

UNESP - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

DOUGLAS BENNDORF RODRIGUES

**ANÁLISE HAMILTONIANA DE UM MODELO DE PARTÍCULAS DE
SPIN-2 MASSIVAS NÃO-FIERZ-PAULI**

Guaratinguetá

2016

DOUGLAS BENNDORF RODRIGUES

ANÁLISE HAMILTONIANA DE UM MODELO DE PARTÍCULAS DE
SPIN-2 MASSIVAS NÃO-FIERZ-PAULI

Dissertação apresentada ao Conselho de Curso de Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Física na área de partículas e campos.

Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi.

Coorientador: Alessandro L. R. dos Santos

Guaratinguetá

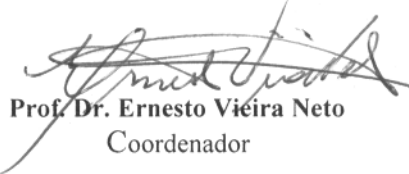
2016

DOUGLAS BENNDORF RODRIGUES

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. DENIS DALMAZI
Orientador / UNESP/FEG


Prof. Dr. ELIAS LEITE MENÇONÇA
UNESP/FEG


Prof. Dr. FABRICIO AUGUSTO BARONE RANGEL
UNIFEI

Dezembro de 2016

R696a Rodrigues, Douglas Benndorf
Análise Hamiltoniana de um modelo de partículas de Spin-2 massivas Não-Fierz-Pauli / Douglas Benndorf Rodrigues – Guaratinguetá, 2016.
56 f : il.
Bibliografia: f. 52-54

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2016.
Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi
Coorientador: Alessandro Luís Ribeiro dos Santos

1. Gravitação 2. Relatividade geral (Física) 3. Sistemas hamiltonianos
I. Título

CDU 531.5(043)

Bolsas de Estudo

- Bolsista PAE com o projeto *Ferramentas Computacionais para o Cálculo Diferencial e Integral I*, sob a orientação do Prof. Dr. Jose Ricardo de Rezende Zeni, no período de março de 2008 a fevereiro de 2009.
- Bolsista PAE com o projeto *Ferramentas Computacionais para o Cálculo Diferencial e Integral II*, sob a orientação do Prof. Dr. Jose Ricardo de Rezende Zeni, no período de março de 2009 a fevereiro de 2010.
- Bolsista PAE com o projeto *Introdução aos Monopolos Magnéticos*, sob a orientação do Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva, no período de março de 2010 a julho de 2010.
- Bolsista CNPq/PIBIC com o projeto *Sistemas Quânticos em Banho Térmico*, sob a orientação do Prof. Dr. Marcelo Batista Hott, no período de agosto de 2010 a maio de 2012.
- Bolsista CAPES-mestrado com o projeto *Partículas Massivas de Spin-2*, sob a orientação do Prof. Dr. Denis Dalmazi, no período de fevereiro de 2014 a fevereiro de 2016.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Antonio Freire Rodrigues e Emma Benndorf Rodrigues.

Ao professor orientador Denis Dalmazi e ao professor co-orientador Alessandro Luiz Ribeiro dos Santos que ao longo do mestrado incentivaram e ensinaram.

Aos amigos pelo apoio e por se fazerem presentes.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

BENNDORF, D. **Análise Hamiltoniana de um Modelo de Partículas de Spin-2 Massivas não-Fierz-Pauli**. 2016. 55 f. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2016.

Resumo

Neste trabalho abordamos de forma introdutória o tratamento de sistemas singulares, em especial as teorias de Maxwell, Proca e Fierz-Pauli, e obtemos resultados originais para a família de modelos de spin-2 massivos do tipo não-Fierz-Pauli. Tendo como ferramenta principal o método de Dirac para sistemas vinculados, escrevemos a densidade de hamiltoniana primária do modelo \mathcal{L}_{nFP} , obtemos seus vínculos primários, secundários, terciários e quartenários, assim como os multiplicadores de Lagrange. Calculamos também o número de graus de liberdade independentes e mostramos a positividade da hamiltoniana reduzida.

PALAVRAS-CHAVE: gravitação massiva, Fierz-Pauli, spin-2, método de Dirac, relatividade geral.

BENNDORF, D. **Hamiltonian Analysis of a Non-Fierz-Pauli Massive Spin-2 Particles Model**. 2016. 55 f. Master Degree - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2016.

Abstract

In this work, we approach in an introductory way the treatment of singular systems, especially the theories of Maxwell, Proca and Fierz-Pauli, and obtain original results for the non-Fierz-Pauli family of massive spin-2 models. Having as main tool the Dirac method for constrained systems, we write the primary Hamiltonian density of the \mathcal{L}_{nFP} model, obtain their primary, secondary, tertiary and quaternary constraints, as well as Lagrange multipliers. We calculate the number of independent degrees of freedom of the model and demonstrate the positivity of the reduced Hamiltonian.

KEYWORDS: massive gravity, Fierz-Pauli, spin-2, Dirac method, general relativity

Conteúdo

1	Introdução	8
2	Formalismo de Dirac para sistemas vinculados	12
2.1	Sistemas singulares	12
2.2	Hamiltoniana primária	13
2.3	Fracamente e fortemente nulo	14
2.4	Vínculos secundários	15
2.5	Vínculos de primeira e segunda classe	15
2.6	Aplicação em teoria de campos e notação	16
2.6.1	Método de Dirac aplicado à teoria de Maxwell	18
2.6.2	Método de Dirac aplicado ao modelo de Proca	22
3	Modelo de Fierz-Pauli	26
3.1	Equações de movimento e condições de Fierz-Pauli	26
3.2	Análise de vínculos	27
3.2.1	Modelo pseudo-FP ($a \neq 1$)	27
3.2.2	Modelo Fierz-Pauli ($a = 1$)	30
3.3	Positividade da hamiltoniana reduzida de FP	32
4	Modelo não-Fierz-Pauli.	38
4.1	Introdução	38
4.2	Análise de vínculos	40
4.3	Hamiltoniana reduzida e análise de positividade	47
5	Conclusão	50
	Referências Bibliográficas	52

Capítulo 1

Introdução

Durante boa parte do século XX se pensava que a expansão do universo ocorria a uma taxa negativa de aceleração, devido a atração gravitacional. No entanto, a partir de 1998 se descobriu evidências de que o universo se expande aceleradamente [20], desde então tem-se tentado descobrir a causa dessa aceleração. Inúmeras propostas foram feitas, como os modelos que introduzem algum tipo de “energia escura” (que tem esse nome devido ao fato de não interagir eletromagneticamente), a adição de uma constante às equações de Einstein-Hilbert, chamada de constante cosmológica, e que foi originalmente introduzida por Einstein como uma tentativa de descrever um universo estacionário, criação de partículas, hipóteses de posição “privilegiada” da Terra no universo (a distribuição de matéria no universo seria tal que ele se expandiria a taxas não uniformes) e gravitações modificadas.

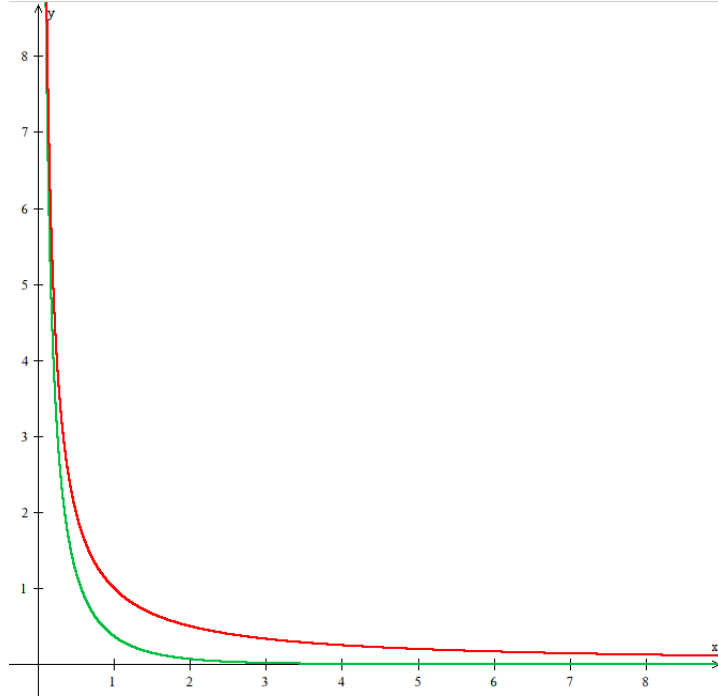
Dentre o grupo dos modelos de gravitações modificadas, há os de gravitação massiva, que são modelos cujas equações descrevem ondas gravitacionais que obedecem às equações de ondas massivas e se movem com uma velocidade menor que a da luz no vácuo, de tal modo que a quantização de tais modelos descreveriam grávitons massivos, ou seja, bósons com spin 2 e que obedecem a equação de Klein-Gordon

$$(\square - m^2) \psi = 0. \tag{1.1}$$

Uma gravitação massiva pode explicar a expansão acelerada do universo de duas formas: por descrever que o potencial gravitacional cai mais rapidamente com a distância, $U_m(r) \sim \frac{1}{r} e^{-mr}$, do que as gravitações de massa nula, $U_0(r) \sim \frac{1}{r}$, ou seja, para objetos próximos ela teria o efeito usual da gravitação einsteiniana, mas, desacelerando a expansão a uma taxa menor para objetos distantes (ver Figura 1.1), ou por, dependendo do modelo, ter um efeito repulsivo a grandes distâncias [24].

O primeiro e mais conhecido modelo de partículas de spin-2 massivas é o modelo de Fierz-Pauli. Em 1939 Markus Fierz e Wolfgang Pauli criaram um modelo de partículas de spin 2 massivas, embora ainda sem fazer conexão com a gravidade. Esse modelo é tal que

Figura 1.1: Comportamento de uma função do tipo e^{-x}/x (verde/abaixo) e $1/x$ (vermelho/acima). Para curtas distâncias, a gravidade descrita por um modelo massivo (verde) se mantém praticamente inalterada, quando comparada com as gravitações de Einstein e Newton (vermelho), mas tende mais rapidamente a zero para grandes distâncias.



no limite de massa nula a sua densidade de lagrangiana coincide com a lagrangiana linearizada de Einstein-Hilbert. Nesta dissertação usamos a assinatura $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, \dots +)$ em D dimensões e $\mu = 0, 1, 2, \dots, D-1$. Assim, a teoria massiva de Fierz-Pauli em 4 dimensões é dada por

$$\mathcal{L}_{FP} = \frac{1}{4} \left[h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - h \square h + 2h \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \right. \\ \left. -m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \right]. \quad (1.2)$$

Sendo que a conexão com a ação de Einstein-Hilbert é feita via $h_{\mu\nu}$ que é definido a partir da expansão de campo fraco da métrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

na lagrangiana de Einstein-Hilbert [28]

$$(\mathcal{L}_{E-H})_{hh} = (R\sqrt{g})_{hh} = \mathcal{L}_{FP}(m=0). \quad (1.4)$$

No entanto, a previsão de desvio angular da luz das estrelas pelo Sol, calculada segundo (1.2), é 75% do valor observado. Além disso, uma vez os cálculos feitos com o modelo massivo, essa diferença de 25% continua mesmo que se tome o limite de massa nula (apesar

do potencial newtoniano ser recuperado). Essa diferença de resultados ao se tomar o limite de massa nula antes ou após as contas serem feitas é chamada de “descontinuidade de van Dam-Veltman-Zakharov” ou vDVZ. Já Vainishtein argumentou, em 1972, que a descontinuidade de vDVZ é uma consequência da linearização do modelo e que, se forem tomadas ordens mais elevadas do campo $h_{\mu\nu}$ que as quadráticas, o desvio correto é recuperado. Ainda em 1972, Boulware e Deser mostraram que extensões não lineares do modelo de Fierz-Pauli apresentam fantasmas, o que significa essencialmente que a densidade de hamiltoniana não é positivo definida.

Até 2010 (ou seja, após mais de 3 décadas sem avanços significativos em gravitação massiva) pensava-se que todo modelo de gravitação massiva covariante era “infestado” com fantasmas de Boulware-Deser, quando de Rham, Gabadadze, e Tolley construíram um modelo livre de fantasmas e sem a descontinuidade de van Dam-Veltman-Zakharov [22] baseado no modelo de Fierz-Pauli, porém, alguns problemas ainda persistem, como a não-causalidade, veja mais em [9]. Já em 2011, Hassam e Rosen formulam um modelo de gravitação bimétrica, que descreve dois grávitons, um massivo e um não massivo, e possui solução para universo isotrópico homogêneo, mas tem problemas de estabilidade dependendo da métrica de fundo.

Por causa dos problemas encontrados no modelo de F-P, passou-se a buscar modelos alternativos de partículas massivas de spin-2 que talvez poderiam gerar novas gravitações massivas. Em [18] (1974) afirma-se que não existem outros modelos de partículas massivas de spin-2 além do Fierz-Pauli, porém em [7] (2013) mostrou-se que existem três famílias de modelos de partículas de spin-2, que são a família Fierz-Pauli (que inclui Fierz-Pauli), a família $\mathcal{L}(a_1)$ e a família \mathcal{L}_{nFP} (não-Fierz-Pauli) [8], sendo esta última a que será tratada nesta dissertação, especialmente pelo fato de que sua versão de massa nula decreve uma partícula de spin-2 sem massa, assim como Fierz-Pauli. Diferentemente da versão de massa nula de $\mathcal{L}(a_1)$ que descreve uma partícula escalar, além de uma de spin-2 sem massa.

No capítulo 2 é introduzido o método de Dirac para sistemas vinculados, que consiste na definição de sistemas singulares, no conceito de fracamente nulo e de hamiltoniana primária, na classificação dos vínculos quanto a ordem e ao tipo e, por fim, na descrição do algoritmo a ser aplicado. No final são apresentados exemplos de aplicação, a teoria de Maxwell e o modelo de Proca. Fazemos a contagem dos graus de liberdade e mostramos a positividade da densidade de hamiltoniana reduzida. Além disso, obtemos as equações de movimento via Euler-Lagrange, via densidade de hamiltoniana canônica e via densidade de hamiltoniana primária, mostrando assim que é a hamiltoniana primária que fornece as equações de movimento corretas e não a canônica.

No capítulo 3 calculamos as equações de movimento, obtemos a hamiltoniana primária e aplicamos o método de Dirac ao modelo de gravitação massiva de Fierz e Pauli, incluindo um modelo pseudo-FP, que consiste na adição de um coeficiente arbitrário “ a ”

no termo de massa de FP. Aplicando o algoritmo, encontramos os vínculos, contamos os graus de liberdade, introduzimos os operadores de projeção e de transição de Barnes-Rivers, que são usados para mostrar a positividade da hamiltoniana reduzida neste e no próximo capítulo. Mostramos também que o modelo pseudo-Fierz-Pauli leva a um número incorreto de graus de liberdade.

