

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
**CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

**RODRIGO FRANCISCO BORGES LOURENÇO**

ANÁLISE COMPUTACIONAL DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM SISTEMA  
VIBRO-IMPACTO

Ilha Solteira

2017

**RODRIGO FRANCISCO BORGES LOURENÇO**

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM SISTEMA  
VIBRO IMPACTO**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Conhecimento: Mecânica dos sólidos.

**Prof. Dr. Fabio Roberto Chavarette**

**Orientador**

Ilha Solteira

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

- L892a Lourenço, Rodrigo Francisco Borges.  
Análise computacional do comportamento dinâmico de um sistema vibro-impacto / Rodrigo Francisco Borges Lourenço. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017  
70 f. : il.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2017
- Orientador: Fabio Roberto Chavarette  
Inclui bibliografia
1. Vibrações mecânicas. 2. Simulações numéricas. 3. Controlador linear ótimo. 4. Análise de estabilidade.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: ANÁLISE COMPUTACIONAL DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM SISTEMA VIBRO-IMPACTO

AUTOR: RODRIGO FRANCISCO BORGES LOURENÇO  
ORIENTADOR: FABIO ROBERTO CHAVARETTE

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA MECÂNICA, área: MECANICA DOS SÓLIDOS pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. FABIO ROBERTO CHAVARETTE  
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO  
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. WARLEY AUGUSTO PEREIRA  
Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade de Rio Verde

Ilha Solteira, 24 de janeiro de 2017

**DEDICO,**

Ao meu avô **Jarbas Pereira Borges** e a minha avó **Julia Francisca Borges**, que me educaram e me deram condições para realizar grandes conquistas.

## **Agradecimentos**

Primeiramente a Deus, pela realização desse trabalho.

Aos Meus Avós maternos Jarbas Pereira Borges (*in memoriam*) e Julia Francisca Borges por todo ensinamento, amor e incentivo aos objetivos por mim almejados.

Aos amigos que conviveram comigo durante minha passagem por Ilha Solteira, e principalmente aos companheiros de casa, Carlos Eduardo, Thalles Denner, Diogo Batista, Paulo Henrique e Edson Roberto.

A todos os funcionários e professores da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira que direta e indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, em especial aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica.

Aos Diretores das Faculdades de Engenharia Mecânica e Engenharia de Civil da Universidade de Rio Verde, Prof. Dr. Warley Augusto Pereira e Prof. Me. Giancarlo Ribeiro Vasconcelos e Prof. Me. João Pires de Moraes pela confiança no meu trabalho na Universidade de Rio Verde.

Ao meu orientador Prof. Dr. Fábio Roberto Chavarette pela oportunidade concedida, ensinamentos, confiança no meu trabalho, grande paciência e acima de tudo pela amizade construída durante todos esses anos.

E principalmente, a minha mãe Elza Maria Borges, minha irmã Katrine Borges Moraes, meu irmão Valdomiro Bueno de Moraes Filho, pela compreensão da minha ausência durante longos períodos.

“A pessoa que não pode viver significativamente o hoje, não pode esperar levar uma vida brilhante amanhã. Não importando que grandes planos a pessoa possa fazer, se não valorizar cada momento, será exatamente como muitos castelos no ar. Todas as causas no passado e todos os efeitos no futuro estão condensados dentro do momento presente da vida”

Daisaku Ikeda

## RESUMO

São diversos os equipamentos de engenharia que apresentam vibrações mecânicas, e estas podem ser observadas em forma de acelerações, deslocamentos e velocidade. Os primeiros estudos envolvendo vibrações foram direcionados aos fenômenos naturais e modelagem matemática de sistemas vibrantes, então, começou a aplicação desses estudos em equipamentos de engenharia. Vibrações mecânicas, na maioria dos sistemas dinâmicos, são consideradas como algo indesejado e podem ser danosos. Porém, existem situações que são utilizadas para melhorar o funcionamento e desempenho de máquinas. São diversas as causas de vibrações em sistemas de engenharia, neste trabalho, destaca-se as vibrações causadas por impacto. Quando componentes destes sistemas impactam entre si, causando ruídos de curta duração, são caracterizados como sistemas tipo vibro - impacto. Podem ser citados diversos equipamentos com essas características, como rolos compactadores de solo, martelos de impacto, perfuratrizes de solo, etc. Neste trabalho, demonstra-se o comportamento dinâmico de um sistema vibro – impactante. Para análise deste sistema, foram desenvolvidos códigos computacionais, através do software Octave. No diagrama de estabilidade de Lyapunov, verificou-se que, pontualmente o sistema se apresenta de forma estável. A partir da variação da frequência de excitação, foi observado através dos históricos no tempo, espectros de frequência, mapas de Poincaré e planos de fase, um comportamento periódico e estável, com situações diversas de respostas. Ao analisar a evolução temporal dos expoentes de Lyapunov, para todas as condições de velocidade e deslocamento impostas, o sistema se apresentou de forma caótica. Implementou-se um controlador linear ótimo ao sistema, afim de atenuar as vibrações nas regiões de operação nas quais o sistema é instável. Comprovou-se que a estratégia de controle linear ótimo (LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*) demonstra eficiência para este tipo de situação e pode ser utilizada na redução de danos, evitando prejuízos econômicos, perdas biológicas e materiais.

**Palavras-chave:** Análise de estabilidade. Caos. Controle linear ótimo. Simulação numérica. Vibrações mecânicas.



## ABSTRACT

There are several engineering equipment's that present mechanical vibrations, and these can be observed in the form of displacement, acceleration, and speed. The first studies involving were directed to the natural phenomena and mathematical modeling of vibrations systems, then the application of these studies began in engineering equipment. In most dynamic systems Mechanical vibrations are considered to be unwanted and can be harmful. However, there are situations that are used to improve the operation and performance of machines. There are several causes of vibrations in engineering systems. In this work, the vibrations caused by impact are highlighted. For components of these systems impacting each other, causing short - term noise, they are characterized as vibro-impact systems. Various equipment with these characteristics can be mentioned, such as soil compacting rollers, impact hammers, soil drills, etc. In this work the dynamic behavior of a vibro-impacting system is demonstrated. For the computational analysis of this system, were implemented codes using the software Octave. In the Lyapunov stability diagram, is was verified that, the system presents is stable. From the variation of the excitation frequency, a periodic and stable behavior was observed through time histories, frequency spectrump, poincaré maps and phase planes, with different situations of responses. When analyzing the time evolution of the Lyapunov is exponents, for all imposed conditions of velocity and displacement, the system appeared chaotic. An optimum linear controller was implemented in the system in order to attenuate the vibrations in the operating regions in which the system is unstable. It was verified that the Linear Quadratic Regulator (LQR) demonstrates efficiency for this type of situation and it can be used to reduce damages, avoiding economic, biological, and material losses.

**Keywords:** Stability analysis. Chaos. Optimal linear control. Numerical simulation. Mechanical vibrations.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Modelos mecânicos vibro-impactantes.....	18
<b>Figura 2</b> - Torre de perfuração de solo para extração de petróleo.....	19
<b>Figura 3</b> - Martelo de impacto.....	20
<b>Figura 4</b> - Compactador de solo.....	20
<b>Figura 5</b> - Modelo adotado por mariano (2005).....	21
<b>Figura 6</b> - Modelo estudado por Souza (2008).....	22
<b>Figura 7</b> - Modelo estudado por Zerwes (2012).....	22
<b>Figura 8</b> - Modelo Proposto por Pavlovskaja et al. (2015).....	23
<b>Figura 9</b> - (a) Fotos do experimento usado por Ing et al. (2008). (b) Modelo esquemático.	24
<b>Figura 10</b> - Modelo vibro-impacto adotado no trabalho. ....	25
<b>Figura 11</b> - Função auxiliar utilizada. ....	30
<b>Figura 12</b> - Diagrama de estabilidade do oscilador vibro-impacto. ....	34
<b>Figura 13</b> - Histórico no tempo para deslocamento ( $\omega = 0,847$ ).....	35
<b>Figura 14</b> - Histórico no tempo para velocidade ( $\omega = 0,847$ ).....	36
<b>Figura 15</b> - Plano de Fase para ( $\omega = 0,847$ ).....	36
<b>Figura 16</b> - Espectro de frequência para deslocamento.....	37
<b>Figura 17</b> - Espectro de frequência para velocidade.....	37
<b>Figura 18</b> - Mapa de Poincaré para ( $\omega = 0,847$ ).....	38
<b>Figura 19</b> - Histórico no tempo para deslocamento ( $\omega = 0,906$ ).....	39
<b>Figura 20</b> - Histórico no tempo para velocidade ( $\omega = 0,906$ ).....	39
<b>Figura 21</b> - Plano de fases para ( $\omega = 0,906$ ).....	40
<b>Figura 22</b> - Espectro de frequência para deslocamento.....	41
<b>Figura 23</b> - Espectro de frequência para velocidade.....	41
<b>Figura 24</b> - Mapa de Poincaré para ( $\omega = 0,906$ ).....	42
<b>Figura 25</b> - Histórico no tempo para deslocamento ( $\omega = 0,996$ ).....	42
<b>Figura 26</b> - Histórico no tempo para velocidade ( $\omega = 0,996$ ).....	43
<b>Figura 27</b> - Plano de fases para ( $\omega = 0,996$ ).....	44
<b>Figura 28</b> - Espectro de frequência para deslocamento.....	44
<b>Figura 29</b> - Espectro de frequência para velocidade.....	45
<b>Figura 30</b> - Mapa de Poincaré para ( $\omega = 0,996$ ).....	45
<b>Figura 31</b> - Representação da evolução da esfera, em torno do ponto inicial.....	46

<b>Figura 32</b> - Expoentes de Lyapunov (deslocamento 1, velocidade 0).....	48
<b>Figura 33</b> - Expoentes de Lyapunov (deslocamento 0, velocidade 1).....	49
<b>Figura 34</b> - Expoentes de Lyapunov (deslocamento 2, velocidade 0).....	50
<b>Figura 35</b> - Expoentes de Lyapunov (deslocamento 2, velocidade 0).....	51
<b>Figura 36</b> - Expoentes de Lyapunov (deslocamento 2, velocidade 2).....	52
<b>Figura 37</b> - Fluxograma de síntese do Controle Ótimo. ....	58
<b>Figura 38</b> - Histórico no tempo do sistema controlado ( $\omega = 0,847$ ) .....	60
<b>Figura 39</b> - Histórico no tempo do sistema controlado ( $\omega = 0,847$ ) .....	60
<b>Figura 40</b> - Plano de fases para o sistema controlado ( $\omega = 0,847$ ) .....	61
<b>Figura 41</b> - Histórico no tempo do sistema controlado ( $\omega = 0,906$ ) .....	62
<b>Figura 42</b> - Histórico no tempo do sistema controlado ( $\omega = 0,906$ ) .....	62
<b>Figura 43</b> - Plano de fases para o sistema controlado ( $\omega = 0,906$ ) .....	63
<b>Figura 44</b> - Histórico no tempo do sistema controlado ( $\omega = 0,996$ ) .....	64
<b>Figura 45</b> - Histórico no tempo do sistema controlado ( $\omega = 0,996$ ) .....	64
<b>Figura 46</b> - Plano de fases para o sistema controlado ( $\omega = 0,996$ ) .....	65

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> - Parâmetros adimensionais utilizados nas simulações computacionais .....	33
<b>Tabela 2</b> - Condições iniciais do sistema.....	47

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Amplitude da força de excitação
$\vec{A}$	Matriz constante
$b$	Base de referencia
$B$	Matriz constante
$c_1$	Coefficiente de amortecimento
$d_0$	Diâmetro inicial da esfera
$d(t)$	Variação do diâmetro da esfera
$e$	Folga adimensional
$g$	Folga entre o bloco e a mola 2
$\vec{g}(x)$	Vetor de funções
$G(x, \tilde{x})$	Matriz limitada
$H$	Função auxiliar Heaviside
$k_1$	Coefficiente de rigidez da mola 1
$k_2$	Coefficiente de rigidez da mola 2
$m$	Massa do bloco
$p$	Frequência de excitação
$P, Q e R$	Matrizes positiva definidas
$s$	Movimento da base oscilante
$S$	Força de excitação do sistema
$t$	Tempo
$\vec{U}, \vec{u} e \vec{u}_t$	Vetores de controle
$x$	Deslocamento adimensional
$\vec{x}$	Vetor de estado
$x_2$	Velocidade Adimensional
$y$	Movimento relativo entre a base oscilante e o bloco
$\dot{y}$	Aceleração relativa
$\ddot{y}$	Velocidade relativa
$z$	Movimento do bloco

## Símbolos Gregos

$\alpha$	Amplitude da força adimensional
$\beta$	Razão da rigidez
$\delta$	Delta de Dirac
$\tau$	Tempo adimensional
$\lambda$	Expoentes de Lyapunov
$\omega$	Frequência de excitação adimensional
$\omega_0$	Frequência natural do sistema
$\xi$	Fator de amortecimento

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	15
1.1	OBJETIVOS .....	16
1.2	CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO .....	17
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	18
2.1	SISTEMAS VIBRO-IMPACTO .....	18
<b>3</b>	<b>MODELO VIBRO-IMPACTO</b> .....	24
3.1	REDUÇÃO DE ORDEM DA EQUAÇÃO .....	30
3.2	PONTOS DE EQUILÍBRIO.....	31
3.3	LINEARIZAÇÃO EM TORNO DO PONTO DE EQUILÍBRIO .....	31
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS</b> .....	33
4.1	ESTABILIDADE DO SISTEMA.....	33
4.2	ANÁLISE DO SISTEMA PARA $\omega = 0,847$ .....	35
4.3	ANÁLISE DO SISTEMA PARA $\omega = 0,906$ .....	38
4.4	ANÁLISE DO SISTEMA PARA $\omega = 0,996$ .....	42
4.5	EXPOENTES DE LYAPUNOV .....	46
<b>4.5.1</b>	<b>Deslocamento 1, velocidade 0.</b> .....	48
<b>4.5.2</b>	<b>Deslocamento 0, velocidade 1.</b> .....	48
<b>4.5.3</b>	<b>Deslocamento 2, velocidade 0.</b> .....	49
<b>4.5.4</b>	<b>Deslocamento 2, velocidade 2.</b> .....	51
<b>5</b>	<b>PROJETO DE CONTROLE</b> .....	53
5.1	CONTROLE LINEAR ÓTIMO (LQR).....	53
<b>5.1.1</b>	<b>Formulação do problema de controle</b> .....	54
<b>5.1.2</b>	<b>Teorema de controle</b> .....	55
<b>5.1.3</b>	<b>Prova do teorema</b> .....	56
<b>5.1.4</b>	<b>Verificação da controlabilidade do sistema</b> .....	58
5.2	APLICAÇÃO DO CONTROLE NO MODELO PROPOSTO .....	59
<b>5.2.1</b>	<b>Análise do sistema controlado para <math>\omega = 0,847</math></b> .....	59
<b>5.2.2</b>	<b>Análise do sistema controlado para <math>\omega = 0,906</math></b> .....	61

5.2.3	Análise do sistema controlado para $\omega = 0,996$ .....	63
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	66
6.1	TRABALHOS FUTUROS.....	67
	REFERÊNCIAS.....	68



## 1 INTRODUÇÃO

Há muitas atividades humanas que envolvem vibrações. O simples fato de se ouvir, respirar, andar ou enxergar está relacionado com alguma forma de vibrar das moléculas do corpo (RAO, 2012). É muito comum que diversos objetos de nosso cotidiano apresentem vibrações, e elas podem ser representadas em forma de velocidade, acelerações e deslocamento (MORAES, 2012).

Segundo Rao (2012) os primeiros estudos da área de vibrações foram direcionados aos fenômenos naturais e no desenvolvimento de teorias matemáticas para descrever a vibração de sistemas físicos. A partir daí, os estudos foram também direcionados para aplicações da vibração na área da engenharia, como projeto de máquinas, fundações, estruturas, motores, turbinas e sistemas de controle (RAO, 2012).

Apesar de na maioria dos sistemas mecânicos de engenharia a presença de vibrações ser algo danoso e indesejado, existem situações em que é necessário o uso de impacto para gerar vibrações em certas partes do sistema. Sistemas mecânicos submetidos a esse tipo de excitação são denominados de vibro-impacto. O estudo desse fenômeno é evidenciado quando dois componentes em contato sofrem impactos entre si, gerando assim ruídos de curta duração (AGUIAR, 2006). Podem ser citados diversos equipamentos que utilizam impacto para o melhor desempenho de suas funções, sendo como exemplos britadeiras, máquinas compactadoras, furadeiras de impacto, entre outros diversos. Tratando-se de mecanismos de vibro-impacto, destaca-se o estudo em perfuratrizes de solo, que no geral são equipamentos muito robustos e que quando falham causam grandes danos (PETERKA, 1992). Assim, cada vez mais se torna importante o estudo de mecanismos do tipo vibro-impacto, especialmente quando há presença de folga, pois sofrem com desgastes excessivos, elevados níveis de ruído, vibrações com grandes amplitudes, podendo muitas vezes gerar falhas prematuras. Portanto, estes estudos podem auxiliar na sua prevenção e controle de vibrações e ruídos dos sistemas (MORAES, 2012).

Ing et al. (2008) propôs um modelo experimental que abordava o comportamento de um sistema dinâmico (estável/instável), representado por dois graus de liberdade. Esse sistema estudado apresentava comportamentos diversos que iam de periódico a caótico. Com isso, os autores previram comportamentos e explicaram observações prévias. Tal estudo considerou sistemas fisicamente existentes, e também idealizados, para representarem condições de projetos.

Na maioria das aplicações, os testes experimentais têm custo elevado e envolvem algum perigo, por isto, a modelagem matemática da dinâmica dos sistemas se destaca como boa alternativa (MONTEIRO, 2011). A modelagem matemática tem por finalidade representar aspectos importantes do sistema, com a meta de formular equações que representem seu comportamento (RAO, 2012). Um bom modelo matemático deve conter a maior quantidade possível de detalhes para se descrever o sistema, sem torná-lo complexo além do necessário para cada análise de interesse. Assim, dependendo do comportamento de seus componentes, pode-se defini-lo como linear ou não linear e, conseqüentemente, o nível de complexidade ser alterado de forma significativa.

É comum em sistemas dinâmicos a ocorrência de condições de instabilidade. Afim de prevenir danos estruturais causados por esta ocorrência, podem ser utilizados dispositivos de controle. Tal controle estrutural pode acontecer através de dispositivos externos ou por ação de forças sobre a estrutura. Neste sentido, existem diversos tipos de dispositivos com esta finalidade e, comumente são classificados como passivos, ativos, híbridos e semi-ativos. De forma resumida, a diferença entre os controladores está na forma de alimentação, ou seja, o passivo não necessita de fontes de alimentação externa para funcionar, o ativo consegue uma maior adaptabilidade, mas necessita de fontes de alimentação externa, o controlador híbrido é uma combinação entre o ativo e o passivo, e neste tipo a parte passiva somente entra em funcionamento quando não há alimentação na parte ativa. Por fim, o semi-ativo necessita de alimentação externa, mas esta não consome muita energia e pode ser alimentado por baterias de emergência (BENEVELI, 2002).

Contudo, neste trabalho apresenta-se um estudo do comportamento dinâmico de um sistema vibro-impacto, representado por um modelo físico de dois graus de liberdade proposto por Ing et al. (2008). São encontradas as regiões de estabilidade e instabilidade do sistema e, após se identificar os pontos de equilíbrio instáveis, propõe-se um mecanismo de controle através de um controlador linear ótimo (LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*).

## 1.1 OBJETIVOS

Os principais objetivos deste trabalho são:

- ◆ Elaborar a modelagem matemática do Sistema vibro-impacto;
- ◆ Estudar o comportamento dinâmico do modelo;

- ◆ Projetar um controlador de vibrações para as regiões de operação nas quais o sistema é instável.

