

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

FABRÍCIO ELY GOSSLER

WAVELETS E POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI

Ilha Solteira
2016



FABRÍCIO ELY GOSSLER

WAVELETS E POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Conhecimento: Automação

Prof. Dr. Francisco Villarreal Alvarado

Orientador

Ilha Solteira
2016



FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Gossler, Fabrício Ely.

G679w Wavelets e polinômios com coeficientes de Fibonacci / Fabrício Ely Gossler.
Ilha Solteira: [s.n.], 2016
92 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia . Área de conhecimento: Automação, 2016

Orientador: Francisco Villarreal Alvarado
Inclui bibliografia

1. Polinômios com coeficientes de Fibonacci. 2. Wavelets.
3. Classificação de arritmias cardíacas.


CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Wavelets e polinômios com coeficientes de Fibonacci

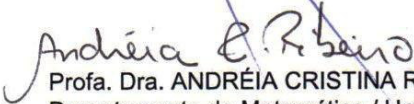
AUTOR: FABRÍCIO ELY GOSSLER

ORIENTADOR: FRANCISCO VILLARREAL ALVARADO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: AUTOMAÇÃO pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. FRANCISCO VILLARREAL ALVARADO
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. CARLOS ROBERTO MINUSSI
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Profa. Dra. ANDRÉIA CRISTINA RIBEIRO
Departamento de Matemática / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Ilha Solteira, 19 de dezembro de 2016

À minha mãe Cleria Felícia Ely e ao meu irmão Vinícius Ely Albrecht.

À Milton Albrecht (In Memoriam).

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo que Ele já me proporcionou.

Ao professor Dr. Francisco Villarreal Alvarado, pela confiança e serenidade com que orientou-me.

Ao professor Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte, pelo estímulo e apoio no acompanhamento e dedicação no desenvolvimento do trabalho.

À professora Dra. Regina Litz Lamblém, por ter me concedido o assunto chave deste trabalho.

Aos professores e funcionários do PPGEE e da biblioteca da FEIS.

A todos os meus professores e colegas da UEMS de Cassilândia.

Aos membros da Banca Examinadora, pelas contribuições apresentadas a Dissertação.

Aos colegas e amigos do PPGEE, em particular ao Bruno, Júlio, Natália e Patrícia.

À minha família pelo incentivo e apoio, especialmente à minha mãe e ao meu irmão, que entenderam a minha ausência em vários momentos significativos.

A todos os amigos que, direta ou indiretamente, contribuíram com a realização deste trabalho.

Ao casal Alírio e Elisa, pelo apoio e carinho nos momentos de adversidade durante o mestrado.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro (processo 130123/2015-3).

“It is with logic that one proves;
it is with intuition that one invents.”
— Henri Poincaré

RESUMO

Existem diferentes tipos de funções wavelets que podem ser utilizadas na Transformada Wavelet. Na maioria das vezes, a função wavelet escolhida para a análise de um determinado sinal vai ser aquela que melhor se ajusta no domínio tempo-frequência do mesmo. Existem vários tipos de funções wavelets que podem ser escolhidas para certas aplicações, sendo que algumas destas pertencem a conjuntos específicos denominados de famílias wavelets, tais como a Haar, Daubechies, Symlets, Morlet, Meyer e Gaussianas. Nesse trabalho é apresentada uma nova família de funções wavelets geradas a partir de polinômios com coeficientes de Fibonacci (FCPs). Essa família recebe o nome de Golden, e cada membro desta é obtido por uma derivada de ordem n do quociente entre dois FCPs distintos. As Golden wavelets foram deduzidas através das observações de que, em alguns casos, a derivada de ordem n , do quociente entre dois FCPs distintos, resulta em uma função que possui as características de uma onda de duração curta. Como aplicação, algumas wavelets apresentadas no decorrer deste trabalho são utilizadas na classificação de arritmias cardíacas em sinais de eletrocardiograma, que foram extraídos da base de dados do *MIT-BIH arrhythmia database*.

Palavras-chaves: Polinômios com coeficientes de Fibonacci. Wavelets. Classificação de arritmias cardíacas.

ABSTRACT

There exist different types of wavelet functions that can be used in the Wavelet Transform. In most cases, the wavelet function chosen for the analysis of a given signal will be the one that best adjusts in the time-frequency domain of the same signal. There are many types of wavelet functions that can be chosen for certain applications, some of which belong to specific sets called wavelet families, such as Haar, Daubechies, Symlets, Morlet, Meyer, and Gaussians. In this work a new wavelet functions family generated from Fibonacci-coefficients polynomials (FCPs) is presented. This family is called Golden, and each member is obtained by the n -th derivative of the quotient between two distinct FCPs. The Golden wavelets were deduced from the observations that in some cases the n -th derivative of the quotient between two distinct FCPs results in a function that has the characteristics of a short-duration wave. As an application, some wavelets presented in the course of this work are used to cardiac arrhythmia classification in electrocardiogram signals, which were extracted from the MIT-BIH arrhythmia database.

Keywords: Fibonacci-coefficient polynomials. Wavelets. Cardiac arrhythmia classification.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sinal $x_1(t)$ no domínio do tempo e da frequência.....	20
Figura 2 - Sinal $x_2(t)$ no domínio do tempo e da frequência	21
Figura 3 - Retângulo de Heisenberg representando ϕ_γ	23
Figura 4 - Retângulos de Heisenberg na STFT	25
Figura 5 - Retângulos de Heisenberg na WT	26
Figura 6 - Wavelet de Haar.....	28
Figura 7 - Wavelet de Morlet	28
Figura 8 - Gráfico de $\hat{\psi}(\omega)$	30
Figura 9 - Gráfico de $\psi(t)$ para diferentes valores de s	32
Figura 10 - Gráfico do sinal $x_3(t)$	34
Figura 11 - CWT do sinal $x_3(t)$ para $s = 5, 90, 180$	34
Figura 12 - Valores absolutos dos coeficientes da CWT do sinal $x_3(t)$	35
Figura 13 - Representação Tempo-Frequência de x_3 utilizando a CWT.....	36
Figura 14 - (a) Reticulado tempo-escala. (b) Reticulado tempo-frequência.	39
Figura 15 - Ramificação de uma árvore segundo a Sequência de Fibonacci	41
Figura 16 - Espiral de Fibonacci	42
Figura 17 - Exemplos de FCPs.....	43
Figura 18 - Gráfico de $p_n^k(x)$ para $n = 0$	46
Figura 19 - Gráfico de $p_n^k(x)$ para $n = 1$	46
Figura 20 - Gráfico de $p_n^k(x)$ para $n = 2$	47
Figura 21 - Gráfico de $p_n^k(x)$ para $n = 3$	47
Figura 22 - Gráfico de $p_n^k(x)$ para $n = 4$	48
Figura 23 - Gráfico de $p_n^k(x)$ para $n = 5$	48
Figura 24 - Gráfico de $f_1(x)$	50
Figura 25 - Gráfico de $f_2(x)$	51
Figura 26 - Gráfico de $f_3(x)$	51
Figura 27 - Gráfico de $f_4(x)$	52
Figura 28 - Gráfico de $f_5(x)$	52
Figura 29 - Gráfico de $\psi(x)$	54
Figura 30 - Gráfico de $\lambda(x)$	56
Figura 31 - Gráfico da parte real de $\hat{\psi}(\omega)$	59

Figura 32 - Gráfico de $\psi_{0,2}^m(x)$	65
Figura 33 - Gráfico de $\hat{\psi}_{0,2}^m(\omega)$	65
Figura 34 - Gráfico de $\psi_{1,2}^m(x)$	66
Figura 35 - Gráfico de $\hat{\psi}_{1,2}^m(\omega)$	66
Figura 36 - Gráfico de $\psi_{4,2}^m(x)$	67
Figura 37 - Gráfico de $\hat{\psi}_{4,2}^m(\omega)$	67
Figura 38 - Gráficos de (a) $\psi^{Cm}(x)$ e (b) $\psi_{0,2}^4(x)$	72
Figura 39 - Similiaridade entre ψ^{Cm} e $\psi_{0,2}^4$	73
Figura 40 - Gráficos de $\hat{\psi}^{Cm}(\omega)$ e $\hat{\psi}_{0,2}^4(\omega)$	73
Figura 41 - Ondas características do ECG.....	74
Figura 42 - Coração e a formação do estímulo elétrico	75
Figura 43 - As 12 derivações de um ECG normal	77
Figura 44 - Características do bloqueio de ramo (a) esquerdo (b) direito	78
Figura 45 - Batimentos do tipo RBBB e N.....	79
Figura 46 - Amostras consideradas para cada complexo QRS	80
Figura 47 - Complexos QRS no domínio do tempo e no domínio wavelet	81
Figura 48 - Interface do Weka.....	82
Figura 49 - Quantidade de atributos por classe dos batimentos	83
Figura 50 - Relatório de desempenho do Weka utilizando a gold1	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Frequências centrais de algumas <i>wavelets</i>	32
Tabela 2 - Problema dos Coelhos.....	40
Tabela 3 - Exemplos de zeros de alguns FCPs.....	44
Tabela 4 - Valor absoluto dos zeros de alguns FCPs.....	45
Tabela 5 - Resultados das wavelets do tipo $\psi_{0,2}^m$	68
Tabela 6 - Resultados das wavelets do tipo $\psi_{1,2}^m$	68
Tabela 7 - Resultados das wavelets do tipo $\psi_{4,2}^m$	69
Tabela 8 - Resultados da classificação para 6000 batimentos.....	84
Tabela 9 - Resultados da classificação para 12000 batimentos.....	84

LISTA DE ABREVIACOES E SIGLAS

AD	Átrio direito
AE	Átrio esquerdo
bpm	Batimentos por minuto
CWT	Transformada Wavelet Contínua
DEP	Densidade Espectral de Potência
DWT	Transformada Wavelet Discreta
ECG	Eletrocardiograma
FBI	Federal Bureau of Investigation
FCP	Polinômio com Coeficientes de Fibonacci
FT	Transformada de Fourier
JPEG	Joint Photographic Experts Group
LBBB	Batimento do tipo bloqueio do ramo esquerdo
N	Batimento do tipo normal
NAV	Nódulo atrioventricular
NS	Nódulo sinusal
RBBB	Batimento do tipo bloqueio do ramo direito
RD	Ramo direito
RE	Ramo esquerdo
STFT	Transformada de Fourier para Tempo Curto
VD	Ventrículo direito
VE	Ventrículo esquerdo
WT	Transformada Wavelet

LISTA DE SÍMBOLOS

A_m	Amplitude de uma função onda
$c_{m,n}$	Coefficientes wavelet discreto
C_ψ	Condição de admissibilidade de ψ
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
δ'	Derivada da função impulso
$\sigma_{\omega,\gamma}^2$	Dispersão da frequência
$\sigma_{t,\gamma}^2$	Dispersão do tempo
$L^2(\mathbb{R})$	Espaço das funções de quadrado integráveis em \mathbb{R}
$L^1(\mathbb{R})$	Espaço das funções integráveis em \mathbb{R}
η	Frequência central de $\hat{\psi}$
$g_{u,\xi}$	Função de análise da Transformada de Fourier para Tempo Curto
$\psi_{u,s}$	Função de análise da Transformada Wavelet
ϕ_γ	Função de análise genérica
δ	Função impulso
$g(t)$	Função janela
$\psi^{(H)}$	Função wavelet de Haar
$\psi^{(M)}$	Função wavelet de Morlet
ψ	Função wavelet psi
*	Indicador do complexo conjugado
$p_{m,n}^k$	k -ésima derivada do quociente entre dois FCPs de grau m e n
F_n	n -ésimo termo da sequência de Fibonacci
φ	Número de ouro
\mathcal{F}	Operador Transformada de Fourier
s	Parâmetro de escala
ω ou ξ	Parâmetro de frequência
u	Parâmetro de translação
j	Parâmetro imaginário
p_n	Polinômio com coeficientes de Fibonacci de grau n
\langle, \rangle	Produto Interno

$x_n(t)$ ou $f(t)$	Sinal no domínio do tempo
$\hat{\psi}$	Transformada de Fourier de ψ
$\mathcal{S}f(u, \xi)$	Transformada de Fourier para Tempo Curto de f
$\mathcal{W}f(u, s)$	Transformada Wavelet de f
Hz	Unidade de medida hertz
$\psi_{m,n}^k$	Wavelet gerada pelo quociente entre dois FCPs

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	16
2	A TEORIA WAVELET.....	19
2.1	SINAIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	19
2.2	LOCALIZAÇÃO TEMPO-FREQUÊNCIA	22
2.3	FUNÇÃO WAVELET.....	27
2.3.1	Condição de admissibilidade	29
2.3.2	Momentos nulos.....	30
2.3.3	Relação entre escala e frequência	31
2.4	TRANSFORMADA WAVELET	33
2.4.1	Transformada wavelet contínua	33
2.4.2	Transformada wavelet discreta de tempo contínuo	36
2.4.3	Transformada wavelet discreta de tempo discreto	38
2.4.4	Transformada wavelet diádica ortonormal.....	38
3	QUOCIENTES ENTRE POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI.....	40
3.1	A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI	40
3.2	POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI	42
3.2.1	Zeros de polinômios com coeficientes de Fibonacci	44
3.3	QUOCIENTES ENTRE POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI..	45
3.3.1	Resultados de quocientes	45
3.3.2	Discussões sobre os resultados obtidos	49
4	UMA FAMÍLIA DE WAVELETS GERADA POR POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI	54
4.1	UMA WAVELET GERADA A PARTIR DE POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI.....	54
4.1.1	Verificando a condição de admissibilidade.....	55
4.2	GOLDEN: UMA NOVA FAMÍLIA DE WAVELETS.....	63
4.2.1	Semelhanças entre uma Golden wavelet e a Chapéu Mexicano.....	71

5	APLICAÇÕES DAS GOLDEN WAVELETS NA CLASSIFICAÇÃO DE ARRITMIAS CARDÍACAS	74
5.1	O ELETROCARDIOGRAMA	74
5.1.1	Bloqueio de ramo	77
5.2	APLICAÇÃO DAS GOLDEN WAVELETS	78
5.2.1	Base de dados	79
5.2.2	Decomposição do sinal no domínio wavelet	80
5.2.3	Sistema classificador	81
5.2.4	Resultados e discussões	82
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	86
	REFERÊNCIAS	88
	APÊNDICE A - INCLUINDO AS GOLDEN WAVELETS NA TOOLBOX DO MATLAB	91

1 INTRODUÇÃO

O termo “sinal” sempre está presente no vocabulário das pessoas, como, por exemplo, sempre ouvimos que o canto das aves pode ser um sinal de uma iminente tempestade. Os sinais estão presentes em diferentes áreas do conhecimento, constituindo um ingrediente básico de nossa vida diária, pois de modo geral, eles carregam informações, tais como avisos, advertências, comportamento de um fenômeno físico, etc (HAYKIN; VEEN, 2002).

Cada tipo de sinal tem sua representação, sendo que a maioria é gerada no domínio do tempo. Entretanto, essa representação nem sempre é a melhor maneira de vê-lo e de analisá-lo. Por isso, faz-se necessária a representação de um sinal em outros domínios, como a frequência, por exemplo.

Uma área responsável por manipular, analisar ou modificar sinais é o Processamento de Sinais (OPPENHEIM; SCHAFER, 1975). No contexto de processamento de sinais, a representação de um sinal em outro domínio pode ser realizada por uma transformação matemática específica (OPPENHEIM; SCHAFER, 1975; STARK, 2005).

Para se obter a representação de um sinal no domínio da frequência, pode-se utilizar a clássica Transformada de Fourier (HSU, 1972). A Transformada de Fourier considera o sinal como um todo, e fornece o conteúdo de espectro do sinal, porém, ela não informa a localização no tempo, em que tais frequências ocorrem (OLIVEIRA, 2007).

Em várias aplicações, o interesse de saber a localização no tempo em que tais frequências ocorrem é fundamental (DAUBECHIES, 1992). Desse modo, a Transformada de Fourier deixa de ser uma ferramenta útil, quando se deseja analisar um sinal no domínio tempo-frequência.

Uma transformação capaz de informar a localização tempo-frequência é a Transformada de Fourier para Tempo Curto, que é uma modificação da Transformada de Fourier (DAUBECHIES, 1992). Porém, essa transformada possui problemas de resoluções no domínio do tempo e da frequência, descritos pelo princípio da incerteza de Gabor-Heisenberg (GABOR, 1946).

Uma outra transformação, também com domínios de tempo-frequência é a Transformada Wavelet, ferramenta introduzida, em meados dos anos 80, para superar os problemas de resoluções da Transformada de Fourier para Tempo Curto (MALLAT, 2008). A Transformada Wavelet é composta por uma função wavelet (ou simplesmente wavelet) que a caracteriza.

Diversas wavelets com características distintas foram propostas, dentre elas, pode-se destacar: wavelet de Morlet, definida a partir de uma exponencial complexa; wavelets Gaussianas, que são derivadas de uma função conhecida como densidade de probabilidade gaussiana; wavelets de Daubechies, a primeira família de wavelets ortogonais; wavelets B-splines, construídas utilizando funções splines obtidas por combinações lineares entre polinômios (OLIVEIRA, 2007).

Os polinômios com coeficientes de Fibonacci foram definidos e introduzidos por Garth, Mills e Mitchell (2007). Tais polinômios são construídos tendo como base, a sequência de Fibonacci. Conforme pode ser visto neste trabalho, existe uma relação entre polinômios com coeficientes de Fibonacci e wavelets.

O objetivo deste trabalho é mostrar uma nova família de funções wavelets geradas a partir de polinômios com coeficientes de Fibonacci, e mostrar que elas são aplicáveis. As novas wavelets são denotadas como Golden wavelets. A aplicação dessas wavelets está voltada para a Transformada Wavelet Contínua.

O restante do trabalho está organizado da seguinte forma: No segundo capítulo é abordada a teoria wavelet de forma sucinta, objetiva e com alguns exemplos, com a ideia básica de esclarecer a essência da teoria. Na abordagem desse capítulo são enfatizadas as condições gerais para que uma função seja considerada uma wavelet, para que se possa compreender a sua estrutura sendo vistas nas Golden wavelets. Também nesse mesmo capítulo, exploram-se algumas características que diferenciam as wavelets umas das outras. No terceiro capítulo, depois de uma breve discussão sobre a sequência de Fibonacci, são apresentados os polinômios com coeficientes de Fibonacci e algumas propriedades dos mesmos. No final deste capítulo, são mostrados alguns resultados de quocientes entre dois polinômios com coeficiente de Fibonacci, sendo discutidos de forma abrangente. No capítulo 4, apresenta-se a nova família de wavelets, denominada de Golden. As wavelets dessa família são obtidas através da derivada de ordem n de alguns quocientes entre polinômios com coeficientes de Fibonacci. Há uma seção em que é provado analiticamente, que uma específica função gerada pelo quociente desses polinômios é uma função wavelet. Depois, são definidas 27 wavelets dessa família, mostrando alguns resultados das mesmas. Em seguida são tomadas três destas para uma análise adiante. No capítulo 5 é mostrada uma aplicação para as três wavelets consideradas anteriormente. A aplicação foi voltada para a classificação de arritmias cardíacas em sinais de eletrocardiogramas, extraídos da base de dados do *MIT-BIH Arrhythmia Database* (GOLDBERGER et al., 2000). Em seguida, nas considerações finais do trabalho, discutem-se as principais ideias propostas, os resultados alcançados, a

importância do referido estudo, entre outras observações pertinentes. Também são apontadas as possibilidades de trabalhos futuros utilizando ou melhorando a metodologia apresentada. No apêndice A discute-se como incluir as três wavelets utilizadas na aplicação, na caixa de ferramentas wavemenu do Matlab[®].

2 A TEORIA WAVELET

O termo *wavelet* significa "pequena onda" (*small wave* em inglês ou *ondelette* em francês). Wavelets são funções que satisfazem certas propriedades, e que são utilizadas como moduladores na Transformada Wavelet (*Wavelet Transform* –WT). A WT é uma ferramenta que decompõem sinais em diferentes componentes de frequências e, então, estuda-se cada um desses componentes correspondidos à sua escala (DAUBECHIES, 1992). As aplicações das wavelets são inúmeras como, por exemplo, no manuseio do banco de dados de impressões digitais do FBI (*Federal Bureau of Investigation*) e, também, em algoritmos de compressão de imagens como o JPEG 2000 (MISITI et al., 2003). Frequentemente, a WT vem sendo utilizada como uma ferramenta prática na análise de sinais, como na remoção de ruído, a detecção de descontinuidades ou irregularidades, entre outros tipos de aplicações (OLIVEIRA, 2007).

2.1 SINAIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Os sinais transmitem informações e carregam grandes quantidades de dados sobre o estado ou o comportamento de um fenômeno físico (HAYKIN; VEEN, 2002). Neste trabalho, um sinal pode ser uma função definida na reta real $f(t) \in \mathbb{R}$, com energia finita, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty. \quad (1)$$

Geralmente, localizar uma informação relevante de um sinal pode ser extremamente difícil (MALLAT, 2008). A representação de um sinal em outro domínio pode ser mais vantajosa, pois alguns coeficientes podem revelar a informação que está sendo procurada. Tais representações podem ser construídas pela decomposição de sinais por certos conjuntos de transformações matemáticas que, quando aplicadas aos sinais, obtém-se informações adicionais que não estão prontamente disponíveis no sinal bruto gerado.

Em muitos casos, as informações mais interessantes estão escondidas no conteúdo de frequência do sinal (OPPENHEIM; SCHAFER, 1975). A frequência de um sinal pode ser medida por meio de uma das mais populares transformações matemáticas, a Transformada de Fourier (*Fourier Transform* - FT) definida da seguinte forma (HSU, 1972):

Definição 1 (FT): A FT de uma função de energia finita $f(t)$ é definida da seguinte maneira:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2)$$

onde ω é o parâmetro de frequência, $e^{-j\omega t}$ é a função de análise, sendo $j = \sqrt{-1}$.

Utilizando a identidade de Euler, a função de análise $e^{-j\omega t}$ pode ser escrita da seguinte forma:

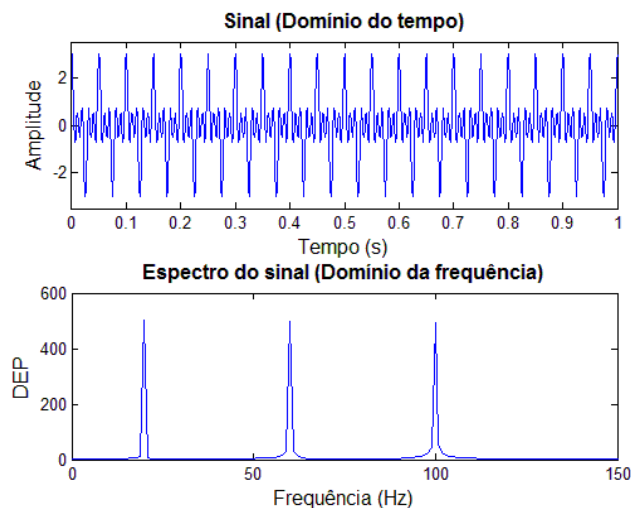
$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t. \quad (3)$$

Assim, a FT decompõe um sinal em termos de funções de base sinusoidal. Se a FT de um sinal no domínio do tempo é tomada, o espectro de frequência do referido sinal é obtido. A equação (2) mede a ocorrência de frequência ω no sinal. Por exemplo, para uma frequência ω , o valor $\hat{f}(\omega) \neq 0$ significa que tal frequência encontra-se presente no sinal, distribuída ao longo do mesmo.

Para exemplificar graficamente a FT de um sinal, segue o Exemplo 1 dado a seguir, onde foi aplicada a FT em um sinal estacionário, ou seja, um sinal onde se apresentam os mesmos componentes de frequência durante toda sua duração.

Exemplo 1. Considerando-se o seguinte sinal: $x_1(t) = \cos(40\pi t) + \cos(120\pi t) + \cos(200\pi t)$. O sinal $x_1(t)$ é um sinal estacionário com frequências de 20Hz, 60Hz e 100Hz. Os gráficos dessa função e de sua FT são mostrados na Figura 1.

Figura 1- Sinal $x_1(t)$ no domínio do tempo e da frequência.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

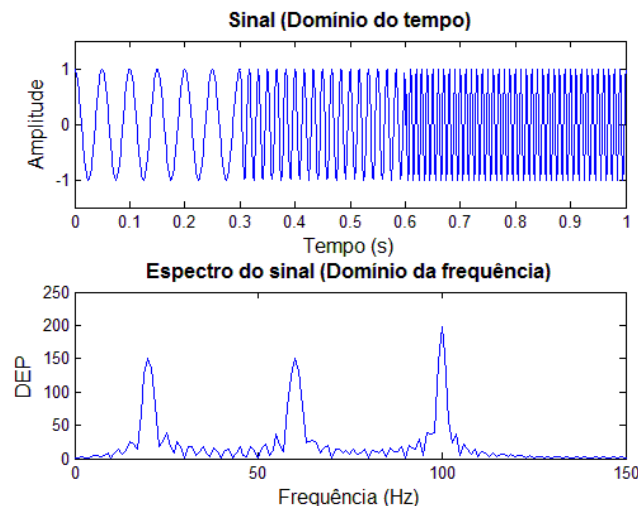
Note que no gráfico da Figura 1, a FT tem três picos de densidade espectral de potência (DEP) consideráveis, exatamente nas frequências obtidas no sinal $x_1(t)$. Agora, considere o Exemplo 2 dado a seguir.

Exemplo 2. Considerando-se o seguinte sinal:

$$x_2(t) = \begin{cases} \cos(40\pi t), & 0 \leq t < 0.3 \\ \cos(120\pi t), & 0.3 \leq t < 0.6 \\ \cos(200\pi t), & 0.6 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

O sinal $x_2(t)$ é um sinal não estacionário, pois as frequências contidas nele variam com o tempo. Os gráficos desse sinal e de sua FT são mostrados na Figura 2.

Figura 2- Sinal $x_2(t)$ no domínio do tempo e da frequência.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A análise espectral constitui uma das ferramentas clássicas mais utilizadas em processamento de sinais (OLIVEIRA, 2007).

Ambos os espectros de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são similares, pois os três componentes espectrais são mostrados nas mesmas frequências, embora no domínio do tempo, os dois sinais são bem diferentes. Isso ocorre porque a FT considera o sinal como um todo e informa apenas as frequências contidas no mesmo e não o tempo em que essas frequências ocorrem.

Assim, a FT deixa de ser eficiente quando se trata de sinais não estacionários, onde se deseja saber o tempo em que determinadas frequências ocorrem. A FT só será eficiente quando se deseja saber apenas o conteúdo de espectro do sinal (OLIVEIRA, 2007).

Na prática, quase todos os sinais no cotidiano são não-estacionários. Por exemplo, quando se ouve uma música, percebe-se uma alternância de altas e baixas frequências ao longo de sua execução. Outros exemplos de sinais não-estacionários são alguns sinais de instrumentação biomédicos, como o eletrocardiograma que é o registro da atividade elétrica do coração.