No capítulo 4 atacamos o objetivo principal deste trabalho, que é aplicar o método de Dirac ao modelo \mathcal{L}_{nFP} . Obtemos os vínculos primários, escrevemos sua hamiltoniana primária, encontramos seus vínculos secundários, terciários e quartenários e obtemos os multiplicadores de Lagrange. Por fim, contamos os graus de liberdade independentes e mostramos que a hamiltoniana reduzida é positiva.

Enfim, no capítulo 5 apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Formalismo de Dirac para sistemas vinculados

O método ou formalismo de Dirac é um algoritmo conhecido há décadas e que costuma ser aplicado aos sistemas chamados de “lagrangianos singulares”, “hamiltonianos viculados” ou “degenerados”. Ele permite que se obtenha todos os vínculos associados ao modelo, que se escreva as formas mais gerais das equações de movimento e da hamiltoniana e que verifiquemos o número de graus de liberdade independentes. A seguir é feita uma descrição sucinta do algoritmo na forma em que será usado neste trabalho. Textos mais completos podem ser encontrados, por exemplo, em [16], [11], [1] e [26].

2.1 Sistemas singulares

Usualmente os cursos de mecânica clássica abordam sistemas não singulares, onde as equações de movimento podem ser corretamente obtidas a partir da hamiltoniana canônica. Mas, sistemas singulares também podem ser tratados no formalismo hamiltoniano. Um sistema singular é um sistema cuja lagrangiana é singular. Para definir uma lagrangiana singular partimos da ação

$$S = \int L dt, \quad (2.1)$$

de onde podemos obter as equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.2)$$

Como $L = L(q, \dot{q}, t)$, as equações de Euler-Lagrange podem ser reescritas como ¹

$$\ddot{q}_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} + \dot{q}_k \frac{\partial^2 L}{\partial q_k \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (2.3)$$

¹Ao longo dessa dissertação usamos a notação de Einstein, ou seja, índices repetidos estão sob somatório, por exemplo: $q_i q_i = \sum_{i=1}^N q_i q_i$, onde N é o número de coordenadas generalizadas.

ou seja, as acelerações \ddot{q}_k só são determinadas se a matriz hessiana

$$W_{ik} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} \quad (2.4)$$

possuir inversa, em outras palavras, se $\det W \neq 0$. Se $\det W = 0$, dizemos que a lagrangiana é singular, se não, ela é regular.

2.2 Hamiltoniana primária

Definindo os momentos canônicos como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2.5)$$

se a lagrangiana for singular, nem todos os momentos poderão ser escritos em termo das velocidades, e vice-versa, pois o jacobiano

$$\det \left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = \det W \quad (2.6)$$

da passagem de \dot{q}_i para p_i será nulo. Em vez disso, teremos vínculos em função de q e p , ou seja

$$\phi_k(q_i, p_i) = 0; \quad k = 1, 2, \dots, K_p \quad (2.7)$$

chamados de **vínculos primários**, sendo K_p é o número de vínculos primários. Os vínculos $\phi_k(q, p)$ definem um subespaço Γ_p do espaço de fase completo Γ e a hamiltoniana canônica

$$H_c = p_i \dot{q}_i - L \quad (2.8)$$

é restrita ao subespaço Γ_p . Para termos uma hamiltoniana válida em todo o espaço Γ devemos modificá-la. Como a combinação linear de vínculos é nula, podemos adicioná-los à hamiltoniana canônica H_c , usando para isso os multiplicadores hamiltonianos λ_k , também chamados de **multiplicadores de Lagrange**, isto é,

$$H_p = H_c + \lambda_k \phi_k. \quad (2.9)$$

Chamamos essa hamiltoniana de **primária** ou **efetiva**, ela é válida em todo o espaço de fase Γ ou ao menos numa vizinhança de Γ_p .

Com a hamiltoniana primária, podemos escrever as equações de movimento em suas formas mais gerais, ou seja

$$\dot{q}_i = \{q_i, H_p\} = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial p_i}, \quad (2.10)$$

e

$$\dot{p}_i = \{p_i, H_p\} = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i}. \quad (2.11)$$

Essas equações de movimento são equivalentes as equações de Euler-Lagrange, diferente do que se teria se tivéssemos usado somente a hamiltoniana canônica, ou seja, a hamiltoniana primária é mais que um “luxo matemático”, sendo necessária para a correta descrição dos sistemas físicos, como será verificado explicitamente adiante nesta dissertação.

Além da hamiltoniana canônica e da hamiltoniana primária, podemos definir também a hamiltoniana reduzida H_r , que é a hamiltoniana em que todos os vínculos do sistema estão operantes, de modo que ela é válida no espaço de fase reduzido Γ_r , que é o subespaço de Γ onde todas as variáveis são independentes entre si.

2.3 Fracamente e fortemente nulo

Consideremos que, apesar dos vínculos primários serem nulos, seus parênteses de Poisson com outras variáveis podem não ser nulos, de modo que só podemos anulá-los depois do cálculo dos parênteses. Assim, introduzimos o conceito de grandeza **fracamente nula**, que usaremos com os vínculos encontrados ao longo deste trabalho:

$$\phi_k(q_i, p_i) \approx 0. \quad (2.12)$$

Dizemos que ϕ_k é fracamente nulo se os parênteses de Poisson de ϕ_k com alguma variável canônica [16] não forem identicamente nulos, ou seja, não resultam em uma identidade do tipo $0 = 0$.

Definindo mais precisamente, uma grandeza $G(q_i, p_i)$, definida numa vizinhança finita de Γ_p , é chamada de fracamente nula se, após restringi-la ao subespaço Γ_p através dos vínculos $\phi_k = 0$, ela for nula, mas seu gradiente não for nulo. Denotamos “fracamente nulo” com o símbolo “ \approx ” substituindo a igualdade. Ou seja, se

$$G(q_i, p_i) \Big|_{\Gamma_p} = 0 \quad (2.13)$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_i} \right) G(q_i, p_i) \Big|_{\Gamma_p} \neq 0 \quad (2.14)$$

então

$$G(q_i, p_i) \approx 0. \quad (2.15)$$

Se G e o gradiente de G forem nulos em Γ_p , dizemos que a grandeza G é **fortemente**

nula e denotamos isso com o símbolo “ \simeq ”. Ou seja, se

$$G(q_i, p_i) \Big|_{\Gamma_p} = 0 \quad (2.16)$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_i} \right) G(q_i, p_i) \Big|_{\Gamma_p} \equiv 0 \quad (2.17)$$

então

$$G(q_i, p_i) \simeq 0. \quad (2.18)$$

2.4 Vínculos secundários

Como os vínculos devem continuar válidos em cada instante do tempo (condição de consistência), calculamos os parênteses de Poisson dos vínculos primários com a hamiltoniana primária e exigimos que sejam fracamente nulos

$$\dot{\phi}_k = \{\phi_k, H_p\} \approx 0. \quad (2.19)$$

O resultado dessa conta pode levar a três possibilidades:

- (a) ser identicamente satisfeita,
- (b) fornecer novos vínculos,
- (c) especificar os multiplicadores de Lagrange λ_k .

No segundo caso devemos continuar a impor a preservação no tempo desses novos vínculos, chamados de **vínculos secundários**, ou seja

$$\ddot{\phi}_k = \{\dot{\phi}_k, H_p\} \approx 0, \quad (2.20)$$

o mesmo sendo válido para ordens mais elevadas, gerando vínculos terciários, quartenários, etc. Taís vínculos podem também ser coletivamente chamados de secundários, o que é o que se costuma ver na literatura. O processo segue até que todas as derivadas temporais de todos os vínculos se anulem identicamente no espaço de fase reduzido.

2.5 Vínculos de primeira e segunda classe

No contexto de um dado modelo, uma função $F(q, p)$ é dita ser **de primeira classe** se ela tiver parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os vínculos desse modelo, ou seja,

$$\{F(q, p), \phi_k^{(n)}\} \approx 0, \quad (2.21)$$

onde $k = 1, 2, 3 \dots K$ e $n = 1, 2, 3 \dots$, sendo que n indica a ordem dos vínculos (primário, secundário, terciário, respectivamente). Caso tenha parênteses de Poisson não fracamente nulos com algum dos vínculos, ela é chamada **de segunda classe**. Vínculos podem ter parênteses de Poisson calculados uns com os outros, de modo que se pode determinar se eles mesmos são de primeira ou segunda classe. Vínculos de primeira classe permitem eliminar dois graus de liberdade cada um, pois geram transformações locais de simetria do modelo. Para cada vínculo de primeira classe podemos impor um novo vínculo, que chamamos de condição de gauge. Enquanto que os vínculos de segunda classe permitem eliminar somente um grau de liberdade cada. Portanto, o número de graus de liberdade independentes no formalismo hamiltoniano N_{glH} é dado por

$$N_{glH} = 2N - 2P - S, \quad (2.22)$$

onde $2N$ é a dimensão do espaço de fase, P é o número de vínculos de primeira classe e S é o número de vínculos de segunda classe. Note que N_{glH} é igual a dimensão do espaço de fase reduzido Γ_r . O número de graus de liberdade lagrangianos N_{glL} é a metade do número de graus de liberdade hamiltonianos, ou seja

$$N_{glL} = \frac{N_{glH}}{2} = N - P - \frac{S}{2}. \quad (2.23)$$

2.6 Aplicação em teoria de campos e notação

Nesta seção apresentaremos exemplos de aplicação do método de Dirac em alguns modelos bem conhecidos, a teoria de Maxwell para o eletromagnetismo, o modelo de Proca de um eletromagnetismo massivo e um modelo de gravitação massiva pseudo-Fierz-Pauli. Como são casos relativísticos e como teremos campos em vez de coordenadas usuais (para cada ponto do espaço há um conjunto de graus de liberdade, logo, há infinitos graus de liberdade no espaço todo), devemos primeiro generalizar o método de Dirac.

Para Maxwell e Proca, em vez da coordenada q_i e do momento p_i , temos o campo vetorial $A_\mu(x)$ e seu momento conjugado $\pi^\mu(x)$. Os índices seguem a convenção usual $\mu = 0, 1, 2, \dots D - 1$ para letras gregas (indicando as coordenadas espaço-temporais) e $i = 1, 2, \dots D - 1$ para letras latinas (indicando coordenadas espaciais), sendo D a dimensão do espaço-tempo. Para duas funções $F(y)$ e $G(x)$ os parênteses de Poisson são definidos como ²

$$\{F(y), G(x)\} = \int d^{D-1}z \left[\frac{\partial F(y)}{\partial A_\nu(z)} \frac{\partial G(x)}{\partial \pi^\nu(z)} - \frac{\partial F(y)}{\partial \pi^\nu(z)} \frac{\partial G(x)}{\partial A_\nu(z)} \right]. \quad (2.24)$$

²Usamos símbolos de derivadas comuns como $\frac{\partial F}{\partial A_\nu}$ indicando a derivada funcional $\frac{\delta F}{\delta A_\nu}$.

As equações de Hamilton ficam

$$\dot{A}^\mu(x) = \{A^\mu(x), H_p\} = \frac{\partial H_p}{\partial \pi_\mu(x)} \quad (2.25)$$

$$\dot{\pi}^\mu(x) = \{\pi^\mu(x), H_p\} = -\frac{\partial H_p}{\partial A_\mu(x)} \quad (2.26)$$

As velocidades canônicas são definidas como

$$\dot{A}^\mu \equiv \partial_0 A^\mu \equiv \frac{\partial A^\mu}{\partial x^0}. \quad (2.27)$$

Nos casos dos modelos de Fierz-Pauli e não-Fierz-Pauli, que serão abordados nos próximos capítulos, temos um campo tensorial geral $e_{\mu\nu}$ sobreposto a uma métrica de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

como métrica de fundo, de modo que a dinâmica está toda em $e_{\mu\nu}$. Assim, os parênteses de Poisson são definidos em termos de $e_{\mu\nu}$ e seu momento conjugado $\pi^{\mu\nu}$ como

$$\{F(y), G(x)\} = \int d^{D-1}z \left[\frac{\partial F(y)}{\partial e_{\alpha\beta}(z)} \frac{\partial G(x)}{\partial \pi^{\alpha\beta}(z)} - \frac{\partial F(y)}{\partial \pi^{\alpha\beta}(z)} \frac{\partial G(x)}{\partial e_{\alpha\beta}(z)} \right]. \quad (2.28)$$

As equações de Hamilton ficam

$$\dot{e}^{\mu\nu}(x) = \{e^{\mu\nu}(x), H_p\} = \frac{\partial H_p}{\partial \pi_{\mu\nu}(x)} \quad (2.29)$$

$$\dot{\pi}^{\mu\nu}(x) = \{\pi^{\mu\nu}(x), H_p\} = -\frac{\partial H_p}{\partial e_{\mu\nu}(x)} \quad (2.30)$$

As velocidades canônicas são definidas como

$$\dot{e}^{\mu\nu} \equiv \partial_0 e^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial e^{\mu\nu}}{\partial x^0}. \quad (2.31)$$

Ocasionalmente também usaremos as seguintes notações para o gradiente, o laplaciano e o d'alembertiano, respectivamente:

$$(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{D-1}) \equiv \nabla; \quad \partial_i^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2; \quad \partial_i^2 - \partial_0^2 \equiv \square. \quad (2.32)$$

Enfim, neste trabalho usamos o sistema de unidades comum em física de partículas elementares onde

$$c = \hbar = 1. \quad (2.33)$$

2.6.1 Método de Dirac aplicado à teoria de Maxwell

A densidade de lagrangiana para o eletromagnetismo de Maxwell no vácuo é

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), \quad (2.34)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Ela pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}^i + \frac{1}{2}\partial_i A_0\partial^i A_0 - \dot{A}_i\partial^i A_0. \quad (2.35)$$

Equações de movimento

Com o intuito de mostrar que é a densidade de hamiltoniana primária que fornece as equações de movimento corretas, vamos calcular as equações de movimento de três formas diferentes, via equações de Euler-Lagrange, via equações de Hamilton para a densidade de hamiltoniana canônica e via equações de Hamilton para a hamiltoniana primária. Aplicando as equações de Euler-Lagrange obtemos as equações de movimento

$$\partial_\beta \left[\frac{\partial \mathcal{L}^M}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}^M}{\partial A_\alpha} = \partial_\beta F^{\beta\alpha} = 0. \quad (2.36)$$

Separando em componentes temporal e espacial, respectivamente, temos o vínculo ³

$$\partial_i^2 A_0 - \partial^i \dot{A}_i = 0 \quad (2.37)$$

e as equações dinâmicas

$$\ddot{A}_k - \partial_k \dot{A}_0 + \partial_i^2 A_k - \partial_k \partial^i A_i = 0. \quad (2.38)$$

Se aplicarmos ∂_0 em (2.37) e somarmos com ∂^k de (2.38) teremos uma identidade trivial $0 = 0$ e, portanto, \dot{A}_0 fica indeterminado.

