Demonstração:** Basta mostrar que (4.8) e (4.9) são iguais. De fato, observando a Figura 4.4 obtém-se que  $c_1 = R \cos \delta$  e  $c_2 = R \sin \delta$ , então partindo de (4.9)

$$R \cos(\omega_0 t - \delta) = R \cos \omega_0 t \cos \delta + R \sin \omega_0 t \sin \delta = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t,$$

■

Na Figura 4.5 apresenta-se o gráfico de  $y(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta)$ . Esse movimento é denominado como movimento harmônico simples;  $R$  é a amplitude do movimento,  $\delta$  o ângulo de fase do movimento,  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  o período do movimento e  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  a frequência natural do sistema.

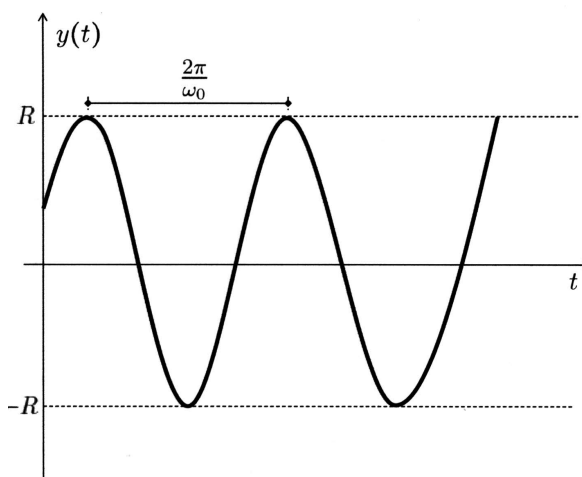


Figura 4.5: Gráfico de  $y(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta)$ .

## 4.2.2 Vibrações Livres Amortecidas

Será incluído um elemento externo, causando um amortecimento no movimento denominado como uma força  $D$  de resistência que o meio exerce sobre a massa  $m$ .

Essa força age sempre no sentido oposto ao sentido do movimento de modo que seja diretamente proporcional ao módulo da velocidade  $y'$ , então  $D = -cy'$ . Neste caso, então

$$\begin{aligned} my'' &= P_{bloco} + R + D, \\ my'' &= mg - k(\Delta l + y) - cy', \\ my'' &= mg - k\Delta l - ky - cy', \\ my'' + cy' + ky &= 0, \\ y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y &= 0. \end{aligned}$$

Realizando a mesma abordagem em relação à seção anterior, obtém-se o sistema de EDO's

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

A matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}$  e o polinômio característico é dado por

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (4.11)$$

tal que os autovalores são

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \text{ e } \lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m},$$

e a eles associa-se dois autovetores  $v_1$  e  $v_2$  linearmente independentes.

Portanto têm-se 3 casos para se discutir:

(i)  $c^2 - 4mk > 0$ . Neste caso,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  serão distintos e negativos, portanto toda solução de (4.10) tem a forma

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

ou seja, a solução geral de (4.11) tem a forma

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

(ii)  $c^2 - 4mk = 0$ . Neste caso,  $\lambda$  será único com multiplicidade algébrica 2. Portanto para encontrar a solução, as etapas seguintes obedecerão o Método dos Autovalores e dos Autovetores descritos na Seção 2.2.2 conforme descrito em "Autovalores Iguais".

Primeiramente, será calculado o autovetor  $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  para  $\lambda = -\frac{c}{2m}$ . Conforme as etapas, o autovetor será obtido através da solução do sistema abaixo:

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{2m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



ou seja,

$$\begin{cases} \frac{c}{2m}a + b = 0, \\ -\frac{k}{m}a - \frac{c}{2m}b = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método da substituição tal que  $b = -\frac{c}{2m}a$ , tem-se

$$\begin{aligned} -\frac{k}{m}a + \frac{c^2}{4m^2}a &= 0, \\ \left(\frac{c^2 - 4mk}{4m^2}\right)a &= 0. \end{aligned}$$

Pela condição  $c^2 - 4mk = 0$  conclui-se então que  $a$  é arbitrário e convenientemente toma-se então o autovetor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  para o autovalor  $\lambda$ . Conforme os passos descritos na Seção

2.2.2, é preciso agora encontrar um outro autovetor  $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  linearmente independente, obtém-se agora outro sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{c^2 - 4km}{4m^2} & 0 \\ 0 & \frac{c^2 - 4km}{4m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtendo então o sistema correspondente

$$\begin{cases} \frac{c^2 - 4km}{4m^2}a = 0, \\ \frac{c^2 - 4km}{4m^2}b = 0. \end{cases}$$

Novamente, pela condição  $c^2 - 4mk = 0$ , conclui-se que  $a$  e  $b$  são arbitrários, podendo então tomar o autovetor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  para encontrar a segunda solução. A solução para  $y(t)$  será então:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= c_1 e^{-\frac{ct}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{ct}{2m}} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{c}{2m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= c_1 e^{-\frac{ct}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{ct}{2m}} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Portanto a solução da equação será dada por

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{ct}{2m}}.$$

(iii)  $c^2 - 4mk < 0$ . Neste caso, toda solução  $y(t)$  será da forma:

$$y(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t},$$

com  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  complexos e então

$$y(t) = ae^{\left(-\frac{c}{m} + \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}\right)t} + be^{\left(-\frac{c}{m} - \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}\right)t}.$$

Seja  $\mu = \frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}$ , então pode-se escrever  $y(t)$  da forma

$$y(t) = ae^{(-\frac{c}{m}+i\mu)t} + be^{(-\frac{c}{m}-i\mu)t},$$

$$y(t) = ae^{(-\frac{c}{m}+i\mu)t} + be^{(-\frac{c}{m}-i\mu)t},$$

$$y(t) = ae^{-\frac{ct}{2m}}(\cos \mu t + i \sin \mu t) + be^{-\frac{ct}{2m}}(\cos \mu t - i \sin \mu t),$$

$$y(t) = e^{-\frac{ct}{2m}}(a+b) \cos \mu t + e^{-\frac{ct}{2m}}(a-b)i \sin \mu t.$$

Pelo Lema 4.6,  $y_1(t) = e^{-\frac{ct}{2m}}(a+b) \cos \mu t$  e  $y_2(t) = e^{-\frac{ct}{2m}}(a-b) \sin \mu t$  são soluções. Tomando  $c_1 = a+b$  e  $c_2 = a-b$ , então

$$y(t) = e^{-\frac{ct}{2m}}[c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t],$$

usando o Lema 4.2 têm-se

$$y(t) = Re^{-\frac{ct}{2m}} \cos(\mu t - \delta).$$

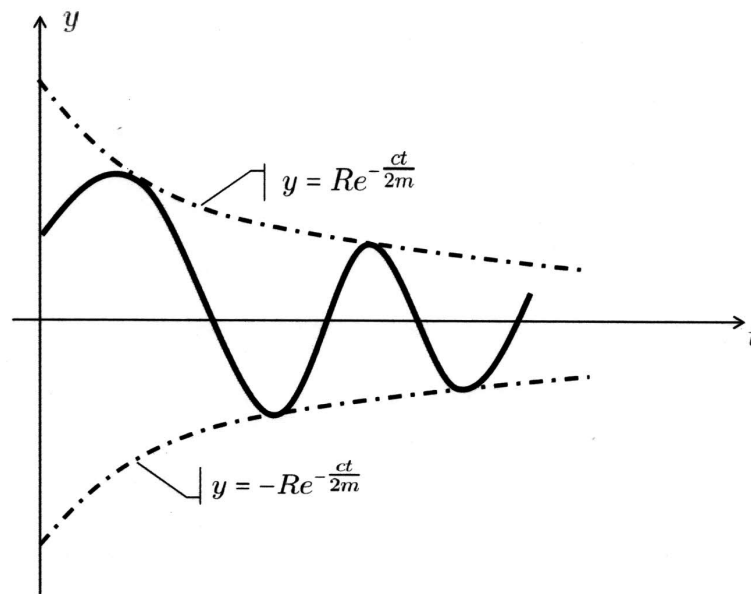


Figura 4.6: Gráfico de  $y(t) = Re^{-\frac{ct}{2m}} \cos(\omega_0 t - \delta)$

Conforme a Figura 4.6 acima, nota-se que a solução é uma cossenóide decrescente. Observando que o movimento extingue-se ao passar do tempo, quando o atrito é considerado, por exemplo. Conforme esse modelo, por causa do atrito, qualquer perturbação inicial é absorvida pelo sistema com o passar do tempo.

### 4.3 Presas e Predador: Um Modelo Não Linear

O que determinou a escolha do estudo desse modelo foi o fato de ser não linear. O estudo foi baseado em [13].