## 1.2 CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho é dividido em seis Capítulos apresentados a seguir:

Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica – Este capítulo apresenta o estudo sobre sistemas vibro-impacto.

Capítulo 3 – Modelos matemáticos – Neste capítulo apresentam-se características dos métodos matemáticos, equações diferenciais ordinárias, estabilidade do sistema e matriz jacobiana.

Capítulo 4 – Metodologia de Solução – Neste capítulo apresenta-se a metodologia usada na solução das equações governantes do problema, ou seja, planos de fase, autovalores, e expoentes de Lyapunov, para solução e aplicação do algoritmo adotado para resolver o problema proposto.

Capítulo 5 – Aplicação do controle – Neste capítulo o método do controle linear ótimo é apresentado com o objetivo de minimizar as vibrações em uma pequena órbita periódica.

Capítulo 6 – Considerações Finais – Neste capítulo apresentam-se as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

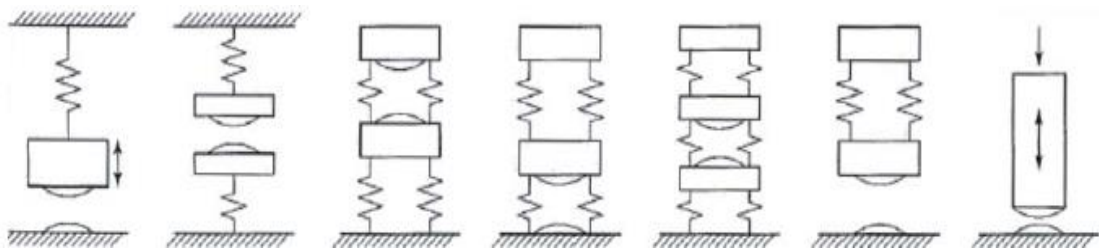
## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Devido ao objetivo proposto do estudo dinâmico de estruturas vibrantes através de impactos, ou seja, sistemas tipo Vibro impacto, se faz necessário uma breve descrição destes sistemas, suas categorizações, classificações e discriminação de exemplo de seus efeitos, bem como suas consequências econômicas, físicas e sociais.

### 2.1 SISTEMAS VIBRO-IMPACTO

É comum dentre os componentes mecânicos de um sistema a ocorrência de impactos. Esses impactos ocorrem geralmente de forma repetitiva, devido movimentos relativos, caracterizando fenômenos denominados impacto vibracional ou vibro-impacto (NADAI, 2010). Pode-se notar na figura 1 ilustrações esquemáticas de alguns modelos mecânicos que representam a ocorrência destes fenômenos em vários equipamentos, como por exemplo em perfuratrizes de solo, furadeiras de impacto e caixas de transmissão.

**Figura 1 - Modelos mecânicos vibro-impactantes**

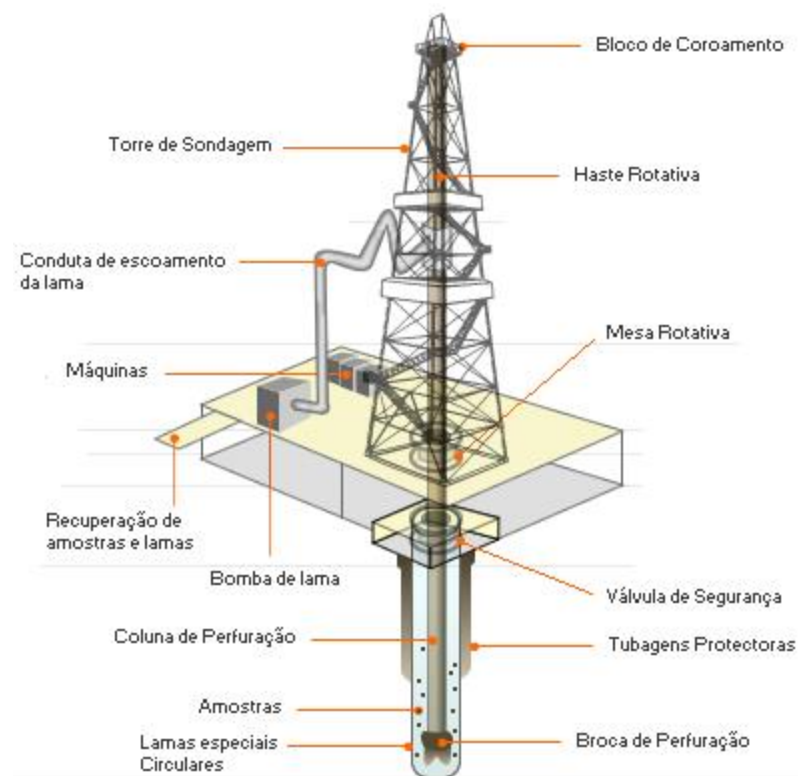


Fonte: Paterka (2001).

Na ocorrência de impactos em máquinas e dispositivos são evidenciadas vibrações causadas por diversos fatores, como folgas, impactos entre componentes e desbalanceamento de eixos. Os impactos vibratórios são na maioria das vezes indesejados, pois podem causar diversos problemas que comprometem a integridade e, conseqüentemente, a vida útil dos componentes de sistemas mecânicos. Entre as diversas fontes de vibro-impacto cita-se, como exemplos folgas em caixas de transmissões, desgastes em dentes de engrenagens e desbalanceamento em eixos de perfuratrizes de solo (NADAI, 2010). Porém, há situações em que essas vibrações são necessárias para o bom funcionamento de equipamentos, principalmente os utilizados para compactação e perfuração como, por exemplo, os martelos de impacto, compactadores de solo, perfuratrizes, amortecedores por impacto, e bate estacas

(PETERKA, 2001). As figura 2, 3 e 4 mostram alguns dos diversos equipamentos que usam vibrações e impacto para otimizarem o funcionamento durante a operação. No primeiro exemplo tem-se a ilustração de uma perfuratriz de solo para extração de petróleo, em que o movimento vibratório da broca ajuda no índice de penetração, principalmente em solo rochosos. No segundo exemplo está ilustrado um martelo de impacto, geralmente utilizado em perfuração de superfícies duras. No último exemplo nota-se um equipamento de compactação, comumente utilizado na construção civil, utilizando impacto para causar vibrações, otimizando seu desempenho.

**Figura 2 - Torre de perfuração de solo para extração de petróleo**



Fonte: Galp energia (2014).

**Figura 3 - Martelo de impacto**



Fonte: Catálogo ferramentas Bosch (2016).

**Figura 4 - Compactador de solo**



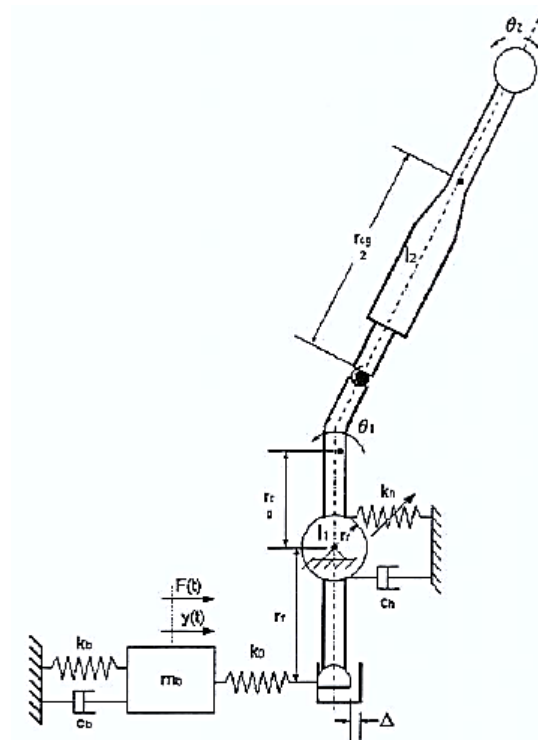
Fonte: Catálogo CR equipamentos (2016).

Holmes (1982) fez uma das primeiras pesquisas envolvendo mecanismos vibro-impacto. O trabalho tratou de uma esfera impactando sobre uma mesa vibrante e observou a perda de energia sofrida em cada impacto (MORAES, 2012).

Mariano (2005) pesquisou sobre alavancas de transmissão e em seu trabalho foi verificado o índice de vibro-impacto destes componentes. O autor utilizou três bancadas para validar o modelo numérico proposto, obtendo experimentalmente parâmetros como deslocamento, força, aceleração e velocidade. A técnica utilizada pelo autor para identificar as forças não lineares atuantes no modelo foi a transformada de Hilbert. O principal objetivo foi identificar as características não lineares do sistema e levantar as curvas de sensibilidade ao índice de vibro-impacto. Na figura 5 tem-se a ilustração do modelo físico proposto pelo autor, no qual nota-se

que a folga existente no sistema é representada por  $\Delta$  e encontra-se na união entre a alavanca e a caixa de transmissão.

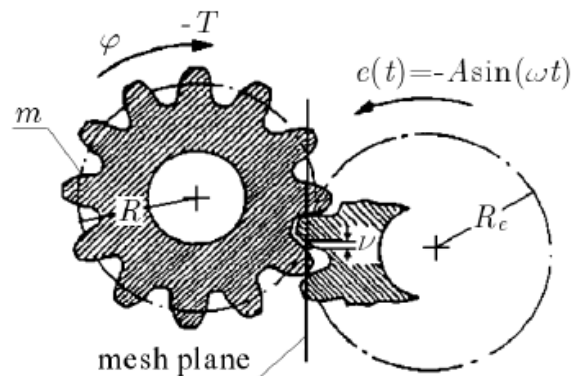
**Figura 5** – Modelo adotado por mariano (2005)



Fonte: Mariano (2005).

Souza (2008) pesquisou sobre efeitos de atritos nos dentes de engrenagens em caixas de transmissão. O estudo apresenta características dinâmicas como retratos de fase, diagramas de bifurcação, expoentes de Lyapunov e limites de bacias, incluindo caracterizações quantitativas do movimento caótico e sensibilidade do estado final. O autor evidencia ser comum a presença de caos em sistemas com característica vibro-impactantes, e apresenta algumas formas e aplicações de amortecedores inteligentes para controle destas instabilidades do sistema. A figura 6 apresenta o modelo utilizado por Souza (2008), na qual nota-se que o impacto é gerado a partir da folga existente entre os dentes das engrenagens.

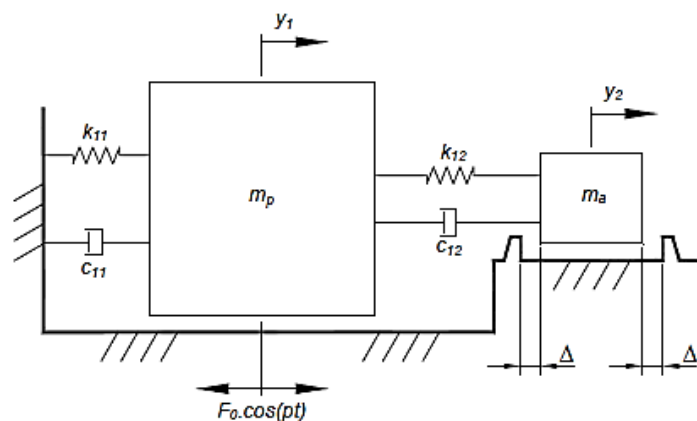
**Figura 6** – Modelo estudado por Souza (2008)



Fonte: Souza (2008).

Zerwes (2012) modelou matematicamente um sistema vibro-impacto com dois graus de liberdade excitado harmonicamente. O modelo ilustrado na figura 7 é composto por duas massas de tamanhos diferentes e observa-se que para um movimento relativo dessas massas maior que a folga  $\Delta$ , apresentada entre o bloco menor e os batentes, tem-se a ocorrência do impacto.

**Figura 7** – Modelo estudado por Zerwes (2012)



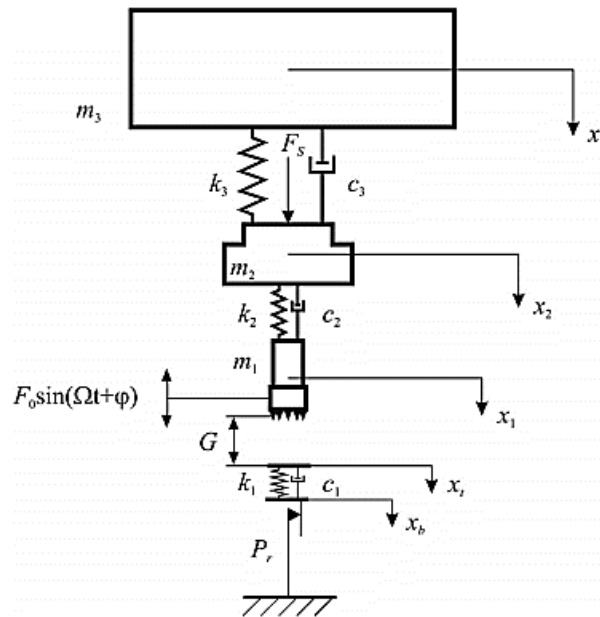
Fonte: Zerwes (2012).

Através da análise da matriz Jacobiana, Zerwes (2012) chegou à conclusão que a estabilidade do sistema é sensível a diversos fatores existentes. O autor citou, como exemplos, a variação da frequência de excitação, razão entre as frequências naturais, amplitude da folga, fator de amortecimento e razão entre as massas dos subsistemas.



Em 2015, Pavlovskaja et al. desenvolveram uma pesquisa sobre perfuratrizes de solo para extração de petróleo. O autores investigaram as condições ótimas de penetração da broca em rochas duras, de acordo com a variação das condições iniciais de operação. A figura 8 representa o modelo proposto por (PAVLOVSKAIA et al., 2015).

**Figura 8** - Modelo Proposto por Pavlovskaja et al. (2015)



Fonte: Pavlovskaja et al. (2015).

Foi verificado por Pavlovskaja et al. (2015) que a frequência de excitação é o fator de maior influência na penetração da broca, e que os melhores índices de penetração se dão quando o movimento é periódico e a frequência de resposta é a mesma da força dinâmica aplicada.

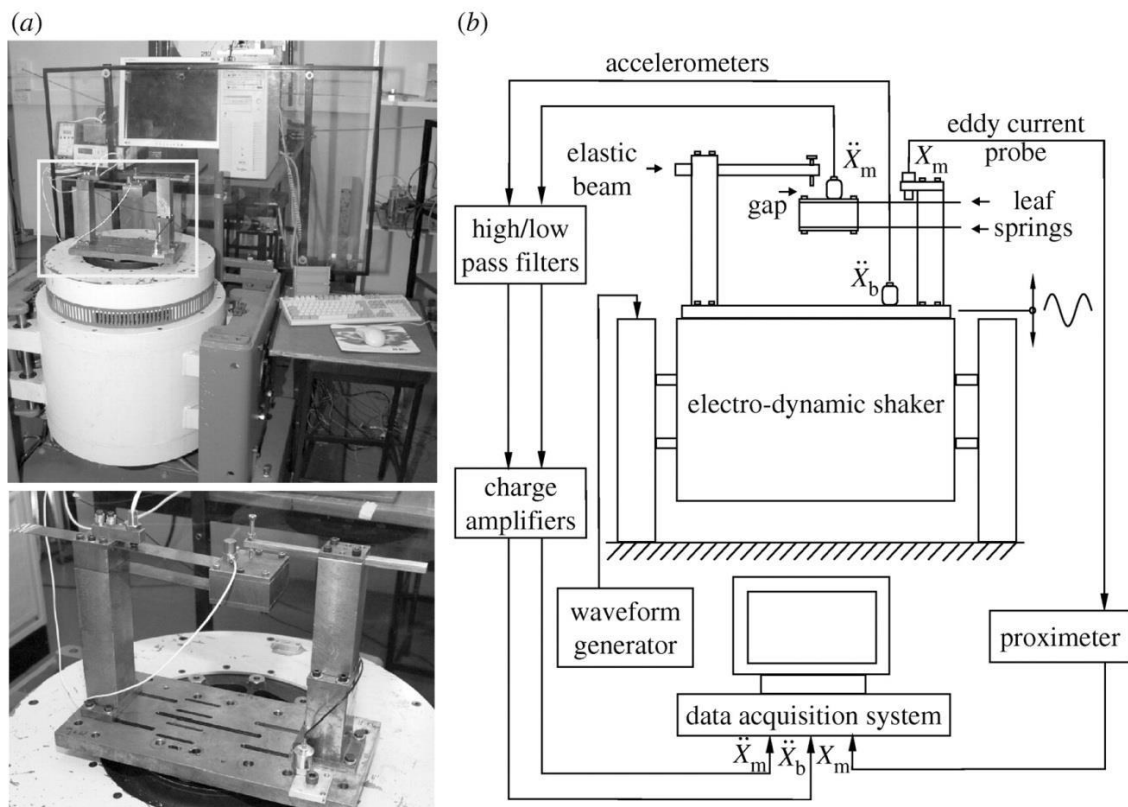
A seguir, no capítulo 3, apresenta-se características dos métodos matemáticos, as excitações, equações diferenciais ordinárias, estabilidade linear, e não-linear, a matriz jacobiana, planos de fase, autovalores e expoentes de Lyapunov para solução e aplicação do algoritmo adotado neste trabalho.

### 3 MODELO VIBRO-IMPACTO

Neste capítulo apresenta-se o modelo adotado neste trabalho, incluindo as hipóteses simplificativas consideradas, as equações governantes para a análise do controlador LQR, além das condições iniciais e de contorno do problema.

Ing et al. (2008) desenvolveram experimentalmente uma montagem que resulta em um mecanismo vibro-impacto, composto por um bloco de aço-carbono suportado por molas. As molas fornecem a rigidez primária do sistema e impedem que a massa rotacione. Como rigidez secundária, o sistema conta com uma viga, montada separadamente, a fim de prevenir grandes deslocamentos do bloco no sentido positivo de  $y$ . O contato entre os dois blocos é dado por um parafuso preso na extremidade da viga. O movimento do corpo de massa  $m$  é limitado pelo conjunto de mola e amortecedor. A excitação do sistema é causada por um agitador eletromagnético acoplado à base do sistema. Na figura 9a são apresentadas imagens do modelo experimental estudado pelos autores e na figura 9b é apresentado um diagrama esquemático deste sistema.

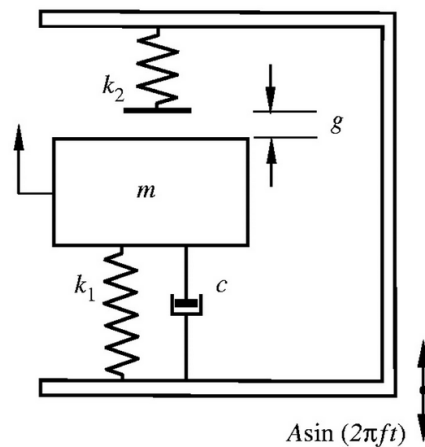
**Figura 9** - (a) Fotos do experimento usado por Ing et al. (2008). (b) Modelo esquemático.



Fonte: Ing et al. (2008).

O modelo físico adotado neste trabalho, representado na figura 10, é uma simplificação do modelo experimental considerado por Ing et al. (2008). O modelo consiste de um corpo de massa  $m$ , presa a uma base oscilante através de uma mola com coeficiente de rigidez  $k_1$  e um amortecedor viscoso com coeficiente de amortecimento  $c$ . No modelo existe uma segunda mola com coeficiente de rigidez  $k_2$ , após folga existente denominada  $g$ . O corpo de massa  $m$  pode se deslocar em função da oscilação  $S = A \text{sen}(2\pi ft)$ , sendo  $\text{sen}()$  a função seno,  $f$  a frequência de oscilação e  $t$  o tempo. Quando a base sofre oscilação, faz com que a massa se desloque, impactando sobre a rigidez secundária, caracterizando assim um sistema vibro-impactante.