Vamos obter agora as equações de Hamilton para comparar com (2.37) e (2.38) via hamiltoniana canônica e hamiltoniana primária. Os momentos canônicos obtidos de

³A equação (2.37) é um vínculo, pois é uma função das coordenadas (A_0) e das velocidades (\dot{A}_i), somente. Ela impõe restrições às condições iniciais do sistema, ao contrário de (2.38), que envolve as acelerações \ddot{A}_k .

(2.35) são

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad (2.39)$$

e

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \dot{A}^i - \partial^i A_0 \quad (2.40)$$

Neste caso, temos apenas um vínculo primário

$$\phi = \pi^0 \approx 0. \quad (2.41)$$

A densidade de hamiltoniana canônica pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c^M &= \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \pi_i \partial^i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \end{aligned} \quad (2.42)$$

e a densidade de hamiltoniana primária

$$\mathcal{H}_p^M = \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \pi_i \partial^i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \lambda \pi_0. \quad (2.43)$$

As equações de movimento que obtemos da hamiltoniana canônica $H_c^M = \int d^{D-1} z \mathcal{H}_c^M$ são

$$\dot{\pi}^0(x) = -\frac{\partial H_c^M}{\partial A_0(x)} = \partial_i \pi^i, \quad (2.44)$$

$$\dot{A}_0(x) = \frac{\partial H_c^M}{\partial \pi^0(x)} = 0. \quad (2.45)$$

Note a discrepância com (2.37) e (2.38), pois $\dot{A}_0 = 0$. Além disso, temos

$$\dot{\pi}^k(x) = -\frac{\partial H_c^M}{\partial A_k(x)} = \partial_i^2 A^k - \partial^k \partial^i A_i, \quad (2.46)$$

$$\dot{A}_k(x) = \frac{\partial H_c^M}{\partial \pi^k(x)} = \pi^k + \partial^k A_0. \quad (2.47)$$

Derivando (2.47) em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{\pi}^i = \ddot{A}^i - \partial^i \dot{A}_0, \quad (2.48)$$

que substituindo em (2.46) e usando (2.45) leva a

$$\ddot{A}^k = \partial_i^2 A_k - \partial_k \partial^i A_i, \quad (2.49)$$

que não corresponde a (2.38), a não ser que escolhamos $\dot{A}_0 = 0$.

Por outro lado, da hamiltoniana primária as equações de movimento são

$$\dot{\pi}^0(x) = -\frac{\partial H_p^M}{\partial A_0(x)} = \partial_i \pi^i, \quad (2.50)$$

$$\dot{A}_0(x) = -\frac{\partial H_p^M}{\partial \pi_0(x)} = -\lambda(x), \quad (2.51)$$

ou seja, agora \dot{A}_0 não é identicamente nulo. Note que o sinal negativo nesta equação se deve a $\pi^0 = -\pi_0$. Além disso, temos

$$\dot{\pi}^k(x) = -\frac{\partial H_p^M}{\partial A_k(x)} = \partial_i^2 A^k - \partial^k \partial^i A_i, \quad (2.52)$$

$$\dot{A}_k(x) = \frac{\partial H_p^M}{\partial \pi^k(x)} = \pi^k + \partial^k A_0. \quad (2.53)$$

De (2.52) e (2.53), reproduzimos (2.38)

$$\ddot{A}^k - \partial^k \dot{A}_0 = \partial_i^2 A_k - \partial^k \partial^i A_i. \quad (2.54)$$

Eliminando A_0 de (2.37), de volta em (2.38) vemos que somente as componentes transversais das acelerações \ddot{A}_k podem ser determinadas. As componentes longitudinais de \ddot{A}_k , ou seja, $\partial^k \ddot{A}_k$, ficam indeterminadas e, conseqüentemente, \dot{A}_0 também. Isso está de acordo com (2.51), pois λ é uma função indeterminada, como veremos a seguir. Ou seja, as equações de Hamilton (2.50) a (2.53) reproduzem (2.37) e (2.38), ao contrário de (2.45) a (2.47).

Aplicação do método de Dirac

Vamos calcular os parênteses de Poisson entre o vínculo primário e a hamiltoniana primária, assim poderemos obter mais um vínculo e obter mais informações sobre λ :

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(y) &= \{\phi(y), H_p\} = \int d^3x \{\pi^0(y), \mathcal{H}_p(x)\} \\
&= - \int d^3x \frac{\partial \mathcal{H}_p(x)}{\partial A_0(y)} = - \int d^3x \pi^i \partial_i^x \delta^3(x-y) \\
&= \int d^3x \partial_i^x \pi^i \delta(x-y) \\
&= \partial_i \pi^i \approx 0,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

portanto temos um vínculo secundário (note que os índices “x” e “y” nas derivadas parciais indicam que elas estão sendo feitas com relação ao respectivo grupo de variáveis). Demonstramos abaixo que ele equivale ao vínculo lagrangiano (2.37). Usando (2.53), temos

$$\partial^i (\dot{A}_i - \partial_i A_0) = \partial_i \pi^i = 0. \tag{2.56}$$

Prosseguindo com o algoritmo:

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi}(y) &= \{\dot{\phi}(y), H_p\} \\
&= \int d^3x \{\partial_i^y \pi^i(y), \mathcal{H}_p(x)\} \\
&= -\partial_i^y \int d^3x \frac{\partial \mathcal{H}_p(x)}{\partial A_i(y)} \\
&= -\partial_i^y \int d^3x (\partial_x^j A^i \partial_j^x - \partial_x^i A^j \partial_j^x) \delta^3(x-y) \\
&= \partial_i^y \int d^3x (\partial_x^j \partial_j^x A^i - \partial_x^i \partial_j^x A^j) \delta(x-y) \\
&= \nabla^2 (\partial_i A^i - \partial_i A^i) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Não foi obtido um novo vínculo e nem o multiplicador de Lagrange λ foi determinado, sendo o resultado identicamente nulo. Portanto o multiplicador de Lagrange λ é arbitrário, o que implica que as equações de movimento (2.50) a (2.53) são equivalentes a (2.37) e (2.38), graças ao uso da hamiltoniana primária ao invés da hamiltoniana canônica.

Contagem dos graus de liberdade

Os dois vínculos obtidos, (2.39) e (2.55), são de primeira classe, portanto cada um deles elimina dois graus de liberdade. Como a teoria de Maxwell tem, a princípio, 8 graus de liberdade (A^μ, π_μ) no formalismo hamiltoniano e como podemos eliminar 4, resulta em 4

graus de liberdade – ou 2 graus de liberdade no formalismo lagrangiano. Usando (2.23), nota-se que, em D dimensões, temos $D - 2$ graus de liberdade lagrangianos.

Positividade da densidade de hamiltoniana reduzida

É fácil notar que a densidade hamiltoniana (2.43) é positivo-definida a menos dos vínculos, pois uma simples integração por partes no segundo termo mostra que ele depende do vínculo (2.55). Ou seja, a menos dos vínculos

$$\mathcal{H}_r^M = \frac{1}{2}\pi_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \geq 0, \quad (2.58)$$

onde o índice “ r ” indica que é a densidade de hamiltoniana reduzida.

Todos esses resultados podem ser traduzidos em termos dos campos elétrico e magnéticos. O vínculo π_0 é a componente F_{00} do tensor eletromagnético, π_i são as componentes do campo elétrico, ou seja

$$\pi_i = E_i. \quad (2.59)$$

A equação (2.52) é a lei de Ampère no vácuo

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{B}. \quad (2.60)$$

Já o vínculo (2.55) é o divergente do campo elétrico, como não há fontes, ele é zero, ou seja, é a lei de Gauss no vácuo

$$\partial^i \pi_i = \partial^i E_i = \nabla \cdot \vec{E} = 0. \quad (2.61)$$

A identidade (2.57) expressa simplesmente que $Tr F_{ij} = 0$. Em termos dos campos elétrico e magnético, a densidade de hamiltoniana é familiar

$$\mathcal{H}_r^M = \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}B^2 \geq 0. \quad (2.62)$$

2.6.2 Método de Dirac aplicado ao modelo de Proca

A densidade de lagrangiana para o eletromagnetismo massivo de Proca é [19] [12]

$$\mathcal{L}^P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A^\mu A_\nu. \quad (2.63)$$

Como o termo de massa não contém \dot{A}_μ , os momentos canônicos e o vínculo primário são idênticos aos de Maxwell, mas as relações obtidas via Euler-Lagrange são diferentes.

Equações de movimento

Escrevendo as equações de Euler-Lagrange obtemos

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = m^2 A_\nu \quad (2.64)$$

que, separando os termos temporais e espaciais, respectivamente, fornecem o vínculo

$$\partial_i^2 A_0 - \partial^i \dot{A}_i - m^2 A_0 = 0 \quad (2.65)$$

e as equações dinâmicas

$$\ddot{A}_k - \partial_k \dot{A}_0 - \partial_i^2 A_k + \partial_k \partial^i A_i + m^2 A_k = 0. \quad (2.66)$$

A densidade de hamiltoniana de Proca difere pelo acréscimo do termo de massa

$$\mathcal{H}_c^P = \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \pi_i \partial^i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} (-A_0^2 + A_i^2). \quad (2.67)$$

A hamiltoniana primária fica

$$\mathcal{H}_p^P = \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \pi_i \partial^i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} (-A_0^2 + A_i^2) + \lambda \pi_0. \quad (2.68)$$

As equações de movimento via hamiltoniana canônica são

$$\dot{\pi}^0(x) = -\frac{\partial \mathcal{H}_c^P}{\partial A_0(x)} = -\partial_i \pi^i + m^2 A_0, \quad (2.69)$$

$$\dot{A}_0(x) = -\frac{\partial \mathcal{H}_c^P}{\partial \pi_0(x)} = 0. \quad (2.70)$$

Novamente, vemos que $\dot{A}_0 = 0$ não aparece em (2.65) e (2.66). Temos também:

$$\dot{\pi}^k(x) = -\frac{\partial \mathcal{H}_c^P}{\partial A_k(x)} = \partial_i^2 A^k - \partial^k \partial^i A_i + m^2 A^k; \quad (2.71)$$

$$\dot{A}_k(x) = \frac{\partial \mathcal{H}_c^P}{\partial \pi^k(x)} = \pi^k + \partial^k A_0. \quad (2.72)$$

Assim como em Maxwell, a hamiltoniana primária é que fornece as equações de movimento corretas, ou seja, via hamiltoniana primária temos

$$\dot{A}_0(x) = -\frac{\partial \mathcal{H}_p^P}{\partial \pi_0(x)} = -\lambda, \quad (2.73)$$

$$\ddot{A}^k - \partial^k \dot{A}_0 = \partial_i^2 A^k + \partial^k \partial^i A_i - m^2 A^k, \quad (2.74)$$

que coincidem com as equações de movimento lagrangianas (2.65) e (2.66).

Aplicação do método de Dirac

Calculando o parêntese de Poisson do vínculo primário com a hamiltoniana primária obtemos um vínculo secundário, que difere da lei de Gauss (2.55) válida para $m = 0$, ou seja

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i(y) &= \{\phi_i(y), H_p^P\} \\ &= \int d^3x \{\pi^0(y), \mathcal{H}_p(x)\} \\ &= \int d^3x (-\pi^i \partial_i + m^2 A_0) \delta^3(x - y) \\ &= \partial_i \pi^i + m^2 A_0 \approx 0, \end{aligned} \quad (2.75)$$

Aplicando ∂^k em (2.72) e usando (2.75), reproduzimos as equações de movimento (2.65). Repetindo o processo com o vínculo secundário, determinamos o multiplicador de Lagrange λ

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_i(y) &= \{\dot{\phi}_i(y), H_p^M\} \\ &= \int d^3x \left(m^2 \frac{\partial \mathcal{H}_p(x)}{\partial \pi_0(y)} - \partial_i^y \frac{\partial \mathcal{H}_p(x)}{\partial A_i(y)} \right) \\ &= \int d^3x [m^2 \lambda - \partial_i^y (m^2 A^i - \partial^j A^i \partial_j + \partial^i A^j \partial_j)] \delta^3(x - y) \\ &= m^2 (\lambda - \partial_i A^i) \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Temos

$$\lambda = \partial_i A^i. \quad (2.77)$$

Usando (2.73), temos

$$\partial_i A^i - \dot{A}_0 = \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (2.78)$$

que segue diretamente de ∂^μ sobre (2.64). Substituindo (2.78) em (2.74), obtemos

$$\partial_i^2 A_k + \partial_k \partial^i A_i - m^2 A_k = \ddot{A}_k + \partial_k \partial^i A_i. \quad (2.79)$$

Portanto temos as equações de Klein-Gordon

$$-\ddot{A}_k + \partial_i^2 A_k - m^2 A_k = (\square - m^2) A_k = 0. \quad (2.80)$$

Contagem dos graus de liberdade

Os parênteses de Poisson entre ϕ e $\dot{\phi}$ não são fracamente nulos, ou seja,

$$\{\phi(y), \dot{\phi}(x)\} = -m^2 \delta(x - y), \quad (2.81)$$

portanto, ϕ e $\dot{\phi}$ são de segunda classe. Há oito graus de liberdade (A_μ, π^μ) no formalismo hamiltoniano em $D = 4$ dimensões. Usando os vínculos de segunda classe podemos eliminar dois graus de liberdade, logo, há três graus de liberdade no formalismo lagrangiano, o que é compatível com $2s + 1$ para partículas massivas de spin $s = 1$. Em D dimensões, usando (2.22), temos

$$N_{glL} = \frac{2D - 2}{2} = D - 1 \quad (2.82)$$

graus de liberdade lagrangianos para fótons massivos.

Positividade da densidade de hamiltoniana reduzida

A positividade da hamiltoniana é mostrada da mesma forma que em Maxwell, basta aplicar o vínculo secundário (2.75) no segundo termo da densidade de hamiltoniana (2.68) após integração por partes, a menos dos vínculos e termos de superfície, a densidade de hamiltoniana é

$$\mathcal{H}_r^P = \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0^2 + \frac{m^2}{2} A_i^2, \quad (2.83)$$

portanto

$$\mathcal{H}_r^P \geq 0. \quad (2.84)$$

Assim como em Maxwell, a componente $\pi_0 = F_{00}$ e o traço de F_{ij} ainda são nulos, mas o divergente do campo elétrico no vácuo não é mais necessariamente nulo, em vez disso, ele é proporcional ao quadrado da massa e ao potencial eletrostático, ou seja, de (2.75)

$$\nabla \cdot \vec{E} = -m^2 A_0, \quad (2.85)$$

o que é um resultado interessante, pois o $\nabla \cdot \vec{E}$ deixa de ser zero no vácuo e o termo $m^2 A_0$ implica em um fóton longitudinal. Mais detalhes sobre o fóton longitudinal e sobre o conjunto completo das equações de Maxwell-Proca para o eletromagnetismo massivo podem ser encontrados em [27].