Sejam  $x(t)$  a população de presas e  $y(t)$  a população de predadores no instante  $t$ . Predetermina-se que o meio de subsistência para presas seja farto o bastante, cujo único fator inibidor será a presença de predadores. Pode-se então afirmar que sem a presença de predadores, as presas irão crescer conforme a lei de crescimento exponencial  $\dot{x}(t) = ax(t)$ , onde  $a > 0$ . Entretanto, com a presença dos predadores o crescimento sofrerá uma redução. Supondo então que  $x(t)$  diminua linearmente quando a população de  $y(t)$  aumenta, têm-se:

$$\dot{x}(t) = [a - by(t)]x(t), \quad (4.12)$$

onde  $b > 0$ .

Por outro lado, supõe-se que os predadores alimentam-se exclusivamente das presas, e que sem elas, a espécie desapareceria. A partir dessa consideração pode-se dizer então que a população  $y(t)$  decresce de acordo com a lei exponencial  $\dot{y}(t) = -cy(t)$ , onde  $c > 0$ . Entretanto, com a presença de presas, considera-se que a população de predadores cresce linearmente quando a população  $x(t)$  aumenta. Dessa forma, obtém-se

$$\dot{y}(t) = [-c + dx(t)]y(t), \quad (4.13)$$

onde  $d > 0$ .

Esse sistema consiste em uma parte linear e uma certa perturbação. Pode-se justificar os termos não-homogêneos  $-bx(t)y(t)$  e  $dx(t)y(t)$  nas equações de crescimento do seguinte modo: digamos que o número de encontro das duas espécies sejam proporcionais ao produto  $x(t)y(t)$ , podendo ser escrito da forma  $\alpha x(t)y(t)$ , permitindo então, expressar o quanto pode ser benéfico esses encontros para os predadores, caracterizando um aumento  $dx(t)y(t)$ , e ao mesmo tempo trágico para a população das presas, representando uma redução  $bx(t)y(t)$ . O coeficiente mede a susceptibilidade da espécie  $x(t)$  às ações predatórias, e o coeficiente  $d$  mede a habilidade predatória da espécie  $y$ .

Calcula-se agora os pontos críticos do sistema formado por (4.12) e (4.13), ou seja:

$$\begin{cases} (a - by)x = 0, \\ (-c + dx)y = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontra-se 4 pontos críticos. A solução  $(0, \frac{b}{a})$  descreve a situação em que o número de presas é zero então o crescimento populacional de predadores extingue-se conforme uma exponencial decrescente; a solução  $(\frac{c}{d}, 0)$  implica que o número de predadores é zero, então o número de presas cresce exponencialmente. Resta então verificar duas situações: a origem e o ponto  $(\frac{c}{d}, \frac{b}{a})$ .

Para estudar a origem, toma-se a parte linear de (4.12) e (4.13), obtendo o sistema linear homogêneo associado

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Tomando a matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$  em (4.14), obtém-se o seguinte polinômio característico

$$(a - \lambda)(-c - \lambda) = 0,$$

obtendo assim os autovalores  $\lambda_1 = a$  ou  $\lambda_2 = -c$ ; portanto pela condição (iii) do Teorema 3.8 e  $\lambda_1 > 0$ , têm-se que a origem é instável.

Agora será feito o estudo com respeito à  $(\frac{c}{d}, \frac{b}{a})$ . O próximo passo será tomar o sistema (4.14) e fazer uma troca de variáveis

$$u = x - \frac{c}{d} \quad v = y - \frac{a}{b},$$

obtendo assim o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{bc}{d}v - buv \\ \dot{v} = \frac{ad}{b}u + dvu \end{cases},$$

cuja parte linear é

$$\dot{u} = -\frac{bc}{d}v \quad \text{e} \quad \dot{v} = \frac{ad}{b}u. \quad (4.15)$$

A partir de (4.15), dividindo as duas equações obtém-se:

$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \frac{-\frac{bc}{d}v}{\frac{ad}{b}u},$$

$$\frac{ad}{b}u\dot{u} = -\frac{bc}{d}v\dot{v},$$

$$\frac{ad}{b}u\dot{u} + \frac{bc}{d}v\dot{v} = 0,$$

integrando obtém-se

$$\frac{ad}{b} \frac{u^2}{2} + \frac{bc}{d} \frac{v^2}{2} = n,$$

e portanto que  $n \geq 0$  para quaisquer  $u$  e  $v$ . Multiplicando ambos os membros por  $2db$ ,

$$ad^2u^2 + b^2cv^2 = 2dbn,$$

tal que  $2dbn \geq 0$  então existe  $k$  real tal que  $k^2 = 2dbn$ , então

$$ad^2u^2 + b^2cv^2 = k^2,$$

ou seja, a expressão acima descreve uma elipse de centro  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ . Portanto, pode-se ter uma noção de que as órbitas das soluções de (4.12) e (4.13) tem a forma de elipses na vizinhança do ponto crítico  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ .

O próximo passo consiste em obter, de fato as órbitas do sistema (4.12) e (4.13), para isso dividimos as duas equações

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{[-c + dx]y}{(a - by)x},$$

$$\frac{(a - by)}{y} \dot{y} = \frac{(-c + dx)}{x} \dot{x},$$

$$a \frac{1}{y} \dot{y} - b \dot{y} = -c \frac{1}{x} \dot{x} + d \dot{x}.$$

Integrando ambos os lados tem-se

$$a \int \frac{1}{y} \dot{y} dt - b \int \dot{y} dt = -c \int \frac{1}{x} \dot{x} dt + d \int \dot{x} dt.$$

$$a \ln y - by = -c \ln x + dx + \ln K,$$

aplicando a exponencial em ambos os membros

$$y^a e^{-by} = K x^{-c} e^{dx}, \tag{4.16}$$

onde a constante  $K$  pode ser determinada em função de um ponto inicial dado, ou seja,

$$K = y_0^a e^{-by_0} x_0^c e^{-dx_0},$$

implicando que  $K > 0$ . Para obter a órbita, para cada membro da igualdade obtida em (4.16), obtém-se 2 novas funções definidas por

$$z(y) = y^a e^{-by} \text{ e } w(x) = K x^{-c} e^{dx}. \tag{4.17}$$

Derivando  $z(y)$ , obtém-se

$$z'(y) = y^{a-1} \cdot e^{-by} (a - by),$$

ou seja, para  $z'(y) = 0$  obtém-se  $y = \frac{a}{b}$ .

Encontrando a segunda derivada de  $z(y)$ , obtém-se

$$z''(y) = y^{a-2} \cdot e^{-by} [(a - by)^2 - a],$$

ou seja,

$$z''\left(\frac{a}{b}\right) = -a \left(\frac{a}{b}\right)^{a-2} \cdot e^{-a},$$

logo  $z''\left(\frac{a}{b}\right) < 0$ , então  $z(y)$  admite um ponto máximo em  $y = \frac{a}{b}$ .

Realizando a mesma abordagem em  $w(x)$  obtém-se

$$w'(x) = K [e^{dx} \cdot x^{-c-1} \cdot (dx - c)],$$

então, para  $w'(x) = 0$ , encontra-se  $x = \frac{c}{d}$ . Derivando novamente

$$w''(x) = K \{e^{dx} \cdot x^{-c-2} \cdot [(dx - c)^2 + c]\},$$

ou seja,

$$w''\left(\frac{c}{d}\right) = cK e^{dc} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-c-2},$$

o que implica,  $w''\left(\frac{c}{d}\right) > 0$  então  $w(x)$  admite um ponto mínimo em  $x = \frac{c}{d}$ .

Falta ainda mostra que  $w_{min} \leq z_{max}$ . É imediato, pois

$$w_{min} \leq Kx^{-c}e^{dx} = y^a e^{-by} \leq z_{max}.$$

Os gráficos serão traçados simultaneamente, separados pelos quadrantes tal que no primeiro quadrante será obtida a orbita do sistema das equações (4.12) e (4.13); no segundo quadrante, um esboço da curva  $z(y)$ ; no terceiro quadrante, a função Identidade e no quarto quadrante, um esboço da curva  $w(x)$ .