**Figura 10** – Modelo vibro-impacto adotado no trabalho.



Fonte: Ing et al. (2008).

Aplicando a Lei da Mecânica Clássica de Newton, escreve-se a equação de movimento conforme equação (1). O movimento do bloco é representado por  $z$ , e o movimento da base representado por  $s$ , portanto o movimento relativo entre a base oscilatória e o bloco será denominado como  $y = (z - s)$ .

Quando o movimento relativo  $y$  é menor ou igual a folga  $g$ , observa-se que o sistema não sofre ação de impacto. A partir do momento em que o movimento  $y$  se torna maior que a folga, o sistema se torna impactante, e a rigidez  $k_2$  passa a agir sobre a estrutura. Então, existem duas situações distintas a serem consideradas:

- (I)  $y \leq g$
- (II)  $y > g$

No caso sem impacto, representado pela inequação (I), tem-se:

$$-k_1y - c\dot{y} = m\ddot{y} + m\ddot{S} \quad (1)$$

$$m\ddot{y} + k_1y + c\dot{y} = -m\ddot{S} \quad (2)$$

Também, no caso com impacto, indicado pela inequação (II), tem-se:

$$-k_1y - k_2(y - g) - c\dot{y} = m\ddot{y} + m\ddot{S} \quad (3)$$

$$m\ddot{y} + k_1y + k_2(y - g) + c\dot{y} = -m\ddot{S} \quad (4)$$

Ainda, afim de expressar a equação (2) de uma forma adimensional, define-se:

$$\tau = \omega_o t, \quad x = \frac{y}{y_o}, \quad \omega = \frac{p}{\omega_o}, \quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_o}$$

onde  $\omega_o$  é a frequência natural de oscilação do sistema e  $\xi$  o fator de amortecimento do sistema linear associado, ou seja, sem a influência da folga.

No caso (I), em que o movimento relativo  $y$  é menor que a folga, escreve-se a equação de movimento da seguinte forma:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + k_1y = -m \frac{d^2S}{dt^2} \quad (5)$$

De acordo com as definições acima  $\frac{\tau}{t} = \omega_o$ , portanto, a equação (5) é reescrita, tal que:

$$m\omega_o^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + c\omega_o \frac{dy}{d\tau} + k_1y = -m\omega_o^2 \frac{d^2S}{d\tau^2} \quad (6)$$

Dividindo toda a equação por  $m\omega_o^2$ , tem-se:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{c}{\omega_o} \frac{dy}{d\tau} + \frac{k_1}{m\omega_o^2}y = -\frac{d^2S}{d\tau^2} \quad (7)$$

ou seja:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m\omega_o} \dot{y} + \frac{k_1}{m\omega_o^2} y = -\ddot{s} \quad (8)$$

Dividindo a equação (8) por  $y_o$ , que representa uma distância de referência arbitrária, tem-se:

$$\frac{\ddot{y}}{y_o} + \frac{c}{m\omega_o} \frac{\dot{y}}{y_o} + \frac{k_1}{m\omega_o^2} \frac{y}{y_o} = -\frac{\ddot{s}}{y_o} \quad (9)$$

Para representar velocidade, deslocamento e aceleração de forma adimensional, aplica-se:  $y = xy_o$ ,  $\frac{dy}{dx} = y_o$ ,  $dy = y_o dx$ ,  $\dot{y} = y_o \dot{x}$  na equação (9), o que resulta na equação (10) seguinte:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m\omega_o} \dot{x} + \frac{k_1}{m\omega_o^2} x = -\frac{\ddot{s}}{y_o} \quad (10)$$

Conforme proposto, tem-se o movimento harmônico da base, dado por:

$$S = A \sin(2\pi f t) \quad (11)$$

sendo  $2\pi f$  a frequência de excitação, representada por  $p$  em sua forma angular, e  $A$  é a amplitude da força de excitação. Assim, reescrevendo a função tem – se:

$$S = A \sin(p t) \quad (12)$$

Também, considerando  $t = \frac{\tau}{\omega_o}$ , conforme definido previamente, tem-se:

$$S = A \sin\left(p \frac{\tau}{\omega_o}\right) \quad (13)$$

Finalmente, como foi definido que  $\omega = \frac{p}{\omega_o}$ , portanto a função equivalente ao movimento harmônico do sistema é:

$$S = A \sin(\omega \tau) \quad (14)$$

Aplicando a derivada segundo na equação (14), tem-se:

$$\dot{S} = A\omega \cos(\omega\tau) \quad (15)$$

$$\ddot{S} = -A\omega^2 \sin(\omega\tau) \quad (16)$$

Substituindo  $\omega_o^2 = \frac{k_1}{m}$ ,  $2\xi = \frac{c}{m\omega_o}$  e  $\ddot{S} = -A\omega^2 \sin(\omega\tau)$  na equação (10), tem-se:

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x = \frac{A}{y_o}\omega^2 \sin(\omega\tau) \quad (17)$$

Considerando  $a = \frac{A}{y_o}$  e isolando  $\ddot{x}$ , tem-se a equação de movimento harmônico sem atrito:

$$\ddot{x} = a\omega^2 \sin(\omega\tau) - 2\xi\dot{x} - x \quad (18)$$

A fim de expressar a equação (4), ou seja, o sistema com impacto, de uma forma adimensional, define-se:

$$\tau = \omega_o t, \quad x = \frac{y}{y_o}, \quad \omega = \frac{p}{\omega_o}, \quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_o}$$

Onde  $\omega_o$  é a frequência natural de oscilação do sistema e  $\xi$  o fator de amortecimento.

No caso do movimento relativo  $y$  maior que a folga, escreve-se a equação de movimento (4) da seguinte forma:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + k_1 y + k_2 (y - g) = -m \frac{d^2 S}{dt^2} \quad (19)$$

De acordo com as definições acima  $\frac{\tau}{t} = \omega_o$ , a equação (19) fica:

$$m\omega_o^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2} + c\omega_o \frac{dy}{d\tau} + k_1 y + k_2 (y - g) = -m\omega_o^2 \frac{d^2 S}{d\tau^2} \quad (20)$$

Dividindo a equação por  $m\omega_o^2$ , tem-se:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{c}{\omega_o} \frac{dy}{d\tau} + \frac{k_1}{m\omega_o^2} y + \frac{k_2}{m\omega_o^2} (y - g) = -\frac{d^2S}{d\tau^2} \quad (21)$$

ou seja:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m\omega_o} \dot{y} + \frac{k_1}{m\omega_o^2} y + \frac{k_2}{m\omega_o^2} (y - g) = -\ddot{S} \quad (22)$$

Dividindo a equação (22) por  $y_o$ , que representa uma distância de referência arbitrária, tem-se:

$$\frac{\ddot{y}}{y_o} + \frac{c}{m\omega_o y_o} \dot{y} + \frac{k_1}{m\omega_o^2 y_o} y + \frac{k_2}{m\omega_o^2 y_o} (y - g) = -\frac{\ddot{S}}{y_o} \quad (23)$$

Para representar velocidade, deslocamento e aceleração de forma adimensional, aplica-se:  $y = xy_o$ ,  $\frac{dy}{dx} = y_o$ ,  $dy = y_o dx$ ,  $\dot{y} = y_o \dot{x}$  na equação (23), o que resulta na equação (24) seguinte:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m\omega_o} \dot{x} + \frac{k_1}{m\omega_o^2} x + \frac{k_2}{m\omega_o^2} (x - e) = -\frac{\ddot{S}}{y_o} \quad (24)$$

Substituindo  $\omega_o^2 = \frac{k_1}{m}$ ,  $2\xi = \frac{c}{m\omega_o}$  e  $\ddot{S} = -A\omega^2 \text{sen}(\omega\tau)$  na equação (24), tem-se:

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x + \frac{k_2}{k_1} (x - e) = \frac{A}{y_o} \omega^2 \text{sen}(\omega\tau) \quad (25)$$

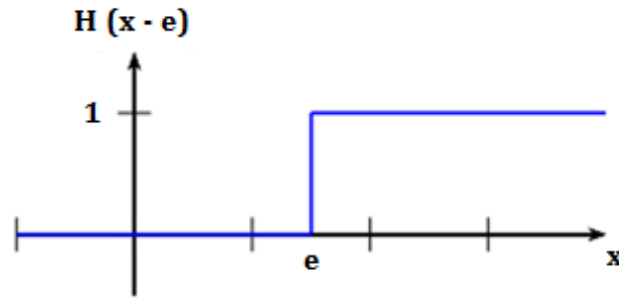
Considerando  $a = \frac{A}{y_o}$  e  $\beta = \frac{k_2}{k_1}$ , que são a amplitude da força (adimensional) e a razão da rigidez, respectivamente, tem-se a equação de movimento harmônico com impacto:

$$\ddot{x} = a\omega^2 \text{sen}(\omega\tau) - 2\xi\dot{x} - x - \beta(x - e) \quad (26)$$

Comparando as equações (18) e (26) é possível observar que a diferença entre elas está no último termo, ou seja, quando o movimento relativo  $y$  é maior que a folga  $g$ , ocorre o impacto e a rigidez  $k_2$  passa a ter influência sobre o sistema. Afim de criar uma função única que represente as duas situações, ou seja, quando há impacto e quando não há, é necessário a

utilização de uma função auxiliar degrau. Esta função, denominada também função de Heaviside, aqui representada por  $H(x - e)$ , tem valor 1 quando  $(x - e) > 0$ , e valor 0 quando  $(x - e) \leq 0$ . A figura 11 representa graficamente a função degrau.

**Figura 11** - Função auxiliar utilizada.



Fonte: Próprio Autor.

Adicionando a função auxiliar na equação (26), tem-se:

$$\ddot{x} = a\omega^2 \text{sen}(\omega\tau) - 2\xi\dot{x} - x - \beta(x - e)H(x - e) \quad (27)$$

### 3.1 REDUÇÃO DE ORDEM DA EQUAÇÃO

Uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$ , pode ser representada por um sistema de  $n$  equações de primeira ordem (BOYCE, 2005). Afim de facilitar as análises, é feita a redução de ordem da equação (27), para isso considerou-se:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (28)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} \quad (29)$$

Substituindo as considerações (28) e (29) na equação (27), isolando a derivada e adicionando a nova variável ao sistema, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a\omega^2 \text{sen}(\omega\tau) - 2\xi x_2 - x_1 - \beta(x_1 - e)H(x_1 - e) \end{cases} \quad (30)$$



Para facilitar os cálculos do sistema de equações (30), afim de verificar o tipo de estabilidade/instabilidade do sistema, é necessário efetuar a linearização em torno dos pontos de equilíbrio.

### 3.2 PONTOS DE EQUILÍBRIO

Afim de linearizar o sistema, considera-se o ponto de equilíbrio  $P = (x_1^*, x_2^*)$ , e a linearização é feita em torno desses pontos. Por definição, nesses pontos de equilíbrio, as derivadas de cada variável é zero, logo tem-se (MONTEIRO, 2011):

$$\left. \frac{dx_1(t)}{dt} \right|_{x_1=x_1^*} = \left. \frac{dx_2(t)}{dt} \right|_{x_2=x_2^*} = 0 \quad (31)$$

Representando a equação (31) de forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Igualando as funções (29) e (31), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} a\omega^2 \text{sen}(\omega\tau) - 2\xi x_2 - x - \beta(x - e)H(x - e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

### 3.3 LINEARIZAÇÃO EM TORNO DO PONTO DE EQUILÍBRIO

Como exposto na subseção 3.2, para avaliar a dinâmica de um sistema não linear, inicialmente é necessário realizar a linearização em torno do seu ponto de equilíbrio. A partir daí, tem-se as funções  $\dot{x}_1 = q(x_1^*, x_2^*)$ ,  $\dot{x}_2 = r(x_1^*, x_2^*)$  em torno do ponto  $P = (x_1^*, x_2^*)$ . Logo o sistema pode ser linearizado pela série de Taylor (VILLATE, 2007; MONTEIRO, 2011), onde cada linha da matriz Jacobiana é montada a partir da derivada parcial dos termos da matriz (33), com isso tem-se a representação matricial da Jacobiana:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = J\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_1} & \frac{\partial q}{\partial x_2} \\ \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Substituindo as derivadas da matriz (33) na Matriz Jacobiana (34), tem-se:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -29H(x - 1,26) - \delta(x - 1,26)29(x - 1,26) - 1 & -2\xi \end{bmatrix} \quad (35)$$

Na matriz jacobiana apresentada em (35), aparece o termo  $\delta$ , denominado como Delta de Dirac, que representa a derivada da função auxiliar de impulso Heaviside (NAGLE et al. 2012).

## 4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

As simulações foram feitas utilizando o software Octave, através do integrador numérico ODE45, que tem como base o método de Runge-Kutta de quarta ordem, com passos de tempo e frequência automáticos. As condições iniciais utilizadas nas simulações foram extraídas de Ing et al. (2008), e estão apresentadas na tabela 1.

Para os valores dos parâmetros apresentados na tabela, foram obtidos, para o deslocamento e a velocidade do sistema: históricos no tempo, planos de fases, espectros de frequências e mapas de Poincaré.

**Tabela 1** – Parâmetros adimensionais utilizados nas simulações computacionais

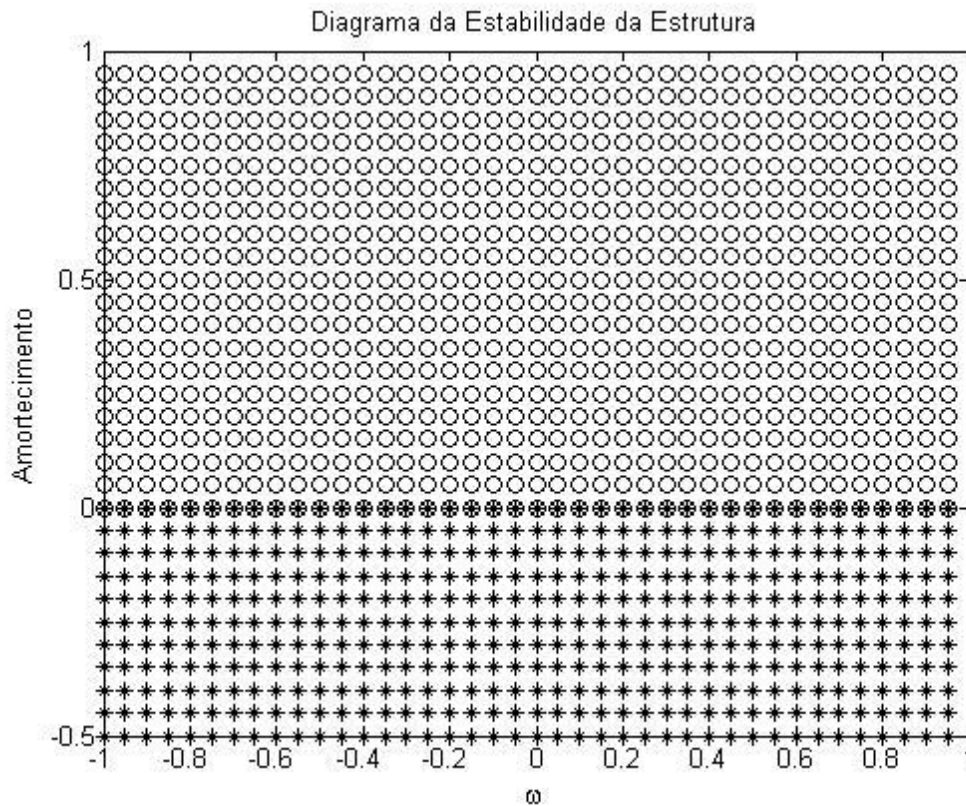
Parâmetros	Valores
$a$	0,3
$\omega$	0,847; 0,906; 0,996
$\tau$	0-100
$\xi$	0,01
$\beta$	29
$e$	1,26

Fonte: Próprio Autor.

### 4.1 ESTABILIDADE DO SISTEMA

Para análise e classificação do tipo de instabilidade ou estabilidade para diversos valores de amortecimento, utilizou-se os autovalores da matriz Jacobiana do sistema. Esta análise se deu a partir da implementação de um algoritmo no software Octave. O diagrama de estabilidade segundo Lyapunov é apresentado na figura 12, dado em função da frequência  $\omega$  no eixo  $x$ , e amortecimento  $\xi$  no eixo  $y$ , numa faixa de -1 a 1 e -0,5 a 1, respectivamente. As condições iniciais estipuladas foram:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 1$ .

**Figura 12** - Diagrama de estabilidade do oscilador vibro-impacto.



Fonte: Próprio Autor.

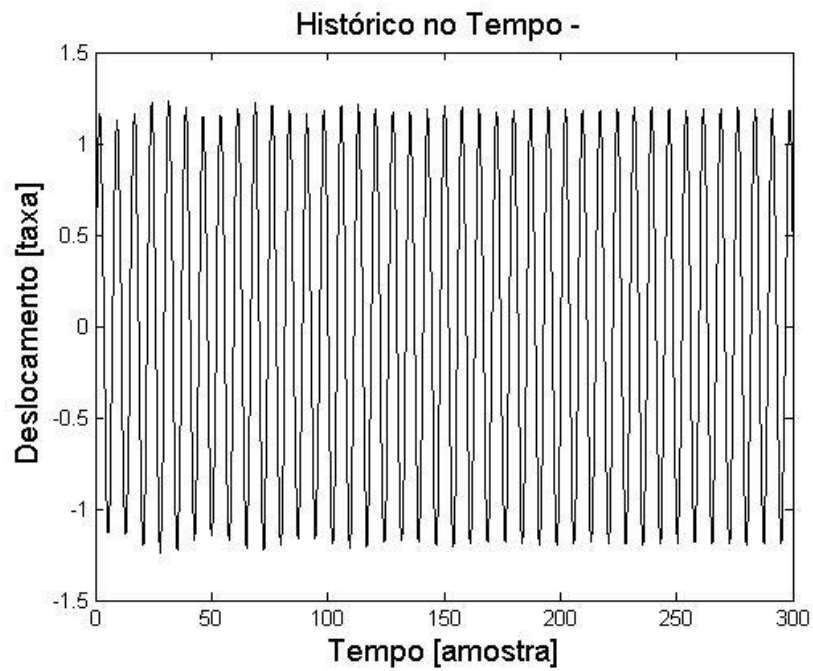
Observa-se no diagrama da figura 12 que o sistema apresenta estabilidade (foco hiperbólico) em toda a parte demarcada com circunferências, ou seja, para valores de amortecimento de 0 a 1. Nos pontos assinalados por asteriscos, o sistema se apresenta instável (foco hiperbólico), ou seja, a instabilidade do sistema é evidenciada para uma faixa de amortecimento entre -0,5 e 0. Nos pontos indicados por círculos o sistema apresenta-se estável (centro elíptico).

A consideração dos valores negativos de amortecimento, aconteceu devido a mudança de estado do sistema nestas condições. Fato evidenciado quando o sistema apresentou instabilidade na faixa nula de amortecimento, devido a questões (erros) de arredondamento do programa Octave. Embora tal faixa não tenha devida representatividade física para problemas puramente estruturais, sabe-se que, por exemplo, esta posição pode representar sistemas com interação fluido-estrutura e, portanto, foi assumida neste trabalho para ilustrar um processo de análise mais geral.