Capítulo 3

Modelo de Fierz-Pauli

3.1 Equações de movimento e condições de Fierz-Pauli

Em busca de uma teoria para partículas massivas de spin-2 que tivesse uma hamiltoniana positiva, Fierz e Pauli chegaram em 1939 ao modelo abaixo [14] [17] [23], que é uma generalização para spin-2 da teoria de proca (spin-1):

$$\mathcal{L}_{FP} = \frac{1}{4} \left[h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - h \square h + 2h \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \right. \\ \left. -m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \right]. \quad (3.1)$$

Minimizando a ação, obtemos as equações de movimento [13]

$$0 = -\square h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \square h - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial^\alpha \partial_\nu h_{\alpha\mu} + \\ -\eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + m^2 (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h). \quad (3.2)$$

Aplicando ∂^μ na equação (3.1), obtemos

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \partial_\nu h, \quad (3.3)$$

onde

$$h \equiv h^\nu{}_\nu. \quad (3.4)$$

Multiplicando (3.2) pela métrica $\eta^{\mu\nu}$ e usando (3.3), obtém-se que o traço de $h_{\mu\nu}$ é nulo

$$h = 0. \quad (3.5)$$

Portanto, de volta com esse resultado em (3.3), obtemos

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad (3.6)$$

que é a condição de transversalidade. Usando a condição de transversalidade e a condição de traço nulo na equação de movimento, obtemos as equações de Klein-Gordon em termos de $h_{\mu\nu}$

$$(\square - m^2) h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.7)$$

As expressões de (3.5) a (3.6) são chamadas de “condições de Fierz-Pauli”, toda partícula de spin-2 massiva descrita por um tensor de rank 2 deve satisfazê-las, vide [15] para uma demonstração recente. Como (3.5) e (3.6) são vínculos independentes, podemos usá-los para eliminar graus de liberdade. A condição de traço nulo permite eliminar um grau de liberdade e a condição de transversalidade permite eliminar mais $D = 4$ graus de liberdade, ou seja, como $h_{\mu\nu}$ tem 10 componentes independentes, temos $10 - 5 = 5$ graus de liberdade no total, ou 5 helicidades, o que é compatível com spin-2, pois $2s + 1 = 5$.

3.2 Análise de vínculos

3.2.1 Modelo pseudo-FP ($a \neq 1$)

Aplicaremos agora o algoritmo de Dirac a um modelo de Fierz-Pauli modificado no termo de massa (que chamaremos de “pseudo-FP”) e em D dimensões. A motivação para essa modificação é que ela é semelhante ao tipo de modificação que se faz no modelo central desta dissertação, o modelo não-Fierz-Pauli (\mathcal{L}_{nFP}). A densidade de lagrangiana do modelo pseudo-Fierz-Pauli é [8]

$$\mathcal{L}_{FP}^a = \frac{1}{4} \left[h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - h \square h + 2h \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - ah^2) \right], \quad (3.8)$$

onde “ a ” é uma constante a princípio arbitrária, retornamos ao modelo Fier-Pauli fazendo $a = 1$. Separando os termos temporais e espaciais e aplicando integrações por partes onde

for conveniente, pode-se reescrever \mathcal{L}_{FP}^a como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP}^a = & \frac{1}{4} \left\{ 2(\partial_l h_{0i})^2 + (\partial_0 h_{ij})^2 - (\partial_l h_{ij})^2 + 2h_{00} \partial_j^2 \bar{h} - (\partial_0 \bar{h})^2 + (\partial_j \bar{h})^2 + \right. \\ & - 2h_{00} \partial_i \partial_j h^{ij} + 4\partial^l h_{0l} \partial_0 \bar{h} + 2\bar{h} \partial_i \partial_j h^{ij} - 2(\partial^i h^j{}_0 + \partial^j h^i{}_0) \partial_0 h_{ij} + \\ & \left. - 2(\partial_i h^i{}_0)^2 + 2(\partial_i h^{ij})^2 - m^2 [h_{00}^2 - 2h_{0i}^2 + h_{ij}^2 - a(h_{00}^2 - 2h_{0i} \bar{h} + \bar{h}^2)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde \bar{h} é definido como o traço da parte espacial de $h_{\mu\nu}$

$$\bar{h} \equiv h^i{}_i = \eta_{ij} h^{ij}. \quad (3.10)$$

Analogamente, definimos

$$\bar{\pi} \equiv \pi^i{}_i = \eta_{ij} \pi^{ij}. \quad (3.11)$$

De (3.9) podemos obter os momentos canônicos

$$\pi_{00} = \frac{\partial \mathcal{L}_{FP}^a}{\partial \dot{h}^{00}} = 0, \quad (3.12)$$

$$\pi_{0k} = \pi_{k0} = \frac{\partial \mathcal{L}_{FP}^a}{\partial \dot{h}^{0k}} = 0, \quad (3.13)$$

e

$$\begin{aligned} \pi_{kl} &= \pi_{lk} = \frac{\partial \mathcal{L}_{FP}^a}{\partial \dot{h}^{kl}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{h}_{kl} - \frac{1}{2} \dot{\bar{h}} \eta_{kl} + \partial^i h_{0i} \eta_{kl} - \frac{1}{2} \partial_l h_{0k} - \frac{1}{2} \partial_k h_{0l}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Os momentos canônicos $\pi_{00} = \phi_{00} \approx 0$ e $\pi_{0k} = \phi_{0k} \approx 0$ são os vínculos primários desse modelo. Para escrever a hamiltoniana primária, primeiro deve-se obter o maior número possível de velocidades em função dos momentos. O traço dos momentos é

$$\bar{\pi} = -\frac{D-2}{2} \dot{\bar{h}} + (D-2) \partial^l h_{0l}, \quad (3.15)$$

o que permite obter o traço das velocidades

$$\dot{\bar{h}} = -\frac{2}{D-2} \bar{\pi} + 2\partial^l h_{0l}. \quad (3.16)$$

Substituindo em (3.14) temos as velocidades

$$\dot{h}_{kl} = 2\pi_{kl} - \frac{2}{(D-2)}\bar{\pi}\eta_{kl} + \partial_l h_{0k} + \partial_k h_{0l}. \quad (3.17)$$

A hamiltoniana primária é dada por

$$\mathcal{H}_p = \pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_{FP} + \lambda^\mu\pi_{0\mu}. \quad (3.18)$$

Usando (3.16) e (3.17), após algumas manipulações, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_p &= \pi_{ij}^2 - \frac{\bar{\pi}^2}{D-2} + 2\pi^{ij}\partial_i h_{0j} + \frac{1}{4}(\partial_l h_{ij})^2 - \frac{1}{2}h_{00}\partial_j^2 \bar{h} + \frac{1}{2}h_{00}\partial^i \partial^j h_{ij} + \\ &\quad - \frac{1}{4}(\partial_j \bar{h})^2 + \frac{m^2}{4}[h_{00}^2 - 2h_{0i}^2 + h_{ij}^2 - a(h_{00}^2 - 2h_{00}^2 \bar{h} + \bar{h}^2)] + \\ &\quad - \frac{1}{2}\bar{h}\partial^i \partial^j h_{ij} - \frac{1}{2}(\partial_i h^{ij})^2 + \lambda^i \pi_{0i} - \lambda_0 \pi_{00}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A preservação no tempo dos vínculos primários permitirá encontrar os λ 's e os demais vínculos. A condição de consistência para ϕ_{00} é

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{00}(y) &= \int d^{D-1}x \{\pi_{00}(y), \mathcal{H}_p(x)\} = - \int d^{D-1}x \left[\frac{\partial \mathcal{H}_p(x)}{\partial h_{00}(y)} \right] \\ &= \frac{1}{2}\partial_j^2 \bar{h} - \partial^i \partial^j h_{ij} - \frac{m^2}{2}[h_{00} - a(h_{00} - \bar{h})] \approx 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

e a condição de consistência para ϕ_{0k} é

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{0k}(y) &= \int d^{D-1}x \{\pi_{0k}(y), \mathcal{H}_p(x)\} = - \int d^{D-1}x \left[\frac{\partial \mathcal{H}_p(x)}{\partial h_{0k}(y)} \right] \\ &= -2\partial^i \pi_{ki} - m^2 h_{0k} \approx 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Como não são identicamente nulos e não determinam λ_0 ou λ_k , $\dot{\phi}_{00} \approx 0$ e $\dot{\phi}_{0k} \approx 0$ são vínculos secundários. Devemos então aplicar a condição de consistência para eles também, para $\dot{\phi}_{00}$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_{00}(y) &= \int d^{D-1}x \{\dot{\phi}_{00}(y), \mathcal{H}_p(x)\} \\ &= \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{2}\partial_j^2 \{\bar{h}(y), \mathcal{H}_p(x)\} - \frac{1}{2}\partial^i \partial^j \{h_{ij}(y), \mathcal{H}_p(x)\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{2}(\{h_{00}(y), \mathcal{H}_p(x)\}(1-a) + a\{\bar{h}(y), \mathcal{H}_p(x)\}) \right] \\ &= m^2 a \left(\frac{-1}{D-2} \bar{\pi} + \partial^i h_{0i} \right) + \partial^i \partial^j \pi_{ij} - \frac{m^2}{2}(1-a)\lambda_0 \\ &= m^2 a \left(\frac{-1}{D-2} \bar{\pi} + \partial^i h_{0i} \right) - \frac{m^2}{2}\partial^i h_{0i} - \frac{m^2}{2}(1-a)\lambda_0 \approx 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde foi usado o vínculo (3.21). O multiplicador de lagrange λ_0 pode ser fácilmente isolado

$$\lambda_0 = \frac{2a}{1-a} \left[\left(\frac{-1}{D-2} \bar{\pi} + \partial^i h_{0i} \right) - \frac{1}{2} \partial^i h_{0i} \right], \quad (3.23)$$

esse resultado só é válido para $a \neq 1$. Para $\dot{\phi}_{0k}$ temos

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_{0k} &= \int d^{D-1}x \{ \dot{\phi}_{0k}, \mathcal{H}_p \} \\ &= \int d^{D-1}x \left[-2\partial^i \{ \pi_{ki}, \mathcal{H}_p \} - m^2 \{ h_{0k}, \mathcal{H}_p \} \right] \\ &= \int d^{D-1}x \left[2\partial^i \frac{\partial \mathcal{H}_p}{\partial h_{ki}} + m^2 \frac{\partial \mathcal{H}_p}{\partial \pi_{0k}} \right] \\ &= -m^2 \partial^i \left[h_{ki} - a(h_{00}\eta_{ki} + \bar{h}\eta_{ki}) \right] + m^2 \lambda_k = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

o que implica

$$\lambda_k = \partial^i h_{ki} - a\partial_k(h_{00} + \bar{h}). \quad (3.25)$$

A expressão para λ_0 , obtida anteriormente, só foi possível devido a hipótese $a \neq 1$. Como $(h_{\mu\nu}, \pi^{\mu\nu})$ contém $2D(D+1)/2$ graus de liberdade e temos $2D$ vínculos de segunda classe $(\varphi_{00}, \dot{\varphi}_{00}, \varphi_{0k}, \dot{\varphi}_{0k})$, temos

$$2\frac{D(D+1)}{2} - 2D = D^2 - D \quad (3.26)$$

graus de liberdade, que em $D = 4$ implica em 12 graus de liberdade hamiltonianos ou 6 lagrangianos, o que não é compatível com $2s+1 = 5$ para spin-2 massivo. Temos um grau de liberdade a mais. Pode-se mostrar [5] que esse termo extra contribui negativamente para a hamiltoniana, tornando o modelo instável.

3.2.2 Modelo Fierz-Pauli ($a = 1$)

Fazendo $a = 1$ em (3.22), deixamos de determinar λ_0 nessa etapa e temos um vínculo terciário, então precisamos novamente aplicar a condição de consistência para $\ddot{\phi}_{00}$, o que nos leva a um vínculo quartenário

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_{00} &= \int d^{D-1}x \{ \ddot{\phi}_{00}, \mathcal{H}_p \} \\ &= \int d^{D-1}x m^2 \left[\frac{-1}{D-2} \{ \bar{\pi}, \mathcal{H}_p \} + \frac{1}{2} \partial^i \{ h_{0i}, \mathcal{H}_p \} \right] \\ &= -m^4 \frac{D-1}{2(D-2)} \bar{h} + m^4 \frac{D-1}{2(D-2)} h_{00} = -m^4 \frac{D-1}{2(D-2)} [\bar{h} - h_{00}] \approx 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde foram usados (3.20), (3.22) e (3.25). Nota-se que ele é proporcional ao traço de $h_{\mu\nu}$, isto é

$$\ddot{\phi}_{00} = -m^4 \frac{D-1}{2(D-2)} h \approx 0, \quad (3.28)$$

que é essencialmente uma das condições de Fierz-Pauli obtidas no formalismo lagrangiano, na primeira seção deste capítulo, a condição de traço nulo (3.5).

A preservação no tempo de $\ddot{\phi}_{00}$ fornece

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_{00} &= \int d^{D-1}x \{ \dot{\phi}_{00}, \mathcal{H}_p \} \\ &= \int d^{D-1}x m^4 \left[-\frac{D-1}{2(D-2)} \{ \bar{h}, \mathcal{H}_p \} + \frac{D-1}{2(D-2)} \{ h_{00}, \mathcal{H}_p \} \right] \\ &= m^4 \left[-\frac{D-1}{2(D-2)} \left(-\frac{1}{D-2} \bar{\pi} + \partial^i h_{0i} \right) - \frac{D-1}{2(D-2)} \lambda_0 \right] \\ &= m^4 \left[-\frac{D-1}{2(D-2)^2} \bar{\pi} - \frac{D-1}{2(D-2)} \lambda_0 \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

o que implica em

$$\lambda_0 = -\frac{\bar{\pi}}{D-2}. \quad (3.30)$$

Portanto, com (3.25) determinamos todos os multiplicadores λ_μ .

Assim, temos D vínculos primários de segunda classe

$$\phi_{00} = \pi_{00} \approx 0 \quad (3.31)$$

e

$$\phi_{0k} = \pi_{0k} \approx 0, \quad (3.32)$$

que eliminam D graus de liberdade.