2.2 LOCALIZAÇÃO TEMPO-FREQUÊNCIA

Em várias aplicações, o interesse de saber a localização no tempo em que tais frequências ω ocorrem é fundamental (DAUBECHIES, 1992). Entretanto, tratando-se de uma análise simultânea de tempo e frequência, obtém-se problemas de resolução, como é explicado pelo princípio da incerteza de Gabor-Heisenberg (GABOR, 1946), surgido no contexto da mecânica quântica para descrever a impossibilidade de se determinar, com precisão, a posição e o momento de uma partícula subatômica ao mesmo tempo.

Mais precisamente, o que é bem definido no domínio do tempo não é bem representado no domínio da frequência (WEEKS, 2012). Esse fato é mostrado da seguinte forma (MALLAT, 2008): Considerando-se uma função de análise ϕ_γ , onde $\|\phi_\gamma\| = 1$, e supondo que a mesma é utilizada na transformação de domínio tempo-frequência de um sinal, correlaciona-se com um grupo de formas de onda que se concentram no tempo e na frequência. Assim, a transformação tempo-frequência correspondente a uma função $f(t)$ de energia finita é definida por:

$$\langle f, \phi_\gamma \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi_\gamma^*(t) dt, \quad (4)$$

onde $*$ é o indicador do complexo conjugado da função ϕ_γ . Da identidade de Parseval (definida mais adiante), obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi_\gamma^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \hat{\phi}_\gamma^*(\omega) d\omega. \quad (5)$$

O tamanho de informação fornecido por $\langle f, \phi_\gamma \rangle$ possui uma representação no plano tempo-frequência (t, ω) , por um retângulo tendo uma posição e tamanho que depende da difusão de ϕ_γ . Desde que:

$$\|\phi_\gamma\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_\gamma(t)|^2 dt = 1, \quad (6)$$

então, $|\phi_\gamma(t)|^2$ pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidade centrada em:

$$u_\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} t |\phi_\gamma(t)|^2 dt. \quad (7)$$

A dispersão de u_γ é medida pela variância:

$$\sigma_t^2(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t - u_\gamma|^2 |\phi_\gamma(t)|^2 dt. \quad (8)$$

Pela identidade de Parseval, obtém-se que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \|\phi_\gamma\|^2, \quad (9)$$

onde $\hat{\phi}_\gamma$ é a FT de ϕ_γ . Assim a frequência central de $\hat{\phi}_\gamma$ é definida como:

$$\xi_\gamma = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega, \quad (10)$$

e a dispersão de ξ_γ

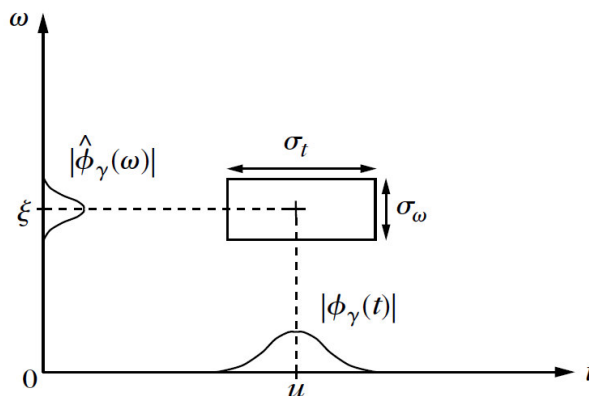
$$\sigma_\omega^2(\gamma) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega - \xi_\gamma|^2 |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega. \quad (11)$$

Portanto, a resolução tempo-frequência de ϕ_γ possui uma representação no plano (t, ω) por um “retângulo de Heisenberg” centrado em (u_γ, ξ_γ) de tamanho $\sigma_t(\gamma) \times \sigma_\omega(\gamma)$. Este retângulo é ilustrado pela Figura 3, e que, pelo princípio de incerteza, possui uma superfície mínima que limita a resolução tempo-frequência conjunta (GABOR, 1946):

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Tomando-se a equação (12), pode-se notar que uma boa precisão no domínio da frequência, implica em uma pobre precisão no domínio do tempo e, conseqüentemente, para uma boa precisão no tempo, não é possível obter uma boa precisão na frequência.

Figura 3- Retângulo de Heisenberg representando ϕ_γ .



Fonte: (MALLAT, 2008).

As ferramentas mais comuns de se fazer uma análise de tempo-frequência são a Transformada de Fourier para Tempo Curto e a Transformada Wavelet (DAUBECHIES, 1992).

Transformada de Fourier para Tempo Curto

A Transformada de Fourier para Tempo Curto (*Short Time Fourier Transform - STFT*) é uma modificação da FT, que introduz uma janela $g(t)$ que é um parâmetro de extensão limitado, centrado no instante de tempo t , que se desloca da origem para o ponto u ao longo do sinal, analisando cada parte separadamente, dentro da qual o sinal permanece aproximadamente estacionário (DAUBECHIES, 1992). Assim, uma função janela real e simétrica $g(t) = g(-t)$, é transladada por u e modelada pela frequência ξ :

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u)e^{-j\xi t}. \quad (13)$$

Formalmente, a STFT é definida da seguinte maneira (GOMES; VELHO; GOLDENSTEIN, 1997):

Definição 2 (STFT): Seja $g(t)$ uma função auxiliar para localizar a função moduladora $e^{-j\xi t}$ usada na FT em uma determinada vizinhança de tempo u . Assim, a STFT de $f(t)$, desde que a mesma seja de energia finita, é definida da seguinte maneira:

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - u) e^{-j\xi t} dt. \quad (14)$$

As dispersões em torno de u e ξ são fixas e não dependem de u e nem de ξ (MALLAT, 2008):

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - u)^2 |g_{u,\xi}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2 dt, \quad (15)$$

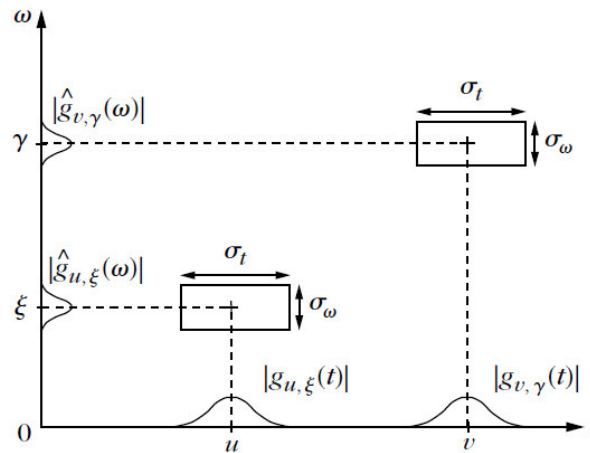
$$\sigma_\omega^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \xi)^2 |\hat{g}_{u,\xi}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega. \quad (16)$$

Logo, a deficiência da STFT esta no fato de que ela é dependente da escala (largura e altura da janela) usada, pois a análise do sinal é feita do ponto de vista dela (GOMES; VELHO; GOLDENSTEIN, 1997). Desse modo, a resolução de tempo-frequência (retângulo de Heisenberg) sempre possuirá o mesmo tamanho, independente dos valores de u e ξ , como é mostrada na Figura 4.

Assim, a STFT é eficaz em sinais onde não incluem estruturas com diferentes resoluções de tempo-frequência, ou seja, alguns sendo muito localizados no tempo e outros

muito localizados na frequência. Entretanto, muitos sinais requerem uma abordagem mais flexível, onde se precisa variar o tamanho da janela para determinar com precisão o tempo ou a frequência (MISITI et al., 2013).

Figura 4- Retângulos de Heisenberg na STFT.



Fonte: (MALLAT, 2008).

É nesse ponto então que surge a necessidade de uma transformada com janelas de tamanhos variantes, que não dependa de uma escala fixa para análise. Mais precisamente, uma alternativa para o problema da STFT é a WT (GOMES; VELHO; GOLDENSTEIN, 1997).

Transformada Wavelet

A função de análise da WT é uma função wavelet denotada por ψ (que será definida mais adiante). Na WT, a função ψ é localizada e desliza-se ao longo do eixo da variável tempo, tomando-se versões escalonadas desta mesma. Logo, a WT é definida usando dois parâmetros: de escala (s) e de translação (u):

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right). \quad (17)$$

Uma definição geral da WT é mostrada a seguir (DAUBECHIES, 1992):

Definição 3 (WT): Sejam os parâmetros u e s , de translação e de escala, respectivamente. Para uma função $f(t)$ de energia finita, a WT é definida por:

$$\mathcal{W}f(u,s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) |s|^{-1/2} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt, \quad (18)$$

$u, s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, e $*$ denota o complexo conjugado.

As dispersões em torno de u e ξ são variáveis e dependem do espalhamento de $\psi_{u,s}$. Se ψ é centrada em 0, então $\psi_{u,s}$ é centrada em u . O seguinte resultado é verificado: (MALLAT, 2008):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-u)^2 |\psi_{u,s}(t)|^2 dt = \sigma_t^2 s^2, \quad (19)$$

com $\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-u)^2 |\psi(t)|^2 dt$. Considerando $\hat{\psi}(\omega)$ a FT de $\psi(t)$, e fazendo com que $\hat{\psi}(\omega) = 0, \forall \omega < 0$, a frequência central de $\hat{\psi}$ é η :

$$\eta = (2\pi)^{-1} \int_0^{+\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega. \quad (20)$$

A FT de $\psi_{u,s}$ é a dilatação de $\hat{\psi}$ por $1/s$:

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = \sqrt{s} \hat{\psi}(\omega) e^{-j\omega u}, \quad (21)$$

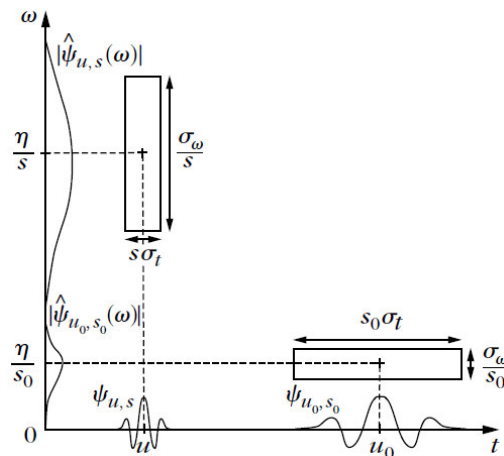
tendo desse modo, uma frequência central de η/s . Assim, a dispersão de $\hat{\psi}_{u,s}$ em torno de η/s é

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{+\infty} \left(\omega - \frac{\eta}{s}\right)^2 |\hat{\psi}_{u,s}(\omega)|^2 d\omega = \frac{\sigma_\omega^2}{s^2}, \quad (22)$$

com $\sigma_\omega^2 = (2\pi)^{-1} \int_0^{+\infty} (\omega - \eta)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega$.

A Figura 5 ilustra o comportamento das resoluções de tempo e frequência da WT. Apesar dos retângulos de Heisenberg possuírem áreas iguais, a resolução de tempo-frequência de $\psi_{u,s}$ depende diretamente do valor de s . Portanto, existe um equilíbrio de resoluções em ambos os domínios.

Figura 5- Retângulos de Heisenberg na WT.



Fonte: (MALLAT, 2008).

Como s varia, isso faz com que $\psi_{0,s}(t) = |s|^{-1/2} \psi(t/s)$ cubra diferentes faixas de frequência:

- Valores grandes de $|s|$ correspondem a baixas frequências;
- Valores pequenos de $|s|$ correspondem a altas frequências.

Assim, a frequência é inversamente proporcional a escala. Isso é verificado na Figura 5, onde se compara as resoluções de tempo-frequência, de uma função wavelet para duas escalas diferentes s e s_0 , $s_0 > s$.

Na STFT, todas as funções $g_{u,\xi}$, independentemente dos valores de ξ , têm o mesmo tamanho. Ao contrário de $\psi_{u,s}$ na WT, que possui tamanhos variados que se adaptam com a sua frequência. Por isso, a WT é melhor do que a STFT em aplicar um “*zoom in*” em fenômenos de alta frequência com duração muito curta, tais como sinais transitórios (DAUBECHIES, 1992).

A análise de Fourier consiste em decompor um sinal em ondas senoidais de várias frequências, variando sobre todo o espectro. Da mesma forma, a análise wavelet consiste em decompor um sinal em versões deslocadas de uma única wavelet avaliada em diferentes escalas (GOMES; VELHO; GOLDENSTEIN, 1997). As senoides não têm duração limitada como as wavelets. Logo, faz sentido pensar que as características locais de um sinal não estacionário podem ser descritas melhor com as wavelets que têm extensão local (MISITI et al., 2013).

2.3 FUNÇÃO WAVELET

Wavelets são funções que satisfazem certos requisitos. Informalmente, uma função wavelet é uma pequena onda que possui um decaimento rápido para zero. O formato de onda de uma wavelet pode ser suave ou não, podendo ainda ser simétrica ou não simétrica.

Existem vários tipos de funções wavelets (OLIVEIRA, 2007). Cada wavelet possui diferentes tipos de características, como a suavidade e suporte compacto. Algumas wavelets possuem expressões matemáticas simples (ver equação (24)).

No próximo exemplo, são mostradas duas funções wavelets. A primeira é a wavelet mais simples, e mais antiga, que é chamada de wavelet de Haar, já a segunda é chamada de wavelet de Morlet (OLIVEIRA, 2007).

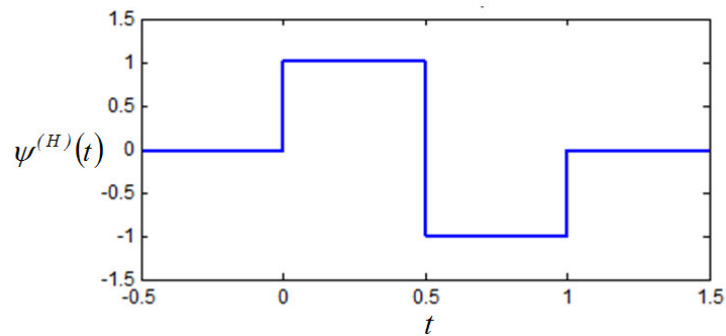
Exemplo 4. Funções Wavelets

a) A função:

$$\psi^{(H)}(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (23)$$

$\psi^{(H)}$ é chamada de wavelet de Haar, que é o exemplo mais clássico de função wavelet. Seu gráfico é mostrado na Figura 6.

Figura 6- Wavelet de Haar.



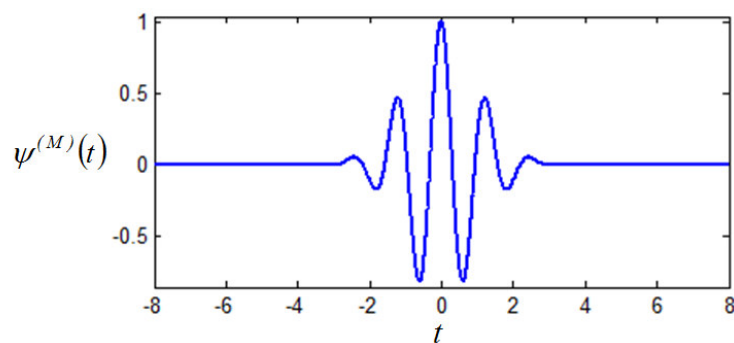
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

b) A função:

$$\psi^{(M)}(t) = e^{-t^2/2} \cos(5t), \quad (24)$$

$\psi^{(M)}$ é denominada de wavelet de Morlet, cujo gráfico é mostrado na Figura 7.

Figura 7- Wavelet de Morlet.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

As funções wavelets devem gerar $L^2(\mathbb{R})$ (espaço das funções de quadrado integrável). A ideia é considerar dilatações (ou compressões) e translações de uma única ψ , de modo a cobrir \mathbb{R} (gerar esse espaço). Isso pode ser feito por dilatações (ou compressões) s e translações u de ψ por (MORETTIN, 1999),

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \quad s, u, \in \mathbb{R}, s \neq 0, \quad (25)$$

A função ψ é denominada de função wavelet ou wavelet-mãe. Quando a wavelet-mãe é escalonada e transladada no tempo, dá origem às wavelets-filhas. Geralmente, as funções wavelets são consideradas para terem energia unitária, i. e.,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1. \quad (26)$$

A normalização por $1/\sqrt{|s|}$ garante que $\|\psi_{u,s}(t)\| = \|\psi(t)\|$, para quaisquer valores de u e s .

As wavelets devem satisfazer certos conceitos como a admissibilidade. Mas elas também se diferem em aspectos como, por exemplo, no número de momentos nulos (DAUBECHIES, 1992; MALLAT, 2008; DEBNATH; SHAH, 2015). Uma breve descrição desses conceitos é apresentada a seguir.

2.3.1 Condição de admissibilidade

Para que uma função ψ seja considerada uma wavelet, é preciso que ela satisfaça a seguinte condição (DAUBECHIES, 1992):

Condição de Admissibilidade: Seja $\hat{\psi}$ a FT de ψ . A condição de admissibilidade C_ψ de uma função ψ , é definida da seguinte maneira:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty. \quad (27)$$

Se $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, então, $\hat{\psi}$ é contínua e a equação (27) só poderá ser satisfeita se $\hat{\psi}(0) = 0$ ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (28)$$

isto é, ψ possui valor médio nulo (DAUBECHIES, 1992).

Portanto, o gráfico de uma função wavelet é oscilatório com valor médio nulo, e por isso tem a forma de uma onda, conforme ilustram as Figuras 6 e 7. Desde que ψ esteja bem localizada no tempo, seu decaimento será muito rápido, formando uma onda de curta duração.

Além do mais, olhando para C_ψ , pode-se perceber que ela só será limitada se a energia do espectro de $\hat{\psi}$ também for. O Teorema 1 relaciona a energia de um sinal no domínio do tempo e da frequência:

Teorema 1 (Identidade de Parseval): Se \hat{f} é a FT de f , então o seguinte resultado se verifica:

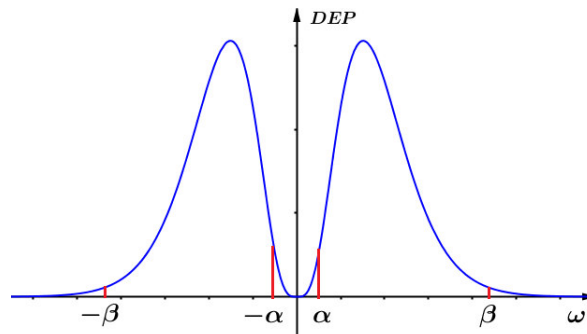
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (29)$$

Assim, no domínio da frequência, ψ tem que satisfazer as seguintes características para que a energia do espectro seja finita:

$$|\hat{\psi}(\omega)|^2 \Big|_{\omega=0} = |\hat{\psi}(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\pm\infty} = 0. \quad (30)$$

Geralmente, o gráfico da FT de uma função wavelet é semelhante ao esboçado na Figura 8. Como $\hat{\psi}$ é pequena fora da banda de frequência $\alpha \leq |\omega| \leq \beta$, segue que a WT pode ser vista como um filtro linear passa-banda invariante no tempo (GOMES; VELHO; GOLDENSTEIN, 1997)..

Figura 8- Gráfico de $\hat{\psi}(\omega)$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

2.3.2 Momentos nulos

O número de momentos nulos de uma wavelet é um fator importante que a caracteriza. Se a seguinte condição é verificada:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (31)$$

então, a wavelet ψ possui n momentos nulos (DEBNATH; SHAH, 2015).

A suavidade da wavelet é medida pelo número de momentos nulos dela, pois quanto maior for este, maior será sua suavidade. De acordo com Mallat (2008), o número de momentos nulos de uma wavelet é muito importante na medida da regularidade local de um sinal. Se uma wavelet possui n momentos nulos, então, a WT pode ser interpretada como um operador diferencial multiescala de ordem n .

O Teorema 2 caracteriza os momentos nulos de uma wavelet (MALLAT, 2008). Esse Teorema afirma que uma wavelet com n momentos nulos, pode ser escrita como uma função $\theta(t)$ com derivada de n -ésima ordem.

Teorema 2: Uma wavelet ψ possui n momentos nulos se, e somente se, existe uma função θ com um rápido decaimento, tal que

$$\psi(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}(\theta(t)). \quad (32)$$

Consequentemente,

$$\mathcal{W}f(u, s) = s^n \frac{d^n}{du^n}(f \star \bar{\theta}_s)(u), \quad (33)$$

onde,

$$\bar{\theta}_s = s^{-\frac{1}{2}}\theta(-t/s). \quad (34)$$

Assim, a wavelet ψ possui no máximo n momentos nulos se, e somente se

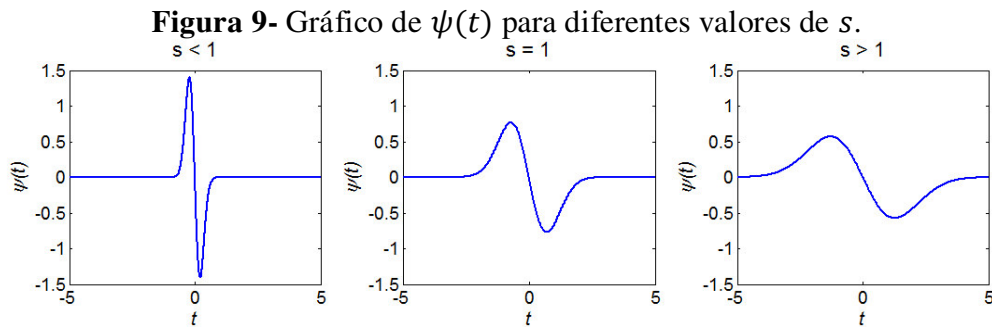
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0. \quad (35)$$

2.3.3 Relação entre escala e frequência

Quando se deseja representar um objeto, deve-se usar uma escala onde os detalhes importantes possam ser capturados nessa representação. Um exemplo disso é o desenho da planta-baixa inserido no projeto arquitetônico de uma casa, pois este deve possuir uma escala onde todos os detalhes importantes possam ser verificados na execução do projeto.

Tanto na STFT e na WT, a escala é definida pela largura da função analisadora (GOMES; VELHO; GOLDENSTEIN, 1997). A STFT analisa um sinal de uma escala única, já na WT, a escala varia de acordo com o parâmetro de escala s que, como visto anteriormente, quanto menor for o fator de escala, mais comprimida será a wavelet. Inversamente, quanto maior a escala, mais esticada é a wavelet. Na Figura 9 ilustra-se o comportamento do parâmetro de escala, para uma wavelet definida da seguinte maneira:

$$\psi(t) = -\frac{4}{\sqrt{5}}te^{-t^2}. \quad (36)$$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A wavelet definida pela equação (36) pertence à família Gaussiana, cujos membros são obtidos pelas derivações da função densidade de probabilidade Gaussiana (OLIVEIRA, 2007).

Como as wavelets são localizadas no tempo e na escala, então os coeficientes obtidos pela WT são capazes de localizar mudanças abruptas em sinais. Assim, a wavelet possui uma forte influência na determinação de quais faixas de frequências podem ser localizadas em cada escala. Matematicamente, uma das maneiras de relacionar a escala com a frequência é utilizar a seguinte relação (ABRY, 1997):

$$f_s = \frac{\eta}{s\Delta}, \quad (37)$$

onde s é a escala, Δ é o período de amostragem do sinal analisado, η é a frequência central da wavelet em Hz, e f_s é a pseudo-frequência em Hz correspondente a escala s . O valor de η é a frequência central (dominante) da FT da wavelet considerada. Na Tabela 1 são apresentados alguns exemplos de frequências centrais para algumas funções wavelets populares. Os resultados são obtidos utilizando o comando `centfrq('wname')` no Matlab[®], onde *wname* é o nome curto da função wavelet inserida no diretório do mesmo.

Tabela 1- Frequências centrais de algumas wavelets.

Wavelet	η
Haar	0.9961
db2	0.6667
Mexh	0.2500
Morl	0.8125
sym4	0.7143

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

2.4 TRANSFORMADA WAVELET

Como já foi dito anteriormente, a WT decompõem sinais em diferentes componentes de frequências, e então se estuda cada um desses componentes em suas escalas. Existem diferentes tipos de WTs (DAUBECHIES, 1992):

- **Transformada Wavelet Contínua (CWT):** se aplica em sinais no domínio do tempo contínuo;
- **Transformada Wavelet Discreta (DWT):** se aplica em sinais no domínio do tempo discreto e também contínuo.

A DWT é obtida da CWT pela discretização de certos parâmetros de tal forma que a transformada pode ser realizada por meio de bases wavelets redundantes (*frames*) ou ortogonais.

2.4.1 Transformada wavelet contínua

A CWT é uma transformada integral linear voltada na exploração de características de sinais para extrair informações de variações em certas bandas de frequência (ANTOINE; MURENZI; VANDERGHEYNST, 2008). Escolhendo-se uma função wavelet, pode-se então aplicar a CWT em uma função (ou sinal). Como na FT, a CWT usa produtos internos para medir a similaridade entre um sinal e a função moduladora. Define-se a seguir a CWT (MORETTIN, 1999):

Definição 5 (CWT): Sejam os parâmetros u e s , de translação e de escala respectivamente.

Para uma função $f(t)$ de energia finita, a CWT é definida da seguinte forma:

$$\mathcal{W}f(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) |s|^{-1/2} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt, \quad (38)$$

onde $u, s \in \mathbb{R}, s \neq 0$, e $*$ denota o complexo conjugado.

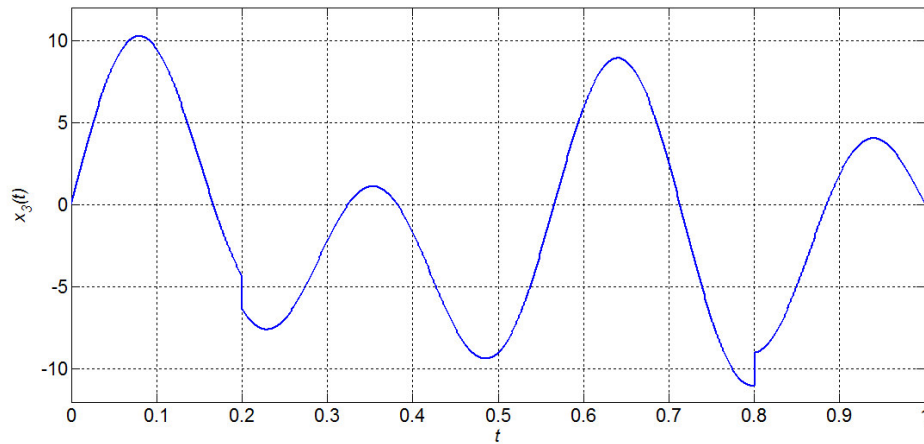
Como pode ser visto, a CWT de uma função de uma única variável é uma função de duas variáveis. Variando continuamente os valores dos parâmetros de escala e translação obtém-se os coeficientes da CWT, que representam cada decomposição. Um exemplo da CWT é mostrado no Exemplo 5:

Exemplo 5. Seja o seguinte sinal

$$x_3(t) = 4 \sin(4\pi t) + 7 \sin(7\pi t) - \text{sign}(t - 0.2) - \text{sign}(0.8 - t),$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 10.