Através da seguinte construção, mostra-se que a órbita do sistema das equações (4.12) e (4.13) será uma curva fechada:

- (i) Denomina-se por  $W$  a curva  $w(x)$ ,  $Z$  a curva  $z(y)$  e  $L$  a reta bissetriz do terceiro quadrante.
- (ii) Pelo ponto  $A_1$  da curva  $W$  traça-se uma paralela ao semieixo  $x$  até encontrar a reta  $L$  em  $A_2$ , traçando então uma paralela ao semieixo  $y$  até cruzar a curva  $Z$  nos pontos  $A_3$  e  $A_4$ . As retas paralelas ao semieixo  $x$  passando por  $A_3$  e  $A_4$  interceptam a reta  $x = \frac{c}{d}$  nos pontos  $Q_1$  e  $Q_2$ . Esses dois pontos determinam os extremos da órbita na direção  $y$  (ver Figura 4.7).
- (iii) Pelo ponto  $B_1$  da curva  $Z$  traça-se uma paralela ao semieixo  $y$  até encontrar a reta  $L$  em  $B_2$ , traçando então uma paralela ao semieixo  $x$  até cruzar na curva  $W$  nos pontos  $B_3$  e  $B_4$ . As retas paralelas ao semieixo  $y$  passando por  $B_3$  e  $B_4$  interceptam a reta  $y = \frac{a}{b}$  nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ . Esses dois pontos determinam os extremos da órbita na direção  $x$  (ver Figura 4.7).
- (iv) Para obter os pontos da órbita, toma-se qualquer ponto  $C_1$  tal que  $A_1 \leq C_1 \leq B_1$ . A partir de cada ponto encontrado nas interseções entre os prolongamentos originados em  $C_1$  de retas paralelas a cada eixo com as curvas  $Z$  e  $W$ , traçam-se retas paralelas aos eixos novamente, em direção ao primeiro quadrante. Os quatro pontos obtidos na interseção pertencem a órbita (ver Figura 4.7).

Uma interpretação seria realizar uma leitura anti-horária nesse gráfico que descreve a órbita do sistema por (4.12) e (4.13). Partindo do ponto  $Q_1$ , onde o número de predadores é mínimo, com isso o número de presas continua aumentando porém de forma decrescente pois o número de predadores começa a aumentar quando a curva caminha para  $P_2$ .

Em  $P_2$  o crescimento das presas zeram começando então a decrescer em número de população, pois o número de predadores aumenta devido ao crescimento ocorrido na população de presas. Chegando em  $Q_2$ , o número de predadores atinge o máximo fazendo assim reduzir ainda mais a oferta de presas e a aumentando a disputa entre predadores, ou seja, o número de predadores também começa a decrescer juntamente com o número de presas.

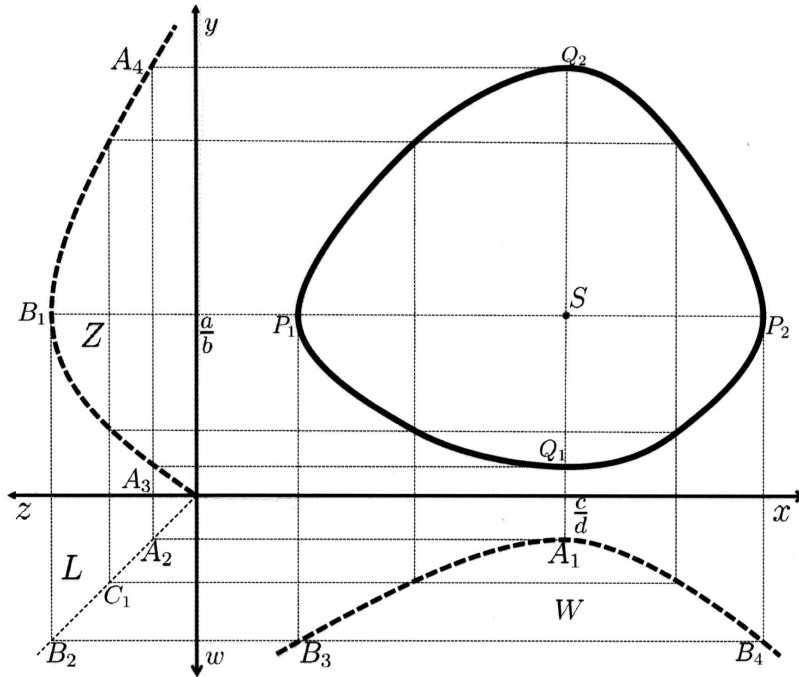


Figura 4.7: Órbita do sistema das equações (4.12) e (4.13).

Como o número de predadores passa a reduzir ao decorrer do tempo, isso permite então com que as presas se estabilizem em  $P_1$  e, a partir disso voltem a crescer enquanto o número de predadores diminui convergindo novamente ao ponto inicial  $Q_1$ , fechando o ciclo.

Concluí-se então que as populações presas e predadores oscilam periodicamente. Nota-se que a órbita não apresenta simetria em relação ao eixo  $x = \frac{c}{d}$  ou ao eixo  $y = \frac{a}{b}$ . Ver Figura 4.8.

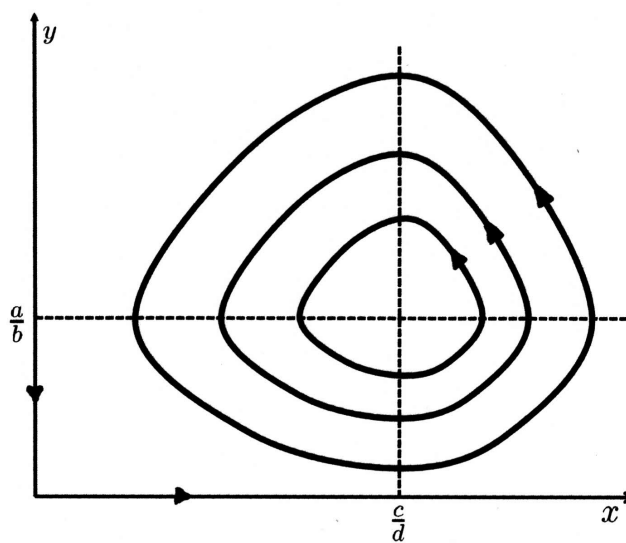


Figura 4.8: Órbitas do sistema por (4.12) e (4.13).

# 5 Propostas de Atividades para o Ensino Médio: Pré Cálculo e Malthus

O principal objetivo deste último capítulo é apresentar duas propostas voltadas ao professor de matemática. De uma forma didática e acessível, será apresentada uma atividade cuja finalidade é introduzir o conceito de derivada de uma função de uma forma acessível ao aluno de ensino médio.

A partir de uma situação-problema deseja-se mostrar uma aplicação da derivada. Por conta do final do ano letivo não foi possível aplicar tal proposta em sala de aula, mas fica aqui uma sugestão ao professor de ensino médio, especialmente o do 3<sup>o</sup> ano, para explorar um conteúdo de uma forma diferenciada, usando recursos tecnológicos.

## 5.1 Pré Cálculo

Uma das muitas preocupações de um professor de matemática que leciona para o ensino médio é analisar a capacidade do aluno compreender os novos conceitos matemáticos, inclusive os que serão apresentados numa futura graduação na área de exatas, de uma forma que este consiga dar sequência ao conteúdo abordado no ensino médio. A proposta dessa atividade é introduzir o cálculo com recursos exclusivamente limitados ao ensino médio e apresentar para o aluno o conceito, uma aplicação e uma técnica de obtenção da derivada de uma função.

Este trabalho não tem a pretensão de ensinar o conceito de derivada conforme a definição rigorosa na matemática mas sim, de uma forma mais simples e direcionada, introduzir ao aluno, os conceitos iniciais que servirão de base para então, num momento oportuno, ele conseguir compreender o conceito de derivada de uma função. Esta atividade foi elaborada também com o objetivo de dar uma opção ao professor de matemática do ensino médio, uma maneira de apresentar um novo conceito matemático para alunos desprendido de um formato de uma aula clássica de matemática.

Como essa atividade exige alguns conceitos que serão apresentados no decorrer do ensino médio, aconselha-se apresentar essa oficina para o 3<sup>o</sup> ano do ensino médio, como revisão de funções, estudo do sinal de funções e equação de retas. Aqui seria pertinente ao professor de matemática rever o conceito de coeficiente angular da reta.



Caso o professor de matemática tenha recursos tecnológicos, recomenda-se também apresentar essa atividade num programa de gráficos aliado a um quadro negro, pois o recurso gráfico nesta atividade é fundamental para que o aluno compreenda algumas convergências.

Esta atividade é dividida em quatro partes, as duas primeiras partes trabalham apenas o conceito visual e geométrico de derivada. Dependendo do tempo que o professor tenha, bastam apenas as duas primeiras partes dessa atividade para que o aluno entenda esse conceito introdutório de derivada. A terceira parte já mostra uma maneira de se obter uma derivada exigindo cálculos e processos algébricos que para os alunos, possam ser de extrema dificuldade, mas cabe ao professor realizar esses cálculos apenas direcionando e orientando-os, ou seja, momento em que o profissional de matemática realiza a sua verdadeira arte. Todo esse estudo foi baseado nas referências [14, 15, ?].