Temos D vínculos secundários de segunda classe

$$\dot{\phi}_{00} = \frac{1}{2} \partial_j^2 \bar{h} - \partial^i \partial^j h_{ij} + \frac{m^2}{2} \bar{h} \approx 0 \quad (3.33)$$

$$\dot{\phi}_{0k} = -2\partial^i \pi_{ki} - m^2 h_{0k} \approx 0, \quad (3.34)$$

que removem mais D graus de liberdade.

Mais um vínculo terciário e um quartenário de segunda classe

$$\ddot{\phi}_{00} = m^2 \left(\frac{-1}{D-2} \bar{\pi} + \frac{1}{2} \partial^i h_{0i} \right) \approx 0 \quad (3.35)$$

$$\ddot{\phi}_{00} = -m^4 \frac{D-1}{2(D-2)} h \approx 0, \quad (3.36)$$

que eliminam mais dois graus de liberdade.

No formalismo hamiltoniano esse modelo tem, a princípio, $(D^2 + D)$ graus de liberdade $(h_{\mu\nu}, \pi^{\mu\nu})$ e eliminamos $2(D+1)$, terminando, assim, com $D^2 - D - 2$ graus de liberdade hamiltonianos. Em $3+1$ dimensões, são $16 - 4 - 2 = 10$ graus de liberdade no total, ou seja, 5 graus de liberdade no formalismo lagrangiano, como esperávamos para uma partícula de spin-2 massiva $(2s+1)$.

3.3 Positividade da hamiltoniana reduzida de FP

Usando os vínculos (3.21) e (3.36), podemos eliminar os termos com índices temporais e desacoplar os termos dependentes dos momentos dos termos dependentes do campo, eliminando h_{0k} e h_{00} :

$$h_{0k} = \frac{1}{m^2} \partial^i \pi_{ki} \ ; \ h_{00} = \bar{h}. \quad (3.37)$$

Assim, podemos escrever a hamiltoniana parcialmente reduzida

$$\mathcal{H}_{FP}^{pr} = \pi_{ij}^2 - \frac{\bar{\pi}^2}{D-2} + \frac{2}{m^2} (\partial_i \pi^{ij})^2 + \frac{1}{4} (\partial_l h_{ij})^2 - \frac{1}{2} (\partial^i h_{ij})^2 + \frac{1}{4} (\partial_j \bar{h})^2 - \frac{m^2}{2} (h_{ij}^2 + 2\bar{h}^2). \quad (3.38)$$

Embora \mathcal{H}_{FP}^{pr} tenha termos com sinais opostos, aqui mostraremos que a hamiltoniana reduzida do modelo de Fierz-Pauli é positiva, para isso usaremos os operadores de Barnes-Rivers [4] simétricos (também chamados de operadores de transição e de projeção).

Operadores de Barnes-Rivers

Operadores de projeção são transformações lineares que possuem a propriedade de idempotência, o que significa que se aplicado mais de uma vez sobre um objeto, resulta no mesmo efeito de uma única aplicação, ou seja, para um operador de projeção P

$$P = P^2; \quad (3.39)$$

quando aplicado em uma grandeza V que está num espaço vetorial de D dimensões, ele projeta essa grandeza em um subespaço vetorial de $D - N$ dimensões, ou seja

$$P V_D \rightarrow V_{D-N}, \quad (3.40)$$

seus traços são iguais a dimensão do subespaço projetado

$$\text{Tr } P = D - N. \quad (3.41)$$

Sobre vetores do espaço-tempo temos os projetores $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$, onde

$$\theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \omega^{\mu\nu} \quad (3.42)$$

e

$$\omega^{\mu\nu} = \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}. \quad (3.43)$$

É fácil notar que

$$\omega^{\mu\nu} \omega_{\nu\alpha} = \omega^\mu{}_\alpha \quad (3.44)$$

e que

$$\theta^{\mu\nu} \theta_{\nu\alpha} = \theta^\mu{}_\alpha, \quad (3.45)$$

$\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$ são ortogonais entre si

$$\theta^{\mu\nu} \omega_{\nu\alpha} = 0. \quad (3.46)$$

Seus traços são

$$\eta^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = \omega^\mu{}_\mu = 1, \quad (3.47)$$

$$\eta^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} = \theta^\mu{}_\mu = D - 1. \quad (3.48)$$

A partir dos projetores $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$ podemos construir os operadores tensoriais $(P_{ss}^{(2)})^{\mu\nu\alpha\beta}$, $(P_{ss}^{(1)})^{\mu\nu\alpha\beta}$, $(P_{ss}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta}$, $(P_{ww}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta}$, $(P_{sw}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta}$ e $(P_{ws}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta}$:

$$(P_{ss}^{(2)})^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (\theta^{\mu\alpha} \theta^{\nu\beta} + \theta^{\mu\beta} \theta^{\nu\alpha}) - \frac{\theta^{\mu\nu} \theta^{\alpha\beta}}{D-1} \quad (3.49)$$

$$(P_{ss}^{(1)})^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (\theta^{\mu\alpha} \omega^{\nu\beta} + \theta^{\mu\beta} \omega^{\nu\alpha} + \theta^{\nu\alpha} \omega^{\mu\beta} + \theta^{\nu\beta} \omega^{\mu\alpha}) \quad (3.50)$$

$$(P_{ss}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{\theta^{\mu\nu} \theta^{\alpha\beta}}{D-1} \quad (3.51)$$

$$(P_{ww}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta} \quad (3.52)$$

$$(P_{sw}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{\theta^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}}{\sqrt{D-1}} \quad (3.53)$$

$$(P_{ws}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{\omega^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta}}{\sqrt{D-1}} \quad (3.54)$$

Esses operadores são os operadores de Barnes-Rivers [4] [25]. Eles satisfazem a seguinte relação de completudeza

$$(P_{ss}^{(2)} + P_{ss}^{(1)} + P_{ss}^{(0)} + P_{ww}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}) \quad (3.55)$$

e satisfazem a álgebra

$$P_{ij}^{(r)} P_{kl}^{(a)} = \delta^{rq}\delta_{jk} P_{il}^{(r)}, \quad (3.56)$$

onde os índices i, j, k, l indicam s ou w .

Da relação (3.56), podemos concluir que

$$P_{ss}^{(r)\mu\nu\alpha\beta} P_{ss}^{(r)\lambda\sigma} = P_{ss}^{(r)\mu\nu\lambda\sigma}, \quad (3.57)$$

onde $r = 0, 1, 2$,

$$P_{ww}^{(0)\mu\nu\alpha\beta} P_{ww}^{(0)\lambda\sigma} = P_{ww}^{(0)\mu\nu\lambda\sigma}, \quad (3.58)$$

e ainda

$$P_{sw}^{(0)\mu\nu\alpha\beta} P_{sw}^{(0)\lambda\sigma} = P_{ws}^{(0)\mu\nu\alpha\beta} P_{ws}^{(0)\lambda\sigma} = 0, \quad (3.59)$$

ou seja, $(P_{sw}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta}$ e $(P_{ws}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta}$ não são operadores de projeção (são chamados de operadores de transição), pois não atendem aos requisitos da definição (3.39). Ver [2] para mais detalhes sobre as diferenças entre os operadores de projeção e transição. Obtemos também que os traços são

$$P_{ss}^{(2)\mu\nu}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(D^2 - D) - 1 \quad (3.60)$$

$$P_{ss}^{(1)\mu\nu}{}_{\mu\nu} = D - 1 \quad (3.61)$$

$$P_{ss}^{(0)\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 1 \quad (3.62)$$

$$P_{ww}^{(0)\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 1 \quad (3.63)$$

O operador $P_{jj}^{(s)}$ representa um operador de spin- s , eles recebem esse nome porque se igualarmos os traços com o número de helicidades de uma partícula massiva de spin- s , $2s + 1$, em $D = 4$ dimensões, obtemos o valor de s correspondente, ou seja

$$\begin{aligned} P_{ss}^{(2)\mu\nu}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(16 - 4) - 1 = 5 = 2s + 1 & \rightarrow & s = 2 \\ P_{ss}^{(1)\mu\nu}{}_{\mu\nu} &= 4 - 1 = 2s + 1 & \rightarrow & s = 1 \\ P_{ss}^{(0)\mu\nu}{}_{\mu\nu} &= 1 = 2s + 1 & \rightarrow & s = 0 \\ P_{ww}^{(0)\mu\nu}{}_{\mu\nu} &= 1 = 2s + 1 & \rightarrow & s = 0 \end{aligned}$$

Como a densidade de hamiltoniana parcialmente reduzida (3.38) é escrita somente em termos de tensores com índices espaciais, devemos especificar todas essas propriedades para o espaço euclidiano, ou seja, índices gregos são convertidos em índices latinos ($\mu \rightarrow i$) e passamos de D dimensões espaço-temporais para $D - 1$ dimensões espaciais, ou seja

$$\omega_{ij} = \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \quad , \quad \theta_{ij} = \delta_{ij} - \omega_{ij} \quad (3.64)$$

e

$$\left(P_{ss}^{(2)}\right)^{ij,kl} = \frac{1}{2}(\theta^{ik}\theta^{jl} + \theta^{il}\theta^{jk}) - \frac{\theta^{ij}\theta^{kl}}{D-2} \quad , \quad (3.65)$$

$$\left(P_{ss}^{(1)}\right)^{ij,kl} = \frac{1}{2}(\theta^{ik}\omega^{jl} + \theta^{il}\omega^{jk} + \theta^{jk}\omega^{il} + \theta^{jl}\omega^{ik}) \quad , \quad (3.66)$$

$$\left(P_{ss}^{(0)}\right)^{ij,kl} = \frac{\theta^{ij}\theta^{kl}}{D-2} \quad , \quad \left(P_{ww}^{(0)}\right)^{ij,kl} = \omega^{ij}\omega^{kl} \quad , \quad (3.67)$$

$$\left(P_{sw}^{(0)}\right)^{ij,kl} = \frac{\theta^{ij}\omega^{kl}}{\sqrt{D-2}} \quad , \quad \left(P_{ws}^{(0)}\right)^{ij,kl} = \frac{\omega^{ij}\theta^{kl}}{\sqrt{D-2}} \quad . \quad (3.68)$$

Usando esses operadores e suas propriedades, podemos mostrar de forma sistemática que a hamiltoniana reduzida é positiva, como veremos a seguir.

Hamiltoniana reduzida em termos dos operadores de Barnes-Rivers

Para reescrever (3.38) em termos dos operadores de Barnes-Rivers usaremos o seguinte algoritmo: seja f_{ij} um campo tensorial simétrico e \mathcal{H}_f uma densidade de hamiltoniana

genérica escrita em função do campo f_{ij} , dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_f = & -\frac{s_1}{2}\partial_i f_{jk}\partial_i f_{jk} - \frac{s_2}{2}\partial_i \bar{f}\partial_i \bar{f} - s_3 \partial_i \bar{f}\partial_j f_{ij} + \\ & -s_4 \partial_i f_{ij}\partial_k f_{kj} + \frac{s_5}{2}f_{ij}f_{ij} + \frac{s_6}{2}\bar{f}\bar{f}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

então é possível mostrar que

$$\mathcal{H}_f = \frac{1}{2}f_{ij}\mathcal{O}^{ij,kl}f_{kl}, \quad (3.70)$$

onde, suprimindo os índices $ijkl$,

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = & \left[s_1 \nabla^2 + s_5 \right] P_{ss}^{(2)} + \left[(s_1 + s_4) \nabla^2 + s_5 \right] P_{ss}^{(1)} + \\ & + \left[(s_1 + (D-2)s_2) \partial_q^2 + s_5 + (D-2)s_6 \right] P_{ss}^{(0)} + \\ & + \left[(s_1 + s_2 + 2s_3 + s_4) \nabla^2 + s_5 + s_6 \right] P_{ww}^{(0)} + \\ & + \sqrt{D-2} \left[(s_2 + s_3) \nabla^2 + s_6 \right] (P_{sw}^{(0)} + P_{ws}^{(0)}). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Usando (3.69), (3.70) e (3.71) para Fierz-Pauli, podemos escrever a densidade de hamiltoniana parcialmente reduzida (3.38) como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{FP}^{pr} = & \pi^{ij} \left[P_{ss}^{(2)} + \frac{(m^2 - \nabla^2)}{m^2} P_{ss}^{(1)} + \left(\frac{(D-3)}{(D-2)} - \frac{2\nabla^2}{m^2} \right) P_{ww}^{(0)} + \right. \\ & - \left. \frac{(P_{sw}^{(0)} + P_{ws}^{(0)})}{\sqrt{D-2}} \right]^{ij,kl} \pi^{kl} + h_{ij} \left[\frac{(m^2 - \nabla^2)}{4} P_{ss}^{(2)} + \frac{m^2}{4} P_{ss}^{(1)} + \right. \\ & + \frac{(D-1)}{4} (m^2 - \nabla^2) P_{ss}^{(0)} + \frac{m^2}{2} P_{ww}^{(0)} + \\ & \left. + \frac{\sqrt{D-2}}{4} (m^2 - \nabla^2) (P_{sw}^{(0)} + P_{ws}^{(0)}) \right]^{ij,kl} h_{kl}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Usando os vínculos (3.21) e (3.22), obtemos as relações

$$\theta_{ij}\pi^{ij} = - \left[\frac{(D-2)}{m^2} \nabla^2 + 1 \right] \omega_{ij}\pi^{ij}. \quad (3.73)$$

Já o vínculo (3.20) nos permite obter

$$\theta^{ij}h_{ij} = \frac{m^2}{(\nabla^2 - m^2)} \omega^{ij}h_{ij}. \quad (3.74)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\pi^{ij}(P_{sw}^{(0)} + P_{ws}^{(0)})^{ij,kl}\pi^{kl} &= -\frac{2[(D-2)\nabla^2 + m^2]}{m^2\sqrt{D-2}}\pi^{ij}(P_{ww}^{(0)})^{ij,kl}\pi^{kl} \\ h_{ij}(P_{sw}^{(0)} + P_{ws}^{(0)})^{ij,kl}h_{kl} &= \frac{2m^2}{\sqrt{D-2}(\nabla^2 - m^2)}h_{ij}(P_{ww}^{(0)})^{ij,kl}h_{kl}.\end{aligned}\tag{3.75}$$

Temos, então, a densidade de hamiltoniana reduzida escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{FP}^r &= \pi^{ij}\left[P_{ss}^{(2)} + \frac{(m^2 - \nabla^2)}{m^2}P_{ss}^{(1)} + \frac{(D-1)}{(D-2)}P_{ww}^{(0)}\right]^{ij,kl}\pi^{kl} + \\ &+ h_{ij}\left[\frac{(m^2 - \nabla^2)}{4}P_{ss}^{(2)} + \frac{m^2}{4}P_{ss}^{(1)} + \frac{(D-1)}{4}(m^2 - \nabla^2)P_{ss}^{(0)}\right]^{ij,kl}h_{kl}.\end{aligned}\tag{3.76}$$

Como os autovalores do laplaciano são negativos (transformada de Fourier), como em

$$\nabla^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = -\vec{k}\cdot\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}},\tag{3.77}$$

e como sob a integral $\int d^3x$ os projetores $P_{JJ}^{(s)}$ são hermitianos e são idempotentes, temos simbolicamente

$$hPh = hP.Ph = (Ph).(Ph) = (Ph)^2 \geq 0,\tag{3.78}$$

onde P representa o projetor e h as componente do campo. O operador $\omega_{ij} = \partial_i\partial_j/\nabla^2$ serve de exemplo simples, sob integração no espaço,

$$A^i\omega_{ij}A^j = A^i\omega_{ik}\omega^k{}_jA^j = (\omega_{ki}A^i)(\omega^k{}_jA^j) = (\omega_{ki}A^i)^2 \geq 0.\tag{3.79}$$

Temos, então, que as duas partes da densidade de hamiltoniana, a quadrática em π_{ij} e a quadrática em e_{ij} , são separadamente positivas, assim como para cada setor de spin $s = 0, 1, 2$. Portanto

$$\mathcal{H}_{FP}^r \geq 0.\tag{3.80}$$

Capítulo 4

Modelo não-Fierz-Pauli.