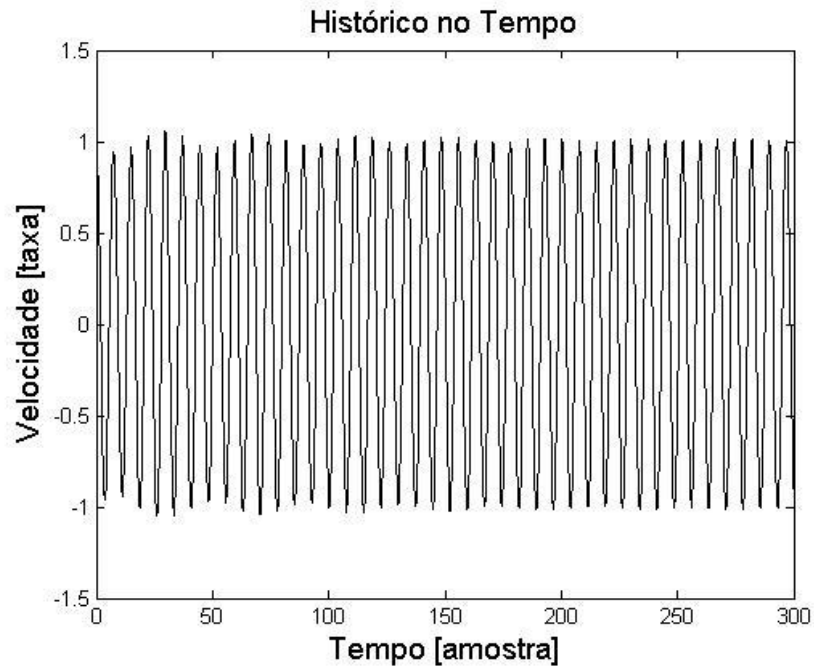
#### 4.2 ANÁLISE DO SISTEMA PARA $\omega = 0,847$

. As figuras 13 e 14 apresentam o histórico no tempo para deslocamento e velocidade, respectivamente, ambos em função do tempo. É possível notar de forma clara a presença de apenas uma frequência principal através dos picos de velocidade e deslocamento, é possível observar também que o deslocamento e velocidade se desenvolvem de modo periódico.

**Figura 13** - Histórico no tempo para deslocamento ( $\omega = 0,847$ )

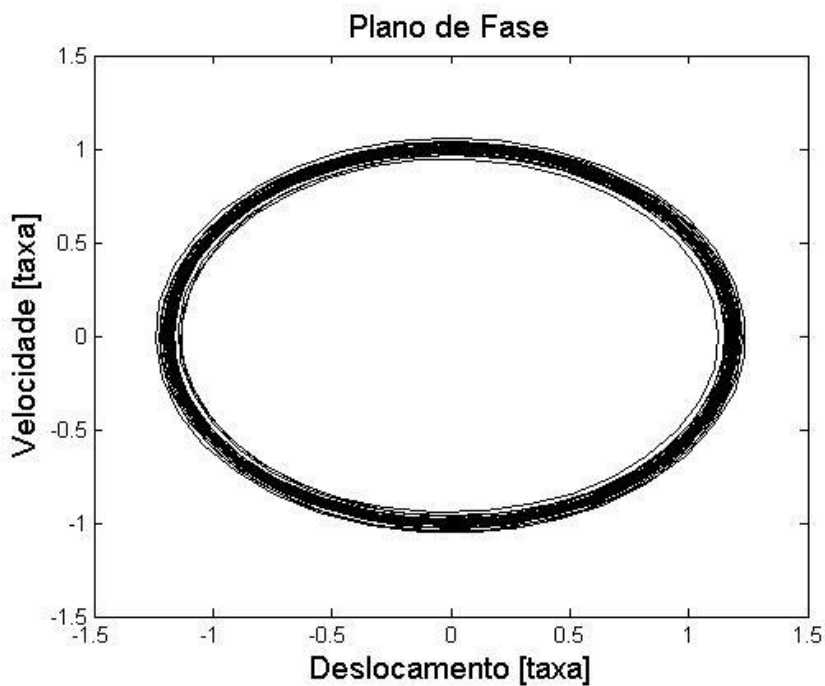


Fonte: Próprio Autor.

**Figura 14 - Histórico no tempo para velocidade ( $\omega = 0,847$ )**

Fonte: Próprio Autor.

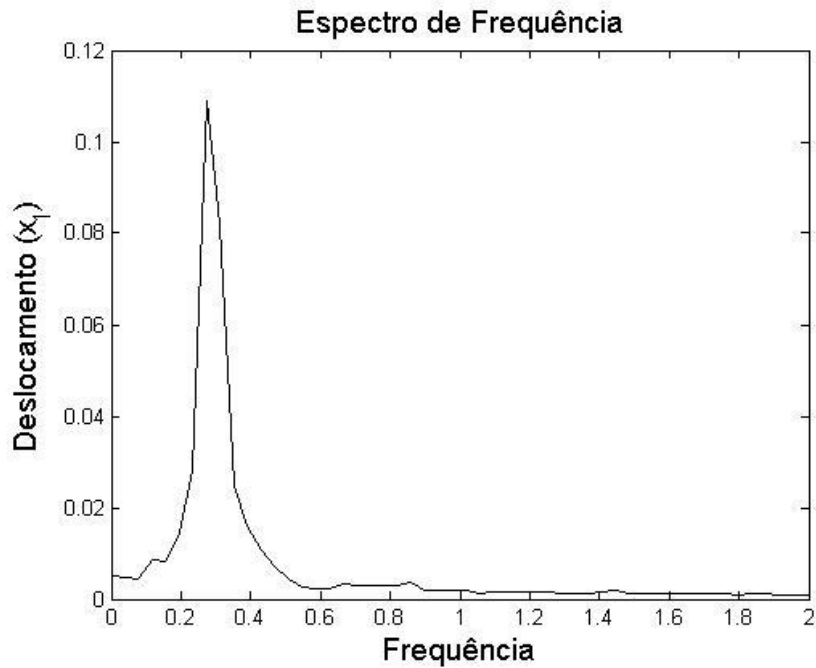
Na figura 15 observa-se o plano de fases, que é dado pela velocidade em função do deslocamento. No diagrama há a predominância de apenas uma frequência, representada de forma clara, pelas linhas mais escuras do gráfico.

**Figura 15 - Plano de Fase para ( $\omega = 0,847$ )**

Fonte: Próprio Autor.

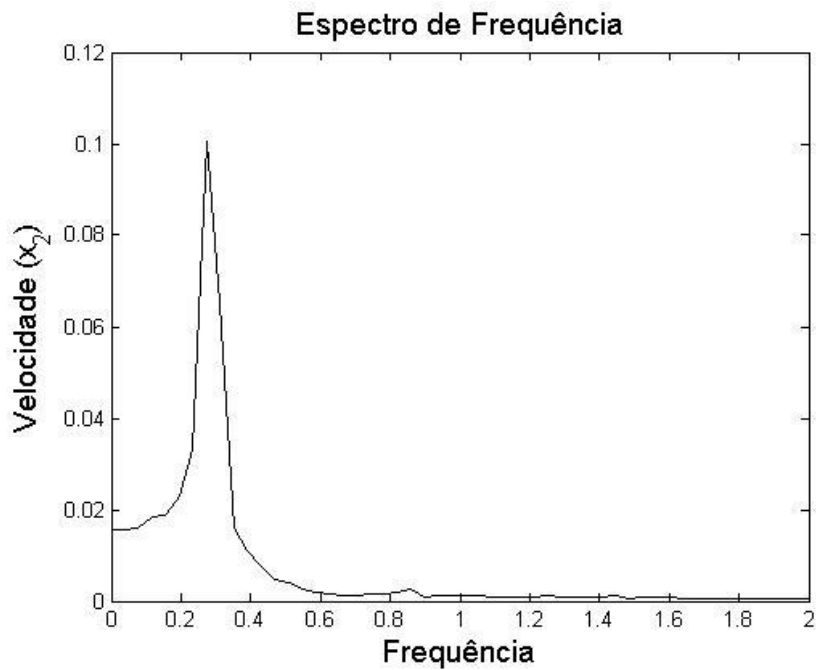
As figuras 16 e 17 apresentam os espectros de frequência para deslocamento e velocidade, respectivamente.

**Figura 16 - Espectro de frequência para deslocamento**



Fonte: Próprio Autor

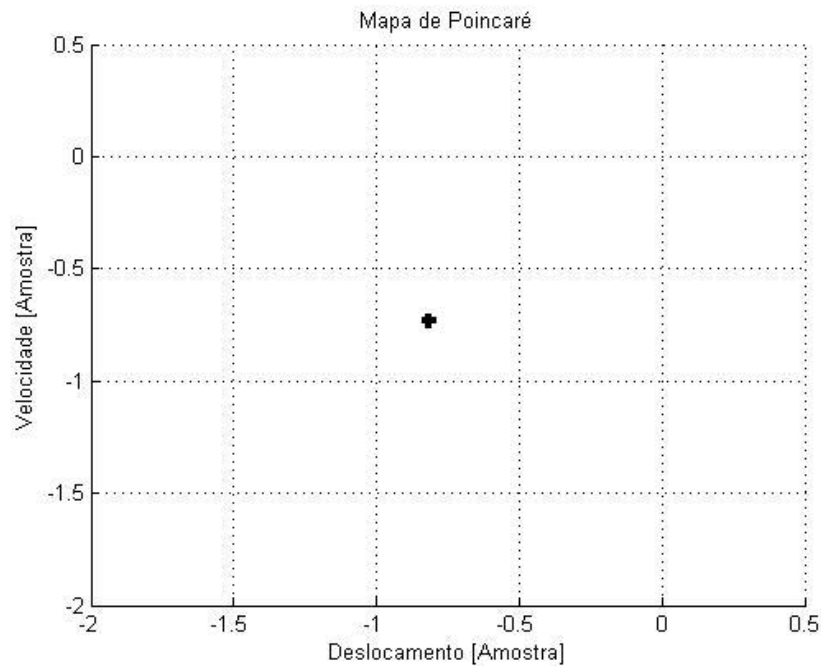
**Figura 17 - Espectro de frequência para velocidade**



Fonte: Próprio Autor.

Ao analisar os diagramas acima, é notório que o sistema conta com apenas uma frequência predominante, apresentada pelos picos de deslocamento e velocidade, com valor aproximando de 0,27. No diagrama da figura 18 é apresentado o mapa de Poincaré, nele é possível confirmar a existência de apenas uma frequência dominante, pois há apenas um ponto de intersecção.

**Figura 18 - Mapa de Poincaré para ( $\omega = 0,847$ )**



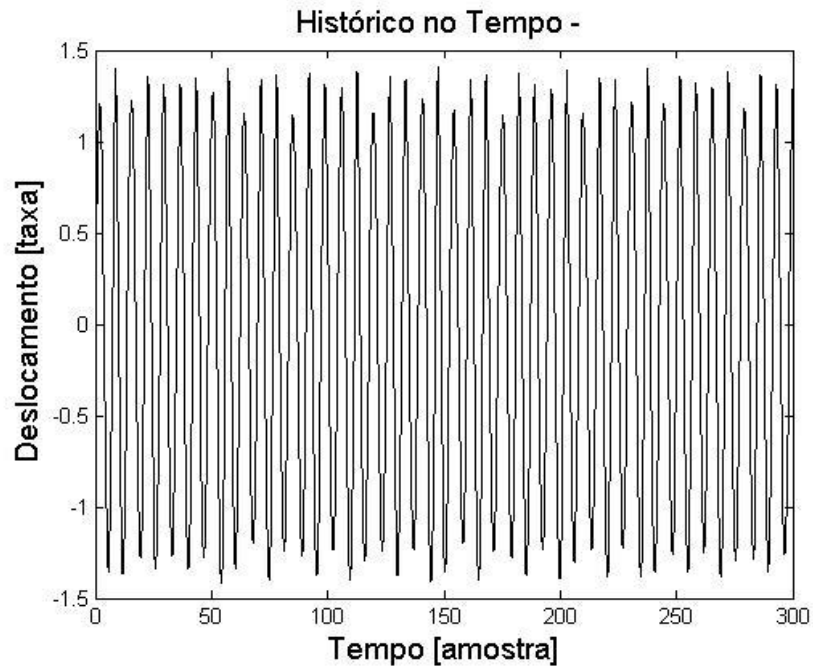
Fonte: Próprio Autor.

#### 4.3 ANÁLISE DO SISTEMA PARA $\omega = 0,906$

Nos diagramas apresentados nas figuras 19 e 20, tem-se a representação do histórico no tempo para deslocamento e velocidade, respectivamente. Nota-se que, com o aumento da frequência de excitação, começam a aparecer frequências menores nos diagramas, porém, sem grandes interferências na estabilidade do comportamento do oscilador. O primeiro diagrama apresenta deslocamento em função do tempo, onde é possível verificar a predominância de apenas uma frequência, observada nos picos de oscilação. Considera-se então que o comportamento é periódico no decorrer do tempo. O segundo diagrama apresenta a velocidade em função do tempo, onde novamente observa-se um comportamento periódico no decorrer do tempo.

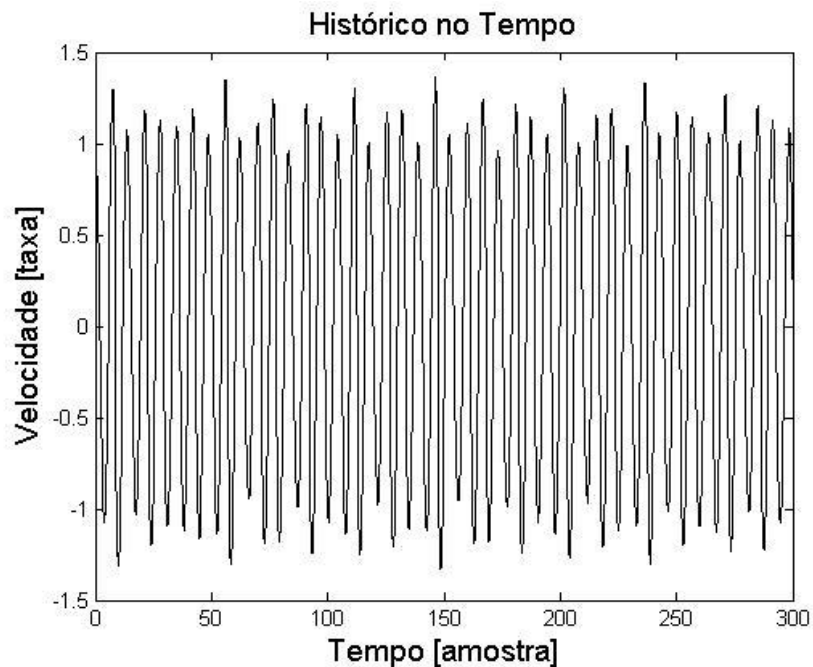


**Figura 19** - Histórico no tempo para deslocamento ( $\omega = 0,906$ )



Fonte: Próprio Autor.

**Figura 20** - Histórico no tempo para velocidade ( $\omega = 0,906$ )

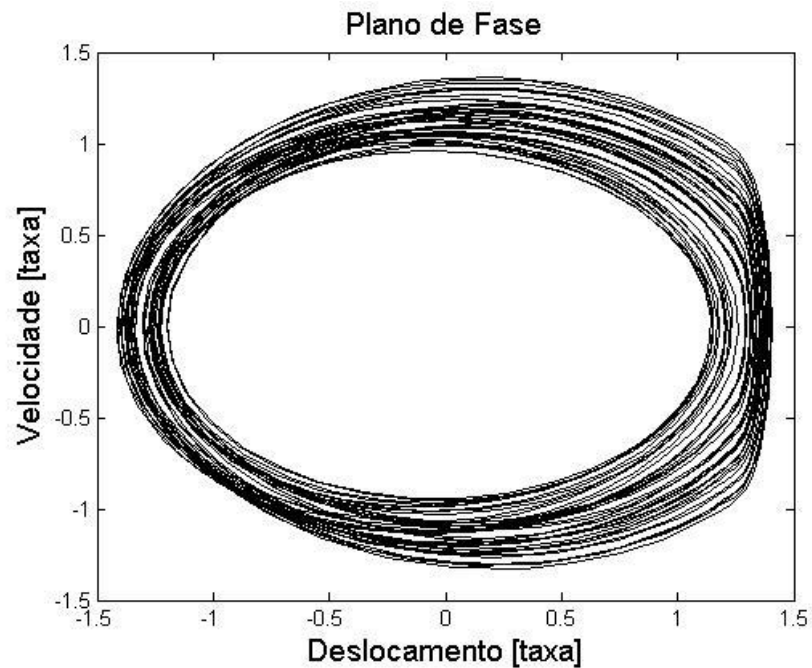


Fonte: Próprio Autor.

Na figura 21 tem-se o plano de fases, que é dado pela velocidade em função do deslocamento. No diagrama há a predominância de apenas uma frequência, representada pelas linhas mais escuras do gráfico. É possível observar também frequências de menor intensidade,

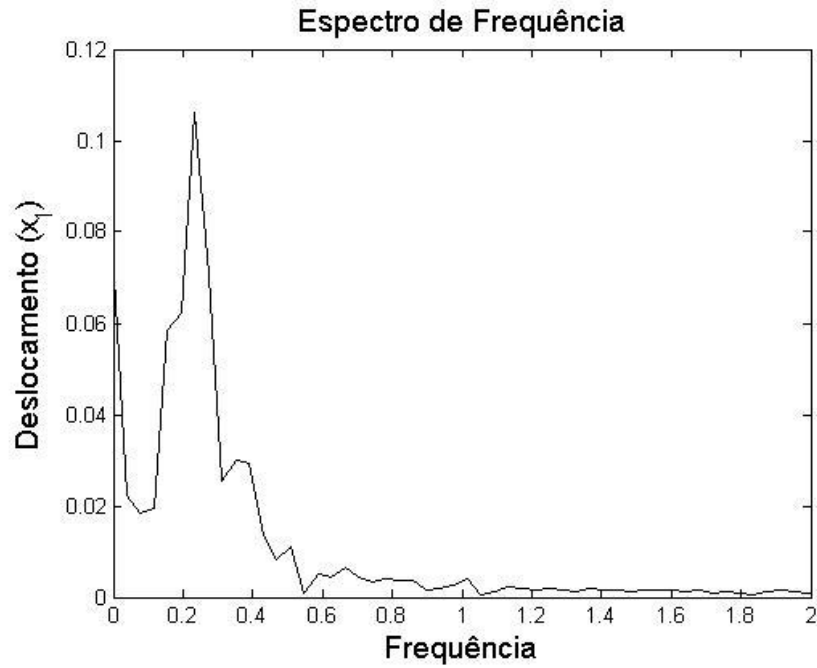
porém não se mostram dominantes. O movimento apresentado no diagrama é periódico estável (sem perturbações no sistema).

**Figura 21** - Plano de fases para ( $\omega = 0,906$ )

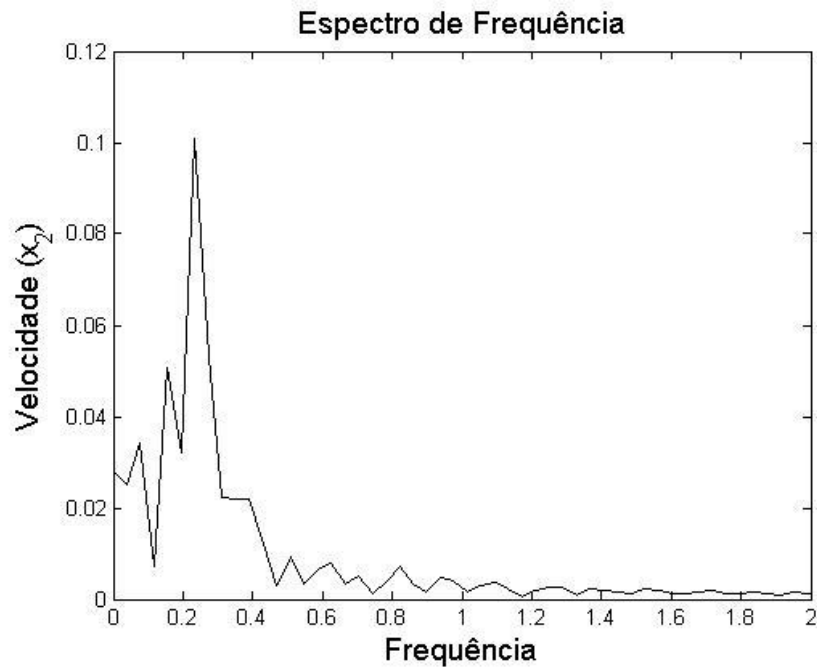


Fonte: Próprio Autor.