### 5.1.1 Apresentando os Conceitos: 1ª Parte

Antes de introduzir a derivada para o aluno de ensino médio, é de extrema importância rerepresentar o conceito de reta tangente que no ensino médio fica-se limitado a interseção entre reta e circunferência. Aconselha-se iniciar o assunto retomando as posições relativas entre reta e circunferência. Mostra-se que a partir de uma reta passando por dois pontos, consegue-se obter a reta tangente num certo ponto fixo desejado fazendo com que a distância entre esses dois pontos obtidos na interseção tenda a zero mostrando que a reta secante converge para a reta tangente.

Primeiramente, toma-se uma reta  $r$  secante a uma circunferência  $\lambda$  nos pontos  $P$  e  $Q$ . Para obter a tangente no ponto  $P$ , basta deslocar o ponto  $Q$  sobre  $\lambda$ , aproximando cada vez mais a  $P$ , tal que a distância entre esses dois pontos aproxime de zero, obtendo sempre uma nova reta secante em cada novo  $Q_n$ . Fica fácil para o aluno entender que a reta tangente num certo ponto é obtida sempre tomando dois pontos distintos quaisquer e fazê-los convergir a um certo ponto desejado, geralmente um dos dois pontos escolhidos inicialmente está fixado e varia-se sempre o outro ponto. Seria pertinente também nesse momento, já mostrar que a reta tangente é encontrada nesse processo fazendo com que a distância entre esses dois pontos convirja para zero. Ver a Figura 5.1. Uma vez visualizado esse processo na circunferência, generaliza-se para qualquer curva.

Após essa introdução, pode-se então apresentar uma situação problema que irá induzir ao aluno, a necessidade da compreensão do conceito derivada.

Recomenda-se o uso de gráficos simples e conhecidos pelos alunos de ensino médio. Retoma-se então a aula de função e junto com o aluno constrói-se o gráfico da função quadrática  $f(x) = x^2$  tomando-se pontos no domínio e plotando os pontos no plano cartesiano e obtendo assim um gráfico bem familiar para esse aluno de ensino médio. Nesse processo de construção da função quadrática é conveniente que o professor escolha pontos no domínio  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tais que  $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$ , ou

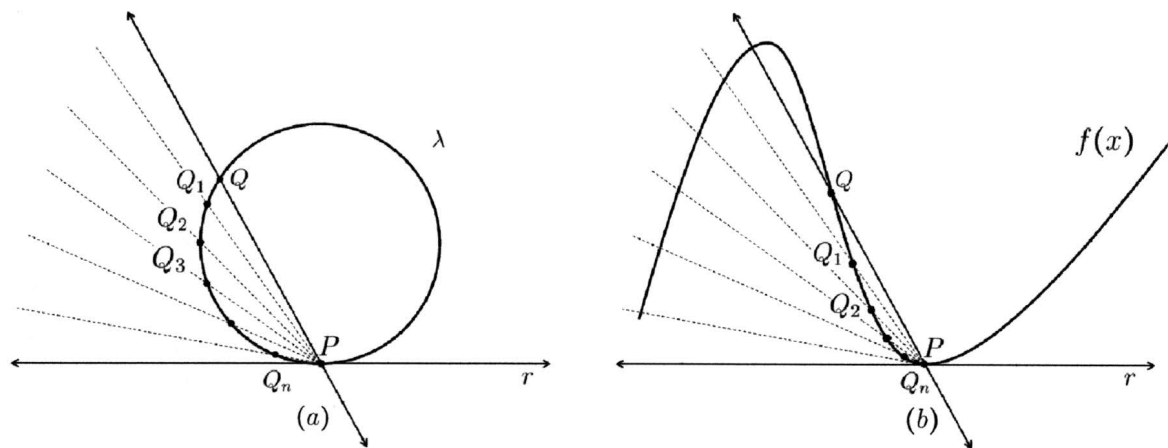


Figura 5.1: Obtenção da reta tangente.

seja,  $\Delta x_n$  seja constante e igual, mas pela definição de  $f(x) = x^2$ , é claro que para  $x \geq 1$ , têm-se  $\Delta y = y_2 - y_1 < y_3 - y_2 < \dots < y_n - y_{n-1}$ , conforme a Figura ?? (a). Uma vez traçado o gráfico, o importante agora é o professor ser o elemento instigador, despertando curiosidades e questões sobre um gráfico tão comum. O professor pode

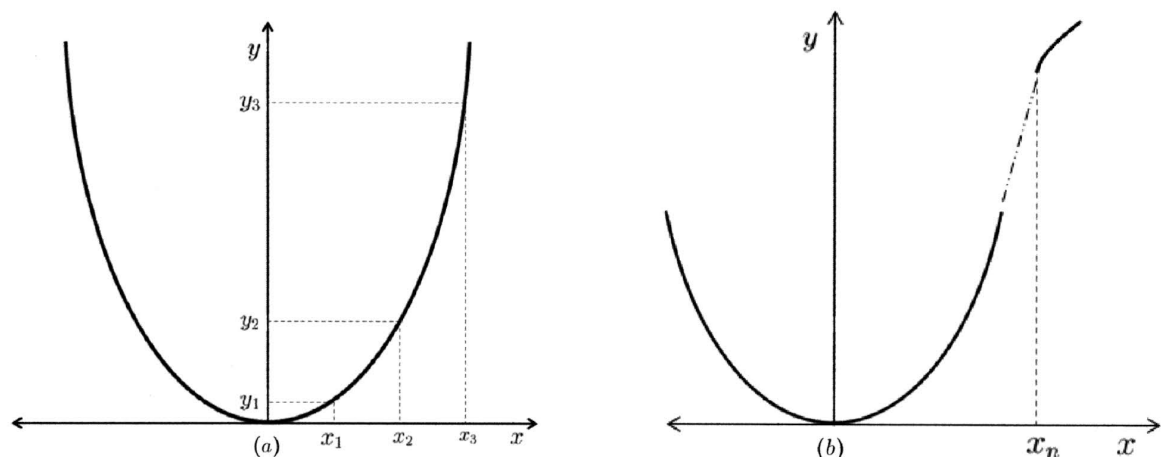


Figura 5.2: Estudo da função quadrática  $f(x) = x^2$ .

questionar com os alunos pontos do tipo:

- (i) O gráfico limita-se apenas a curva traçada ou é infinito?
- (ii) Qual a região no domínio que o gráfico é crescente? E decrescente?
- (iii) Tomando apenas a região positiva no domínio, o gráfico SEMPRE será crescente quando  $x$  cresce?
- (iv) O gráfico construído pelo aluno GARANTE o comportamento desse gráfico quando  $x$  for muito grande?

- (v) Será que em algum momento, para o  $x_n$  muito grande, a parábola deixa de ser crescente? Ver Figura 5.2 (b).
- (vi) O que poderia ser analisado no gráfico para verificar se a parábola continua infinitamente crescendo?

Importante neste momento é despertar no aluno uma curiosidade de como serão resolvidas essas questões. Depois de várias questões, o ideal é que o aluno perceba que a reta tangente à parábola em cada ponto no gráfico será o objeto de análise para conseguir responder a pergunta do item (vi). Caso os alunos não consigam visualizar, o professor pode reduzir o estudo da parábola apenas para o domínio positivo, isto é,  $x \geq 0$ . Traça-se uma reta tangente neste ponto incidindo no eixo das abcissas destacando então a declividade da reta tangente (ver Figura 5.3 (a)). Quando o professor for mostrar a relação da reta tangente com a parábola, recomenda-se tomar cuidado para não induzir ao aluno a ideia de que a reta tangente comece a assintotar a parábola no infinito.

O próximo passo é obter informações sobre essa reta tangente ao ponto  $P$ . Seja  $P = (x, y)$ , o ponto onde deseja-se traçar a reta tangente.