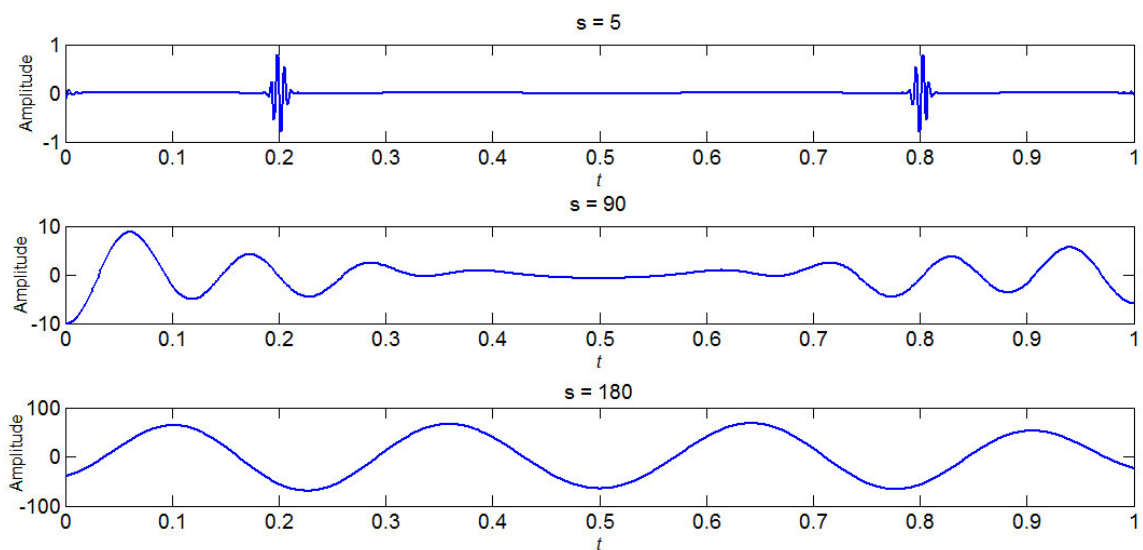
Figura 10- Gráfico do sinal $x_3(t)$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Existem duas mudanças bruscas que ocorrem no sinal x_3 , em $t = 0.2$ e em $t = 0.8$. Nesse exemplo, para aplicar a CWT será utilizada a wavelet de Morlet definida anteriormente pela equação (24). O resultado da CWT de x_3 para 3 escalas diferentes $s = 5$, $s = 90$ e $s = 180$ é mostrado na Figura 11. Note que, as duas mudanças bruscas do sinal x_3 são detectadas pela CWT em escalas menores, ou seja, as altas frequências do sinal são detectadas em escalas mais baixas.

Figura 11- CWT do sinal $x_3(t)$ para $s = 5, 90, 180$.

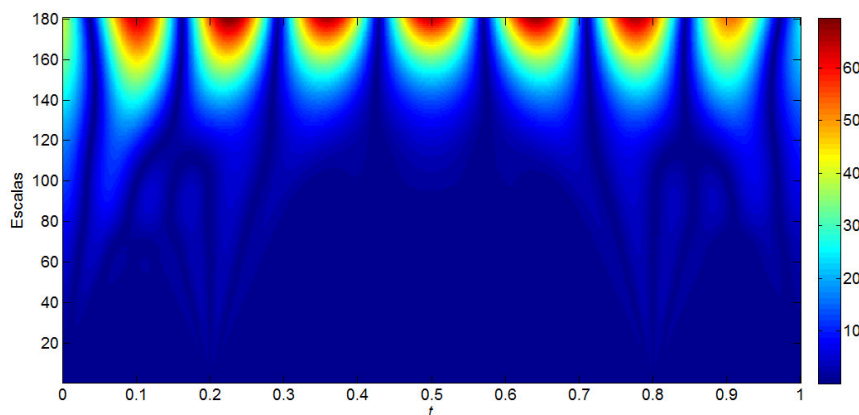


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Em escalas menores, as wavelets possuem uma localização melhor no tempo, e com isso, possuindo frequências mais altas (oscilam mais rápido) que irão detectar melhor os distúrbios curtos e rápidos presentes no sinal em análise. Em escalas maiores, as wavelets tornam-se menos localizadas no tempo, possuindo assim, frequências baixas (oscilam lentamente), detectando desse modo, os distúrbios lentos e longos.

A CWT também pode ser representada, de maneira prática, por um escalograma. Os escalogramas são gráficos que representam uma visualização bidimensional dos coeficientes wavelets, e são muito úteis quando se deseja analisar um sinal em várias escalas simultaneamente. A Figura 12 mostra o escalograma da CWT de x_3 para as escalas estabelecidas de 1 a 180, onde é mostrado o valor absoluto dos coeficientes obtidos pela CWT.

Figura 12- Valores absolutos dos coeficientes da CWT do sinal $x_3(t)$.



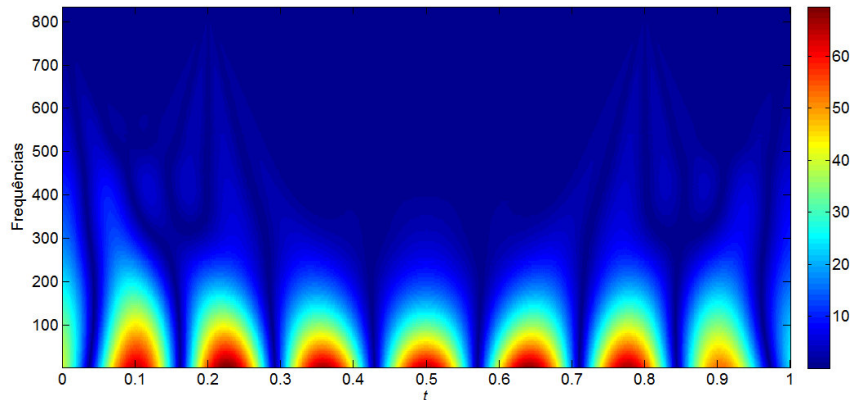
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Ao olhar para o escalograma, pode-se visualizar ambas as transições bruscas e oscilações no sinal. Essas transições bruscas afetam os coeficientes da CWT, principalmente em baixas escalas.

Conforme pode ser notada pela equação (38), os coeficientes da CWT não são afetados somente pelos valores de escala e de translação, a escolha da wavelet também os afeta. Por isso, quando a WT é utilizada para a análise de um sinal, a escolha da wavelet é fundamental.

Nesse exemplo o sinal x_3 foi amostrado a uma taxa de 1024 Hz. O valor da frequência central da wavelet de Morlet é 0,8125, como é mostrado na Tabela 1. Assim, utilizando a relação da pseudo-frequência definidas pela equação (36), pode-se obter uma representação tempo-frequencia de x_3 . Isso é mostrado na Figura 13.

Figura 13- Representação Tempo-Frequência de $x_3(t)$ utilizando a CWT.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A CWT é invertível e sua inversa é definida através da seguinte resolução de identidade (DAUBECHIES, 1992):

$$f = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \mathcal{W}f(u, s) \psi_{u,s}(t) ds du. \quad (39)$$

A equação (39) pode ser vista de duas maneiras diferentes (DAUBECHIES, 1992):

- 1) Um caminho de reconstrução de f , uma vez que a CWT é conhecida, ou,
- 2) Um caminho para reescrever f como uma superposição de wavelets $\psi_{u,s}$; os coeficientes dessa superposição são exatamente dados pela CWT da mesma.

2.4.2 Transformada wavelet discreta de tempo contínuo

Para discretizar a CWT, terão de ser adotados certos parâmetros. A CWT de uma função f , como vista anteriormente, tem a seguinte expressão:

$$\mathcal{W}f(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) |s|^{-1/2} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt,$$

Restringindo s e u somente a valores discretos:

- $s = s_0^m$;
- $u = nu_0 s_0^m$;
- $m, n \in \mathbb{Z}$;
- $s_0 > 1, u_0 > 0$ (valores fixos).

Para o parâmetro s é escolhido um número inteiro m cuja operação de escalamento é multiplicativa. Diferentes valores de m correspondem a wavelets de diferentes comprimentos e isso explica o porquê do parâmetro u depender de m (DAUBECHIES, 1992). Desse modo, a wavelet discretizada é expressa como:

$$\psi_{m,n}(t) = s_0^{-m/2} \psi(s_0^{-m} t - nu_0). \quad (40)$$

Assim pode se definir a DWT para o tempo contínuo:

Definição 6 (DWT para tempo contínuo): Seja $f(t)$ um sinal no tempo contínuo, a DWT de f (ou os coeficientes wavelet discreto $c_{m,n}$) é dada por:

$$c_{m,n} = \mathcal{W}f(nu_0 s_0^m, s_0^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) s_0^{-m/2} \psi(s_0^{-m/2} t - nu_0) dt, \quad (41)$$

onde $m, n \in \mathbb{Z}$ e $s_0 > 1$, $u_0 > 0$.

No caso da DWT o processo de reconstrução de f não é semelhante ao caso da CWT, onde se tem uma resolução de identidade. A reconstrução depende da escolha da wavelet-mãe ψ , e do processo de discretização realizado (DAUBECHIES, 1992).

A reconstrução de f depende da condição de estabilidade. Essa condição de estabilidade corresponde à reconstrução estável de f , e determina que sua energia no domínio wavelet deve ser proporcional a sua energia no domínio do tempo, desde que existam duas constantes positivas A e B , tais que $0 < A \leq B < \infty$ (POULARIKAS, 2010).

A condição de estabilidade corresponde à definição de *frames* (sistemas discretos, porém redundantes) (DAUBECHIES, 1992):

Definição 7 (Frame): Uma família de funções $\{\psi_{m,n}; m, n \in \mathbb{Z}\}$ do $L^2(\mathbb{R})$ é chamada de um *frame* se existem constantes A e B , com $0 < A \leq B < \infty$ tais que

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \quad (42)$$

A e B são chamadas cotas do *frame*.

Se $A = B$, então o *frame* é chamado um *frame* justo.

Se as wavelets-filhas $\{\psi_{m,n}; m, n \in \mathbb{Z}\}$ constituem um *frame*, então o seguinte resultado é válido (RIOUL; VETTERLI, 1991):

$$f(t) \cong \frac{2}{A+B} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{m,n} \psi_{m,n}. \quad (43)$$

A exatidão da reconstrução de f depende das cotas do *frame*. Quanto mais próximos, mais exata será a reconstrução. Quando $A = B = 1$, as wavelets-filhas $\psi_{j,k}$ constituem-se em uma base ortonormal. Neste caso, toda a redundância é removida dos processos de

representação e reconstrução de sinais e f pode ser reconstruída de forma exata por (DAUBECHIES, 1992):

$$f(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{m,n} \psi_{m,n}. \quad (44)$$

2.4.3 Transformada wavelet discreta de tempo discreto

A DWT de tempo discreto é semelhante à de tempo contínuo. O que muda é que a função $f(t)$ é discretizada para $f(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, a wavelet discretizada se torna:

$$\psi_{m,n}(k) = s_0^{-m/2} \psi(s_0^{-m} k - nu_0), \quad (45)$$

onde,

$$m, n, k, s_0, u_0 \in \mathbb{Z}, \quad s_0 > 1, u_0 > 0.$$

Logo, se terá a definição a seguir:

Definição 8 (DWT de tempo discreto): Seja $f(k)$ um sinal no tempo discreto, a DWT de f (ou os coeficientes wavelet discretos $c_{m,n}$) é dada por:

$$c_{m,n} = s_0^{-m/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \psi(s_0^{-m/2} k - nu_0) \quad (46)$$

onde $m, n, k, s_0, u_0 \in \mathbb{Z}$ e $s_0 > 1$, $u_0 > 0$.

Assim, como para o caso anterior, fazendo as mesmas considerações sobre a estabilidade do processo de reconstrução, $f(k)$ pode ser reconstruída de forma exata como na equação (43).

2.4.4 Transformada wavelet diádica ortonormal

Para uma escolha especial dos valores de ψ e de s_0 e u_0 , $\psi_{m,n}(t)$ pode-se constituir uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$, em particular se $s_0 = 2$ e $u_0 = 1$, então existe ψ , com boas propriedades de localização tempo-frequência, tal que:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} t - n), \quad (47)$$

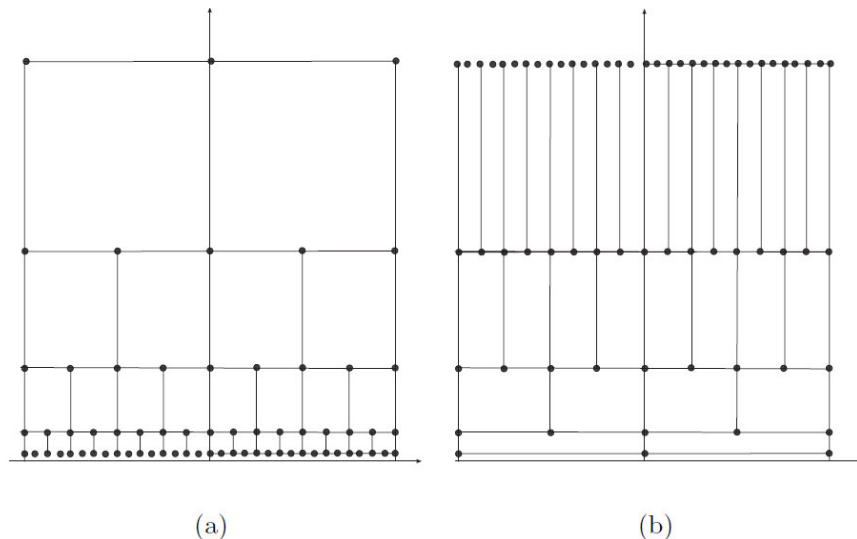
constitui uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Neste caso, a DWT é referida como transformada wavelet diádica ortonormal (MORETTIN, 1999).

Os coeficientes da DWT correspondem a pontos em uma grade reticulada bidimensional no plano tempo-escala. A grade é indexada por dois inteiros m (associado a escala) e n (associado ao tempo) (GOMES; VELHO; GOLDENSTEIN, 1997).

Assim, o reticulado é expresso por $\Delta_{s_0, u_0} = \{(s_0^m, n s_0^m u_0)\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$ e definido pelos parâmetros s_0 e u_0 (OLIVEIRA, 2007). No caso diádico $\Delta_{2,1} = \{(2^m, n 2^m)\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$ o mapeamento dos coeficientes wavelet é ilustrado na Figura 14. Avaliando o reticulado:

- Em frequências altas (baixas escalas), wavelets comprimidas são transladadas em pequenos passos, a fim de cobrir todo o intervalo de tempo. Deve-se, então, aumentar a frequência de amostragem.
- Em frequências baixas (altas escalas), wavelets dilatadas são transladadas em passos largos. Portanto, pode-se tomar amostras mais separadas no tempo.

Figura 14- (a) Reticulado tempo-escala. (b) Reticulado tempo-frequência.



Fonte: (GOMES; VELHO; GOLDENSTEIN, 1997).

O mapeamento permite observar que à medida que a escala aumenta, a quantidade de coeficientes wavelet para representar o sinal naquela escala é reduzida à metade em relação à escala anterior. Com isso, pode-se afirmar que na transformada diádica, à medida que o parâmetro escala aumenta, o intervalo de amostragem aumenta por um fator de 2. Conseqüentemente, a frequência com que o sinal é amostrado diminui à metade, em relação à que foi utilizada na escala anterior.

3 QUOCIENTES ENTRE POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI

3.1 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}, \quad (48)$$

é chamada de Sequência de Fibonacci (BOYER, 1974).

Os dois termos iniciais da sequência de Fibonacci são $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e, generalizando, os demais termos são obtidos por recorrência da seguinte maneira

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \quad (49)$$

A sequência de Fibonacci apareceu pela primeira vez (no ocidente) no livro *Liber Abaci* (ou livro do ábaco), que foi escrito em 1202 pelo italiano Leonardo Fibonacci, também chamado de Leonardo de Pisa (KOSHY, 2001). Na obra *Liber Abaci* é considerado um problema de crescimento populacional de coelhos, conhecido como Problema dos Coelhos:

Problema dos Coelhos: Suponha que há um par de coelhos recém-nascidos, um macho e uma fêmea. Encontrar o número de coelhos produzidos em um ano se:

- 1) cada par leva um mês para se tornar adulto;
- 2) cada par produz um par misto todo mês, a partir do segundo mês em diante; e
- 3) não há morte de coelhos durante o ano.

Resolvendo o problema dos coelhos: Suponha-se que o par original de coelhos nasceu dia 1 de Janeiro, então eles demoraram um mês para se tornarem adultos, e por isso, ainda há apenas 1 par de coelhos no dia 1 de Fevereiro. No dia 1 de Março, os coelhos possuem 2 meses de idade, e produziram um novo par misto, tendo um total de 2 pares de coelhos. Continuando assim, haverá 3 pares de coelhos no dia 1 de Abril, 5 pares no dia 1 de Maio, e assim por diante. Os resultados de 6 meses são mostrados na Tabela 2:

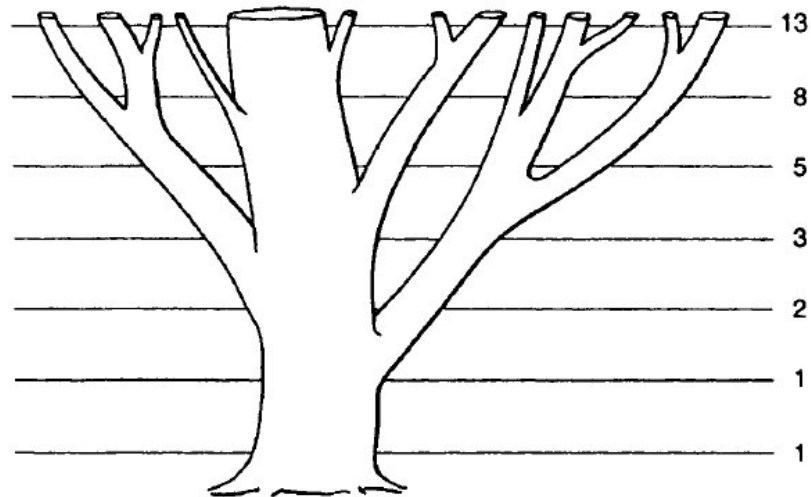
Tabela 2- Problema dos Coelhos.

Número de pares	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun
Adultos	0	1	1	2	3	5
Bebês	1	0	1	1	2	3
Total	1	1	2	3	5	8

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Olhando para a última linha da Tabela 2, pode-se notar o surgimento da sequência de Fibonacci. Curiosamente, a ocorrência dessa sequência é muito comum na natureza, como por exemplo, algumas árvores e plantas se ramificam como a sequência de Fibonacci, como é mostrado na Figura 15.

Figura 15- Ramificação de uma árvore segundo a Sequência de Fibonacci.

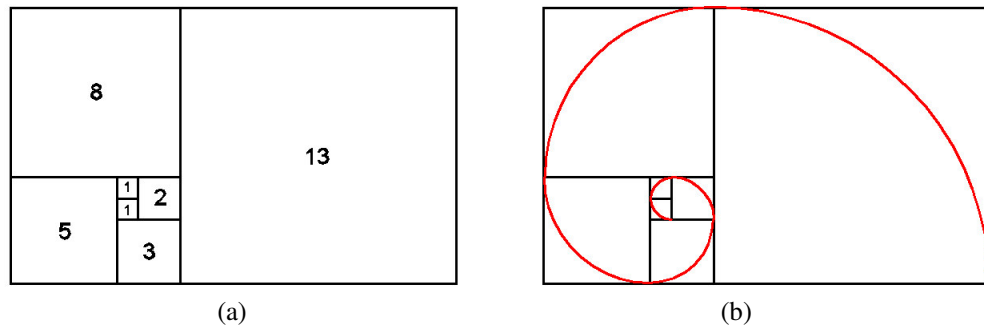


Fonte: (KOSHY, 2001).

Existem outros exemplos na natureza em que a sequência de Fibonacci surge espontaneamente, como no arranjo do cone da alcachofra, do abacaxi, ou no desenrolar da samambaia (HUNTLEY, 1985). Também é possível encontrar os números dessa sequência, no arranjo das folhas do ramo de uma planta ou até mesmo no número de pétalas das flores. Mais exemplos podem ser encontrados em (KOSHY, 2001).

Considerando dois quadrados de lado 1, pode-se obter um retângulo de lados 2 e 1. Adicionando-se a esse retângulo um quadrado de lado 2, obtém-se um novo retângulo de lados 3 e 2. Adicionando agora um quadrado de lado 3, obtém-se um retângulo de lados 5 e 3. Observe na Figura 16(a) que, os lados dos quadrados que foram adicionados para determinar os retângulos formam a sequência de Fibonacci.

Traçando $\frac{1}{4}$ de circunferência inscrita em cada um dos quadrados anteriores, encontrara-se uma espiral formada pela concordância de arcos cujos raios são os números da sequência de Fibonacci, como são mostrados na Figura 16(b). Essa mesma configuração da espiral pode ser encontrada nas folhas de uma bromélia, na concha de um nautilus marinho, no preenchimento das sementes dos girassóis, nas organizações das sementes das pinhas (HUNTLEY, 1985; KOSHY, 2001).

Figura 16- Espiral de Fibonacci.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Um fato curioso sobre a sequência de Fibonacci é que, dado um elemento dessa sequência, (quanto maior ele for) a razão entre ele e seu antecessor, converge para a razão áurea, ou conhecida também como o número de ouro (BOYER, 1974):

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,6180 \quad (50)$$

O número φ está presente em importantes obras da arquitetura clássica, em pinturas e esculturas renascentistas e na natureza, e até no corpo humano (HUNTLEY, 1985). Por isso, o número φ é considerado por muitos, um número mágico, que organiza o universo em uma mesma proporção, a divina proporção (KOSHY, 2001).

3.2 POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI

A Definição 9 apresenta uma classe de polinômios cujos coeficientes são números da sequência de Fibonacci. Esses polinômios são chamados de Polinômios com Coeficientes de Fibonacci (FCPs), e foram definidos por (GARTH; MILLS; MITCHELL, 2007).

Definição 9 (Polinômios com Coeficientes de Fibonacci): Seja a seguinte sequência polinomial $\{p_n(x)\}$:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n F_{k+1}x^{n-k}, \quad (51)$$

onde $p_0(x) = 1$. Os Polinômios dessa sequência são chamados de Polinômios com Coeficientes de Fibonacci.

A equação (51) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$p_n(x) = xp_{n-1}(x) + F_{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (52)$$

Assim,

$$p_0(x) = 1;$$

$$p_1(x) = x + 1;$$

$$p_2(x) = x^2 + x + 2;$$

$$p_3(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3;$$

$$p_4(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 5;$$

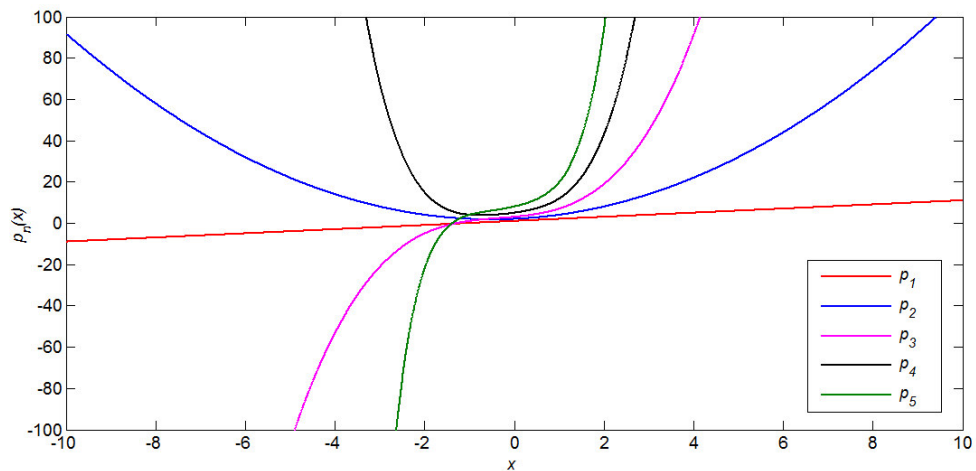
$$p_5(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 8;$$

⋮

$$p_n(x) = xp_{n-1}(x) + F_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Logo, dado um $p_n(x)$ qualquer, este é chamado de **Polinômio com Coeficientes de Fibonacci (FCP)** de ordem n (GARTH; MILLS; MITCHELL, 2007). A Figura 17 mostra o gráfico de $p_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Figura 17- Exemplos de FCPs.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Existe uma expressão explícita para encontrar F_n chamada de Fórmula de Binet, que foi desenvolvida pelo francês Jacques Binet (1786-1856). Essa fórmula é mostrada pelo Lema 1 (KOSHY, 2001).

Lema 1 (Fórmula de Binet): Seja $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ e $\tau = (1 - \sqrt{5})/2$. Então, para todo número natural n

$$F_n = \frac{\varphi^n - \tau^n}{\varphi - \tau}. \quad (53)$$

3.2.1 Zeros de polinômios com coeficientes de Fibonacci

Nessa seção, serão apresentadas e discutidas algumas propriedades sobre as raízes dos FCPs. Todas essas e outras propriedades dos FCPs, podem ser encontradas em Garth; Mills; Mitchell (2007), juntamente com suas demonstrações.

Propriedade 1. Se n é par, p_n não possui zeros reais, apenas complexos. Para n ímpar p_n tem exatamente um zero real, que se situa no intervalo $(-\varphi, -1]$.

Graficamente, os FCPs de grau par possuem a característica de uma parábola que não intercepta o eixo x , e os de grau ímpar são funções crescentes em todo o seu domínio, cortando o eixo x , no intervalo de $(-\varphi, -1]$. Essas características podem ser vistas na Figura 17. A Tabela 3 mostra zeros de alguns FCPs.

Tabela 3- Exemplos de zeros de alguns FCPs.

$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$-0.5 + 1.3229j$	$0.1378 + 1.5273j$	$0.5784 + 1.4629j$	$0.8556 + 1.3422j$
$-0.5 - 1.3229j$	$0.1378 - 1.5273j$	$0.5784 - 1.4629j$	$0.8556 - 1.3422j$
	-1.2757	$-1.0784 + .9260j$	$-0.6601 + 1.3543j$
		$-1.0784 - 0.9260j$	$-0.6601 - 1.3543j$
			-1.3912

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Considere agora, a Propriedade 2:

Propriedade 2. A medida que n aumenta sem limites, as raízes de p_n se aproximam em módulo de φ .

A Tabela 4 mostra os resultados do módulo dos zeros de p_n , para $n = 2, \dots, 9$. Nessa tabela, são considerados apenas um dos valores dos zeros complexos conjugados. Os valores em negrito se referem ao zero real. Como se pode notar, quanto maior for o valor de n , mais os zeros se aproximam de φ em módulo.

Tabela 4- Valor absoluto dos zeros de alguns FCPs.

$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
1.4142	1.5335	1.5731	1.5917	1.6012	1.6066	1.6099	1.6121
	1.2757	1.4214	1.5066	1.5478	1.5710	1.5849	1.5938
			1.3912	1.4549	1.5079	1.5408	1.5619
					1.4498	1.4831	1.5167
							1.4844

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Outra característica importante a ser destacada sobre os FCPs é que eles não possuem zeros racionais para $n \geq 2$ (GARTH; MILLS; MITCHELL, 2007).