As figuras 22 e 23, apresentam o espectro de frequência para o deslocamento e velocidade. É possível observar nos dois diagramas que há uma frequência predominante na faixa de 0,2.

**Figura 22 - Espectro de frequência para deslocamento**

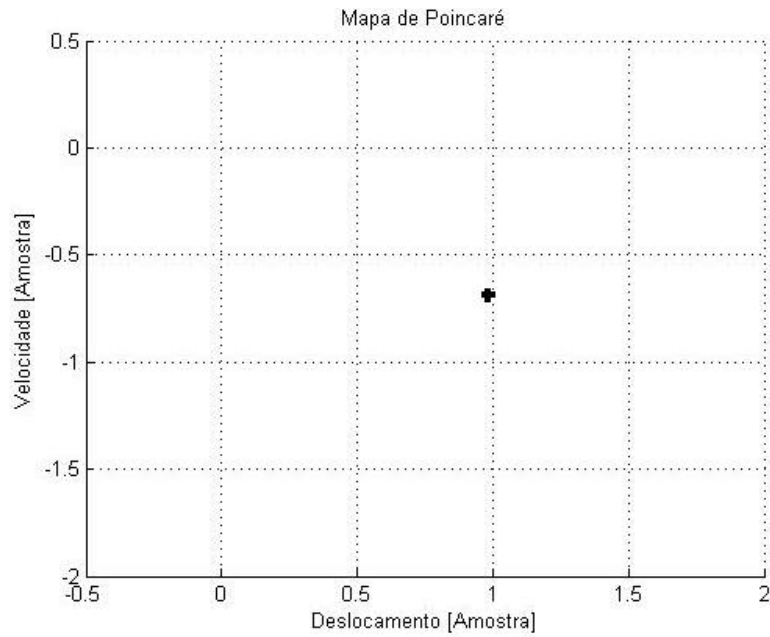
Fonte: Próprio Autor.

**Figura 23 - Espectro de frequência para velocidade**

Fonte: Próprio Autor.

No diagrama da figura 24 é apresentado o mapa de Poincaré para frequência de  $\omega = 0,906$ . Pode-se identificar apenas um ponto de intersecção, ou seja, comprova a existência de somente uma frequência principal na dinâmica estável do oscilador.

**Figura 24 - Mapa de Poincaré para ( $\omega = 0,906$ )**

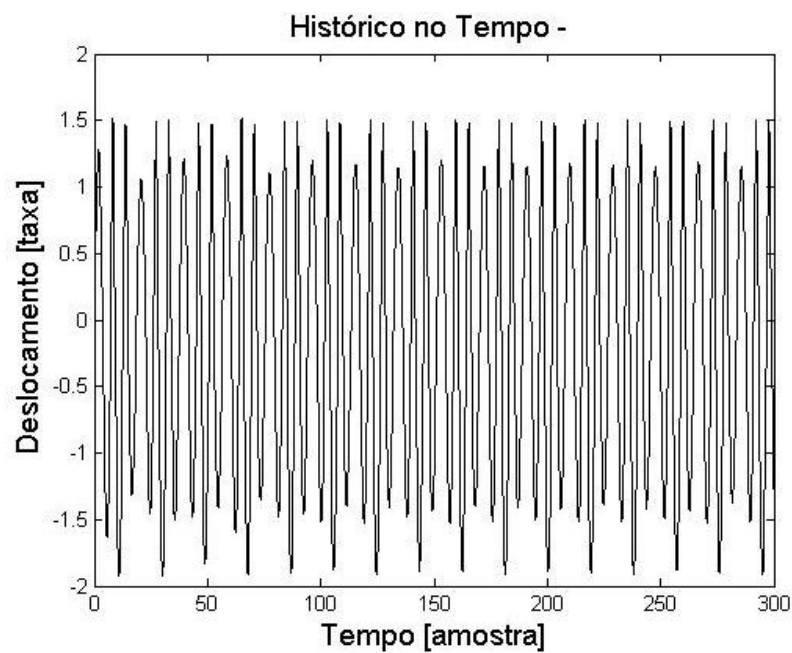


Fonte: Próprio Autor.

#### 4.4 ANÁLISE DO SISTEMA PARA $\omega = 0,996$

As figuras 25 e 26 apresentam o histórico no tempo para deslocamento e velocidade, respectivamente, ambos em função do tempo.

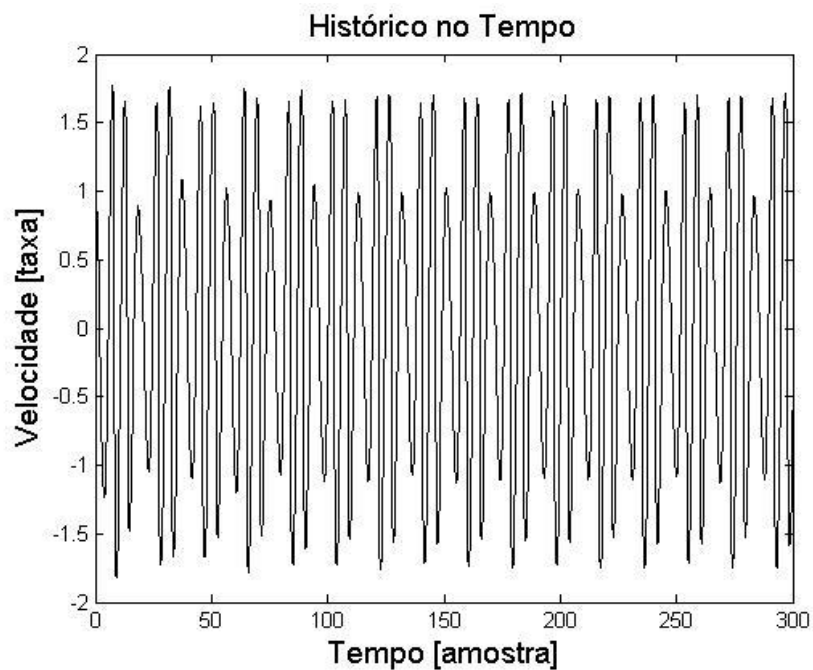
**Figura 25 - Histórico no tempo para deslocamento ( $\omega = 0,996$ )**



Fonte: Próprio Autor.

Nos diagramas é possível notar a presença de três frequências distintas, que se mostram significativas com relação a dinâmica do sistema.

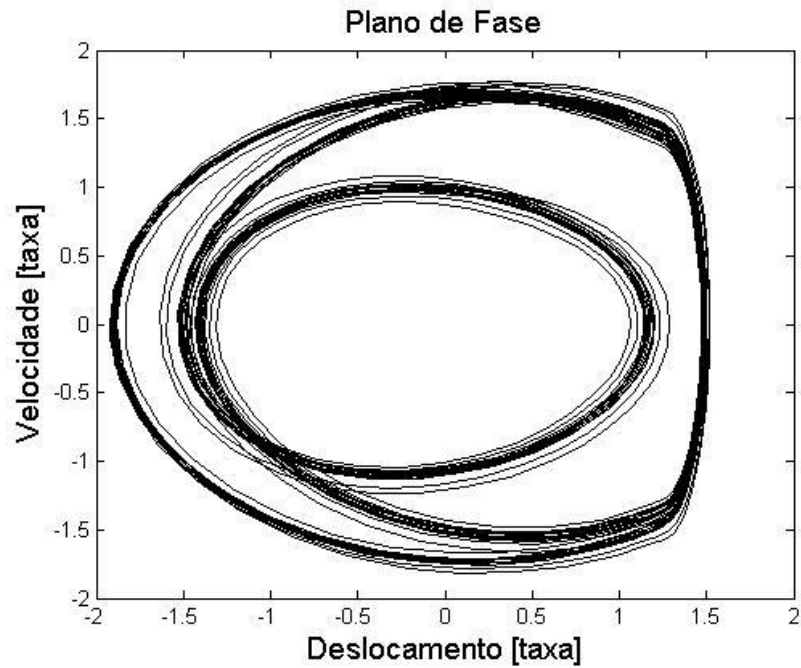
**Figura 26** - Histórico no tempo para velocidade ( $\omega = 0,996$ )



Fonte: Próprio Autor.

A figura 27 apresenta o plano de fases, mostrado na forma de velocidade em função do deslocamento. Nota-se que no diagrama, e segundo os autovalores da matriz de equilíbrio,  $\lambda_{1,2} = -0,0100 \pm 0,9999i$ , o movimento é periódico e estável com três frequências distintas e bem definidas neste ponto.

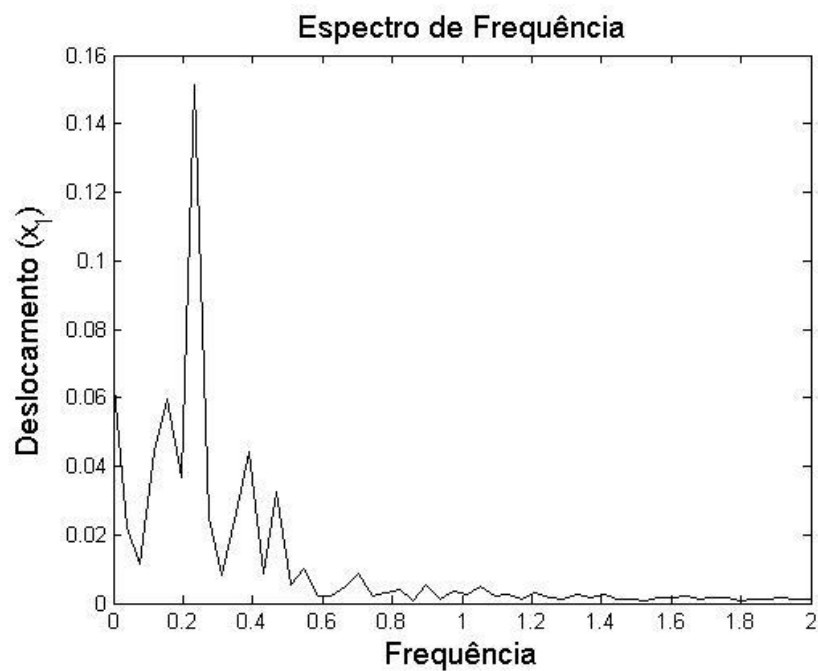
**Figura 27 - Plano de fases para ( $\omega = 0,996$ )**



Fonte: Próprio Autor.

A figura 28 e 29 apresentam os espectros de frequência para deslocamento e velocidade, respectivamente.

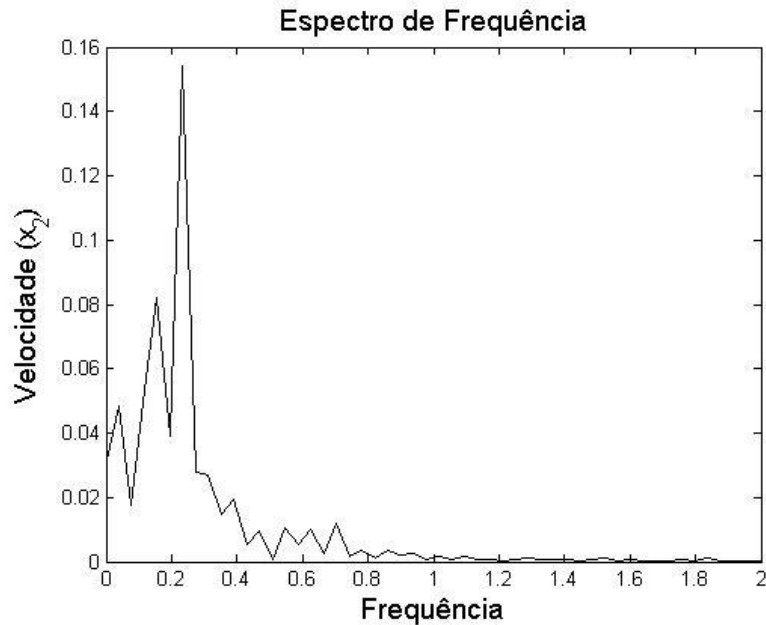
**Figura 28 - Espectro de frequência para deslocamento**



Fonte: Próprio Autor.

Analisando as figuras 28 e 29, é notório que há a recorrência de três frequências distintas no sistema, sendo a maior 0,23, seguida da segunda com 0,16 e a terceira 0,04.

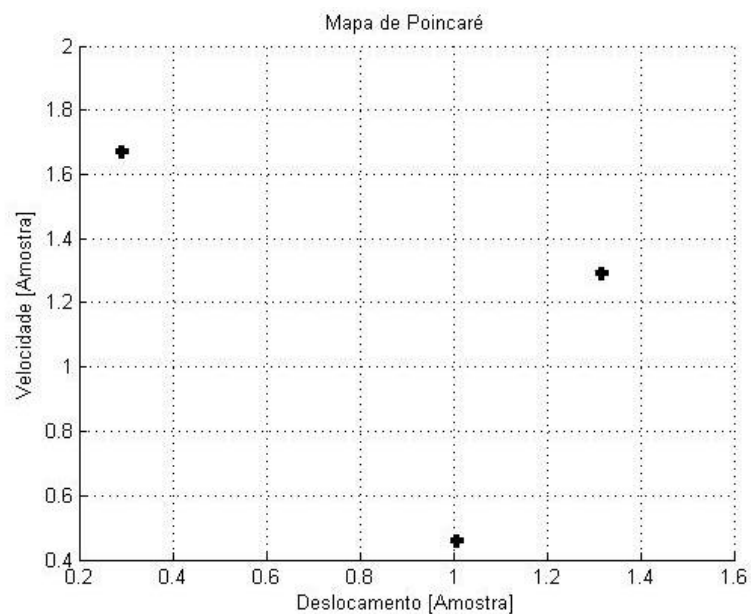
**Figura 29** - Espectro de frequência para velocidade



Fonte: Próprio Autor.

Na figura 30 é apresentado o mapa de Poincaré, e através do diagrama é possível confirmar a existência de três frequências distintas, pois há três pontos de intersecção das trajetórias.

**Figura 30** - Mapa de Poincaré para ( $\omega = 0,996$ )



Fonte: Próprio Autor.

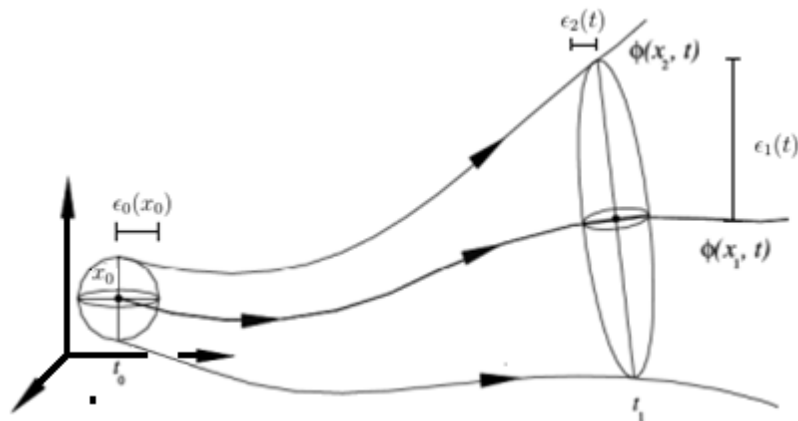
#### 4.5 EXPOENTES DE LYAPUNOV

Uma considerável dependência do sistema pelas suas condições iniciais, podem ser quantificadas pelos expoentes de Lyapunov. Esses expoentes medem a taxa exponencial média de divergência da vizinhança de determinada trajetória. Esta definição é fundamental para caracterização do caos em sistemas dinâmicos (KAPITANIAK, 1991).

Considere uma trajetória do sistema evoluindo a partir de condições iniciais. Esta trajetória possui vizinhança, definida por uma esfera. Portanto, de cada ponto desta esfera se tem uma nova trajetória, e este conjunto de trajetórias formará, em cada tempo, um conjunto de esferas deformadas. Avalia-se então, o comportamento da esfera inicial na evolução do tempo, ou seja, a divergência das trajetórias na medida que o sistema evolui (SAVI, 2006).

Na figura 31 é representada a evolução desta esfera de acordo com a evolução temporal do sistema, é notório a deformação da esfera inicial em forma de elipse, o que representa a variação das trajetórias com o passar do tempo.

**Figura 31** - Representação da evolução da esfera, em torno do ponto inicial.



Fonte: Savi (2006).

Desta forma, os expoentes de Lyapunov podem ser determinados a partir da equação 36 a seguir:

$$\lambda = \frac{1}{t} \log_b \left( \frac{d(t)}{d_0} \right) \quad (36)$$



onde  $b$  é a base de referência, e  $d(t)$  é a variação de diâmetro da esfera, podendo ser expresso pela equação 37 seguinte:

$$d(t) = d_0 b^{\lambda t} \quad (37)$$

Se os expoentes  $\lambda$  forem negativos ou tiver valores nulos, significa que não houve divergência de trajetória entre eles, caracterizando um comportamento estável do sistema. Agora, se pelo menos um dos expoentes apresentar sinal positivos, as trajetórias entre eles são divergentes, e pode ser evidenciado o caos no sistema (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994).

Na prática, raramente calcula-se os expoentes de Lyapunov de forma analítica, normalmente obtém-se esses expoentes de forma numérica (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994). Neste trabalho, os expoentes foram obtidos a partir da implementação de um código baseado no método apresentado por (WOLF et al., 1985). Segundo o autor, qualquer sistema dinâmico Linearizado em torno de uma trajetória pode ter seus expoentes de Lyapunov calculados pelo método de Wolf.

É importante salientar que o método dos expoentes de Lyapunov faz uma predição do comportamento que o sistema assume com a sua evolução no tempo, enquanto que a estabilidade estrutural analisa o sistema pontualmente dados os parâmetros de excitação e um tempo específico.

Nas subseções seguintes, é apresentada a evolução temporal dos coeficientes de Lyapunov, para a combinação de deslocamento e velocidade apresentados na tabela 2.

**Tabela 2** - Condições iniciais do sistema

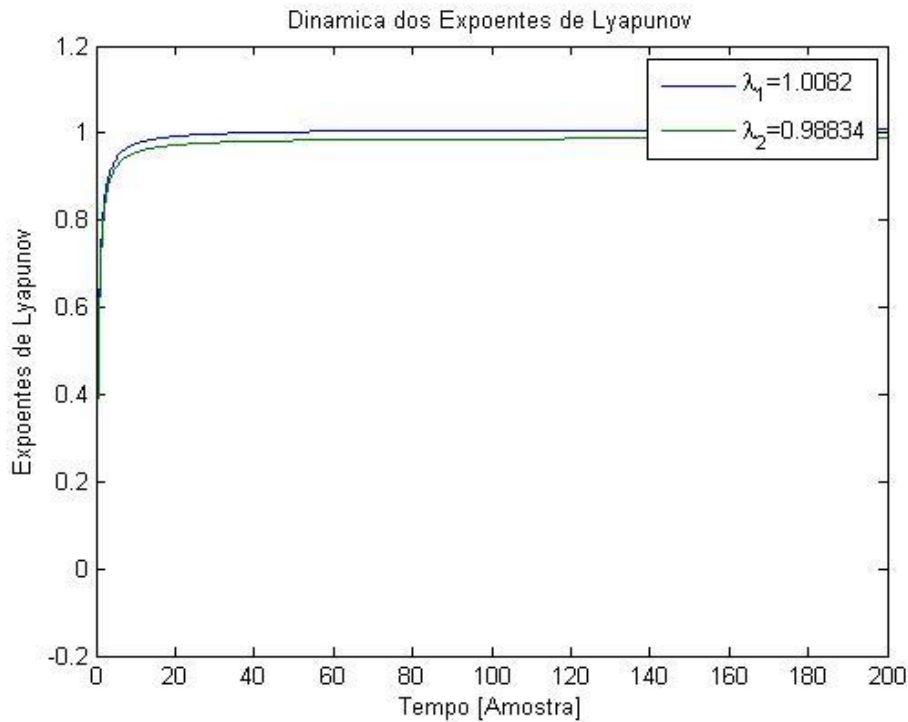
<b>Deslocamento</b>	<b>Velocidade</b>
1	0
0	1
2	0
2	2

Fonte: Próprio Autor.