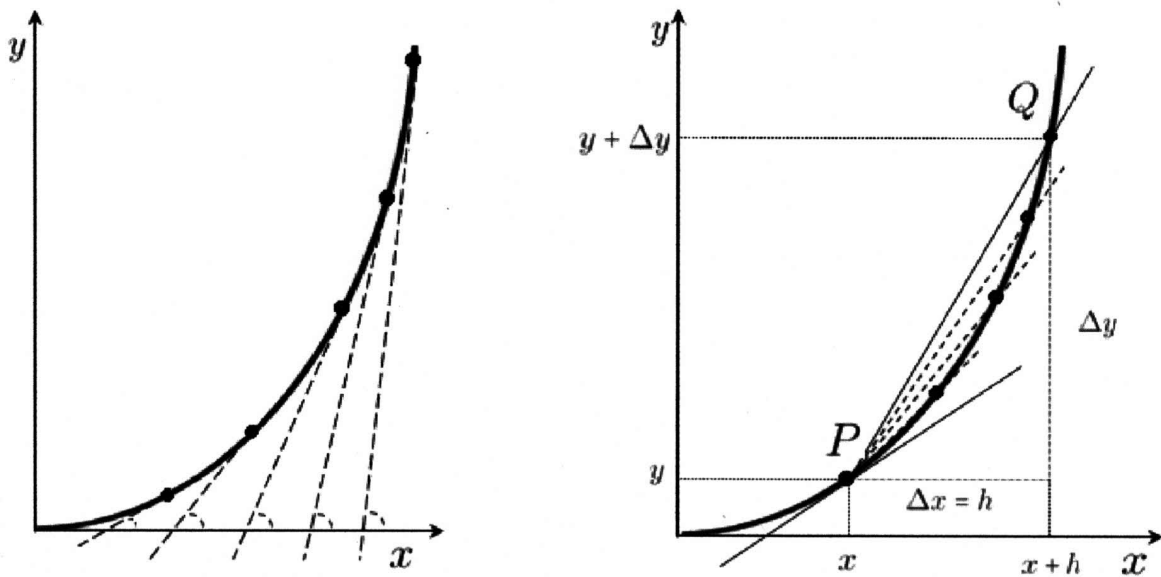


Figura 5.3: Reta tangente

Conforme a Figura 5.3 (b) mostra-se que a cada variação  $\Delta x = h$ , a variável dependente  $y$  também sofre um acréscimo igual a  $\Delta y$ , obtendo assim, o ponto  $Q = (x + h, y + \Delta y)$ . Então:

$$f(x + h) = y + \Delta y,$$

como  $f(x) = x^2$ , tem-se

$$(x + h)^2 = y + \Delta y.$$

Sabe-se que

$$\Delta y = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta y = x^2 + 2xh + h^2 - x^2,$$

$$\Delta y = h(2x+h).$$

Então observa-se que a declividade da reta secante obtida pelos pontos  $P$  e  $Q$  será o objeto principal para conseguir chegar a reta tangente, mostrando que a reta secante converge à reta tangente quando  $h$  tende a zero. Utilizando o conceito de coeficiente angular que o aluno obteve previamente, mostra-se que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h. \quad (5.1)$$

Para um certo valor fixo de  $x$  e variando  $h$ , vai-se mudando a posição do ponto  $Q$ . Pelo gráfico da Figura 5.3 (b), verifica-se que a reta secante determinada pelos pontos  $P$  e  $Q$  vai se aproximando cada vez mais da reta tangente no ponto  $P$  quando  $h$  vai ficando cada vez menor. Pode-se dizer então que a declividade da reta tangente no ponto  $P$  é dada por  $2x$ , devido a (5.1) quando  $h$  tende a zero. Como  $h$  nunca poderá ser zero segue que a declividade da reta tangente à curva no ponto  $P$  tende a função linear  $g(x) = 2x$  e este seria o limite da declividade quando  $h$  tende a zero. Esse limite é chamado de *derivada* da função no valor  $x$ . A notação usual da derivada da função  $f(x)$  é dada pela função  $f'(x)$ .

Caso o professor de matemática tenha tempo, nesse momento pode-se então pedir, como uma atividade complementar, que sejam calculadas as derivadas das seguintes funções:

(a)  $f(x) = 5x^2$ ,

(b)  $f(x) = \frac{x^2}{4}$ ,

(c)  $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ .

O próximo passo é mostrar ao aluno uma aplicação da derivada.

O importante agora é fazer com que o aluno relacione o comportamento da parábola onde ela é crescente e decrescente de acordo com o sinal da derivada. Pelo estudo do comportamento do gráfico da função  $f(x) = x^2$ , nota-se que a derivada nunca será negativa. Logo, pode-se então afirmar que a parábola nunca será decrescente para valores positivos de  $x$  respondendo então a problemática do item (v).

Caso o professor tenha interesse, ele também pode continuar questionando se a parábola pode se tornar constante a partir de um valor  $x_n$ , conduzindo o aluno a verificar que isso só ocorrerá se a derivada for zero, e ainda que, na parábola isto não é possível.

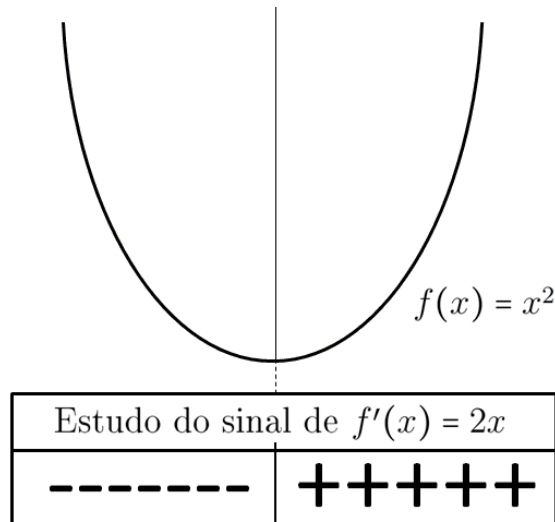


Figura 5.4: Relação entre o comportamento de  $f(x) = x^2$  com o sinal de  $f'(x) = 2x$ .

### 5.1.2 Aplicando os Conceitos: 2ª Parte

Tendo o aluno compreendido o conceito inicial de derivada, aqui nessa subseção será apresentada uma aplicação da necessidade do conhecimento da derivada de uma função. Apresenta-se ao aluno a seguinte situação problema: serão fornecidos 5 tipos de reservatórios com a mesma capacidade e a mesma altura  $H$  conforme a Figura 5.5. Os recipientes da Figura 5.5 apenas ilustram a situação.

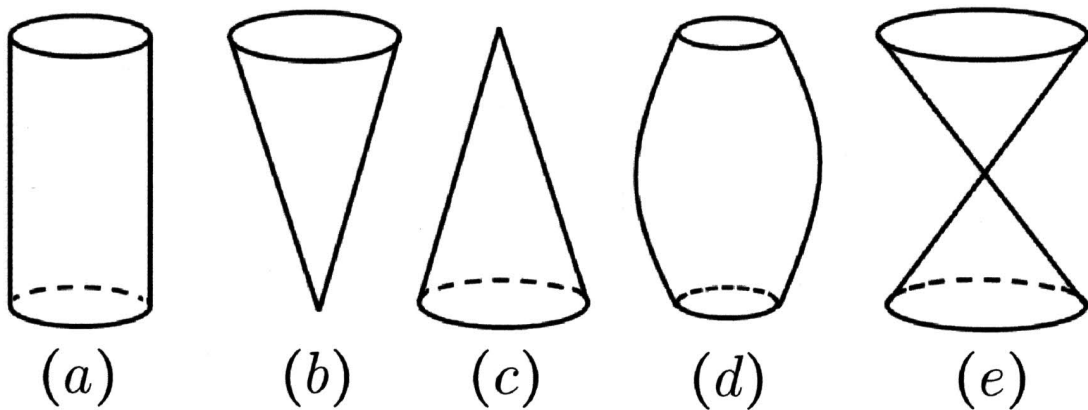


Figura 5.5: Recipientes de mesma capacidade e altura  $H$ .

Supondo que exista uma torneira para cada recipiente, admite-se que a vazão de água será a mesma para todas as torneiras igual a  $k$  metros cúbicos por minuto. Deseja então analisar o comportamento da altura do nível de água da cada recipiente no decorrer do tempo. Denota-se por  $f_k(t)$  a altura do recipiente  $k$  no instante  $t$ , adotando a altura em metros e o tempo em minutos. Para todas as funções tem-se que  $f_k(0) = 0$  e  $f_k(T) = H$  tal que  $T$  é o tempo que demora para os recipientes atingirem a altura máxima  $H$ , enchendo-os por completo. A partir dessa situação, pode-se propõe ao

aluno a construção do gráfico da altura do nível da água em cada recipiente proposto caso o professor ache pertinente a abordagem da construção dos gráficos nesta proposta didática. Fácil para o aluno enxergar que essa função sempre será crescente pois o nível da água sempre subirá porém será que os gráficos serão iguais? Importante nesse momento é a interpretação da curva para cada recipiente que o aluno visualizará, sempre conduzido e orientado pelo professor. Por exemplo,

- em (a), a altura do nível da água aumenta de forma uniforme, sempre na mesma velocidade;
- em (b), a altura aumenta rapidamente no início do processo porém continua aumentando cada vez mais lentamente;
- em (c), a altura aumenta lentamente no início porém a velocidade do nível da água aumenta com o passar do tempo, ou seja, processo inverso ao de (b);
- em (d), a altura aumenta rapidamente até á metade do recipiente, depois revertendo o seu comportamento;
- em (e), semelhante ao (d) porem com processo inverso.