3.3 QUOCIENTES ENTRE POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI

Quando se faz a divisão entre dois FCPs distintos e em seguida calcula-se a k -ésima derivada no mesmo, observa-se que o resultado se assemelha a uma função $p_{m,n}^k$ que têm a característica de uma onda de curta duração, ou seja, pode-se obter funções ondas aplicando-se a seguinte regra:

$$p_{m,n}^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{p_m(x)}{p_n(x)} \right], \quad (54)$$

sendo que $p_{m,n}^k$ é a função gerada; k é a ordem da derivada; p_m e p_n são os FCPs de ordem m e n respectivamente. Mas, como pode ser visto na Seção 3.3.1, essa regra não se aplica a qualquer divisão aleatória dos FCPs.

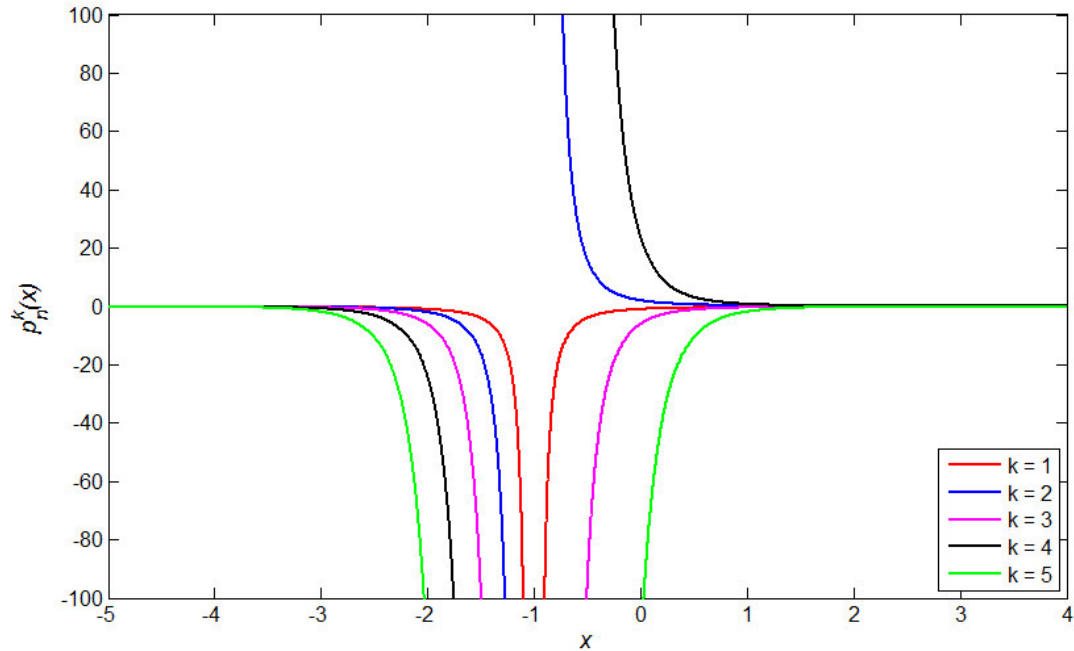
3.3.1 Resultados de quocientes

Adiante, nas Figuras 18-23 são mostrados alguns resultados de quocientes entre FCPs. Nesses resultados, os quocientes considerados seguem uma regra específica, definida pela equação (55). Os respectivos gráficos dos quocientes são plotados em sequência.

$$p_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{p_n(x)}{p_{n+1}(x)} \right], \quad n = 0, \dots, 5, \quad k = 1, \dots, 5. \quad (55)$$

$$\# n = 0 \rightarrow p_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{p_0(x)}{p_1(x)} \right].$$

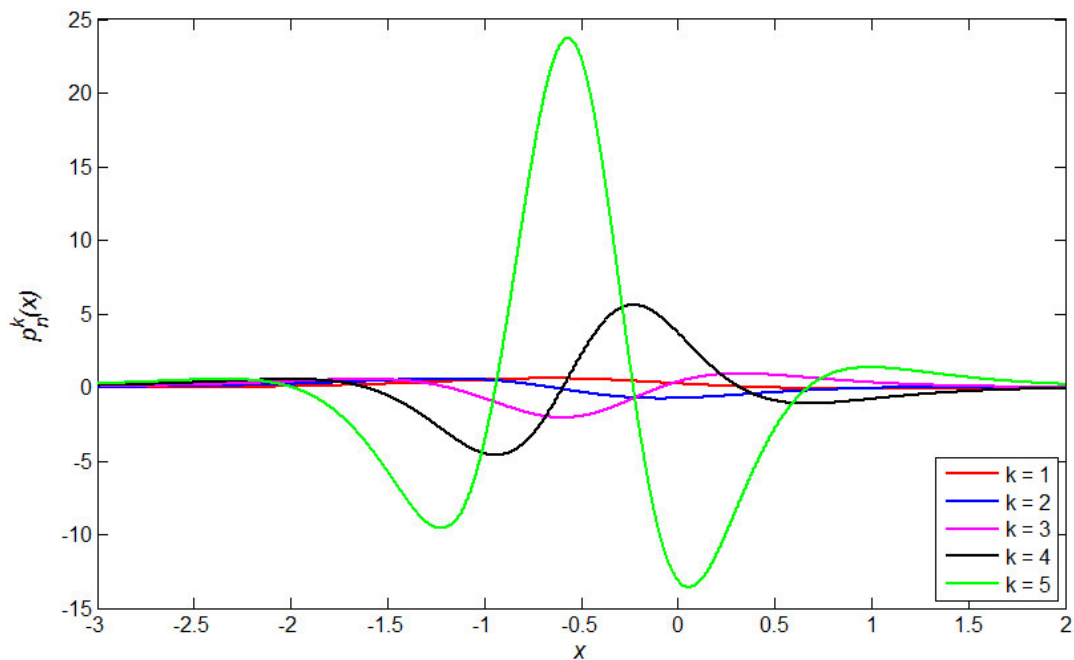
Figura 18- Gráfico de $p_n^k(x)$ para $n = 0$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

$$\# n = 1 \rightarrow p_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \right].$$

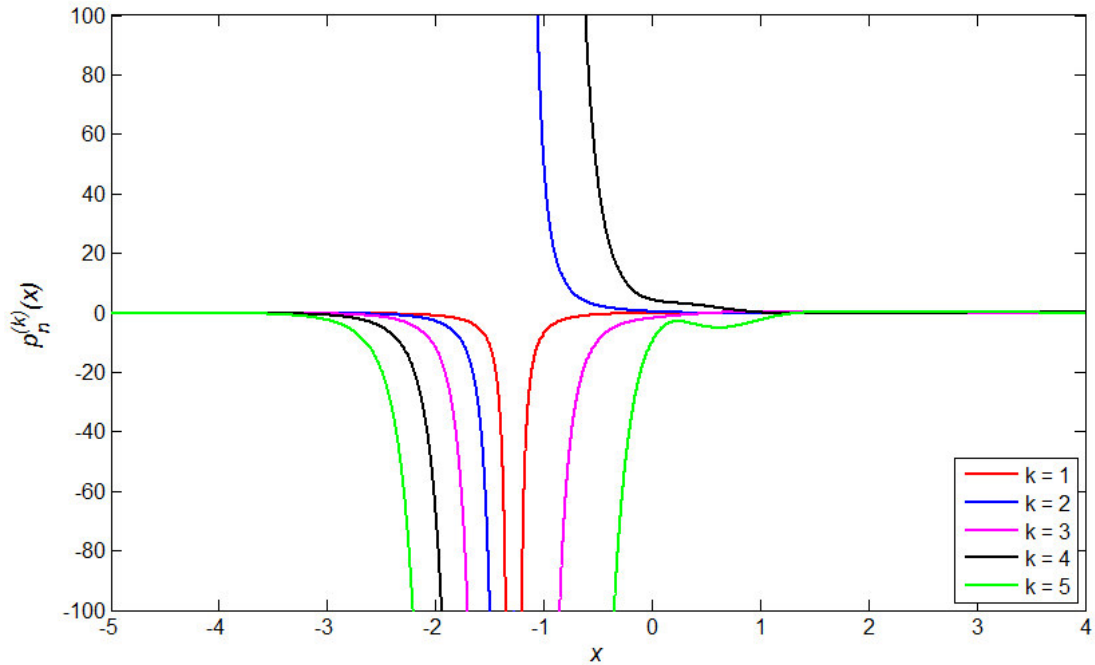
Figura 19- Gráfico de $p_n^k(x)$ para $n = 1$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

$$\# n = 2 \rightarrow p_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{p_2(x)}{p_3(x)} \right].$$

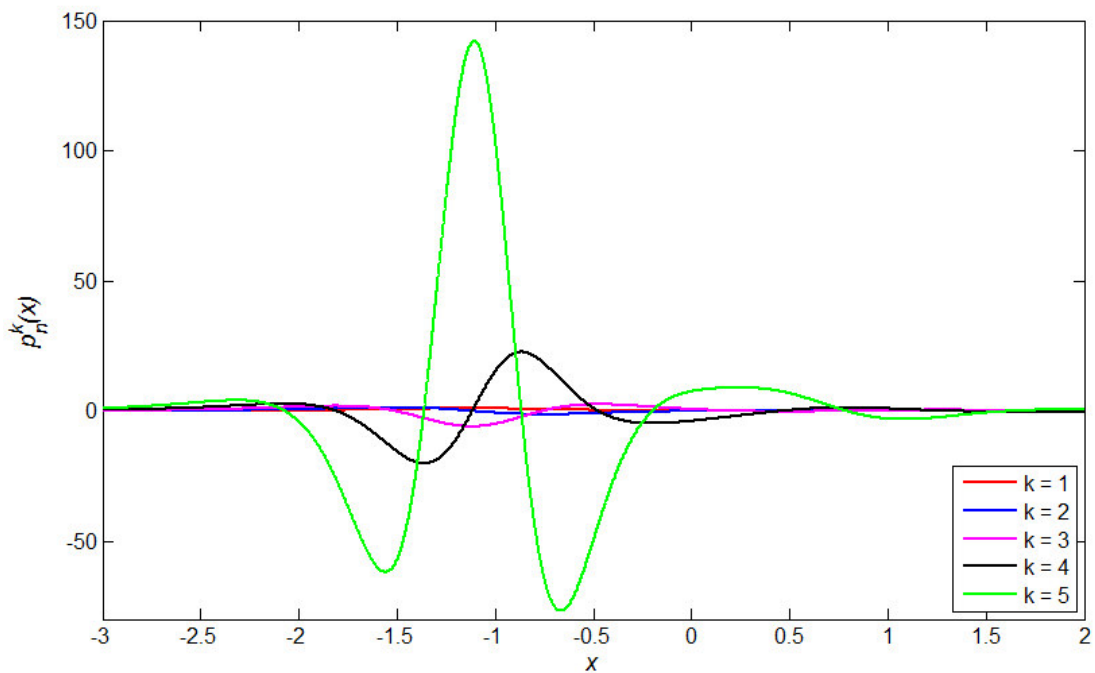
Figura 20- Gráfico de $p_n^k(x)$ para $n = 2$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

$$\# n = 3 \rightarrow p_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{p_3(x)}{p_4(x)} \right].$$

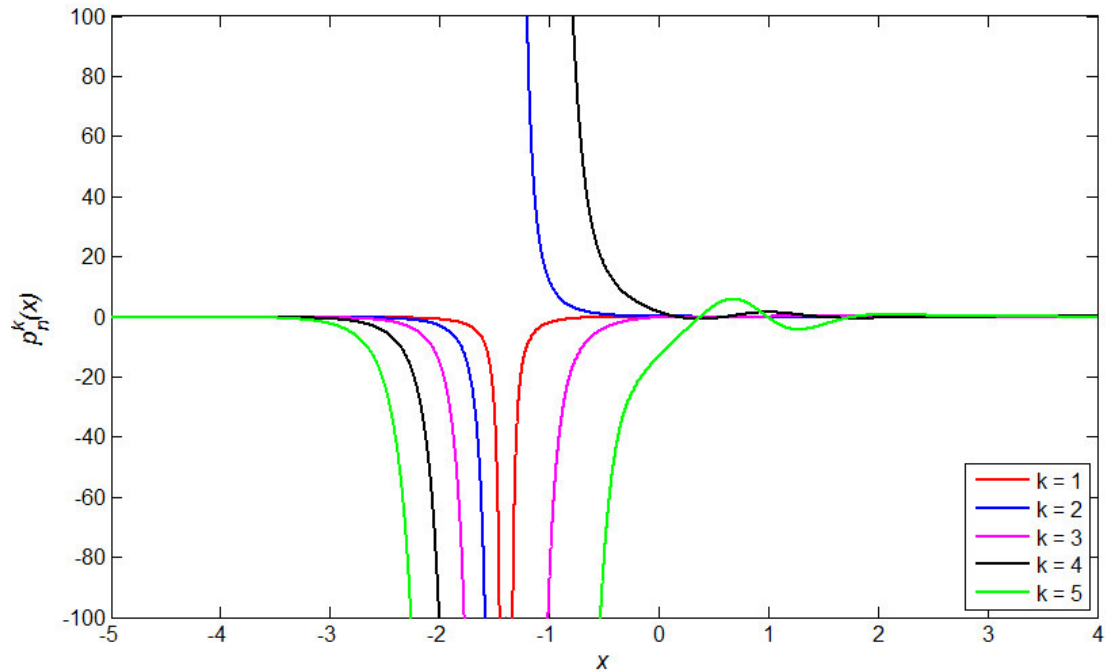
Figura 21- Gráfico de $p_n^k(x)$ para $n = 3$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

$$\# n = 4 \rightarrow p_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{p_4(x)}{p_5(x)} \right].$$

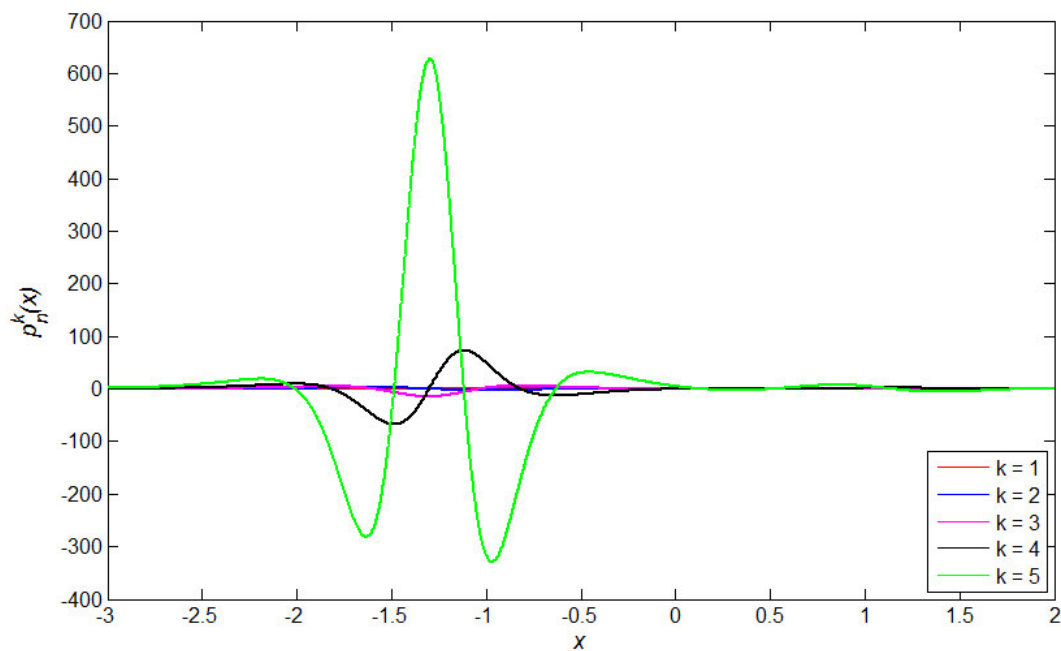
Figura 22- Gráfico de $p_n^k(x)$ para $n = 4$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

$$\# n = 5 \rightarrow p_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{p_5(x)}{p_6(x)} \right].$$

Figura 23- Gráfico de $p_n^k(x)$ para $n = 5$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

3.3.2 Discussões sobre os resultados obtidos

Em alguns casos, quando se realiza o quociente entre dois FCPs distintos e, em seguida, calcula-se a k -ésima derivada do mesmo, observam-se diferentes tipos de resultados, conforme pode ser visto nas Figuras de 18-23. Destacam-se dois deles:

Resultados do tipo 1: Nesse tipo de resultado, englobam-se as funções que possuem a forma de uma onda de curta duração. Uma característica em comum entre essas funções é que, o polinômio do denominador possui grau par.

Resultados do tipo 2: O quociente entre dois FCPs distintos geram funções descontínuas em $(-\varphi, -1]$. Isso também se aplica para sua k -ésima derivada. Ao contrário dos resultados do tipo 1, o polinômio do denominador nesses resultados, possui grau ímpar.

Para os resultados do tipo 1, pode-se notar que, conforme a ordem da derivada vai aumentando as amplitudes das funções também crescem, ao contrário da localização das mesmas, que parece não variar muito. Geometricamente, pode-se concluir, então, que a amplitude A_m da onda encontrada é diretamente proporcional a ordem k da derivada, ou seja,

$$A_m \propto k. \quad (56)$$

As características dos resultados do tipo 1 e do tipo 2, se moldam pela estrutura da derivada de funções quociente, e também da Propriedade 1 dos FCPs. Nos resultados do tipo 2 são geradas funções descontínuas. Isso ocorre porque os polinômios no denominador possuem grau ímpar. Levando-se em conta, a regra da derivada do quociente e a Propriedade 1 dos FCPs, pode-se concluir que, as funções dessa classe de resultado terão um zero real α , tal que

$$-\varphi < \alpha \leq 1. \quad (57)$$

Assim, como o polinômio no denominador não pode assumir valor nulo, a função gerada será descontínua em $x = \alpha$. Isso explica a questão da descontinuidade dos resultados do tipo 2.

Nos resultados do tipo 1, os polinômios no denominador possuem grau par, assim os mesmos não possuíam um zero real. Por isso, não existem descontinuidades nesse tipo de resultado, gerando então, funções contínuas. As características desses resultados explicam-se pela estrutura das funções geradas. Nas funções com características de ondas de curtas durações, sempre o grau do denominador será maior do que o numerador, e isso se aplica

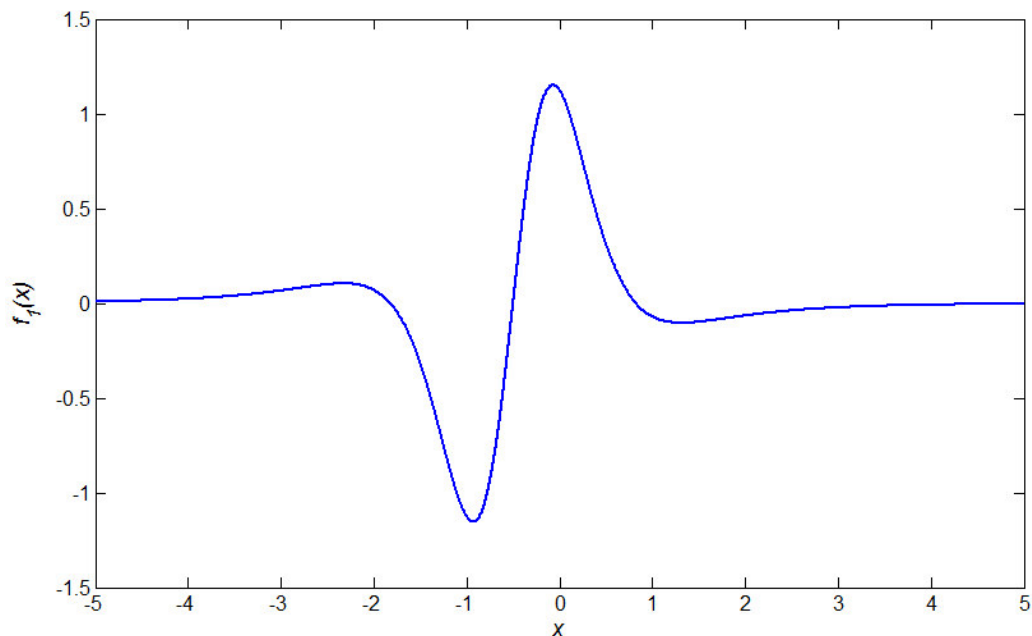
também, para suas sucessivas derivadas. Com isso, a medida em que a variável x cresce em módulo, a função p_n^k tende para zero. Por isso, as ondas possuem suporte compacto.

Existem ainda, outros tipos de resultados que se diferenciam daqueles do tipo 1, e tipo 2. Nesse trabalho, será levado em consideração, as funções contidas nos resultados do tipo 1.

As características dos resultados do tipo 1, não são apenas uma exclusividade da regra de divisão definida pela equação (55), pois elas também ocorrem em outras regras de quocientes, como podem ser observados nos Exemplos de 7 a 11, onde se tem diferentes regras de quocientes, e também com diferentes ordens de derivadas, que geram uma onda de curta duração.

Exemplo 7: $f_1(x) = \frac{d^3}{dx^3} \left[\frac{p_0(x)}{p_2(x)} \right]$.

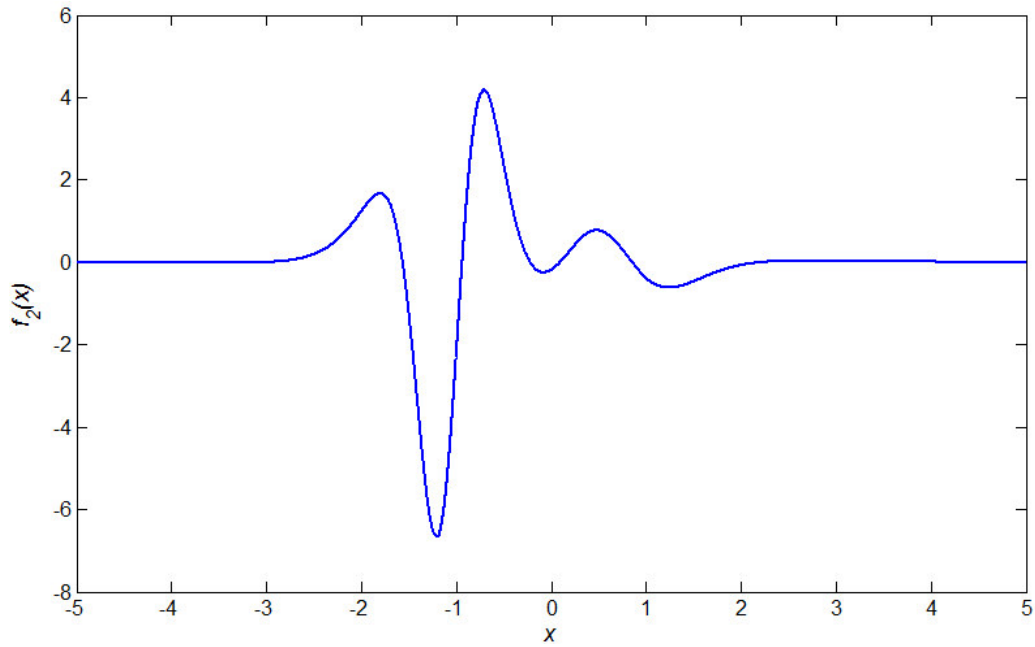
Figura 24- Gráfico de $f_1(x)$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Exemplo 8: $f_2(x) = \frac{d^4}{dx^4} \left[\frac{p_1(x)}{p_4(x)} \right]$.

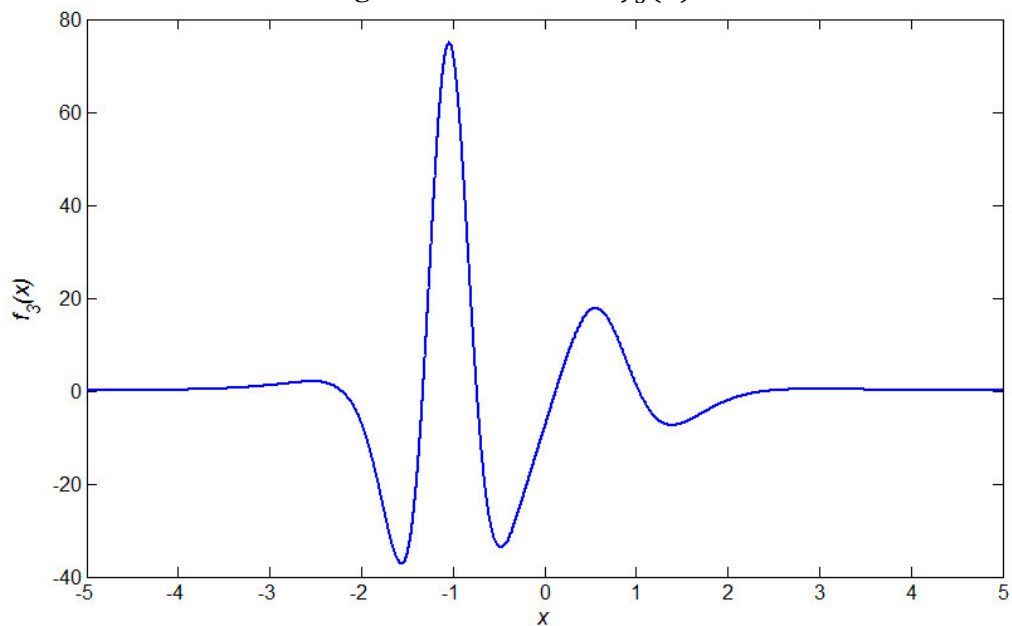
Figura 25- Gráfico de $f_2(x)$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Exemplo 9: $f_3(x) = \frac{d^4}{dx^4} \left[\frac{p_7(x)}{p_4(x)} \right]$.

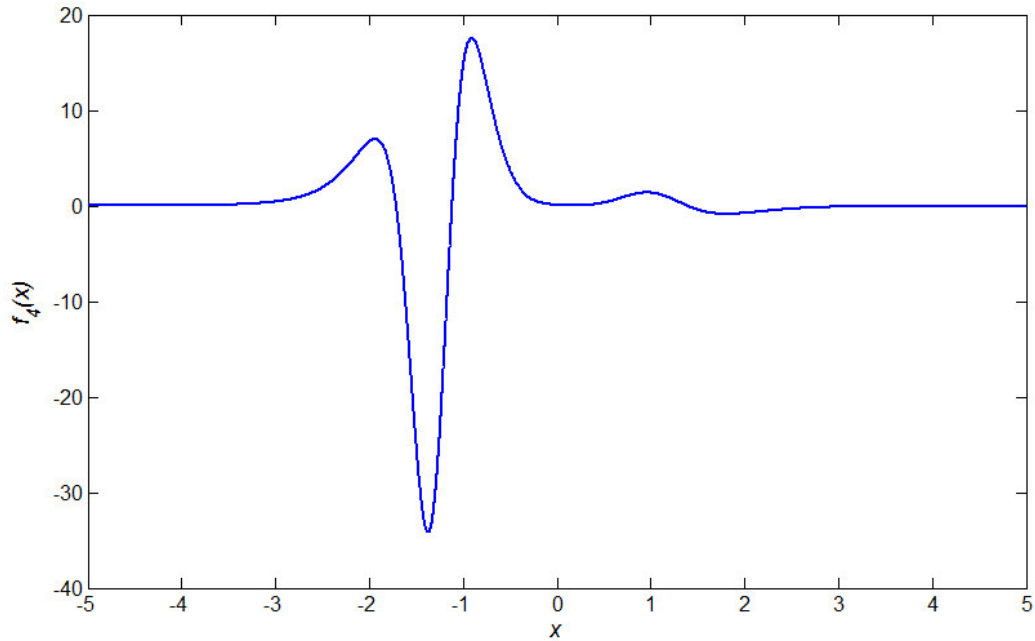
Figura 26- Gráfico de $f_3(x)$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Exemplo 10: $f_4(x) = \frac{d^4}{dx^4} \left[\frac{p_7(x)}{p_6(x)} \right]$.