#### 4.5.1 Deslocamento 1, velocidade 0.

Na figura 32, é apresentada a evolução dos coeficientes de Lyapunov para um intervalo de 200 amostras de tempo (taxa), com passos de 0,01.

**Figura 32** – Expoentes de Lyapunov (deslocamento 1, velocidade 0)

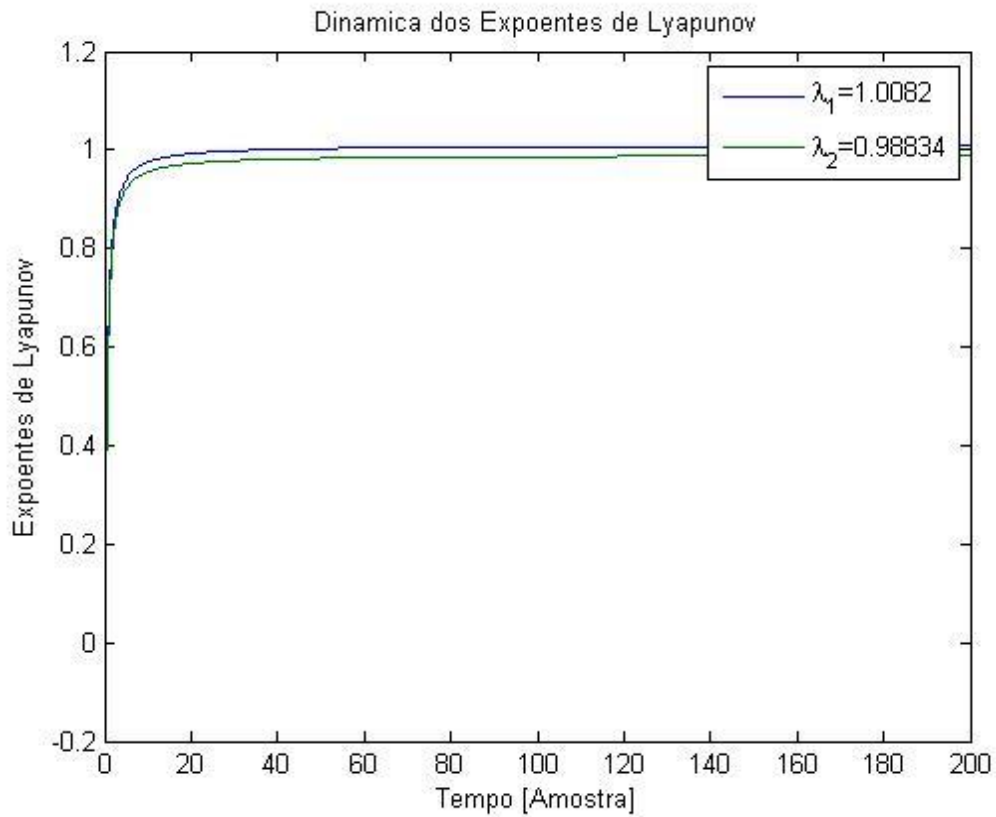


Fonte: Próprio Autor.

Observando o conjunto de autovalores da figura 32, é notório o crescimento rápido e positivo destes até as 15 primeiras amostras de tempo (taxa). Após esse tempo os valores se estabilizam e sofrem pouca alteração até o final do intervalo. Os maiores coeficientes de Lyapunov medidos para estas condições iniciais foram  $\lambda_1 = 1,0082$  e  $\lambda_2 = 0,98834$ . Os coeficientes de Lyapunov se apresentaram de forma positiva em toda a evolução do tempo, isto evidencia que o comportamento dinâmico do sistema no decorrer do tempo tende ao caos.

#### 4.5.2 Deslocamento 0, velocidade 1.

Na figura 33, é apresentada a evolução dos coeficientes de Lyapunov para um intervalo de 200 amostras de tempo (taxa), com passos de 0,01.

**Figura 33** – Expoentes de Lyapunov (deslocamento 0, velocidade 1)

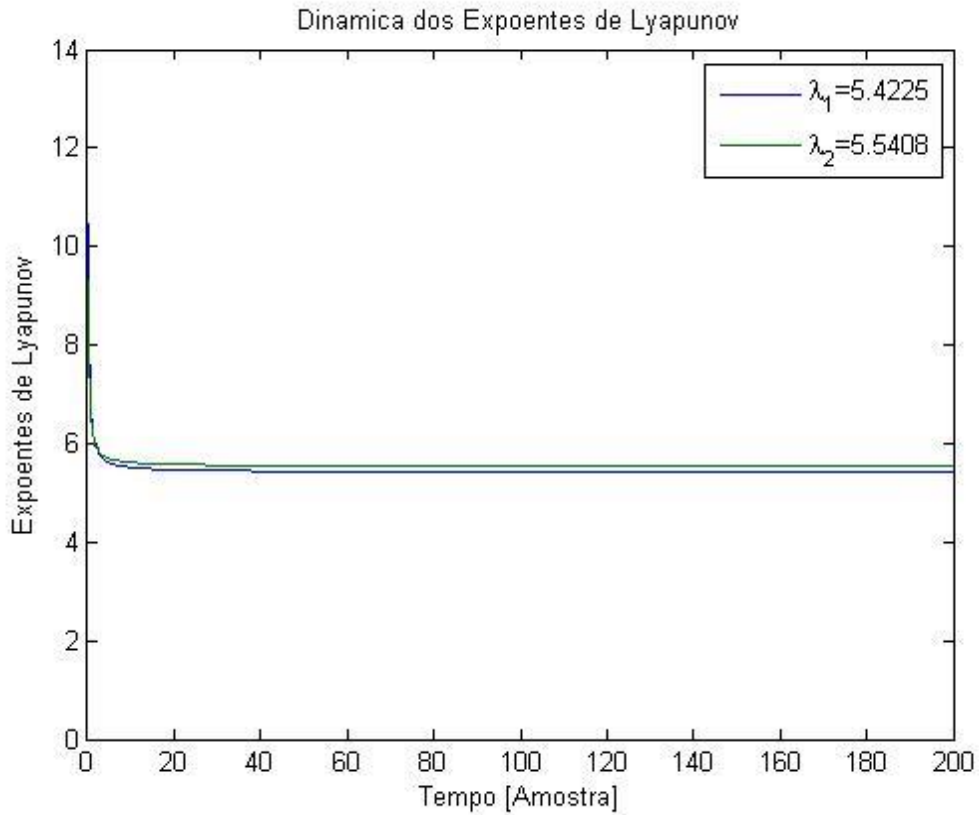
Fonte: Próprio Autor.

Para as condições iniciais deslocamento 0 e velocidade 1, os autovalores evoluem de forma idêntica da subseção anterior, ou seja, evolui rapidamente até aproximadamente 15 amostras de tempo (taxa), a partir daí se mantém estável até o final do tempo. Os valores dos coeficientes de Lyapunov se comportam de forma positiva com valores máximos  $\lambda_1 = 1,0082$  e  $\lambda_2 = 0,98834$ , portanto pode-se considerar que para essas condições iniciais, com o passar do tempo o sistema tende a um comportamento caótico.

#### 4.5.3 Deslocamento 2, velocidade 0.

Na figura 34, é apresentada a evolução dos coeficientes de Lyapunov para um intervalo de 200 amostras de tempo (taxa), com passos de 0,01.

**Figura 34** - Expoentes de Lyapunov (deslocamento 2, velocidade 0)

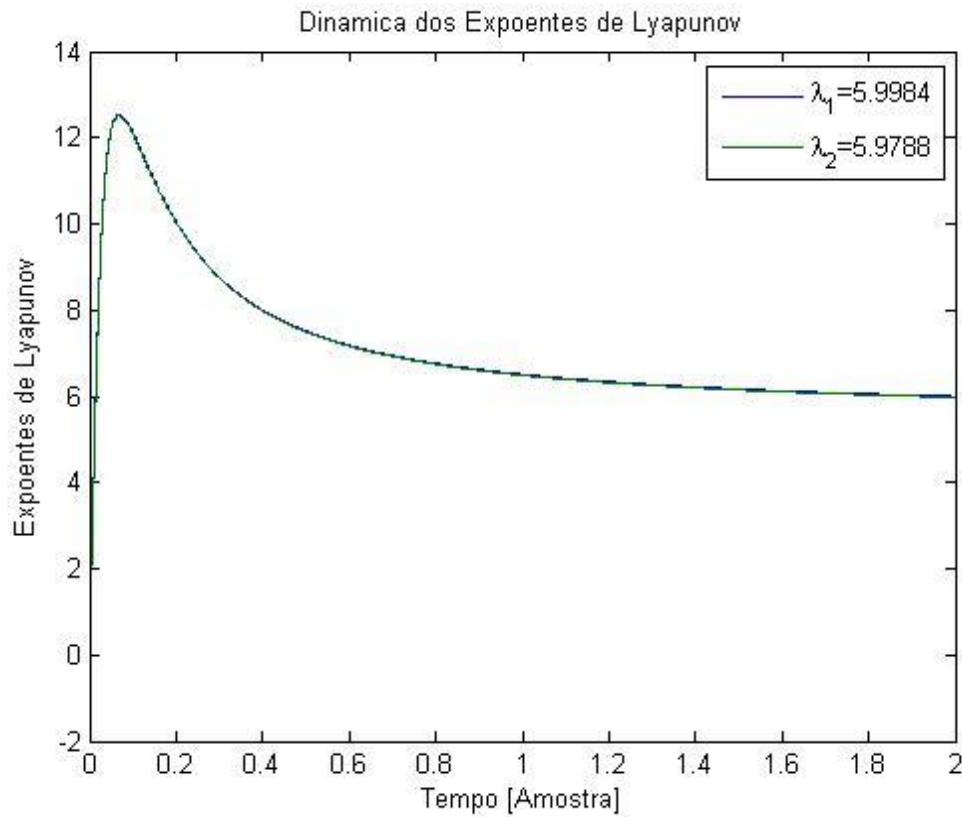


Fonte: Próprio Autor.

Observando o conjunto de autovalores da figura 34, é notório um pico de crescimento positivo logo no início. Após esse pico os valores caem, e se estabilizam, sofrendo pouca alteração até o final do intervalo, finalizando a simulação com valores  $\lambda_1 = 5,4225$  e  $\lambda_2 = 5,5408$ . Os maiores coeficientes de Lyapunov medidos para estas condições iniciais foram  $\lambda_1 = 12,0403$  e  $\lambda_2 = 10,5596$ . Os coeficientes de Lyapunov se apresentaram de forma positiva em toda a evolução do tempo, isto evidencia que o comportamento dinâmico do sistema no decorrer do tempo tende ao caos.

Afim de expressar de forma mais clara o comportamento temporal dos autovalores no início da simulação, na figura 35 está representado o diagrama com uma escala ampliada, com passo de 0,0001 das primeiras 2 amostras de tempo (taxa).

**Figura 35** – Expoentes de Lyapunov (deslocamento 2, velocidade 0)



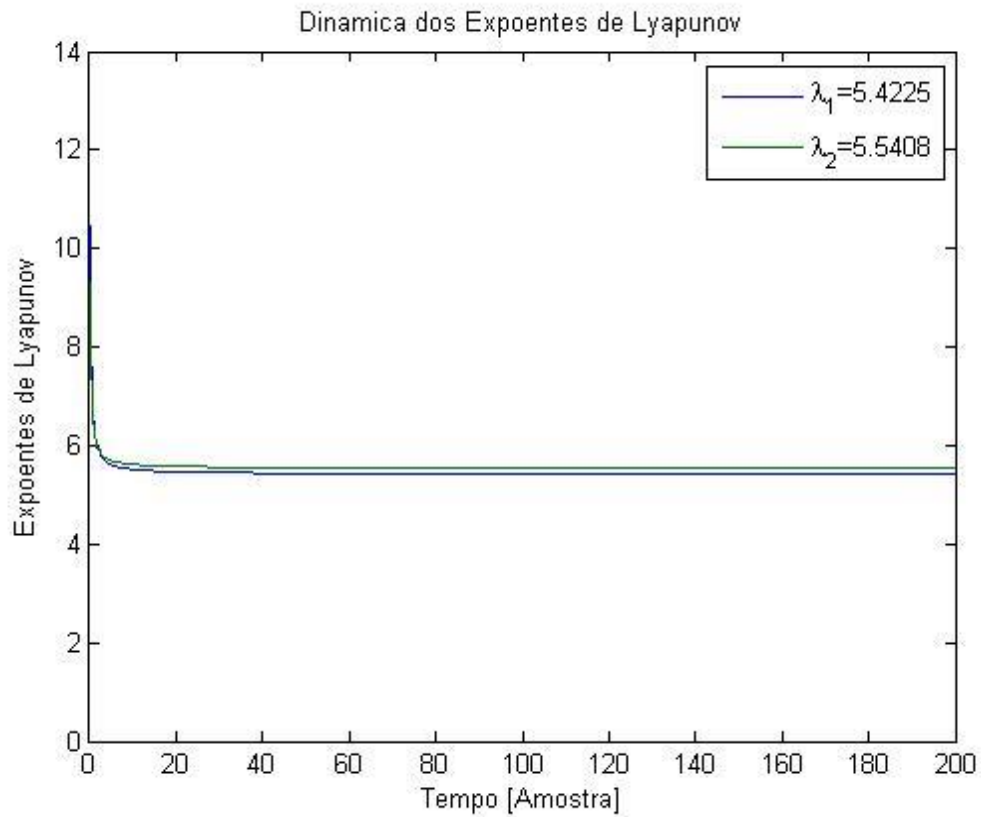
Fonte: Próprio Autor.

Na figura 35 é possível notar que os autovalores crescem rapidamente, e em 0,0690 amostras de tempo (taxa) atinge o pico máximo, chegando aos valores de  $\lambda_1 = 12,545897$  e  $\lambda_2 = 12,504211$ . Após esse pico, os valores dos expoentes caem e se matem estáveis até o final do intervalo.

#### 4.5.4 Deslocamento 2, velocidade 2.

Na figura 36, é apresentada a evolução dos coeficientes de Lyapunov para um intervalo de 200 amostras de tempo (taxa), com passos de 0,01.

**Figura 36** – Expoentes de Lyapunov (deslocamento 2, velocidade 2)



Fonte: Próprio Autor.

Observando o conjunto de autovalores da figura 36, é notório um pico de crescimento positivo logo no início. Após esse pico os valores caem, e se estabilizam, sofrendo pouca alteração até o final do intervalo, finalizando a simulação com valores  $\lambda_1 = 5,4225$  e  $\lambda_2 = 5,5408$ . Os maiores coeficientes de Lyapunov medidos para estas condições iniciais foram  $\lambda_1 = 12,0403$  e  $\lambda_2 = 10,5596$ . Os coeficientes de Lyapunov se apresentaram de forma positiva em toda a evolução do tempo, isto evidencia que o comportamento dinâmico do sistema no decorrer do tempo tende ao caos.

## 5 PROJETO DE CONTROLE

Neste capítulo são apresentados conceitos de controle linear ótimo (LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*), desenvolvimento e aplicação do controle sobre o sistema e os resultados da aplicação do controle na estrutura.

### 5.1 CONTROLE LINEAR ÓTIMO (LQR)

Muitas estratégias de controle de caos com realimentação foram desenvolvidas, sendo a mais popular o método OGY (OTT et al. 1990). Pode-se observar também amplo uso do primeiro e segundo métodos de Lyapunov para controlar caos em vários sistemas dinâmicos. Vincent e Yu (1991), por sua vez, desenvolveram o controlador do estado linear “feedback” para o sistema descrito pelas equações de Lorenz. Um enfoque geral do controle em faixas de interesse de sistemas não-lineares que exibem caos foi proposto por (SINHA et al., 2000).

Recentemente aplicações no problema de síntese do controlador feedback variável através da aplicação da transformação de Lyapunov-Floquet foram abordadas por Chavarette et al. (CHAVARETTE et al., 2009A, 2009B).

Uma metodologia para encontrar o controle ótimo linear feedback foi proposta por Rafikov e Balthazar (RAFIKOV; BALTHAZAR, 2005, 2008). Eles encontraram as condições que garantem a aplicação do controle linear em sistemas não-lineares.

É importante notar-se que na teoria do controle existem dois tipos de problemas: o controle de programa e a síntese do controle. Para o primeiro, a função do controle  $u(t)$  é encontrada como uma função do tempo, ou seja, nesse caso a função de controle ótimo determina uma trajetória ótima que corresponde a uma condição inicial dada do sistema. No segundo caso, a função de controle  $u(t,x)$  depende do tempo e de variáveis de estado. Este tipo de controle é chamado *controle feedback*, ou controle com realimentação, podendo ser aplicado para qualquer condição inicial. Se as variáveis do sistema são desvios do regime desejado, o controle ótimo estabiliza em torno da trajetória desejada, minimizando o funcional que caracteriza os desvios quadrados da trajetória e do controle do regime desejado (CHAVARETTE, 2005).

### 5.1.1 Formulação do problema de controle

Considera-se um sistema controlado, definido pela seguinte equação e estados:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{A}\vec{x} + \vec{g}(x) + \vec{U} \quad (38)$$

onde  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  é um vetor de estado,  $\vec{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz constante,  $\vec{g}(x)$  um vetor formado de funções contínuas e, finalmente,  $\vec{U}$  o vetor controle, que tem a seguinte forma (CHAVARETTE, 2005):

$$\vec{U} = \vec{u} + \vec{u}_t \quad (39)$$

Em diversos problemas da engenharia, física, economia, ecologia, entre outras áreas, o objetivo é escolher a lei de controle  $\vec{U}$  que mova o sistema do regime não controlado ou caótico a um ponto fixo de equilíbrio, ou a uma órbita periódica ou não periódica (caótica) desejada. Seja  $\vec{x}$  o vetor função que caracteriza a trajetória desejada, então a parte  $\vec{u}$  do vetor de controle que mantém o sistema controlado na trajetória desejada, pode ser escrito como (CHAVARETTE, 2005):

$$\vec{u} = \dot{\vec{x}} - \vec{A}\vec{x} - \vec{g}(\vec{x}) \quad (40)$$

Na qual a notação é alterada excluindo-se os símbolos vetoriais das flechas superiores. O vetor de controle  $u_t$  que estabiliza o sistema em torno da trajetória desejada tem a seguinte forma (CHAVARETTE, 2005):

$$u_t = Bu \quad (41)$$

onde  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz constante (CHAVARETTE, 2005).

Definindo:

$$y = x - \vec{x} \quad (42)$$



o desvio da trajetória do sistema (38) da trajetória desejada; tomando as equações (39) a (42), chega-se à equação em desvios (CHAVARETTE, 2005):

$$\dot{y} = Ay + g(x) - g(\tilde{x}) + Bu \quad (43)$$

A parte não-linear do sistema (43) pode ser escrita como:

$$g(x) - g(\tilde{x}) = G(x, \tilde{x})(x - \tilde{x}) \quad (44)$$

onde  $G(x, \tilde{x})$  é uma matriz limitada, cujos elementos dependem de  $x$  e  $\tilde{x}$ . Tomando a equação (44) e substituindo em (43), tem-se (CHAVARETTE, 2005):

$$\dot{y} = Ay + G(x, \tilde{x})y + Bu \quad (45)$$

### 5.1.2 Teorema de controle

Se existem as matrizes  $Q$  e  $R$ , positivas definidas, sendo  $Q$  simétrica, tais que a matriz

$$\tilde{Q} = Q - G^T(x, \tilde{x})P - PG(x, \tilde{x}) \quad (46)$$

seja definida positiva para  $G$  limitada, então o controle com realimentação

$$u = -R^{-1}B^T P y \quad (47)$$

é ótimo para transferir o sistema não linear (45) de qualquer estado inicial ao estado final

$$y(\infty) = 0 \quad (48)$$

minimizando o funcional

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} (y^T \tilde{Q} y + u^T R u) dt \quad (49)$$

onde a matriz simétrica  $P$  é calculada da equação algébrica não linear de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (50)$$

onde as matrizes  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  são constantes e definidas positivas (CHAVARETTE, 2005).