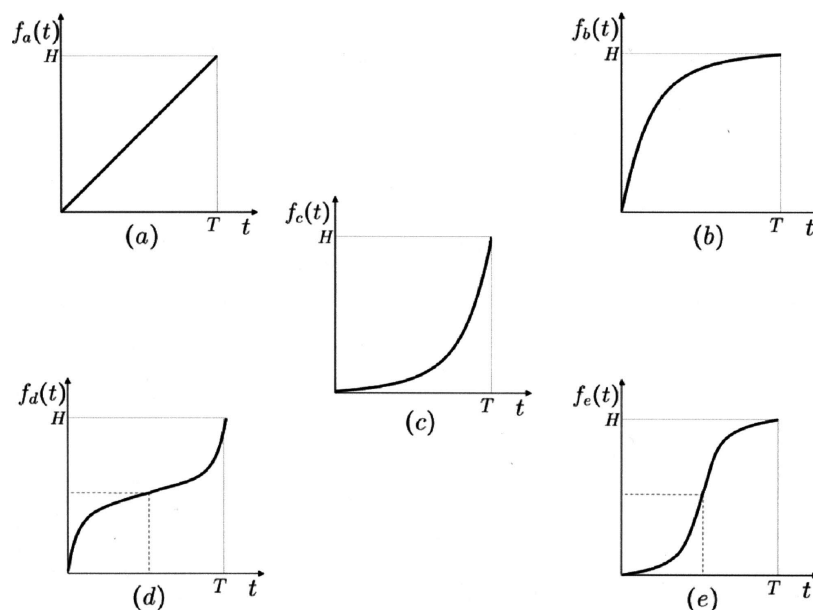


Figura 5.6: Gráfico da altura do nível da água dos recipientes da Figura 5.5 em função do tempo  $t$ .

Após toda essa análise, o aluno deverá entender que apesar de todos os gráficos serem de funções crescentes, no entanto todos são distintos. O objetivo principal dessa atividade é mostrar ao aluno que a derivada, apresentada na atividade anterior, será o conceito matemático que mostrará a diferença no comportamento crescente das funções.

Para dar início nesse estudo, o professor apresentará a necessidade de estudar a razão entre a imagem e o domínio. O interessante agora é o professor tomar intervalos de mesmo comprimento no domínio e mostrar ao aluno que na imagem a variação não será a mesma, exceto se a função for a identidade.

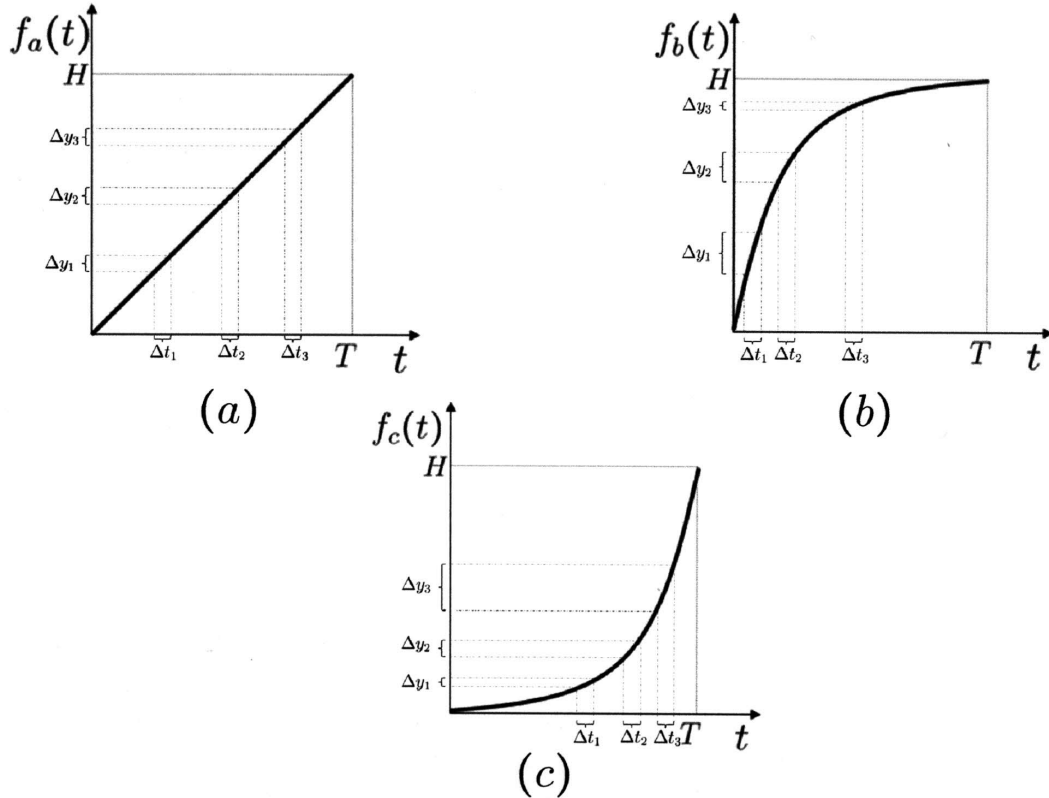


Figura 5.7: Estudo de  $\Delta y_i$

Para isso, toma-se intervalos de mesmo tamanho  $\Delta t$  em diferentes fases do processo. Considere o intervalo  $[t, t + \Delta t]$ , então a imagem é  $\Delta y = f_k(t + \Delta t) - f_k(t)$ . Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f_k(t + \Delta t) - f_k(t)}{\Delta t}. \quad (5.2)$$

- (a) Em (a) tem-se  $\Delta y$  é constante para qualquer  $\Delta t_n = \Delta t$ , ou seja,  $\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3$  (ver Figura 5.7 (a));
- (b) em (b),  $\Delta y$  diminui para  $\Delta t$  tomados no sentido crescente do domínio, ou seja,  $\Delta y_1 > \Delta y_2 > \Delta y_3$  (ver Figura 5.7 (b));
- (c) e em (c),  $\Delta y$  aumenta para  $\Delta t$  tomados no sentido crescente do domínio, ou seja,  $\Delta y_1 < \Delta y_2 < \Delta y_3$  (ver Figura 5.7 (c)).

Portanto analisar o comportamento de (5.2) será fundamental para obter informações relevantes sobre o crescimento da curva em cada caso descrito, além disso é importante mostrar para o aluno que quanto menor for  $\Delta t$  mais informações sobre a curva são obtidas graficamente.

Esse é o momento ideal para o professor fazer a ligação com o exemplo da parábola, ou seja, adaptando o mesmo contexto aplicado na parábola na seção anterior, pode-se concluir então que a derivada da função é a ferramenta ideal para realizar este estudo.

### 5.1.3 Aprofundando os Conceitos: 3ª Parte

O objetivo principal será obter uma fórmula mais próxima possível para a derivada da função  $f_b(t)$ , ou seja, obter  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$  para um  $\Delta t$  muito pequeno, próximo de zero. Para isso deseja-se obter inicialmente uma forma analítica para  $f_b(t)$ , então toma-se a seção meridional do cone do recipiente ( $b$ ), conforme Figura 5.8.

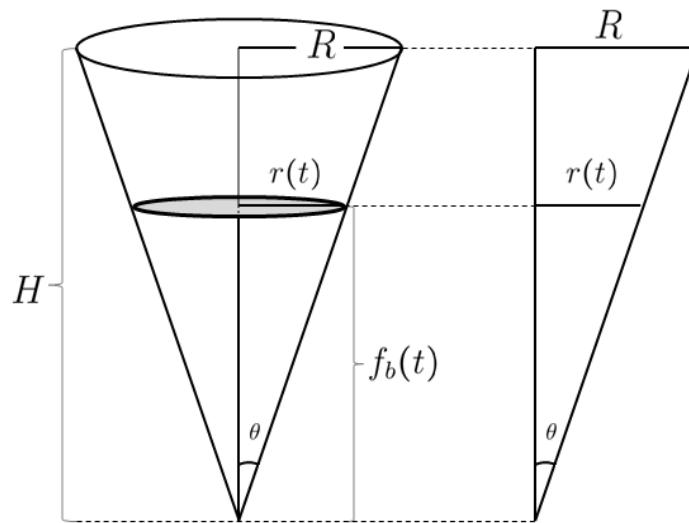


Figura 5.8: Corte meridional no recipiente ( $b$ )