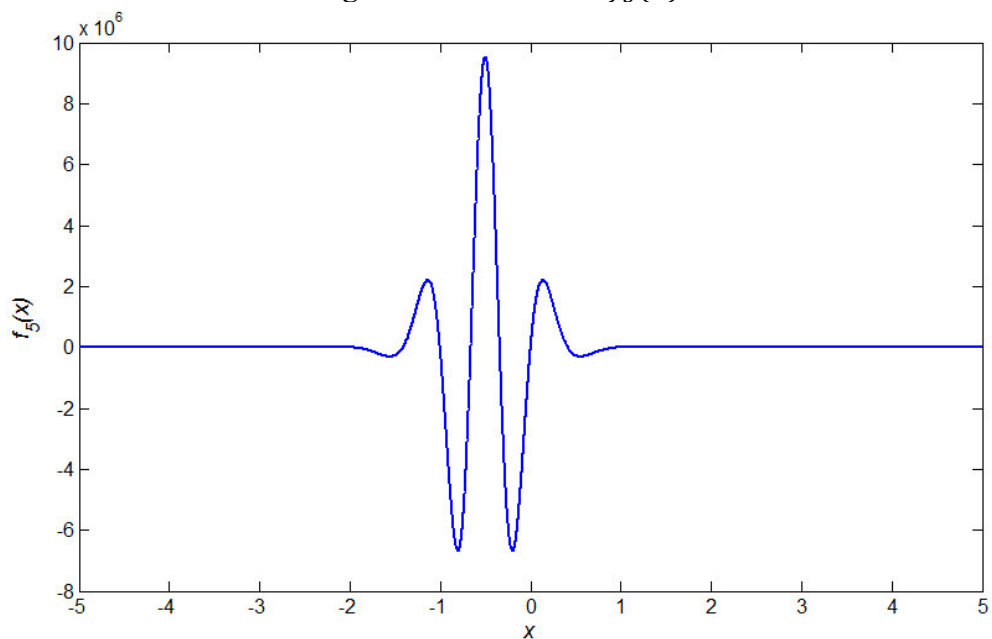
Figura 27- Gráfico de $f_4(x)$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Exemplo 11: $f_5(x) = \frac{d^{12}}{dx^{12}} \left[\frac{p_0(x)}{p_2(x)} \right]$.

Figura 28- Gráfico de $f_5(x)$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Assim, certos quocientes entre dois FCPs, e algumas de suas derivadas, geram uma função com as características de uma onda de curta duração. Essas funções possuem características semelhantes àquelas das funções wavelets. Precisamente, as mesmas têm decaimento rápido para mais ou menos infinito, oscilam dentro de um suporte compacto, e também possuem energia finita. Além do mais, essas funções também possuem valor médio nulo, como é descrito pela equação (28), ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{p_m(x)}{p_n(x)} \right] dx = 0, \quad (58)$$

para certos valores de k , com n par.

Portanto, é razoável fazer a seguinte dedução: **Possivelmente, as funções pertencentes aos resultados do tipo 1 são wavelets.**

No próximo capítulo serão discutidas as relações entre os FCPs e as wavelets.

4 UMA FAMÍLIA DE WAVELETS GERADA POR POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI

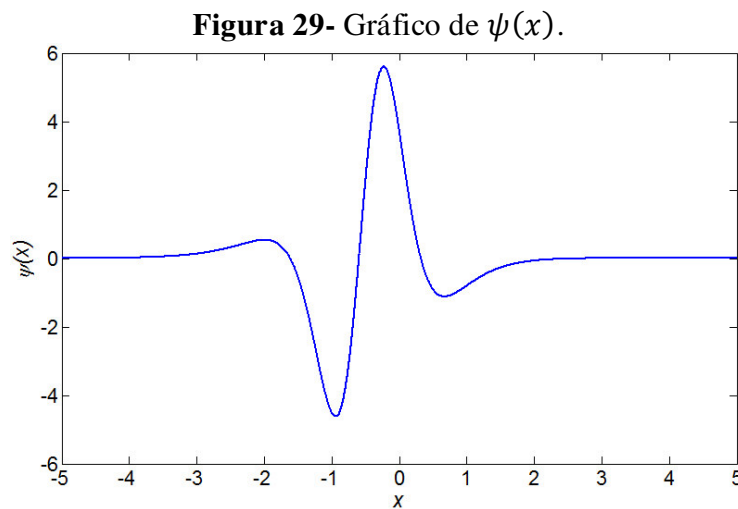
Nesse capítulo é mostrada uma nova família de wavelets, denominada de Golden. As wavelets dessa família são construídas aplicando a k -ésima derivada do quociente entre dois FCPs distintos. Na próxima seção é apresentado um exemplo particular de uma wavelet gerada por esses polinômios.

4.1 UMA WAVELET GERADA A PARTIR DE POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI

Considere a seguinte função ψ :

$$\psi(x) = \frac{24(x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 30x^2 - 5x + 5)}{(x^2 + x + 2)^5}. \quad (59)$$

O gráfico de $\psi(x)$ é mostrado na Figura 34 abaixo:



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Olhando para a Figura 29, pode-se notar que a mesma possui uma grande semelhança com uma função wavelet, isto é, ψ possui o formato de uma onda de curta duração. A função ψ é obtida pela derivada de ordem 4, do quociente entre p_1 e p_2 , ou seja:

$$\psi(x) = \frac{d^4}{dx^4} \left[\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \right]. \quad (60)$$

Para que a função ψ seja considerada uma wavelet, ela deve satisfazer a condição de admissibilidade apresentada na Definição 4. Na próxima seção, é verificado o cálculo dessa condição analiticamente.

4.1.1 Verificando a condição de admissibilidade

Antes de calcular a condição de admissibilidade diretamente, é bom verificar se ψ possui energia finita, pois se essa mesma for ilimitada, não terá nenhum sentido calcular a referente condição. Calculando a energia de ψ obtém-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \frac{46080\pi}{2401\sqrt{7}} < +\infty. \quad (61)$$

Desse modo, pode-se concluir que ψ possui energia finita.

A condição de admissibilidade é dada pela equação (27). Note que, primeiramente é preciso realizar o cálculo da FT de ψ , que é dada por:

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-j\omega x} dx. \quad (62)$$

Para o cálculo de $\hat{\psi}$, serão usadas as seguintes propriedades da FT (HSU, 1972):

Propriedade da linearidade: Seja $\hat{f}(\omega)$, $\hat{f}_1(\omega)$ e $\hat{f}_2(\omega)$ as FTs de $f(x)$, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ respectivamente, a_1 e a_2 duas constantes arbitrárias e $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$, então:

$$\hat{f}(\omega) = a_1 \hat{f}_1(\omega) + a_2 \hat{f}_2(\omega). \quad (63)$$

Propriedade da derivada: Seja $\hat{f}(\omega)$ a FT de $f(x)$. Se $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, então,

$$\hat{f}^{(n)}(\omega) = (j\omega)^n \hat{f}(\omega), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (64)$$

onde $\hat{f}^{(n)}$ é a FT da derivada de ordem n de f .

Para fins de simplificação, será tomado $\lambda(x)$, tal que $\lambda(x) = p_1(x)/p_2(x)$. A propriedade da derivada da FT, descrita pela equação (64), irá fornecer uma simplificação para o cálculo de $\hat{\psi}$, pois, como pode ser observado na Figura 30, o gráfico de $\lambda(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$. Logo, pode-se afirmar a seguinte expressão:

$$\hat{\psi}(\omega) = (j\omega)^n \hat{\lambda}(\omega). \quad (65)$$

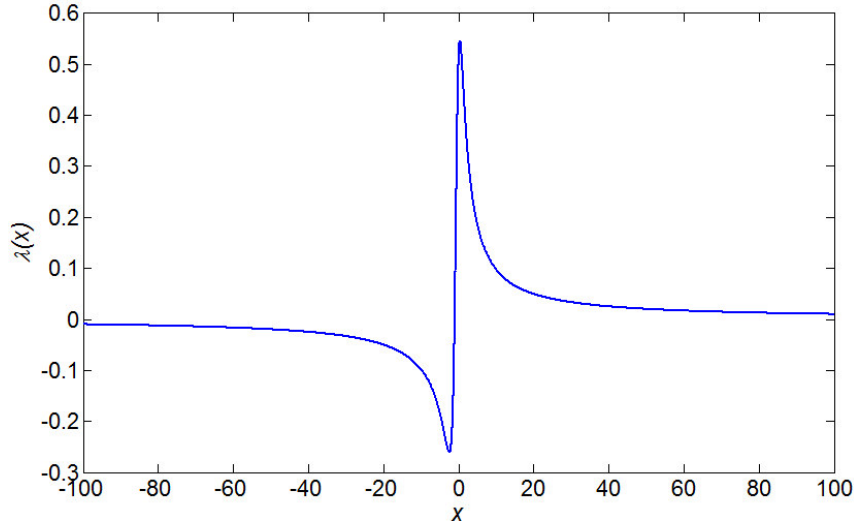
Portanto, o cálculo de $\hat{\psi}$, se resume primeiramente, em calcular $\hat{\lambda}$. Reescrevendo λ de uma outra forma, obtém-se:

$$\lambda(x) = \frac{4x}{(2x+1)^2 + 7} + \frac{4}{(2x+1)^2 + 7} \quad (66)$$

Assim, pode-se aplicar a propriedade de linearidade da FT na equação (66). Desse modo, já reorganizando a equação:

$$\hat{\lambda}(\omega) = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(2x+1)^2 + 7} e^{-j\omega x} dx + 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2 + 7} e^{-j\omega x} dx. \quad (67)$$

Figura 30- Gráfico de $\lambda(x)$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Chamando $s = 2x + 1 \Rightarrow x = (s - 1)/2 \Rightarrow ds = 2dx$, e substituindo isso na equação (67):

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(\omega) &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{s-1}{2}\right) \frac{1}{s^2+7} e^{-j\omega\left(\frac{s-1}{2}\right)} \frac{ds}{2} + 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2+7} e^{-j\omega\left(\frac{s-1}{2}\right)} \frac{ds}{2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s-1}{s^2+7} e^{-j(\omega/2)s} e^{j(\omega/2)} ds + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2+7} e^{-j(\omega/2)s} e^{j(\omega/2)} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{s^2+7} e^{-j(\omega/2)s} e^{j(\omega/2)} ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2+7} e^{-j(\omega/2)s} e^{j(\omega/2)} ds \\ &= e^{j(\omega/2)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2+7} s e^{-j(\omega/2)s} ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2+7} e^{-j(\omega/2)s} ds \right], \end{aligned}$$

isto é,

$$\hat{\lambda}(\omega) = e^{j(\omega/2)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2+7} s e^{-j(\omega/2)s} ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2+7} e^{-j(\omega/2)s} ds \right]. \quad (68)$$

Nomeando as funções no integrando,

$$\lambda_1(s) = \frac{1}{s^2+7}, \quad \lambda_2(s) = s, \quad \lambda_3(s) = \lambda_1(s)\lambda_2(s),$$

e substituindo estes na equação (68) resulta em:

$$\hat{\lambda}(\xi) = e^{j\xi} [\hat{\lambda}_3(\xi) + \hat{\lambda}_1(\xi)]. \quad (69)$$

onde foi considerada a seguinte substituição: $\xi = \omega/2$.

Para resolver a equação (69), podem ser utilizados alguns resultados úteis que simplificaram a sua resolução. Esses resultados, levam em consideração a FT de algumas funções já conhecidas e exploradas na literatura especializada, sendo encontradas, por exemplo, em (HSU, 1972).

Resultados úteis: Sejam $\hat{f}(\omega)$, $\hat{f}_1(\omega)$ e $\hat{f}_2(\omega)$, as respectivas FTs de $f(x)$, $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Os seguintes resultados se verificam:

$$f(x) = f_1(x)f_2(x) \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_1(y) \hat{f}_2(\omega - y) dy, \quad (70)$$

$$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}, \quad a > 0, \quad (71)$$

$$f(x) = x \Rightarrow \hat{f}(\omega) = 2\pi j \delta'(\omega). \quad (72)$$

Na equação (72), aparece um termo que indica a derivada de δ . A função δ é conhecida como impulso unitário, ou Delta de Dirac, que é definida da seguinte forma (HSU, 1972):

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (73)$$

onde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (74)$$

Uma propriedade importante de δ é a de filtragem (HSU, 1972):

Propriedade de filtragem de δ : Sejam $\phi(x)$ uma função compacta, suave e diferenciável, e x_0 uma constante arbitrária, então valem as seguintes relações:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \phi(x) dx = \phi(x_0). \quad (75)$$

Continuando com o cálculo de $\hat{\lambda}$, observe que os resultados de $\hat{\lambda}_1$ e $\hat{\lambda}_2$ são explícitos pelas equações (71) e (72) respectivamente. Entretanto, o resultado de $\hat{\lambda}_3$ dependerá da convolução definida pela equação (70). Assim, $\hat{\lambda}_3$ pode ser encontrada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_3(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\lambda}_1(y) \hat{\lambda}_2(\xi - y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}|y|} \right) \left(2\pi j \delta'(\xi - y) \right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= j \frac{\pi}{\sqrt{7}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{7}|y|} \delta'(\xi - y) dy \\
&= j \frac{\pi}{\sqrt{7}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(\xi - y) e^{-\sqrt{7}|y|} dy
\end{aligned}$$

isto é,

$$\hat{\lambda}_3(\xi) = j \frac{\pi}{\sqrt{7}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(\xi - y) e^{-\sqrt{7}|y|} dy. \quad (76)$$

A integral,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(\xi - y) e^{-\sqrt{7}|y|} dy,$$

é uma convolução da derivada da função impulso com $e^{-\sqrt{7}|y|}$. Como δ é uma função par, pode-se afirmar que

$$\delta(-x) = \delta(x). \quad (77)$$

Derivando a equação (77) em ambos os lados, e fazendo-se os cálculos, pode-se chegar ao seguinte resultado:

$$\delta'(-x) = -\delta'(x). \quad (78)$$

Utilizando o resultado da equação (78) na equação (76), obtém-se:

$$\hat{\lambda}_3(\xi) = -j \frac{\pi}{\sqrt{7}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(y - \xi) e^{-\sqrt{7}|y|} dy. \quad (79)$$

A função δ' também possui uma propriedade de filtragem, como na equação (75), porém, ela relaciona a derivada da função ϕ (OLDHAM; MYLAND; SPANIER, 2010).

Propriedade de filtragem de δ' : Seja ϕ uma função compacta, suave e diferenciável, e x_0 uma constante arbitrária, então valem as seguintes relações:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x - x_0) \phi(x) dx = -\left. \frac{d}{dy} (\phi) \right|_{y=x_0}. \quad (80)$$

Assim, com o resultado da equação (80), pode-se resolver a equação (79), que resultará em:

$$\hat{\lambda}_3(\xi) = -\frac{j\pi|\xi|e^{-\sqrt{7}|\xi|}}{\xi}. \quad (81)$$

Desse modo, considerando os resultados das equações (71) e (81), pode-se resolver a equação (69):

$$\hat{\lambda}(\xi) = e^{j\xi} \left[-\frac{j\pi|\xi| e^{-\sqrt{7}|\xi|}}{\xi} + \frac{\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}|\xi|} \right], \quad (82)$$

que simplificando, e voltando para a variável ω , resulta em:

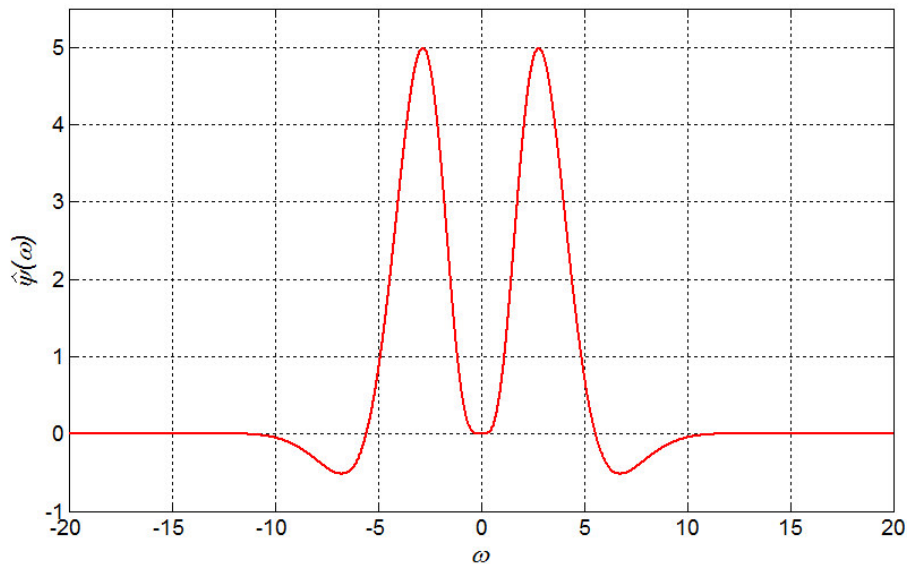
$$\hat{\lambda}(\omega) = \frac{\pi}{\sqrt{7}\omega} e^{\frac{1}{2}(j\omega - \sqrt{7}|\omega|)} (\omega - j\sqrt{7}|\omega|), \quad (83)$$

Substituindo a equação (83) na equação (65), obtemos então a FT de ψ :

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{\pi}{\sqrt{7}} \omega^3 e^{\frac{1}{2}(j\omega - \sqrt{7}|\omega|)} (\omega - j\sqrt{7}|\omega|). \quad (84)$$

O gráfico da parte real de $\hat{\psi}(\omega)$ é mostrado na Figura 31.

Figura 31- Gráfico da parte real de $\hat{\psi}(\omega)$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Agora, seguindo com o cálculo da condição de admissibilidade deve-se calcular $|\hat{\psi}|^2$. Da teoria dos números complexos, o módulo de um número complexo $z = a + jb$ é definido como sendo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

logo, deve-se escrever $\hat{\psi}$ na forma $a + bi$. Utilizando a identidade de Euler, definida na equação (3), e fazendo as devidas operações, resultará na expressão:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) = & \frac{\pi}{\sqrt{7}} \omega^3 e^{\frac{-\sqrt{7}|\omega|}{2}} (\omega \cos(\omega/2) + \sqrt{7}|\omega| \sen(\omega/2)) \\ & + j \frac{\pi}{\sqrt{7}} \omega^3 e^{\frac{-\sqrt{7}|\omega|}{2}} (\omega \sen(\omega/2) - \sqrt{7}|\omega| \cos(\omega/2)). \end{aligned} \quad (85)$$

Agora é possível encontrar $|\hat{\psi}|$, que fazendo as devidas operações e simplificações se obterá o seguinte resultado:

$$|\hat{\psi}(\omega)| = \sqrt{\frac{8}{7}\pi^2\omega^8 e^{-\sqrt{7}|\omega|}}.$$

Portanto,

$$|\hat{\psi}(\omega)|^2 = \frac{8}{7}\pi^2\omega^8 e^{-\sqrt{7}|\omega|}. \quad (86)$$

Com o resultado da equação (86), pode-se calcular a condição de admissibilidade de ψ , definida pela equação (27):

$$\begin{aligned} C_\psi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8}{7|\omega|} \pi^2 \omega^8 e^{-\sqrt{7}|\omega|} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8\pi^2 \omega^8 e^{-\sqrt{7}|\omega|}}{7|\omega|} d\omega \\ &= \frac{8\pi^2}{7} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^8 e^{-\sqrt{7}|\omega|}}{|\omega|} d\omega, \end{aligned}$$

ou seja,

$$C_\psi = \frac{8\pi^2}{7} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^8 e^{-\sqrt{7}|\omega|}}{|\omega|} d\omega. \quad (87)$$

A função

$$g(\omega) = \frac{\omega^8 e^{-\sqrt{7}|\omega|}}{|\omega|},$$

possui uma descontinuidade em $\omega = 0$, logo produzirá uma banda imprópria:

$$C_\psi = \frac{8\pi^2}{7} \left[\int_{-\infty}^0 g(\omega) d\omega + \int_0^{+\infty} g(\omega) d\omega \right].$$

Por questões de simplificação e organização:

$$A = \int_{-\infty}^0 g(\omega) d\omega, \quad B = \int_0^{+\infty} g(\omega) d\omega.$$

Assim,

$$C_\psi = \frac{8\pi^2}{7} [A + B]. \quad (88)$$

Será feito o cálculo primeiramente de A .

Como $-\infty < \omega < 0$, então o seguinte resultado é válido:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-\infty}^0 \frac{\omega^8 e^{-\sqrt{7}|\omega|}}{|\omega|} d\omega \\
&= \int_{-\infty}^0 -\omega^7 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega \\
&= - \int_{-\infty}^0 \omega^7 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega,
\end{aligned}$$

isto, é,

$$A = - \int_{-\infty}^0 \omega^7 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega.$$

Fazendo a integração por partes, $\int u dv = uv - \int v du$ para o integrando $\omega^7 e^{\sqrt{7}\omega}$, onde

$$\begin{aligned}
u &= \omega^7, & dv &= e^{\sqrt{7}\omega} d\omega \\
du &= 7\omega^6 d\omega, & v &= \frac{e^{\sqrt{7}\omega}}{\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

se resulta em:

$$A = \lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(-\frac{1}{\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}\omega} \omega^7 \right) \Big|_a^b + \frac{7}{\sqrt{7}} \int_{-\infty}^0 \omega^6 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega.$$

Analisando $\lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(-\frac{1}{\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}\omega} \omega^7 \right) \Big|_a^b$, tem-se que

$$\lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(-\frac{1}{\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}\omega} \omega^7 \right) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}b} b^7 \right) - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}a} a^7 \right) = 0.$$

Assim,

$$A = \frac{7}{\sqrt{7}} \int_{-\infty}^0 \omega^6 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega.$$

Agora, seguindo com os cálculos, também com integração por partes, para o integrando $\omega^6 e^{\sqrt{7}\omega}$, onde

$$\begin{aligned}
u &= \omega^6, & dv &= e^{\sqrt{7}\omega} d\omega \\
du &= 6\omega^5 d\omega, & v &= \frac{e^{\sqrt{7}\omega}}{\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

se obtém,

$$A = \lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(e^{\sqrt{7}\omega} \omega^6 \right) \Big|_a^b - 6 \int_{-\infty}^0 \omega^5 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega.$$

Analisando $\lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(e^{\sqrt{7}\omega} \omega^6 \right) \Big|_a^b$, tem-se que

$$\lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(e^{\sqrt{7}\omega} \omega^6 \right) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow 0^-} \left(e^{\sqrt{7}b} b^6 \right) - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(e^{\sqrt{7}a} a^6 \right) = 0.$$

Desse modo,

$$A = -6 \int_{-\infty}^0 \omega^5 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega.$$

De maneira análoga, a integração por partes para o integrando $\omega^5 e^{\sqrt{7}\omega}$, resulta em

$$A = \lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(-\frac{6}{\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}\omega} \omega^5 \right) \Big|_a^b + \frac{30}{\sqrt{7}} \int_{-\infty}^0 \omega^4 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega,$$

na qual a expressão $\lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(-\frac{6}{\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}\omega} \omega^5 \right) \Big|_a^b = 0$. Assim,

$$A = \frac{30}{\sqrt{7}} \int_{-\infty}^0 \omega^4 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega.$$

Resumindo, de maneira análoga ao que vem sendo feito, se obterá os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(\frac{30}{7} e^{\sqrt{7}\omega} \omega^4 \right) \Big|_a^b - \frac{120}{7} \int_{-\infty}^0 \omega^3 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega \\ &= -\frac{120}{7} \int_{-\infty}^0 \omega^3 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega \\ &= \lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(-\frac{120}{7\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}\omega} \omega^3 \right) \Big|_a^b + \frac{360}{7\sqrt{7}} \int_{-\infty}^0 \omega^2 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega \\ &= \frac{360}{7\sqrt{7}} \int_{-\infty}^0 \omega^2 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega \\ &= \lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(\frac{360}{49} e^{\sqrt{7}\omega} \omega^2 \right) \Big|_a^b - \frac{720}{343} \int_{-\infty}^0 \omega e^{\sqrt{7}\omega} d\omega \\ &= -\frac{720}{343} \int_{-\infty}^0 \omega e^{\sqrt{7}\omega} d\omega \\ &= \lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(-\frac{720}{49\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}\omega} \omega \right) \Big|_a^b + \frac{720}{49\sqrt{7}} \int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega \\ &= \frac{720}{49\sqrt{7}} \int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{7}\omega} d\omega \\ &= \lim_{a,b \rightarrow -\infty, 0^-} \left(\frac{720}{343} e^{\sqrt{7}\omega} \right) \Big|_a^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 0^-} \frac{720}{343} e^{\sqrt{7}b} - \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{720}{343} e^{\sqrt{7}a} \\ &= \frac{720}{343}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A = \frac{720}{343}. \quad (89)$$

Também de maneira análoga, se obtém o seguinte resultado:

$$B = \frac{720}{343}. \quad (90)$$

Substituindo os resultados de (89) e (90) na equação (88) se chega ao seguinte resultado:

$$C_\psi = \frac{11520\pi^2}{2401} < +\infty. \quad (91)$$

Assim, a Condição de Admissibilidade se verifica para a função ψ , o que a torna uma função wavelet. Essa wavelet foi recentemente apresentada por Lamblém, et al., (2016), na qual o valor da condição de admissibilidade foi verificado utilizando o software *Wolfram Mathematica*. O valor obtido por este foi de $C_\psi = 5760\pi/2401$.

Os diferentes resultados de C_ψ , um obtido computacionalmente por Lamblém, et al., (2016), e o outro analiticamente em (91), são devidos ao fato, de que foram utilizados diferentes parâmetros para o cálculo da FT de ψ . Em (LAMBLÉM et al., 2016) foi usada a seguinte definição para o cálculo da FT:

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{j\omega x} dx,$$

ou seja, a diferença entre os resultados é explicado pelo fator de normalização utilizado: $1/\sqrt{2\pi}$.