### 5.1.3 Prova do teorema

Seja o controle linear com realimentação (47) com a matriz  $P$  determinada pela equação (50) que transfere o sistema não-linear (45) de qualquer estado inicial ao estado final (48) minimizando o funcional (49) em que a matriz  $\tilde{Q}$  seja determinada (CHAVARETTE, 2005).

Conforme programação dinâmica (BELLMAN, 1957), se o mínimo do funcional (46) existe e  $V$  é uma função suave de condições iniciais, então ela satisfaz a equação de Hamilton–Jacobi–Bellman:

$$\min_u \left( \frac{dV}{dt} + y^T \tilde{Q} y + u^T R u \right) = 0 \quad (51)$$

Considere-se a função de Lyapunov

$$V = y^T P y \quad (52)$$

onde  $P$  é uma matriz positiva definida, simétrica e que satisfaz a equação de Riccati (47).

A derivada da função  $V$ , calculada na trajetória ótima com o controle (46) é:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{y}^T P y + y^T P \dot{y} = \\ &= [y^T A^T + y^T G^T(x, \tilde{x}) - y^T P B (R^{-1})^T B^T] P y + y^T P [A y + G(x, \tilde{x}) y - B R^{-1} B^T P y] = \\ &= y^T [A^T P + P A - P B (R^{-1})^T B^T P - P B R^{-1} B^T P] y + y^T [G^T(x, \tilde{x}) P + P G(x, \tilde{x})] y \end{aligned} \quad (53)$$

Substituindo  $\dot{V}$  na equação de Hamilton–Jacobi–Bellman (51), obtêm-se

$$y^T[A^T P + PA - PB(R^{-1})^T B^T P - PBR^{-1}B^T P]y + y^T[G^T(x, \tilde{x})P + PG(x, \tilde{x})]y + y^T \tilde{Q}y + u^T R u = 0 \quad (54)$$

Ou

$$y^T[A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + G^T(x, \tilde{x})P + yPG(x, \tilde{x}) + \tilde{Q}]y = 0 \quad (55)$$

de onde segue

$$\tilde{Q} = Q - G^T(x, \tilde{x})P - PG(x, \tilde{x}) \quad (56)$$

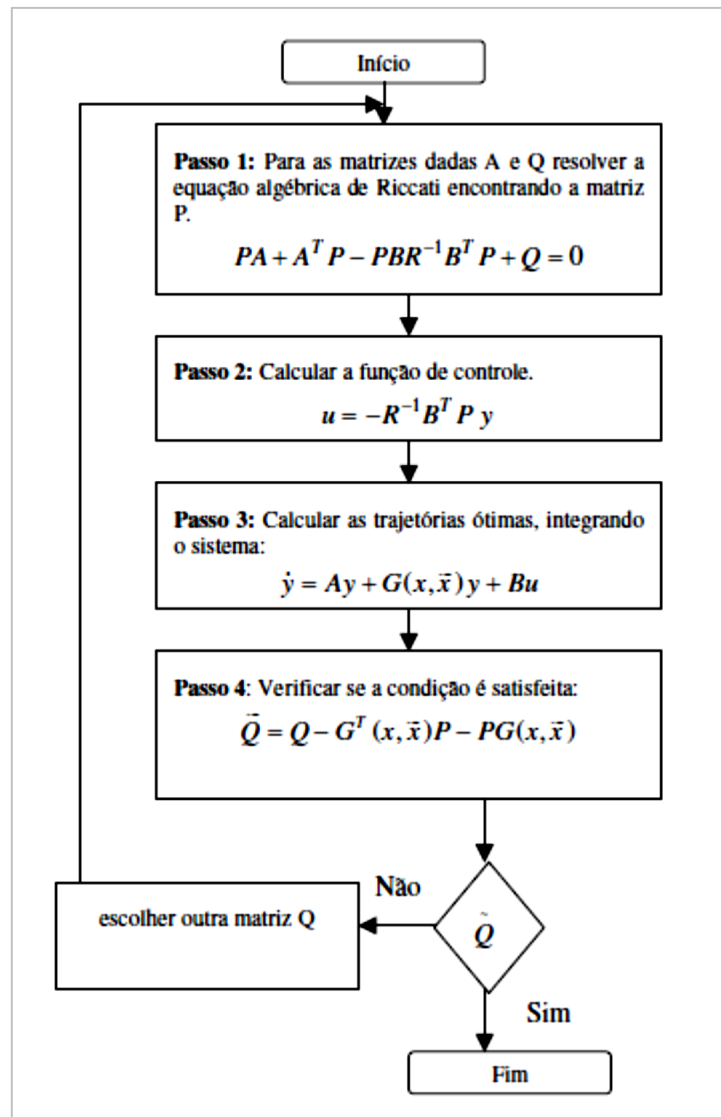
Para as matrizes  $\tilde{Q}$  e  $R$  positivas definidas o sistema controlado (45) é assintoticamente estável, pois existe a função de Lyapunov (52) positiva definida, cuja derivada  $\dot{V} = -y^T \tilde{Q}y - u^T R u$ , calculada nas trajetórias ótimas do sistema (45) é definida negativa (CHAVARETTE, 2005).

Observando que, conforme a teoria de controle ótimo de sistemas lineares com funcional quadrático (Bryson e Ho, 1975), a equação não-linear algébrica de Riccati (47) possui única solução positiva simétrica  $P > 0$  para quaisquer  $R > 0$  e  $Q \geq 0$  dados. Conclui-se então a demonstração do teorema de Rafikov e Balthazar (Rafikov, Balthazar, 2004, 2005).

Deve-se notar que, apesar do nome, o controle ótimo linear não se constitui de uma técnica de controle linear, uma vez que é baseado na solução da equação algébrica não linear de Riccati e, além disso, pode ser empregado para qualquer sistema de equações, seja este linear ou não linear.

A resolução do problema de síntese de controle ótimo exposto (45) - (49) pode ser resumido com a utilização do fluxograma da figura 37.

**Figura 37** - Fluxograma de síntese do Controle Ótimo.



Fonte: Chavarette (2005).

#### 5.1.4 Verificação da controlabilidade do sistema

A verificação da controlabilidade do sistema é o teste do posto, onde o sistema de equações que se deseja controlar é completamente controlável se e somente se a matriz  $R^{2n \times 2nm}$ , definida por  $R = [B|AB|A^2B \dots |A^{2n-1}B]$  tiver posto igual a  $2n$ . Neste caso o par de matrizes é dito controlável e  $R$  é chamada matriz de controlabilidade para o par de matrizes  $[A, B]$  (CHAVARETTE, 2005).

Por definição, o posto (característico) de uma matriz  $A$  é dado pela maior ordem possível das submatrizes de  $A$  com determinantes diferentes de zero.

## 5.2 APLICAÇÃO DO CONTROLE NO MODELO PROPOSTO

Aplicando a técnica do controle linear ótimo no modelo do sistema de equações 43, as equações do sistema controlado podem ser descritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + U \\ \dot{x}_2 = a\omega^2 \text{sen}(\omega\tau) - 2\xi x_2 - x - \beta(x - e)H(x - e) + U \end{cases} \quad (57)$$

Determina-se de forma iterativa os valores de  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $R = 1$ , e fixa-se valores para  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.02 \end{bmatrix}$ , onde a controlabilidade do sistema é  $M|B|AB|ABC|ABCD| \neq 0$ , considerando então que o sistema dinâmico é controlável. A matriz  $P$  é obtida por:

$$P = \begin{bmatrix} 1,8924 & 0,4142 \\ 0,4142 & 1,3323 \end{bmatrix} \quad (58)$$

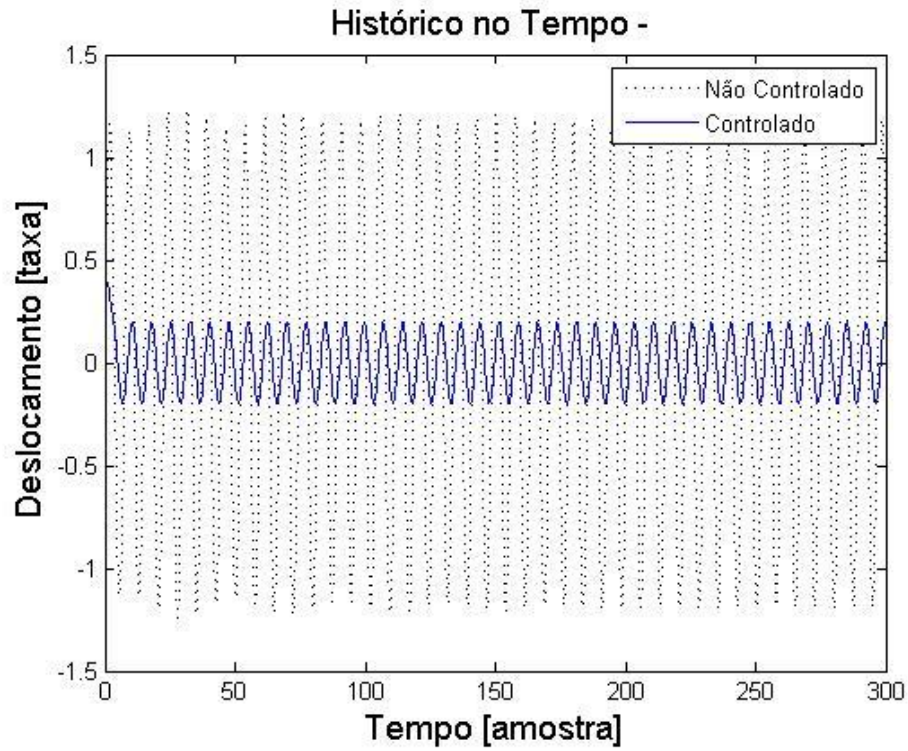
Resolvendo a equação algébrica de Riccati a função de controle ótimo  $u$  tem a seguinte forma:

$$u = (0,4142x_1 \ 1,3323x_2) \quad (59)$$

### 5.2.1 Análise do sistema controlado para $\omega = 0,847$

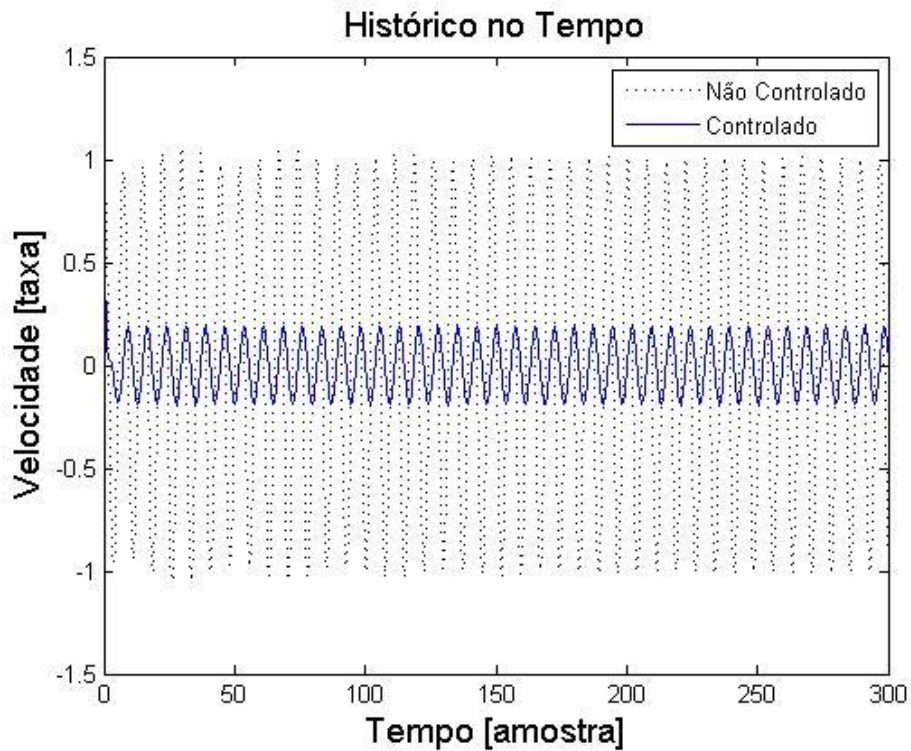
As Figuras 38, 39 e 40 ilustram o comportamento do sistema controlado, através do histórico no tempo (deslocamento e velocidade) e Mapa de Poincaré para uma frequência de  $\omega = 0,847$ .

**Figura 38** - Histórico no tempo do sistema controlado ( $\omega = 0,847$ )



Fonte: Próprio Autor.

**Figura 39** - Histórico no tempo do sistema controlado ( $\omega = 0,847$ )

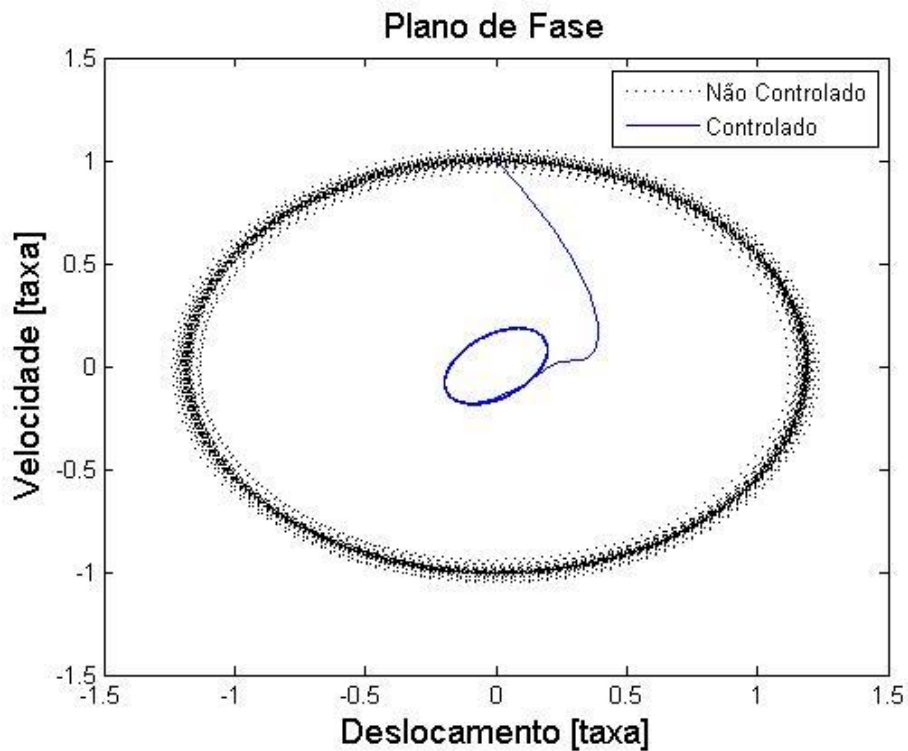


Fonte: Próprio Autor.

Nas figuras 38 e 39, é possível observar que a amplitude teve uma considerável redução, quando comparado com o sistema sem controle. O sistema então se apresenta de forma estável e periódico, com a dominância de uma única frequência principal.

No diagrama da figura 40, observa-se uma redução na orbita das trajetórias de velocidade, porém continua se comportando de forma periódica.

**Figura 40** - Plano de fases para o sistema controlado ( $\omega = 0,847$ )

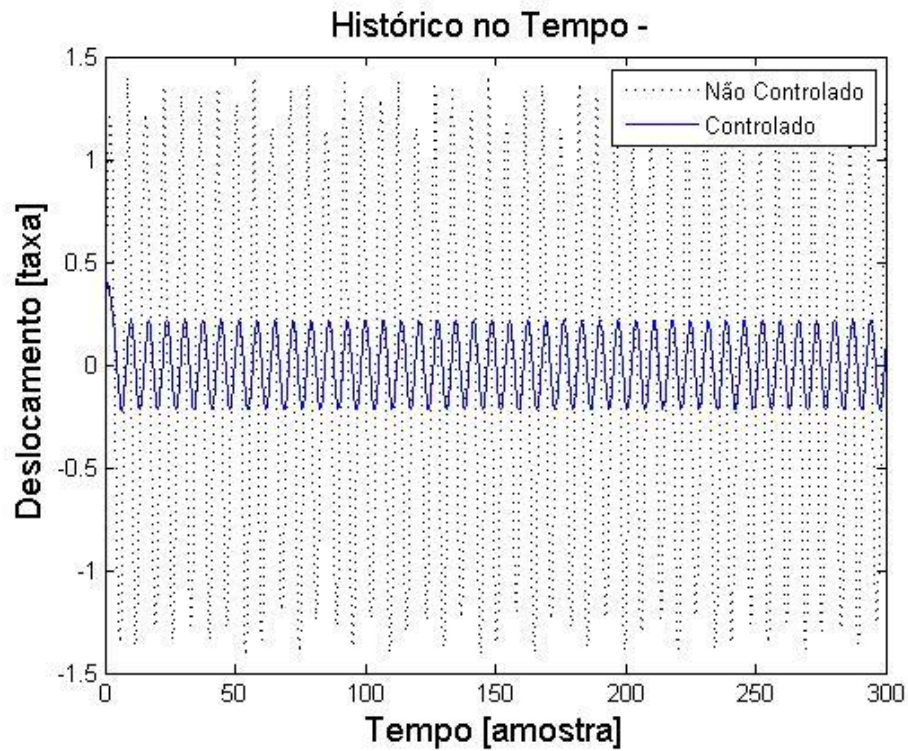


Fonte: Próprio Autor.

### 5.2.2 Análise do sistema controlado para $\omega = 0,906$

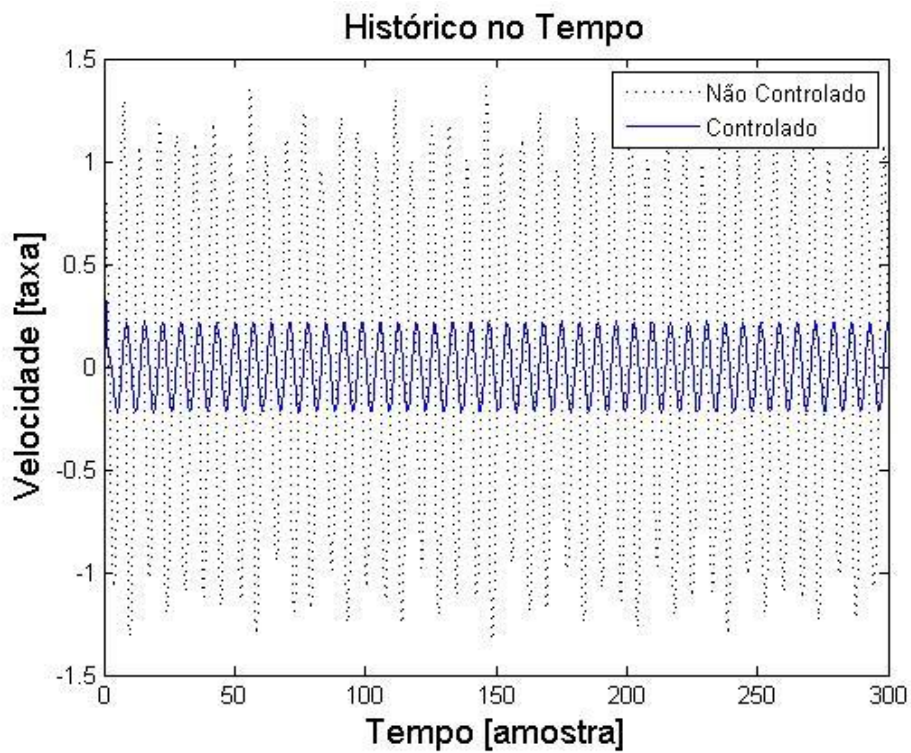
As Figuras 41, 42 e 43 ilustram o comportamento do sistema controlado, através do histórico no tempo (deslocamento e velocidade) e Mapa de Poincaré para uma frequência de  $\omega = 0,906$ .