O volume de água no interior do cone é dado por

$$V(t) = \frac{\pi r^2(t) f_b(t)}{3}, \quad (5.3)$$

ou também é obtido através da fórmula

$$V(t) = kt, \quad (5.4)$$

tal que  $k$  é a vazão da torneira dada por metros cúbicos por minuto. Igualando (5.3) e (5.4) obtém-se

$$\frac{\pi r^2(t) f_b(t)}{3} = kt. \quad (5.5)$$

Voltando ao triângulo da Figura 5.8, conclui-se que  $r(t) = f_b(t) \operatorname{tg} \theta$ , que substituindo em (5.5) resulta em

$$\frac{\pi \operatorname{tg}^2 \theta [f_b(t)]^3}{3} = kt,$$

ou seja,

$$f_b(t) = \sqrt[3]{\frac{3kt}{\pi \operatorname{tg}^2 \theta}},$$



$$f_b(t) = \sqrt[3]{\frac{3k}{\pi \operatorname{tg}^2 \theta}} \cdot \sqrt[3]{t}.$$

Seja  $C$  uma constante que dependa apenas do recipiente e da vazão de água, tal que  $C = \sqrt[3]{\frac{3k}{\pi \operatorname{tg}^2 \theta}}$ , portanto

$$f_b(t) = C \sqrt[3]{t}. \quad (5.6)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{f_b(t + \Delta t) - f_b(t)}{\Delta t}, \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{C \sqrt[3]{t + \Delta t} - C \sqrt[3]{t}}{\Delta t} = C \cdot \frac{\sqrt[3]{t + \Delta t} - \sqrt[3]{t}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Multiplicando e dividindo 5.7 por  $\left[ (\sqrt[3]{t + \Delta t})^2 + \sqrt[3]{t + \Delta t} \cdot \sqrt[3]{t} + (\sqrt[3]{t})^2 \right]$  obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta t} &= C \cdot \frac{\sqrt[3]{t + \Delta t} - \sqrt[3]{t}}{\Delta t} \cdot \frac{(\sqrt[3]{t + \Delta t})^2 + \sqrt[3]{t + \Delta t} \cdot \sqrt[3]{t} + (\sqrt[3]{t})^2}{(\sqrt[3]{t + \Delta t})^2 + \sqrt[3]{t + \Delta t} \cdot \sqrt[3]{t} + (\sqrt[3]{t})^2}, \\ &= C \cdot \frac{t + \Delta t + \sqrt[3]{t(t + \Delta t)} + \sqrt[3]{t^2(t + \Delta t)} - t - \sqrt[3]{t(t + \Delta t)} - \sqrt[3]{t^2(t + \Delta t)}}{\Delta t \cdot \left[ (\sqrt[3]{t + \Delta t})^2 + \sqrt[3]{t + \Delta t} \cdot \sqrt[3]{t} + (\sqrt[3]{t})^2 \right]}, \\ &= C \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t \cdot \left[ (\sqrt[3]{t + \Delta t})^2 + \sqrt[3]{t + \Delta t} \cdot \sqrt[3]{t} + (\sqrt[3]{t})^2 \right]}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = C \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{t + \Delta t})^2 + \sqrt[3]{t + \Delta t} \cdot \sqrt[3]{t} + (\sqrt[3]{t})^2}, \quad (5.8)$$

para todo  $0 \leq t \leq T$ .

Conseguiu-se então uma fórmula algébrica para a razão  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ . Importante nesse momento é estudar quando  $\Delta t$  fica muito pequeno, próximo de zero. Pode-se então, introduzir a notação de limite,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ , de uma forma despretensiosa, ou seja,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{C}{3(\sqrt[3]{t})^2},$$

ou seja, a derivada de  $f_b(t)$  no ponto  $t$  é dada por

$$f'_b(t) = \frac{C}{3(\sqrt[3]{t})^2}.$$

Apesar de despertar diversas perguntas sobre a derivada, nessa penúltima subseção, a abordagem foi com respeito à parte algébrica na obtenção da derivada. O professor pode realizar as mesmas conjecturas feitas para a parábola e verificar que se aplica aqui também, coisas do tipo: o gráfico de  $f_b(t)$  sempre será crescente pois a derivada sempre será positiva no domínio, visto que, na prática o nível da água sempre subirá, hipoteticamente falando de um recipiente igual ao de (b), com uma altura infinita, implicando que o nível da água nunca ficará constante numa marca e jamais começará a decrescer.

## 5.2 Malthus: uma aplicação para as Funções Exponenciais

A segunda parte desse capítulo consiste em relacionar um tema abordado nessa dissertação de modo que seja aplicável ao ensino médio. O conteúdo escolhido foi o modelo de Malthus pela simplicidade de se aplicar esse conceito. O público mais oportuno para aplicação dessa ferramenta é o 1º ano do Ensino Médio, fazendo parte do estudo do conteúdo de funções exponenciais. Nessa atividade não será necessária a apresentação dos conceitos de equações de diferenças e recorrências, porém a prova de indução da fórmula obtida pode ser um diferencial a mais nessa aplicação.

Conforme o Capítulo 4, na seção Dinâmica Populacional, supõe-se que com a variação do tempo, a variação de uma certa população seja proporcional à população inicial. A ideia principal é simples: o professor apresenta uma tabela com a quantidade de elementos de uma certa população em relação ao ano do registro dessa informação.

Essa atividade será dividida em três partes: a obtenção da constante da função, construindo a função e ajustando o seu domínio. Essa proposta também pode ser adequada ao uso de softwares de funções caso seja disponível ao professor de matemática.

### 5.2.1 Obtendo a Constante

O primeiro desafio proposto pelo professor de matemática, após ter ambientalizado o aluno na proposta de que a população da cidade de Artur Nogueira se comportará conforme o Modelo de Malthus, será obter uma estimativa para a constante  $\alpha$  através do uso das informações na tabela contida na figura 5.9, já com a tabela em mãos, esta tabela foi adaptada usando os dados do IBGE, veja referência [17].

Ano	População de Artur Nogueira
1990	28.053
1995	30.066
2000	33.124
2005	39.457
2010	44.177
2015	51.126

Figura 5.9: Tabela de População de habitantes de Artur Nogueira.

Note que os anos estão intercalados obedecendo um padrão (quinquênios) para ficar mais fácil o ajuste final do domínio. Caso os alunos tragam informações que não obedeçam esse padrão, então o professor de matemática deve fazer essa adequação, procurando sempre preservar ao máximo as informações trazidas pelos alunos. Caso o professor apresente a tabela, que ele faça os ajustes antes de entregar a tabela oficial da atividade a ser trabalhada.

Através da tabela, adota-se que a população de habitantes em Artur Nogueira no ano  $x_i$  é dada pela função  $P(x_i)$ . Conforme o modelo de Malthus, a população de Artur Nogueira no ano  $x_{i+1}$  é obtida pela relação:

$$P(x_{i+1}) = P(x_i) + \alpha_i P(x_i) = (1 + \alpha_i)P(x_i), \quad (5.9)$$

onde  $\alpha_i$  varia em cada quinquênio. O professor pode até explorar a natureza da constante, mostrando ao aluno que essa constante está diretamente relacionada com a diferença de índices de natalidade e mortalidade e as condições para que essa constante seja positiva, negativa ou nula, para assim despertar um interesse e um olhar diferente nos alunos. De (5.9) obtém-se

$$\alpha_i = \frac{P(x_{i+1}) - P(x_i)}{P(x_i)}.$$

Para o exemplo dessa atividade, serão obtidos 5 valores para  $\alpha_i$ , ou seja

$$\alpha_1 = \frac{P(x_2) - P(x_1)}{P(x_1)} = \frac{30.066 - 28.053}{28.053} = 0,0717;$$

$$\alpha_2 = \frac{P(x_3) - P(x_2)}{P(x_2)} = \frac{33.124 - 30.066}{30.066} = 0,1017;$$

$$\alpha_3 = \frac{P(x_4) - P(x_3)}{P(x_3)} = \frac{39.457 - 33.124}{33.124} = 0,1911;$$

$$\alpha_4 = \frac{P(x_5) - P(x_4)}{P(x_4)} = \frac{44.177 - 39.457}{39.457} = 0,1196;$$

$$\alpha_5 = \frac{P(x_6) - P(x_5)}{P(x_5)} = \frac{51.126 - 44.177}{44.177} = 0,1573.$$

Fazendo,

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i}{n-1},$$

têm-se

$$\alpha = \frac{0,0717 + 0,1017 + 0,1911 + 0,1196 + 0,1573}{6-1} = \frac{0,6414}{5} = 0,1283.$$

## 5.2.2 Construindo a Função

Próximo passo é obter uma boa aproximação para uma função que descreva a população de Artur Nogueira em função dos anos.