4.2 GOLDEN: UMA NOVA FAMÍLIA DE WAVELETS

Apresentamos agora uma nova família de wavelets denominada *Golden*. Esse nome foi escolhido devido à relação entre a sequência de Fibonacci e a razão áurea, conhecida também como o número de ouro (*Golden Ratio*). As Golden wavelets são geradas a partir da derivada de certos quocientes entre FCPs.

Nesse trabalho, considerou-se a princípio, 27 wavelets que constituem a família Golden. Essas wavelets são geradas tendo como base p_2 no denominador, e p_0 , p_1 e p_4 no numerador do quociente considerado. Precisamente, essas wavelets são definidas da seguinte maneira:

$$\psi_{0,2}^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{p_0(x)}{p_2(x)} \right], \quad m = 2, \dots, 10, \quad (92)$$

$$\psi_{1,2}^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \right], \quad m = 2, \dots, 10, \quad (93)$$

$$\psi_{4,2}^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \right], \quad m = 3, \dots, 11, \quad (94)$$

As FTs de $\psi_{0,2}^m$, $\psi_{1,2}^m$ e de $\psi_{4,2}^m$ são dadas pelas equações (95), (96) e (97) respectivamente:

$$\hat{\psi}_{0,2}^m(\omega) = (j\omega)^m \frac{2\pi}{\sqrt{7}} e^{\frac{1}{2}(j\omega - \sqrt{7}|\omega|)}, \quad (95)$$

$$\hat{\psi}_{1,2}^m(\omega) = (j\omega)^m \frac{\pi}{\sqrt{7}\omega} e^{\frac{1}{2}(j\omega - \sqrt{7}|\omega|)} (\omega - j\sqrt{7}|\omega|), \quad (96)$$

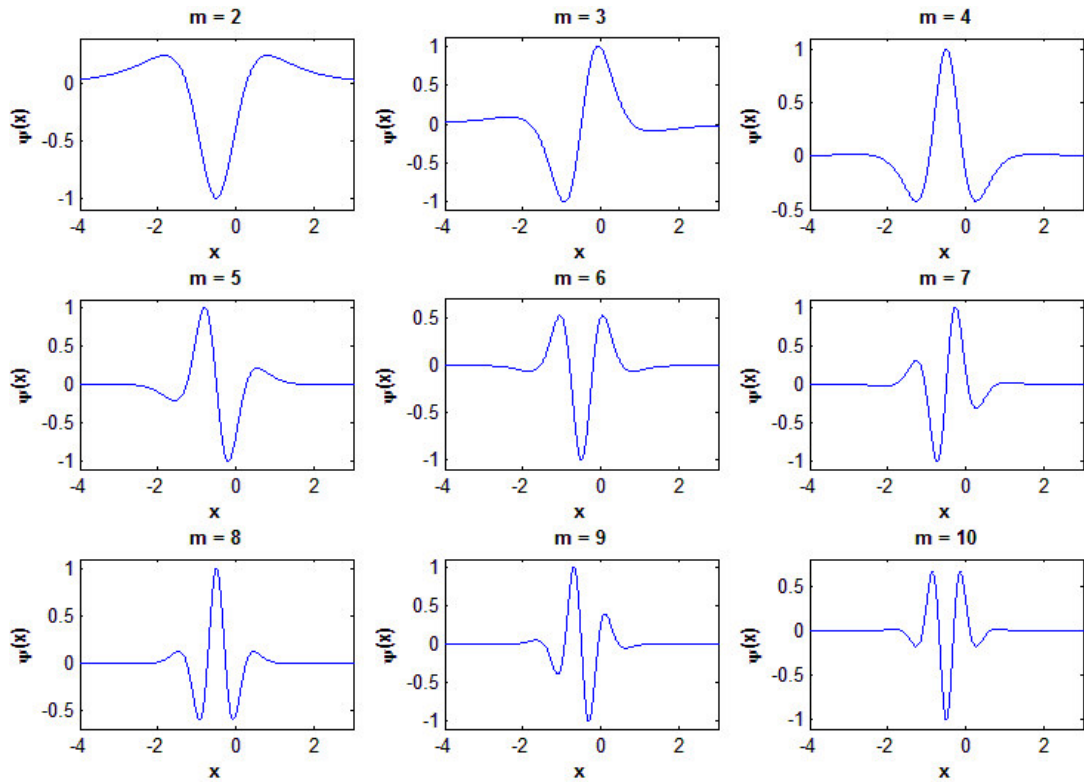
$$\hat{\psi}_{4,2}^m(\omega) = (j\omega)^m \frac{\pi}{\sqrt{7}\omega} e^{\frac{1}{2}(j\omega - \sqrt{7}|\omega|)} (7\omega - j3\sqrt{7}|\omega|). \quad (97)$$

Os gráficos de $\psi_{0,2}^m$, $\psi_{1,2}^m$ e $\psi_{4,2}^m$, e de suas respectivas FTs são mostrados nas Figuras 38 a 42, para cada valor de m . Nesses gráficos, foi considerada a normalização do eixo da variável dependente, e somente a parte real das FTs.

A veracidade de que essas 27 funções são de fato funções wavelets, se verifica quando se calcula a condição de admissibilidade para cada uma delas. Essa verificação se faz de maneira análoga ao exemplo da seção 4.1.1 onde, em particular, foi considerada a wavelet $\hat{\psi}_{1,2}^4$.

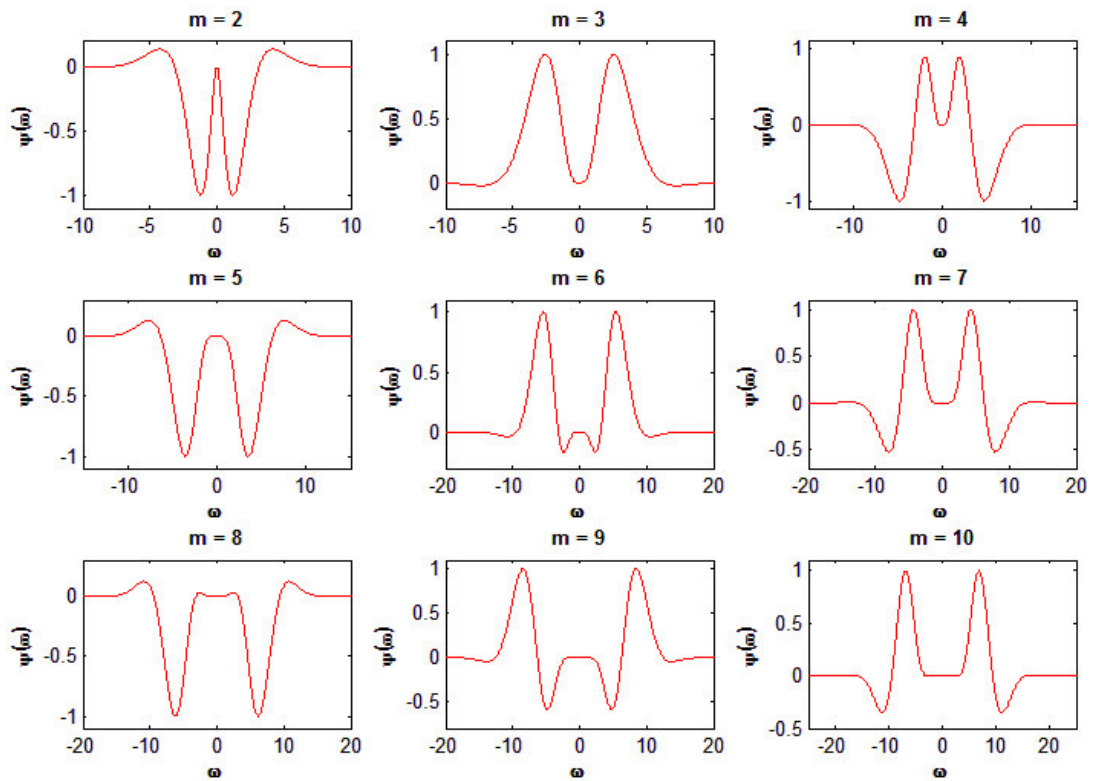
Nas Tabelas 5, 6 e 7 são mostrados os resultados da Energia, Condição de Admissibilidade e número de Momentos Nulos, para cada wavelet $\hat{\psi}_{0,2}^m$, $\hat{\psi}_{1,2}^m$ e $\hat{\psi}_{4,2}^m$, respectivamente. A Energia foi calculada de acordo com a definição da equação (1), e o número de Momentos Nulos de acordo com a definição da equação (31).

Figura 32- Gráfico de $\psi_{0,2}^m(x)$.



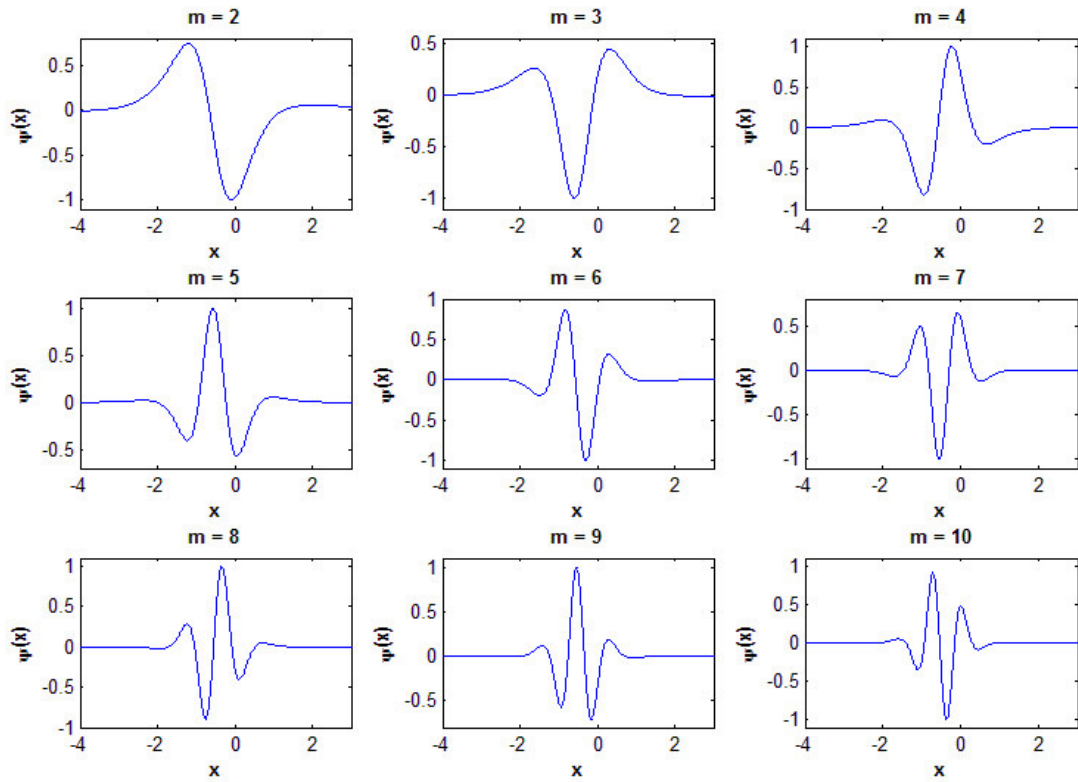
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 33- Gráfico de $\hat{\psi}_{0,2}^m(\omega)$.



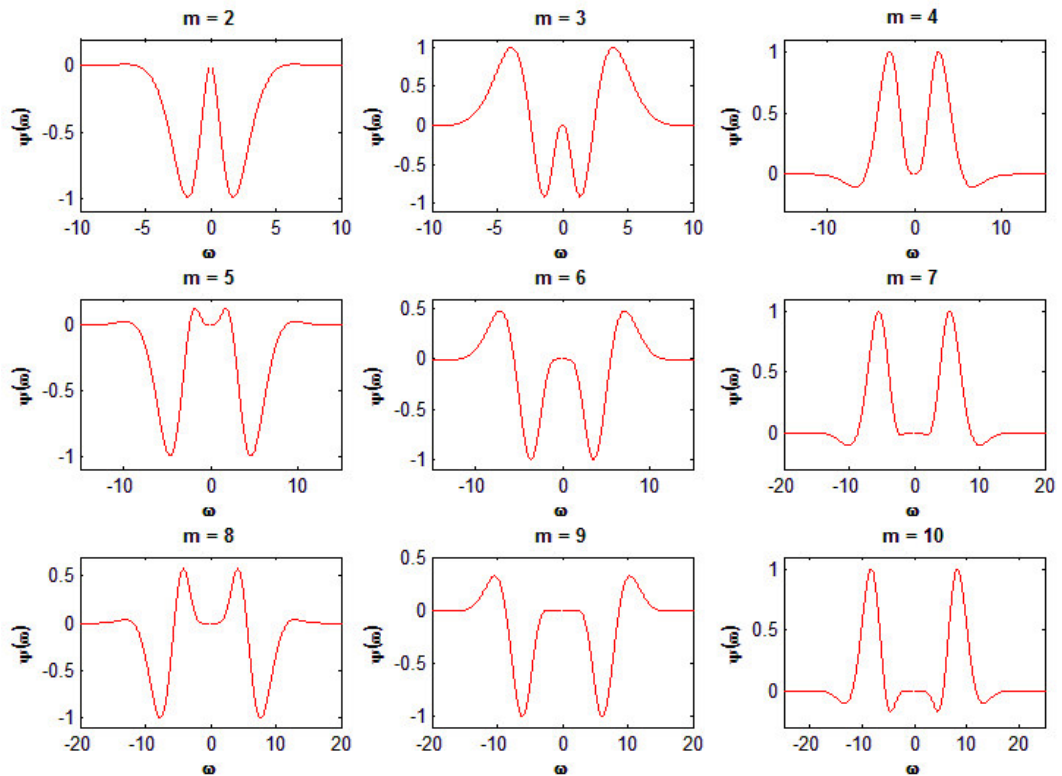
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 34- Gráfico de $\psi_{1,2}^m(x)$.



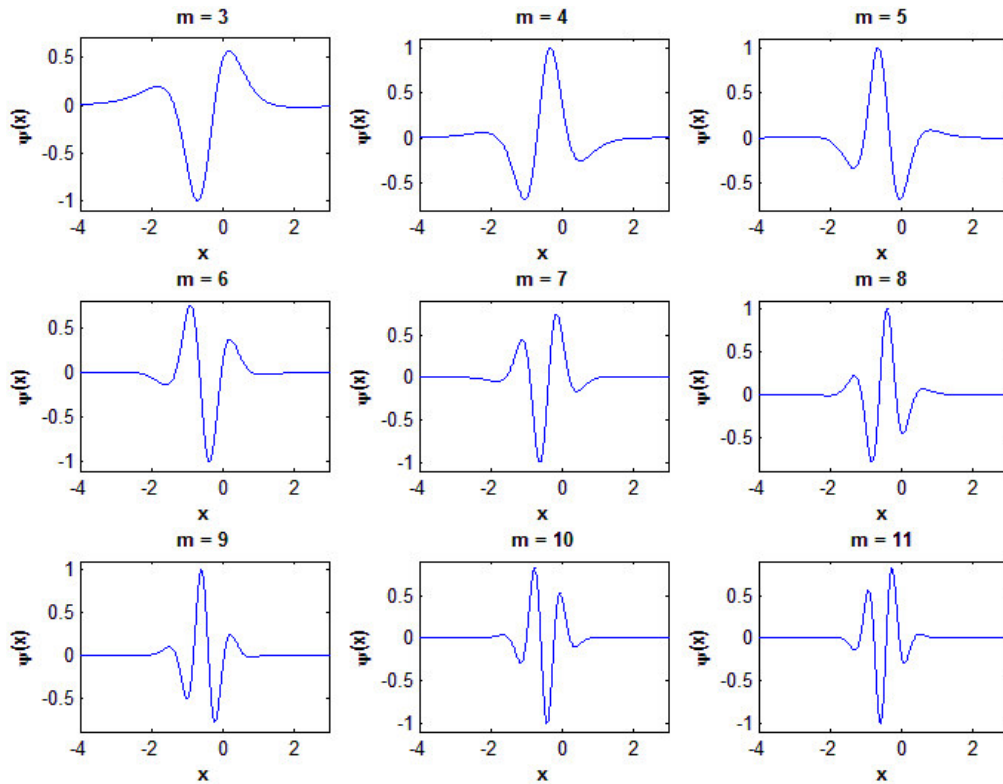
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 35- Gráfico de $\hat{\psi}_{1,2}^m(\omega)$.



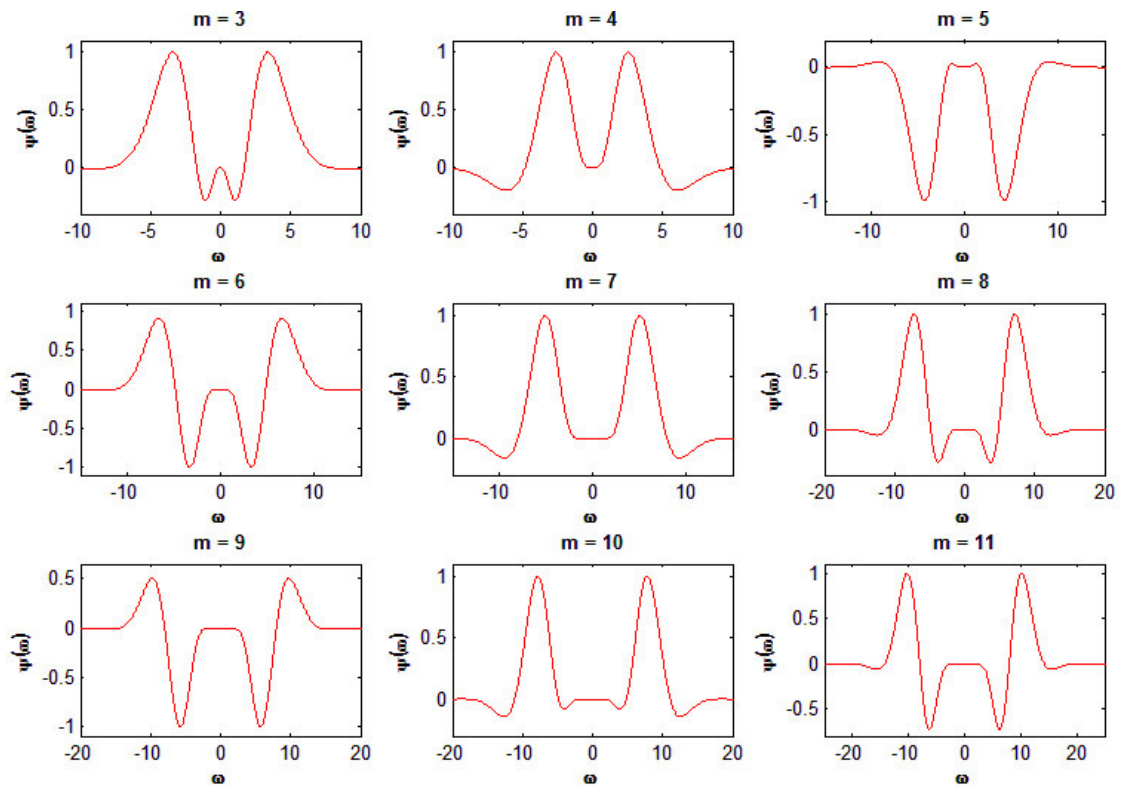
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 36- Gráfico de $\psi_{4,2}^m(x)$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 37- Gráfico de $\hat{\psi}_{4,2}^m(\omega)$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Tabela 5- Resultados das wavelets do tipo $\psi_{0,2}^m$.

m	Energia	Condição de Admissibilidade	Número de Momentos Nulos
2	$\frac{96\pi}{343\sqrt{7}}$	$\frac{48\pi^2}{343}$	1
3	$\frac{2880\pi}{2401\sqrt{7}}$	$\frac{960\pi^2}{2401}$	2
4	$\frac{23040\pi}{2401\sqrt{7}}$	$\frac{5760\pi^2}{2401}$	3
5	$\frac{2073600\pi}{16807\sqrt{7}}$	$\frac{414720\pi^2}{16807}$	4
6	$\frac{273715200\pi}{117649\sqrt{7}}$	$\frac{45619200\pi^2}{117649}$	5
7	$\frac{49816166400\pi}{823543\sqrt{7}}$	$\frac{7116595200\pi^2}{823543}$	6
8	$\frac{1707982848000\pi}{823543\sqrt{7}}$	$\frac{213497856000\pi^2}{823543}$	7
9	$\frac{522642751488000\pi}{5764801\sqrt{7}}$	$\frac{58071416832000\pi^2}{5764801}$	8
10	$\frac{198604245565440000\pi}{40353607\sqrt{7}}$	$\frac{19860424556544000\pi^2}{40353607}$	9

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Tabela 6- Resultados das wavelets do tipo $\psi_{1,2}^m$.

m	Energia	Condição de Admissibilidade	Número de Momentos Nulos
2	$\frac{192\pi}{343\sqrt{7}}$	$\frac{96\pi^2}{343}$	1
3	$\frac{5760\pi}{2401\sqrt{7}}$	$\frac{1920\pi^2}{2401}$	2
4	$\frac{46080\pi}{2401\sqrt{7}}$	$\frac{11520\pi^2}{2401}$	3
5	$\frac{4147200\pi}{16807\sqrt{7}}$	$\frac{829440\pi^2}{16807}$	4
6	$\frac{547430400\pi}{117649\sqrt{7}}$	$\frac{91238400\pi^2}{117649}$	5
7	$\frac{99632332800\pi}{823543\sqrt{7}}$	$\frac{14233190400\pi^2}{823543}$	6
8	$\frac{3415965696000\pi}{823543\sqrt{7}}$	$\frac{426995712000\pi^2}{823543}$	7
9	$\frac{1045285502976000\pi}{5764801\sqrt{7}}$	$\frac{116142833664000\pi^2}{5764801}$	8
10	$\frac{397208491130880000\pi}{40353607\sqrt{7}}$	$\frac{39720849113088000\pi^2}{40353607}$	9

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Tabela 7- Resultados das wavelets do tipo $\psi_{4,2}^m$.

m	Energia	Condição de Admissibilidade	Número de Momentos Nulos
3	$\frac{11520\pi}{343\sqrt{7}}$	$\frac{3840\pi^2}{343}$	2
4	$\frac{92160\pi}{343\sqrt{7}}$	$\frac{23040\pi^2}{343}$	3
5	$\frac{8294400\pi}{2401\sqrt{7}}$	$\frac{1658880\pi^2}{2401}$	4
6	$\frac{1094860800\pi}{16807\sqrt{7}}$	$\frac{182476800\pi^2}{16807}$	5
7	$\frac{28466380800\pi}{16807\sqrt{7}}$	$\frac{28466380800\pi^2}{117649}$	6
8	$\frac{6831931392000\pi}{117649\sqrt{7}}$	$\frac{853991424000\pi^2}{117649}$	7
9	$\frac{2090571005952000\pi}{823543\sqrt{7}}$	$\frac{23228566732800\pi^2}{823543}$	8
10	$\frac{794416982261760000\pi}{5764801\sqrt{7}}$	$\frac{79441698226176000\pi^2}{5764801}$	9
11	$\frac{52431520829276160000\pi}{5764801\sqrt{7}}$	$\frac{476650189357056000\pi^2}{5764801}$	10

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Olhando para os valores da Energia e da Condição de Admissibilidade, para cada wavelet nas Tabelas 5, 6 e 7, pode-se estabelecer uma relação entre os mesmos. Se E_m e C_m são a Energia e a Condição de Admissibilidade para cada wavelet particular $\psi_{0,2}^m$, $\psi_{1,2}^m$ e $\psi_{4,2}^m$, então

$$C_m = \frac{\pi\sqrt{7}}{m} \times E_m. \quad (98)$$

O número de momentos nulos foi calculado, a título de exemplo, seguindo o roteiro: Considerando $\psi_{1,2}^m$ para $m = 2,3,4$.

Para $m = 2$, deve-se verificar a seguinte equação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi_{1,2}^2(x) dx = 0.$$

Fazendo a integração por partes, $\int u dv = uv - \int v du$ para o integrando $x^k \psi_{1,2}^2(x)$, onde

$$u = x^k, \quad dv = \psi_{1,2}^2(x) dx, \quad du = kx^{k-1} dx, \quad v = \psi_{1,2}^1(x),$$

resulta em,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi_{1,2}^2(x) dx = \left(x^k \psi_{1,2}^1(x) \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} kx^{k-1} \psi_{1,2}^1(x) dx.$$

A expressão $\left(x^k \psi_{1,2}^1(x)\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \Leftrightarrow k = 0,1,2$. Desse modo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi_{1,2}^2(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} kx^{k-1} \psi_{1,2}^1(x) dx, \quad k \in \{0,1,2\}.$$

Fazendo novamente a integração por partes, $\int u dv = uv - \int v du$ para o integrando $-kx^{k-1} \psi_{1,2}^1(x)$, onde

$$u = -kx^{k-1}, \quad dv = \psi_{1,2}^1(x) dx, \quad du = -k(k-1)x^{k-2} dx, \quad v = p_1(x)/p_2(x),$$

obtem-se

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} kx^{k-1} \psi_{1,2}^1(x) dx = \left(-kx^{k-1} \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx.$$

A expressão $\left(-kx^{k-1} \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \Leftrightarrow k = 0,1,2$. Assim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi_{1,2}^2(x) dx = k(k-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-2} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx, \quad k \in \{0,1,2\}.$$

Tem-se que

$$k(k-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-2} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx = 0 \Leftrightarrow k = 0,1.$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi_{1,2}^2(x) dx = 0 \Leftrightarrow k = 0,1.$$

Logo, $\psi_{1,2}^2(x)$ possui 1 momento nulo.

Para $m = 3$, deve-se verificar a seguinte equação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi_{1,2}^3(x) dx = 0.$$

Da mesma forma, fazendo a integração por partes, $\int u dv = uv - \int v du$ para o integrando $x^k \psi_{1,2}^3(x)$, onde

$$u = x^k, \quad dv = \psi_{1,2}^2(x) dx, \quad du = kx^{k-1} dx, \quad v = \psi_{1,2}^1(x)$$

e que de maneira análoga obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi_{1,2}^3(x) dx &= -k \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} \psi_{1,2}^2(x) dx \\ &= k(k-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-2} \psi_{1,2}^1(x) dx \\ &= -k(k-1)(k-2) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-3} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx \\ &= 0 \Leftrightarrow k = 0,1,2. \end{aligned}$$

Assim, $\psi_{1,2}^3$ possui 2 momentos nulos.

Para $m = 4$, deve-se verificar a seguinte equação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi_{1,2}^4(x) dx = 0.$$

Realizando os cálculos de forma análoga obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi_{1,2}^4(x) dx &= -k \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} \psi_{1,2}^3(x) dx \\ &= k(k-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-2} \psi_{1,2}^2(x) dx \\ &= -k(k-1)(k-2) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-3} \psi_{1,2}^1 dx \\ &= k(k-1)(k-2)(k-3) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-4} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx \\ &= 0 \Leftrightarrow k = 0,1,2,3. \end{aligned}$$

Portanto, $\psi_{1,2}^4$ possui 3 momentos nulos. Generalizando para as wavelets $\psi_{1,2}^m$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi_{1,2}^m(x) dx = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^m}{dx^m} (x^k) \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx = 0 \Leftrightarrow k = 0,1,2,3, \dots, m-1.$$

Nesse caso, o número k de momentos nulos de cada wavelet explorada pela relação de $\psi_{1,2}^m$ é definido pelo número da ordem de cada derivada menos 1, ou seja, $k = m - 1$.