4.1 Introdução

Tem havido um aumento no interesse por modelos de gravitação massiva no últimos tempos, principalmente devido a alguns modelos livres de fantasmas que surgiram na literatura. Conseqüentemente isso aumenta o interesse em modelos de spin-2 massivos, embora não se possa garantir que todos eles sejam linearizações de gravitações massivas. O conjunto de modelos de spin-2 a ser abordado a seguir é o não-Fierz-Pauli em D dimensões. Ele pode ser obtido a partir de uma lagrangiana geral de segunda ordem em derivadas para um campo tensorial arbitrário $e_{\mu\nu}$, a princípio sem simetrias nos índices e com dez coeficientes arbitrários [7].

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e_{\mu\nu}) = & a_1 \partial^\mu e_{\mu\alpha} \partial_\nu e^{\nu\alpha} + a_2 \partial^\mu e_{\mu\alpha} \partial_\nu e^{\alpha\nu} + a_3 \partial^\mu e_{\alpha\mu} \partial_\nu e^{\alpha\nu} + \\ & + a_4 \partial^\mu e \partial_\mu e + a_5 \partial^\mu e \partial^\nu e_{\mu\nu} + a_6 \partial_\mu e_{\nu\alpha} \partial^\mu e^{\nu\alpha} + \\ & + a_7 \partial_\mu e_{\nu\alpha} \partial^\mu e^{\alpha\nu} + m^2 (a_8 e^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + a_9 e^{\mu\nu} e_{\nu\mu} + c e^2).\end{aligned}\quad (4.1)$$

Os coeficientes arbitrários foram escolhidos tais que, no propagador, só exista um polo massivo físico no setor de spin-2. Essa lagrangiana geral permite classificar os modelos em três conjuntos ou famílias distintas:

- Família Fierz-Pauli: $a_8 - a_9$ é arbitrário e todos o demais coeficientes são determinados de acordo com (4.3).

A escolha $a_8 - a_9 = 0$ leva ao modelo de Fierz-Pauli.

- Família $\mathcal{L}(a_1)$: a_1 é arbitrário e todos o demais coeficientes são determinados, como pode-se ver em (4.2).

Sua versão de massa nula decreve uma partícula de spin-2 sem massa, e ainda uma

partícula escalar.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a_1) = & -\frac{1}{2}\partial^\mu e^{(\alpha\beta)}\partial_\mu e_{(\alpha\beta)} + \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\partial^\mu e [\partial_\mu e - 2\partial^\alpha e_{(\alpha\mu)}] + \\ & + \partial^\alpha e_{(\alpha\mu)}\partial_\beta e^{(\beta\mu)} + \left(a_1 - \frac{1}{4}\right)\partial^\alpha e_{\alpha\mu}\partial_\beta e^{\beta\mu} - \frac{m^2}{2}(e^{\mu\nu}e_{\nu\mu} - e^2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

- Família não-Fierz-Pauli $\mathcal{L}_{nFP}(c)$: c é arbitrário e todos os demais coeficientes são determinados de acordo com (4.12).

Sua versão de massa nula decreve uma partícula de spin-2 sem massa, este é o modelo central a ser tratado nesta dissertação.

Para a primeira família, com $a_8 - a_9 = 0$, o modelo de Fierz-Pauli é escrito em termos de um campo tensorial generalizado $e_{\mu\nu}$. A densidade de lagrangiana de Fierz-Pauli fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP}(e_{\mu\nu}) = & -\frac{1}{4}\partial_\mu e_{(\alpha\beta)}\partial^\mu e^{(\alpha\beta)} + \frac{1}{4}\partial_\mu e (\partial^\mu e - 2\partial_\nu e^{(\mu\nu)}) + \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu e^{(\mu\nu)})^2 - \frac{m^2}{4}(e^{\mu\nu}e_{\mu\nu} - e^2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Assim como nos exemplos, usamos as seguintes notações para os traços:

$$e \equiv e^\mu{}_\mu = \eta_{\mu\nu}e^{\mu\nu} \quad (4.4)$$

e

$$\bar{e} \equiv e^i{}_i = \eta_{ij}e^{ij}. \quad (4.5)$$

Definiremos as partes simétrica e antissimétrica do campo $e_{\mu\nu}$ como já fizemos anteriormente, isto é:

$$e_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(e_{\mu\nu} + e_{\nu\mu}), \quad (4.6)$$

$$e_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(e_{\mu\nu} - e_{\nu\mu}). \quad (4.7)$$

Analogamente ao que foi feito no capítulo 3, podemos escrever as equações de movimento de (4.3) e obter as condições de Fierz-Pauli:

$$e = 0 \quad (4.8)$$

$$\partial^\mu e_{\mu\nu} = 0, \quad (4.9)$$

$$e_{[\mu\nu]} = 0, \quad (4.10)$$

$$(\square - m^2) e_{(\mu\nu)} = 0 \quad (4.11)$$

onde temos agora a condição extra de que as componentes antissimétricas $e_{[\mu\nu]}$ são nulas.

A família não-Fierz-Pauli, que trataremos nas próximas seções deste capítulo, também possui um parâmetro arbitrário na lagrangiana. A sua densidade de lagrangiana em $D \geq 3$ dimensões, de acordo com [8], é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{nFP} = & -\frac{1}{8} \left[(\partial_\mu e_{\alpha\beta})^2 + (\partial_\mu e_{\beta\alpha})^2 + 2\partial_\mu e_{\alpha\beta} \partial^\mu e^{\beta\alpha} \right] + \\ & + \frac{\partial_\mu e}{2(D-1)} \left[\partial^\mu e - \partial_\nu (e^{\nu\mu} + e^{\mu\nu}) \right] + \\ & + \frac{1}{4} \left[(\partial_\mu e^{\mu\nu})^2 + (\partial_\mu e^{\nu\mu})^2 + 2\partial_\mu e^{\mu\nu} \partial^\alpha e_{\nu\alpha} \right] + \\ & - \frac{D-2}{2(D-1)} (\partial_\mu e^{\mu\nu})^2 - \frac{m^2}{2} \left[e^{\mu\nu} e_{\nu\mu} + ce \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde a constante c é arbitrária. Das equações de movimento de (4.12) também podemos obter (4.8) a (4.11) para qualquer valor de c . A família de modelos (4.12) recebe o nome de “não-Fierz-Pauli” porque não é necessário escolher o ajuste de Fierz-Pauli $c = -1$ no termo de massa.

4.2 Análise de vínculos

Separando os termos temporais e espaciais de (4.12), integrando por partes onde for adequado e definindo $\dot{e} = \partial_0 e$, a densidade de lagrangiana pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{nFP} = & -\frac{D-2}{2(D-1)} \dot{e}_{0i}^2 + \frac{1}{4} \dot{e}_{ij}^2 - \frac{1}{4} (\partial_k e_{ij})^2 + \frac{1}{4} \dot{e}_{ij} \dot{e}^{ji} - \frac{1}{4} \partial_k e_{ij} \partial^k e^{ji} + \\ & - \frac{\dot{\bar{e}}^2}{2(D-1)} + \frac{(\partial_k e_{00})^2}{2(D-1)} - \frac{\partial_k e_{00} \partial^k \bar{e}}{D-1} + \frac{(\partial_k \bar{e})^2}{2(D-1)} + \frac{\dot{\bar{e}} \partial^k e_{k0}}{D-1} + \\ & + \frac{\partial_k e_{00} \partial_j e^{jk}}{D-1} + \frac{\dot{\bar{e}} \partial^k e_{0k}}{D-1} - \frac{\partial_k \bar{e} \partial_j e^{jk}}{D-1} + \frac{1}{4} (\partial_i e_{0j})^2 - \frac{1}{4} (\partial^l e_{0l})^2 + \\ & + \frac{D-3}{4(D-1)} (\partial^l e_{l0})^2 - \frac{D-3}{4(D-1)} (\partial^l e_{li})^2 - \frac{1}{2} \dot{e}^{il} \partial_l e_{i0} + \frac{1}{4} (\partial_i e_{j0})^2 + \\ & + \frac{1}{4} (\partial^l e_{il})^2 - \frac{1}{2} \dot{e}_{0i} \partial_k e^{ik} - \frac{1}{2} \dot{e}^{ki} \partial_k e_{i0} - \frac{1}{2} \partial^k e_{k0} \partial^l e_{0l} + \frac{1}{2} \partial^k e_{ki} \partial^l e_{il} \\ & + \frac{D-2}{D-1} \partial_k e_{00} \dot{e}_0^k - \frac{1}{2} (\partial_i e_{00})^2 + \frac{1}{2} \partial_i e_{0j} \partial^i e^j_0 + \frac{D-3}{2(D-1)} \dot{e}_{0i} \partial_l e^{li} + \\ & - \frac{m^2}{2} \left[e_{00}^2 - 2e_{0i} e^i_0 + e_{ij} e^{ji} + c(e_{00}^2 - 2e_{00} \bar{e} + \bar{e}^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Podemos agora obter os momentos canônicos. As escolhas de integração por partes

que fizemos para a densidade de lagrangiana foi para que π^{00} e π^{i0} fossem nulos, ou seja

$$\begin{aligned}\pi^{00} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{nFP}}{\partial \dot{e}_{00}} = 0 \\ \pi^{i0} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{nFP}}{\partial \dot{e}_{i0}} = 0.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Como o campo $e_{\mu\nu}$ é não simétrico, π^{i0} nulos não implica que os π^{0i} também o sejam. Para essas componentes obtemos

$$\begin{aligned}\pi^{0i} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{nFP}}{\partial \dot{e}_{0i}} \\ &= -\frac{D-2}{D-1}\dot{e}_{0i} + \frac{D-2}{D-1}\partial_i e_{00} + \frac{D-3}{2(D-1)}\partial^l e_{li} - \frac{1}{2}\partial^k e_{ik},\end{aligned}\quad (4.15)$$

de onde podemos obter as velocidades

$$\dot{e}_{0i} = -\frac{D-1}{D-2}\pi^{0i} + \partial_i e_{00} + \frac{D-3}{2(D-2)}\partial^l e_{li} - \frac{D-1}{2(D-2)}\partial^k e_{ik}.\quad (4.16)$$

As componentes puramente espaciais do momento canônico são

$$\begin{aligned}\pi^{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{nFP}}{\partial \dot{e}_{ij}} \\ &= \frac{1}{2}\dot{e}_{ij} + \frac{1}{2}\dot{e}_{ji} - \frac{\dot{e}}{D-1}\eta_{ij} + \frac{\partial^k e_{0k}}{D-1}\eta_{ij} + \\ &\quad + \frac{\partial^k e_{k0}}{D-1}\eta_{ij} - \frac{1}{2}\partial_j e_{i0} - \frac{1}{2}\partial_i e_{j0},\end{aligned}\quad (4.17)$$

que, como se pode notar, é simétrico, por isso denotaremos de forma simplificada

$$\pi^{ij} = \pi^{(ij)}.\quad (4.18)$$

As componentes antissimétricas, portanto, são todas nulas, ou seja,

$$\pi^{[ij]} \equiv \frac{1}{2}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^{ji} = 0.\quad (4.19)$$

Podemos obter também, de (4.17), o traço do momento canônico, isto é,

$$\bar{\pi} = \partial^k e_{0k},\quad (4.20)$$

portanto a velocidade simétrica é

$$\frac{1}{2}(\dot{e}_{ij} + \dot{e}_{ji}) = \pi^{ij} + \frac{\dot{e}}{D-1}\eta_{ij} - \frac{\partial^k e_{k0}}{D-1}\eta_{ij} - \frac{\partial^k e_{0k}}{D-1}\eta_{ij} + \frac{1}{2}\partial_j e_{i0} + \frac{1}{2}\partial_i e_{j0}.\quad (4.21)$$

Como uma matriz antissimétrica $N \times N$ tem $N(N-1)/2$ entradas independentes, podemos

identificar, $(D + 1) + (D - 1)(D - 2)/2 = (D^2 - D + 4)/2$ vínculos primários:

$$\varphi^{00} \equiv \pi^{00} \approx 0, \quad (4.22)$$

$$\varphi^{i0} \equiv \pi^{i0} \approx 0, \quad (4.23)$$

$$\varphi^{ij} \equiv \pi^{[ij]} \approx 0, \quad (4.24)$$

e

$$\varphi \equiv \bar{\pi} - \partial^i e_{0i} \approx 0. \quad (4.25)$$

Desse modo, a hamiltoniana primária é

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_p^{nFP} &= \pi^{\mu\nu} \dot{e}_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{nFP} + \lambda_{00} \varphi^{00} + \lambda_{i0} \varphi^{i0} + \lambda_{ij} \varphi^{[ij]} + \lambda \varphi \\ &= -\frac{D-1}{2(D-2)} \pi_{0i}^2 + \frac{1}{2} \pi_{ij}^2 - \pi_{0i} \partial^i e_{00} - \frac{D-3}{2(D-2)} \pi_{0i} \partial^l e_{li} + \\ &\quad + \frac{D-1}{2(D-2)} \pi_{0i} \partial^l e_{il} + \pi_{ij} \partial^i e^j{}_0 + \frac{\partial_k e_{00} \partial^k \bar{e}}{D-1} + \frac{1}{2} \partial^i e_{00} \partial^k e_{ik} + \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial^i e_{00} \partial^k e_{ki} + \frac{D-3}{2(D-1)} \partial^i e_{i0} \partial^k e_{0k} + \frac{D-3}{4(D-1)} (\partial^i e_{0i})^2 + \\ &\quad - \frac{D-1}{4(D-2)} \partial_l e_{li} \partial^k e_{ik} - \frac{3D-5}{8(D-2)} (\partial^l e_{il})^2 + \frac{1}{4} (\partial_k e_{ij})^2 + \\ &\quad + \frac{\partial_k \bar{e} \partial_i e^{ik}}{D-1} + \frac{2(D-3)(D-2) - (D-3)^2}{8(D-1)(D-2)} (\partial^l e_{li})^2 + \\ &\quad - \frac{1}{4} (\partial_i e_{0j})^2 - \frac{1}{2} \partial_i e_{0j} \partial^i e^j{}_0 - \frac{(\partial_k \bar{e})^2}{2(D-1)} + \frac{1}{4} \partial_k e_{ij} \partial^k e^{ji} + \\ &\quad + \frac{m^2}{2} \left[e_{00}^2 - 2e_{0i} e^i{}_0 + e_{ij} e^{ji} + c(e_{00}^2 - 2e_{00} \bar{e} + \bar{e}^2) \right] + \\ &\quad + \lambda_{00} \pi^{00} + \lambda_{i0} \pi^{i0} + \lambda_{ij} \frac{1}{2} (\pi^{ij} - \pi^{ji}) + \lambda (\bar{\pi} - \partial^i e_{0i}). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Note que, devido a antissimetria de $\pi^{[ij]}$, podemos tomar $\lambda_{ij} = -\lambda_{ji}$ sem perda de generalidade. Com a hamiltoniana primária em mãos, podemos aplicar o método de Dirac para obter os possíveis vínculos secundários e determinar os multiplicadores de Lagrange λ 's.