**Figura 41** - Histórico no tempo do sistema controlado ( $\omega = 0,906$ )



Fonte: Próprio Autor.

**Figura 42** - Histórico no tempo do sistema controlado ( $\omega = 0,906$ )



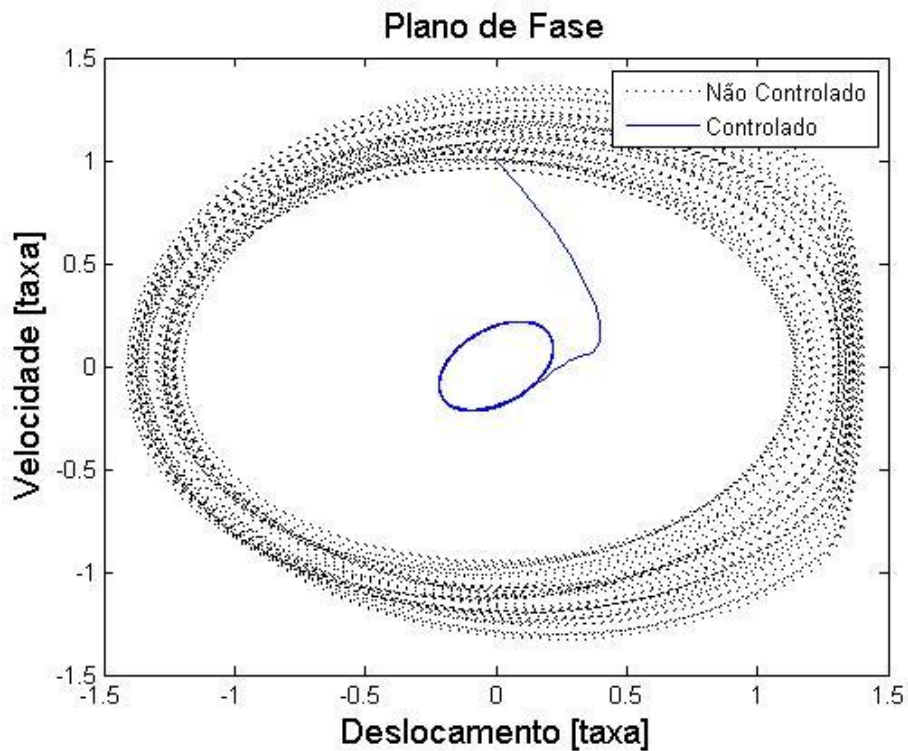
Fonte: Próprio Autor.



Nas figuras 41 e 42, é possível observar novamente, que a amplitude teve uma considerável redução, quando comparado com o sistema sem controle. O sistema então se apresenta de forma estável e periódico, com a dominância de uma única frequência principal.

No diagrama da figura 43, observa-se uma redução na orbita das trajetórias de velocidade, porém continua se comportando de forma periódica.

**Figura 43** - Plano de fases para o sistema controlado ( $\omega = 0,906$ )

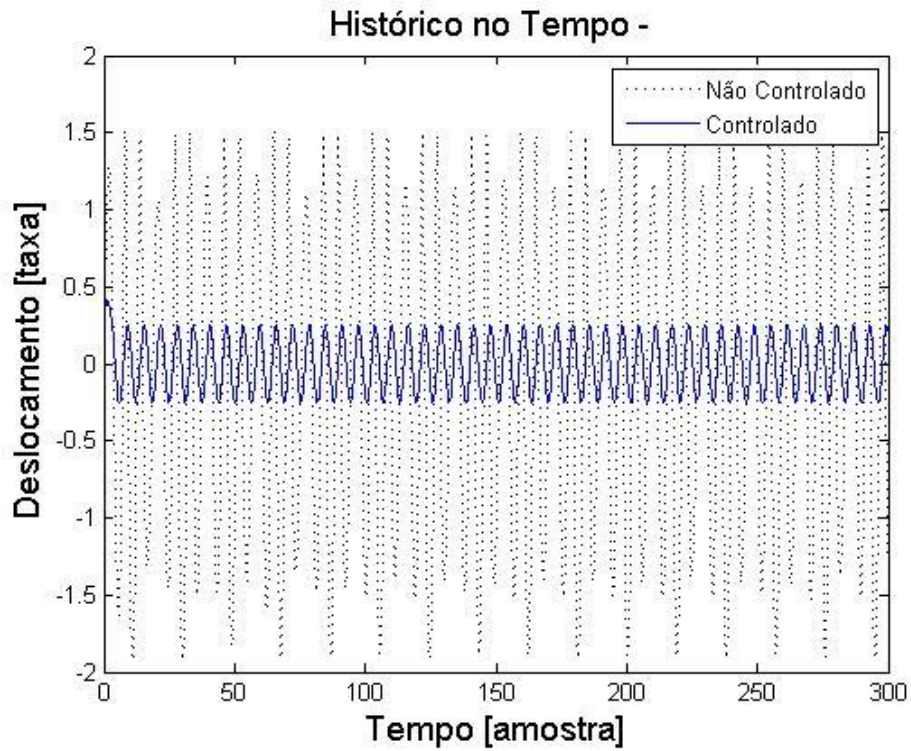


Fonte: Próprio Autor.

### 5.2.3 Análise do sistema controlado para $\omega = 0,996$

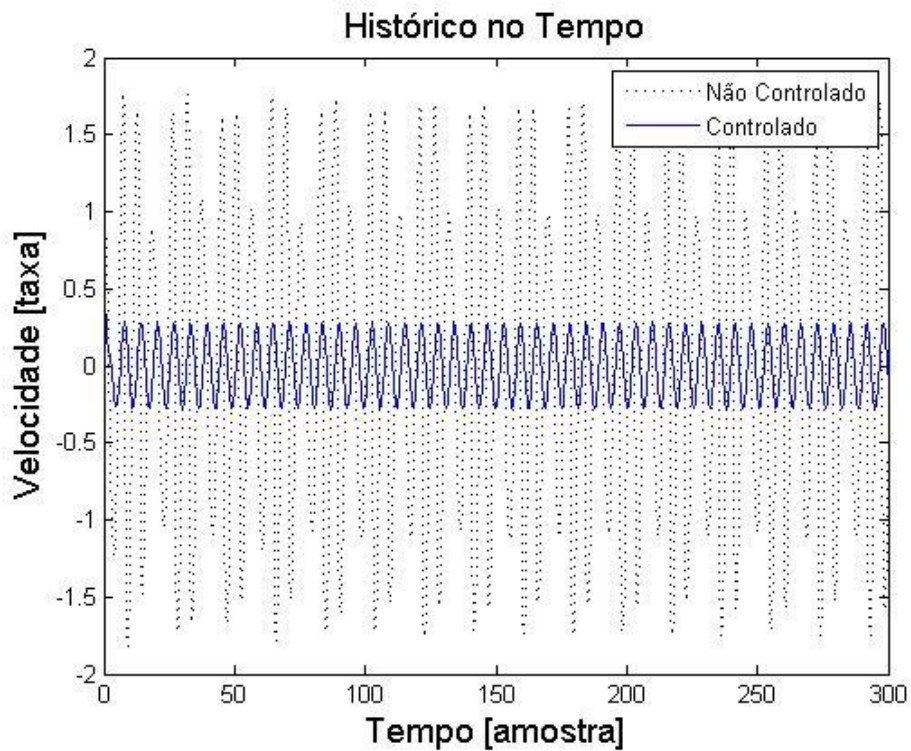
As Figuras 44, 45 e 46 ilustram o comportamento do sistema controlado, através do histórico no tempo (deslocamento e velocidade) e Mapa de Poincaré para uma frequência de  $\omega = 0,996$ .

**Figura 44** - Histórico no tempo do sistema controlado ( $\omega = 0,996$ )



Fonte: Próprio Autor.

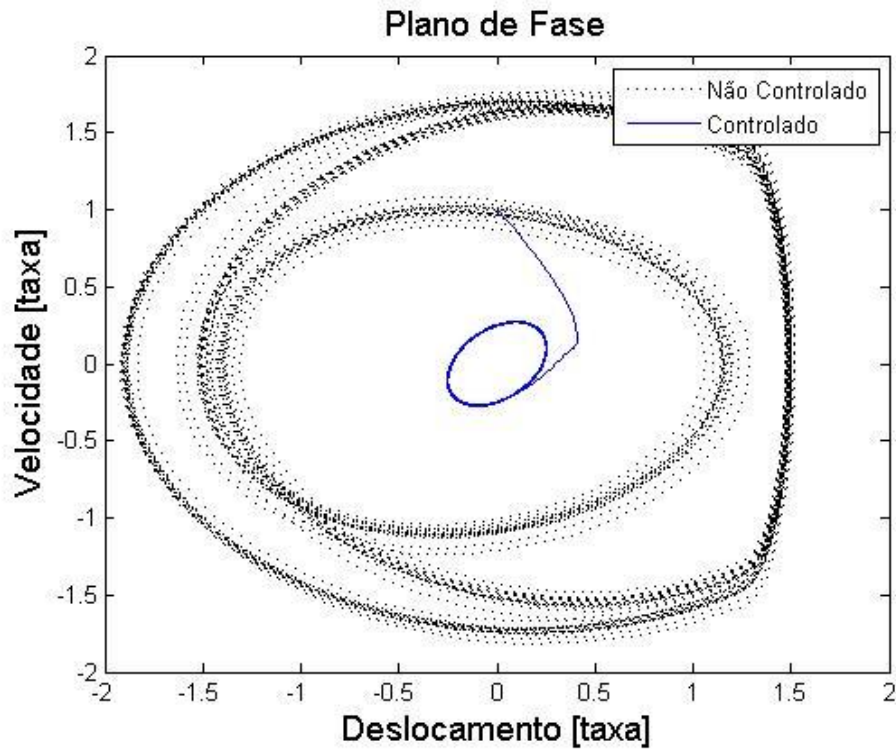
**Figura 45** - Histórico no tempo do sistema controlado ( $\omega = 0,996$ )



Fonte: Próprio Autor.

Nas figuras 44 e 45, é possível observar novamente, que a amplitude teve uma considerável redução, quando comparado com o sistema sem controle, além de sair de três picos distintos de velocidade e deslocamento para apenas um. Portanto é evidenciado um movimento periódico e estável, com somente uma frequência principal dominante.

**Figura 46 - Plano de fases para o sistema controlado ( $\omega = 0,996$ )**



Fonte: Próprio Autor.

No diagrama da figura 46, observa-se que as trajetórias que antes tinham três períodos, após a implementação do controle, passam a se apresentar com apenas um período nas trajetórias, continuando a se comportar de forma periódica.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando o comportamento do sistema segundo as condições da tabela 1, observa-se que para as duas primeiras frequências  $\omega = 0,847$  e  $\omega = 0,906$ , a oscilação acontece de forma periódica e estável. Fato comprovado pela existência de apenas uma frequência dominante, representadas no históricos no tempo, planos de fases, espectros de frequências e mapas de Poincaré.

Nas simulações para frequência de  $\omega = 0,996$ , nota-se a ocorrência de três frequências dominantes distintas, mas que, segundo a análise de estabilidade estrutural, neste ponto a estabilidade é assintoticamente estável.

Nas análises dos coeficientes de Lyapunov, observou-se que a variação da velocidade não interfere na variação dos autovalores, pois quando a linearização da equação (30) é feita, a velocidade relativa  $x_2$  deixa de interferir na variação temporal dos expoentes. Os valores de deslocamento e rigidez, interferem pouco nos expoentes, já que estão relacionados aos valores de  $H$  e  $\delta$ , que tendem a 0 ou 1 conforme as condições impostas por  $x$ . O termo correspondente a folga adimensional  $e$ , interfere apenas na condição de impacto do sistema, através da relação com o deslocamento. Finalmente, observou-se através de simulações não apresentadas, que um fator de amortecimento  $\xi$  apresenta considerável influência na variação temporal dos expoentes de Lyapunov, pois é um termo independente no sistema de equações e que interfere diretamente na resposta dinâmica do sistema.

Analisando o sistema como um todo, conclui-se que este tem comportamento periódico e estável segundo as considerações pontuais de estabilidades, mas apresenta indícios de caos segundo as avaliações temporais dos expoentes de Lyapunov.

Para todas as condições iniciais impostas no cálculo dos expoentes de Lyapunov, foi observado a ocorrência de caos no sistema. Portanto, a proposta principal deste trabalho, a partir deste ponto, é inserir um controlador linear ótimo (LQR) no sistema, afim de eliminar as instabilidades e manter a integridade do mecanismo.

O controlador linear ótimo (LQR), se apresentou como boa alternativa de controle do sistema. Após sua implementação, para todas as condições de testadas, houve uma considerável redução na amplitude de resposta da estrutura. Portanto, observa-se que o sistema controlado, em todas as situações, apresenta-se de forma estável, atendendo assim, a proposta de controle do trabalho.

## 6.1 TRABALHOS FUTUROS

Com base nos resultados deste trabalho, afim de dar continuidade nos estudos, propõe-se:

- ✓ Verificar o comportamento do sistema segundo outros parâmetros como, por exemplo, a ação das forças de impacto sobre a dinâmica do sistema e a influência do atrito dos componentes impactantes sobre o sistema;
- ✓ Verificar o desempenho de outros controladores, quando comparados ao LQR;
- ✓ Implementar uma bancada experimental, possibilitando a comparação do comportamento dinâmico do sistema com o modelo numérico apresentado neste estudo.

## REFERÊNCIAS

- AGUIAR, R. R. **Desenvolvimento de um dispositivo gerador de vibro-impacto**. 2006. 146 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica.- PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 2006.
- BELLMAN, R. **Dynamic programming**. New Jersey: Princeton, 1957. p 767-769.
- BENEVELI, S. M.Á. **Atenuação de vibrações em edifícios**. 2002. 96 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica- PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2002.
- BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2005. 606 p.
- BRYSON, A. E, Ho, Y. **Applied optimal control**. Washington: Hemisphere, 1975. 481 p.
- CASTRUCCI, P. L.; BITTAR, A.; SALES, R.M. **Controle automático**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos- LTC, 2011. 476 p.
- CATÁLOGO CR EQUIPAMENTOS. **Compactadores de percussão**. [S.l.: s.n., 200-]. Disponível em: <[http://www.crcompressores.com.br/produtos.php?opc=3&subcateg=89&friurl=Compactadores-de-Percussao-\(Sapo\)](http://www.crcompressores.com.br/produtos.php?opc=3&subcateg=89&friurl=Compactadores-de-Percussao-(Sapo))>. Acesso em: 23 nov 2016.
- CATÁLOGO FERRAMENTAS BOSCH. **Martelos demolidores**. [S.l.: s.n., 200-]. Disponível em: <<http://ferramentabosch.com/bosch/index.php/martelos-bosch.html>>. Acesso em: 23 nov 2016.
- CHAVARETTE, F. R., BALTHAZAR, J. M., PERUZZI, N. J., RAFIKOV, M. On non-linear dynamics and control designs applied to the ideal and non-ideal variants of the Fitzhugh-Nagumo (FN) mathematical model. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Amsterdam, v. 14, n. 3, p. 892-905, 2009a.
- CHAVARETTE, F. R., BALTHAZAR, J. M., FELIX, J. L. P., RAFIKOV, M. A reducing of a chaotic movement to a periodic orbit, of a micro-electro-mechanical system, by using an optimal linear control design. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Amsterdam, v. 14, n. 5, p. 1844-1853, 2009b.
- CHAVARETTE, F. R. **Dinâmica e controle não lineares de um sistema neuronal ideal e não ideal**. 2005. 178 f. Tese (Doutorado)- Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.
- FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. **Caos uma introdução**. [S.l.]: Edgard Blucher, 1994. 402 p.
- GALP ENERGIA. **Perfuração**. [S.l.: s.n., 200-]. Disponível em: <<http://www.galpenergia.com/PT/agalpenergia/os-nossos-negocios/Exploracao->

Producao/fundamentos-engenharia-petroleo/Paginas/Perfuracao.aspx>. Acesso em: 23 nov 2016.

HOLMES, P. J. The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table. **Journal of Sound and Vibration**, Londres, v. 84, n. 2, p. 129-155, 1982.

ING, J. et al. Experimental study of impact oscillator with one-sided elastic constraint. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, Londres, v. 366, n. 1866, p. 679-705, 2008.

KAPITANIAK, T. **Chaotic oscillations in mechanical systems**. [S.l.]: Manchester University Press, 1991. 220 p.

MARIANO, S. L. **Análise numérica e experimental do índice de vibro-impacto em alavancas de transmissão mecânica**. 2005. 109 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 2005.

MORAES, F. H. **Comportamento dinâmico não-linear de um sistema mecânico com vibrações associadas a uma transição brusca na rigidez**. 2012. 104 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista- UNESP, Bauru, 2012.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. São Paulo: Livraria da Física, 2011. 670 p.

NADAI, S. M. **Sobre a existência e a estabilidade de movimentos periódicos em sistemas com vibro-impacto com folga simétrica**. 2010. 97 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2010.

NAGLE, R. KENT; SAFF, EDWARD B; SNIDER, ARTHUR DAVID. **Equações diferenciais**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. 592 p.

OTT, E.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. Controlling chaos. **Physical Review Letters**, Maryland, v. 64, n. 11, p. 1196 - 1199, 1990.

PAVLOVSKAIA, E.; HENDRY, D.; WIERCIGROCH, M. Modelling of high frequency vibro-impact drilling. **International Journal of Mechanical Sciences**, Kidlington, v. 91, p. 110-119, 2015. Disponível em: <<http://sciencedirect.com/science/article/pii/S002074031300221X>>. Acesso em: 20 de nov de 2016.

PETERKA, F.; VACIK, J. Transition to chaotic motion in mechanical systems with impacts. **Journal of Sound and Vibration**, Londres, v. 154, n. 1, p. 95-115, 1992.

PETERKA, F. Vibro-impact systems. In: BRAUN, S. G.; EWINS, D. J.; RAO, S. S. **Encyclopedia of vibration**. London: Academic Press, 2001. p. 1531-1548.

RAFIKOV, M.; BALTHAZAR, J. M. On an optimal control design for Rössler system. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 333, n. 3, p. 241-245, 2004.

SAVI, M. **Dinâmica não-linear e caos**. Rio de Janeiro: E-PAPERS, 2006. ISBN 9788576500629. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=AIKljK9zz0oC>>. Acessado em: 7 out 2016.

SINHA, S. C.; HENRICH, J. T.; RAVINDRA, B. A general approach in the design of active controllers for nonlinear systems exhibiting chaos. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Singapura, v. 10, n. 1, p. 165-178, 2000.

SOUZA, S. L. T.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.; BALTHAZAR, J. M. Control and chaos for vibro-impact and Non-ideal oscillators. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, Warszawa, v. 46, n. 3, p. 641-664, 2008.

VILLATE, J. E. **Introdução aos sistemas dinâmicos**. [S.l.: s.n.], 2007. 221 p. ISBN 9729939608.

VINCENT, T. L.; YU, J. Control of a chaotic system. **Journal Dynamics and Control**, New York, v. 1, n. 1, p. 35-52, 1991.

WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining lyapunov exponents from a time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Washington, v. 16, n. 3, p. 85-317, 1985.

ZERWES, M. L. **Existência e estabilidade de movimentos periódicos em sistemas com vibro-impacto com dois graus de liberdade**. 2012. 67 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2012.