Os valores da Energia e da Condição de Admissibilidade, mostrados nas Tabelas 5, 6 e 7, são obtidos diretamente pelo modo em que as wavelets são geradas. Entretanto, como foi discutido anteriormente, geralmente as wavelets são consideradas para terem energia unitária. Isso é facilmente ajustado pela seguinte relação:

$$\frac{\psi_{n,2}^m}{\sqrt{E_m}}. \quad (99)$$

Observando os gráficos apresentados nas Figuras 37, 39 e 41, verificam-se visualmente uma grande diversidade na estrutura de cada wavelet, ou seja, têm-se formatos de ondas diferentes. Evidentemente, como se pode ver nas Figuras 38, 40 e 42, cada wavelet possui uma característica diferente no domínio da frequência, onde a largura da banda é proporcional a ordem da derivada.

4.2.1 Semelhanças entre uma Golden wavelet e a Chapéu Mexicano

A wavelet chapéu mexicano $\psi^{Cm}(x)$ é definida pela segunda derivada da função Gaussiana $g(x) = e^{-x^2/2}$, ou seja, (DEBNATH; SHAH, 2015),

$$\psi^{Cm}(x) = -\frac{d^2}{dt^2}(g(x)) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (100)$$

A função ψ^{Cm} é um dos membros pertencente à família Gaussiana de wavelets. A FT de ψ^{Cm} é expressa da seguinte maneira

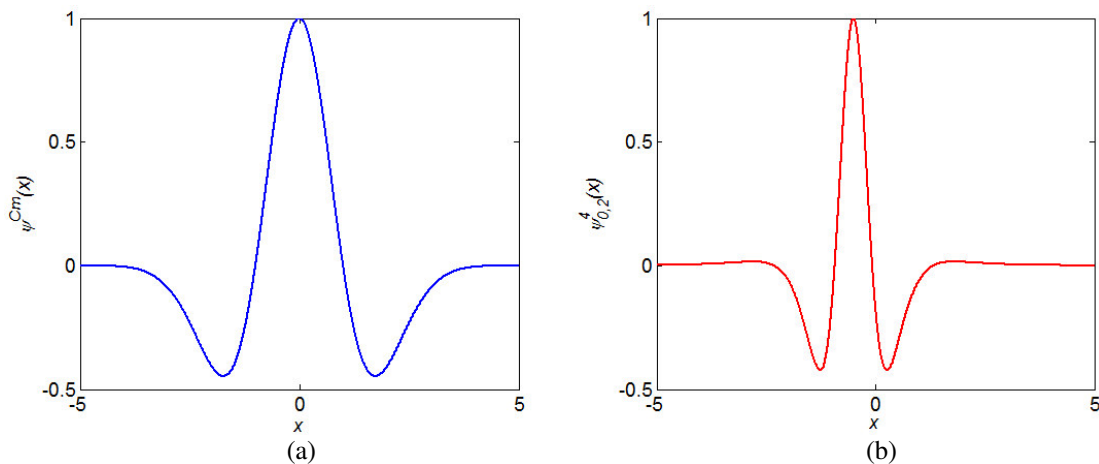
$$\hat{\psi}^{Cm}(\omega) = \sqrt{2\pi}\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}. \quad (101)$$

Agora, considere a seguinte função wavelet proposta $\psi_{0,2}^4$

$$\psi_{0,2}^4(x) = \frac{24(5x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 15x - 1)}{(x^2 + x + 2)^5}. \quad (102)$$

Os gráficos de ψ^{Cm} e $\psi_{0,2}^4$ (onde o eixo da variável dependente foi normalizado) são mostrados nas Figuras 38(a) e 38(b), respectivamente. Geometricamente, as funções apresentadas na Figura 38 possuem uma vasta semelhança. Entretanto, na forma em que $\psi_{0,2}^4$ é gerada, a simetria é fixada em $x = -0.5$, diferentemente de ψ^{Cm} , que é simétrica em relação a origem. De qualquer forma, a função $\psi_{0,2}^4$ não perde as características de ser comparada com ψ^{Cm} , sendo muito conhecida na literatura especializada.

Figura 38- Gráficos de (a) $\psi^{Cm}(x)$ e (b) $\psi_{0,2}^4(x)$.



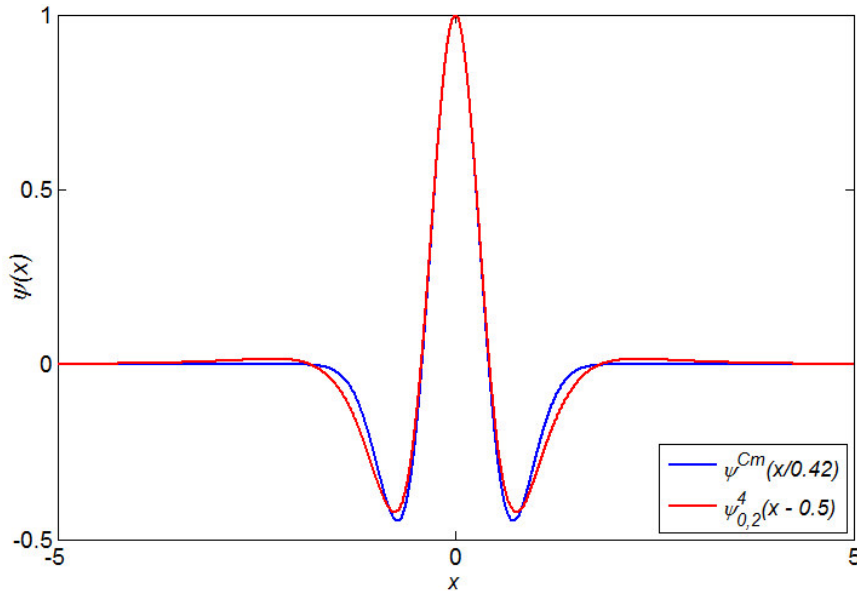
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Para enfatizar a semelhança do formato de onda entre as duas wavelets, a Figura 39 mostra as mesmas sobrepostas de tal maneira que, o “pico do chapéu” de cada uma, fiquem aproximadamente equivalente, para isso, é preciso fazer uma dilatação de $\psi^{Cm}(x/0.42)$ (em azul), e uma translação de $\psi_{0,2}^4(x - 0.5)$ (em vermelho).

Embora sejam muito parecidas, ψ^{Cm} e $\psi_{0,2}^4$ possuem algumas diferenças, como por exemplo, ψ^{Cm} possui 1 momento nulo. Já a wavelet $\psi_{0,2}^4$, possui 3 momentos nulos. Na Figura 40 mostram-se os gráficos da FT das wavelets $\hat{\psi}^{Cm}(\omega)$ e $\hat{\psi}_{0,2}^4(\omega)$. Perceba-se que $\hat{\psi}_{0,2}^4$

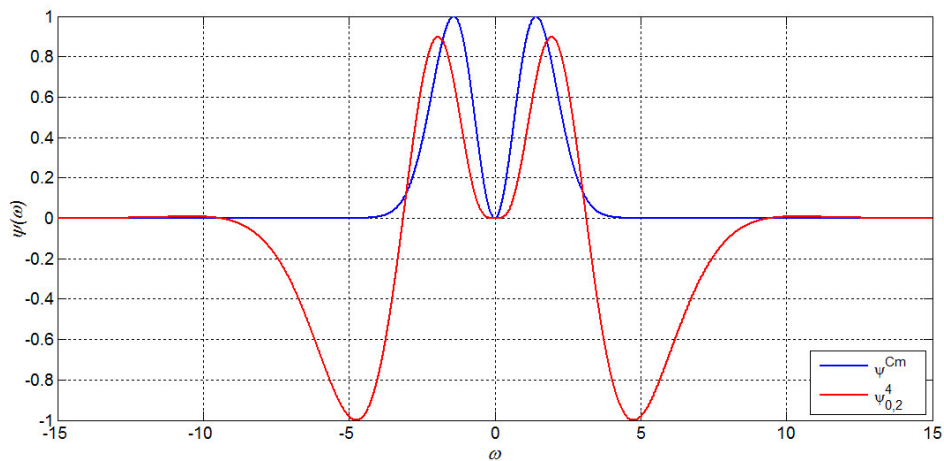
cobre mais faixas de frequências do que $\hat{\psi}^{Cm}$. Na Figura 40 é mostrada apenas a parte real de $\hat{\psi}_{0,2}^4$.

Figura 39- Similiaridade entre ψ^{Cm} e $\psi_{0,2}^4$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 40- Gráficos de $\hat{\psi}^{Cm}(\omega)$ e $\hat{\psi}_{0,2}^4(\omega)$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

No próximo capítulo será apresentada uma aplicação para as Golden wavelets. A aplicação é voltada para a classificação de arritmias cardíacas. Para isso, serão consideradas três wavelets: $\psi_{0,2}^4$, $\psi_{1,2}^4$ e $\psi_{4,2}^4$, nomeadas como gold1, gold2 e gold3 respectivamente. As três wavelets obtidas foram inseridas no wavemenu do Matlab (Apêndice A).

5 APLICAÇÕES DAS GOLDEN WAVELETS NA CLASSIFICAÇÃO DE ARRITMIAS CARDÍACAS

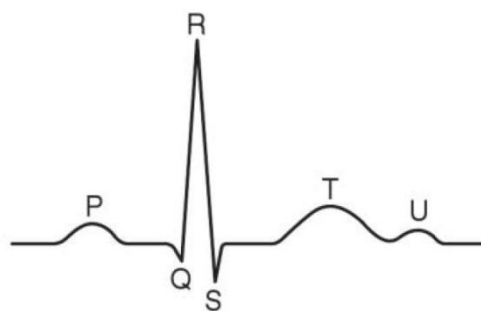
Nesse capítulo será mostrada uma aplicação para três wavelets da família Golden: gold1, gold2 e gold3. A aplicação tem como o objetivo a classificação de arritmias cardíacas em sinais de eletrocardiograma (ECG). Os sinais de ECGs utilizados nessa aplicação foram extraídos da base de dados do *MIT-BIH Arrhythmia Database* (GOLDBERGER et al., 2000). Antes de mostrar os resultados da aplicação, serão abordados, de forma sucinta, alguns conceitos sobre ECGs.

5.1 O ELETROCARDIOGRAMA

Um exame prático e de extrema importância que avalia a saúde do coração do indivíduo é o ECG. Representando o registro da atividade elétrica do coração, o ECG é captado por eletrodos dispostos em localizações específicas do corpo (HAMPTON, 2014).

O sinal de ECG é composto por ondas, segmentos e intervalos que se repetem a cada ciclo cardíaco (SUKIENIK, 2015). As ondas características podem ser visualizadas na Figura 41, com as respectivas nomenclaturas (as deflexões dessas ondas dependem das chamadas derivações, conforme visto mais adiante).

Figura 41- Ondas características do ECG.



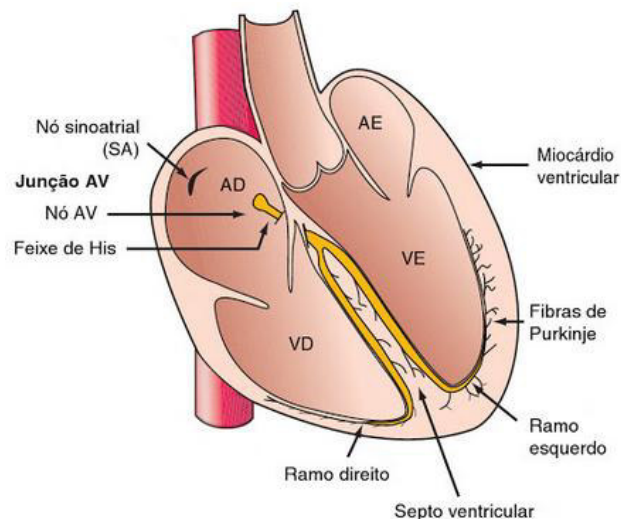
Fonte: (HAMPTON, 2014).

O traçado do ECG mostrado na Figura 41 é referente a um ciclo cardíaco, que é o período correspondente da contração inicial até o relaxamento do músculo cardíaco voltando ao estado de repouso (STEIN, 2001). Como pode ser visto na Figura 41, o ECG apresenta uma série de ondas denominadas P, Q, R, S, T e U conforme sua ordem de inscrição (SUKIENIK, 2015):

- A onda P representa a despolarização atrial;
- o complexo QRS (ondas Q, R e S) é a despolarização ventricular;
- a onda T e a onda U (nem sempre presente) refletem a repolarização ventricular.

Sem entrar muito nos detalhes fisiológicos do funcionamento do coração, pode-se dizer que o coração age como uma bomba, recebendo o sangue que chega pelas veias e impulsionando-o para as artérias (ZORZI; STARLING, 2010). A despolarização do coração é o evento inicial para a contração cardíaca, sendo que as correntes elétricas que se propagam pelo mesmo são produzidas por três componentes: células do marca-passo, tecido de condução especializado, e o miocárdio (LOSCALZO, 2013). Na Figura 42 mostra-se uma representação esquemática da condução cardíaca.

Figura 42- Coração e a formação do estímulo elétrico.



Fonte: (LOSCALZO, 2013).

A formação e a condução do estímulo elétrico no coração são resumidas a seguir (SUKIENIK, 2015):

- I. O estímulo elétrico involuntário nasce no Nó Sinoatrial (SA) (evento invisível no ECG), provocando uma onda de despolarização. Do SA, o impulso despolariza inicialmente o Átrio Direito (AD) e, a seguir, o Átrio Esquerdo (AE), resultando na inscrição da onda P, que é o registro da disseminação da despolarização pelo miocárdio atrial do início ao fim.

- II. Em seguida, a onda de despolarização é impedida de se comunicar com os ventrículos pelas válvulas cardíacas que separam os átrios dos ventrículos. Assim, a velocidade de condução elétrica é diminuída (O ECG fica silencioso) por uma estrutura chamada Nó Atrioventricular (Nó AV). Depois, o estímulo percorre rapidamente o Feixe de His, o Ramo Direito (RD) e o ramo esquerdo (RE) e, finalmente, as Fibras de Purkinje. O Feixe de His e seus ramos as Fibras de Purkinje constituem o sistema His-Purkinje. Os potenciais gerados pela ativação desse sistema não têm amplitude suficiente para serem registrados no ECG convencional, de modo que se inscreve no traçado apenas uma linha isométrica. Esse retardo na condução é suficiente para permitir que os átrios terminem sua contração antes que os ventrículos comecem a se contrair.

- III. A despolarização do miocárdio ventricular, formado pelo Ventrículo Esquerdo (VE) e Ventrículo Direito (VD), produz a contração ventricular, representada no ECG pelo complexo QRS. A amplitude do complexo QRS é muito maior do que a da onda P, isso porque os ventrículos possuem maior massa muscular do que os átrios. Assim, em condições normais, o Nó AV e o sistema His-Purkinje formam a única conexão elétrica entre os átrios e os ventrículos.

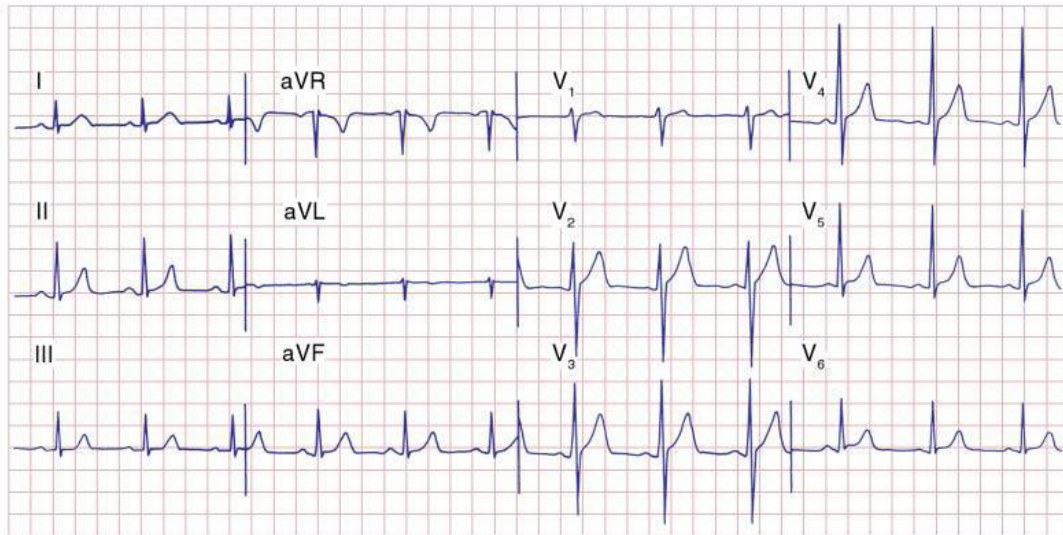
- IV. O retorno do músculo ventricular estimulado ao estado de repouso (repolarização ventricular) reflete-se pela inscrição de um segmento, da onda T e da onda U. A onda de repolarização atrial não é visualizada no ECG convencional em decorrência de sua baixa amplitude e por inscrever-se dentro do QRS.

O coração é um órgão complexo e um par de eletrodos não é suficiente para fazer uma análise completa do ECG gerado. Por isso, o ECG é registrado de diferentes formas em cada derivação, onde cada derivação vê o coração de um ângulo diferente (HAMPTON, 2014).

Pode-se fazer a seguinte analogia: Interpretar um ECG baseado em apenas uma derivação assemelha-se a fotografar um lance de futebol com apenas uma câmara fotográfica. Dependendo do ângulo da fotografia, embora nos mostre detalhes do lance, não nos permite definir se foi gol ou não. Um ângulo diferente, provavelmente demonstra se a bola ultrapassou a “linha fatal” ou não (SUKIENIK, 2015).

As características do ECG em cada derivação podem ser vistas na Figura 43, que retrata o ECG de um indivíduo saudável, com uma frequência cardíaca de 75 bpm (batimentos-por-minuto).

Figura 43- As 12 derivações de um ECG normal.



Fonte: (LOSCALZO, 2013).

As doze derivações podem ser divididas em quatro grupos (HAMPTON, 2014):

- Anterior: V2, V3, V4;
- lateral esquerda: I, aVL, V5, V6;
- inferiores: II, III, aVF;
- ventricular direita: aVR, V1.

5.1.1 Bloqueio de ramo

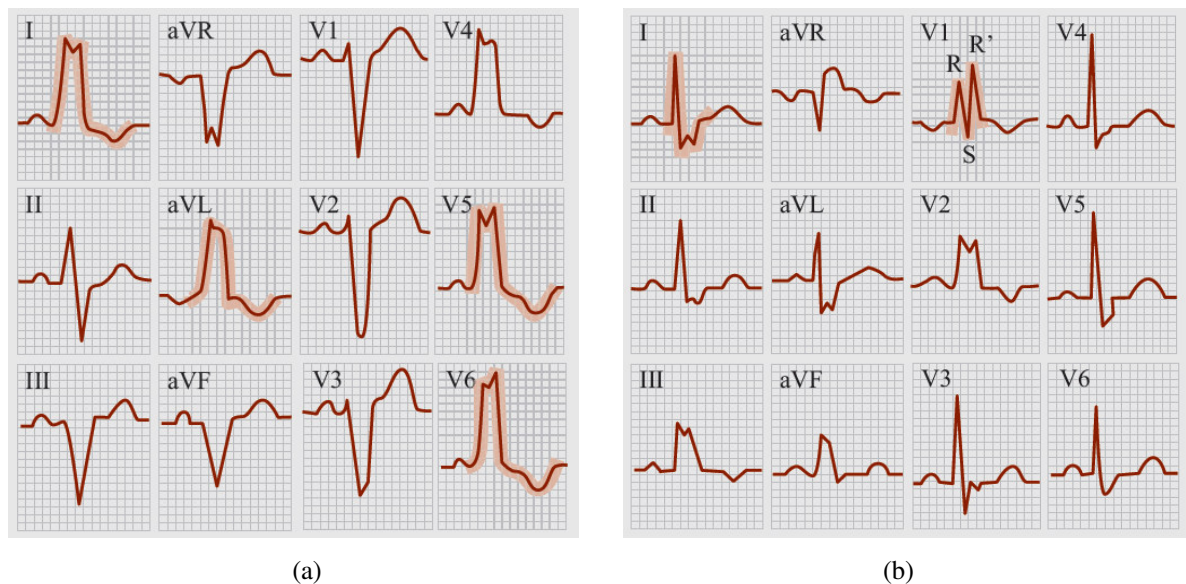
O ritmo cardíaco habitual do dia a dia é chamado de ritmo sinusal normal. Normalmente esse ritmo possui uma frequência cardíaca de 60 a 100 bpm. Qualquer outra ocorrência é chamada de *arritmia*. O termo *arritmia* se refere a qualquer distúrbio na frequência, regularidade, local de origem ou na condução do impulso elétrico cardíaco (THALER, 2013).

O bloqueio de ramo refere-se a um atraso na condução do estímulo elétrico pelo sistema de condução do coração (REIS et al., 2013). O bloqueio de ramo é um tipo de arritmia cardíaca, isto é, um distúrbio de ritmo que pode ocorrer no ramo esquerdo ou no ramo direito (HAMPTON, 2014).

Os ramos direito e esquerdo fornecem a corrente aos ventrículos direito e esquerdo, respectivamente. O complexo QRS resultante, representando a despolarização ventricular do início ao fim, possui uma duração máxima de 0,10 segundos (THALER, 2013).

Como o retardo na despolarização ventricular prolonga o tempo total do mesmo, o complexo QRS se alarga além dos 0,12 segundos. Desse modo, o bloqueio de ramo é diagnosticado olhando a largura e a configuração dos complexos QRS (THALER, 2013). As configurações dos complexos QRS para o bloqueio de ramo esquerdo e direito, podem ser vistas nas Figuras 44(a) e 44(b) respectivamente.

Figura 44- Características do bloqueio de ramo (a) esquerdo (b) direito.



Fonte: Adaptado de (REIS et al., 2013).

Como pode ser visto na Figura 44, qualquer processo que interfira na estimulação simultânea de ambos os ventrículos (como o bloqueio de ramos) prolonga a duração do complexo QRS. A análise dos complexos QRS é importante para diagnosticar não só bloqueios de ramos, mas sim várias outras anomalias. Assim, o complexo QRS permite obter informações importantes sobre a saúde do paciente (HAMPTON, 2014).

5.2 APLICAÇÃO DAS GOLDEN WAVELETS

Nessa seção é apresentada uma aplicação para as wavelets gold1, gold2 e gold3. A aplicação tem por objetivo a classificação de três tipos de batimentos cardíacos: Normal

(*N*), Bloqueio do Ramo Direito (*RBBB*) e Bloqueio do Ramo Esquerdo (*LBBB*). A classificação dos batimentos será realizada no domínio wavelet, pela decomposição dos mesmos via CWT.

Essa mesma aplicação foi apresentada em (GOSSLER et al., 2016), entretanto, neste trabalho foi utilizada apenas a wavelet gold2.

5.2.1 Base de dados

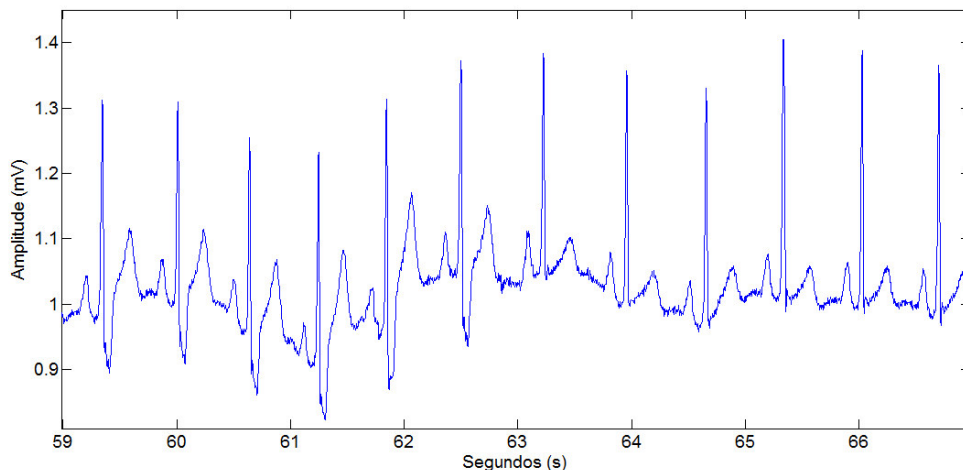
Os sinais de ECGs utilizados nesse trabalho foram extraídos da base de dados *MIT-BIH Arrhythmia Database* (GOLDBERGER et al., 2000). Esta base de dados possui 48 registros, com aproximadamente 30 minutos de duração cada um. Esses sinais foram amostrados a 360 Hz.

Cada registro consiste em duas derivações, V1 e MLII (uma derivação II modificada). Os registros apresentam uma variedade de batimentos classificados como arritmias cardíacas.

Todo registro é acompanhado por um arquivo de anotações, no qual cada batimento foi identificado e classificado por cardiologistas especialistas. Essas anotações são tomadas como referências para avaliar o desempenho do classificador abordado nesse trabalho.

Na Figura 45 é mostrado um trecho de alguns batimentos do registro de número 212, onde os primeiros 6 batimentos são do tipo *RBBB*, e os demais são do tipo *N*. Note as diferenças entre os complexos QRS para cada tipo de batimento.

Figura 45- Batimentos do tipo *RBBB* e *N*.



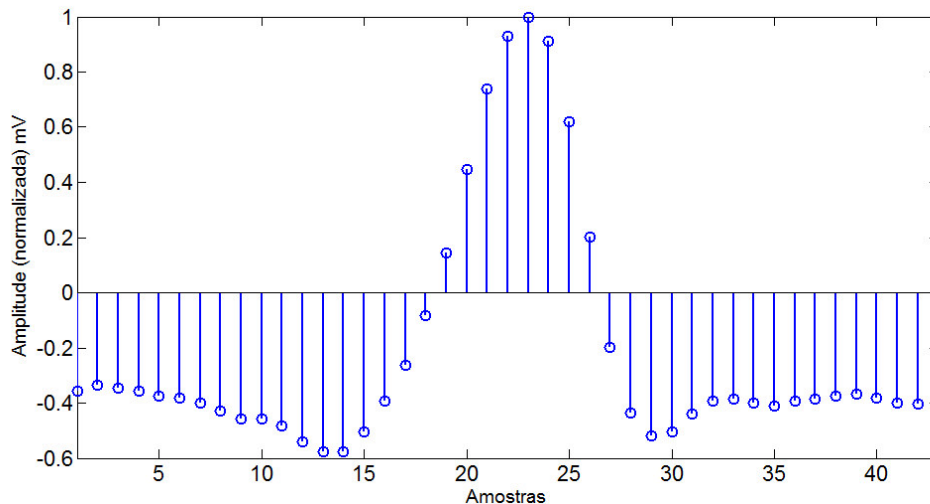
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Na classificação, foram considerados dois grupos diferentes de dados. No primeiro grupo, o objetivo foi de classificar 6000 batimentos cardíacos, sendo que os mesmos são distribuídos de forma equivalente para os tipos *N*, *RBBB* e *LBBB*. Para o segundo grupo, a classificação ocorreu no mesmo processo, entretanto, foi considerado um total de 12000 batimentos, sendo novamente, distribuídos de forma equivalente para os tipos *N*, *RBBB* e *LBBB*.