Primeiro, a preservação no tempo do vínculo $\varphi^{00} \approx 0$ implica num vínculo secundário

rio:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}^{00} &= \int d^{D-1}x \{ \pi^{00}(y), \mathcal{H}_p^{nFP}(x) \} \\
&= \int d^{D-1}x \left[- \frac{\partial \mathcal{H}_p^{nFP}(x)}{\partial e_{00}(y)} \right] \\
&= -\partial^i \pi_{0i} + \frac{\partial_k^2 \bar{e}}{D-1} - m^2 [(1+c)e_{00} - c\bar{e}] \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

A preservação no tempo dos vínculos $\varphi^{k0} \approx 0$ leva também a $D-1$ vínculos secundários

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}^{k0} &= \{ \varphi^{k0}, H_p^{nFP} \} \\
&= \int d^{D-1}x \{ \pi^{k0}(y), \mathcal{H}_p^{nFP}(x) \} \\
&= \int d^{D-1}x \left[- \frac{\partial \mathcal{H}_p^{nFP}(x)}{\partial e_{k0}(y)} \right] \\
&= -\partial^i \pi_{ik} + \frac{1}{2} \partial_i^2 e_{0k} + \frac{D-3}{2(D-1)} \partial^k \partial^l e_{0l} + m^2 e_{0k} \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Para o vínculo $\varphi \approx 0$, temos, analogamente mais um vínculo

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \{ \varphi, H_p^{nFP} \} \\
&= \int d^{D-1}x \left[\{ \bar{\pi}(y), \mathcal{H}_p^{nFP}(x) \} - \partial_y^i \{ e_{0i}(y), \mathcal{H}_p^{nFP}(x) \} \right] \\
&= \int d^{D-1}x \left[- \frac{\partial \mathcal{H}_p^{nFP}(x)}{\partial e_{k0}(y)} - \partial_y^i \frac{\partial \mathcal{H}_p^{nFP}(x)}{\partial \pi^{0i}(y)} \right] \\
&= -\partial^i \pi_{0i} + \frac{\partial_k^2 \bar{e}}{D-1} - m^2 [\bar{e} + c(D-1)(\bar{e} - e_{00})] \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Enfim, para os vínculos $\varphi^{kl} \approx 0$, temos mais $(D-1)(D-2)/2$ vínculos secundários

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}^{kl} &= \{ \varphi^{kl}, H_p^{nFP} \} \\
&= \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{2} \{ \pi^{kl}(y), \mathcal{H}_p^{nFP}(x) \} - \frac{1}{2} \{ \pi^{lk}, \mathcal{H}_p^{nFP}(x) \} \right] \\
&= \int d^{D-1}x \left[- \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}_p^{nFP}(x)}{\partial e_{kl}(y)} + \frac{1}{2} \partial_y^i \frac{\partial \mathcal{H}_p^{nFP}(x)}{\partial \partial e_{lk}(y)} \right] \\
&= \partial_l \left[\frac{\pi_{0k}}{2} - \frac{\partial^i e_{ik}}{4} - \frac{\partial^i e_{ki}}{4} \right] - [l \leftrightarrow k] + m^2 e_{[kl]} \approx 0 \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Como não encontramos os multiplicadores de Lagrange ou identidades nulas, devemos continuar a aplicar o algoritmo nos novos vínculos encontrados.

A preservação no tempo de $\dot{\varphi}^{00} \approx 0$ e $\dot{\varphi} \approx 0$ nos fornecem um sistema de duas

equações para λ e λ_{00} que só pode ser resolvido para $c \neq -1/D$:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}^{00} &= \{\dot{\varphi}^{00}, H_p^{nFP}\} \\ &= \left(\frac{\nabla^2}{D-1} + m^2 c \right) \bar{\pi} - \frac{\nabla^2}{D-1} \partial^i e_{0i} + m^2 (c+1) \partial^i e_{i0} + \\ &\quad + m^2 c (D-1) \lambda - m^2 (1+c) \lambda_{00} \approx 0\end{aligned}\tag{4.31}$$

e

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= \{\dot{\varphi}, H_p^{nFP}\} \\ &= \left[\frac{\nabla^2}{D-1} - m^2 [1 + c(D-1)] \right] \bar{\pi} - \frac{\nabla^2}{D-1} \partial^i e_{0i} + \\ &\quad - m^2 c (D-1) \partial^i e_{i0} - m^2 [1 + c(D-1)] (D-1) \lambda + \\ &\quad + m^2 c (D-1) \lambda_{00} \approx 0\end{aligned}\tag{4.32}$$

Resolvendo esse sistema¹, obtemos λ e λ_{00} :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{m^2 (D-1)^2 (1+cD)} \left[m^2 (cD^2 + D + cD - 1) + \right. \\ &\quad \left. - (1+cD) \nabla^2 \right] \bar{\pi} + (D+1) \nabla^2 \partial^i e_{0i} + m^2 c (D^2 c + \\ &\quad \left. - D^2 + 2cD + 2D - c - 1) \partial^i e_{i0} \right]\end{aligned}\tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{00} &= \frac{1}{m^2 (D-1) (1+cD)} \left[(D+1) \nabla^2 \bar{\pi} - (D+1) \nabla^2 \partial^i e_{0i} + \right. \\ &\quad \left. + m^2 (c+1) (D+1) (cD + c - 1) \partial^i e_{i0} \right].\end{aligned}\tag{4.34}$$

Se $c = -1/D$ não poderemos determinar os multiplicadores de Lagrange λ^{00} e λ de forma independente, de modo que um será escrito em termos do outro e o modelo passa a ter simetria de Weyl (ou seja, é invariante por uma transformação do tipo $\delta e_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \psi$, onde $\psi(x)$ é uma função arbitrária) e λ^{00} ou λ aparece na densidade de hamiltoniana primária multiplicando uma combinação de φ_{00} e φ . De (4.31) e (4.32), temos:

$$\lambda_{00} = -\lambda + G(\pi, \partial^i e_{0i}, \partial^i e_{i0}),\tag{4.35}$$

¹Para esse cálculo especificamente, foi utilizado o software algébrico wxMaxima.

de modo que a densidade de hamiltoniana fica

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_p^{nFP} &= \lambda_{00}\varphi^{00} + \lambda\varphi + \dots \\ &= \lambda(\varphi - \varphi^{00}) + \dots,\end{aligned}\tag{4.36}$$

onde $\varphi - \varphi^{00}$ é um vínculo de primeira classe.

Usando os vínculos $\dot{\varphi}^{00} \approx 0$ e $\dot{\varphi} \approx 0$, obtemos o vínculo

$$\dot{\varphi}^{00} - \dot{\varphi} = m^2(1 + cD)(\bar{e} - e_{00}) \approx 0,\tag{4.37}$$

de modo que fica mais fácil ver a limitação com relação ao valor $c = -1/D$. Para todos os fins, neste trabalho, por simplicidade, consideraremos $c \neq -1/D$, de modo que o modelo não tenha simetrias locais e todos os multiplicadores de Lagrange sejam determinados.

A preservação no tempo dos vínculos $\dot{\varphi}^{kl} \approx 0$ leva a

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}^{kl} &= \{\dot{\varphi}^{kl}, H_p^{nFP}\} \\ &= \frac{\partial_k \partial^i}{4} \pi_{li} - \frac{\partial_l \partial^i}{4} \pi_{ki} + \frac{\partial_l \nabla^2}{4} e_{0k} - \frac{\partial_k \nabla^2}{4} e_{0l} + \\ &\quad - \frac{m^2}{4} (\partial_l e_{k0} - \partial_k e_{l0}) + m^2 \lambda_{kl} \approx 0,\end{aligned}\tag{4.38}$$

que nos permite obter λ_{kl}

$$\lambda_{kl} = \frac{\partial_l}{4m^2} \left[\partial^i \pi_{ki} - \nabla^2 e_{0k} + m^2 e_{k0} \right] - [l \leftrightarrow k].\tag{4.39}$$

A preservação no tempo de $\dot{\varphi}^{k0} \approx 0$ fornece vínculos terciários

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}^{k0} &= \{\dot{\varphi}^{k0}, H_p^{nFP}\} \\ &= \frac{1}{2} \partial^k \partial^i \pi_{0i} - \frac{1}{2} \nabla^2 \pi_{0k} - \frac{\partial^l}{2} \left(\partial^k \partial^i e_{li} + \frac{1}{2} \nabla^2 e_{lk} + \frac{1}{2} \nabla^2 e_{kl} \right) + \\ &\quad + m^2 \left(\frac{D-1}{D-2} \pi_{0k} - \frac{\partial^i e_{ik}}{2(D-2)} + (c+1) \partial^k e_{00} - c \partial^k \bar{e} - \frac{2D-3}{2(D-2)} \partial^i e_{ki} \right) \approx 0 \\ &\quad \cdot\end{aligned}\tag{4.40}$$

A preservação no tempo dos vínculos terciários (4.40) nos fornece vínculos quater-

nários

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}^{k0} &= \{\dot{\varphi}^{k0}, H_p^{nFP}\} \\
&= \nabla^2 \left[-c \partial^k \pi_{00} - \frac{c-1}{D-1} \partial^k \bar{\pi} + \frac{c-1}{D-1} \partial^k \partial^j e_{0j} \right] + \\
&\quad + m^2 \left[\left(c + \frac{1}{2} \right) \partial^k \bar{\pi} - \frac{D-1}{D-2} \partial^j \pi_{kj} + \frac{D-1}{2(D-2)} \nabla^2 e_{0k} + \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{D-1}{2(D-2)} + c \right) \partial^i \partial^k e_{0i} - m^2 \frac{D-1}{D-2} e_{0k} \right] \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Usando os vínculos (4.22) e (4.25) em (4.41), podemos reescrever o vínculo $\dot{\varphi}^{k0} \approx 0$ como

$$\dot{\varphi}^{k0} = m^4 \frac{D-1}{D-2} (e_{0k} - e_{k0}) \approx 0. \tag{4.42}$$

Enfim, a preservação no tempo dos vínculos quaternários (4.42) nos permite obter os multiplicadores de Lagrange λ_{k0}

$$\lambda_{k0} = \frac{D-1}{2(D-2)} (\partial^l e_{kl} - 2\pi_{0k}) - \frac{D-3}{2(D-2)} \partial^l e_{lk} - \partial^k e_{00}. \tag{4.43}$$

Com os vínculos podemos eliminar o seguinte número de graus de liberdade:

$$\begin{aligned}
\varphi^{00} &\rightarrow 1 \\
\varphi^{i0} &\rightarrow D-1 \\
\varphi^{ij} &\rightarrow (D-1)(D-2)/2 \\
\varphi &\rightarrow 1 \\
\dot{\varphi}^{00} &\rightarrow 1 \\
\dot{\varphi}^{i0} &\rightarrow D-1 \\
\dot{\varphi}^{ij} &\rightarrow (D-1)(D-2)/2 \\
\dot{\varphi} &\rightarrow 1 \\
\ddot{\varphi}^{i0} &\rightarrow D-1 \\
\ddot{\varphi}^{i0} &\rightarrow D-1
\end{aligned}$$

ou seja, de $2D^2$ ($e_{\mu\nu}, \pi^{\mu\nu}$) graus de liberdade iniciais, podemos eliminar $D^2 + D + 2$ graus de liberdade, ou seja, em $D = 4$ temos $D^2 - D - 2 = 10$ graus de liberdade hamiltonianos, e, portanto, 5 graus de liberdade lagrangianos, que é o esperado para partículas de spin-2 massivas em quatro dimensões.

4.3 Hamiltoniana reduzida e análise de positividade

Supondo $c \neq -1/D$ e usando $\dot{\varphi}^{00} - \dot{\varphi} \approx 0$, obtemos a relação

$$\bar{e} - e_{00} = e \approx 0, \quad (4.44)$$

que é uma das condições de Fierz-Pauli. Utilizando os vínculos (4.30), (4.40) e (4.44), obtemos o vínculo

$$m^2 \left[\frac{D-1}{D-2} \pi_{0k} - \frac{D-1}{2(D-2)} \partial^j (e_{kj} + e_{jk}) + \partial_k \bar{e} \right] \approx 0. \quad (4.45)$$

Aplicando estes vínculos (4.45) nos vínculos (4.30), obtemos que o campo tensorial e_{ij} é simétrico

$$e_{[ij]} = 0. \quad (4.46)$$

De (4.42) e (4.46) temos que o campo tensorial $e_{\mu\nu}$ é simétrico, ou seja

$$e_{[\mu\nu]} = 0. \quad (4.47)$$

Portanto, a condição de Fierz-Pauli (4.10) é satisfeita.