Para isto, sabe-se que:

$$P(x_2) = P(x_1) + \alpha P(x_1) = (1 + \alpha)P(x_1), \quad (5.10)$$

para  $P(x_3)$  tem-se

$$P(x_3) = P(x_2) + \alpha P(x_2),$$

ou seja,

$$P(x_3) = (1 + \alpha)P(x_2).$$

Substituindo em (5.10) obtém-se

$$P(x_3) = (1 + \alpha)^2 P(x_1).$$

Tomando o mesmo procedimento, chega-se então a função discreta

$$P(x_n) = (1 + \alpha)^{n-1} P(x_1), \quad (5.11)$$

para  $n \in \mathbb{N}$  e  $n > 1$ , mostrando então que a função depende apenas do primeiro elemento e de  $\alpha$ .

Dependendo do tempo disponibilizado para a aplicação dessa atividade, agora seria um momento oportuno de apresentar um novo conceito de graduação ao aluno: a prova por indução. Não que seja de extrema importância, dado que o objetivo é apenas introduzir ao aluno o processo de obtenção de funções, porém o professor pode questionar se essa função será válida para todo  $n$ . Talvez o aluno não sinta a necessidade dessa verificação mas o professor pode questioná-lo da seguinte forma: supondo que a fórmula é válida para  $n$ , será que ela é válida também para  $n + 1$ ?

Pela fórmula obtida (5.11), deve-se verificar então que a população de habitantes de Artur Nogueira no ano  $x_{n+1}$  é obtida por

$$P(x_{n+1}) = (1 + \alpha)^n P(x_1). \quad (5.12)$$

Pelo Modelo de Malthus, tem-se que:

$$P(x_{n+1}) = P(x_n) + (x_n) = (1 + \alpha)P(x_n),$$

substituindo (5.11) em (5.12), obtém-se

$$P(x_{n+1}) = (1 + \alpha)(1 + \alpha)^{n-1} P(x_1) = (1 + \alpha)^n P(x_1),$$

comprovando assim a validade da função obtida em (5.11).

### 5.2.3 Ajuste do Domínio

O próximo desafio agora é ajustar os anos correspondentes na tabela da Figura 5.9 à função exponencial (5.11). Note que o domínio discreto dessa função, relaciona o valor numérico 1 para o ano de 1990, 2 para o ano de 1995, 3 para o ano de 2000 e assim sucessivamente, ou seja, a expressão encontrada para  $P(x_n)$  depende de  $n$  e não de  $x_n$ .

Para conseguir uma função mais completa, tal que relacione as informações da tabela da Figura (5.9), deve-se adequar um domínio conveniente, discreto e que dependa exclusivamente de  $x_n$ . Para isso, basta construir uma tabela auxiliar conforme a Figura 5.10.

$n$	Ano
1	1990
2	1995
3	2000
4	2005
5	2010
6	2015

Figura 5.10: Tabela auxiliar para relacionar  $n$  com o ano correspondente.

Tomando duas informações quaisquer na tabela 5.10 (escolheu-se  $x_1$  e  $x_5$ ) tem-se

$$\frac{n-1}{5-1} = \frac{x_n - 1990}{2010 - 1990},$$

$$n-1 = \frac{x_n - 1990}{5},$$

ou seja, substituindo a igualdade acima em (5.11), finalmente obtemos a função exponencial

$$P(x_n) = (1 + \alpha)^{(x_n - 1990)/5} P(x_1), \quad (5.13)$$

ou seja, substituindo o valor de  $\alpha$  obtido na seção anterior e o valor de  $P(x_1)$  em (5.13), obtém-se

$$P(x_n) = (1,1283)^{(x_n - 1990)/5} 28.053, \quad (5.14)$$

tal que (5.14) será uma boa estimativa para a função que descreve o número de habitantes de Artur Nogueira em função de um ano dado. Note que agora o aluno poderá até realizar estimativas sobre a população de Artur Nogueira sobre os anos que não constam na tabela da Figura 5.9. É importante reforçar nesse momento que a estimativa da população através dessa fórmula é para estimar a população de Artur Nogueira para os anos posteriores a 1990.

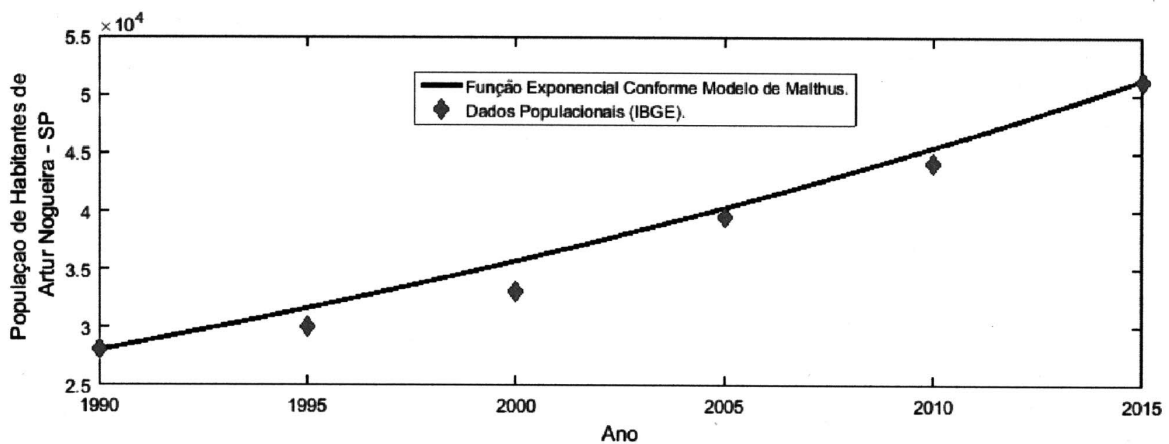


Figura 5.11: Gráfico e pontos obtidos através do software MATLAB.

Não tem como falar de funções apenas de uma forma analítica, lembrando que em muitos casos, a visualização é essencial para complementar um conteúdo de matemática. Nessa última etapa, infelizmente será necessário o uso de softwares de gráficos mas caso o professor não disponha desse recurso, seria interessante apresentá-lo pronto, mostrando o comportamento da curva exponencial sendo bem próxima aos dados populacionais.

É claro que no estudo do tempo contínuo (e não discreto) a taxa de variação da população  $P$  pode ser expressa por

$$P'(t) = \alpha P(t),$$

o que leva naturalmente à função exponencial  $P(t) = P(0)e^{\alpha t}$ .

# Referências

- [1] BRAUN, Martin *Equações Diferenciais e Suas Aplicações*. Campus, 1979
- [2] BRAUER, Fred, and John A. Nohel. *The qualitative theory of ordinary differential equations*. 1989.
- [3] BRONSON, Richard. *Moderna introdução às equações diferenciais*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [4] BOYCE, William E., and Richard C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, 5<sup>a</sup> Edição, 1994.
- [5] ZILL, Dennis G., and Michael R. CULLEN. *Equações diferenciais. vol 2, 3a edição*. Pearson, 2001.
- [6] DOERING, Clauss Ivo, and Artur O. Lopes. *Equações diferenciais ordinárias*. No. 517.2 DOE. 2008.
- [7] HALE, Jack K. *Ordinary Differential Equations*. Robert E. Kriger Publishing Company, INC, New York, 1980
- [8] PERKO L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Second Edition, Springer, New York, 1996.
- [9] BASSANEZI, Rodney Carlos, and Wilson Castro Ferreira Junior. *Equações Diferenciais: com aplicações*. Harbra, 1988.
- [10] CHURCHILL, Ruel V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. McGraw-Hill do Brasil, 1980.
- [11] LIMA, Elon Lages. *Espaços métricos, 3a edição*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, 1993.
- [12] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [13] De FIGUEIREDO, Djairo Guedes. *Equações diferenciais aplicadas*. Impa, 1979.

- 
- [14] ÁVILA, Geraldo. *O Ensino médio de Cálculo no 2º grau*. Revista do Professor de Matemática, n. 18, SBM, p. 1 - 9, 1991.
- [15] ÁVILA, Geraldo. *Limites e derivadas no ensino médio?* Revista do Professor de Matemática, n. 60, SBM, p. 30 - 38, 1991.
- [16] GRAVINA, Maria A. *Um Estudo de funções*. Revista do Professor de Matemática, n. 20, SBM, p. 33 - 38, 1992.
- [17] IBGE. *Infográficos: Evolução populacional e pirâmide etária*. Cidade de Artur Nogueira-SP, 2016. Acesso em 01 de Outubro de 2016. Disponível em: <<http://www.ibge.com.br/cidadesat/painel/populacao.php?codmun=350380search=sao-paulo%7Cartur-nogueira%7Cinphographics:-demographic-evolution-and-age-pyramidlang=>>>.
- [18] BOLDRINI, José Luiz, et al. *Álgebra linear*. Harper Row, 1980.