5.2.2 Decomposição do sinal no domínio wavelet

Para cada batimento, foi considerada apenas a largura do complexo QRS com uma duração de 0,12 segundos. Isso foi adotado porque o bloqueio de ramo é diagnosticado olhando a largura e a configuração deste. Assim, cada ciclo cardíaco foi considerado como tendo $0.12 \times Fs + 1$ amostras, sendo que, $Fs = 36\text{Hz}$ é a frequência de amostragem dos sinais de ECG. Logo, foram tomadas 43 amostras para cada ciclo cardíaco, considerando apenas o complexo QRS do mesmo, como mostra a Figura 46, que é o exemplo de um complexo QRS normal na derivação MLII.

Figura 46- Amostras consideradas para cada complexo QRS.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

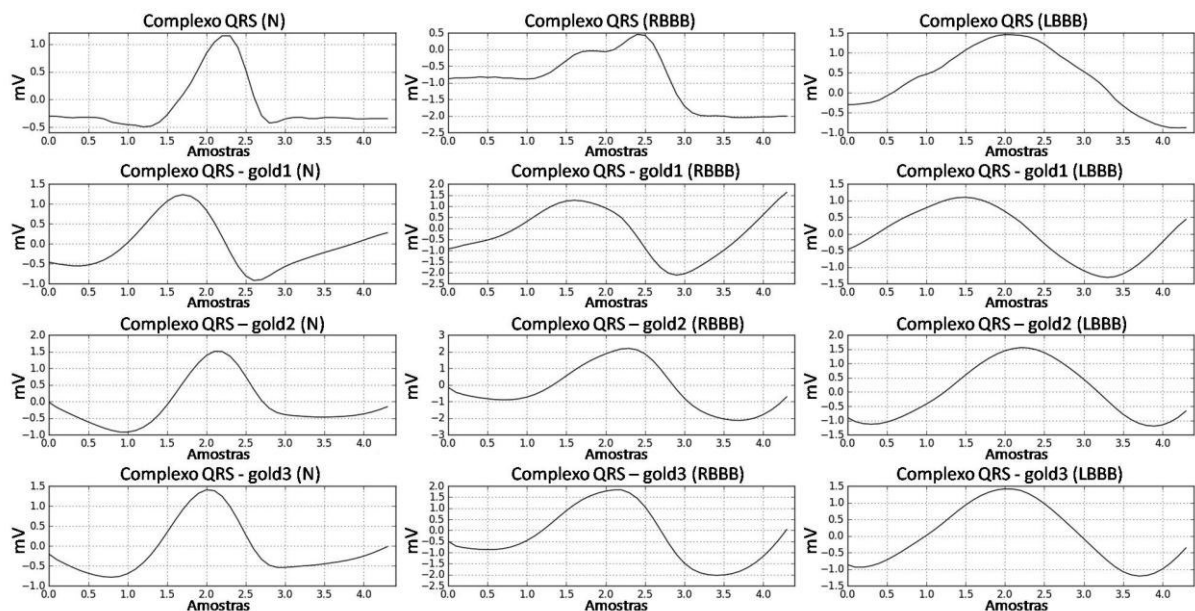
Para cada complexo QRS considerado, foi aplicada a CWT¹ para a decomposição do mesmo, utilizando as escalas de 1 a 20. Em seguida, foi obtida a média de todos os coeficientes da CWT, produzindo assim, uma onda característica para cada batimento.

¹ A CWT foi implementada na linguagem Python 2.7.

Para tal decomposição, foram utilizadas as wavelets gold1, gold2 e gold3. Também foram utilizadas outras 7 wavelets consagradas na literatura especializada: db4, db6, db8 e db10 (Daubechies); gaus1, gaus2 (essa *wavelet* é a Chapéu Mexicano) e gaus3 (Densidade Gaussiana).

Na Figura 47 mostra-se o gráfico de três tipos de complexos QRS, isto é, dos batimentos do tipo *N*, *RBBB* e *LBBB*. Também são mostrados os complexos QRS obtidos pela média dos coeficientes da CWT, utilizando as wavelets gold1, gold2 e gold3. Observe que os gráficos da gold2 e da gold3 aproximam-se melhor dos gráficos dos complexos QRS no domínio do tempo.

Figura 47- Complexos QRS no domínio do tempo e no domínio wavelet.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

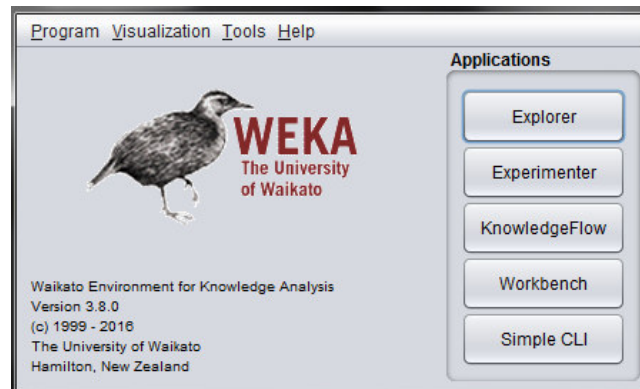
5.2.3 Sistema classificador

Sendo aplicada a média dos coeficientes da CWT, o sinal resultante é utilizado como um vetor de características para o sistema classificador. A classificação foi realizada no software *Weka* (*Waikato Environment for Knowledge Analysis*) (HALL *et al.*, 2009).

O *Weka* é um software livre de mineração de dados, que foi desenvolvido por um grupo de pesquisadores da Universidade de Waikato na Nova Zelândia. O software possui uma interface gráfica (Figura 48) que trabalha com algoritmos de aprendizagem automática.

O algoritmo escolhido para classificação, devido sua simplicidade, foi o C4.5, que é um algoritmo de indução de árvore de decisão, que é baseado na ideia de ganho de informação, utilizando medidas de entropia da informação (LOESCH; HOELTGEBAUM, 2012).

Figura 48- Interface do Weka.



Fonte: Fornecido pelo Weka (2016).

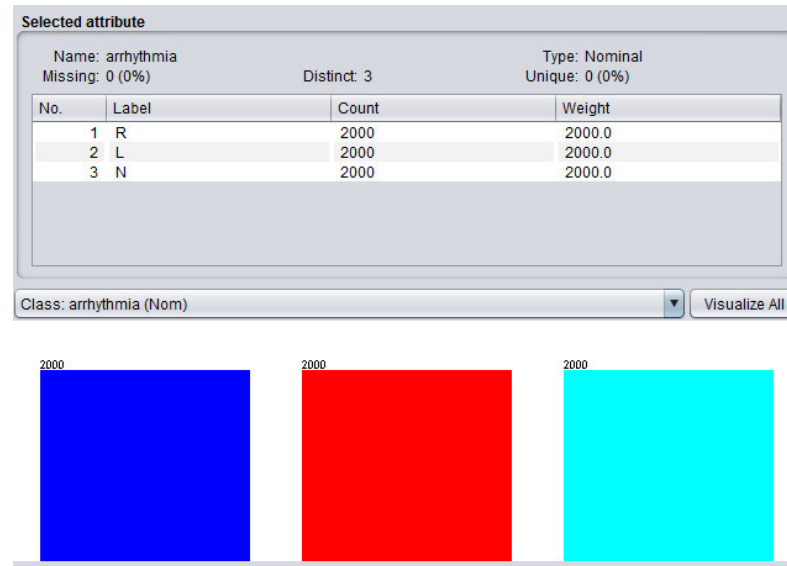
Para o treinamento do classificador, foi utilizado o método de validação cruzada *10 folds* (OLSON; DELEN, 2008). Esse método funciona da seguinte maneira: primeiro, o conjunto de amostras é separado em 10 subconjuntos. Desses 10 subconjuntos, escolhe-se 1 para teste e os demais para treinamento. Esse processo é realizado 10 vezes até que todos os subconjuntos tenham sido utilizados para teste e também para treinamento. No final, é realizada a média dos resultados para cada escolha do conjunto de testes e apresentado o resultado final.

5.2.4 Resultados e discussões

Foram realizadas 11 classificações em cada grupo de dados. No grupo de 6000 batimentos, por exemplo, foram inseridas no minerador de dados, um total de 6000 instâncias divididas em 3 classes (os 3 tipos de batimentos a serem classificados). A distribuição das instâncias por classe, utilizando a gold1, está discretizada na Figura 49, onde se mostra a quantidade de instâncias, por classe dos batimentos do tipo N, RBBB e LBBB, inseridos no minerador como N, R e L, respectivamente.

Ao rodar o classificador C4.5 (denominado de J48 no WEKA), o programa irá fornecer um relatório de várias métricas, que são utilizadas para medir o desempenho do classificador. A Figura 50 mostra isso em detalhes utilizando a gold1.

Figura 49- Quantidade de atributos por classe de batimentos.



Fonte: Fornecido pelo Weka (2016).

Figura 50- Relatório de desempenho do Weka utilizando a gold1.

```

=== Stratified cross-validation ===
=== Summary ===

Correctly Classified Instances      5951           99.1833 %
Incorrectly Classified Instances    49             0.8167 %
Kappa statistic                     0.9878
Mean absolute error                  0.0064
Root mean squared error              0.0738
Relative absolute error              1.4402 %
Root relative squared error          15.6489 %
Total Number of Instances           6000

=== Detailed Accuracy By Class ===

                TP Rate  FP Rate  Precision  Recall   F-Measure  MCC      ROC Area  PRC Area  Class
                -----  -----  -
                0,989   0,005   0,990     0,989   0,989     0,984   0,989    0,980     R
                0,993   0,004   0,993     0,993   0,993     0,989   0,994    0,985     L
                0,994   0,004   0,993     0,994   0,993     0,990   0,994    0,979     N
Weighted Avg.   0,992   0,004   0,992     0,992   0,992     0,988   0,992    0,981

=== Confusion Matrix ===

  a   b   c  <-- classified as
1978  12  10 |   a = R
  10 1986   4 |   b = L
  10   3 1987 |   c = N

```

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Uma das informações importantes do relatório de desempenho do WEKA, esta exposto na matriz de confusão, onde se pode distinguir os tipos de batimentos classificados incorretamente. Por exemplo, observando a matriz de confusão da gold1, percebe-se que a mesma, classificou 12 batimentos do tipo *R* como sendo do tipo *L*, e também 10 batimentos

do tipo *R* como sendo do tipo *N*. Com essas e outras informações, pode-se fazer uma avaliação criteriosa do algoritmo usado.

Nas Tabelas 8 e 9 são mostrados os resultados das classificações obtidas dos dois grupos de dados. Na Tabela 8 mostra os resultados de 6000 batimentos e a Tabela 9 abrange os resultados de 12000 batimentos. Para fins de comparação, são apresentados, também, os resultados obtidos do sinal puro, que é o próprio sinal analisado sem nenhuma transformação aplicada. As colunas 2, 3 e 4 exibem a quantidade de batimentos classificados corretamente para cada tipo de batimento. A coluna 5 mostra o número total de batimentos classificados corretamente. A coluna 6 refere-se a porcentagem dos acertos. Os resultados em negrito representam o melhor resultado obtido.

Tabela 8- Resultados da classificação para 6000 batimentos.

<i>Wavelet</i>	Batimentos Cardíacos Classificados Corretamente				Resultado Geral (%)
	<i>N</i>	<i>LBBB</i>	<i>RBBB</i>	<i>Total</i>	
sinal puro	1981	1980	1977	5938	98.9667
gold1	1987	1986	1978	5951	99.1833
gold2	1985	1992	1979	5956	99.2667
gold3	1980	1977	1984	5941	99.0167
db4	1981	1971	1968	5920	98.6667
db6	1986	1885	1875	5746	95.7667
db8	1919	1772	1744	5435	90.5833
db10	1972	1754	1778	5504	91.7333
gaus1	1979	1967	1946	5892	98.2000
gaus2	1980	1955	1952	5887	98.1167
gaus3	1986	1982	1964	5932	98.8667

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Tabela 9- Resultados da classificação para 12000 batimentos.

<i>Wavelet</i>	Batimentos Cardíacos Classificados Corretamente				Resultado Geral (%)
	<i>N</i>	<i>LBBB</i>	<i>RBBB</i>	<i>Total</i>	
sinal puro	3981	3975	3965	11921	99.3417
gold1	3980	3981	3975	11936	99.4667
gold2	3982	3983	3960	11925	99.3750
gold3	3987	3980	3970	11937	99.4750
db4	3969	3967	3957	11893	99.1083
db6	3980	3860	3847	11687	97.3917
db8	3915	3521	3595	11031	91.9250
db10	3968	3444	3620	11032	91.9333
gaus1	3976	3950	3946	11872	98.9333
gaus2	3977	3963	3939	11879	98.9917
gaus3	3983	3977	3961	11921	99.3417

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Conforme pode ser observado nos resultados referentes ao grupo de 6000 batimentos, a wavelet gold1 foi melhor na classificação de batimentos do tipo *N* do que as demais wavelets. Entretanto, considerando o grupo de 12000 batimentos, a gold3 obteve uma melhor precisão na classificação dos batimentos do tipo *N* em relação a qualquer outro resultado.

Para aos batimentos do tipo *LBBB*, o melhor resultado foi o da wavelet gold2, em ambos os grupos de classificação. Já em relação aos batimentos do tipo *RBBB*, a gold3 e a gold1 obtiveram resultados melhores no grupo de 6000 e 12000 batimentos respectivamente.

Comparando-se os resultados do sinal puro e das Golden wavelets, em relação ao grupo de 6000 batimentos pode ser observado que o sinal puro obteve um resultado melhor do que o resultado da gold3, somente na classificação dos batimentos do tipo *N* e do tipo *LBBB*. Para os demais resultados, as Golden wavelets obtiveram resultados melhores.

Agora, para o grupo de 12000 batimentos, comparando-se os resultados do sinal puro com as Golden wavelets, pode-se notar que o sinal puro foi melhor do que a gold1 na classificação dos batimentos do tipo *N*, e melhor do que a gold2 na classificação dos batimentos do tipo *RBBB*. Para os demais resultados, as Golden wavelets foram melhores.

No resultado geral, as Golden wavelets obtiveram uma maior precisão do que as demais wavelets e o sinal puro, pois como pode ser observado em ambos os grupos de classificação, as demais wavelets não obtiveram resultados interessantes na classificação.

A explicação para que os resultados da classificação sejam melhores no domínio wavelet do que no domínio do tempo está ligada ao fato, de que utilizando a média da CWT até a escala 20 se obtém curvas características que padronizam os diferentes tipos de configurações dos complexos QRS. Assim o classificador “sabe” diferenciar melhor os tipos de batimentos, e isso é feito de uma forma eficiente com as Golden wavelets. Como pode ser visto na Figura 47, as médias dos coeficientes da CWT das wavelets gold2 e gold3, possuem uma alta similaridade com os complexos QRS no domínio temporal.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada uma nova família de funções wavelets, denominada Golden wavelets. As wavelets dessa família são obtidas das derivadas de quocientes entre dois polinômios com coeficientes de Fibonacci.

Nos estudos apresentados, pode-se verificar que nem todo quociente entre polinômios com coeficientes de Fibonacci gera uma função onda de suporte compacto. Porém, observou-se que todas as funções com características de ondas obtidas pela n -ésima derivada, provavelmente são funções wavelets. Para isto, deve-se provar que as condições para existência de wavelets são satisfeitas para essas funções derivadas.

Para questões de verificações, foram consideradas 27 funções wavelets como membros da nova família. Foi realizado o cálculo da condição de admissibilidade analiticamente para essas 27 wavelets, no entanto, foi exposta somente uma prova, para a função derivada de ordem quarta do quociente entre os polinômios com coeficientes de Fibonacci de graus um, no numerador, e dois no denominador. Para algumas Golden wavelets, quando se aumenta os graus do numerador e do denominador, o cálculo da condição de admissibilidade pode-se tornar analiticamente impossível. Sendo assim, outros recursos para mostrar a autenticidade das wavelets devem ser tomados, por exemplo, métodos numéricos.

Como foi mostrado no decorrer desse trabalho, por meio de figuras, existem diversas funções que podem ser consideradas membros da família Golden. Assim, pensando em aplicações, as Golden wavelets podem ser consideradas como uma “biblioteca” para escolha de funções wavelets. Isso se deve ao fato delas possuírem diferentes características no seu formato de onda. Desse modo, ao analisar um sinal utilizando a WT, é vantajoso quando se pode escolher uma wavelet dentro de um conjunto que possui vários formatos e características diferentes, obtendo, assim, mais recursos para diferentes tipos de análises.

Com o intuito de apenas mostrar suas aplicabilidades, as Golden wavelets foram usadas na classificação de arritmias cardíacas em sinais de ECG. E, se mostraram eficientes, obtendo resultados significantes na precisão da classificação, sendo superiores aos de outras funções wavelets amplamente usadas na literatura especializada.

Da forma que foram apresentadas até o momento, as Golden wavelets só podem ser usadas na decomposição de sinais com a transformada wavelet contínua. Assim, trabalhos futuros poderão se concentrar na discretização das tais funções, para posterior

obtenção dos coeficientes de filtros passa-baixa e passa-alta das mesmas. Isto possibilitará o uso dessas wavelets, na decomposição de sinais com a transformada wavelet discreta, aumentando assim, a gama de aplicações para essas funções.

REFERÊNCIAS

- ABRY, P. **Ondelettes et turbulences**: multirésolutions, algorithmes de décomposition, invariance d'échelle et signaux de pression. Paris: Diderot multimédia, 1997. 289 p.
- ANTOINE, J. P.; MURENZI, R.; VANDERGHEYNST, P.; ALI, S. T. **Two-dimensional wavelets and their relatives**. Cambridge: Cambridge University, 2008. 480 p.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488 p.
- DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 377 p.
- DEBNATH, L.; SHAH, F. A. **Wavelet transforms and their applications**. 2. ed. Boston: Birkhäuser, 2015. 553 p.
- GABOR, D. Theory of communication. **Journal of the Institute of Electrical Engineers**, London, v. 93, n. 26, p.429-460, 1946.
- GARTH, D.; MILLS, D.; MITCHELL, P. Polynomials generated by the Fibonacci sequence. **Journal of Integer Sequences**, Waterloo, v. 10, n. 2. p.1-12, 2007.
- GOLDBERGER, A. L.; AMARAL, L. A. N.; GLASS, L.; HAUSDORFF, J. M.; IVANOV, P. C.; MARK, R. G.; MIETUS, J. E.; MOODY, G. B.; PENG, C. K.; STANLEY, H. E. Physiobank, physiotoolkit and physionet: components of a new research resource for complex physiologic signals. **Des Plaines: Circulation**, v. 101, n. 23, p. e215-e220, 2000. Disponível em: <<http://circ.ahajournals.org/cgi/content/full/101/23/e215>>. Acesso em: 5 jun 2016.
- GOMES, J.; VELHO, L.; GOLDENSTEIN, S. **Wavelets**: teoria, software e aplicações. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 21., 1997, Rio de Janeiro. **Colóquio...** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1997. 216 p.
- GOSSLER, F. E.; OIVEIRA, B. R.; DUARTE, M. A. Q.; LAMBLÉM, R. L.; VILLARREAL, F. A wavelet generated from Fibonacci-coefficient polynomials and its application in cardiac arrhythmia classification. In: NATIONAL MEETING ON COMPUTATIONAL MODELING - ENMC, 19.; MEETING ON MATERIALS SCIENCE AND TECHNOLOGY - ECTM, 7., 2016, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2016. p. 170-177.
- HALL, M.; FRANK, E.; HOLMES, G.; PFAHRINGER, B.; REUTEMANN, P.; WITTEN, I. H. The weka data mining software: an update. **ACM SIGKDD explorations newsletter**, New York, v. 11, n. 1, p.10-18, 2009.
- HAMPTON, J. R. **ECG essencial**. 8. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014. 208 p.
- HAYKIN, S.; VEEN, B. V. **Sinais e sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2002. 668 p.
- HSU, P. H. **Análise de Fourier**. Rio de Janeiro: LTC, 1972. 274 p.

- HUNTLEY, H. E. **A divina proporção: um ensaio sobre a beleza na matemática.** Brasília: UnB, 1985. 177 p.
- KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications.** Canada: John Wiley & Sons, 2001. 672 p.
- LAMBLÉM, R. L.; GOSSLER, F. E.; DUARTE, M. A. Q.; VILLARREAL, F. Polinômios com coeficientes de Fibonacci e wavelets. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL-CNMAC, 36., 2016, Gramado. **Proceeding...** Gramado: Centro de Treinamentos e Eventos da FAURGS/UFRGS. p.1-6.
- LOESCH, C.; HOELTGEBAUM, M. **Métodos estatísticos multivariados.** São Paulo: Saraiva, 2012. 288 p.
- LOSCALZO, J. **Medicina cardiovascular de Harrison.** 2. ed. Porto Alegre: Artmed; McGraw-Hill, 2013. 512 p.
- MALLAT, S. **A wavelet tour of signal processing: the sparse way.** 3. ed. Burlington: Academic, 2008. 832 p.
- MISITI, M.; MISITI, Y.; OPPENHEIM, G.; POGGI, J. M. **Wavelets and their applications.** [S.l.]: Hermes Science/Lavoisier, 2003. 330 p.
- MISITI, M.; MISITI, Y.; OPPENHEIM, G.; POGGI, J. M. **Wavelet toolbox™: getting started guide.** Natick: The MathWorks Inc, 2013.
- MORETTIN, P. A. **Ondas e ondaletas: da análise de Fourier à análise de ondaletas.** São Paulo: Edusp, 1999. 272 p.
- OLDHAM, K. B.; MYLAND, J.; SPANIER, J. **An atlas of functions: with equator, the atlas function calculator.** 2. ed. New York: Springer Science & Business Media, 2010. 748 p.
- OLIVEIRA, H. M. D. **Análise de sinais para engenheiros: uma abordagem via wavelets.** Rio de Janeiro: Brasport, 2007. 244 p.
- OLSON, D. L.; DELEN, D. **Advanced data mining techniques.** Berlim: Springer Science & Business Media, 2008. 180 p.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Digital signal processing.** Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1975. 585 p.
- POULARIKAS, A. D. **The transforms and applications handbook.** 3. ed. Boca Raton: CRC Press & IEEE Press, 2010. 911 p.
- REIS, H. J. L.; GUIMARÃES, H. P.; ZAZULA, A. D.; VASQUE, R. G.; LOPES, R. D. **Ecg: manual prático de eletrocardiograma.** São Paulo: Atheneu, 2013. 121 p.
- RIOUL, O.; VETTERLI, M. Wavelets and signal processing. **IEEE Signal Processing Magazine**, Piscataway, v. 8, n. 4, p. 14-38, Oct 1991.

STARK, H. G. **Wavelets and signal processing: an application-based introduction**. Netherlands: Springer Science & Business Media, 2005. 158 p.

STEIN, E. **Análise rápida dos eletrocardiogramas: um guia de estudos**. São Paulo: Manole, 2001. 400 p.

SUKIENIK, B. **Atlas de eletrocardiografia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015. 272 p.

THALER, M. S. **ECG essencial: eletrocardiograma na prática diária**. 7. ed. Porto Alegre: Artmed, 2013. 344 p.

WEEKS, M. **Processamento digital de sinais utilizando matlab e wavelets**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. 408 p.

ZORZI, R.; STARLING, I. G. **Corpo humano: órgãos, sistemas e funcionamento**. Rio de Janeiro: Senac, 2010. 230 p.

APÊNDICE A - INCLUINDO AS GOLDEN WAVELETS NA TOOLBOX DO MATLAB

Nesse apêndice é mostrada a adição ao wavemenu do MATLAB[®], das Golden wavelets que foram obtidas no desenvolvimento desse trabalho. Para adicionar uma nova família wavelet em Wavelet Toolbox[™] será usado a função `wavemngr`.

A Toolbox da Wavelet contém cinco tipos de wavelets:

- WT = 1: wavelets ortogonais;
- WT = 2: wavelets biortogonais;
- WT = 3: wavelets com função de escala;
- WT = 4: wavelets sem função de escala;
- WT = 5: wavelets complexas sem função de escala;

Nesse exemplo, se trabalhará com as wavelets tipo 4. Estas wavelets não têm função de escala associadas e, portanto, só estão disponíveis para análise wavelet contínua. Adicionar a wavelet do tipo 4 requer duas etapas:

- 1) **Definição de parâmetros.** Definir seis parâmetros e passá-los para a função `wavemngr`.
- 2) **Defina um arquivo.** As famílias de wavelets devem ser construídas usando um arquivo `.m`.

1) Definindo os 6 parâmetros:

1. Escolher um nome para a família wavelet: `Golden Wavelets`;
2. Escolher um nome curto para designar uma wavelet: `gold`;
3. Classificar o tipo da wavelet a ser inserida: `4`;
4. Definir a ordem N das wavelets desta família: `1 2 3`;
5. Definir o nome do arquivo que será usado no `wavemngr`: `gold`;
6. Definir o suporte da wavelet: `[-6 6]`.

Indo ao workspace e digite:

```
>> familyName = 'Golden Wavelets';
familyShortName = 'gold';
familyWaveType = 4;
familyNums = '1 2 3';
fileWaveName = 'gold';
familyBounds = [-6 6];
```

2) Criando um arquivo.m para inserir a função:

```
function [y,x] = gold(LB,UB,N,wname)
    x = -6:0.01:6;
    if wname=='gold1'
        y = (343.*(-1.-15.*x-10.*x.^2+10.*x.^3+5.*x.^4))./(
(64.*(2.+x+x.^2).^5);
    elseif wname=='gold2'
        y = (800.*(5.-5.*x-30.*x.^2-10.*x.^3+5.*x.^4+x.^5))./(
(187.*(2.+x+x.^2).^5);
    else wname=='gold3'
        y = (100.*(13.-45.*x-110.*x.^2-10.*x.^3+25.*x.^4+3.*x.^5))./(
(93.*(2.+x+x.^2).^5);
    end
```

Tendo definindo tudo isso vá ao workspace e digite:

```
>> wavemngr ('add', familyName, familyShortName, familyWaveType, ...
familyNums, fileWaveName, familyBounds).
```

Verifique se a família wavelet foi criado com o comando.

```
>> wavemngr('read')
```

ans =

```
=====
Haar                haar
Daubechies          db
Symlets             sym
Coiflets            coif
BiorSplines         bior
ReverseBior         rbio
Meyer               meyr
DMeyer              dmey
Gaussian            gaus
Mexican_hat         mexh
Morlet              morl
Complex Gaussian    cgau
Shannon             shan
Frequency B-Spline fbsp
Complex Morlet      cmor
Golden Wavelets     gold
=====
```