Usando os vínculos

$$\begin{aligned} \partial^i e_{0i} &= \bar{\pi} \\ e_{00} &= \bar{e} \\ \pi_{k0} &= 0 \\ \pi_{0k} &= \frac{1}{2} \partial^j (e_{kj} + e_{jk}) - \frac{D-2}{D-1} \partial_k \bar{e} \\ e_{0k} &= \frac{2\partial^j \pi_{kj}}{\nabla^2 - 2m^2} + \frac{D-3}{D-1} \frac{2\partial_k \bar{\pi}}{\nabla^2 - 2m^2} \end{aligned} \quad (4.48)$$

na densidade de hamiltoniana, obtemos uma hamiltoniana parcialmente reduzida com os momentos e coordenadas desacoplados e sem tensores com índices temporais, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{pr}^{nFP} &= \mathcal{H}_\pi + \mathcal{H}_e \\ &= \frac{1}{2} \pi_{ij}^2 + \frac{D-2}{6(D-1)} \bar{\pi}^2 + \frac{D-3}{D-2} \frac{\partial^l \pi_{jl} \nabla^2 \partial^j \bar{\pi}}{(\nabla^2 - 2m^2)^2} + \\ &\quad - \frac{(D-3)^2}{4(D-1)^2} \frac{(\partial_i \partial_j \bar{\pi})^2}{(\nabla^2 - 2m^2)^2} - \frac{(\partial_i \partial_l \pi_{kl})^2}{(\nabla^2 - 2m^2)^2} + \\ &\quad - \frac{1}{2} (\partial_i \bar{e})^2 + \frac{1}{2} (\partial_i e_{kl})^2 - (\partial_i e_{il})^2 + \partial^i \bar{e} \partial^j e_{ij} + \\ &\quad + \frac{m^2}{2} (e_{ij}^2 - \bar{e}^2). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Novamente temos termos de sinais opostos em (4.49). Como tanto o campo e_{ij} quanto os momentos π_{ij} são simétricos, vide (4.18), podemos usar os operadores de Barnes-Rivers simétricos. Em termos dos operadores e de acordo com (3.69), (3.70) e (3.71), a densidade de hamiltoniana (4.49) é reescrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{pr}^{nFP} &= \mathcal{H}_\pi + \mathcal{H}_e \\
&= \frac{1}{4} \pi_{ij} \left\{ 2P_{ss}^{(2)} + \left[\frac{2\nabla^2}{(\nabla^2 - 2m^2)^2} + 2 \right] P_{ss}^{(1)} + \right. \\
&\quad + \left[-\frac{(D-2)(D-3)^2 \nabla^4}{(D-1)^2 (\nabla^2 - 2m^2)^2} + 2 + \frac{(D-2)(D-3)}{(D-1)} \right] P_{ss}^{(0)} \\
&\quad + \left[-\frac{(D-3)^2 \nabla^4}{(D-1)^2 (\nabla^2 - 2m^2)^2} - \frac{4(D-3)}{D-1} \frac{\nabla^4}{(\nabla^2 - 2m^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{4\nabla^4}{(\nabla^2 - 2m^2)^2} + 2 + \frac{D-3}{D-1} \right] P_{ww}^{(0)} + \sqrt{D-2} \left[-\frac{(D-3)^2 \nabla^4}{(D-1)^2 (\nabla^2 - 2m^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(D-3)}{D-1} \frac{\nabla^4}{(\nabla^2 - 2m^2)^2} + \frac{D-3}{D-1} \right] (P_{sw}^{(0)} + P_{ws}^{(0)}) \left. \right\}^{ijkl} \pi_{kl} + \\
&\quad + e_{ij} \left\{ -\frac{1}{2} (\nabla^2 - m^2) P_{ss}^{(2)} + \frac{m^2}{2} P_{ss}^{(1)} - \frac{D-3}{2} (\nabla^2 - m^2) P_{ss}^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{m^2}{2} \sqrt{D-2} (P_{sw}^{(0)} + P_{ws}^{(0)}) \right\}^{ijkl} e_{kl}. \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Usando os vínculos (4.28) e (4.27), podemos reescrever

$$\begin{aligned}
\pi_{ij} (P_{sw}^{(0)} + P_{ws}^{(0)})^{ijkl} \pi_{kl} &= \frac{2[(D-2)\nabla^2 + (D-1)m^2]}{\sqrt{D-2}[\nabla^2 - (D-1)m^2]} \pi_{ij} (P_{ww}^{(0)})^{ijkl} \pi_{kl} \\
\pi_{ij} (P_{ss}^{(0)})^{ij,kl} \pi_{kl} &= \frac{[(D-2)\nabla^2 + (D-1)m^2]^2}{(D-2)[\nabla^2 - (D-1)m^2]^2} \pi_{ij} (P_{ww}^{(0)})^{ijkl} \pi_{kl} \\
e_{(ij)} (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)})^{ij,kl} e_{(kl)} &= 2\sqrt{D-2} \frac{(\nabla^2 - m^2)}{m^2} e_{ij} (P_{ss}^{(0)})^{ij,kl} e_{kl} \tag{4.51}
\end{aligned}$$

o que, por fim, nos permite escrever a densidade de hamiltoniana como ²

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_r^{nFP} &= \mathcal{H}_\pi + \mathcal{H}_e \\
&= \frac{1}{2} \pi_{ij} \left[P_{ss}^{(2)} + \frac{4m^2(m^2 - \nabla^2)}{(\nabla^2 - 2m^2)^2} P_{ss}^{(1)} + \frac{(D-1)^3}{D-2} \frac{m^4 P_{ww}^{(0)}}{[\nabla^2 - (D-1)m^2]^2} \right]^{ijkl} \pi_{kl} + \\
&\quad + e_{ij} \left[-\frac{\nabla^2 - m^2}{2} P_{ss}^{(2)} + \frac{m^2}{2} P_{ss}^{(1)} - \frac{1}{2} (D-1) (\nabla^2 - m^2) P_{ss}^{(0)} \right]^{ijkl} e_{kl}. \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Assim como para Fierz-Pauli (ver final do capítulo 3), do fato dos autovalores do laplaciano serem negativos e pelos operadores de projeção de Barnes-Rivers serem hermi-

²Note que em (4.52) $\pi_{ij} = \pi_{ji}$ e $e_{ij} = e_{ji}$.

tianos e idempotentes, temos que as duas partes da densidade de hamiltoniana \mathcal{H}_π e \mathcal{H}_e , assim como cada um de seus termos com $s = 0, 1, 2$, são independentemente positivos. Provamos, então, que o modelo \mathcal{L}_{nFP} possui o número correto de graus de liberdade para partículas massivas de spin-2 quando $D = 4$ e que a teoria é livre de instabilidade, ou seja

$$\mathcal{H}_r^{nFP} \geq 0. \quad (4.53)$$

Capítulo 5

Conclusão

Como podemos ver, o algoritmo de Dirac-Bergmann é uma poderosa ferramenta de análise, com ele podemos obter todos os vínculos e fazer a contagem dos graus de liberdade de um modelo. Trabalhando a teoria de Maxwell do eletromagnetismo no vácuo e seu correspondente massivo, o modelo de Proca, pudemos mostrar que a hamiltoniana primária é a que fornece as equações de movimento corretas, coincidindo com as equações obtidas via Euler-Lagrange. Mostramos também que ambos possuem densidades de hamiltonianas reduzidas positivas e o número correto de graus de liberdade, ou seja, 2 para Maxwell e 3 ($2s + 1$, com $s = 1$) para Proca.

No capítulo 3, aplicando o algoritmo de Dirac-Bergmann no modelo de Fierz-Pauli obtivemos todos os vínculos do modelo, mostramos que são de segunda classe e que a contagem de graus de liberdade é a esperada para um modelo massivo de spin-2, ou seja, 5 graus de liberdade no formalismo lagrangiano. Além disso, mostramos que o ajuste $a = 1$ é necessário para que essa contagem seja obtida, pois para $a \neq 1$ obtivemos 6 graus de liberdade lagrangianos. Ainda em acordo com os resultados lagrangianos, reencontramos as condições de Fierz-Pauli durante o cálculo dos vínculos. Por fim, usando os projetores de helicidade de Barnes-Rivers, pudemos mostrar que a densidade de hamiltoniana reduzida é positiva.

Os resultados obtidos para Maxwell, Proca e Fierz-Pauli são conhecidos na literatura. Trabalhos mais detalhados podem ser encontrados nas referências, assim como foi indicado ao longo do texto.

Assim como para o modelo de Fierz-Pauli, para o modelo \mathcal{L}_{nFP} encontramos, no capítulo 4, todos os vínculos do modelo (também de segunda classe) e mostramos que a contagem dos graus de liberdade lagrangianos é 5. A simetria do momento $\pi^{\mu\nu} = \pi^{(\mu\nu)}$ foi verificada ao serem obtidos os vínculos primários. Para $c \neq -1/D$, o modelo não apresenta simetrias locais e todos os coeficientes de Lagrange λ^μ puderam ser determinados. Caso esta condição não seja verificada, o modelo adquire simetria de Weyl, não poderíamos encontrar todos os multiplicadores de Lagrange, λ_{00} e λ seriam interdependentes e teríamos um vínculo a menos, porém o número de graus de liberdade se mantém o mesmo, pois

passamos a ter o vínculo $\varphi - \varphi_{00} \approx 0$, que é de primeira classe. Por fim, usando os operadores de Barnes-Rivers, mostramos que a hamiltoniana reduzida é positiva. Talvez haja uma forma de mostrar a positividade da hamiltoniana reduzida sem o uso desses operadores, mas esse foi o modo que encontramos de fazer isto.

Para o modelo \mathcal{L}_{nFP} , definido em (4.12), nossos resultados são originais e fazem parte de um trabalho submetido a publicação, onde é abordado também o modelo $\mathcal{L}(a_1)$ (massivo e não massivo). Nosso trabalho pavimenta o caminho para uma futura análise hamiltoniana de uma versão não linear (gravitação massiva) que porventura venha a ser construída tendo como limite linear o modelo \mathcal{L}_{nFP} ou o $\mathcal{L}(a_1)$.

Bibliografia

- [1] ALVES, I. **Quantização de Dirac e via Integral de Trajetória de um Modelo Pseudoclássico para Partículas de Weyl**. Dissertação de mestrado, Londrina - 1999.
- [2] BAIKOV, P. HAYASHI, M. NELIPA, N. OSTAPCHENKO, S. **Ghost- and Tachyon-free Gauge-Invariant, Poincaré, Affine and Projective Lagrangians**. *General Relativity and Gravitation*, Vol. 24, No. 8 - 1992.
- [3] BARCELOS-NETO, J. DARGAM, T.G. **Constrained Analysis of Topologically Massive Gravity**. *Z. Phys. C67*, 701-706 - 1995. arXiv:hep-th/9408045
- [4] BARNES, K. J. **Lagrangian Theory for the SecondRank Tensor Field**. *J. Math. Phys.* 6, 788 - 1965. [http : //dx.doi.org/10.1063/1.1704335](http://dx.doi.org/10.1063/1.1704335)
- [5] BOULWARE, D. G. DESER, S. **Can Gravitation Have a Finite Range?** *Physical Review D*, 6,12 - December 1972
- [6] CREMINELLI, P. NICOLIS, A. PAPUCCI, M. TRINCHERINI, E. **Ghosts in Massive Gravity**. DOI: 10.1088/1126-6708/2005/09/003. arXiv:hep-th/0505147
- [7] DALMAZI, D. **Massive spin-2 particle from a rank-2 tensor**. 10.1103/Physical Review D. 87.125027 - 2013. arXiv:1305.1513
- [8] DALMAZI, D. DOS SANTOS, A.L.R. MENDONÇA, E.L. **Massive “spin-2” theories in arbitrary $D \geq 3$ dimensions**. *Annals of Physics*, Volume 354, Pages 385–393 - 2015. arXiv:1408.6825
- [9] DESER, S. IZUMI, K. ONG, Y. C. WALDRON, A. **Problems of Massive Gravities**. *Mod. Phys. Lett. A*, Vol. 30, Nos. 3 e 4 - 2015 1540006. arXiv:1410.2289
- [10] DESER, S. **Unconstrained canonical action for, and positive energy of, massive spin 2**. DOI: 10.1139/cjp-2014-0420. arXiv:1407.7178
- [11] DIRAC, P.A.M. **Lectures on Quantum Mechanics**. New York: Dover Publications - 1964.

- [12] DOS SANTOS, A.L.R. **Sistemas vinculados**. Não publicado. Guaratinguetá - 2015.
- [13] DOS SANTOS, A.L.R. **Modelos alternativos para partículas massivas de spin 2 e gravitação massiva**. Tese de doutorado. Guaratinguetá - 2015.
- [14] FIERZ, M. PAULI, W. **On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field** Proc. Roy. Soc. Lond. A173, 211–232 - 1939.
- [15] GIACOSA, F. KOENIGSTEIN, A. RISCHKE, D. H. **Classical and quantum theory of the massive spin-two field**. DOI: 10.1016/j.aop.2016.01.024. arXiv:1508.00110
- [16] HANSON, A. REGGE, T. TEITELBOIM, C. **Constrained Hamiltonian Systems**. Roma: Accademia Nazionale dei Lincei - 1976.
- [17] HINTERBICHLER, K. **Theoretical Aspects of Massive Gravity**. Rev. Mod. Phys. 84, 671-710 - 2012. arXiv:1105.3735
- [18] NIEUWENHUIZEN, P. V. **On ghost-free tensor Lagrangians and linearized gravitation** Nucl. Phys. 60, 478-492 - 1973.
- [19] PROCA, A. **Théorie non relativiste des particules à spin entier**. J. de Phys. et le Radium 7, 347-353 - 1936.
- [20] RIESS, A.G. et.al. **Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant**. Astronomical Journal 116:1009-1038 - 1998. arXiv:astro-ph/9805201
- [21] SANTOS, R.C. **Partículas de spin-1 em D-dimensões via tensor simétrico**. Guaratinguetá - 2012.
- [22] RHAM, C. GABADADZE, G. **Generalization of the Fierz-Pauli Action**. 10.1103/Physical Review D. 82.044020. - 2010. arXiv:1007.0443
- [23] RHAM, C. **Massive Gravity**. Living Rev. Relativity 17, 7 - 2014. arXiv:1401.4173
- [24] RHAM, C. HEISENBERG, R. RIBEIRO, R.R. **Quantum Corrections in Massive Gravity**. Physical Review D 88, 084058 - 2013. arXiv:1307.7169
- [25] RIVERS, R. J. **Lagrangian theory for neutral massive spin-2 fields**. Il Nuovo Cimento, Volume 34, Issue 2, 386–403 - October 1964.
- [26] SUNDERMEYER, K. **Constrained Dynamics with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model**. New York: Springer-Verlag - 1982.

- [27] TU, L. C. LUO, J. GILLIES, G. T. **The mass of the photon.** Rep. Prog. Phys. 68, 77–130 - 2005.
- [28] WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.** New York: John Wiley & Sons - 1972.
- [29] WIPF, A.W. **Hamilton's Formalism for Systems with Constraints.** DOI: 10.1007/3-540-58339-4 14 - 1993. arXiv:hep-th/9312078